Библиотека
инженера-
гидроакустика

А. К. НОВИКОВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ В СУДОВОЙ АКУСТИКЕ

ЛЕНИНГРАД · «СУДОСТРОЕНИЕ» · 1985

ББК 32.875
Н73
УДК [534.65534.2] : 519.2

СЕРИЯ «БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА»

Редакционная коллегия:

В. И. Бабий, А. П. Евтютов, А. Е. Колесников, Е. А. Корепин, А. П. Ляликов, В. Ф. Мартынюк, В. В. Ольшевский, Л. В. Орлов, А. Л. Простаков, В. А. Сапрыкин, Г. М. Свердлин, А. Д. Старков, Ю. Ф. Тарасюк (ответственный редактор), В. И. Тимошенко

Рецензент — д-р техн. наук **А. Е. Колесников**

А. К. Новиков

Н73 Статистические измерения в судовой акустике.— Л.: Судостроение, 1985.— 272 с., ил. — (Библиотека инженера — гидроакустика).

ИСБН

Представлены вероятностные методы исследований акустических процессов и полей на основе моделей стационарных и нестационарных, гауссовских и негауссовских процессов, изотропных и анизотропных однородных полей с целью выявления источников излучения, определения их вкладов, выявления путей распространения колебаний, разделения процессов и полей различной физической природы. Даны принципы построения, схемы, погрешности измерений и основные характеристики приборов для измерений статистических характеристик процессов и полей.

Книга предназначена для специалистов-акустиков, а также для специалистов, работающих в смежных областях науки и техники.

Н $\frac{3605030000-012}{048(01)-85}$ 39—85 32.875

© Издательство «Судостроение», 1985 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРИКЛАДНУЮ ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

1.1. Вероятностные характеристики случайных величин 8
1.2. Вероятностные характеристики и классификация случайных процессов 10
1.3. Стационарные гауссовские и негауссовские процессы 14
1.4. Свойства корреляционных функций и спектров стационарных случайных процессов 17
1.5. Примеры корреляционных функций шумов и периодических процессов 23
1.6. Характеристики связи двух случайных процессов 30
1.7. Когерентность и коррелированность процессов 34
1.8. Характеристики нестационарных гауссовских и негауссовских процессов 39
1.9. Вероятностные характеристики акустических полей 43

Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ НЕГАУССОВСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Модели физических процессов 46
2.2. Методы представления частотных свойств статистических характеристик случайных процессов 48
2.3. Нелинейное преобразование стационарного гауссовского шума 50
2.4. Элементарные квазидетерминированные процессы 52
2.5. Мультипликативные процессы 57
2.6. Аддитивные процессы 64
2.7. Импульсные случайные процессы 66
2.8. Сложные аддитивно-мультипликативные процессы 72
2.9. Классификация процессов по статистическим характеристикам и их частотной зависимости 74

Глава 3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

3.1. Проблемы исследований процессов и полей вероятностными методами 77
3.2. Методы формирования ансамбля реализаций 79
3.3. Выбор метода анализа и класса модели процесса соответственно цели исследований 82
3.4. Погрешности определения характеристик стационарных процессов по одной реализации 87
3.5. Определение характеристик нестационарных процессов по одной реализации 91

3.6. Определение характеристик процесса по ансамблю реализаций . . . 94
3.7. Цифровые методы обработки сигналов при статистических измерениях 96

Глава 4. ***ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ***

4.1. Проблемы кумулянтного представления случайных процессов 101
4.2. Свойства одномерного распределения 104
4.3. Погрешности измерений плотности вероятностей и ее моментов . . . 106
4.4. Методы и средства измерений функций распределения вероятностей 113
4.5. Методы измерений дисперсии и моментов высших порядков 118
4.6. Некоторые применения измерений моментов и функций распределения вероятностей при исследовании шумов и вибраций 124

Глава 5. ***ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ПРОЦЕССОВ***

5.1. Методы измерений энергетических спектров случайных процессов и их погрешности 127
5.2. Определение энергетического спектра стационарного процесса методом преобразования Фурье корреляционной функции 131
5.3. Случайные и систематические погрешности измерений сплошного и смешанного спектров 134
5.4. Вероятностные характеристики погрешностей измерений сплошного и смешанного спектров 138
5.5. Особенности цифровых методов спектрального анализа 141
5.6. Измерения спектров нестационарных процессов 147
5.7. Анализаторы спектров и их характеристики 152
5.8. Выбор параметров анализаторов при спектральном анализе процессов 158
5.9. Спектральный анализ при частотных преобразованиях процессов . . . 163
5.10. Вклад источника в суммарный спектр множества источников 167

Глава 6. ***КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И ИЗМЕРЕНИЯ ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ***

6.1. Погрешности и параметры аппаратурного корреляционного анализа . 172
6.2. Погрешности и параметры измерений взаимных спектров 180
6.3. Методы и приборы для измерений взаимных спектров 191
6.4. Аналоговые корреляторы и методы повышения их быстродействия 197
6.5. Полярные корреляторы 200
6.6. Дискретные корреляторы и корреляционный анализ на ЭВМ 206

Глава 7. ***КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОВ***

7.1. Разделение процессов различной физической природы 209
7.2. Корреляционные методы измерения коэффициентов звукоизоляции, отражения и звукопоглощения 214
7.3. Временное разделение сигналов путем измерения взаимных спектров 221
7.4. Исследования распространения изгибных колебаний 223
7.5. Измерения характеристик вибрационных полей в инженерных конструкциях 230
7.6. Определение вклада источника в суммарный шум 233

Глава 8. ***СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ОГИБАЮЩЕЙ ПРОЦЕССА***

8.1. Модели процессов с модуляцией амплитуды и частоты 241
8.2. Модуляционные эффекты аддитивных процессов 245

8.3. Методы измерений коэффициентов модуляции 248
8.4. Определение вклада источника методом измерений модуляционных характеристик 252
8.5. Определение вклада источника методом периодического ударного возбуждения 255

Глава 9. ***МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ИХ ИСТОЧНИКОВ***

9.1. Корреляционные методы оценки эффективности акустического излучения 257
9.2. Применение направленных антенн для исследований полей и источников излучения 263
9.3. Метод синтезированной апертуры для определения координат источников излучения 266

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ 269

3.6. Определение характеристик процесса по ансамблю реализаций . . . 94
3.7. Цифровые методы обработки сигналов при статистических измерениях 96

Глава 4. ***ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ***

4.1. Проблемы кумулянтного представления случайных процессов 101
4.2. Свойства одномерного распределения 104
4.3. Погрешности измерений плотности вероятностей и ее моментов . . . 106
4.4. Методы и средства измерений функций распределения вероятностей 113
4.5. Методы измерений дисперсии и моментов высших порядков 118
4.6. Некоторые применения измерений моментов и функций распределения вероятностей при исследовании шумов и вибраций 124

Глава 5. ***ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ПРОЦЕССОВ***

5.1. Методы измерений энергетических спектров случайных процессов и их погрешности 127
5.2. Определение энергетического спектра стационарного процесса методом преобразования Фурье корреляционной функции 131
5.3. Случайные и систематические погрешности измерений сплошного и смешанного спектров 134
5.4. Вероятностные характеристики погрешностей измерений сплошного и смешанного спектров 138
5.5. Особенности цифровых методов спектрального анализа 141
5.6. Измерения спектров нестационарных процессов 147
5.7. Анализаторы спектров и их характеристики 152
5.8. Выбор параметров анализаторов при спектральном анализе процессов 158
5.9. Спектральный анализ при частотных преобразованиях процессов . . . 163
5.10. Вклад источника в суммарный спектр множества источников 167

Глава 6. ***КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И ИЗМЕРЕНИЯ ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ***

6.1. Погрешности и параметры аппаратурного корреляционного анализа . 172
6.2. Погрешности и параметры измерений взаимных спектров 180
6.3. Методы и приборы для измерений взаимных спектров 191
6.4. Аналоговые корреляторы и методы повышения их быстродействия 197
6.5. Полярные корреляторы 200
6.6. Дискретные корреляторы и корреляционный анализ на ЭВМ 206

Глава 7. ***КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОВ***

7.1. Разделение процессов различной физической природы 209
7.2. Корреляционные методы измерения коэффициентов звукоизоляции, отражения и звукопоглощения 214
7.3. Временное разделение сигналов путем измерения взаимных спектров 221
7.4. Исследования распространения изгибных колебаний 223
7.5. Измерения характеристик вибрационных полей в инженерных конструкциях 230
7.6. Определение вклада источника в суммарный шум 233

Глава 8. ***СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ОГИБАЮЩЕЙ ПРОЦЕССА***

8.1. Модели процессов с модуляцией амплитуды и частоты 241
8.2. Модуляционные эффекты аддитивных процессов 245

8.3. Методы измерений коэффициентов модуляции 248
8.4. Определение вклада источника методом измерений модуляционных характеристик 252
8.5. Определение вклада источника методом периодического ударного возбуждения 255

Глава 9. ***МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ИХ ИСТОЧНИКОВ***

9.1. Корреляционные методы оценки эффективности акустического излучения 257
9.2. Применение направленных антенн для исследований полей и источников излучения 263
9.3. Метод синтезированной апертуры для определения координат источников излучения 266

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ 269

ПРЕДИСЛОВИЕ

В практику современных акустических исследований прочно вошли измерения статистических характеристик процессов и полей. Научной основой таких измерений является теория случайных функций, их методология разрабатывается в рамках теории статистических измерений. Поэтому предлагаемая вниманию читателей книга начинается с введения в прикладную теорию случайных функций — процессов и полей, далее рассматриваются их модели, которые играют важную роль при решении практических задач.

Теория статистических измерений, основанная на применении теории случайных процессов, оперирует с заданным ансамблем реализаций, представляющим случайный процесс определенного класса. Между тем экспериментатор имеет дело с физическим явлением, реальным процессом, который надлежит исследовать вероятностными методами и возникает естественный вопрос — как же получить ансамбль реализаций, какими правилами руководствоваться и к каким последствиям приведут различные методы синтеза ансамбля реализаций. Эти ключевые вопросы, которые должны связать теорию с экспериментом не исследовались, оставались за рамками теории статистических измерений.

В книге делается попытка восполнить имеющийся пробел. Предлагается рассматривать методологию статистических измерений, включая задачу синтеза ансамбля реализаций (см. гл. 3). Показано, что класс случайной функции, представляемой совокупностью реализаций, определяется как свойствами исследуемого физического процесса, так и способом формирования ансамбля реализаций. Последнее, с одной стороны, расширяет возможности исследований реальных физических процессов вероятностными методами, а с другой — ставит новые вопросы. Например, как классифицировать реальные физические процессы, если неоднозначна их вероятностная модель? Автор надеется, что исследователи проявят интерес к поднятой проблеме и внесут свой вклад в ее развитие.

В книге излагаются методы измерений статистических характеристик стационарных и нестационарных процессов,

гауссовских и негауссовских шумов, однородных и неоднородных акустических полей. Здесь в отличие от имеющихся монографий по статистическим измерениям [7, 30, 39, 58, 71], изложение материала не ограничивается рассмотрением принципов построения статистических анализаторов, методов измерений и их погрешностей. В каждой главе анализируются возможности применения результатов измерений конкретной статистической характеристики для выявления свойств исследуемой системы, процесса, поля. Общей проблемой прикладного характера, связывающей и объединяющей выходные результаты последних глав книги, является развитие таких методов измерений и исследований, которые позволяют разделить процесс или акустическое поле на составляющие различной физической природы, отличающиеся теми или иными частотными или временными характеристиками, различным запаздыванием либо различными источниками. Представление в книге результатов исследований процессов, полей и систем вероятностными методами в достаточно широком аспекте стало возможным вследствие ограничения области их применения судовой акустикой.

Книга написана на основе обобщения результатов ряда исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, а также оригинальных результатов, полученных автором. Книга рассчитана на специалистов, работающих в различных областях судовой акустики, а также будет полезна специалистам, ведущим исследования случайных процессов и полей в других областях науки и техники, таких, как транспорт, связь, измерительная техника, техническая диагностика и т. п.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРИКЛАДНУЮ ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

1.1. Вероятностные характеристики случайных величин

Теория случайных процессов является разделом чисто математической науки — теории вероятностей. Простейшим понятием теории вероятностей является случайная величина — вероятностная модель, позволяющая количественно охарактеризовать результаты многократно повторяемого опыта. Случайная величина полностью определяется функцией распределения вероятностей $F_\xi(x)$, представляющей вероятность того, что значения случайной величины ξ не превосходят заданный уровень x,

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leqslant x\} \tag{1.1}$$

или плотностью распределения вероятностей (плотностью вероятности)

$$w(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x} \approx \frac{F_\xi(x + \Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Плотность вероятности не отрицательна, $w(x) \geqslant 0$ и обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = P\{-\infty < x < \infty\} = 1$ как вероятность достоверного события.

Отдельные свойства случайной величины могут характеризоваться начальными моментами k-го порядка, которые обозначим $M_\xi^{(k)}$ или M_k:

$$M_\xi^{(k)} = M\{\xi^k\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k w(x)\,dx \tag{1.3}$$

или центральными моментами

$$\mu_k = \mu_\xi^{(k)} = M\{\overset{\circ}{\xi}{}^k\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M_\xi)^k w(x)\,dx, \tag{1.4}$$

где $M\{\ldots\}$ — оператор математического ожидания; $\overset{0}{\xi} = \xi - M_\xi$ — центрированная случайная величина; $M_\xi = M_\xi^{(1)} = M_1$.

Чаще всего определяются следующие числовые характеристики, являющиеся, как правило, наиболее информативными: $M_1 = M_\xi$ — среднее значение случайной величины (даны два способа ее обозначения) и $\sigma_\xi^2 = \mu_\xi^{(2)} = \mu_2$ — дисперсия.

Совместные свойства двух случайных величин ξ и η характеризуются двумерной функцией распределения вероятностей

$$F_2(x, y) = P\{\xi \leqslant x;\ \eta \leqslant y\} \tag{1.5}$$

или двумерной плотностью распределения вероятностей

$$w_2(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x;\ y < \eta < y + \Delta y\}}{\Delta x\, \Delta y}. \tag{1.6}$$

Каждая из случайных величин системы характеризуется одномерными плотностями распределения вероятностей $w_1(x)$ и $w_1(y)$ и соответствующими числовыми характеристиками. Кроме того, двумерный закон распределения характеризуется смешанными двумерными моментами порядка k:

начальными

$$M_{pq} = M_{\xi\eta}^{(pq)} = M\{\xi^p \eta^q\}, \quad k = p + q \tag{1.7}$$

и центральными

$$\mu_{pq} = \mu_{\xi\eta}^{(pq)} = M\left\{\overset{\circ}{\xi}{}^p \overset{\circ}{\eta}{}^q\right\}, \quad k = p + q. \tag{1.8}$$

Мерой линейной статистической связи двух случайных величин является коэффициент корреляции (нормированный смешанный момент второго порядка)

$$r_{\xi\eta}^{(1)} = r_{\xi\eta} = \frac{M\{\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\eta}\}}{\sqrt{\mu_\xi^{(2)} \mu_\eta^{(2)}}}. \tag{1.9}$$

Для линейно связанных величин, когда $\xi = a\eta + b$, имеем $r_{\xi\eta} = 1$ при нелинейной зависимости величин $\tau_{\xi\eta} = 0$, в общем случае $-1 < r_{\xi\eta} < 1$.

В случае нелинейной зависимости между случайными величинами коэффициент корреляции утрачивает смысл меры зависимости величин, наличие статистической связи определяется смешанными моментами более высоких порядков, в общем случае — условными функциями распределения вероятностей [40].

Свойства n случайных величин определяются n-мерной функцией распределения вероятностей и n-мерными числовыми характеристиками соответствующих порядков [36].

Вероятностные характеристики и классификация случайных процессов

Обобщение понятия случайной величины представляет собой случайную функцию — математический образ случайного физического явления, изменяющегося во времени или пространстве. Случайные функции, аргументами которых служит время, называются случайными процессами.

Случайный процесс $\xi(t)$ представляется множеством определенных функций $\xi_i(t)$ — результатов опыта, называемых реализациями случайного процесса, вид которых невозможно предсказать заранее. Таким образом, ансамбль, состоящий из бесконечного множества реализаций, и является вероятностной моделью случайного физического процесса.

Если зафиксировать значение аргумента $t=t_1$, то множество случайных значений $\xi(t)$ будет представлять случайную величину $\xi(t_1)$, называемую сечением случайной функции, которая, как было отмечено выше, полностью характеризуется функцией распределения вероятностей.

Изменяя аргумент t, можно в общем случае выявить зависимость от времени плотности вероятности $w(x, t)$, а также начальных $M_k(t)$ или центральных $\mu_k(t)$ моментов.

Одномерная функция распределения вероятностей и ее численные характеристики определяют свойства лишь отдельных сечений в отдельные моменты времени, являясь как бы расширенным понятием амплитуды. Динамика процесса, т. е. связь между его отдельными значениями в вероятностном смысле описывается многомерными функциями распределения вероятностей. Однако задача описания связи значений процесса достаточно хорошо решается рассмотрением лишь двумерных характеристик при различных сочетаниях двух моментов времени: двумерных функций распределения или ряда двумерных корреляционных функций различных порядков, зависящих от двух моментов времени t_1, t_2 а в случае стационарных процессов — лишь от разности моментов времени $\tau=t_2-t_1$. Использование характеристик не выше двумерных чрезвычайно удобно при экспериментальных исследованиях, а также при решении ряда теоретических прикладных задач, так как дает возможность упростить исследования и наглядно представить зависимость заданных характеристик от условий или параметров работы исследуемого устройства. Конечно, многомерная характеристика более информативна, так как содержит информацию, заключенную в распределениях более низкой размерности, а также некоторую дополнительную информацию. Однако эта дополнительная информация для n-мерных ($n>3$) функций мала и недостаточно изучена теоретически.

Исходя из указанных соображений, ограничимся рассмотрением лишь двумерной функции распределения вероятностей. Эта функция описывает вероятность совмещения следущих двух событий: случайная функция при $t=t_1$ находится ниже уровня x_1

и вместе с тем в момент времени $t=t_2$ не превышает уровень x_2:

$$F_2(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)=P\{\xi(t_1)\leqslant x_1,\ \xi(t_2)\leqslant x_2\}. \qquad (1.10)$$

Производная этой функции характеризует двумерную плотность распределения вероятностей

$$w_2(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)=\frac{\partial^2 F_2(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\approx\frac{P\{x_i<\xi(t_1)<x_i+\Delta x\}}{\Delta x_1\,\Delta x_2}. \qquad (1.11)$$

Плотность вероятности удовлетворяет условиям:
положительной определенности

$$w_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\geqslant 0;$$

нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int w_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1\,dx_2\ \ldots,\ dx_n=1; \qquad (1.12)$$

согласованности

$$w_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})=\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_n. \qquad (1.13)$$

Часто применяют характеристическую функцию

$$\theta(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int e^{i(u_1x_1+u_2x_2)}w(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)\,dx_1\,dx_2=$$
$$=M\{e^{i(u_1x_1+u_2x_2)}\}, \qquad (1.14)$$

являющуюся, как видно, преобразованием Фурье от плотности распределения вероятностей. Все три рассмотренные функции несут полную (в рамках двумерного закона) информацию о случайном процессе. Выбор той или иной характеризующей функции при теоретических исследованиях определяется удобствами их применения при решении конкретной задачи.

Для практики важно выбрать такие функции, которые характеризовали бы процесс на уровне информативности двумерного закона, но сами являлись бы одномерными характеристиками. Эта возможность представляется при переходе от рассмотренных выше характеризующих функций к коэффициентам их разложения в ряд [32, 33].

Характеристическая функция представима в виде ряда Маклорена по начальным моментным функциям:

одномерной функции

$$\theta_1(u)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{M_\nu(t)}{\nu!}(iu)^\nu; \qquad (1.15)$$

двумерной функции

$$\theta_2(u_1,\ u_2) = 1 + i\sum_{\mu=1}^{2} M_1(t_\mu)\,u_\mu + \frac{i^2}{2!}\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{2} M_2(t_\mu,\ t_\nu)\,u_\mu u_\nu. \quad (1.16)$$

Центральные моментные функции μ_n аналогичными образом являются коэффициентами разложения в ряд Маклорена характеристической функции центрированного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - M_\xi$.

Логарифм характеристической функции (называемый также кумулянтной функцией) представляется в виде ряда Маклорена по обобщенным корреляционным функциям:
одномерной функции

$$\ln\theta_1(u) = \sum \frac{\varkappa_\nu}{\nu!}(iu)^\nu; \quad (1.17)$$

двумерной функции

$$\ln\theta_2(u_1,\ u_2,\ t_1,\ t_2) = i\sum_{\lambda=1}^{2} K_1(t_\lambda)\,x_\lambda + \frac{i^2}{2}\sum_{\mu=1}^{2} K_2(t_\lambda,\ t_\mu)\,x_\lambda x_\mu +$$
$$+ \frac{i^3}{3!}K_3(t_\lambda,\ t_\mu,\ t_\nu)\,x_\lambda x_\mu x_\nu + \ldots \quad (1.18)$$

Плотность вероятности представляется в виде ряда по многомерным полиномам Чебышева—Эрмита с коэффициентами, образованными из квазимоментных функций — ряд Эджворта для одномерной плотности распределения вероятностей;

$$w_1(x) = w_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{b_n}{\sigma_0^n}H_n\left(\frac{x-M_1}{\sigma_0}\right), \quad (1.19)$$

где $w_0(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\sigma_0\right)\exp\left\{-(x-M_1)^2/2\sigma_0^2\right\}$ — функция, представляющая плотность вероятности гауссовского случайного процесса.

Наилучшее приближение дает ряд Эджворта в случае одновершинных функций плотности распределения вероятностей, если в качестве σ_0 и M_1 выбраны среднее значение и дисперсия исследуемого процесса. При этом $b_0 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$. Ряд Эджворта для этих условий записывается в виде

$$w_1(x) = \frac{1}{\sigma_\xi}\left[\varphi\left(\frac{x-M_\xi}{\sigma_\xi}\right) - \frac{\varkappa_3}{3!}\varphi^{(3)}\left(\frac{x-M_\xi}{\sigma_\xi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa_4}{4!}\varphi^{(4)}\left(\frac{x-M_\xi}{\sigma_\xi}\right) + \ldots\right], \quad (1.20)$$

где $\varphi(z) = \Phi'(z) = (1/2\pi)\exp(-x^2/2)$; $\varkappa_3 = \mu_3/\sqrt{\mu_2^3}$ — коэффициент асимметрии; $\varkappa_4 = (\mu_4/\sigma_2^2) - 3$ — коэффициент эксцесса.

При представлении характеризующих вероятностных функций в виде рядов возникают теоретические и практические проблемы, некоторые из них будут рассмотрены в гл. 4. Важно отметить следующее: бесконечная последовательность начальных или центральных моментных функций, обобщенных корреляционных или квазимоментных функций возрастающих порядков дает полную вероятностную характеристику случайного процесса, эквивалентную по информативности функции распределения, плотности вероятности или характеристической функции [38, 70], причем информативность моментных или корреляционных функций с повышением их порядка в среднем убывает. Это открывает возможность во многих случаях ограничиться исследованием моментных или корреляционных функций низших порядков. Из всех рассмотренных наиболее удобны обобщенные корреляционные функции (в одномерном случае — кумулянты) в силу их взаимной независимости. Начальные и центральные моментные функции менее удобны, так как их функции высших порядков зависят от функций низших порядков. Однако все эти функции, являясь различными способами представления одной и той же информации о случайном процессе, связаны друг с другом и знание одной системы функций позволяет в принципе перейти к любой другой системе функций [6, 32, 33].

Ниже будем рассматривать преимущественно обобщенные корреляционные функции.

По свойствам своих вероятностных характеристик случайные процессы разделяют на классы. В частности, по зависимости вероятностных характеристик от времени различают процессы:

— стационарные в широком смысле (все их вероятностные характеристики не зависят от времени);

— стационарные в узком смысле (их моментные функции до второго порядка включительно не зависят от времени);

— нестационарные по одной или нескольким вероятностным характеристикам (нестационарные по среднему значению, дисперсии и т. п.);

— нестационарные в общем случае.

По виду закона распределения вероятностей различают гауссовские (нормальные) и негауссовские (не являющиеся нормальными) процессы.

Кроме того, по зависимости значений процесса от предшествующих значений различают процессы марковские и немарковские [36]; по виду изменения значения процесса — непрерывные и дискретные; по характеру изменения значений процесса — флюктуационные и импульсные. Классификация по каждому из признаков производится независимо.

1.3. Стационарные гауссовские и негауссовские процессы

Стационарные случайные процессы, представленные ансамблем однородных реализаций, являются эргодическими, т. е. статистические характеристики таких процессов, вычисленные путем усреднения по множеству реализаций с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равны аналогичным величинам, найденным по одной реализации путем усреднения по времени. Одномерные числовые характеристики стационарного процесса по определению являются постоянными числами: математическое ожидание при усреднении по множеству

$$M\{\xi(t)\} = \langle \xi(t) \rangle = M_\xi = \text{const}, \tag{1.21}$$

при усреднении по времени по одной реализации

$$\overline{\xi_i(t)} = \overline{\xi(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi_i(t)\, dt, \tag{1.22}$$

где $\langle \ldots \rangle$ — знак усреднения по множеству, черта сверху означает усреднение по времени.

Представляя каждую реализацию $\xi_i(t)$ в виде суммы $\xi_i(t) = \overline{\xi_i} + \overset{0}{\xi}_i(t)$, где $\overset{0}{\xi}_i(t)$ — центрированный процесс, убеждаемся, что для ансамбля однородных реализаций, когда $\overline{\xi_i}$ не зависит от номера реализации i, имеем $\langle \xi(t) \rangle = \overline{\xi(t)}$, т. е. процесс является эргодическим по отношению к среднему значению.

Дисперсия процесса при усреднении по ансамблю

$$\sigma_\xi^2 = M\{[\xi(t) - M_\xi]^2\} = \langle \xi^2(t) \rangle - M_\xi^2, \tag{1.23}$$

при усреднении по времени

$$\sigma_{\xi_i}^2 = \overline{[\xi(t) - \overline{\xi_i}]^2} = \overline{\xi_i^2(t)} - \overline{\xi_i}^2. \tag{1.24}$$

Для ансамбля однородных реализаций $\overline{\xi_i} = \overline{\xi} = M_\xi$, а также $\overline{\xi_i^2(t)} = \overline{\xi^2(t)}$, поэтому $\sigma_{\xi_i}^2 = \sigma_\xi^2$. Таким образом, условия стационарности процесса и однородности его реализаций приводят к свойству эргодичности процесса, т. е. эквивалентности усреднения по множеству и по времени. Последнее весьма ценно для практики, так как позволяет определять все необходимые характеристики случайного процесса по единственной его реализации. В частности, плотность вероятности определяется как предел вероятности пребывания значений реализации процесса в пределах $(x, x + \Delta x)$, т. е.

$$w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} P\{x < \xi(t) < x + \Delta x\}.$$

Характеристикой связи двух значений стационарного процесса является корреляционная функция (центральная моментная

функция второго порядка), зависящая лишь от разности моментов времени τ, которую также находят путем усреднения по времени:

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \bar{\xi}][\xi(t+\tau) - \bar{\xi}]\, dt = \overline{\overset{\circ}{\xi}(t)\, \overset{\circ}{\xi}(t+\tau)} \quad (1.25)$$

Степень статистической связи двух значений процесса определяется нормированной корреляционной функцией

$$r(\tau) = R(\tau)/\sigma_\xi^2. \quad (1.26)$$

Простейшим классом случайных процессов являются гауссовские (нормальные) процессы:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} e^{-\frac{(x - M_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}}, \quad (1.27)$$

плотность вероятности которых определяется функцией Гаусса.

Полная вероятностная характеристика гауссовского процесса определяется математическим ожиданием M_ξ, дисперсией σ_ξ^2 и нормированной функцией корреляции $r_\xi(\tau)$, которые в случае стационарного процесса не зависят от времени. Все корреляционные функции высших порядков для гауссовского процесса равны нулю. Центральные нечетные моменты и моментные функции равны нулю, а четные моменты гауссовского процесса выражаются через дисперсию σ_ξ^2 процесса:

$$\mu_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)\, \sigma_\xi^n. \quad (1.28)$$

Четные центральные моментные функции определяются через дисперсию процесса σ^2 и нормированную корреляционную функцию второго порядка $r(\tau) = R(\tau)/\sigma^2$, взятую в соответствующей степени. Начальные моменты выражаются через среднее значение и дисперсию следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= \sigma^2 + M_1^2; \\ M_3 &= M_1(3\sigma^2 + M_1^2); \\ M_4 &= 3\sigma^4 + M_1^2(6\sigma^2 + M_1^2); \\ M_5 &= M_1(15\sigma^4 + 10\sigma^2 M_1^2 + M_1^4); \\ M_6 &= 15\sigma^6 + M_1^2(45\sigma^4 + 15\sigma^2 M_1^2 + M_1^4) \end{aligned}\right\} \quad (1.29)$$

и т. д.

Из свойства согласованности функций распределения (1.13) следует, что гауссовский характер закона распределения высшего порядка определяется гауссовским характером одномерного закона. Иначе говоря, для доказательства гауссовского процесса достаточно исследовать одномерный закон распределения вероятностей.

Из свойств гауссовской кривой известно, что вероятность нахождения случайной величины в интервале $\pm\sigma$ составляет 0,68, а в интервале $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$ равна соответственно 0,95 и 0,997. Поэтому считают, что практически нормальная случайная величина заключена в пределах $\pm 2\sigma$ (с вероятностью 0,95, достаточной для многих практических задач).

Если процесс стационарен, но не является гауссовским, то необходимо определять корреляционные функции высших порядков K_{pq} (или кумулянты $\varkappa_n$ в одномерном случае), представленные в табл. 1.1. Как видно, корреляционные функции до 3-го порядка

Таблица 1.1

Связь кумулянтов $\varkappa_k$ и двумерных корреляционных функций K_{pq} порядка $k=p+q$ с центральными моментами μ_k и моментными функциями $\mu_{pq}(t)$ высших порядков, $\mu_{pq}=\mu_{pq}(t_1, t_2)=\langle \overset{\circ}{\xi}{}^p(t_1)\overset{\circ}{\eta}{}^q(t_2)\rangle$

k	$\varkappa_k$	K_{pq}
1	M_1	$K_{10}=M_1$
2	μ_2	$K_{11}=\mu_{11}$
3	μ_3	$K_{21}=\mu_{21}$; $K_{12}=\mu_{12}$
4	$\mu_4-3\mu_2^2$	$K_{31}=\mu_{31}-3\mu_{20}\mu_{11}$;
		$K_{22}=\mu_{22}-\mu_{20}\mu_{02}-2\mu_{11}^2$
5	$\mu_5-10\mu_3\mu_2$	$K_{41}=\mu_{41}-3\mu_{30}\mu_{11}-6\mu_{21}\mu_{20}$;
		$K_{32}=\mu_{32}-\mu_{30}\mu_{02}-6\mu_{21}\mu_{11}-3\mu_{20}\mu_{12}$
6	$\mu_6-15\mu_4\mu_2-$	$K_{51}=\mu_{51}-5\mu_{40}\mu_{11}-10\mu_{31}\mu_{20}-10\mu_{30}\mu_{21}+$
	$-10\mu_3^2+30\mu_2^3$	$+30\mu_{20}^3-\mu_{11}^3$
		$K_{42}=\mu_{42}-\mu_{40}\mu_{02}-8\mu_{31}\mu_{11}-4\mu_{30}\mu_{12}-6\mu_{22}\mu_{20}-$
		$-6\mu_{21}^2+6\mu_{20}^2\mu_{02}+24\mu_{20}\mu_{11}^2$;
		$K_{33}=\mu_{33}-3\mu_{31}\mu_{02}-\mu_{30}\mu_{03}-9\mu_{22}\mu_{11}-9\mu_{21}\mu_{12}-$
		$-3\mu_{20}\mu_{13}+18\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}+12\mu_{11}^3$

включительно совпадают с центральными моментными функциями, а далее отличаются от них. Обратим внимание, что обобщенные корреляционные функции высших порядков строятся по такому принципу, чтобы в корреляционной функции высшего порядка содержалась лишь та дополнительная информация, которая свойственна характеристике высшего порядка и вычиталась бы вся информация, заключенная в корреляционных функциях низшего порядка, что предложено Р. Л. Стратоновичем [6, 70].

1.4. Свойства корреляционных функций и спектров стационарных случайных процессов

Функция корреляции* второго порядка стационарного случайного процесса обладает следующими свойствами.

1. Функция корреляции является четной функцией

$$R(\tau) = R(-\tau), \tag{1.30}$$

так как в силу стационарности $\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = \overline{\xi(t-\tau)\xi(t)}$.

2. Значение $R(0)$ определяет дисперсию процесса, которая в силу стационарности $\xi(t)$ не зависит от времени, т. е.

$$R(0) = \overline{\xi^2(t)} = \overline{\xi^2(t+\tau)}. \tag{1.31}$$

3. Любое значение $R(\tau)$ не может превышать значения этой функции при $\tau = 0$

$$|R(\tau)| \leqslant R(0). \tag{1.32}$$

Действительно, так как среднее значение квадрата любой функции есть величина неотрицательная, то

$$\overline{[\xi(t) + \xi(t+\tau)]^2} = \overline{\xi^2(\tau)} + \overline{\xi^2(t+\tau)} + 2\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = \\ = 2R(0) + 2R(\tau) \geqslant 0,$$

откуда следует (1.32).

4. Для чисто случайного процесса статистические связи между значениями процесса ослабевают при неограниченном увеличении τ, поэтому

$$R(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty. \tag{1.33}$$

Формально это следует из свойства (3) гауссовского стационарного эргодического процесса. Характер убывания функции корреляции может быть различным — монотонным или осциллирующим.

5. Нормированная функция корреляции

$$r(\tau) = R(\tau)/R(0) \tag{1.34}$$

является мерой тесноты линейной статистической связи значений процесса, разделенных интервалом времени τ, и обладает свойствами

$$r(0) = 1; \quad -1 < r(\tau) < 1, \tag{1.35}$$

вытекающими из (1.32) и (1.34).

6. Корреляционная функция суммы (разности) независимых процессов равна сумме (разности) корреляционных функций слагаемых

$$\overline{[\xi(t) + \eta(t)][\xi(t+\tau) + \eta(t+\tau)]} = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} + \\ + \overline{\eta(t)\eta(t+\tau)} = R_\xi(\tau) + R_\eta(\tau), \tag{1.36}$$

---

* ГОСТ 21878—76 не рекомендует употреблять термин «автокорреляционная функция» для этой характеристики.

что следует из свойства некоррелированности независимых процессов: $\overline{\xi(t)\eta(t+\tau)}=0$.

7. Корреляционная функция производной процесса равна взятой с обратным знаком второй производной корреляционной функции исходного процесса:

$$\overline{\xi'(t)\xi'(t+\tau)}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\overline{\frac{\xi(t+\tau)-\xi(t)}{\Delta\tau}\,\frac{\xi(t+\tau)-\xi(t+\tau+\Delta\tau)}{\Delta\tau}}. \quad (1.37)$$

8. Функция корреляции может быть представлена в виде преобразования Фурье от спектральной функции $G(\omega)$, называемой спектральной плотностью мощности или энергетическим спектром (теорема Хинчина—Винера):

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega; \quad (1.38)$$

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \quad (1.39)$$

9. Интервалом или временем корреляции называют такое время τ_0, при превышении которого величины $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$ можно практически считать некоррелированными. Интервал корреляции характеризует эффективную длительность корреляционной функции. В зависимости от конкретного вида задачи применяют одно из следующих определений интервала корреляции:

интегральный интервал корреляции

$$\tau_{0\,(\text{и})}=\int_{-\infty}^{\infty}r(\tau)\,d\tau; \quad (1.40)$$

абсолютный интервал корреляции

$$\tau_{0\,(\text{а})}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|r_\xi(\tau)|\,d\tau=\int_{0}^{\infty}|r_\xi(\tau)|\,d\tau; \quad (1.41)$$

квадратичный интервал корреляции

$$\tau_{0\,(\text{кв})}=\int_{0}^{\infty}r_\xi^2(\tau)\,d\tau; \quad (1.42)$$

интервал корреляции на уровне ε

$$|r_\xi(\tau)|<\varepsilon,\ \text{если}\ \ \tau>\tau_{0\,(\varepsilon)}. \quad (1.43)$$

Выбор того или иного выражения для определения интервала корреляции производится из условия удобства и простоты вычислений.

Определение $\tau_{0\,(\text{и})}$ обычно применяется для широкополосных процессов, обладающих знакопостоянными или слабоосциллирующими функциями корреляции, а остальные определения — как

для широкополосных, так и для узкополосных процессов [см. также (1.60), (1.61)]. Некоторый произвол может быть допущен в выборе величины ε, определяющей интервал корреляции $\tau_{0(\varepsilon)}$. Обычно принимают $\varepsilon = 1/e \approx 0{,}37$, что часто удобно при вычислениях, либо $\varepsilon = 0{,}1$. В дальнейшем, если не требуется указать способ определения, будем обозначать интервал корреляции τ_0.

Интервал корреляции связан с эффективной шириной спектра общим соотношением

$$\Delta f \tau_0 = \eta = \text{const}, \tag{1.44}$$

где часто принимают $\eta = 1$.

Корреляционные функции высших порядков могут быть определены через центральные моментные функции высшего порядка, как показано в табл. 1.1. Корреляционные функции высших порядков обладают следующими свойствами:

— симметрии

$$K_k(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_{n-1}) = K_k(\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_1) = \\ = K_k(\tau_{n-1}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-2});$$

— согласованности

$$K_k(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}) = K_{k+1}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}, 0);$$

— четности

$$K_{pq}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = K_{qp}(\tau, \ldots, \tau_n);$$

— затухания

$$K_{pq}(0) > K_{pq}(\tau).$$

Корреляционные функции любого порядка связаны со спектральными характеристиками соответствующих порядков преобразованиями Фурье:

$$G_k(\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\vec{\tau}} K_k(\vec{\tau})\, d\vec{\tau};$$

$$K_k(\vec{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(\vec{\omega}) e^{-i\omega\vec{\tau}}\, d\vec{\tau}.$$

Используем для корреляционных функций K_{pq} высших порядков буквенные индексы, составленные из обозначений процесса в соответствующих степенях, например $K_{\xi\xi}^{pq} = K_{pq}$ означает корреляционную функцию порядка $k = p + q$, определяющую степень связи между $\xi^p(t)$ и $\xi^q(t+\tau)$. Числовые индексы введем лишь для корреляционных функций и спектров второго порядка для обозначения номеров входов и выходов исследуемой системы $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$, $G_1(\omega)$...

Энергетический спектр второго порядка $G(\omega)$ является важнейшей характеристикой случайного процесса. Прежде всего от-

метим, что функция $G(\omega)$ определена как для положительных, так и для отрицательных частот (ω) и представляет собой четную действительную функцию как преобразование Фурье (1.39) от четной действительной функции $R(\tau)$. Поэтому преобразование Фурье можно записать в действительной форме следующим образом:

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} G(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega; \qquad (1.45)$$

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau=2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \qquad (1.46)$$

Физический смысл имеют лишь положительные частоты, поэтому полезно представить спектральную плотность в виде функции $F(\omega)$, определенной только в области положительных частот,

$$F(\omega)=\begin{cases}2G(\omega), & \omega\geqslant 0;\\ 0, & \omega<0.\end{cases} \qquad (1.47)$$

Тогда преобразования Фурье запишем следующим образом:

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega; \qquad (1.48)$$

$$F(\omega)=4\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \qquad (1.49)$$

Во избежание ошибок рекомендуется при вычислениях, связанных с преобразованиями спектров, пользоваться функцией $G(\omega)$, а затем переходить к $F(\omega)$ по выражению (1.47).

Для выяснения физического смысла функции $F(\omega)$ рассмотрим процесс, энергетический спектр которого равномерен и равен F_0 в полосе $\Delta\omega=2\pi\Delta f$ около центральной частоты $\omega_0=2\pi f_0$ и равен нулю вне этой полосы. Найдем мощность P_0 этого процесса, положив в (1.48) $\tau=0$, откуда

$$P_0=R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\, d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} F_0\, d\omega=F_0\,\Delta f. \qquad (1.50)$$

Видно, что $F(\omega)$ есть мощность процесса в полосе 1 Гц:

$$F_0=\frac{R(0)}{\Delta f}=\frac{\overline{\xi^2(t)}}{\Delta f}.$$

Поэтому $F(\omega)$ и $G(\omega)$ называют спектральной плотностью мощности процесса, используя понятие мощности в обобщенном смысле. В действительности же $F(\omega)$ лишь численно совпадает с мощностью составляющих в полосе 1 Гц, если,

например, процесс представляет собой ток или напряжение в цепи сопротивлением 1 Ом. Размерность величины $F(\omega)$ не совпадает с мощностью, а определяется квадратом исследуемой физической величины, отнесенной к полосе 1 Гц, т. е. размерностью энергии, поэтому $F(\omega)$ называют также энергетическим спектром.

Некоторые авторы относят мощность (обобщенную) не к единичному частотному интервалу Δf, а к единичному интервалу угловой скорости $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$. При этом изменяются числовые коэффициенты в формулах (1.38), (1.39). Например, в работе А. А. Харкевича [68] теорема Хинчина—Винера записана в следующем виде:

$$R(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega; \qquad (1.51)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \qquad (1.52)$$

Из сопоставления (1.48) и (1.51) или из выражения для мощности процесса с равномерным спектром $\Phi(\omega) = \Phi_0$ в полосе $\Delta\omega$ можно получить

$$\Phi_0 = \frac{\overline{\xi^2(t)}}{\Delta\omega} = \frac{F_0}{2\pi},$$

т. е. мощность отнесена к единице угловой скорости (рад/с), но функция $\Phi(\omega)$ определена для всей числовой оси $(-\infty < \omega < \infty)$, поэтому для физических спектров $(\omega \geqslant 0)$ значения $\Phi(\omega)$ должны быть удвоены.

А. Я. Хинчиным доказана теорема [36, 68]: корреляционной функцией какого-либо процесса может быть лишь такая функция, преобразование Фурье от которой приводит к неотрицательной функции. Это ясно из физических соображений, так как $G(\omega)$ определяет собой мощность в полосе $\Delta f = 1$ Гц. Справедливость теоремы следует из свойств спектра свертки. Указанное свойство позволяет оценить энергетическую ширину спектра $G(\omega)$ как ширину эквивалентного по мощности прямоугольного спектра с ординатой, равной максимальному значению спектра $G(\omega_0)$, и эффективной шириной

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \frac{1}{G(\omega_0)}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega. \qquad (1.53)$$

Узкополосные процессы. Процесс называется узкополосным, если его спектр сосредоточен в узкой полосе Δf около центральной частоты $f_0 = (f_1 + f_2)/2$, т. е. $\Delta f < f_0$. Практически узкополосными в статистическом смысле считают шумы, занимающие по-

лосу частот октава $f_2=2f_1$, $\Delta f=0{,}67f_0$ и менее. Вычислив корреляционную функцию узкополосного шума, получим выражение

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega=R_C(\tau)\cos\omega_0\tau+$$
$$+R_S(\tau)\sin\omega_0\tau=A(\tau)\cos[\omega_0\tau-\varphi(\tau)],\qquad(1.54)$$

где

$$R_C(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega_0-\omega)\cos\omega\tau\,d\omega;\qquad(1.55)$$

$$R_S(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega_0-\omega)\sin\omega\tau\,d\omega\qquad(1.56)$$

— медленно меняющиеся ортогональные составляющие (косинусная и синусная), позволяющие определить огибающую $A(\tau)$ корреляционной функции $R(\tau)$:

$$A(\tau)=\left[R_C^2(\tau)+R_S^2(\tau)\right]^{1/2}\qquad(1.57)$$

и фазу

$$\varphi(\tau)=\operatorname{arctg}\frac{R_S(\tau)}{R_C(\tau)}.\qquad(1.58)$$

В большинстве случаев узкополосный спектр симметричен относительно центральной частоты $\omega_0=2\pi f_0$ или отличается незначительной асимметрией, тогда $R_S(\tau)\to 0$, $A(\tau)\to R_C(\tau)$, поэтому

$$R(\tau)=A(\tau)\cos\omega_0\tau=\sigma^2 a(\tau)\cos\omega_0\tau,\qquad(1.59)$$

где $a(\tau)$ — огибающая нормированной корреляционной функции (1.34).

Таким образом, огибающая $A(\tau)$ корреляционной функции $R(\tau)$ находится как преобразование Фурье (1.55) от спектра процесса, смещенного на величину ω_0 в область низких частот. Огибающая $a(\tau)$ часто используется вместо нормированной функции корреляции для определения интервала корреляции узкополосного процесса.

Интегральный интервал корреляции по огибающей равен

$$\tau_{\text{ог(и)}}=\int_0^\infty a(\tau)\,d\tau.\qquad(1.60)$$

Абсолютный интервал корреляции по огибающей

$$\tau_{\text{ог(а)}}=\int_0^\infty a(\tau)\,d\tau.\qquad(1.61)$$

Еще одно определение интервала корреляции очень удобно при осциллирующей огибающей функции корреляции: за интервал

корреляции принимается абсцисса τ_0 первого нуля огибающей, т. е. $a(\tau_0)=0$.

1.5. Примеры корреляционных функций шумов и периодических процессов

На практике приходится иметь дело с низкочастотными или узкополосными процессами, снимаемыми с выходов линейных си-

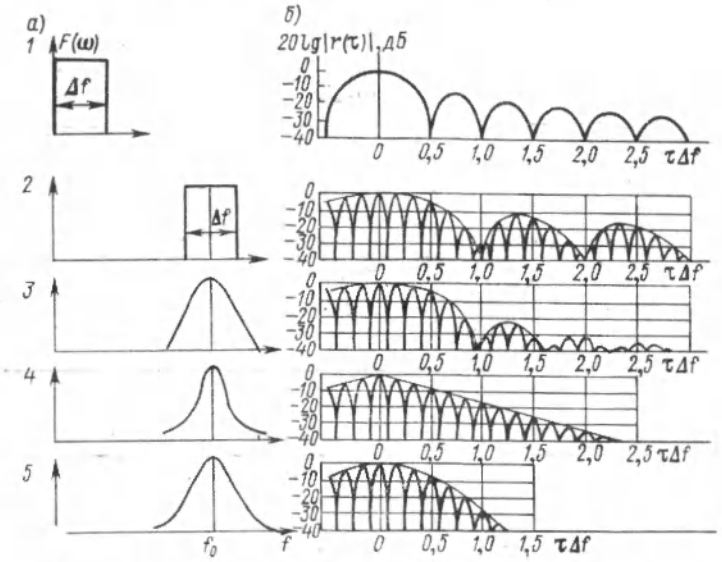

Рис. 1.1. Спектры (*а*) и нормированные корреляционные функции (*б*) шумов на выходе различных фильтров (*1—5*) при действии на их входе белого шума.

стем (фильтров), отличающихся большей или меньшей прямоугольностью частотной характеристики. Энергетический спектр $F_2(\omega)$ на выходе системы определяется квадратом ее частотной характеристики $K(\omega)$:

$$F_2(\omega)=F_1(\omega)K^2(\omega). \tag{1.62}$$

Если спектр на входе равномерный, $F_1(\omega)=F_0$, то спектр $F_2(\omega)$ на выходе системы совпадает с $K^2(\omega)$, что и использовано ниже для вычислений некоторых типовых корреляционных функций.

Корреляционные функции и спектры на выходе реальных систем могут быть аппроксимированы выражениями, приведенными в табл. 1.2 и на рис. 1.1, характеризующими следующие системы (*1—5*).

Таблица 1.2

Свойства корреляционных функций шумов на выходе линейных систем, возбуждаемых белым шумом

Линейная система	$K^2(f)$	Δf	$r(\tau)$	$\tau_{0(\varepsilon)}\Delta f$			$\tau_{0г(а)}\Delta f$	$\tau_{0г(и)}\Delta f$
				$\varepsilon=0{,}05$	$\varepsilon=0{,}1$	$\varepsilon=0{,}37$		
1. Идеальный фильтр низких частот	$\begin{cases}1, & f\leqslant f_2\\ 0, & f>f_2\end{cases}$	f_2	$\dfrac{\sin 2\pi\Delta f\tau}{2\pi\Delta f\tau}$	2,7	1,35	0,3	0,37[1]	0,25[1]
2. Идеальный полосовой фильтр	$\begin{cases}1, & \lvert f-f_0\rvert\leqslant 0{,}5\Delta f\\ 0, & \lvert f-f_0\rvert>0{,}5\Delta f\end{cases}$	f_2-f_1	$\dfrac{\sin\pi\Delta f\tau}{\pi\Delta f\tau}\cos\omega_0\tau$	5,4	2,7	0,7	0,74	0,5
3. Фильтр с характеристикой в форме косинусоиды	$\begin{cases}\cos 2\dfrac{f-f_0}{\Delta f}; & \lvert f-f_0\rvert\leqslant\dfrac{\pi\Delta f}{4}\\ 0 & \lvert f-f_0\rvert>\dfrac{\pi\Delta f}{4}\end{cases}$	ΔF	$\dfrac{\cos\dfrac{\pi^2\Delta f}{2}\tau}{1-(\pi\Delta f\tau)^2}\cos\omega_0\tau$	1,3	0,9	0,7	0,51	0,5
4. Одиночный контур	$\dfrac{1}{(1-f^2/f_0^2)+\Delta f^2/f^2}$	$\dfrac{\pi}{2}\Delta F$	$e^{-2\Delta f\lvert\tau\rvert}\cos\omega_0\tau$	1,5	1,15	0,5	0,5	0,5
5. Многокаскадный резонансный усилитель	$e^{-\pi(f-f_0)^2/2\Delta f^2}$	ΔF	$e^{-\pi\Delta f^2\tau^2}\cos\omega_0\tau$	0,98	0,86	0,56	0,55	0,55

[1] Вычислено по формулам (1.40), (1.41) для $\tau_{0(и)}$, $\tau_{0(а)}$ вместо $\tau_{0г(и)}$, $\tau_{0г(а)}$ соответственно.

1. *Идеальный фильтр низких частот* с полосой $\Delta f = f_2$ формирует шум, характеризующийся нормированной корреляционной функцией

$$r(\tau) = \frac{R(\xi)}{R(0)} = \frac{\sin 2\pi f_2 \tau}{2\pi f_2 \tau} = \frac{\sin 2\pi \Delta f \tau}{2\pi \Delta f \tau}. \qquad (1.63)$$

На практике часто используются шумы, имеющие широкополосные спектры, начинающиеся не с нулевых частот, $f_1 \neq 0$, тогда нормированная корреляционная функция принимает вид

$$r(\tau) = \frac{\sin 2\pi f_2 \tau}{2\pi\tau (f_2 - f_1)} - \frac{\sin 2\pi f_1 \tau}{2\pi\tau (f_2 - f_1)}. \qquad (1.64)$$

Первое слагаемое почти не отличается от (1.63), так как $f_1 \ll f_2$. Медленно изменяющееся второе слагаемое приводит к некоторому искажению функции корреляции по сравнению с (1.63).

2. *Идеальный полосовой фильтр* с полосой пропускания Δf имеет корреляционную функцию выходного шума

$$r(\tau) = \frac{\sin \pi \Delta f \tau}{\pi \Delta f \tau} \cos 2\pi f_0 \tau. \qquad (1.65)$$

Огибающая корреляционной функции этого узкополосного процесса совпадает с корреляционной функцией (1.63) процесса, смещенного к низким частотам на величину f_0, при этом полоса пропускания становится при $\omega > 0$ вдвое меньшей. Число полупериодов частоты f_0 в главном максимуме огибающей из (1.65) в общем случае равно $n = 4f_0/\Delta f$. Для октавного фильтра $n = 6$, для полуоктавного $n = 12$, для третьоктавного $n = 18$.

Заметим, что осцилляции корреляционной функции (1.65) полосовых фильтров определяются центральной, т. е. средней арифметической частотой $f_0 = 0{,}5(f_1 + f_2)$, а не средней геометрической $f_{ср} = \sqrt{f_1 f_2}$, которой, как правило, характеризуют полосовые фильтры при спектральном анализе. Но уже для октавного фильтра эта разница частот невелика — $f_0 = 1{,}07 f_{ср}$, а для полуоктавного фильтра это отличие составляет лишь 1,5 %.

3. *Полосовой фильтр* с частотной характеристикой в форме косинусоиды близок к частотной характеристике реального фильтра с большим затуханием в полосе непрозрачности. Корреляционная функция для этого случая показана на рис. 1.1 и в табл. 1.2.

4. *Колебательный контур* в наибольшей степени отличается от идеального полосового фильтра малой крутизной среза частотной характеристики. Вследствие этого энергетическая полоса пропускания контура Δf сильно отличается от полосы ΔF, отсчитанной на уровне 0,5 максимума квадрата частотной характеристики: $\Delta f = (\pi/2)\Delta F$. Нормированная корреляционная функция шума на

выходе одиночного колебательного контура (см. табл. 1.2) имеет огибающую $a(\tau)$, принимающую в логарифмическом масштабе вид прямой: $20\lg|(\tau)|=8{,}6\pi\Delta F|\tau|$. В точке $\tau=0$ производная $\partial R/\partial\tau$ имеет разрыв непрерывности. Если процесс на входе контура — нормальный белый шум, то флюктуации огибающей процесса на выходе контура являются марковским процессом. Этим процесс на выходе контура отличается от других рассмотренных здесь процессов.

Можно показать [36], что корреляция шума на выходе двух связанных узкополосных контуров, определяется выражением

$$R(\tau)=e^{-\beta|\tau|}\left(\cos\beta\lambda\tau+\frac{1}{\lambda}\sin\beta\lambda|\tau|\right)\cos\omega_0\tau, \qquad (1.66)$$

где $\beta=R/2L=\Delta\omega/2$; $\lambda=kQ$; k — коэффициент связи, $Q=(\sqrt{L/C})/R$ — добротность контура из элементов R, L, C.

5. *Многокаскадный резонансный усилитель* имеет частотную характеристику, которую при большом числе одинаковых каскадов обычно аппроксимируют гауссовской кривой, хотя система с частотной характеристикой такого типа физически неосуществима. Корреляционная функция шума на выходе усилителя (см. табл. 1.1) также характеризуется отсутствием дополнительных максимумов, но затухает с увеличением τ гораздо быстрее.

Из рассмотренных частных случаев легко видеть общее свойство преобразований Фурье: чем у́же спектр, тем шире корреляционная функция. Процессам с резко ограниченным спектром соответствуют длительно осциллирующие функции корреляции. При плавном, монотонном спаде спектра узкополосного процесса огибающая корреляционной функции затухает также монотонно, не имеет дополнительных максимумов, что особенно ценно для различных корреляционных измерений, например, по выделению путей распространения шума (см. гл. 7). Поэтому не следует стремиться применять при корреляционных измерениях фильтры с большой прямоугольностью частотной характеристики. Однако одноконтурный фильтр имеет слишком плохую избирательность и медленное затухание корреляционной функции, что также нежелательно. Хорошие результаты могут быть достигнуты при применении двух-трехконтурных фильтров, что можно видеть из представленных на рис. 1.2 коррелограмм и спектрограмм, измеренных на выходе реальных фильтров различных типов.

Из представленных в табл. 1.2 результатов вычисления интервалов корреляции $\tau_{0(\varepsilon)}$ для различных спектров видно, что можно практически принять для узкополосных спектров

$$\tau_0\simeq 1/\Delta f. \qquad (1.67)$$

Данному условию соответствует $\varepsilon=0{,}1+0{,}05$ для большинства практически применяемых фильтров, формирующих спектр мощности. Кроме того, это условие характеризует первый нуль

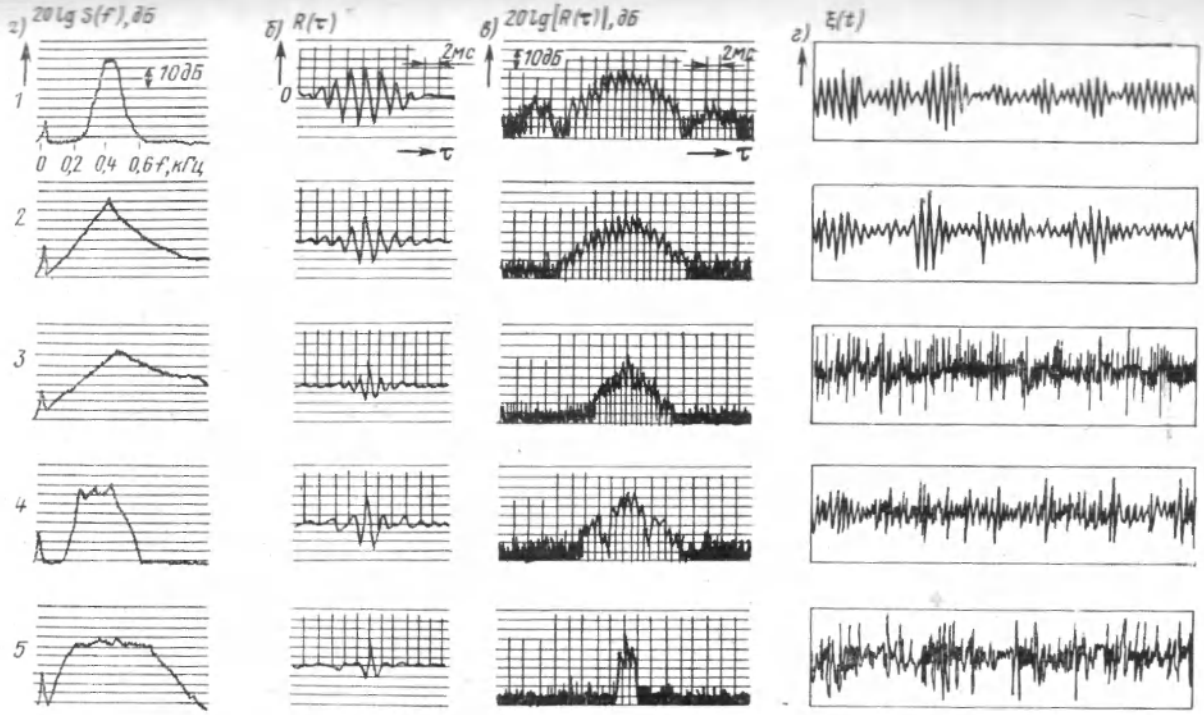

Рис. 1.2. Спектрограммы шумов в логарифмическом масштабе (*а*), коррелограммы, записанные в линейном (*б*) и логарифмическом (*в*) масштабах, и спектрограммы шумов (*г*) на выходе различных фильтров со средней частотой 400 Гц.

1 — полосовой третьоктавный трехзвенный фильтр; *2* — полосовой третьоктавный однозвенный фильтр; *3* — одноконтурный полуоктавный фильтр; *4* — полосовой октавный фильтр; *5* — фильтр с полосой пропускания 200—800 Гц.

огибающей корреляционной функции идеального полосового фильтра. Все сказанное делает условие (1.67) удобным для практики.

Корреляционные функции периодических процессов. Рассмотрим гармоническое колебание $x(t)=E\sin(\omega t+\varphi)$ со случайной фазой φ, равномерно распределенной на интервале $(0,2\pi)$, т. е.

$$w(\varphi)=\begin{cases}1/2\pi, & 0<\varphi<2\pi;\\ 0, & 0>\varphi>2\pi.\end{cases}$$

Такой случайный процесс представляется в виде ансамбля синусоид со случайной начальной фазой, поэтому усреднение по множеству записывается как усреднение по случайной фазе. Отсюда находим среднее значение

$$M_x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E\sin(\omega t+\varphi)\,d\varphi=0, \qquad (1.68)$$

дисперсию

$$\sigma_x^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,d\varphi=\frac{E^2}{2} \qquad (1.69)$$

и корреляционную функцию

$$r(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E^2\sin(\omega t+\varphi)\sin[\omega(t+\tau)+\varphi]\,d\varphi=\frac{E^2}{2}\cos\omega\tau. \qquad (1.70)$$

Следовательно, рассматриваемый процесс является стационарным случайным процессом с нулевым средним и периодической корреляционной функцией. Для определения вероятностных характеристик такого процесса возможно применять усреднение по времени, дающее тот же результат, что и усреднение по множеству (в данном случае по фазе). Для периодического процесса, представленного в виде суммы гармоник $y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(2\pi n/T+\varphi)$, получим

$$R(\tau)=\overline{y(t)\,y(t+\tau)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n^2}{2}\cos\frac{2\pi n}{T}\tau. \qquad (1.71)$$

Таким образом, корреляционная функция содержит информацию об амплитуде и частоте каждой составляющей периодического процесса, а фазы всех гармоник в $R(\tau)$ приводятся к нулю.

При экспериментальных исследованиях корреляционные функции измеряются, как правило, на выходе полосовых фильтров и представляют, следовательно, частичную сумму членов ряда

(1.71). Для двух гармонических колебаний разных амплитуд (E_1, E_2) и частот (ω_1, ω_2) получим

$$R(\tau)=\frac{E_1^2}{2}\cos\omega_1\tau+\frac{E_2^2}{2}\cos\omega_2\tau=$$
$$=\left[\left(\frac{E_1^2}{2}\right)^2+\left(\frac{E_2^2}{2}\right)^2+2\frac{E_1^2E_2^2}{4}\cos(\omega_2-\omega_1)\tau\right]^{1/2}\times$$
$$\times\cos\left[\omega_1\tau-\operatorname{arctg}\frac{E_2^2\sin(\omega_2-\omega_1)\tau}{E_1^2+E_2^2\cos(\omega_2-\omega_1)\tau}\right]. \qquad (1.72)$$

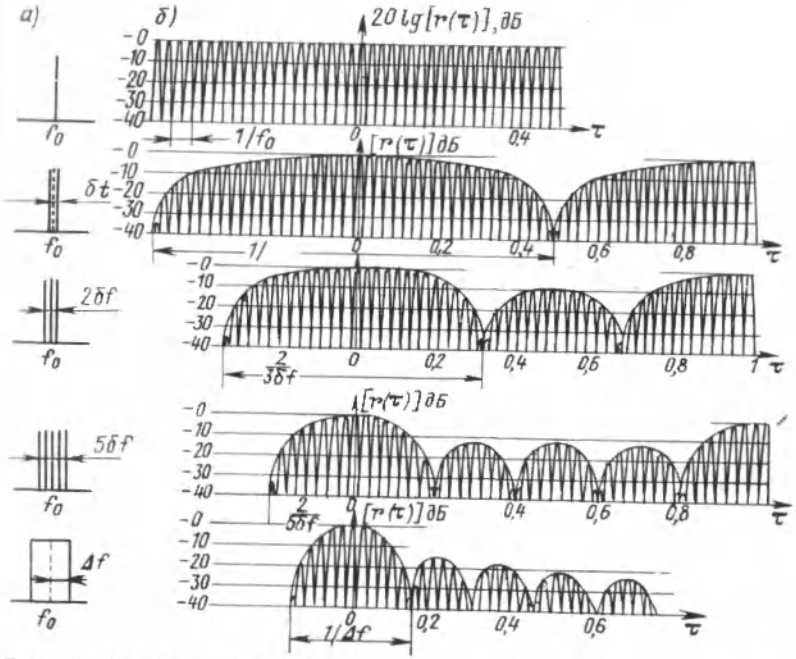

Рис. 1.3. Спектры (*а*) и нормированные автокорреляционные функции (*б*) сумм гармонических колебаний.

На рис. 1.3 изображены нормированные корреляционные функции для суммы двух, трех и пяти гармонических колебаний равных амплитуд с центральной частотой $\omega_0=\sum_1^n\omega_k/n$ при равных интервалах $\delta\omega=\omega_{k+1}-\omega_k$ между их частотами, определяемые выражением

$$r(\tau)=\frac{1}{n}\left[2\cos\frac{\omega_1-\omega_n}{2}\tau+2\cos\frac{\omega_2-\omega_{n-1}}{2}\tau+\right.$$
$$\left.+2\cos\frac{\omega_3-\omega_{n-2}}{2}\tau+\ldots+1\right]\cos\omega_0\tau=$$
$$=\frac{1}{n}\left[1+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\delta\omega\tau\right]\cos\omega_0\tau. \qquad (1.73)$$

При четном n в выражении (1.73) достаточно отбросить единицу в квадратных скобках. В общем случае частотные интервалы между составляющими в пределах полосы Δf могут быть разными, различными оказываются и их амплитуды, что усложняет вид функции корреляции. Выражения (1.72) и (1.73) позволяют сделать следующий вывод: основной период огибающей функции корреляции определяется минимальным интервалом между частотами составляющих $T_0 = 1/\delta f_{\min}$, а форма огибающей функции корреляции между основными максимумами зависит от их числа и отношения амплитуд; число нулей огибающей между главными максимумами на единицу меньше числа составляющих. Корреляционная функция мультитона, включающего n равных гармонических составляющих, имеет вид [44]

$$R_{\text{м}}(\tau) = \frac{\sin \pi \Delta f \tau}{n \sin \dfrac{\pi \Delta f \tau}{n}} \cos \omega_0 \tau \qquad (1.74)$$

и отличается от корреляции в полосе белого шума (1.65) не более чем на 10 %, если $(\pi \Delta f \tau)/n < 0{,}75$. При использовании воющего тона — сигнала с частотной модуляцией — число дискретных составляющих равно $n = 2\beta = \Delta F / F_{\text{м}}$, где β — индекс модуляции, ΔF — девиация, $F_{\text{м}}$ — частота модуляции, а условие малого отличия корреляции воющего тона от корреляции в полосе белого шума принимает вид $F_{\text{м}} < 0{,}75/\pi\tau$. При $\delta\omega \to 0$ и неограниченном возрастании числа составляющих в полосе Δf корреляционная функция приближается к виду (1.65).

Если измерения корреляционной функции производятся вблизи $\tau = 0$, во всяком случае в пределах $-T_0/2 < \tau < T_0/2$, то свойства этого отрезка периодической функции корреляции практически не будут отличаться от корреляционной функции шума, лишь бы только число гармонических составляющих было достаточно большим.

Практически в исследуемой полосе частот могут оказаться как шумовая, так и ряд дискретных составляющих. На основании свойства (1.36) корреляционная функция суммарного сигнала будет представлять сумму корреляционных функций для полосы шума и дискретных составляющих.

1.6. Характеристики связи двух случайных процессов

Значения двух случайных процессов являются независимыми, если их двумерная плотность вероятности представляет собой произведение одномерных плотностей вероятностей каждого из сечений случайных процессов:

$$w_2(x, y, t_1, t_2) = w_1(x, t_1)\, w_1(y, t_2). \qquad (1.75)$$

Обратим внимание на то, что рассматриваемая характеристика является в общем случае функцией двух моментов времени t_1 и t_2.

Поэтому независимость значений процессов может иметь место в одной области значений t_1, t_2 и отсутствовать в другой. При полной независимости двух случайных процессов условие (1.75) соблюдается при любых значениях t_1 и t_2, т. е. является тождеством. Для независимых случайных процессов их смешанные центральные моментные функции также тождественно равны нулю.

В случае зависимых случайных процессов двумерная плотность вероятностей определяется произведением функций:

$$w_2(x,\ y,\ t_1,\ t_2) = w(y/x,\ t_1,\ t_2)\, w_1(x,\ t_1) = w(x/y,\ t_1,\ t_2)\, w_1(y,\ t_2), \tag{1.76}$$

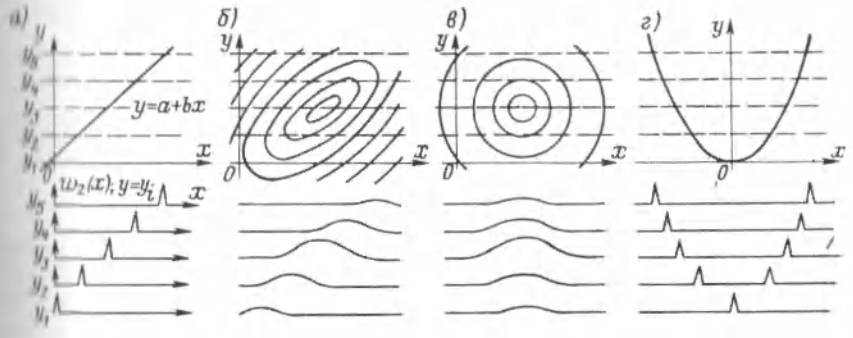

Рис 1.4. Изображение двумерного закона распределения значений двух процессов в виде линий равной вероятности (вверху) и сечений плотности вероятности $w_2(x)$ при $y=\text{const}$ (внизу) для случаев: *а* — линейной функциональной связи величин ($r=1$); *б* — линейной статистической связи ($1<r<1$); *в* — отсутствия связи ($r=0$); *г* — нелинейной функциональной связи ($y=x^2$).

где $w(y/x,\ t_1,\ t_2)$ — условная плотность вероятности случайного процесса $\eta(t)$ при условии, что процесс $\xi(t)$ принимает значение x; $w(x/y,\ t_1,\ t_2)$ — обратная условная плотность вероятности.

Следовательно, условные функции распределения вероятностей являются полной характеристикой связи двух случайных процессов в заданные моменты времени t_1, t_2 и представляют собой сечение двумерной плотности вероятности $w_2(x,\ y,\ t_1,\ t_2)$ плоскостями $x=\text{const}$ или $y=\text{const}$ соответственно.

Наглядное представление о наличии и характере связи значений двух случайных процессов дает сечение двумерной плотности вероятности плоскостью $w_2=\text{const}$, параллельной xOy на рис. 1.4. Для независимых величин форма этого сечения такова, что в ней не усматривается какой-либо тенденции к изменению характеристик одной случайной величины при изменении другой. Например, сечением двумерной вероятности двух независимых гауссовских процессов может быть эллипс с расположением осей параллельно координатным осям. Наклон же эллипса будет свидетельствовать о линейной связи двух значений процессов.

В случае линейной статистической связи между двумя случайными процессами $\xi(t)$ и $\eta(t)$ степень статистической связи их значений полностью определяется нормированной корреляционной функцией (смешанной центральной моментной функцией) второго порядка

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{M\{[\xi(t_1) - M_\xi][\eta(t_2) - M_\eta]\}}{[\sigma_\xi^2(t_1)\,\sigma_\eta^2(t_2)]^{1/2}} = \frac{\langle \mathring{\xi}(t_1)\ \mathring{\eta}(t_2)\rangle}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2)}. \quad (1.77)$$

Для стационарных и стационарно связанных процессов нормированная корреляционная функция находится путем усреднения по времени и зависит лишь от разности моментов времени

$$r_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{\sigma_\xi\sigma_\eta}\,\overline{\mathring{\xi}(t)\ \mathring{\eta}(t+\tau)}. \quad (1.78)$$

В случае функциональной линейной зависимости $\eta(t) = a + b\xi(t)$ условная функция распределения вероятностей принимает вид δ-функции: $w(y/x) = \delta[y - \bar{\eta})/\sigma_\eta - (x - \bar{\xi})/\sigma_\xi]$ (см. рис. 1.4), а коэффициент корреляции $r_{\xi\eta} = 1$. В случае равенства нулю коэффициента корреляции можно говорить лишь об отсутствии линейной связи между значениями двух процессов, т. е. об их некоррелированности. При этом возможна какая-либо нелинейная связь между процессами. Например, при $\eta = \xi^2$ функция корреляции $R_{\xi\eta} = \mu_\xi^{(3)} + 2M_\xi\sigma_\xi^2$ может принимать любые значения, в частности, нуль при $M_\xi = 0$, $\mu_\xi^{(3)} = 0$, но это не означает, что отсутствует связь между процессами (см. рис. 1.4).

Наличие связей более высокого порядка определяется обобщенными корреляционными функциями высших порядков. Так, в рассмотренном выше примере $\eta = \xi^2$ корреляционная связь обнаружится не при сопоставлении $\eta(t)$ и $\xi(t)$, а при сравнении $\eta(t)$ и $\xi^2(t)$, т. е. при определении корреляционной функции третьего порядка $K_{\eta\xi}^{(1,2)} = \langle \mathring{\eta}(t_1)\ \mathring{\xi}^2(t_2)\rangle$.

Напомним основные свойства взаимных корреляционных функций. Взаимная корреляционная функция второго порядка совпадает со смешанным вторым центральным моментом и для стационарных и стационарно связанных случайных процессов обладает следующими свойствами:

1) при замене знака задержки и взаимной замене процессов корреляционная функция не изменяется $R_{\xi\eta}(\tau) = R_{\eta\xi}(-\tau)$;

2) функция взаимной корреляции не является четной, $R_{\xi\eta}(\tau) \neq R_{\xi\eta}(-\tau)$;

3) модуль функции взаимной корреляции не может превышать среднего геометрического значения дисперсий двух процессов $\sigma_\xi^2 = R_\xi(0)$ и $\sigma_\eta^2 = R_\eta(0)$, т. е. $|R_{\xi\eta}(\tau)| \leqslant \sqrt{R_\xi(0)\,R_\eta(0)}$;

4) статистическая связь двух процессов в частотной области определяется взаимным спектром, являющимся трансформантой Фурье функции взаимной корреляции:

$$G_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau; \tag{1.79}$$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega. \tag{1.80}$$

Степень линейной статистической связи двух случайных процессов определяется функцией когерентности (модулем безразмерного взаимного спектра):

$$\gamma_{\xi\eta}(\omega) = \left[\frac{C^2_{\xi\eta}(\omega) + S^2_{\xi\eta}(\omega)}{G_{\xi}(\omega)\, G_{\eta}(\omega)} \right]^{1/2}. \tag{1.81}$$

Безразмерный взаимный спектр двух процессов

$$g_{\xi\eta}(\omega) = \frac{G_{\xi\eta}(\omega)}{\sqrt{G_{\xi}(\omega)\, G_{\eta}(\omega)}}, \tag{1.82}$$

определяемый взаимным спектром $G_{\xi\eta}(\omega)$ и спектрами каждого из процессов $G_{\xi}(\omega)$ и $G_{\eta}(\omega)$, представляет собой в общем случае величину комплексную, так как $G_{\xi\eta}(\omega)$ — преобразование Фурье от взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(\tau)$, не являющейся четной:

$$G_{\xi\eta}(\omega) = C_{\xi\eta}(\omega) + iS_{\xi\eta}(\omega).$$

Действительная и мнимая составляющие взаимного спектра определяются соответственно косинусным и синусным преобразованиями Фурье:

$$C_{\xi\eta}(\omega) = \operatorname{Re} G_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau; \tag{1.83}$$

$$S_{\xi\eta}(\omega) = \operatorname{Im} G_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau. \tag{1.84}$$

Два процесса, характеризуемые $|\gamma_{\xi\eta}(\omega)| = 1$, называются полностью когерентными, при $\gamma_{\xi\eta}(\omega) = 0$ процессы некогерентны. В общем случае $|\gamma_{\xi\eta}(\omega)| < 1$. Коэффициент когерентности — весьма важная характеристика связи двух случайных процессов, отличающаяся от коэффициента корреляции.

Взаимные корреляционные функции высших порядков определяются через центральные моментные функции таким образом, что исключается информация, содержащаяся в корреляционных функциях низшего порядка (см. табл. 1.1).

1.7. Когерентность и коррелированность процессов

Исследуем различия между нормированной корреляционной функцией и коэффициентом когерентности как меры статистической связи двух процессов. Чтобы привести две эти характеристики к единому виду, воспользуемся комплексным представлением случайного процесса $\xi(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \xi(t) &= \operatorname{Re} z(t); \\ z(t) &= \xi(t) + i\hat{\xi}(t), \end{aligned}\right\} \tag{1.85}$$

где

$$\hat{\xi}(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(t')}{t-t'}\,dt' \tag{1.86}$$

— сопряженный процесс, являющийся преобразованием Гильберта процесса $\xi(t)$.

Если процесс узкополосный, то его корреляционная функция имеет вид $R(\tau) = R_0(\tau)\cos\omega_0\tau$. Огибающая $R_0(\tau)$ корреляционной функции определяется следующим выражением:

$$R_0(\tau) = \left[R_I^2(\tau)_C + R_I^2(\tau)_S\right]^{1/2},$$

где для корреляционной функции

$$R_I(\tau)_C = R_\xi(\tau)_C = \overline{\xi(\tau)\,\xi(t+\tau)} = R_0(\tau)\cos\omega_0\tau;$$

$$R_I(\tau)_S = R_\xi(\tau)_S = \overline{\xi(t)\,\hat{\xi}(t+\tau)} = R_0(\tau)\sin\omega_0\tau;$$

для взаимной корреляционной функции

$$R_I(\tau)_C = R_{\xi\eta}(\tau)_C = \overline{\xi(t)\,\eta(t+\tau)};$$

$$R_I(\tau)_S = R_{\xi\eta}(\tau)_S = \overline{\xi(t)\,\hat{\eta}(t+\tau)}$$

— действительные (с индексом «C») и мнимые (с индексом «S») составляющие комплексных корреляционных функций.

Огибающая нормированной взаимной корреляционной функции $r_{\xi\eta}(\tau)$ определяется следующим образом:

$$r_{\xi\eta}(\tau)_0 = \frac{\left[R_{\xi\eta}^2(\tau)_C^2 + R_{\xi\eta}^2(\tau)_S^2\right]^{1/2}}{\left[R_\xi(0)\,R_\eta(0)\right]^{1/2}}, \tag{1.87}$$

что совпадает по структуре с формулой (1.81) для коэффициента когерентности.

Взаимосвязь процессов проявляется, в частности, в том, что при сложении двух процессов возникает их взаимодействие, интерференция (ослабление или усиление), если процессы линейно связанны. Это видно из выражения для интенсивности двух процессов:

$$I = \overline{[x(t) + y(t)]^2} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y r_{xy}(\tau). \tag{1.88}$$

Если второй процесс отличается от первого лишь сдвигом во времени, $y(t)=x(t-t_з)$, то $r_{xy}(\tau)=r_\xi(\tau-t_з)$ и интенсивность суммы сигналов равна

$$I=2\sigma_x^2[1+r_\xi(\tau-t_з)]. \qquad (1.89)$$

Рассмотрим свойства коррелированности и когерентности сигналов, отличающихся лишь запаздыванием на время $t_з$, т. е. $x_1(t)$ и $x_2(t)=x_1(t-t_з)$. Их взаимная корреляционная функция отличается от корреляционной функции только сдвигом во времени $R_{12}(\tau)=\overline{x(t)x(t-t_з+\tau)}=R_x(\tau-t_з)$ и определяет интерференцию двух сигналов $I=2\sigma_x^2[1+r_x(\tau-t_з]$, где $r_x(\tau-t_з)=[R_x(\tau)/R_x(0)]$. Взаимный спектр этих сигналов определим как преобразование Фурье от $R_{12}(\tau)$:

$$G_{12}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau-t_з)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau=G_x(\omega)\,e^{-i\omega t_з}=$$

$$=G_x(\cos\omega t_з-i\sin\omega t_з), \qquad (1.90)$$

где $G_x(\omega)=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau$ — энергетический спектр сигнала, являющийся огибающей осциллирующих действительной и мнимой составляющих взаимного спектра. Функция когерентности показывает полную когерентность таких двух сигналов при любом их запаздывании $t_з$ и вне зависимости от их спектров.

В то же время из взаимной корреляционной функции

$$r_{12}(\tau)=\frac{R_{12}(\tau)}{[R_1(0)\,R_2(0)]^{1/2}}=r_0(\tau-t_з)\cos\omega_0(\tau-t_з)$$

следует, что только при $\tau=t_з$ значения двух процессов полностью коррелированны, $r_{12}(t_з)=1$, и наиболее сильно интерферируют $I=4\sigma_x^2$, но достаточно небольшого сдвига, например, на четверть периода ($\tau=T_0/4$, где $T_0=2\pi/\omega_0$), чтобы $r_{12}(\tau)=0$, т. е. значения процесса стали полностью некоррелированными, исчезла их интерференция, $I=2\sigma_x^2$. Между тем близость значений огибающей нормированной корреляционной функции $r_0(\tau)$ к единице при этом свидетельствует о потенциальной возможности проявления свойства коррелированности, что произойдет при небольшом изменении временного сдвига процессов. Лишь при большом временном сдвиге когерентных процессов, превышающем их интервал корреляции $\tau_к$, процессы становятся практически некоррелированными, при любом, но превышающем $\tau_к$ их временном сдвиге, проявляется их временная некогерентность, неспособность интерферировать при наличии запаздывания.

Рассмотрим далее влияние помех и частотных искажений на когерентность и коррелированность сигналов. Пусть на входе не-

которого четырехполюсника действует процесс $x_1(t)$ с корреляционной функцией $R_x(\tau)$ и энергетическим спектром $G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$. На выходе системы с импульсной характеристикой $h(t)$ имеем процесс $y(t) = x_2(t) + \xi(t)$, являющийся суммой преобразованного системой сигнала $x_2(t) = \int_0^{\infty} h(t-t') x_1(t') dt'$ и некоррелированной помехи $\xi(t)$, т. е. $R_{x\xi}(\tau) \equiv 0$. Сигнал на выходе имеет корреляционную функцию $R_2(\tau)$ и спектр $G_2(\omega) = G_x(\omega) K^2(\omega)$, где $K(i\omega) = K(\omega) e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$ — частотная характеристика четырехполюсника, определяющая запаздывание сигнала на время t_0 и его частотные искажения.

Найдем коэффициент когерентности процессов на входе и выходе четырехполюсника

$$\gamma_{12}(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|}{[G_x(\omega) G_y(\omega)]^{1/2}} = \frac{|K(i\omega) G_x(\omega) e^{i\omega t_0}|}{\{G_x(\omega)[K^2(\omega) G_x(\omega) + G_\xi(\omega)]\}^{1/2}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{G_\xi(\omega)}{K^2(\omega) G_x(\omega)}\right]^{1/2}}. \quad (1.91)$$

Если помеха отсутствует, $G_\xi(\omega) = 0$, то когерентность процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ не нарушается частотными искажениями спектра сигнала, $\gamma_{12}(\omega) = 1$. Если же помеха имеется, то функция когерентности характеризует частотную зависимость вклада сигнала в суммарный процесс:

$$\gamma_{12}(\omega) = G_c^{(\omega)} / [G_c(\omega) + G_п(\omega)]\}^{1/2}.$$

Рассмотрим нормированную взаимную корреляционную функцию процессов, действующих на входе и выходе исследуемой системы,

$$r_{12}(\tau)_0 = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) G_x(\omega) d\omega \right|}{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) G_x(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi^2(\omega) d\omega \right] \right\}^{1/2}}. \quad (1.92)$$

Чтобы получить конкретный результат, предположим, что на входе системы действует белый шум со спектральной плотностью N в полосе частот (ω_1, ω_2), а частотные искажения сигнала состоят в том, что исследуемая система вырезает полосу частот $\Delta\omega$,

лежащую внутри входной полосы $\omega_2 - \omega_1$, с коэффициентом передачи $K(i\omega) = Ke^{-i\omega t_0}$, тогда имеем

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K(i\omega) G_x(\omega)\, d\omega \right| = KN\,\Delta\omega r_x(\tau - t_0)_0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)\, d\omega = N(\omega_2 - \omega_1);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) G_x(\omega)\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega)\, d\omega = K^2 N\,\Delta\omega + \sigma_\xi^2,$$

откуда получим максимальное значение нормированной корреляционной функции при $\tau = t_0$ в виде

$$|r_{12}(\tau)|_{\max} = \frac{KN\,\Delta\omega}{\sqrt{N(\omega_2 - \omega_1)\left[K^2 N\,\Delta\omega + \sigma_\text{п}^2\right]}} = \sqrt{\frac{\Delta\omega}{\omega_2 - \omega_1}}\,\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\sigma_\text{п}^2}{\sigma_\xi^2}\right)^{1/2}}. \tag{1.93}$$

Здесь первый множитель $[\Delta\omega/(\omega_2 - \omega_1)]^{1/2}$ характеризует снижение коррелированности процессов за счет частотных искажений сигнала, а второй множитель $(1 + \sigma_\text{п}^2/\sigma_\text{с}^2)^{-1/2}$ — декорреляцию сигналов за счет мешающего действия помехи. Если помеха присутствует в обоих каналах, то второй множитель имеет вид $\left[1 + \sigma_{\text{п}1}^2/\sigma_{\text{с}1}^2 + \sigma_{\text{п}2}^2/\sigma_{\text{с}2}^2 + \sigma_{\text{п}1}^2\sigma_{\text{п}2}^2/\sigma_{\text{с}1}^2\sigma_{\text{с}2}^2\right]^{1/2}$. Таким образом, коэффициент корреляции чувствителен как к частотным искажениям сигнала, так и к влиянию помех, а его ненулевые значения практически локализованы в области задержек $t_0 \pm \tau_\text{к}$, где $\tau_\text{к} = 1/\Delta f$ — интервал корреляции сигнала.

Рассмотрим еще один вид искажений сигнала — искажения, вызванные дисперсией скорости распространения изгибных волн, т. е. с различием скоростей распространения колебаний разных частот $c = c_0\sqrt{\omega/\omega_0}$. В этом случае составляющие взаимного спектра характеризуются частотно-зависимым периодом осцилляций

$$G_{12}(\omega) = G(\omega)\left[\cos\frac{d}{c_0}\sqrt{\omega\omega_0} + i\sin\frac{d}{c_0}\sqrt{\omega\omega_0}\right],$$

где c_0 — скорость распространения колебаний на частоте ω_0.

Коэффициент когерентности изгибных волн при любом пространственном разнесении d точек плоской изгибной волны остается равным единице, $\gamma(\omega) = \left|e^{i\frac{d}{c}\sqrt{\omega\omega_0}}\right| = 1$, между тем значения огибающей нормированной корреляционной функции в полосе частот $\Delta\omega$ падают с увеличением расстояния (см. гл. 7)

даже при компенсации среднего (в полосе частот) запаздывания сигнала

$$r_0(d) \approx 2\frac{f_0}{\Delta f}\sqrt{\frac{\lambda_и}{d}},$$

где $f_0 = \omega_0/2\pi$ — средняя частота полосы сигнала; $\lambda_и$ — длина изгибной волны на частоте f_0.

