

**БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА ПО НАДЕЖНОСТИ**

---

**И. Б. ГЕРЦБАХ,  
Х. Б. КОРДОНСКИЙ**

# **МОДЕЛИ ОТКАЗОВ**

ПОД РЕДАКЦИЕЙ Б. В. ГНЕДЕНКО



**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«СОВЕТСКОЕ РАДИО»**

МОСКВА — 1966

Излагаются основные математические модели отказов, отвечающие различным причинам их возникновения. На основе указанных моделей получены законы распределения времени безотказной работы. Для этих законов излагаются способы оценки их параметров путем обработки опытных данных с помощью методов моментов и разделяющих разбиений.

Брошюра рассчитана на лиц, занимающихся приложением теории вероятностей к задачам надежности. В частности, она будет полезна для работников отделов надежности заводов и конструкторских бюро, студентов вузов и аспирантов технических специальностей.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*Б. В. Гнеденко (отв. редактор), Б. Е. Бердичевский, И. Н. Коваленко, И. В. Крагельский, В. А. Кузнецов, А. В. Майоров, И. И. Морозов, Е. Ю. Намиот, О. Ф. Пославский, Д. Н. Решетов, А. Д. Соловьев, Я. М. Сорин, Р. Б. Улинич, Н. А. Шишонок, Я. Б. Шор (зам. отв. редактора).*

## СОДЕРЖАНИЕ

От редакции . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	8
§ 1. Классификация причин отказов . . . . .	12
§ 2. Мгновенное повреждение . . . . .	16
Экспоненциальное распределение . . . . .	16
Порог чувствительности . . . . .	25
Суперпозиция экспоненциальных распределений . . . . .	31
§ 3. Накапливающиеся повреждения . . . . .	34
Модели изнашивания . . . . .	34
Гамма-распределение времени безотказной работы . . . . .	45
Нормальное распределение времени безотказной работы . . . . .	66
Гамма-распределение с параметром смещения . . . . .	73
Функциональное гамма-распределение . . . . .	78
Логарифмически-нормальное распределение . . . . .	84
Линейные реализации износа . . . . .	94
Анализ реализаций износа . . . . .	100
§ 4. Процессы повреждения с релаксацией . . . . .	113
§ 5. Наложение причин отказов и цепные системы . . . . .	121
Одновременное действие нескольких причин отказов . . . . .	121
Распределение Вейбулла — Гнеденко . . . . .	127
Функциональное распределение Вейбулла — Гнеденко . . . . .	134
§ 6. Интенсивность отказов . . . . .	136
Интенсивность отказов и остаточное время безотказной работы . . . . .	136
Монотонно-возрастающая интенсивность отказов . . . . .	142
Немонотонная интенсивность отказов . . . . .	144
Заключение . . . . .	157
Приложение . . . . .	161
Литература . . . . .	165

## ОТ РЕДАКЦИИ

Интерес инженерно-технических и научных работников к вопросам теории надежности и практики вполне правомерен: ответственность и сложность задач, решаемых различного рода устройствами, непрерывно возрастает. Одновременно остро возрастает и необходимость в повышении надежности этих устройств. Как совместить появляющиеся при этом противоречивые требования? На этот и на множество иных проблемных вопросов, касающихся выбора оптимальной по надежности схемы и конструкции изделий, установления режима работы элементов, при котором обеспечивается их повышенная надежность, анализа и оценки надежности изделий при проектировании, обеспечения надежности при изготовлении и эксплуатации изделий, определения объема и очередности профилактических проверок и осмотров и т. д., должна давать ответ теория надежности.

Литература по теории надежности, практическим способам ее обеспечения при разработке, производстве, в различные периоды эксплуатации изделий, по методам контроля качества уже огромна. Ежегодно появляется большое число новых работ (на русском и других языках), опубликованных в сотнях различных журналов, книг и ведомственных изданий. Следить за всей этой литературой, если не посвятить свои силы специально какому-нибудь определенному направлению исследований, очень трудно. В то же время настоятельно необходимо держать инженерно-технический персонал заводов и научно-исследовательских институтов в курсе научных и практических разработок. Большие монографии неизбежно будут запаздывать и не могут быть достаточно оперативными. Это привело к мысли об издании серии небольших по объему монографий, каждая из которых будет посвящена определенному вопросу теории надеж-

ности или практическому применению этой теории. Предполагается, что в монографии помимо связного изложения избранной темы с доведением до результатов последнего времени и характеристикой существующих подходов к решению основных проблем будет содержаться достаточно подробный библиографический указатель, отправляясь от которого читатель может быстро войти в интересующие его детали. Чтобы книги серии сделать доступными возможно большему числу читателей, математические обоснования содержащихся в тексте положений будут относиться в конце книги в виде приложений.

Естественно, что книги серии будут различны по своей направленности и характеру изложения. В них войдут советы исследователю, конструктору, разработчику и технологу; методика расчета надежности сложных изделий; методы прогнозирования неисправностей; таблицы функций, используемых в теории и практике надежности; физические модели процессов старения материалов и т. д. В одних из этих книг определяющей будет инженерная сторона дела, в других — математическая, в третьих — физико-химическая, в четвертых — статистическая или технологическая и т. д.

Редакция обращается к читателям с просьбой присылать конкретные предложения по тематике брошюр предлагаемой серии, проспекты собственных работ и критические замечания к вышедшим изданиям.

*Редакционная коллегия*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Увеличение требований к надежности изделий вызывает необходимость анализа связи между математическими методами расчета надежности и физической природой отказов. Трудность такого анализа очевидна. С одной стороны, при схематизации физической картины явления можно сделать ошибку в направлении слишком большого упрощения. С другой стороны, при математической трактовке физической схемы возникает потребность в использовании весьма сложных и тонких аналитических методов, и их упрощенное изложение граничит с вульгаризацией.

Без помощи большого числа специалистов, работающих в области анализа и расчета надежности систем, изложение моделей отказов и их математической трактовки было бы неосуществимо.

Авторы пользуются случаем принести свою благодарность академикам Н. Г. Бруевичу, Ю. В. Линнику, беседе с которыми помогли внести ясность в ряд излагаемых проблем; действительному члену Академии наук СССР Б. В. Гнеденко и профессору Я. Б. Шору, без поддержки которых работа над книгой была бы невозможной; действительному члену Академии наук СССР С. В. Серенсену, оказавшему помощь в трактовке сложных вопросов накопления усталости металлов; доцентам И. А. Ибрагимову, А. М. Кагану, А. Д. Соловьеву, которые дали ряд ценных советов.

## ВВЕДЕНИЕ

Для каждого изделия регламентируются в виде технических условий свойства, которыми оно должно обладать в процессе эксплуатации. Отклонение свойств изделий от технических условий рассматривается как неисправность. Состояние неисправности обозначается термином «отказ». Отказы могут быть различными по своему эксплуатационному значению. Поэтому в дальнейшем, употребляя термин «отказ», мы будем иметь в виду неисправности примерно одинакового эксплуатационного значения.

Среди отказов различают устранимые, когда изделие подлежит восстановлению путем ремонта, и неустраняемые, когда изделие изымается из эксплуатации. Время работы между двумя устранимыми отказами называется временем безотказной работы и в дальнейшем будет обозначаться через  $\tau$ . Для упрощения будем предполагать, что ремонты обладают свойством равноценности, т. е. ремонт может рассматриваться как замена отказавшего изделия на равноценное новое.

Время  $\tau$  безотказной работы любого изделия имеет случайные вариации, и поэтому расчеты и испытания надежности связаны с использованием методов теории вероятностей и математической статистики. Предполагается, что читатель знаком с основами указанных методов. С целью облегчения чтения текста книги ниже приводятся используемые в ней обозначения и понятия.

Через  $\tau_i$  будет обозначаться наблюдаемое время безотказной работы изделия. Соответственно

$$\bar{\tau} = \frac{1}{N} (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N) \quad (1)$$

есть среднее время безотказной работы, вычисленное по результатам наблюдения  $N$  экземпляров данного изделия.

Функция распределений времени  $\tau$  будет обозначаться через  $F(T)$ :

$$F(T) = P\{\tau \leq T\}, \quad (2)$$

где через  $P\{c\}$  обозначена вероятность события  $c$ .

Число устройств, отказавших за время  $T$ , обозначается через  $m(T)$ . Поэтому частота события  $\tau \leq T$  представится как

$$v(T) = \frac{m(T)}{N}, \quad (3)$$

где  $N$  — число наблюдаемых изделий.

При оценке параметров теоретического распределения по опытным данным будет широко использоваться равенство

$$F(T) = v(T), \quad (4)$$

которое носит статистический характер и тем точнее, чем больше число  $N$  наблюдаемых изделий.

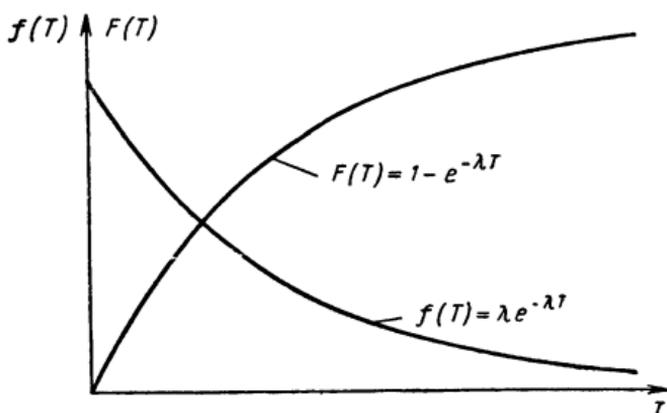


Рис 1 Функция распределения и плотность вероятности экспоненциального распределения

Плотность вероятности распределения величины  $\tau$  обозначается через  $f(T)$ ; если существует производная функции  $F(T)$ , то

$$f(T) = \frac{dF(T)}{dT}. \quad (5)$$

На рис. 1 приведены графики изменения функции  $F(T)$  и плотности  $f(T)$  для одного из часто встречающихся распределений времени  $\tau$  (экспоненциального).

Естественно, что

$$P\{\tau \leq T\} = F(T) = \int_0^T f(t) dt. \quad (6)$$

Начальный момент  $k$ -го порядка случайной величины будет обозначаться через  $\nu_k$ :

$$\nu_k = \int_0^{\infty} t^k f(t) dt; \quad (7)$$

центральный момент  $k$ -го порядка — через  $\mu_k$ :

$$\mu_k = \int_0^{\infty} (t - \nu_1)^k f(t) dt. \quad (8)$$

Математическое ожидание времени  $\tau$ , которое является первым начальным моментом, обозначается через  $M\{\tau\}$ . При больших  $N$  можно написать статистическое равенство

$$M\{\tau\} = \bar{\tau}. \quad (9)$$

Второй центральный момент, называемый дисперсией, обозначается как  $D\{\tau\}$ . Имеет место равенство

$$D\{\tau\} = \nu_2 - \nu_1^2. \quad (10)$$

Дисперсия наблюдаемых значений  $\tau_i$  обозначается через  $s_{\tau}^2$ , т. е.

$$s_{\tau}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \bar{\tau})^2. \quad (11)$$

Среднее квадратическое отклонение величины  $\tau$  обозначим как  $\sigma_{\tau} = \sqrt{D\{\tau\}}$ . При большом числе наблюдений можно принять, что

$$\sigma_{\tau} = s_{\tau}. \quad (12)$$

Опытным аналогом начального момента  $k$ -го порядка является величина

$$n_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i^k. \quad (13)$$

При большом числе наблюдений  $N$  можно записать статистическое равенство

$$v_k = n_k. \quad (14)$$

В дальнейшем нам придется воспользоваться опытным аналогом центрального момента третьего порядка, который вычисляется по формуле

$$m_3 = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \bar{\tau})^3, \quad (15)$$

причем при больших  $N$  справедливо соотношение

$$\mu_3 = m_3. \quad (16)$$

## § 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИЧИН ОТКАЗОВ

Отказы изделия могут быть классифицированы по различным признакам. Одним из распространенных признаков является место отказа. При указанной классификации приходится различать изделие в целом, его узлы, отдельные детали узлов и отдельные элементы деталей. В дальнейшем будем различать лишь две категории объектов: система, представляющая собой устройство, содержащее несколько частей; элемент, представляющий собой некоторую часть системы.

Так, радиоприемник можно рассматривать как систему, а усилители, динамики, верньерное устройство — как элементы. В свою очередь, усилитель можно рассматривать как систему, имеющую в качестве элементов лампы, конденсаторы и т. д.

Классификация дефектов по месту отказа позволяет оценить слабое место системы и принять меры к его усилению. Не менее важно установить причину появления отказа в данном месте. Эти причины могут быть классифицированы по следующим группам.

### *Конструктивные дефекты*

Отказы этой группы возникают как следствие несовершенства конструкции (промахов в конструировании). Типичным промахом при конструировании является неучет «пиковых» нагрузок

Нагрузка, действующая на систему и ее элементы, обычно имеет случайные вариации. При конструировании стремятся учесть возможность возникновения «пиковых» нагрузок, т. е. нагрузок, существенно превышающих нормальные эксплуатационные. Если анализ и учет нагрузок выполнен недостаточно тщательно, то воздействие «пиковых» нагрузок приводит к отказам. С точки зрения анализа и расчета надежности важно,

что промах в конструировании одинаково сказывается на всех экземплярах рассматриваемой системы или элемента.

### *Технологические дефекты*

Отказы этой группы возникают как следствие нарушения принятой технологии изготовления системы (элемента). Качество отдельных деталей, узлов и изделия в целом имеет неизбежные случайные вариации. Вариации качества, заключенные в достаточно узких пределах, не сказываются сколько-нибудь заметно на надежности системы. При резких колебаниях качества надежность одних экземпляров оказывается намного ниже надежности других. Поэтому технологические дефекты приводят к снижению надежности  $U$  части экземпляров общей совокупности изготовленных систем (элементов).

### *Эксплуатационные дефекты*

Для каждой системы устанавливаются ограничения на условия ее эксплуатации (ограничения на температуру, частоту колебаний и т. д.), задаются правила ухода за системой и ее элементами и т. п.

Нарушение правил эксплуатации приводит к преждевременным отказам, т. е. способствует увеличению скорости преждевременного старения системы. Обычно такие нарушения касаются лишь части эксплуатируемых экземпляров системы.

### *Старение (износ) системы*

Сколь угодно высокое качество элементов и системы в целом не может предохранить их от постепенного старения (износа). В процессе эксплуатации и хранения в металлах, пластмассах и других материалах накапливаются необратимые изменения, которые нарушают прочность, координацию и взаимодействие частей и в конечном счете вызывают отказы.

Таким образом, вариации времени безотказной работы порождаются вариациями качества изготовления, условий эксплуатации и процессами старения. При этом могут быть указаны следующие схемы возникновения отказов.

### Схема мгновенных повреждений

На рис. 2 изображен график изменения нагрузки (напряжения) в одной из деталей планера самолета во время его полета. Характерно наличие отдельных «пиков» нагрузки. Если предположить, что отказ элемента наступает в случае, когда нагрузка  $S$  превышает некоторый уровень  $S_{п}$ , то в силу случайности изменения па-

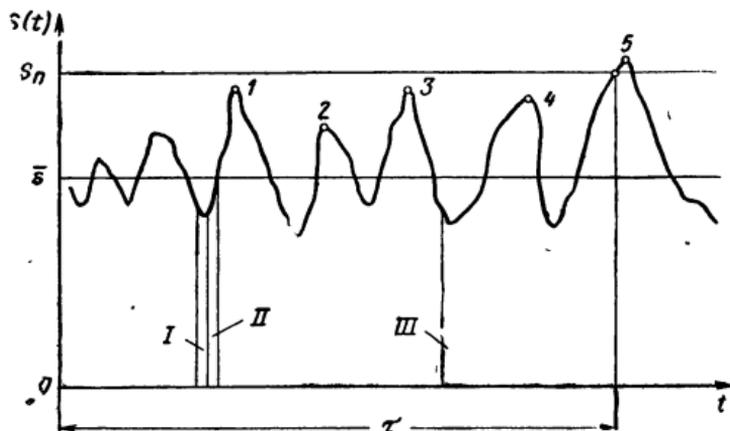


Рис. 2. График изменения нагрузки в процессе полета.

грузки момент отказа также будет случайным. Здесь характерно, что отказ элемента наступает независимо от того, сколько времени он до этого находился в эксплуатации и каково его состояние. Ярким примером образования отказа рассматриваемого типа может служить прокол шины автомобиля. Он происходит за счет попадания острого предмета и не зависит ни от степени изношенности шины, ни от состояния автомобиля.

### Схема накапливающихся изменений

Рассматриваемая схема отвечает ситуации, когда отказ образуется за счет постепенного накопления повреждений (постепенного старения или изнашивания). Для ряда рабочих параметров элемента (системы) заранее устанавливаются допустимые пределы, выход за которые квалифицируется как отказ. Изменение параметров диктуется старением элемента, и время до выхода параметра за допустимый предел является временем безотказной работы.

## *Схема релаксации*

Постепенное накопление повреждений может явиться не прямой, а лишь косвенной причиной отказа. Так износ ползуна и направляющих приводит к увеличению зазора в их сопряжении, что при неблагоприятных внешних условиях приводит к заклиниванию. В отличие от схемы накапливающихся повреждений здесь не устанавливается допустимый предел для рабочего параметра (зазора); накопление повреждений приводит лишь к росту вероятности отказа. Для этого примера характерно сочетание постепенного накопления повреждений со скачкообразным изменением состояния объекта. Можно сослаться также на случаи разрушения статически неопределимой системы под воздействием циклических нагрузок или на отказ зарезервированной электронной системы, когда при отказе резервных элементов нагрузка на рабочие элементы возрастает.

Скачкообразное изменение состояния, возникающее как следствие постепенного накопления повреждений, будем называть релаксацией.

### *Схема действия нескольких независимых причин*

Ситуация, когда одновременно действуют несколько причин отказов, является в практике наиболее типичной. Применительно к шине автомобиля совершенно очевидно, что одновременно действуют по крайней мере две причины отказа: прокол шины за счет попадания острых предметов и постепенный износ протектора. Аналогично обстоит дело с отказами электронных ламп. Их отказ возможен как по причине случайной «пиковой» нагрузки, так и по причине постепенного старения.

Здесь важно отметить следующие обстоятельства. Часто бывает, что среди множества причин, вызывающих отказы, имеются одна-две преобладающие. Влияние остальных причин будет настолько слабым, что отказы по их вине практически не наблюдаются. Поэтому при исследовании надежности объекта прежде всего стремятся выявить преобладающие причины отказов и лишь затем, если в этом есть необходимость, учитывают влияние остальных причин. Если же одновременно действует много причин примерно одинакового влияния, то сово-

купное действие этих причин может быть условно заменено на действие одной причины, которая является в некотором смысле эквивалентом всего множества причин.

Изложенные схемы могли бы быть дополнены схемой действия нескольких связанных (зависимых) причин отказов системы. Однако создание таких схем требует рассмотрения большого количества возможных связей между причинами, что делает невозможным скольконибудь полное их описание. Кроме того, если причины, вызывающие отказы, существенно связаны друг с другом, то имеет смысл считать, что действует лишь одна из них, и относить все отказы за ее счет.

В дальнейшем каждой из указанных схем будет придано математическое описание. Это позволит уточнить смысловое значение схемы, указать более точно ее физическое содержание и установить для каждой схемы те законы распределения времени безотказной работы, которые отвечают ее существу.

## § 2. МГНОВЕННОЕ ПОВРЕЖДЕНИЕ

### Экспоненциальное распределение

При посадке самолета радиоприемник, находящийся на его борту, испытывает инерциальные нагрузки. «Грубая» посадка может привести к тому, что величина инерциальной нагрузки окажется существенно большей, чем допустимая, и это приведет к поломкам или обрывам элементов аппаратуры, т. е. к отказу радиоприемника. «Грубая» посадка является следствием либо оплошность пилотирования, либо тяжелых метеорологических условий и поэтому не зависит от состояния радиоприемника. Такой отказ приемника отвечает схеме мгновенных повреждений, рассмотренной ранее.

Обозначим через  $\gamma_i$  вероятность «грубой» посадки при  $i$ -м приземлении самолета. Номер  $i$ -го приземления отсчитывается с момента начала эксплуатации радиоприемника. Радиоприемник, согласно нашему описанию, выйдет из строя при первой «грубой» посадке. Вычислим, какова вероятность того, что приемник откажет при  $k$ -м приземлении.

Для того чтобы приемник отказал при  $k$ -м приземлении, необходимо и достаточно, чтобы первый раз за вре-

мя эксплуатации приемника произошла «грубая» посадка. Пусть через  $H_i$  обозначено событие « $i$ -е приземление является нормальным», а через  $\Gamma_i$  « $i$ -е приземление является «грубым». Очевидно, что события  $H_i$  и  $\Gamma_i$  являются противоположными, т. е.

$$P\{H_i\} + P\{\Gamma_i\} = 1. \quad (17)$$

Кроме того, результат  $i$ -го приземления не зависит от результатов предшествующих приземлений, т. е. события  $H_i$  для различных  $i$  взаимонезависимы. Обозначим через  $B_k$  событие «грубая» посадка впервые произошла при  $k$ -м приземлении». Очевидно, что оно наступит в том и только в том случае, если  $k-1$  приземлений прошло благополучно, а  $k$ -е оказалось неудачным. Это записывается так:

$$B_k = H_1 H_2 \dots H_{k-1} \Gamma_k. \quad (18)$$

По теореме умножения для независимых событий

$$P\{B_k\} = P\{H_1\} P\{H_2\} \dots P\{H_{k-1}\} P\{\Gamma_k\}. \quad (19)$$

Поскольку обозначено

$$P\{\Gamma_i\} = \gamma_i, \quad P\{H_i\} = 1 - \gamma_i, \quad (20)$$

$$P\{B_k\} = (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2) \dots (1 - \gamma_{k-1}) \gamma_k. \quad (21)$$

Физический смысл нашей задачи таков, что если квалификация летчика остается неизменной, то вероятность  $\gamma_k$  «грубой» посадки остается неизменной при всех приземлениях. Тогда при  $\gamma_i = \gamma$ ,  $i = 1, 2, \dots$

$$P\{B_k\} = (1 - \gamma)^{k-1} \gamma. \quad (22)$$

Обозначим через  $\tau$  случайную величину — число посадок, при которых приемник оставался исправным. Последняя формула выражает вероятность того, что  $\tau = k-1$ :

$$P\{\tau = k-1\} = (1 - \gamma)^{k-1} \gamma, \quad k \geq 1. \quad (23)$$

Это равенство задает так называемое геометрическое распределение случайной величины  $\tau$ . Название «геометрическое» связано с тем, что правая часть равенства (23) напоминает выражение для члена геометрической прогрессии.

По смыслу нашего примера случайная величина  $\tau$  есть не что иное, как время безотказной работы, выра-

женное в числе приземлений. Представляет интерес найти вероятность того, что в течение первых  $K$  посадок не будет отказов радиоприемника, т. е. вероятность события  $\tau > K$ .

Очевидно,

$$P\{\tau > K\} + P\{\tau \leq K\} = 1. \quad (24)$$

Вероятность  $P\{\tau \leq K\}$  вычисляется на основе теоремы сложения вероятностей

$$P\{\tau \leq K\} = \sum_{n=0}^K P\{\tau = n\}. \quad (25)$$

С помощью (23) получаем

$$P\{\tau \leq K\} = \gamma \sum_{n=0}^K (1 - \gamma)^n = 1 - (1 - \gamma)^{K+1}. \quad (26)$$

Следовательно, из (24)

$$P\{\tau > K\} = (1 - \gamma)^{K+1}. \quad (27)$$

Это равенство позволяет вычислить вероятность безотказной работы в течение «времени», равного  $K$ .

**Пример 1.** Вероятность «грубой» посадки при каждом приземлении равна  $\gamma = 0,001$ .

Требуется найти вероятность того, что в течение 1000 приземлений не произойдет повреждения радиоприемника

По формуле (27)

$$P\{\tau > 1000\} = (1 - 0,001)^{1001}.$$

Вычисления значительно упрощаются, если воспользоваться формулой

$$P\{\tau > 1000\} = (1 - \gamma)^{K+1} \approx e^{-K\gamma}. \quad (28)$$

Эта формула дает хорошее совпадение с предыдущей, если  $\gamma$  мало,  $K$  велико, а произведение  $K\gamma$  не мало и не велико и лежит в пределах  $0,1-20$ . Можно показать, что погрешность от замены  $(1-\gamma)^n$  на  $e^{-n\gamma}$  имеет порядок  $n\gamma^2/2$ .

Так в нашем примере по формуле (28) получаем

$$P\{\tau > 1000\} = e^{-1} = 0,3679,$$

а по точной формуле (27) с помощью логарифмирования находим

$$P\{\tau > 1000\} = 0,999^{1001} = 0,3673.$$

Подсчитаем математическое ожидание времени безотказной работы, измеренное в количестве приземлений. Оно равняется

$$M\{\tau\} = \sum_{r=1}^{\infty} (r-1) P\{\tau=r-1\}. \quad (29)$$

Используя (23), с помощью несложных вычислений находим

$$M\{\tau\} = \frac{1-\gamma}{\gamma}. \quad (30)$$

Если учесть, что  $\gamma$  обычно мало, можно записать

$$M\{\tau\} \approx \frac{1}{\gamma}.$$

В этом случае приближенная формула (28) может быть записана в виде

$$P\{\tau > K\} = e^{-\frac{K}{M\{\tau\}}}. \quad (31)$$

Геометрическое распределение времени безотказной работы  $\tau$  отвечает ситуации, когда время отсчитывается в виде дискретных единиц (одно приземление, два приземления и т. д.). Однако в большинстве задач время выступает как величина непрерывная. Аналогом геометрического распределения для непрерывного времени  $\tau$  безотказной работы является экспоненциальное распределение. При экспоненциальном распределении времени безотказной работы вероятность события «в течение времени  $T$ , отсчитываемого от начала работы системы (элемента), нет отказов», или, что то же самое, вероятность того, что время безотказной работы  $\tau$  больше  $T$ , вычисляется по формуле

$$P\{\tau > T\} = e^{-\lambda T}. \quad (32)$$

Принимая во внимание, что

$$P\{\tau \leq T\} + P\{\tau > T\} = 1,$$

имеем выражение для функции распределения

$$P\{\tau \leq T\} = F(T) = 1 - e^{-\lambda T}. \quad (33)$$

По (5) плотность распределения равна для  $T \geq 0$

$$f(T) = \frac{dF(T)}{dT} = \lambda e^{-\lambda T} \quad (34)$$

и  $f(T) = 0$  для  $T < 0$ .

На рис. 3\* приводятся графики изменения плотности  $f(T)$  при различных значениях параметра  $\lambda$ . Выясним физический смысл этого параметра. Найдем среднее время безотказной работы

$$M\{\tau\} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (35)$$

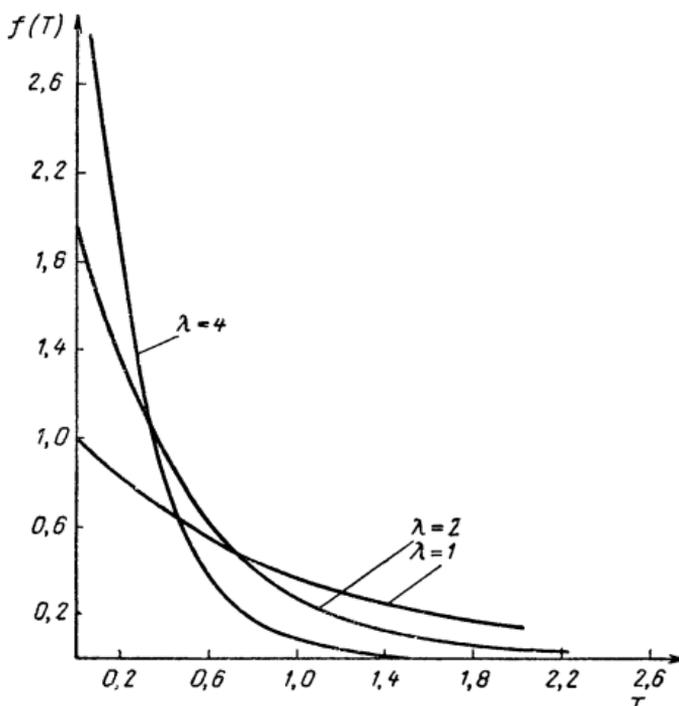


Рис 3 Плотность экспоненциального распределения для различных значений параметра  $\lambda$

Таким образом,  $\lambda$  есть величина, обратная среднему времени безотказной работы. Формулу (32) теперь можно записать так:

$$P\{\tau > T\} = e^{-\frac{T}{M\{\tau\}}}. \quad (36)$$

\* На рис. 3 и на аналогичных рисунках в дальнейшем время  $T$  отсчитывается в произвольных единицах времени (часах, сотнях часов и т.п.)