В результате случайные колебания в точках изгибной волны, разделенных некоторым расстоянием $d > d_к$, в полосе частот Δf теряют способность интерферировать, взаимодействовать, несмотря на их полную когерентность согласно значению коэффициента когерентности. Последнее кажется необычным, но в этом ничего парадоксального нет. При большом запаздывании любые случайные процессы также теряют способность интерферировать в полосе частот, оставаясь по определению когерентными, порожденными одним и тем же источником. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы.

1) *коэффициент когерентности*, определяемый через комплексный взаимный спектр процессов:

— не зависит от запаздывания сигналов и при $\gamma = 1$ характеризует принадлежность двух процессов одному источнику;

— не зависит от частотных искажений сигнала;

— при наличии помех является частотно-зависимой функцией и характеризует долю (вклад) когерентной составляющей в смесь сигнала и помехи на каждой частоте;

— не определяет возможные условия интерференции сигналов;

2) *огибающая нормированной корреляционной функции* является функцией запаздывания сигналов и лишь при компенсации запаздывания и отсутствии помех и частотных искажений сигнала достигает единицы, характеризуя этим линейную связь процессов в широкой полосе частот и вытекающую отсюда потенциальную способность двух сигналов с широким спектром интерферировать при определенных условиях, накладываемых на выбор времени задержки сигналов; при наличии помех и частотных искажений сигнала уменьшается.

Таким образом, огибающая нормированной корреляционной функции характеризует временну́ю (для процессов) или пространственную (для полей) область связанности двух процессов в широкой полосе частот, определяя этим временно́й или пространственный интервал корреляции процессов или полей;

3) *нормированная корреляционная функция* является мерой линейной связи значений двух процессов при заданном конкретном временном сдвиге (задержке), определяет степень фактического проявления свойств линейной связанности процессов, в частности, интерференции двух сигналов при заданном конкретном значении времени задержки τ.

1.8. Характеристики нестационарных гауссовских и негауссовских процессов

Большое разнообразие нестационарных процессов приводит к необходимости их деления на подклассы.

Гауссовский процесс характеризуется тремя статистическими характеристиками, которые в случае нестационарного процесса могут проявлять зависимость от времени. Это математическое ожидание $M(t)$, дисперсия $\sigma^2(t)$ и корреляционная функция $r(t, \tau)$, которую следует определять в общем случае путем усреднения по ансамблю реализаций.

Класс негауссовских нестационарных процессов представляет собой наиболее общую и сложную вероятностную модель случайного явления. Для характеристики такого процесса в общем случае необходимо определить последовательность корреляционных функций высших порядков, представленных в табл. 1.1. Исследования могут быть упрощены, если уточнить тип нестационарного процесса. Целесообразно различать подклассы нестационарных процессов:

1) по порядку нестационарности, определяя его порядком корреляционной функции, начиная с которой проявляется нестационарность процесса;

2) по скорости изменения статистической характеристики, выделяя процессы с нестационарностью медленной $(\partial Q/\partial t)/Q \ll (\partial x/\partial t)/x$ и быстрой $(\partial Q/\partial t)/Q = (\partial x/\partial t)x$, где Q — статистическая характеристика;

3) по возможности их стационаризации, выделяя процессы, приводящиеся к стационарным, и неприводящиеся;

4) по статистическим характеристикам своих приращений — со стационарными, некоррелированными приращениями и т. д.

5) по виду и их математической модели: элементарные (определяемые детерминированной функцией со случайными параметрами); аддитивно-нестационарные; мультипликативно-нестационарные.

Обратившись к теории нестационарных процессов, можно заметить большое разнообразие определений одной и той же статистической характеристики. Это результат, с одной стороны, сложности проблемы, а с другой — недостаточного развития теории нестационарных случайных процессов (НСП). Приведем определения основных статистических характеристик НСП.

Корреляционная функция НСП представляется одним из следующих определений:

$$K_{\mathrm{I}}(t, \tau) = \left\langle \overset{\circ}{x}(t)\, \overset{\circ}{x}(t+\tau) \right\rangle; \tag{1.94}$$

$$K_{\mathrm{II}}(t, \tau) = \left\langle \overset{\circ}{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \overset{\circ}{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right\rangle, \tag{1.95}$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$ — центрированный процесс.

даже при компенсации среднего (в полосе частот) запаздывания сигнала

$$r_0(d) \approx 2\frac{f_0}{\Delta f}\sqrt{\frac{\lambda_и}{d}},$$

где $f_0 = \omega_0/2\pi$ — средняя частота полосы сигнала; $\lambda_и$ — длина изгибной волны на частоте f_0.

В результате случайные колебания в точках изгибной волны, разделенных некоторым расстоянием $d > d_к$, в полосе частот Δf теряют способность интерферировать, взаимодействовать, несмотря на их полную когерентность согласно значению коэффициента когерентности. Последнее кажется необычным, но в этом ничего парадоксального нет. При большом запаздывании любые случайные процессы также теряют способность интерферировать в полосе частот, оставаясь по определению когерентными, порожденными одним и тем же источником. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы.

1) *коэффициент когерентности*, определяемый через комплексный взаимный спектр процессов:

— не зависит от запаздывания сигналов и при $\gamma = 1$ характеризует принадлежность двух процессов одному источнику;

— не зависит от частотных искажений сигнала;

— при наличии помех является частотно-зависимой функцией и характеризует долю (вклад) когерентной составляющей в смесь сигнала и помехи на каждой частоте;

— не определяет возможные условия интерференции сигналов;

2) *огибающая нормированной корреляционной функции* является функцией запаздывания сигналов и лишь при компенсации запаздывания и отсутствии помех и частотных искажений сигнала достигает единицы, характеризуя этим линейную связь процессов в широкой полосе частот и вытекающую отсюда потенциальную способность двух сигналов с широким спектром интерферировать при определенных условиях, накладываемых на выбор времени задержки сигналов; при наличии помех и частотных искажений сигнала уменьшается.

Таким образом, огибающая нормированной корреляционной функции характеризует временну́ю (для процессов) или пространственную (для полей) область связанности двух процессов в широкой полосе частот, определяя этим временно́й или пространственный интервал корреляции процессов или полей;

3) *нормированная корреляционная функция* является мерой линейной связи значений двух процессов при заданном конкретном временном сдвиге (задержке), определяет степень фактического проявления свойств линейной связанности процессов, в частности, интерференции двух сигналов при заданном конкретном значении времени задержки τ.

1.8. Характеристики нестационарных гауссовских и негауссовских процессов

Большое разнообразие нестационарных процессов приводит к необходимости их деления на подклассы.

Гауссовский процесс характеризуется тремя статистическими характеристиками, которые в случае нестационарного процесса могут проявлять зависимость от времени. Это математическое ожидание $M(t)$, дисперсия $\sigma^2(t)$ и корреляционная функция $r(t, \tau)$, которую следует определять в общем случае путем усреднения по ансамблю реализаций.

Класс негауссовских нестационарных процессов представляет собой наиболее общую и сложную вероятностную модель случайного явления. Для характеристики такого процесса в общем случае необходимо определить последовательность корреляционных функций высших порядков, представленных в табл. 1.1. Исследования могут быть упрощены, если уточнить тип нестационарного процесса. Целесообразно различать подклассы нестационарных процессов:

1) по порядку нестационарности, определяя его порядком корреляционной функции, начиная с которой проявляется нестационарность процесса;

2) по скорости изменения статистической характеристики, выделяя процессы с нестационарностью медленной $(\partial Q/\partial t)/Q \ll (\partial x/\partial t)/x$ и быстрой $(\partial Q/\partial t)/Q = (\partial x/\partial t)x$, где Q — статистическая характеристика;

3) по возможности их стационаризации, выделяя процессы, приводящиеся к стационарным, и неприводящиеся;

4) по статистическим характеристикам своих приращений — со стационарными, некоррелированными приращениями и т. д.

5) по виду и их математической модели: элементарные (определяемые детерминированной функцией со случайными параметрами); аддитивно-нестационарные; мультипликативно-нестационарные.

Обратившись к теории нестационарных процессов, можно заметить большое разнообразие определений одной и той же статистической характеристики. Это результат, с одной стороны, сложности проблемы, а с другой — недостаточного развития теории нестационарных случайных процессов (НСП). Приведем определения основных статистических характеристик НСП.

Корреляционная функция НСП представляется одним из следующих определений:

$$K_{\mathrm{I}}(t, \tau) = \langle \mathring{x}(t)\, \mathring{x}(t+\tau) \rangle; \tag{1.94}$$

$$K_{\mathrm{II}}(t, \tau) = \left\langle \mathring{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \mathring{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right\rangle, \tag{1.95}$$

где $\mathring{x}(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$ — центрированный процесс.

Между двумя этими определениями существует очевидная связь:

$$K_{\text{II}}(t,\ \tau) = K\left(t - \frac{\tau}{2},\ \tau\right). \tag{1.96}$$

В первом случае (1.94) корреляционная функция теряет свойство четности (вследствие этого энергетический спектр становится комплексным) и свойство максимальности своего значения при нулевой задержке $K(t,\ 0)$. Может оказаться, что максимум корреляции наступает при некотором $\tau \neq 0$. Нормирование корреляционной функции

$$r_{\text{I}x}(t,\ \tau) = \frac{K_{\text{I}}(t,\ \tau)}{\langle x^2(t)\rangle \langle x^2(t+\tau)]\rangle^{1/2}} \tag{1.97}$$

позволяет в определенной степени устранить влияние изменяющейся во времени дисперсии процесса на вид корреляционной функции.

Определение (1.95) вследствие симметрии сдвига отсчетов на величину $\tau/2$ относительно момента времени t сохраняет свойство четности:

$$K_{\text{II}x}(t,\ \tau) = K_{\text{II}x}(t,\ -\tau). \tag{1.98}$$

Перейдем к рассмотрению спектральных характеристик нестационарных процессов [15, 30, 70]. Применяя теорему Винера—Хинчина к определению (1.94), получают пару преобразований Фурье:

$$G_{\text{P}x}(\omega,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{I}x}(t,\ \tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau; \tag{1.99}$$

$$K_{\text{I}x}(t,\ \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{P}}(\omega,\ \tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega. \tag{1.100}$$

Такое определение спектра НСП принадлежит С. Я. Раевскому. Спектр, называемый спектром мгновенной мощности, является комплексным и характеризует закон распределения энергии колебаний по частоте. Спектр связан с одномерными характеристиками

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{P}x}(\omega,\ t)\, d\omega = \langle x^2(t)\rangle; \tag{1.101}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{P}x}(\omega,\ t)\, dt = \langle |S_x(\omega)|^2\rangle; \tag{1.102}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} G_{\text{P}x}(\omega,\ t)\, d\omega\, dt = \langle E_x\rangle, \tag{1.103}$$

где

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

— спектральная функция; E_x — энергия процесса.

Спектр $G_{\text{Р}}(\omega, t)_y$ на выходе системы с частотной характеристикой $K(\omega, t)$ определяется интегралом свертки

$$G_{\text{Р}}(\omega, t)_y = K_h(\omega, t) \overset{t}{\otimes} G_{\text{Р}}(\omega, t)_x, \tag{1.104}$$

где $\overset{t}{\otimes}$ — символ оператора свертки по времени t.

Г. Д. Лэмпард предложил определение спектра НСП через спектральную характеристику процесса $S_x(\omega, t)$, найденную для всех прошедших значений процесса $x(t)$:

$$G_{\text{Л}}(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} \langle |S_x(\omega, t)|^2 \rangle,$$

где

$$S_x(\omega, t) = \int_{-\infty}^{t} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Спектр Г. Лэмпарда обладает свойствами (1.101)—(1.103), где интегрирование по времени выполняется в пределах $(-\infty, t)$, но не обладает свойством (1.104), в связи с чем неудобен для спектрального анализа систем.

Оригинальное определение спектра НСП предложено М. Пристли на основе спектрального представления амплитудно-модулированного процесса

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega, t)\, e^{i\omega t}\, dZ(\omega), \tag{1.105}$$

что позволяет записать корреляционную функцию

$$K_x(t_1, t_2) = \left\langle \overset{\circ}{x}(t_1)\, \overset{\circ}{x}(t_2) \right\rangle$$

в виде

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega, t_1)\, A^*(\omega, t_2)\, e^{i\omega(t_1 - t_2)}\, d\mu(\omega),$$

где $$d_\mu(\omega) = 1/4\pi^2 \langle |dZ(\omega)|^2 \rangle.$$

Тогда спектр НСП представляется в виде

$$f(\omega, t) = |A(\omega, t)|^2 G(\omega), \tag{1.106}$$

где $G(\omega) = \partial\mu(\omega)/\partial\omega$ — спектр некоторого порождающего стационарного процесса; $A(\omega, t)$ — комплексная частотная характеристика фильтра с переменными параметрами, осуществляющего

преобразование стационарного процесса со спектром $G(\omega)$ в нестационарный процесс.

Дж. Бендат и А. Пирсол [7] предложили определение спектра НСП, названное ими мгновенным, основанное на использовании четной корреляционной функции (1.95):

$$G_{\text{Б}}(\omega,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{II}}(\tau,\ t)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau. \qquad (1.107)$$

Этот спектр вещественный, четный по ω для всех t, обладающий свойствами (1.101)—(1.103), (1.104).

Еще одно определение (спектра У. Марка) известно как «физический» спектр [15]

$$G_{\text{M}}(\omega,\ t,\ w) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(t-u)\, x(u)\, e^{-i\omega u}\, du \right|^2 \right\rangle \qquad (1.108)$$

представляющий результат сглаживания спектра С. Раевского по частоте и времени

$$G_{\text{M}}(\omega,\ t,\ w) = G_{\text{p}}(\omega,\ t) \overset{\omega,\ t}{\otimes} G_w^*(\omega,\ t), \qquad (1.109)$$

где $w(t)$ — весовая функция фильтра, нормированная так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(t)\, dt = 1,$$

$$G_w(\omega,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau,\ t)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Далее следует остановиться на различных формах теоремы Хинчина—Винера для нестационарных процессов. Кроме преобразований (1.99), (1.100) по координатам τ и ω применяют также преобразование по двум переменным, прямое

$$G_x(\omega_1,\ \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(t_1,\ t_2)\, e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}\, dt_1\, dt_2 \qquad (1.110)$$

и обратное

$$K_x(t_1,\ t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega_1,\ \omega_2)\, e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)}\, d\omega_1\, d\omega_2. \qquad (1.111)$$

Кроме двойного по частоте энергетического спектра $G(\omega_1,\ \omega_2)$ вводят аналогичным образом и двойной по частоте взаимный спектр $G_{xy}(\omega_1,\ \omega_2)$ как преобразование Фурье от нестационарной

взаимной корреляционной функции $K_{xy}(t_1, t_2)$.

Теорема Хингина—Винера применима также к усредненным по времени корреляционной функции $\overline{K_x(t, \tau)}$ и спектру $\overline{G(t, \omega)}$:

$$\overline{G(t, \omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \tag{1.112}$$

$$\overline{R(t, \tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \tag{1.113}$$

Следует, однако, заметить, что усреднение по времени устраняет информацию о нестационарности процесса, поэтому выражения (1.112), (1.113) применимы в тех случаях, когда это сглаживание функций допустимо по условиям решения задачи.

Все предложенные определения трудны и неудобны для экспериментатора, так как представляют собой функции двух переменных. Экспериментатор же в случае процессов с медленной нестационарностью предпочитает применять обычный анализатор спектра, предназначенный для спектрального анализа стационарных процессов в соответствии с выражением (1.108), и получит «физические спектры», последовательность которых дает представление об эволюции спектра во времени.

В случае же быстрой нестационарности и периодически нестационарного процесса возможен переход к двум стационарным спектрам — усредненному по времени спектру процесса $\overline{G(t, \omega)}$ и спектру огибающей (спектру четвертого порядка), либо к усреднению спектра по ансамблю реализаций, как будет показано ниже.

1.9. Вероятностные характеристики акустических полей

Полный (в рамках корреляционной теории) состав характеристик случайного однородного стационарного поля [63] с указанием их взаимосвязей приведен на рис. 1.5. Наиболее информативными являются многомерные характеристики, зависящие от четырех переменных (трех пространственных координат x, y, z вектора $\mathbf{d}$ или трех волновых чисел $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$, $\mathbf{k}_z$ и разности моментов времени τ или частоты ω). Это взаимная корреляционная функция $R(\mathbf{d}, \tau)$, взаимный по пространству частотный спектр $G(\mathbf{d}, \omega)$, взаимный по времени волновой спектр $B(\mathbf{k}, \tau)$ и частотно-волновой спектр, или спектр пространственных волновых чисел $E(\mathbf{k}, \omega)$:

$$B(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} R(\mathbf{d}, \tau) e^{-i\mathbf{kd}} dA(\mathbf{d}) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{k}, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \tag{1.114}$$

$$E(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(d, \omega) e^{-i\mathbf{kd}} dA(\mathbf{d}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(k, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.115)$$

Будучи взаимосвязанными преобразованиями Фурье, каждая из этих характеристик несет одинаковую информацию об исследуемом поле, причем меняется лишь форма представления этой информации. Приравнивая к нулю один из параметров, получают более простые, одномерные характеристики, как, например, временную корреляционную функцию $R(0, \tau)$, пространственную корреляционную функцию $R(d, 0)$, спектр мощности в одной точке поля $G(0, \omega)$ и т. д. При этом происходит необратимая потеря ин-

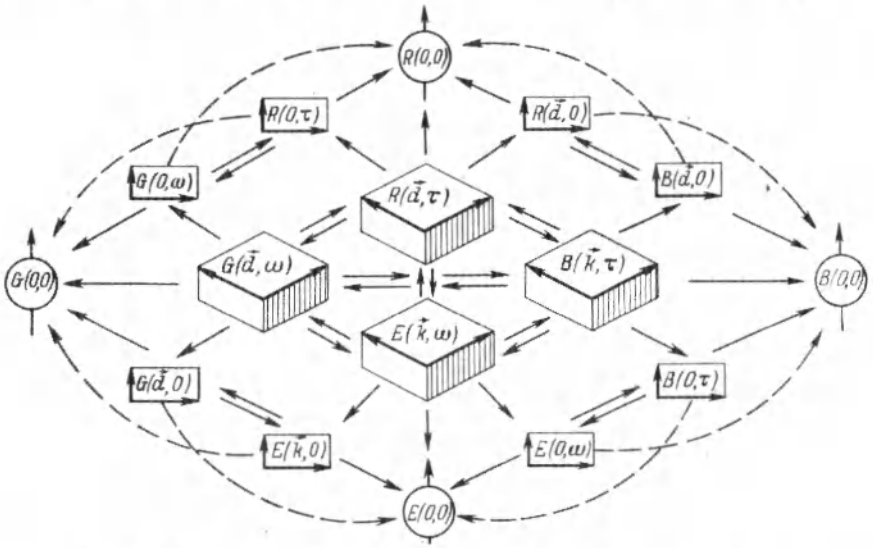

Рис. 1.5. Схема взаимосвязей вероятностных характеристик поля.

⇄ обратные преобразования Фурье без потери информации; ⟶ приравнивание параметра нулю; ⟶ интегрирование по параметру.

формации о тех или иных свойствах поля. Рассмотрим свойства этих характеристик.

Корреляционные характеристики полей. *Временная корреляционная функция* является корреляционной функцией сигнала, измеренного в одной точке поля

$$R_{11}(\tau) = R_{12}(0, \tau) = \overline{p_1(t)\, p_1(t+\tau)} = \overline{p^2(t)}\, r_{11}(\tau). \quad (1.116)$$

Корреляционная функция может быть измерена в любой полосе частот, ограниченной как естественной шириной спектра исследуемого физического процесса, так и искусственно, путем включения фильтров в измерительный тракт.

При экспериментальных исследованиях вначале измеряют спектры звукового давления в различных точках поля, определяя

область частот и область пространства, где свойства поля не зависят от координат точки. Далее в этой области практически однородного поля измеряют нормированные пространственные корреляционные функции. Для изотропного поля выбор направления измерения корреляционной функции не оказывает влияния на результат, поэтому

$$R_{12}(x)_\omega = R_{12}(y)_\omega = R_{12}(z)_\omega = R_{12}(d)_\omega = \\ = \overline{p_1(0,\ t)\, p_2(d,\ t)} = \overline{p^2(t)}\, r_{12}(d,\ 0)_\omega. \qquad (1.118)$$

Пространственно-временные корреляционные функции, будучи двумерными, измеряются практически как одномерные характеристики при развертке функции во времени τ для ряда фиксированных значений координат d_i, играющих роль параметра для данного семейства функции

$$R_{12}(d_i,\ \tau) = \overline{p_1(0,\ t)\, p_2(d_i,\ t+\tau)} = \overline{p^2}\, r_{d_i}(\tau), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \qquad (1.121)$$

Спектральные характеристики полей. Все рассмотренные корреляционные характеристики определяются экспериментально с помощью корреляторов как временно́е среднее произведений двух исследуемых случайных процессов в соответствии с приведенными выше формулами, причем, как было отмечено, в корреляционный анализ часто вносят элементы спектрального анализа путем использования фильтров при корреляционных измерениях. Вместо корреляционных функций можно характеризовать акустическое поле непосредственно с помощью спектральных характеристик, что наиболее удобно для выявления частотных свойств поля. Спектральные характеристики связаны с соответствующими корреляционными функциями преобразованиями Фурье, и поэтому формально содержат тот же объем информации об исследуемом поле.

Пользуясь матричными обозначениями, можно связь спектральных и корреляционных характеристик представить парой преобразований Фурье:

$$G_{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau; \qquad (1.130)$$

$$R_{ij}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(\omega)^{i\omega\tau}\, d\omega. \qquad (1.131)$$

Аналогичные характеристики нестационарных полей отличаются зависимостью от времени t, а характеристики неоднородных полей проявляют также зависимость от координаты **d** точки поля.

Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ НЕГАУССОВСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Модели физических процессов

Результаты исследований свойств различных реальных объектов, сигналов, шумов упорядочиваются и формализуются в создании математической модели исследуемого явления. Любая модель призвана отражать лишь одно или несколько определенных свойств данного явления и всегда содержит ограниченную информацию о нем. По мере расширения знаний об исследуемой стороне явления модель совершенствуется, усложняется. Другие стороны явления описываются иными моделями, которые могут быть не связаны между собой (например, речь можно изучать в информационном, акустическом, филологическом либо ином аспекте).

Различают детерминированные и вероятностные математические модели. Более общая — вероятностная модель, отражающая как устойчивые свойства, так и случайный характер наблюдаемого явления. Последнее возникает всякий раз, когда данное явление определяется множеством факторов, причин, условий. Тогда и нецелесообразно и невозможно оценить действие каждого отдельного фактора, а необходимо установить более общие — вероятностные законы явления.

Можно выделить следующие классы явлений по степени содержания случайных факторов:

1) полностью случайные, определяемые множеством однородных факторов (например, электронные шумы, броуновское движение, давление газов — явления, обусловленные действием бесчисленного множества частиц);

2) с преобладанием одного или нескольких сильных факторов и множеством слабых однородных факторов (например, периодический сигнал на фоне собственных шумов усилителя и т. п.);

3) описываемые квазидетерминированными функциями, т. е. регулярными функциями, некоторые параметры которых представляются случайными, если они не оказывают влияния на результат или неизвестны исследователю.

В первом случае только вероятностное описание способно дать характеристику общих закономерностей явления. Детерминированный подход возможен лишь при абстрактных рассуждениях (задав начальные условия движения бесконечно большого числа частиц, можно в принципе предсказать их движение), но практически сделать это невозможно.

Во втором случае на первых стадиях изучения явления можно пользоваться детерминированными методами, но по мере повышения точности описания, измерения, представления явления неизбежен переход к использованию вероятностных моделей.

В третьем случае вероятностная модель необходима лишь при решении некоторых задач, например, для отражения того факта, что определенные параметры сигнала неизвестны до проведения опыта, а получаемые в ходе отдельных опытов значения его являются случайной величиной. Так, если на стороне передачи известны амплитуда, частота и начальная фаза периодического сигнала, то на стороне приема один или несколько параметров сигнала обязательно неизвестны (ибо смысл передачи сообщений в том и состоит, чтобы с помощью сигнала сообщить неизвестное). Тогда факт неизвестности параметра сигнала, например фазы, отражают введением вероятностного описания его, что и позволяет количественно оценить качество обнаружения или измерения свойств слабого сигнала на фоне шумов. Из свойств рассмотренных случайных явлений следует, что детерминированная модель представляет собой частный, вырожденный случай вероятностной модели.

Рассмотрим свойства вероятностных моделей. Наиболее общий способ представления случайного явления — описание его с помощью случайной функции, полностью характеризуемой n-мерной плотностью вероятности или бесконечной последовательностью обобщенных корреляционных или иных характеризующих функций. Таким образом, случайная функция, случайный процесс (ансамбль реализаций, на котором задана вероятностная мера) представляют собой абстракцию — обобщенную вероятностную модель случайного явления.

Недостаток такого обобщенного вероятностного описания, особенно существенный при экспериментальных исследованиях, состоит в необходимости определения бесконечно большого числа характеристик сложного случайного явления, описываемого нестационарной негауссовской многомерной плотностью вероятности. Поэтому разрабатывают конкретные (частные) вероятностные модели, в которых сложный случайный процесс представляют состоящим из конечного числа простых элементов — случайных и детерминированных функций, определенным образом связанных между собой. При таком описании случайный процесс может быть охарактеризован конечным числом функций и параметров. Это свойство чрезвычайно ценно для практики, что и определяет важность задачи создания конкретных моделей случайных физических явлений. По мере расширения объема знаний об исследуемом объекте, явлении сформулированная вначале простая формальная модель совершенствуется, заменяется более информативной структурной моделью.

В теории измерений [57, 58, 60] рассматривают иерархию моделей различного уровня. По степени точности описания явлений различают: *идеальную модель*, дающую истинное, полное, исчер-

пывающее вероятностное описание явления, чего практически достигнуть невозможно, и *рабочую модель*, дающую частичное, но доступное исследователю описание явления, достаточно точное для решаемой задачи. Анализ результатов, получаемых с привлечением вероятностных моделей различного вида, и сравнение результатов, найденных с использованием рабочих моделей, позволяют теоретически оценить погрешность измерений, разделить их на отдельные составляющие, выявить причины их возникновения.

В практике статистических измерений использование вероятностных моделей играет более простую роль: перед проведением измерений экспериментатор на основании имеющегося опыта выбирает одну-две конкретные (априорные) модели исследуемого явления, откуда следует перечень статистических характеристик, функций или параметров, которые необходимо измерить. Далее экспериментатор выбирает метод измерения каждой из требуемых статистических характеристик соответственно поставленной задаче (см. гл. 3). В результате измерений подтверждается выбор одной из априорных моделей, которая теперь уже становится апостериорной моделью процесса для данной постановки задачи.

Ниже будут рассмотрены конкретные структурные модели, содержащие простые случайные и детерминированные функции со случайными и детерминированными параметрами.

Отметим еще раз, что одно и тоже физическое явление, в зависимости от условий задачи, может быть описано различными моделями. И вероятностные модели не являются исключением из этого правила. Приводимые ниже вероятностные модели показывают, что одна и та же осциллограмма процесса, трактуемая как реализация процесса, может быть описана различными вероятностными моделями — случайными процессами различного класса.

2.2. Методы представления частотных свойств статистических характеристик случайных процессов

Можно представить следующие две различные цели измерения статистических характеристик реальных процессов и полей:

1) определение характеристик процессов, действующих на входе и выходе конкретного устройства, с целью описания его как канала связи;

2) получение характеристик процесса или поля, генерируемых (излучаемых) конкретной системой, устройством.

В первом случае измерения выполняются, как правило, в широком диапазоне частот, соответствующем рабочему диапазону частот исследуемой системы. Во втором — необходимо получить такой комплекс статистических характеристик процесса, чтобы их можно было использовать при оценке различных систем, работающих в различных диапазонах частот под воздействием процесса, генерируемого исследуемой системой. С этой целью предлагается измерять комплекс характеристик в смежных полосах

частот, что позволяет получить сглаженную частотную зависимость выбранной статистической характеристики:

$$Q(\omega) = Q\left[\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t')\, h_{\Phi}(t-t')\, dt'\right], \tag{2.1}$$

где Q — оператор определения статистической характеристики; $h_{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_i(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$ — импульсная характеристика фильтра с частотной характеристикой $K_i(\omega)$, полосой пропускания $\Delta\omega$ и средней частотой ω_i.

Поясним предложенный принцип измерения частотных свойств статистических характеристик. Известно, что спектр процесса характеризует распределение энергии колебаний по частоте, практически — распределение по частоте дисперсий колебаний в смежных полосах частот. Подобно распределению дисперсий, целесообразно характеризовать таким же образом распределение по частоте кумулянтов высших порядков, коэффициентов модуляции, коэффициентов взаимной корреляции двух процессов и т. п., определяемых в смежных полосах частот. Формирование такой зависимости от частоты, как будет показано ниже, может быть обусловлено как физикой образования процесса, так и суммированием процессов различной физической природы, обладающих различными спектрами и статистическими характеристиками, возможно, и не зависящими от частоты. Частотная зависимость статистической характеристики позволяет различать процессы по виду этой зависимости, например, при диагностике состояния исследуемой системы или выявлении источника данного процесса. При необходимости по данным частотной зависимости может быть определена статистическая характеристика в любом широком диапазоне частот. Рассмотрим в общей постановке этот вопрос.

Пусть процесс фильтруется идеальными полосовыми фильтрами и в каждой полосе частот характеризуется статистической характеристикой $Q(\omega_i)$. Тогда аналогичная характеристика в широкой полосе частот может быть найдена как характеристика Q суммы некоррелированных процессов ξ_i. Для линейного оператора

$$Q = Q\left[\sum_{i=N}^{N+n} \xi_i(t)\right] = \sum_{i=N}^{N+n} Q[\xi_i(t)] = \sum_{i=N}^{N+n} Q(\omega_i). \tag{2.2}$$

В случае нелинейного оператора Q возможно проявление взаимодействия процессов при их суммировании, выражающееся в не нулевом значении слагаемых вида $\overline{\xi_p^m(t)\,\xi_q^n(t)}$, что должно учитываться при расчете конкретной характеристики. Для дисперсии процесса $D = \overline{\xi^2(t)}$ в широкой полосе частот получим известное правило

$$D\left[\sum_{i=N}^{N+n} \xi_i(t)\right] = \sum_{i=N}^{N+n} D_{\xi_i} + \sum_i \sum_j \overline{\xi_i(t)\,\xi_j(t)} = \sum_{i=N}^{N+n} D_i,$$

где учтено свойство некоррелированности процессов в смежных неперекрывающихся полосах частот $\overline{\xi_i(t)\xi_j(t)}=0$.

Необходимость измерения частотной зависимости различных статистических характеристик будем учитывать при обсуждении свойств различных моделей случайных процессов.

2.3. Нелинейное преобразование стационарного гауссовского шума

Ряд физических процессов может быть представлен моделью нелинейного преобразования некоторого порождающего процесса $\xi(t)$:

$$\nu(t)=f[\xi(t)]. \tag{2.3}$$

Часто в качестве порождающего процесса может быть взят гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ с нулевым средним $M_\xi=0$, дисперсией σ_ξ^2 и нормированной корреляционной функцией $r_\xi(\tau)$, т. е. это общий случай шума, не белого, с произвольным спектром

$$G_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} r_\xi(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Если можно представить функцию $f(x)$ степенным рядом, то аналогично описывается и процесс

$$\nu(t)=a_0+\sum_n a_n\xi^n(t). \tag{2.4}$$

Видно, что любая корреляционная или моментная функция K_{rs} процесса $\nu(t)$ представляется как сумма корреляционных (моментных) функций возрастающих порядков гауссовского стационарного процесса $\xi(t)$. Последние же зависят от двух характеристик: σ_ξ^2 и $r_\xi(\tau)$, процесса $\xi(t)$, следовательно, и корреляционная функция любого порядка процесса $\nu(t)$ будет зависеть от этих же переменных $K_{rs}[\nu(t)]=F[\sigma_\xi^2,\ r_\xi(\tau)j]$ и не зависеть от времени. Таким образом, процесс $\nu(t)=f[\xi(t)]$ является в общем случае стационарным, негауссовским процессом.

Для оценки изменений спектра при нелинейном преобразовании процесса рассмотрим корреляционную функцию процесса $\nu(t)$:

$$K_\nu(\tau)=M[\nu(t)\nu(t+\tau)]=M[\sum a_p\xi^p(t)][\sum a_q\xi^q(t+\tau)]=$$
$$=f_1(a_p,\ a_q)\,r_\xi(\tau)+f_2(a_p,\ a_q)\,r_\xi^2(\tau)+f_3(a_p,\ a_q)\,r_\xi^3(\tau)+\ \ldots \tag{2.5}$$

Энергетический спектр найдем как преобразование Фурье

$$G_\nu(\omega)=\sum_n f_n(a_p,\ a_q)\int_{-\infty}^{\infty} r^n(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\sum_n b_nG_{n\xi}(\omega). \tag{2.6}$$

Свойства слагаемых $G_n(\omega)$ оцениваются формулой, предложенной Райсом

$$G_{n\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega - x)\, G_{(n-1)\xi}(x)\, dx. \qquad (2.7)$$

Из общих свойств интеграла свертки следует, что если функция $G(\omega)$ сосредоточена вблизи частоты ω_0, то значения интеграла свертки будут группироваться около значений $n\omega_0$.

Таким образом, спектр процесса $\nu(t)$, являющегося нелинейным преобразованием от $\nu(t)$, содержит слагаемые $G_{n\xi}(\omega)$, группирующиеся около частот ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$ и т. д., где ω_0 — средняя частота спектра $G_{\xi}(\omega)$. Поэтому в узкополосном спектре $G_{\xi}(\omega)$ получим ряд максимумов на частотах nf_0, что аналогично образованию высших гармоник при нелинейном преобразовании гармонического колебания. При нелинейном преобразовании широкополосного процесса ряд максимумов исходных спектров $G_{n\xi}(\omega)$ сливается, отдельные слагаемые спектра перекрываются, т. е. спектр обогащается высокими частотами, расширяется.

При подаче такого рода широкополосного негауссовского процесса на конкретный измерительный тракт происходит выделение рабочей (для данного тракта) полосы частот, что ведет к некоторой нормализации процесса вследствие фильтрации. Известно общее выражение для коэффициентов асимметрии γ_3 и эксцесса γ_4 процесса $\eta(t)$ на выходе фильтра низших частот, если на его вход действует негауссовский процесс $\nu(t)$:

$$\gamma_{3\eta} \approx \sqrt{\frac{\tau_\nu}{\tau_\eta}}\, \gamma_{3\nu}, \quad \gamma_{4\eta} \approx \frac{\tau_\nu}{\tau_\eta}\, \gamma_{4\nu}, \qquad (2.8)$$

где τ_ν и $\tau_\eta = 1/\Delta f_{\text{ф}}$ — интервал корреляции процессов $\nu(t)$ и $\eta(t)$ на входе и выходе фильтра соответственно.

Рассмотрим далее основные свойства статистических характеристик процесса $\nu(t)$ при измерении их в узких полосах частот для получения частотной зависимости. В спектральной теории обобщенных корреляционных функций [73] доказывается следующая теорема о нечетных моментах: «если коэффициент передачи фильтра сосредоточен в определенной полосе частот, т. е. $K_\eta(\omega) = 0$ для $|\omega \pm \omega_0| > 0$ и $|K_\eta(\omega)| < C$ для $(\omega \pm \omega_0) \leqslant \Delta$ и существуют спектральные моменты порядка N для исследуемого процесса $\nu(t)$, то для процесса

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S_\nu(\omega)\, K(\omega)\, d\omega,$$

где $S_\nu(\omega)$ — спектральное представление процесса

$$\nu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S_\nu(\omega)\, d\omega,$$

все нечетные моменты до порядка N тождественно равны нулю». Иначе говоря, узкополосная фильтрация существенно снижает нечетные моменты процесса, так как процесс на выходе полосового фильтра приобретает симметричное распределение. Таким образом, частотную зависимость целесообразно получать лишь для четных моментов на выходах полосовых фильтров.

Итак, негауссовский процесс, описываемый моделью нелинейного преобразования стационарного гауссовского процесса, характеризуется следующими особенностями статистических характеристик: имеет широкий, достаточно гладкий сплошной спектр или спектр с последовательностью максимумов на кратных частотах: кумулянты высших порядков отличаются от нуля; при фильтрации полосовыми фильтрами кумулянты четных порядков на выходах фильтров монотонно уменьшаются при сужении полос фильтров, а нечетные — практически равны нулю.

2.4. Элементарные квазидетерминированные процессы

Элементами многих моделей нестационарных или негауссовских процессов являются детерминированные функции со случайными параметрами, которые сами также представляются простейшими моделями нестационарных негауссовских процессов. Рассмотрим свойства таких процессов.

Синус со случайной начальной фазой. Этот случайный процесс представляется ансамблем синусоид (рис. 2.1):

$$x_i(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_i), \tag{2.9}$$

начальные фазы φ_i которых случайны и характеризуются равной вероятностью в пределах $\pm\pi$

$$w(\varphi) = 1/2\pi, \ |\varphi| < \pi. \tag{2.10}$$

Заметим, что эту модель следует отличать от модели синуса со случайной во времени фазой, которая будет рассмотрена ниже. Вероятностные характеристики процесса (2.9) находим путем усреднения по ансамблю реализаций, т. е. усредняя по начальным фазам:

математическое ожидание

$$M_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\, d\varphi = 0; \tag{2.11}$$

дисперсию

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\, d\varphi = \frac{A_0^2}{2}; \tag{2.12}$$

корреляционную функцию второго порядка

$$K_{11}(\tau)_x = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin[\omega_0 (t + \tau) + \varphi]\, d\varphi = \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \tag{2.13}$$

Одномерную плотность вероятности найдем как предел величины, соответствующей вероятности пребывания процесса в пределах Δx,

$$w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n/N}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi}{\pi \Delta x} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad \varphi = \arcsin \frac{x(t)}{A_0},$$

где $n = \Delta\varphi (N/\pi)$ — число реализаций, имеющих интервал начальных фаз $\Delta\varphi$ при конечном общем числе реализаций N. Подставляя сюда выражение $\partial\varphi/\partial x = [A\sqrt{1 - x^2/A_0^2}]^{-1}$, получаем арксинусный закон плотности вероятности

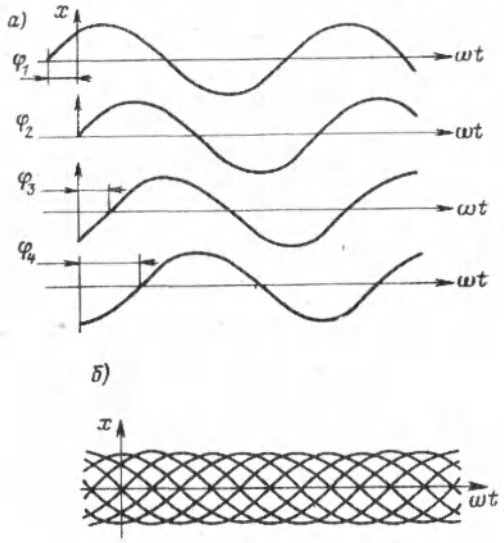

Рис. 2.1. Выборочный ансамбль реализаций, представляющий синус со случайной равномерно распределенной в пределах $\pm\pi$ начальной фазой, при раздельном (*а*) и совместном (*б*) изображениях реализаций ансамбля.

$$w(x) = \frac{1}{\pi A \sqrt{1 - x^2/A_0^2}}. \tag{2.14}$$

Центральные моменты нечетных порядков этого распределения в силу его симметрии равны нулю, а нечетные моменты высших порядков, вычисленные согласно (1.4), равны

$$\mu_4 = \frac{3}{8} A^4, \quad \mu_6 = \frac{5}{16} A^6,$$

отсюда находим кумулянты:

$$\varkappa_1 = M_1 = 0; \quad \varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 = -\frac{3}{8} A^4;$$

$$\varkappa_2 = \sigma_x^2 = A^2/2; \quad \varkappa_5 = 0;$$

$$\varkappa_3 = \mu_3 = 0; \quad \varkappa_6 = \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3 = \frac{5}{4} A^6,$$

коэффициенты асимметрии $\gamma_3=0$, коэффициент эксцесса $\gamma_4=x_4/x_2^2=-1{,}5$ и нормированные кумулянты (кумулянтные коэффициенты) пятого и шестого порядка: $\gamma_5=0$; $\gamma_6=x_6/x_2^3=10$.

Корреляционные функции нечетных порядков равны нулю, а для четных — находятся через центральные моментные функции согласно табл. 1.1 как зависящие лишь от разности моментов времени τ.

Таким образом, синус со случайной начальной фазой, равномерно распределенной в интервале $\pm\pi$, представляется ансамблем синусоид со случайным временным сдвигом и является стационарным негауссовским процессом с нулевым средним и нулевыми корреляционными функциями и кумулянтами нечетных порядков. В силу однородности реализаций такой стационарный процесс обладает свойством эргодичности и поэтому все его вероятностные характеристики могут быть найдены по одной реализации путем усреднения по времени, например, среднее значение

$$M_x=\lim_{T\to\infty}\frac{A}{T}\int_0^T\sin(\omega_0 t+\varphi)\,dt=0;$$

дисперсия

$$\sigma_x^2=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{T}\int_0^T\sin^2(\omega_0 t+\varphi)\,dt=\frac{A^2}{2};$$

корреляционная функция

$$R_{11}(\tau)_x=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{T}\int_0^T\sin(\omega_0 t+\varphi)\sin[\omega_0(t+\tau)+\varphi]\,dt=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau.$$

При фильтрации реализации процесс выделяется только в одной полосе частот как обычное гармоническое колебание с присущими ему формально определяемыми статистическими характеристиками, найденными выше, в которых, казалось бы, отсутствует элемент случайности. Но случайность имеет место — это начальная фаза, которая явно выступает как случайная величина при представлении процесса ансамблем реализаций и оказывается скрытой при исследовании характеристик отдельной реализации процесса.

Синус с постоянной (детерминированной) начальной фазой. Это пример другого крайнего случая, когда случайный процесс вырождается в детерминированную (неслучайную) функцию, т. е. ансамбль реализации сводится к одной единственной функции, являющейся формально математическим ожиданием процесса, совпадающим с самой функцией $x(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$, а дисперсия этого «случайного» процесса оказывается равной нулю.

Синус со случайной начальной фазой, распределенной вблизи некоторого значения φ_0. Свойства процесса со случайной начальной фазой при неравномерной плотности вероятности этой фазы

(рис. 2.2) определяются не столько видом распределения фазы, сколько дисперсией распределения. Любое распределение случайной фазы с малой дисперсией $\sigma_\varphi^2 \ll \pi^2$, например гауссовское, можно заменить δ-функцией при оценке статистических характеристик процесса:

$$w(\varphi) = \frac{1}{\sigma_\varphi \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right] \to \delta(\varphi-\varphi_0).$$

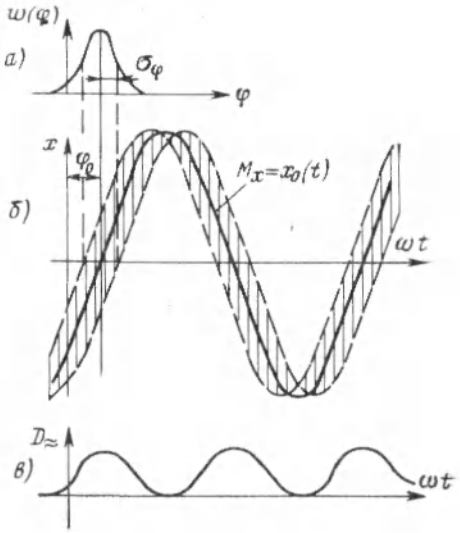

Рис. 2.2. Плотность вероятности начальной фазы (*а*), «рукав», занимаемый реализациями ансамбля, отличающимися отклонением начальной фазы $|\varphi-\varphi_0| \leqslant \sigma_\varphi$ относительно среднего (*б*), и приближенное значение дисперсии процесса со случайной фазой (*в*).

При этих условиях математическое ожидание синуса со случайной фазой приближенно равно

$$M_x = \int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) A \sin(\omega_0 t + \varphi)\, d\varphi \approx A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (2.15)$$

т. е. описывается той же функцией, что и отдельная реализация процесса, соответствующая среднему значению начальной фазы φ_0.

Дисперсия процесса оценивается аналогичным образом:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) A^2 \left[\sin(\omega_0 t + \varphi) - \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right] d\varphi \approx$$

$$\approx \frac{A^2 \sigma_\varphi^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \qquad (2.16)$$

Дисперсия (см. рис. 2.2) максимальна и равна $A^2\sigma_\varphi^2/4$ в точках, где $\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ проходит через нуль, и приближается к нулю в точках экстремальных значений синуса. Таким образом, данная модель является случайным процессом с нестационарными сред-

ним значением, дисперсией и кумулянтами, а свойства последних близки к свойствам кумулянтов распределения фазы $w(\varphi)$.

Моменты высших порядков находятся аналогично (2.16), откуда можно вычислить кумулянты, которые, с одной стороны, будут близки по свойствам к кумулянтам распределения $w(\varphi)$, а с другой — будут зависеть от времени. При увеличении дисперсии разброса значений случайной начальной фазы σ_φ будет сглаживаться зависимость дисперсии σ_φ^2 самого процесса от времени, увеличиваясь в то же время по абсолютной величине, процесс при $\sigma_\varphi > 2$ приближается по своим свойствам к стационарному.

Синус со случайной амплитудой и частотой. Синус со случайной амплитудой представляется ансамблем гармонических колебаний, амплитуда каждого из которых постоянна во времени, но меняется от реализации к реализации случайно — является случайной величиной с плотностью вероятности $w(A)$ (не следует путать эту модель с другой — с гармоническим колебанием, амплитуда которого изменяется во времени случайным образом — это амплитудно-модулированное колебание, описываемое мультипликативной моделью, см. ниже). Математическое ожидание синуса со случайной амплитудой

$$M_x = \int_{-\infty}^{\infty} w(A)\, A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\, dA = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (2.17)$$

является синусом со средней амплитудой $A_0 = \int_{-\infty}^{\infty} A w(A)\, dA$.

Дисперсия процесса

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (A - A_0)^2\, w(A) \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\, dA = \sigma_a^2 \left[1 - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] \qquad (2.18)$$

определяется дисперсией амплитуды σ_a^2 и проявляет зависимость от времени.

Процесс является нестационарным, а степень отклонения его от гауссовского, определяемая кумулянтами высших порядков, целиком зависит от свойств распределения амплитуд $w(A)$, т. е. процесс будет гауссовским при гауссовском законе распределения $w(A)$.

Рассмотрим далее модель процесса в виде синуса со случайной частотой. Формируя ансамбль реализаций такого процесса при ω, распределенной, например, равномерно в некоторых пределах ω_1, ω_2, можно заметить, что все реализации $x = A \sin \omega_0 t + \varphi$ при $t = 0$ должны иметь $x = A \sin \varphi_0$, т. е. исходить из одной точки, а далее — расходиться тем сильнее, чем больше различие граничных частот реализаций $\omega_0 - \omega_1$. Следовательно, и статистические характеристики процесса вначале будут проявлять зависимость от времени, а затем — сглаживаться.

Чаще всего исследователя интересуют характеристики, установившиеся во времени, чему соответствует модель синуса со случайной частотой и случайной начальной фазой. Эта модель практически совпадает с моделью синуса со случайной начальной фазой, характеристики которой рассмотрены выше.

Периодический процесс со случайным и детерминированным значениями временного сдвига реализаций. Представление периодического процесса в виде ряда Фурье позволяет оценить свойства процесса по свойствам отдельных гармоник, рассмотренным выше,

$$y(t) = \sum_k A_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) \tag{2.19}$$

где k — номер гармоники.

Вместо случайной фазы для периодического процесса удобнее задавать случайный временнóй сдвиг $t_i = \varphi_k/\omega_k$ отдельных реализаций. Если случайный сдвиг t_i равномерно распределен в пределах основного периода T_1 колебания, то каждая гармоника в отдельности и периодический процесс $y(t+t_i)$ в целом будут моделью стационарного процесса со средним значением M_y и дисперсией

$$\sigma_y^2 = \sum_k \sigma_k^2 = \sum_k (A_k^2/2).$$

Следовательно, возможно определение статистических характеристик по одной реализации процесса. При фильтрации реализации процесса на выходе полосового фильтра окажется отдельная гармоника (ее характеристики рассмотрены выше), либо несколько гармоник (на высоких частотах), сумма которых будет характеризоваться дисперсией

$$\sigma_\Phi^2 = \sum_{k=N}^{N+n} \sigma_k^2$$

и коэффициентом эксцесса

$$\gamma_4 = \varkappa_4/\varkappa_2^2 = (3 \sum A_k^4)/[2(\sum A_k^2)^2] - 3 < -\frac{3}{2},$$

зависящим от числа гармоник и соотношения их амплитуд.

В случае же детерминированного сдвига t_0 имеем детерминированную периодическую функцию

$$y(t) = \sum_k A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

2.5. Мультипликативные процессы

Широкий класс сигналов и шумов может быть представлен в виде мультипликативной модели

$$z(t) = x(t)\, y(t). \tag{2.20}$$

Для независимых случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ с плотностями вероятности w_{1x} и w_{1y} функция распределения их произведения определяется выражением [36]

$$w_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1x} w_{1y}\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|}. \qquad (2.21)$$

Отсюда можно сделать общий вывод о том, что если один из сомножителей является нестационарным случайным процессом (его функция распределения зависит от времени), или же детерминированной функцией времени, то и произведение будет характеризоваться плотностью вероятности $w_1(z)$, зависящей от времени, т. е. процесс $z(t)$ нестационарен. Более конкретные свойства могут быть выявлены для конкретных мультипликативных моделей процессов.

Важную роль среди процессов, описываемых мультипликативной моделью, играют амплитудно-модулированные процессы, модель которых записывается в виде

$$z(t) = [1 + mx(t)]\, y(t). \qquad (2.22)$$

Плотность вероятности модулированного процесса

$$w_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{1x}\left(\frac{x-1}{m}\right) w_{1y}\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|}. \qquad (2.23)$$

В качестве элементарных процессов, образующих эту модель, могут быть взяты гауссовские стационарные процессы $\xi(t)$, $\eta(t)$, периодические процессы $a(t)$ или гармонические колебания с детерминированной или случайной начальной фазой.

В соответствии с терминологией, принятой в радиотехнике, будем называть: $y(t)$ — несущий процесс, $x(t)$ — модулирующий процесс, $m<1$ — коэффициент модуляции. При этом процесс $x(t)$ должен быть нормирован следующим образом:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\, dt = 1/2. \qquad (2.24)$$

Выбор нормирующего коэффициента, равного $^1/_2$, необходим для того, чтобы определение коэффициента модуляции в общем случае совпадало с известным определением, принятым в радиотехнике для гармонических несущей и модулирующей функций: $(1+m\sin\Omega t)\sin\omega_0 t$, где коэффициент модуляции m определен как отношение амплитуды модулирующей функции к амплитуде несущей. В этом случае $x=\sin\Omega t$, откуда норма модулирующей функции $\sigma_x^2 = 1/T\int_0^T \sin^2\Omega t = {}^1/_2$. При принятом значении нормы модулирующей функции можно производить измерения коэффициента модуляции любого процесса с помощью прибора, отградуированного по гармоническому модулированному сигналу.

Оговорим далее следующие свойства процессов:

независимость несущего (высокочастотного) и модулирующего (низкочастотного по сравнению с $y(t)$) процессов, вследствие чего

$$M[x^k(t)\,y^q(t)] = M[x^k(t)]\,M[y^q(t)]; \qquad (2.25)$$

образующие гауссовские шумы имеют нулевое среднее, поэтому с учетом (2.24) имеем

$$\left.\begin{array}{l} \langle\eta\rangle = 0;\ \langle\eta^2\rangle = {}^1/_2;\ \langle\eta^3\rangle = 0;\ \langle\eta^4\rangle 3/4; \\ \langle\xi\rangle = 0;\ \langle\xi^2\rangle = \sigma_\xi^2;\ \langle\xi^3\rangle = 0;\ \langle\xi^4\rangle = 3\sigma_\xi^4. \end{array}\right\} \qquad (2.26)$$

В зависимости от характера несущего и модулирующего процессов возможны следующие виды модулированных процессов (табл. 2.1):

1) синусоидальная несущая $y_t = A\sin(\omega t + \psi)$ модулирована периодическим процессом $a_t = \sum_k c_k \sin(\Omega_k t + \varphi)$;

2) синусоидальная несущая $y(t)$ модулирована шумом $\eta_t = \eta(t)$;

3) шумовая несущая $\xi_t = \xi(t)$ модулирована периодическим процессом a_t;

4) шумовая несущая ξ_t модулирована шумом η_t.

Прокомментируем представленные в табл. 2.1 результаты вычисления статистических характеристик этих процессов. При вычислении характеристик процесса кроме математической модели (2.22) и вида указанных выше образующих процессов задавался также и характер начальной фазы для квазидетерминированной составляющей. Рассмотрены два крайних случая — детерминированная начальная фаза φ модулирующей функции и ψ — несущей и случайные начальные фазы φ и ψ с равномерной плотностью распределения $w/\varphi = {}^1/_2\pi$ или $w(\psi) = {}^1/_2\pi$ в пределах периода колебаний.

Для определения класса процесса $z(t)$ вначале вычислялись его центральные моменты μ_i путем усреднения по ансамблю реализаций с использованием свойств (2.25) и (2.26), а затем — кумулянты: $\varkappa_1(t) = M[z(t)]$ — математическое ожидание; $\varkappa_2(t) = \mu_2(t) = \sigma_z^2$ — дисперсия, а также $\varkappa_3 = \mu_3(t) = 0$ — вследствие симметрии плотности вероятности несущей, $\varkappa_4 = \mu_4(t) - 3\mu^2(t)$, откуда вычислялся коэффициент эксцесса $\gamma_4 = \varkappa_4/\varkappa_2^2$. В результате получены следующие свойства моделей процессов.

Синусоидальная несущая модулируется периодическим процессом $a_t = a(t)$. В зависимости от принятого закона распределения начальных фаз квазидетерминированных процессов различаются следующие четыре вида моделей процессов (см. табл. 2.1):

1а) при детерминированных начальных фазах модулирующей функции и гармонической несущей имеем детерминированную функцию;

1б) при случайной фазе несущей процесс $z(t)$ — нестационарный второго порядка (зависимость дисперсии процесса $z(t)$ от

Таблица 2.1

Кумулянты модулированного процесса $z(t)=(1+mx_t)y_t$

№ модели	$x_t=x(t)$	$y_t=y(t)$	φ	ψ	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\gamma_4=\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}$	Класс $z(t)$
1а	$\sin(\Omega t+\varphi)$	$A\sin(\omega_0 t+\psi)$	φ_0	φ_0	$z(t)$	0	0	Детерминированная функция
1б	a_t	„	φ_0	$w_\psi=\frac{1}{2\pi}$	0	$\frac{A^2}{2}(1+ma_t)^2$	$-\frac{3}{2}$	$НС_2$, НГ
1в	a_t	„	$w_\varphi=\frac{1}{2\pi}$	ψ_0	y_t	$\frac{m^2}{2}y_t$	$-\frac{3}{2}<\gamma_{4a}<0$	$НС_1$, НГ
1г	a_t	„	$w_\varphi=\frac{1}{2\pi}$	$w_\psi=\frac{1}{2\pi}$	0	$\frac{A^2}{2}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)$	$\frac{3A^4}{16}(2m^4\mu_{4a}-m^4+2m^2-2)$	Ст, НГ
2а	$\eta(t)$	$A\sin(\omega_0 t+\psi)$	—	ψ_0	y_t	$\frac{m^2}{2}y_t^2$	0	$НС_1$, Г
2б	„	„	—	$w_\psi=\frac{1}{2\pi}$	0	$\frac{A^2}{2}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)$	$-\frac{3(1-m^2-m^4)}{2(1+m^2)^2}$	Ст, НГ
3а	a_t	$\xi(t)$	φ_0	—	0	$(1+ma_t)^2\sigma_\xi^2$	0	$НС_2$, Г
3б	„	„	$w_\varphi=\frac{1}{2\pi}$	—	0	$\left(1+\frac{m^2}{2}\right)\sigma_\xi^2$	$\frac{3(4m^4\mu_{4a}-m_4-8m^2)}{(2+m^2)^2}$	Ст, НГ
4	$\eta(t)$	$\xi(t)$	—	—	0	$\left(1+\frac{m^2}{2}\right)\sigma_\xi^2$	$\frac{6m^2(4+m^2)}{(2+m^2)^2}$	Ст, НГ

Обозначения: $НС_k$, Ст — нестационарный процесс, порядка k, или стационарный процесс; НГ, Г — негауссовский процесс или гауссовский; $a_t=a(t)$ — периодический модулирующий процесс; $\eta(t)$, $\xi(t)$ — гауссовские модулирующий и несущий процессы; $\varkappa_1=M_z$ — математическое ожидание; $\varkappa_2=\sigma_z^2$ — дисперсия процесса $z(t)$.

времени определяется модулирующей функцией), негауссовский с арксинусным законом распределения плотности вероятности $w_1(z) = 1/\pi\,[A^2(1+ma_t)^2 - z^2]^{1/2}$ и соответствующим ему коэффициентом эксцесса $\gamma_4 = -3/2$;

1в) при случайной фазе модулирующей функции процесс $z(t)$ — нестационарный первого порядка, негауссовский, с плотностью вероятности $w_1(z) = w_1(x)$ и коэффициентом эксцесса $\gamma_4(z) = \gamma_4(x)$, совпадающими с соответствующими характеристиками модулирующего процесса, его среднее значение и дисперсия зависят от времени;

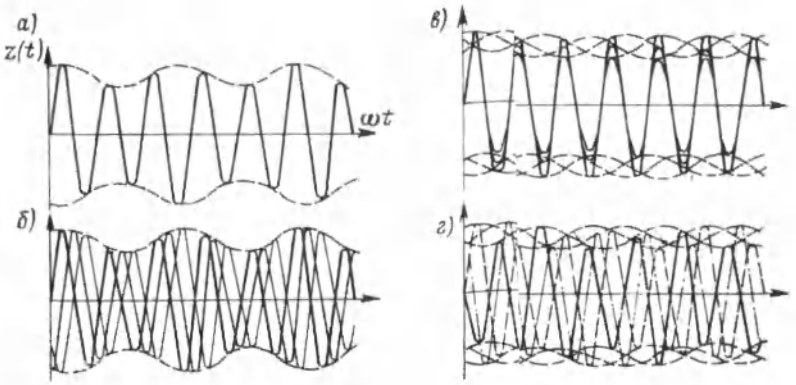

Рис. 2.3. Выборки реализаций, наложенных на один график, представляющих модулированное гармоническое колебание с детерминированными начальными фазами огибающей и несущей (*а*), со случайной начальной фазой только несущего процесса (*б*), только огибающей (*в*) и совместно несущей и огибающей (*г*) соответственно табл. 2.1.

1г) при случайных фазах модулирующего процесса и несущей процесс $z(t)$ — стационарный негауссовский, его коэффициент эксцесса определяется коэффициентом модуляции m и лежит в пределах $-3/2 < x_{4z} < 0$.

Рассмотренные модели процесса показывают, что при идентичном характере отдельных реализаций модулированного процесса свойства ансамбля реализаций (рис. 2.3), т. е. случайного процесса, существенно зависят от того, каким образом отдельные реализации привязаны к началу отсчета времени. В рассмотренных случаях (1а—1г) вследствие негауссовости модулирующего и несущего процессов всегда имеем негауссовский результирующий процесс. Стационарность процесса $z(t)$ обеспечивается лишь в результате случайного характера начальных фаз обоих гармонических процессов — и модулирующего, и несущего, т. е. в случае случайной привязки отдельных реализаций к оси времени.

Характеристики модели 1г (см. табл. 2.1) вследствие стационарности процесса могут быть получены по одной его реализации.

Частотные свойства этой модели определяются спектром процесса, который, как известно, состоит из дискретной составляющей на частоте несущей ω_0 и боковых составляющих на частотах $\omega_0 \pm k\Omega$ (Ω — основная частота периодического модулирующего процесса, k — номер гармоники):

$$S_1(\omega) = A_0\left[\delta(\omega - \omega_0) + \frac{m}{2}\delta(\omega \pm k\Omega)\right]. \qquad (2.27)$$

Гармоническая несущая модулируется шумом (стационарным гауссовским процессом). В этом случае возможны два класса процессов $z(t)$ в зависимости от характера начальной фазы ψ несущей (см. табл. 2.1):

2а) при детерминированной начальной фазе ψ_0 процесс $z(t)$ — нестационарный первого порядка, гауссовский, с зависящими от времени математическим ожиданием и дисперсией. (Легко представить вид ансамбля реализаций, отличающегося упорядоченной привязкой всех реализаций к началу отсчета времени, вследствие чего совпадают нули всех реализаций);

2б) при случайной начальной фазе ψ имеем стационарный негауссовский процесс, коэффициенты эксцесса которого зависят от коэффициента модуляции (те же реализации, случайным образом сдвинутые во времени, приводят к разрушению временной упорядоченности характеристик ансамбля).

Видно, что изменение характера начальной фазы несущей преобразует нестационарный гауссовский процесс (при детерминированной фазе) в стационарный, но негауссовский процесс (при случайной фазе), как и в случае процесса 1г (см. табл. 2.1).

Спектр процесса, описываемого моделью 2б — стационарной, представляет собой дискретную составляющую на частоте несущей ω_0 и две боковые полосы частот, форма спектра которых определяется спектром $F_\eta(\omega)$ модулирующего шума:

$$S(\omega) = A_0\left[\delta(\omega - \omega_0) + \frac{m}{2}F_\eta(\omega_0 + \omega) + \frac{m}{2}F_\eta(\omega_0 - \omega)\right]. \qquad (2.28)$$

Шумовая несущая модулируется периодическим процессом. Как и в предыдущем случае, имеем два класса процессов (см. табл. 2.1):

3а) при детерминированной фазе φ_0 процесс $z(t)$ — нестационарный второго порядка — гауссовский;

3б) при случайной начальной фазе φ_0 процесс $z(t)$ — стационарный негауссовский, его коэффициент эксцесса зависит от коэффициента модуляции m и центрального момента четвертого порядка μ_{4a} модулирующего процесса a_t; в случае синусоидальной модуляции $a_t = \sin\Omega t$, формула для коэффициента эксцесса приобретает вид

$$\gamma_4 = \frac{3m^2(16 + m^2)}{2(2 + m^2)^2}. \qquad (2.29)$$

Спектр процесса (модель 3б) как спектр произведения двух функций представляется сверткой спектров несущего и модули-

рующего процессов и формально определяется суммой, состоящей из спектра несущего процесса и сдвинутых по частоте таких же спектров:

$$G(\omega) = G_\xi(\omega) + \frac{m}{2}\left[\sum_k G_\xi(\omega \pm k\Omega)\right]. \qquad (2.30)$$

Однако наблюдать раздельно эти составляющие спектров можно лишь в случае узкополосного спектра несущей, удовлетворяющего условию $\Delta\omega_н \leqslant \Omega$ ($\Delta\omega_н$ — ширина спектра несущей, Ω — основная частота модулирующей функции). В противном случае вследствие перекрытия спектров оказывается невозможным разделение спектра на составляющие путем спектрального анализа реализации процесса $z(t)$.

Шумовая несущая модулируется шумом. Эта модель (*4*, в табл. 2.1) представляет процесс лишь одного класса — стационарный негауссовский с коэффициентом эксцесса, зависящим от коэффициента модуляции

$$\gamma_4 = \frac{6m^2(4+m)^2}{(2+m^2)^2}, \qquad (2.31)$$

причем различие γ_4 в этом случае и в (2.29) составляет 15 % при максимальном значении $m=1$ и быстро уменьшается с уменьшением коэффициента модуляции. Как видно, при шумовой несущей и любой модулирующей функции, коэффициент эксцесса положителен, и при гармонической несущей — отрицателен.

Спектр процесса (модель 4, табл. 2.1) представляется сверткой спектров несущего и модулирующего процессов, имеет ширину, определяемую суммой ширин спектров сомножителей.

Ни при каких условиях по виду спектра невозможно определить наличие модуляции и выделить раздельно характеристики модулирующего и несущего процессов.

В заключение сделаем несколько общих замечаний. В случае процессов с периодической модуляцией целесообразно измерения коэффициента модуляции производить в смежных полосах частот и определять частотную зависимость этой характеристики (см. гл. 8) наряду с частотной зависимостью других статистических характеристик. Нетрудно убедиться в том, что рассмотренные модели описывают процессы, коэффициент модуляции которых не зависит от частоты.

Выше были рассмотрены амплитудно-модулированные процессы, описываемые мультипликативной моделью. Другие виды модуляции (частотная или фазовая) требуют иного метода описания.

2.6. Аддитивные процессы

Одной из простейших моделей, описывающей часто встречающийся вид физического процесса, является сумма гауссовского шума $\nu(t)$ и гармонических составляющих:

$$\zeta(t) = \nu(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k). \tag{2.32}$$

Свойства этого процесса (а следовательно, и его класс) определяются свойствами параметров a_k, ω_k, φ_k. Ниже анализируются частные случаи рассматриваемой модели.

Независимые гармонические колебания со случайными равномерно распределенными фазами $w(\varphi_k) = 1/2\pi$, $\pi < \varphi < \pi$. Сумма синусоид вместе с гауссовским шумом с нулевым математическим ожиданием $\varkappa_{1\nu} = 0$ и дисперсией $\varkappa_{2\nu} = G_\nu^2$ определяются характеристической функцией

$$\theta(u) = e^{-\frac{\sigma_\nu^2 u^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} J_0(a_k u), \tag{2.33}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Плотность вероятности $w(x)$, которая может быть найдена как преобразование Фурье от $\theta(u)$, в случае преобладания одной из гармонических составляющих приобретает двухвершинный характер. В силу симметрии распределения все его нечетные моменты равны нулю, а четные центральные моменты определяются выражениями

$$\mu_2 = \sigma_\nu^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2; \quad \mu_4 = 3\mu_2^2 - \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n} a_k^4;$$

$$\mu_6 = 15\mu_2^3 - \frac{45}{8}\mu_2 \sum_{k=1}^{n} a_k^4 + \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k^6$$

и т. д.

По найденным μ_i вычисляются кумулянты распределения:

$$\varkappa_2 = \mu_2 = \varkappa_{2\nu} + \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{2k};$$

$$\varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$$

и т. д.

Корреляционная функция любого порядка процесса в целом в силу независимости аддитивных составляющих определяется суммой корреляционных функций слагаемых, тем же свойством обладает и спектр процесса

$$G_\zeta(\omega) = G_\nu(\omega) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{2}\delta(\omega - \omega_k),$$

где шумовая составляющая представлена сплошным спектром, а гармонические колебания — дискретным. В силу независимости от времени характеристической функции (2.33) ни одна из его статистических характеристик не зависит от времени, процесс является стационарным, следовательно, все его характеристики могут быть найдены по одной реализации (эргодичность процесса, как и в моделях, рассмотренных выше, обеспечивается свойством однородности реализаций).

Рассмотрим свойства характеристик, получаемых при фильтрации процесса. В широкой полосе частот при большом числе гармонических составляющих (даже при $a_k/\sigma_\nu > 1$) свойства процесса не сильно отличаются от гауссовского, $\gamma_{4\xi} \approx -3/2n$, где n — число гармонических составляющих в полосе фильтра.

Сужение полосы частот приводит к уменьшению числа n гармонических составляющих и вследствие этого к увеличению абсолютной величины коэффициента эксцесса в полосе частот Δf. При достаточно узкой полосе фильтра будем иметь $\gamma_4(\Delta f) \approx -3/2$ на частоте ω_k каждой гармонической составляющей и $\gamma_4(\Delta f) = 0$ — на других частотах.

Независимые гармонические колебания с детерминированными параметрами a_k, ω_k, φ_k. Колебания с некратными частотами в сумме с гауссовским шумом $\nu(t)$ образуют нестационарный гауссовский процесс, причем нестационарность будет проявляться, как и в случае детерминированного процесса (см. 2.4), в виде зависимого от времени математического ожидания, определяемого суммой гармонических составляющих $\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$.

Функционально связанные гармонические колебания с кратными частотами в сумме с гауссовским шумом. Эта модель процесса представляет (в произвольно выбранной полосе частот) сумму шума с конечным числом гармоник звукоряда периодического процесса $f(t)$:

$$\zeta(t) = \nu(t) + f(t) = \nu(t) + \sum_{k=p}^{p+n} a_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k). \qquad (2.34)$$

Как и в предыдущих случаях, свойства этой модели процесса определяются свойствами параметров гармонических колебаний. При детерминированных a_k, ω_1, φ_k имеем рассмотренный выше случай нестационарного по математическому ожиданию гауссовского процесса. При случайном характере начальных фаз φ_k в данной модели целесообразно задавать случайный временной сдвиг t_0 периодической составляющей $f(t, T_1)$ процесса, равномерно распределенный в пределах периода $T_1 = 2\pi/\omega_1$ колебаний, $w(t) = 1/T_1$, $0 < t < T_1$. В последнем случае нетрудно получить следующие характеристики:

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = \sigma_\nu^2 + \sigma_f^2; \qquad \varkappa_2 = \varkappa_{2\nu} + \varkappa_{2f};$$

$$\mu_3 = \mu_{3f}; \quad \mu_4 = 3\sigma_\nu^4 + 6\sigma_\nu^2\sigma_f^2 + \mu_{4f}; \quad \varkappa_4 = \varkappa_{4f},$$

свидетельствующие о стационарности и негауссовости процесса.

Корреляционная функция процесса имеет два слагаемых:

$$K_\xi(\tau) = K_\nu(\tau) + n \frac{\sin \frac{n\,\Delta\omega\tau}{2}}{n \sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0 \tau,$$

первое из которых мало при $\tau > \tau_k$, поэтому при больших задержках выявляется вид и периодический характер периодической составляющей процесса. Соответственно спектр процесса $\xi(t)$ имеет сплошную часть и дискретные составляющие на частотах $k\omega_1$. Следовательно, спектральный и корреляционный анализы позволяют разделить два слагаемых рассматриваемого процесса, обнаружить отличие данного процесса от гауссовского шума.

2.7. *Импульсные случайные процессы*

Многие акустические шумы, например шумы кавитационного происхождения, хорошо описываются моделью импульсного случайного процесса. Подобно гауссовскому закону для непрерывных шумов, импульсные процессы в большинстве практических случаев описываются законом Пуассона. Пуассоновским называют процесс, представляющий собой суперпозицию случайно возникающих независимо друг от друга импульсов, детерминированных или случайных по форме $F(t)$,

$$p(t) = \sum_i a_i F(t - t_i), \tag{2.35}$$

для которого вероятность возникновения k импульсов внутри интервала времени T дается распределением Пуассона

$$p_k(T) = \frac{(n_0 T)^k}{k!} e^{-n_0 T}, \tag{2.36}$$

где n_0 — среднее число импульсов, возникающих в единицу времени.

Кумулянтные функции стационарного пуассоновского процесса определяются выражением

$$\varkappa_S(0, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_S) = n_0 \langle a^S \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F(u - \tau_2) \ldots F(u - \tau_S)\, du.$$

Исчерпывающая информация о пуассоновском процессе определяется формой элементарного импульса $F(t)$ и их частотой появления n_0, что весьма удобно при теоретических исследованиях. Энергетический спектр пуассоновского процесса определяется выражением [36]

$$G(\omega) = \frac{2}{\mu_c} \langle g(\omega) \rangle^2 [A^2 + \sigma^2 + 2(\sigma^2 R_p + A^2) f_\mu(\omega)], \tag{2.37}$$

где $\langle g(\omega)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle F(t)\rangle e^{-i\omega t}\,dt$ — спектр элементарного импульса; $\mu_c = 1/n_0$ — средний интервал следования импульсов; A, σ — средняя амплитуда и дисперсия амплитуд импульсов; R_p — коэффициент корреляции амплитуд импульсов; $f_\mu = \mathrm{Re}\,\{[\theta_{1\mu}(\omega)/[1-\theta_{1\mu}(\omega)]\}$; $\theta_{1\mu}(\omega)$ — характеристическая функция интервалов μ следования импульсов.

Другой распространенной моделью импульсного случайного процесса является телеграфный сигнал — процесс, могущий принимать лишь два значения x_1 и x_2 в моменты времени t_k, определяемые соответствующим вероятностным законом. Для симметричного телеграфного сигнала ($x_1 = h$, $x_2 = -h$) при пуассоновском законе распределения вероятности перемены знака сигнала за время T корреляционная функция экспоненциальна:

$$R(\tau) = h^2 \exp(-2n_0|\tau|). \tag{2.38}$$

Для квантованного во времени телеграфного сигнала (перемена знака происходит лишь в моменты времени, кратные T) корреляционная функция равна

$$R(\tau) = h^2 \left|\frac{T-\tau}{T}\right|. \tag{2.39}$$

Интересно, что при любом виде корреляционной функции телеграфного сигнала его кумулянтная функция четвертого порядка всегда равна

$$\varkappa_4(\tau) = -2R^2(\tau). \tag{2.40}$$

Спектр телеграфного сигнала при пуассоновском законе вероятности перемен знака равен

$$G_{\text{п}}(\omega) = \frac{h^2}{\pi}\,\frac{2n_0}{4n_0^2+\omega^2}, \tag{2.41}$$

а для телеграфного сигнала с детерминированными тактовыми интервалами имеет вид

$$G_{\text{д}}(\omega) = h^2\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\Delta T}{2}\right)^{-2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right). \tag{2.42}$$

Во многих случаях кавитационные шумы носят характер нестационарного потока импульсов, когда нестационарен поток жидкости, набегающий на обтекаемое тело. Например, при работе рабочего органа насоса или гребного винта в неоднородном поле скоростей потока каждая лопасть последовательно проходит области поля с различными значениями местной скорости, т. е. обтекается потоком жидкости с периодически меняющимися свойствами. В этом случае кавитационный шум, излучаемый каждой лопастью, является модулированным. В первом приближении такой шум описывается мультипликативной моделью $z_1(t) = [1+mx(t)]\,\xi(t)$, рассмотренной в 2.4. Однако такая модель не отражает зависимости коэффициента модуляции m от средней

частоты $\omega_{ср}$ полосы шума, не отражает она и наличия частотной модуляции шума. Эти свойства описываются моделью импульсного процесса, рассматриваемой ниже.

Пусть некоторый параметр λ потока импульсов (2.35) модулирован $\lambda=\lambda_0(1+mx_t)$. Определим коэффициент модуляции как $m_\lambda=\Delta\lambda/\lambda$, где $\Delta\lambda$ — амплитуда колебаний параметра λ относительно его среднего значения λ_0. Тогда энергетический спектр процесса будет изменяться во времени, т. е. также окажется модулированным $G=G[\omega,\ \lambda(t)]$ с коэффициентом амплитудной модуляции

$$m_G=\frac{\Delta G}{G_0}=\frac{(\partial G/d\lambda)\,\Delta\lambda}{G_0}=\frac{\partial G\,(\omega,\ \lambda)}{\partial\lambda}\,\frac{m_\lambda\lambda_0}{G_0}. \qquad (2.43)$$

Будем исследовать модель в квазистационарном приближении, допустимом в случае медленных изменений процесса — при условии

$$\left[\left\langle\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right\rangle\Big/\langle x^2(t)\rangle\right]\ll\left[\left\langle\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2\right\rangle\Big/\langle p^2(t)\rangle\right],$$

т. е. будем считать, что параметры процесса $p(t)$ практически не изменяются за малый интервал времени $T\ll\tau_x$, где τ_x — интервал корреляции модулирующего случайного процесса $x(t)$ или период процесса $x(t)$ в случае его периодического характера.

Коэффициент модуляции m_σ шума $p(t)$ в заданной полосе частот $\Delta\omega_э=2\pi\Delta f_э$ определим через относительное изменение во времени среднего квадратичного значения σ_p процесса $p(t)$, рассматриваемого в интервале времени $T\ll\tau_x$:

$$\sigma_p(\omega,\ \lambda)=\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}K^2(\omega)\,G(\omega,\ \lambda)\,d\omega\right]^{1/2}\approx[\Delta f_э G(\omega_{ср},\ \lambda)]^{1/2},$$

где $K(\omega)$ — частотная характеристика полосового фильтра с полосой пропускания $\Delta f_э$. Тогда коэффициент модуляции будет

$$m_\sigma=\frac{\Delta\sigma}{\sigma_p}=\frac{\dfrac{\partial}{\partial\lambda}[\Delta f_э G(\omega,\ \lambda)]^{1/2}\,m_\lambda\lambda_0}{[\Delta f_э G(\omega,\ \lambda)]^{1/2}}. \qquad (2.44)$$

Из (2.44) следует, что в общем случае $m_\sigma=0{,}5m_G$. Спектр $G(\omega,\ \lambda)$ определяется выражением (2.37), где зависимым от времени параметром λ могут быть амплитуда A импульсов, интервал их следования μ_c и параметры формы $F(t)$ импульсов (длительности τ_F, затухания β экспоненциальных импульсов $F(t)=Ae^{-\beta t}$, затухания α радиоимпульсов $F(t)=Ae^{-\alpha t}\sin\omega_1 t$ или частоты заполнения ω_1.

Результаты расчетов, выполненные по выражениям (2.43) и (2.44), приводят к следующим результатам:

а) при модуляции амплитуд импульсов и произвольном виде спектра $G(\omega)$

$$\frac{m_\sigma^{(A)}}{m_A}=\frac{A^2[1+2f_\mu(\omega)]}{\sigma^2+A^2[1+2f_\mu(\omega)]};\quad m_\sigma^A\approx m_A\ \text{ при }\ f_\mu\to 0; \qquad (2.45)$$

б) при модуляции интервалов следования импульсов

$$m_\sigma^{(\mu_c)} = -\frac{m_\mu}{2} + m_f \frac{A^2 f_\mu(\omega)}{2[\sigma^2 + A^2[1 + 2f_\mu(\omega)]}, \qquad (2.46)$$

т. е. при экспоненциальном распределении интервалов следования импульсов, когда $f_\mu(\omega) = 0$, имеем $m_\sigma^{(\mu)} = -m_\mu/2$;

в) при модуляции затухания β экспоненциальных импульсов или затухания α радиоимпульсов соответственно имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_\sigma^{(\beta)}}{m_\beta} &= -\frac{\beta^2}{\beta^2 + \omega^2}; \\ \frac{m_\sigma^{(\alpha)}}{m_a} &= -\frac{2\alpha^2}{\omega_1^2}(\omega_0^2 + \omega^2)\langle g^2(\omega)\rangle; \end{aligned}\right\} \qquad (2.47)$$

г) при модуляции частоты ω_1 заполнения радиоимпульсов

$$\frac{m_\sigma^{(\omega_1)}}{m_\omega} = 1 - \langle g^2(\omega)\rangle(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2), \qquad (2.48)$$

причем в полосе частот вблизи ω_1 возникает квадратичная модуляция, характеризуемая появлением в составе огибающей второй гармоники модулирующей функции $m_2 = 4Q^2 m_\omega^2$, где $Q^2 = (\alpha^2 + \omega_1^2)/4\alpha^2$

Полученные данные показывают следующее:

— модуляция амплитуды (А) и интервалов следования импульсов (μ_c) приводит к модуляции процесса, не зависящей от частоты несущей;

— модуляция формы импульсов — затухания α или β экспоненциальных видео- или радиоимпульсов, или частоты заполнения ω_1 радиоимпульсов приводит к зависимости коэффициента модуляции от частоты несущей;

— при модуляции частоты заполнения импульсов возникает эффект нелинейности модуляции спектра: в области вблизи средней частоты заполнения импульсов появляется вторая гармоника частоты модуляции.

Можно также рассмотреть результат одновременной модуляции нескольких параметров случайной последовательности импульсов с учетом коррелированности функций модуляции разнородных параметров. В конечном счете эффект модуляции определяется эволюцией энергетического спектра, и если значения приращений последнего будут найдены для заданных значений модулирующей функции, то из (2.43) и (2.44) легко находится коэффициент модуляции процесса.

Обратимся к исследованию глубины *частотной модуляции*. Определим мгновенную частоту процесса в заданной полосе частот Δf как число нулей процесса в единицу времени при заданном знаке его производной (среднее число периодов процесса).

В квазистационарном приближении при относительно медленном изменении параметров процесса воспользуемся известным выражением [36] для среднего числа нулей

$$n_c(0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\int\limits_0^\infty \omega^2 K^2(\omega)\, G(\omega)\, d\omega}{\int\limits_0^\infty K^2(\omega)\, G(\omega)\, d\omega}\right]^{1/2}, \tag{2.49}$$

где $K^2(\omega)$ — квадрат частотной характеристики полосового фильтра. Это выражение соответствует методу экспериментальных исследований параметров мгновенной частоты шума, когда определяют интервалы времени между «нулями» процесса, а мгновенную частоту процесса получают как функцию, значения которой обратны этим интервалам.

Применим выражение (2.49) для определения мгновенной частоты процесса в полосе частот $\Delta\omega$ идеального фильтра с прямоугольной частотной характеристикой на средней частоте $\omega_{ор}$. Представим функцию $G(\omega)$ в окрестности $\omega_ф$ рядом Тейлора:

$$G(\omega) = G_0(\omega_ф) + (\omega - \omega_ф)\, G_0'(\omega_ф) + \frac{(\omega - \omega_ф)^2}{2} G_0''(\omega_ф) + \ldots,$$

тогда из (2.43) получим

$$\omega_c^2 = \frac{\omega_ф^2 + \frac{\Delta\omega^2}{12}\left[\frac{G_0'}{G_0} 2\omega_ф - 1{,}2\,\frac{G_0'}{G_0}\,\frac{\omega_ф^2(\omega_ф + \Delta\omega)^2}{(\Delta\omega)^2}\right]}{1 + \frac{G_0''}{G_0}\,\frac{(\Delta\omega)^2}{24}}. \tag{2.50}$$

Во многих случаях можно ограничиться первым приближением

$$\omega_c^2 \approx \omega_ф^2 + \frac{\Delta\omega^2}{12}\left(1 + 2\,\frac{G_0'}{G_0}\,\omega_ф\right)$$

или

$$\omega_c \approx \omega_ф + \frac{\Delta\omega^2}{24}\left(1 + 2\,\frac{G_0'}{G_0}\,\omega_ф\right). \tag{2.51}$$

Определим глубину частотной модуляции как отношение девиации частоты к средней частоте процесса в исследуемой полосе частот:

$$m_{ч.\,м} = \frac{\delta\omega}{\omega_c} = \frac{\omega_c(\lambda + \Delta\lambda) - \omega_c(\lambda)}{\omega_c(\lambda)}, \tag{2.52}$$

где λ — модулируемый параметр последовательности импульсов.

После несложных преобразований из (2.51) и (2.52) получим, учитывая $G = G(\omega, \lambda)$,

$$m_{ч.\,м} = \frac{\Delta\omega^2}{12\omega_ф}\left[\frac{\Delta G_0'}{G_0} - \frac{\Delta G_0}{G_0}\,\frac{G_0'}{G_0}\right] =$$

$$= \frac{\Delta\omega^2 \lambda m_\lambda}{12\omega_ф G_0}\left[\frac{\partial^2 G(\omega, \lambda)}{\partial\omega\,\partial\lambda} - \frac{1}{G_0}\,\frac{\partial G}{\partial\omega}\,\frac{\partial G}{\partial\lambda}\right]_{\omega=\omega_ф}. \tag{2.53}$$

Воспользовавшись (2.53), для частных случаев модуляции параметров потока импульсов получим:

а) при модуляции амплитуд импульсов

$$m_{\text{ч. м}}^{(A)} = \frac{m_A \Delta\omega^2}{3\omega_\text{ф}} \frac{A^2}{A^2 + \sigma^2 + 2A^2 f_\mu(\omega)} \frac{\partial f_\mu(\omega)}{\partial\omega} \left\{1 - \frac{A^2 [1 + 2f_\mu(\omega)]}{A^2 + \sigma^2 + 2A^2 f_\mu(\omega)}\right\}, \tag{2.54}$$

в частности, $m_{\text{ч. м}}^{(A)} = 0$ при $f_\mu(\omega) \equiv 0$;

б) при модуляции интервалов следования импульсов

$$\frac{m_{\text{ч. м}}^{(\mu)}}{m_\mu} = \frac{\Delta\omega^2 \mu_\text{c}}{G\omega_\text{ф}} \frac{A^2}{A^2 + \sigma^2 + 2A^2 f_\mu} \frac{\partial^2 f_\mu(\omega, \lambda)}{\partial\mu_\text{c}\, \partial\omega}, \tag{2.55}$$

т. е. условия $f_\mu \equiv 0$ или $\partial^2 f_\mu(\omega, \lambda)/\partial\mu_\text{c}\, \partial\omega$ приводят к отсутствию частотной модуляции;

в) при модуляции затухания β экспоненциальных импульсов

$$\frac{m_{\text{ч. м}}^{(\beta)}}{m_\beta} = \frac{\Delta\omega^2\beta^2}{3(\beta^2 + \omega^2)^2}; \tag{2.56}$$

г) при модуляции затухания α радиоимпульсов

$$\frac{m_{\text{ч. м}}^{(\alpha)}}{m_\alpha} = \frac{2}{3} \frac{\Delta\omega^2\alpha^2}{\omega_1^2} \times$$

$$\times \langle g^2(\omega)\rangle \left[\frac{2}{\omega_1^2} \langle g^2(\omega)\rangle (3\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)(\alpha^2 + \omega_1^2 + \omega^2) - 1\right]. \tag{2.57}$$

Знак $m_{\text{ч. м}}^{(\alpha)}/m_\alpha$ изменяется при переходе от низких частот к высоким, а вблизи частоты заполнения ω_1 частотная модуляция отсутствует;

д) при модуляции частоты заполнения ω_1 радиоимпульсов

$$\frac{m_{\text{ч. м}}^{(\omega)}}{m_\omega} = \frac{2}{3} \frac{\Delta\omega^2}{\omega_1^2} |g^2(\omega)| [2|g^2(\omega)|(3\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2)(\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2) + \omega_1^2], \tag{2.58}$$

глубина модуляции изменяется с частотой, принимая минимальные значения вблизи частоты ω_1.