Эта формула совпадает с формулой (31), которая была получена как приближение к формуле (27). Последняя справедлива для дискретной схемы, в которой время безотказной работы отсчитывалось в количестве безаварийных посадок. На рис. 4 приведены для сравнения

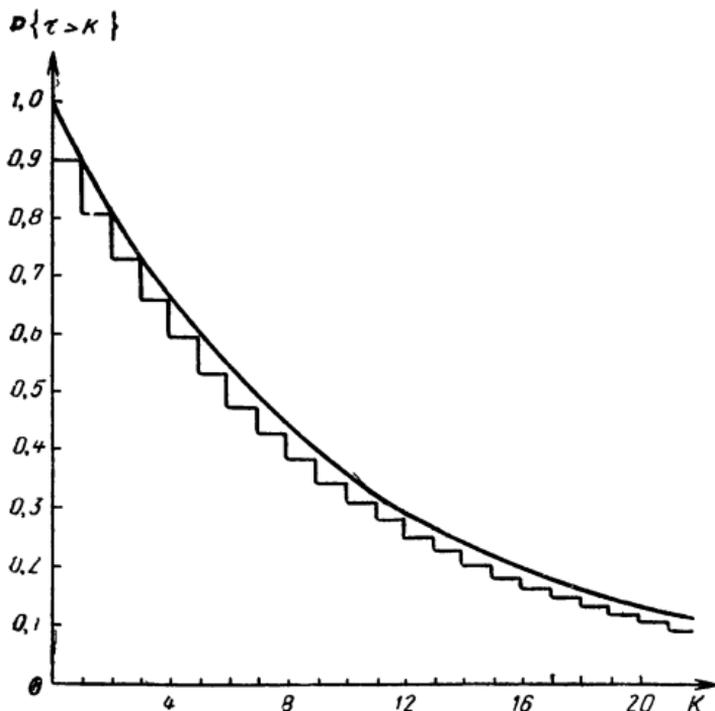


Рис. 4 Кривые вероятности безотказной работы для геометрического и экспоненциального распределения;  $\gamma = \lambda = 0,1$ .

графики функций  $P\{\tau > T\} = R(T)$ , вычисленных по формулам (27) и (32), параметр  $\lambda$  полагался равным  $\gamma$ . График изменения вероятности  $P\{\tau > T\}$  в зависимости от  $T$  обычно называют кривой надежности.

#### *Оценка параметра $\lambda$ на основе данных о времени безотказной работы.*

Пусть имеются данные о времени безотказной работы  $N$  изделий  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ .

Первый способ оценки  $\lambda$  состоит в следующем. Подсчитывается среднее время безотказной работы  $\bar{\tau}$  по

формуле (1) и на основании (9) приравнивается к  $M\{\tau\} = 1/\lambda$ . В результате получается

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \tau_i}. \quad (37)$$

Второй способ состоит в разбиении совокупности исходных данных  $\tau_i$  на две группы. Одна из них — это значения  $\tau_i$ , оказавшиеся меньше некоторого фиксированного числа  $\theta$ ; другая — все прочие значения  $\tau_i$ . Обозначим количество значений  $\tau_i$ , меньших, чем  $\theta$ , через  $m_1(\theta)$ . Согласно формуле (3) отношение

$$v(\theta) = \frac{m_1(\theta)}{N}$$

есть накопленная частость отказов. Поэтому можно, исходя из (4), принять

$$P\{\tau \leq \theta\} = F(\theta) = v(\theta).$$

Следовательно, по (33)

$$1 - e^{-\lambda\theta} = v(\theta),$$

откуда

$$\lambda = - \frac{\ln(1 - v(\theta))}{\theta}. \quad (38)$$

Эта формула позволяет, зная параметр разбиения  $\theta$  и соответствующую ему накопленную частость, оценить параметр  $\lambda$ .

Выбор для оценки формулы (37) или (38) зависит от конкретных условий. Если наблюдаются значения  $\tau_i$  для всех  $N$  испытуемых устройств (каждое устройство испытывается до момента отказа), то более точную оценку параметра  $\lambda$  дает формула (37). Однако возможна и такая ситуация, что  $N$  устройств, включенных в работу, подвергаются проверке (вскрытию) через некоторое время  $\theta$  после начала работы. При этом обнаруживается, что  $m_1(\theta)$  из них неисправно. Про отказавшее устройство мы можем утверждать лишь только то, что время  $\tau_i$  его безотказной работы меньше  $\theta$ , но ничего не сможем сказать относительно точного значения  $\tau_i$ . В этом случае имеется возможность, воспользовавшись формулой (38), получить оценку для параметра  $\lambda$ .

Довольно часто испытание всех  $N$  элементов до отказа оказывается слишком длительным и его приходится прерывать, не доводя до конца. Такие испытания называют усеченными. В частности, применяются усечения по общему времени испытания или по общему числу регистрируемых отказов.

В книге [11, гл. 3] подробно излагаются методы оценки параметра  $\lambda$  по данным усеченных испытаний.

\* \*  
\*

Прежде чем перейти к некоторым более сложным схемам возникновения отказов, еще раз остановимся на физических предпосылках, приводящих к экспоненциальному распределению времени  $\tau$ . Уже отмечалось, что время безотказной работы подчиняется экспоненциальному распределению, если отказы возникают как следствие воздействия «пиковых» нагрузок. Рассмотрим эту схему образования отказа более подробно. Нагрузка, действующая на систему в целом и на ее отдельные элементы, всегда является случайной. Это связано с неизбежными случайными колебаниями внешних условий и неизбежными случайными флуктуациями взаимодействия элементов.

На рис. 2 приводится случайный процесс изменения нагрузки, действующей на крыло самолета в условиях горизонтального полета. Нагрузка меняется непрерывно и относительно плавно. Это означает, что если взять два соседних участка времени (рис. 2, участки  $I, II$ ), то на этих участках величины нагрузок будут связаны друг с другом. Так если на участке  $I$  нагрузка мала, то мало вероятно, чтобы на соседнем с ним участке  $II$  нагрузка оказалась очень высокой. Однако если взять участки времени  $I$  и  $III$ , находящиеся на относительно большом удалении друг от друга, то величина нагрузки на участке  $III$  будет очень мало зависеть от того, какова была нагрузка на участке  $I$ . Поэтому нагрузки на участках времени, разделенных большим расстоянием, можно рассматривать как независимые. Это свойство нагрузки  $S(t)$  будем называть свойством асимптотической независимости величины нагрузки  $S(t_2)$  в момент времени  $t_2$  от величины нагрузки  $S(t_1)$  в момент времени  $t_1$ , когда разность  $t_2 - t_1$  велика. Выражение «асимптотическая»

независимость отражает тот факт, что связь между нагрузками  $S(t_1)$  и  $S(t_2)$  уменьшается по мере роста разности  $t_2 - t_1$ .

Другая особенность изменения нагрузки, изображенной на рис. 2, состоит в том, что в течение всего рассматриваемого периода времени нагрузка не имеет направленного изменения. Это означает, что «пиковые» величины нагрузок (отмечены на рис. 2 точками 1, 2, ...) возникают случайным образом и невозможно однозначно предсказать момент их появления.

Отсутствие направленного изменения нагрузки  $S(t)$  будем называть стационарностью нагрузки. Так стационарность нагрузки, действующей на крыло, означает, что самолет летит над местностью, где случайные вариации восходящих и нисходящих потоков воздуха образуют однородную во времени случайную последовательность. Однородность будет обеспечена, если самолет летит непродолжительное время, когда нет смены дня, и рельеф местности, над которой он летит, не имеет резких переходов (например, перехода от суши к морю).

Любая система имеет ограниченную «прочность». Поэтому имеется некоторая предельная нагрузка  $S_{\text{п}}$ , которую система способна выдержать без отказа. Если же нагрузка  $S(t)$  превзойдет  $S_{\text{п}}$ , то произойдет мгновенный отказ. На рис. 2 условно изображен уровень  $S_{\text{п}}$  предельно допустимой нагрузки. Линия  $\bar{s}$  отвечает средней величине нагрузки, подсчитанной как средняя арифметическая из величин нагрузок, действующих в течение длительного времени. Если предельная нагрузка  $S_{\text{п}}$  намного больше средней нагрузки  $\bar{s}$ , то случаи, когда кривая нагрузки  $S(t)$  пересекает уровень  $S_{\text{п}}$ , будут наблюдаться очень редко. Первое пересечение уровня  $S_{\text{п}}$ , как правило, произойдет через большой промежуток времени  $\tau$ . В силу того что процесс изменения нагрузки имеет перечисленные выше свойства (асимптотической независимости, стационарности), время  $\tau$  первого пересечения уровня  $S_{\text{п}}$  будет подчиняться экспоненциальному распределению. Понятно, что поскольку система отказывает сразу, как только нагрузка станет больше  $S_{\text{п}}$ , время  $\tau$  есть время безотказной работы системы (элемента).

В проведенном рассуждении следует подчеркнуть следующие два момента:

а) уровень предельно допустимой нагрузки  $S_{\Pi}$  остается постоянным в течение всего времени эксплуатации системы (элемента);

б) отказ возникает не как следствие постепенного изменения внутреннего состояния элементов системы, а лишь как следствие внешнего случайного воздействия, имеющего величину больше допустимого.

Отсюда становится очевидным, что при экспоненциальном распределении времени безотказной работы нет смысла прибегать к профилактическим мерам типа предварительной замены элементов или их периодического ремонта. Действительно, поскольку отказ возникает лишь как следствие внешнего воздействия, то замена старого элемента на новый элемент не может повлиять на причину отказа. Тем более не может на нее повлиять ремонт. Единственный путь повышения надежности состоит либо в конструктивном улучшении системы (элемента), либо в снижении действующих нагрузок.

### Порог чувствительности

На рис. 2 изображена ситуация, когда величина  $S_{\Pi}$  предельно допустимой нагрузки не зависит от времени  $t$  эксплуатации устройства. Несомненно, это идеализация действительности. Так у любой металлической конструкции, подверженной старению, коррозии, прочность со временем падает. Это применительно к нашей схеме означает, что предельно допустимая нагрузка постепенно уменьшается.

Вопрос заключается в том, насколько интенсивно идет во времени процесс «ослабления» системы за счет старения ее элементов, и есть ли смысл учитывать его, имея дело с ограниченным участком времени наблюдения.

Весьма часто встречается ситуация, когда старение идет настолько медленно, что оно практически неощутимо в течение доступного нам интервала наблюдения. Так обстоит дело со многими весьма ответственными сооружениями, например мостами. Наряду с этим часты случаи, когда «ослабление» системы наступает сравнительно быстро. Если говорить точнее, то ощутимое «ослабление» системы происходит к моменту времени  $t^*$ , который существенно меньше среднего срока службы

самой системы:  $t^* \ll M\{\tau\}$ . В этом случае процесс «ослабления» следует учитывать. Формально это делается так. Вводится некоторая условная величина времени  $t_0$ , обладающая свойством: при  $t < t_0$  система сохраняет исходные свойства, при этом предельно допустимая нагрузка  $S_n$  настолько велика, что вероятностью отказа в интервале  $(0, t_0)$  можно пренебречь; после момента  $t_0$  происходит резкое снижение допустимой нагрузки до уровня  $S_1$ ,  $S_1 < S_n$ , который с ощутимой вероятностью может быть превзойден рабочей нагрузкой. Рассмотрим пример.

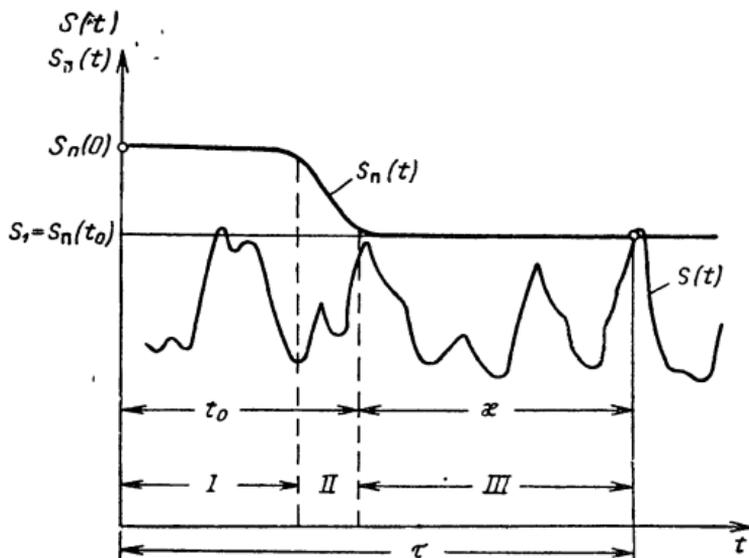


Рис. 5 Взаимодействие рабочего напряжения  $S(t)$  и напряжения пробоя  $S_n(t)$

Известно, что пластмассовая и керамическая основы электрорадио элементов выдерживаются на заводе-изготовителе в специальных условиях (вакуум, температура и т. д.) для возможно полного удаления влаги и повышения электростатического сопротивления. Тем самым обеспечивается высокая стойкость против «пробоя» при пиковых величинах напряжения тока. Однако в дальнейшем в эксплуатации материал постепенно насыщается влагой. Насыщение происходит лишь до некоторого предела, отвечающего свойствам данного изделия.

Увеличение содержания влаги приводит к существенному снижению стойкости против «пробоя». На рис. 5 изображена одна из возможных схем изменения предельно допустимого напряжения  $S_{\text{п}}$  в зависимости от времени эксплуатации  $t$ , которая отвечает насыщению основы изделия влагой. На участке *I*, где  $S_{\text{п}}(t)$  велико, вероятность пересечения уровня  $S_{\text{п}}(t)$  рабочим напряжением  $S(t)$  весьма мала, и ее можно принять равной нулю. Участок *II* резкого падения величины  $S_{\text{п}}(t)$  сравнительно мал по длине, его влияние на общую работоспособность изделия невелико. Основное значение имеет участок *III*, где  $S_{\text{п}}(t)$  остается примерно постоянным, но имеется реальная опасность «пробоя». Время  $\tau$  безотказной работы складывается из двух частей: времени  $t_0$ , которое можно считать фиксированным и отвечающим гарантированному времени безотказной работы устройства, и времени  $x$ , которое будет иметь экспоненциальное распределение.

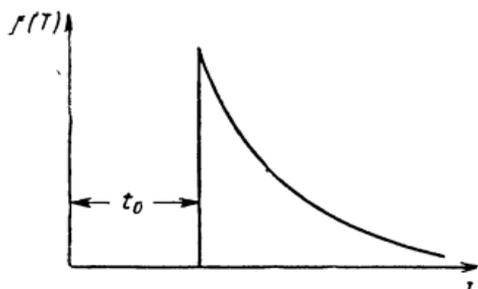


Рис 6 Плотность вероятности экспоненциального распределения с порогом чувствительности

Величину  $t_0$  будем называть порогом чувствительности. Это название имеет своим источником метрологию. Суть здесь заключается в том, что в течение времени  $t_0$  устройство «не чувствует» воздействия нагрузки, и лишь спустя время  $t_0$  это воздействие оказывается ощутимым и создает опасность отказа.

Соответствующее распределение времени безотказной работы изображено на рис. 6. Оно отличается от обычного экспоненциального распределения сдвигом всей кривой вправо на величину  $t_0$ . Плотность распределения запишется как

$$f(T) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(T-t_0)}, & T \geq t_0, \\ 0, & T < t_0. \end{cases} \quad (39)$$

Здесь величины  $\lambda$ ,  $T_0$  являются параметрами распределения. Вероятность безотказной работы вычисляется по обычным правилам, но при этом необходимо учесть, что

время  $\tau$  безотказной работы всегда больше или равно  $t_0$ . Поэтому

$$P\{\tau > T\} = \begin{cases} 1, & \text{если } T < t_0, \\ e^{-\lambda(T-t_0)}, & \text{если } T \geq t_0. \end{cases} \quad (40)$$

На рис. 7 изображены кривые  $R(t)$ , отвечающие плотностям распределения (34) (кривая 1) и (39) (кривая 2).

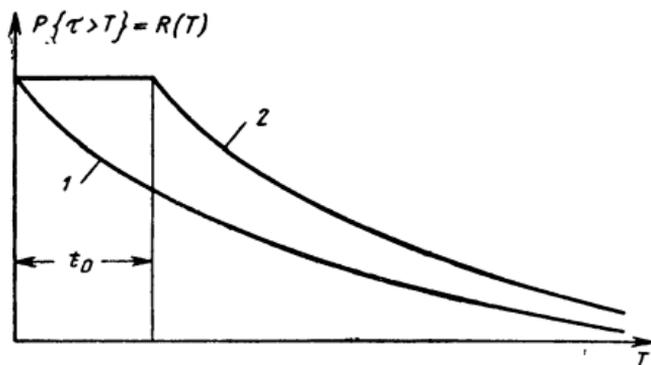


Рис. 7. Кривые  $R(t)$  для одно- и двухпараметрического экспоненциального распределения

Условимся называть распределение, заданное плотностью (39), двухпараметрическим экспоненциальным распределением.

Заметим, что при обосновании двухпараметрического экспоненциального распределения мы игнорировали наличие переходного участка II (рис. 5). Влияние этого

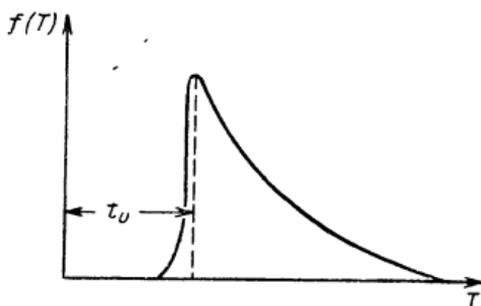


Рис. 8. К модели двухпараметрического экспоненциального распределения.

участка скажется в том, что вид кривой распределения (рис. 8) будет несколько отличаться от вида, изображенного на рис. 6. На самом деле, существует (рис. 8) левая ветвь кривой распределения. Эта ветвь практически не будет ощущаться, если число опытных данных невелико. Таким образом, двухпараметрическое экспоненциальное распределение следует рассматривать как некоторый суррогат, который дает удовлетворительное описание опытных данных, когда можно пренебречь сравнительно малыми вероятностями возникновения отказа за счет наличия переходного участка изменения предельно допустимой нагрузки  $S_{\Pi}(t)$  (рис. 5, участок II).

### *Оценка параметров $\lambda$ и $t_0$ с помощью экспоненциальной бумаги.*

Опишем простой практический прием, который позволяет без больших расчетов приближенно находить параметры распределения (39), а также позволяет судить о том, насколько хорошо эмпирическое распределение (т. е. накопленные частоты) согласуется с функцией распределения. Этот прием состоит в использовании вероятностной бумаги экспоненциального распределения (экспоненциальной бумаги)\*. Поясним на примере правила обращения с ней.

**Пример 2.** Данные о времени безотказной работы приборов и накопленные частоты приведены в табл. 1. Время безотказной работы имеет двухпараметрическое экспоненциальное распределение.

Требуется оценить параметры  $\lambda$  и  $t_0$ .

Значение  $v(\tau_i)$  принимается равным

$$v(\tau_i) = \frac{i - 1/2}{N}, \quad (41)$$

где  $N$  — общее число данных,

$i$  — порядковый номер

Величины  $v(\tau_i)$  наносятся на так называемую экспоненциальную бумагу (рис. 9), величина  $\tau_i$  является абсциссой точки,  $v(\tau_i)$  — ее ординатой. Если в ряду  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  встречаются величины, равные друг другу, то следует отложить среднее арифметическое частотей, соответствующих совпадающим значениям  $\tau$ . Так, в табл. 1

\* Экспоненциальная бумага есть один из видов вероятностной бумаги. О ней можно прочитать в книге А. Хальда [31, гл. VI]. Во вкладыше имеются образцы вероятностной бумаги для нескольких часто встречающихся распределений.

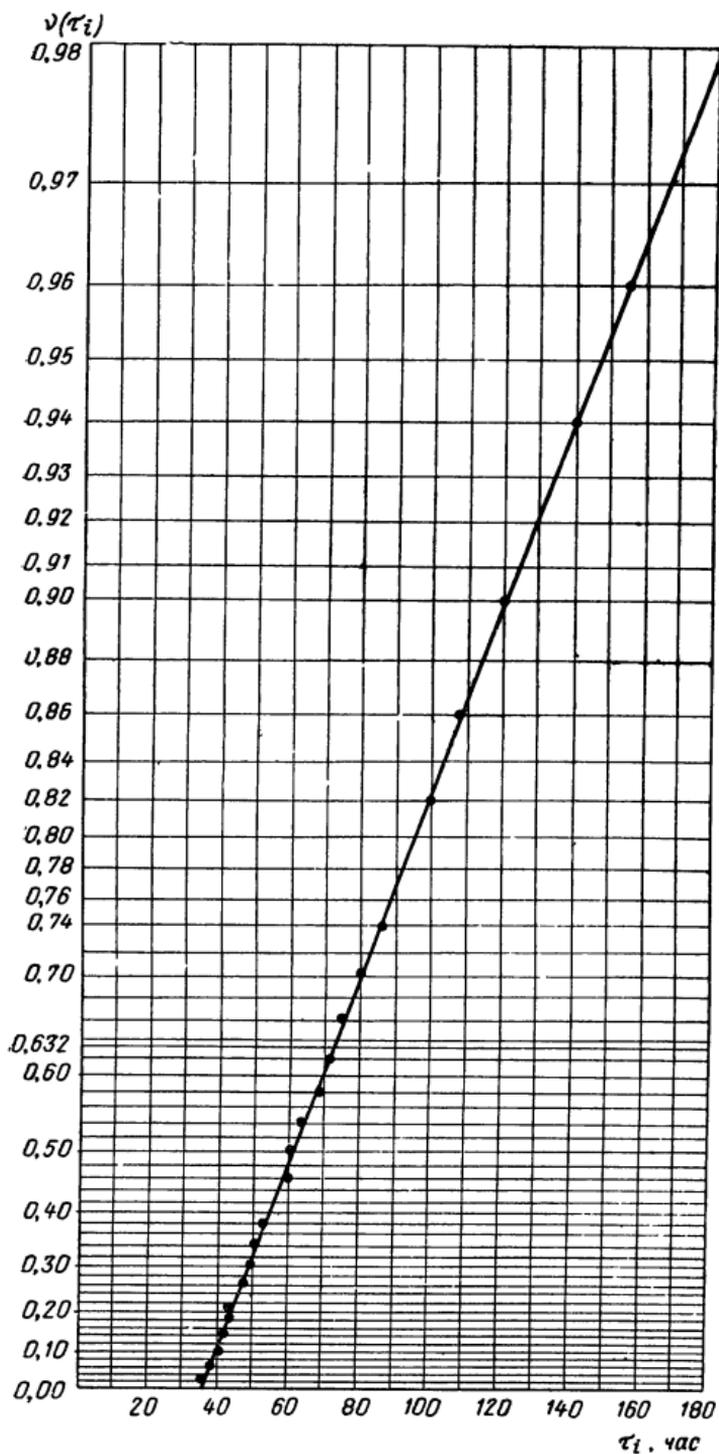


Рис. 9. Выравнивание данных табл. 1 на вероятностной бумаге экспоненциального распределения.

$\tau_i$  44,0 встречается два раза Откладываем  $v(\tau_i) = (0,18 + 0,22)^{1/2} = 0,20$

Масштаб по оси ординат выбран с таким расчетом, чтобы накопленные частоты  $v(\tau_i)$  в случае, когда  $\tau_i$  имеют точно экспоненциальное распределение, ложились на прямую линию

Таблица 1

Данные о времени безотказной работы приборов

Время безотказной работы $\tau_i$ , час	Накопленная частота $v(\tau_i) = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{N}$	Время безотказной работы $\tau_i$ , час	Накопленная частота $v(\tau_i) = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{N}$
36,0	0,02	63,5	0,54
38,5	0,06	69,0	0,58
41,0	0,10	72,0	0,62
42,5	0,14	75,0	0,66
44,0	0,18	81,0	0,70
44,0	0,22	86,5	0,74
48,0	0,26	92,0	0,78
49,0	0,30	100,5	0,82
51,0	0,34	107,5	0,86
53,0	0,38	120,0	0,90
56,0	0,42	156,0	0,94
60,0	0,46	156,0	0,98
61,0	0,50		

По полученным точкам проводится на глаз прямая линия При этом надо стараться, чтобы под линией и над ней находилось примерно равное число точек То, насколько хорошо точки ложатся на прямую, свидетельствует о степени согласования исходных данных с гипотезой экспоненциального распределения Согласие данных табл 1 весьма хорошее Параметры  $t_0$  и  $\lambda$  оцениваются из графика рис 9 следующим образом За величину  $t_0$  принимают абсциссу точки пересечения прямой с осью абсцисс В нашем случае  $t_0=36$ . Далее находят значение  $\tau$ , соответствующее ординате 0,632. Обозначим его через  $\tau^*$  В нашем случае  $\tau^*=73$ . Оценка параметра  $\lambda$  находится по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\tau^* - t_0} = 0,027. \quad (42)$$

### Суперпозиция экспоненциальных распределений

В § 1 указывалось, что отказ из-за воздействия пиковых нагрузок характерен при наличии конструктивных дефектов. При этом подразумевается, что все экземпляры однородны по своему качеству.

Если же у изделий имеются технологические дефекты, то эта часть экземпляров будет обладать пониженной надёжностью. Довольно типична ситуация, когда основная масса экземпляров имеет высокое качество и соответственно высокую надёжность, а некоторая небольшая часть — технологические дефекты. Влияние пиковых нагрузок по отношению к первой части изделий будет слабым, в то время как влияние тех же нагрузок по отношению к остальным приборам будет ощутимым. Пусть  $(1-\varepsilon)$  — доля высококачественных изделий,  $\varepsilon$  — доля дефектных.

Если из общей совокупности изделий выбрать одно, то оно с вероятностью  $(1-\varepsilon)$  будет принадлежать к первой части, с вероятностью  $\varepsilon$  — ко второй. Легко видеть, что вероятность безотказной работы в течение времени  $T$  у наугад выбранного экземпляра будет равна

$$R(T) = (1 - \varepsilon) R_1(T) + \varepsilon R_2(T), \quad (43)$$

где  $R_1(T)$  — вероятность безотказной работы «хорошего» изделия, а  $R_2(T)$  — вероятность безотказной работы «плохого».

В соответствии с (43) плотность распределения времени безотказной работы представится в виде

$$f(T) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) \lambda_1 e^{-\lambda_1 T} + \varepsilon \lambda_2 e^{-\lambda_2 T}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0, \end{cases} \quad (44)$$

где  $\lambda_2$  — параметр изделий с дефектами, а  $\lambda_1$  — параметр изделий без дефектов.

Плотность (44) отличается от обычной кривой плотности экспоненциального распределения с одинаковым значением математического ожидания тем, что она имеет более крутой спуск и несколько более удлиненный в сторону больших значений «хвост» кривой (рис 10).

При правильно налаженной системе сбора информации об отказах из опытных данных можно извлечь оценки для параметров  $\varepsilon$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Так пусть известно, что среди  $N$  отказавших изделий  $N_1$  дало отказ, характерный для технологического дефекта. Отсюда получаем, что  $\varepsilon = N_1/N$ . Подразделяя данные о времени безотказной работы на две подгруппы  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_1})$  и  $(\tau'_1,$

$\tau'_2, \dots, \tau'_{N-N_1}$ ) для обеих групп изделий, находим параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  по формулам

$$\lambda_1 = \frac{N - N_1}{\sum_{i=1} \tau'_i}, \quad (45)$$

$$\lambda_2 = \frac{N_1}{\sum_{j=1} \tau_j}. \quad (46)$$

Предполагается, что в одном и том же экземпляре не наблюдается одновременного наличия дефектов двух типов: технологического и конструкционного. Хотя на

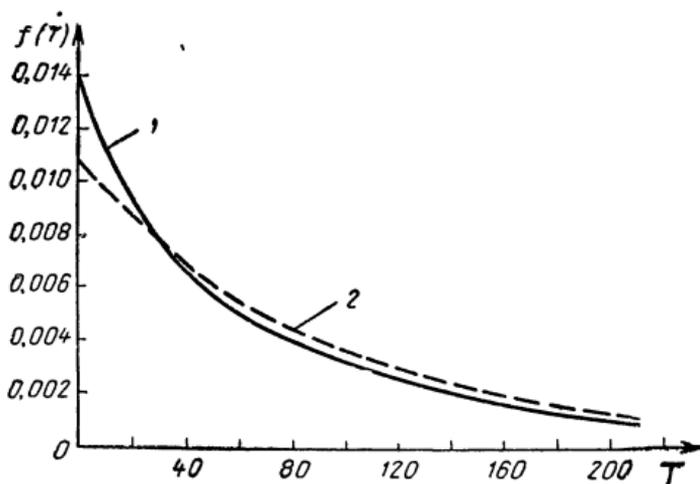


Рис. 10 Плотность распределения времени безотказной работы по (44) (кривая 1) и по (34) (кривая 2) при значениях:

$$\varepsilon=0,1, \lambda_1=0,01, \lambda_2=0,05, \lambda=0,0109$$

математические ожидания обоих распределений совпадают.

самом деле это не так, все же использование указанной посылки и предлагаемого метода оценки параметров не будет приводить к существенным ошибкам, если технологический дефект вызывает значительное снижение надежности изделия.

Случай одновременного действия двух причин отказов рассматривается в § 5.

### § 3. НАКАПЛИВАЮЩИЕСЯ ПОВРЕЖДЕНИЯ

#### Модели изнашивания

В § 1 отмечалось, что среди причин возникновения отказов важное место занимает старение системы. Действительно, сколь совершенна ни была конструкция системы и ее элементов и технология их производства, с ходом времени материалы, из которых сделаны элементы и их соединения, претерпевают необратимые изменения. Эти изменения порождаются коррозией, износом, накоплением деформаций и усталости, диффузией одного материала в другой и т. д. В одной системе и даже в одном элементе эти процессы налагаются, взаимодействуют и в конечном счете вызывают изменение рабочих характеристик.

Простейшим примером может служить изменение зазора в трущейся паре вал — подшипник. По мере вращения вала в сопряжении идут сложные процессы окисления поверхностных слоев, упрочнения и накопления усталости в них, абразивного резания и схватыва-

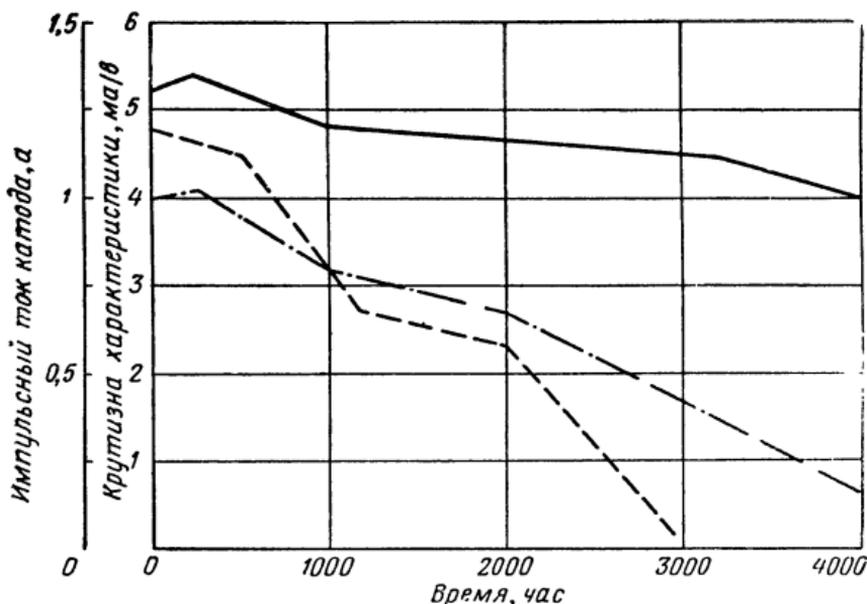


Рис. 11. Изменение параметров лампы 6Ж1П в процессе их длительной эксплуатации:

— импульсный ток катода; — · — · крутизна характеристики при напряжении накала 5,7 в, — крутизна характеристики при напряжении накала 6,3 в.

ния за счет адгезии. Наложение этих процессов приводит к постепенному увеличению зазора и потере работоспособности лодшипника.

При эксплуатации приемно-усилительных ламп наблюдается постепенное выделение газов (кислорода, водяных паров) и их накопление в баллоне лампы, разрушение оксидного слоя катода за счет диффузионных процессов, испарение бария и т. д. Все это отражается на параметрах лампы, например на крутизне характеристики, импульсном токе катода, которые за счет указанных процессов постепенно меняются, убывают (рис. 11) [24].



Рис 12. К определению времени безотказной работы при монотонном изменении рабочей характеристики

Для того чтобы система в целом и ее элементы были работоспособны, рабочие характеристики их должны лежать в некоторых пределах, определяемых видом и назначением системы. Так зазор в сопряжении должен лежать в пределах, обеспечивающих безударное движение и отсутствие сухого трения; крутизна характеристики лампы не должна быть меньше некоторой величины и т. д. Когда рабочая характеристика выходит за заданные пределы, элемент (система) начинает работать неудовлетворительно, и это квалифицируется как отказ.

В общем случае рабочая характеристика под влиянием старения может изменяться немонотонно, однако в большинстве случаев она меняется монотонно (рис. 12). Именно так меняется зазор в сопряжении, крутизна характеристики и т. д. Дальнейшие рассуждения будут основаны на предположении о монотонном характере

изменения рабочей характеристики. Также предполагается, что отказ наступает как только рабочая характеристика выйдет за предел, заданный техническими условиями. Время безотказной работы  $\tau$  определяется моментом выхода рабочей характеристики на предельный уровень.

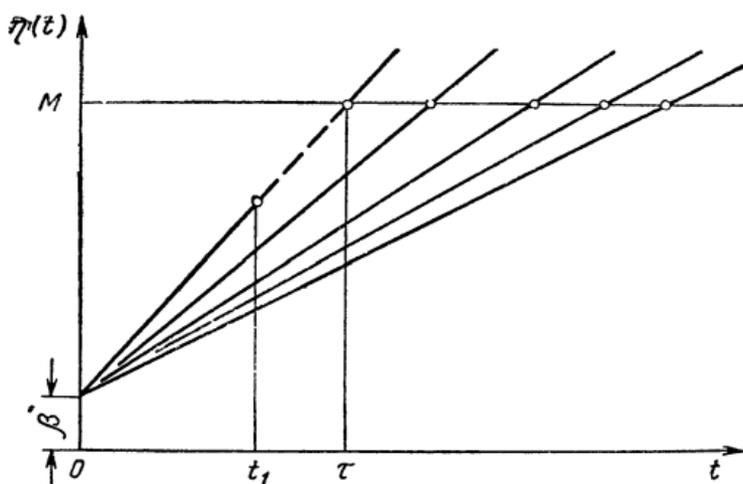


Рис 13 Линейные реализации износа  $\eta(t)$   
 $M$  — предельно допустимый уровень износа

Обозначим через  $\eta(t)$  величину рабочей характеристики в момент времени  $t$ . Изменения  $\eta(t)$  во времени обуславливаются как внешними факторами, так и ходом физических процессов, протекающих внутри объекта. Кроме того, вид реализации  $\eta(t)$  зависит от начального состояния объекта, например качества изготовления.

Простейшее предположение относительно изменения  $\eta(t)$  состоит в том, что оно носит линейный характер (рис. 13). Наклон прямой зависит от начального состояния объекта. Более «слабые» экземпляры имеют больший угол наклона рабочей характеристики.

Для каждого экземпляра изменение  $\eta(t)$  носит вполне определенный, неслучайный характер. Для того чтобы выяснить поведение  $\eta(t)$  у данного экземпляра в интервале  $(t_1, \tau)$ , достаточно провести прямую через точки  $\eta(0)$  и  $\eta(t_1)$ , как это показано на рис. 13. Случайность в изменении  $\eta(t)$  состоит в том, что коэффициент  $\alpha$  в уравнении, описывающем  $\eta(t)$ ,

$$\eta(t) = \alpha t + \beta, \quad (47)$$

является случайной величиной, определяемой начальным состоянием объекта. Очевидно, что  $\alpha$  есть скорость изменения  $\eta(t)$ :

$$\alpha = \frac{d\eta(t)}{dt} = \xi(t). \quad (48)$$

Пусть отказ возникает при

$$\eta(t) \geq M.$$

В этом случае время безотказной работы  $\tau$  определяется из формулы

$$\tau = \frac{M - \beta}{\alpha}. \quad (49)$$

На рис. 14 изображена зависимость износа протекторов автомобильных шин от времени эксплуатации\*. Эти кривые нельзя представить в виде прямых, изображенных на рис. 13. Для кривых износа протекторов ха-

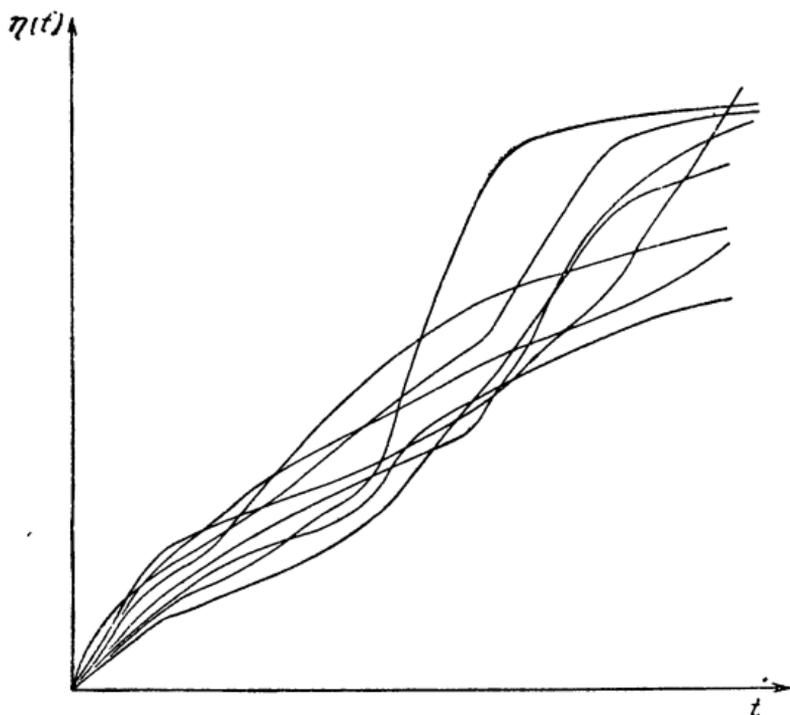


Рис. 14 Реализация износа протекторов как функция времени эксплуатации (длины пробега)

\* По данным Непомнящего Е. Ф.

рактенно, что они тесно переплетаются, и ход отдельной кривой износа — извилистая линия. Это вызвано условиями эксплуатации протектора. Он истирается при движении по дорогам разнообразного рельефа и с разным покрытием. На износе протектора сказываются торможения, надобность в которых возникает из-за случайной ситуации на дороге. Поэтому скорость износа отдельно взятого протектора все время меняется, причем эти изменения носят случайный характер. Следовательно, кривую износа отдельного протектора нельзя детерминированно экстраполировать на будущее по результатам наблюдения за ней на участке  $(0, t_1)$ , как было сделано раньше (рис. 13). Можно лишь высказать вероятностное суждение о ее дальнейшем поведении.

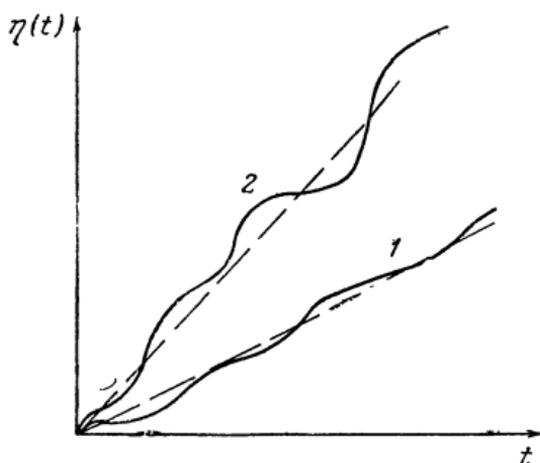


Рис 15 Реализация износа протекторов хорошего (1) и плохого качества (2).

В случае, когда скорость износа подвержена случайным изменениям, нельзя написать формулу для  $\eta(t)$ , подобную (47) \*, и вывести простое соотношение для определения времени безотказной работы типа (49).

Рассмотренные ситуации, которым соответствовали рис. 13 и 14, являются как бы противоположными. Если будущее поведение реализации  $\eta(t)$  на рис. 13 полностью определялось ее прошлым, то будущее поведение

\*  $\eta(t)$  можно представить в виде бесконечного ряда со случайными коэффициентами. Формальная запись такого ряда мало что дает для практических расчетов надежности

реализации  $\eta(t)$  на рис. 14 почти не зависит от прошлого ее поведения. В чистом виде описанные ситуации встречаются не слишком часто. Всегда на практике имеются элементы износа обоих типов. Пусть, например, имеются два протектора: один хорошего, а другой плохого качества. Реализации износа обоих экземпляров будут извилистыми, однако все же плохой протектор изнашивается в среднем раньше, чем хороший. Это показано на рис. 15, который отражает ситуацию, промежуточную по отношению к описанным выше ситуациям рис 13 и 14.

Отметим еще несколько случаев, встречающихся на практике.

Иногда, чаще всего в процессе лабораторных (стендовых) испытаний элементов, свойства внешней среды (влажность, температура, режим включения и др.) поддерживаются на постоянном уровне. Это приводит к тому, что влияние внешних факторов на все испытываемые элементы одинаково и все экземпляры обнаруживают постоянную скорость износа (старения). Отличие одних изделий от других состоит лишь в том, что первоначальное значение рабочего параметра  $\eta(0)$  у них различно и является случайной величиной.

Реализации процесса изменения рабочей характеристики в этом случае имеют вид, изображенный на рис. 16. Такая «линейчатая» или близкая к ней картина особенно часто наблюдается на стендовых испытаниях электронных ламп, транзисторов. Можно ожидать, что те же самые элементы, будучи испытаны каждый в разных условиях эксплуатации (например, у каждого экземпляра свой температурный режим, своя частота включений), вели бы себя по-иному и обнаружили бы различную скорость изменения рабочего параметра (рис. 17).

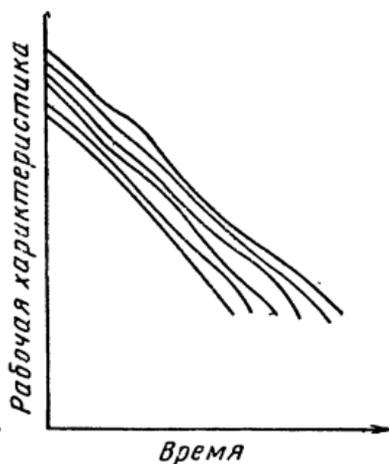


Рис. 16 Случай, когда скорость изменения рабочей характеристики примерно постоянна у всех экземпляров.

В практике обнаруживаются и такие ситуации, когда поведение реализаций  $\eta(t)$  подвержено сильным вариациям, хотя внешняя нагрузка является весьма стабильной. Так обстоит дело, например, при накоплении коррозии, усталости и ползучести металлов. Общим для этих процессов является высокая сложность среды, в которой протекают эти процессы. Металл является поликристаллом, состоит из зерен разнообразной формы и ориентации, на границах которых сконцентрированы отдельные химические элементы. Внутри металла образуются раковины, трещины и т. п. Поэтому свойства металла при переходе от одной части его объема к другой подвержены случайным вариациям\*.

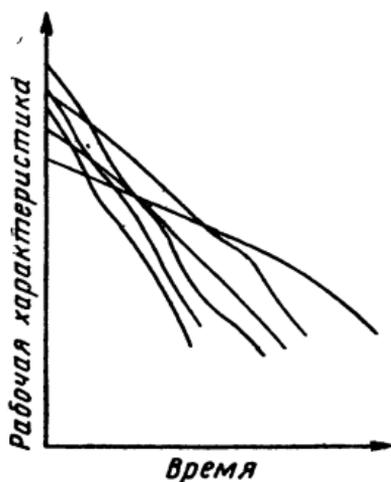


Рис. 17. Случай, когда скорость изменения рабочей характеристики различна у разных экземпляров

Рассмотрим процесс распространения коррозии во внутрь металла. Металл состоит из элементарных объемов, свойства которых имеют случайные вариации. В частности, случайно варьируется их сопротивляемость проникновению коррозии. Коррозия, начав двигаться

от поверхности (точечная коррозия), продвигается от объема к объему. Попав в данный объем, коррозия приобретает некоторую скорость развития в зависимости от свойств этого объема. Поскольку эти свойства случайны, то случайна и скорость коррозии. При переходе к каждому следующему объему скорость будет претерпевать случайные изменения. Таким образом, хотя условия внешнего воздействия (коррозионная среда) остаются постоянными, скорость износа (скорость коррозии) подвержена случайным вариациям. Если начальные качества объектов из металла разнятся не слишком силь-

\* Системы, в которых образующие их элементы или элементарные объемы обладают случайными свойствами, рассматриваются в статистической механике. Подобные подходы используются при изучении металлов

но, то кривые накопления коррозии (кривые коррозионного износа) будут напоминать реализации рис. 14.

Применительно к процессу, заданному равенством (47), скорость износа остается для каждого отдельного объекта постоянной на все время его эксплуатации. Изменения скорости износа  $\xi(t)$  наблюдаются лишь при переходе от объекта к объекту. На рис. 18,а изображены реализации скорости износа  $\xi(t)$  для нескольких объектов ( $L_1 \div L_4$ ).

Совершенно иначе выглядят (рис. 18,б) реализации скорости износа протекторов. Налицо случайные вариации скорости около некоторого постоянного уровня, характеризующего среднюю скорость износа. Отличие одной реализации (изменения скорости одного протектора) от другой не носит систематического характера. Это означает, что по какой бы реализации ни оценивалась средняя скорость износа или любая другая характеристика, полученные при этом данные не будут иметь существенных различий. Реализации скорости, изображенные на рис. 18,б, имеют еще одну важную особенность. Если выделить два участка времени ( $T_1, T_2$ ) и ( $T_3, T_4$ ) и на каждом из них оценить характеристики износа, то полученные величины будут отличаться лишь в случайном смысле. Так оценка средней скорости износа на любом из указанных участков даст примерно одинаковые величины.

С формальных позиций процесс изменения во времени скорости  $\xi(t)$  может рассматриваться как некоторый случайный процесс. Описанные выше свойства означают, что этот процесс является стационарным и связь между величинами  $\xi(t_1)$  и  $\xi(t_2)$  убывает по мере роста разности  $t_2 - t_1$ .

Физически эти свойства свидетельствуют о том, что все объекты однородны по своему качеству, и свойства объектов практически не изменяются до тех пор, пока износ не достиг предельной величины.

Если начальное качество объектов существенно разнится, то каждый из них будет обладать присущей его качеству средней скоростью износа. Реализации скорости  $\xi(t)$  будут систематически отличаться друг от друга по своему среднему уровню.

Отнюдь не для всех объектов средняя скорость износа остается постоянной во времени. Например, ско-

рость накопления усталости в металлах [27] убывает во времени. Другим примером может служить постепенное уменьшение скорости диффузии одного металла в другой по мере насыщения поверхностных слоев. Рост скорости износа может иметь место под влиянием постепенного изменения условий работы данного элемента. Так

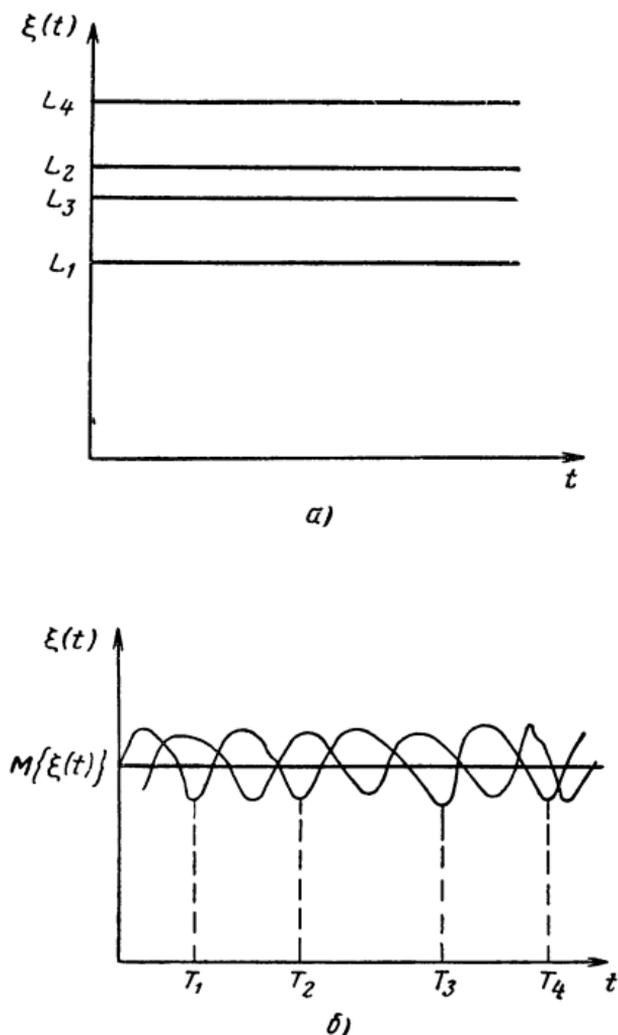
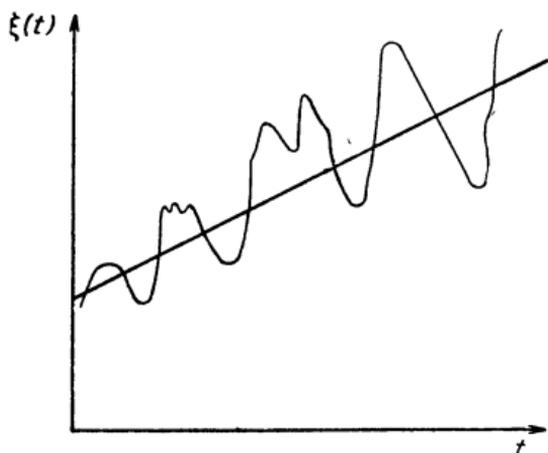
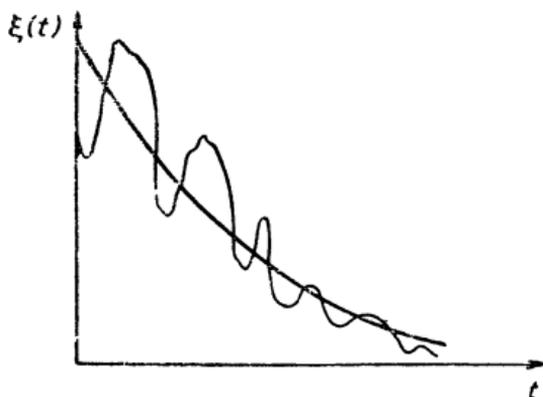


Рис 18. Случай, когда скорость изнашивания у каждого экземпляра постоянна (а) и переменна (б) (в среднем скорость изнашивания у всех экземпляров одна и та же).

по мере накопления в баллоне электронной лампы водяных паров будет расти скорость окисления анода и катода.



а)



б)

Рис. 19. Случай, когда скорость изнашивания в среднем линейно возрастает (а) и убывает по формуле (52) (б).

Довольно общее описание поведения скорости  $\xi(t)$  износа может быть дано в виде

$$\xi(t) = V(t) + v(t)\rho(t), \quad (50)$$

где  $V(t)$  и  $v(t)$  — некоторые детерминированные функции, а  $\rho(t)$  — случайный процесс, обладающий свойством стационарности.

В значительной части случаев достаточным является представление скорости в виде

$$\xi(t) = v(t) \rho(t). \quad (51)$$

Так если  $v(t) = at + b$ , то в среднем скорость будет линейно расти, как это показано на рис. 19,а, а если

$$v(t) = \frac{a}{b + t}, \quad (52)$$

то скорость в среднем будет убывать подобно тому, как это изображено на рис. 19,б.

Не нарушая общности, можно принять, что математическое ожидание (т. е. средняя величина) процесса  $\xi(t)$  является величиной постоянной и равной единице, т. е.

$$M\{\rho(t)\} = 1. \quad (53)$$

Из формулы (51) следует, что при этом математическое ожидание скорости  $\xi(t)$  задается равенством

$$M\{\xi(t)\} = v(t). \quad (54)$$

Можно принять, что

$$D\{\rho(t)\} = 1, \quad (55)$$

тогда дисперсия

$$D\{\xi(t)\} = v^2(t). \quad (56)$$

Из последнего равенства вытекает, что если средняя скорость  $v(t)$  растет, то растет и дисперсия скорости. На рис. 19,а это отражается на все возрастающем размахе случайных колебаний скорости  $\xi(t)$ . Если  $v(t)$  убывает, то убывает и дисперсия  $D\{\xi(t)\}$ . На рис. 19,б показано затухание случайных вариаций скорости  $\xi(t)$ .

Поскольку процесс износа носит необратимый характер, то во всех случаях должно соблюдаться неравенство

$$\xi(t) \geq 0, \quad (57)$$

притом скорость может оказаться равной нулю лишь в отдельных точках.

Величина износа, накопленная к моменту времени  $t$ , является интегралом от скорости износа и поэтому может быть записана в виде

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(x) dx. \quad (58)$$

Математическое ожидание  $M\{\eta(t)\}$  величины износа представится как

$$M\{\eta(t)\} = \int_0^t M\{\xi(x)\} dx = \int_0^t v(x) dx. \quad (59)$$

В частности, если скорость износа задана равенством (52), то математическое ожидание величины износа будет определено равенством

$$M\{\eta(t)\} = a[\ln(b+t) - \ln b], \quad (60)$$

т. е. износ в среднем растет как логарифм времени.

В дальнейшем будут последовательно рассмотрены идеализированные модели процессов изменения величин рабочих параметров, охватывающие различные ситуации, возникающие в реальных объектах. При этом особое внимание будет уделяться физической трактовке рассматриваемых схем. Все эти модели независимо от их физической природы будем называть моделями изнашивания, понимая износ в широком смысле как необратимый процесс изменения рабочего параметра.

### Гамма-распределение времени безотказной работы

Рассмотрим идеализированную схему износа, обладающую следующими свойствами: средняя скорость износа постоянна; начальное качество объектов полностью однородно; скорость износа подвержена случайным вариациям.

Ситуация, когда первое повреждение приводило к отказу объекта, рассматривалась в § 2. Естественное обобщение этой ситуации состоит в том, что для отказа объекта необходимо накопление нескольких повреждений. Например, если износ протектора возникает лишь как следствие торможения, то для накопления предельно допустимой величины износа необходимо несколько торможений, т. е. накопление нескольких «повреждений».

Пусть в случайные моменты времени возникают единичные повреждения равной величины, и при накоплении  $r$  повреждений объект выходит из строя (возникает отказ). Повреждение состоит в том, что износ скачкообразно увеличивается на некоторую величину  $y$ , которая постоянна. На рис. 20 приводится схема накопления

повреждений. Пунктиром показана прямая, отвечающая средней величине износа, накопленной за время  $t$ . Случайные вариации величины  $\eta(t)$  износа около этой прямой обусловлены случайностью момента возникновения скачкообразного изменения износа.

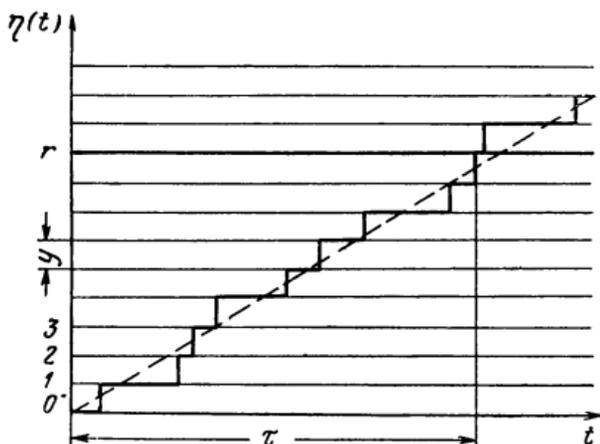


Рис 20 Реализация процесса накопления повреждений.

Предполагается, что вероятность возникновения скачка износа за время от  $T$  до  $T + \Delta T$  равна

$$\gamma(T) = \gamma = \lambda \Delta T + o(\Delta T) \quad (61)$$

и не зависит от того, сколько скачков (повреждений) было на участке времени от 0 до  $T$ . Тем самым предполагается, что вероятность каждого следующего повреждения не зависит от числа ранее полученных повреждений. Остановимся несколько подробнее на смысле этого предположения.

Процесс износа всегда имеет по крайней мере три зоны (рис. 21). Зона I называется зоной приработки. В процессе приработки в объекте протекают направленные изменения, объект как бы приспосабливается к условиям нагружения. Например, в процессе приработки трущейся пары вал — подшипник идет направленное изменение шероховатостей поверхности. Скорость износа в этот период постепенно уменьшается. Характерной особенностью приработки является взаимная зависимость приращений износа. На рис. 22,а изображены два приращения износа: приращение  $\Delta \eta_1$  за время от  $T_1$  до

$T_1 + \Delta T$  и приращение  $\Delta \eta_2$  за время от  $T_2$  до  $T_2 + \Delta T$ . Если приращение  $\Delta \eta_1$  велико, то это означает, что на участке времени  $(T_1, T_1 + \Delta T)$  была интенсивная приработка, и тогда вероятно, что на более позднем участке  $(T_2, T_2 + \Delta T)$  интенсивность приработки упадет, т. е. вероятно, что величина  $\Delta \eta_2$  окажется сравнительно небольшой. Поэтому в первой зоне приращение износа на участке времени от  $T$  до  $T + \Delta T$  зависит от того, какова была его величина в предшествующий момент времени  $T$ .