Как видно, частотная модуляция проявляется лишь при модуляции параметров формы импульсов, а глубина частотной модуляции в полосе частот пропорциональна квадрату полосы пропускания $\Delta\omega$ полосового фильтра.

При экспериментальных исследованиях для обнаружения модуляции выполняют спектральный анализ огибающей и мгновенной частоты процессов, выделяемых полосовыми фильтрами из исследуемого широкополосного процесса.

Если модулирующая функция периодична, то спектр огибающей и мгновенной частот будет содержать дискретные составляю-

щие. Если модуляция параметров импульсов случайна, то наличие амплитудной и частотной модуляций может быть обнаружено спектральными методами лишь при узкополосном характере модулирующей функции, либо необходимы другие методы анализа (см. гл. 7).

В заключение заметим, что класс процесса, представленный рассмотренной моделью (см. 2.4), определяется свойствами начальной фазы периодической модулирующей функции $x(t)$.

2.8. Сложные аддитивно-мультипликативные процессы

Шумы и вибрации судна определяются, как правило, множеством источников. И даже шумы и вибрации одного механизма определяются множеством колебательных сил различного характера, различной физической природы. Поэтому обобщенной моделью реального шума или вибраций является аддитивная модель, включающая следующие слагаемые: гауссовский стационарный шум (не белый) — $\xi(t)$; негауссовский стационарный шум — $\nu(t)$; модулированные шумы — $z_i(t) = [1 + mx(t)]\,\eta(t)$ а также периодические процессы $f(t) = \sum_k c_k \cos(k\omega_k t + \varphi_k)$ с различными значениями основной частоты ω_j, которые в более общем случае могут иметь амплитудную и частотную модуляции, т. е. должны представляться моделью

$$f_j(t) = \sum_k (1 + m_j x_{jt})\, c_{kj} \cos\{k\omega_j [1 + m_j^{(\text{ч. м})} y(t)] + \varphi_{kj}\}.$$

Весь этот сложный аддитивный процесс может иметь множитель $\Phi(t)$, отражающий изменение уровней процесса во времени вследствие, например, движения источника излучения относительно приемника, т. е. в общем случае аддитивно-мультипликативная модель принимает вид

$$F(t) = \Phi(t)\left[\xi(t) + \nu(t) + \sum_i z_i(t) + \sum_j f_j(t)\right]. \qquad (2.59)$$

Очевидно, что каждое слагаемое характеризуется своими спектром и частотной зависимостью статистических характеристик. В различных полосах частот будут преобладать различные источники, так что статистические характеристики, измеряемые в смежных полосах частот, получатся различными.

Рассмотрим характеристики сложного аддитивного процесса, полагая $\Phi(t) = 1$ в (2.59). Дисперсия аддитивного процесса в силу некоррелированности слагаемых равна

$$\sigma_F^2 = \sigma_\xi^2 + \sigma_\nu^2 + \sum_i \sigma_{z_i}^2 + \sum_j \sigma_{f_j}^2. \qquad (2.60)$$

Кумулянты высших порядков для независимых слагаемых также аддитивны

$$\varkappa_{kF} = \varkappa_{k\xi} + \varkappa_{kv} + \sum_i \varkappa_{kz_i} + \sum_j \varkappa_{kf_j}. \qquad (2.61)$$

Нормированные коэффициенты (асимметрии, эксцесса и более высокого порядка), как нетрудно показать, выражаются через аналогичные коэффициенты слагаемых и их дисперсии:

$$\gamma_{kF} = \frac{\varkappa_{kF}}{\left(\sigma_F^2\right)^{k/2}} = \sum_q \frac{\sigma_q^k}{\left[\sum_q \sigma_q^2\right]^{k/2}} \gamma_{kq}. \qquad (2.62)$$

Коэффициент модуляции в полосе частот при суммировании шумов уменьшается также соответственно отношению дисперсий слагаемых:

$$m_F = m_z \frac{\sigma_z^2}{\sigma_F^2}. \qquad (2.63)$$

Этот результат следует из анализа выражения, описывающего аддитивный процесс $F(t)$ в виде нового модулированного процесса, образованного суммированием модулированного $z(t)$ и немодулированных процессов, представленных слагаемым $N(t)$,

$$F(t) = (1 + m_F x_t)\, y_t = (1 + m_z x_t)\, \eta(t) + N(t), \qquad (2.64)$$

где m_F — коэффициент модуляции суммарного процесса $F(t)$.

Переходя к дисперсиям левой и правой частей равенства (2.64) и считая, что слагаемые в (2.58) представлены стационарными моделями, получаем

$$(1 + m_F x_t)^2\, \sigma_y^2 = (1 + m_z x_t)^2\, \sigma_\eta^2 + \sigma_N^2, \qquad (2.65)$$

откуда следуют два условия эквивалентности модулированных процессов:

$$\sigma_y^2 = \sigma_\eta^2 + \sigma_N^2; \quad m_F \sigma_y^2 = m_z \sigma_\eta^2. \qquad (2.66)$$

Из последнего получаем (2.63).

Рассмотрим далее возможность расчета статистических характеристик в любой заданной полосе частот, если найдены статистические характеристики в сравнительно узких смежных полосах частот. Для этого необходимо просуммировать процессы в смежных полосах частот и найти статистические характеристики этого суммарного (по полосам частот) процесса. В отличие от суммирования независимых процессов в (2.59) здесь имеем дело лишь с некоррелированными процессами (вследствие того, что полосы их частот не перекрываются), для которых справедливо только правило суммирования дисперсий (2.60). Но процессы в смежных полосах частот могут быть зависимыми, например, зависимы процессы, отфильтрованные из модулированного процесса неперекры-

вающимися полосовыми фильтрами. Для суммы зависимых процессов в общем случае кумулянты определяются по формуле [38]:

$$\varkappa_k^{(\Sigma)} = \sum_{l_1+l_2+\ldots=k} \frac{k!}{l_1!\,l_2!\ldots l_N!} \left\langle \xi_1^{[l_1]} \xi_2^{[l_2]}, \ldots, \xi_N^{[l_N]} \right\rangle, \qquad (2.67)$$

где суммирование идет по всем l, но так, чтобы всегда выполнялось условие $l_1+l_2+\ldots+l_N=k$. Отсюда следует, что для аддитивности дисперсий достаточна лишь некоррелированность слагаемых. При отсутствии статистических связей первого и второго порядков аддитивным становится и кумулянт третьего порядка, что и имеет место при суммировании отфильтрованных шумов. Однако четвертый кумулянт модулированного процесса уже не обладает свойством аддитивности.

Коэффициент модуляции суммы отфильтрованных шумов определяется степенью коррелированности r огибающих суммируемых шумов и при $r \approx 1$ имеем $m_\Sigma \approx m_i$, а при $r < 1$ получим $m_\Sigma < m_i$ (где m_i — коэффициент модуляции слагаемых).

2.9. Классификация процессов по статистическим характеристикам и их частотной зависимости

Вероятностные модели процессов, как было показано выше, включают в себя как математическое определение связи различных элементарных процессов, так и вероятностные характеристики параметров элементарных процессов. В результате из одного и того же множества реализаций можно набрать различные ансамбли реализаций, образующие модели случайных процессов различных классов. На практике же приходится иметь дело с отдельными реализациями различных процессов и необходимо определять это различие по их статистическим характеристикам.

Полученные выше результаты позволяют предложить следующую классификацию процессов, если ограничиться стационарными моделями рассмотренных выше процессов:

— по виду и уровням сглаженного (по частоте) энергетического спектра (примером экспериментальной оценки этой характеристики является широко распространенный на практике третьоктавный спектр);

— по виду и параметрам составляющих дискретного спектра (частота, амплитуда, наличие амплитудной или частотной модуляции);

— по зависимости от частоты коэффициентов эксцесса;

— по наличию модуляции, зависимости ее от частоты и параметрам модулирующей функции.

Таким образом, можно отличать негауссовский шум от гауссовского по наличию ненулевых коэффициентов эксцесса и выделить эти шумы из числа других процессов по отсутствию дискретных составляющих в их спектре и спектре огибающих. Коэффициент эксцесса может служить также признаком, позволяющим установить

наличие дискретных составляющих в отдельных участках спектра ($\gamma_4 < 0$) либо модуляции ($\gamma_4 > 0$) без выполнения спектрального анализа. Наконец, наличие модуляции позволяет выделить класс модулированных процессов из числа других процессов, а частотная зависимость коэффициента модуляции — различать процессы этого класса между собой.

Сложные аддитивно-мультипликативные процессы, содержащие слагаемые различного класса, имеют сложную частотную зависимость статистических характеристик. Так, судовые шумы и вибрации содержат, как правило, дискретные составляющие на низких частотах и модулированные шумы на высших звуковых частотах. Это приводит к соответствующему виду частотной зависимости коэффициента эксцесса: $\gamma_4(\omega) < 0$ на низких частотах и $\gamma_4(\omega) > 0$ на высоких частотах, а также к частотной зависимости коэффициента модуляции — росту уровня модуляции шума на высоких частотах. С другой стороны, рассмотренные выше модели показывают, что деление процессов по их моделям на стационарные или нестационарные отражает скорее вероятностные свойства ансамбля реализаций, сформированного определенным образом, чем структуру и физическую природу отдельных реализаций. Во всяком случае, видно, что различия и классификация реальных физических процессов (реализаций) должны производиться на иной основе, чем классификация случайных функций.

Анализ свойств рассмотренных моделей случайных процессов можно представить в виде табл. 2.2, в которой для сравнения приведены параметры, характеризующие различные процессы в теории и при экспериментальных исследованиях.

Таблица 2.2

Статистические характеристики и параметры реальных физических процессов, представляемых различными математическими моделями

Модели процессов	Характеристики и параметры	
	Теория	Эксперимент
Гауссовский стационарный шум	M_1, $R(\tau)$, $G(\omega)$	$G(\omega)$
Негауссовский стационарный шум	M_1, $R(\tau)$, $G(\omega)$ $\gamma_3, \gamma_4, \ldots, \gamma_s$	$G(\omega)$, γ_4
Модулированный шум (периодическая модуляция)	M_1, $R(\tau)$, $G(\omega)$ γ_4, m_k	$G(\omega)$, γ_4, m_k
Синус со случайной начальной фазой	A, ω	A, ω
Импульсный стационарный пуассоновский процесс	n_0, $F(t)$	$G(\omega)$
Импульсный модулированный процесс	$n_0(t)$, $F[\lambda(t)]$	$G(\omega)$, γ_4, $m_A(\omega)$, $m_{\text{чм}}(\omega)$

Гауссовский стационарный шум — это и определенный класс случайного процесса и простая модель одной реализации шума, однозначно определяемая этим термином. В теории для полной характеристики гауссовского шума достаточно знать его среднее значение M_1 и корреляционную функцию $R(\tau)$. Значение $R(0) = \sigma^2$ дает дисперсию процесса. Эквивалентной характеристикой служит энергетический спектр $G(\omega)$, интегральной характеристикой которого является дисперсия процесса $\sigma_2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,d\omega$. При экспериментальных исследованиях в акустике имеют дело с реализациями, обладающими нулевым средним $M_1 = 0$, а вместо $R(\tau)$ в подавляющем большинстве случаев измеряют энергетический спектр $G(\omega)$, практически являющийся единственной характеристикой гауссовского шума.

Нелинейное преобразование гауссовского шума отличается ненулевыми значениями кумулянтов высших порядков, из которых на практике измеряют в полосах частот коэффициент эксцесса γ_4.

Другая модель, основанная на использовании гауссовского шума,— модулированный шум. Как в теории, так и на практике дополнительными характеристиками этого процесса являются коэффициенты эксцесса γ_4 в полосах частот, дающие интегральную характеристику эффекта модуляции. Конкретные значения парциальных коэффициентов модуляции m_k характеризуют периодическую модулирующую функцию, представляя ее рядом Фурье.

Синус со случайной начальной фазой — простейшая модель, характеризуемая амплитудой A и частотой ω как в теории, так и на практике.

Импульсный пуассоновский процесс в теории характеризуется двумя параметрами — средней частотой импульсов n_0 и их формой $F(t)$. Эти параметры неудобны и мало пригодны для измерений. Практически измеряют спектр $G(\omega)$, т. е. эта характеристика, как и для гауссовского шума, является единственной характеристикой стационарной последовательности импульсов. При наличии модуляции одного из параметров потока импульсов $(n_0\vec{\lambda})$, что задается лишь при теоретических исследованиях, возникает модуляция спектра мощности, для которой практически могут быть измерены частотные зависимости амплитудной $m_a(\omega)$ и частотной $m_{ч.м}(\omega)$ модуляций шума.

Таким образом, представленная в табл. 2.2 сводка параметров процессов, описываемых различными моделями, показывает возможность различения таких процессов как по наличию ненулевых значений определенных функций или параметров, так и по форме их зависимости от частоты или по значению параметров.

Глава 3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

3.1. Проблемы исследований процессов и полей вероятностными методами

При экспериментальных исследованиях физических процессов, имеющих случайный характер, естественно обратиться к теории случайных функций, на базе которой можно было бы охарактеризовать свойства процесса, обнаружить скрытые его закономерности. Для этого необходимо либо иметь ансамбль реализаций, либо доказать, что исследуемая осциллограмма может быть принята в качестве реализации стационарного эргодического процесса. Возникают вопросы — как создать этот ансамбль реализаций, надо ли его создавать и что же даст исследование этого ансамбля для решения конкретной задачи, стоящей перед исследователем.

В теории случайных функций существует четкая их классификация, деление на стационарные — нестационарные, гауссовские — негауссовские и т. д. В то же время, как следует из гл. 2, один и тот же процесс может представляться различными ансамблями реализаций, т. е. случайными функциями различного класса. Класс случайной функции зависит от свойств некоторых параметров (например, начальной фазы), проявляющихся лишь при объединении отдельных реализаций в единый ансамбль и не играющих никакой роли при исследовании свойств отдельной реализации. Не означает ли это, что класс случайной функции в большей степени определяется способом формирования ансамбля реализаций, чем свойствами исследуемого процесса? Применима ли известная классификация случайных процессов (функций) к физическим процессам, описываемым случайными функциями *?

При решении многих задач диагностики, выявлении источников шума и других возникает необходимость различать сигналы по все более тонким свойствам. Появляются методы различения сигналов, основанные на использовании новых характеристик сигналов,

---

* Определенная путаница в этих вопросах возникает вследствие двойственного характера термина «случайный процесс». Сравним следующие два определения: 1) случайным называют процесс, ход которого нельзя предсказать заранее; 2) случайным процессом является ансамбль реализаций, на котором задана вероятностная мера. Первое определение отражает характер исследуемого физического явления, второе — относится к математической абстракции, случайной функции, которыми оперирует теоретик. Таким образом, здесь налицо омонимы, два различных понятия, закрепленные за одним термином.

Таблица 3.1

Термины и понятия, принятые в теории случайных функций и практике статистических измерений

Теория случайных функций	Практика статистических измерений
Случайная функция есть ансамбль реализаций, на котором задана вероятностная мера. Если аргументом является время, то функция называется случайным процессом	Случайным называют процесс, ход которого нельзя предсказать заранее
Реализация — детерминированная функция, получаемая в результате одного опыта	Осциллограмма (запись) реального процесса может быть принята в качестве реализации случайного процесса
Усреднение по времени	Определение характеристик по одной записи процесса, принимаемой в качестве реализации
Усреднение по ансамблю реализаций	Метод синхронного накопления для периодически повторяющихся процессов
Аппаратурный анализ стационарных эргодических процессов	Анализ физических процессов, представленных моделью стационарного эргодического процесса
Аппаратурный анализ нестационарных случайных процессов	Анализ физических процессов при представлении их моделью нестационарной случайной функции
Выбор априорной модели процесса: — стационарного эргодического — нестационарного	Выбор метода измерений: — по одной реализации — по ансамблю реализаций
Случайный параметр	Неизвестная априори величина
Случайная начальная фаза процесса	Отсутствует информация о начальной фазе процесса (информация не вводится в измерительный прибор)
Определение характеристик нестационарного случайного процесса	Анализ характеристик при вводе в прибор дополнительной информации об условном начале процесса, по которому формируется ансамбль реализаций
Эргодичность процесса	Однородность реализаций ансамбля
Среднее значение процесса (детерминированная функция)	Тренд реализации процесса (может иметь случайный характер)
Локальная стационарность, стационарность на заданном интервале	Принятие процесса стационарным на ограниченном отрезке времени
Исходными данными для решения задачи являются ансамбль реализаций или вероятностные характеристики процесса	Создается ансамбль реализаций соответственно целям и задачам эксперимента и измеряются статистические характеристики

например, различение сигналов по их огибающим. Такие методы иногда носят эвристический характер. А как эти методы связаны с представлениями теории случайных функций? Не может ли последняя подсказать новые пути развития методов разделения процессов по их статистическим характеристикам? Как интерпретировать результаты теоретических исследований и перенести их в практику статистических измерений, сохраняя адекватность приемов и методов тех и других исследований и в тоже время учитывая различия методологии теоретических и экспериментальных исследований? Как рационально построить измерительную систему для получения данных об определенных свойствах исследуемого физического явления, избежав при этом неоправданного усложнения аппаратуры и излишних затрат времени на проведение измерений? Попытаемся дать ответ на подобные вопросы в этой и следующих главах.

Отметим, что простой механический перенос положений теории в практику неприемлем. В частности, в теории имеют дело как с физически осуществимыми, так и с неосуществимыми процессами, функциями, поэтому необходимы различные оговорки об области применимости определенных методов, приемов анализа. Например, в теории всегда оговаривают, что преобразование Фурье применимо к функциям, удовлетворяющим условиям Дирихле — имеющим конечное число точек разрыва на периоде функции. Однако на практике никогда не возникает вопрос о проверке выполнимости этих условий, ибо сам факт физического существования процесса свидетельствует об их удовлетворении. Подобно этому экспериментатор, проводящий измерения статистических характеристик процесса по одной его записи, принимаемой в качестве реализации, никогда не заботится о проверке эргодичности процесса, ибо сам по себе прием измерений по одной реализации и есть утверждение использования модели стационарного эргодического случайного процесса для представления свойств исследуемого явления. В то же время теоретик всегда обязан оговорить свойство эргодичности процесса при переходе от среднего по ансамблю к среднему по времени.

Таким образом, переход от теории вероятностей (теории случайных процессов) к практике статистических измерений должен сопровождаться определенным смещением понятий, приемов и правил, переводом их с языка теории на язык практики, требует уточнения терминологии (табл. 3.1), что необходимо иметь в виду при решении практических вопросов вероятностными методами.

3.2. Методы формирования ансамбля реализаций

Вопросы представления реальных процессов вероятностными моделями путем соответствующего формирования ансамбля реализации еще не получили должного развития. В большинстве работ по теории статистических измерений ансамбль реализаций

представляется заданным и решаются лишь задачи исследования его свойств [30, 57, 58, 70, 71]. Между тем возможности вероятностного анализа реальных процессов существенно расширятся, если метод исследования будет включать в себя также и задачу формирования ансамбля реализаций.

Если при экспериментальных исследованиях буквально следовать методам, принятым в теории случайных процессов, то при изучении процесса, формирующегося в исследуемой системе, необходимо было бы иметь выборочный ансамбль, сформированный из N реализаций случайного процесса. Реализацией процесса в теории называют функцию, получающуюся в результате одного опыта. Определение отдельного опыта остается вне круга вопросов, решаемых теорией вероятностей. Экспериментатор вправе сформулировать определение отдельного опыта, исходя из условий решаемой задачи. Реализацией может быть, например, шум, излучаемый механизмом от его запуска до остановки, или же шум, излучаемый двигателем внутреннего сгорания за один цикл (период) его работы в стационарных условиях. В первом случае необходимо было бы иметь N одновременно функционирующих и одинаковых систем, процессы в которых образуют ансамбль реализаций. Тогда, применяя к этим сигналам операторы усреднения по ансамблю реализаций, получаем оценки требуемых вероятностных характеристик, по которым можно судить о классе исследуемого процесса (его стационарности или нестационарности), свойствах исследуемой системы и т. д.

Однако на практике невозможно иметь большое количество систем вообще, а одинаковых систем (в акустическом смысле) тем более (известно, что, например, механизмы, изготовленные по одним и тем же чертежам, могут иметь существенно различающиеся вибрации). Поэтому применяют различные приемы получения ансамбля реализаций [48]. Здесь приходится решать две задачи: во-первых, выбрать способ получения N реализаций, во-вторых, упорядоченным образом привязать их к единой оси времени. Реализации получают следующим образом.

1. Включают одну исследуемую систему многократно при одинаковых условиях, запоминают полученные реализации и таким образом получают возможность вести анализ с применением операторов усреднения по ансамблю из N реализаций.

2. Производят длительную запись процесса, делят ее на N отрезков (реализаций) длительностью T_1 и полученную совокупность используют как выборочный ансамбль реализаций случайного процесса.

3. Производят анализ характеристик по одной выборочной функции, применяя лишь операторы усреднения по времени.

4. Применяют комбинированный метод, выполняя усреднение по времени (за небольшой промежуток времени) и ансамблю реализаций (небольшому их числу).

Первый способ применим лишь к исследованию таких систем, работа которых может по команде исследователя повторяться. Це-

лесообразность его применения возникает при исследовании быстро протекающих нестационарных явлений, как, например, процессов при запуске и остановке систем, механизмов.

Второй способ используют в тех случаях, когда процесс складывается из повторяющихся нестационарных явлений, как, например, вибрации двигателя внутреннего сгорания, где вспышки топлива в цилиндрах создают периодическое ударное возбуждение вибраций. Аналогичны свойства вибраций, создаваемых периодически следующими ударами механического происхождения (работа отбойного молотка, цифропечатающего устройства и т. д.). Тогда реализацией может быть назван отрезок процесса за один или несколько периодов работы исследуемого источника вибраций или шума. Этот же способ применим и при анализе стационарных явлений, часто используется и при цифровой обработке сигналов.

Третий способ применяют в основном при исследовании неповторяющихся стационарных явлений, а также при измерении простых, сглаженных во времени характеристик периодически повторяющихся явлений.

Четвертый способ целесообразен при исследовании сравнительно медленно изменяющихся свойств процессов. Тогда основываются на принципе квазистационарности процесса — производят определение его характеристик путем усреднения по небольшим отрезкам времени, на каждом из которых происходят незначительные изменения свойств процесса, а для дополнительного повышения точности измерений применяют усреднение по нескольким реализациям.

Вторая задача, возникающая при формировании ансамбля реализаций, состоит в способе привязки получаемых реализаций к единой оси времени. Для этого, во-первых, необходимо существование какого-то определенного момента работы исследуемой системы (например, вспышки в выбранном цилиндре двигателя внутреннего сгорания), который можно принять за условный нуль отсчета времени, и, во-вторых, следует достаточно точно привязать к этому моменту времени каждую из реализаций формируемого ансамбля. Неточность привязки приводит к погрешностям измерений, проявляющимся в сглаживании получающихся временных зависимостей (см. 3.6).

Подавляющее число характеристик акустических полей и процессов получают при усреднении по времени, иногда прибегают к комбинированному способу усреднения (по времени и ансамблю реализаций) и совсем редки случаи, когда необходимо пользоваться усреднением по выборочному ансамблю реализаций. Рассмотрим особенности и условия применимости названных выше способов определения статистических характеристик случайных процессов.

3.3. Выбор метода анализа и класса модели процесса соответственно цели исследований

Каким бы сложным ни было исследуемое акустическое явление, возникающие при этом вибрации и акустическое поле можно разложить на элементарные, простые процессы: гауссовский шум, негауссовский шум, модулированный шум, периодические процессы, различающиеся по частоте основного тона, составу гармоник, наличию или отсутствию амплитудной и частотной модуляции, величине их параметров. При всем разнообразии исследовательских задач большинство из них можно отнести к проблеме выявления и измерения параметров сигнала — слагаемого с определенными свойствами, на фоне помехи — других слагаемых. Но роли сигнала и помехи в разных задачах могут принадлежать различным элементам суммарного процесса из числа названных выше. Как правило, в состав суммарного процесса входит шум, чаще всего в качестве помехи, но нередко и сигнала, поэтому необходимо прибегать к вероятностным методам исследований.

В зависимости от характера выявляемого сигнала и объема требуемой информации о нем необходимо принять ту или иную гипотезу о конкретном классе исследуемого случайного процесса — априорной модели исследуемого процесса, означающую, что принимается определенный метод измерений, отвечающий цели исследования.

Принятие определенной априорной модели процесса присуще любому измерению, а не только измерениям статистических характеристик. Например, часто принимают исследуемый процесс за процесс периодический. Это стало настолько привычным, что периодичность процесса считают не гипотезой, а истинным свойством исследуемого сигнала. Но, строго говоря, это не так, ибо периодический процесс должен отвечать двум условиям: 1) $f(t) = f(t+T_0)$; 2) $-\infty < t < \infty$. Эти условия практически строго не выполняются: во-первых, реальный процесс всегда имеет начало и конец, а не существует на бесконечном интервале времени; во-вторых, период колебаний не является строго постоянным. Однако экспериментатор всегда может сформулировать условия, при которых принятая идеализация реального явления оправданна и не приводит к искажению результатов измерений.

Отметим, что процедура принятия априорной модели измеряемого процесса представляется выделенной лишь в теории измерений при формализованном описании последовательности действий с целью исследований особенностей ее каждого этапа. На практике же далеко не всегда этот этап измерений представляется в явном виде. Иногда выбор априорной модели совмещается с выбором методов и средств измерений. Чаще же всего при простых и (особенно привычных) измерениях экспериментатор выбирает метод измерений и измерительную аппаратуру, не отдавая себе отчета в том, что за этим этапом стоит фактически и выбор априорной модели процесса. Но при внедрении новых методов и средств из-

мерений и особенно при измерениях новых статистических характеристик вопрос об априорной модели измеряемого процесса всегда встает, обсуждается и исследуется.

Напомним, что один и тот же процесс может быть представлен различными вероятностными моделями — различными классами случайных процессов. Выбор класса процесса определяется целями, задачами измерений. К принятию сложной модели процесса прибегают лишь в случае необходимости исследований и измерений достаточно тонких свойств явления. В противном случае ограничиваются простой моделью, требующей менее сложной аппаратуры, меньших затрат времени и т. д.

Выбор модели случайного процесса соответственно задаче измерения определенной характеристики сигнала производят следующим образом:

1) измерения дисперсии, корреляционной функции, спектра процесса, его кумулянтов, а также аналогичных характеристик огибающей процесса при постоянстве свойств этих характеристик во времени выполняют по одной реализации процесса, представляя его моделью стационарного эргодического случайного процесса;

2) определение функций, отражающих зависимость параметров случайной составляющей процесса от времени (функций нестационарности) при сравнительно небольшой скорости их изменения, производят также по одной реализации с применением операторов усреднения за небольшой интервал времени (т. е. принимается гипотеза локальной стационарности и эргодичности процесса); дополнительное уменьшение случайной ошибки измерений получают путем усреднения по нескольким реализациям;

3) определение функции, отражающей быстрое изменение свойств сигнала (измерение формы периодического сигнала или формы огибающей) при наличии сильной помехи, осуществляют путем формирования ансамбля реализаций и применения операторов усреднения по ансамблю, представляя исследуемый процесс моделью нестационарного случайного процесса.

Поясним эти рекомендации примерами исследований свойств аддитивного процесса (гауссовский шум и периодическая функция)

$$X(t) = \xi(t) + f(t),$$

мультипликативного процесса с медленным изменением параметров (шум движущегося источника)

$$Y(t) = A(t)\,\xi(t)$$

и мультипликативного процесса с быстрым периодическим изменением свойств процесса (модулированный шум) [см. (2.22)]:

$$Z(t) = [1 + mF(t)]\,\xi(t).$$

В этих примерах гауссовский шум характеризуется дисперсией σ^2_ξ, корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$ или энергетическим

спектром $G_\xi(\omega)$. Периодическая функция с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$ характеризуется параметрами $(c_k, \varphi_k, \omega_1)$ ряда Фурье

$$f(t) = c_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k).$$

Рассмотрим следующие задачи.

1. *Определение спектра периодической составляющей при наличии помех* [*гауссовского шума* $\xi(t)$]. По условиям задачи необходимо найти лишь амплитудные коэффициенты ряда Фурье c_k, а начальные фазы φ_k исследователя не интересуют, что позволяет принять модель стационарного случайного процесса с равномерно распределенной начальной фазой процесса (или случайным временным сдвигом t_0), представляя модель случайного процесса в виде

$$x_1(t) = \xi(t + t_0) + f(t + t_0); \quad w(t_0) = 2/\pi, \quad -T/2 < t_0 < T/2.$$

Требуемые характеристики получают по одной реализации процесса. Это означает, что эргодичность модели случайного процесса постулируется, так как никакого фактического ансамбля реализаций не создается. Измеряется энергетический спектр процесса

$$G_x(\omega)_T = \frac{1}{N} \sum_1^N \left[\frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} [\xi(t + t_0) + f(t + t_0)] e^{-i\omega t} dt \right]^2 =$$

$$= G_\xi(\omega)_T + \frac{C_k^2}{2} \delta_T(\omega - \omega_k),$$

где индекс T означает, что результирующие функции получены по отрезкам реализаций конечной длительности T и должны поэтому соответствующим образом интерпретироваться (см. гл. 5).

2. *Определение формы периодической функции* $f(t)$. Наличие шума не позволяет непосредственно по осциллограмме процесса $x(t)$ определить функцию $f(t)$ (иначе не нужно было бы применять вероятностный метод анализа), поэтому экспериментатор должен организовать измерения методом синхронного накопления, для чего необходимо по дополнительному каналу подавать на измерительный тракт импульсы синхронизации, вырабатываемые в исследуемой системе в определенные моменты времени. Тогда реализациями случайного процесса могут быть названы отрезки процесса длительностью T_1, из которых и формируется ансамбль реализаций. Применяя операторы усреднения по ансамблю, непосредственно получают

$$f(t)_{T_1} = (1/N) \sum_{k=1}^N [\xi(t + kT_1) + f(t + kT_1)].$$

Развитие методов обработки экспериментальных данных на ЭВМ дает возможность предложить и другие способы оценки $f(t)$, не требующие использования синхронизирующих сигналов и, казалось бы, приводящие к аналогичным результатам. Например, можно вначале выполнить спектральный анализ, найти оценку пе-

риода функции T_1, затем, расчленив запись процесса на отрезки длительностью T_1, применить метод синхронного накопления. Другое предложение может состоять в том, чтобы произвести определение комплексного спектра по достаточно длительному отрезку процесса $x(t)$, а затем, зная амплитуды $c^{(T)}$ и фазы $\varphi^{(T)}$ или квадратурные составляющие $A_k^{(T)}$ и $B_k^{(T)}$ (синусную и косинусную), найти форму сигнала

$$f(t)_T = \sum c_k^{(T)} \left(\cos k\omega_1 t + \varphi_k^{(T)}\right) = \sum \left[A_k^{(T)} \sin \omega_k t + B_k^{(T)} \cos \omega_k t\right].$$

Однако анализ показывает, что последние из упомянутых методов обладают существенно меньшей помехоустойчивостью, чем прямой метод синхронного накопления (трактуемый в теории случайных процессов как метод определения среднего значения нестационарного по математическому ожиданию процесса путем усреднения по амсамблю реализаций) и полный выигрыш в обнаружении или измерении периодического процесса, предсказываемый теорией, может быть достигнут лишь методом синхронного накопления с применением опорного синхросигнала. Этот вывод с очевидностью следует из того факта, что если сначала необходимо измерить параметры сигнала $\left(c_k^{(T)}, \varphi_k^{(T)}\right.$ или $\left.A_k^{(T)}, B_k^{(T)}\right)$, а это можно сделать лишь при относительно высоком отношении сигнал/шум с конечной точностью, а затем синтезировать искомую функцию $f(t)$, то ясно, что $f(t)$ может быть определена лишь с конечной точностью и малой помехоустойчивостью.

3. Определение спектральных характеристик модулированного шума. Модель (2.22) стационарного случайного эргодического процесса позволяет определить энергетический спектр модулированного процесса по одной реализации

$$G_z(\omega)_T = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} z(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right]^2.$$

Аналогичным образом, по одной реализации процесса, продетектировав шум, путем прямых измерений находим спектр огибающей, дискретная часть которого представляет спектр модулирующего процесса

$$C_{|z|}(\omega)_T = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} |z(t)|\, e^{-i\omega t}\, dt\right] =$$

$$= C_{|\xi|}(\omega)_T + m \sum \frac{c_k^2}{2} \delta_T(\omega - k\Omega_1).$$

Дискретный спектр огибающей, нормированной постоянной составляющей E_ξ несущего процесса $\xi(t)$, дает значение парциальных коэффициентов модуляции $m_k = mc_k$. Просуммировав последние

энергетически, получим оценку общего коэффициента модуляции $m^2 = \sum m_k^2$. Расчетным путем можно далее оценить и спектр несущего процесса, воспользовавшись соотношением $G_z(a) = [1 + (m^2/2)]G_\xi(\omega)$. Таким образом, все спектральные, а также и некоторые другие характеристики модулированного шума находятся по одной реализации процесса.

4. *Определение формы модулирующего процесса.* Форму процесса $F(t)$ найдем, выделив огибающую, путем детектирования и применив далее метод синхронного накопления, т. е. принимая модель нестационарного процесса по отношению к огибающей модулированного шума:

$$[1 + mx(t)]_T = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |Z(t + kT_1)|.$$

При этом, как указывалось выше, необходимо деление длительной записи процесса на короткие реализации по синхронизирующим импульсам, которые следует специальным образом формировать в исследуемой системе. Недостатки определения формы процесса без синхроимпульсов отмечались выше.

5. *Определение функции нестационарности — закона медленного изменения параметров процесса во времени.* Рассмотрим, например, задачу акустических измерений при движении источника звука. Если источник создает в точке на расстоянии Z_0 сигнал $p_0(t)$, содержащий шумовую компоненту и периодические составляющие, то сигнал, принимаемый неподвижным приемником при движении источника звука, представляется моделью $p(t) = F(t) \times p_0(t - \Delta t)$, где $F(t) = (r_0/r)\psi(\alpha)$ — множитель, отражающий изменение уровня сигнала движущегося источника в неподвижной точке вследствие изменения расстояния r и влияния характеристики направленности источника $\psi(\alpha)$; Δ_t — временно́е изменение масштаба сигнала, возникающее вследствие эффекта Доплера.

Полезная информация об источнике звука содержится в двух сомножителях. Функция $p_0(t - \Delta_t)$ несет информацию об излученном сигнале $p_0(t)$, и законе изменения нормальной составляющей скорости движения источника относительно точки приема (последнее — в члене $\Delta_t = \beta(\partial r/\partial t)$). Функция $F(t) = (r_0/r)\psi(\alpha)$ содержит информацию о текущем значении расстояния r до источника и его характеристике направленности (в том диапазоне углов α, которые просматриваются при перемещении источника относительно точки приема).

Таким образом, измерение функции $F(t)$ позволяет решить важные практические задачи. Ввиду малой скорости изменения этой функции, $\partial F/\partial t \ll \partial p/\partial t$ для решения данной задачи пользуются квазистационарным приближением, рассматривая функцию $p(t)$ на малых интервалах времени ΔT как стационарную и применяя операторы усреднения во времени для получения функции

$F(t)$. Выбирая отрезки времени ΔT достаточно малыми, получают малую систематическую погрешность измерения функции $F(t)$, но при этом возрастает случайная ошибка измерений и наоборот. Отсюда видна возможность оптимизации выбора параметров измерений (см. 3.5). Аналогично решается задача об исследовании нестационарных явлений, возникающих при включении или выключении механизмов, систем и др.

Итак, показано, что один и тот же процесс в зависимости от цели исследований — требуемой статистической характеристики — может быть представлен моделями случайных процессов различного класса. При этом выбор априорной модели процесса (с позиций теории случайных процессов) является выбором метода измерений (с позиций теории измерений), как чаще всего эта процедура и воспринимается экспериментатором.

3.4. Погрешности определения характеристик стационарных процессов по одной реализации

Погрешность ΔQ измерения статистической характеристики Q в общем случае определяется разностью между измеренным $\overset{*}{Q}$ и истинным Q значениями. Средний квадрат ошибки $\langle[\overset{*}{Q}-Q]^2\rangle$ в силу случайного характера исследуемого процесса содержит два слагаемых:

$$\left\langle\left[\overset{*}{Q}-Q\right]^2\right\rangle=\left\langle\overset{*}{Q}{}^2\right\rangle-2\left\langle\overset{*}{Q}\right\rangle Q+Q^2=\sigma_Q^2+S_Q^2, \qquad (3.1)$$

где $\sigma_Q^2=\left\langle\left[\overset{*}{Q}-\left\langle\overset{*}{Q}\right\rangle\right]^2\right\rangle=\left\langle\overset{*}{Q}{}^2\right\rangle-\left\langle\overset{*}{Q}\right\rangle^2$ — дисперсия флюктуационной случайной ошибки, возникающей вследствие конечной длительности исследуемой реализации; $S_Q=\langle\overset{*}{Q}\rangle-Q$ — смещенность статистической оценки, представляющая систематическую погрешность измерений.

Более общей характеристикой флюктуационной погрешности измерений является плотность распределения вероятности ошибки $w(\overset{*}{Q}-Q)$ или вытекающая отсюда возможность указания доверительной вероятности $p(\Delta Q)=\int\limits_{Q-\Delta Q}^{Q+\Delta Q} w(\Delta Q)\,d\,\Delta Q$, характеризующей вероятность нахождения значения измеряемой величины в пределах выбранного доверительного интервала $\pm\Delta Q=\pm(\overset{*}{Q}-Q)$. При достаточно большом числе усреднений, принятом при измерении статистической характеристики, закон распределения случайной ошибки измерений, как правило, близок к гауссовскому, для которого характерна следующая связь между доверительной ве-

роятностью $P(\Delta Q)$ и доверительным интервалом, выраженном в значениях дисперсии σ_Q случайного отклонения $\overset{*}{Q}$ от среднего $Q_0 = \langle \overset{*}{Q} \rangle$:

$$\left.\begin{aligned} &P\left[(Q_0 - \sigma_Q) < \overset{*}{Q} < (Q_0 + \sigma_Q)\right] = 0{,}68; \\ &P\left[(Q_0 - 2\sigma_Q) < \overset{*}{Q} < (Q_0 + 2\sigma_Q)\right] = 0{,}95; \\ &P\left[(Q_0 - 3\sigma_Q) < \overset{*}{Q} < (Q_0 + 3\sigma_Q)\right] = 0{,}99. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Рассмотрим общие закономерности, присущие ошибкам измерений стационарных процессов, т. е. измерений характеристик процесса по одной реализации с применением операторов усреднения по времени. Пусть символ q означает некоторое преобразование реализации $\xi(t)$ случайного процесса, которое необходимо для получения требуемой характеристики Q, после чего следует применить оператор S_t усреднения по времени

$$\overset{*}{Q} = S_t q\,[\xi(t)].$$

Отметим, что обязательное использование оператора усреднения отличает статистические измерения от измерений неслучайных величин. Оператор q сам по себе не дает возможности определить статистическую характеристику, а лишь преобразует реализацию исследуемого случайного процесса $\xi(t)$ в реализацию другого случайного процесса $q\,[\xi(t)]$, постоянная составляющая которого является значением искомой характеристики, но для ее измерения необходимо избавиться от случайных флюктуаций. Эту задачу и выполняет усредняющая цепь.

Усреднение по времени может быть непрерывным либо линейным (шаговым). Задаче измерения характеристик стационарного процесса непосредственно отвечает оператор линейного усреднения $S_t = (1/T_и) \int\limits_0^{T_и} \ldots dt$. Значение статистической характеристики $\overset{*}{Q}$ в этом случае считывается, спустя промежуток времени $T_и$ после начала измерения:

$$\overset{*}{Q}_{T_и} = \frac{1}{T_и} \int\limits_0^{T_и} q\,[\xi(t)]\,dt. \tag{3.3}$$

Далее, после сброса показаний прибора, измерение может быть повторено, значение $\overset{*}{Q}_{T_и}$ можно получать многократно, шаг за шагом, поэтому этот способ усреднения называют иногда шаговым усреднением. В режиме линейного усреднения можно по последовательности отсчетов $\overset{*}{Q}_{T_и}$ наблюдать за изменением $\overset{*}{Q}_{T_и}$ во

времени при медленной нестационарности случайного процесса, но сама процедура измерений за время $T_и$ соответствует условию измерений стационарного процесса. Для стационарного процесса последовательность значений $\overset{*}{Q}_{T_и}$ позволяет экспериментально оценить случайную составляющую погрешности измерений.

Оператор непрерывного усреднения дает значения статистической характеристики в любой текущий момент времени

$$\overset{*}{Q}(t) = \int_0^t q[\xi(t)]\, h(t' - t)\, dt, \tag{3.4}$$

где $h(t)$ — весовая функция усреднения.

Например, при широко распространенном экспоненциальном усреднении $h(t) = e^{-\alpha t}$ алгоритм обработки определяется выражением

$$Q(t) = \int_0^t q\,[\xi(t')]\, e^{-\alpha(t-t')}\, dt'. \tag{3.5}$$

Этот вид усреднения удобен для непрерывного наблюдения за медленно изменяющимся значением $\overset{*}{Q}(t)$.

Рассмотрим возможность априорной оценки (прогнозирования) случайной погрешности измерений. Расчет флюктуаций показаний прибора можно выполнить, основываясь на следующей физической схеме. Задача усреднения результата измерений, как отмечалось, состоит в том, чтобы сгладить флюктуации преобразованного процесса $q[\xi(t)]$ и выделить постоянную составляющую этого процесса, которая и является значением искомой характеристики Q_0. Флюктуации показаний прибора будут определяться дисперсией σ_Q^2 процесса $q[\xi(t)]$, сглаженного усредняющей цепью. Переходя к спектральным представлениям, дисперсию определим следующим образом:

$$\sigma_Q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_q(\omega)\, K_и(\omega) d\omega, \tag{3.6}$$

где $S_q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi(t)] e^{-i\omega t}\, dt$ — спектр флюктуаций преобразованного процесса на входе усредняющей цепи; $K_и(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ — частотная характеристика усредняющей цепи (интегратора).

Формально выражение (3.6) получается из (3.4) по теореме о спектре интеграла свертки. Таким образом, квадрат относитель-

ной флюктуационной погрешности измерений в общем случае определяется выражением

$$\delta_Q^2 = \frac{\sigma_Q^2}{Q_0^2} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_q(\omega) K_и(\omega)\, d\omega}{\overline{q[\xi(t)]}\, K_и(0)}. \qquad (3.7)$$

Для получения малой погрешности измерений время усреднения $T_и$ выбирают много больше интервала корреляции процесса. При этом частотная характеристика $K_и(\omega)$ оказывается сосредоточенной вблизи малых значений частоты ω, поэтому множитель $G_q(\omega)$ можно вынести за знак интеграла в (3.7), записав его как $G_q(0^+)$. Это дает возможность еще больше упростить и конкретизировать выражение (3.7), приведя его к виду

$$\delta_Q^2 = \frac{\sigma_Q^2}{Q_0^2} = \frac{G_q(Q^+)\,\Delta\omega_и}{Q_0}, \qquad (3.8)$$

где $\Delta\omega_и = (1/K_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_и(\omega)\, d\omega$ — эффективная (энергетическая) полоса пропускания усредняющей цепи. В частности, $\Delta\omega_и = \pi/T_и$ — для линейного (шагового) интегратора, $\Delta\omega_и = \pi/2RC$ — для усредняющей RC-цепи, осуществляющей экспоненциальное усреднение.

В качестве примера оценим погрешность измерения дисперсии D процесса, имеющего ширину спектра $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$, с помощью квадратичного детектора и усредняющей RC-цепи. В этом случае $q[\xi(t)] = \xi^2(t)$. При прямоугольном спектре процесса $\xi(t)$ со спектральным уровнем N_0 спектр его квадрата [36] имеет вблизи $\omega = 0$ значение $2N_0^2\Delta\omega$. Учитывая полосу пропускания RC-интегратора $\Delta\omega_и = \pi/2RC$, находим относительную среднеквадратичную погрешность

$$\delta_D^{(RC)} = \left[\frac{2N_0^2\,\Delta\omega\,\dfrac{\pi}{2RC}}{N_0^2\Delta\omega^2}\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2RC\,\Delta f}}. \qquad (3.9)$$

При линейном усреднении погрешность будет равна

$$\delta_D^{(T)} = 1/\sqrt{T_и\,\Delta f}. \qquad (3.10)$$

Таким образом, хотя конкретное значение погрешности и непредсказуемо, однако, среднеквадратичное значение относительной случайной погрешности и доверительный интервал результата измерений возможно прогнозировать, используя известное априори значение постоянной времени интегратора и параметры спектра исследуемого процесса. (Последние априори известны, например, в случае измерения шумов на выходе конкретного устройства с известной относительно узкой полосой пропускания.) Следова-

тельно, экспериментатор, как правило, имеет возможность задавать априори желаемую флюктуационную погрешность измерения и исходя из этого выбирать параметры прибора.

Обратимся далее к систематической погрешности — смещенности результата. Выражение для смещенности в общем виде записать не представляется возможным, так как последняя определяется конкретным алгоритмом обработки исследуемого процесса. Важно, однако, отметить, что большое число алгоритмов дает несмещенную оценку статистической характеристики (такие алгоритмы наиболее удобны для практики). В других же случаях смещенность оценки статистической характеристики имеет место, но сам характер этой составляющей (систематичность) позволяет в большинстве случаев оценить значение и знак этой погрешности и ввести поправку в результаты измерений, что существенно уменьшает значимость этой погрешности. В определенных случаях при наличии как случайной, так и систематической плохо предсказуемой погрешности можно ставить вопрос об оптимизации выбора параметров измерений, ибо эти две составляющие противоположным образом зависят от времени анализа: σ^2_Q — обратно пропорциональна $T_и$; S_Q — прямо пропорциональна $T_и$.

В зависимости от конкретного вида задачи ставится цель минимизировать либо сумму абсолютных значений погрешностей $\Delta Q = |\sigma_Q| + |S_Q|$, либо сумму их квадратов $\Delta Q^2 = \sigma^2_Q + S^2_Q$. Существенное значение такой подход имеет при анализе нестационарных процессов (см. п. 3.5).

В случае, если по условиям эксперимента удается получить лишь относительно короткую реализацию процесса, возникает вопрос об оптимальном усреднении, обеспечивающем получение максимальной информации о данной характеристике процесса при интегрировании на конечном интервале времени. Близкие к оптимальному результаты дает линейный интегратор при длительности реализации, в 10 и более раз превышающий интервал корреляции процесса. При меньшей длительности реализации возможно некоторое улучшение результата с учетом частичной коррелированности суммированных отсчетов.

3.5. Определение характеристик нестационарных процессов по одной реализации

При исследовании нестационарных процессов по одной реализации можно выделить задачи по определению следующих характеристик:

1) закона $A(t)$ изменения уровня статистической характеристики во времени (назовем $A(t)$ функцией нестационарности);

2) параметров (характеристик) процесса при заданных условиях работы источника, либо в известный момент времени или максимальных значений характеристики нестационарного процесса в заданном временно́м интервале;

3) моментов времени, неизвестных заранее, когда наступают заданные изменения статистических характеристик.

Первые две задачи встречаются, например, при измерении шума движущегося источника излучения либо шума при сравнительно медленном изменении режима работы источника, механизма, параметры которого можно проконтролировать и при определенных их значениях (например, при наборе определенной частоты вращения ротора механизма) измерить вибрации или шум, т. е. задача состоит в том, чтобы для заданного состояния объекта измерить его статистические характеристики.

Третья задача является обратной и состоит в том, чтобы по измеренным статистическим характеристикам шума или вибраций установить состояние объекта исследований (например, появление неисправностей механизма по результатам измерений характеристик его вибраций или шума).

1. При исследовании функции нестационарности $A(t)$ имеют место как случайная составляющая погрешности измерений (3.10), так и смещенность результата, которую в общем случае можно представить степенным рядом $S(T_и) = b(T_и/T_Q) + c(T_и/T_Q)^2 + \ldots$, где T_Q — характерный временно́й масштаб функции нестационарности. Рассмотрим случай четной функции $S(T_и)$. Тогда с учетом (3.10) суммарная погрешность записывается в виде

$$\Delta Q = \frac{a}{\sqrt{\Delta f T_и}} + c\left(\frac{T_и}{T_Q}\right)^2. \qquad (3.11)$$

Как видно, случайная погрешность (первый член) падает с увеличением времени измерений $T_и$, а смещенность (второй член), наоборот, возрастает. Следовательно, существует возможность получения минимальной суммарной погрешности при определенном значении $T_и$, которое назовем оптимальным $T_{опт}$. Задавшись целью минимизировать абсолютное значение погрешности измерений $|\Delta Q| = |\delta_Q| + |S_Q|$, из условия $\partial \Delta Q/\partial T_и = 0$ получим

$$T_{опт}^{(1)} = \left[\frac{aT_Q^2}{4c\sqrt{\Delta f}}\right]^{2/3}. \qquad (3.12)$$

Если же по условиям задачи целесообразно минимизировать суммарную дисперсию измерений

$$D_Q = \frac{a^2}{\Delta f T_и} + c^2\left(\frac{T_и}{T_Q}\right)^4, \qquad (3.13)$$

то аналогичным образом приходим к несколько иной рекомендации

$$T_{опт}^{(2)} = \left[\frac{aT_Q^2}{2c\sqrt{\Delta f}}\right]^{2/5}. \qquad (3.14)$$

Область минимума в этих задачах выражена не резко, что допускает некоторые отклонения от указанных выше рекомендаций. Перед измерением, как правило, исследователь не располагает точными значениями параметров процесса (например, T_q, Δf), поэтому вначале выбирают $T_и$, опираясь на опыт (априорные дан-

ные), а затем, получив оценку T_Q, уточняют выбор $T_{опт}$ и повторно производят измерения.

2. Определение параметров акустического поля или вибраций при заданном состоянии источника акустического излучения или вибраций производится с учетом критериев по выбору параметров измерений, изложенных выше. Информацию о состоянии источника получают, как правило, с дополнительных датчиков или измерительных систем, контролирующих заданные параметры (обороты двигателя, расстояние до движущегося источника и т. д.). Однако в ряде случаев эту информацию можно получить и из самого исследуемого сигнала (частоту вращения оценивают по частоте дискретной составляющей, дистанцию до движущего источника — по ширине характеристики прохода и т. д.). Параметры измерений выбирают оптимальными, как указано выше, либо близкими к оптимальным. Чаще всего выбирают завышенные значения $T_и$, чтобы получить меньшую случайную погрешность, а смещенность устраняют введением поправок.

Особо следует отметить характеристику максимальных значений, которая является огибающей мгновенных значений наблюдаемой статистической характеристики (например, спектра). В силу этой особенности усложняется взаимосвязь различных статистических характеристик, изменяются их свойства, что необходимо специально исследовать, контролировать и учитывать при интерпретации результатов.

3. Решение обратной задачи всегда сложнее прямой. Это относится и к задаче определения состояния объекта по измеренным акустическим характеристикам. Простейшей из задач этого рода является задача по определению момента изменения выбранной статистической характеристики. Из общих соображений и (3.10) ясно, что точность определения нужного момента времени обратно пропорциональна тому приращению (измерению) значения характеристики, которое требуется выявить. Наличие случайных флюктуаций при регистрации характеристики процесса позволяет лишь вероятностным образом задать достижимую точность.

Выбрав, например, порог, в 3 раза превышающий σ_Q, можем при гауссовском характере флюктуаций на основании (3.2) утверждать, что вероятность выявления изменения статистической характеристики будет не хуже 0,99, а условием выявления этого изменения является неравенство $|\Delta Q_T| > 3\sigma_Q(T_и)$.

Задача усложняется в тех случаях, когда изменение статистической характеристики невелико и происходит достаточно часто (мало́ время постоянства статистической характеристики), что не позволяет увеличивать длительность измерения $T_и$ статистической характеристики, хотя общее время наблюдения может быть и неограниченным. В каждом конкретном случае разрабатывают различные специальные вероятностные методы, позволяющие повысить вероятность обнаружения характеристик нестационарности процесса.

3.6. Определение характеристик процесса по ансамблю реализаций

К измерению характеристик случайного процесса по ансамблю реализаций прибегают в случаях, когда необходимо выявить быстро изменяющуюся функцию нестационарности — временной множитель мультипликативной модели процесса либо аддитивную составляющую, как периодическую, так и непериодическую, в самом процессе или в его огибающей. Возможность анализа по ансамблю реализаций определяется наличием датчиков, позволяющих по выдаваемым синхроимпульсам осуществлять привязку реализаций к единой оси времени.

Оценим вначале случайную (флюктуационную) составляющую процесса. Смысл усреднения по ансамблю из N реализаций состоит в том, чтобы из суммы $\eta(t)=f(t)+\xi(t)$, включающей детерминированную $f(t)$ и случайную $\xi(t)$ составляющие, выделить детерминированную составляющую. Применив усреднение по ансамблю $\langle\eta(t)\rangle_N=(1/N)\sum_{1}^{N}[f(t)+\xi_k(t)]$ и учтя независимость аддитивных шумов отдельных реализаций $\langle\xi_k(t)\xi_i(t)\rangle=0$, получим среднее значение, представляющее искомую функцию $M\langle\eta(t)\rangle_N=f_k(t)$ и дисперсию

$$D=\langle\eta(t)\rangle_N=M[\langle\eta(t)\rangle_N-f(t)]^2=\frac{\sigma_\xi^2}{N}. \qquad (3.15)$$

Таким образом, случайная составляющая погрешности измерений определяется и в этом случае конечным объемом данных (конечным числом реализаций). Однако смещенность результата и дисперсия зависят от различных факторов и могут независимо друг от друга минимизироваться соответствующим выбором объема данных и качеством формирования ансамбля реализаций.

Оценим далее погрешность, вызванную случайным разбросом начал отсчета реализаций исследуемого процесса. Пусть измеряется характеристика путем усреднения по выборочному ансамблю реализаций $\overset{*}{Q}=(1/N)\sum_{i=1}^{N}q[x_i(t)]$. Известна зависимость Q от времени, которую представим двумя членами степенного ряда:

$$Q(t)\approx\alpha t+\beta t^2. \qquad (3.16)$$

Необходимо найти погрешность определения характеристики Q при наличии случайного временного сдвига Δ_i реализации, т. е. $x_i(t+\Delta_i)$. Искомая характеристика

$$\overset{*}{Q}(t)=(1/N)\sum_{i=1}^{N}q(x_i(t+\Delta_i)]$$

имеет математическое ожидание $M[\overset{*}{Q}(t)]$ и дисперсию $D[\overset{*}{Q}(t)] = M\{\overset{*}{Q}(t) - M[\overset{*}{Q}(t)]\}^2$. Очевидно, что погрешность измерений будет зависеть от плотности вероятности $w(\Delta)$ случайного временного сдвига реализаций:

$$M\left[\overset{*}{Q}(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} w(\Delta)\, Q(t+\Delta)\, d\Delta.$$

Можно показать [74], что для математического ожидания статистической характеристики имеем при нормальном разбросе начал отсчета реализаций

$$M\left[\overset{*}{Q}(t)\right] = Q(t) + \frac{1}{9}\beta_Q. \tag{3.17}$$

Для равномерного распределения начал отсчета реализаций

$$M\left[\overset{*}{Q}(t)\right] = Q(t) + \frac{1}{3}\beta_Q. \tag{3.18}$$

Если измеряемой характеристикой является среднее значение $M(t)$ или дисперсия $D(t)$, то дисперсии случайных ошибок при нормальном разбросе начал отсчетов соответственно будут

$$D\left\{\overset{*}{M}(t)\right\} \approx \frac{1}{N}\left[D_x(t) + \frac{1}{9}\beta_D + \frac{1}{9}\alpha_M^2 + \frac{2}{81}\beta_M^2\right]; \tag{3.19}$$

$$D\left\{\overset{*}{D}(t)\right\} \approx \frac{1}{N}\left\{3D_x(t)\left[D_x(t) + \frac{2}{3}\beta_D\right] + \frac{4}{9}\alpha_D + \frac{11}{81}\beta_D^2\right\}, \tag{3.20}$$

где индексы D и M у коэффициентов наклона α и кривизны β относятся к представлению искомых характеристик $M_x(t)$ и $D_x(t)$ степенными рядами соответственно.

Для равномерного распределения начал отсчета реализаций соответствующие дисперсии ошибок будут

$$D\left\{\overset{*}{M}(t)\right\} \approx \frac{1}{N}\left\{D_x(t) + \frac{1}{3}\beta_D + \frac{1}{3}\alpha_M^2 + \frac{4}{45}\beta_M^2\right\}; \tag{3.21}$$

$$D\left\{\overset{*}{D}(t)\right\} \approx \frac{1}{N}\left\{3D_x(t)\left[D_x(t) + \frac{2}{3}\beta_D\right] + \frac{4}{3}\alpha_D + \frac{7}{9}\beta_D^2\right\}. \tag{3.22}$$

Из (3.17) и (3.18) видно, что для стационарных процесов, имеющих $M_x(t) = \text{const}$, $D_x(x) = \text{const}$, систематические ошибки (смещенность) отсутствуют, а для нестационарных процессов среднее значение не зависит от начального сдвига реализаций в случае, если $Q(t)$ имеет характер линейной зависимости от времени $\beta_Q = 0$. Дисперсия результата может определяться наклоном α и кривизной β зависимости $Q(t)$.

Рассмотрим далее смешанный способ анализа, когда применяют операторы усреднения по времени, а затем усредняют результаты по ансамблю полученных характеристик с целью их

дальнейшего уточнения. При усреднении по времени получим по одной k-й реализации $\overset{*}{Q}_k(l)_T = Q(l) + \xi_k(l)$, где $\xi_k(l)$ — случайная составляющая результата, оцениваемая дисперсией σ_k. При усреднении по ансамблю полученных характеристик

$$Q(l)_{T,N} = (1/N) \sum_{1}^{N} \overset{*}{Q}_k(l)_T$$

получим дисперсию

$$\sigma^2_{T,N} = \frac{1}{N} \sigma^2_T = \frac{a^2}{NT_и \Delta f}, \tag{3.23}$$

показывающую, что при увеличении объема информации до значения $NT_и$ соответственно уменьшается и дисперсия случайной погрешности измерений. Выбор $T_и$, как и выше, рекомендуется производить близким к $T_{опт}$. При этом смещенность результата будет определяться только выбором $T_и$, если аргумент l характеристики $Q(l)$ не является временем, а означает координату преобразованной функции $q[\xi_k(t)]$.

3.7. Цифровые методы обработки сигналов при статистических измерениях

Развитие цифровой вычислительной техники, открывающей широкие возможности при выполнении статистических измерений, происходит в двух направлениях:

1) разработка быстродействующих специализированных процессоров и приборов, осуществляющих получение одной или нескольких статистических характеристик в реальном масштабе времени, т. е. в темпе поступления информации о сигнале;

2) разработка методов применения универсальных ЭВМ и методов программирования, позволяющих вести любую обработку исследуемого сигнала с целью получения заданной статистической характеристики, параметра или функционала исследуемого процесса.

Первое направление развивается специалистами по проектированию приборов. Проводятся соответствующие исследования по выбору оптимальных алгоритмов обработки сигнала и параметров преобразований непрерывных (аналоговых) данных в цифровую форму. Результаты этих исследований изложены в специальной литературе по цифровой вычислительной технике.

Второе из названных направлений развивается специалистами-физиками совместно со специалистами по программированию. Чтобы успешно использовать вычислительную технику и избежать ошибок, необходимо знать основные принципы цифровой обработки сигналов, кратко изложенные ниже.

Преобразование сигнала из непрерывной (аналоговой) формы в цифровую есть, во-первых, преобразование непрерывного про-

цесса в дискретный во времени процесс (дискретизация) и, во-вторых,— преобразование последовательности непрерывных (точных) значений исследуемого процесса в последовательность округленных значений, выбираемых из стандартного ряда уровней (квантование). Эти два вида преобразований процесса вносят специфические дополнительные погрешности в результаты определения статистических характеристик, которые необходимо оценивать и учитывать при статистических измерениях.

Известна теорема Котельникова [16], утверждающая, что если функция не содержит частот выше $f_м$, то она полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга на $t_д = {}^1/_2 f_м$. Иначе говоря, частота дискретизации по Котельникову или Найквисту должна быть вдвое выше максимальной частоты в спектре процесса: $f_д = 2f_м$. Это правило определяет условия отсутствия искажений при дискретизации процесса. Преобразование при этом является обратимым, т. е. позволяет по полученным отсчетам точно восстановить исходную непрерывную функцию времени. Однако при применении этого простого правила на практике возникает ряд вопросов, которые требуют пояснения. Практически спектр процесса либо сам монотонно падает к высоким частотам, либо это происходит за счет применения фильтров, срезающих высокие частоты. И тогда возникает вопрос, что же считать за максимальную частоту спектра сигнала? Ответ на него дает оценка искажений реального сигнала при дискретизации.

Дискретизация процесса приводит к явлению наложения спектров, что объясняется следующим образом. Представим операцию дискретизации как операцию перемножения исследуемой функции $x(t)$ на последовательность δ-импульсов:

$$z_0(kt_д) = x(t)\,\delta(t - kt_д), \quad k = (1,\ N), \tag{3.24}$$

где $t_д = 1/f_д$ — период дискретизации процесса. Тогда спектр функции $z_0(kt_д)$ как спектр произведения функций $x(t)$ и $\delta(t - kt_д)$ представляется сверткой по частоте ($\overset{\omega}{\otimes}$) спектров сомножителей:

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) \overset{\omega}{\otimes} S_\delta(\omega). \tag{3.25}$$

Так как спектр $S_\delta(\omega)$ представляется рядом Фурье — дискретными значениями на частотах $nf_д$, $n = 1, 2, \ldots$, то отсюда и возникает эффект наложения спектров (рис. 3.1) в случае, если на частотах выше $f_м$ имеются заметные значения спектральных уровней.

Физически операция дискретизации может быть представлена как эффект модуляции периодической последовательности импульсов $\delta(t - kt_д)$, исследуемой функцией $x(t)$. Тогда происходит наложение спектра S_z модулированного процесса $z(t)$ на спектр S_x исходной (модулирующей) функции $x(t)$, как показано на рис. 3.1. Отсюда вытекают следующие требования:

1) на входе аналого-цифрового преобразователя ЭВМ должен стоять фильтр нижних частот, срезающий высокие частоты иссле-

дуемого процесса, с возможно более крутым срезом частотной характеристики;

2) частоту дискретизации следует выбирать таким образом, чтобы наложенная часть спектра лежала ниже требуемого динамического диапазона D спектрального анализа (см. рис. 3.1), т. е. чтобы погрешность измерения спектра $(1/D)$ не превышала заданного значения.

В заключение отметим, что при определении ряда статистических характеристик возможно применение метода так называемых разреженных выборок [18, 20]. При этом в определенных условиях систематических искажений характеристики не возникает, но уве-

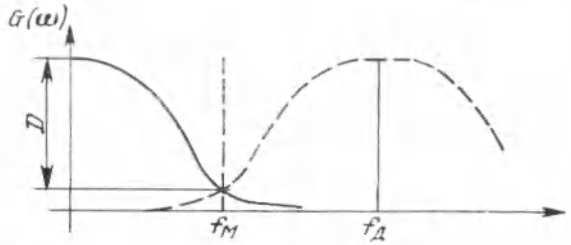

Рис. 3.1. Эффект наложения спектров при дискретизации с частотой $f_д$ процесса, характеризуемого верхней частотой $f_м$.

личивается флюктуационная погрешность вследствие сокращения объема информации о процессе в M раз, где M определяется отношением полного числа некоррелированных выборочных значений процесса к использованному их числу, следовательно, возрастание случайной погрешности происходит в $\sqrt{M}$ раз.

В других случаях применяют непериодическую дискретизацию процесса, чтобы избежать искажений при измерении периодических процессов, и другие более сложные правила по выбору частоты дискретизации. Однако возможности применения подобных методов ограничены измерениями конкретных статистических характеристик сигналов определенного класса, что всегда оговаривается при их разработке, описании и применении. Универсальным же правилом является выбор частоты квантования в соответствии с теоремой Котельникова.

Остановимся далее на искажениях характеристик вследствие квантования по уровню. Эта процедура может быть представлена как операция добавления некоторой помехи $\varepsilon(t)$ к исследуемому процессу

$$z(kt_д) = z_0(kt_д) + \varepsilon(kt_д), \tag{3.26}$$

где $\varepsilon(kt_д) = x(kt_д) - z_0(kt_д)$ — ошибка передачи значений исследуемого процесса вследствие квантования по уровню (шумы квантования). Если шаг квантования равен q, то при $q/\sigma_x \ll 1$ (где

σ_x^2 — дисперсия исследуемого процесса) дисперсия шумов квантования определяется так называемой поправкой Шеппарда:

$$\sigma_\varepsilon^2 = q^2/12. \tag{3.27}$$

Более полной характеристикой шумов квантования является их плотность вероятности. Последняя имеет нулевые значения при $x(t) = qm$ и $x(t) = [q + (1/2)]m$ и практически равномерное распределение при $mq + 0{,}5 < \varepsilon < mq - 0{,}5$.

Добавление шумов квантования $\varepsilon(t)$ искажает корреляционную функцию исследуемого процесса, причем наиболее сильно — при малых значениях времени запаздывания τ. Это означает, что наибольшим искажениям подвергается высокочастотная часть спектра. Произведем оценку этого вида искажений. Для гауссовского процесса с дисперсией σ_x^2 при равномерном спектре в полосе частот $\Delta\omega_x$ получена [36] следующая оценка спектра шумов квантования:

$$F_{\text{кв}}(\omega) = \frac{\beta\sigma_x^2}{\pi^2\,\Delta\omega_x}\sqrt{\frac{3\beta}{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}e^{-\frac{3\beta\omega^2}{8n^2\pi^2\,\Delta\omega_x^2}}, \tag{3.28}$$

где $\beta = \delta^2/\sigma_x^2$ — относительный шаг квантования.

Отсюда видно, что спектр шумов квантования существенно шире спектра исследуемого процесса: $\Delta\omega_{\text{кв}} = (12\sigma/\pi\delta)\Delta\omega_x$. В частности, при частоте, равной верхней частоте $\Delta\omega_x$ исследуемого процесса, ослабление спектра можно оценить первым слагаемым ряда (3.28), а экспоненциальный спектр представить первыми членами степенного ряда, что приводит к приближению

$$\frac{F_{\text{кв}}(\Delta\omega)}{F_x(0)} \approx 1 - 0{,}125\frac{\delta^2}{\sigma_x^2}. \tag{3.29}$$

Следовательно, спектр шумов квантования в пределах рабочего диапазона частот $\Delta\omega_x$ исследуемого сигнала можно считать равномерным, а его относительную спектральную плотность с достаточной для практики точностью считать равной

$$\frac{F_{\text{кв}}(0)}{F_x(0)} = \frac{\beta}{\pi^2}\sqrt{\frac{3\beta}{2\pi}} \approx 0{,}25\frac{\delta^3}{\sigma_x^3}. \tag{3.30}$$

Обратная величина дает оценку динамического диапазона спектрального анализа, которая, например, равна 60 дБ при шестиразрядном АПЦ ($2^6 = 64$ уровней квантования), 78 дБ — при восьмиразрядном АЦП и т. д.

Таким образом, обычно применяемые аналого-цифровые преобразователи (АЦП) обеспечивают весьма малые спектральные уровни шумов квантования, т. е. высокую точность спектрального и корреляционного анализов с применением ЭВМ. Измерение функций распределения вероятностей акустических шумов также обеспечивается с достаточной точностью при 6—8-разрядных АЦП.

Однако некоторые виды обработки могут потребовать более высокого числа разрядов АЦП. Например, для определения статистических характеристик разности двух процессов может потребоваться до 12—14 разрядов входных процессов. Высокое число разрядов чисел необходимо также и для обработки введенных в ЭВМ данных.

При использовании цифровой вычислительной техники целесообразно различать:

1) исследовательские программы, предназначенные для получения оценок каких-либо новых статистических характеристик или их функционалов при сравнительно небольшом объеме обрабатываемых реализаций;

2) рабочие программы, предназначенные для получения оценок стандартных характеристик при большом объеме обрабатываемых реализаций. В последнем случае на ЭВМ часто возлагается также и вторичная обработка получаемых статистических характеристик (спектров, корреляционных функций, функций распределения и т. п.).

В первом случае необходимо при малых затратах времени создать программу и обработать сравнительно небольшой объем данных. Длительность получения одной характеристики не имеет значения. Весь анализ обычно ведется на универсальной ЭВМ с предварительным запоминанием значений реализации на магнитной ленте или дисках.

Во втором случае важно иметь малую продолжительность получения одной характеристики. Поэтому целесообразно сочетать применение специализированных процессоров, работающих в реальном масштабе времени с универсальной ЭВМ, позволяющей вести вторичную обработку данных и представление их в стандартизованной форме (в виде таблиц, графиков).

Глава 4. ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1. Проблемы кумулянтного представления случайных процессов

Одномерная плотность распределения вероятностей случайного процесса — простейшая и относительно малоинформативная, но полная одномерная характеристика случайного процесса, дающая как бы обобщенное представление «амплитуды» процесса. Простота этой характеристики позволяет наглядно показать практические преимущества моментного (кумулянтного) описания процесса по сравнению с любой полной характеризующей функцией — плотностью вероятности, характеристической функцией и т. д.

Так, нестационарный процесс представляется зависящей от времени плотностью вероятности $w(x, t)$. Графическое изображение этой двумерной функции, например при ее измерении, весьма затруднительно. Между тем большинство экспериментальных исследований и состоит в том, чтобы определить и зафиксировать изменение той или иной статистической характеристики во времени или найти зависимость ее от заданных внешних параметров, влияющих на ход процесса. Измерение, представление и графическое изображение такого рода зависимостей существенно упрощается, если перейти к измерениям кумулянтов одномерного распределения. Преимущества такого подхода наиболее очевидны в случаях, когда изменение $w(x)$ от времени обусловлено зависимостью от времени одного-двух кумулянтов процесса. Но при этом возникает ряд принципиальных вопросов, которые необходимо рассмотреть и учесть при интерпретации получаемых экспериментальных данных.

Прежде всего укажем на так называемую «проблему моментов» [35, 38], состоящую в том, что по заданным моментам (кумулянтам) закон распределения вероятностей определяется однозначно далеко не всегда. Действительно, пусть функция распределения вероятностей представляется двумя слагаемыми:

$$w(x) = w_0(x) + f(x), \tag{4.1}$$

где $w_0(x)$ — гладкая функция; $f(x)$ — осциллирующая функция, такая, что в (4.1) не нарушаются общие свойства, присущие функции распределения вероятности (неотрицательность, нормированность). Например, можно положить, что $f(x) = w_0(x)\cos\Omega x$. Тогда функция $w(x) = w_0(x)(1+\cos\Omega x)$ будет неотрицательной, удов-

летворяющей условию нормировки $\int w(x)=1$ и имеющей следующие центральные моменты:

$$\mu_x^{(k)}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M_1)^k w(x)\,dx=\mu_0^{(k)}+\Delta_k, \tag{4.2}$$

где $\mu_0^{(k)}$ — центральный момент распределения $w_0(x)$. Отклонение Δ_k центральных моментов $\mu_x^{(k)}$ от моментов $\mu_0^{(k)}$ может быть сколь угодно малым, если период $2\pi/\Omega$ осцилляций функций $f(x)$ достаточно мал, $2\pi/\Omega\sigma_x\to 0$. Как видно, множество функций распределения, отличающихся частотой Ω осцилляций, будет характеризоваться практически равными кумулянтами, выражающимися через центральные моменты (см. табл. 1.1). Налицо неоднозначность определения функции распределения вероятностей по известным кумулянтам. Однако рассмотренное свойство при экспериментальных исследованиях оказывается скорее преимуществом кумулянтного представления свойств случайных процессов, чем его недостатком. Дело в том, что экспериментально найденная оценка функции распределения вероятности — гистограмма плотности эмпирического распределения флюктуирует относительно некоторой гладкой кривой, как это представлено в (4.1). Флюктуации могут быть представлены рядом Фурье: $f(x)=w_0(x)+(1+\sum_i \cos\Omega_i x)$. Найденные по эмпирической гистограмме оценки кумулянтов распределения позволяют на основании свойства неоднозначности кумулянтного представления построить сглаженную оценку функции распределения вероятности $\overset{*}{w}_0(x)$, более близкую к теоретическому распределению, чем эмпирическая гистограмма распределения.

Вторая особенность кумулянтного представления свойств случайных процессов вытекает из теоремы Марцинкевича [38, 77], которая гласит: никакая функция вида $\theta(u)=\exp(a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots+a_nu^n)$ при $n>2$ не может быть характеристической функцией процесса (a_i — комплексные числа), т. е. только бесконечная последовательность кумулянтов эквивалентна характеристической функции или плотности вероятности процесса и служит его полной характеристикой, конечное же число кумулянтов представляет функцию, которая не может быть характеристической функцией по той причине, что ее преобразование Фурье (которое должно быть плотностью вероятности) принимает отрицательные значения при некоторых значениях аргумента. Отмеченная особенность не мешает, однако, пользоваться конечным числом кумулянтов для приближенного описания вероятностных распределений. Чтобы отметить, что эти приближенные функции не удовлетворяют всем обязательным свойствам плотности вероятности, их называют модельными распределениями [38].

С подобного рода явлениями приходится сталкиваться и в других случаях представления функций конечным числом членов

ряда. Например, известно явление Гиббса при представлении периодического процесса конечным числом членов ряда Фурье: вблизи точек разрыва функции конечная сумма членов ее ряда Фурье дает значительные отклонения от представляемой функции, причем по мере увеличения числа членов ряда сужается область этого расхождения вблизи точек разрыва функции, однако, само отклонение остается значительным. Известны методы устранения явления Гиббса. Таким образом, наличие явления Гиббса не препятствует практическому применению рядов Фурье.

Особенности кумулянтного описания процессов также не ограничивают возможности их применения. Необходимо лишь знать и учитывать область проявления и величину отрицательных значений модельных распределений различного порядка (порядок модельного распределения определяется порядком старшего кумулянта усеченного их ряда). Модельное распределение второго порядка является, очевидно, гауссовским приближением. Модельное приближение четвертого порядка называют эксцессным приближением. Эксцессное распределение рекомендуется определять по формуле

$$w_э(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \exp\left\{\sum_{k=1}^{4} \frac{\varkappa_k}{k!} (iu)^k\right\} du. \qquad (4.3)$$

В случае симметричного эксцессного распределения

$$w_э^0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\varkappa_2 u^2 + \frac{1}{24}\varkappa_4 u^4\right) \cos ux\, du, \qquad (4.4)$$

расчеты для коэффициентов эксцесса $\gamma_4 = -1$, $\gamma_4 = -1{,}5$ и $\gamma_4 = -2$ показывают [38], что отрицательные значения $w_э^0(x)$ не превышают 1,5 % и наблюдаются при $x/\sigma > 3$.

Другой способ расчета состоит в применении ряда Эджворта [36] по производным гауссовской плотности $w_г$:

$$w_э(x) = \sum_{k=0} \sum_{l=0} \frac{(-1)^{3k+4l} \varkappa_3^k \varkappa_4^l}{(3!)^k (4!)^l k!\, l!} w_г^{(3k+4l)}(x). \qquad (4.5)$$

Расчеты показывают, что при ограничении двумя членами этого ряда получаются отрицательные значения $w(x)$, примерно равные 1,5 % от $w(0)$ при $x/\sigma > 2$, а при трех членах ряда — около 5 % при $x/\sigma > 2{,}7$ к тому же в последнем случае в области $x/\sigma < 2{,}5$ имеют место более значительные отклонения от эксцессного распределения (4.3), чем в случае двух членов ряда Эджворта. Следовательно, ряд Эджворта сходится медленно и для приближения функции распределения необходимо брать большое число членов его ряда. Приведенные результаты показывают значительное преимущество расчетов с использованием преобразования Фурье (4.3) перед расчетами по формулам ряда Эджворта (4.4).

В заключение сформулируем полученные результаты. Измеряя вначале среднее значение и дисперсию процесса мы познаем его на уровне гипотезы гауссовского процесса. Измерив дополнительно кумулянты более высоких порядков, получаем возможность все более полно представить его функцию распределения, т. е. уточнить свойства процесса. Полученные выводы целиком и полностью могут быть отнесены и к многомерным кумулянтам и корреляционным функциям высших порядков.

Обобщая рассмотренные результаты на случай многомерных законов распределения вероятностей, можно следующим образом представить последовательные этапы изучения случайных процессов. Вначале ограничиваются изучением лишь спектра или корреляционной функции процесса, т. е. принимается гипотеза гауссовского процесса. Этот подход позволяет характеризовать свойства процесса в первом приближении. Далее определяют корреляционные функции или спектры более высоких порядков, извлекая таким образом дополнительную информацию о процессе. Это означает, что определены дополнительные члены разложения многомерной функции распределения, т. е. последняя становится известной более подробно. Таким образом, определение статистических характеристик все более высоких порядков продвигает нас в исследовании более тонких свойств многомерной функции распределения, хотя последняя непосредственно и не измеряется. Тем самым обходятся трудности прямого измерения и представления многомерной вероятностной характеристики процесса за счет выбора и исследований комплекса наиболее информативных одномерных вероятностных характеристик.

4.2. Свойства одномерного распределения

Кумулянты (или семиинварианты) одномерного распределения представляют собой коэффициенты

$$\varkappa_k = i^{-k} B^{(k)}(0) = i^{-k} \left| \frac{d^k \ln \theta(u)}{du^k} \right|, \tag{4.6}$$

позволяющие разложить кумулянтную функцию $B(u) = \ln \theta(u)$ в степенной ряд

$$\ln \theta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_k}{k!} (iu)^k, \tag{4.7}$$

где $\theta(u) = \exp B(u)$ — характеристическая функция процесса.

Кумулянты могут быть выражены через начальные или центральные (см. табл. 1.1) моменты. Наиболее часто используются кумулянты первых четырех порядков, имеющие следующий статистический смысл:

1) кумулянт первого порядка совпадает со средним значением процесса $\varkappa_1 = M_1$ и характеризует положение одномерной плотности вероятности на оси абсцисс;

2) кумулянт второго порядка совпадает с дисперсией процесса $\varkappa_2=\sigma^2$ и служит мерой разброса случайных значений процесса относительно среднего значения;

3) кумулянт третьего порядка совпадает с центральным моментом третьего порядка $\varkappa_3=\mu_3$ и характеризует асимметрию распределения; нормированное значение кумулянта третьего порядка называют коэффициентом асимметрии $\gamma_3=\varkappa_3/(\varkappa_2)^{3/2}$;

4) кумулянт четвертого порядка выражается через центральные моменты четвертого и второго порядков, $\varkappa_4=\mu_4-3\mu_2^2$, и характеризует степень островершинности распределения: $\varkappa_4>0$ соответствует более острой вершине, чем у гауссовской кривой, $\varkappa_4<0$ характеризует более тупую вершину; безразмерный коэффициент эксцесса $\gamma_4=\varkappa_4/\varkappa_2^2$ дает количественную оценку степени островершинности функции распределения;

5) кумулянты и кумулянтные коэффициенты, $\gamma_n=\varkappa_n/\sigma^n$, более высокого порядка в определенной мере уточняют количественную оценку формы функции распределения — нечетные кумулянтные коэффициенты уточняют характер несимметричности функции распределения, четные — характер островершинности функции распределения.

Отличительной особенностью кумулянтов среди других числовых характеристик функции распределения является независимость высших кумулянтов от низших, что говорит о том, что каждый кумулянт более высокого порядка несет новую дополнительную информацию о вероятностных свойствах случайного процесса. В то же время значения кумулянтных коэффициентов ограничены определенными условиями. Последние вытекают из необходимости удовлетворить требованию положительной определенности функции распределения. Из общего неравенства Коши—Буняковского, $\varkappa^2(x^m, x^n)^2 \leqslant \varkappa(x^m, x^n)\varkappa(x^m, x^n)$, следуют такие ограничения [38]:

а) условно принимается, что $\gamma_1=0$;

б) всегда $\varkappa_2>0$, а также $\gamma_2=1$;

в) коэффициент асимметрии может принимать любые значения, но его значения связаны с коэффициентом эксцесса;

$$\gamma_4-\gamma_3^2+2\geqslant 0; \tag{4.8}$$

г) коэффициент эксцесса всегда ограничен снизу

$$\gamma_4\geqslant -2, \tag{4.9}$$

а также связан с γ_3 неравенством (4.8); поэтому, если $\gamma_4=-2$, то обязательно $\gamma_3=0$, если же $\gamma_4=0$, то $-\sqrt{2}\leqslant\gamma_3\leqslant\sqrt{2}$, что дает в плоскости координат $(\varkappa_3, \varkappa_4)$ три точки, через которые проходит парабола (4.8), ограничивающая область допустимых значений $\varkappa_3, \varkappa_4$;

д) все нечетные кумулянтные коэффициенты могут принимать сами по себе любые значения, а четные — ограничены снизу $\gamma_{2n}\geqslant -A_{2n}$, в частности, $\gamma_6\geqslant -106$, $\gamma_8\geqslant -166\,214$, кроме того,

область значений коэффициентов высших порядков, зависит от значений коэффициентов низших порядков, в частности,

$$\gamma_6 \geqslant (\gamma_4 - 9)^2 - 105. \tag{4.10}$$

Таким образом, нечетные кумулянты могут принимать большие значения только при больших значениях четных кумулянтов.

При различных преобразованиях случайных процессов проявляются следующие свойства кумулянтов и кумулянтных коэффициентов:

1) кумулянт является симметричной функцией своих аргументов;

2) постоянные множители можно вынести за знак оператора определения кумулянта;

$$\varkappa(a\xi,\ b\eta,\ c\zeta) = abc\ \ldots\ \varkappa(\xi,\ \eta,\ \zeta);$$

3) кумулянт суммы процессов равен сумме кумулянтов слагаемых;

$$\varkappa(\xi,\ \eta,\ \vartheta_1 + \vartheta_2) = \varkappa(\xi,\ \eta,\ \vartheta_1) + \varkappa(\xi,\ \eta,\ \vartheta_2);$$

4) совместный кумулянт совокупности величин, в которую входит случайная величина, статистически независимая от других, равен нулю;

5) кумулянт совокупности величин, в которую входит детерминированная величина, равен нулю;

6) кумулянты инвариантны к переносу начал отсчета случайных величин и изменению их масштаба (свойство 2), поэтому они и получили название семиинвариантов.

4.3. Погрешности измерений плотности вероятностей и ее моментов

Экспериментальная оценка функции распределения вероятностей стационарного процесса основана на определении относительного времени пребывания реализации случайного процесса ниже заданного уровня:

$$F(x) = P[\xi(t) < x] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_i \tau_i. \tag{4.11}$$

Плотность распределения вероятностей оценивается по относительному времени пребывания процесса внутри интервала Δx между уровнями x и $x + \Delta x$:

$$\overset{*}{w}(x) = \frac{1}{T\,\Delta x} \sum_i \Delta t_i. \tag{4.12}$$

При измерениях этих характеристик возникают погрешности: случайная — вследствие конечного времени наблюдения процесса и смещенность — вследствие конечной ширины интервала Δx. Для оценки случайной погрешности согласно (3.8) необходимо найти

значение спектра усредняемой функции $G_q(0_+)$ вблизи нулевой частоты.

При измерении функций распределения вероятностей искомая характеристика может быть представлена как среднее значение функции, характеризующей относительное время пребывания процесса выше заданного уровня:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi(t) < x; \\ 0 & \text{при } \xi(t) \geqslant x. \end{cases}$$

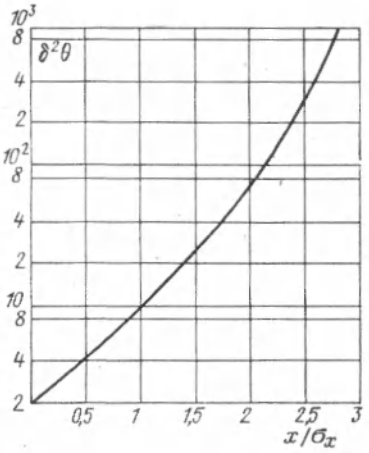

Рис. 4.1. Относительная погрешность измерений закона распределения вероятностей гауссовского процесса.

Задача сводится таким образом к отысканию погрешности измерения среднего значения процесса $u(t)$.

Расчеты показывают [39], что оценка сверху для квадрата относительной случайной погрешности измерений функции распределения гауссовского процесса определяется формулой

$$\sigma_и^2 = \frac{2\tau_x}{T_и} \frac{\sigma_и^2}{[\Phi(x/\sigma_x)]^2}, \tag{4.13}$$

где $\tau(x)$ — интервал корреляции исследуемого процесса $x(t)$; $T_и$ — постоянная времени; $\sigma_и^2 = [1 - \Phi(x/\sigma_x)]\Phi(x/\sigma_x)$ — дисперсия процесса $u(t)$, $\Phi(x) = (1/2\pi)\exp(-x^2/2)$ — функция Гаусса.

Практически при малых значениях x/σ_x определяют функцию распределения $F(x)$, а при больших значениях x/σ_x интерес представляет точное значение функции $F_1(x) = 1 - F(x)$. Поэтому относительная погрешность измерений должна соответственно определяться либо относительно значений $F(x)$, либо относительно $F_1(x)$. На рис. 4.1 приведен обобщенный график для оценки

относительной величины $\delta_F^2\theta$ или $\delta_{F_1}^2\theta$, где $\theta = T_и/\tau_k$ — относительное время интегрирования (нормированная продолжительность измерения) в зависимости от относительного уровня анализа $|x|/\sigma_x$.