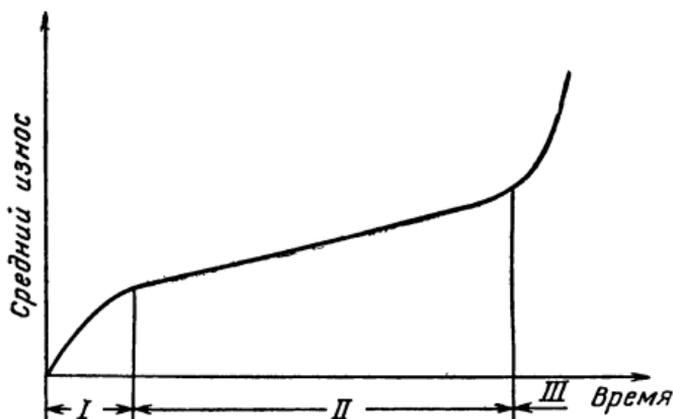
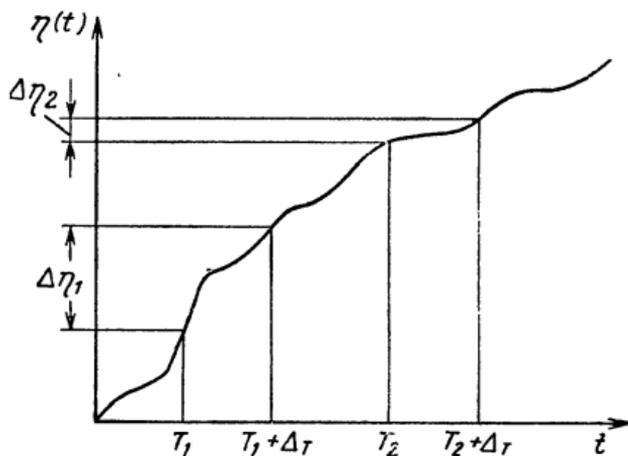


Рис 21 Типичная кривая износа

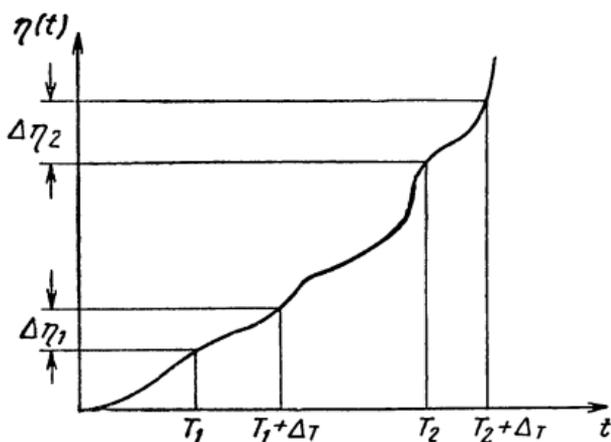
Зона II (рис. 21) называется зоной установившегося или нормального износа. В этой зоне объект приобретает некоторые относительно стабильные свойства, отвечающие условиям нагружения. Зона нормального износа занимает наибольшую часть времени функционирования объекта. Применительно к трущейся паре зона нормального износа характеризуется постоянством рельефа шероховатостей и постепенным ростом зазора без изменения физической картины взаимодействия вала с подшипником. В этой зоне величина приращения  $\Delta \eta_1$  не влияет сколько-нибудь ощутимо на величину приращения  $\Delta \eta_2$ .

Зона III (рис. 21) называется зоной катастрофического износа. В зоне нормального износа изменения, протекающие в объекте, носят в основном количественный характер. Но с накоплением некоторой величины износа возникает качественный скачок в состоянии объекта, который заключается в существенном изменении физической картины происходящих явлений. На

скорость износа начинают оказывать воздействие новые факторы, которые ранее не ощущались, что приводит к ухудшению состояния объекта и его разрушению. Зона, где идет нарастание скорости износа за счет резкого изменения физической картины изнашивания, называется зоной катастрофического износа. При катастрофическом износе изменения в состоянии объектов, так же как и при приработке, носят направленный характер, приращения износа в этой зоне взаимно зависимы.



a)



b)

Рис 22 Реализация процесса износа в зоне приработки (a) и в зоне катастрофического износа (б).

Здесь большие приращения на участке времени от  $T_1$  до  $T_1 + \Delta_T$  (рис. 22,б) вызывают еще большие приращения на участке от  $T_2$  до  $T_2 + \Delta_T$ . Для трущейся пары вал — подшипник катастрофический износ возникает при большом зазоре за счет ударных нагрузок и нарушения условия смазки. С момента начала катастрофического износа идет направленное ухудшение качества поверхности, рост шероховатостей, возникает схватывание с последующим вырыванием крупных частей и, в конечном счете, разрушение подшипника.

Как следует из описания зон износа, предположение о независимости вероятности повреждения от числа ранее накопленных повреждений отвечает зоне нормального износа.

Покажем теперь, что равенство (61) обеспечивает постоянство средней скорости износа. Обозначим через  $X(T)$  число повреждений, накопленных к моменту времени  $T$ . Тогда величина износа в момент времени  $T$  есть

$$\eta(T) = yX(T). \quad (62)$$

Разность

$$\eta(T + \Delta_T) - \eta(T) = y[X(T + \Delta_T) - X(T)] \quad (63)$$

есть приращение величины износа за время  $\Delta_T$ . Вычислим математическое ожидание этой разности. Заметим, что за время  $\Delta_T$  согласно равенству (61) износ может либо получить приращение, равное  $y$ , с вероятностью  $\gamma$ , либо получить приращение, равное нулю, с вероятностью  $1 - \gamma$ . Поэтому математическое ожидание приращения износа равно

$$\begin{aligned} M\{\eta(T + \Delta_T) - \eta(T)\} &= \gamma y + (1 - \gamma)0 = \\ &= [\lambda \Delta_T + o(\Delta_T)] y. \end{aligned} \quad (64)$$

Учитывая, что математическое ожидание разности случайных величин равно разности математических ожиданий, получаем

$$M\{\eta(T + \Delta_T)\} - M\{\eta(T)\} = [\lambda \Delta_T + o(\Delta_T)] y. \quad (65)$$

Деля обе части равенства на  $\Delta_T$  и переходя к пределу при  $\Delta_T \rightarrow 0$ , находим

$$\frac{dM\{\eta(T)\}}{dT} = \lambda y. \quad (66)$$

Отсюда следует, что  $\lambda y$  есть средняя скорость износа. Так как  $\lambda y$  от времени не зависит, средняя скорость является постоянной.

Теперь мы имеем возможность утверждать, что описываемая модель процесса изнашивания отвечает ситуации, когда приработка уже закончена, а катастрофический износ еще не наступил, скорость износа в среднем постоянна и начальное качество всех объектов является одинаковым.

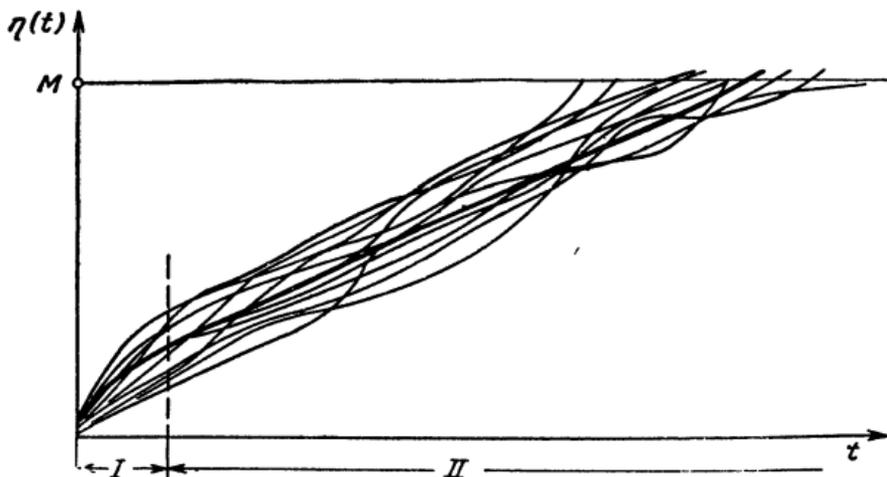


Рис 23 Реализация процесса износа

$M$  — предельно допустимый уровень износа;  $I$  — зона приработки,  $II$  — зона нормального износа

Некоторые суждения о приемлемости предлагаемого описания для данного конкретного объекта исследования могут быть сделаны по внешнему виду реализаций. На рис. 23 изображены реализации процесса износа, имеющие следующие важные особенности: участок приработки мал по сравнению с участком нормального износа; реализации выходят на предельно допустимый уровень износа  $M$  ранее, чем наступает катастрофический износ; после окончания приработки реализации «переплетаются». После приработки скорость износа в среднем постоянна. Указанными особенностями, как правило, обладают реализации износа объектов высокого конструктивного совершенства и высокого качества изготовления. При обнаружении реализаций процесса износа типа рис. 23 можно без опасений принять, что

процесс изнашивания отвечает схеме накапливающихся повреждений, заданной равенством (61).

Совсем иначе выглядят реализации на рис. 24. Хотя зона приработки и здесь занимает незначительную часть времени функционирования объекта, скорость износа в среднем постоянна, катастрофический износ не наблю-

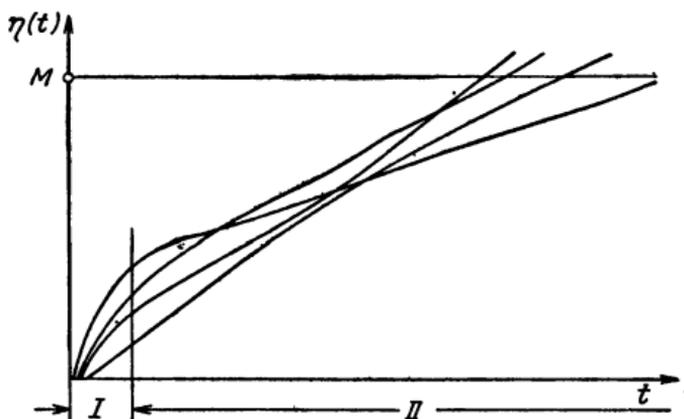


Рис. 24 Случай, когда происходит слабое переплетение реализаций в зоне нормального износа.

дается, тем не менее схема износа, заданная равенством (61), является неподходящей. Дело в том, что после приработки реализации износа как бы разделяются, их дальнейшее поведение зависит исключительно от начального качества объектов, скорость износа отдельного экземпляра (ср. с рис. 23) не подвержена случайным вариациям.

Предлагаемое описание процесса изнашивания не подходит и для ситуаций, изображенных на рис. 25 и 26. На рис. 25 показан случай, когда зона приработки занимает почти все время функционирования объекта. На рис. 26 изображен случай, когда для отдельных объектов катастрофический износ наступает ранее, чем достигается предельно допустимый уровень износа.

В конце этого параграфа, в разделе «Анализ реализаций износа» будут приведены методы анализа реализаций, основанные на объективных оценках, а не на визуальном анализе. С помощью этих методов можно получить количественные оценки того, насколько близка

реальная картина износа к идеализированной схеме, рассматриваемой в этом разделе.

В тех случаях, когда невозможно наблюдать реализации износа, суждение о приемлемости схемы накопли-

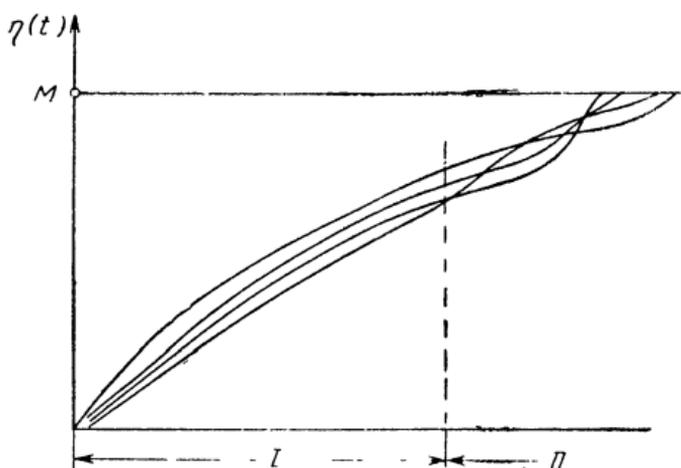


Рис 25 Случай, когда участок приработки занимает основную долю времени работы.

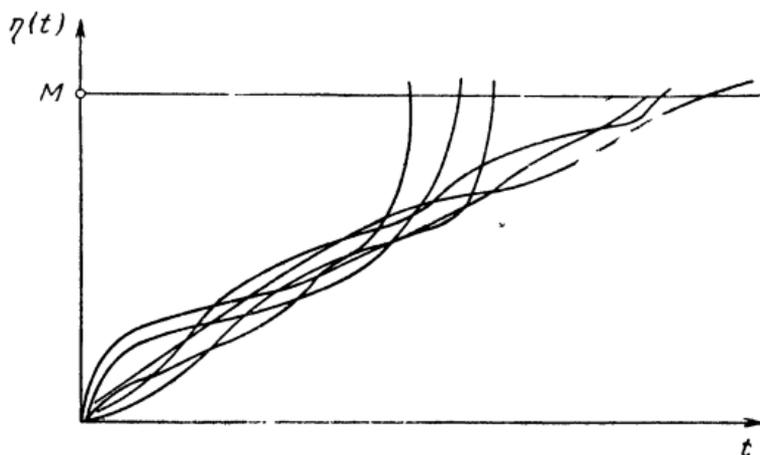


Рис. 26 Реализации, отражающие случай наступления катастрофического износа до достижения предельно допустимого уровня  $M$

вающихся повреждений должно основываться на анализе физической картины процесса изнашивания. Глав-

ное внимание должно быть сосредоточено на трех обстоятельствах:

- однородности начального качества объектов;
- вариациях условий нагружения;
- продолжительности приработки.

Очевидно, что схема накапливающихся повреждений пригодна в том случае, когда массовое производство обеспечивает высокую однородность начального качества объектов (высокую однородность исходных материалов, стабильный технологический процесс, жесткий контроль качества); нагрузки, воздействующие на объекты в процессе их эксплуатации, варьируются в довольно широких пределах; приработка частично обеспечивается в заводских условиях и в процессе эксплуатации занимает незначительное время.

Схеме накапливающихся повреждений отвечает гамма-распределение времени  $\tau$  безотказной работы. Плотность этого распределения имеет следующий вид:

$$f(T) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r T^{r-1} e^{-\lambda T}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0. \end{cases} \quad (67)$$

Здесь  $r$  — число повреждений, необходимых для возникновения отказа;

$\Gamma(r)$  — гамма-функция, определяемая формулой

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx. \quad (68)$$

Для целых  $r$  справедливо соотношение

$$\Gamma(r) = (r-1)! \quad (69)$$

Пусть  $M$  есть предельно допустимый уровень износа, т. е. при  $\eta(t) \geq M$  наступает отказ. Отсюда следует, что число повреждений до отказа определяется соотношением

$$r = \frac{M}{y}. \quad (70)$$

Величина  $\lambda$  задает среднюю скорость износа, и в соответствии с (66) имеем

$$\lambda = \frac{1}{y} \frac{dM\{\eta(T)\}}{dT}. \quad (71)$$

Функция распределения  $F(T)$  гамма-распределения задается в соответствии с (67) соотношением

$$F(T) = \int_0^T f(t) dt = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^T t^{r-1} e^{-\lambda t} dt. \quad (72)$$

Для целых  $r$  интегрированием по частям (72) можно получить

$$F(T) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}. \quad (73)$$

При  $r=1$  плотность (67) совпадает с плотностью экспоненциального распределения, что согласуется с моделью возникновения экспоненциального распределения

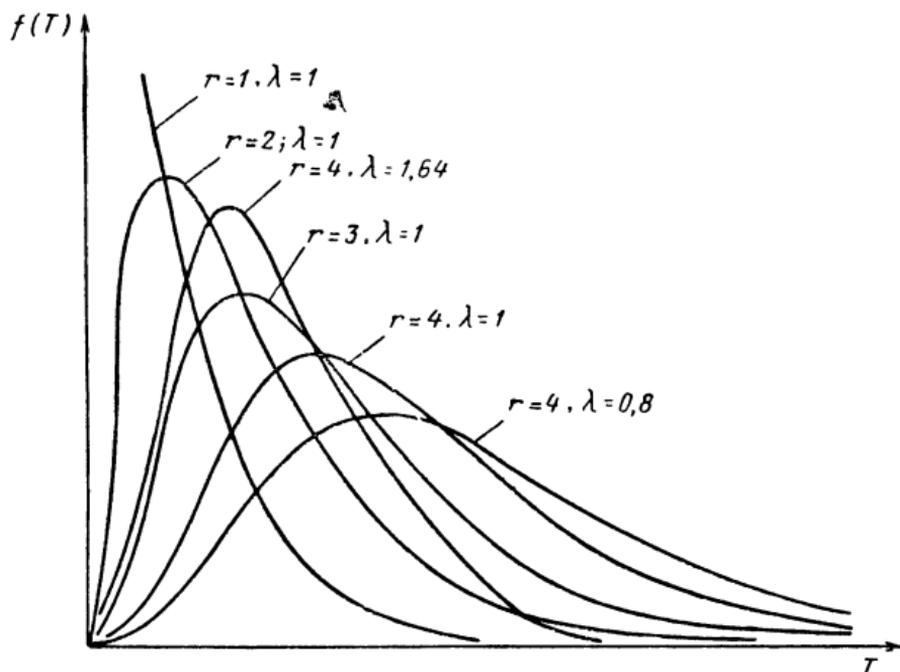


Рис. 27. Плотность гамма-распределения при различных  $r$  и  $\lambda$ .

при единичном повреждении. Кривые плотности (67) приведены на рис. 27. Отметим, что при малых  $r$  эти кривые асимметричны, с ростом  $r$  они становятся все более симметричными.

Математическое ожидание  $M\{\tau\}$  и дисперсия гамма-распределения  $D\{\tau\}$  равны

$$\left. \begin{aligned} M\{\tau\} &= \frac{r}{\lambda}, \\ D\{\tau\} &= \frac{r}{\lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Для нахождения  $F(T)$  при целых  $r$  можно воспользоваться номограммой, изображенной на рис. 28. На вертикальной оси отложена вероятность безотказной работы в течение времени  $T$

$$R(T) = P\{\tau > T\} = 1 - F(T).$$

На горизонтальной оси откладывается величина  $\lambda T$ . Каждая кривая номограммы отвечает своему значению  $r$ .

**Пример 3.** По величинам  $\lambda = 0,1 \frac{1}{\text{час}}$ ,  $r = 3$  найти вероятность безотказной работы в течение  $T = 8 \text{ час}$ .

Воспользуемся номограммой рис. 28. Находим  $\lambda T = 0,8$ . Из точки 0,8 на горизонтальной оси проводим вертикальную прямую до пересечения с линией  $r^* = r - 1 = 2$ . По вертикальной оси отсчитываем  $R(T) = 0,95$ . В случае дробного  $r$  следует произвести линейную интерполяцию.

Рассмотрим теперь вопрос об оценке величин  $\lambda$  и  $r$  по опытным данным. В зависимости от вида опытных данных, по которым производится оценка величин  $\lambda$  и  $r$ , здесь могут быть использованы два подхода.

Если имеется возможность наблюдать реализации износа типа реализаций, изображенных на рис. 23, и известна величина  $M$  предельно допустимого износа, то величины  $\lambda$  и  $r$  могут быть определены путем несложных расчетов.

На первом этапе расчета необходимо вычислить среднюю скорость износа. Весь промежуток наблюдения зоны нормального износа (рис. 29) разбиваем на некоторое число частей. Число точек разбиения обычно задается условиями наблюдения. Как правило, износ не удается наблюдать непрерывно. Величины  $\eta(t)$  для каждого из объектов измеряются через некоторые промежутки времени. Поэтому образуются естественные интервалы наблюдения. На рис. 29 точками показаны результаты измерения. Эти точки соединены прямыми линиями. Желательно измерять величины  $\eta(t)$  как

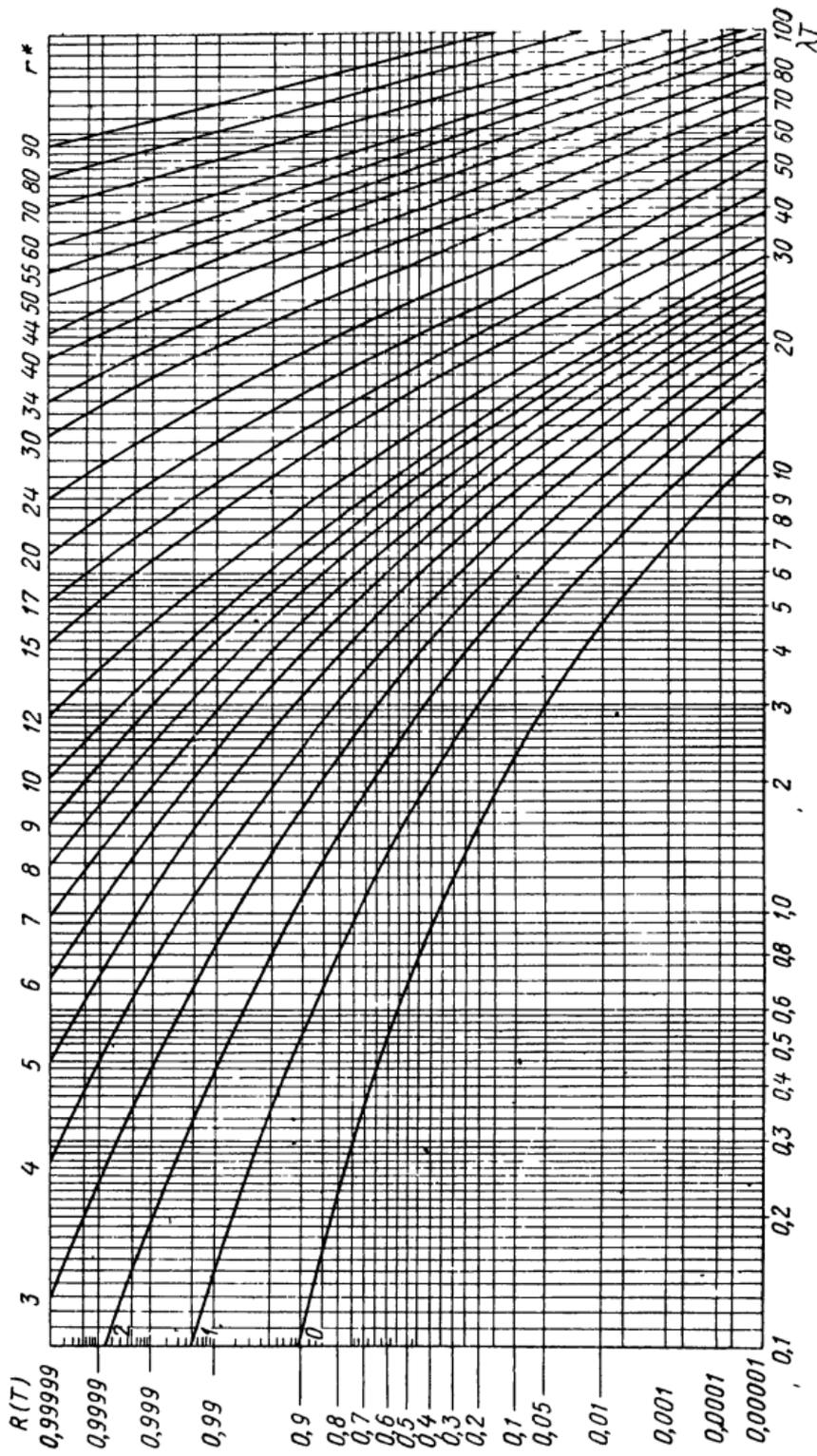


Рис. 28 Номограмма для определения вероятности безотказной работы  $R(T) = P\{\tau > T\}$  по гамма-распределению;  
 $\gamma^* = \gamma - 1$ .

можно чаще. Но трудности измерения приводят к тому, что интервалы между ними оказываются довольно большими. Кроме того, всякое измерение имеет ошибки. Если ошибка измерения больше, чем изменение величины  $\eta(t)$  за прошедший интервал времени, то эта ошибка может исказить ход кривой износа. Поэтому интервал между измерениями должен быть таков, чтобы ошибка измерения была мала по сравнению с приращением износа за этот интервал.

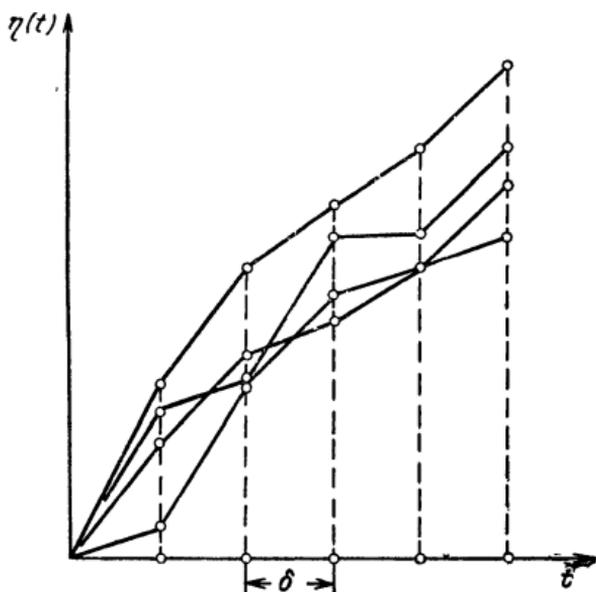


Рис. 29 К методике определения параметров  $\lambda$  и  $r$  по реализациям износа;  $\delta$  — интервал наблюдения

Общее число точек измерения должно составлять не менее пятидесяти. Так если число изучаемых объектов равно пяти, то для каждого из них должно быть выполнено по крайней мере десять измерений.

Ограничимся случаем, когда все интервалы наблюдения имеют одинаковую длительность, равную  $\delta$ . Приращение износа за время  $\delta$  будем обозначать через  $\delta\eta_j^{(i)}$ , где нижний индекс  $j$  относится к номеру интервала наблюдения, а верхний  $i$  — к номеру объекта (реализации износа).

До сих пор предполагалось, что износ исчисляется как функция времени. Практически износ может выступать как функция от числа циклов нагружения, величины пути (пробега) и т. п. При этом в принципе ничего не меняется, за исключением того, что вероятность безотказной работы имеет смысл вероятности, определенной для заданного числа циклов нагружения или для данного пробега и т. п.

Опишем порядок анализа реализаций на примере данных об износе протекторов (табл. 2). Износ определялся радиоактивным методом как функция от величины пробега.

### Анализ реализаций износа

1. Для каждого из объектов вычисляется средняя величина приращения износа  $\overline{\delta\eta}^{(i)}$  за интервал наблюдения по формуле

$$\overline{\delta\eta}^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta\eta_j^{(i)}, \quad (75)$$

где  $m$  — число интервалов наблюдения.

2. Вычисляется общая средняя величина приращения износа  $\overline{\delta\eta}$  по формуле

$$\overline{\delta\eta} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \overline{\delta\eta}^{(i)}, \quad (76)$$

где  $l$  — число наблюдаемых объектов.

3. Вычисляется дисперсия  $s_i^2$  величин  $\delta\eta_j^{(i)}$  и средняя дисперсия приращений  $s_{\delta\eta}^2$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} s_i^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\delta\eta_j^{(i)} - \overline{\delta\eta}^{(i)})^2, \\ s_{\delta\eta}^2 &= \frac{(m-1) \sum_{i=1}^l s_i^2}{m(l-1)} + \frac{m}{m(l-1)} \sum_{i=1}^l (\overline{\delta\eta}^{(i)} - \overline{\delta\eta})^2. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Приращения износа протекторов (мм) за интервал наблюдения  $\delta = 1180$  км

Номер объек- та	Интервал наблюдения пробега, км										$\overline{\sigma\eta}(i)$	$s^2_i$	$\lg s^2_i$									
	1180— 2360		2360— 3540		3540— 4720		4720— 5900		5900— 7080					7080— 8260		8260— 9440		9440— 10620		10620— 11800		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$												
1	0,5	0,1	0,5	0,0	0,3	0,1	0,4	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,26	0,0338	$\overline{2,5289}$
2	0,6	0,5	0,2	0,1	0,3	0,5	0,2	0,1	0,6	0,4	0,2	0,1	0,6	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,35	0,0383	$\overline{2,5832}$
3	0,7	0,5	0,3	0,1	0,5	0,6	0,1	0,5	0,2	0,6	0,1	0,5	0,2	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,41	0,0477	$\overline{2,6785}$
4	0,6	0,7	0,0	0,3	0,3	0,2	0,7	0,0	0,0	0,2	0,7	0,0	0,0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,30	0,0778	$\overline{2,8910}$
5	0,9	0,4	0,4	0,3	0,0	0,8	0,2	0,2	0,2	0,8	0,2	0,2	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,36	0,0893	$\overline{2,9509}$
											$\overline{\delta\eta} = 0,336$	$\Sigma s^2_i =$ $= 0,2869$	$\Sigma \lg s^2_i =$ $= -6,3675$									
												$s^2_{\delta\eta} = 0,0554$										

Прежде чем приступить к непосредственному определению величин  $\lambda$  и  $y$ , необходимо убедиться в том, что имеющиеся исходные данные не противоречат предположению об однородности начального качества объектов. Если это действительно так, то между величинами  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_l^2$ , а также между величинами  $\overline{\delta\eta}^{(1)}, \overline{\delta\eta}^{(2)}, \dots, \overline{\delta\eta}^{(l)}$  не должно быть существенной разницы. Математическая статистика располагает специальными критериями для проверки гипотез о равенстве дисперсий и средних. Для проверки гипотезы о равенстве дисперсий применим критерий Бартлетта [31], процедура использования которого состоит в следующем.

Вычисляется величина

$$\chi^2 = \frac{2,3026}{1 + \frac{l+1}{3l(m-1)}} l(m-1) \left[ \lg \frac{\sum_{i=1}^l s_i^2}{l} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \lg s_i^2 \right] \quad (78)$$

и так называемое число степеней свободы

$$k = l - 1.$$

По таблице [28, табл. IV, стр. 469] распределения  $\chi^2$  находят значение  $\chi_q^2$ , соответствующее числу степеней свободы  $k$  и вероятности

$$P \{ \chi^2 > \chi_q^2 \} = 0,05.$$

Если окажется, что найденное по (78) значение  $\chi^2$  не превосходит  $\chi_q^2$ , т. е.  $\chi^2 \leq \chi_q^2$ , то считают, что опытные данные не противоречат гипотезе о равенстве дисперсий.

Результаты подсчетов величин  $\overline{\delta\eta}^{(i)}, \overline{\delta\eta}, s_i^2, \lg s_i^2$  для реализаций износа протекторов помещены в последних трех колонках табл. 2. Применительно к табл. 2  $l=5, m=10$ . По формуле (78) получаем, что  $\chi^2=3,2$  при числе степеней свободы  $k=l-1=4$ .

По таблице  $\chi_{0,05}^2=9,5$ , откуда следует, что у нас нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве дисперсий.

4. Следующим этапом статистической проверки исходных данных является проверка существенности расхождения средних. Процедура состоит в следующем.

Подсчитывается „сумма квадратов отклонений между сериями“  $Q_1$ :

$$Q_1 = m \sum_{i=1}^l (\bar{\delta\eta}^{(i)} - \bar{\bar{\delta\eta}})^2 \quad (79)$$

и соответствующее число степеней свободы  $k_1 = l - 1$ .

Подсчитывается „сумма квадратов отклонений внутри серий“  $Q_2$ :

$$Q_2 = (m - 1) \sum_{i=1}^l s_i^2 \quad (80)$$

и соответствующее число степеней свободы  $k_2 = l(m - 1)$ .

Значения  $\bar{\delta\eta}^{(i)}$ ,  $\bar{\bar{\delta\eta}}$ ,  $s_i^2$  определены выше формулами (75), (76), (77).

Находится величина

$$F = \frac{Q_1/k_1}{Q_2/k_2} \quad (81)$$

По таблице 5 %-ных уклонений  $F$  [28, табл. VI, стр. 472—473] для вычисленных значений  $k_1$  и  $k_2$  находим величину  $F_{k_1; k_2}$ . При этом в качестве  $k_1$  надо взять то из чисел степеней свободы, которое соответствует большему из двух чисел  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Если найденное по (81) значение  $F$  окажется меньше, чем  $F_{k_1; k_2}$ , гипотеза о равенстве средних принимается; в противном случае — отвергается.

Так для данных табл. 2 имеем:  $Q_1 = 133 \cdot 10^{-3}$ ;  $k_1 = 4$ ;  $Q_2 = 2,58$ ;  $k_2 = 45$ ;  $F = 0,58$ . По таблице находим  $F_{k_1; k_2} = 5,7$  (в данном случае в качестве  $k_1$  принимается число 45). Так как  $F < F_{k_1; k_2}$ , гипотеза о равенстве средних принимается.

Убедившись в том, что опытные данные не противоречат предположению об однородности начального качества объектов, вычисляют  $\lambda$  и  $y$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{s_{\delta\eta}^2}{\overline{\delta\eta}}, \\ \lambda &= \frac{\overline{\delta\eta}^2}{s_{\delta\eta}^2} \frac{1}{\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

где  $s_{\delta\eta}^2$  и  $\overline{\delta\eta}$  определены по (77), (76).

Для данных табл. 2 получаем  $y = 0,165$  мм;  
 $\lambda = 0,00173 \frac{1}{км}$ .

По формуле (70), приняв  $M = 4$  мм, находим  $r = 24,1$ .

Зная  $r$  и  $\lambda$ , можно, как уже указывалось, найти вероятность безотказной работы в течение заданного времени.

\* \*  
\* \*

*Оценка параметров  $\lambda$  и  $r$  на основе данных о времени безотказной работы.*

Пусть имеются данные о времени безотказной работы  $N$  объектов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ .

1. Находится эмпирическое среднее и дисперсия времени безотказной работы  $\bar{\tau}$  и  $s_{\tau}^2$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i, \\ s_{\tau}^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\tau_i - \bar{\tau})^2. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

2. Приравнявая  $\bar{\tau} = M\{\tau\}$  и  $D\{\tau\} = s_{\tau}^2$ , получаем соотношения, из которых можно найти  $\lambda$  и  $r$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\bar{\tau}}{s_{\tau}^2}, \\ r &= \frac{\bar{\tau}^2}{s_{\tau}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

**Пример 4.** Данные о стойкости резцов приведены в табл. 3. Срок службы резца определялся предельно допустимым износом. Требуется найти значения  $\lambda$  и  $r$  и оценить вероятность безотказной работы в течение времени  $T_1=60$  мин,  $T_2=100$  мин.

В результате вычислений получаем  $\bar{\tau}=55,3; s_{\tau}^2=620$ . По (84) находим  $\lambda=0,089; r=4,93$ .

По номограмме находим  $P\{\tau>60\}=0,40; P\{\tau>100\}=0,06$ .

Таблица 3

Данные о стойкости резцов

Номер объекта, $i$	$\tau_i$ , мин	Номер объекта, $i$	$\tau_i$ , мин
1	9	26	56,5
2	17,5	27	57,5
3	21	28	58
4	26,5	29	59
5	27,5	30	59
6	31	31	60
7	32,5	32	61
8	34	33	61,5
9	36	34	62
10	36,5	35	63
11	39	36	64,5
12	40	37	65
13	41	38	67,5
14	42,5	39	68,5
15	43	40	70
16	45	41	72,5
17	46	42	77,5
18	47,5	43	81
19	48	44	82,5
20	50	45	90
21	51	46	96
22	53,5	47	101,5
23	55	48	117,5
24	56	49	127,5
25	56	50	130

$$\bar{\tau} = 55,3; s_{\tau}^2 = 620$$

До сих пор ничего не говорилось о выводе гамма-распределения. Для дальнейшего изложения полезно указать формальную модель, приводящую к возникновению этого распределения.

Рассмотрим систему, в которой с течением времени происходит накопление единичных повреждений. Если к моменту  $T$  в системе накоплено  $i$  повреждений, будем

говорить, что она находится в состоянии  $E_i$ . Эволюция системы описывается цепочкой

$$E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_r \rightarrow \dots \quad (85)$$

Каждое единичное повреждение происходит по схеме мгновенного повреждения. Вероятность перехода  $E_k \rightarrow E_{k+1}$  за время  $\Delta_T$  задается формулой

$$\gamma(T) = \lambda \Delta_T + o(\Delta_T). \quad (86)$$

Состояние системы характеризуется функциями  $\{P_k(T), k=0, 1, \dots\}$ , где  $P_k(T)$  есть вероятность того, что к моменту  $T$  система находится в состоянии  $E_k$ . Не останавливаясь на выводе выражений для  $P_k(T)$  (его можно найти, например в [30, гл. XVII]), приведем конечный результат:

$$P_k(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}, \quad k \geq 0. \quad (87)$$

Система функций  $\{P_k(T)\}$  задает распределение некоторой целочисленной случайной величины  $X(T)$ , равной количеству накопленных к моменту  $T$  повреждений. Опуская вычисления, приведем формулы для математического ожидания и дисперсии

$$M\{X(T)\} = \lambda T, \quad (88)$$

$$D\{X(T)\} = \lambda T. \quad (89)$$

Учитывая, что каждое повреждение есть приращение износа на величину  $y$ , получаем среднюю величину износа за время  $T$

$$M\{X(T)y\} = y\lambda T \quad (90)$$

и дисперсию износа

$$D\{X(T)y\} = y^2\lambda T. \quad (91)$$

Эти формулы были использованы при описании способа оценки  $y$  и  $\lambda$  по данным об износе, а именно, формулы (82) получены, исходя из равенств

$$\left. \begin{aligned} y\lambda\delta &= \overline{\delta\eta}, \\ y^2\lambda\delta &= s_{\delta\eta}^2. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Вернемся к вопросу о распределении времени безотказной работы  $\tau$ . Напомним, что время безотказной работы исчисляется до момента получения  $r$ -го по счету

повреждения. Сумма вероятностей  $P_0(T) + P_1(T) + \dots + P_{r-1}(T)$  имеет смысл вероятности того, что к моменту  $T$  число повреждений равно либо 0, либо 1, ..., либо  $r-1$ , т. е. меньше чем  $r$ . Иными словами, это есть вероятность того, что время безотказной работы  $\tau$  не меньше, чем  $T$ , т. е.

$$P\{\tau > T\} = \sum_{k=0}^{r-1} P_k(T). \quad (93)$$

Отсюда, по формуле (87)

$$\begin{aligned} P\{\tau \leq T\} = F(T) &= 1 - P\{\tau > T\} = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}. \end{aligned} \quad (94)$$

Эта формула является искомой. Она совпадает с (73), выражающей функцию распределения гамма-распределения для целых  $r$ .

При обработке опытных данных число  $r$  может оказаться дробным. Это обстоятельство не должно нас смущать по двум причинам. Во-первых, оценка числа  $r$  на основе опытных данных сопряжена со случайными флюктуациями, и поэтому отклонение числа  $r$  от целого может быть случайным; во-вторых, обычно число  $r$  оказывается достаточно большим (порядка нескольких десятков), и ошибкой от округления его практически всегда можно пренебречь. Поэтому имеются все основания считать рассмотренную дискретную модель накопления повреждений пригодной для описания непрерывной схемы реального износа.

Заметим, что в наиболее общем виде плотность гамма-распределения записывается так:

$$f(T) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha} e^{-\beta T}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0. \end{cases} \quad (95)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  — параметры распределения, любые положительные числа. Пользуясь таблицами [4, стр. 24, 202], можно найти значения интегральной функции

$$P\{\tau \leq u\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\beta u} y^{\alpha} e^{-y} dy \quad (96)$$

для заданных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $u$ .

## Нормальное распределение времени безотказной работы

Уже отмечалось (см. рис. 27), что с ростом числа  $r$  гамма-распределение становится более симметричным. В основе этого свойства лежит то обстоятельство, что при возрастании  $r$  кривая плотности  $f(T)$  гамма-распределения, задаваемая (67), стремится к виду

$$f(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{r}{\lambda^2}}} e^{-\frac{(T - \frac{r}{\lambda})^2}{2 \cdot \frac{r}{\lambda^2}}}. \quad (97)$$

В общем виде формула (97) может быть представлена так:

$$f(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(T-c)^2}{2\sigma^2}}, \quad (98)$$

где  $c, \sigma$  — параметры.

Легко видеть, что кривая  $f(T)$  по (98) симметрична относительно точки  $T=c$ . Формула (98) задает плотность нормального распределения. Нормальное распре-

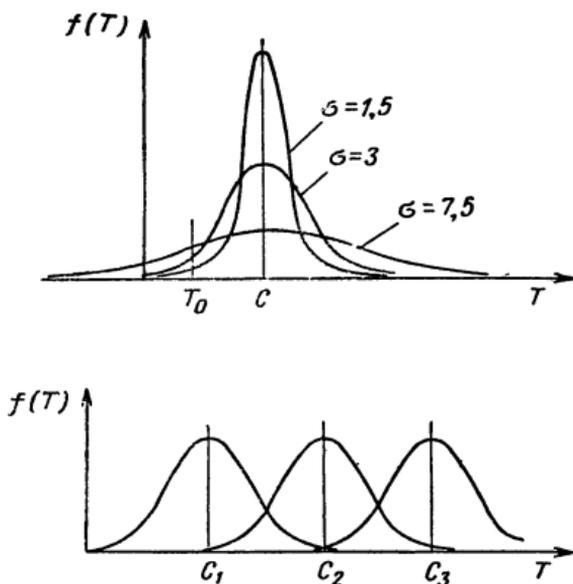


Рис 30. Кривые плотности нормального распределения при различных значениях параметров  $c$  и  $\sigma$ .

деление имеет широкое распространение в природе. Ему, в частности, подчиняются такие случайные величины [10, 28, 31], как погрешности измерения, погрешности изготовления и ряд других. На рис. 30 приводятся кривые плотности нормального распределения. Они симметричны и имеют ветви, уходящие в сторону  $T = \infty$  и  $T = -\infty$ . Таким образом, нормальное распределение задано на всей оси  $T$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . На первый взгляд кажется странным, что нормальное распределение может описывать поведение времени  $\tau$  безотказной работы, поскольку время  $\tau$  не может быть отрицательным. Здесь важно понимать, что нормальное распределение дает приближенное (асимптотическое) описание распределения времени  $\tau$ . При этом, если нормальное распределение используется при больших  $r$ , всегда будет наблюдаться тот факт, что вероятность отрицательного значения  $\tau$ , т. е. вероятность  $P\{\tau \leq 0\}$ , заданная как

$$P\{\tau \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 f(t) dt,$$

окажется ничтожно малой величиной и практически не будет влиять на точность расчетов надежности объектов. Если вероятность  $P\{\tau \leq 0\}$  оказывается ощутимо большой величиной, то это означает, что для описания распределения времени  $\tau$  нельзя использовать нормальное распределение.

Математическое ожидание нормального распределения, имеющего плотность (98), равно параметру  $c$ , а дисперсия равна  $\sigma^2$ :

$$\left. \begin{aligned} M\{\tau\} &= c, \\ D\{\tau\} &= \sigma^2. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Сопоставляя (97) и (98), получаем

$$\left. \begin{aligned} c &= M\{\tau\} = \frac{r}{\lambda}, \\ \sigma^2 &= D\{\tau\} = \frac{r}{\lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Функция нормального распределения по общим правилам может быть вычислена как

$$F(T) = \int_{-\infty}^T f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T-c}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (101)$$

## Функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (102)$$

называется функцией Лапласа, и ее значения приводятся в приложении (таблица П1). Очевидно, что

$$F(T) = \Phi\left(\frac{T-c}{\sigma}\right). \quad (103)$$

Физически переход от гамма-распределения к нормальному обоснован, если реализации износа длительное время идут, переплетаясь друг с другом, прежде чем начинают возникать отказы. Формально можно считать переход к нормальному распределению приемлемым, если отношение

$$\frac{M\{\tau\}}{\sqrt{D\{\tau\}}} = \frac{r/\lambda}{\sqrt{r/\lambda^2}} > 3,5,$$

т. е., если  $r > 12$ . Близость гамма-распределения к нормальному наглядно иллюстрируется сравнением кривых  $R(T)$  (рис. 31). Из рисунка видно, что уже при  $r=9$  замена гамма-распределения нормальным обеспечивает максимальную погрешность в оценке  $R(T)$  порядка 10% почти всюду, за исключением области малых вероятностей.

Важно отметить, что нормальное распределение времени  $\tau$  образуется как следствие однородности качества объектов, постоянной средней скорости износа и переплетения (перемешивания) реализаций.

Укажем на важную особенность нормального распределения. При малых величинах  $\sigma = \sqrt{D\{\tau\}}$  по сравнению со средним временем безотказной работы  $c = M\{\tau\}$  значения плотности весьма близки к нулю на довольно большом интервале времени  $(0, T_0)$  (рис. 30), откуда следует, что в данном интервале вероятность появления отказа очень мала. Физически это отражает тот факт, что при большом значении уровня предельного износа  $M$  и малой величине накопленного износа вероятность отказа мала. Именно это обстоятельство используется для введения принудительных замен (ремонтов) на небольших уровнях износа, чем обеспечивается малая вероят-

ность отказа между ремонтами. Отметим, что для экспоненциального распределения (см. рис. 3), имеющего максимум плотности при  $T=0$ , характерно, наоборот, что большая часть отказов наблюдается на начальном периоде работы.

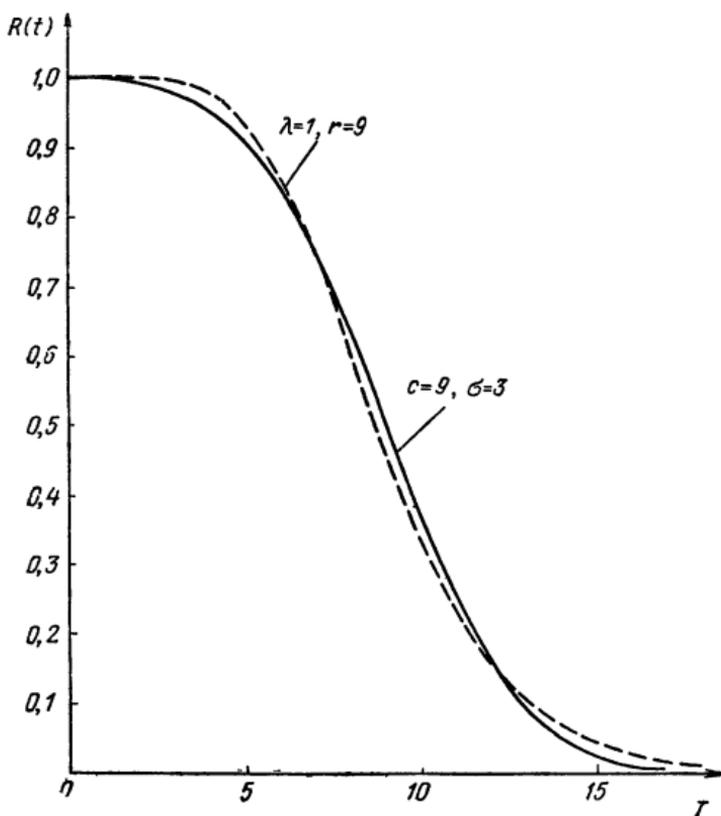


Рис. 31 Сравнение кривых  $R(T)$ .

--- гамма-распределение, — нормальное распределение

Параметры нормального распределения  $c, \sigma$  могут быть определены на основе опытных данных об износе или о величинах  $\tau_i$ . Если имеются реализации износа, то необходимо найти по описанной выше методике  $\lambda$  и  $r$  и затем по формулам  $c=r/\lambda, \sigma^2=r/\lambda^2$  определить  $c$  и  $\sigma$ . Если имеются опытные данные о времени безотказной

работы  $N$  экземпляров  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ , то следует вычислить  $\bar{\tau}$ ,  $s_{\tau}^2$  и затем принять, что

$$c = \bar{\tau},$$

$$\sigma^2 = s_{\tau}^2.$$

**Пример 4.** (продолжение). По данным табл. 3 найти вероятности безотказной работы в течение времени  $T_1=60$  мин и  $T_2=100$  мин, считая распределение нормальным.

Полагаем  $c = \bar{\tau} = 55,3$ ;  $\sigma = s_{\tau}^2 = \sqrt{620} = 24,9$ .

Подсчитываем

$$x_1 = \frac{T_1 - c}{\sigma} = 0,19; \quad x_2 = \frac{T_2 - c}{\sigma} = 1,8.$$

По табл. П1 находим  $\Phi(x_1) = 0,575$ ;  $\Phi(x_2) = 0,964$ , откуда  $P\{\tau > 60\} = 0,425$ ;  $P\{\tau > 100\} = 0,036$ .

Отсюда видно, что для значений  $T$ , близких к величине математического ожидания, оценка  $P\{\tau > T\}$  по нормальному распределению близка к оценке по гамма-распределению, хотя  $r$  невелико ( $r = 4,93$ ).

Переход от гамма-распределения к нормальному создает большие вычислительные удобства как за счет наличия подробных таблиц функции Лапласа, так и за счет сравнительной простоты функционального вида этого распределения.

Иногда считают, что износ любого вида (любое естественное старение) приводит к нормальному распределению времени безотказной работы [1]. Как видно из проведенного анализа, это распределение отвечает довольно частному виду процесса изнашивания.

Укажем в заключение еще на два способа оценки параметров  $c$  и  $\sigma$  нормального распределения времени  $\tau$ . Первый из них связан с разбиением совокупности значений  $\tau_1, \dots, \tau_N$  на три группы. С подобным подходом к оценке параметров распределения мы уже встречались в § 2, когда осуществлялось разбиение на две группы для оценки параметра  $\lambda$  экспоненциального распределения. Нормальное распределение имеет два параметра, и это вызывает необходимость в разбиении значений  $\tau_i$  на три группы. В дальнейшем излагаемый метод оценки параметров распределения будем называть методом разделяющих разбиений.

## Оценка параметров нормального распределения $c$ и $\sigma$ методом разделяющих разбиений

Пусть имеются данные  $\tau_1, \dots, \tau_N$  о времени безотказной работы  $N$  изделий.

1. Выбираются числа  $\theta_1, \theta_2, \theta_1 < \theta_2$ , и подсчитывается количество изделий  $m(\theta_1)$  и  $m(\theta_2)$ , отказавших соответственно в интервалах  $(0, \theta_1)$  и  $(0, \theta_2)$ .

2. Подсчитываются отношения

$$v(\theta_i) = \frac{m(\theta_i)}{N}, \quad i = 1, 2.$$

Рекомендуется выбрать  $\theta_1$  и  $\theta_2$  так, чтобы выполнялись неравенства  $0,1 < v(\theta_1) < 0,3$ ;  $0,5 < v(\theta_2) < 0,9$ .

3. По табл. П2 обратной функции Лапласа отыскиваются значения  $\Psi_1 = \Psi(v(\theta_1))$  и  $\Psi_2 = \Psi(v(\theta_2))$ .

4. Параметры  $c$  и  $\sigma$  находятся по формулам

$$c = \frac{\theta_1 \Psi_2 - \theta_2 \Psi_1}{\Psi_2 - \Psi_1}; \quad \sigma = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Psi_2 - \Psi_1}. \quad (104)$$

Как уже отмечалось в § 2, метод разделяющих разбиений удобен, когда оценка параметров распределения производится по результатам ремонта (проверки) деталей данного вида в процессе эксплуатации аппаратуры. Величина  $\theta_1$  выступает в этом случае как срок до первого ремонта, а величина  $\theta_2 - \theta_1$  — как срок между первым и вторым ремонтами; пусть  $n_1$  и  $n_2$  — соответственно числа деталей данного вида, забракованные при первом и втором ремонтах. Будем считать, что те аппараты, в которых при первой проверке были обнаружены дефектные детали, из дальнейшей эксплуатации изымаются. В связи с этим возникает некоторая особенность расчета. А именно, для вычисления частостей  $v(\theta_i)$  следует воспользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} v(\theta_1) &= \frac{n_1}{N_1}, \\ v(\theta_2) &= \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} \left(1 - \frac{n_1}{N_1}\right), \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

где  $N_1$  — число проверенных деталей данного вида при первом ремонте;

$N_2$  — число проверенных деталей данного вида при втором ремонте.

\* \*  
\*

*Выравнивание опытных данных о времени безотказной работы на вероятностной бумаге нормального распределения*

С вероятностной бумагой мы уже встречались в § 2 применительно к экспоненциальному распределению. Для проверки нормальности можно произвести выравнивание накопленных частот на вероятностной бумаге нормального распределения (нормальной бумаге) (рис. 32). Если опытные данные хорошо согласуются

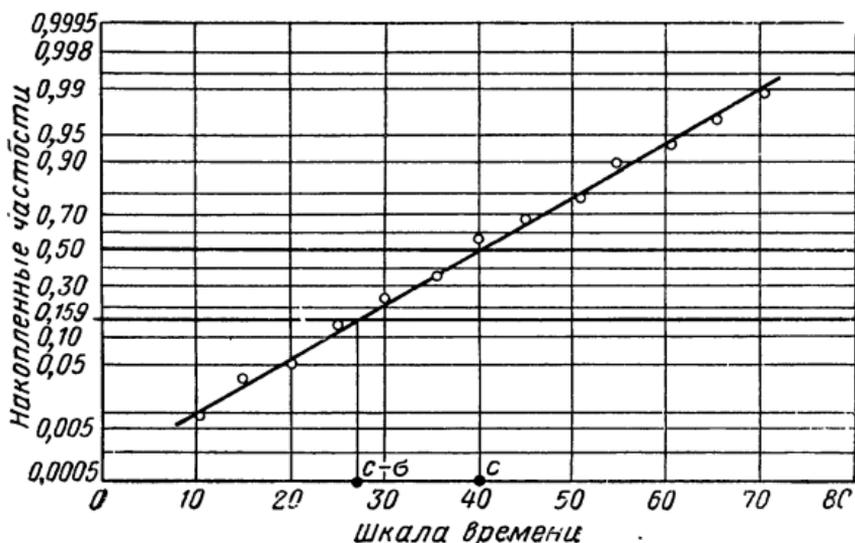


Рис 32 Вероятностная бумага нормального распределения

с нормальным распределением, накопленные частоты ложатся вблизи прямой. На нормальной бумаге можно оценить параметры распределения  $c$  и  $\sigma$ . Параметр  $c$  равен абсциссе, соответствующей накопленной частоте 0,50, параметр  $\sigma$  равен разности абсцисс точек с накопленными частотами 0,50 и 0,159.

Если параметр  $r$  гамма-распределения невелик, то при выравнивании это обнаружится. На рис. 33 приведены результаты выравнивания гамма-распределения на

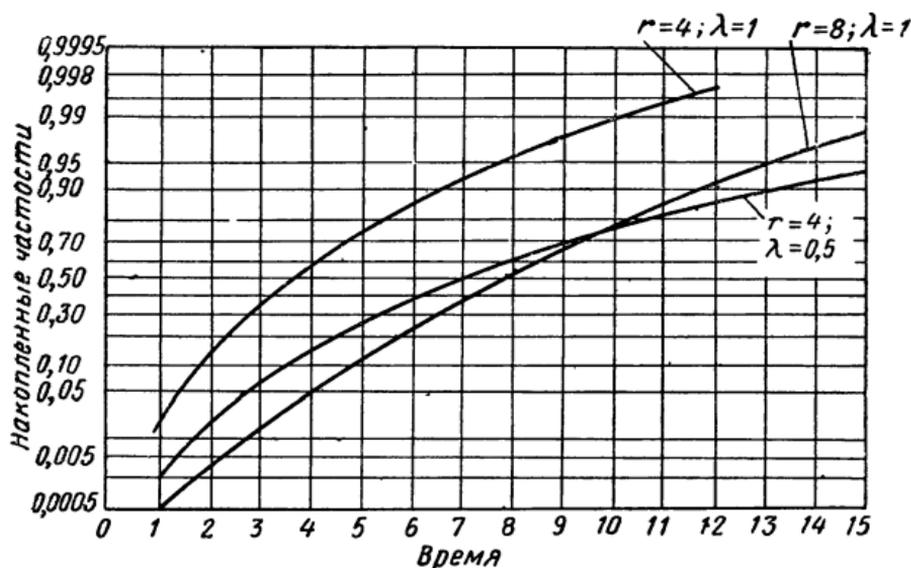


Рис. 33. Выравнивание гамма-распределения на вероятностной бумаге нормального распределения.

вероятностной бумаге нормального распределения для значений  $r=4$ ,  $r=8$ .

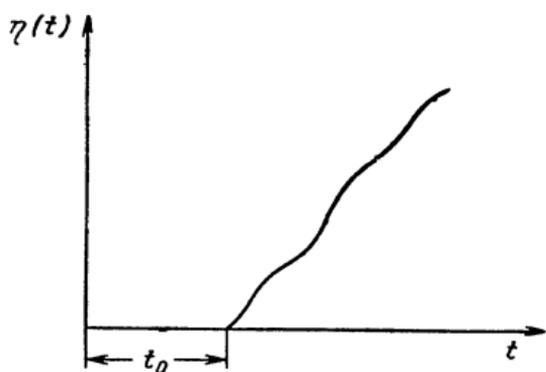
\* \*  
\*

### Гамма-распределение с параметром смещения

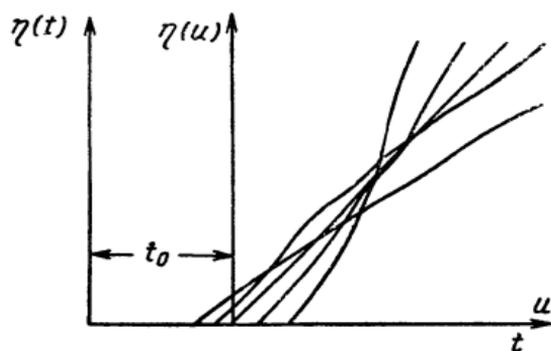
Среди причин, приводящих к отказам приборов и машин, значительное место занимает коррозия металлов. Коррозия образуется за счет воздействия на металл внешней среды и контакта разнородных металлов. Для значительной части видов коррозии характерно постоянство средней скорости ее развития. Случайные вариации внешних условий (изменения влажности, температуры и т. д.), а также сложность внутренней структуры металла приводят к тому, что для каждого отдельного объекта скорость случайно варьируется, и реализации развития коррозии однородных объектов переплетаются. Поэтому во многих ситуациях отказы, образующиеся

под влиянием коррозии, отвечают условиям возникновения гамма-распределения или нормального распределения.