При измерении плотности распределения вероятности вероятность попадания значений процесса в интервал уровней между x и $x+\Delta x$ можно рассматривать как среднее значение процесса $z(t)$, который принимает значения

$$w(x)\,\Delta x \approx z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x(t) < x; \\ 1 & \text{при } x < x(t) < x + \Delta x; \\ 0 & \text{при } x(t) > x + \Delta x. \end{cases}$$

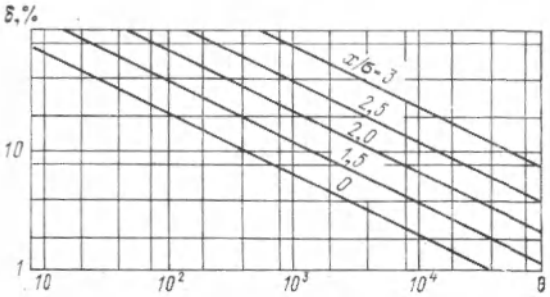

Рис. 4.2. Относительная случайная погрешность δ определения плотности вероятности при различной относительной продолжительности усреднения $\theta = T_и/\tau_{кч}$.

Относительная погрешность δ измерений определится тогда средним квадратичным значением флюктуации процесса $z(t)$, отнесенным к среднему значению процесса $z(t)$, после его усреднения интегратором с постоянной времени $T_и$. Оценка сверху этой погрешности (рис. 4.2), как можно показать [39], определяется выражением

$$\delta_w \approx \left[\frac{2}{\theta} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu}{[\varphi(x/\sigma_x)]^2} \right]^{1/2}, \tag{4.14}$$

где $\theta = T_и/\tau_{kx}$ — относительная продолжительность усреднения; $c_\nu = 1/\nu!\,[\varphi^\nu(x/\sigma_x)]^2$; $\varphi^\nu(x/\sigma_x) = d^{(\nu)}/\partial\xi^\nu\left(1/\sqrt{2\pi}\,e^{-1/2\xi^2}\right)$; $\xi = x/\sigma_x$.

Измерения функций распределения вероятностей удобно производить методом дискретных выборок. Для этого считываются значения процесса (выборки) с интервалом не менее интервала корреляции процесса (метод некоррелированных выборок) и используется цифровая дискретная техника для счета импульсов. Амплитудные анализаторы пропускают на счетчик импульсы, амплитуды которых и находятся в заданных пределах: $u < x$ — в случае изме-

рения функции распределения $F(x)$, $x<u<x+\Delta x$ — в случае измерения плотности вероятности $w(x)$.

Таким образом, отношение числа импульсов, зафиксированных счетчиком, на выходе амплитудного анализатора h к общему числу импульсов N дает оценку искомого значения вероятностного закона:

$$\overset{*}{F}(x)=\frac{h_F}{N} \quad \text{или} \quad \overset{*}{w}(x)=\frac{1}{\Delta x}\frac{h_w}{N}.$$

Для некоррелированных выборок $N=N_{\text{нк}}$ относительная среднеквадратичная погрешность измерения интегральной функции распределения вероятностей $F(x)$ определяется выражением

$$\delta_F=\sqrt{\frac{1}{N_{\text{нк}}}\gamma_{\text{и}}^2}=\sqrt{\frac{1}{N_{\text{нк}}}\frac{1-F(x)}{F(x)}}, \tag{4.15}$$

где коэффициент вариации импульсного процесса u равен

$$\gamma_{\text{и}}=\sigma_{\text{и}}/m_{\text{и}}=\sqrt{[1-F(x)]/F(x)}.$$

Если при заданной длительности реализации $T_{\text{и}}$ увеличивать частоту выборок и соответственно их число $N_1>N_{\text{нк}}$, то погрешность уменьшается незначительно [формула (4.15) при замене $N_{\text{нк}}$ на N_1 не верна]. И, наоборот, при уменьшении числа выборок $N_2<N_{\text{нк}}$ погрешность возрастает в соответствии с (4.15), где можно заменить $N_{\text{нк}}$ на N_2.

При измерении плотности распределения вероятностей методом некоррелированных выборок дисперсия случайной относительной погрешности оценивается по выражению [39]:

$$\delta_w^2=\frac{1}{N_{\text{нк}}}\frac{(1/\Delta x)-w(x)}{w(x)}=\frac{1}{N_{\text{нк}}\Delta x w(x)}-\frac{1}{N_{\text{нк}}}. \tag{4.16}$$

Как видно, случайная погрешность измерения этой характеристики зависит от ширины дифференциального коридора Δx. Вследствие конечности ширины Δx возникает также и систематическая погрешность — смещенность S_w величины $\overset{*}{w}(x)$, которая оценивается по формуле

$$S_w=\frac{F(x_{\text{н}}+0{,}5\,\Delta x_{\text{н}})-F(x_{\text{н}}-0{,}5\Delta x_{\text{н}})}{\Delta x_{\text{н}}\varphi(x_{\text{н}})}-1, \tag{4.17}$$

выраженной через нормированные величины $x_{\text{н}}=x/\sigma_x$; $\Delta x_{\text{н}}=\Delta x/\sigma_x$; $\varphi(x_{\text{н}})=\varphi(x/\sigma_x)=\sigma_x w(x)$.

Выражение (4.16) также запишем через нормированные величины

$$\delta_w^2=\frac{1}{N_{\text{нк}}\Delta x_{\text{н}}\varphi(x_{\text{н}})}-\frac{1}{N_{\text{нк}}}. \tag{4.18}$$

Сравнительный анализ выражений (4.17) и (4.18) показывает, что смещение S_w растет с увеличением $x_{\text{н}}$, а случайная погрешность падает с ростом $x_{\text{н}}$. Поэтому при больших значениях числа

выборок ($N_{нк} > 10^7 \div 10^8$) случайной составляющей ошибки измерений (4.18) можно пренебречь и выбор $\Delta x_н$ производить из условия (4.17). Наоборот, при малых значениях ($N < 10^4 \div 10^5$) преобладает случайная погрешность и выбор $\Delta x_н$ производят из условия (4.18). В некоторых промежуточных случаях, когда обе составляющие погрешности измерений оказываются соизмеримыми, возникает возможность минимизировать дисперсию суммарной погрешности $S^2_{н} + \delta^2_{м}$, выбрав оптимальное значение $\Delta x_н$:

$$(\Delta x_н)_{опт} = \{144\varphi(x_н)/N[\varphi''(x_н)]^2\}^{1/5}. \tag{4.19}$$

Для нормального закона можно получить

$$(\Delta x_н)_{опт} \approx 3{,}5/\sqrt[5]{N}. \tag{4.20}$$

Абсолютное значение ширины коридора тогда будет равно

$$\Delta x_{опт} = 3{,}5\sigma_x/\sqrt[5]{N}. \tag{4.21}$$

Число уровней анализа должно выбираться, исходя из необходимости оценки выбросов процесса, имеющих достаточно малую вероятность. Так, при гауссовском законе рекомендуется выбирать $x_{max} = 3\sigma_x$, тогда число уровней квантования должно быть $n = 3\sigma_x/\Delta x$. Для процессов с большей величиной пик-фактора следует выбирать большее число уровней анализа.

В любом случае, как видно, необходимо производить измерения при большом числе некоррелированных выборок $N_{нк}$, что требует большой продолжительности анализа. Эти требования и соответственно трудности с их осуществлением возрастают в квадрате при измерениях двумерных функций распределения вероятностей. И, наоборот, гораздо проще выполнить измерения отдельных числовых характеристик, представляющих свойства одномерных и двумерных распределений.

Наиболее прост прямой способ измерений числовых характеристик стационарных процессов, в основе которого лежит выражение

$$\overset{*}{\mu}_к = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\xi(t) - \overset{*}{M}_\xi\right]^k dt. \tag{4.22}$$

Дисперсия случайной погрешности определяется по общей формуле (3.8), откуда получаются следующие частные дисперсии относительной погрешности измерений:

среднего значения

$$\delta^2_M = \frac{1}{M^2_\xi} G_\xi(0^+)\,\Delta\omega_и = \pi G_\xi(0^+)/M^2_\xi T_и; \tag{4.23}$$

дисперсии процесса

$$\delta^2_D = 1/T_и\,\Delta f. \tag{4.24}$$

Определение оценок моментов $\overset{*}{\mu}_k$ по некоррелированным выборкам $\xi(t_i)$, число которых $n = N_{нк}$, производят по выражению

$$\overset{*}{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\xi(t_i) - \overset{*}{M}_\xi\right]^k, \qquad (4.25)$$

где $\overset{*}{M}_\xi = 1/n \sum_{i=1}^{n} \xi(t_i)$ — выборочное среднее.

Математическое ожидание результатов измерений будет равно [31]

$$\left.\begin{aligned}
&M\left[\overset{*}{M}_\xi\right] = M_\xi;\\
&M\left[\overset{*}{\mu}_2\right] = \frac{n-1}{n}\mu_2 = \frac{n-1}{n}\sigma_\xi^2;\\
&M\left[\overset{*}{\mu}_3\right] = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3;\\
&M\left[\overset{*}{\mu}_4\right] = \frac{(n-1)(n^2-3n+3)}{n^3}\mu_4 + \frac{3(n-1)(2n-3)}{n^3}\mu_2^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

Как видно, все оценки моментов, начиная с момента второго порядка (дисперсии), являются смещенными, однако при $N_{нк} = n \to \infty$ смещенность стремится к нулю (оценки асимптотически несмещенные), поэтому при больших $N_{нк}$ этой составляющей погрешности можно пренебречь. При малых значениях $N_{нк}$ необходимо вводить множитель, обратный множителю в (4.26), для получения несмещенного результата; например,

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa_2 = \mu_2 = M\left[\frac{n}{n-1}\overset{*}{\mu}_2\right];\\
&\varkappa_3 = \mu_3 = M\left[\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\overset{*}{\mu}_3\right];\\
&\varkappa_4 = M\left\{\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left[(n+1)\overset{*}{\mu}_4 - 3(n-1)\overset{*}{\mu}{}_2^2\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

Дисперсии оценок моментов, полученных по ансамблю некоррелированных выборок, равны

$$D\left[\overset{*}{M}_\xi\right] = \frac{\mu_2}{n} = \frac{\sigma_\xi^2}{n};$$

$$D\left[\mu_2\right] = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{\mu_4 - 2\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3};$$

в общем случае

$$D\left[\mu_k\right] = \frac{\mu_{2k} - 2\mu_{k-1}\mu_{k+1} - \mu_k^2 + K^2\mu_2\mu_{k-1}^2}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Здесь видно проявление общего свойства статистических оценок: для определения дисперсии результата измерений момента порядка k необходимо иметь информацию о моменте порядка $2k$. Чтобы априори оценить погрешность измерений и планировать измерения таким образом, чтобы погрешность не превышала заданных значений, целесообразно предположить, что исследуемый процесс близок к гауссовскому. Для гауссовского процесса нечетные моменты равны нулю, а четные выражаются через дисперсию процесса $\mu_{2k}=1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)\sigma^{2k}$. При этих условиях и для некоррелированных выборок дисперсия результата определения оценок моментов находится по формуле

$$D\left[\overset{*}{\mu}_k\right]\approx\frac{\mu_{2k}-\mu_k^2}{n}. \tag{4.28}$$

Отсюда, в частности, находим

$$\left.\begin{aligned}
&D\left[\overset{*}{\mu}_2\right]\approx(2/n)\,\sigma_\xi^4; && \sigma_{\mu_2}\approx\left(1{,}4/\sqrt{n}\right)\sigma_\xi^2;\\
&D\left[\overset{*}{\mu}_4\right]\approx(96/n)\,\sigma_\xi^8; && \sigma_{\mu_4}\approx\left(9{,}8/\sqrt{n}\right)\sigma_\xi^4;\\
&D\left[\overset{*}{\mu}_6\right]\approx\left(4\cdot10^4/n\right)\sigma_\xi^{12}; && \sigma_{\mu_6}\approx\left(101/\sqrt{n}\right)\sigma_\xi^6;\\
&D\left[\mu_8\right]\approx\left(2\cdot10^6/n\right)\sigma_\xi^{16}; && \sigma_{\mu_8}\approx\left(1{,}4\cdot10^3/\sqrt{n}\right)\sigma_\xi^8
\end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

и т. д.

По мере увеличения порядка момента при заданном числе некоррелированных выборок $n=N_{\text{пк}}$ дисперсия оценки возрастает, т. е. при оценке моментов высших порядков острее чувствуется ограниченность информации конечным числом выборок n. Например, при $n=100$ будем иметь следующую случайную относительную погрешность измерений:

$$\frac{\sigma_{\mu_2}}{\mu_2}=0{,}14;\quad \frac{\sigma_{\mu_4}}{\mu_4}\approx0{,}32;\quad \frac{\sigma_{\mu_6}}{\mu_6}\approx0{,}67;\quad \frac{\sigma_{\mu_8}}{\mu_8}\approx1{,}35.$$

Следовательно, измерения $\overset{*}{\mu}_8$ становятся уже бесполезными, ибо ошибка оказывается одного порядка с измеряемой величиной. Измерения гистограммы распределения вероятностей при $n=100$ также характеризуются определенным «коридором» неопределенности, расширяющимся в области малых значений гистограммы, что также свидетельствует о «естественном» пределе точности оценки плотности распределения вероятности при ограниченном числе выборок n, каким бы способом мы ни пытались ее оценить — непосредственно или через кумулянты.

В дополнение к рассмотренным характеристикам приведем дисперсию погрешности прямой оценки среднего квадратичного значения

$$D\left[\sqrt{\overset{*}{\mu}_2}\right]=\left(\mu_4-\mu_2^2\right)/4\mu_2 n+0\left(1/n^2\right).$$

Для нормальной случайной величины

$$D\left[\sqrt{\overset{*}{\mu}_2}\right] \approx \sigma_\xi^2/2n.$$

Относительная случайная погрешность определения среднего квадратичного значения составит

$$\delta_\sigma = \sqrt{D_\sigma}/\sigma_\xi = 1/\sqrt{2ni},$$

в то время как относительная случайная погрешность определения дисперсии $\delta_{\mu_2} = \sqrt{D\left[\overset{*}{\mu}_2\right]}/\mu_2 = \sqrt{2/n}$, т. е. δ_{μ_2} больше δ_σ в два раза. Однако если от найденной дисперсии $D_\xi = \mu_2 \pm D(\mu_2) = \sigma_\xi^2(1 \pm \sqrt{2n})$ перейдем к среднему квадратичному значению $\sigma_\xi = \sqrt{\mu_2 \pm D(\mu_2)} = \sigma_\xi(1 \pm \sqrt{1/2n})$, то получим такую же точность оценки этой величины, как и в случае ее прямого измерения. Таким образом, алгоритм получения статистической характеристики не оказывает влияния на величину случайной погрешности измерений, которая определяется лишь объемом выборки и порядком измеряемого момента.

4.4. Методы и средства измерений функций распределения вероятностей

Приборы для измерения функций распределения вероятностей [17, 39], называемые также амплитудными анализаторами, можно разделить на одноканальные (приборы последовательного измерения функций распределения) и многоканальные (параллельного принципа действия). По форме представления сигнала различают приборы с непрерывной и дискретными выборками. По принципу действия различают приборы, основанные на измерении:

— относительного времени пребывания процесса в пределах заданных уровней;

— яркости экрана электронно-лучевой трубки при развертке исследуемого сигнала;

— числа импульсов, попадающих на электроды электронно-лучевого коммутатора;

— коэффициентов разложения функции распределения вероятностей в ряд Фурье;

— модуляционных гармоник, возникающих при периодическом изменении порога ограничения сигнала, и т. д.

Результат измерений может регистрироваться стрелочным прибором, самописцем уровня, представляться в виде кривой на экране ЭЛТ, цифрами на табло или экране дисплея.

Простейшие приборы для измерения функций распределения вероятностей строятся по принципу последовательного определения значений искомой функции. Функциональная схема измерений плотности распределения вероятностей, составленная из серийно выпускаемых приборов, приведена на рис. 4.3.

В электронно-лучевой трубе (ЭЛТ) осциллографа луч отклоняется исследуемым сигналом при выключенной пилообразной

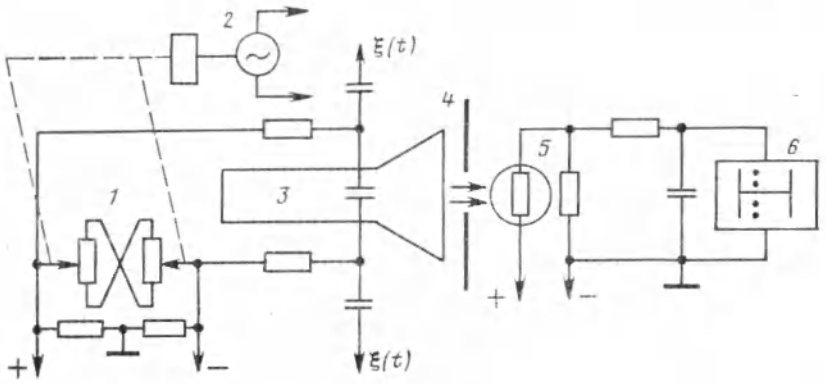

Рис. 4.3. Схема измерений плотности распределения вероятностей по яркости линии на экране электронно-лучевой трубки.

1 — сопротивления развертки; *2* — электродвигатель с редуктором; *3* — ЭЛТ; *4* — маска со щелью; *5* — фотосопротивление ФСК-Г1; *6* — самописец.

развертке. В результате на экране ЭЛТ образуется линия, яркость которой пропорциональна времени пребывания луча в данной точке экрана, что и представляет собой оценку плотности распределения вероятностей. Измерение яркости свечения экрана легко произвести с помощью фотосопротивления, установленного вплотную к экрану электронно-лучевой трубки. Для снятия закона распределения яркости экрана удобнее фотосопротивление оставить неподвижным, а перемещать относительно него изображение по экрану ЭЛТ путем подачи на те же отклоняющие пластины осциллографа одновременно с сигналом медленно изменяющееся напряжение развертки. Результат фиксируется на бумаге самописца. Схема проста, может быть собрана из имеющихся всегда в лаборатории осциллографа, самописца и нескольких радиодеталей. Параметры прибора определяются подбором ширины щели, устанавливаемой перед фотоэлементом и величиной исследуемого напряжения, подаваемого на пластины осциллографа. Продолжительность измерений определяется постоянной времени люминофора ЭЛТ и самописца и практически составляет несколько минут. Динамический диапазон измерений $\overset{*}{w}(x)$ невысок из-за срав-

нительно небольшого интервала яркости свечения люминофора на линейном участке зависимости яркости от времени пребывания луча в заданной точке экрана. Описанная схема пригодна для качественной оценки плотности распределения вероятности.

Более точные аналоговые приборы для измерения функции распределения и плотности вероятностей (рис. 4.4) содержат амплитудные селекторы, пропускающие значения сигнала, оказываю-

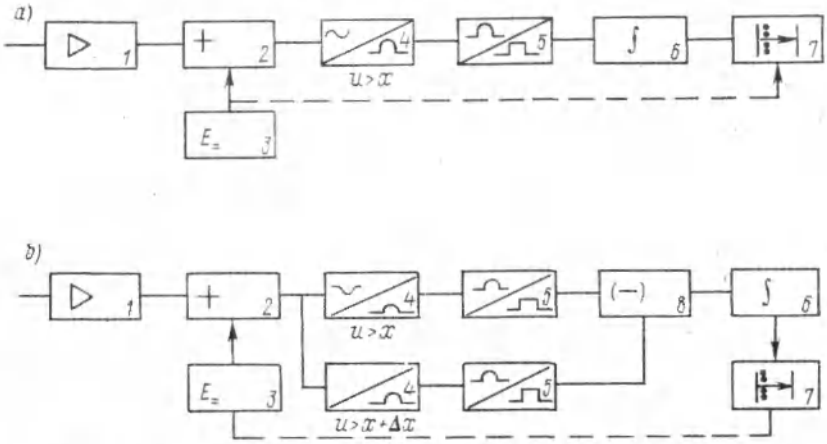

Рис. 4.4. Схема аналоговых измерений функций распределения вероятностей (*а*) и плотности вероятностей (*б*).

1 — входное устройство (усилитель); *2* — сумматор; *3* — источник изменяющегося напряжения смещения; *4* — амплитудный селектор; *5* — формирователь; *6* — интегратор (усреднитель); *7* — самописец; *8* — вычитающее устройство.

щиеся выше заданного уровня x; формирующие устройства, вырабатывающие импульсы, длительность которых равна отрезкам времени пребывания сигнала выше уровня x; интегратор для усреднения импульсного сигнала и показывающее устройство или самописец уровня. Схема для измерения плотности вероятностей содержит дополнительно второй селектор с уровнем селекции $x+\Delta x$, второй формирователь и схему вычитания (см. рис. 4.4, *б*).

Более удобны и точны схемы измерений, основанные на методе дискретных выборок. Исследуемый сигнал преобразуется в последовательность импульсов в модуляторе, управляемом генератором импульсов (рис. 4.5). Далее импульсный сигнал проходит дифференциальный дискриминатор (селектор), выделяющий импульсы, амплитуды которых попадают в коридор $x_1 < u \leqslant x_1 + \Delta x$, и поступает в счетчик импульсов *6*. Одновременно входной счетчик *3* учитывает общее количество импульсов. Отношение числа импульсов, зарегистрированных на выходе схемы дифференциального дискриминатора к общему числу импульсов, дает оценку одного из значений плотности вероятности. Если изменять уровень селекции импульсов x_1, то на самописце будет записываться точка за точкой график оценки плотности вероятности.

Применение техники дискретного счета позволяет построить анализатор параллельного действия, в котором одновременно ведется счет импульсов в смежных интервалах уровней (см. рис. 4.5). Схема коммутации позволяет отобразить на экране гистограмму распределения вероятностей. Обычно анализаторы функций распределения строятся на элементах цифровой вычислительной техники и представляют собой спецпроцессоры, работающие в реальном масштабе времени. Часто также анализаторы являются многофункциональными и позволяют измерять в реальном масштабе времени различные статистические характеристики. Рассмотрим параметры некоторых анализаторов такого типа.

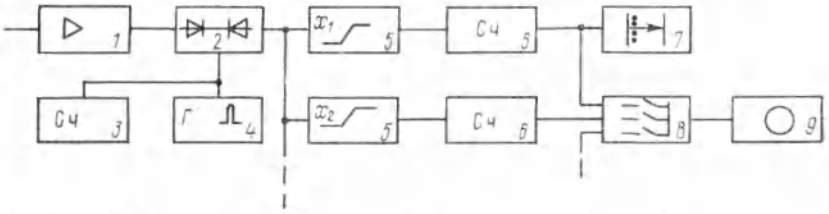

Рис. 4.5. Схема измерения плотности вероятности методом дискретных выборок.

1 — усилитель; *2* — модулятор; *3*, *6* — счетчики; *4* — генератор импульсов; *5* — дифференциальные амплитудные селекторы; *7* — самописец; *8* — коммутатор; *9* — блок ЭЛТ.

Прибор Х6-4 — многофункциональный анализатор случайных процессов [42], позволяет одновременно измерять в реальном масштабе времени 100 дискретных значений плотности вероятности или функции распределения вероятностей, 100 дискретных значений корреляционной или взаимной корреляционной функции с шагом задержки от 1 мкс до 3,3 с (изменяются 13 ступенями с кратностью 3,3). Прибор может работать в режиме выделения периодического сигнала из шума. Дополнительный блок преобразования Фурье позволяет получить 200 дискретных значений энергетического спектра или действительной и мнимой частей взаимного спектра по измеренной функции взаимной корреляции, либо значения характеристической функции путем преобразования Фурье гистограммы плотности вероятности. Предусмотрено два вида усреднения: линейное (идеальный интегратор с автоматическим окончанием вычислений после заданного интервала осреднения) и экспоненциальное (эквивалент RC-фильтра для исследований *t*-текущих характеристик случайных процессов). Диапазон частот прибора 0—250 кГц. Погрешность измерения нормированной функции корреляции не более 5 %, плотности вероятности — не более 12 %, функции распределения — не более 8 %. Количество выборок от 2^7 до 2^{18}. Прибор дискретного принципа действия выполнен на микросхемах по функционально-узловому методу конструирования.

Дальнейшим развитием рассмотренного прибора является прибор Х6-5 [55], состоящий из прибора Х6-4 и дополнительных бло-

ков, позволяющих измерять энтропию распределения процесса и энтропийный коэффициент качества сигналов в диапазоне частот от 0 до 1000 мГц.

Многофункциональный анализатор Ф37 производит измерения [41] гистограмм плотности распределения вероятностей, корреляционных функций, синхронного накопления по ансамблю для непрерывных сигналов и потоков импульсов. Одновременно измеряются до восьми вероятностных характеристик, имеются восемь измерительных каналов. Частотный диапазон 0,1—1000 Гц (некоррелированная выборка) и 0,1—100 Гц (сильно коррелированная выборка). Число измеряемых ординат для функции плотности распределения вероятностей — 256, 512, 1024, для корреляционной функции — 32, 64, 128, 256, 512, других вероятностных характеристик — от 512 до 4096. Предусмотрен вывод на ЭЛТ, перфоратор, ЦПУ, графопостроитель или на ЭВМ (через единый интерфейс ЕИ-1).

Прибор Ф36 осуществляет только синхронное накопление по ансамблю и сглаживание случайных процессов.

Отметим некоторые зарубежные многофункциональные анализаторы случайных процессов. Анализатор 3721А (США, Hewlett Packard) работает в диапазоне частот 0—250 кГц. Позволяет измерять 100 ординат плотности распределения вероятности, корреляционной функции или формы периодического сигнала. Усреднение линейное (суммирование) от 128 до 128×1024 выборок либо экспоненциальное. Задержка имеет шаг от 1 мкс до 333 мс. Вывод — на экран ЭЛТ, самописец, ЭВМ.

Фирма «Брюль и Къер» [4] выпускает портативный анализатор уровней шума типа 4426 с универсальным питанием для измерения мгновенных уровней звука, плотности вероятности, функции распределения вероятностей в звуковом диапазоне частот (20 Гц—20 кГц) при динамическом диапазоне 64 дБ. Квантование и измерение функции распределения вероятностей происходит на 256 уровнях, гистограмма плотности распределения вероятностей представляется 32 каналами с шагом 2 дБ с цифровым (поочередным) выводом данных на табло. Длительность выборки от 0,1 до 10 с, число выборок кратно 10^3. Предусмотрен аналоговый и цифровой выходы.

Другой прибор этой фирмы — анализатор статистического распределения типа 4420 сконструирован как приставка к самописцу типа 2305 для измерения гистограммы распределения уровней, фиксируемых самописцем. Прибор состоит из приставки с гребенкой контактов, устанавливаемой под пером самописца, блока счетчиков и генератора импульсов. Вследствие перемещения пера самописца, записывающего уровень измеряемого сигнала, время его пребывания на каждом из контактов характеризуется числом импульсов, фиксируемых каждым из счетчиков. Предусмотрен также счетчик общего числа импульсов, что обеспечивает определение относительного числа импульсов, зафиксированных каждым из каналов. У прибора два режима работы: распределение (distribu-

tion) и накопление (cumulative), в последнем случае измеряется гистограмма распределения вероятностей.

В настоящее время в связи с развитием быстродействующих мини-ЭВМ, обладающих большим объемом памяти, появилась возможность выполнять статистическую обработку случайных процессов по любой заданной программе практически без существенных ограничений. В частности, получение функций распределения вероятностей весьма удобно на любой универсальной ЭВМ по следующему алгоритму: введенное в ЭВМ дискретное значение процесса округляется до заданного числа разрядов и вносится единица в ячейку памяти, адрес которой совпадает со значением введенного дискретного значения случайного процесса. По окончании анализа в выделенных ячейках памяти накапливаются значения искомой функции распределения вероятностей. Эти значения можно вывести на графопостроитель или цифропечать, а также подвергнуть вторичной обработке: найти преобразование Фурье, числовые коэффициенты, сравнить с другой функцией и т. д.

4.5. Методы измерений дисперсии и моментов высших порядков

Как уже указывалось, функции распределения вероятностей неудобны при исследовании нестационарных процессов или зависимостей характеристик распределения вероятностей от изменения каких-либо условий работы системы, механизма, устройства. В этих случаях целесообразно измерять одну из числовых характеристик функции распределения, наиболее информативно отражающей изменение свойств функции распределения вероятностей. В акустике имеют дело с процессами (реализациями), имеющими нулевое среднее (среднее во времени). Поэтому низшей по своему порядку ненулевой числовой характеристикой является дисперсия процесса. Эта характеристика исследуется наиболее часто, она же обычно служит причиной нестационарности акустического сигнала. В ряде случаев нужная информация о процессе содержится в центральных моментах высших порядков, в частности,— четвертом. Рассмотрим методы их измерения.

Дисперсия процесса находится как среднее значение квадрата процесса:

$$\sigma^2 = (1/T) \int_0^T \xi^2(t)\, dt.$$

Для ее измерения применяют схему, содержащую квадратор и усредняющую цепь. Квадратор, работающий в широком частотном и динамическом диапазонах входных напряжений, обычно создается по принципу кусочно-линейной аппроксимации параболы (рис. 4.6). Схема, работающая по этому принципу, состоит из нескольких параллельных сопротивлений, включаемых между источником сигнала и нагрузкой через диоды с различными опорными

напряжениями, либо через стабилитроны с делителями напряжения (рис. 4.7) (последнее способствует более высокой стабильности работы схемы [44]). Для аппроксимации параболы в диапазоне входных напряжений 50 дБ с точностью до 1 дБ достаточно сформировать параболу из пяти линейных отрезков (см. рис. 4.6).

Усреднение осуществляется либо линейное — накопление заряда на емкости при постоянной времени цепи $RC \gg T_и$, либо экспоненциальное текущее — на выходе интегрирующей RC-цепи. В первом случае по истечении времени $T_и$ цепь отключается от

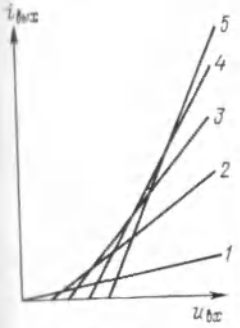

Рис. 4.6. Принцип формирования квадратичной характеристики по методу кусочно-линейной аппроксимации параболы. 1—5 — вольт-амперные характеристики аппроксимирующих цепей.

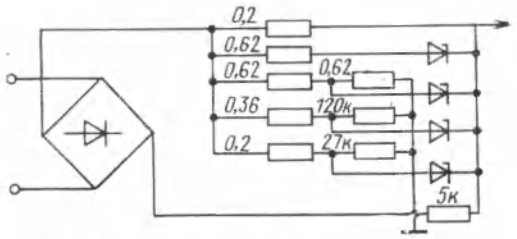

Рис. 4.7. Схема квадрирующего устройства на стабилитронах, работающих по принципу кусочно-линейной аппроксимации параболы.

источника сигнала, результат считывается со шкалы стрелочного прибора или цифрового табло, после чего стирается нажатием кнопки. Роль RC-цепи с высоким значением RC обычно выполняет интегратор, построенный на операционном усилителе с емкостью в цепи обратной связи.

Недостатком измерителей дисперсии является повышение динамического диапазона выходного сигнала по сравнению с входным диапазоном, $u_{вых} = au^2_{вх}$, что в децибелах соответствует удвоенной величине: $20 \lg u_{вых} = 40 \lg u_{вх}$. В этом случае затрудняется запись результата на самописце или магнитофоне, предъявляются повышенные требования к аналого-цифровым преобразователям выходных данных и т. п. Поэтому более предпочтительным оказывается измерение средних квадратичных значений сигнала

$$u_{с.к} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t)\, dt \right]^{1/2}.$$

Формально для этого требуется к измерителю дисперсии добавить блок, осуществляющий извлечение квадратного корня. Практи-

чески же применяется более простая схема, чем в измерителе дисперсии.

Высококачественный детектор среднеквадратичных значений получается по принципу кусочно-линейной аппроксимации параболы [80] с использованием диодных цепочек, но в отличие от схемы квадратичного детектора (дисперсиометра) напряжение смещения в детекторе среднеквадратичных является скользящим, формирующимся из напряжения измеряемого сигнала (рис. 4.8). Мгновенная вольт-амперная характеристика такого детектора при заданном среднеквадратичном значении сигнала является парабо-

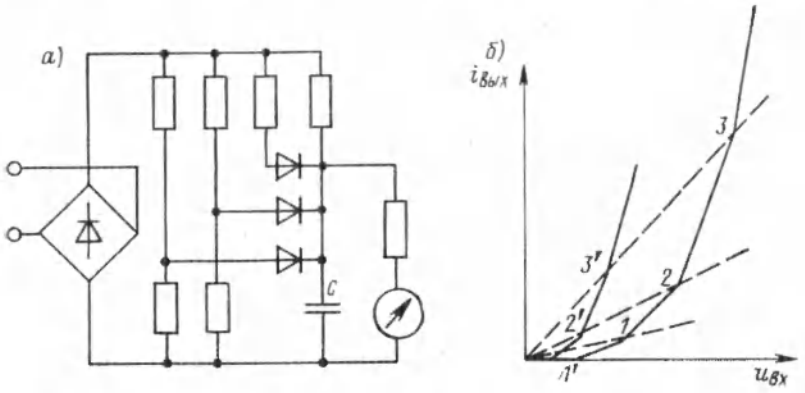

Рис. 4.8. Схема (*а*) и мгновенные вольт-амперные характеристики (*б*) детектора среднеквадратичных значений при меньшем (*1'—2'—3'*) и большем (*1—2—3*) входных напряжениях.

лической $i_{вых\,1} = \beta_1 u_{вх1}^2$. При этом на емкости c детектора устанавливается выходное напряжение $u_0 = \sqrt{\overline{u_{вх}^2(t)}}$, служащее в то же время напряжением смещения для диодных цепочек. С изменением входного напряжения в k раз напряжение смещения также изменится в k раз и будет равно ku_0. Это приведет к обратному изменению коэффициента β параболы в k раз до значения β_1/k. В результате выходной ток будет равен

$$i_{вых2} = (\beta_1/k)(ku_{вх1})^2 = k\beta_1 u_{вх1}^2 = k i_{вых1}.$$

Таким образом, за счет изменения коэффициента передачи схемы выходной ток и выходное напряжение устанавливаются пропорциональными величине $\sqrt{\overline{u_{вх}^2(t)}}$, что и соответствует детектору среднеквадратичных значений. Соответствующим расчетом элементов схемы [23] обеспечивается требуемая точность измерений.

Как видно, детектор среднеквадратичных значений представляет собой простую схему, которая входит в состав многих приборов для измерения статистических характеристик случайных

процессов (вольтметров, шумомеров, спектрометров, анализаторов, самописцев и т. д.). Для расширения возможностей измерений эти приборы снабжаются также детектором средних значений и пиковым детектором (рис. 4.9). Показания детектора средних значений пропорциональны величине

$$u_{\text{с}} = \int_0^t |\xi(t)|\, h_{\text{и}}(t' - t)\, dt.$$

Если детекторы средних и среднеквадратичных значений проградуировать в среднеквадратичных значениях на синусоидальном

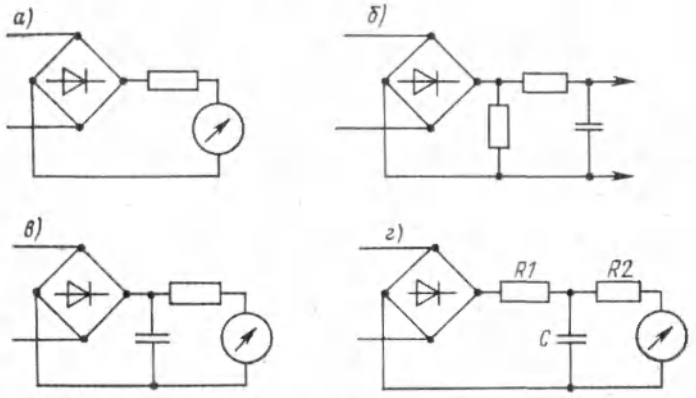

Рис. 4.9. Детекторы различного типа, применяемые при измерениях случайных процессов: детектор средних значений со стрелочным прибором (*а*) и с усредняющей цепью (*б*), пиковый детектор (*в*) и квазиквадратичный (*г*).

сигнале, то при подаче гауссовского шума показания детектора средних значений будут занижены всего лишь на 1 дБ. Но при измерении сигналов сложной формы, например импульсных, детекторы средних и среднеквадратичных значений будут давать более различающиеся показания, зависящие от формы сигнала. Поэтому каждый детектор должен употребляться для получения неискаженных значений только того параметра, для измерения которого он предназначен. Усреднение выходного напряжения детектора может производиться за счет инерционности прибора (см. рис. 4.9, *а*), либо интегрирующей цепочкой (см. рис. 4.9, *б*) с переключаемыми параметрами («быстро» или «медленно»).

Пиковый детектор (см. рис. 4.9, *в*) отличается малой постоянной времени заряда емкости C (заряд происходит через внутреннее сопротивление источника сигнала и диодов) и высокой постоянной времени его разряда (через добавочное сопротивление и измерительный прибор). Поэтому детектор помнит пиковое значение сигнала за время постоянной его разряда.

В ряде случаев нужны очень простые детекторы среднеквадратичных значений (например, в спектрометрах параллельного

действия и т. п.). На рис. 4.9, *г* изображена схема детектора, называемого квазиквадратичным. При выборе параметров $R_2 = (3 \div 4) R_1$ показания этого детектора на синусоидальном сигнале и гауссовском шуме соответствуют среднеквадратичным значениям и лишь для импульсных сигналов с пик-факторами 3—4 его показания будут выше среднеквадратичного значения. Заметим, что при $R_1 = 0$ детектор превращается в пиковый, а при $R_2 = 0$ становится детектором средних значений.

Измерения моментов высших порядков производят, используя алгоритм (4.22) при аналоговых измерениях или (4.25) при дис-

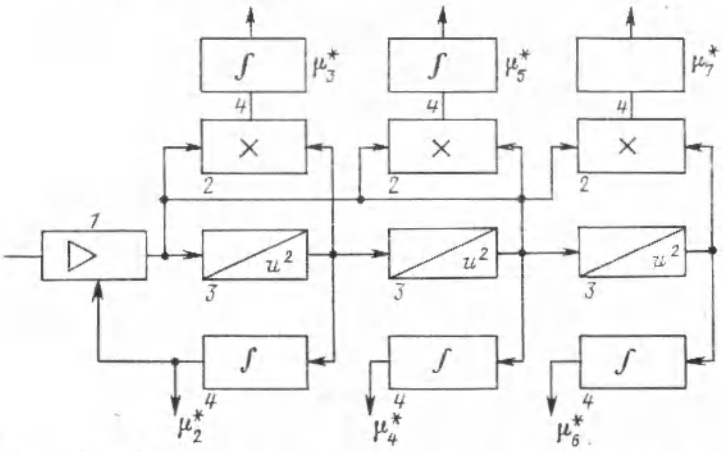

Рис. 4.10. Схема измерений нормированных моментов процесса.

1 — управляемый усилитель; *2* — умножители; *3* — квадраторы; *4* — интеграторы.

кретных (цифровых) методах обработки данных. При измерениях в узких полосах частот целесообразны измерения только четных моментов, как показано в 2.3, при измерениях в широких полосах частот информативными могут быть также и нечетные моменты.

При аналоговых методах измерений необходимое для получения оценки момента возведение исследуемого процесса в четную степень получают путем последовательного квадрирования процесса с помощью квадраторов, например, работающих по принципу кусочно-линейной аппроксимации параболы. При этом получают как дисперсию процесса, что необходимо для определения кумулянтов, так и момент высшего порядка. Для определения моментов нечетного порядка необходимо добавлять блок умножения в дополнение к квадраторам (рис. 4.10).

Нормирование результатов относительно дисперсии с целью получения кумулянтных коэффициентов процесса можно произвести путем поддержания постоянного уровня дисперсии на входе измерителя моментов. Эта операция может выполняться автоматически путем подачи на управляющий вход управляемого уси-

лителя (*1* на рис 4.10) напряжения с выхода измерителя (*4* на рис. 4.10) дисперсии $\mu_2=\sigma^2_\xi$, в результате чего образуется блок автоматической регулировки уровня (АРУ). При наличии блока АРУ выходы измерителей моментов могут быть проградуированы непосредственно в долях σ^2_ξ, и отсчитываться по шкале прибора могут сразу же коэффициенты асимметра и эксцесса $\gamma_3=\mu_3/\sigma^3_\xi$, $\gamma_4=\mu_4/\sigma^4_\xi-3$, а кумулянтые коэффициенты более высоких порядков должны вычисляться по показаниям приборов с использованием формул табл. 1.1.

Обычно измерение моментов или кумулянтов аналоговыми приборами сопровождается измерением плотности вероятности одним из простейших способов. Последняя используется как качественная характеристика процесса, а кумулянты дают его количественную характеристику.

Применение ЭВМ для анализа экспериментальных данных приводит к целесообразности иного порядка измерений: вначале определяется гистограмма плотности вероятности $\overset{*}{w}(x)$, затем по ней находятся центральные моменты

$$\overset{*}{\mu}_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overset{*}{w}(x)(x-M_\xi)^k\,dx,$$

и далее вычисляются и выводятся на цифропечать кумулянты или кумулянтные коэффициенты процесса. Но и в этом случае гистограмма используется, как правило, для визуальной оценки характера процесса, а зависимость свойств процесса от исследуемых внешних факторов представляется зависимостью одного из кумулянтов от параметров или величин, характеризующих эти внешние факторы.

При экспериментальных исследованиях нестационарных процессов применяют различные способы их стационаризации. В случае процессов, нестационарных по дисперсии, применяют:

1) измерение вероятностных характеристик за небольшой промежуток времени $T_и$, в течение которого свойства процесса изменяются в небольших (допустимых) пределах при медленной нестационарности;

2) использование блока АРУ для поддержания постоянства дисперсии процесса — в случае средних скоростей изменения свойств процесса;

3) формирование выборочного ансамбля реализаций и использование алгоритма усреднения по множеству реализаций — при быстрых изменениях процесса, особенно при исследованиях периодически нестационарных процессов.

Заметим, что при измерениях кумулянтов результат оказывается весьма чувствительным к нежелательным изменениям дисперсии процесса, например, вследствие изменения расстояния до излучающего объекта или непредусмотренных (неконтролируе-

мых) изменений коэффициента передачи измерительного тракта. Так, коэффициент эксцесса шума возрастает до 0,5, если во время измерений происходит изменение дисперсии процесса на 30 %, которое воспринимается как наличие модуляции процесса (см. рис. 4.11).

При градуировке шкал и поверке измерителей моментов и плотности распределения вероятностей необходимо применять сигналы, имеющие хорошо известные или надежно измеряемые параметры. В качестве таких эталонных сигналов можно рекомендовать гауссовский шум ($\gamma_3=0$, $\gamma_4=0$), шум с Рэлеевским законом распределения ($\gamma_3=0{,}63$, $\gamma_4=0{,}23$), гармонический сигнал (синусоида, $\gamma_3=0$, $\gamma_4=-1{,}5$), сигнал с равномерным распределением ($\gamma_3=0$, $\gamma_4=-1{,}2$), импульсный сигнал с регулируемой скважностью $q=T/\tau_и$, где T — период следования импульсов, $\tau_и$ — длительность импульса. В последнем случае

$$\gamma_3=(q-2)/\sqrt{q-1};\quad \gamma_4=\{[(q-1)^2+1]/q(q-1)]\}-3.$$

Для получения шума с распределением, возможно более близким к гауссовскому, сигнал, снимаемый с выхода генератора шума, пропускают через узкополосный фильтр, что обеспечивает нормализацию процесса, и следят за отсутствием нелинейных искажений. При детектировании и сглаживании гауссовского шума получают распределение Рэлея. Равномерно распределение имеет пилообразный периодический сигнал при высокой степени линейности «пилы».

4.6. Некоторые применения измерений моментов и функций распределения вероятностей при исследовании шумов и вибраций

Измерения стационарных судовых шумов в широкой полосе частот звукового диапазона в случае формирования шума несколькими источниками показывают, что коэффициенты асимметрии и эксцесса часто оказываются близкими к нулю, а форма гистограммы плотности распределения вероятностей подтверждает близость процесса к гауссовскому шуму. Отсюда можно было бы сделать вывод о том, что единственной и полной характеристикой такого процесса может быть его энергетический спектр. Однако измерения в смежных полосах частот показывают, что коэффициент эксцесса имеет явную зависимость от частоты: на низких частотах он отрицателен, а затем возрастает, проходит через нуль и достигает некоторых положительных значений на высоких частотах диапазона.

Спектральный анализ судовых шумов показывает, что в их спектрах присутствуют периодические составляющие. На самых низких частотах в полосу анализа попадают отдельные интенсивные периодические составляющие и некоторая доля энергии шумовой составляющей. В этом случае коэффициент эксцесса отрицателен и близок к таковому для гармонического колебания

($\gamma_4 = -1{,}5$). При повышении частоты в полосу анализа попадает несколько периодических составляющих, а также возрастает и доля шумовой составляющей, что приводит к уменьшению абсолютной величины коэффициента эксцесса.

На высоких частотах результатами спектрального анализа процесса не удается объяснить наличие положительных значений коэффициента эксцесса. Остается предположить, что причиной этого факта может быть наличие модулированных шумов (рис. 4.11). Модуляционный анализ (см. гл. 7) подтверждает это

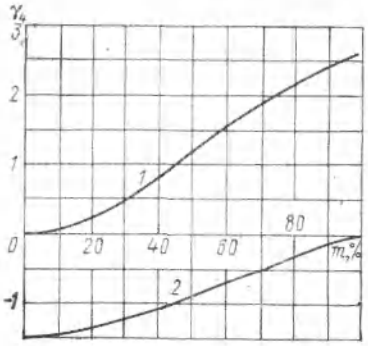

Рис. 4.11. Зависимость коэффициента эксцесса от коэффициента модуляции для шумовой (*1*) и гармонической (*2*) несущих.

предположение. Приведенный выше пример показывает, что измерения вероятностных характеристик в смежных полосах частот более информативны, чем их измерения в широкой полосе частот.

Отсюда же следует ценность измерений коэффициента эксцесса для оценки наличия модуляционных эффектов. Амплитудная модуляция гармонического сигнала приводит к снижению абсолютных значений отрицательных коэффициентов эксцесса (см. рис. 4.11), а модуляция шума — к положительным его значениям. При этом оценивается суммарный коэффициент модуляции без выделения модулирующей функции и оценки ее частотных параметров. Так проявляется недостаточная информативность коэффициента эксцесса. Но такой недостаток окупается простотой измерений, малой продолжительностью их выполнения и простотой аппаратуры. К достоинствам этого метода измерений коэффициента модуляции следует отнести также возможность простой оценки коэффициента модуляции шума при случайном (шумовом) характере модулирующей функции (примером таких негауссовских шумов являются шумы, возникающие при обтекании датчиков, установленных в потоке жидкости или газа).

В то же время измерения вероятностных характеристик в широкой полосе частот имеют свою область применения — исследование характеристик нелинейности колебательных систем. При возбуждении таких систем случайными силами, имеющими, как правило, гауссовский характер плотности вероятности, установившиеся колебания будут иметь ненулевое значение коэффициента

эксцесса, а при несимметричной амплитудной характеристике — и ненулевое значение коэффициента асимметрии.

Частыми случаями в измерительной технике являются нелинейные искажения сигналов в измерительных трактах и при магнитной записи вследствие перегрузки трактов при неправильно установленном усилении. Измерение гистограммы плотности вероятности искаженных сигналов позволяет установить наличие и характер возникающих искажений, оценить максимально возможный уровень неискаженного сигнала, а также восстановить возможное истинное значение дисперсии измеряемого сигнала.

Еще одна область применения вероятностного анализа — оценка средних значений уровня (или иного параметра) сигнала и его отклонений от среднего при проведении измерений большой продолжительности (десятки минут, часы и даже сутки). Использование обычных интегрирующих (усредняющих) схем в этих условиях оказывается невозможным, но зато удобны методы и средства, основанные на применении счетчиков. Удачным примером реализации такого метода является использование приставки типа 4420 к самописцу (см. 4.4), с помощью которого производится измерение 12-ти канальной гистограммы уровней, регистрируемых самописцем, откуда могут быть найдены среднее значение и дисперсия отклонений уровня в течение заданного промежутка времени.

В заключение отметим, что в ряде случаев целесообразно вместо функции распределения мгновенных значений процесса измерить функцию распределения его огибающей (называемую иногда функцией распределения амплитуд сигнала). Огибающая процесса, особенно узкополосного, обладает более низкочастотным спектром, поэтому облегчаются его измерения. Огибающая гауссовского процесса имеет плотность вероятности, описываемую законом Рэлея:

$$w_0(x) = \left(x/\sigma_\xi^2\right) \exp\left(-x^2/2\sigma_\xi^2\right).$$

Как видно, распределение Рэлея характеризуется одним параметром — дисперсией (относящейся к исходному нормальному процессу) и имеет следующие кумулянты:

$$\varkappa_{1p} = \sqrt{\pi/2}\,\sigma_\xi = 1{,}25\sigma_\xi; \quad \varkappa_{3p} = \left[(\pi - 3)\sqrt{2\pi}/2\right]\sigma_\xi^3;$$

$$\varkappa_{2p} = (2 - \pi/2)\,\sigma_\xi^2 = 0{,}43\sigma_\xi^2; \quad \varkappa_{4p} = \frac{1}{4}\left(32 - 3\pi^2\right)\sigma_\xi^4 - 3\varkappa_{2p}$$

и нормированные коэффициенты асимметрии $\gamma_3 = 0{,}63$ и эксцесса $\gamma_4 = 0{,}23$.

Глава 5. ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ПРОЦЕССОВ

5.1. Методы измерений энергетических спектров случайных процессов и их погрешности

Одним из основных определений энергетического спектра случайного процесса, принятого в теории случайных процессов, является преобразование Фурье корреляционной функции процесса (1.46). Для одностороннего практически определяемого спектра имеем

$$F(\omega) = 2G(\omega) = 4\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \tag{5.1}$$

На этом определении основан один из способов экспериментального нахождения энергетического спектра, имеются приборы, в которых он реализован (см. 4.4). Однако этот метод характеризуется дополнительными погрешностями измерений — погрешностями преобразования (см. 5.2), поэтому его применение ограничено.

В большинстве случаев основываются на определении энергетического спектра через амплитудный спектр процесса

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} M\,|S_T(\omega)|^2, \tag{5.2}$$

где амплитудный спектр

$$S_T(\omega) = \int_0^T \xi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = A_T(\omega) + iB_T(\omega); \tag{5.3}$$

$A_T(\omega)$ и $B_T(\omega)$ — квадратурные составляющие амплитудного спектра, равные

$$\left.\begin{aligned} A_T(\omega) &= \int_0^T \xi(t)\cos\omega t\, dt; \\ B_T(\omega) &= \int_0^T \xi(t)\sin\omega t\, dt; \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

$|S_T(\omega)|^2$ — квадрат модуля амплитудного спектра, который может быть назван мгновенным энергетическим спектром,

$$|S_T(\omega)|^2 = A_T^2(\omega) + B_T^2(\omega). \tag{5.5}$$

Таким образом, анализатор спектра должен содержать устройство для измерения модуля амплитудных спектров и устройство для усреднения последних (этого требует оператор математического ожидания M в выражении (5.2)).

Из теории работы анализатора спектра детерминированных процессов [12, 68] известно, что процедура, близкая к преобразо-

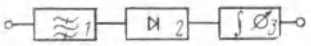

Рис. 5.1. Схема фильтрового анализатора спектра.

1 — фильтр; *2* — детектор; *3* — интегратор и индикатор.

ванию Фурье (5.3), выполняется любым узкополосным фильтром, сигнал на выходе которого определяется выражением

$$S_T^*(\omega) = \int_0^T \xi(t - t_1) H(t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1, \tag{5.6}$$

где $H(t_1) e^{-i\omega t_1} = a(t_1) \cos \omega t_1 - ib(t_1) \sin \omega t_1$ — импульсная переходная характеристика фильтра анализатора.

Следовательно, анализатор фильтрового типа (рис. 5.1) должен содержать узкополосный фильтр, выполняющий операцию

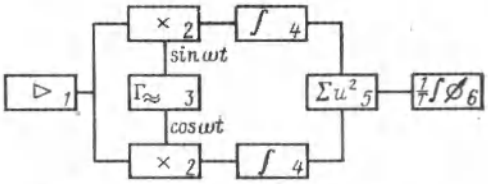

Рис. 5.2. Схема безфильтрового анализатора спектра.

1 — усилитель; *2* — умножители; *3* — генератор; *4* — интеграторы; *5* — квадратор с суммированием; *6* — интегратор и индикатор.

(5.6), детектор, выделяющий модуль $|S_T(\omega)|$, и интегратор, осуществляющий усреднение результата.

Возможен безфильтровой способ измерения энергетического спектра (рис. 5.2), при котором входной сигнал $\xi(t)$ перемножается на квадратурные сигналы гетеродина $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, каждый результат интегрируется — операция (5.4), после чего находится квадрат модуля полученных результатов — операция (5.5) и производится усреднение данных.

По принципу получения всей спектральной функции различают приборы последовательного и параллельного анализа; наиболее простые — анализаторы последовательного действия, содержащие перестраивающиеся по частоте фильтр (см. рис. 5.1), генератор (см. рис. 5.2) или гетеродин (рис. 5.3). В последнем случае фильтр настроен на фиксированную промежуточную частоту, но спектр сигнала перемещается по частоте за счет изменяющейся ча-

стоты гетеродина. Приборы параллельного принципа действия содержат параллельно включенные каналы, состоящие из полосовых фильтров, детекторов и интеграторов.

Результат анализа читается на стрелочном измерительном приборе, записывается на самописце или выводится на экран ЭЛТ. Более сложные приборы строятся на аналогичных принципах в сочетании с теми или иными преобразованиями спектров сигналов (см. 5.8). Рассмотренные методы спектрального анализа реализуются как в приборах аналогового типа, так и в цифровых приборах дискретного принципа действия.

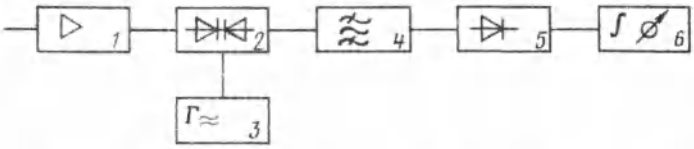

Рис. 5.3. Схема гетеродинного анализатора спектра.

1 — усилитель; *2* — смеситель; *3* — гетеродин; *4* — полосовой фильтр; *5* — детектор; *6* — интегратор и индикатор.

Измерения спектров сопровождаются погрешностями, которые условно делятся на методические и аппаратурные. Методические погрешности обусловлены отличием реального алгоритма обработки данных от идеального теоретического. Ниже будут рассмотрены следующие методические погрешности:

1) случайная погрешность, вызванная конечным числом усредняемых мгновенных спектров (5.5), в отличие от теоретического выражения (5.2), содержащего оператор M, что требует бесконечного числа усреднений;

2) смещенность результата (систематическая погрешность), вызванная конечной длительностью T отдельной реализации процесса, выбираемой для определения амплитудного спектра, или обусловленная конечностью измеренной корреляционной функции;

3) систематические погрешности, специфические для каждого отдельного способа определения энергетического спектра.

Основными параметрами анализаторов спектра являются следующие: 1) частотный диапазон; 2) полоса анализа (разрешающая способность); 3) вид детектора; 4) параметры усреднения; 5) скорость и продолжительность анализа; 6) конструктивные и эксплуатационные особенности прибора.

Среди указанных характеристик анализаторов тесно связаны со способом анализа и погрешностью измерений параметры 2—5, поэтому их следует рассматривать вместе с анализом погрешностей измерений. Ниже будут рассмотрены в основном такие параметры анализаторов, выбор которых производится оператором и сказывается на качестве результатов измерений. Напомним основные определения и свойства некоторых характеристик анализаторов.

Разрешающая способность (частотная избирательность) анализатора определяется полосой пропускания фильтра Δf. Две дискретные составляющие будут разделены, если ширина полосы Δf меньше частотного интервала $\Delta F_{\text{д. с}}$ между составляющими спектра [68]. Рекомендуется выбирать

$$\Delta f \leqslant \frac{1}{4} \Delta F_{\text{д. с}}. \tag{5.7}$$

При одноконтурном фильтре это условие означает, что спектрограмма будет иметь вид двугорбой кривой с провалом между максимумами спектра до уровня 0,5 максимума. Для фильтра с П-образной характеристикой допустимо выбирать

$$\Delta f \leqslant \frac{1}{3} \Delta F_{\text{д. с}}. \tag{5.8}$$

При анализе спектра шума полоса анализа Δf должна выбираться из условия неискаженного воспроизведения огибающей спектра. Если участок спектра аппроксимировать простым выражением

$$F(f) = 1 + m \cos 2\pi (f/\Delta F), \quad m < 1, \tag{5,9}$$

где ΔF — характерный масштаб — расстояние между максимумами спектра, то для показаний u анализатора с частотной характеристикой $K(\omega)$, близкой к прямоугольной, получим

$$u = \int\limits_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \left(1 + m \cos \frac{2\pi}{\Delta F}\right) df = \Delta f \left[1 + m \cos 2\pi \frac{f}{\Delta F} \cdot \frac{\sin(\pi \Delta f/\Delta F)}{\pi \Delta f/\Delta F}\right]. \tag{5.10}$$

Эффект искажений спектра, как видно, оценивается «щелевой функцией» $\sin x/x$ так же, как, например, и искажения при воспроизведении магнитофонной записи вследствие конечности ширины рабочего зазора воспроизводящей головки. Огибающую спектра любой другой формы можно разложить в ряд Фурье и найти условие допустимых искажений из (5.10) для наиболее быстро меняющейся части кривой. Для простоты достаточно задаться минимальным расстоянием ΔF между максимумами сплошного спектра, которые необходимо воспроизвести без искажений, и тогда на основании (5.10) можно потребовать, чтобы выполнялось условие $\pi \Delta f/\Delta F \leqslant 1$, т. е. чтобы искажения были малы, откуда

$$\Delta f < \frac{1}{3} \Delta F, \tag{5.11}$$

что совпадает с условием (5.8) разделения двух дискретных составляющих этим же фильтром.

В анализаторах спектра может использоваться квадратичный детектор, тогда будет измеряться энергетический спектр. При использовании детектора среднеквадратичных значений получим

соответственно спектр среднеквадратичных значений. Численное различие между этими характеристиками исчезает при переходе к логарифмическим величинам, так как в первом случае пересчет следует вести по формуле $L=10\lg F(\omega)/E_0^2$, а во втором случае $L=20\lg\sqrt{F(\omega)}/E_0$, что и дает одинаковый результат в децибелах. Напомним, что в акустике в качестве нулевого уровня E_0 для звукового давления принято $P_0=2\cdot10^{-5}$ Па, а для уровня вибрации $\ddot{\xi}_0=3\cdot10^{-4}$ м/с^2 по виброускорению или $\dot{\xi}_0=5\cdot10^{-8}$ м/с по виброскорости.

Параметры усреднения задаются либо постоянной времени RC-интегратора в аналоговых приборах, либо числом N усредняемых мгновенных спектров мощности в цифровых анализаторах. Эти параметры, как будет показано ниже, определяют случайную погрешность измерений. Выбор этих параметров, как правило, нужно производить таким образом, чтобы случайная относительная погрешность не превышала 0,1.

Скорость анализа является существенным параметром для аналоговых анализаторов последовательного принципа действия, определяя собой продолжительность анализа. Продолжительность анализа важно оценивать также при определении спектральных характеристик на ЭВМ. Приборы параллельного принципа действия работают, как правило, в реальном масштабе времени, т. е. продолжительность всего анализа оказывается равной продолжительности выбранного времени усреднения для получения одной точки спектра.

5.2. Определение энергетического спектра стационарного процесса методом преобразования Фурье корреляционной функции

Энергетический спектр стационарного случайного процесса по определению (5.1) представляет собой преобразование Фурье от корреляционной функции процесса. Опираясь на это определение, говорят, что энергетический спектр и корреляционная функция процесса являются эквивалентными характеристиками случайного процесса по объему содержащейся в них информации. Однако для практики важен не только объем, но и форма представления информации. Поэтому измерять нужно такую из этих двух характеристик, которая наиболее удобна для решения поставленной задачи.

В большинстве случаев необходима характеристика распределения энергии процесса по различным частотам, для чего измеряют спектр процесса. Корреляционная функция в этом случае неудобна. Например, корреляционная функция суммы нескольких гармонических колебаний с некратными частотами имеет вид сложной непериодической функции, из которой невозможно извлечь информацию о частотах и амплитудах исследуемых

колебаний. В то же время в спектре процесса, выполненного с достаточной разрешающей способностью, параметры этих составляющих легко читаются.

Измерения корреляционной функции производят в тех случаях, когда необходима информация о запаздывании различных составляющих одного процесса, причем эти составляющие носят шумовой характер (характеризуются сплошным спектром). Тогда составляющие легко разделяются на коррелограмме процесса, образуя максимум функции $R(\tau)$ при различных значениях времени задержки τ. Чаще необходимо исследовать запаздывание двух различных шумовых процессов (см. гл. 6, 7). Эти данные получают, измеряя взаимную корреляционную функцию.

Рассмотрим погрешности определения спектра процесса по измеренной корреляционной функции. В отличие от (5.1) преобразование Фурье может быть выполнено лишь в конечных пределах $(0, \tau_{max})$, а вместо истинной корреляционной функции $R(\tau)$ будем иметь ее оценку $\overset{*}{R}(\tau)$, которую представим отличающейся от $R(\tau)$ на величину (случайную функцию) $\varepsilon_R(\tau)$, характеризующую случайную погрешность измерений: $\overset{*}{R}(\tau) = R(\tau) + \varepsilon_R(\tau)$. Тогда

$$\overset{*}{F}(\omega) = 4 \int_0^{\tau_{max}} [R(\tau) + \varepsilon_R(\tau)] \cos \omega\tau \, d\tau = F(\omega) - C(\omega) + \varepsilon_F(\omega), \quad (5.12)$$

где

$$F(\omega) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau$$

— спектр процесса;

$$\varepsilon_F(\omega) = 4 \int_0^{\tau_{max}} \varepsilon_R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau$$

— случайная ошибка, а $C(\omega)$ возникает от следующего представления преобразования Фурье в конечных пределах

$$4 \int_0^{\tau_{max}} R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau - 4 \int_{\tau_{max}}^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau,$$

где

$$C(\omega) = 4 \int_{\tau_{max}}^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau \quad (5.13)$$

— смещенность (систематическая ошибка) определения энергетического спектра процесса, возникающая за счет усечения корреляционной функции во времени при $\tau = \tau_{max}$.

Как видно из (5.13), смещенность результата зависит от вида корреляционной функции. Эта ошибка проявляется в виде лож-

ных колебаний спектра, в смещении по частоте его максимума, а в ряде случаев приводит к появлению отрицательных значений спектра [61]. Если процесс содержит периодическую составляющую или является узкополосным, то погрешность усечения $R(\tau)$ будет зависеть от фазы периодической составляющей функции корреляции ($\cos\omega\tau$) в точке $\tau=\tau_{max}$: при $\cos\omega\tau=0$ искажения будут малы или отсутствовать, а при $\cos\omega\tau=1$ — максимальны.

С целью снижения погрешности усечения $R(\tau)$ применяют умножение на весовую функцию Бартлетта, Парзена, Хэмминга

Таблица 5.1

Характеристики весовых функций

Вид функции	$w(\tau)$, $\tau \leqslant \tau_м$	$\Delta f_э \tau_м$	$w_1(\omega)$	δ^2
Прямоугольная	$1,\ \lvert\tau\rvert \leqslant \tau_м$	0,5	$2\tau_м \dfrac{\sin 2\pi f\tau_м}{2\pi f\tau_м}$	$\dfrac{2\tau_м}{T}$
Бартлетта	$1-\dfrac{\lvert\tau\rvert}{\tau_м}$	1,5	$\tau_м \dfrac{\sin^2 \pi f\tau_м}{(\pi f\tau_м)^2}$	$\dfrac{2}{3}\dfrac{\tau_м}{T}$
Пугачева—Даниеля	$\dfrac{\sin \pi \Delta f\tau}{\pi \Delta f\tau}$	1,0	$\dfrac{1}{\Delta f};\quad \lvert f\rvert \leqslant \dfrac{\Delta f}{2}$ $0;\quad \lvert f\rvert > \dfrac{\Delta f}{2}$	$\dfrac{1}{T\Delta f}$
Хэмминга	$0,54+0,46\cos\dfrac{\pi\tau}{\tau_м}$	1,25	$\omega_4(\omega)$*	$\dfrac{4}{5}\dfrac{\tau_м}{T}$
Хеннинга	$\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi\tau}{\tau_м}\right)=$ $=\cos^2(\pi\tau/2\tau_м)$	1,33	$\omega_5(\omega)$**	$\dfrac{3}{4}\dfrac{\tau_м}{T}$
Парзена	$\begin{cases} 1-6\dfrac{\tau^2}{\tau_м^2}+6\dfrac{\tau^3}{\tau_м^3}; \\ (\tau) < \dfrac{\tau_м}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2\left(1-\dfrac{\lvert\tau\rvert}{\tau_м}\right)^3; \\ \dfrac{\tau_м}{2} < \lvert\tau\rvert < \tau_м \end{cases}$	1,86	$\dfrac{3}{4}\tau_м\left[\dfrac{\sin \pi f\dfrac{\tau_м}{2}}{\pi f\dfrac{\tau_м}{2}}\right]^4$	$0,54\dfrac{\tau_м}{T}$

$$* \ w_4(\omega) = 1,08\tau_м \frac{\sin 2\pi f\tau_м}{2\pi f\tau_м} + 0,46\tau_м \frac{\sin(2\pi f\tau_м+\pi)}{2\pi f\tau_м+\pi} + 0,46\tau_м \frac{\sin(2\pi f\tau_м-\pi)}{2\pi f\tau_м-\pi};$$

$$** \ w_5(\omega) = \tau_м \frac{\sin 2\pi f\tau_м}{2\pi f\tau_м} + \frac{\tau_м}{2}\frac{\sin(2\pi f\tau_м+\pi)}{2\pi f\tau_м+\pi} + \frac{\tau_м}{2}\frac{\sin(2\pi f\tau_м-\pi)}{2\pi f\tau_м-\pi}.$$

и т.
иска. (табл. 5.1), но это приводит лишь к частичному снижению увел. ений. Радикальной мерой снижения искажений является
С. чение τ_{max}.
сост. учайная погрешность измерений, представленная в (5.12)
чени. вляющей $\varepsilon_F(\omega)$, практически не зависит от алгоритма полу-
$F(\omega)$ $F(\omega)$, если только преобразования процесса при измерении
пере. не ведут к потере информации. Оценка относительной дис-
Р. и δ^2 этой погрешности приведена в табл. 5.1.
при. ссмотрим разрешающую способность спектрального анализа
=со. лгоритме (5.1). При синусоидальном сигнале имеем $R(\tau) =$
хара. ктеризующий частотную характеристику анализатора, рабо-
тающ. его по алгоритму (5.1), в следующем виде:

$$F(\omega) = [\sin(\omega_1 - \omega)T]/(\omega_1 - \omega)T. \qquad (5.14)$$

Шир. на этой характеристики на уровне 0,7 равна $\Delta t_{0,7} = 0,4/T$,
прич. м имеются боковые максимумы спектра, у ближайшего из
них у. ровень 0,22, т. е. лежит всего лишь на 13 дБ ниже основного
макс. мума. Такая частотная характеристика далека от идеальной
прям. угольной характеристики. Для улучшения формы частотной
хара. теристики применяют умножение $R(\tau)$ на весовую функцию.
Осно. ные характеристики распространенных весовых функций
прив. дены в табл. 5.1.
П. одолжительность измерения энергетического спектра рас-
смат. иваемым методом складывается из продолжительностей из-
мере. ний корреляционной функции и определения преобразования
Фур. е.
Т. ким образом, определение энергетического спектра методом
прео. разования Фурье корреляционной функции отличается по-
явле. ем дополнительной погрешности измерений, поэтому метод
нахо. ит ограниченное применение.

5.3. *Случайные и систематические погрешности измерений сплошного и смешанного спектров*

Ф. рмирование сглаженной по частоте оценки энергетического
спект. а можно представить следующим образом. Разделим одно-
сторо. ний (см. гл. 1) спектр $F(\omega)$ процесса на участки шириной
$\Delta f = f_i - f_{i-1}$ и представим его сглаженную оценку как совокуп-
ность. дисперсий σ_i^2, каждая из которых характеризует мощность
проц. сса в данной полосе частот (см. (1.50))

$$\overset{*}{F}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi\Delta f}\int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} F(\omega)\,d\omega = \sigma_i^2. \qquad (5.15)$$

Этим
няет. выражением для сглаживания спектра по частоте допол-
Ч. (5.2), которое определяет спектр как среднее по множе-

ству. Из определения (5.15) следует алгоритм прямого измерения спектра: необходимо с помощью полосовых фильтров разделить процесс на полосы шириной Δf_i и в каждой полосе частот измерить дисперсию процесса.

Для измерения дисперсии процесса на выходе полосового фильтра необходимо включить детектор (квадратичный или среднеквадратичных значений) и усредняющую цепь (интегратор или фильтр низких частот в виде RC-цепи). Случайная относительная погрешность измерения дисперсии шума в этом случае опреде-

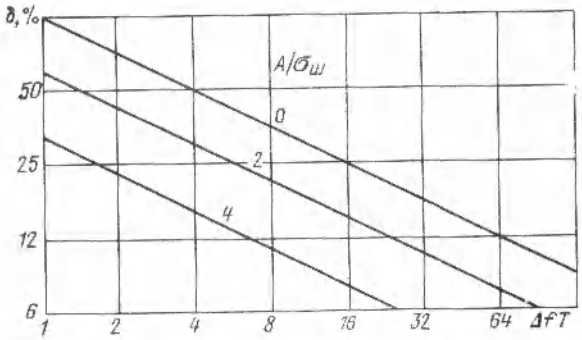

Рис. 5.4. Случайная относительная погрешность измерений шума ($A/\sigma_ш=0$) и дискретной составляющей смешанного спектра при различных ее превышениях ($A/\sigma_ш$) над сплошным спектром в зависимости от относительного времени усреднения $T/\tau_к=\Delta fT$.

ляется выражением (3.8), которое удобно представить в следующем виде (рис. 5.4):

$$\delta_ш=\alpha/\sqrt{\Delta f T_и}, \qquad (5.16)$$

где Δf — полоса додетекторного фильтра, измеряемая на уровне 0,7 относительно максимума резонансной кривой; $T_и$ — время «линейного» интегрирования; в случае ФНЧ в виде RC-цепи (экспоненциальное усреднение) вместо $T_и$ следует подставить $2RC$; α — коэффициент, зависящий от вида частотной характеристики додетекторного фильтра, вида детектора и интегрирующей цепи, принимающий следующие значения: в случае квадратичного детектора (т. е. измерения энергетического спектра) $\alpha=1$ — при полосовом фильтре, $\alpha=0{,}56$ — при одиночном контуре; в случае детектора среднеквадратичных значений (т. е. измерения спектра среднеквадратичных значений) $\alpha=0{,}5$ — при полосовом фильтре, $\alpha=0{,}28$ — при одиночном контуре.

В большинстве случаев в анализаторах спектра применяют детекторы среднеквадратичных значений, преимущества которых отмечены в 4.5.

Шумы и вибрации на судах имеют, как правило, смешанные спектры, содержащие как случайную (шумовую) составляющую

со сплошным спектром, так и периодические составляющие с дискретным (линейчатым) спектром. Формулой (5.16) характеризуется случайная погрешность лишь в тех участках спектра, где преобладает шумовая составляющая. Оценим погрешность измерения уровня дискретной составляющей. Из анализа характеристической функции суммы гауссовского шума $\xi(t)$ и квазидетерминированного сигнала с амплитудой A получена [67] следующая оценка случайной относительной погрешности измерений смешанного спектра (уровня дискретной составляющей):

$$\delta_{д} = \delta_{ш} \sqrt{1 + 2A^2/\sigma_{\xi}^2} \Big/ (1 + A^2/\sigma_{\xi}^2), \tag{5.17}$$

где $\delta_{ш}$ определена выражением (5.16); σ_{ξ}^2 — дисперсия шума в полосе анализа.

Расчеты (см. рис. 5.4) показывают, что случайная погрешность $\delta_{д}$ довольно медленно убывает относительно $\delta_{ш}$ при увеличении отношения сигнал/шум (A/σ_{ξ}):

Сигнал/шум A/G_{ξ}	1	2	4
Отношение $\delta_{д}/\delta_{ш}$	0,82	0,6	0,33

Обратимся далее к анализу систематических погрешностей (смещенности) результатов спектральных измерений. Рассмотрим вначале лишь статические погрешности, характерные при использовании фильтров с постоянной настройкой. Измерения шумовой составляющей спектра характеризуются погрешностями двух типов: сглаживанием спектра вследствие конечной ширины полосы прозрачности фильтра и возрастанием уровня спектра вследствие неполного затухания вне полосы прозрачности фильтра. Первая из этих погрешностей определена выражением (5.10), откуда видно, что относительная смещенность спектра

$$S_F = \frac{\sin \pi \Delta f/\Delta F}{\pi \Delta f/\Delta F} \approx 1 - \frac{\pi}{6} \frac{\Delta f}{\Delta F} \tag{5.18}$$

будет заметной уже при $\Delta f > 0{,}2\,\Delta F$. Следовательно, для уменьшения S_F желательно уменьшить полосу анализа Δf, для снижения случайной погрешности — увеличивать Δf. При заданной длительности наблюдения процесса T возможна оптимизация выбора Δf, целесообразная при не очень больших значениях $\Delta f T$. Но здесь следует учитывать также и необходимость разделения дискретных составляющих, что требует выполнения условия $\Delta f < \Delta F_{д.с}/3$.

Вторая составляющая систематической погрешности измерений уровня спектра, возникающая вследствие неполного затухания вне полосы прозрачности фильтра, поясняется рис. 5.5 и зависит от формы частотной характеристики фильтра $K(\omega)$ и измеряемого спектра $F(\omega)$. На рис. 5.5 заштрихована область, характеризую-

щая энергию сигнала, который «пролезает» на выход фильтра вне полосы его прозрачности

$$\sigma_{п}^{2} = \int_{0}^{\omega_{н}} F(\omega) K^{2}(\omega) d\omega + \int_{\omega_{в}}^{\omega_{max}} F(\omega) K^{2}(\omega) d\omega,$$

эта энергия является помехой, вызывающей заметное увеличение уровня на выходе фильтра, если $\sigma_{п}^{2} \to \sigma_{с}^{2}$, где $\sigma_{с}^{2} = \int_{\omega_{н}}^{\omega_{в}} F(\omega) \times K(\omega) d(\omega)$ — полезный сигнал на выходе фильтра.

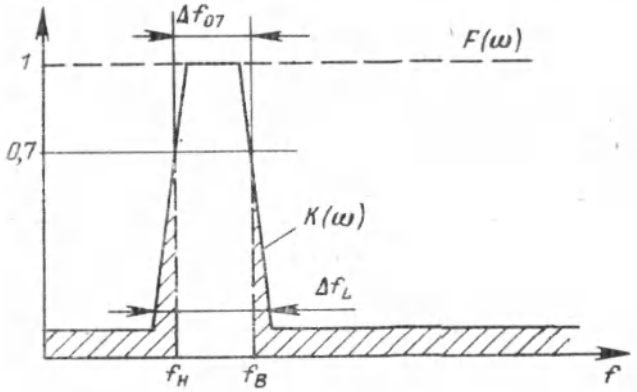

Рис. 5.5. Идеализированная частотная характеристика полосового фильтра $K(\omega)$.

Особенно сильной может быть помеха этого рода, если у спектра $F(\omega)$ большой наклон или в спектре имеются высокие максимумы вблизи исследуемой области частот. Меры борьбы с этим явлением состоят в том, что в случае недостаточного затухания в полосе непрозрачности фильтра применяют предварительную фильтрацию исследуемого сигнала с помощью ФВЧ или широким полосовым фильтром — в зависимости от ожидаемого характера спектра исследуемого процесса.

При измерениях смешанных спектров следует различать уровень суммарного спектра (дискретная плюс шумовая составляющие), измеряемого анализатором, и уровень дискретной составляющей, который необходимо оценить по результатам измерений. Для суммарного уровня имеем

$$\sigma_{\Sigma}^{2} = \sigma_{ш}^{2} + A^{2}/2, \tag{5.19}$$

где $\sigma_{ш}^{2} = F(\omega_{i})\Delta f$; $F(\omega_{i})$ — спектральная плотность шумовой составляющей в окрестности частоты ω_{i} дискретной составляющей; $\sigma_{д.с} = A^{2}/2$ — мощность (дисперсия) дискретной составляющей,

представляемой в данном случае моделью квазидетерминированной составляющей — синусом со случайной начальной фазой.

Истинное значение мощности дискретной составляющей легко находится путем вычитания:

$$A^2/2 = \sigma_\Sigma^2 - \sigma_ш^2 \tag{5.20}$$

или для среднеквадратичных значений

$$A/\sqrt{2} = \sqrt{\sigma_\Sigma^2 - \sigma_ш^2}. \tag{5.21}$$

Значение $\sigma_ш^2$ берется как отсчет сплошной части спектра вблизи дискретной составляющей частоты f_i.

При измерениях (в децибелах) из отсчета суммарного спектра $L_\Sigma = 10 \lg (\sigma_\Sigma^2/E_0^2)$ вычитается поправка (П), учитывающая согласно (5.21) влияние помехи (шумовой составляющей), которая берется из графика поправок, имеющегося в справочниках и руководствах по акустическим измерениям $П = 20 \lg \sigma_\Sigma - 20 \lg \sigma_ш = L_\Sigma - L_ш$. Основные точки этого графика следующие:

Разность уровней $L_\Sigma - L_ш$, дБ	2	3	4	6	10	
Поправка П, дБ	4	3	2	1	0,5	

Истинный уровень равен $L_{д.с}$, дБ $= L_\Sigma - П$

5.4. Вероятностные характеристики погрешностей измерений сплошного и смешанного спектров

Дисперсия случайной ошибки измерений является простой и удобной, но недостаточно информативной характеристикой погрешности измерений, представляющей собой случайную величину. В ряде случаев необходима оценка полной вероятностной характеристики случайной погрешности.

Плотность распределения нормированных флюктуаций оценки спектра мощности для гауссовского процесса как распределение суммы квадратов нормальных случайных величин с нулевым средним описывается центральным χ^2-распределением:

$$w_1(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geqslant 0, \tag{5.22}$$

где Γ — гамма-функция (для целого $n/2 = \nu$, равная $\Gamma(\nu) = \nu!$); n — число степеней свободы, которое в случае цифрового анализа определяется числом N усредняемых выборочных спектров $n = 2N$, а при аналоговом спектральном анализе $n = 2T\Delta f$, где T — длительность отрезка процесса; Δf — энергетическая полоса пропускания фильтра анализатора.

Числовые характеристики χ^2-распределения определяются следующими выражениями [31, 35]:

$$\left.\begin{aligned} &M_\chi = n, && \gamma_{0\chi} = \sqrt{2/n}, \\ &D_\chi = 2n, && \gamma_{3\chi} = 2\sqrt{2/n}, \\ &\varkappa_{\chi_k} = 2^{(k-1)} n^{(k-1)}; && \gamma_{4\chi} = 12/n. \end{aligned}\right\} \qquad (5.23)$$

Мгновенный спектр мощности (5.5) является суммой квадратов синусной и косинусной составляющих преобразования Фурье и характеризуется поэтому двумя степенями свободы, $n=2$. Для этого случая χ^2-распределения вырождается в экспоненциальное одностороннее распределение $w_1(x)_{n=2} = {}^1/_2 e^{-x/2}$, $x \geqslant 0$, с параметрами $M_1 = 0{,}5$; $D = 0{,}25$; $\gamma_3 = 2$; $\gamma_4 = 6$.

Коэффициент вариации $\gamma_0 = \sigma_\chi / M_\chi = 1$, т. е. среднеквадратичное отклонение случайной погрешности измерений σ_χ спектрального уровня при $n=2$ равно значению M_χ измеряемого спектрального уровня, а доверительный интервал с вероятностью более 0,7 будет превышать значение измеряемой величины.

По мере увеличения числа усредняемых мгновенных спектров дисперсия флюктуаций спектральных уровней падает, а плотность распределения, начиная с $n=3$, принимает унимодальную форму и по мере увеличения n приближается к гауссовскому закону. Об этом же свидетельствует и убывание коэффициентов асимметрии и эксцесса. При $n \geqslant 30$ считают закон распределения случайных флюктуаций практически гауссовским. Оценка доверительных интервалов в зависимости от числа степеней свободы приведена на рис. 5.6 для доверительных вероятностей $P=0{,}8$ и $P=0{,}95$. Там же приведен график относительной погрешности измерений $\delta = 1/\sqrt{N}$, где N — число усредняемых спектров, при этом число степеней свободы $n=2N$. Пересчет линейных значений погрешности в децибелы производится по формуле $20\lg(1+\delta)$. Как видно, правило оценки доверительного интервала как $M_1 \pm 2\sigma$ для доверительной вероятности $P=0{,}95$ справедливо лишь при больших N. Для малых N доверительный интервал при $P=0{,}95$ получается шире, чем $\pm 2\sigma$.

Оценка спектра мощности имеет вид изрезанной кривой с большим количеством выбросов. Верхняя граница доверительного интервала $P=0{,}95$ показывает, что, по крайней мере, пять выбросов спектра из 100 могут превышать эту границу. Такой характер спектра существенно затрудняет интерпретацию смешанного спектра, имеющего сплошную часть и дискретный спектр. Уверенно, с вероятностью не менее 0,95, обнаружить наличие дискретных составляющих можно лишь в том случае, если их уровень превышает верхнюю границу случайных выбросов спектра, приведенную на рис. 5.6. Отсюда следует вывод о необходимости

применения усреднения по возможно большему числу мгновенных спектров. Минимальным числом усреднений можно назвать $N=4$, в этом случае надежное обнаружение дискретных составляющих возможно в случае их превышения над сплошной частью спектра не менее чем на 12 дБ. Практически достаточно для многих целей

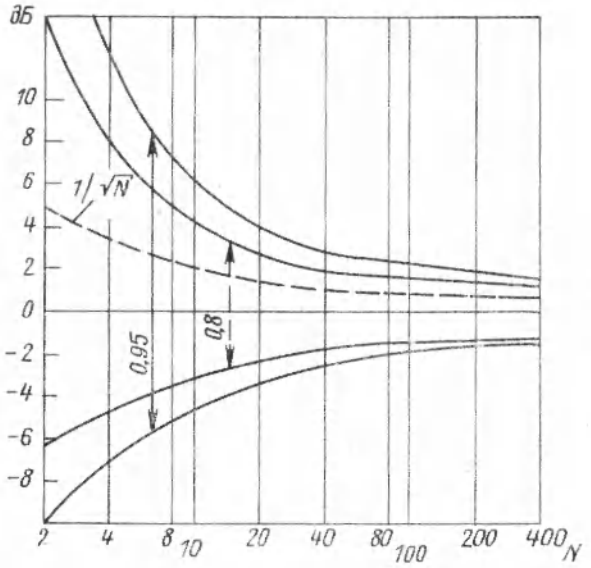

Рис. 5.6. Доверительные интервалы результата измерений спектра при доверительной вероятности 0,8 и 0,95, а также относительная случайная ошибка измерений спектра $\delta=1/\sqrt{N}$.

иметь $N=100$, тогда относительная случайная погрешность будет $\delta=0{,}1$, т. е. менее 1 дБ.

Плотность распределения вероятности ошибки измерения уровня дискретной составляющей смешанного спектра представляется нецентральным χ^2-распределением, для которого среднее значение $M_1=\varkappa_1=\nu+\lambda$, дисперсия $\sigma^2=\varkappa_2=2(\nu+2\lambda)$. Нецентральное $(\chi')^2$-распределение может быть приближенно представлено центральным $\rho\chi^2$-распределением с эквивалентными первым и вторым моментами $\nu+\lambda=\rho\nu^*$; $2(\nu+2\lambda)=2\rho\nu^*$ или иначе $(\chi')^2/\rho$ имеет приближенно центральное распределение при

$$\rho=\frac{\nu+2\lambda}{\nu+\lambda}=1+\frac{\lambda}{\nu+\lambda};\quad \nu^*=\frac{(\nu+\lambda)^2}{\nu+2\lambda}=\nu+\frac{\lambda^2}{\nu+2\lambda}. \qquad (5.24)$$

Таким образом, нецентральное распределение с числом степеней свободы ν приближенно представляется центральным χ^2-распределением с бо́льшим числом степеней свободы ν^*.

Если измеряется не энергетический спектр шума, а спектр средних квадратичных значений, то его случайные флюктуации

характеризуются распределением $\sqrt{2\chi^2}$ (аппроксимация Фишера), имеющим следующие кумулянты:

$$M_1 = \sqrt{2n-1};\ D = 1 - 1/4n;\ \gamma_0 = (4n-1)/(4n\sqrt{2n-1});$$

$$\gamma_3 = (1/\sqrt{2n});\ \ \gamma_4 = 3/4n^2.$$

Параметры этого распределения шумовой составляющей спектра быстрее приближаются к нормальному распределению, чем параметры χ^2-распределения шума. Например, при $n = 24$ для χ^2-распределения флюктуаций энергетического спектра имеем $\gamma_4 = 12/n = 0{,}5$. Такое же значение коэффициента эксцесса получаем при числе степеней свободы $n' = 4$ для флюктуации спектра среднеквадратичных значений, т. е. уже в этом случае флюктуации близки к нормальному закону.

Для дискретной составляющей смешанного спектра среднеквадратичных значений получим соответственно $(2(\chi')^2/\rho)^{1/2}$ — распределение со средним значением $(2\nu^* - 1)$ и дисперсией 1.