С целью повышения надежности принимаются специальные меры борьбы против коррозии. К числу этих мер принадлежат защитные покрытия (лаки, краски, оксидные покрытия и т. д.). В течение длительного времени защитное покрытие предохраняет металл от кор-



а)



б)

Рис. 34. К модели возникновения гамма-распределения с порогом чувствительности

розии. Однако само покрытие также подвержено старению, и его защитные свойства постепенно падают. В результате через сравнительно большие от начала эксплуатации промежутки времени под покрытием образуются участки корродированного металла.

Если исчислять износ в весовой потере металла или в глубине коррозии, то при наличии защитного покрытия окажется, что имеется участок, где величина износа равна нулю (рис. 34,а). Время  $t_0$  до начала коррозии является случайным. Поэтому совокупность реализаций износа будет иметь вид, представленный на рис. 34,б. Обычно рассеивание времени  $t_0$  до начала износа мало по сравнению с его средней величиной. Это позволяет считать, что имеется некоторая постоянная величина  $t_0$ , которую, как и в § 2, назовем порогом чувствительности. При достижении времени  $t_0$  начинается износ. Естественно, что если отказ может явиться лишь следствием износа, то

$$P\{\tau \leq t_0\} = 0,$$

т. е. вероятность отказа ранее времени  $t_0$  равна нулю.

Если соблюдены все условия образования гамма-распределения, о которых речь шла выше, то плотность вероятности распределения времени  $\tau$  представится в виде

$$f(T) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r (T - t_0)^{r-1} e^{-\lambda(T-t_0)}, & T \geq t_0, \\ 0, & T < t_0. \end{cases} \quad (106)$$

Если порог чувствительности  $t_0$  задан, то параметры  $\lambda$  и  $r$  могут быть найдены уже изложенными способами с той лишь разницей, что вместо времени  $t$  надо рассматривать время  $u = t - t_0$ . Таким образом, введя новый отсчет времени (рис. 34,б), получим плотность вероятности

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r u^{r-1} e^{-\lambda u}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0, \end{cases} \quad (107)$$

где аналогично (84)

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\bar{u}}{s_u^2}, \\ r &= \frac{s_u^2}{\bar{u}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

При наличии реализаций износа величина  $t_0$  приближенно может быть определена путем построения средней линии износа (рис. 35). Средняя линия износа мо-

жет быть проведена с помощью метода наименьших квадратов [22]. Точка пересечения средней линии износа с осью  $t$  задает значение порога чувствительности  $t_0$ .

При наличии данных только о величинах  $\tau_1, \dots, \tau_N$  времени безотказной работы  $N$  объектов определение порога  $t_0$  вызывает существенные затруднения.

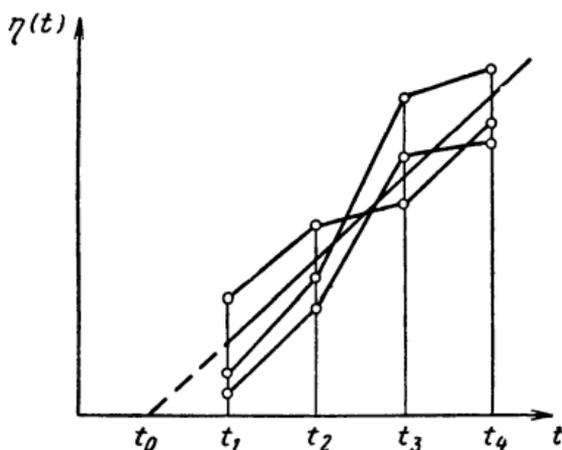


Рис 35. Оценка порога чувствительности по реализациям

Метод нахождения величин  $t_0$ ,  $\lambda$  и  $r$  основан на приравнивании теоретических и эмпирических центральных моментов первого, второго и третьего порядка (это так называемый метод моментов). Заметим, что ввиду наличия сдвига  $\tau = u + t_0$  имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} \{ \tau \} &= \mathbf{M} \{ u \} + t_0 = \frac{r}{\lambda} + t_0, \\ \mathbf{D} \{ \tau \} &= \mathbf{D} \{ u \} = \frac{r}{\lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Используя формулу (8), можно найти, что центральный момент третьего порядка равен

$$\mu_3 = \frac{2r}{\lambda^3}. \quad (110)$$

Во введении указывалось, что его эмпирический аналог  $m_3$  определяется выражением (15). Приравняв найденные из опытных данных значения  $\bar{\tau}, s_{\tau}^2, m_3$  к со-

ответствующим теоретическим значениям моментов, после простых преобразований придем к формулам:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 2 \frac{s_{\tau}^2}{m_3}, \\ r &= 4 \frac{[s_{\tau}^2]^3}{(m_3)^2}, \\ t_0 &= \bar{\tau} - \frac{2(s_{\tau}^2)^2}{m_3}. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Оценка  $m_3$  центрального момента третьего порядка имеет большие случайные вариации и поэтому является в статистическом смысле довольно грубой. Это может привести к большим случайным вариациям оценок величин  $t_0$ ,  $\lambda$  и  $r$ . Поэтому, обрабатывая по формулам (111) опытные данные, можно прийти к заключению, что порог чувствительности  $t_0 > 0$ , хотя на самом деле он равен нулю. В силу этого, учитывая при обработке опытных данных наличие порога чувствительности, следует прежде всего опираться на физическую картину отказа. Кроме того, необходимо располагать не менее чем 100 данными о величинах  $\tau_i$ . Наконец, следует всякий раз принимать, что  $t_0 = 0$ , если по результатам обработки опытных данных оказалось, что

$$t_0 < 0, 1\bar{\tau}.$$

При большом количестве данных о величинах  $\tau_i$  представление о наличии и величине порога чувствительности можно получить, построив гистограмму распределения (рис. 36). Заметно характерное смещение всей гистограммы вправо по сравнению с ее положением при  $t_0 = 0$ .

Как уже отмечалось, при больших  $r$  гамма-распределение может быть заменено на нормальное. Это свойство сохраняется и при наличии порога чувствительности. Если гамма-распределение близко к нормальному, то нет необходимости во введении порога  $t_0$ . Здесь, как и ранее, следует использовать формулы  $c = \bar{\tau}$ ,  $\sigma^2 = s_{\tau}$  для оценки параметров нормального распределения. Следовательно, прибегать к определению порога  $t_0$  по опытным данным о величинах  $\tau_i$  и к оценке  $\lambda$  и  $r$  по формулам (111) полезно лишь в случае, если гистограм-

ма распределения имеет асимметричный вид и при этом смещена вправо. Для того чтобы не совершать ошибки, полезно всякий раз, когда речь идет о выравнивании опытных данных с помощью гамма-распределения, наносить эти данные на нормальную бумагу. Если накоп-

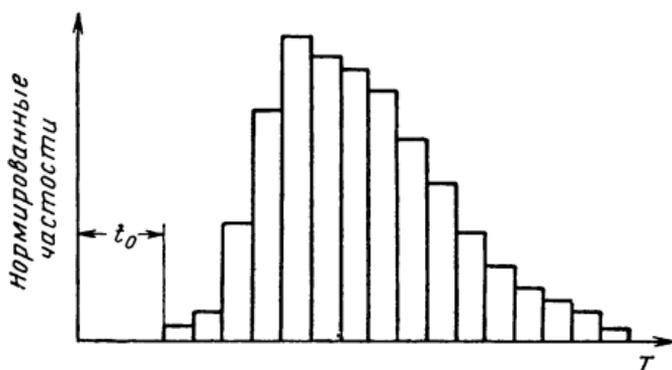


Рис. 36 К оценке порога чувствительности по гистограмме

ленные частоты ложатся близко к прямой линии, то имеет смысл переходить от гамма-распределения к нормальному.

### Функциональное гамма-распределение

В предыдущих схемах процесса изнашивания существенным являлось предположение о постоянстве средней скорости износа. Однако, как уже отмечалось, такое постоянство наблюдается отнюдь не всегда. В частности, средняя скорость не остается постоянной при коррозионном разрушении.

Известно, что ряд металлов, например алюминий и его сплавы, имеют твердый и сравнительно плотный окисел. Поверхность чистого алюминия при окислении покрывается слоем соединения  $Al_2O_3$ , которое обладает высокой твердостью и плотностью. Образовавшийся при воздействии атмосферы слой окисла препятствует дальнейшему проникновению кислорода и тем самым дальнейшей коррозии. Чем плотнее слой окисла, тем медленнее идет дальнейшее развитие коррозии. Это приводит

к тому, что скорость коррозии убывает во времени как [29, стр. 51].

$$\frac{dM\{\eta(t)\}}{dt} = \frac{a}{b+t}, \quad (112)$$

где  $a, b$  — некоторые постоянные,  
 $t$  — время эксплуатации (рис. 37).

Коррозионный процесс является не единственным примером убывания средней скорости износа. Этим свойством обладает ряд процессов износа, которые в своей основе имеют диффузионный процесс. Примерами могут служить процессы накопления усталости в металлах, процессы накопления деформации при высоких температурах (ползучесть, длительная прочность) и ряд других.

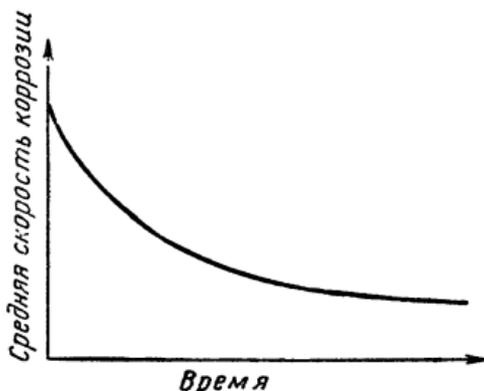


Рис. 37. Поведение средней скорости коррозии

Нетрудно представить себе картину, когда с ходом времени скорость износа возрастает. Так обстоит дело, когда на процесс износа накладываются дополнительные процессы, например рост температуры, рост вибраций и т. д.

Предположим, что в нашем распоряжении имеется пучок реализаций какого-то процесса износа (рис. 38), у которого средняя скорость есть известная нам функция времени  $v(t)$ :

$$v(t) = M\{\xi(t)\}. \quad (113)$$

Рост износа в среднем описывается функцией  $u(t)$ :

$$M\{\eta(t)\} = u(t) = \int_0^t v(z) dz, \quad (114)$$

причем  $u(t)$  считаем монотонной функцией  $t$ .

Считаем, что все реализации соответствуют объектам с одинаковым исходным качеством. Это означает, что реализации скорости износа  $\xi_i(t)$  ( $i$  — номер реализа-

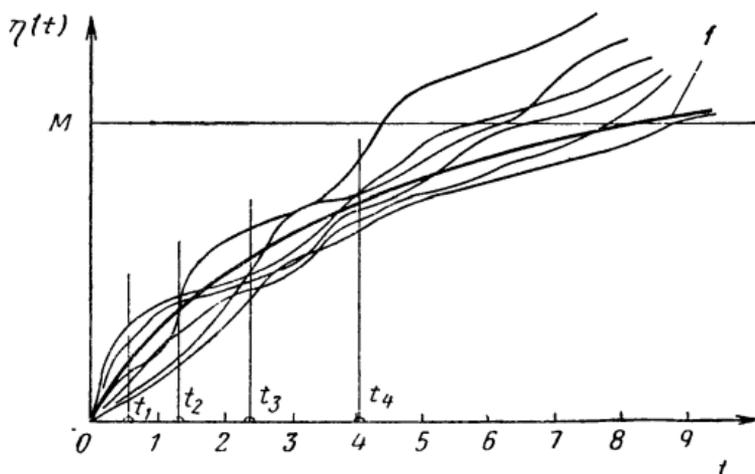


Рис 38 Реализация износа с переменной средней скоростью.  
 $l$  — линия среднего накопленного износа

ции) суть реализации одного и того же случайного процесса и различаются лишь в случайном смысле. Предполагаем, что для описываемого случая имеет место соотношение (51), т. е.

$$\xi(t) = v(t) \rho(t), \quad (115)$$

где  $\rho(t)$  — стационарный случайный процесс;

$$M\{\rho(t)\} = 1.$$

Первый множитель отражает детерминированное изменение скорости в среднем, а второй — случайные вариации около этого среднего уровня.

Считаем, что процесс  $\rho(t)$  является процессом с убывающими связями. Физически это означает, что поведение  $\rho(t)$  на участке времени  $(T_2, T_2 + \Delta T)$  очень слабо зависит от его поведения на участке времени  $(T_1, T_1 +$

$+\Delta T$ ). Поясним физический смысл этого предположения на примере процесса коррозии.

Коррозия порождается взаимодействием металла и внешней среды. Вариации ее скорости в значительной степени будут определяться вариациями свойств внешней среды. Такие параметры внешней среды, как влажность, насыщенность химически активными веществами, температура и т. д., непрерывно и случайно изменяются. Именно эти изменения вызывают «наложение» случайной составляющей  $\rho(t)$  на среднюю скорость процесса коррозии. Однако случайные свойства внешней среды на интервалах  $(T_1, T_1 + \Delta T)$  и  $(T_2, T_2 + \Delta T)$ , если  $(T_2 - T_1)$  достаточно велико, связаны весьма слабо. Это и приводит к тому, что процесс  $\rho(t)$  имеет убывающие связи.

Произведем теперь замену времени, а именно введем новую переменную времени  $u = u(t)$  и построим наш пучок реализаций в новом времени. Это означает, что при построении абсциссе  $u(t_1)$  мы ставим в соответствие ординату  $\eta(t_1)$ . Очевидно, что теперь реализации износа будут иметь постоянную среднюю скорость. При этом свойства независимости (или почти независимости) приращений износа  $\eta(t)$  и однородности начального качества сохраняются. Следовательно, по отношению к таким реализациям справедливо все, что говорилось при выводе гамма-распределения. В частности, случайное время достижения некоторого уровня  $M$  будет иметь гамма-распределение с плотностью

$$f_1(u) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r u^{r-1} e^{-\lambda u}, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases} \quad (116)$$

Выясним, каким будет распределение «истинного» времени безотказной работы. Мы имеем дело с ситуацией, когда известна плотность распределения величины  $u$  и нужно найти плотность величины  $\tau$ , причем  $u = u(\tau)$  — известная монотонная функция. Имеет место соотношение

$$P\{\tau \leq T\} = P\{u \leq u(T)\} = P\left\{u \leq \int_0^T v(t) dt\right\}. \quad (117)$$

Выражение (116) позволяет определить функцию распределения случайной величины  $u$

$$\mathbf{P}\{u \leq U\} = F(U) = \int_0^U f_1(u) du. \quad (118)$$

Сопоставляя (117) и (118), получаем соотношение для функции распределения  $G(T)$  случайной величины  $\tau$

$$G(T) = \mathbf{P}\{\tau \leq T\} = F\left(\int_0^T v(t) dt\right) = F(u(T)). \quad (119)$$

Рассмотрим практически важный случай, когда

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \frac{a}{1+t}, \quad a > 0. \quad (120)$$

Для этого случая имеем по (114)

$$u(t) = a \ln(1+t). \quad (121)$$

По (119)

$$G(T) = F(a \ln(1+T)) = \int_0^{a \ln(1+T)} f_1(u) du. \quad (122)$$

Отсюда легко дифференцированием получить плотность распределения  $g(T)$  величины  $\tau$ :

$$g(T) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r a^r [\ln(1+T)]^{r-1} e^{-\lambda a \ln(1+T)} \frac{1}{1+T}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0. \end{cases} \quad (123)$$

График плотности этого распределения резко асимметричен и вытянут в сторону больших значений  $T$  (см. рис. 39). К такому же распределению можно прийти, если предположить, что за время от  $T$  до  $T + \Delta_T$  объект получает единичное повреждение с вероятностью

$$\gamma(T) = \frac{a\lambda}{1+T} \Delta_T + o(\Delta_T), \quad (124)$$

и при накоплении  $r$  повреждений наступает отказ. Аналогичная ситуация была описана на стр. 64. Для данно-

го случая также можно вывести формулы для  $P_k(T)$  — вероятности того, что к моменту  $T$  будет накоплено ровно  $k$  повреждений. Эти формулы отличаются от (87) тем,

что вместо  $\lambda t$  стоит величина  $\int_0^T \frac{a\lambda}{1+t} dt = \lambda a \ln(1+T)$ :

$$P_k(T) = \frac{[a\lambda \ln(1+T)]^k}{k!} e^{-a\lambda \ln(1+T)}, \quad k \geq 0. \quad (125)$$

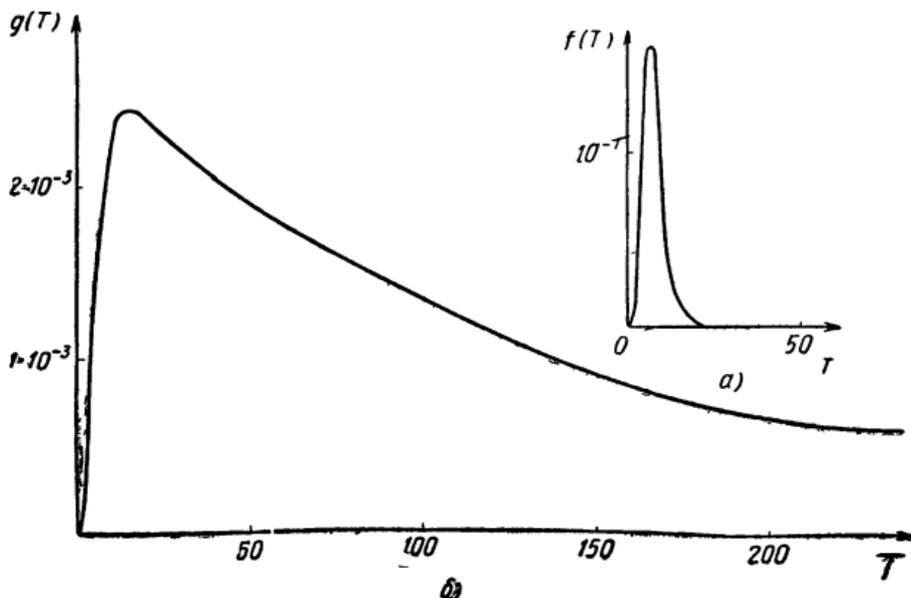


Рис. 39. Сравнение кривых плотности гамма-распределения (а) и функционального гамма-распределения (б) при  $a=\lambda=1$ ,  $r=7$

В соответствии с формулой (94) придем к выражению для функции распределения  $\tau$

$$P\{\tau \leq T\} = G(T) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} P_k(T). \quad (126)$$

Отсюда после дифференцирования получается формула для плотности, совпадающая с выражением (123).

### Особенности обработки опытных данных

Если имеются реализации износа, то для определения величин  $y$ ,  $\lambda$ ,  $r$  следует воспользоваться уже изло-

женной методикой. Единственная особенность обработки данных состоит здесь в том, что реализации износа следует строить в шкале времени  $u(t) = \int_0^t v(z) dz$ . Так если

средняя скорость износа задана формулой (120), то при построении реализаций износа на оси абсцисс следует откладывать не само время наблюдения  $t$ , а величину  $a \ln(1+t)$ . При этом износ в среднем имеет постоянную скорость. Соответственно формулы (82) останутся без изменений при условии, что наблюдения за объектами ведутся через постоянные по длине интервалы времени  $\delta$  в шкале времени « $u$ ». Это можно осуществить, если измерения износа производить в моменты времени  $t_i$ , которые выбраны такими, чтобы разность  $\ln(1+t_{i+1}) - \ln(1+t_i)$  была постоянной. Это означает, что на шкале  $t+1$  точки измерения износа образуют геометрическую прогрессию (см. рис. 38).

Если опытные данные представляют собой значения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  времени безотказной работы  $N$  экземпляров, то при их обработке следует перейти от значений  $\tau_i$  к величинам  $u_i = \int_0^{\tau_i} v(z) dz$ , найти среднее и эмпирическую дисперсию  $\bar{u}, s_u^2$  и затем подсчитать  $\lambda$  и  $r$  по формулам (84). Как видно из сказанного, непостоянство средней скорости износа  $M\{\xi(t)\}$  не создает особых осложнений при обработке опытных данных.

\* \*  
\*

### Логарифмически-нормальное распределение

Выше уже говорилось о том, что при больших  $r$  гамма-распределение приближается к нормальному. Это наводит на мысль повторить выкладки предыдущего пункта, полагая, что случайная величина  $u$  имеет плотность, заданную в виде

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(u-c)^2}{2\sigma^2}}. \quad (127)$$

Пусть средняя скорость износа задается формулой

$$M\{\xi(t)\} = \frac{a}{1+t}, \quad a > 0. \quad (128)$$

В точности повторив все рассуждения предыдущего пункта, мы придем к формуле, аналогичной формуле (122):

$$\begin{aligned} P\{\tau \leq T\} &= G(T) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{a \ln(1+T)} e^{-\frac{(u-c)^2}{2\sigma^2}} du = \Phi \left[ \frac{a \ln(1+T) - c}{\sigma} \right], \end{aligned} \quad (129)$$

где  $\Phi(x)$  — функция Лапласа, определенная выше формулой (102)

Отсюда плотность распределения

$$g(T) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{[a \ln(1+T) - c]^2}{2\sigma^2}} \frac{a}{1+T}, & T \geq -1 \\ 0, & T < -1. \end{cases} \quad (130)$$

Полученное распределение называется логарифмически-нормальным. Нас не должно смущать то обстоятельство, что  $g(T)$  положительна на интервале  $(-1, \infty)$ , а не на интервале  $(0, \infty)$ , как было до сих пор. Это вызвано использованием плотности нормального распределения (127) вместо гамма-распределения, поскольку плотность нормального распределения определена на интервале  $(-\infty, +\infty)$ . Отмеченное обстоятельство не является существенным, так как обычно  $c \gg 1$  и поэтому «хвост»  $g(T)$  в отрицательной области неощутим.

Принято записывать плотность логарифмически-нормального распределения в виде

$$g(T) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\lg T - c)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{T}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0, \end{cases} \quad (131)$$

где

$$A = \lg e = 0,4343.$$

В этой формуле по сравнению с (130)  $1+T$  заменено на  $T$ , натуральный логарифм — десятичным и положено  $a=1$ .

Кривые плотности логарифмически-нормального распределения представлены на рис. 40. Эти кривые асимметричны, вершина кривой плотности лежит левее математического ожидания. Асимметрия более ощутима при больших значениях параметра  $\sigma$ .

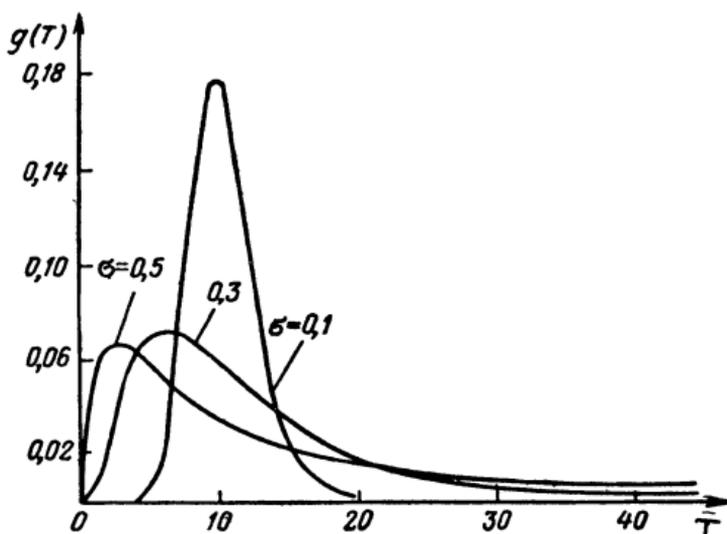


Рис. 40. Кривые плотности логарифмически-нормального распределения при  $c=1$

Логарифмически-нормальное распределение имеет широкое распространение в теории надежности. Оно используется для обработки опытных данных об усталостной долговечности металлов, длительной прочности, времени безотказной работы ряда элементов радиоэлектронной аппаратуры и в других случаях.

В дальнейшем при обработке опытных данных будем пользоваться записью плотности  $g(T)$  по формуле (131).

Остановимся на свойствах логарифмически-нормального распределения. Параметры  $c$  и  $\sigma$  распределения (131) связаны с математическим ожиданием и дисперсией величины  $\tau$  следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} M\{\tau\} &= e^{\frac{c}{A} + \frac{\sigma^2}{2A^2}}, \\ D\{\tau\} &= e^{2\frac{c}{A} + \frac{\sigma^2}{A^2}} \left( e^{\frac{\sigma^2}{A^2}} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

где  $A=0,4343$ .

Мода (максимум кривой плотности) имеет абсциссу  $t_M$ , логарифм которой равен

$$\lg t_M = c - 2,3026\sigma^2. \quad (133)$$

Если случайную величину  $\tau$ , имеющую плотность (131), преобразовать в величину  $u = \lg \tau$ , то эта новая величина будет иметь нормальное распределение с параметрами  $\mathbf{M}\{u\} = c$ ,  $\mathbf{D}\{u\} = \sigma^2$ . Последнее свойство является особенно важным и широко используется при обработке опытных данных.

*Оценка параметров логарифмически-нормального распределения по данным времени безотказной работы*

Если опытные данные состоят из величин  $\tau_1, \dots, \tau_N$  времени безотказной работы  $N$  объектов, то для оценки параметров  $c$  и  $\sigma$  поступаем следующим образом.

1. По значениям  $\tau_i$  находим величины  $u_i = \lg \tau_i$ , их среднее  $\bar{u}$  и дисперсию  $s_u^2$  — по формулам

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\sum_{i=1}^N u_i}{N}, \\ s_u^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

2. Параметры  $c$  и  $\sigma$  получаем из равенств

$$\left. \begin{aligned} c &= \bar{u}, \\ \sigma^2 &= s_u^2, \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

вытекающих из того, что  $u = \lg \tau$  имеет нормальное распределение.

Кроме того, можно воспользоваться описанным выше методом разделяющих разбиений или выравниванием на нормальной бумаге. Оба эти способа должны быть применены к величинам  $u_i$ , причем всегда

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\{u\} &= c, \\ \mathbf{D}\{u\} &= \sigma^2. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

Вероятность безотказной работы в течение времени  $T$  подсчитывается по формуле

$$\mathbf{P}\{\tau > T\} = R(T) = 1 - \Phi\left(\frac{\lg T - c}{\sigma}\right). \quad (137)$$

Таблица 4

Результаты испытаний на усталость (силы марки В-95, продольное направление, консольный изгиб,  $\sigma_{-1} = 20 \text{ кг/мм}^2$ ) [27, стр. 109]

$\sigma_{max} = 21 \text{ кг/мм}^2$			$\sigma_{max} = 30 \text{ кг/мм}^2$		
Число циклов до разрушения $N_i \cdot 10^{-5}$	Накопление частоты $\nu(N_i)$	$\lg N_i = u_i$	Число циклов до разрушения $N_i \cdot 10^{-5}$	Накопление частоты $\nu(N_i)$	$\lg N_i = u_i$
6,64	0,023	5,822	0,53	0,023	4,724
7,13	0,068	5,853	0,65	0,068	4,813
7,88	0,114	5,896	0,76	0,114	4,881
7,97	0,159	5,902	0,80	0,159	4,905
7,99	0,204	5,903	0,87	0,204	4,940
10,65	0,250	6,027	0,90	0,250	4,954
12,08	0,295	6,082	0,90	0,295	4,954
12,53	0,341	6,098	1,02	0,341	5,009
13,08	0,386	6,117	1,07	0,386	5,029
15,90	0,432	6,201	1,07	0,432	5,029
17,08	0,477	6,232	1,09	0,477	5,037
17,62	0,523	6,246	1,16	0,523	5,064
24,90	0,568	6,396	1,22	0,568	5,086
30,20	0,614	6,480	1,29	0,614	5,111
38,34	0,659	6,584	1,40	0,659	5,146
50,09	0,704	6,700	1,57	0,704	5,196
59,90	0,750	6,777	1,59	0,750	5,201
78,32	0,795	6,894	1,88	0,795	5,274
97,13	0,841	6,987	2,07	0,841	5,316
176,20	0,886	7,246	2,23	0,886	5,348
327,01	0,932	7,515	2,38	0,932	5,377
346,84	0,977	7,540	2,79	0,977	5,446

$$\bar{u} = 5,084$$

$$s_u = 0,189$$

**Пример 5.** Образцы испытаны при напряжении  $\sigma_{max} = 30 \text{ кг/мм}^2$ , имеет место распределение долговечности (131), найти параметры  $s$  и  $\sigma$

По табл. 4 находим значения логарифмов долговечности  $\lg N_i$  и накопленные частоты  $\nu(N_i)$ . На рис. 41 показано, что они довольно хорошо выравниваются на нормальной бумаге. Особенности выравнивания здесь в том, что по оси абсцисс откладываются величины  $u_i = \lg N_i$ . По рис. 41 получаем значения  $s = 5,08$ ,  $\sigma = 0,17$ .

Вспользуемся методом разделяющих разбиений. Точки разбиения выбираем  $u^*_1 = 5,0$ ;  $u^*_2 = 5,3$ . Так как левее  $u^*_1$  и  $u^*_2$  лежит соответственно 7 и 18 значений логарифмов долговечности, то

$$\nu(u^*_1) = \frac{7}{22} = 0,32, \quad \nu(u^*_2) = \frac{18}{22} = 0,82.$$

По табл. П2 находим

$$\Psi_1 = \Psi(0,32) = -0,468; \quad \Psi_2 = \Psi(0,82) = 0,915.$$

По формулам (104) находим  $s=5,10$ ,  $\sigma=0,217$

Сравним полученные результаты с прямым подсчетом  $s$  и  $\sigma$  по формулам (136). Значения  $\bar{y}$  и  $s_u$  даны в табл 4. Имеем  $s=5,084$ ,  $\sigma=0,189$ .

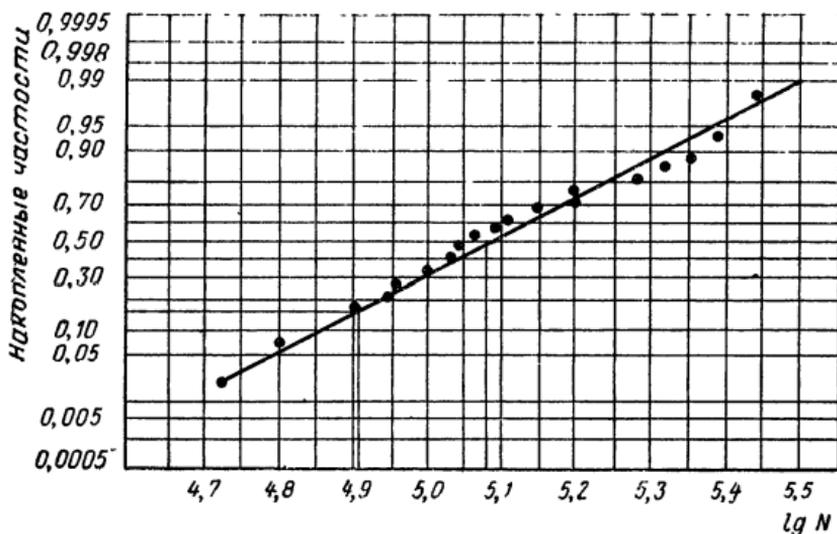


Рис 41 Выравнивание данных о долговечности образцов при высоких нагрузках на вероятностной бумаге нормального распределения

Надо иметь в виду, что вариации оценок  $s$  и  $\sigma$  неизбежны. Наиболее точные оценки получаются по формулам (136). Следует признать, что оценка параметров с помощью вероятностной бумаги дает приемлемую точность.



В ряде случаев процесс накопления повреждений (износ) начинается лишь спустя некоторое время  $t_0$  после начала эксплуатации. Величина  $t_0$  называется порогом чувствительности. О нем уже говорилось в связи с гамма-распределением, имеющим параметр смещения. Наличие порога чувствительности характерно, например, для процесса накопления усталостных повреждений при низких напряжениях, что вызывается наличием некото-

рого инкубационного периода, во время которого металл не получает усталостных повреждений.

Сказанное означает, что математическое ожидание скорости износа задается равенством

$$M\{\xi(t)\} = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{a}{1+t-t_0}, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (138)$$

Теперь  $u(T)$  можно записать в виде

$$u(T) = \begin{cases} 0, & T < t_0 \\ a \ln(1+T-t_0), & T \geq t_0. \end{cases} \quad (139)$$

Подставив это выражение в верхний предел интеграла (129), приходим к формуле для плотности

$$g(T) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{[a \ln(1+T-t_0)-c]^2}{2\sigma^2}} \frac{a}{1+T-t_0}, & T \geq t_0 - 1, \\ 0, & T < t_0 - 1. \end{cases} \quad (140)$$

Выражение (140) можно упростить, если перейти от  $T$  к переменной  $T' = T + 1$  и от натуральных логарифмов — к десятичным. Для простоты сохраним ту же букву для аргумента функции. Тогда получим

$$g(T) = \begin{cases} \frac{\lg e}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{[\lg(T-t_0)-c]^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{T-t_0}, & T \geq t_0, \\ 0, & T < t_0. \end{cases} \quad (141)$$

Это общепринятая запись логарифмически-нормального распределения с параметром сдвига  $t_0$  — порогом чувствительности.

### *Выравнивание опытных данных и оценка параметров по данным о времени безотказной работы*

Пусть имеются данные о времени безотказной работы  $N$  объектов  $\tau_1, \dots, \tau_N$ . Оценка параметров  $c, \sigma, t_0$  может быть произведена следующим образом\*.

1. Выбирают число  $q, 0 < q < 1/2$ ; рекомендуется брать  $q = 0,1 \div 0,2$ .

\* Ниже излагается наиболее простой для вычислений метод квантилей, описанный в [36, стр. 58].

2. По таблице П2 находят значение  $\Psi(q)$  обратной функции Лапласа.

3. Располагают все значения  $\tau_i$  в порядке возрастания:

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_N,$$

и подсчитывают накопленные частоты  $v(\tau_i)$  (см. табл. 1, пояснения на стр. 29).

4. Находят эмпирические квантили  $\tau_q, \tau_{1/2}, \tau_{1-q}$ , соответствующие уровням  $q, 1/2, 1-q$ . Это делают следующим образом.

Находят для числа  $q$  такие накопленные частоты  $v(\tau_i)$  и  $v(\tau_{i+1})$ , чтобы  $q$  лежало между ними:

$$v(\tau_i) \leq q \leq v(\tau_{i+1}).$$

В качестве  $\tau_q$  принимают число

$$\tau_q = \tau_i + \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{v(\tau_{i+1}) - v(\tau_i)} (q - v(\tau_i)). \quad (142)$$

Аналогично поступают с числами  $1/2$  и  $1-q$ .\*

5. Подсчитываются  $\sigma, c, t_0$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\lg x}{\Psi(q)}, \\ c &= \lg \frac{\tau_{1/2} - \tau_q}{1 - x}, \\ t_0 &= \tau_{1/2} - \frac{\tau_q - \tau_{1/2}}{x - 1}, \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

где

$$x = \frac{\tau_q - \tau_{1/2}}{\tau_{1/2} - \tau_{1-q}}. \quad (144)$$

Математическое ожидание и дисперсия времени  $\tau$  выражается через параметры  $c, \sigma, t_0$ :

$$\left. \begin{aligned} M\{\tau\} &= t_0 + e^{\frac{c}{A} + \frac{\sigma^2}{2A^2}}, \\ D\{\tau\} &= e^{2\frac{c}{A} + \frac{\sigma^2}{A^2}} \left( e^{\frac{\sigma^2}{A^2}} - 1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

где  $A = \lg e = 0,4343$ .

Метод квантилей практически можно всегда использовать, если  $N \geq 50$ . Для малых  $N$ , в особенности при

\* Квантиль  $\tau_{1/2}$  называется медианой.

малых  $\sigma$ , вследствие случайных флюктуаций значений  $\tau_i$  возможно получение отрицательной оценки для  $\sigma$  по формулам (143). В этом случае метод не приводит к цели.

**Пример 6.** Образцы испытаны при напряжении  $\sigma_{max} = 21 \text{ кг/мм}^2$ , (табл. 4), долговечность образцов имеет распределение с порогом чувствительности Требуется оценить значения  $c$ ,  $\sigma$ ,  $t_0$

Роль  $\tau_i$  играют в данном случае величины чисел циклов  $N_i$ . Полагаем  $q=0,15$ . Находим  $\Psi(0,15) = -1,036$  по табл П2 Используя описанное правило, получаем  $\tau_q = 7,95 \cdot 10^5$ ,  $\tau_{1/2} = 17,35 \cdot 10^5$ ,  $\tau_{1-q} = 112,9 \cdot 10^5$  Вычисляем  $x=0,098$  По формулам (143) находим  $\sigma=0,97$ ,  $c=6,02$ ,  $t_0=6,9 \cdot 10^5$

Поскольку число опытных данных мало, оценки параметров распределения являются довольно грубыми Это привело к тому, что значение порога  $t_0=6,9 \cdot 10^5$  оказалось больше, чем минимальная из величин  $N_i$

Для приближенной оценки  $c$ ,  $\sigma$  и  $t_0$  можно также использовать нормальную бумагу На рис 42 представлены результаты выравнивания в логарифмическом масштабе по оси абсцисс Исходные данные  $\lg N_i$  образуют характерный загиб в области малых величин  $N_i$  (кривая 2)

Грубая оценка величины порога чувствительности осуществляется следующим образом Выбирается некоторое число  $N_0$ , меньшее  $N_{min}$ , и по оси абсцисс откладываются величины  $\lg(N_i - N_0)$  Число  $N_0$  стараются выбрать так, чтобы накопленные частоты  $v(N_i)$  легли на прямую Линия 1 рис 42 получена при введении порога  $t_0 = N_0 = 6 \cdot 10^5$  (верхняя шкала) Видим, что точки сравнительно хорошо ложатся на прямую. Обычным способом можно оценить параметры  $c$  и  $\sigma$  Так из рис. 42 находим, что  $c=6,18$ ;  $\sigma=0,76$  Принимая во внимание малое количество данных, следует признать расхождение с результатами расчета не слишком большим

\* \*

\*

Было бы неправильно всякий раз, когда гистограмма распределения имеет асимметричный вид, делать попытку перехода от нормального к логарифмически-нормальному распределению. Логарифмически-нормальное распределение описывает поведение времени безотказной работы объектов, имеющих свойство «упрочняться» по ходу времени эксплуатации. «Упрочнение» сказывается в постепенном уменьшении скорости износа. Поэтому прежде чем использовать логарифмически-нормальное распределение для описания опытных данных, необходимо, исходя из физического существа процесса изна-

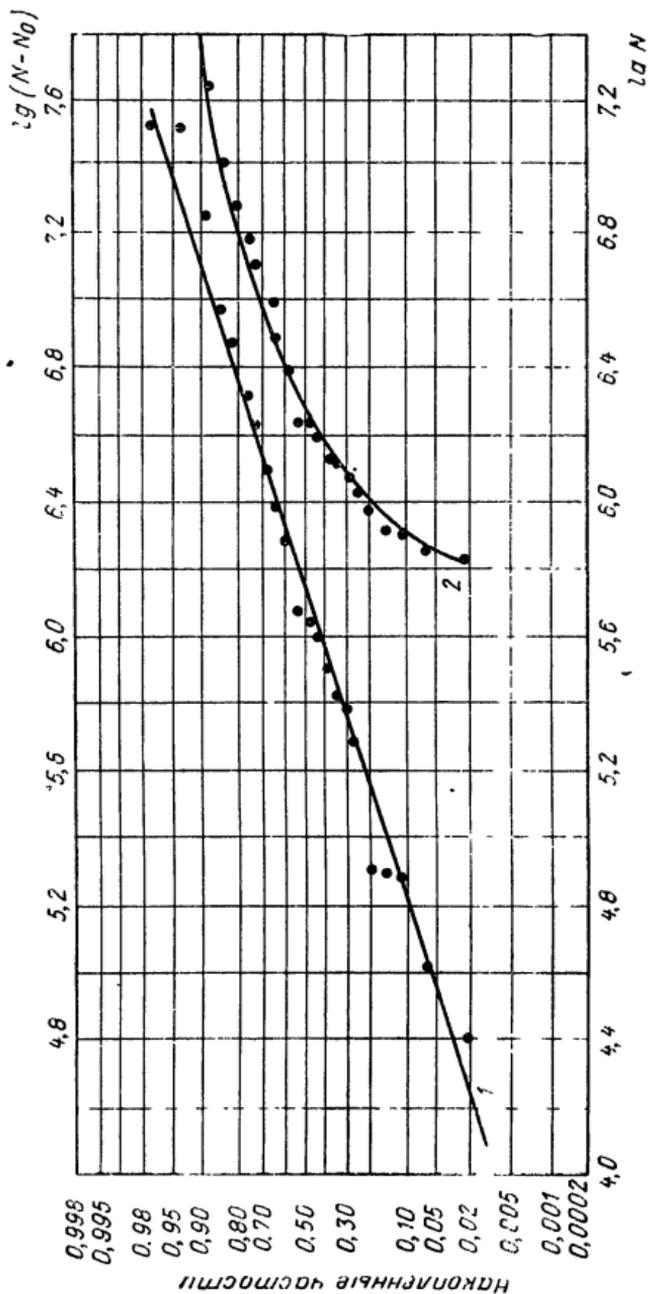


Рис 42. Выравнивание данных о долговечности образцов на низких нагрузках на вероятностной бу-  
маге нормального распределения  
Нижняя шкала относится к кривой 2; верхняя — к кривой 1,  $N_0=6 \cdot 10^6$

шивания и, если это возможно, путем анализа поведения реализаций износа, установить, обладают ли исследуемые объекты свойством «упрочнения».

### Линейные реализации износа

До сих пор речь шла о ситуации, когда начальное качество объектов одинаково, а вариации времени безотказной работы целиком связаны со случайностью протекания процесса изнашивания. В начале этого параграфа отмечалось, что часто встречаются объекты, для которых подобная ситуация не имеет места. Еще раз сошлемся на пример изнашивания (старения) транзисторов, начальное качество которых существенно различается, а условия эксплуатации примерно идентичны и постоянны. В ряде случаев при заводских стендовых испытаниях, проводимых с целью оценки начального качества изделий, искусственно создаются предельно постоянные условия для всех испытываемых объектов.

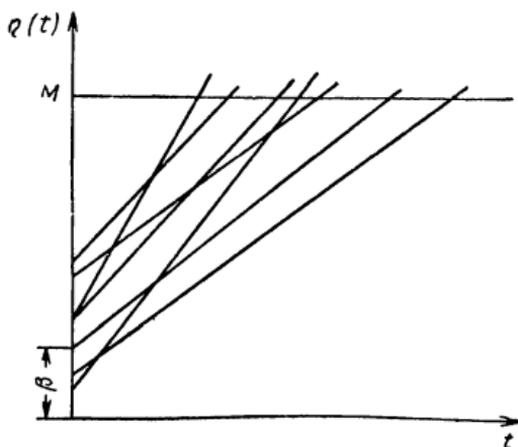


Рис. 43. Линейные реализации износа  
 $\eta(t) = \alpha t + \beta$ .

В дальнейшем ограничимся изучением линейных процессов износа, реализации которого имеют вид прямых. Общий случай линейного износа может быть аналитически представлен в виде

$$\eta(t) = \alpha t + \beta, \quad (146)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — независимые случайные величины.

Реализации видны на рис. 43. Величина  $\beta$  есть начальное значение износа  $\beta = \eta(0)$ , величина  $\alpha$  — скорость износа. Случайные вариации  $\alpha$  отражают различие исходных свойств объекта, обеспечивающих различные скорости износа. Распределение  $\alpha$  в зависимости от вида объекта, условий износа и т. п. может быть различным. Наиболее естественное предположение состоит в том, что  $\alpha$  является суммой большого числа слагаемых, каждое из которых есть компонента скорости, возникающая под влиянием одного физического процесса. Например, применительно к трущейся паре вал — подшипник можно предположить, что скорость износа есть сумма скоростей абразивного, усталостного, окислительного и др. износосов. Если все слагаемые имеют примерно одинаковый порядок, то можно принять, что  $\alpha$  будет хорошо следовать нормальному распределению.

Уже обращалось внимание на то, что нормальное распределение задает вариации случайной величины в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Значит, формально допускается, что  $\alpha$  может быть меньше нуля. При обработке опытных данных можно игнорировать это обстоятельство, так как вероятность отрицательных значений  $\alpha$ , равная  $P\{\alpha \leq 0\}$ , обычно получается ничтожно малой.

Если полагать, что  $\beta$  также распределено нормально, окажется, что  $\eta(t)$  имеет нормальное распределение с параметрами

$$M\{\eta(t)\} = M\{\alpha\}t + M\{\beta\}, \quad (147)$$

$$D\{\eta(t)\} = t^2 D\{\alpha\} + D\{\beta\}. \quad (148)$$

Если  $M$  — предельно допустимый уровень износа, то из очевидного равенства

$$P\{\tau > T\} = P\{\alpha T + \beta \leq M\} \quad (149)$$

и нормальности  $\eta(t)$  следует, что

$$P\{\tau \leq T\} = 1 - P\{\tau > T\} = \Phi \left[ \frac{T - \frac{M - M\{\beta\}}{M\{\alpha\}}}{\sqrt{\frac{D\{\alpha\}T^2 + D\{\beta\}}{M^2\{\alpha\}}}} \right]. \quad (150)$$

Полученное распределение времени  $\tau$  носит название дисперсионного распределения Бернштейна [2]. От нор-

мального оно отличается тем, что  $D\{\tau\}$  зависит от  $T$ . Распределение содержит три параметра:

$$a = \frac{D\{\alpha\}}{M^2\{\alpha\}}, \quad b = \frac{D\{\beta\}}{M^2\{\alpha\}}, \quad c = \frac{M - M\{\beta\}}{M\{\alpha\}}. \quad (151)$$

Распределение (150) принимает вид

$$F(T) = \Phi \left[ \frac{T - c}{\sqrt{aT^2 + b}} \right]. \quad (152)$$

Опишем процедуру оценки параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , основанную на применении метода разделяющих разбиений.

*Оценка параметров распределения (150) по данным о времени безотказной работы*

1. Выбирают числа  $T_1, T_2, T_3$  при условии  $T_1 < T_2 < T_3$  и подсчитывается количество значений  $\tau_i$ , заключенных в диапазонах  $(0, T_j)$ ,  $j=1, 2, 3$ . Пусть эти количества равны соответственно  $m(T_j)$ ,  $j=1, 2, 3$ . Подсчитываются отношения  $v(T_j) = \frac{m(T_j)}{N}$ , где  $N$  — общее число данных.

2. По табл. П2 находят значения  $\Psi_j = \Psi(v(T_j))$ .

3. Методом последовательных приближений или графически относительно  $a/b$  решают уравнение

$$\frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} = \frac{\Psi_1 \sqrt{\frac{a}{b} T_1^2 + 1} - \Psi_2 \sqrt{\frac{a}{b} T_2^2 + 1}}{\Psi_2 \sqrt{\frac{a}{b} T_2^2 + 1} - \Psi_3 \sqrt{\frac{a}{b} T_3^2 + 1}}. \quad (153)$$

4. По известному отношению  $a/b = d$  находят:

$$c = \frac{\Psi_2 T_1 \sqrt{dT_2^2 + 1} - \Psi_1 T_2 \sqrt{dT_1^2 + 1}}{\Psi_2 \sqrt{dT_2^2 + 1} - \Psi_1 \sqrt{dT_1^2 + 1}}. \quad (154)$$

5. Параметры  $b$  и  $a$  определяют по формулам

$$b = \left[ \frac{T_1 - c}{\Psi_1 \sqrt{dT_1^2 + 1}} \right]^2, \quad a = ba. \quad (155)$$

Процедура оценки параметров существенно упрощается, если  $\beta = \beta_0 = \text{const}$ . В этом случае

$$D\{\beta\} = 0, \\ F(T) = \Phi\left(\frac{T-c}{\sqrt{a}T}\right). \quad (156)$$

1. Данные  $\tau_1, \dots, \tau_N$  разбивают выбранными числами  $T_1, T_2$  на три группы и аналогично предыдущему случаю подсчитывают значения  $\nu(T_1)$  и  $\nu(T_2)$ . По табл. П2 находят величины  $\Psi_i = \Psi(\nu(T_i))$ ,  $i=1, 2$ .

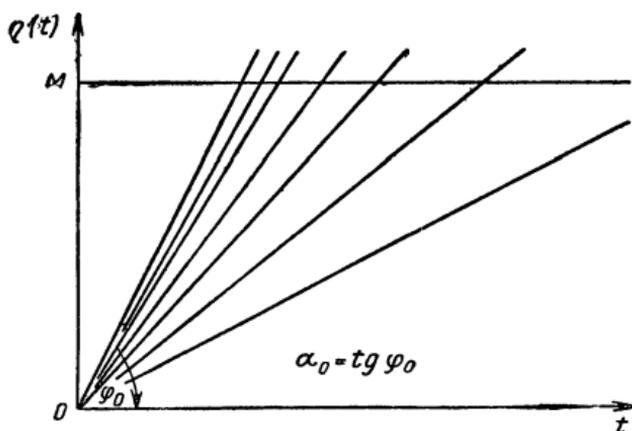


Рис. 44. Линейные реализации износа  $\eta(t) = \alpha t$ .

2. Для определения параметров  $c$  и  $a$  служат формулы

$$c = \frac{T_1 T_2 (\Psi_2 - \Psi_1)}{T_2 \Psi_2 - T_1 \Psi_1}, \quad (157)$$

$$\sqrt{a} = \frac{T_2 - T_1}{T_2 \Psi_2 - T_1 \Psi_1}. \quad (158)$$

Случаю  $\beta = \text{const}$  соответствуют реализации верного случайного процесса, которые имеют вид, изображенный на рис 44 (при  $\beta=0$ ).

Наиболее простым является процесс износа типа

$$\tau_i(t) = \lambda t + \beta, \quad (159)$$

где  $\lambda = \text{const}$ ;

$\beta$  — нормально распределена с параметрами  $M\{\beta\}$ ,  $D\{\beta\}$ .

Реализации такого процесса изображены на рис. 45. В этом случае, очевидно, параметры распределения Бернштейна равны

$$c = \frac{M - M\{\beta\}}{A}, a = 0, b = \frac{D\{\beta\}}{A^2}. \quad (160)$$

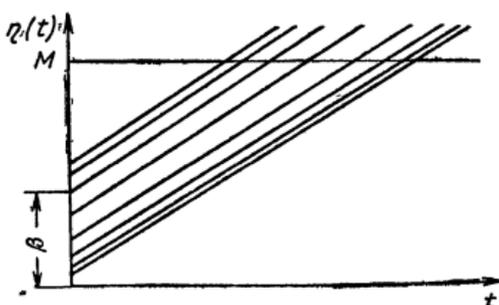


Рис. 45. Линейные реализации износа  $\eta(t) = \beta + At$ .

Поэтому процедура, описанная выше применительно к оценке трех параметров, упрощается. Используя разбиение данных  $\tau_1, \dots, \tau_N$  величинами  $T_1$  и  $T_2$ , находим

$$c = \frac{\Psi_2 T_1 - \Psi_1 T_2}{\Psi_2 - \Psi_1}, \quad (161)$$

$$b = \frac{T_1 - c}{\Psi_1}. \quad (162)$$

\* \*  
\*

### Оценка параметров процесса износа по реализациям

Пусть в нашем распоряжении имеется некоторое число реализаций износа (желательно иметь хотя бы 20—30 шт.). Примерный вид одной такой реализации дан на рис. 46. Требуется оценить параметры распределений величин  $\alpha$  и  $\beta$  и найти вероятность безотказной работы в течение времени  $T$  при заданном предельном уровне износа  $M$ . Процедура обработки данных сводится к следующему.

1. Каждую из  $N$  реализаций заменяют прямой (рис. 46). Прямую проводят либо методом наименьших квадратов, либо при числе точек более десяти на глаз

так, чтобы под ней и над ней было примерно поровну точек.

2. Для каждой реализации находят значение  $\alpha_i$  тангенса ее угла наклона и ординату пересечения с осью ординат  $\beta_i$ .

3. Вычисляют

$$M\{\alpha\} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N}, \quad \Gamma\{\alpha\} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\alpha_i - M\{\alpha\})^2, \quad (163)$$

$$M\{\beta\} = \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i}{N}, \quad \Gamma\{\beta\} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\beta_i - M\{\beta\})^2. \quad (164)$$

4. Находят параметры  $a, b, c$  по формулам (151).

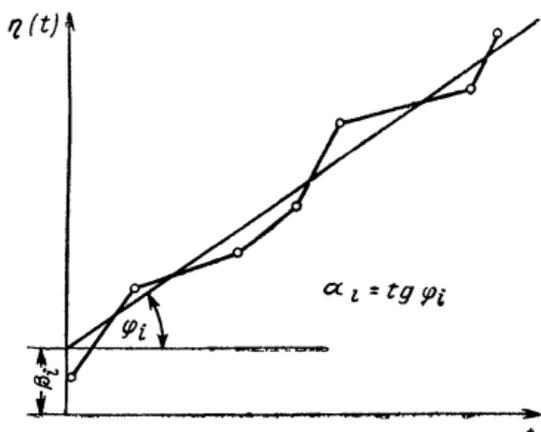


Рис 46 К оценке параметров процесса износа по реализации

5. Вероятность безотказной работы в течение времени  $T$  определяют по формуле

$$P\{\tau > T\} = 1 - \Phi \left[ \frac{T - c}{\sqrt{aT^2 + b}} \right]. \quad (165)$$

\* \*  
\*

Нужно отметить, что выравнивание опытных данных о времени безотказной работы  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  в случае

малой совокупности может быть проведено с удовлетворительным согласием по распределениям разных типов. В то же время оценки вероятности безотказной работы в течение времени  $T$ , вычисленные по различным теоретическим распределениям, могут дать весьма большие расхождения. Это указывает на необходимость анализа реализаций и физической картины процесса износа, в особенности в случае, когда мы располагаем данными о небольшом числе объектов.

В заключение отметим, что оценка надежности по реализациям износа является более предпочтительной, чем по времени безотказной работы. Это объясняется тем, что, во-первых, имея реализации износа, мы можем проверить соответствие формальной схемы (146) истинному положению. Во-вторых, по реализациям износа можно найти все параметры процесса износа (4 параметра), в то время как знание параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  распределения (152) не дает этой возможности. Наконец, оценка параметров по реализациям является при прочих равных условиях статистически более точной.

### Анализ реализаций износа

Оценивая на глаз поведение реализаций износа, можно впасть в ошибку. В начале параграфа отмечалось, что на поведении реализаций износа сказывается как начальное качество, так и случайные вариации скорости износа. Весьма важно оценить превалирующий фактор. Эта оценка должна осуществляться объективными методами.

Рассмотрим реализацию износа одного объекта (рис. 47). Извилистый ход реализации дает основание предположить, что приращения износа обладают свойством независимости. Для проверки этого можно указать способ, обладающий гораздо большей достоверностью, чем визуальный анализ.

Прежде всего заметим, что полная независимость приращений износа наблюдается сравнительно редко. Обычно приращения износа зависимы, но когда расстояние  $\theta$  между приращениями велико, зависимость ощущается весьма слабо, причем с ростом  $\theta$  она уменьшается. Приращения, обладающие указанным свойством, называются асимптотически независимыми. Термин асим-



нием масштаба оси времени  $t$  обеспечить переход к постоянной средней скорости (стр. 81).

Одной из важнейших характеристик всякого случайного процесса, в том числе процесса износа, является корреляционная функция. Не останавливаясь на рассмотрении ее свойств и теоретического значения, укажем как вычисляется корреляционная функция приращений износа и какие выводы можно сделать, изучив ее поведение [26].

Показанная на рис. 47 реализация износа построена по результатам измерения величины  $\eta(t)$  через равные промежутки времени  $\delta$ . За каждый промежуток времени  $\delta_i = \delta$  величина износа получает некоторое случайное приращение  $\delta\eta_i$ . Если взять два соседних приращения  $\delta\eta_i, \delta\eta_{i+1}$ , то можно ожидать, что они окажутся зависимыми. Если взять два приращения  $\delta\eta_i$  и  $\delta\eta_{i+k}$ , то при большом  $k$  связь между ними может оказаться слабой. Желательно располагать мерой для количественной оценки такой связи. В математической статистике в качестве меры связанности двух величин обычно используют коэффициент корреляции. Пусть имеются две случайные величины  $x, y$ , наблюдаемые значения которых задаются в виде табл. 5.

Таблица 5

Сопоставляемые значения случайных величин  $x$  и  $y$

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$			$\dots$	$x_{n-1}$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$			$\dots$	$y_{n-1}$	$y_n$

Под каждым значением случайной величины  $x$  подписано сопоставляемое с ним значение случайной величины  $y$ .

Коэффициент корреляции между случайными величинами  $x$  и  $y$  вычисляется по формуле

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{s_x \cdot s_y}, \quad (166)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad (167)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}; \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}. \quad (168)$$

Величины  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  суть эмпирические средние случайных величин  $x$  и  $y$ ,  $s_x$  и  $s_y$  — их среднеквадратические отклонения.