Приведенные соотношения позволяют характеризовать доверительные интервалы для шумовой и дискретной составляющих любой спектральной характеристики смешанного спектра.

5.5. Особенности цифровых методов спектрального анализа

Цифровые методы спектрального анализа находят применение как в специализированных процессорах — анализаторах спектра, так и при спектральном анализе на универсальных ЭВМ. В первом случае проектант прибора заботится о достижении наилучших параметров прибора как за счет соответствующего проектирования схемы прибора, так и путем разработки практических рекомендаций по выбору параметров прибора при его эксплуатации. В случае применения универсальных ЭВМ для спектрального анализа параметры анализа в значительной степени будут определяться искусством исследователя, составляющего программу обработки данных, для которого и предназначены излагаемые ниже сведения.

Прежде всего следует правильно выбрать соотношения между частотой $f_в$ среза фильтра низких частот (ФНЧ), который будет поставлен на входе АЦП, и частотой дискретизации (квантования) $f_д$. Чтобы избежать ошибок наложения спектров, как указывалось в 3.7, необходимо выполнить условие $f_д = 2f_м$ или $f_д \geqslant (3 \div 4) f_в$, где конкретное значение коэффициента выбирается из условия обеспечения заданного динамического диапазона D неискаженного спектрального анализа, $f_в$ — частота среза на уровне 0,7 частотной характеристики ФНЧ, $f_м$ — частота на уровне $1/D$.

Далее выбирают метод усреднения (сглаживания) спектра. Принципиально возможны следующие два пути:

1) определяется комплексное преобразование Фурье всего имеющегося отрезка процесса

$$S_T(\omega) = \int_0^T \xi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = A_T(\omega) + iB_T(\omega); \tag{5.25}$$

находится модуль энергетического спектра

$$F_T(\omega) = A_T^2(\omega) + B_T^2(\omega), \tag{5.26}$$

после чего применяется сглаживание спектра по частоте

$$F(\omega) = \int_0^\infty F_T(\omega')\, w(\omega - \omega')\, d\omega' \tag{5.27}$$

с применением весовой функции $w(\omega)$, называемой частотным окном спектрального анализа;

2) весь процесс делится на отрезки меньшей длительности T_1 (реализации), по каждому из которых находятся преобразования Фурье:

$$C_j(\omega) = \int_0^{T_1} \xi_j(t)\, w(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = a_j(\omega) + ib_j(\omega), \tag{5.28}$$

где применяется «временно́е окно» — весовая функция $w(t)$, затем определяются и усредняются квадраты синусной и косинусной составляющих

$$\overset{*}{F}(\omega) = \sum_{j=1}^{N} \left[a_j^2(\omega) + b_j^2(\omega)\right], \tag{5.29}$$

т. е. производится усреднение по ансамблю реализаций $C_i(\omega)$.

В обоих рассмотренных методах производится сглаживание спектральной оценки, в первом случае — по частоте, во втором — по ансамблю. Цель сглаживания — снизить случайную ошибку измерений спектра до требуемой величины при условии выполнения требований и по разрешающей способности спектрального анализа. Кроме того, возможен и корреляционный метод определения энергетического спектра (5.12). Возникает закономерный вопрос — не является ли один из названных методов более предпочтительным с позиций получения минимальной случайной погрешности измерений.

Исследования показали [56], что при заданной длительности реализации T все методы эквивалентны по объему представляемой информации, т. е. разрешающей способности и случайной погрешности измерений, при условии эквивалентности весовых функций, применяемых во временной и спектральной областях. Условие их эквивалентности представляется преобразованием Фурье

$$w(\omega) = \int_0^T w(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{5.30}$$

Весовые функции характеризуются различными значениями энергетической полосы пропускания или числа степеней свободы. В табл. 5.1 представлены значения произведения $C_1 = \Delta f_э \tau_m$, откуда можно найти энергетическую ширину полосы анализа $\Delta f_э = C_1/\tau_m$, где $2\tau_m = T_1$ — длительность отрезка реализации (при определении спектра через корреляционную функцию вследствие четности последней достаточно взять половину ее длительности $\tau_m = 0{,}5T_1$). Там же приведено значение квадрата случайной относительной погрешности измерений (дисперсия нормированных флюктуаций спектра) δ^2, обратно пропорциональное числу степеней свободы $\delta^2 = 2/n$ или числу усредняемых спектров $\delta^2 = 1/\sqrt{N}$.

Сравнение различных весовых функций (см. табл. 5.1) показывает, что применение прямоугольного временного окна дает наименьшую полосу пропускания $\Delta f_э = 0{,}5/\tau_m = 1/T_1$, но наибольшую случайную ошибку $\delta^2 = T_1/T$, к тому же частотная характеристика этого временного окна имеет низкий коэффициент прямоугольности и большой уровень (22 %) добавочных максимумов. Поэтому прямоугольное временное окно рекомендуется применять лишь для анализа процессов со сплошным относительно гладким спектром. Наихудшее частотное разрешение дает окно Перзена, но при этом достигается наименьшая случайная погрешность. Хорошие результаты получаются в случае простой временной весовой функции Бартлетта. При сглаживании по частоте простейшее прямоугольное частотное окно (функция Пугачева—Даниэля) обеспечивает хорошее частотное разрешение смешанного спектра.

Практически выбор способа спектрального анализа на ЭВМ определяется также достигаемой скоростью (продолжительностью) анализа, зависящей от объема вычислительных операций при выбранном способе анализа, и возможностями ЭВМ. Вначале считался наиболее быстродействующим корреляционный метод определения энергетического спектра, требующий меньшего числа операций умножения, являющихся наиболее длительной процедурой при вычислениях на ЭВМ. Затем в результате практического освоения метода быстрого преобразования Фурье (БПФ) [3, 72] более предпочтительным стал метод прямого определения энергетического спектра с использованием БПФ, свободный от недостатков корреляционного метода (см. 5.2).

Применение процедуры БПФ приводит к существенному сокращению числа операций, а следовательно, и времени их выполнения. Если для обычной процедуры дискретного преобразования Фурье (ДПФ) необходимо выполнение N_x^2 операций комплексного умножения и суммирования (где $N_x = 2^n$ — число отсчетов исследуемого процесса), то процедура БПФ требует только $(N_x/2)\log_2 N_x$ операций. В результате достигается выигрыш в число раз $\gamma = (N_x - 2)/\log_2 N_x \approx N_x/n$.

Алгоритм БПФ [3, 21, 72] представляет собой итерационный метод вычисления ДПФ выборок исследуемого сигнала, основан-

ный на последовательном объединении увеличивающихся взвешенных сумм выборочных значений. Принцип процедуры БПФ можно кратко представить следующим образом. Необходимо вычислить комплексный спектр последовательности N_x выборочных значений

$$X_m^{(N)} = \sum_{n=0}^{N_x-1} x_n \exp\left[-i\,\frac{2\pi mn}{N_x}\right];\quad m=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots (N_x-1). \qquad (5.31)$$

Введя обозначение $w(u)=\exp[-i(2\pi mn/N_x)]$, запишем ДПФ в виде

$$X_m^{(N)} = \sum_{n=0}^{N_x-1} x_n w(mn),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (N_x-1).$$

Разбивая N_x выборок на два ряда (четные и нечетные), получаем для каждого из них выражение, аналогичное (5.31),

$$Y_m^{(N/2)} = y_m w(m,\ n),\quad m=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ (N_x-2); \qquad (5.32)$$

$$Z_m^{(N/2)} = z_m w(m,\ n),\quad m=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ (N_x-1). \qquad (5.33)$$

С помощью (5.32) и (5.33) общее выражение (5.31) записывается в виде

$$X_m^{(N)} = \frac{1}{2}\exp\left(i\,\frac{2\pi m}{N_x}\right) Y_m^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_m^{(N/2)}. \qquad (5.34)$$

Для ряда длиной $N_x=2^n$ выборок, повторяя эту процедуру n раз, приходим к ряду, имеющему одно число, тогда преобразование Фурье совпадает с ним. В результате получается сокращение количества вычислительных операций. Более подробное изложение процедуры БПФ можно найти в [3, 21], там же приведена библиография работ, посвященных БПФ, включаемых в библиотеку стандартных программ математического обеспечения ЭВМ. Задача программиста состоит в выборе алгоритма дальнейших действий над преобразованиями Фурье отдельных реализаций процесса. Можно дать следующие рекомендации по выбору алгоритма и параметров спектральной обработки данных.

1. Шаг по частоте Δf выбирается, исходя из требуемого частотного разрешения дискретных составляющих смешанного спектра $\Delta f=[(1/3)\div(1/4)]\delta F$, где δF — минимальная разность частот дискретных составляющих. Число значащих ординат N_F спектра (до частоты $f_в=(1/3\div 1/4)f_д$) обычно ограничивается возможностями ЭВМ и данной стандартной программой. Отсюда определяется частотный диапазон анализа $f_в=N_F\Delta f$.

2. Число усреднений N должно быть не менее четырех, максимальное число усреднений обычно не превышает 100—128, что обеспечивает случайную погрешность не более 0,1 (или около 1 дБ). Этим определяется необходимая длительность анализируемого отрезка процесса $T=T_1N$, где $T_1=1/\Delta f$ — длительность от-

дельной «реализации» процесса, принятой для вычисления мгновенного спектра мощности.

Выбор требуемой длительности процесса T важно произвести в период подготовки и планирования эксперимента, чтобы оценить продолжительность измерений. Часто процесс в период натурного эксперимента записывают на магнитофон, а затем выполняют его анализ в лабораторных условиях на ЭВМ. В этом случае значение T определяет необходимую длительность каждой магнитофонной записи. Если длительность записи будет короче, то эту потерю информации невозможно исправить в ходе обработки данных. С другой стороны, расчеты могут показать чрезмерно завышенные требования к параметрам анализа, их невыполнимость на практике. Например, анализ с разрешением 10^{-3} Гц при $N=4$ потребует $T=4000$ с или немногим более часа. Тут следует подумать о выполнимости условий стационарности процесса, определяемых работой исследуемого механизма и другого оборудования за столь продолжительное время. К тому же измерения, как правило, выполняются в большом количестве точек и при различных режимах работы объекта исследований, что еще более увеличит требуемую продолжительность эксперимента.

3. Весовая функция должна иметь малые уровни боковых максимумов частотной характеристики. Обычно достаточным считается их уровень порядка —30 дБ относительно максимума характеристики, что обеспечивает весовая функция Бартлетта (см. табл. 5.1).

4. Точные значения энергетического спектра обеспечиваются вычислениями квадратов синусной и косинусной составляющих спектра и последующим их суммированием. Общее число этих слагаемых определяет число степеней свободы (n) результирующего спектра мощности и, следовательно, величину случайной погрешности измерений $\delta=1/\sqrt{2n}$. При вычислении квадрата малого значения спектра возможен выход результата за пределы разрядной сетки ЭВМ, что вызывает неприятные провалы результирующего спектра. Необходимо принимать меры к устранению этого явления.

5. Если допустимо некоторое искажение спектральных уровней дискретных составляющих, то можно применить усреднение абсолютных значений синусной и косинусной составляющих спектра, избежав их квадрирования.

6. В программу спектрального анализа часто включают определение, кроме узкополосного спектра, также и уровней третьоктавного спектра, который находят путем суммирования ординат энергетического узкополосного спектра в пределах стандартной полосы пропускания третьоктавного фильтра, т. е. производится сглаживание спектра по частоте. При этом необходимо учесть действие весовой функции, приводящей к различию энергетической полосы пропускания фильтра анализатора (т. е. энергетической ширины Δf_w весовой функции в спектральной области) и шага

спектра по частоте Δf. Поэтому результат суммирования ординат узкополосного спектра мощности необходимо домножить на поправочный множитель α:

$$\sigma^2 = \sum_{j=M}^{M+m} \overset{*}{F}_j(\omega)\,\alpha, \tag{5.35}$$

где $\alpha = \Delta f/\Delta f_w$; $\Delta f_w = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{*}{w}(\omega)\,d\omega$ — весовая функция спектрального анализа в частотной области, которую практически получают, моделируя подачу на вход ЭВМ белого шума и определив выходную реакцию $\overset{*}{w}(\omega)$ программы на это воздействие.

7. Результат вычисления спектра представляют, как правило, в логарифмических величинах — децибелах — относительно стандартного нулевого уровня (см. 5.1). Практически эта процедура разделяется на две следующие: вначале выражают результат в децибелах относительно некоторого условного для данной программы нулевого уровня, а затем находят и вводят поправку для приведениия результата к абсолютному (логарифмическому) уровню.

Поправку находят одним из следующих способов:

а) вводят чувствительность датчика, коэффициент передачи измерительного тракта и АЦП, а также коэффициент пересчета вычисляемых по программе децибелов к абсолютным значениям;

б) в процессе измерений производят определение абсолютных уровней измеряемой величины в одной или нескольких третьоктавных полосах частот; по результатам узкополосного анализа определяют относительные уровни в тех же третьоктавных полосах частот, тогда разность относительного и абсолютного уровней в каждой третьоктавной полосе частот дает необходимую поправку (поправки, полученные для нескольких третьоктавных полос усредняют), которую прибавляют к значениям узкополосного спектра.

8. Применение ЭВМ для спектрального анализа открывает возможность организации вторичной обработки данных на ЭВМ. Приведение данных к абсолютным значениям, рассмотренное в п. 7,— одна из процедур вторичной обработки. Далее выполняют на ЭВМ различные рутинные операции: усреднение спектров, их сравнение, считывание интересующих исследователя параметров аппроксимации спектра сглаженными функциями (линейной — с определением наклона спектра на заданной частоте, либо нелинейной — многочленом заданной степени с определением соответствующих коэффициентов) и т. д.

Остановимся на считывании параметров смешанного спектра. Характеристиками каждой дискретной составляющей смешанного спектра являются: частота f_i, ее уровень F_i, превышение над сплошной частью Π_i. Первые два параметра служат координатами максимума спектра, определение которых производят по извест-

ным правилам. Для определения третьего параметра необходимо вначале оценить уровень сплошной части спектра в окрестности частоты f_i одним из следующих способов:

а) определяют гистограмму распределения уровней на фиксированных интервалах по частотной оси и моду (максимум) гистограммы принимают в качестве усредненного уровня сплошной части спектра на заданном частотном интервале;

б) из фиксированного числа ординат участка спектра отбрасывают заданное число ординат с максимальными значениями, а оставшиеся — усредняют и принимают за усредненный уровень сплошной части заданного участка спектра;

в) отыскивают максимум и минимум спектра справа и слева от дискретной составляющей, и среднее значение этих четырех ординат принимают в качестве оценки уровня сплошной части на частоте f_i.

Далее необходима проверка условия принятия данного максимума спектра в качестве дискретной составляющей: условие $\Pi_i/F_i \geqslant 3\delta_д$ обеспечивает около 1 % ложной тревоги, условие $\Pi_i/F_i \geqslant 2\delta_д$ — около 5 % ложной тревоги (т. е. принятия случайного выброса спектра за дискретную составляющую).

В результате применения ЭВМ для обработки данных существенно сокращается время обработки, открываются возможности управления экспериментом по получаемым данным и т. д.

5.6. Измерения спектров нестационарных процессов

Напомним, что при изменении свойств процесса во времени, его характеристики могут быть представлены моделями как стационарного, так и нестационарного процессов (см. гл. 3), в зависимости от целей эксперимента. Выражение «измерения нестационарных процессов» будем понимать как исследование изменений спектральных свойств процесса во времени. Как уже указывалось, методы определения характеристик процесса зависят от характера и скорости их изменения. Применительно к анализу спектральных характеристик разделение процессов на подклассы по скорости изменения этих характеристик может быть уточнено следующим образом.

Процессы с медленной нестационарностью — это процессы, спектр которых практически не изменяется, точнее, изменяется не более чем на ε за время измерения T усредненного спектра. В этом случае ε целесообразно принять соизмеримой со случайной погрешностью измерений спектра $\delta_ш$ или $\delta_д$. Измерения выполняются по одной реализации процесса.

Процессы с быстрой нестационарностью — это процессы, спектры которых изменяются более чем на ε за время измерения T_1 мгновенного энергетического спектра. В данном случае необходимо применить усреднение по множеству: в случае апериодического процесса — путем повторения эксперимента N раз; в случае

периодически нестационарного процесса — путем применения метода синхронного накопления по отрезкам процесса, длительность которых равна периоду нестационарности.

Переходя к количественным характеристикам, необходимо воспользоваться соотношением неопределенностей $\Delta f T_1 = \text{const}$, показывающим, что частотное разрешение Δf обратно пропорционально времени наблюдения процесса T_1. Отсюда следует, что один и тот же процесс может быть отнесен к различным подклассам по скорости его изменения. Выбрав $T_1 = T_н$, т. е. предельно большим по длительности, равным времени нестационарности процесса $T_н$, имеем возможность получить предельно высокое частотное разрешение (минимальное значение шага по частоте) $\Delta f_1 = 1/T_1 = 1/T_н$, но для усреднения результата придется усложнять измерения и позаботиться о получении достаточного количества реализаций процесса. Если же выбрать $T_1 = T_н/N$, т. е. существенно меньшим, то можно обеспечить усреднение во времени по одной реализации процесса, но разрешающая способность $\Delta f_2 = 1/T_1 = N/T_н$ будет в N раз ухудшена. Таким образом, для полосы анализа $\Delta f_1 = 1/T_н$ процесс будет быстро изменяющимся, а для полосы анализа $\Delta f_2 = N/T_н$ — медленно изменяющимся. Конкретный выбор полосы анализа определяется исследователем согласно целям и задачам эксперимента.

Изменение свойств процесса во времени приводит к появлению дополнительной систематической погрешности измерений — смещенности результата. Оценка этой составляющей погрешности возможна, если известна закономерность изменения спектра во времени (см. 3.5):

$$\delta_{см}(t) = T_у^2 A''(t)_\omega/24,$$

где $A''(t)_\omega = \partial^2 A(t)_\omega/\partial t^2$; $A(t)_\omega$ — множитель нестационарности, учитывающий изменение дисперсии процесса в выбранной узкой полосе частот $\sigma^2(\Delta\omega, t) = A(t)\overline{\xi^2(t)}$. В этом выражении $T_у$ — продолжительность усреднения во времени ($T_у = T$ — в случае усреднения спектров во времени, $T_у = T_1$ — в случае усреднения по ансамблю реализаций).

Так как практически функция нестационарности $A(t)$ полностью неизвестна, то анализ ведут методом последовательных приближений, вначале выбирают T_1 из интуитивных соображений и предыдущего опыта, оценивают поведение функции $A(t)$, а затем уточняют по (3.12) выбор $T_1 \to T_{опт}$. Обычно при этом используют магнитофонную запись процесса, которую можно многократно воспроизводить.

В ряде анализаторов спектра предусматривают как режим усреднения, так и режим запоминания максимальных значений. Первый режим предназначен для анализа стационарных процессов или процессов с медленной (при выбранной полосе анализа) нестационарностью; второй — для определения спектральных характеристик нестационарных процессов с быстрой нестационарно-

стью, таких, как включение—выключение механизма, ударные явления, а также для измерения спектров движущихся источников звука. В последнем режиме может быть предусмотрено также и предварительное усреднение спектров по малому их числу, далее этот спектр запоминается, затем производится определение спектральной характеристики за другой промежуток времени и в память заносятся только те значения нового спектра, которые превышают значения, ранее занесенные в память. Результат таких спектральных измерений, который назовем спектром максимальных значений, имеет свойства, отличающие его от спектров, полученных в режиме усреднения. Эти отличия заключаются в следующем.

1. В различных участках частотного диапазона максимумы спектральных уровней наступают в общем случае в различные моменты времени. Это связано с различным поведением компонент спектра. Например, при включении механизма и его разгоне одновременно с изменением амплитуд изменяются и частоты дискретных составляющих, а при движении источника звука может сказываться различная направленность излучения на различных частотах.

2. Вследствие свойства 1 энергетическая сумма ординат узкополосного спектра максимальных значений в выбранной полосе частот может быть не равна энергетическому уровню, непосредственно измеренному в этой же полосе частот (например, в третьоктавной полосе) также в режиме запоминания максимальных значений. Поэтому пересчет спектральных уровней по выражению (5.35) неприменим.

3. Статистические свойства случайной погрешности измерений отличаются от этих свойств усредненного спектра и близки к χ^2-распределению с малым числом степеней свободы.

Рассмотрим в качестве примера вопросы, возникающие при измерениях спектра движущегося источника звука. Особенность здесь заключается в том, что излучаемое акустическое поле является стационарным в координатах, движущихся вместе с источником звука. Однако процесс, воспринимаемый неподвижным приемником, становится нестационарным. В случае прямолинейного равномерного движения принимаемое звуковое давление равно

$$p(t) = p_0(t, v)\, Q(\varphi_t, \alpha_t)\, h/\sqrt{(vt)^2 + h^2}, \qquad (5.36)$$

где $p_0(t)$ — стационарное излучение в координатах, движущихся с источником звука; $p_0(t, v) = p_0[(t - R/c)(1 + 1/c(\partial R/\partial t)]$ — звуковое давление от движущегося источника, воспринимаемое ненаправленным приемником на расстоянии

$$R_t = \sqrt{(vt)^2 + h^2};$$

h — расстояние от приемника до линии движения источника звука; $Q(\varphi_t, \alpha_t)$ — направленность излучения.

Спектр процесса, принимаемого неподвижным ненаправленным приемником, представляется в виде

$$G(\omega, t) = G_0\left[\omega\left(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R_t}{\partial t}\right)\right] Q(\omega, \varphi_t, \alpha_t)\frac{h}{R_t}, \qquad (5.37)$$

где член $1 + (1/c)(\partial R_t/\partial t)$ представляет изменение временного масштаба, характерное для движущегося источника звука и приводящее к изменению частот спектра вследствие известного эффекта Доплера. Для гармонического источника

$$\omega' = \omega_0 \Big/ \left(1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t}\right) \approx \omega_0\left(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t}\right). \qquad (5.38)$$

Таким образом, спектр процесса, принимаемого неподвижным приемником (звуковое давление), содержит информацию о спектре излучаемого сигнала, искаженном движением источника. Задача состоит в том, чтобы оценить истинный спектр сигнала $G_0(\omega)$ по искаженному спектру $G(\omega, t)$.

Оценим возможные параметры измерений спектра. Предположим, что источник звука является монополем, т. е. отсутствует направленность излучения. Тогда характеристика временного изменения дисперсии процесса (характеристика прохода) будет иметь вид

$$\sigma^2(t) = \sigma_h^2 h^2 / [(vt)^2 + h^2], \qquad (5.39)$$

где σ_h^2 — интенсивность (квадрат звукового давления) на расстоянии h от монополя.

Длительность рабочего участка характеристики прохода на уровне 0,5 максимума интенсивности звука будет равна

$$T_{хп} = 2h/v. \qquad (5.40)$$

Этой длительности реализации будет соответствовать предельно узкая полоса анализа, равная $\Delta f = 1/T_{хп} = v/2h$. Например, при $v = 5$ м/с, $h = 25$ м имеем $T_{хп} = 10$ с или $\Delta f = 0{,}1$ Гц. Следовательно, третьоктавный анализ спектра движущегося источника, а также узкополосный анализ с разрешением в несколько герц можно провести по одной реализации процесса с хорошим усреднением. Но более узкополосный спектральный анализ потребует проведения измерений на нескольких проходах источника звука.

Практически все технические источники звука обладают направленностью излучения, что приведет к изменению ширины характеристики прохода, а также к различию спектров на различных направлениях приема. Первый из факторов приведет к изменению ширины характеристики прохода и потребует откорректировать длительность реализации, используемой для спектрального анализа. Второй фактор потребует проведения измерений характеристик направленности источника для получения более полного описания свойств источника звука.

При узкополосном спектральном анализе возникает еще одно условие, которое необходимо выполнить при выборе параметров

анализа: полоса анализа в первом приближении не должна быть менее двойного значения максимального доплеровского сдвига частоты:

$$\Delta f \geqslant 2 f_0 v/c. \tag{5.41}$$

Например, при скорости источника $v=5$ м/с, скорости звука в воздухе $c=330$ м/с двойной доплеровский сдвиг частоты 100 Гц составит 3 Гц, следовательно, именно этот фактор (эффект Доплера), а не длительность характеристики прохода будет лимитировать выбор полосы спектрального анализа при частотах выше некоторого порогового значения. Лишь на низких частотах (в нашем примере менее 30 Гц) основным фактором станет длительность характеристики прохода, а не эффект Доплера. Более тонкие исследования совместного влияния доплеровского сдвига частоты и изменения интенсивности звука во времени подсказывают возможность поиска оптимальной полосы анализа, исходя из следующих соображений. Так как доплеровский сдвиг частоты зависит от времени

$$\Delta f_{\text{д}} = \frac{f_0}{c}\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{v}{c}\frac{vt}{\sqrt{(vt)^2 + h^2}}, \tag{5.42}$$

то за время $T_1 < T_{\text{хп}}$ он не достигнет своего максимального значения, а будет меньше. Представляя (5.42) первым членом ряда, получаем

$$\Delta f_{\text{д}} \approx f_0 \frac{v^2}{ch} T_1. \tag{5.43}$$

Поэтому целесообразно выбор полосы анализа проводить из условия

$$\Delta f_{\text{опт}} = \frac{1}{T_{\text{опт}}} = \left[f_0 \frac{v^2}{ch}\right]^{1/2}. \tag{5.44}$$

При $\Delta f > f_{\text{опт}}$ будем иметь широкие выбросы в спектре на месте дискретных составляющих; при $\Delta f = f_{\text{опт}}$ — наиболее узкие унимодальные выбросы спектра; при $\Delta f < \Delta f_{\text{опт}}$ — двумодальные максимумы, т. е. расщепление дискретной составляющей на две линии, что не соответствует истинному спектру источника звука. Появление двух линий объясняется следующим образом.

При приближении источника звука частота принимаемого сигнала равна $f_0(1+v/c)$ и мало изменяется, что формирует максимум спектра вблизи этой частоты. При проходе источника звука мимо приемника изменение частоты наибольшее и происходит в области, близкой к f_0, что приводит к «размазыванию» спектра в этой области. При удалении источника звука частота становится близкой к $f_0(1-v/c)$ и опять мало изменяется, что формирует второй максимум спектра.

Таким образом, спектральный анализ шума быстроходных транспортных средств (автомашины, самолеты, суда на подводных крыльях или на воздушной подушке и т. п.) представляет собой

непростую задачу, требующую внимательного отношения к выбору параметров анализа, а на достаточно высоких частотах, где сильно проявляется эффект Доплера, иногда приходится применять специальные методы анализа с компенсацией эффекта Доплера.

5.7. Анализаторы спектров и их характеристики

В настоящее время промышленностью нашей страны и зарубежными фирмами выпускается большое количество анализаторов спектра различных типов, назначений, различной сложности, с существенно различающимися характеристиками. Анализаторы спектра можно разделить на классы: а) по принципу анализа спектра — последовательного или параллельного; б) по характеристикам полосы анализа — с процентной полосой пропускания или с постоянной полосой; в) по принципу фильтрации и преобразования сигнала — с перестраивающимся фильтром (аналоговые), с гетеродинированием (аналоговые) или с рециркуляцией; г) цифровые.

Рис. 5.7. Классификация анализаторов спектра.

А — аналоговые; *Ц* — цифровые.

Всего можно выделить семь типов анализаторов по сочетанию признаков, указанных выше (рис. 5.7). Ниже приводятся примеры анализаторов каждого типа и их основные технические характеристики.

1. *Анализатор спектра последовательного действия с процентной полосой пропускания* — простейший из анализаторов представляет собой перестраиваемый по частоте активный RC-фильтр (см. рис. 5.1), выходной сигнал которого измеряется вольтметром среднеквадратичных значений с большой постоянной времени или записывается на самописце.

Типичным представителем приборов этого класса является анализатор типа 2120 («Брюль и Къер», Дания [28]), имеющий сле-

дующие параметры: диапазон частот 2—20 000 Гц разбит на поддиапазоны 2—6,3; 6,3—20; 20—63; 63—200; 200—630; 630—2000; 2000—6300 и 6300—20 000 Гц. Полоса пропускания 1, 3, 10, 23 % (третьоктавные полосы). Избирательные свойства анализатора получены за счет использования RC-четырехполосников в цепи обратной связи усилителя. Привод настройки прибора и переключения поддиапазонов может осуществляться от самописца типа 2305 этой же фирмы. Упрощенная модель анализатора типа 2121 имеет диапазон частот 20—20 000 Гц и другие аналогичные параметры.

Характерное свойство анализатора этого типа — получение на выходе прибора отфильтрованного сигнала без трансформации частотного спектра. Недостаток анализатора — недостаточная избирательность при больших расстройках от полосы пропускания (ослабление 20 дБ при расстройке на октаву при полосе 23 % или 40 дБ при полосе 6 %), поэтому в ряде случаев применяют выделение октавной полосы частот, а затем — анализ ее с помощью узкополосного анализатора.

2. *Гетеродинный анализатор* (см. рис. 5.3) содержит полосовой фильтр с постоянной настройкой, развертка спектра достигается за счет смещения спектра частот. Благодаря фиксированной настройке полосовой фильтр удается выполнить с весьма высокой избирательностью.

Отечественные анализаторы этого класса звукового диапазона частот выпускаются под индексами С4-48, С4-51, СК4-26, СК4-34, СЧ-53, СЧ-52, их основные характеристики [59] приведены в табл. 5.2. Фирмой «Брюль и Къер» выпускается гетеродинный анализатор типа 2010 на диапазоне частот 2—200 000 Гц. Анализатор имеет полосы пропускания 3, 10, 31, 100, 316, 1000 Гц, линейную и логарифмическую шкалы, цифровой отсчет частоты и ряд дополнительных функций.

Характерным отличием анализаторов этого типа является выход сигнала на промежуточной частоте, в результате истинную частоту выделенного анализатором сигнала можно установить лишь по шкале настройки, а сам выходной сигнал непосредственной информации о частоте не несет. Некоторые анализаторы гетеродинного типа имеют выводы для подключения внешнего гетеродина и съема частоты собственного гетеродина, либо такие выводы могут быть легко сделаны путем доработки прибора. Эти дополнения позволяют включить два анализатора на управление от одного гетеродина (гетеродина одного из анализаторов), что обеспечивает проведение двухканального синхронного анализа или измерения взаимного спектра (см. гл. 6).

3. *Анализаторы безфильтрового типа* (см. рис. 5.2) можно назвать также гетеродинными анализаторами с нулевой промежуточной частотой, так как для анализа сигналов здесь также применяется принцип смещения спектра сигнала путем его гетеродинирования. Для целей определения спектра сигнала достаточно перемножить исходный сигнал на синусный и косинусный сигналы гетеродина, результат каждого перемножения сгладить фильтром

Таблица 5.2

Основные характеристики анализаторов спектра гетеродинного типа

Характеристики	Типы анализаторов		
	С4-48	С4-51	СК4-26
Диапазон частот, Гц	$10—20 \cdot 10^3$	$10—60 \cdot 10^3$	$20—20 \cdot 10^3$
Полоса анализа, Гц	5, 150	5, 30, 150, 3000	5, 30, 150
Динамический диапазон, дБ	70	70	60
Время развертки спектра, с	—	0,1—300	13—19
Масса, кг	18	30	50

Характеристика	Типы анализаторов		
	С4-34	С4-53	С4-52
Диапазон частот, Гц	$20—200 \cdot 10^3$	$20—500 \cdot 10^3$	$100—600 \cdot 10^3$
Полоса анализа, Гц	5, 30, 150, 3000	50, 30, 150	30, 150, 3000
Динамический диапазон, дБ	60	60	70
Время развертки спектра, с	13—19	—	0,1—300
Масса, кг	49	40	30

нижних частот и далее измерить суммарную их дисперсию. В приборе этого класса типа 2020 фирмы «Брюль и Къер» предусмотрено дополнительное преобразование: сглаженное низкочастотное напряжение снова превращается в квадратурные составляющие и формирует отфильтрованное напряжение на частоте сигнала. Тем самым по этому свойству анализатор становится эквивалентен фильтровому анализатору, рассмотренному в п. 1.

Основные технические характеристики сопровождающего фильтра типа 2020 следующие: диапазон частот 10—20 000 Гц; полоса анализа 3,16—10—31,6—100 Гц; разность фаз двух приборов не превышает 1°.

Полная схема анализатора спектра, составленная из приборов фирмы «Брюль и Къер» должна включать гетеродин (типа 1024), следящий фильтр 2020 и регистратор — самописец 2305 с детектором среднеквадратичных значений. Возможно управление двумя следящими фильтрами от одного гетеродина, что обеспечивает измерения взаимного спектра (см. гл. 6). Этим же целям служит наличие двух выходов фильтра — сдвигом фаз 0 и 90°.

4. *Аналоговые анализаторы параллельного действия с постоянной относительной (процентной) полосой пропускания* — это спектрометры, предназначенные для измерения октавных, полуоктав-

ных или третьоктавных спектров в реальном масштабе времени. Прибор этого типа содержит набор параллельно включенных каналов, состоящих из полосового фильтра, детектора среднеквадратичных значений и усредняющей цепи. Выходы этих каналов опрашиваются с большой скоростью коммутатором электромеханического или электронного типа, создающим одновременно пилообразное или ступенчатое напряжение развертки. Последнее обеспечивает горизонтальное отклонение луча ЭЛТ, а вертикальное отклонение луча пропорционально выходным напряжениям коммутируемых каналов, т. е. спектральным уровням исследуемого сигнала. В результате на экране ЭЛТ представляется спектр процесса в реальном масштабе времени.

Один из первых приборов этого класса, созданный в 1935 г., описан в книге Л. Беранека «Акустические измерения» под названием анализатор Фрейштеда. В течение многих лет такие спектрометры выпускались в ряде стран, пока не были вытеснены цифровыми анализаторами.

Последний из аналоговых приборов этого класса фирмы «Брюль и Къер» — спектрометр типа 3347, состоящий из блока третьоктавных фильтров 2130 на диапазон частот 25—20 000 Гц и блока отображения 4710, обладает высокими техническими характеристиками, электронной разверткой и имеет уже ряд элементов цифровых приборов, в частности, кроме аналогового, также и цифровой выход для связи с ЭВМ.

Частоты полосовых фильтров спектрометров — нижняя $f_н$, верхняя $f_в$, средняя $f_0 = \sqrt{f_н f_в}$ и относительная полоса $\Delta f/f_0$ — связаны следующими соотношениями:
для октавных фильтров $f_в = 2f_н$, $f_0 = 1{,}4f_н$, $\Delta f/f_0 = 0{,}7$;
для полуоктавных фильтров

$$f_в = 1{,}41f_н, \quad f_0 = 1{,}2f_н, \quad \Delta f/f_0 = 0{,}34;$$

для третьоктавных фильтров

$$f_в = 1{,}26f_н, \quad f_0 = 1{,}12f_н, \quad \Delta f/f_0 = 0{,}23.$$

Средние частоты, а вместе с ними и все остальные частотные характеристики полос с постоянной относительной шириной выбираются согласно международным рекомендациям ISO/R266 и ГОСТ 12090—66 «Частоты для акустических измерений. Предпочтительный ряд». Для третьоктавных фильтров этот ряд следующий: 1; 1,25; 1,6; 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 8; 10; 12,5; 16 и т. д. Фильтры должны обладать высоким ослаблением в полосе непрозрачности, требования к которому сформулированы в международных рекомендациях IEC 225—1966 и ASAS1.II-1966 класс III: неравномерность в полосе прозрачности $\pm 0{,}25$ дБ и спад характеристики в полосе непрозрачности до 75 дБ с высоким наклоном.

5. *Цифровые анализаторы параллельного действия с постоянной относительной (процентной) полосой пропускания* — спектро-

метры, работающие в реальном масштабе времени, построены на современной элементной базе, отличаются высокими техническими характеристиками, повышенной точностью, стабильностью параметров при сравнительно малых габаритах и массе прибора. Типичным прибором этого класса является спектрометр 2131 («Брюль и Къер») — цифровой третьоктавный частотный анализатор в реальном масштабе времени [4]. Прибор имеет 42 полосовых третьоктавных фильтра на диапазоне частот 1,6—20 000 Гц и 14 октавных фильтров на диапазон 2—16 000 Гц; цифровой детектор среднеквадратичных значений с широким динамическим диапазоном, линейное или экспоненциальное усреднение; запоминающее устройство для хранения мгновенного и измеряемого спектров, режим запоминания максимальных значений; отображение — на экране ЭЛТ в диапазоне 60 дБ; аналоговый и цифровой выходы.

В приборе применены цифровые фильтрация и детектирование сигнала, что приводит к стабильности характеристик прибора и их высокой точности.

6. *Анализаторы спектра параллельного действия с постоянной полосой пропускания* являются узкополосными. Создание комплекта узкополосных полосовых фильтров аналогового типа — практически невыполнимая задача. Создание узкополосных анализаторов параллельного действия стало возможным с использованием элементов цифровой вычислительной техники. Анализатором переходного типа, использующим как принципы цифровой техники, так и методы аналогового спектрального анализа, является анализатор с использованием рециркулятора для транспонирования спектра сигнала. Пример прибора этого класса — анализатор типа 3348 («Брюль и Къер»).

В анализаторе 3348 входной сигнал дискретизуется с частотой $f_д = 3f_в$ и выборки (ординаты) сигнала записываются в память рециркулятора, состоящую из 1200 ячеек. Скорость записи соответствует выбранному поддиапазону анализа от нуля до 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000 или 10 000 Гц. Записанный сигнал считывается с постоянной высокой скоростью $12 \cdot 10^6$ слов/с, которая выше скорости записи (зависящей от верхней частоты сигнала) в $200 \div 4 \cdot 10^5$ раз. В результате частоты выходного сигнала оказываются увеличенными в указанное число раз, верхняя частота считываемого сигнала равна 4 МГц, период повторения сигнала — 40 мс. Этот сигнал анализируется гетеродинным анализатором последовательного действия, имеющим следующие параметры: промежуточная частота 16,25 МГц, частота гетеродина изменяется от 16,27 до 20,27 МГц с периодом 40 мс, согласованным с периодом рециркуляции сигнала. С целью устранения боковых максимумов спектра считанный сигнал может быть умножен на весовую функцию Хэмминга.

Результат анализа усредняется накапливающим сумматором по линейному или экспоненциальному закону. Число ординат спектра равно 400. Число линейных усреднений можно выбрать

от 8 до 1024. Имеется режим запоминания максимальных значений спектра. Предусмотрена возможность запоминания предыдущего спектра и сравнение его с измеряемым спектром путем поочередного показа на экране дисплея (ЭЛТ) блока индикации типа 4710. Результат можно последовательно считывать в цифровой форме с табло путем ручного переключения номера ординаты спектра, либо записать автоматически на самописце типа 2305, либо вывести на ЭВМ в цифровой форме для дальнейшей обработки.

Наличие аналогового анализатора приводит к некоторой нестабильности частотной шкалы анализатора, поэтому был произведен переход на полностью цифровую схему прибора.

7. *Цифровой анализатор параллельного действия с постоянной* полосой пропускания представлен моделью 2130 («Брюль и Къер»).

В приборе осуществляется цифровое быстрое преобразование Фурье и усреднение спектра или запоминание его максимальных значений. Анализ выполняется в реальном масштабе времени, результат представляется на экране ЭЛТ и может быть выведен на самописец уровня 2305 («Брюль и Къер») или двухкоординатный 2308, а также передан на ЭВМ через устройство сопряжения со стандартом МЭК 625-1 и ИИЭР 488. Основные параметры анализатора следующие:

— запоминается и обрабатывается 1024 дискретных значения процесса;

— результат представляется в виде 400 ординат спектра, т. е. ширина полосы анализа составляет 0,25 % верхней частоты диапазона анализа, предусмотрена весовая функция Хеннинга;

— имеется 11 поддиапазонов анализа: 0—10, 0—20, 0—50 Гц и т. д. до 0—20 кГц в последовательности 1—2—5;

— анализ в реальном масштабе времени без потери информации осуществляется до диапазона частот 0—2 кГц;

— предусмотрены режимы линейного (до 2048 спектров) и экспоненциального усреднения и режим запоминания максимальных значений спектров, вычисляемых последовательно по 1024 выборкам без перекрытия (последнее может приводить к пропуску истинного максимального значения, так как зависимость спектральных уровней нестационарного процесса во времени представляется одним спектральным отсчетом за время 1024 входных выборки);

— на экране ЭЛТ представляется (по выбору) мгновенный или усредненный спектр, спектр максимальных значений, разность двух спектров, а также осциллограмма сигнала, занесенного в память прибора, с динамическим диапазоном 80, 40, 20 дБ; на экране высвечиваются также максимальные значения уровня и частоты выбранного диапазона анализа, частота и уровень ординаты спектра, выбранной с помощью светового визира;

— имеется дополнительное запоминающее устройство для хранения спектра, полученного при предыдущем анализе или введенных извне спектральных уровней, предусмотрен режим сравнения двух спектров путем их поочередного представления на экране.

Дальнейшим развитием спектральных анализаторов является прибор 2033 («Брюль и Къер»), который обеспечивает те же параметры анализа, что и прибор 2031, но имеет и дополнительные устройства и особенности:

— емкость запоминающего входного устройства 10 240 дискретных значений;

— спектр представляется 400 значениями либо сглаженным во всем заданном диапазоне частот, либо на участке ±200 точек относительно выбранной частоты спектра, состоящего из 4000 ординат;

— предусмотрен режим поочередного последовательного анализа участков по 1024 дискретным значениям из 10 240 значений, накопленных в памяти прибора;

— спектр представляется в логарифмическом масштабе (40 или 80 дБ) или в линейном, предусмотрено автоматическое усреднение в режиме поочередного анализа;

— предусмотрен режим слежения за изменяющимися по частоте дискретными составляющими при использовании умножителя частоты 1901 этой же фирмы.

5.8. Выбор параметров анализаторов при спектральном анализе процессов

Выбор типа анализатора, режима его работы и параметров спектрального анализа производится, исходя из следующих соображений.

Параметры последовательного анализа. Приборы этого типа просты, применимы для анализа стационарных процессов, но последовательный анализ занимает много времени. Поэтому его рекомендуется применять при небольшом объеме данных, подлежащих анализу. Непосредственный последовательный анализ процессов удается редко осуществить, чаще записывают сигнал на измерительный магнитофон при длительности записи 3—5 мин, а затем производят последовательный спектральный анализ. Таким образом удается анализировать и нестационарные процессы с медленной нестационарностью.

Далее параметры анализа выбирают следующим образом.

Постоянная времени интегратора $T_и$ определяет случайную погрешность спектрального анализа вследствие флюктуаций показаний анализатора в соответствии с (3.10), (5.17) и рис. 5.4, проявляющихся при анализе случайных и смешанных процессов. Чтобы на фоне флюктуирующего уровня сплошного спектра обеспечить выделение дискретных составляющих, превышающих на 3 дБ уровень сплошного спектра, достаточно потребовать, чтобы $\delta_ш \leqslant 0{,}1$. Такое значение флюктуаций обеспечивает точность измерения спектра, достаточную для решения большинства акустических задач, в то же время повышение требований к точности определения спектра может существенно снизить допустимую скорость анализа.

Скорость последовательного анализа должна выбираться максимально возможной для получения малого времени анализа. В анализаторах гармоник, не имеющих интегратора, при анализе спектров периодических процессов скорость развертки спектра выбирается исходя из допустимых искажений уровней дискретных составляющих и ошибок в определении их частот. Допустимую скорость анализа рассчитывают по формуле $\gamma = 10\mu\,\Delta f^2$ Гц/с, где параметр μ, характеризующий искажения частотной характеристики фильтра в динамическом режиме, выбирают практически в пределах 0,1—0,5. В этом случае происходит уменьшение высоты максимума дискретной составляющей на μ^2. Увеличение полосы пропускания при этом составит μ^2 при одиночном контуре, $0{,}48\mu^2$ — при колоколообразной характеристике и $25\mu^2$ — для полосового фильтра высокой прямоугольности [44, 68].

В анализаторе спектра среднеквадратичных значений кроме фильтра имеется вторая цепь, обладающая инерционностью, это — интегратор (усреднитель). Так как должно выполняться условие $T_и \gg \tau_ф = 1/\Delta f$, то интегратор оказывается наиболее инерционным звеном анализатора, ограничивающим скорость анализа.

Для оценки допустимой скорости анализа смешанного спектра учтем, что при изменении частоты настройки фильтра вблизи дискретной составляющей на выходе детектора появится импульс постоянного напряжения, повторяющий по форме частотную характеристику фильтра. Если частотная характеристика близка к прямоугольной, то появится П-импульс длительностью $t_и = \Delta f/\gamma$. Вследствие инерционности интегратора максимальное значение импульса будет ослаблено:

$$u_{м.\,вых} = u_{вх}\left(1 - e^{-\frac{t_и}{RC}}\right) = u_{вх}\left(1 - e^{-\frac{\Delta f}{\gamma RC}}\right).$$

Относительное ослабление

$$\Delta_и = \frac{u_{вх} - u_{м.\,вых}}{u_{вх}} = e^{-\Delta f/\gamma RC} \qquad (5.45)$$

этого импульса, характеризующего уровень дискретной составляющей, не будет превышать 1 дБ (т. е. $\Delta S \leqslant 0{,}13$) при условии $\Delta f/\gamma RC = 2$, откуда скорость анализа не должна превышать значения

$$\gamma = \Delta f/2RC. \qquad (5.46)$$

Реальная ошибка при анализе смешанного спектра меньше ΔS, так как в этом случае ΔS определяет ослабление интегратором лишь разности уровней между дискретной составляющей и сплошной частью спектра.

При анализе сплошного спектра отдельные узкополосные максимумы спектра будут воспроизводиться так же, как и дискретные составляющие. Группа максимумов, расположенных на малых интервалах $\Delta F < 3\Delta f$, сгладится вследствие конечности полосы пропускания фильтра Δf. Более редко расположенные максимумы

(при $\Delta F > 3\Delta f$) воспроизводятся фильтром и будут незначительно сглажены интегратором. Очевидно, что их искажения практически не превысят ослабления ΔS дискретных составляющих, определяемого выражением (5.45). При отсутствии дискретных составляющих и гладкой форме спектра скорость анализа может быть существенно увеличена.

На основе приведенных выше соотношений, определяющих выбор постоянной времени RC-интегратора, составлена номограмма,

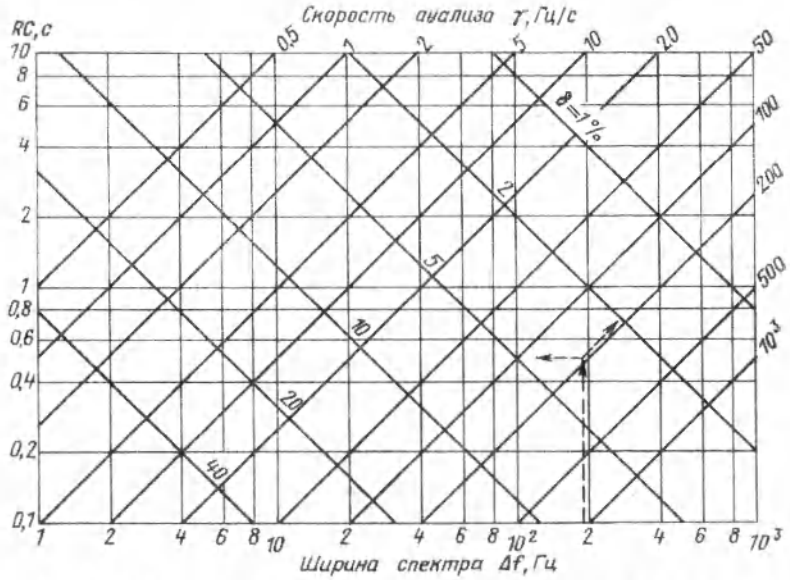

Рис. 5.8. Номограмма для выбора параметров анализатора последовательного действия, содержащего фильтр с высокой степенью прямоугольности и линейный детектор, при ослаблении уровня дискретных составляющих $\Delta S < 0{,}12$.

изображенная на рис. 5.8. Если применяются другие типы интегратора и детектора, то следует вводить поправку α к среднеквадратичным значениям флюктуаций, которая приведена в 5.3. Номограмма на рис. 5.8 позволяет также выбрать скорость анализа γ из условия, что искажения дискретных составляющих не должны превышать 1 дБ. При изменении скорости анализа погрешность может быть найдена из рис. 5.9, где произведение γRC выражено в долях Δf.

Анализатор типа С4-48, например, при полосе анализа $\Delta f = 150$ Гц требует (см. рис. 5.8) применения самописца с постоянной времени $RC = 0{,}8$ с, чтобы $\delta = 3—4\ \%$. В результате анализа могут быть раздельно выявлены на фоне сплошного спектра дискретные составляющие с интервалом между ними $\Delta F \approx 3\Delta f = 450$ Гц. При этом скорость анализа не должна превышать $\gamma =$

$=100$ Гц/с. Для анализа спектра в звуковом диапазоне частот (0,1—10 кГц) потребуется менее минуты.

Если тот же прибор переключить на узкую полосу анализа ($\Delta f=5$ Гц), то достигается разрешающая способность $\Delta F=15$ Гц, а параметры анализа должны быть следующими: $RC=3$ с при $\delta=0{,}1$; $\gamma=1$ Гц/с при $\Delta=0{,}1$; продолжительность анализа составит около двух часов, что неприемлемо для практики. Отсюда видно, как осторожно необходимо подходить к выбору параметров анализатора спектра. При узкополосном анализе можно получить приемлемое время измерений, лишь существенно поступив-

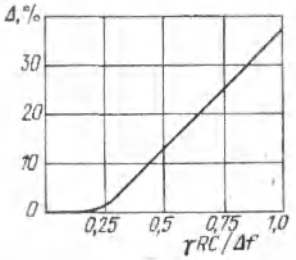

Рис. 5.9. Относительное ослабление ΔS дискретных составляющих RC-интегратором анализатора с полосой анализа Δf при скорости анализа γ.

шись точностью результата, либо применяя переменную скорость анализа: малую на участках диапазона (обычно на низких частотах), где, исходя из физических соображений, можно ожидать наличия дискретных составляющих, и более высокую — на остальных участках спектра, где будет зафиксирован поэтому лишь уровень сплошного спектра.

Если при выбранных выше параметрах узкополосного анализатора вести анализ со скоростью 150 Гц/с, как в предыдущем случае, то дискретные составляющие на спектрограмме не будут воспроизводиться, а огибающая сплошного спектра выявится с той же разрешающей способностью, что и при полосе 150 Гц. Однако флюктуации на выходе анализатора будут больше: 10 % вместо 3—4 %. Таким образом, неоправданное применение узкой полосы и произвольный выбор скорости анализа или других параметров анализатора приводит лишь к ухудшению результата либо к существенному увеличению продолжительности анализа.

Если далее тот же анализатор применять для анализа дискретного спектра периодического процесса, то при полосе анализа $\Delta f=5$ Гц и допустимом ослаблении дискретной составляющей $\Delta S=0{,}1$ (чему соответствует $\mu=\sqrt{\Delta S}=0{,}3$), можно вести анализ со скоростью $\gamma=10\mu\,\Delta f^2=110$ Гц/с, т. е. в сто раз большей, чем при анализе смешанного процесса. Чтобы перевести прибор из режима работы анализатора спектра в режим анализатора гармоник достаточно одновременно с увеличением скорости анализа увеличить быстродействие самописца, постоянная времени которого при анализе гармоник не должна превышать постоянной времени (времени установления $\tau_ф=1/\Delta f$) фильтра анализатора.

Параметры анализаторов параллельного действия. Эти приборы, в отличие от анализаторов последовательного действия, работают в реальном масштабе времени и поэтому незаменимы при анализе нестационарных процессов как в режиме усреднения (при медленной нестационарности), так и в режиме запоминания максимальных значений (при быстрой нестационарности). Применение этих анализаторов оправдано также при большом объеме анализируемых данных и в случае стационарных случайных процессов. Реальный масштаб спектрального анализа делает более свободным выбор параметров анализа, состоящий в следующем.

Узкополосный анализ одного процесса обычно производят в нескольких (3—5) поддиапазонах частот. При этом на низких частотах получают высокое разрешение ($N_{сп}$ ординат спектра перекрывают малый частотный диапазон 0—$f_в$), на высоких же частотах разрешение падает (те же $N_{сп}$ ординат спектра приходятся на большой диапазон частот). Число усреднений N выбирают согласно рис. 5.6 так, чтобы получить $\delta_ш < 0{,}1$. Не рекомендуется выбирать $N < 4$ ввиду большой ширины доверительного интервала в этом случае. Усреднение выбирают линейное для записи спектра на самописце и экспоненциальное — в случае наблюдения спектра на экране дисплея. Постоянная времени или скорость пера самописца при записи спектра должна выбираться аналогично правилам последовательного анализа, по графику, приведенному на рис. 5.9. Обычно для данного анализатора скорость записи γ задана, а определяют постоянную времени самописца.

Несмотря на возможность анализа в реальном времени, часто прибегают к записи процессов на магнитофон. Дело в том, что в каждой измерительной точке приходится определять несколько спектров в различных поддиапазонах частот, что в несколько раз увеличивает общую продолжительность спектрального анализа. Запись на магнитофон позволяет сократить продолжительность эксперимента и перенести основной спектральный анализ на последующее время. При этом рекомендуется на один из каналов магнитофона записывать пилот-сигнал стабильной частоты, позволяющий обеспечить высокую точность данных при анализе магнитофонных записей. Продлжительность записи должна быть не менее 3—5 мин. Непосредственно во время эксперимента рекомендуется выполнять третьоктавный спектральный анализ в широком диапазоне частот и узкополосный анализ в одном из наиболее информативных частотных диапазонах. При воспроизведении записи выполняют поисковый анализ в разных диапазонах частот при большом числе усреднений N, используя всю длительность записи, чтобы погрешность была $\delta_ш < 0{,}1$.

В случае необходимости более детального анализа участка диапазона, например, с целью определения структуры дискретной составляющей, производят более узкополосный анализ с меньшим числом усредняемых спектров.

Работа в реальном масштабе времени позволяет получить боль-

шой объем данных, требующих проведения трудоемких рутинных операций: приведения данных к абсолютному уровню, усреднения спектров, считывания их параметров, сравнения спектров с нормой или между собой, расчета вторичных характеристик по измеренным первичным данным и т. п. Эти операции целесообразно выполнять на ЭВМ, для чего и предусматривается вывод данных с анализатора спектра в цифровой форме и ввод их в ЭВМ.

5.9. Спектральный анализ при частотных преобразованиях процессов

Преобразования частотных характеристик процессов перед их спектральным анализом позволяют существенно повысить разрешающую способность и другие параметры спектрального анализа

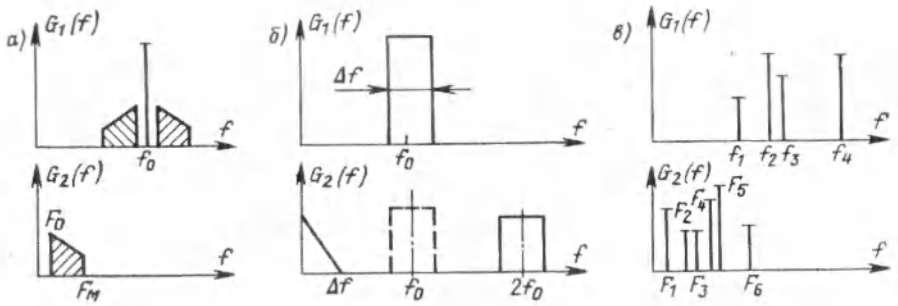

Рис. 5.10. Преобразования спектров процессов при детектировании: модулированного гармонического колебания (*а*), полосы шума (*б*) либо суммы дискретных составляющих (*в*). $G_1(f)$, $G_2(f)$ — спектры на входе и выходе детектора соответственно.

по сравнению с параметрами, достигаемыми при прямом использовании анализаторов спектра. Рассмотрим основные виды таких преобразований.

Детектирование. Это преобразование позволяет выделить модулирующую функцию амплитудно-модулированного процесса как при гармонической, так и при шумовой несущих

$$|\eta(t)| = |(1 + m \sin \Omega t)\, \xi^*(t)| = E_0'(1 + m \sin \Omega t). \qquad (5.47)$$

Детектор выбирается линейным (детектор средних значений), ФНЧ должен пропускать интересующий исследователя диапазон частот. Рассмотрим преобразования спектров различных сигналов (рис. 5.10).

При детектировании амплитудно-модулированного сигнала с гармонической несущей (см. рис. 5.10, *а*) выделяется спектр огибающей в области низких частот, который может быть измерен с бо́льшей разрешающей способностью, чем спектр боковых полос несущей. Выигрыш в разрешении по частоте определяется

отношением частот $f_0/F_м$, где f_0 — несущая, $F_м$ — максимальная модулирующая частота.

Детектирование полосы шума (см. рис. 5.10, *б*) приводит к появлению низкочастотного сигнала с искаженным спектром, а также максимумов спектра на удвоенной частоте сигнала ($2f_0$). Максимум спектра сигнала на частоте f_0 отсутствует при двухполупериодном детектировании и имеет место при однополупериодном детектировании. Следовательно, детектирование процессов со сплошным спектром не может быть использовано при спектральном анализе процессов.

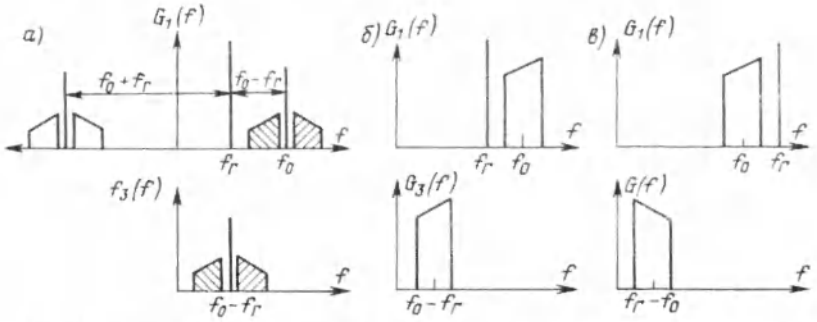

Рис. 5.11. Преобразования спектров процессов при гетеродинировании: амплитудно-модулированного гармонического колебания (*а*), полосы шума при расположении частоты гетеродина ниже спектра процесса (*б*) или выше его (*в*).
$G_1(f)$, $G_3(f)$ — спектры на входе и выходе смесителя; $f_г$ — частота гетеродина.

Детектирование суммы гармонических колебаний с некратными частотами (f_1, f_2, f_3, f_4 на рис. 5.10, *в*) приводит к искажению спектра — появлению сигналов с суммарными частотами (не показаны на рис. 5.10, *в*) и с разностными частотами

$$(f_1 - f_2 = F_2,\ f_1 - f_3 = F_3,\ f_1 - f_4 = F_6,\ f_2 - f_3 = F_1,\ f_2 - f_4 = F_5,$$
$$f_3 - f_4 = F_4$$

на рис. 5.10, *в*), число которых равно числу сочетаний из n элементов по два. Кроме случая двух-трех дискретных составляющих, расшифровка спектра разностных частот затруднена, поэтому детектирование сигналов с линейчатым спектром также неприменимо для улучшения спектрального анализа.

Гетеродинирование. Это преобразование производится в смесителе, на один из входов которого подается сигнал, на второй — напряжение генератора (гетеродина). Расположив частоту гетеродина несколько ниже спектра частот сигнала, получим на выходе гетеродина разностный (по частотам) и суммарный спектры (рис. 5.11, *а*). С помощью ФНЧ выделяется лишь низкочастотный разностный спектр, анализ которого производится анализатором параллельного действия в низкочастотном его диапазоне, чем и

достигается выигрыш в разрешающей способности порядка $\Delta f/f_0$ раз, где Δf — ширина спектра исследуемого процесса. Модулированный сигнал при этом не детектируется, происходит лишь уменьшение частоты несущей и соответственно боковых полос спектра.

Гетеродинирование полосы шума (рис. 5.11, *б*) при расположении частоты гетеродина ниже полосы сигнала приводит к сдвигу исследуемого спектра вниз по шкале частот при сохранении формы спектра. Если же расположить частоту гетеродина выше полосы частот сигнала, то спектр также сдвигается вниз, но при этом инвертируется, перевертывается, его низкие и высокие частоты меняются местами (рис. 5.11, *в*), поэтому такого выбора частоты гетеродина рекомендуется избегать. Очевидно, что те же свойства получим и при преобразовании участка линейчатого спектра.

Математически операция гетеродинирования описывается как операция перемножения процесса на сигнал гетеродина

$$\eta(t) = \xi(t) \sin \omega t. \tag{5.48}$$

Тогда спектр произведения представляется сверткой спектров сомножителей

$$G_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega') \delta(\omega_0 - \omega') \, d\omega', \tag{5.49}$$

из которой путем фильтрации избирается одно из слагаемых.

Рассмотрение преобразования спектров при гетеродинировании процесса позволяет сформулировать следующие условия неискаженного переноса его спектра:

1) при необходимости подробного исследования узкого участка спектра широкополосного процесса, его вначале выделяют полосовым фильтром (например, любым анализатором последовательного действия);

2) частоту гетеродина $f_г$ требуется располагать, как правило, ниже выделенной полосы частот сигнала, возможно ближе к последней, при этом вне полосы, ниже частоты гетеродина, уровни спектра сигнала должны лежать на D, дБ, ниже уровней в выделенной полосе, где D — динамический диапазон спектрального анализа.

Истинные частоты спектра процесса находят, добавляя к частотам измеренного спектра значение частоты гетеродина.

Цифровое гетеродинирование. Если выделенный участок спектра сигнала от $f_н$ до $f_н+\Delta f_ф$ сгетеродинирован вниз, то, согласно теореме Котельникова, для его анализа достаточно выбрать частоту дискретизации равной $f_д=2\Delta f_ф$ вместо $2(f_н+\Delta f_ф)$, что позволяет выполнить анализ этого участка спектра с высоким разрешением. Можно совместить операции гетеродинирования и преобразования сигнала в цифровую форму, применив метод цифрового гетеродинирования [75], при котором с выделенным

участком спектра взаимодействует одна из гармоник частоты дискретизации.

Практическая реализация метода цифрового гетеродинирования может быть осуществлена одним из следующих способов. Если на входе анализатора спектра отсутствует ФНЧ или он может быть отключен, то вместо него ставят полосовой фильтр, с помощью которого выделяют заданный участок спектра сигнала шириной $\Delta f_ф$. Частотный диапазон анализа выбирают минимально возможным из условия $f_{в.а} > \Delta f_ф$, где $f_{в.а}$ — верхняя частота диапазона анализа. Частоту дискретизации выбирают так, чтобы в частотный диапазон анализа $0 \div f_{в.а}$ попадали разностные частоты $f_с - nf_д$, образованные лишь одной из гармоник частоты дискретизации.

При выборе $f_д$ такой, что гармоника nf лежит ниже частот сигнала, $n_k f_д < f_н$ при дополнительном условии $(n_k + {}^1/_2) f_д > f_н + \Delta f_ф$, получим неискаженный прямой спектр; истинные частоты сигнала находят по формуле $f_с = n_k f_д + f_н$, где $f_н$ — частоты, измеренные анализатором. При $n_k f_д > (f_н + \Delta f_ф)$ и условии $f_н > (n_k - {}^1/_2) f_д$, получают обращенный спектр, а истинные значения частот сигнала определяют по формуле $f_с = n_k f_д - f_н$. Максимально возможное значение n_k определяется целой частью отношения $[f_н/\Delta f_ф]$.

Если же входной фильтр (ФНЧ) отключить не представляется возможным, то применяют иной способ: участок спектра шириной $\Delta f_ф$ также отфильтровывают и подают на вход анализатора, диапазон анализа выбирают по обычному правилу, чтобы $f_д \geqslant 2f_0$, где f_0 — средняя частота полосы сигнала, но вместо внутреннего генератора частоты дискретизации используют внешний генератор, частоту которого выбирают из условия пятой теоремы Котельникова $f_д \geqslant 2\,\Delta f_ф$. Истинные значения частот измеряемого спектра находят по формулам, приведенным выше.

Транспонирование. Эта операция осуществляется путем записи процесса в запоминающем устройстве со скоростью v_1 и воспроизведении — со скоростью v_2, в результате чего происходит умножение частот спектра на заданное число $K_т = v_2/v_1$, называемое коэффициентом транспонирования.

Простейший способ транспонирования — воспроизведение магнитофонной записи со скоростью v_2, отличающейся от скорости записи v_1.

При $v_2 > v_1$ происходит сокращение временного масштаба и увеличение частот спектра

$$\eta_т(t) = \xi(t/K_т); \tag{5.50}$$

$$G_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t/K_т)\, e^{-j\omega t}\, dt = G_\xi(K_т\omega). \tag{5.51}$$

При магнитофонной записи можно получить $K_т$ от нескольких единиц до десятков. Большие значения $K_т$ достигаются при применении цифровых запоминающих устройств, например, блока 7502

(«Брюль и Къер»), рассчитанного на запоминание до 10 000 значений процесса. Транспонирование вверх ($k_т \gg 1$) приводит к сокращению продолжительности анализа в $k_т$ раз, что существенно улучшает параметры последовательного метода анализа и даже позволяет на его основе организовать анализ в реальном масштабе времени, как это сделано в приборе 3348, описанном выше. Транспонирование вниз может потребоваться в тех случаях, когда необходимо выполнить анализ высокочастотного сигнала при наличии лишь низкочастотного анализатора или применить низкочастотный АЦП на входе ЭВМ для исследования высокочастотного процесса.

5.10. Вклад источника в суммарный спектр множества источников

Измерения спектров вибраций отдельного механизма, системы или излучаемого ими шума является простой задачей, сводящейся к правильному использованию измерительного тракта и спектраль-

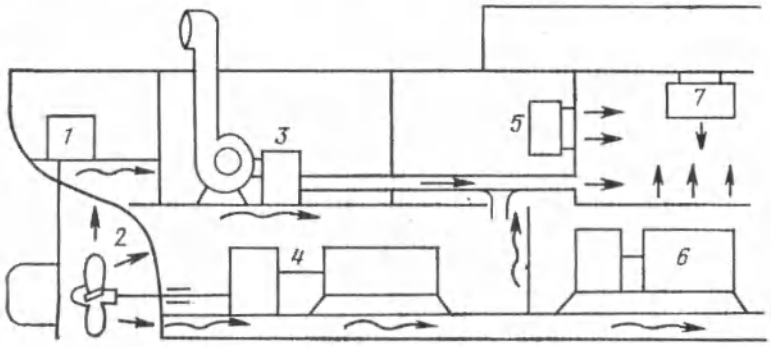

Рис. 5.12. Схема формирования суммарного спектра шума на судне при работе множества агрегатов и механизмов (*1—7*).

→ распространение шума по среде; ⇝ распространение вибраций по корпусным конструкциям.

ного анализатора и правильной установке датчиков согласно действующим рекомендациям и руководствам. Более сложные задачи возникают, когда требуется измерить спектр шума отдельного источника при одновременной работе других источников. Такие ситуации складываются при выполнении исследований по снижению шумности крупных промышленных установок, агрегатов, снижению шума в помещениях судна, заводских цехах и т. п.

Например, шум в помещениях судна [11, 25, 65] обусловлен, как правило, действием множества источников (рис. 5.12): главным двигателем со вспомогательными механизмами, электроэнергетическим комплексом механизмов, различными корабельными механизмами, системами и оборудованием (насосами, преобразо-

вателями, компрессорами, помпами, рулевыми и другими приводами, вентиляторами, кондиционерами и т. п.). Колебательная энергия излучается непосредственно механизмами, распространяется по трубопроводам, а также в виде вибраций по корпусным конструкциям. Кавитационный шум гребного винта проходит наиболее сложный путь: возбуждает вибрации корпусных конструкций, по которым энергия распространяется в кормовые помещения судна. Таким образом, в каждом помещении судна образуется акустическое поле, энергия которого создается множеством источников в результате распространения колебаний различными путями. Поочередное включение отдельных элементов таких сложных систем может оказаться нежелательным (например, чтобы не нарушать производственный процесс), некорректным (если работа отдельного элемента установки происходит в другом режиме, чем при работе в комплексе) или невозможным (если элементы одного агрегата сидят на общей оси и т. п.). Поэтому возникает необходимость в специальных методах выявления шумов данного источника при одновременной работе множества других источников. Чтобы сформулировать требования, предъявляемые к таким методам измерений, исследуем закономерность формирования суммарного спектра множества источников.

При большом количестве источников $N_и$ целесообразно применить вероятностные методы для описания результата суммирования шумов в каждой узкой (например, третьоктавной) полосе частот:

$$\sigma_\Sigma^2 = \sum_i n_j \sigma_j^2 = N_и \sum (n_j/N_и)\, \sigma_j^2, \tag{5.52}$$

где n_i — число источников, характеризуемых шумностью σ_i^2. Вводя плотность распределения шумности источников $w(x) = (n_i/N_и)\,\delta(x - x_i)$ и переходя от суммирования (5.52) к интегрированию, получим результат

$$\sigma_\Sigma^2 = N_и \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, x^2\, dx = N_и M_2, \tag{5.53}$$

показывающий, что суммарная интенсивность определяется числом источников $N_и$ и моментом второго порядка M_2 плотности распределения шумности источников.

Исследуем влияние формы функции распределения шумности источников на результат суммирования шумов. При равномерном непрерывном распределении шумности от A до $P_м$ имеем

$$M_2 = \frac{1}{3}(P_м^2 + P_м A + A^2). \tag{5.54}$$

Так как $P_м \gg A$, то можно полагать $A = 0$ и в дальнейшем рассматривать распределения, начинающиеся от нулевых значений. Очевидно, что наибольшее влияние на результаты должны оказы-

вать наиболее шумные источники. Найдем область значения $x_{гр}$, $P_м$ шумности источников, вносящих 50 % вклада в суммарную энергию поля, т. е. значение $x_{гр}$, при котором

$$I_2 = N_и \int_{x_{гр}}^{P_м} w(x)\, x^2\, dx = \frac{1}{2}\sigma_\Sigma^2 = \frac{1}{2} N_и M_2. \qquad (5.55)$$

Для равномерного распределения шумности

$$I_2/\sigma_\Sigma^2 = \frac{1}{M_2} \int_{x_{гр}}^{P_м} (x^2/P_м)\, dx = (P_м^3 - x_{гр}^3)/3P_м. \qquad (5.56)$$

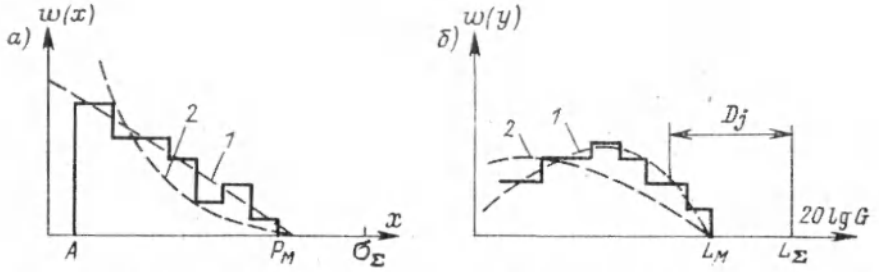

Рис. 5.13. Гистограммы распределения шумности источников в линейном (*а*) и логарифмическом (*б*) масштабах.

1 — треугольное распределение, $n=1$; *2* — распределение при $n=2$.

Приравнивая результат $^1/_2$, получим $x_{гр} = (P_м^3/2)^{1/3} = 0{,}8P_м$. Следовательно, лишь 20 % источников излучают половину всей суммарной мощности шума. Здесь, в отличие других вероятностных задач, результат определяется лишь правой частью функции распределения, а ход функции $w(x)$ при $x \to 0$ почти не оказывает влияния.

Для одностороннего треугольного распределения, имеющего характеристики

$$w(x) = 2\,\frac{P_м - x}{P_м^2}; \quad M_2 = P_м^2/6, \qquad (5.57)$$

аналогичным образом находим $x_{гр} \approx P_м/2$, т. е. половина излучаемой мощности приходится на 25 % источников с шумностью $P_м/2 < P_i < P_м$.

В общем случае распределение с убывающей плотностью источников, шумность которых ограничена значением $P_м$, может быть представлено функцией (рис. 5.13)

$$w(x) = \frac{n+1}{P_м^{n+1}}(P_м - x)^n, \qquad (5.58)$$

а его момент второго порядка равен

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, x^2\, dx = \frac{2}{(n+2)(n+3)} P_{\text{м}}^2. \qquad (5.59)$$

Переходя к экспериментальным значениям уровня шумности в децибелах, необходимо преобразовать функцию распределения к логарифмическому масштабу по оси абсцисс $y = 20 \lg (x/P_{\text{м}})$. Воспользовавшись известным правилом [36] $w(y) = w(x)/(dy/dx)$, получим в общем случае

$$w(y) = \frac{n+1}{8{,}6} (1-z)^n z; \quad z = \frac{x}{P_{\text{м}}} = 10^{0{,}05y}. \qquad (5.60)$$

В частности, это приводит к следующим функциям:

$$n = 0; \quad w(x) = 0{,}116 \cdot 10^{0{,}05y};$$
$$n = 1; \quad w(x) = 0{,}23\left(1 - 10^{0{,}05y}\right) \cdot 10^{0{,}05y};$$
$$n = 2; \quad w(x) = 0{,}35\left(1 - 10^{0{,}05y}\right)^2 \cdot 10^{0{,}05y}.$$

В логарифмическом масштабе функция распределения имеет максимум при $z = x/P_{\text{м}} = 1/(n+1)$, т. е. при $n = 1$, 2, 3 и т. д., абсциссы максимума равны —6 дБ, —10 дБ, —12 дБ соответственно. Это свойство может быть использовано для идентификации экспериментальной кривой и соответствующего теоретического распределения. Практически абсцисса максимума лежит в пределах от —6 до —12 дБ, чему соответствует теоретическая функция распределения с параметрами $n = 1 \div 3$.

Отсюда эмпирическое соотношение между суммарным уровнем шума и шумностью источника можно записать в виде

$$\sigma_\Sigma = P_{\text{м}} \sqrt{\frac{2N_{\text{и}}}{(n+2)(n+3)}} = (0{,}3 \div 0{,}4)\, P_{\text{м}} \sqrt{N_{\text{и}}}. \qquad (5.61)$$

Если принять, что число источников $N_{\text{и}} = 100$, то получим $\sigma_\Sigma \approx \approx 3P_{\text{м}}$, т. е. суммарная мощность лежит выше $P_{\text{м}}$ на 10 дБ.

При определении роли отдельных источников в формировании суммарного акустического шума важно знать не абсолютные значения спектральных уровней, создаваемых каждым из источников, а значимость последних в акустическом поле. Такой относительной характеристикой является вклад источника

$$d_i(\omega) = \frac{\sigma_i(\omega)}{\sigma_\Sigma(\omega)} = \frac{\sigma_i(\omega)}{\sqrt{\sum_i \sigma_i^2(\omega)}}, \qquad (5.62)$$

где $\sigma_i(\omega)$, $\sigma_\Sigma(\omega)$ — среднеквадратичное значение звукового давления, создаваемого i-м источником, и суммарного звукового давления соответственно.

В логарифмических величинах вклад определяется следующим образом:

$$D_i(\omega) = 20 \lg d_i(\omega) = P_i^{(дБ)}(\omega) - P_\Sigma^{(дБ)}(\omega), \qquad (5.63)$$

где $P_i^{(дБ)}(\omega) = 20 \lg \sigma_i(\omega)/P_0$; $P_\Sigma^{(дБ)}(\omega) = 20 \lg \sigma_\Sigma(\omega)/P$.

Вклад источников по энергии равен $d_i^2(\omega) = \sigma_i^2(\omega)/\sigma_\Sigma^2(\omega)$. При переводе в логарифмический масштаб получим то же численное значение, что и в (5.62), так как $10 \lg d_1^2(\omega) = 20 \lg d_i(\omega)$.

Вклады источников обладают следующими свойствами:

Рис. 5.14. Определение вкладов в третьоктавных полосах частот для источников, имеющих дискретные составляющие.

1 — уровни суммарного третьоктавного спектра; *2* — узкополосный спектр суммарного процесса.

1) определяют изменение уровня суммарного шума при включении или выключении источника

$$\Delta_i(\omega) = 10 \lg \left[1 - 10^{0,1 D_i}\right]; \qquad (5.64)$$

2) могут энергетически суммироваться и тогда суммарное значение вклада нескольких источников определяет собой то изменение уровня суммарного шума, которое произойдет при их совместном включении (выключении) в соответствии с (5.64).

3) могут быть прямо определены лишь в случае непосредственных измерений спектра шума отдельного источника со сплошным спектром, при совместной работе источников шума прямые измерения их вкладов невозможны;

4) значение вклада источника дискретной составляющей в широкую, например, третьоктавную полосу частот можно оценить (рис. 5.14) путем непосредственных измерений как разность уровня дискретной составляющей данного источника и суммарного уровня в третьоктавной полосе анализа.

Из свойств вклада одного источника в суммарный шум при большом числе источников (несколько десятков) следует, что для выявления основных источников, определяющих собой от 50 до 75 % излучаемой акустической энергии, необходимо применять такие методы выявления шума данного источника и определения его вклада, которые обеспечивают определения вкладов источников в динамическом диапазоне от 0 до —(10—15) дБ.

Глава 6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И ИЗМЕРЕНИЯ ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

6.1. Погрешности и параметры аппаратурного корреляционного анализа

Аппаратурный корреляционный анализ чаще всего основывают на выражениях для корреляционной функции

$$R_{\xi}^{*}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\xi(t)\,\xi(t-\tau)\,dt \tag{6.1}$$

и взаимной корреляционной функции

$$R_{\xi\eta}^{*}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\xi(t)\,\eta(t-\tau)\,dt, \tag{6.2}$$

которые отличаются от строгого определения этих характеристик стационарных и стационарно связанных процессов отсутствием условия $T\to\infty$, что приводит к появлению случайной ошибки измерений. Процесс экспериментального аппаратурного определения корреляционных функций в общем случае описывается следующими выражениями:

— для корреляционной функции

$$R_{\xi}^{*}(t',\ \tau)=\int_{-\infty}^{t'}\xi(t)\,\xi(t-\tau)\,h(t'-t)\,dt,\quad \overline{\xi(t)}=0; \tag{6.3}$$

— для функции взаимной корреляции

$$R_{\xi\eta}^{*}(t',\ \tau)=\int_{-\infty}^{t'}\xi(t)\,\eta(t-\tau)\,h(t'-t)\,dt,\quad \overline{\eta(t)}=0. \tag{6.4}$$

Эти функции отличаются наличием весовой функции $h(t)$ усредняющей цепи (интегратора). Для идеального интегратора функция веса имеет вид

$$h(t)=\begin{cases}1/T, & 0\leqslant t\leqslant T;\\ 0, & t<0,\ t>T,\end{cases} \tag{6.5}$$

а выражения (6.3) и (6.4) совпадают с (6.1) и (6.2).

В физически реализуемых системах длительность импульсной переходной характеристики $h(t)$ интегратора (его память) конечна, что и определяет случайные погрешности измерений.

Развитие принципов корреляционного анализа привело к использованию и других определений корреляционной функции. В соответствии с выражениями (6.1) и (6.2) простейший коррелятор (рис. 6.1) должен содержать блок задержки времени, перемножитель и усредняющую цепь. Центрирование процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (устранение постоянной составляющей) обычо производить не требуется, так как в акустике $\overline{\xi(t)}=0$, $\overline{\eta(t)}=0$ вследствие использования усилителей переменного тока перед коррелятором. Блок переменной задержки включается в первый канал для изме-

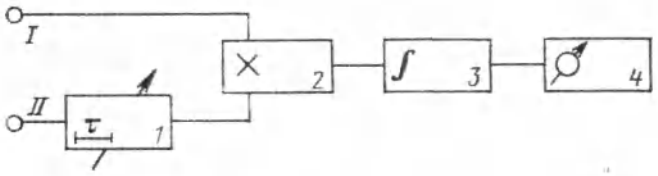

Рис. 6.1. Схема коррелятора.

1 — блок задержки; *2* — умножитель; *3* — интегратор; *4* — индикатор.

рения корреляции при отрицательных задержках и во второй канал — при положительных задержках.

Измеритель корреляции отличается лишь тем, что на клеммы *I* и *II* должен подаваться один и тот же сигнал $\xi(t)$, в то время как при измерении взаимной корреляции на входы *I* и *II* подаются различные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Остановимся далее на выборе параметров корреляционного анализа.

Флюктуации на выходе коррелятора. Флюктуации обусловлены конечной длительностью весовой функции интегратора. Их оценку можно произвести следующим образом.

Очевидно, что произведение двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t-\tau)$ представляет собой также случайный процесс. Постоянная составляющая этого произведения пропорциональна искомому значению корреляционной функции при данном τ и должна быть выделена путем усреднения (6.3) или (6.4) произведения. Математические ожидания (средние по множеству) оценок $\overset{*}{R}_{\xi}(t', \tau)$ или $\overset{*}{R}_{\xi\eta}(t', \tau)$ пропорциональны искомым функциям $R_{\xi}(\tau)$ или $R_{\xi\eta}(\tau)$, например, учитывая (6.4), получим

$$M\left[R^{*}_{\xi\eta}(t', \tau)\right] = \int_{-\infty}^{t'} h(t'-t)\, M\left[\xi(t)\,\eta(t-\tau)\right] dt =$$

$$= R_{\xi\eta}(\tau) \int_{-\infty}^{t'} h(t'-t)\, dt. \qquad (6.6)$$

При определении математического ожидания стационарного процесса фиксированный момент времени t' может быть выбран любым, например, $t'=0$, тогда

$$M\left[R^*_{\xi\eta}(t',\ \tau)\right]=R_{\xi\eta}(\tau)\int\limits_{-\infty}^{0}h(-t)\,dt=R_{\xi\eta}(\tau)\,K_{\text{и}}(0), \qquad (6.7)$$

где

$$K_{\text{и}}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{0}h(-t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

— частотная характеристика интегратора. Для RC-интегратора

$$K_{\text{и}}(0)=\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}dt=1,$$

поэтому коррелятор при фиксированной задержке дает несмещенную оценку корреляционной функции.

Вследствие конечности времени усреднения флюктуации произведения сглаживаются не полностью. Дисперсия флюктуаций оценивается в общем случае выражением (где также выбрано $t'=0$)

$$\sigma^2_R(\tau)=M\left\{\left[R^*_{\xi\eta}(t',\ \tau)-\langle R^*_{\xi\eta}(t',\ \tau)\rangle\right]^2\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\xi(t_1)\,\eta(t_1-\tau)\,\xi(t_2)\,\eta(t_2-\tau)\,h(-t_1)\,h^*(-t_2)-\right.$$

$$\left.-h(-t_1)\,h^*(-t_2)\,R^2_{\xi\eta}(\tau)\right]dt_1\,dt_2, \qquad (6.8)$$

содержащим взаимный момент четвертого порядка процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Если корреляционному анализу подвергаются гауссовские процессы или близкие к ним, то можно выразить четвертый момент через корреляционные функции и выражение (6.8) примет вид

$$\sigma^2_R(\tau)=2\int\limits_{0}^{\infty}Q(\tau)\left[R_\xi(\tau')\,R_\eta(\tau')+R_{\xi\eta}(\tau'-\tau)\,R_{\eta\xi}(\tau'+\tau)\right]d\tau'=$$

$$=\overline{2\xi^2(t)}\,\overline{\eta^2(t)}\int\limits_{0}^{\infty}Q(\tau')\left[r_\xi(\tau')\,r_\eta(\tau')+r_{\xi\eta}(\tau'-\tau)\,r_{\eta\xi}(\tau'+\tau)\right]d\tau', \qquad (6.9)$$

где $$Q(\tau')=\int\limits_{0}^{\infty}h(t_1)\,h^*(t_1+\tau')\,dt_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}K^2(\omega)\cos\omega\tau'\,d\omega;$$

$$R_\xi(\tau')=\overline{\xi^2(t)}\,r_\eta(\tau)';\quad R_\eta(\tau')=\overline{\eta^2(t)}\,r_\eta(\tau');$$

$$R_{\xi\eta}(\tau')=\left[\overline{\xi^2(t)}\,\overline{\eta^2(t)}\right]^{1/2}r_{\xi\eta}(\tau');\quad \tau'=t_2-t_1\,.$$

Если в (6.9) положить $\xi(t)=\eta(t)$, следовательно, $r_\xi=r_\eta$, $r_{\xi\eta}=r_\xi$, то получим выражение для оценки дисперсии случайной погрешности измерений корреляционной функции. Если, кроме того, положить $\tau=0$, то получим выражение для дисперсии погрешности измерений среднего квадрата (дисперсии) случайного процесса

$$\sigma_D^2=4\left[\overline{\xi^2(t)}\right]^2\int_0^\infty Q(\tau')\,r_\xi^2(\tau')\,d\tau'. \qquad (6.10)$$

Относительная среднеквадратичная случайная погрешность измерения дисперсии будет равна

$$\delta_D=\frac{\sigma_D}{M[R_\xi(0)]}=\frac{2}{K_и(0)}\left[\int_0^\infty Q(\tau')\,r_\xi^2(\tau')\,d\tau'\right]^{1/2}=$$

$$=\frac{2}{K_и(0)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty K_и(\omega)\,f_2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}, \qquad (6.11)$$

где введен спектр квадрата нормированной корреляционной функции, характеризующий нормированный спектр флюктуаций на выходе квадратичного детектора (или коррелятора при $\tau'=0$):

$$f_2(\omega)=2\int_0^\infty r_\xi^2(\tau')\cos\omega\tau'\,d\tau'. \qquad (6.12)$$

Это выражение можно еще более упростить для случая, когда постоянная времени интегрирующей цепи много больше интервала корреляции детектируемых (или перемножаемых) сигналов, что и имеет место на практике. На спектральном языке это означает, что полоса пропускания интегратора $\Delta\omega_и=[1/K_и^2(0)]\int_0^\infty K^2(\omega)\,d\omega$ много меньше ширины спектра $f_2(\omega)$. Тогда на основании теоремы о среднем в (6.11) можно вынести за знак интеграла $f_2(0)$, так как лишь близкие к нулю частоты флюктуаций пропускаются интегратором. В результате получим

$$\delta_D=\frac{2}{K_и(0)}\left[f_2(0)\int_0^\infty K_и^2(\omega)\,d\omega\right]^{1/2}=2\sqrt{f_2(0)\,\Delta F_и}. \qquad (6.13)$$

Дальнейшее упрощение выражения в общем виде становится невозможным, так как необходимо знать вид корреляционной функции детектируемых (или перемножаемых) сигналов. Для априорной оценки флюктуационной погрешности можно сделать предположение о виде корреляционной функции. Например, для спектра, близкого к прямоугольному, с шириной полосы Δf корреляционная функция определяется выражением (1.63) и низкоча-

стотные (при $\omega \to 0$) составляющие нормированного спектра на выходе детектора будут иметь уровень

$$f_2(0) = 2\int_0^\infty r^2(\tau')\,d\tau' = 2\int_0^\infty \frac{\sin \pi \Delta f \tau'}{\pi \Delta f \tau'} \cos \omega_0 \tau'\,d\tau' = \frac{1}{2\Delta f}. \quad (6.14)$$

Подставляя в (6.13) это выражение и значение полосы RC-интегратора, получим для этого случая

$$\delta_D = 1/\sqrt{2\Delta f RC}. \quad (6.15)$$

Динамический диапазон корреляционного анализа. Флюктуации на выходе анализатора спектра и коррелятора различным образом ведут себя при изменении уровня измеряемой величины. В случае спектрального анализа при изменении частоты настройки фильтра одновременно с уменьшением постоянной составляющей на выходе детектора в такой же степени уменьшается и среднеквадратичное значение флюктуаций, так что отношение уровня флюктуаций к измеряемой на данной частоте спектральной плотности остается постоянным и характеризует относительную случайную погрешность измерений.

Иначе обстоит дело при корреляционном анализе. Рассмотрим вначале поведение уровня флюктуаций при изменении корреляционной функции. Если $\tau = 0$, то коррелятор превращается в обычный квадратичный детектор и уровень флюктуаций на его выходе определяется выражением (6.15). При введении задержки $\tau \neq 0$ дисперсия флюктуаций на основании (6.9) будет следующей:

$$\sigma^2_{R_1}(\tau) = 2\left(\overline{\xi^2}\right)^2 \int_0^\infty Q(\tau')\left[r^2_\xi(\tau') + r_\xi(\tau' - \tau)\, r_\xi(\tau' + \tau)\right] d\tau'. \quad (6.16)$$

В интервале задержек $0 < \tau < \tau_0/2$ дисперсия уменьшается от $\sigma^2_{R1}(0) = \sigma^2_D$ до $\sigma_{R_1 \to 0}(\tau) = 0{,}5\sigma^2_D$ за счет уменьшения второго слагаемого в подынтегральном выражении и при дальнейшем увеличении τ не изменяется, в то время как уровни корреляции продолжают уменьшаться. В результате отношение уровня флюктуаций на выходе коррелятора к текущему значению измеряемой величины (корреляции) возрастает с увеличением задержки, поэтому вместо данного параметра удобнее пользоваться другой характеристикой. Назовем динамическим диапазоном D_R корреляционного анализа отношение максимальных значений корреляции $R_1(0)$ к минимальным измеряемым значениям, в качестве которых удобно принять величину, вдвое превышающую минимальное среднеквадратичное значение флюктуаций $\sigma^2_{R\to 0}(\tau) = 0{,}5\sigma^2_D$. Таким образом,

$$D_R = \frac{R_1(0)}{2\sqrt{\sigma^2_{R\to 0}}} = \frac{\overline{\xi^2(t)}}{\sqrt{2\sigma^2_D}} = \frac{1}{\sqrt{8 f_2(0^+)\,\Delta F_н}}. \quad (6.17)$$

В частности, для RC-интегратора $[\Delta F_и = 1/4RC]$ и прямоугольного спектра исследуемого процесса $[f_2(0) = 1/2\Delta f]$ получим

$$D_R = \sqrt{\Delta f RC}. \tag{6.18}$$

Уровень флюктуаций при измерении функций взаимной корреляции исследуется аналогичным образом с той лишь разницей, что необходимо рассматривать коррелограммы, измеренные при различном уровне корреляции входных процессов. Так, если процессы полностью когерентны, то, как можно видеть из (6.9), максимальное значение функции взаимной корреляции при $\tau = \tau_м$ будет измерено со случайной относительной погрешностью, практически совпадающей с погрешностью измерения дисперсии δ_D, так как флюктуации будут определяться двумя слагаемыми в подынтегральном выражении (6.9). Если же процессы слабо коррелированы, то вторым слагаемым в (6.9) можно пренебречь, дисперсия будет вдвое меньше и это значение дисперсии ограничит возможности измерений малых уровней корреляции. Выбрав в качестве минимального измеряемого значения корреляции величину, вдвое превышающую минимальное среднеквадратичное значение флюктуаций $1/2\sigma^2_D$, получим выражение, определяющее динамический диапазон $D_{в.н}$ измерений взаимной корреляции:

$$D_{в.к} = \frac{R_{12}(\tau_m)}{2\sqrt{\sigma^2_{R\to 0}}} = \frac{\sqrt{\overline{\xi^2}\overline{\eta^2}}}{\sqrt{2\sigma^2_D}} = \frac{1}{\sqrt{8 f_3(0_+)\Delta F_и}}, \tag{6.19}$$

где в качестве $f_3(0)$ следует подставлять спектр произведения $r_\xi(\tau) r_\eta(\tau)$. В случае $r_\xi(\tau) = r_\eta(\tau)$, что часто бывает на практике при использовании идентичных фильтров в обоих каналах коррелятора, выражение (6.19) совпадает с (6.17).

Приведенные здесь выражения для динамического диапазона справедливы при больших значениях постоянной времени интегратора $RC \gg \tau_0$, или $\Delta F_и \ll \Delta f$. При этом вследствие сглаживающего свойства интегрирующей цепи флюктуации на выходе интегратора практически можно считать гауссовскими. На основании свойств последних можно дать следующую оценку достоверности измерения выбранных минимальных уровней корреляции: вероятность того, что выбросы случайных флюктуаций не превысят минимальных измеряемых значений корреляции, равных удвоенному уровню среднеквадратичных значений, составляет 0,95.

Приведенные выражения позволяют априори оценить, а следовательно, и обеспечить в результате измерений достижение необходимого динамического диапазона корреляционного анализа путем соответствующего выбора времени интегрирования (полосы пропускания интегратора) соответственно выражению (6.17) или (6.19), если сделать некоторые предположения о характере спектра и полосе частот исследуемого процесса. Оценка будет достаточно точна, если полоса частот анализируемых сигналов ограничивается полосовыми фильтрами, включаемыми на вход корре-

лятора, как чаще всего поступают при акустических измерениях. Тогда, если полосовые фильтры достаточно узкополосны (практически $^1/_3$ октавы и менее), то полосу частот сигнала Δf можно считать равной полосе пропускания фильтра, а $f_2(0)$ определять по выражению (6.14). При увеличении полосы пропускания фильтров точность априорной оценки $D_{в.к}$ существенно снижается вследствие неточности априорной оценки энергетической ширины спектра процесса. При определении коррелограммы широкополосного процесса становится невозможным воспользоваться приведенными выражениями для выбора постоянной времени $T_и$ интегратора, так как свойства процесса оказываются полностью неизвестными. В этих случаях рекомендуется время интегрирования выбирать, ориентируясь на наиболее низкие частоты $f_н$ спектра исследуемого процесса, из условия

$$T_и \geqslant 1/4\pi f_н \delta R, \tag{6.20}$$

где $\delta R = [\overset{*}{R}(\tau) - R(\tau)]/[\overline{\xi^2\eta^2}]^{1/2}$ — ошибка измерения корреляционной функции, отнесенная к максимуму коррелограммы. Например, если $\delta = 0{,}01$, то рекомендуется выбирать $T_и \approx 5/f_н$.

Скорость и продолжительность последовательного корреляционного анализа. Один из способов последовательного корреляционного анализа состоит в ступенчатом изменении задержки на малую величину $\Delta\tau$. Тогда при использовании идеального интегратора время анализа $T_а$ целиком определяется временем интегрирования $T_и$, требующимся для определения одной точки коррелограммы, и максимальным значением задержки τ_{max}, которое определяется условием задачи $T_а = (\tau_{max}/\Delta\tau)\,T_и$.

Другой способ последовательного корреляционного анализа состоит в непрерывном изменении задержки по линейному закону $\tau = \tau_{min} + \gamma t$, и тогда время анализа составит $T_а = \tau_{max}/\gamma$. Рассмотрим погрешности, возникающие при этом.

Анализ флюктуационных погрешностей показывает, что дисперсия флюктуаций при непрерывном изменении τ отличается от рассмотренной ранее (6.8) лишь множителем $1/\sqrt{1-\gamma} \approx 1$, так как обычно выбирают $\gamma = (1 \div 0{,}1)\,10^{-4}$. Однако введение непрерывного изменения задержки приводит к систематической погрешности измерений, оценка корреляционной функции становится смещенной. Рассмотрим вызванное этим снижение показаний коррелятора вследствие инерционности RC-интегратора. Например, для RC-интегратора искажения определяются выражением

$$K_{RC}(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi F' RC)^2}} \approx 1 - 2(\pi F' RC)^2, \tag{6.21}$$

где $F' = f_0\gamma$, откуда и определяется выбор максимально допустимой скорости анализа.

Если производится измерение корреляционной функции узкополосного случайного процесса со средней частотой $\omega_0 = 2\pi f_0$,

$$R(\tau) = a(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

то частотные изменения всей кривой $R(\tau)$ можно считать одинаковыми и равными искажениям на частоте ω_0. Поэтому из (6.21) получим для ослабления корреляционной функции RC-интегратором выражение

$$\Delta_{RC} \approx 2(\pi F' RC)^2 = 2(\pi f_0 \gamma RC)^2. \qquad (6.22)$$

При выборе параметров коррелятора последовательного принципа действия удобно пользоваться графиком, вычисленным по приведенным выше выражениям. На рис. 6.2 приведен такой гра-

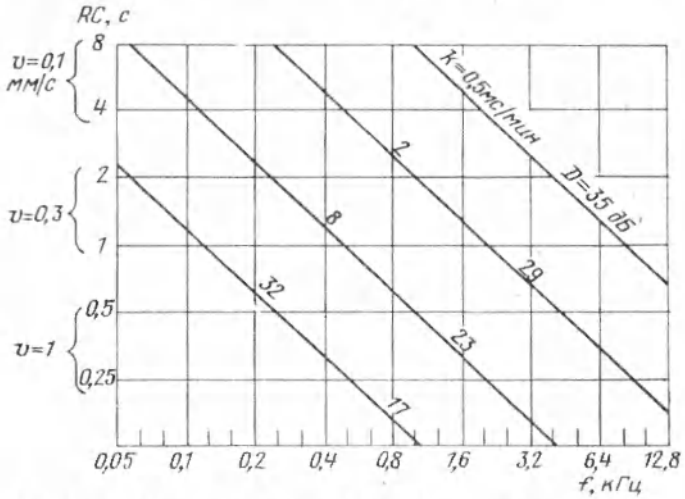

Рис. 6.2. Номограмма для выбора постоянной времени интегратора при последовательном корреляционном анализе в третьоктавных полосах частот и скорости анализа при условии динамических искажений (ослабления) уровней корреляции не более 1 дБ.

фик для выбора постоянной времени интегратора в зависимости от требуемого динамического диапазона измерений D и средней частоты f_0 третьоктавных фильтров. Здесь же указана и максимально допустимая скорость корреляционного анализа в виде более удобной для практики размерной величины (мс/мин), связанной с безразмерной скоростью $k_\tau = 6 \cdot 10^4 \gamma$. Сопоставляя (6.18) и (6.22), можно получить, что при постоянстве относительной полосы пропускания фильтров $\Delta f / f_0 = \text{const}$ определенной скорости анализа соответствует определенный динамический диапазон:

$$K_\tau = 6 \cdot 10^4 \gamma = 6 \cdot 10^4 \frac{\Delta f}{f_0} \frac{\sqrt{0{,}5\,\Delta_{RC}}}{\pi D^2}. \qquad (6.23)$$

На рис. 6.2 для третьоктавных фильтров ($\Delta f / f_0 = 0{,}35$) рассчитана допустимая скорость из условия $\Delta_{RC} = 0{,}1$. Скорость может быть увеличена вдвое, если допустимо увеличение погрешности до 0,3—0,4.

Регистрация коррелограмм и нормирование. Запись коррелограммы может производиться как в линейном, так и логарифмическом масштабе. В последнем случае фиксируется лишь абсолютное значение корреляции в децибелах, информация о знаке корреляции теряется: $L_R = 20 \lg |R(\tau)|$.

Преимущество логарифмического масштаба прежде всего состоит в том, что все уровни корреляции могут быть считаны с коррелограммы с одинаковой относительной погрешностью в широком диапазоне изменения этих уровней — практически с точностью около 1 дБ в диапазоне 40—50 дБ. При линейном масштабе значения корреляции менее 0,1—0,5 практически не могут быть считаны с коррелограммы, что соответствует динамическому диапазону измерений 20—30 дБ. Для нормирования корреляционной функции в логарифмическом масштабе достаточно на бумаге самописца перед записью коррелограммы записать уровни дисперсий $\overline{\xi^2}$, $\overline{\eta^2}$ исследуемых процессов в децибелах, тогда их среднее значение и будет представлять собой начало отсчета — нулевой уровень нормированной корреляции:

$$l_r = 20 \lg R_{\xi\eta}(\tau) - 1/2\,[20 \lg \overline{\xi^2} + 20 \lg \overline{\eta^2}].$$

Выбор параметров коррелятора параллельного принципа действия. Основными параметрами являются диапазон изменения задержки и время усреднения $T_и$, которое совпадает с продолжительностью измерений корреляционной функции. Время усреднения $T_и$ выбирается, исходя из требуемого динамического диапазона корреляционного анализа $D = \sqrt{\Delta f T_и / 2}$.

6.2. Погрешности и параметры измерений взаимных спектров

По определению взаимный спектр является преобразованием Фурье от функции взаимной корреляции:

$$G_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\eta}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Это выражение лежит в основе косвенного метода измерения взаимного спектра. Напомним, что взаимный спектр в общем случае представляет собой комплексную характеристику, т. е. нужно измерять и выводить на график действительную и мнимую составляющие либо модуль и фазовую характеристику взаимного спектра. Как отмечалось, преобразование Фурье при конечной длительности корреляционной функции может приводить к систематическим погрешностям, поэтому целесообразно по возможности применять прямые методы измерений взаимных спектров, изложенные в гл. 6.

Рассмотрим погрешность измерений взаимных спектров на примере одного из типов анализаторов. Гетеродинный анализа-

тор взаимного спектра [44] является прибором последовательного принципа действия и состоит из двух идентичных гетеродинных анализаторов A_1 и A_2 (рис. 6.3). Сигналы, снимаемые с их выходов, перемножаются, интегрируются и записываются на самописце в виде действительной составляющей взаимного спектра при непрерывном изменении частоты гетеродина. Идентичность фазовых характеристик анализаторов устанавливается фазокомпенсатором $\varphi_к$. Для измерения мнимой составляющей производится сдвиг сигнала, снимаемого со второго анализатора, на 90° с помощью фа-

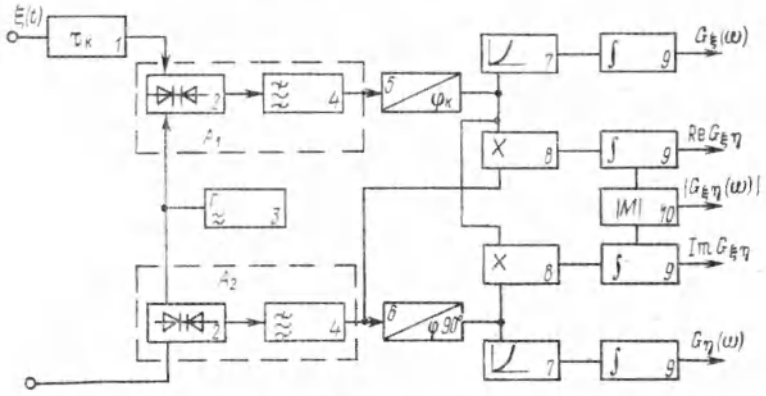

Рис. 6.3. Структурная схема гетеродинного анализатора взаимного спектра.

1 — блок задержки; *2* — смеситель; *3* — гетеродин; *4* — полосовые фильтры; *5* — фазовращатель компенсирующий; *6* — фазовращатель 90°-ный; *7* — квадраторы; *8* — умножители; *9* — интеграторы; *10* — блок определения модуля взаимного спектра.

зовращателя φ_{90}, перемножение двух сигналов и интегрирование. Одновременно может быть измерен спектр мощности каждого из сигналов путем квадратичного детектирования и интегрирования сигналов каждого из анализаторов. На входе анализатора может быть включена компенсационная линия задержки $\tau_к$, назначение которой будет рассмотрено ниже.

Работу прибора можно описать, считая каждый из анализаторов узкополосным фильтром, перестраивающимся по частоте, сигнал на выходе которого описывается интегралом Дюамеля:

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t \xi_i(t_1)\, h(\omega_i,\ t - t_1)\, dt_1, \tag{6.24}$$

где

$$h(\omega_i,\ t) = \begin{cases} H(\omega_i,\ t)\cos(\omega_i t + \varphi_i), & t > 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

— импульсная характеристика фильтра; $\xi_i(t)$ — стационарный процесс на входе фильтра.

Тогда в результате перемножения процессов $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, снимаемых с фильтров, и усреднения результата с помощью интегратора, имеющего импульсную характеристику $g(t)$, получим

$$u_{12}(\omega, t') = \int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_1(t)\,\varepsilon_2(t)\,g(t-t')\,dt =$$

$$= c\int_0^{\infty} \psi(\tau)\cos(\omega\tau+\varphi)\,R(t', \tau)\,d\tau, \qquad (6.25)$$

где при вычислениях произведена замена переменных $t_1 - t_2 = \tau$, $t - t_1 = t'$ и введены обозначения интеграла свертки

$$c\psi(\tau)\cos(\omega_0\tau+\varphi) = \int_0^{\infty} h_1(\omega, t'')\,h_2(\omega, t''+\tau)\,dt'' \qquad (6.26)$$

и текущей корреляционной функции

$$R(t', \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t-t'')\,\xi_2(t-t''-\tau)\,g(t'-t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1(t)\,\xi_2(t-\tau)\,g(t'-t)\,dt.$$

Как следует из (6.25), для того, чтобы показания прибора были пропорциональны действительной составляющей взаимного спектра, необходимо выполнить условия $\varphi = 0$ и $\psi(\omega) = 1$. Первое из них легко выполняется путем регулировки фазовой характеристики одного из каналов с помощью фазокомпенсирующей цепи; второе — требует применения идеальных (без потерь) фильтров, обладающих бесконечно узкой полосой пропускания, что физически неосуществимо. Последнее обстоятельство приводит к смещенности оценки действительной составляющей взаимного спектра, т. е. к систематической погрешности измерений.

Систематическая погрешность вследствие конечной полосы анализа. Найдем математическое ожидание измеряемой величины

$$M\{u_{12}(\omega, t')\} = c\int_0^{\infty} \psi(\omega, \tau)\cos\omega\tau\, M\{R_{12}(t', \tau)\}\,d\tau =$$

$$= c\int_0^{\infty} \psi(\tau)\,K_{\text{и}}(0^+)\,R_{12}(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau. \qquad (6.27)$$

Здесь математическое ожидание оценки корреляционной функции

$$M\{R_{12}(t', \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t'-t)\,M\{\xi_1(t)\,\xi_2(t+\tau)\,dt\} =$$

$$= R_{12}(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g(t'-t)\,e^{-i\Omega t}\,|_{\Omega=0} = R(\tau)\,L_{\text{и}}(0)$$

содержит множителем коэффициент передачи $K_и(\omega)$ интегратора на нулевой частоте. Для RC-интегратора, например, $K_{RC}(\omega) = [1+(\Omega RC)^2]^{-1/2}$, следовательно, $K_{RC}(0^+)=1$, т. е. RC-интегратор не вызывает смещенности оценки $u_{12}(\omega, t')$ при настройке анализатора на фиксированную частоту ω. Смещенность оценки $u_{12}(\omega, t')$, т. е. погрешность измерений взаимного спектра, возникает из-за конечности полосы пропускания фильтров (вследствие чего $\psi(\tau) \neq 1$) и может быть оценена для конкретного вида фильтра.

Выражая (6.26) через частотные характеристики фильтров, получаем

$$\int_0^\infty h_1(t)\, h_2(t+\tau)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(-i\omega)\, K_2(i\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega.$$

В частности, если частотные характеристики фильтров идентичны и могут быть аппроксимированы П-образной функцией идеального полосового фильтра с полосой пропускания $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ и коэффициентом передачи в этой полосе K_0, то

$$\int_0^\infty h(t)\, h(t+\tau)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} K_0^2 \cos\omega\tau\, d\omega = \Delta f K_0 \frac{\sin \pi\Delta f\tau}{\pi\Delta f\tau} \cos\omega_0\tau, \tag{6.28}$$

откуда видно, что в идеальных полосовых фильтрах фазовых искажений не происходит, $\varphi = 0$. Множитель $\Delta f K_0$ характеризует чувствительность анализатора, а функция

$$\psi(\tau) = \frac{\sin \pi\Delta f\tau}{\pi\Delta f\tau} \approx 1 - \frac{1}{6}(\pi\Delta f\tau)^2 \tag{6.29}$$

— искажения (погрешность) результатов измерений. Так как измерения возможны лишь при малых искажениях $[\psi(\tau) \to 1]$, то функция $\psi(\tau)$ достаточно хорошо характеризуется в выражении (6.29) первыми членами степенного ряда.

Сопоставляя $\psi(\tau)$ и $R_{12}(\tau)$, можно видеть, что $\psi(\tau)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с $R_{12}(\tau)$, поэтому в выражении (6.27) можно вынести $\psi(\tau)$ за знак интеграла при значении $\tau = t_з$, соответствующем максимуму $R_{12}(\tau)$.

В результате получим

$$M\{u_{12}(\omega, t')\} = \Delta f K_и(0)\left[1 - \frac{1}{6}(\pi\Delta f t_з)\right] \times$$

$$\times \int_0^\infty R_{12}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = \Delta f K_и(0)(1-\Delta_1)\, G_{12}(\omega), \tag{6.30}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{1}{6}(\pi\Delta f t_з) = 1{,}66\,(\Delta f t_з)^2 \tag{6.31}$$

характеризует погрешность измерений взаимного спектра двух процессов вследствие конечности полосы пропускания Δf фильтров анализатора при запаздывании t_3 одного из процессов (рис. 6.4). Если в приборе предусмотрена регулировка фазы (см. рис. 6.3), то допустимо использовать фильтры с небольшой неидентичностью частотных характеристик. При этом изменяется эффективная полоса $\Delta f'$ пропускания анализатора, которая будет определяться участком полосы пропускания, общим для обоих фильтров. В результате того, что $\Delta f' < \Delta f$, погрешность измерений Δ_1 может даже несколько уменьшиться. При этом снизится чувствительность прибора.

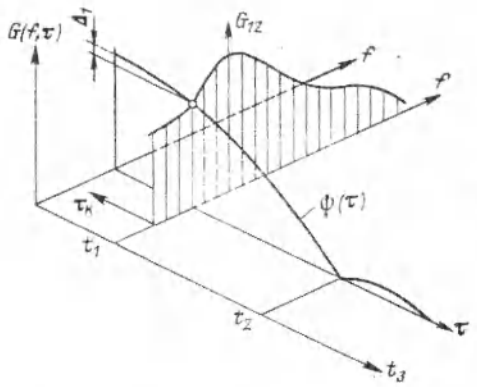

Рис. 6.4. Графическое определение погрешности измерений взаимного спектра.

Идентичность фазовых характеристик фильтров также не требуется выверять с большой точностью. Необходимо лишь обеспечить равенство сдвигов фаз на средней частоте ω_0 (или ω_0' при неидентичных фильтрах) полосы пропускания, что и регулируется фазокомпенсирующей цепочкой. Практически для этой регулировки на оба входа анализатора подается один и тот же случайный процесс (шум) и фазокомпенсирующая цепь настраивается до получения минимальных показаний прибора, измеряющего мнимую часть взаимного спектра, при этом действительная составляющая будет максимальна.

Погрешность измерения мнимой составляющей взаимного спектра случайных процессов определяется также выражением (6.31), как и для действительной составляющей. Необходимый сдвиг по фазе на $\varphi = \pi/2$ одного из сигналов производят на выходе фильтра с помощью фазовращателя φ_{90}, что эквивалентно применению фильтров с квадратурным (на $\pi/2$) сдвигом их фазовых характеристик. При этом также допустима некоторая неидентичность частотно-фазовых характеристик каналов, достаточно, чтобы сдвиг $\varphi = \pi/2$ выполнялся на средней частоте полосы пропускания фильтров. Неидентичность фазовых характеристик фильтров может быть обнаружена лишь при анализе спектра гармонического колебания, подающегося на оба входа анализа-

тора. В этом случае самописец мнимой составляющей будет записывать некоторые показания при расстройке сигнала относительно средней частоты фильтра, в то время как при полной идентичности фильтров показания должны быть нулевыми при любых расстройках.

Динамический диапазон анализа. Оценим состоятельность оценки составляющих взаимного спектра с помощью рассматриваемого анализатора. Дисперсия показаний прибора

$$\sigma_G^2 = M\{[u_{12}(\omega,\ t') - Mu_{12}(\omega,\ t')]^2\} = M\{u_{12}^2(\omega,\ t')\} - M^2\{u_{12}(\omega,\ t')\}.$$

Так как выражение

$$u_{12}(\omega,\ t') = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon_1(t)\,\varepsilon_2(t)\,g(t'-t)\,dt = R_\varepsilon(\omega,\ t',\ \tau')$$

можно трактовать как значение (при $\tau'=0$) оценки корреляционной функции выходных процессов $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ фильтров, то можно воспользоваться известными выражениями (6.9), (6.15), характеризующими флюктуации на выходе коррелятора. Вывод этих выражений основан на представлении четвертого момента $M\{u_{12}^2(\omega,\ t')\}$ нормальных случайных процессов $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ через корреляционные функции. Нормальность процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ для анализаторов взаимного спектра всегда обеспечивается узкополосностью фильтров. Отсюда можно получить, что при когерентности $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ дисперсия показаний прибора будет наибольшей и совпадающей с дисперсией флюктуаций на выходе квадратичного детектора. Если далее учесть, что постоянная времени интегратора должна выбираться много больше постоянной времени фильтров, то для среднеквадратичного значения флюктуаций приходим к выражению (6.13). Если же сигналы $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ некогерентны, то дисперсия σ_G^2 будет вдвое меньше. Поэтому динамический диапазон измерений, как и для коррелятора, определится выражением (6.18) или $\sqrt{N}$, где N — число усреднений мгновенных взаимных спектров.

Скорость последовательного анализа. При развертке по частоте измеряемые величины будут представляться изменяющейся по величине и знаку постоянной составляющей на выходе перемножителя. В этом случае появится третья, динамическая погрешность — уменьшение показаний прибора вследствие инерционности интегратора.

Для оценки этой погрешности запишем математическое ожидание выхода анализатора с учетом найденной выше смещенности Δ_1 в следующем виде:

$$M\{u_{12}(\omega,\ t')\} = M\int_{-\infty}^{t'} \varepsilon_1(\omega,\ t)\,\varepsilon_2(\omega,\ t)\,g(t'-t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{t'} (1-\Delta_1)\,\mathrm{Re}_{\mathrm{Im}}\,[G_{12}(\omega)\,g(t'-t)]\,dt.$$

Рассматривая далее лишь одну, например, действительную составляющую взаимного спектра, учитывая изменение частоты настройки анализатора во времени по линейному закону, $\omega = 2\pi\gamma t$, и выполняя преобразование Фурье, получим

$$M\{u_{12}(\omega, t')\} = \frac{1-\Delta_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\Omega) K_{\text{и}}(\Omega) e^{i\Omega t'} d\Omega, \qquad (6.32)$$

где $K_{\text{и}}(\Omega)$ — частотная характеристика интегратора; $V(\Omega)$ — преобразование Фурье от действительной составляющей взаимного спектра.

Если интегратор имеет равномерную частотную характеристику, т. е. $K_{\text{и}}(\Omega) = 1$, то интеграл в последнем выражении представляет несмещенную оценку взаимного спектра:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega = \operatorname{Re}[G_{12}(\gamma t)] = \operatorname{Re}[G_{12}(\omega)].$$

При большом значении RC и высокой скорости развертки γ, очевидно, что $K(\Omega) \neq 1$, в результате чего значения взаимного спектра будут занижены, появится еще один источник смещенности измеряемой величины. Наиболее сильным будет ослабление в случае осциллирующего характера взаимного спектра $G_{12}(\omega) = G(\omega)\cos\omega t_з$, что, в частности, имеет место при анализе двух процессов с запаздыванием одного из них на время $t_з$. Учитывая, что в этом случае функция $G_{12}(\gamma t) = u_{12}(\omega, t')$ сосредоточена в области частот сигнала на выходе анализатора $\Omega_0 = 2\pi t_з \gamma$, можно в (6.32) вынести за знак интеграла значение

$$K_{\text{и}}(\Omega_0) = [1 + (\Omega RC)^2]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}(2\pi\gamma t_з RC)^2 = 1 - \Delta_2,$$

где ослабление показаний анализатора вследствие развертки спектра со скоростью γ равно

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}(2\pi\gamma t_з RC)^2 \approx 20(\gamma t_з RC)^2. \qquad (6.33)$$

В результате получим

$$M\{u_{12}(\omega, t')\} = (1-\Delta_1)(1-\Delta_2)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\Omega) e^{i\Omega t'} d\Omega \approx$$

$$\approx (1 - \Delta_1 - \Delta_2) G_{12}(\omega). \qquad (6.34)$$

Полученные соотношения дают возможность выбрать необходимые параметры анализатора.

Применение компенсационной линии задержки. При измерениях взаимных спектров, в отличие от корреляционных измерений, достигается лишь грубая пространственно-временная избирательность измерительного тракта путем выбора соответствующей полосы анализа Δf, но при этом производится достаточно тонкий

непрерывный спектральный анализ процессов, т. е. осуществляется высокая частотная избирательность.

Возможно объединение положительных качеств как коррелятора (выделение сигнала с заданным запаздыванием), так и анализатора взаимного спектра (измерение спектра при высокой частотной избирательности) в одном приборе путем добавления компенсационной линии задержки $\tau_к$ в один из каналов анализатора взаимного спектра (см. рис. 6.3). Если анализатор настроить на частоту f_0 и изменять задержку, то на выходе перемножителя, вычисляющего действительную составляющую, получим обычную функцию корреляции $R(\tau_к) = a(\tau_к)\cos 2\pi f_0 \tau G(f_0)$ двух шумов со средней частотой f_0 и полосой Δf. Уровень максимума корреляции определится степенью коррелированности входных сигналов, абсцисса максимума $R(\tau_м)$ будет соответствовать запаздыванию сигналов $-\tau_м = t_з$, а форма огибающей $a(\tau_к)$ определится видом частотной характеристики фильтров (*4* на рис. 6.3) и при достаточной близости характеристики к прямоугольной имеет вид (6.29), т. е. $a(\tau_к) = \psi(\tau)$.

При этом на выходе перемножителя, вычисляющего мнимую составляющую спектра, будем иметь функцию $a(\tau_к)\sin 2\pi f_0 \tau G(f_0)$, в результате чего на выходе блока модуля ($|M|$) получим огибающую $a(\tau_к)G(f_0)$. Таким образом, в этом режиме работы прибор представляет собой усовершенствованный коррелятор, вычисляющий как корреляционную функцию, так и ее огибающую $a(\tau)$.

Если же, наоборот, установить в блоке компенсирующей задержки $\tau_к = 0$ и изменять частоту гетеродина, то прибор будет представлять собой обычный анализатор взаимного спектра, а выражение (6.31) — характеризовать уменьшение показаний прибора при увеличении задержки $t_з$ между исследуемыми сигналами.

Таким образом, анализатор взаимного спектра с полосой Δf измеряет с погрешностью $\Delta_1 \ll 1$ взаимный спектр (см. рис. 6.4) двух сигналов, один из которых запаздывает на время

$$t_з' \leqslant t_1 = 0{,}8\sqrt{\Delta_1}/\Delta f. \qquad (6.35)$$

При этом, как видно из точного выражения (6.29), прибор практически не будет воспроизводить взаимный спектр сигналов с запаздыванием

$$t_з'' \geqslant t_2 = 1/\Delta f. \qquad (6.36)$$

Следовательно, выбирая соответствующим образом полосу анализа, можно выполнять условия, при которых будут измеряться лишь спектры сигналов, отличающиеся малой задержкой $t_з < t_1$, т. е. будет осуществляться грубая пространственно-временная избирательность. Однако при использовании обычного анализатора взаимного спектра разделяемые сигналы должны значительно отличаться по времени запаздывания, например, при $\Delta_1 = 0{,}1$ необходимо иметь $t_2/t_1 > 4$. Кроме того, обычный анализ взаимных спектров не дает возможности выделить и измерить раздельно

взаимный спектр сигналов с большим запаздыванием на фоне сигналов с малым запаздыванием.

Эти недостатки устраняются при включении компенсирующей задержки. Выбирая компенсирующую задержку $\tau_к$ таким образом, чтобы $\tau_{к1} + t_2 < t_Б$, можно «отстроиться» от сигнала *Б*, запазды-

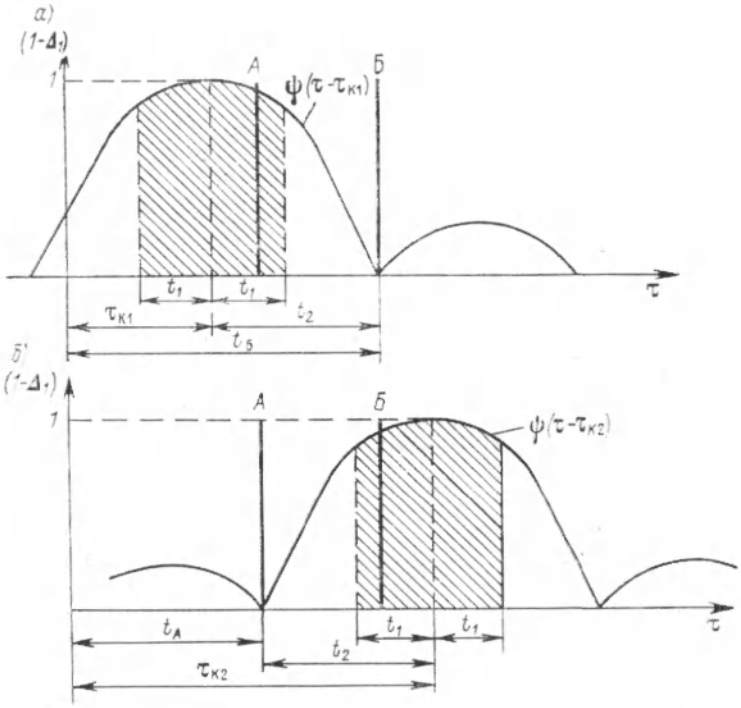

Рис. 6.5. Выделение сигналов с различным запаздыванием: *а* — при измерении спектра сигнала с задержкой t_A на фоне сигнала с задержкой $t_Б$; *б* — сигнала с задержкой $t_Б$ на фоне сигнала с задержкой t_A.

вающего на время $t_Б$ относительно опорного сигнала первого канала (рис. 6.5). Для измеряемого сигнала *А* с задержкой t_A должно выполняться условие $(t_к - t_1) < t_A < \tau_{к1} + t_1)$.

На рис. 6.5 по оси τ обозначено запаздывание сигналов *А* и *Б* и показано, как должна выбираться компенсирующая задержка $\tau_{к1}$ или $\tau_{к2}$, чтобы измерить параметры сигнала *А* либо *Б* соответственно. Функция $\psi(\tau) = 1 - \Delta_1$ характеризует ослабление показаний анализатора в соответствии с (6.29). Выбрав другое значение компенсирующей задержки, можно выделить сигнал *Б* с большим запаздыванием, т. е. измерить его спектр, если выполнить условия $\tau_{к2} - t_2 \leqslant t_A$; $(\tau_{к2} - t_1) < t_Б < (\tau_{к2} + t_1)$. При этом следует учиты-

вать выражение (6.36), показывающее, что повышение временно́й избирательности может быть достигнуто лишь за счет ухудшения частотной избирательности.

Таким образом, сочетание анализатора взаимного спектра с линией переменной задержки значительно расширяет возможности корреляционных измерений, дает возможность непосредственно измерить спектр сигнала, отличающегося от некоторого опорного сигнала на любое время запаздывания, и при этом отстроиться от других сигналов, имеющих время запаздывания как больше, так и меньше времени запаздывания измеряемого сигнала. Кроме того, введение компенсирующей задержки позволяет также увеличить скорость последовательного анализа γ, выбираемую из условия (6.33), где вместо $t_з$ должна подставляться разность $|t_з - \tau_к|$.

Выбор параметров анализатора и регистрация результатов. Порядок расчета параметров анализатора взаимного спектра может быть предложен следующий. Прежде всего общую допустимую погрешность измерений разбивают на две части: $\Delta Q = \Delta_1 + \Delta_2$. Исходя из заданного или предполагаемого максимального времени задержки $t_з$ исследуемых сигналов и допустимых искажений Δ_1, определяют требуемую полосу анализа

$$\Delta f \leqslant \frac{\sqrt{6\,\Delta_1}}{\pi t_з} = 0{,}8\,\frac{\sqrt{\Delta_1}}{t_з}. \qquad (6.37)$$

Если же необходимо измерить спектр сигнала, обладающего определенным запаздыванием $t_А$, при наличии другого сигнала с запаздыванием $t_Б$, то вводят компенсирующую задержку $\tau_к$ и оценку требуемой полосы анализа Δf производят по выражению

$$\Delta f \geqslant \frac{1 - 0{,}8\sqrt{\Delta_1}}{(t_Б - t_А)}. \qquad (6.38)$$

Эта формула получена из условия $|t_Б - t_А| > |t_2 - t_1|$. При выборе величины компенсирующей задержки руководствуются приведенными выше соображениями и рис. 6.5.

Далее, выбрав значение Δf, имеющееся у анализатора и ближайшее к рассчитанным данным, производят выбор RC, исходя из требуемого динамического диапазона измерений:

$$RC = D^2/\Delta f. \qquad (6.39)$$

Выбор Δf, а также RC удобно производить по номограмме, приведенной на рис. 6.6. Как видно из номограммы, анализатор взаимного спектра с полосой анализа 3—10 Гц эквивалентен коррелятору с задержкой до 0,1—0,2 с.

Последний параметр — скорость анализа — находят по формуле

$$\gamma \leqslant \frac{\sqrt{0{,}5\,\Delta_2}}{\pi t_з RC} = \frac{0{,}225\sqrt{\Delta_2}}{t_з RC}. \qquad (6.40)$$

На рис. 6.7 приведена номограмма для выбора γ в зависимости от $t_з RC$. Произведение $t_з RC$ определяют графически: на шкале $t_з RC$ отмечают значение $t_з$, в мс, а затем смещают точку вправо на отрезок RC, длина которого считывается по той же шкале. Полученному таким образом произведению $t_з RC$ и выбранной скорости анализа соответствует динамическая погрешность измерений. Здесь же на номограмме указана и продолжительность анализа интервала частот спектра шириной 1 кГц.

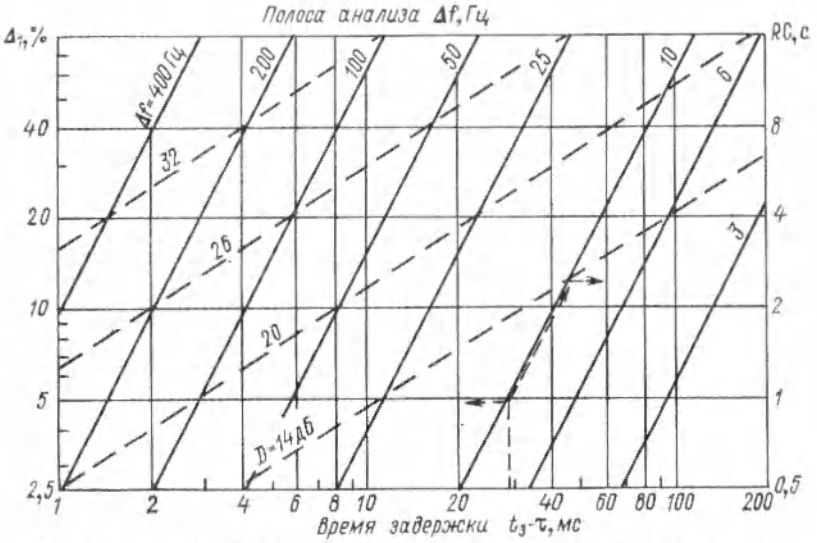

Рис. 6.6. Номограмма для выбора полосы анализа Δf и постоянной времени RC-интегратора при измерениях взаимных спектров.

Выбрав параметры анализатора, далее в зависимости от целей анализа решают, какие характеристики взаимного спектра следует записать на самописцах. Это могут быть действительная и мнимая составляющие взаимного спектра в линейном масштабе либо эти же составляющие в логарифмическом масштабе, модуль взаимного спектра (обычно в логарифмическом масштабе) и, наконец, годограф комплексного спектра — двухкоординатная запись действительной и мнимой составляющих взаимного спектра, дающая возможность отсчитать кроме этих составляющих также модуль спектра и его аргумент (фазу).

Во многих случаях необходимо знать функцию когерентности

$$q(\omega) = \frac{|G_{\xi\eta}(\omega)|}{[G_\xi(\omega)\, G_\eta(\omega)]^{1/2}}, \qquad (6.41)$$

для определения которой должен быть предумотрен соответствующий блок нормирования. В аналоговых устройствах измерение функции когерентности легко осуществить, если в каналах анализатора взаимного спектра для измерения действительной

и мнимой составляющих вместо умножителя использовать схему совпадений, в результате будут измерены величины

$$u_1 = 2/\pi \arcsin \mathrm{Re}\left[G_{\xi\eta}(\omega)/\sqrt{G_\xi(\omega)\,G_\eta(\omega)}\right];$$

$$u_2 = 2/\pi \arcsin \mathrm{Im}\left[G_{\xi\eta}(\omega)/\sqrt{G_\xi(\omega)\,G_\eta(\omega)}\right],$$

откуда и находят модуль (функцию когерентности).

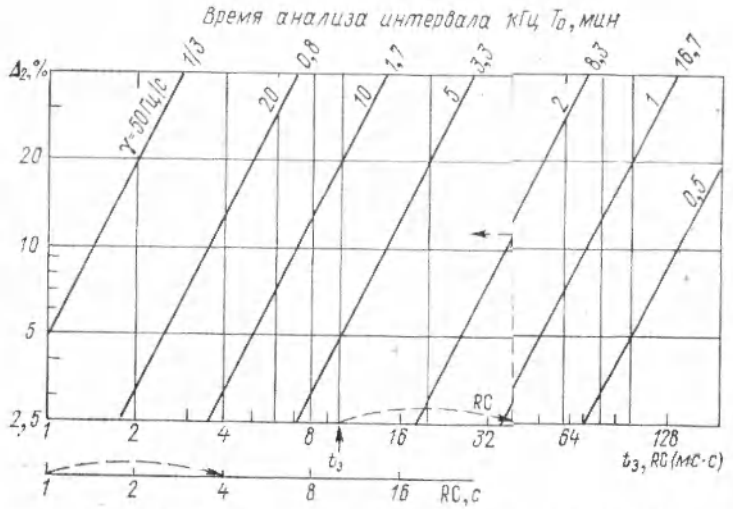

Рис. 6.7. Номограмма для выбора скорости γ и определения продолжительности T_0 анализа взаимного спектра в интервале частот 1 кГц.

6.3. Методы и приборы для измерений взаимных спектров

Методы измерений взаимных спектров рассмотрены в работах [44, 45, 78]. Ниже приводятся основные принципы и алгоритмы измерений взаимных спектров акустических процессов звукового диапазона частот, нашедшие применение в промышленных приборах и при обработке данных на ЭВМ.

Гетеродинные анализаторы взаимного спектра. Принцип работы приборов этого типа был описан выше. Практически двухканальный прибор может быть создан на базе двух серийных одноканальных гетеродинных анализаторов, которые должны управляться одним общим гетеродином. Соответствующие выводы сигналов гетеродина обычно предусматриваются (например, у анализатора С4-48, см. табл. 5.2) либо их нетрудно сделать дополнительно [44]. Выходные напряжения анализаторов подаются на умножитель или схему совпадений. В последнем случае измеряются составляющие функции когерентности.

Анализаторы взаимного спектра без резонаторов. Математическим основанием для практического построения такой схемы

анализатора взаимного спектра может служить выражение, которое можно получить, записав преобразование Фурье от усеченной (заданной в интервале от $-\tau_м$ до $+\tau_м$) корреляционной функции

$$\mathrm{Re}\left[G_{12}^{*}(\omega)\right] = \int_{-\tau_м}^{\tau_м} R_{12}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= \int_{-\tau_м}^{\tau_м} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{\xi_1(t)\,\xi_2(t+\tau)}\cos\omega\tau\, d\tau\, dt. \qquad (6.42)$$

Изменив последовательность действия усреднения во времени и интегрирования по координате $\tau = t_1 - t$, для действительной части текущего взаимного спектра $\overset{*}{G}_{12}(\omega)$ получим

$$\mathrm{Re}\left[G_{12}^{*}(\omega)\right] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi_1(t)\cos\omega t\, dt \int_{t-t_м}^{t+\tau_м} \xi_2(t_1)\cos\omega t_1\, dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi_1(t)\sin\omega t\, dt \int_{t-\tau_м}^{t+\tau_м} \xi_2(t_1)\sin\omega t_1\, dt_1. \qquad (6.43)$$

Аналогичным образом для синусной составляющей Фурье взаимного (текущего) спектра можно получить

$$\mathrm{Im}\left[G_{12}^{*}(\omega)\right] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi_1(t)\cos\omega t\, dt \int_{t-\tau_м}^{t+\tau_м} \xi_2(t_1)\sin\omega t_1\, dt_1 +$$

$$+ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi_1(t)\sin\omega t\, dt \int_{t-\tau_м}^{t+\tau_м} \xi_2(t_1)\cos\omega t_1\, dt_1. \qquad (6.44)$$

Таким образом, для одновременного вычисления синусной и косинусной составляющих взаимного спектра прибор (рис. 6.8) должен содержать четыре высокочастотных умножителя (их роль могут выполнять модуляторы), для получения выражений вида $\xi_i(t)\cos\omega t$ и $\xi_i(t)\sin\omega t$ с последующими интеграторами, четыре умножителя меняющихся напряжений, схемы сложения и вычитания, и гетеродин, дающий напряжения, сдвинутые на угол $\varphi = 90°$.

Схему анализатора взаимного спектра можно существенно упростить, если воспользоваться свойствами квадратурных составляющих огибающей процесса со сплошным спектром

$$A(t) = \xi(t)\cos\omega t + \eta(t)\sin\omega t;$$

$$B(t) = \xi(t)\sin\omega t - \eta(t)\cos\omega t,$$

позволяющих представить процесс в виде

$$\xi_i(t) = A_i(t)\cos\omega t + B_i(t)\sin\omega t, \quad i = 1,\ 2.$$

При этом $\eta(t)$ — процесс, сопряженный стационарному случайному процессу $\xi(t)$ и образованный от $\xi(t)$ с помощью преобразования Гильберта

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{\xi(t)}{\tau - t} d\tau. \qquad (6.45)$$

(Практически процесс $\eta(t)$ отличается от $\xi(t)$ лишь сдвигом фаз всех частот на $\pi/2$ при сохранении их амплитуд; в отличие от преобразования Гильберта простое интегрирование приводит

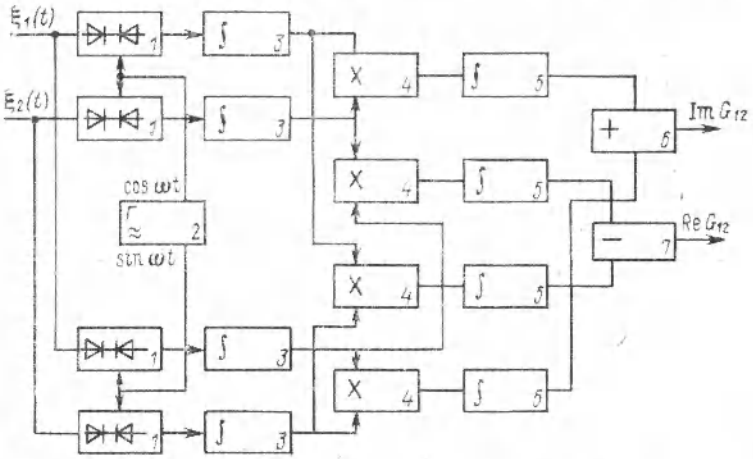

Рис. 6.8. Схема анализатора взаимных спектров безрезонаторного типа.

1 — смеситель; *2* — гетеродин с квадратурным выходом; *3* — интеграторы ФНЧ; *4* — умножители; *5* — интеграторы-усреднители; *6* — сумматор; *7* — блок разности.

к уменьшению амплитуд обратно пропорционально частоте при сдвиге фаз на $\pi/2$.) Путем непосредственных вычислений можно показать, что для стационарного процесса

$$\overline{A_1(t) A_2(t+\tau)} = \overline{B_1(t) B_2(t+\tau)};$$

$$\overline{A_1(t) B_2(t+\tau)} = -\overline{B_1(t) A_2(t+\tau)}.$$

На основании этих свойств ортогональных компонент процесса формулы для вычисления составляющих взаимного спектра упрощаются и принимают вид

$$\mathrm{Re}\left[G_{12}^{*}(\omega)\right] = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \xi_1(t) \cos \omega t \, dt \int_{t-\tau_м}^{t+\tau_м} \xi_2(t_1) \cos \omega t_1 \, dt_1;$$

$$\mathrm{Im}\left[G_{12}^{*}(\omega)\right] = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \xi_1(t) \cos \omega t \, dt \int_{t-\tau_м}^{t+\tau_м} \xi_2(t_1) \cos \omega t_1 \, dt_1.$$

Так как $\tau_м \ll T$, то результат не изменится, если произведение $\xi_1(t)\cos\omega t$ так же, как $\xi_2(t_1)\cos\omega t_1$, проинтегрировать в области $(t-\tau_м,\ t+\tau_м)$, а затем произведение двух интегралов интегрировать в пределах $(-T,\ T)$. Эта операция полезна для последующего перемножения низкочастотных процессов, поскольку облегчает работу перемножителя.

Физически работа схемы состоит в следующем. На выходе модуляторов-смесителей образуются процессы, спектр каждого из которых содержит суммарные (гетеродина и входного процесса) и разностные частоты. С помощью RC-фильтров нижних частот выделяются узкие полосы частот вблизи $f=0$. Таким образом, эта часть схемы работает как гетеродинный анализатор с нулевой промежуточной частотой, причем полоса анализа Δf определяется полосой пропускания $F_и = 1/\tau_м$ фильтра нижних частот, $\Delta f = 2\Delta F_и$.

Далее сигналы, прошедшие через фильтры, перемножаются и усредняются фильтром с большой постоянной времени T, как и в рассмотренном выше гетеродинном анализаторе. Условие $T \gg \tau_м$ обеспечивает состоятельность оценки взаимного спектра, т. е. уменьшение $(\delta_G \to 0)$ дисперсии флюктуаций на выходе прибора при $T \to \infty$. При выборе параметров анализатора этого типа (полоса анализа Δf, скорость γ, влияние задержки $t_з$) полностью справедливы рекомендации 6.3.

Интерференционный анализатор взаимных спектров. Эта схема предложена Парком [44] с использованием четырех анализаторов, измеряющих спектры мощности входных сигналов Φ_1 и Φ_2, спектр Φ_3 разности входных сигналов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ и спектр Φ_4 процесса, полученного путем суммирования первого сигнала $\xi_1(t)$ с преобразованием Гильберта $\hat{\xi}_2(t)$ второго сигнала, т. е. при сдвиге второго сигнала на 90° без изменения амплитуд составляющих процесса $\xi_2(t)$. Эти измерения дают спектры мощности каждого из процессов и составляющие взаимного спектра:

$$G_{11}(\omega) = \Phi_1(\omega);\quad G_{22} = \Phi_2(\omega); \tag{6.46}$$

$$\mathrm{Re}\,[G_{12}(\omega)] = \frac{1}{2}[\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) - \Phi_3(\omega)]; \tag{6.47}$$

$$\mathrm{Im}\,[G_{12}(\omega)] = \frac{1}{2}[\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) - \Phi_4(\omega)]. \tag{6.48}$$

В полностью автоматизированном приборе все четыре промежуточных измерения Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 должны производиться одновременно четырьмя анализаторами. Однако принципиально возможно и поочередное измерение промежуточных величин на каждой частоте [79], после чего составляющие G_{12} находятся путем вычислений по формулам (6.46)—(6.48), что, естественно, вчетверо увеличивает продолжительность измерений.

Другой метод определения составляющих взаимного спектра с помощью одного анализатора [44] состоит в измерении среднеквадратичного спектра суммы S_+, а также спектра разности S_-

двух сигналов с примерно идентичными спектрами. Затем вычисляется отношение среднеквадратичных значений S_+/S_- на каждой частоте, связанное с нормированным значением действительной составляющей взаимного спектра:

$$\frac{S_+}{S_-}=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Re}\,[q_{12}(\omega)]}{1-\mathrm{Re}\,[q_{12}(\omega)]}}, \tag{6.49}$$

отсюда по вычисленным значениям S_+/S_- находят $\mathrm{Re}\,[q_{12}(\omega)]$.

Определение взаимных спектров на ЭВМ. По формулам (6.43)—(6.44) представляют алгоритм вычисления взаимных спектров на ЭВМ. Вначале измеряют комплексные спектры двух входных процессов. Для первого процесса

$$\left.\begin{aligned} S_1(\omega)&=\frac{1}{T_1}\int\limits_0^{T_1}\xi_1(t)\sin\omega t\,dt;\\ C_1(\omega)&=\frac{1}{T_1}\int\limits_0^{T_1}\xi_1(t)\cos\omega t\,dt,\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

аналогичным образом находят синусную $S_2(\omega)$ и косинусную $C_2(\omega)$ составляющие второго процесса. Мгновенный взаимный спектр согласно (6.43)—(6.44) имеет следующие составляющие:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\,[G_{12}(\omega)]_i&=C_1(\omega)\,C_2(\omega)+S_1(\omega)\,S_2(\omega);\\ \mathrm{Im}\,[G_{12}(\omega)]_i&=S_1(\omega)\,C_2(\omega)-C_1(\omega)\,S_2(\omega).\end{aligned}\right\} \tag{6.51}$$

Мгновенные взаимные спектры, найденные по ряду отрезков процесса длительностью T, усредняют, получая оценки составляющих взаимного спектра

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}\,[G_{12}^*(\omega)]&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Re}\,[G_{12}(\omega)]_i;\\ \mathrm{Im}\,[G_{12}^*(\omega)]&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Im}\,[G_{12}(\omega)]_i.\end{aligned}\right\} \tag{6.52}$$

Далее определяют модуль взаимного спектра, функцию когерентности или другие спектральные характеристики связи двух процессов. Параметры взаимоспектрального анализа получаются следующими: полоса анализа определяется длительностью T_1 отрезка реализации $\Delta f=1/T_1$, избирательность — видом весовой функции, которую вводят на первой стадии вычислений комплексных мгновенных спектров $S_1(\omega)_i$, $C_1(\omega)_i$, $S_2(\omega)_i$, $C_2(\omega)_i$; дисперсия флюктуационной погрешности обратно пропорциональна числу усредняемых спектров N, а динамический диапазон анализа пропорционален $\sqrt{N}$. Этими параметрами, как и в случае аналоговых измерений, определяется смещенность результата измерений процессов с заданной задержкой $t_з$ и возможность разделения

двух процессов во времени, если они характеризуются различным запаздыванием (т. е. временная избирательность).

Своеобразны характеристики динамического диапазона функции когерентности. При $N=1$ (т. е. без усреднения), как можно показать прямыми вычислениями, функция когерентности $q(\omega)$ (6.41) оказывается равной единице для любых, в том числе некогерентных процессов:

$$q_i^2(\omega)=\frac{\left[\operatorname{Re} G_{12}(\omega)\right]_i^2\left[\operatorname{Im} G_{12}(\omega)\right]_i^2}{G_1(\omega)\,G_2(\omega)}=$$

$$=\frac{(S_1S_2+C_1C_2)^2+(S_1C_2-C_1S_2)^2}{\left(S_1^2+C_1^2\right)\left(S_2^2+C_2^2\right)}=1. \qquad (6.53)$$

Этому соответствует тот факт, что формально для $N=1$ имеем динамический диапазон $D=\sqrt{N}=1$ (или $20\lg 1=0$ дБ), т. е. минимально различный сигнал равен максимальному, иначе говоря, никакие верные суждения о степени когерентности двух процессов нельзя составить по мгновенному значению функции когерентности. При $N\gg 1$ доверять можно лишь тем значениям $q(\omega)$, которые лежат в пределах динамического диапазона измерений $\geqslant 2/\sqrt{N}$ (см. 7.4, 7.5).

Многофункциональные анализаторы, обеспечивающие измерения взаимных спектров. Анализ методов измерений статистических характеристик случайных процессов показывает, что при определении различных характеристик встречаются одинаковые операции. Это обстоятельство позволило создать в последние годы многофункциональные анализаторы, обеспечивающие измерение нескольких статистических характеристик (последовательно или одновременно). Взаимный спектр оказался характеристикой, к измерениям которой обратились позднее, этим и объясняется, что большинство приборов для измерения взаимного спектра — это многофункциональные анализаторы, разработанные в последнее время. В гл. 4 приведены характеристики отечественных приборов Х6-4 и Х6-5, позволяющих определять составляющие взаимного спектра как преобразования Фурье от функции взаимной корреляции в диапазоне частот до 250 кГц.

Фирмой «Брюль и Къер» разработаны двухканальные анализаторы в реальном времени [4] типа 2032 и 2034, имеющие следующие характеристики:

— два процессора осуществляют быстрое преобразование Фурье двух входных процессов и представляют данные на экране ЭЛТ;

— общий рабочий диапазон 0—25,6 кГц включает 15 поддиапазонов 0—1,6 Гц; 0—3 Гц; 0—6,4 Гц и т. д. через октаву до 25,6 кГц;

— спектры представлены в виде 800 линий (полос) в одноканальном и двухканальном режимах с динамическим диапазоном 80 дБ;

— быстродействие прибора: 800 комплексных спектральных линий в течение 500 мс в одноканальном режиме (обеспечивается режим реального времени до 1,6 кГц) и 2×800 комплексных спектральных линий в течение 1 с в двухканальном режиме (режим реального времени до 800 Гц);

— усреднение линейное, экспоненциальное или пиковое (запоминание максимума) от 1 до 32×10^3 спектров;

— предусмотрено использование весовой функции Хэнинга в любом канале, преобразования Гильберта для получения огибающих во временной области, кепстрального анализа, однократного или двукратного интегрирования или дифференцирования;

— на выходе прибора и экране ЭЛТ могут быть представлены: вещественная и мнимая части, модуль, фаза, диаграмма Найквиста (годограф взаимного спектра), диаграмма Никольса (логарифмы модуля и фазы), спектры мощности двух процессов, временные осциллограммы и данные синхронного накопления во временной области, корреляционные и взаимокорреляционные функции, функции когерентности и различные частные случаи подобных характеристик (частотные или импульсные характеристики системы, передаточные функции, отношения сигнал/шум, вход-выход и т. д.);

— вывод данных на внешние регистраторы, двухканальный самописец 2308, цифровой магнитофон 7400 и другие с магистралью МЭК/ИИЭР.

Модель 2034 обеспечивает режим реального времени до 1,6 кГц в одноканальном или 800 Гц в двухканальном режимах. Анализатор 2032 аналогичен прибору 2034, но имеет повышенное быстродействие цифровых блоков, в результате чего режим реального времени обеспечивается до 10 кГц (одноканальный режим). Масса анализатора — 35 кг, габариты — $310\times430\times500$ мм.

6.4. Аналоговые корреляторы и методы повышения их быстродействия

Со времени первых опытов по практическому применению корреляционного анализа (Н. Винер впервые применил коррелятор для анализа биотоков в сороковых годах) было предложено множество методов и аналоговых схем для измерения корреляционных функций, отличающихся по способу ввода данных (осциллограммы, перфоленты, оптическая запись и т. д. или непосредственно анализируемый процесс), способу введения задержки, обычно связанному со способом ввода данных, способу умножения и интегрирования, методам представления результата (график, цифра, коэффициенты разложения) и т. д. Обзор различных методов и классификацию корреляторов по различным признакам можно найти в работах [13, 19, 22, 34, 39, 44, 50].

В последние годы выпускаются цифровые корреляторы, работающие в реальном масштабе времени. Однако и аналоговые

корреляторы или их блоки находят применение в современных цифровых вычислительных системах, в частности, в качестве устройств предпроцессорной обработки сигналов. Приведем краткий обзор принципов построения и основные характеристики корреляторов.

Мультипликативный аналоговый коррелятор содержит блок задержки, умножитель, интегратор и регистрирующий прибор. Корреляторы различаются по принципу действия перечисленных блоков [44].

Блок задержки удобно характеризовать добротностью или качеством — произведением верхней рабочей частоты на максимальную задержку, т. е. $f_в \tau_{max}$. Блок задержки на магнитной ленте представляет собой магнитофон с регулируемым расстоянием между головками записи и воспроизведения. Расстояние изменяется либо за счет перемещения головки воспроизведения либо вытягиванием петли ленты между головками. Добротность блока с магнитной лентой не превышает 10^3 и ограничивается флюктуациями скорости ленты, приводящими к снижению уровня корреляции. Дополнительные меры по стабилизации временного положения сигнала (компенсация детонации) позволяют существенно повысить добротность блока. Диапазон частот — звуковой и инфразвуковой (с модуляционным методом записи сигнала).

Блок запаздывания с магнитным барабаном в звуковом диапазоне частот имеет добротность $(2—5)\times 10^3$. Недостатком является большая масса и габариты блока.

Искусственные LC-линии обладают неплохими характеристиками, обеспечивая запаздывание 10—20 мс в звуковом диапазоне частот. Качество блока до 200—400 ограничивается нелинейной зависимостью запаздывания от частоты сигнала. Акустические линии применяются редко из-за больших габаритов ($\tau = l/c$, где l — длина линии, c — скорость звука), наличия отраженных сигналов, затухания звука и зависимости параметров линии от характеристик среды (температуры, влажности воздуха).

Блоки умножения, применяемые в корреляторах, строятся по одному из следующих принципов. Перемножение сводится к возведению в квадрат суммы и разности сомножителей:

$$[u_1(t) + u_2(t)]^2 - [u_1(t) - u_2(t)]^2 = 4u_1(t)\,u_2(t).$$

Квадрирование осуществляется цепью, квадратичная характеристика которой формируется методом кусочно-линейной аппроксимации параболы (см. 4.5) с помощью диодов с различными опорными напряжениями либо с помощью стабилитронов с делителями напряжения.

Другой способ состоит в определении отношения суммы и разности двух сигналов

$$Q = \frac{\overline{(u_1 + u_2)^2}}{\overline{(u_1 - u_2)^2}} = \frac{\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + 2\overline{u_1 u_2}}{\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} - 2\overline{u_1 u_2}}, \qquad (6.54)$$

откуда следует

$$r=\frac{\overline{u_1u_2}}{\sqrt{\overline{u_1^2}-\overline{u_2^2}}}=\frac{1}{2}\left(d+\frac{1}{d}\right)\frac{Q-1}{Q+1}, \qquad (6.55)$$

где $d=\sqrt{\overline{u_1^2}\,\overline{u_2^2}}$.

Анализ показывает, что значения $\overline{u_1u_2}$ определяются в основном величиной отношения Q, а первый множитель $M=0{,}5(d+1/d)$ слабо зависит от отношения $d=(\overline{u_1^2}/\overline{u_2^2})^{1/2}$. Например, при $d=1{,}4$ имеем $M=1{,}05$; при $d=2$ получим $M=1{,}25$. Следовательно, при измерениях достаточно поддерживать примерное равенство уровней исследуемых процессов. Преимуществом данного способа является получение нормированного значения функции корреляции, недостатком — необходимость вычислений $r(\tau)$ по формуле (6.55) либо по номограмме, составленной по этому выражению.

Усреднение в аналоговых корреляторах обычно выполняется RC-интегратором, который может работать в одном из следующих режимов: экспоненциальное текущее усреднение (снимается непосредственно сигнал с выхода RC-цепи) либо линейное шаговое интегрирование (снимается максимальное значение напряжения на выходе интегратора, накопленное за время $T \ll RC$, после чего RC-цепь разряжается и процесс повторяется при новом значении τ). В последнем случае используют активный RC-интегратор — операционный усилитель с емкостью в цепи обратной связи. Недостатком последовательного корреляционного анализа является большая его продолжительность. Для сокращения времени анализа применяют:

1) одновременный анализ в нескольких смежных полосах частот (используется общий блок задержки, после которого ставится несколько полосовых фильтров и умножителей);

2) гетеродинируют (см. гл. 5) сигнал в область низких частот, что позволяет ускорить анализ в $\Delta f/f_0$ раз, где Δf — полоса анализируемых частот, f_0 — средняя частота диапазона;

3) применяют транспонирование спектров процессов вверх, изменяя временной масштаб сигналов $\xi(K_\text{т}t)\eta[K_\text{т}(t-\tau)]=R_{\xi\eta}(K_\text{т}\tau)_\text{т}$, где $K_\text{т}$ — коэффициент транспонирования (см. гл. 5), что позволяет сократить продолжительность анализа в $K_\text{т}$ раз.

Простейшим транспонирующим устройством является магнитофон с несколькими различными скоростями протяжки ленты, $K_\text{т}$ может достигать нескольких десятков.

Существенно более совершенны цифровые транспонирующие устройства, для которых $K_\text{т}$ может достигать нескольких тысяч. Если выбрать $K_\text{т}$ равным числу запоминаемых ординат процесса, $K_\text{т}=N_1$, то достигается анализ в реальном масштабе времени, т. е. прибор последовательного принципа действия с транспонированием эквивалентен коррелятору параллельного действия. Однако коррелятор в этом случае должен работать на весьма

высоких частотах (несколько мегагерц), сложным оказываются также и другие узлы прибора, поэтому более целесообразна разработка цифровых корреляторов параллельного принципа действия.

Известно большое число других оригинальных методов корреляционного анализа, которые могут обеспечить преимущество в каких-либо частных случаях анализа процессов, но имеют ограничения по точности, диапазону задержек либо требуют высокого быстродействия узлов прибора, поэтому в акустических измерениях они не нашли применения [13, 19, 22, 34, 39].

6.5. Полярные корреляторы

В приборах этого типа производится измерение так называемой полярной (знаковой) корреляционной функции — корреляционной функции клиппированных сигналов

$$P_{\xi\eta}(\tau) = \operatorname{sgn} \overset{\circ}{\xi}(t) \operatorname{sgn} \overset{\circ}{\eta}(t-\tau), \tag{6.56}$$

где $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x<0 \\ +1 & x>0 \end{cases}$ — знаковая функция, получающаяся в результате двустороннего ограничения (клиппирования) сигнала.

Полярная корреляционная функция представляет собой разность вероятностей совпадения и несовпадения знаков сигналов $P_{\xi\eta} = P_{\pm\pm} - P_{\pm\mp}$. Полярная (знаковая) корреляционная функция просто связана с нормированной корреляционной или взаимной корреляционной функцией процесса с симметричной плотностью распределения вероятностей:

$$r_{\xi\eta}(\tau) = \sin\left[\frac{\pi}{2} P_{\xi\eta}(\tau)\right] \tag{6.57}$$

или

$$P_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{\pi} \arcsin r_{\xi\eta}(\tau). \tag{6.58}$$

Полярные корреляторы наиболее удобны вследствие весьма удачного сочетания свойств этого метода с требованиями к корреляционным измерениям акустических процессов и полей:

— схема измерений вероятности сочетания знаков сигналов проще и работает точнее умножителя;

— знаковая корреляционная функция дает оценку нормированной корреляционной функции, освобождая исследователя от измерений уровней $\overline{\xi^2}$ и $\overline{\eta^2}$ и выполнения операции нормирования $r_{\xi\eta}(\tau) = R_{\xi\eta}(\tau) / [\overline{\xi^2}\overline{\eta^2}]^{1/2}$, которая вносит дополнительные погрешности;

— знаковая корреляционная функция не зависит от уровней сигналов, что весьма удобно для измерений корреляционных функций нестационарных процессов;

— клиппирование сигналов перед проведением измерений существенно облегчает построение блока запаздывания, который может быть построен с применением регистров сдвига — типовых элементов цифровой вычислительной техники, а схемы совпадения (несовпадения) полярностей сигналов также являются типовыми в вычислительной технике;

— так как корреляционные измерения при решении большинства акустических задач необходимо производить в смежных полосах частот шириной в долю октавы, то при этом у отфильтрованных процессов образуется симметричная форма плотности распределения вероятностей, близкая к гауссовской, что снимает какие-либо ограничения на применение знаковой функции корреляции.

Таким образом, полярный (знаковый) метод определения корреляционной функции радикальным образом изменяет подход к конструированию прибора, явно сулит существенные преимущества при применении элементов цифровой вычислительной техники, способствует созданию простых, легких, малогабаритных приборов высокого класса точности. В случае необходимости измерения функции корреляции широкополосных негауссовских процессов с несимметричной плотностью вероятности можно применить метод подшумливания, который снимает это единственное ограничение знакового способа измерения корреляционных функций [19, 34, 39, 44]. Сущность метода состоит в том, что при определении полярной корреляционной функции к каждому из исследуемых сигналов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ добавляются вспомогательные независимые случайные процессы $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с равномерным распределением вероятностей, что приводит к следующему результату:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{\overline{[\xi(t) + u_1(t)]\,[\eta(t+\tau) + u_2(t+\tau)]}}{[\overline{x^2(t)}\;\overline{y^2(t)}]^{1/2}} = \frac{R_{\xi\eta}(\tau)}{[\overline{x^2(t)}\;\overline{y^2(t)}]^{1/2}},$$

где $\overline{x^2(t)} = \overline{[\xi(t) + u_1(t)^2]} \approx \text{const}$ вследствие $\overline{\xi_1^2(t)} \ll \overline{u_1^2(t)} = \text{const}$,

а также $\overline{y^2(t)} = \overline{[\eta(t + u_2)(t)]^2} \approx \text{const}$ вследствие $\overline{\eta^2(t)} \ll \overline{u_2^2(t)} = \text{const}$.

С помощью полярного коррелятора измеряется ненормированная корреляционная функция, результат измерений становится независящим от вида распределения вероятности исследуемых сигналов, но ухудшаются свойства прибора: увеличиваются флюктуации на выходе прибора, функция корреляции не нормируется, становятся невозможными измерения нестационарных процессов. Необходимость в применении метода подшумливания при акустических измерениях возникает не так уж часто.

Схемы полярных корреляторов. Поскольку приборы этого типа промышленностью не выпускаются, приходится изготавливать их своими силами. Ниже приводятся простые схемы узлов полярных корреляторов.

На рис. 6.9 показана схема одного звена, хорошо зарекомендовавшего себя усилителя-ограничителя. Двустороннее ограничение производится диодным мостом (Д-220). При подаче слабого сигнала его величина незначительно ослабляется за счет делителя, образованного небольшим сопротивлением диодов мостика, находящегося в проводящем состоянии, и входным сопротивлением полупроводникового усилителя. При большем уровне сигнала, начиная с определенного значения, диоды поочередно запираются (в зависимости от полярности приложенного входного напряже-

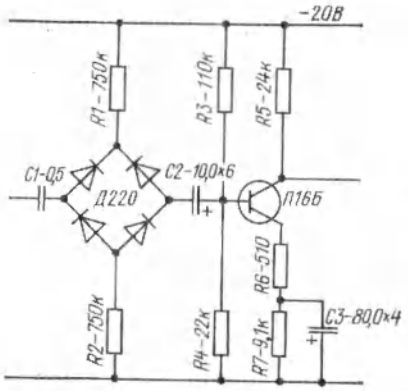

Рис. 6.9. Схема каскада усилителя-ограничителя.

ния), в результате напряжение на входе усилителя далее не растет, сигнал ограничивается. Схема является симметричной, т. е. работает одинаково при любой полярности входного напряжения. Для получения большого динамического диапазона несколько таких каскадов соединяются последовательно. Трехкаскадная схема обеспечивает четкое ограничение сигналов от 3 мВ до 10 В, т. е. в диапазоне 70 дБ.

Далее ограниченные в обоих каналах сигналы подаются на схему совпадения (рис. 6.10), представляющую собой два двухполупериодных детектора суммы и разности клиппированных сигналов, работающих на общую нагрузку *R13*, со встречным включением выходных ЭДС. Интегрирование осуществляется простой RC-цепочкой, изменение постоянной времени производится за счет переключения емкостей. Интегратор на рис. 6.10 является высокоомным и допускает подключение нагрузки с сопротивлением более 1 МОм. Можно применить и низкоомный интегратор, уменьшив сопротивление *R14* до 50—100 кОм и соответственно увеличив (в 10—20 раз) значения емкостей. В этом случае самописец можно подключить непосредственно к выходу интегратора.

Детектирование суммы и разности клиппированных сигналов с последующим вычитанием выходов детекторов означает, что вычисляется разность между вероятностями совпадения и несовпадения знаков:

$$u_{\text{вых}} = u_0 (P_{\pm\pm} - P_{\pm\mp}) = 2u_0 \frac{2}{\pi} \arcsin r(\tau). \qquad (6.59)$$

При $r(\tau)=0$ напряжение на выходе схемы равно нулю, а при наличии корреляции знак напряжения соответствует знаку корреляционной функции. Приведенная схема, учитывающая совпадение и несовпадение полярностей сигналов, обладает высокой стабильностью, высоким динамическим диапазоном по выходу и не требует никаких регулировок и калибровок перед измерениями. Это выгодно отличает ее от простой схемы совпадений, вычисляю-

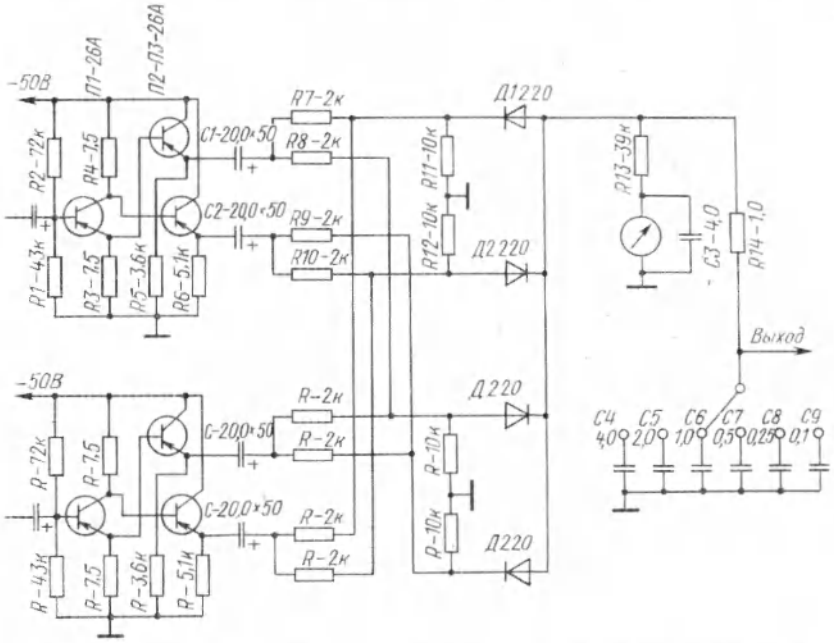

Рис. 6.10. Схема вычисления знаковой функции полярного коррелятора.

щей только вероятность совпадения знаков и имеющей при $r(\tau)=0$ некоторое напряжение на выходе, которое требует регулировок и является источником нестабильности показаний прибора, затрудняющих измерения малых значений корреляции

$$u_{\text{вых}}=u_0P_{\pm\pm}=u_0\left[1+\frac{2}{\pi}\arcsin r(\tau)\right]. \qquad (6.60)$$

Таким образом, счетно-решающий блок полярного коррелятора представляет собой простое, надежное и малогабаритное устройство. Бинарный характер сигналов на выходе усилителей-ограничителей позволяет использовать методы цифровой вычислительной техники для задержки сигналов. При этом блок задержки должен включаться между одним из усилителей-ограничителей и схемой совпадений, в отличие от аналогового блока задержки, который выгоднее включать до клиппирования сигналов, так как спектр последних в несколько раз шире спектра исследуемых

процессов. В качестве примера укажем на использование цифровой линии задержки, представляющей собой регистр сдвига, дающий задержку сигналов на время

$$\tau_з = (q-1)\,T_т = (q-1)\,\frac{1}{f_т}, \qquad (6.61)$$

где $T_т$ — период следования тактовых импульсов.

Как видно, регистр сдвига, используемый в качестве блока запаздывания, представляет собой гибкую систему, позволяющую легко регулировать время запаздывания либо скачками — путем изменения числа ячеек q регистра сдвига, либо плавно — путем изменения частот $f_т$ тактовых импульсов. Чтобы правильно передать форму сигнала, тактовые импульсы должны следовать чаще, чем два импульса на период наивысшей частоты $f_в$ спектра исследуемого сигнала (по теореме Котельникова). Следовательно, для получения больших значений задержки приходится выбирать большое количество ячеек. Например, $q=80$ позволяет измерять при $f_в=5000$ Гц корреляционную функцию до максимальной задержки $\tau_{max}=(q-1)\,(2/f_в)\approx 30$ мс. На более низких частотах можно производить измерения соответственно при бо́льших значениях задержки. Несмотря на большое количество ячеек регистра сдвига, блок задержки в цифровой форме получается компактнее, чем аналоговый. Полярный дискретный коррелятор (КОД-1) последовательного принципа действия [51], содержащий усилители-ограничители (см. рис. 6.9), регистр сдвига [44] для создания линии задержки, схему совпадений (см. рис. 6.10) с интегратором и регистрирующий прибор имеет следующие параметры: частотный диапазон 5 Гц—20 кГц; динамический диапазон по входу 60 дБ (3 мВ—3 В); поддиапазоны задержки времени 0,05—1, 0,5—10, 0,2—4, 2—40 мс; продолжительность анализа 3, 10 или 30 с; габариты прибора 430×200×240 мм. Применение современных интегральных схем и модулей позволяет создать более компактный и совершенный прибор.

Влияние уровня ограничения на результаты измерений. При идеальном ограничении нормальных случайных процессов связь полярной функции корреляции $P(\tau)$ с нормированной функцией корреляции $r(\tau)$ описывается выражением (6.56). Однако реальная характеристика ограничителя имеет вид плавной кривой с линейным участком при малых сигналах. Поэтому процесс ограничения, хорошо преобразующий большие выбросы сигнала, не затрагивает малых флюктуаций процесса (рис. 6.11, *а*). Возникающие вследствие этого погрешности измерений функции корреляции можно оценить, вычислив корреляционную функцию на выходе так называемого сглаженного ограничителя [36], характеристика которого (см. рис. 6.11, *а*) аппроксимирует характеристику реального ограничителя и имеет вид

$$\eta(z) = \frac{2a}{\gamma\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}\,dx, \qquad (6.62)$$

где a — постоянная, определяющая уровень ограниченного сигнала; γ — постоянная, обратная наклону характеристики.

В результате вычислений получаем

$$P_{\xi\eta}(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin\left[\frac{r(\tau)}{1+(\gamma/\sigma)^2}\right]. \qquad (6.63)$$

Если $\sigma \gg \gamma$, то сглаженный ограничитель переходит в идеальный, а (6.63) в (6.58). При конечной дисперсии σ^2 процесса значение $P(\tau)$ получается заниженным и, если шкала коррелятора (или коррелограммы) отградуирована при больших уровнях сигнала, то

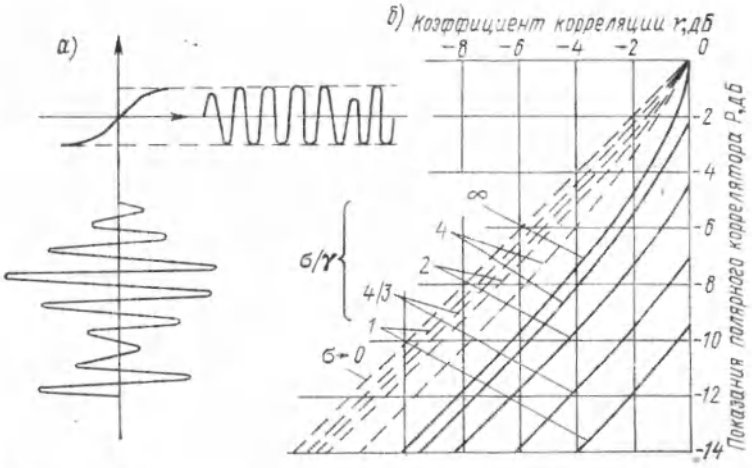

Рис. 6.11. Корреляция на выходе сглаженного ограничителя: *а* — преобразование входного сигнала ограничителем; *б* — зависимость показаний коррелятора от уровня ограничения.

$p(\tau)=2/\pi \arcsin[r(\tau)/(1+(\gamma/\sigma)^2]$; — — — $p(\tau)/p(0)$.

значение коэффициента корреляции считывается с ошибкой. Например, при $\sigma=\gamma$ значение $P(\tau)$ занизится вдвое. В качестве допустимого порога ограничения можно принять такое значение σ_0, при котором выходной уровень $P(0)$ при $r=1$ оказывается равным 0,83 максимального, тогда $\sigma_0=4\gamma$. Равенство $\sigma=\gamma$ соответствует условию $\sigma/\sigma_0=0{,}25$. Уменьшение входного сигнала ниже порогового уровня переводит полярный коррелятор в обычный мультипликативный, сигнал на выходе которого зависит от дисперсии исследуемого сигнала:

$$P(\tau) \to \frac{2a^2}{\pi}\frac{\sigma^2 r(\tau)}{\sigma^2+\gamma^2} \approx \frac{2a^2}{\pi\gamma^2}\sigma^2 r(\tau) = \frac{2a}{\pi\gamma^2} R(\tau). \qquad (6.64)$$

По выражению (6.63) построен график на рис. 6.11, *б*, показывающий, что по мере уменьшения σ происходит не только снижение показаний полярного коррелятора, но и линеризация его шкалы. Погрешность зависит как от уровня входного сигнала, так и от уровня корреляции исследуемых величин. Погрешность от

первой из названных причин можно устранить путем повторного нормирования коррелограммы относительно значения $P(0)$, т. е. отсчитывая со шкалы величину

$$P_{\xi}(\tau)_{\text{н}} = \frac{P_{\xi}(\tau)}{P_{\xi}(0)} = \left[\arcsin \frac{r(\tau)}{1+(\gamma/\sigma)^2}\right]\left[\arcsin \frac{1}{1+(\gamma/\sigma)^2}\right]^{-1}, \quad (6.65)$$

Кривые, соответствующие различным отношениям γ/σ, изображены пунктиром на рис. 6.11, *б*. В этом случае остается лишь погрешность за счет изменения степени нелинейности шкалы и максимальная погрешность не может превышать 4 дБ. Такой способ нормирования всегда можно осуществить при измерении корреляционных или взаимных корреляционных функций стационарных процессов, когда дисперсия σ_{ξ}^2 процесса не изменяется во время измерений. Однако при исследовании нестационарных процессов или измерении безразмерного взаимного спектра с помощью схемы совпадения полярностей вследствие изменения σ во времени такое повторное нормирование применять невозможно и для ограничения ошибок остается лишь контролировать, чтобы дисперсия сигналов, подаваемых на вычислительный блок, не падала ниже порогового уровня.

6.6. Дискретные корреляторы и корреляционный анализ на ЭВМ

Параллельные корреляторы. Многофункциональные приборы параллельного принципа действия, позволяющие среди других характеристик измерять также и корреляционные функции, были кратко описаны в 4.4 — это приборы типа Х6-4 и Х6-5 (параллельный корреляционный анализ по 100 точкам), Ф37 (256, 512 или 1024 точки корреляционной функции), анализатор типа 3721А (Hewlett Packard, США). Остановимся более подробно на последнем приборе. Прибор построен на принципах дискретного вычислительного устройства, хотя и содержит некоторые аналоговые узлы.

Корреляционная функция измеряется по 100 точкам по принципу циклического вычисления ординат (24-битовых слов) функции, которые накапливаются в памяти — ультразвуковой линии из стекла, работающей в режиме рециркуляции. Усреднение может выполняться в двух режимах — линейном и экспоненциальном. Один из входных процессов квантуется на семь уровней (прямой канал), другой — на три уровня (канал с задержкой) следующим образом: 0, +1, +2, +4 с быстродействием 1 мкс на преобразование сигнала в трехбитовое число. Теория и расчетные оценки показывают, что малое число уровней квантования одного из сигналов несущественно снижают точность получения результата (см. ниже).

Корреляционный анализ на ЭВМ. Дискретизация процесса во времени и преобразование квантованных уровней сигнала в цифровой код превращает исходный сигнал из аналоговой формы

в последовательность чисел. Казалось бы, эти преобразования и обработку полученной последовательности чисел можно быстро и с высокой точностью выполнить на ЭЦВМ. Однако применение универсальных ЭВМ для статистического, в том числе корреляционного анализа в звуковом диапазоне частот, оказывается недостаточно эффективным — общеизвестное быстродействие ЭВМ является чрезвычайно высоким по отношению к ручному счету и недостаточно высоким по сравнению с аналоговыми корреляторами. Поэтому применяют следующие приемы для ускорения вычислений корреляционных функций: уменьшение числа уровней квантования; вычисление знаковой функции корреляции; применение метода некоррелированных выборок; определение функции корреляции с использованием операций БПФ для нахождения взаимного спектра, а затем (в случае необходимости) корреляционной функции как БПФ от взаимного спектра. Рассмотрим эти приемы вычислений.

Уменьшение числа уровней квантования (вычисление по методу Стилтьеса) целесообразно применять при создании цифровых корреляторов. Расчетные оценки показывают [22], что погрешность слабо проявляется при уменьшении числа n уровней квантования и составляет $\delta_к \approx 3/n^2$ (например, ниже 10 % при $n=4$), дополнительная погрешность — 0,7; 0,013; $2{,}5\times10^{-4}$ при числе уровней квантования 2; 3; 4 соответственно (погрешность от взаимной корреляции входного сигнала и ошибки квантования). В ряде случаев квантуют по уровню сигнал в одном канале, в предельном случае при $n=2$ получают релейную функцию корреляции. Уменьшение числа уровней квантования в обоих каналах приводит, как предельный случай, к знаковой (полярной) корреляционной функции.

Преимущества вычисления знаковой (полярной) корреляционной функции в аналоговых корреляторах обсуждались выше. При анализе на ЭВМ появляется еще одно преимущество этого метода — уменьшение времени вычислений знаковой функции по сравнению с мультипликативной.

Метод некоррелированных выборок являлся основным способом ускорения дискретного корреляционного анализа до широкого внедрения операций БПФ. Метод основан на различном подходе к определению шагов квантования и представления корреляционной функции. Так, для точного представления корреляционной функции выбирают 6—10 точек на период функции. Этот же шаг Δt применяют и к квантованию процесса во времени. Между тем теоретические исследования показывают, что при определении среднего значения флюктуирующей величины (в нашем случае при усреднении произведений ординат процессов) существует оптимальный шаг фиксации значений, при котором дисперсия среднего арифметического значения выбранных ординат будет не больше дисперсии интегрального среднего. Величина оптимального шага квантования зависит от вида корреляционной функции усредняемого процесса и длительности отрезка реализации.

Интересно, что при малой длительности реализации дисперсия среднего арифметического ординат с оптимальным шагом может быть даже меньше, чем дисперсия интегрального среднего. При больших длительностях реализаций, с которыми приходится иметь дело при акустических измерениях, оптимальный шаг квантования можно считать равным интервалу корреляции $\tau_к$ исследуемого процесса, что на порядок и более отличается от шага Δt, принимаемого из условия достоверного воспроизведения всего процесса.

Таким образом, метод, называемый методом парных некоррелированных выборок, состоит в том, что в одном канале выборки берутся с шагом, равным интервалу корреляции процесса, во втором — сдвинутые относительно выборок первого канала на малый шаг Δt, необходимый для достоверного представления корреляционной функции. Перемножая пары таких выборочных значений (или определяя вероятность совпадения их знаков), получают экономное вычисление корреляционной функции, представляемой с заданным шагом Δt и в то же время с минимальным числом перемножаемых выборок процессов, что сокращает продолжительность вычислений, не увеличивая флюктуационную погрешность. В случае недостаточного быстродействия ЭВМ выборки можно брать и с еще большим интервалом $\Delta\tau > \tau_к$, но при этом будет происходить потеря информации в число раз $\Delta\tau/\tau_к$ и соответственно возрастать случайная погрешность измерений в $\sqrt{\Delta\tau/\tau_к}$ раз. Последнее можно компенсировать некоторым увеличением длительности анализа, что при анализе высокочастотных процессов не встречает затруднений.

В связи с широким распространением метода быстрого преобразования Фурье (БПФ) и разработкой соответствующих стандартных программ, появилась возможность применять этот метод при обработке экспериментальных данных на универсальных ЭВМ. Сторонники этого метода [72] считают, что целесообразно применять БПФ не только при спектральном анализе процессов, но и при вычислениях ряда характеристик. Так, рекомендуется вычислять корреляционную функцию, используя БПФ дважды — сначала для вычисления спектра, а затем — корреляционной функции как БПФ от энергетического спектра. Расчеты показывают, что прямой метод корреляционного анализа требует выполнения $V/4(N/2+3)$ операций умножения над N выборками процесса, а определение корреляционной функции через операции БПФ — $3N\log_2 N$ операций. Нетрудно, однако, видеть, что применение метода некоррелированных выборок приводит к сокращению на порядок числа операций, поэтому в ряде случаев последний может конкурировать с БПФ. Отметим, что применение БПФ рекомендуется для определения операции свертки (фильтрации), двумерного преобразователя Фурье, двумерной фильтрации [72] и т. д.

Глава 7. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОВ

7.1. Разделение процессов различной физической природы

Корреляционные методы позволяют разделять сигналы различной физической природы (собственные шумы тракта, акустические сигналы или турбулентные пульсации давления), отличающиеся различным временем запаздывания (прямой и отраженный сигналы или в общем случае сигналы, прошедшие различными путями) либо различными источниками, их порождающими. Рассмотрим особенности применения корреляционных методов измерений.

Измерение слабых сигналов на фоне собственных шумов измерительного тракта. Если измеряемый акустический сигнал на выходе приемника настолько мал, что оказывается соизмеримым с собственными шумами измерительного тракта или же лежит ниже этих шумов, а спектры сигнала и собственных шумов — сплошные, то прямое измерение спектра сигнала становится невозможным. В этом случае рекомендуется производить измерения двухканальным трактом и применять взаимокорреляционную обработку сигналов.

Если акустические приемники расположены достаточно близко друг к другу на расстоянии d менее длины волны $d \ll \lambda$, то такая приемная система ненаправленна, если же $d > \lambda$, то необходимо дополнительно учесть направленные свойства системы. Рассмотрим первый случай, $d \ll \lambda$. На выходе каждого из измерительных трактов будут присутствовать сигнал (p_{c1} и p_{c2}) и собственная помеха ($p_{п1}$, $p_{п2}$). Сигналы коррелированы $\overline{p_{c1}(t)\, p_{c2}(t)} = R_{12}(\tau)$ и в случае равенства чувствительности каналов тракта $R_{12}(\tau) = p_c^2$, а помехи некогерентны, т. е. $\overline{p_{п1}(t)\, p_{п2}(t)} = 0$. При конечном времени усреднения T корреляционная функция, измеренная между выходными процессами двух трактов в выбранной полосе, будет иметь две составляющие

$$\overline{[p_{c1}(t) + p_{п1}(t)]\,[p_{c2}(t) + p_{п2}(t)]}^{T} = p_c^2(t) + \varepsilon(t), \qquad (7.1)$$

где $\varepsilon(t)$ — случайные флюктуации, обусловленные конечным временем усреднения.

Переходя к нормированным величинам, получаем

$$r_{12}(0)_T = \frac{\overline{p_c^2}}{\sqrt{\overline{(p_{c1} + p_{п1})^2}\,\overline{(p_{c2} + p_{п2})^2}}} + \zeta(t). \qquad (7.2)$$

Очевидно, что для измерения $\overline{p_c^2} \ll \overline{p_п^2}$ необходимо выбрать параметры корреляционного анализа такими (гл. 6), чтобы флюктуационная погрешность $\delta_ш$, являющаяся нормированным среднеквадратичным значением флюктуаций $\zeta(t)$ на выходе коррелятора, была, по крайней мере, вдвое меньше первого слагаемого в (7.2), т. е. динамический диапазон анализа должен быть $D \geqslant 10 \lg(\overline{p_п^2}/\overline{p_c^2})$. Для получения частотной зависимости $\overline{p_c^2}(\omega)$ можно применить два способа анализа: измерять взаимные корреляционные функции в смежных стандартных полосах частот (например, третьоктавных), либо взаимные спектры. Выбор параметров взаимоспектрального анализа должен производиться также из условия выполнения динамического диапазона измерений.

Сходная ситуация складывается при измерениях акустических шумов в условиях турбулентных помех, создаваемых обтеканием приемника потоком жидкости или газа. В других случаях, наоборот, необходимо измерить спектр турбулентных пульсаций давления при наличии акустических помех. Рассмотрим методы измерений в этих двух случаях.

Корреляционный метод выделения акустического шума. Для снижения турбулентной помехи используют микрофон обтекаемой формы либо помещают микрофон в звукопрозрачный обтекатель, однако при больших скоростях потока эти меры оказываются недостаточно эффективными. Если акустический сигнал является, как и турбулентная помеха, широкополосным, то его выделение (т. е. измерение параметров) возможно лишь путем измерения функций взаимной корреляции или взаимных спектров.

При измерениях по методу К. Гоффа (см. [44]) в поток помещают два микрофона на небольшом расстоянии друг от друга. Каждый из микрофонов воспринимает сигнал p_{S1}, p_{S2}, собственный шум обтекания p_{N1}, p_{N2}, а также более слабую помеху βp_{N2}, βp_{N1} ($\beta \ll 1$ — коэффициент), обусловленную излучением турбулентности, возникающей при воздействии потока на соседний микрофон. Производится измерение функции взаимной корреляции за время T:

$$R_{12}(t, \tau) = \overline{[p_{S1}(t) + p_{N1}(t) + \beta p_{N2}(t)] \times}^{\rightarrow}$$

$$\overset{\rightarrow}{\times} \overline{[p_{S2}(t-\tau) + p_{N2}(t-\tau) + \beta p_{N1}(t-\tau)]}^{(T)} =$$

$$= R_S(\tau - t_з) + \beta R_{N1}(\tau) + \beta R_{N2}(\tau) + \varepsilon(t). \qquad (7.3)$$

В силу независимости сигнала p_S и обеих составляющих помехи p_{N1}, p_{N2} (как по отношению к сигналу, так и между собой), т. е. $\overline{p_S p_{Ni}} = 0$, $\overline{p_{N1} p_{N2}} = 0$, функция взаимной корреляции выходов двух микрофонов будет определяться главным образом акустическим сигналом. Процесс $\varepsilon(t)$ отражает наличие флюктуаций на выходе

коррелятора вследствие конечного времени усреднения T. Составляющая же βR_N обусловлена лишь наличием слабого ($\beta \ll 1$) акустического поля турбулентной помехи вблизи каждого из микрофонов и может быть уменьшена при увеличении расстояния между микрофонами. По результатам измерений Гоффа при скорости потока 4,5 м/с для расстояния между микрофонами 12 мм было найдено $\alpha = 20 \lg(1/\beta) = 20$ дБ, а для расстояния 50 мм $\alpha = +53$ дБ. Таким образом, корреляционная методика позволяет в этих условиях улучшить соотношение сигнал/шум в $1/\sqrt{2\beta}$ раз (по звуковому давлению) или на ($\alpha/2$—3) дБ.

Если необходимо в результате измерений получить спектр акустического сигнала, то один из способов состоит в вычислении преобразования Фурье от функции взаимной корреляции (7.3) при условии, что первое слагаемое является преобладающим. По второму способу производят корреляционные измерения в смежных стандартных (часть октавы) полосах частот. Значение максимума измеренной нормированной функции корреляции, наблюдаемое при $\tau = t_з$, непосредственно характеризует долю сигнала (вклад по мощности) в суммарном шуме в данной полосе частот

$$r_{12}(\tau) = \frac{R_{12}(\tau)}{(p_S + p_{N1} + \beta p_{N2})^2} \approx \frac{\overline{p_S^2}}{\overline{p_S^2} + \overline{p_N^2}} r_S(\tau - t_з) + \\ + 2\beta \frac{\overline{p_N^2}}{\overline{p_S^2} + \overline{p_N^2}} r_N(\tau). \qquad (7.4)$$

Тогда уровень среднеквадратичного значения акустического давления (в децибелах) находится вычитанием:

$$20 \lg \left(\overline{p_S^2}\right)^{1/2} = 20 \lg \left(\overline{p_S^2} + \overline{p_N^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} 20 \lg |r_{12}(t_з)|, \qquad (7.5)$$

где значение уменьшаемого отсчитывается непосредственно по шкале шумомера, подключенного к отградуированному микрофону, а значение вычитаемого (вклада) является уровнем максимума нормированной корреляции ($r_S = 1$ при $\tau = t_з$), уменьшенным вдвое (в децибелах). При проведении измерений по этому методу из состава измерительной аппаратуры можно исключить блок задержки, а максимум функции корреляции находить путем ориентации микрофонов на источник звука, располагая микрофоны симметрично.

Спектр акустического сигнала в условиях ветровой помехи может быть непосредственно определен путем измерения взаимного спектра процессов, воспринимаемых двумя микрофонами,

$$G_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau - t_з) e^{-i\omega\tau} d\tau = G_S(\omega)[\cos \omega t_з - i \sin \omega t_з] + G_N(\omega). \qquad (7.6)$$

Модуль взаимного спектра будет равен спектру мощности сигнала при соответствующем выборе расстояния между микрофонами как было указано выше, чтобы получить превышение уровня взаимного спектра G_S (или корреляции) сигнала над уровнем взаимного спектра G_N помехи на всех частотах. Если микрофоны расположены симметрично относительно источника звука, так что $t_з \to 0$, то искомую характеристику можно получить на выходе измерителя действительной составляющей взаимного спектра:

$$\mathrm{Re}\,[G_{12}(\omega)] = G_S(\omega)\cos\omega t_з \to G_S(\omega), \quad t_з \to 0. \tag{7.7}$$

Так как осцилляции этой составляющей отсутствуют ($\cos\omega t_з = 1$), то в качестве фильтров в данном случае могут быть выбраны два идентичных комплекта третьоктавных фильтров. Тогда анализатор взаимного спектра вырождается в тракт, состоящий из набора двухканальных фильтров, умножителя и интегратора. К такому же тракту приходим и при упрощении коррелятора, как было отмечено выше, в чем, в частности, и обнаруживается родство рассмотренных методов измерений.

«Антикорреляционный» метод выделения турбулентных пульсаций давления. При экспериментальных исследованиях турбулентных пульсаций давления помехой может являться акустический шум аэрогидродинамических установок, создающих поток. Вследствие широкополосного характера спектров псевдозвука и акустического шума разделение этих процессов методами фильтрации невозможно. Однако используя различие в их пространственных корреляционных характеристиках, удается измерить спектр турбулентных пульсаций давления так называемым «антикорреляционным» методом.

Коэффициент продольной пространственно-временной корреляции пульсаций давления в узкой полосе частот Δf для безградиентного пограничного слоя

$$r_p(x,\ 0,\ 0,\ \tau) = e^{-0{,}7\frac{xf}{u_c}}\,\frac{\sin\,[\pi\Delta f\,(\tau - x/u_c)}{\pi\Delta f\,(\tau - x/u_c)}\cos\left[2\pi f_0\left(\tau - \frac{x}{u_c}\right)\right] \tag{7.8}$$

хорошо согласуется с экспериментом. Здесь $\lambda_т = u_c/f$ — масштаб вихря; x — пространственный интервал вдоль по потоку; $u_c \approx 0.8u$ — скорость конвективного переноса вихрей; u — скорость набегающего потока. Коэффициент корреляции пульсаций давления достаточно быстро убывает при пространственном интервале $x = 5\lambda_т$, а при оптимальной задержке $\tau = x/u_c$ практически становится равным нулю. При весьма узких полосах (десятки герц) затухание функции корреляции определяется лишь экспоненциальным множителем

$$r_p(x,\ 0,\ 0,\ \tau) \approx e^{-0{,}7\frac{xf}{u_c}}\cos\,[2\pi f_0\,(\tau - x/u_c)]. \tag{7.9}$$

Функция пространственно-временной корреляции акустической составляющей шума для бегущей волны, измеряемой в полосе Δf, имеет вид

$$r_{\text{а}}(x,\ \tau)=\frac{\sin\left[\pi\,\Delta f\left(\tau-\frac{x\cos\alpha}{c}\right)\right]}{\pi\,\Delta f\left(\tau-\frac{x\cos\alpha}{c}\right)}\cos\left[2\pi f_0\left(\tau-\frac{x\cos\alpha}{c}\right)\right]. \quad (7.10)$$

В случае диффузного поля при достаточно узкой полосе Δf

$$r_{\text{д}}(d,\ \tau)=\frac{\sin kd}{kd}\,\frac{\sin\pi\,\Delta f\tau}{\pi\,\Delta f\tau}\cos\omega\tau. \quad (7.11)$$

Сопоставляя (7.9) и (7.8) с (7.6) или (7.7), можно видеть различие в интервалах корреляции: для турбулентных пульсаций давления $\lambda_{\text{т}}=u_c/f$, для акустического давления $x_{\text{а}}=c/f\cos\alpha$ — в случае бегущей волны или $d_0=\lambda_{\text{а}}=c/f$ — для диффузного поля. При дозвуковых скоростях набегающего потока

$$\frac{x_{\text{а}}}{\lambda_{\text{т}}}\geqslant\frac{c}{\cos\alpha u_c}\gg 1,\ \ c\gg u_c. \quad (7.12)$$

Используя это различие в величине пространственного интервала корреляции акустической и турбулентной составляющих, удается измерить спектр последних даже в тех случаях, если он лежит ниже спектра акустического шума.

Исследуемые пульсации давления измеряются двумя приемниками, установленными на таком малом расстоянии друг от друга, при котором акустические сигналы были бы коррелированными, а турбулентные — некоррелированными, т. е. $\lambda_{\text{а}}<d<\lambda_{\text{т}}$. Сигнал в каждом канале усиливается, фильтруется и подается на вычитающую схему. Тогда акустические сигналы $p_{\text{а}}$ при вычитании гасят друг друга, а турбулентные $p_{\text{т}}$ — суммируются энергетически, как некоррелированные сигналы. Среднеквадратичное значение напряжения на выходе вычитающей схемы равно

$$\left[\overline{(e_1-e_2)^2_{RC}}\right]^{1/2}=\left\{\overline{[K_1(p_{\text{т}1}+p_{\text{а}1})-K_2(p_{\text{т}2}-p_{\text{а}2})]^2_{RC}}\right\}^{1/2}\approx$$
$$\approx\left\{2K^2\overline{p_{\text{т}}^2}\left(1+\frac{\Delta\overline{P_a^2}}{2K^2\overline{p_{\text{т}}^2}}\right)\right\}^{1/2}+\varepsilon(t), \quad (7.13)$$

где $K_1=K_2=K$ — коэффициенты передачи первого и второго каналов, включая и чувствительности приемников давления; $\varepsilon(t)$ — флюктуации вследствие конечности времени усреднения.

При выводе предполагалось, что взаимная корреляция турбулентных пульсаций мала $\overline{p_{\text{т}1}p_{\text{т}2}}\ll\overline{p^2_{\text{т}1}}\approx\overline{p^2_{\text{т}2}}$, а акустические давления сильно коррелированы и близки по величине, так что

$$\overline{\Delta p^2_{\text{н}}}=\overline{(K_1p_{\text{а}1}-K_2p_{\text{а}2})^2}=\left[K_1^2\overline{p^2_{\text{а}1}}+K_2^2\overline{p^2_{\text{а}2}}-2\left(\overline{p^2_{\text{а}1}}\,\overline{p^2_{\text{а}2}}\right)^{\frac{1}{2}}r_{\text{а}}(x)\right]\ll\overline{p^2_{\text{т}}}. \quad (7.14)$$

Если путем регулировки коэффициента передачи одного из каналов добиться, чтобы $K_1^2\overline{P_{a1}^2} = K_2^2\overline{P_{a2}^2} = K\overline{P_a^2}$, то $\overline{\Delta P_a^2}$ будет минимальной:

$$\left(\overline{\Delta p_a^2}\right)_{min} = 2K^2\overline{p_a^2}\,[1 - r_a(x)], \tag{7.15}$$

определяя этим минимальную относительную погрешность измерений, смысл которой ясен из (7.11), т. е.

$$\left(1 + \frac{\overline{\Delta p_a^2}}{2K^2\overline{p_т^2}}\right)^{1/2} = 1 + \delta_{min}, \tag{7.16}$$

откуда

$$\delta_{min} = \frac{1}{2}\,D_{a.\,т}^2\,[1 - r_a(x)], \tag{7.17}$$

где $D_{a.\,т} = (\overline{p_a^2}\,/\overline{p_т^2})^{1/2}$ — динамический диапазон измерений турбулентной составляющей на фоне акустической помехи. Например, при $\delta = 0{,}1$ и $r = 0{,}98$ имеем $D_{a.\,т} = 3$, т. е. удается выделить уровни турбулентных пульсаций, лежащие ниже уровня акустической составляющей лишь на 10 дБ. Отсюда видно, насколько важно получить возможно более высокий уровень корреляции акустических составляющих. Для этого приемники следует помещать не слишком далеко друг от друга, тогда корреляция в (7.8) определяется лишь последним множителем

$$r_a(x,\ 0) \approx \cos 2\pi\,\frac{x}{\lambda} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(2\pi\,\frac{x}{\lambda}\right)^2. \tag{7.18}$$

Например, чтобы обеспечить $r = 0{,}98$, необходимо выбрать $x < (1/30)\lambda$. С целью повышения уровня корреляции целесообразно также применять схему, в которой сигналы сначала вычитаются, а затем фильтруются одним фильтром (устраняется фазовая неидентичность фильтров).

7.2. Корреляционные методы измерения коэффициентов звукоизоляции, отражения и звукопоглощения

Корреляционный метод измерений по своему свойству разделять сигналы с различным временем запаздывания подобен импульсному методу (рис. 7.1). В обоих случаях сигналы разделяются, если разность их запаздываний меньше характерного временного масштаба сигнала — менее длительности импульса или интервала корреляции шума. При этом одинаковыми являются значения ширины спектров сигналов. Различие методов состоит в характере сигналов — при корреляционном методе используется шумовой непрерывный сигнал, в частности, могут использоваться производственные шумы или вибрации. Рассмотрим

условия применения корреляционного метода для конкретных акустических измерений.

Измерение звукоизоляции. Одним из возможных примеров применения корреляционного метода является измерение звукоизоляции конструкций без применения специальных звукомерных

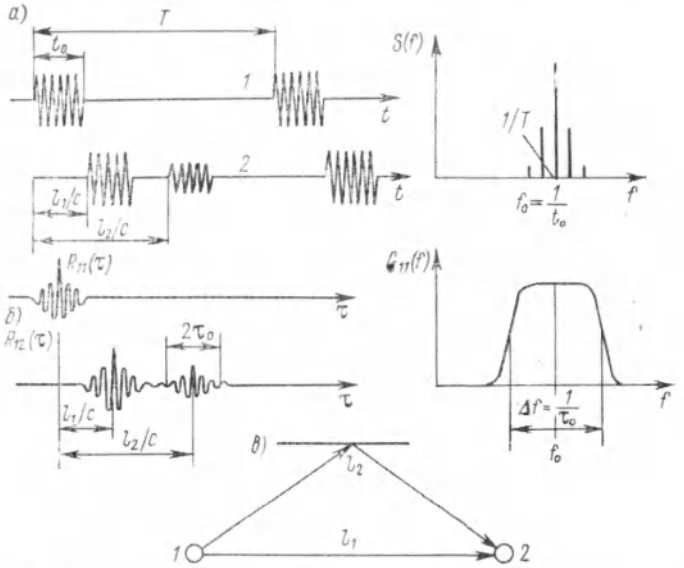

Рис. 7.1. Сравнение импульсного и корреляционного методов измерений: *а* — форма сигнала в точках *1* и *2* и их спектр при импульсном методе измерений; *б* — корреляционные функции и спектр мощности шума при корреляционных измерениях; *в* — расположение точек и пути прямого l_1 и отраженного l_2 сигналов.

камер, предложенный Гоффом [44]. Микрофон установлен сзади панели и принимает прямой звук, прошедший через панель по пути l_1, дифрагированный звук, обогнувший панель по пути l_2, а также сигналы, отраженные от стен помещения (рис. 7.2). Все эти сигналы различаются по времени прихода вследствие различия путей их распространения, что приводит к аналогичному распределению вдоль оси τ максимумов функции взаимной корреляции (рис. 7.3). Производятся измерения в логарифмическом масштабе функций взаимной корреляции при отсутствии $R_0(\tau)$ и наличии $R_п(\tau)$ испытуемой панели. Коэффициент звукоизоляции определяется как разность уровней первых максимумов корреляции, соответствующих приходу прямого звука $\tau_1 = l_1/c$ с учетом разностей коэффициентов усиления $20 \lg K$ микрофонного усилителя (в децибелах) при этих двух измерениях:

$$ЗИ = 20 \lg R_0(\tau) - 20 \lg R_п(\tau_1) + 20 \lg K_0 - 20 \lg K_п. \qquad (7.19)$$

Н. Н. Писаревским [1] производились измерения звукоизоляции листов фанеры, различных матов из стекловолокна, панелей из различных материалов, а также многослойных конструкций.

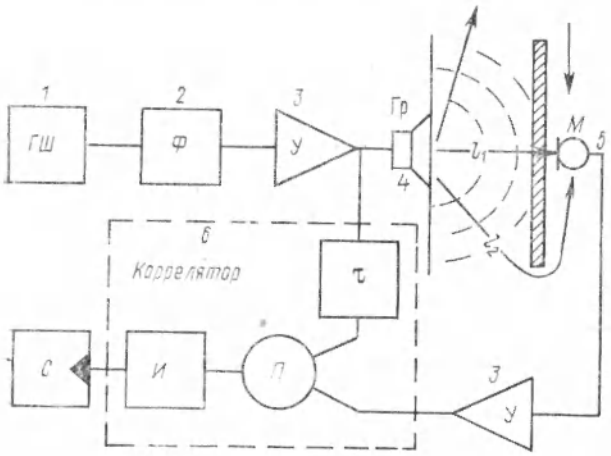

Рис. 7.2. Схема измерений звукоизоляции панелей **корреляционным методом.**

1 — генератор шума; *2* — полосовой фильтр; *3* — усилитель; *4* — громкоговоритель; *5* — микрофон, *6* — коррелятор.

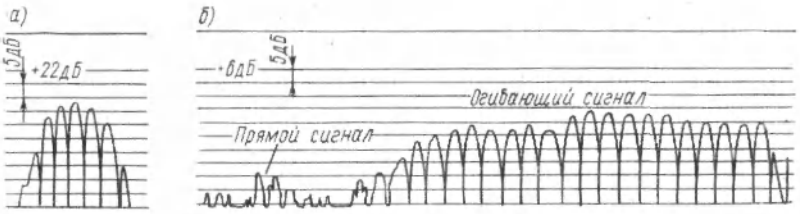

Рис. 7.3. Коррелограммы, записанные в логарифмическом масштабе при измерении звукоизоляции панелей: *а* — без панели; *б* — при наличии панели.

Сравнение различных результатов измерений звукоизоляции корреляционным и другими методами и сопоставление их с расчетом звукоизоляции по закону массы показывает хорошее совпадение. Для расширения динамического диапазона измерений рекомендуется одновременно применять заглушенную камеру, направленные излучатели и приемники, а также спектрально-корреляционный метод приема.

Корреляционный метод позволяет также улучшить результаты измерений в реверберационных камерах. В этом случае испытуемая панель вставляется в проем между двумя камерами. В камере высокого уровня либо возбуждается диффузное звуковое поле,

как и при измерениях по стандартной методике, либо создаются условия нормального падения звука на панель из-за близкого расположения громкоговорителя. Измеряются уровни звукового давления вблизи панели со стороны камер высокого $\overline{p_1^2}$ и низкого $\overline{p_2^2}$ уровней, а также взаимная корреляция $r_{12}(\tau)$ между микрофонами, установленными по обе стороны панели. Так как первый максимум корреляции ($\tau_1 = l_1/c$) определяет долю прямого звука, прошедшего через панель, то эта составляющая легко отделяется от реверберационного фона, возникающего в камере низкого уровня. Звукоизоляция определяется по выражению

$$ЗИ = \frac{1}{2}\left(20 \lg \overline{p_1^2} - 20 \lg \overline{p_2^2}\right) - 20 \lg r_{12}(\tau_1) - L, \qquad (7.20)$$

где L — поправка, учитывающая увеличение звукового давления $p_1(t)$ за счет отражения от испытываемой панели.

Этот метод позволяет производить измерения звукоизоляции в натурных условиях, например — звукоизоляцию борта самолета по отношению к шуму работающего двигателя [1].

При измерениях звукоизоляции необходимо обеспечить уверенное выделение на коррелограмме первого максимума (прямой звук, $\tau_1 = l_1/c$) при наличии второго ($\tau_2 = l_2/c$) и последующих максимумов. Это накладывает ограничения на спектр сигнала, подаваемого на коррелятор: интервал корреляции $\tau_к = 1/\Delta f$ используемого сигнала должен быть меньше, чем разность задержек $\tau_2 - \tau_1$ или $1/\Delta f > (l_2 - l_1)/c$.

Корреляционный метод дает возможность выявить побочные пути распространения звука и тем самым получить объективные данные для разработки рекомендаций по уменьшению уровня шума. На рис. 7.4 приведены коррелограммы при наличии трех (рис. 7.4, *а*), двух (рис. 7.4, *б*) или одного (рис. 7.4, *в*) путей прохождения звука. Подобным же образом может оцениваться ухудшение звукоизоляции переборок кожухов дверей при наличии щелей и т. д.

Измерения коэффициента отражения. Классическими методами измерения коэффициентов отражения и звукопоглощения являются метод стоячих волн в трубе и импульсный метод. Корреляционный метод, обладая всеми достоинствами импульсного метода по разделению прямого и отраженного сигналов, позволяет выполнить измерения на непрерывных шумах. Отличие скоростей распространения нормальной моды и мод более высокого порядка, распространяющихся в трубе большого (по сравнению с λ) сечения, позволяет разделить их корреляционным методом и тем самым повысить в несколько раз рабочую частоту измерений в трубе по сравнению с методом стоячих волн. Например, в трубе сечением 0,4×0,4 м длиной 5 м при критической частоте 430 Гц измерения корреляционным методом можно производить от частот 2 кГц и выше. При измерении на частотах ниже критической

частоты трубы микрофон (рис. 7.5) воспринимает прямой звук $f(t-l_1/c)$ и отраженный $k_0 f(t-l_1/c_0-2l_2c_0-\Delta t_0)$, где k_0 — коэффициент отражения, Δt_0 — задержка сигнала при отражении.

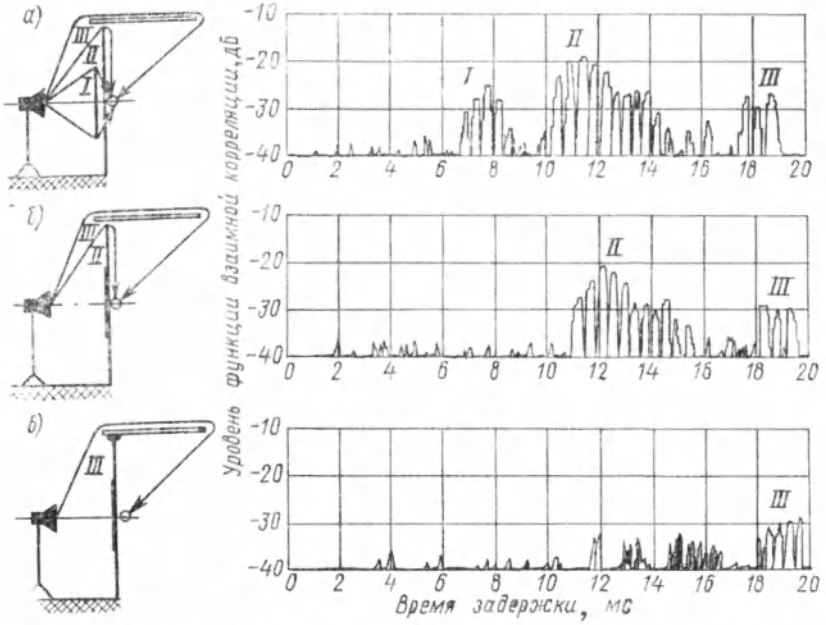

Рис. 7.4. Выявление путей распространения шума через центральное отверстие 0,5×5 мм, в щите 3×3 м (*I*), через щель между вертикальным и горизонтальным щитами (*II*); огибание обоих щитов (*III*) путем измерения взаимной корреляционной функции между напряжением, подаваемым на громкоговоритель, и шумом, принимаемым микрофоном *M*.

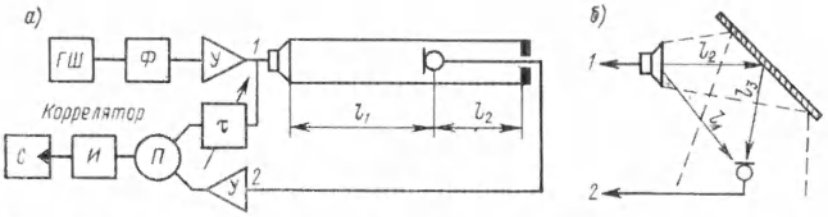

Рис. 7.5. Метод измерений коэффициента отражения: *а* — в трубе при нормальном падении звука; *б* — в свободном пространстве при косом падении звука.

Корреляция с сигналом возбуждения громкоговорителя $f(t)$ имеет вид

$$\overline{f(t-\tau)\left[f\left(t-\frac{l_1}{c_0}\right)+k_0 f\left(t-\frac{l_1}{c_0}-\frac{2l_2}{c_0}-\Delta t_0\right)\right]}=$$
$$=R\left(\tau-\frac{l_1}{c_0}\right)+k_0 R\left(\tau-\frac{l_1}{c_0}-\frac{2l_2}{c_0}\right), \qquad (7.21)$$

где форма функции $R(\tau)$ определяется корреляцией сигнала. Таким образом, коэффициент отражения k_0 определяется относительным уровнем второго максимума функции корреляции, наблюдающимся при $\tau_2 = (l_1/c_0) + (2l_2/c_0) - \Delta t_0$. Для выделения этого максимума необходимо, чтобы разность задержек $\tau_2 - \tau_1 = (2l_2/c_0) - \Delta t_0$ была больше интервала корреляции $\tau_к = 1/\Delta f$ излучаемого шума $f(t)$. Коэффициент звукопоглощения вычисляется как $(1 - k_0^2)$.

Форма функции взаимной корреляции усложняется при появлении сигналов высших мод, например, прямого сигнала первой моды $af[t - (l_1/c_1)]$, распространяющегося со скоростью $c_1 < c_0$ и имеющего относительный уровень a. При этом возникает также и отраженный сигнал первой моды $ak_1 f[t - (l_1/c_1) - (2l_2/c_1) - \Delta t_1]$. Эти два дополнительных сигнала приводят к появлению двух дополнительных максимумов функции взаимной корреляции:

$$R_{12}(\tau) = R\left(\tau - \frac{l_1}{c_0}\right) + aR\left(\tau - \frac{l_1}{c_1}\right) + k_0 R\left(\tau - \frac{l_1}{c_0} - \frac{2l_2}{c_0} - \Delta t_0\right) + \\ + ak_1 R\left(\tau - \frac{l_1}{c_1} - \frac{2l_2}{c_2} - \Delta t_1\right). \qquad (7.22)$$

Условия разделения сигналов здесь усложняются и требуется специальный подбор расстояний l_1 и l_2 для создания наиболее удачного соотношения задержек сигналов, при котором третий в (7.22) максимум функции не перекрывается соседними максимумами корреграммы. В этом случае полезны различные меры для снижения уровня высших мод, например, прием сигналов микрофоном градиента давления, ориентированным вдоль оси трубы.

При измерении угловой зависимости коэффициента отражения звука от панели (рис. 7.5, *б*) соотношение между прямым и отраженным сигналами зависит не только от коэффициента отражения, но и от направленности излучателя $\Phi_и(\alpha)$, микрофона $\Phi_м(\beta)$ и соотношения расстояний l_1, $l_2 + l_3$ (ввиду сферического закона распространения звука). Запишем принимаемый сигнал в виде суммы прямого сигнала:

$$e_{пр}(t) = \Phi_и(\alpha_{пр})\,\Phi_м(\beta_{пр})\,\frac{1}{l_1}\,f\left(t - \frac{l_1}{c}\right) \qquad (7.23)$$

и отраженного сигнала

$$e_0(t) = k\Phi_и(\alpha_0)\,\Phi_м(\beta_0) = \frac{1}{l_2 + l_3}\,f\left(t - \frac{l_2 + l_3}{c}\right) \qquad (7.24)$$

функция взаимной корреляции этих сигналов с сигналом возбуждения излучателя $f(t)$ будет равна

$$R_{12}(\tau) = \overline{f(t-\tau)[e_п(t) + e_0(t)]} = \frac{\Phi_и(\alpha_{пр})\,\Phi_м(\beta_{пр})}{l_1}\,R\left(\tau - \frac{l_1}{c}\right) + \\ + K\,\frac{\Phi_и(\alpha_0)\,\Phi_м(\beta_0)}{l_2 + l_3}\,R\left(\tau - \frac{l_2 + l_3}{c}\right). \qquad (7.25)$$

Коэффициент отражения находится как разность относительных уровней вторых максимумов двух коррелограмм, измеренных при установке жесткого щита, а затем панели. Если замену произвести нельзя, то следует использовать направленные излучатели и приемники и рассчитывать коэффициент отражения по измеренному относительному уровню второго максимума коррелограммы (относительно первого максимума) и известным расстояниям l_1, l_2, l_3.

Звукопоглощение акустических материалов. Коэффициент поглощения α можно оценить в реверберационной камере путем измерения акустического отношения Q корреляционным методом (см. гл. 9) из соотношения

$$Q = (1/x)(1/\alpha - 1); \quad x = S/16\pi l^2, \tag{7.26}$$

где S — площадь камеры, l — расстояние между измерительными точками.

Учитывая, что $Q = (1 - r_1^2)/r_1^2$, можно вычислить коэффициент звукопоглощения по измеренному первому максимуму $r(\tau_1)$ нормированной корреляционной функции

$$\alpha = \frac{1}{x\left(\frac{1}{r^2(\tau_1)} - 1\right) + 1}. \tag{7.27}$$

Коэффициент поглощения образца определяется как разность коэффициентов поглощения пустой камеры α_0 и камеры с образцом α_1 путем измерения соответствующих максимумов корреляции без образца $r_0(\tau_1)$ и с образцом $r_1(\tau_1)$. Если выбрать расстояние между излучателем и микрофоном $l = {}^1/_4\sqrt{S/\pi}$, чтобы получить $x = 1$, то формула для вычисления поглощения образца упрощается:

$$\alpha_{обр} = (\alpha_1 - \alpha_0)\frac{S}{S_{обр}} = [r_1^2(\tau_1) - r_0^2(\tau_1)]\frac{S}{S_{обр}}, \tag{7.28}$$

где S — площадь ограничивающих поверхностей реверберационной камеры, $S_{обр}$ — площадь образца.

При оценке корреляционного метода измерений звукоизоляции и звукопоглощения можно отметить следующее:

— измерения возможны в обычном помещении, никаких требований к его акустическим качествам не предъявляется, что позволяет выполнять измерения звукоизоляции и звукопоглощения различных элементов в производственных условиях;

— для измерений не требуются импульсные источники звука, поэтому они могут быть выполнены на естественных, производственных шумах со сплошным спектром;

— звукоизоляция и звукопоглощение измеряются корреляционным методом как величины, усредненные в выбранной полосе частот;

— при измерениях звукоизоляции конструкций в лабораторных и производственных условиях могут быть обнаружены пути «утечки» звука из ограждаемой конструкции;

— измерения корреляционным методом обладают большой помехоустойчивостью, позволяя выделять нужный сигнал на фоне шума;

— на спектр измерительного сигнала, формируемый полосовыми фильтрами в тракте излучения или приема, накладываются ограничения: интервал корреляции не должен превышать разности задержек разделяемых сигналов.

7.3. Временно́е разделение сигналов путем измерения взаимных спектров

Все рассмотренные выше измерения можно выполнить методом взаимных спектров, так как последний содержит ту же информацию, что и функция взаимной корреляции. В ряде случаев это приводит к упрощению аппаратуры и уменьшению времени анализа. Рассмотрим, например, измерения коэффициента отражения методом взаимного спектра.

Взаимный спектр сигнала возбуждения со звуковым давлением в некоторой точке акустической трубы (см. рис. 7.5, *а*) будет иметь два слагаемых вследствие наличия двух сигналов: прямого, приходящего с запаздыванием, $t_{31}=l_1/c$, и отраженного с запаздыванием $t_{32}=1/c\,(l_1+2l_2)$ и коэффициентом отражения $k_0(\omega)$:

$$G_{12}(\omega)=G_{\text{пр}}(\omega)(\cos\omega t_{31}-i\sin\omega t_{31})+$$
$$+G_{\text{пр}}(\omega)\,k_0(\omega)(\cos\omega t_{32}-i\sin\omega t_{32}). \qquad (7.29)$$

Если выбрать положение микрофона в трубе таким образом, чтобы $2t_{32}\gg t_{31}$, то осцилляции второго слагаемого, как более частые, будут хорошо выделяться на спектрограмме (рис. 7.6) и для получения результата достаточно измерить лишь действительную (или мнимую) составляющую взаимного спектра. Частотную зависимость коэффициента отражения $k_0(\omega)$ получают как отношение амплитуды осцилляций составляющей взаимного спектра с периодом $1/t_{32}$ к амплитуде осцилляций с периодом $1/t_{31}$. Спектр прямого сигнала строят, соединяя плавной кривой максимальные точки спектрограммы, где $\cos\omega t_{31}=1$ (пунктир на рис. 7.6). Полоса анализа Δf при этом должна выбираться таким образом, чтобы сигналы с задержкой t_{31} и t_{32} воспроизводились анализатором без ослабления, а повторные отражения, всегда имеющиеся при измерениях в трубе, были бы существенно ослаблены (см. гл. 6).

Если имеется возможность воспользоваться линией задержки для компенсации запаздывания t_{31}, то можно выбрать полосу анализа Δf и компенсационную задержку $\tau_к$ таким образом, чтобы выделить только отраженный сигнал. Если при этом измерять

нормированную взаимную спектральную функцию, то получим непосредственно частотную характеристику коэффициента отражения:

$$\mathrm{Re}\,[q_{12}(\omega)] = \frac{\mathrm{Re}\,[G_{\text{пр}}(\omega)]}{G_{\text{пр}}(\omega) + k_0(\omega)\,G_{\text{пр}}(\omega)} = \frac{G_{\text{пр}}(\omega)}{G_{\text{пр}}(\omega)[1 + k_0(\omega)]} \times$$
$$\times\, k_0(\omega)\cos\omega(t_{\text{з}2} - \tau_{\text{к}}) \approx k_0(\omega)\cos\omega(t_{\text{з}2} - \tau_{\text{к}}). \qquad (7.30)$$

Аналогичным образом может быть измерена звукоизоляция: измеряется взаимный спектр между сигналом возбуждения и микрофоном, помещенным сзади панели, а затем — взаимный спектр без панели при том же положении микрофона относительно громкоговорителя. Для разделения прямого и дифрагированного сигна-

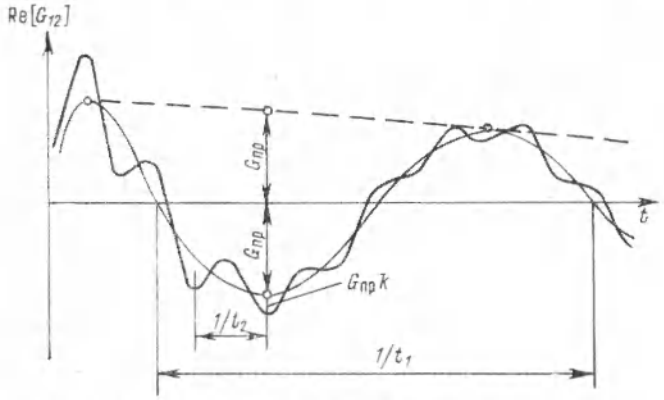

Рис. 7.6. Действительная составляющая взаимного спектра при измерениях коэффициента отражения в трубе.

лов необходимо пользоваться компенсационной линией задержки. Выбрав $r_{\text{к}}$ и Δf таким образом, чтобы выделить прямой звук, производят два измерения модуля взаимного спектра или его составляющей (действительной и мнимой) при наличии и отсутствии панели. Разность этих спектров на каждой частоте дает частотную характеристику коэффициента звукоизоляции.

По результатам измерений составляющих взаимного спектра можно определить задержку двух сигналов:

$$t_{\text{з}} = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,[G_{12}(\omega)]}{\mathrm{Re}\,[G_{12}(\omega)]}, \qquad (7.31)$$

что ясно из выражения для взаимного спектра бегущего поля. По известному значению $t_{\text{з}}$ и базе l между приемниками можно найти угол прихода волны при известной скорости или определить скорость (например, судна, самолета, проката) при известной базе l. Практика измерений показывает, что продолжительность анализа взаимных спектров существенно меньше продолжительности корреляционных измерений аналоговой аппаратурой.

7.4. *Исследования распространения изгибных колебаний*

Условия пространственной корреляции изгибных колебаний. При распространении волн в недиспергирующей среде максимальное значение нормированной корреляционной функции для бегущей волны равно единице при компенсации временного сдвига сигналов:

$$r_{12}(\tau_м,\ x) = \frac{R(\tau_м,\ x)}{\sqrt{R_1(0,\ 0)\,R_2(0,\ 0)}} = -\frac{\overline{e(t_1)\,e\left(t_1 - \frac{x}{c} + \tau_м\right)}}{\sqrt{\overline{e^2(t_1)} + \overline{e^2(t_2)}}} = 1. \quad (7.32)$$

Существенной особенностью изгибных колебаний является наличие дисперсии фазовой скорости. Для плоских волн в стержнях или пластинах фазовая скорость $c_ф = \sqrt{\omega r_0 c}$, где ω — круговая частот, r_0 — радиус инерции сечения стержня, c — скорость распространения продольных колебаний в стержне (пластине).

Вследствие дисперсии происходит изменение формы малого возмущения при его распространении в виде изгибных волн. Отсюда следует, что когерентность процессов должна нарушаться с увеличением расстояния между точками вдоль распространения плоской изгибной волны. Однако можно определить условия, при которых процессы в двух точках плоской изгибной волны можно считать практически когерентными [52].

Взаимная нормированная корреляционная функция изгибных колебаний для плоской бегущей волны определяется выражением

$$r_{12}(\tau_м,\ x) = \frac{1}{\xi^2}\,\overline{\xi_1(t,\ 0)\,\xi_2(t+\tau,\ x)} = \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} \cos\omega\left(\tau - \frac{x}{\sqrt{\omega r_0 c}}\right) d\omega. \quad (7.33)$$

Решение этого интеграла, найденное через интегралы Френеля $C(\nu)$ и $S(\nu)$ от аргумента $\nu = (\Delta f/2f_0)(x/2\lambda_и)^{1/2}$, назовем коэффициентом декорреляции

$$\psi(\nu) = r(\tau_м,\ x) = \frac{1}{\nu}\sqrt{C^2(\nu) + S^2(\nu)}. \quad (7.34)$$

Асимптотическое выражение для (7.33), найденное методом стационарной фазы

$$r(\tau_м,\ x) \approx 2\,\frac{f_0}{\Delta f}\sqrt{\frac{\lambda_и}{x}}\cos\left(\omega_0\tau - \frac{\pi}{4}\right), \quad (7.35)$$

позволяет оценить интервал пространственной корреляции изгибных волн $x_к = 4\lambda_и(f_0/\Delta f)^2$, который составляет: $x_к \leqslant 9\lambda_и$ — для октавной полосы ($f_0/\Delta f = 1{,}5$); $x_к \leqslant 34\lambda_и$ — для полуоктавной полосы ($f_0/\Delta f = 2{,}9$); $x_к \leqslant 74\lambda_и$ — для третьоктавной полосы ($f_0/\Delta f = 4{,}3$).

В пределах указанных расстояний можно не считаться с декорреляцией сигналов. При удвоенных расстояниях уровень коэффи-

циента корреляции снижается до 0,9, при дальнейшем увеличении падает в соответствии с (7.34), как показано на рис. 7.7.

Дисперсия скорости присуща не только изгибным колебаниям, но и продольным волнам, распространяющимся в тонких стержнях, и другим видам колебаний. При этом также будет происходить декорреляция случайных процессов, определяемая найденным выше коэффициентом корреляции (7.39), а выражение для аргумента ϑ определится видом дисперсионного уравнения.

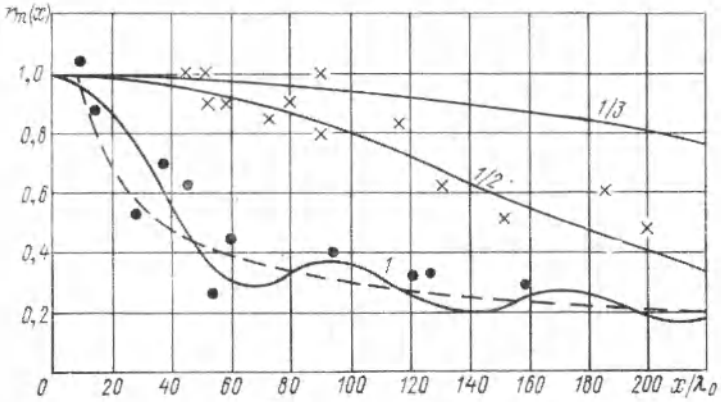

Рис. 7.7. Зависимость максимального уровня коэффициента корреляции изгибных колебаний от относительного расстояния между точками изгибной волны для октавной (*1*), полуоктавной ($^1/_2$) и третьоктавной ($^1/_3$) полосы белого шума.

··· — эксперимент для октавной полосы; ××× — эксперимент для полуоктавной полосы.

С явлением декорреляции процессов сталкиваются, например, при осуществлении корреляционных методов в гидролокаторах с частотно-модулированным сигналом [44]. Так как в этих системах длительность ЧМ-сигнала (посылки) может достигать нескольких секунд, то вследствие изменения радиальной скорости цели за время посылки различные частоты сигнала получат различный доплеровский сдвиг, что и приведет к снижению уровня взаимной корреляции принимаемого отраженного сигнала с опорным сигналом, имеющим постоянный доплеровский сдвиг. Анализ явления декорреляции приводит также к функции (7.34) при значении $\nu = \sqrt{\Delta f T / \Delta\delta_v}$, где Δf — ширина полосы ЧМ-сигнала, T — длительность сигнала, а $\delta_v = 2v_p/c$ — показатель доплеровского сжатия (или расширения) сигнала вследствие движения цели с радиальной скоростью v_p.

Исследования распространения изгибных волн методом взаимной корреляции напряжения возбуждения и вибраций. Результаты приведенных выше исследований показывают, что путем соответствующего выбора расстояний и полосы частот при измерениях вибраций возможно избежать декорреляции изгибных ко-

лебаний. При этих условиях, не считаясь с дисперсией скорости волн изгиба, можно проводить измерения коэффициентов отражения и виброизоляции изгибных колебаний корреляционными методами, подобно измерениям в акустической трубе, принимая в качестве скорости распространения колебаний групповую скорость волн изгиба $c_{гр}$.

Измерения могут проводиться двумя способами: определением либо корреляции между напряжением возбуждения вибратора и вибрациями одной из точек стержня, либо корреляционной

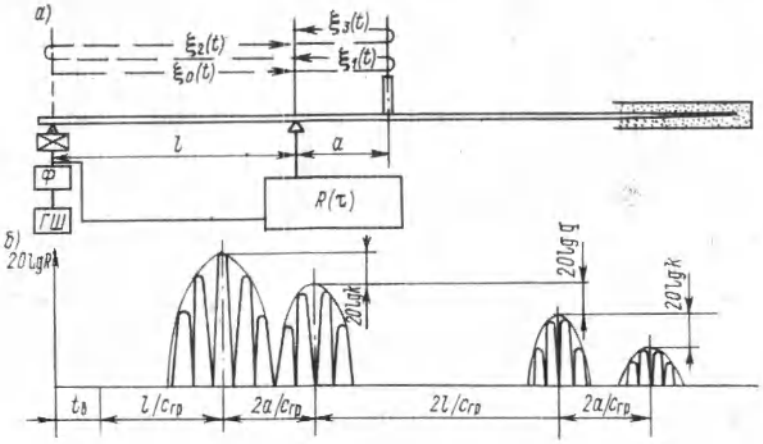

Рис. 7.8. Схема измерений виброотражения методом корреляции сигнала возбуждения вибратора с вибрациями балки (*а*) и вид коррелограммы (*б*).

функции вибраций двух точек стержня. В первом случае необходим акустический преобразователь для возбуждения изгибных волн, во втором — источником вибраций может быть как электроакустический, так и механический (например, ударного типа) вибровозбудитель.

Рассмотрим измерения виброотражения первым методом (рис. 7.8). Вибропримемник, установленный на расстоянии l от возбудителя и расстоянии a до отражающего элемента (масса, ребро жесткости, антивибратор и т. д.), принимает следующие сигналы:

— прямой сигнал $\xi(t-t_0)=\xi_0(t)=\xi(t-t_в-l/c_{гр})$, запаздывающий относительно напряжения возбуждения $e(t)=\xi(t)$ на время задержки $t_в$ вибратора и время задержки $l/c_{гр}$ на пути l;

— первый отраженный сигнал — отражение от преграды с коэффициентом k

$$\xi_1(t)=k\xi\left(t-t_в-\frac{l}{c_{гр}}-\frac{2a}{c_{гр}}\right)=k\xi(t-t_1);$$

— второй отраженный сигнал — отражение от левого (см. рис. 7.8) конца балки с коэффициентом q

$$\xi_2(t) = kq\xi\left(t - t_в - \frac{l}{c_{гр}} - \frac{2a}{c_{гр}} - \frac{2l}{c_{гр}}\right) = kq\xi(t - t_2);$$

— третий отраженный сигнал — вторичное отражение от преграды сигнала $\xi_2(t)$ с коэффициентом k

$$\xi_3(t) = k^2 q\xi\left(t - t_0 - \frac{l}{c_{гр}} - \frac{2a}{c_{гр}} - \frac{2l}{c_{гр}} - \frac{2a}{c_{гр}}\right)$$

и т. д.

При вычислении функции взаимной корреляции суммы этих сигналов с напряжением возбуждения $e(t) = \xi(t)$ следует учесть, в отличие от измерений в недиспергирующей среде (например, акустической трубе ниже ее поперечного резонанса), коэффициент декорреляции (7.34), а в качестве скорости колебаний принять групповую скорость. Тогда получим

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}_\xi(\tau) = \psi(l) R\left(\tau - t_в - \frac{l}{c_{гр}}\right) + \psi(l + 2a) kR\left(\tau - t_в - \frac{l + 2a}{c_{гр}}\right) + \\ + \psi(3l + 2a) kqR\left(\tau - t_в - \frac{3l + 2a}{c_{гр}}\right) + \\ + \psi(3l + 4a) k^2 qR\left(\tau - t_в - \frac{3l + 4a}{c_{гр}}\right).\end{aligned} \tag{7.36}$$

Здесь каждое слагаемое корреляционной функции отличается определенным сдвигом максимума, характеризующим запаздывание данной составляющей (рис. 7.9), а разность уровней максимумов (в децибелах) позволяет определить коэффициент отражения, если выполняются условия $\psi(l) \to 1$, $\psi(l + 2a) \to 1$. В то же время расстояния l и $2a$ не должны быть слишком малыми, что необходимо для разделения максимумов корреляции. Для лучшего демпфирования колебаний конец балки отрабатывают, придавая ему форму клина, и помещают в смесь опилок и песка.

Воспользовавшись отражением от конца балки, можно измерить виброизоляцию того или иного элемента (рис. 7.10). В этом случае виброприемник принимает прямой сигнал $\xi_1(t)$, сигнал $\xi_2(t)$, отраженный от элемента, а также сигнал $\xi_3(t)$, прошедший через элемент, отразившийся от свободного конца балки, снова прошедший через элемент и принятый вторично виброприемником:

$$\begin{aligned}\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \xi_3(t) + \ldots = \xi\left(t - \frac{l_1}{c_{гр}}\right) + k\xi\left(t - \frac{l_1 + 2l_2}{c_{гр}}\right) + \\ + d^2\xi\left(t - \frac{l_1 + 2l_2 + 2l_3}{c_{гр}}\right) + \ldots,\end{aligned} \tag{7.37}$$

где $k = \left(\overline{\xi^2_{отр}}/\overline{\xi^2_{пад}}\right)^{1/2}$ — коэффициент отражения изгибных волн в исследуемой полосе частот; $d = \left(\overline{\xi^2_{пр}}/\overline{\xi^2_{пад}}\right)^{1/2}$ — коэффициент прохождения.

Если расстояния, пройденные изгибной волной, не превышают пространственного интервала корреляции, т. е. можно считать коэффициент декорреляции $\psi(l_1+l_2+2l_3)=1$, то функцию взаимной

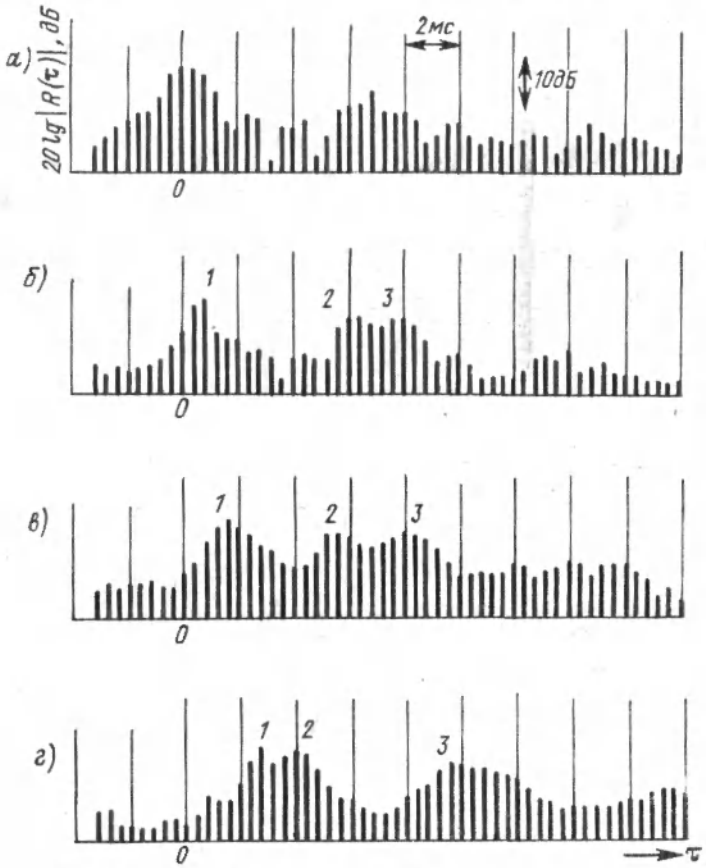

Рис. 7.9. Коррелограммы вибраций балки с напряжением возбуждения вибратора в полосе частот 4,5—9 кГц: *а* — корреляция при $l=1$ м; *б* — взаимная корреляция при $l=1$ м; *в* — то же, при $l=2$ м; *г* — то же, при $l=4$ м.

1 — максимум прямого сигнала; *2* — отражение от свободного конца балки; *3* — отражение от возбуждаемого конца балки. Размер балки 500×4×0,8 см, коррелограмма получена при шаговом интегрировании.

корреляции вибраций с напряжением возбуждения, подающимся на вибратор для первых трех максимумов, можно записать в виде

$$R_{12}(\tau)=R\left(\tau-\frac{l_1}{c_{\text{гр}}}\right)+kR\left(\tau-\frac{l_1+2l_2}{c_{\text{гр}}}\right)+d^2R\left(\tau-\frac{l_1+2l_2+2l_3}{c_{\text{гр}}}\right). \tag{7.38}$$

Отсюда легко находится коэффициент отражения k как отношение первого и второго максимумов и коэффициент прохождения

энергии d^2 как отношение первого и третьего максимумов. Обратная величина $1/d$, выраженная в децибелах, дает непосредственно виброизоляцию отражающего элемента

$$ВИ = 20 \lg (1/d). \qquad (7.39)$$

Очевидно, что при отсутствии диссипативных потерь из закона сохранения энергии следует $d^2 + k^2 = 1$. Если же исследуемый элемент также поглощает энергию (например, антивибратор), то доля поглощенной энергии $\beta^2 = \overline{\xi^2}_{погл} / \overline{\xi^2}_{пад}$ найдется из выражения $\beta^2 = 1 - k^2 - d^2$.

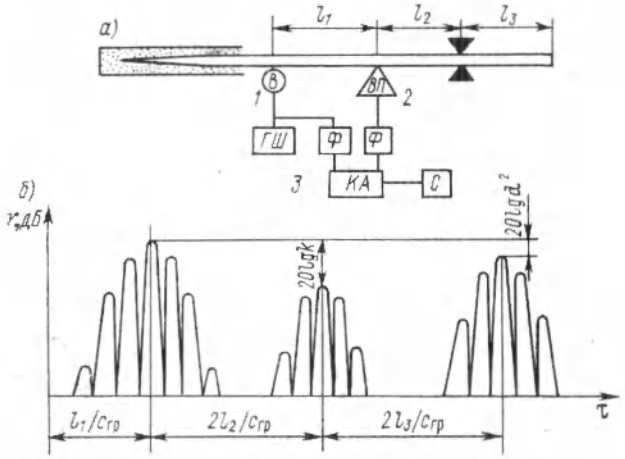

Рис. 7.10. Схема измерений виброизоляций (*а*) и коррелограмма (*б*).

1 — возбудитель; *2* — виброприемник; *3* — коррелятор.

Подобным образом можно рассчитать вид корреляционной функции в случае отражения изгибных волн от двух или более препятствий, достаточно удаленных друг от друга. Однако в этом случае вопрос осложняется преобразованием на препятствии изгибной волны в продольную. При числе препятствий более двух происходит обратное преобразование продольной волны во вторичную изгибную. Благодаря различию скоростей продольных и изгибных волн принципиально возможно корреляционным методом отделить вторичные изгибные волны от первичных.

Аналогично может быть измерено затухание изгибных волн, если воспользоваться отражением изгибных колебаний от свободного конца стержня, на участок l_2 которого длиной $l_д$ нанесено вибродемпфирующее покрытие. В этом случае амплитуда отраженного сигнала меньше амплитуды падающего сигнала в $e^{-2l_д\beta}$ раз, форма функции корреляции такая же, как приведенная на рис. 7.8, а необходимые численные соотношения можно получить

из выражения (7.38), где следует произвести замену коэффициента k значением $e^{-2l_д\beta}$.

Исследования методом взаимной корреляции вибраций. Рассмотрим теперь измерения взаимной корреляции вибраций двух точек балки (рис. 7.11). Первый виброприемник принимает прямой сигнал и ряд отраженных:

$$\xi_1(t) = \xi\left(t - \frac{l}{c_{гр}}\right) + k\xi\left(t - \frac{l + 2a + 2b}{c_{гр}}\right) + \ldots$$

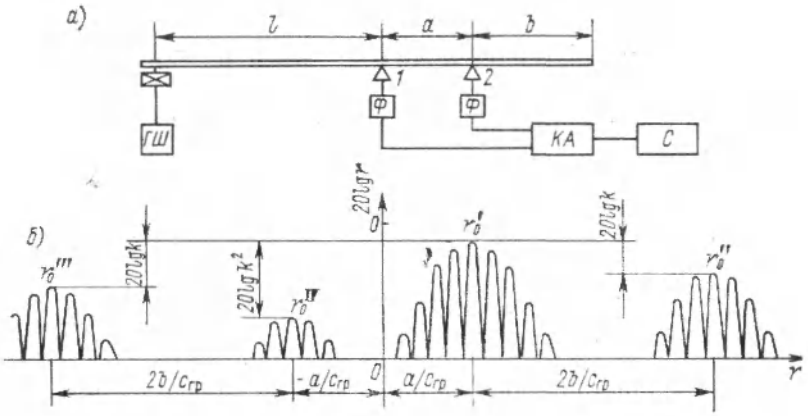

Рис. 7.11. Измерения взаимной корреляции вибраций двух точек балки при исследовании отражений изгибных волн: *а* — схема измерений; *б* — коррелограмма.

Второй виброприемник принимает эти сигналы с другими запаздываниями:

$$\xi_2(t) = \xi\left(t - \frac{l + a}{c_{гр}}\right) + k\xi\left(t - \frac{l + a + 2b}{c_{гр}}\right). \qquad (7.40)$$

Взаимная корреляция вибраций находится в виде

$$R_{12}(\tau) = \overline{\xi_1(t)\,\xi_2(t - \tau)} = \psi(a)\,R\left(\tau - \frac{a}{c_{гр}}\right) +$$
$$+ k\psi(a + 2b)\,R\left(\tau - \frac{a + 2b}{c_{гр}}\right) + k\psi(a + 2b)\,R\left(\tau + \frac{a + 2b}{c_{гр}}\right) +$$
$$+ k^2\psi(a)\,R\left(\tau + \frac{a}{c_{гр}}\right) + \ldots \qquad (7.41)$$

В этом случае максимумы функции взаимной корреляции расположены как при положительных, так и при отрицательных задержках (см. рис. 7.11) и также периодически повторяются при увеличении задержки, уменьшаясь по уровню. Разность в уровнях максимумов (в децибелах) позволяет оценить коэффициенты отражения, как это следует из (7.41) и рис. 7.11.

Производя измерения двумя виброприемниками, можно оценить общий коэффициент отражения изгибных волн от ряда

препятствий при любом их взаимном расположении. Так, ближайший к началу координат максимум функции корреляции при отрицательных задержках времени определяется только корреляцией отраженных сигналов, принимаемых приемниками *1* и *2*. Уровень этого максимума зависит лишь от относительного уровня отраженных сигналов и не зависит от уровня взаимной корреляции отраженного и прямого сигналов. Действительно, представляя процессы в виде сумм прямых $x(t)$ и отраженных $y(t)$ сигналов в точке 1: $u(t)=x(t)+y(t)$, в точке 2: $v(t)=x[t-(a/c_{гр})+y\times\times[t+(a/c_{гр})]$, для корреляционной функции получим

$$\overline{u(t)\,v(t)}=\overline{x(t)\,x\left(t-\frac{a}{c_{гр}}+\tau\right)}+\overline{x(t)\,y\left(t-\frac{a}{c_{гр}}+\tau\right)}+$$
$$+\overline{y(t)\,y\left(t+\frac{a}{c_{гр}}+\tau\right)}+\overline{y(t)\,x\left(t-\frac{a}{c_{гр}}+\tau\right)}. \qquad (7.42)$$

Следовательно, разность уровней (в децибелах) первого максимума при $\tau=a/c_{гр}$ и уровня при $\tau=-a/c_{гр}$ дает общий коэффициент отражения сложной конструкции или ряда виброотражающих элементов. Таким образом, может быть оценено отражение, носящее диффузный характер, например, отражение сигнала с широким спектром от участка стержня с нанесенным на него вибродемпфирующим покрытием.

Необходимо сделать следующее замечание относительно практического приема по расшифровке коррелограмм. При измерениях малых отраженных сигналов по виду одной корреляционной функции обычно трудно с уверенностью судить о том, что данный максимум действительно обусловлен отраженным сигналом, а не является побочным максимумом корреляционной функции прямого сигнала. Чтобы отделить искомые максимумы от побочных, необходимо проанализировать несколько коррелограмм, снятых при различном расположении виброприемников относительно отражающего элемента, тогда максимум отраженного сигнала также будет перемещаться от коррелограммы к коррелограмме и поэтому легко обнаружится (см. рис. 7.9).

При усложнении конструкции, переходе к двумерным конструкциям вид корреляционной функции становится сложным, выделение отражений от отдельных элементов затруднительно и невозможно. Большое количество отражений при распространении изгибных волн в сложных пластинах и конструкциях приводит к новому качеству — образованию диффузного поля вибраций.

7.5. Измерения характеристик вибрационных полей в инженерных конструкциях

При возбуждении вибраций в отдельной пластине или на участке пластины, ограниченном ребрами жесткости, образуется поле, близкое к диффузному, вследствие многократных отражений структурного звука. Для диффузного (изотропного) поля харак-

терно равномерное распределение потока акустической энергии по углу в плоскости пластины, т. е. отсутствуют преобладающие направления колебательного движения и вибрации в любой точке поля являются результатом сложения большого числа некогерентных колебаний. Для отдельной составляющей поля — волны, падающей под углом α к базе, составленной из двух приемников, расположенных на расстоянии x, функция взаимной корреляции, вычисленная для полосы частот $\Delta\omega$ при средней частоте ω_0, равна

$$r(\alpha,\ \tau,\ x) = \frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\left(\tau - \frac{x}{c_{\text{гр}}}\cos\alpha\right)}{\frac{\Delta\omega}{2}\left(\tau - \frac{x}{c_{\text{гр}}}\cos\alpha\right)}\cos\omega_0\left(\tau - \frac{x}{c_{\text{гр}}}\cos\alpha\right). \quad (7.43)$$

Просуммировав все составляющие, равномерно распределенные по углу α, при условии $x/c_{\text{гр}} < \tau_0 = 2\pi/\Delta\omega$, получим выражения для корреляционной функции плоского диффузного поля:

$$r(\tau,\ x) \approx \frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\tau}{\frac{\Delta\omega}{2}\tau}\left[\cos\omega_0\tau\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{\omega x\cos\alpha}{c}\,d\alpha + \right.$$

$$\left. + \sin\omega_0\tau\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{\omega_0 x\cos\alpha}{c}\,d\alpha\right] = J_0\left(\frac{\omega x}{c}\right)\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\tau}{\frac{\Delta\omega}{2}\tau}\cos\omega_0\tau, \quad (7.44)$$

где $J_0(\omega x/c)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Найденное выражение для функции корреляции позволяет обосновать метод исследования степени диффузности поля. Нарушение диффузности поля заключается в том, что появляются направления преобладающего распространения упругих волн. Процесс в каждой точке поля можно тогда разделить на две составляющие: сумму некогерентных процессов, образующих диффузное поле (e) и одну или несколько составляющих (u) волны, бегущей в направлении преобладающего распространения волн в пластине. Определяя функцию взаимной корреляции для этого случая и считая, что составляющие диффузного и бегущего полей не являются когерентными, получим выражение из двух слагаемых:

$$r(\tau,\ x) = \frac{\overline{e^2}}{\overline{e^2}+\overline{u^2}}\,r_{\text{д}}(\tau,\ x) + \frac{\overline{u^2}}{\overline{e^2}+\overline{u^2}}\,r_{\text{б}}(\tau,\ x) =$$

$$= \text{Д}r_{\text{д}}(\tau,\ x) + \text{Б}r_{\text{б}}(\tau,\ x). \quad (7.45)$$

Первая составляющая этого выражения определяется диффузными составляющими поля и имеет рассмотренные выше свойства: максимум ее во времени лежит вблизи нулевых задержек, а пространственное изменение $J_0(k_{\text{и}}x)$ происходит в среднем обратно пропорционально $\sqrt{x}$. Составляющая функции корреляции, обусловленная бегущей волной, при изменении расстояния между

приемниками изменяет абсциссу своего максимума, которая определяется направлением распространения волны: $\tau_м = (x/c \cos\alpha)$, а ордината этой составляющей равна относительному уровню составляющей по энергии — коэффициенту бегущей волны в суммарном поле вибраций. Таким способом может производиться оценка степени диффузности поля вибраций корреляционным методом.

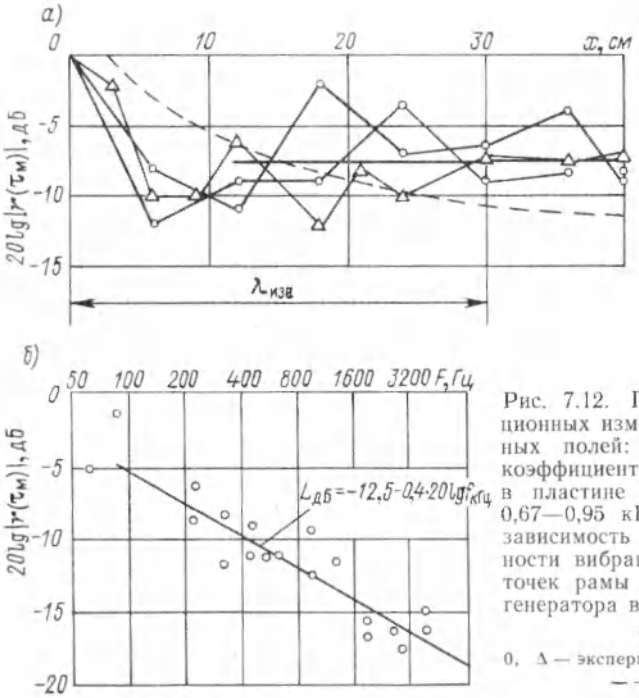

Рис. 7.12. Примеры корреляционных измерений вибрационных полей: *а* — определение коэффициента бегущей волны в пластине в полосе частот 0,67—0,95 кГц; *б* — частотная зависимость уровня когерентности вибраций двух крайних точек рамы судового дизель-генератора в полуоктавных полосах.

0, Δ — экспериментальные данные; — — — $1/\sqrt{kx}$.

Один из примеров исследований вибраций пластины судовой конструкции 2700×1500×3 мм приведен на рис. 7.12, *а*. Средний коэффициент бегущей волны здесь Б = —8 дБ.

При корреляционном методе измерений степень диффузности определяется в узких смежных полосах частот. Процедура определения степени диффузности поля вибраций может быть упрощена, если вместо коррелятора применить анализатор взаимного спектра. Взаимный спектр реального поля вибраций находится как преобразование Фурье от (7.51). В результате нормированная взаимная спектральная функция определяется в виде

$$q_{12}(\omega) = Д(\omega)\, J_0(k_и x) + Б(\omega)\,[\cos\omega t_з + i \sin\omega t_з], \qquad (7.46)$$

где Д(ω), Б(ω) — частотные характеристики коэффициентов диффузности и бегущей волны соответственно.

Так как при измерении вибраций применяются ненаправленные в плоскости пластины виброприемники, то корреляционный метод

и метод взаимных спектров являются единственно возможными методами оценки диффузности поля вибраций.

Применяя корреляционный метод к исследованию вибраций механизмов, можно определить степень когерентности колебаний различных его точек. Так, на рис. 7.12, *б* показаны результаты измерений когерентности колебаний крайних точек рамы судового дизель-генератора. Как видно, лишь на самых низких частотах механизм колеблется как единое целое. На средних звуковых частотах вибрации различных точек рамы дизель-генератора слабо когерентны и при увеличении частоты поле вибраций по своему характеру все более приближается к диффузному.

При измерении корреляционных характеристик поля вибраций в тонких листах следует учитывать искажения поля вибраций виброприемником, определяемые отношением массы виброприемника к цилиндрической жесткости пластины. Искажения возникают вследствие образования неволновой зоны вибраций вблизи препятствия (виброприемника) и проявляются в смещении нулей функции пространственной корреляции в сторону меньших аргументов kx, а также в некотором искажении формы кривой. Наиболее сильно эти искажения сказываются при близком расположении виброприемников, а при $kx > 2$ — практически исчезают.

7.6. Определение вклада источника в суммарный шум

В гл. 5 отмечалось, что возникает необходимость измерить вклад ряда источников в суммарный шум, создаваемый ими при одновременной работе. Такая ситуация возникает в следующих случаях:

1) источники не могут быть включены раздельно, что позволило бы непосредственно измерить спектр каждого из них;

2) ограниченность пространства и случайное расположение источников не позволяют применить направленные системы для разделения их шумов;

3) в спектрах шума источников отсутствуют особенности (в частности, дискретные составляющие), по которым можно было бы выделить их шумы.

В этих случаях вклад источника звука может быть определен корреляционным методом, предложенным Гоффом (см. [44]).

Корреляционный метод определения вклада источника шума. Микрофон M_{I} двухканального тракта (рис. 7.13) помещают в исследуемой точке поля x, а микрофон M_{II} — вблизи источника i. Измеренная функция взаимной корреляции (см. рис. 7.13) имеет ряд максимумов, соответствующих приходу в точку x прямого звука и ряда запаздывающих отражений. Вклад источника, обусловленный прямым сигналом, непосредственно определяется первым максимумом нормированной взаимно корреляционной функции

$$d_{1i} = R_{xi}(\tau_1)/\sqrt{R_x(0)\,R_i(0)}, \qquad (7.47)$$

где $\tau_1 = l_1/c$ — запаздывание прямого сигнала; $R_x(0)$, $R_i(0)$ — значения корреляционной функции при $\tau = 0$ сигналов, измеренных в точках x и i соответственно. Для получения частотной зависимости вклада возможны два способа:

1) измеряется взаимная корреляционная функция в широком диапазоне частот, затем определяется преобразование Фурье отрезка коррелограммы, включающего первый максимум функции;

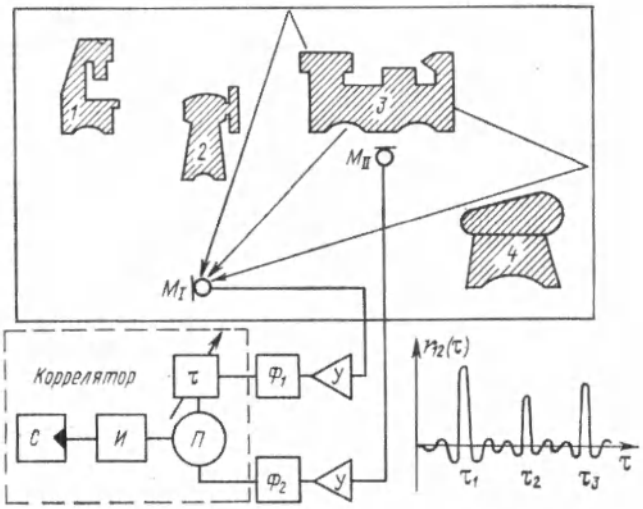

Рис. 7.13. Схема измерений вклада источников корреляционным методом.

1—4 — источники шума.

2) в оба канала коррелятора включаются полосовые фильтры и в каждой полосе частот (например, третьоктавной) измеряют вклад источника $d_{1i}(\omega)$.

Для оценки полного вклада d_i источника i необходимо найти геометрическую сумму вкладов прямого сигнала ($k = 1$) и всех запаздывающих отражений ($k = 2, 3, \ldots$)

$$d_i = \sqrt{\sum_k d_{ki}^2}. \tag{7.48}$$

Так как выявление всех отраженных сигналов затруднено, то применяют следующий прием: повторно нормируют результат, если измерены вклады прямых сигналов всех источников

$$d_i \approx d_{1i} \Big/ \sqrt{\sum_i d_{1i}^2}. \tag{7.49}$$

Правомерность этого нормирования можно обосновать тем, что в данном помещении соотношение энергий прямого и отраженных сигналов практически одинаково для всех источников. Очевидно,

что при таком нормировании необходимо иметь уверенность в том, что все источники шума выявлены и найдены их вклады.

Определение вклада источника методом взаимных спектров. Появление возможности измерений взаимных спектров либо с помощью аналоговых приборов [44], либо на ЭВМ открыло путь к использованию этой характеристики для определения вклада источника. Измерение взаимного спектра шумов, принимаемых в точке x и i источника i, при выборе полосы анализа Δf согласно рекомендациям раздела 6.2 позволяет непосредственно оценить спектр прямого сигнала, что равнозначно преобразованию Фурье функции взаимной корреляции:

$$G_{xi}(\omega)_{\Delta f} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\tau_1 - \tau_{\Delta f}}^{\tau_1 + \tau_{\Delta f}} R_{xi}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = G_{1i}(\omega)[\cos\omega\tau_1 - i\sin\omega\tau_1], \tag{7.50}$$

где $\tau_1 = l_1/c$ — запаздывание прямого сигнала; $\tau_{\Delta f}$ — пространственное разрешение взаимного спектра при полосе анализа Δf.

Сопоставляя модули спектров $G_{1i}(\omega)$ прямых сигналов различных источников, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, можно выявить наиболее шумные из них. Осциллирующий характер составляющих взаимного спектра (рис. 7.14) позволяет лишь по одной из них (например, $\mathrm{Re}\, G_{1i}(\omega)$) оценивать спектр источника в точках, где $|\cos\omega\tau_1| = 1$.

Функция когерентности характеризует непосредственно частотную зависимость вклада источника

$$d_i^*(\omega) = q_{xi}(\omega) = \frac{|G_{xi}(\omega)|_{\Delta f}}{\sqrt{G_x(\omega)\, G_i(\omega)}}. \tag{7.51}$$

При этом анализ с ограниченной полосой Δf приводит к ограниченному значению запаздывания $\tau_1 = 1/\Delta f$, в пределах которого и измеряется энергия прямого сигнала или его сумма с несколькими первыми отраженными сигналами, что приводит к заниженным значениям вклада, обозначенного поэтому $\overset{*}{d}_i$. Повторное нормирование вкладов согласно выражению (7.49) относительно суммы вкладов всех источников $\sum \overset{*}{d}{}_i^2$ позволяет уточнить эту оценку.

Определение спектра данного источника можно произвести по измеренному (и повторно нормированному) значению вклада d_i и суммарному спектру в точке x:

$$G_{xi}(\omega) = G_{x\Sigma}(\omega)\, d_i(\omega). \tag{7.52}$$

Ограничения методики. Корреляционная методика определения вклада источника шума в общем случае применима тогда, когда при контрольном замере в случае работы одного источника звука может быть получен достаточно высокий уровень корреляции $r_{xi} \approx 1$ или функции когерентности $q_{xi} \approx 1$. Выше отмечалась одна из причин снижения уровня корреляции — наличие, кроме прямого

сигнала ряда отраженных сигналов. Вторая причина — декорреляция сигналов вследствие близкого расположения микрофона 2 у источника i. Анализ (см. гл. 9) показывает, что высокий уровень

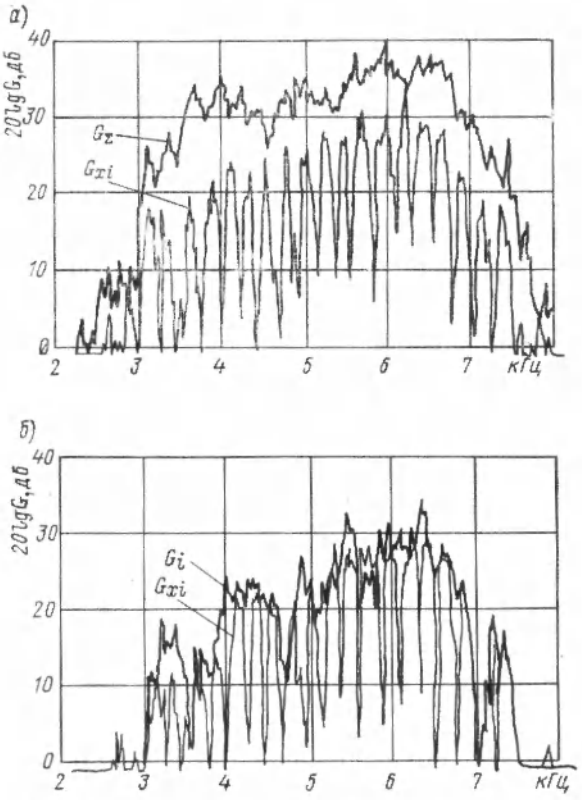

Рис. 7.14. Взаимные спектры G_{xi} и спектры мощности при работе нескольких G_E источников излучения, измеренные в точке x, при работе нескольких источников (*а*) и контрольные измерения этих же функций при работе одного источника (*б*).

корреляции обеспечивается при нахождении микрофона на расстоянии более L^2/λ (где L — радиус излучающей поверхности). Однако при удалении микрофона от источника ухудшается отношение сигнала/помехи (увеличивается относительный уровень шумов, принимаемых микрофоном в точке i от других источников), поэтому практически идут на компромисс и находят некоторое оптимальное положение микрофона, когда еще не слишком велико влияние других источников, но в то же время уровень корреляции сигнала от исследуемого источника оказывается не слишком заниженным (последнее ограничивает возможность выявления слабых источников).

Наиболее же серьезное ограничение состоит в том, что корреляционный метод определения вклада источника шума применим лишь для выявления вклада источников, непосредственно излучающих шум в среду, т. е. находящихся в исследуемом помещении. В ряде случаев шум создается источниками, находящимися в соседних помещениях на судне, а колебательная энергия от них распространяется по корпусным конструкциям в виде вибраций (структурного звука). В этих условиях происходит значительная декорреляция вибраций, вызванная многочисленными отражениями волн от неоднородностей корпусных конструкций (ребер жесткости, мест соединения переборок с корпусом, палубой и т. п.). Это свойство можно описать импульсной переходной характеристикой системы, которая в рассматриваемом случае представляется в виде суммы δ-функций при различных запаздываниях сигнала:

$$h(t) = \sum_i a_i \delta(t - t_i), \quad \sum_i a_i^2 = 1. \tag{7.53}$$

В результате корреляционная функция между входом и выходом такой системы $R_{12}(\tau)$ характеризуется низким уровнем корреляции и «размазыванием» максимумов в широком диапазоне задержек t_i:

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{R_1(0)} \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\tau - t)\, h(t)\, dt = \frac{1}{R_1(0)} \sum_i a_i R_1(\tau - t_i) \ll 1, \tag{7.54}$$

что является серьезным препятствием к применению корреляционного метода определения вклада источника шума. Аналогичные выводы могут быть получены при спектральном представлении свойств неоднородных конструкций [64].

Третье ограничение состоит в невозможности применения виброприемника в качестве датчика второго канала, воспринимающего колебания в источнике. Казалось бы, применение виброприемника позволит существенным образом отстроиться от шумов других источников. Но вследствие некоррелированности вибраций различных участков механизма (см. рис. 7.12, *б*) сигнал с виброприемника будет представлять лишь колебания в окрестности его установки (при диффузном характере поля вибраций — в радиусе, равном первому нулю $x_0 \approx 0{,}4\lambda_и$, пространственной функции корреляции — функции Бесселя (7.44), где $\lambda_и$ — длина волны изгибных колебаний рамы механизма), в результате чего корреляция вибраций одной точки механизма с излучаемым им шумом оказывается весьма низкой.

В заключение подчеркнем, что указанные ограничения действуют в случае выявления источника шума, т. е. процесса со сплошным спектром. Совсем иные свойства приобретает корреляционный метод при наличии дискретных составляющих.

Методы выявления источников дискретных составляющих. Выявление источников дискретных составляющих производят, сравнивая спектры вибраций источников со спектром создаваемого ими суммарного поля. Совпадение частоты отдельной дискретной составляющей акустического поля с частотой дискретной составляющей вибраций непосредственно указывает на источник ее излучения, причем измерения спектров вибраций и поля могут выполняться последовательно. В случае близкого (по частоте) расположения двух или более дискретных составляющих для их разделения и выявления источников приходится повышать разрешающую способность спектрального анализа и прибегать к синхронному анализу спектров поля и вибрации источников, иначе нестабильность частот вращения механизмов, заметная при высоком частотном разрешении, может затруднить распознавание источников вследствие ухода их частот. Наиболее трудным является случай, когда дискретные составляющие ряда механизмов перекрываются, что делает невозможным применение рассмотренных выше одноканальных методов спектрального анализа. Последнее чаще всего имеет место на частотах вблизи гармоник частоты сети (25, 50, 100, 150 Гц и т. д.).

В случае перекрытия частот дискретных составляющих или близкого их расположения весьма эффективно применение корреляционного анализа. При выявлении источников дискретных составляющих целесообразно применять виброприемник для измерения колебаний в источнике и определять корреляционную функцию, взаимный спектр или еще лучше — функцию когерентности вибраций источника и суммарного акустического поля. Эффективность применения корреляционного или взаимоспектрального анализа объясняется как бы автоматически происходящей синхронизацией анализа относительно частоты дискретной составляющей источника, присутствующей в одном канале коррелятора. Результат корреляционного анализа представляется периодической корреляционной функцией

$$R_{12}(\tau) = \overline{[\xi(t) + A_i \cos \omega t]\,[\eta(t) + p_i \cos \omega (t + t_1 - \tau)]} = \\ = \frac{A_i p_i}{2} \cos \omega (\tau - t_1),$$

нормированная амплитуда которой характеризует вклад данной дискретной составляющей в суммарную энергию акустического поля:

$$d_i = r_{12}(\tau_м)_i = \frac{A_i p_i / 2}{\sqrt{(\overline{\xi^2} + A_i^2/2)(\overline{\eta^2} + \overline{p_i^2}/2)}} \cos \omega (\tau - t_1). \qquad (7.55)$$

Обычно в источнике имеем $A^2/2 \gg \overline{\xi^2}$, поэтому

$$|r_{12}(\tau_м)| \approx \frac{A_i p_i / 2}{\sqrt{A_i^2/2\,(\overline{\eta^2} + p_i^2/2)}} = \frac{p_i/\sqrt{2}}{\sqrt{\overline{\eta^2} + p_i^2/2}} = \frac{p_{i\,(с.\,к.\,з)}}{p_{\Sigma x}}, \qquad (7.56)$$

где $p_{i\,(\text{с. к. з})} = p_i/\sqrt{2}$ — среднее квадратичное значение уровня составляющих, т. е. нормированная корреляционная функция характеризует непосредственно вклад дискретной составляющей в суммарное акустическое поле в выбранной полосе частот.

При измерении функции когерентности применяется полоса анализа существенно у́же полосы частот при корреляционном анализе, поэтому на частоте дискретной составляющей будем иметь максимум функции, равный вкладу данного источника в узкой полосе частот анализа Δf_a взаимного спектра. Например, при наличии двух близких по частота составляющих с амплитудами A_1 и A_2, входящих одновременно в полосу анализа, т. е. $|f_1 - f_2| < \Delta f_a$, получим значение функции когерентности при измерении с первым источником

$$q_{1\Sigma}(\omega) = [A_1^2/(A_1^2 + A_2^2)]^{1/2}$$

и вторым

$$q_{2\Sigma} = [A_2^2/(A_1^2 + A_2^2)]^{1/2}.$$

Ограничения методики при выявлении дискретных составляющих коренным образом отличаются от ограничений при выявлении источников шума. При выявлении дискретной составляющей имеет место полная когерентность между процессами в любых точках поля или между вибрациями и полем. От точки к точке меняется лишь амплитуда p_i периодической составляющей вследствие интерференции сигналов, прошедших разными путями, поэтому измерения следует производить многократно, перемещая точку x в пределах длины волны звука и усредняя результат.

Второе ограничение накладывается на число усреднений N при измерениях корреляционной функции или функции когерентности в случае двух близких по частоте дискретных составляющих, входящих в полосу анализа $|f_1 - f_2| < \Delta f_a$. В идеальном случае при $T \to \infty$ всегда имеем $\overline{\sin\omega_1 T \sin\omega_2 T} \to 0$. При конечном времени усреднения T наблюдается ложное значение измеряемой функции

$$q(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t\, dt = \frac{\sin\pi(f_2 - f_1)T}{\pi(f_2 - f_1)T}, \qquad (7.57)$$

что создает ошибочное представление об уровне когерентности двух процессов разных частот. Поэтому доверять можно лишь таким значениям функции корреляции (или когерентности), которые лежат выше, чем значения в (7.57). Так как значения $|f_2 - f_1|$ могут быть неизвестны априори, то необходимо в каждой точке x производить несколько измерений при различных T и доверять лишь таким результатам измерений, которые не зависят от T.

Третье ограничение касается возможности появления ложных источников дискретных составляющих (высокого уровня вклада

для некоторых источников). Формальный подход — определение функций взаимной корреляции (или когерентности) между вибрациями различных источников может показать их взаимную статистическую связь [9, 14]. Однако исследования показывают, что это явление возникает вследствие вибрационной наводки с одного близко расположенного механизма на другой (или наводки от частоты сети), что может наблюдаться на низких частотах. Прямое сопоставление узкополосных спектров вибраций близко расположенных механизмов позволяет установить присутствие одинаковых частот составляющих в их спектрах, а по наибольшему уровню вибраций выявить истинный источник колебаний на данной частоте.

Таким образом, возможность применения корреляционных методов зависит от характера исследуемых процессов (шум или дискретная составляющая). При исследовании шума корреляционный метод применим лишь в случае непосредственного излучения источников в среду. Возможно установление различных путей распространения акустической энергии, но невозможно применение метода при наличии структурного пути распространения колебаний от механизмов, расположенных в других помещениях. При исследовании дискретных составляющих можно выявить источник при любом пути распространения энергии от него, включая и путь структурного звука для источников, находящихся в других помещениях, но невозможно выявить эти пути распространения энергии, так как исчезает пространственная избирательность корреляционного метода при $\Delta f_{д.с} \to 0$ в соответствии с общим принципом неопределенности $\Delta f \Delta t = \text{const}$.

Глава 8. СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ОГИБАЮЩЕЙ ПРОЦЕССА

8.1. Модели процессов с модуляцией амплитуды и частоты

Рассмотренные выше методы анализа, выявления источников, определения их вкладов и т. п. основаны на измерении статистических характеристик не выше второго порядка — корреляционных и взаимных корреляционных функций и спектров. В ряде случаев этих методов оказывается недостаточно для решения практических задач судовой акустики. Возникает необходимость поиска новых статистических характеристик, которые дали бы дополнительную информацию об исследуемых процессах и позволили бы решать более широкий круг задач.

Теория случайных функций показывает, что расширение объема информации о случайном процессе должно происходить путем измерений и исследований корреляционных и спектральных характеристик более высоких порядков — третьего, четвертого и т. д. Практика же подсказала иной путь — анализ огибающей и мгновенной частот исследуемых процессов. Однако нетрудно показать, что корреляционная функция огибающей процесса

$$R_{12}(\tau)_0 = M\left\{\left[\xi^2(t_1) + \hat{\xi}^2(t_1)\right]^{1/2}\left[\xi^2(t_2) + \hat{\xi}^2(t_2)\right]^{1/2}\right\},$$

где $\widehat{(\ldots)}$ — оператор преобразования Гильберта, и его корреляционная функция четвертого порядка, т. е. $K_{\xi\eta}^{22} = M\left[\xi^2(t_1)\xi^2(t_2)\right]$ несут один и тот же объем информации, но в различной форме. Это различие физически можно представить как различие видов детекторов, служащих для выделения огибающей: в первом случае применен линейный детектор огибающей, во втором — квадратичный. Физически очевидно, что в первом случае, несмотря на более громоздкую запись преобразования процесса, получаются более понятные и доступные до интерпретации результаты анализа процессов, представляемых мультипликативной моделью, чем в случае спектров корреляционных функций четвертого порядка. Ниже рассмотрены практические методы анализа огибающих процессов и их применение.

Огибающая процесса в общем случае представляется как результат преобразования:

$$\Xi(t) = \left[\xi^2(t) + \hat{\xi}^2(t)\right]^{1/2}, \tag{8.1}$$

мгновенная фаза φ и частота $\omega(t)$ определяются преобразованиями

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}[\hat{\xi}(t)/\xi(t)]; \tag{8.2}$$

$$\omega(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}[\hat{\xi}(t)/\xi(t)]}{1+[\hat{\xi}(t)/\xi(t)]^2} = \frac{\xi(t)\frac{\partial\hat{\xi}(t)}{\partial t} - \hat{\xi}(t)\frac{\partial\xi(t)}{\partial t}}{\xi^2(t)+\hat{\xi}^2(t)}, \tag{8.3}$$

где

$$\hat{\xi}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(t)}{\tau - t}\,d\tau \tag{8.4}$$

— преобразование Гильберта процесса $\xi(t)$, дающее сопряженный процесс $\widehat{\xi}(t)$, физически характеризующийся тем, что фазы всех его составляющих сдвинуты на $\pi/2$ по отношению к составляющим процесса $\xi(t)$, а амплитуды неизменны. Указанные определения широко используются в теории, а также при обработке процессов на ЭВМ.

При аналоговых методах анализа процессов для выделения огибающей применяют детектирование с последующим сглаживанием с помощью ФНЧ. Если процесс в статистическом смысле является узкополосным, т. е. $\Delta f/f_0 < 1$, то его можно представить в виде

$$\xi(t) = \Xi(t)\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

При детектировании и сглаживании результата получим выделение огибающей

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\xi(t)|\,h(t'-t)\,dt = \Xi(t'). \tag{8.5}$$

Из теории случайных процессов [36] известно, что корреляционная функция узкополосного гауссовского стационарного процесса имеет вид

$$R_\xi(\tau) = R_0(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

а огибающая этого процесса — корреляционную функцию

$$\Xi(t)\,\Xi(t+\tau) = R_0^2(\tau). \tag{8.6}$$

Следовательно, корреляционный или спектральный анализ огибающей не несет новой информации об исследуемом процессе, если последний представляет собой гауссовский стационарный процесс. Иное дело, если процесс является амплитудно-модулированным, как будет показано ниже. Рассмотрим основные характеристики моделей амплитудных и частотно-модулированных процессов.

Простые амплитудно-модулированные процессы. Математическая модель процессов этого типа записывается в виде

$$z(t) = [1 + mx(t)]\, y(t).$$

В гл. 2 рассмотрены основные свойства простых модулированных процессов, образующих четыре класса процессов соответственно виду несущего и модулирующего процессов (шум или гармоническое колебание).

Сложные модулированные процессы. Могут быть представлены три класса моделей, свойства которых рассмотрены ниже.

1. Аддитивно-модулированные процессы характеризуются двумя или более модулирующими процессами

$$z(t) = \{1 + m[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]\}\, \xi(t) = \\ = [1 + m^{(1)} x_1(t) + m^{(2)} x_2(t)]\, \xi(t). \qquad (8.7)$$

Из условия нормировки $\sigma_x^2 = 0{,}5$ следует, что $\alpha_1^2 \sigma_{x1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{x2}^2 = 0{,}5$

или $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, откуда $[m^{(1)}]^2 + [m^{(2)}]^2 = m^2$.

В общем случае для независимых модулирующих функций

$$\sum_j \sum_k [m_k^{(j)}]^2 = m^2, \qquad (8.8)$$

где j — номер модулирующей функции; k — номер гармоники.

Коэффициент эксцесса аддитивно-модулированного процесса определяется общим (суммарным) коэффициентом модуляции

$$\gamma_4 = \frac{24m^2}{(2 + m^2)^2}$$

(для гауссовой несущей), что можно использовать для экспериментальной оценки значения m. Пример спектра огибающей для двух модулирующих функций — шумовой и периодической — представлен на рис. 8.1, *а*.

2. Мультимодулированный процесс образуется в результате вторичной модуляции модулированного процесса (рис. 8.1, *б*):

$$[1 + m^{(1)} x_1(t)]\, [1 + m^{(2)} x_2(t)]\, \xi(t) = \\ = [1 + m^{(1)} x_1(t) + m^{(2)} x_2(t) + m^{(1)} m^{(2)} x_1(t)\, x_2(t)]\, \xi(t). \qquad (8.9)$$

При малых коэффициентах модуляции последним слагаемым в скобках можно пренебречь, тогда (8.9) будет аналогична модели (8.7). В общем случае число модулирующих функций может быть бо́льшим.

3. Процесс с модуляцией модулирующей функции записывается в виде

$$\{1 + m^{(1)} [1 + m^{(2)} x_2(t)]\, x_1(t)\}\, \xi(t) = \\ = [1 + m^{(1)} x_1(t) + m^{(1)} m^{(2)} x_1(t)\, x_2(t)]\, \xi(t), \qquad (8.10)$$

что незначительно отличается от (8.9). Спектр огибающей приведен на рис. 8.1, *в*.

Частотно-модулированные процессы. По аналогии с амплитудно-модулированными процессами можно представить четыре вида процессов с угловой (частотной или фазовой) модуляцией, отличающихся видом несущего (гармоническое колебание или шум)

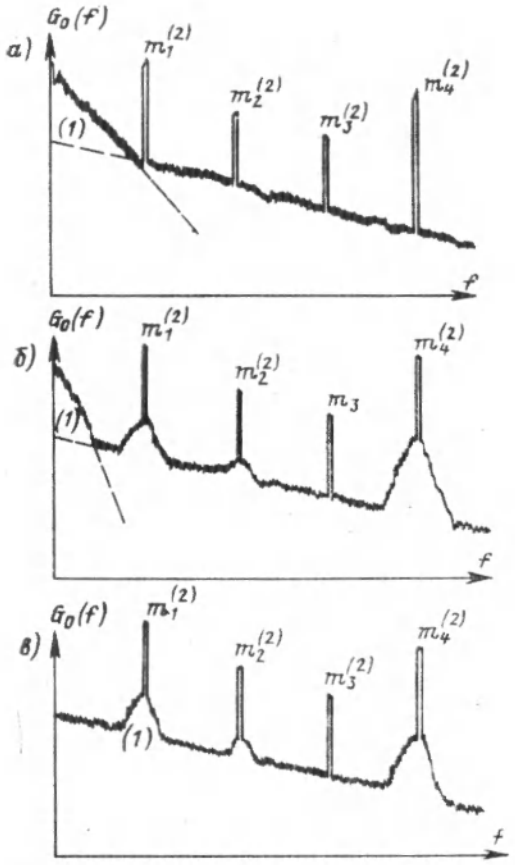

Рис. 8.1. Спектры огибающей сложно-модулированных процессов с шумовой несущей, модулированной шумом *1* и периодическим сигналом *2* для моделей процессов: *а* — аддитивно-модулированного; *б* — дважды модулированного; *в* — модулированного периодическим процессом, имеющим шумовую модуляцию.

и модулирующего (периодическая функция или шум) процессов. В случае частотной модуляции $\omega = \omega_0[1 + mx_\omega(t)]$. При фазовой модуляции $\varphi = \varphi_0[1 + mx_\varphi(t)]$. Эти два параметра взаимосвязаны: $\omega = \partial\varphi/\partial t$ или $\varphi = \int\limits_0^t \omega(t)\,dt$, что можно выразить как различие модулирующих функций $x_\omega(t) = (\partial/\partial t)x_\varphi(t)$ при одинаковом виде модуляции. Таким образом, достаточно рассмотреть общий случай угловой модуляции

$$z(t) = A_0 \sin\{\omega_0 t[1 + mx(t)]\} = A_0 \sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \qquad (8.11)$$

где $m=\Delta\omega/\omega_0$ — глубина частотной модуляции; $\Delta\omega=2\pi\Delta F$ — девиация частоты.

В случае гармонической частотной модуляции

$$z(t)=A_0\sin\left[\omega_0 t+\frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin\Omega t\right]=$$
$$=A_0\left[(\sin\omega_0 t\cos(\beta\sin\Omega t)+\cos\omega_0 t\sin(\beta\sin\Omega t)\right], \qquad (8.12)$$

где $\beta=\Delta\omega/\Omega$ — индекс частотной модуляции.

Выразив $\cos(\beta\sin\Omega t)$ и $\sin(\beta\cos\Omega t)$ через функцию Бесселя J_k порядка k, получим

$$z(t)=A_0\left\{J_0(\beta)\cos\omega_0 t+\sum_k J_k(\beta)[\sin(\omega_0+k\Omega)t+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\sin(\omega_0-k\Omega)t]\right\}. \qquad (8.13)$$

При малых индексах модуляции β имеем $J_0(\beta)\approx 1$, $J_k(\beta)=\beta/2$, поэтому (8.13) будет представлять несущую и две боковых составляющих, как и в случае амплитудной модуляции, а роль коэффициента модуляции m играет индекс модуляции β. При $\beta\gg 1$ уменьшается уровень несущей $J_0(\beta)<1$ и вырастает число боковых полос, а ширина спектра хорошо аппроксимируется формулой $\Delta f=\Delta F(1+\beta)$, где ΔF — девиация частоты. Частотная модуляция шумовой несущей также возможна, но выявить такой процесс можно в случае отличия свойств модулирующего процесса от свойств мгновенной частоты гауссовского шума. Пример моделей такого рода приведен в разделе 2.7.

8.2. Модуляционные эффекты аддитивных процессов

При экспериментальных исследованиях коэффициент амплитудной модуляции определяют, измеряя характеристики огибающей, выделяемой либо в результате детектирования и низкочастотной фильтрации, либо путем вычисления по формуле (8.1). Покажем, что при этом свойства модулированного процесса обнаруживаются и у ряда процессов, представляемых аддитивными моделями.

1. Сумма двух гармонических колебаний характеризуется биениями и может быть представлена в виде колебания с изменяющейся амплитудой $A(t)$ и фазой $\varphi(t)$:

$$s(t)=A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t=A(t)\sin\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi(t)\right], \qquad (8.14)$$

где

$$A(t)=\left[A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t\right]^{1/2}; \qquad (8.15)$$

$$\varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin\omega_2 t}{A_1\cos\omega_1 t+A_2\cos\omega_2 t}. \qquad (8.16)$$

Огибающую $A(t)$ можно представить в виде ряда Фурье, а пронормировав коэффициенты Фурье относительно среднего уровня огибающей, получить следующие выражения для парциальных коэффициентов модуляции:

$$m_1 \approx \frac{q}{2}\left(1+\frac{q^2}{10}\right); \quad m_2 \approx \frac{q^2}{16}\left(1+\frac{q^2}{3}\right); \quad m_3 = \frac{q^3}{64} \qquad (8.17)$$

и т. д. и для суммарного коэффициента модуляции

$$m_\Sigma = \left(\sum m_i^2\right)^{1/2} \approx \frac{q}{2} \approx \frac{A_1}{A_2}; \quad A_1 < A_2, \qquad (8.18)$$

где

$$q = \frac{2A_1A_2}{A_1^2+A_2^2} = \frac{2}{A_1/A_2 + A_2/A_1}. \qquad (8.19)$$

Наибольший уровень модуляции имеет место при $A_1 = A_2$. В этом случае для парциальных коэффициентов модуляции $m_k = 2/(4k^2-1)$, откуда $m_1 = 0{,}66$, а остальные парциальные коэффициенты относительно m_1 находятся в отношении $1:0{,}2:0{,}085:0{,}047$. При $A_1/A_2 = 1 \div 0{,}7$ имеем $m_1 \approx 0{,}6$ и лишь при $A_1/A_2 = 0{,}5$ получим $m_1 \approx q/2 = 0{,}4$, $m_2 \leqslant 0{,}04$, и т. д., т. е. уровень высших гармоник существенно падает. Отметим, что при квадратичном детектировании высших гармоник биений не образуется при любом отношении A_1/A_2.

Мгновенная частота суммы двух гармонических колебаний также оказывается модулированной. Из (8.14) и (8.16) можно получить

$$s(t) = A(t)\sin\left[\omega_1 t + \operatorname{arctg}\frac{A_1 \sin(\omega_2-\omega_1)t}{A_2 + A_1\cos(\omega_2-\omega_1)t}\right]. \qquad (8.20)$$

При $A_1 \ll A_2$ имеем

$$s(t) \approx A_2\left[1+\frac{A_1}{A_2}\cos(\omega_2-\omega_1)t\right]\sin\left[\omega_1 t + \frac{A_1}{A_2}\sin(\omega_2-\omega_1)\right]t, \qquad (8.21)$$

откуда видно, что $\beta \approx A_1/A_2$. Представляя $\operatorname{arctg} x$ в (8.20) рядом Тейлора, можно получить более точные значения для ряда гармоник частотной модуляции:

$$\operatorname{arctg}\psi = \left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_1^3}{4A_2^3}\right)\sin(\omega_2-\omega_1)t + \frac{A_1^3}{12A_2^3}\sin 3(\omega_2-\omega_1)t + \ldots \qquad (8.22)$$

2. Сумма конечного числа гармоник звукоряда образуется при фильтрации периодического процесса полосовым фильтром. Используя формулу для вычисления суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} A\sin(\omega_1+\nu\Omega)t = \operatorname{Im} e^{i\omega_1 t}\left[1+e^{i\Omega t}+e^{i(n-1)\Omega t}\right] = \\ = An\frac{\sin(n\Omega t/2)}{n\sin(\Omega t/2)}\sin\omega_1 t, \qquad (8.23)$$

где $\omega_0=\omega_1+(n-1)/2\Omega$ — средняя частота группы из n гармоник. При детектировании чистого сигнала выделяется огибающая биений $An|\sin(n\Omega t/2)n\sin\Omega t/2|$, которая подобна огибающей модулированного колебания с периодом $T=2\pi/\Omega$ и парциальными коэффициентами модуляции $m_k=u_k/E_0$, где постоянная составляющая равна

$$E_0=An\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left|\frac{\sin(n\Omega t/2)}{n\sin(\Omega t/2)}\right|dt=$$

$$=\frac{2An}{\pi}\left[\mathrm{Si}(\pi)-\frac{2\pi}{n}\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]=A\left[1{,}18-0{,}4\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right];\quad(8.24)$$

k-я гармоника огибающей равна

$$u_k=An\frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left|\frac{\sin(n\Omega t/2)}{n\sin(\Omega t/2)}\right|\cos k\Omega t\,dt.\qquad(8.25)$$

Дисперсия процесса $z(t)$ на выходе детектора равна

$$D_z=\frac{1}{T}\int_0^T\left[z^2(t)-E_0^2\right]dt=A^2n^2\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\sin^2 nx}{n^2\sin^2 nx}-E_0^2\right]dt=$$

$$=A^2n-E_0^2,\qquad(8.26)$$

откуда суммарный коэффициент модуляции

$$m=\frac{\sqrt{2D_z}}{E_0}=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{n-(E_0/A)^2}}{E_0/A}.\qquad(8.27)$$

Расчеты показывают, что для числа гармоник 2—3—4—6—10 суммарный коэффициент модуляции соответственно равен 0,66—0,92—1,15—1,43—1,87, т. е. при $n\geqslant 3$ имеем коэффициент модуляции $m>1$. Необходимо пояснить полученный результат. В табл. 8.1 приведены расчеты коэффициентов модуляции для огибающей различной формы, образующейся как в результате модуляции несущей, так и при биениях гармонических составляющих. Видно, что в этом ряду огибающих пилообразная функция занимает граничное положение, для нее $m\approx 1$. Значения $m<1$ присущи огибающей, представляемой отрезками выпуклой функции. В противоположном случае процесс характеризуется коэффициентом модуляции $m>1$. Другим свойством процесса, имеющего $m>1$, может быть импульсный характер модулирующей функции. В частности, огибающая суммы большого числа гармоник приобретает вид последовательности импульсов, что и находит свое отражение в повышенных значениях коэффициента модуляции.

Таблица 8.1

Коэффициенты модуляции для процессов с различной формой огибающей

Огибающая	Ряд Фурье огибающей	Коэффициенты модуляции, %				
		m_Σ	m_1	m_2	m_3	m_4
$y=\lvert\sin x\rvert$	$y=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$		67	13,5	5,7	3,1
$y=\lvert x\rvert;\ -\pi<x<\pi$	$y=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)$		81	0	9	
$y=x^2;\ -\pi<x<\pi$	$y=\frac{\pi^2}{2}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots\right)$		121	30	13,5	
$y=\cos x;\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$	$y=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$		157	67	0	
$y=\left\lvert\sum_1^3 \sin kx\right\rvert$	$y=\left\lvert\frac{\sin 3x}{\sin x}\right\rvert$		85	38		
$y=\left\lvert\sum_1^6 \sin kx\right\rvert$	$y=\left\lvert\frac{\sin 6x}{\sin x}\right\rvert$		105	72	50	32

8.3. Методы измерений коэффициента модуляции

Определение коэффициента модуляции амплитудно-модулированного гармонического колебания можно произвести одним из двух способов: путем измерения спектра процесса или спектра огибающей. Рассмотрим возможности этих способов для различных классов модулированных процессов.

При модуляции гармонической несущей периодическим процессом

$$z(t) = A(1 + \sum m_k \cos k\Omega t) \sin \omega_0 t =$$

$$= A\left[\sin \omega_0 t + \sum_k \frac{m_k}{2} \sin(\omega_0 - k\Omega)t + \sum_k \frac{m_k}{2} \sin(\omega_0 + k\Omega)t\right] \quad (8.28)$$

спектр процесса содержит несущую и боковые составляющие. Измерив этот спектр, применив узкополосный анализатор с высоким разрешением, можно оценить парциальный коэффициент модуляции m_k как удвоенное значение отношения уровня боковой полосы k-го порядка к уровню несущей. Суммарный коэффициент модуляции найдем путем энергетического суммирования парциальных коэффициентов: $m_\Sigma = \sqrt{\sum_k m_k^2}$.

Второй способ требует произвести детектирование процесса и сглаживание

$$\overline{|z(t)|}^{(T)} = A(1 + \sum m_k \cos k\Omega t)\,\overline{|\sin \omega_0 t|}^{(T)} = E_0(1 + \sum m_k \cos k\Omega t). \quad (8.29)$$

Выделив на выходе линейного детектора постоянную составляющую $E_0 = |\sin \omega_0 t|$ и определив с помощью анализатора амплитуды дискретных составляющих огибающей $E_k = E_0 m_k$, найдем парциальные коэффициенты модуляции как их отношение: $m_k = E_k/E_0$. Если вместо амплитудных значений измеряются среднеквадратичные значения гармоник $u_k = E_k/\sqrt{2}$, то коэффициент модуляции будет равен $m_k = 1{,}41 u_k/E_0$. Для измерения суммарного коэффициента модуляции достаточно непосредственно измерить на выходе детектора среднеквадратичное значение суммарного напряжения u_Σ в диапазоне частот модулирующей функции и отнести его к постоянной составляющей: $m = 1{,}41 u_\Sigma/E_0$.

В случае модуляции гармонического колебания шумом возможно применение этих же двух способов, однако понятие парциального коэффициента модуляции здесь неприменимо, суммарный же коэффициент модуляции удобнее измерить вторым способом, т. е. применяя детектирование.

При модуляции узкополосного шума периодическим процессом его спектр представляется несущей и боковыми полосами:

$$G(\omega) = G_0(\omega) + G_0(\omega - k\Omega) + G_0(\omega + k\Omega), \quad (8.30)$$

которые будут разделяться на спектрограмме лишь при условии, что $\Delta f < F_1$, где Δf — ширина полосы частот узкополосного процесса, F_1 — частота первой гармоники модулирующего процесса. В этом случае возможны оба способа измерений, но понятие парциального коэффициента сохраняется лишь при условии, что полоса анализа выбрана из условия $\Delta f < \Delta f_a \leqslant F_1/3$ как при анализе процесса, так и его огибающей.

При модуляции широкополосного шума ($\Delta f > F_1$) периодическим процессом с периодом F_1 прямой спектральный анализ не позволяет ни измерить, ни обнаружить модуляцию, так как три составляющих спектра (несущая и две боковые полосы) перекрываются и их невозможно разделить на спектрограмме.

При детектировании периодически модулированного шума низкочастотную огибающую на его выходе можно записать в виде

$$\overline{|z(t)|}^{(T)} = (1 + \sum_k m_k \cos k\Omega t)\,[E_0 + e(t)], \tag{8.31}$$

где E_0 — постоянная составляющая; $e(t)$ — флюктуации огибающей процесса $\xi(t)$, т. е. в отсутствии модуляции

$$\overline{|z(t)|_{m=0}}^{(T)} = \overline{|\xi(t)|}^{(T)} = E_0 + e(t).$$

Корреляционная функция огибающей определяется выражением

$$R_0(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \overline{[|z(t)| - E_0]}^{(T)}\, \overline{[|z(t+\tau)| - E_0]}^{(T)}\, dt =$$

$$= E_0^2 \sum_k \frac{m_k^2}{2} \cos k\Omega t + \left(1 + \sum_k \frac{m_k^2}{2} \cos k\Omega t\right) R_e(\tau). \tag{8.32}$$

Энергетический спектр процесса находится как преобразование Фурье

$$G_0(\omega) = 4 \int_0^\infty R_0(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau = E_0^2 \sum_k m_k^2 \delta(\omega - k\Omega_1) +$$

$$+ G_e(\omega) + \int_0^\infty 2m^2 \cos k\Omega t R_e(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau. \tag{8.33}$$

В (8.32) и (8.33) первое слагаемое характеризует периодическую составляющую огибающей, представляемую дискретным спектром, второе слагаемое $R_e(\tau)$ или $G_e(\omega)$ — сплошную часть спектра огибающей, которую можно измерить при отсутствии модуляции, третье — искажение сплошного спектра огибающей вследствие взаимодействия модулирующего процесса с шумовой несущей.

Из (8.32) следует, что корреляционным методом может быть определен суммарный коэффициент модуляции, если измерена амплитуда периодической составляющей $A_R = E_0^2 \sum m_k^2 /2$:

$$m_\Sigma = \left(\sum_k m_k^2\right)^{1/2} = (2A_R/E_0^2)^{1/2}. \tag{8.34}$$

Спектральный анализ огибающей позволяет оценить парциальные коэффициенты модуляции по измеренным среднеквадратичным уровням дискретных составляющих огибающей

$$m_k = (2u_k^2/E_0^2)^{1/2} = \sqrt{2}\, u_k/E_0. \tag{8.35}$$

Суммарный же коэффициент модуляции находится путем численного энергетического суммирования последних, $m = (\sum_k m_k^2)^{1/2}$.

Анализ рассмотренных способов измерений модулированных процессов различных классов показывает, что наиболее универсальным, применимым для процессов любого класса является способ анализа огибающей процесса. Причем при спектральном анализе огибающей производится определение парциальных коэффициентов модуляции, а при корреляционном анализе — суммар-

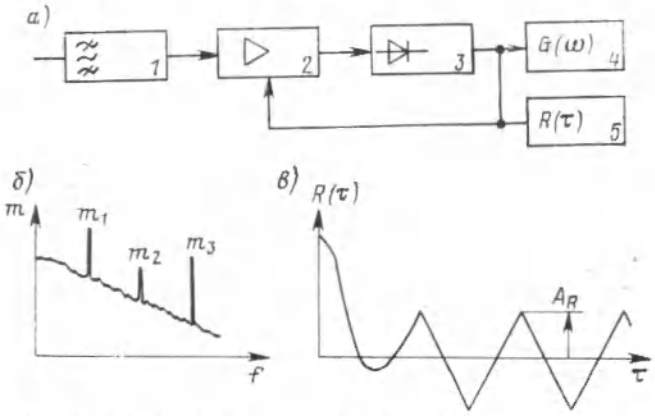

Рис. 8.2. Схема измерений коэффициента модуляции (*а*), спектр (*б*) и корреляционная функция (*в*) огибающей.
1 — полосовые фильтры; *2* — управляемый усилитель АРУ; *3* — детектор средних значений; *4* — анализатор спектра; *5* — коррелятор.

ного коэффициента модуляции. Напомним, что оценка суммарного коэффициента модуляции без анализа свойств огибающей может быть произведена путем измерения коэффициента эксцесса (см. 4.5, 4.6). Отметим также, что при исследованиях широкополосных шумов необходимо оценить частотную зависимость модуляционных характеристик, для чего процесс делят полосовыми фильтрами (обычно третьоктавными) на ряд узкополосных процессов и определяют коэффициенты модуляции $m_ф$ в каждой такой полосе частот.

Схема измерений коэффициента модуляции содержит следующие приборы (рис. 8.2): полосовые (додетекторные) фильтры, блок автоматической регулировки уровня (АРУ) с линейным детектором средних значений и узкополосный анализатор или коррелятор. Блок АРУ позволяет поддерживать постоянным значение E_0 на выходе детектора, поэтому шкалы выходных приборов могут быть непосредственно проградуированы в значениях коэффициента модуляции. При выборе параметров приборов необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

Конечная полоса додетекторного фильтра приводит к некоторому ослаблению коэффициента модуляции вследствие инерцион-

ности фильтра. Смещенность результата, как можно показать, оценивается следующими выражениями:
в случае идеального полосового фильтра

$$m_ф = m(1 - F/\Delta f_ф); \tag{8.36}$$

в случае «колокольной» характеристики фильтра

$$m_ф = m[1 - \exp(-\pi F/2\Delta f_ф)], \tag{8.37}$$

где m и $m_ф$ — коэффициенты модуляции на входе и выходе фильтра соответственно. Поэтому всегда следует выбирать полосу фильтра $\Delta f_ф \gg F$ (F — верхняя частота модуляции) либо ограничивать измерения такой нижней частотой полосового фильтра, при которой смещенность результата не превышает допустимой погрешности измерений, например, при $\Delta f_ф/F \geqslant 5$ будем иметь $(m_ф - m)/m \leqslant 0{,}2$. При относительных измерениях, связанных с оценкой отношения коэффициентов модуляции (см. 8.4), эти искажения не влияют на результат.

Из сказанного следует, что для точных измерений необходим детектор средних значений. Применение детектора среднеквадратичных значений приводит к поддержанию постоянства величины $\sigma_r = \sqrt{\pi/2}E_0(1+m^2/2)^{1/2}$ вместо постоянной составляющей E_0. Следовательно, возникает погрешность измерений, определяемая множителем $(1+m^2/2)^{1/2}$, которую необходимо учитывать при больших значениях коэффициента модуляции $m > 0{,}5$.

Применение схемы АРУ позволяет проградуировать шкалу анализатора или коррелятора непосредственно в значениях коэффициента модуляции. Удобно выражать результат в децибелах:

$$M = 20 \lg (m\,{}^0/_0 / 1\,{}^0/_0).$$

Для градуировки шкалы необходимо подать на вход прибора гармонический сигнал, модулированный синусом с известным коэффициентом модуляции. Его можно оценить по изображению на экране осциллографа через экстремальные значения огибающей: $m = (u_{max} - u_{min})/(u_{max} + u_{min})$. Другой способ состоит в подаче на вход измерительного тракта двух синусоидальных сигналов с небольшим различием их частот $f_2 - f_1 = F$ и равными амплитудами. Значения парциальных коэффициентов модуляции такого сигнала можно рассчитать по данным табл. 8.1. Изменяя разность частот F, можно снять кривую верности измерительного тракта, характеризующую смещенность результата с увеличением частоты модуляции F. Изменяя уровень сигнала на входе, определяют допустимый динамический диапазон входного сигнала.

8.4. Определение вклада источника методом измерений модуляционных характеристик

Шумы многих технических источников обладают периодической огибающей (шумы двигателей внутреннего сгорания, судовых помп, компрессоров, гребного винта [69], отбойного молотка, циф-

ропечатающего устройства и пр.). Периодичность огибающей может успешно использоваться для определения вклада источников при одновременной работе с другими источниками [2, 54].

Метод определения вклада источника основан на использовании закономерностей изменения модуляционных характеристик при суммировании модулированного $z_i(t)$ и немодулированного $\eta(t)$ процессов:

$$\left(1+\sum_k m_k^{(i)}\cos k\Omega t\right)\xi_i(t)+\eta(t)=\left(1+\sum_k m_k^{(\Sigma)}\cos k\Omega t\right)\xi_\Sigma. \quad (8.38)$$

Здесь правая часть представляет собой модель эквивалентного суммарного шума с уменьшенными коэффициентами модуляции $m_k^{(\Sigma)}<m_k^{(i)}$. Ограничиваясь рассмотрением одной гармоники модулирующего процесса, получим условие $m_k^{(i)}\sigma_i^2=m_k^{(\Sigma)}\sigma_\Sigma^2$, которое и определяет возможность оценки вклада d_i модулированного i-го источника в суммарный шум [см. (2.63)—(2.65)]:

$$d_i=\sigma_i/\sigma_\Sigma=\left(m_k^{(\Sigma)}/m_k^{(i)}\right)^{1/2}. \quad (8.39)$$

Таким образом, определение d_i сводится к измерению коэффициентов модуляции $m^{(i)}$ вибраций или шума в источнике и модуляции $m^{(\Sigma)}$ суммарного шума. По способу выделения и измерения периодической составляющей на фоне флюктуаций огибающей $e(t)$ различают три метода, рассматриваемых ниже.

Спектральный метод оценки парциальных коэффициентов модуляции основан на измерении спектра огибающей, откуда непосредственно находим u_k и далее $m_k^{(i)}=\sqrt{2}\,u_k^{(i)}E_0^{(i)}$.

Для оценки минимального измеряемого коэффициента модуляции $m_{\min}$ рассмотрим свойства компонент огибающей. Корреляционная функция огибающей $|\xi(t)|$:

$$B_0(\tau)\approx\frac{\sigma_z^2}{2\pi}\left[1+\frac{1}{4}r_0^2(\tau)\right] \quad (8.40)$$

характеризует квадрат постоянной составляющей $(E_0^{(i)})^2=\sigma_z^2/2\pi$ и спектр флюктуаций $e(t)$, который при условии $\Omega/2\pi\ll\Delta f$ будем считать равномерным в области частот $(0, F_в)$ и равным

$$g_0(\omega)=\int_0^\infty\left[B_0(\tau)-E_i^2\right]d\tau=\frac{\sigma_z^2}{2\pi}\int_0^\infty r_0^2(\tau)\,d\tau=E_i/2\,\Delta f. \quad (8.41)$$

Минимальное значение амплитуды $u_{k\,\min}=E_0^{(i)}m_{\min}$ периодической составляющей, которую можно выделить на фоне шума, определим из условия, что приращение уровня на выходе анализатора в n раз выше относительного уровня флюктуаций $\delta_{фл}$ в полосе ΔF анализатора $n\delta_{фл}=\Delta u/u$. Раскрывая это равенство, пользуясь известными выражениями $\delta_{фл}=1/\sqrt{2\,\Delta FT}$, а также

$$\frac{\Delta u}{u}=\frac{\sqrt{u_k^2/2+g_0\,\Delta F}-\sqrt{g_0\,\Delta F}}{\sqrt{g_0\,\Delta F}}\approx\frac{u_k^2}{g_0\,\Delta F}=\frac{m^2\,\Delta f_ф}{2\,\Delta F},$$

получаем

$$m_{\min}^{(\text{см})} = \left[\sqrt{2}\,\Delta F n/\left(\Delta f_{\text{ф}}\sqrt{\Delta F T}\right)\right]^{1/2}, \tag{8.42}$$

где T — время усреднения; $\Delta f_{\text{ф}}$ — полоса додетекторного фильтра. Например, для $\Delta f_{\text{ф}} = 230$ Гц, $\Delta F = 0{,}2$ Гц, $n = 2$ получим $m_{\min} = 7\,\%$.

Корреляционный метод основан на корреляционном анализе огибающих каждого из процессов (шума или вибраций источника и суммарного шума):

$$R_{\text{ог}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[e(t) + E_0^i m^{(i)} x(t)\right]\left[e(t+\tau) + E_0^i m^{(i)} x(t+\tau)\right] dt =$$

$$= \sigma_{eF}^2 r_e(\tau) + \frac{1}{2}\left(E_0^i\right)^2 m^2 r_x(\tau), \tag{8.43}$$

где $r_x(\tau) = R_x(\tau)/\overline{x^2(t)} = 2R_x(\tau)$; $\sigma_{eF}^2 = g_0 F_{\text{в}} = E_0^2 F_{\text{в}}/2\Delta f_{\text{ф}}$.

Для оценки минимального измеряемого значения корреляционной функции воспользуемся определением динамического диапазона D корреляционного анализа

$$D = \frac{\sigma_{eF}^2}{r_{\min}} = \frac{\left(E_0^i\right)^2 F_{\text{в}}/2\,\Delta f_{\text{ф}}}{\left(E_0^i\right)^2 m_{\min}^2/2} = \frac{\sqrt{2F_{\text{в}}T}}{n}, \tag{8.44}$$

где окончательное выражение получено, как и при спектральном методе, для прямоугольного додетекторного фильтра и идеального интегратора. Отсюда получаем

$$m_{\min}^{(\text{а. к})} = \left[n\sqrt{F_{\text{в}}}/\left(\Delta f_{\text{ф}}\sqrt{2T}\right)\right]^{1/2}. \tag{8.45}$$

Для выбранных выше численных значений и $F_{\text{в}} = 100$ Гц, в частности, получаем $m_{\min} = 10\,\%$ при монохроматической модуляции, $x(t) = \sin\Omega t$. При периодической модуляции, характеризуемой звукорядом частот, корреляционный метод дает измерения общего коэффициента модуляции $m^{(i)} = \sqrt{\sum_k m_k^2}$, что позволяет измерять более низкие значения $m_{\min}$. Выбор $F_{\text{в}}$ определяется диапазоном частот $x(t)$, поэтому при возможности снизить $F_{\text{в}}$ можно также получить снижение $m_{\min}$.

Взаимокорреляционный метод основывается на результатах измерений взаимной корреляционной функции огибающих шума (или вибраций) в источнике и огибающей суммарного шума:

$$R_{12}(\tau)_{\text{ог}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left[e_i(t) + E_0^{(i)} m^{(i)} x(t)\right]\left[e_\Sigma(t+\tau) + E_\Sigma m^{(\Sigma)} x(t+\tau)\right] dt =$$

$$= \overline{e_i e_\Sigma} + \frac{1}{2} E_0^{(i)} E_\Sigma m^{(i)} m^{(\Sigma)} r_{12}(\tau)_x, \tag{8.46}$$

где $\overline{e_i e_\Sigma} = \left(E^{(i)} E^{(\Sigma)}\right) F_{\text{в}}/2\Delta f_{\text{ф}}\,)\, r_{12}(\tau)$.

Воспользовавшись выражением для динамического диапазона взаимокорреляционного анализа $D = \sqrt{\sigma_{ei}^2 \sigma_{e\Sigma}^2} \Big/ r_{\min}$, подставив сюда $\sigma_e^2 = E^2/2\,\Delta f_ф$, $r_{\min} = {}^1/_2 E^{(i)} E^{(\Sigma)} m_{\min}^{(i)} m^{(\Sigma)}$, получим

$$m_{\min}^{(в.\,к)} = n\sqrt{F_в}/(\Delta f_ф m^{(i)}\sqrt{2T}). \qquad (8.47)$$

Для указанных выше численных значений, а также $m_i = 0{,}3$, получим $m_{\min}^{в.к} = 3^0/_0$, что ниже $m_{\min}^{(сп)}$ и $w_{\min}^{(в.к)}$.

Таким образом, при определении значимости источников наименьший вклад $d_{\min} = \sqrt{m_{\min}^{\Sigma}/m_i}$ может быть выявлен взаимокорреляционным методом, спектральный метод менее чувствителен, но позволяет упростить измерения — выполнить последовательно и независимо измерения модуляции в источнике и суммарного шума. Отметим также, что в качестве сигнала для измерения коэффициента модуляции в источнике рекомендуется использовать вибрации источника.

8.5. Определение вклада источника методом периодического ударного возбуждения

Область применения рассмотренного выше способа определения вклада источника методом измерений модуляционных характеристик ограничена лишь такими источниками, шумы которых обладают периодической модуляцией. Для любых других источников шума предлагается способ, основанный на измерении коэффициента передачи от источника или выбранной точки корпусной конструкции судна до заданной точки акустического поля. Если измерены вибрации (или шум) в источнике $\xi_i(\omega)$, а также виброакустический коэффициент передачи $K_{in}(\omega)$, то шум в заданной точке находится простым вычислением:

$$p_i(\omega) = \xi_i(\omega)\, k_{in}(\omega) \qquad (8.48)$$

или в логарифмических единицах

$$P_i(\omega) = \Xi(\omega) + K_{in}(\omega), \qquad (8.49)$$

где $P_i(\omega) = 20\lg(p_i(\omega)/p_0)$; $\Xi_i(\omega) = 20\lg(\xi_i(\omega)/\xi_0)$;

$$K_{in} = 20\lg(k_{in}(\omega)/k_0).$$

Рассмотрим методы измерений коэффициента передачи. Простейший из них состоит в том, что в выбранной точке корпусной конструкции (например, в фундаменте механизма) возбуждаются интенсивные вибрации с такой энергией, что в заданной точке акустического поля создается акустический сигнал от этого источника,

перекрывающий шумы других источников. Тогда коэффициент передачи определяется разностью:

$$K_{in}(\omega) = P_i(\omega)_{\text{у. в}} - \Xi_i(\omega)_{\text{у. в}}, \tag{8.50}$$

где индекс «у. в» означает, что вибрации и шум создаются искусственным источником — ударным возбудителем.

Однако, если не удается обеспечить условие перекрытия рабочих шумов источников искусственным шумом (например, в случае достаточной удаленности точки возбуждения от точки измерения поля и нахождении их в разных помещениях судна), то определяют уровень искусственного шума методом периодической модуляции, рассмотренным выше. Модуляция в источнике создается за счет возбуждения вибраций периодической последовательностью ударов, создаваемых либо специальным возбудителем электромеханического или электродинамического типа, либо имеющимся электро- или пневмоинструментом ударного действия (отбойным молотком, молотком для клепки и т. п.).

Глава 9. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ИХ ИСТОЧНИКОВ

9.1. Корреляционные методы оценки эффективности акустического излучения

Исследование эффективности излучения различных технических источников (механизмы, их кожуха, вибрирующие оболочки, вентиляторы и т. д.) является одной из важнейших задач прикладной акустики. Среди задач этого типа можно указать следующие: определение зоны ближнего поля, оценка размеров излучающих поверхностей, измерение связи вибраций с акустическим полем и др.

Оценка эффективности излучения корреляционным методом. При проведении экспериментальных исследований большой интерес представляет возможность использования корреляции между вибрациями механизма или пластины и создаваемым ими шумом для определения значимости источников шума. В связи с этим рассмотрим упрощенную задачу, представляя колебания поверхностей механизма (пластины) в виде совокупности некогерентных источников — поршневых излучателей малого размера. Корреляцию вибраций в узких полосах частот зададим в виде

$$R_v(\tau) = \overline{v^2} r_v(\tau) = \overline{v^2} a_v(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

где $\overline{v^2}$ — средний квадрат колебательной скорости; $a(\tau)$ — огибающая нормированной функции корреляции.

Взаимная корреляция вибраций одного элемента и излучаемого им звукового давления, измеряемого на расстоянии y от источника, будет

$$R_{pv}(\tau) = B\,\Delta S \overline{v^2} a\left(\tau - \frac{y}{c}\right) \cos \omega_0 \left(\tau - \frac{y}{c}\right),$$

где ΔS — площадь элементарного излучателя; B — коэффициент, учитывающий расстояние от излучающего элемента, сопротивление излучения элемента, а также и его направленность в случае, если размер элементарного излучателя больше длины волны звука.

При одновременном излучении шума всей излучающей поверхностью корреляционная функция звукового давления будет равна сумме корреляционных функций давлений, излучаемых отдельными некогерентно колеблющимися участками поверхности

$$R_p(\tau) = \sum_{n=1}^{m} R_p(\tau)_n \approx S\,\Delta S B^2 \overline{v^2} a(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

Взаимная корреляция между вибрациями любого элемента и суммарным звуковым полем не изменится при одновременном излучении всех других элементов в силу некогерентности их колебаний. Однако нормированные уровни максимумов взаимной корреляции (при $\tau = \tau = y/c$) будут существенно занижены

$$r_{pv}\left(\frac{y}{c}\right)_n = \frac{B\,\Delta S_n \overline{v^2}}{\sqrt{\overline{v^2}\,S\,\Delta S B^2 \overline{v^2}}} = \frac{\Delta S_n}{\sqrt{S\,\Delta S}} \approx \sqrt{\frac{\Delta S}{S}} \ll 1.$$

Таким образом, нормированная ордината максимума взаимной корреляционной функции вибраций излучающей поверхности и звукового давления характеризует ту долю звукового давления, которая излучается исследуемым элементом поверхности (окружающим место установки виброщупа). В случае диффузного поля вибраций взаимная корреляция r_{pv} показывает, насколько излучение данной пластины менее эффективно по сравнению с пластиной тех же размеров, совершающей поршневые колебания с тем же среднеквадратичным значением вибраций.

Приведем в качестве примера результаты измерений взаимной корреляции вибраций пластины $1 \times 1{,}5$ м толщиной $h = 3$ мм со звуковым давлением. Вибрации в пластине возбуждались молоточковым вибратором. Вследствие конечных размеров пластины в ней устанавливалось плоское диффузное поле. По результатам измерений взаимной корреляции вибраций и поля вычислено, что средний радиус когерентно колеблющихся элементов пластины равен $\rho = 0{,}37\lambda_и$. Эта величина близка к абсциссе первого нуля (0,4) пространственной функции корреляции вибраций.

Измерение взаимной корреляции вибраций со звуковым давлением при экспериментальных исследованиях шума механизмов может помочь отыскать область наиболее эффективного излучения шума по максимальным уровням корреляции. При корреляционных измерениях учитываются все факторы, влияющие на излучение: уровень вибраций, эффективные размеры излучающего элемента, в то время как измерение лишь уровней вибрации может дать неверную информацию об эффективности звукоизлучения отдельных элементов конструкций, состоящих из неоднородных элементов.

Оценка зоны ближнего поля сложного излучателя шума. Рассмотрим корреляционные соотношения для поля излучения модели излучающей поверхности, представляемой в виде совокупности некогерентных источников.

Критерий для определения границы ближней зоны при корреляционных измерениях сформулируем следующим образом. Поместим вначале оба микрофона в одной точке y_2, заведомо принадлежащей дальней зоне, проекция которой лежит на излучающей поверхности (рис. 9.1). Затем один из приемников начнем приближать к излучающей поверхности. Вначале максимум функции взаимной корреляции лишь сместится по оси абсцисс на время пробега звуком расстояния $y_2 - y_1$. Нормированное значение макси-

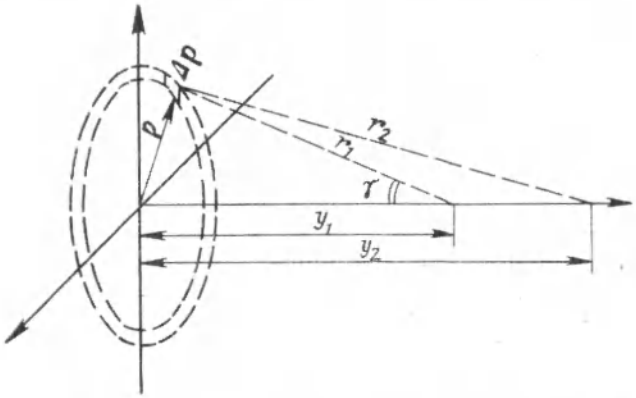

Рис. 9.1. Определение расстояний при исследовании ближнего поля излучающей пластины.

мума взаимной корреляционной функции $r_{12}(\tau_1, y_1, y_2)$ останется равным единице до тех пор, пока оба микрофона будут находиться в дальней зоне, характеризующейся когерентностью процессов в любых двух точках поля. Когда же ближайший к излучающей пластине приемник войдет в область ближнего поля, уровень взаимной корреляции начнет уменьшаться, что и даст возможность определить границу ближней зоны, т. е. зоны, где бегущее звуковое поле еще не сформировалось. Для определения уровня корреляции в этом случае нужно выполнить интегрирование по переменной ρ выражения для взаимной корреляции давлений, обусловленных излучением источников, попадающих в кольцо радиуса ρ шириной $\Delta\varphi$ (см. рис. 9.1):

$$R_{12}(\tau, \Delta r, \rho) = 2\pi\rho\, \Delta\rho^2 \overline{v^2(\rho)}\, R\left(\tau - \frac{\Delta r}{c}\right). \qquad (9.1)$$

Разность расстояний $\Delta r = r_2 - r_1$ при условии $\rho^2/y^2 < 1$ можно приближенно представить в виде

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{\rho^2 + y_2^2} - \sqrt{\rho^2 + y_1^2} \approx (y_2 - y_1) - \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right).$$

При излучении круглой пластины радиуса L в предположении равномерного уровня вибраций $v^2(\rho) = \text{const} = 1$ получим

$$R_{12}(\tau,\ y_2 - y_1) = Aa\left(\tau - \frac{\Delta r}{c}\right)\int_0^L \rho \cos\omega_0\left(\tau - \frac{y_2 - y_1}{c}\right) +$$

$$+ \frac{\rho^2}{2c}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right) d\varphi = Aa\left(\tau - \frac{\Delta r}{c}\right) \times$$

$$\times \cos\omega_0\left(\tau - \frac{y_2 - y_1}{c} + t_0\right) \frac{2}{k\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right)} \sin\frac{kL^2}{4}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right),$$

где $t_0 = (L^2/4c)\,[(1/y_1) - (1/y_2)]$ — коэффициент пропорциональности. Нормирование этого выражения относительно значения корреляционной функции при $\Delta r \to 0$ приводит к следующей зависимости максимальных уровней корреляции от расстояний y_1 и y_2:

$$r_{12}(\tau_м,\ y_2 - y_1) = \frac{\sin\frac{kL^2}{4}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right)}{\frac{kL^2}{4}\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right)} = \frac{\sin z}{z}. \qquad (9.2)$$

Следует отметить, что полученное выражение справедливо и для другой формы излучающей поверхности, если только угловое распределение интенсивности излучения соответствует рассмотренному, т. е. возрастает по линейному закону с увеличением угла $\gamma \sim \rho/r$ (см. рис. 9.1).

Рассмотрим корреляционные характеристики излучения пластины, уровень вибраций которой убывает от центральной части по цилиндрическому закону, т. е. $v^2(\rho) = 1/\rho$, а малые участки пластины колеблются некогерентно. Интегрируя (9.1) при этих условиях по координате ρ, находим

$$R_{12}(\tau_1,\ y_2 - y_1) = A\rho\left(\tau - \frac{\Delta\tau}{c}\right)\cos\omega_0\left(\tau - \frac{y_2 - y_1}{c} - \tau_0\right) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\lambda}{2\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right)}}\sqrt{C^2(\vartheta_L) + S^2(\vartheta_L)},$$

(где $\vartheta_L = L\sqrt{2/\lambda\,(1 - y_1 - 1/y_2)}$; $C(\vartheta_i)$, $S(\vartheta_L)$ — интегралы Френеля.

Изменение максимума нормированной корреляционной функции при приближении точки 1 к излучающей поверхности будет происходить в соответствии с выражением

$$r_{12}(\tau_м,\ y_2 - y_1) = \frac{1}{\vartheta_L}\sqrt{C^2(\vartheta_L) + S^2(\vartheta_L)}. \qquad (9.3)$$

На рис. 9.2 представлены кривые, показывающие изменение когерентности процессов в двух точках поля для рассмотренных

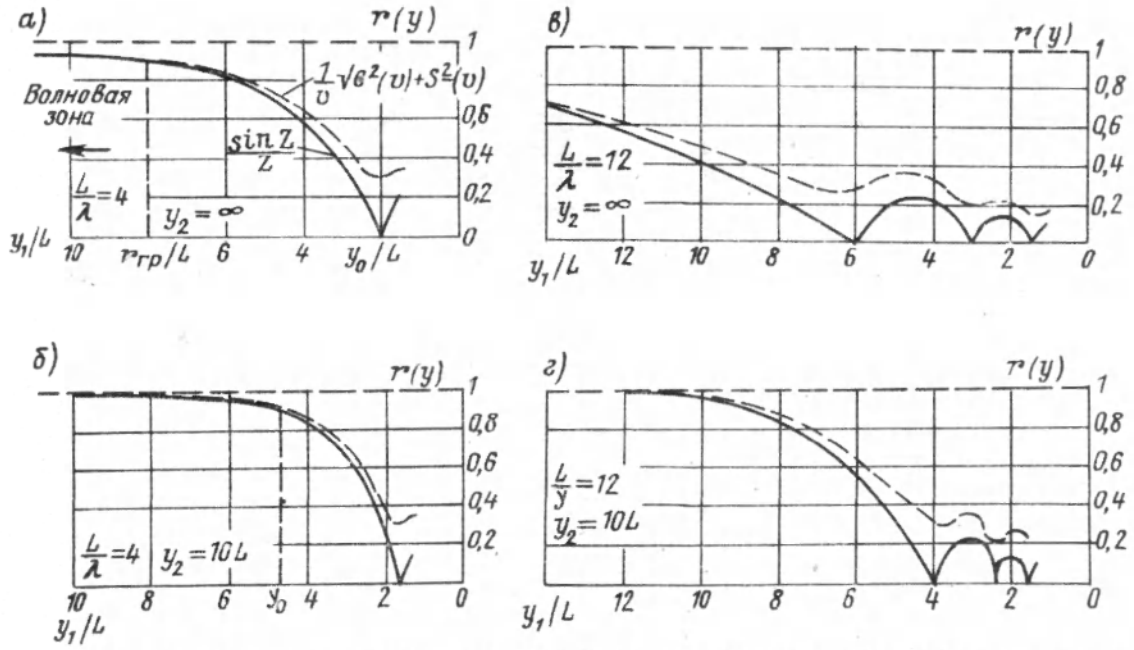

Рис. 9.2. Взаимная корреляция звуковых давлений в ближнем поле излучающей пластины размером L: *а* — при $L/\lambda=12$, $y_2=\infty$; *б* — при $L/\lambda=12$, $y_2=10L$; *в* — при $L/\lambda=4$, $y_2=\infty$; *г* — при $L/\lambda=4$, $y_2=10L$.

——— $\sin z/z$; — — — $1/\vartheta\sqrt{C^2(\vartheta)+S^2(\vartheta)}$

случаев распределения уровней вибраций. Видно, что при больших расстояниях от пластины изменения уровней корреляции практически не зависят от характера распределения уровней вибраций, что позволяет использовать эти зависимости для определения границы ближнего поля любой излучающей пластины при некогерентных колебаний ее участков.

Если в качестве границы ближнего поля $y_{гр}$ принять точку y_1, в которой корреляция относительно точки $y_2=\infty$ падает до значения $r_{12}(\tau_м, y_{гр})=0{,}9$, то можно получить

$$y_{гр}=2L^2/\lambda.$$

Если же в качестве границы ближнего поля принять $r_{12}(\tau_м, y_{гр})\approx\approx 0{,}5$, то получим

$$y_{гр}=L^2/\lambda.$$

Как видно, протяженность зоны ближнего акустического поля излучающей пластины, т. е. области, где статистические характеристики поля еще не сформировались, определяется выражениями, аналогичными формулам для границы лучевой и волновой зон при поршневых колебаниях пластин квадратной и круглой формы той же площади. Эти ограничения следует учитывать при измерении значимости источников звука корреляционными методами.

Оценка зоны когерентности акустического поля. Полученные выше результаты позволяют оценить пространственный интервал корреляции звуковых давлений в продольном направлении, т. е. вдоль направления распространения звуковых волн, следующим образом.

Выражения (9.2) и (9.3) при малых значениях аргумента практически совпадают и могут быть представлены двумя членами степенного ряда:

$$r_{12}(\tau_м, y_1, y_2)\approx 1-\frac{k^2L^4}{96}\,\frac{(y_2-y_1)^2}{y_1^2y_2^2}.$$

Отсюда для условия $r\geqslant 0{,}9$ находим

$$y_2-y_1=d_y\leqslant\frac{\lambda y_1y_2}{2L^2}. \qquad (9.4)$$

Для поперечной функции корреляции (вдоль фронта волны), считая запаздывание приближенно равным $t_з\approx xd/cy_0$, получим для случая линейного источника длиной L:

$$r_{12}(d_x)=\frac{\sin(d_x\omega_0L/cy_0)}{d\omega_0L/cy_0}.$$

Из приближенного выражения

$$r_{12}(d_x)\approx 1-\frac{1}{6}\left(\frac{d_x\omega_0L}{cy_0}\right)^2$$

для критерия $r_{12}d \geqslant 0{,}9$ получим условие

$$d_x \leqslant 0{,}12 \frac{\lambda}{L} y_0. \tag{9.5}$$

Для модели источника в виде диска радиуса $L_д$, равномерно заполненного некоррелированными источниками, поперечная корреляционная функция определяется выражением

$$R_{12}(0,\ d) = 2\int_0^L \int_0^{\pi/2} \cos \frac{kd\rho \sin \varphi}{y_0} \rho\, d\rho\, d\varphi = AJ_1\left(\frac{k_0\, dL_д}{y_0}\right).$$

Нормируя, получаем

$$r_{12}(d_x) = 2\,\frac{J_1\,(k_0\, dL_д/y_0)}{k_0\, dL_д/y_0}. \tag{9.6}$$

Выражение (9.6) приближенно записывается в виде

$$r_{12}(d_x) \approx 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{k_0\, dL_д}{y_0}\right)^2,$$

откуда для критерия $r_{12}(dx) \geqslant 0{,}9$ получаем условие

$$d \leqslant 0{,}14 \frac{\lambda}{L_д} y_0. \tag{9.7}$$

Таким образом, в акустическом поле источника можно выделить область пространственной корреляции звуковых давлений. Оценка величины этой области позволяет ввести ограничения на размещение измерительных приемников, например, приемников направленной антенны, если известны размер (радиус) излучающей поверхности L. С другой стороны, полученные результаты (9.4), (9.5), (9.7) могут быть использованы для экспериментальной оценки эффективных размеров излучающей области по измеренным значениям интервалов пространственной корреляции.

9.2. Применение направленных антенн для исследований полей и источников излучения

Применение направленных антенн позволяет определить ряд важных характеристик как акустического поля, так и его источников. Задача определения углового распределения энергии поля решается путем применения направленных антенн, работающих в зоне Фраунгофера. Характеристики антенн в этом режиме работы достаточно хорошо изучены [62, 66]. Применение же антенн для исследования пространственной структуры источников акустического излучения приводит к необходимости использования антенн в зоне Френеля и ближней зоне, что не является традиционным и требует пояснения.

Рассмотрим задачу пространственной локализации источников излучения, т. е. определения координат областей излучения.

С этим приходится сталкиваться, например, при разделении шумов, излучаемых реактивным двигателем и его струей [76] или различными механизмами агрегата, различными областями колеблющейся переборки, а также при поиске неисправностей и повреждений акустическими методами и т. д.

При расположении излучателей в дальней зоне линейной антенны (зоне Фраунгофера, $z \geqslant l^2/\lambda$, где l — размер антенны) угловое разрешение равно $\Delta\varphi_{0,7} = 0{,}84\lambda/l$, а пространственное разрешение $\Delta x = 0{,}84\lambda z/l$. Стремление уменьшить разрешаемое расстояние Δx между источниками приводит к необходимости уменьшить z, т. е. приблизить антенну к источнику. Но тогда возникает вопрос о том, можно ли применять антенну при нахождении источника в ее зоне Френеля, т. е. при $r < l^2/\lambda$, и как изменяются параметры антенны в зоне Френеля без применения специальных методов компенсации различного запаздывания сигналов. Работу антенны в зоне Френеля уже нельзя описывать двумя множителями, раздельно учитывающими расстояние (z) до источника звука и угловое положение его (α) относительно оси антенны. Можно показать, что в случае расположения источников на прямой, параллельной антенне на расстоянии z_0 от нее, характеристика направленности в ближнем поле определяется выражением (для антенны в виде отрезка прямой длиной l)

$$\Phi(z_0,\ x_0) = \frac{|F(S_2) - F(S_1)|}{2\,|F(S_0)|}, \tag{9.8}$$

где $F(s)$ — интегралы Френеля

$$S_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}\left(x_0 \pm \frac{l}{2}\right);\quad S_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}\,\frac{l}{2}.$$

Видно, что характеристика антенны в ближнем поле определяется двумя параметрами: нормированным расстоянием $\zeta = z/z_{гр}$, характеризующим положение точки наблюдения относительно границы $z_{гр} = l^2/\lambda$ зоны Френеля, и отношением x_0/l, т. е.

$$S_{1,2} = 2S_0\left(\frac{x_0}{l} \pm 0{,}5\right);\quad S_0 = \sqrt{1/2\zeta}.$$

Расчеты по формуле (9.3) показывают (рис. 9.3), что чувствительность антенны в ближнем поле (по оси z антенны) изменяется с расстоянием и в приближении Френеля равна

$$\gamma(0,\ z_0) = \gamma_0 l\,\frac{F\sqrt{1/2\zeta}}{\sqrt{1/2\zeta}}.$$

Деформация характеристики направленности в зоне Френеля при приближении источника к антенне проявляется в уширении главного максимума, сглаживании и смещении добавочных максимумов и нулей (см. рис. 9.3).

При оценке углового разрешения антенны за минимально разрешимый угол $\Delta\varphi$ можно принять первый нуль характеристики на-

правленности. В зоне Фраунгофера для линейной антенны известно условие $\Delta\varphi_0=\lambda/l$. При переходе к пространственному разрешению $\Delta x_0=z_0\lambda/l$. Уменьшая z_0 с целью уменьшения Δx, будем улучшать разрешение в зоне Фраунгофера, но в зоне Френеля

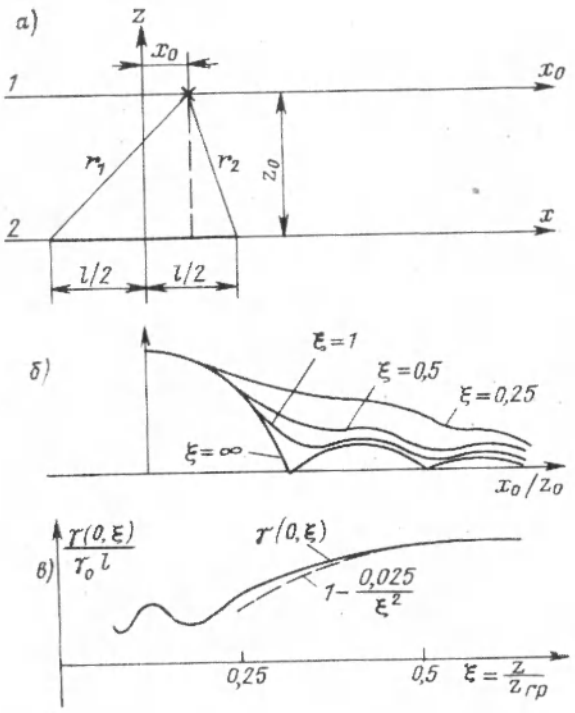

Рис. 9. 3. Характеристики линейной антенны в зоне Френеля: *а* — геометрия задачи; *б* — характеристика направленности при различном удалении антенны от линии источников; *в* — изменение чувствительности антенны при приближении источника.

1 — линия источников излучения; *2* — линия приемников.

улучшение разрешения замедлится вследствие ухудшения характеристики направленности. При оценке координат протяженного источника шума необходимо, кроме того, считаться с конечным размером зоны пространственной корреляции (см. 9.1). Улучшение разрешающей способности прекратится, если размеры антенны будут превышать область пространственной корреляции.

Выше рассматривались характеристики непрерывной антенны. Для дискретной антенны с конечным числом приемников харак-

терно появление добавочных максимумов, причем в зоне Френеля на высоких частотах уровни добавочных максимумов могут быть даже выше основного (при измерении характеристики относительно перемещения излучателя по прямой x_0 на рис. 9.3). Этот фактор ограничивает применение дискретной антенны сверху по частоте условием $d_0 \leqslant k\lambda$, где d_0 — шаг между приемниками антенны, k — коэффициент, выбираемый в пределах от 0,5 до 2 с учетом протяженности зоны, в пределах которой недопустимо появление дополнительных максимумов.

В ряде случаев целесообразно рассматривать возможность применения продольно-компенсированных антенн, имеющих в зоне Фраунгофера характеристику $D(\alpha) = \sin z/z$, где $z = (\pi l/\lambda) \times \times (\sin\alpha - 1)$. Чувствительность такой антенны, приведенная, например, к центру антенны $\gamma = \gamma_0[(y_1 + y_2)/2]/\ln y_2/\eta_1$ (где γ_0 — чувствительность отдельного элемента, y_1 и y_2 — координаты начала и конца антенны) слабо изменяется при приближении источника. Разрешение такой антенны $\Delta\varphi = 1{,}8\sqrt{\lambda/l}$ хуже, чем у некомпенсированной антенны, что требует увеличения ее длины, однако эта антенна не требует фокусировки по дальности.

Обращаясь опять к характеристикам антенны по оси z, приходим к выводу о необходимости фокусировки линейной антенны по дальности путем применения компенсации временного запаздывания сигнала соответствующим сдвигом сигналов во времени по определенному закону, приводящему к их синфазному сложению. Очевидно, что сочетание фокусировки по дальности со сканированием по углу приводит к сложному закону выбора компенсирующего запаздывания, а это трудно реализуется в аналоговых устройствах. Данная задача решается путем применения ЭВМ для формирования характеристики направленности с фокусировкой на заданную точку пространства. Такая обработка сигналов приводит к восстановлению чувствительности антенны в ближнем поле до значения этого параметра в дальнем поле и улучшению разрешающей способности.

9.3. Метод синтезированной апертуры для определения координат источников излучения

Сравнительно простой способ направленного приема основан на методе синтезированной апертуры. Метод впервые применялся в радиолокации в активном режиме, затем в пассивном режиме для исследований источников электромагнитного излучения [24]. Применение этого метода в акустике позволяет простыми средствами с использованием лишь двух приемников исследовать структуру сложной излучающей системы, определить функцию пространственного распределения источников излучения.

Рассмотрим линейный источник — совокупность некоррелированных излучающих областей, расположенных вдоль отрезка пря-

мой, характеризуемый одномерным распределением интенсивности излучения $I(x') = p^2(x')$. В случае дискретных излучателей распределение интенсивности излучения принимает вид

$$I(x') = \sum \sigma_i^2 \delta(x' - x_i),$$

где σ_i^2 — дисперсия (интенсивность) i-го источника, x_i — координата его фазового центра излучения.

Корреляционная функция в акустическом поле сложного источника определяется суперпозицией корреляционных функций звуковых давлений, создаваемых отдельными независимыми источниками

$$r_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sigma_\Sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} a(t_3) e^{i\omega t_3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} I(x') dx', \tag{9.9}$$

где $t_3(x - x')$ — запаздывание сигнала, определяемое разностью координат двух приемников ($\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}'$), зависящее от разности координат источника $\mathbf{x}'(x', y', z')$ и приемника $\mathbf{x}(x, y, z)$.

Необходимо решить обратную задачу — по измеренной корреляционной функции между двумя точками акустического поля $r_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ определить распределение интенсивности источников $I(x')$. По теореме о спектре свертки из (9.9) получим

$$F_r(u) = F_1(u) F_j(u), \tag{9.10}$$

где

$$F_r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) e^{-iux} dx;$$

$$F_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t_3) e^{-i\omega t_3 (\mathbf{x})} e^{-iux} dx;$$

$$F_j(u) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x') e^{-iux'} dx'$$

— преобразования Фурье соответствующих членов выражения (9.9).

Функция $f_1(x) = a(t_3) e^{-i\omega t_3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$ является ядром интегрального преобразования и представляет собой корреляционную функцию поля точечного источника, расположенного в точке x', и определенную в достаточно узкой полосе частот.

Из (9.10) легко находится решение задачи

$$F_j(u) = F_r(u) / F_1(u).$$

Путем обратного преобразования Фурье находим

$$J(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_j(u)\, e^{iux'}\, du. \tag{9.11}$$

Таким образом, решение находится через преобразование Фурье от измеренной пространственной корреляционной функции $r_{12}(\vec{x}, \vec{x}_0)$ и функции $f_1(x)$, которая определяется законом изменения запаздывания для одиночного излучателя и является ядром интегрального преобразования.

При перемещении одного приемника зависит от координаты излучателей x'.

От этого недостатка свободен результат, получающийся при перемещении двух приемников параллельно линейному источнику: при базе d, перпендикулярной линейному источнику в приближении Френеля ($l \leqslant \sqrt{\lambda z_1^3}$), получим

$$\delta_{x\perp} \approx \lambda z_1 z_2 / 2l\, d;$$

при параллельной базе, учитывая, что $x\delta_x \ll (x'^2 + z_0^2)$ и $d \ll 2z_0$

$$\delta_{x(\parallel)} = \frac{\lambda}{dz_0^2 \left[\frac{1}{z_0^3} - \frac{1}{(z_0^2 + l^2)^{3/2}} \right]} \approx \frac{2\lambda z_0^3}{3dl^2} \Bigg|_{\frac{l}{z_0} < 1}.$$

Следовательно, для получения разрешения, не зависящего от координат источников, целесообразно перемещать два приемника (или перемещать линейный излучатель относительно двух приемников).

Сложнее выбирать геометрию измерений при исследовании источников шумового излучения. Прежде всего при измерениях весь диапазон делят на узкие полосы, например, третьоктавные. Далее размещение приемников должно выбираться из условия сохранения высокой степени коррелированности принимаемых сигналов. Вследствие конечного радиуса L излучающего «пятна» возникает, как показано выше, декорреляция сигналов при большом разнесении приемников. Следует располагать последние в пределах пространственного интервала корреляции (см. 9.5).

Второе ограничение состоит в том, что изменение запаздывания сигналов между приемниками не должно превышать интервала временной когерентности процесса $t_з \leqslant 1/\Delta f$ в выбранной полосе частот Δf. Далее необходимо выбрать оптимальное время усреднения при измерении корреляционной функции поля $RC = \delta_{x\perp}/2\pi v_0$, где $\delta_{x\perp}$ — ожидаемое пространственное разрешение, v_0 — скорость перемещения приемников вдоль линейного источника.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авиационная акустика/Под ред. А. Г. Мунина, В. И. Квитки. М., Машиностроение, 1973.

2. Авт. свид. № 992058 (СССР). Способ определения уровня шума отдельного источника. Новиков А. К., Слита В. В., Чуновкин Г. А. Бюллетень изобретений № 42, 1975.

3. Аппаратурная реализация дискретного преобразования Фурье/Евтеев Ю. Н. и др. М., Энергия, 1978.

4. Аппаратура для акустики, электроакустики, виброметрии, фотометрии, тензометрии, термометрии, медицинской диагностики и анализа сигналов. Каталог. Брюль и Къер, Дания, 1983.

5. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М., Наука, 1979.

6. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., Наука, 1981.

7. Бендат Дж., Пирсол А. Измерения и анализ случайных процессов. М., Мир, 1974.

8. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. М., Мир, 1983.

9. Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Метод разделения источников низкочастотных вибраций.— Акустический журнал, 1977, т. XXIII, вып. 3, с. 362—367.

10. Боркус М. К., Черный А. Е. Корреляционные измерители путевой скорости и угла сноса летательных аппаратов. М., Советское радио, 1973.

11. Бородицкий Л. С., Спиридонов В. М. Снижение структурного шума в судовых помещениях. Л., Судостроение, 1974.

12. Воллернер П. Ф. Аппаратурный спектральный анализ сигналов. М., Советское радио, 1977.

13. Галушкин А. И., Зотов Ю. Я., Шикунов Ю. К. Оперативная обработка экспериментальной информации. М., Энергия, 1972.

14. Генкин М. Д., Сергеев В. И., Соколова А. Г. Применение корреляционного метода к расчету динамических характеристик механических систем в условиях их нормальной эксплуатации.— В сб.: Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами. М., Наука, 1971, с. 205—215.

15. Геранин В. А. Спектральное представление нестационарных случайных процессов.— Труды IV Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике. Новосибирск, СО АН СССР, 1973, с. 68—75.

16. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Советское радио, 1977.

17. Горбенко В. С. Приборы для определения интегральных и дифференциальных функций распределения вероятностей стационарных случайных процессов.— Известия вузов СССР. Радиотехника, 1962, т. V, № 3, с. 301—313.

18. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов. М., Энергия, 1974.

19. Грибанов Ю. И., Веселова Г. П., Андреев В. Н. Автоматические цифровые корреляторы. М., Энергия, 1971.

20. Грибанов Ю. И., Мальков В. П. Выборочные оценки спектральных характеристик стационарных случайных процессов. М., Энергия, 1978.

21. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. 1971, т. 1, 2. М., Мир.
22. Жовинский В. Н., Арховский В. Ф. Корреляционные устройства. М., Энергия, 1974.
23. Иванов В. А. Аналитический метод расчета детекторов средне-квадратичных значений со скользящим смещением.— Автометрия, 1972, № 3, с. 61—66.
24. Караваев В. В., Сазонов В. В. Основы теории синтезированных антенн. М., Советское радио, 1974.
25. Клюкин И. И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л., Судостроение, 1971.
26. Клюкин И. И., Колесников А. Е. Акустические измерения в судостроении, 1982.
27. Козубовский С. Ф. Корреляционные экстремальные системы. Киев, Наукова думка, 1978.
28. Колебания нелинейных механических систем/Под ред. И. Н. Блехмана.— В кн.: Вибрации в технике. Т. 2. М., Машиностроение, 1979, с. 141—190.
29. Коняев К. В. Спектральный анализ случайных процессов и полей. М., Наука, 1973.
30. Котюк А. Ф., Цветков Э. И. Спектральный и корреляционный анализы нестационарных случайных процессов. М., Издательство комитета стандартов, 1970.
31. Крамер Г. Математические методы статистики. М., Мир, 1976.
32. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через линейные системы.— Автоматика и телемеханика, 1953, № 7, с. 691—702.
33. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы.— Автоматика и телемеханика, 1953, № 4, с. 256—262.
34. Курочкин С. С. Многоканальные счетные системы и коррелометры. М., Энергия, 1972.
35. Кендалл М., Стюарт А. Теория распределений. М., Наука, 1966.
36. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. М., Советское радио, 1974.
37. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 1 и 2. М., Мир, 1983.
38. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М., Советское радио, 1978.
39. Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., Энергия, 1972.
40. Мирский Г. Я. Характеристики статистической взаимосвязи и их измерения. М., Энергоиздат, 1982.
41. Многофункциональные измерители вероятностных характеристик Ф36, Ф37/Бабогло М. М. и др.— X Всесоюзный симпозиум. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей, секция II. Л., АН СССР, 1978, с. 88—91.
42. Многофункциональный коррелятор/Буйнявичус А. В. и др.— VIII Всесоюзный симпозиум. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. Л., ВНИИЭП, 1975, с. 3—10.
43. Некоторые проблемы обнаружения сигнала, маскируемого флюктуационной помехой.— Сб. переводов под ред. И. И. Шнер. М., Советское радио, 1965.
44. Новиков А. К. Корреляционные измерения в корабельной акустике. Л., Судостроение, 1971.
45. Новиков А. К. Анализаторы взаимного спектра.— Труды II Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике. Новосибирск, Наука, 1971, с. 153—172.
46. Новиков А. К. О синтезе апостериорной модели случайного процесса по статистическим характеристикам одной выборочной функции.— Труды V Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике, АН СССР, 1973, с. 26—30.
47. Новиков А. К. Классификация акустических шумов по их вероят-

ностным представлениям.— Труды VI школы-семинара по статистической гидроакустике. Новосибирск, СО АН СССР, 1974, с. 190—196.

48. Новиков А. К. Методы формирования совокупности реализаций и их роль в статистических измерениях.— Труды VII школы-семинара по статистической гидроакустике. Новосибирск, СО АН СССР, 1975, с. 190—196.

49. Новиков А. К. Модуляционные характеристики нестационарных импульсных случайных процессов.— Труды VIII Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике, Новосибирск, СО АН СССР, 1976, с. 166—169.

50. Новиков А. К. Аппаратурные методы анализа процессов.— В кн.: Вибрация в технике. Т. 5. М., Машиностроение, 1981, с. 266—289.

51. Новиков А. К., Стрелкова В. М. Аналогово-цифровой коррелятор для акустических измерений.— VII Всесоюзная акустическая конференция, сборник докладов. Л., АН СССР, 1973, с. 44—45.

52. Новиков А. К. О пространственной корреляции плоских изгибных волн.— Акустический журнал, 1961, т. 7, вып. 4, с. 462—469.

53. Новиков А. К., Стрелкова В. М. Метод определения истинного фазового спектра при дискретном преобразовании Фурье случайного процесса.— В сб.: Дифракционные и вероятностные задачи судовой акустики. НТО им. акад. А. Н. Крылова. Л., Судостроение, 1979, с. 157—163.

54. Новиков А. К. Сравнительная оценка методов определения значимости источников по периодической огибающей излучаемого ими шума.— Тезисы докладов IX Всесоюзной акустической конференции. Секция ОШв-7. М., АН СССР, 1977, с. 29—32.

55. Новый прибор Х6-5 для измерений характеристик случайных процессов/Буйнявичус В. В. и др.— XI симпозиум. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей, секция П. АН БССР, Л., 1980, с. 28—30.

56. О методах вычисления оценки спектральной плотности/Быков Ю. М. и др.— В кн.: Идентификация и аппаратура для статистических исследований. Наука, 1970, с. 94—101.

57. Ольшевский В. В. Статистические методы в гидролокации. Л., Судостроение, 1983.

58. Ольшевский В. В. Основы теории статистических измерений. Таганрогский радиотехнический институт им. В. Д. Калмыкова, 1976.

59. Приборы и системы для измерения вибраций, шума и удара. Справочник, т. 1 и 2. М., Машиностроение, 1978.

60. Розенберг В. Я. Введение в теорию точности измерительных систем. М., Советское радио, 1975.

61. Свойства оценок авто- и взаимных корреляционных функций и спектральных плотностей случайных процессов/Каракулаков В. А. и др.— X Всесоюзный симпозиум. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. Секция I. Л., АН СССР, 1978, с. 39—49.

62. Смарышев М. Д. Направленность гидроакустических антенн. Л., Судостроение, 1973.

63. Смоляков А. В., Ткаченко В. М. Измерение турбулентных пульсаций. Л., Энергия, 1980.

64. Соколова А. Г. Некоторые особенности корреляционного анализа вибраций неоднородных конструкций.— В сб.: Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами. М., Наука, 1971, с. 216—219.

65. Справочник по судовой акустике/Под ред. И. И. Клюкина, И. И. Боголепова. Л., Судостроение, 1973.

66. Справочник по гидроакустике/Под ред. А. Е. Колесникова. Л., Судостроение, 1982.

67. Филимонов Г. П., Гречухо С. Н. Статистические ошибки при измерении спектральной плотности суммы периодического сигнала и нормального шума на выходе простого анализатора спектра.— VII Всесоюзный симпозиум. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей, секция Ш. Л., ВНИИЭП, 1974, с. 134—138.

68. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Избранные труды. Т. 2. М., Наука, 1973.

69. Хортон Дж. У. Основы гидролокации. Л., Судпромгиз, 1961.

70. Цветков Э. И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. М Энергия, 1973.
71. Цветков Э. И. Основы теории статистических измерений. Л., Энер гия, 1979.
72. Что такое «быстрое преобразование Фурье?»/Кокрен В., Кули Дж., Фей вин Д. и др.— Труды ИИЭР, 1967, т. 55, № 10, с. 7—29.
73. Ширяев А. И. Некоторые вопросы спектральной теории старших мо ментов.— Теория вероятностей и ее применение. 1960, т. 5, вып. 3, с. 301—30
74. Юшин В. И. О погрешности, вызванной разбросом начал отсчета пр осреднении по множеству реализаций.— Автометрия, 1966, № 4, с. 65—71.
75. Billings A. R. Sampling of Signals without D. C. components. Ele tronic and Radio Engineer. 1959, vol. 36, N 2, p. 70—72.
76. Bullingsley J., Kinns R. The Acoustic Telescope.— Journal Sound and Vibration. 1976, N 4, p. 485—510.
77. Marcinkewicz J. Sur une propriete de la loi de Gauss.— Mat Zeitschr. 1938, H 4, vol. 44, p. 612—618.
78. Moran P. A. P. Cross spectral analysis: a Review Bull. Internation Statistical Inst., 1971, vol. 4, N 1, p. 271—283.
79. Urban P., Kop B. Cross spectral Density Measurements with Bruel an Kjar Instruments. (Part II).— Technical Review, Bruel and Kjar, 1968, N p. 21—33.
80. Wahrman C. G. A true RMS Instrument.— Technical Review. Bru and Kjar, 1958, N 3, p. 7—31.
81. Winter E. F., Bies D. A. Correlation Properties of Flexural waves Long Thir Bars.— YASA, 1962, vol. 34, N 4, p. 472—475.

БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА

Андрей Константинович Новиков

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ В СУДОВОЙ АКУСТИКЕ

Заведующий редакцией А. Д. Старков

Редактор Э. В. Зубкова. Технический редактор И. К. Пелипенко
Корректор В. Ю. Самохина. Художественный редактор О. П. Андрее
Оформление художника В. И. Харькова

ИБ № 919

Сдано в набор 16.10.84. Подписано к печати 18.02.85. М-30446. Формат 60×90¹/₁₆. Бума типографская № 2. Гарнитура шрифта литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 17 Усл. кр.-отт. 17,31. Уч.-изд. л. 17,9. Тираж 2800 экз. Заказ № 332. Изд. № 3920— Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Судостроение», 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.
Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградско объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Го дарственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торгов 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6