**Пример 7.** Величины  $\delta\eta_i$ , соответствующие реализации рис. 47, приведены в табл 6. Требуется найти коэффициент корреляции величин  $\delta\eta_i$  и  $\delta\eta_{i+1}$ , которые сопоставлены в табл 6 по образцу табл 5. Заметим, что в табл 6 одно и то же приращение встре-

Таблица 6

**Приращения износа реализации, приведенной на рис. 47**

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\delta\eta_j$	3	7	8	20	21	15	11	2	12	9	4	6	5	5	7	3	10
$\delta\eta_{j+1}$	7	8	20	21	15	11	2	12	9	4	6	5	5	7	3	10	6

*Продолжение табл. 6*

$j$	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
$\delta\eta_j$	6	6	16	0	4	6	4	8	7	7	6	7	2	9	11	11	8
$\delta\eta_{j+1}$	6	16	0	4	6	4	8	7	7	6	7	2	9	11	11	8	

чается дважды — в верхней и нижней строке. Исключение составляют лишь первое и последнее приращения. По формулам (167), (168) получаем:

$$\bar{x} = 8,12, \quad \bar{y} = 8,27, \quad s_x = 4,71, \quad s_y = 4,62, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 76,45,$$

$$r_{xy} = 0,43.$$

Коэффициент корреляции по модулю всегда не больше единицы, причем  $|r_{xy}|=1$  в случае, если между случайными величинами  $x$  и  $y$  имеется линейная связь; если же  $x$  и  $y$  независимы, то  $r_{xy}=0$ . Поэтому величина коэффициента  $r_{xy}$  в какой-то степени служит мерой функциональной связи случайных величин. Полученное в примере сравнительно большое значение  $r_{xy}$  говорит о том, что соседние приращения износа связаны. Аналогично табл. 6 можно составить таблицы взаимной связи приращений,

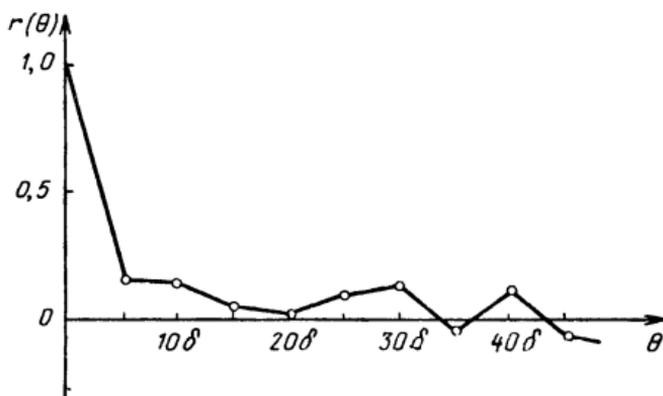


Рис. 48 График нормированной корреляционной функции приращений износа для реализации, приведенной на рис 47.

взятых на расстоянии  $\theta = \delta, \theta = 2\delta, \theta = 3\delta, \dots$ , друг от друга. Будем обозначать через  $r(\theta)$  значение коэффициента корреляции приращений, находящихся на расстоянии  $\theta$  друг от друга (см. рис. 47).

На рис. 48 приведен график функции  $r(\theta)$ , построенный по реализации рис. 47 и ее продолжению на интервале от 180 до 500 мин. Следует отметить, что для относительно достоверной оценки значений  $r(\theta)$  нужно располагать по крайней мере  $70 \div 100$  значениями  $\delta\eta_i$ . Функция  $r(\theta)$  называется нормированной корреляционной функцией.

Отметим важные особенности приведенного графика: при расстоянии  $\theta=0$  корреляционная функция сравнительно близка к единице. В дальнейшем она резко убывает и колеблется около нуля в сравнительно небольшом диапазоне. Именно так должна вести себя корреляционная функция приращений, когда процесс износа обладает свойством сильного перемешивания, т. е.

асимптотической независимости приращений. На рис. 49 приводится идеализированная схема поведения нормированной корреляционной функции приращений при наличии свойства сильного перемешивания. Характерной особенностью является стремление к нулю корреляционной функции с ростом расстояния  $\theta$  между приращениями.

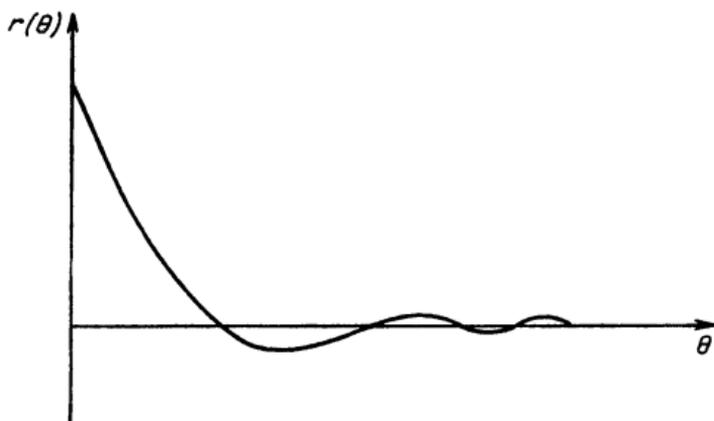


Рис 49 Идеализированная схема поведения нормированной корреляционной функции при наличии свойства сильного перемешивания

Важен вопрос об общей продолжительности наблюдения за ходом изменения износа. Обычно время безотказной работы, определяемое естественным износом, весьма велико. Наблюдение за ходом изменения износа в течение всего этого времени оказывается технически сложным и дорогостоящим. Столь длительное наблюдение за износом не является необходимым и в плане изучения корреляционной функции. Если желательно оценить вероятность безотказной работы в течение времени  $T$ , то достаточно изучить поведение износа на отрезке времени, равном  $(0,1 \div 0,2) T$ , при условии, однако, чтобы основное время наблюдения занимала зона нормального износа. При сравнительно кратковременном наблюдении за ходом износа создается опасность, что в период, последующий за наблюдаемым, характер поведения износа может измениться, и поэтому экстраполяция на будущее может оказаться ошибочной. Здесь важен предварительный опыт по изучению аналогичных машин и приборов. Только основываясь на уже имеющемся опыте мате-

риале, можно без больших промахов указать, является ли экстраполяция данных по изменению износа оправданной. Например, имеется возможность экстраполяции данных по изменению крутизны характеристики электронной лампы. Уверенность в возможности такой экстраполяции основывается на уже изученном поведении крутизны большого числа электронных ламп разных типов.

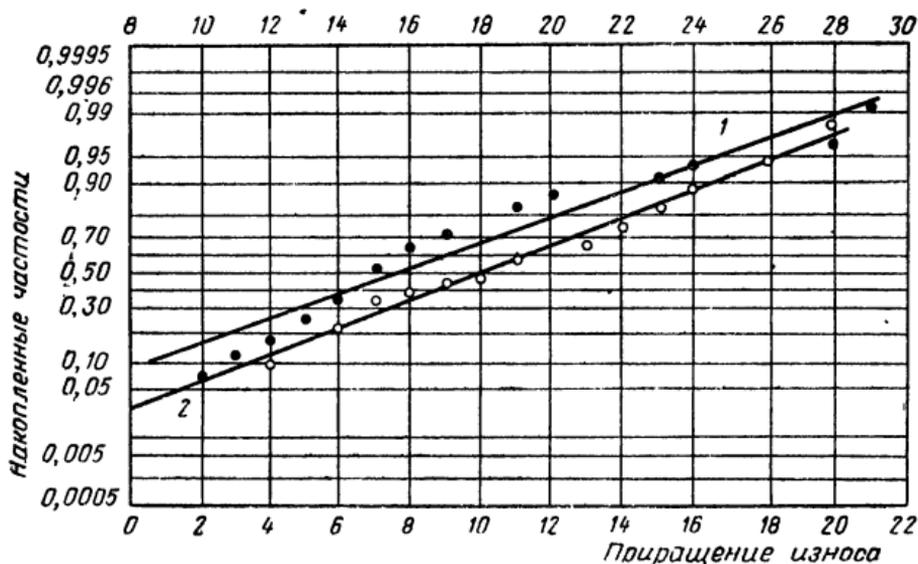


Рис 50. Выравнивание приращений износа  
Прямой 2 соответствует верхняя шкала.

Помимо корреляционной функции важно изучить распределение величин  $\delta\eta_i$  — приращений износа. Если процесс износа обладает свойством сильного перемешивания, то распределение величин  $\delta\eta_i$  при достаточно большом промежутке времени  $\delta$  должно быть приближенно нормальным\*.

На рис. 50 представлены результаты выравнивания величин приращений износа за интервал  $\delta=5$  мин (прямая 1) и за  $\delta=15$  мин (прямая 2). Данные брались по полной реализации, наблюдаемой на интервале длиной

\* Свойства процессов с сильным перемешиванием интенсивно изучаются в последние годы. Основные свойства этих процессов освещались в работах Колмогорова А. Н., Ибрагимова И. А. и Розанова Ю. А.

в 500 мин. Из рисунка видно, что распределение приращений приближается с ростом интервала  $\delta$  к нормальному.

Анализ единичной реализации износа дает возможность оценить, согласуется ли гипотеза о сильном перемешивании процесса износа с опытными данными. Но из этого анализа нельзя получить ответ на вопрос, что преобладает в поведении реализаций — начальное качество или случайные флуктуации состояний объектов. Для ответа на этот вопрос необходимо располагать несколькими реализациями.

Прежде чем излагать последовательность анализа реализаций, укажем на особенности поведения дисперсии  $D\{\eta(t)\}$  при линейных реализациях износа и при наличии свойства сильного перемешивания. В первом случае процесс износа задается формулой

$$\eta(t) = at + \beta. \quad (169)$$

Вычисляя дисперсию, получаем

$$D\{\eta(t)\} = D\{a\} t^2 + D\{\beta\}. \quad (170)$$

В теории процессов с сильным перемешиванием доказывается, что  $D\{\eta(t)\}$  растет линейно, т. е.

$$D\{\eta(t)\} = At + B, \quad (171)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные.

Таким образом, если поведение реализаций износа целиком задается начальным качеством, то дисперсия  $D\{\eta(t)\}$  будет расти, как  $t^2$ , а при наличии свойства сильного перемешивания и однородности начального качества, как  $t$ .

В свете сказанного становится очевидным, что, проводя анализ реализаций износа, следует изучить поведение дисперсии  $D\{\eta(t)\}$ .

Для уверенного суждения о характере износа необходимо располагать по крайней мере 20—25 реализациями и на каждой реализации 30—50 точками измерения величины  $\eta(t)$ .

Рекомендуется следующий порядок анализа реализаций износа (предполагается, что наблюдения за износом производились для всех реализаций в одни и те же моменты времени  $t_j, j = 1, 2, \dots, m$ ).

1. Строится средняя линия для всего семейства реализаций. Для этого в каждый момент времени  $t_j$  подсчитывается средняя величина износа  $\bar{\eta}(t_j)$  по формуле

$$\bar{\eta}(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta^{(i)}(t_j), \quad (172)$$

где  $N$  — общее число имеющихся реализаций;  
 $\eta^{(i)}(t_j)$  — износ по  $i$ -й реализации в момент  $t_j$ .

Если средняя скорость постоянна, зависимость  $\bar{\eta}(t_j)$  от  $t_j$  должна быть линейной.

2. Для каждого момента  $t_j$  вычисляется дисперсия  $s_{\eta}^2(t_j)$  по формуле

$$s_{\eta}^2(t_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\eta^{(i)}(t_j) - \bar{\eta}(t_j))^2. \quad (173)$$

Величины дисперсий наносятся на график. Если они ложатся вблизи прямой линии, то это может служить признаком однородности качества объектов. Для того чтобы оценка поведения дисперсии носила объективный характер, полезно провести выравнивание величин  $s_{\eta}^2(t_j)$  по квадратичной зависимости вида

$$s_{\eta}^2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \quad (174)$$

В зависимости (174) коэффициент  $a_2$  показывает влияние на дисперсию разницы в начальном состоянии объектов, а коэффициент  $a_1$  — влияние случайных флуктуаций состояний объектов в процессе их эксплуатации. В пределах заданного времени  $t$ , для которого оценивается вероятность безотказной работы, влияние каждого из двух указанных факторов может быть установлено путем сравнения величин  $a_1 t$  и  $a_2 t^2$ . Если величина  $a_2 t^2$  мала по сравнению с  $a_1 t$ , то последним слагаемым формулы (174) можно пренебречь и считать, что дисперсия растет линейно, влияние начального качества сказывается слабо. Если величина  $a_1 t$  мала по сравнению с  $a_2 t^2$ , то можно пренебречь случайностью флуктуаций состояний объекта, приняв реализации за линейчатые.

Объединенная таблица приращений износа для группы реализаций

	1-я реализация ( $i=1$ )			2-я реализация ( $i=2$ )			... ..			N-я реализация ( $i=N$ )				
$\delta\eta_j$	$\delta\eta_1^{(1)}$	$\delta\eta_2^{(1)}$	$\delta\eta_3^{(1)}$	$\delta\eta_m^{(1)}$	$\delta\eta_1^{(2)}$	$\delta\eta_2^{(2)}$	$\delta\eta_3^{(2)}$	$\delta\eta_m^{(2)}$	...	$\delta\eta_1^{(N)}$	$\delta\eta_2^{(N)}$	$\delta\eta_3^{(N)}$	...	$\delta\eta_m^{(N)}$
$\delta\eta_{j+1}$	$\delta\eta_1^{(1)}$	$\delta\eta_2^{(1)}$	...	$\delta\eta_m^{(1)}$	$\delta\eta_2^{(2)}$	$\delta\eta_3^{(2)}$	...	$\delta\eta_m^{(2)}$	...	$\delta\eta_2^{(N)}$	$\delta\eta_3^{(N)}$	...	$\delta\eta_m^{(N)}$	
$\delta\eta_{j+2}$	$\delta\eta_3^{(1)}$	...	$\delta\eta_m^{(1)}$	$\delta\eta_3^{(2)}$	$\delta\eta_m^{(2)}$	...	$\delta\eta_m^{(2)}$	...	...	$\delta\eta_3^{(N)}$	$\delta\eta_m^{(N)}$	...	$\delta\eta_m^{(N)}$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

$\delta\eta_j^{(i)}$  есть приращение износа, вычисленное по  $i$ -ой реализации за  $j$ -й интервал времени наблюдения.

3. Для каждой отдельной реализации износа выписывается строка приращений износа типа первой строки табл. 6. Эти строки «стыкуются» в один общий ряд, как показано в табл. 7 (первая строка  $\delta\eta_j$ ). Вторая, третья и т. д. строки табл. 7 содержат сдвинутые каждый раз на один шаг влево приращения  $\delta\eta_{j+1}$ ,  $\delta\eta_{j+2}$  и т. д., взятые из первой строки. При подсчете  $r(0)$  сопоставляются значения приращений первой и второй строк, при подсчете  $r(\delta)$  — значения приращений первой и третьей строк и т. д. Обращаем внимание на то, что при вычислении корреляционной функции  $r(\theta)$  величины  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_x$ ,  $s_y$ , вычисляемые по формулам (168), (167), должны находиться без деления на реализации, т. е. для всей строки таблицы. При большом объеме данных вычисления оказываются довольно громоздкими и поэтому целесообразно использовать при расчетах современную вычислительную технику.

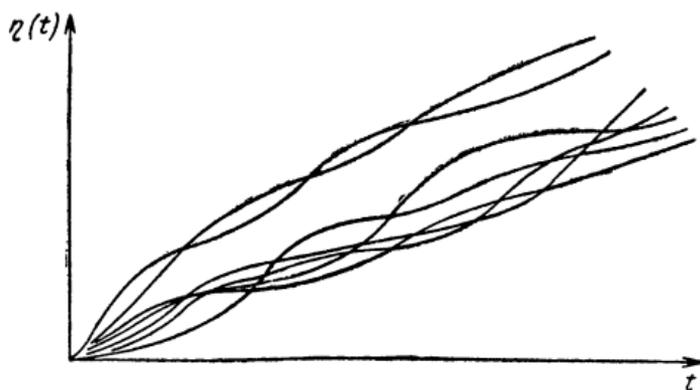


Рис 51 Вид реализаций износа, когда некоторые объекты имеют худшее качество

В случае, если имеет место свойство сильного перемешивания, график  $r(\theta)$  должен напоминать рис. 49.

4. Дополнительным аргументом в пользу того, что имеет место свойство сильного перемешивания, может служить факт нормального распределения приращений. Чтобы проверить, имеет ли он место, совокупность приращений (первая строка табл. 7) выравнивается на нормальной бумаге. В случае, если данные плохо ложатся на прямую, следует проделать выравнивание приращений износа, вычисленных за больший интервал, например за интервал  $2\delta$ ,  $3\delta$  и т. д.

Наиболее сложной является ситуация, когда слагаемые  $a_1t$ ,  $a_2t^2$  формулы (174) имеют одинаковый по величине порядок. Обстоятельства, приводящие к этой ситуации, могут быть совершенно различными. Так иногда наблюдается, что основная масса реализаций свидетельствует об однородности начального качества, но имеются отдельные объекты с существенно худшим ка-

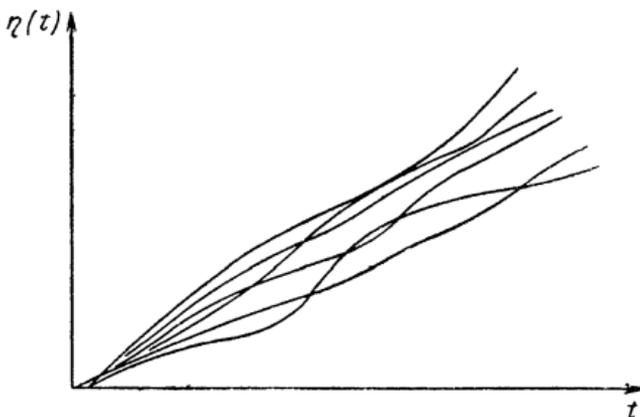


Рис. 52. Вид реализаций износа при сильном влиянии начального качества и наличии перемешивания.

чеством. Реализации износа «плохих» объектов лежат отдельно от остальных реализаций (рис. 51). Может встретиться и картина, изображенная на рис. 52, где трудно отделить одни реализации от других, но ощутимо влияние разницы в начальном качестве объектов. Поэтому всякий раз, когда величины  $a_1t$  и  $a_2t^2$  одинаковы по своему порядку, следует проводить тщательный обзор реализаций, прежде чем приступать к дальнейшим расчетам.

Если среди массы реализаций можно различить отдельные выпадающие, то следует повторить численный анализ реализаций по изложенной выше методике, предварительно изъяв из рассмотрения выпадающие. Убедившись, что оставшиеся реализации отвечают гипотезе однородности начального качества, можно провести раздельный расчет надежности для «хороших» объектов. Наличие отдельных объектов низкого качества должно либо быть оговорено, либо оценено численно. Для численной оценки влияния «плохих» объектов необходимо

вычислить их долю среди всех  $N$  обследованных реализаций. Пусть эта доля равна  $q$ , так что  $qN$  реализаций лежат выше остальных однородных  $(1-q)N$  реализаций (рис. 51). Для «плохих» реализаций можно отдельно оценить вероятность безотказной работы. Эта оценка будет весьма грубой, так как число таких реализаций окажется небольшим. Если «плохие» реализации переплетаются, то следует воспользоваться методом, изложенным на стр. 58, а при раздельном их положении — методом, изложенным на стр. 98. Пусть  $F_1(T)$  есть функция распределения времени  $\tau$  для «хороших» реализаций, а  $F_2(T)$  — функция распределения времени  $\tau$  для «плохих». Тогда для всей совокупности объектов получим функцию распределения

$$F(T) = (1 - q)F_1(T) + qF_2(T),$$

которая задает суперпозицию двух распределений  $F_1(T)$  и  $F_2(T)$ .

Таким образом, мы пришли к суперпозиции двух нормальных распределений времени  $\tau$  безотказной работы. Ранее (стр. 31) нами освещались причины, приводящие к суперпозиции экспоненциальных распределений. Легко видеть, что суперпозиция распределений образуется всякий раз, когда смешиваются несколько групп объектов разного качества.

Если изучаемые реализации таковы, что, во-первых, ни одной из величин  $a_1 t$  и  $a_2 t^2$  нельзя пренебречь и, во-вторых, нельзя выделить группу «плохих» реализаций, то грубая оценка надежности может быть выполнена по формуле

$$P\{\tau > T\} = \Phi \left[ \frac{M - \bar{\xi} T}{\sqrt{a_0 + a_1 T + a_2 T^2}} \right], \quad (175)$$

где постоянные  $a_0, a_1, a_2$  — коэффициенты уравнения (174);

$\bar{\xi}$  — средняя скорость износа;  
 $M$  — предельно допустимый уровень износа.

В заключение еще раз подчеркнем, что анализ реализаций должен рассматриваться как вспомогательное средство проверки гипотезы о физической картине отказа. Проникновение вглубь явления отказа, подробное

обследование причин снижения надежности, тщательный учет влияния производственно-технологических, конструктивных и эксплуатационных факторов должны сопутствовать расчету надежности как необходимая и неотъемлемая часть исследования. Только в этом случае расчет будет служить источником для разработки мер по повышению качества и надежности изделий.

Было бы все же неправильным утверждать, что при всяком расчете одного из многочисленных показателей надежности или вообще при всяком расчете устройств, в той или иной мере связанном с надежностью его элементов, необходимо располагать весьма точными сведениями о виде закона распределения времени  $\tau$  безотказной работы. На самом деле в ряде расчетов сведения о распределении времени  $\tau$  могут быть весьма приближительными, и это практически не скажется на точности расчета. Поэтому следует различать узкие потребности того или иного расчета надежности и общий план исследования надежности. На стр. 160 приводится справочная таблица с указанием необходимой степени знания распределения времени  $\tau$  в зависимости от характера расчета надежности. Ситуации, когда распределение времени  $\tau$  необходимо знать с высокой точностью и достоверностью, сравнительно редки. Но проникновение в суть отказа вскрывает резервы повышения надежности и в силу этого является подчас решающим в общем плане исследования.

#### **§ 4. ПРОЦЕССЫ ПОВРЕЖДЕНИЯ С РЕЛАКСАЦИЕЙ**

В этом параграфе будет рассмотрена модель возникновения отказа, которая в каком-то смысле является более общей, чем модель мгновенного повреждения и модель с накоплением повреждений. Начнем с рассмотрения нескольких примеров.

Известно, что в системах электроавтоматики часто происходит пробой изоляции соленоидных катушек, реле и т. п. На обследованных нами автоматических линиях для изготовления релейных пружин было отмечено много случаев перегорания катушек соленоидных прессов. При повторяющихся циклах работы происходила постепенная все возрастающая «раскачка» каркаса катушки и истирание направляющей обоймы соленоида. По мере роста

люфтов увеличивается вероятность сближения витков обмотки и истирания их изоляции, что и является в конечном счете причиной отказа.

В механических системах часто встречаются отказы типа заклинивания движущихся частей в направляющих. Анализ конкретных случаев показывает, что решающую роль играет накопление износов и люфтов в сопряжениях кинематических пар, что приводит к увеличению вероятности заклинивания.

Сбой в оперативной памяти электронно-вычислительной машины может произойти в случае, если импульс тока, подаваемый на координатный трансформатор, оказывается недостаточным для его перемагничивания. Изменение формы импульсов (уменьшение высоты, понижение крутизны и т. п.) происходит постепенно и случайно под влиянием изменения главным образом параметров ламп из-за старения — падения крутизны их характеристик и т. п. По мере искажения формы импульса работа становится неустойчивой, возрастает вероятность сбоя, т. е. неверной записи информации в ячейку памяти.

Отвлекаясь от конкретной природы описанных отказов, можно заметить следующие общие особенности их возникновения. У элемента (системы) имеется некоторый параметр  $\eta(t)$ , который меняется в процессе работы как случайная (чаще всего неубывающая или невозрастающая) функция времени. Само по себе изменение параметра  $\eta(t)$  не означает отказа, отказ происходит как бы в другом месте, но он связан с изменением параметра так, что по мере его увеличения (уменьшения) возрастает (уменьшается) вероятность возникновения отказа. Отказ проявляется в скачкообразном изменении состояния системы (пробой, заклинивание, неверная запись информации в ячейку), но этому предшествует процесс накопления повреждений. Во введении такая схема возникновения отказа была названа релаксацией. Эта модель отказа имеет черты как модели мгновенного повреждения (скачкообразное изменение состояния), так и модели накопления повреждений (постепенное увеличение, накопление повреждений с возрастанием вероятности отказа). В более сложных случаях отказ возникает в результате не одной, а многих релаксаций.

Существенным для процесса повреждения с релаксацией является то, что параметр системы  $\eta(t)$ , влияющий

на вероятность отказа (этот параметр удобно называть прогнозирующим), меняется недетерминированным образом, случайно. Последнее обстоятельство допускает формальную запись следующего вида: вероятность отказа системы (элемента) в интервале  $(T, T + \Delta T)$  при условии, что прогнозирующий параметр к моменту  $T$  равен  $\eta(T)$ , определяется выражением

$$\gamma(T) = \varphi[\eta(T)] \Delta T + o(\Delta T), \quad (176)$$

где  $\eta(t)$  — прогнозирующий параметр;  
 $\varphi$  — некоторая функция.

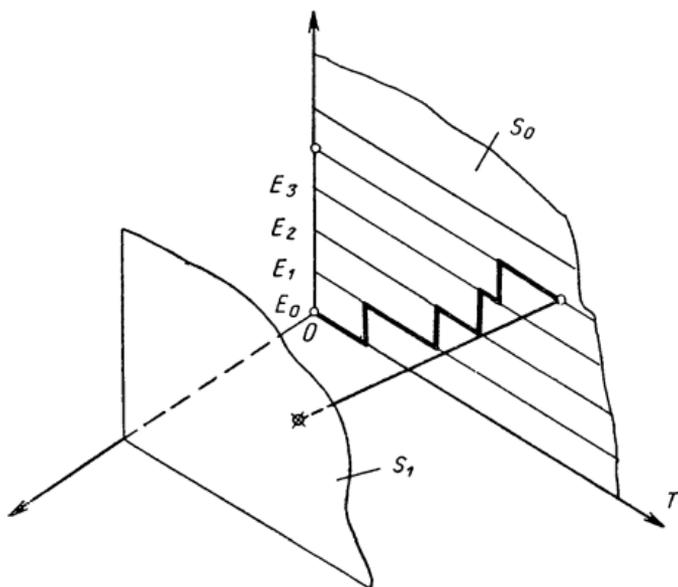


Рис 53 К модели возникновения отказа при случайном изменении прогнозирующего параметра.

Для конкретизации этой модели сделаем следующие наиболее естественные предположения. Будем считать, что  $\eta(t)$  есть процесс износа, соответствующий схеме накапливающихся повреждений (см. стр. 45, 64), а функция  $\varphi$  линейная:

$$\varphi = A + B\eta. \quad (177)$$

Для вывода закона распределения времени безотказной работы прибегнем к следующей интерпретации модели возникновения отказа.

Рассмотрим пространственное блуждание некоторой фиктивной частицы (рис. 53). Блуждание начинается в момент  $T=0$  из точки  $O$ , лежащей в плоскости  $S_0$ . В случайные моменты времени частица переходит с уровня  $E_k$  на уровень  $E_{k+1}$ . Блуждание частицы в плоскости  $S_0$  фактически описывает процесс накопления повреждений. Вероятность получения единичного повреждения, т. е. перехода  $E_k \rightarrow E_{k+1}$  в интервале  $(T, T+\Delta_T)$ , равна  $\lambda\Delta_T + o(\Delta_T)$  (см. модель возникновения гамма-распределения, стр. 64).

Для каждого уровня  $E_k$  имеется своя вероятность перескока частицы на стенку  $S_1$ , которая является поглощающим экраном. Перескок частицы на  $S_1$  имитирует отказ системы. Зависимость вероятности отказа от значения параметра находит свое отражение в том, что вероятность перехода на  $S_1$  из уровня  $E_k$  в интервале  $(T, T+\Delta_T)$  зависит от  $k$  и равна

$$q_k(T) = [\mu_0 + k\mu] \Delta_T + o(\Delta_T). \quad (178)$$

В каждый момент времени  $T$  состояние частицы можно охарактеризовать, указав  $E_j$  и  $S_i$  при  $j=0, 1, \dots$ ;  $i=0, 1$ , т. е. высоту уровня и номер стенки, на которой она находится. Вероятности перехода за малый промежуток времени  $(T, T+\Delta_T)$  определяются на основании сделанных предположений следующим образом (табл. 8).

Таблица 8

Вероятности переходов

Исходное состояние	Конечное состояние	Вероятность перехода за интервал $(T, T+\Delta_T)$
$(E_j, S_0)$	$(E_j, S_1)$	$(\mu_0 + kj)\Delta_T + o(\Delta_T)$
$(E_j, S_0)$	$(E_{j+1}, S_0)$	$\lambda\Delta_T + o(\Delta_T)$
$(E_j, S_0)$	$(E_j, S_0)$	$1 - (\lambda + \mu_0 + kj)\Delta_T + o(\Delta_T)$

Пусть  $P_{j,i}(T)$  есть вероятность того, что частица к моменту  $T$  находится в состоянии  $(E_j, S_i)$ . Для функций  $\{P_{k,0}(T), k=0, 1, \dots\}$  можно составить следующую бесконечную систему уравнений:



Последнее соотношение и определяет функцию распределения времени до перескока (отказа) в рассматриваемой модели.

Систему (180) можно решить рекуррентно и, произведя суммирование, найти  $R(T)$  и  $F(T)$ . Опуская выкладку, приведем конечный результат

$$F(T) = 1 - e^{\left[ \frac{\lambda}{\mu} - (\lambda + \mu_0) T - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu T} \right]}. \quad (184)$$

Соответствующая плотность распределения равна

$$f(T) = [\mu_0 + \lambda(1 - e^{-\mu T})] \times e^{\left[ \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu T}) - (\lambda + \mu_0) T \right]}, \quad (185)$$

а интенсивность отказов равна

$$\lambda(T) = \mu_0 + \lambda(1 - e^{-\mu T}). \quad (186)$$

Вид кривых плотности этого распределения приведен на рис. 54. Ордината плотности в нуле равна параметру  $\mu_0$ . При больших  $\mu_0$  функция  $f(T)$  монотонно убывает. При малых  $\mu_0$  по сравнению с  $\lambda$  и  $\mu$  кривая плотности имеет «горб», вершина которого лежит левее математического ожидания.

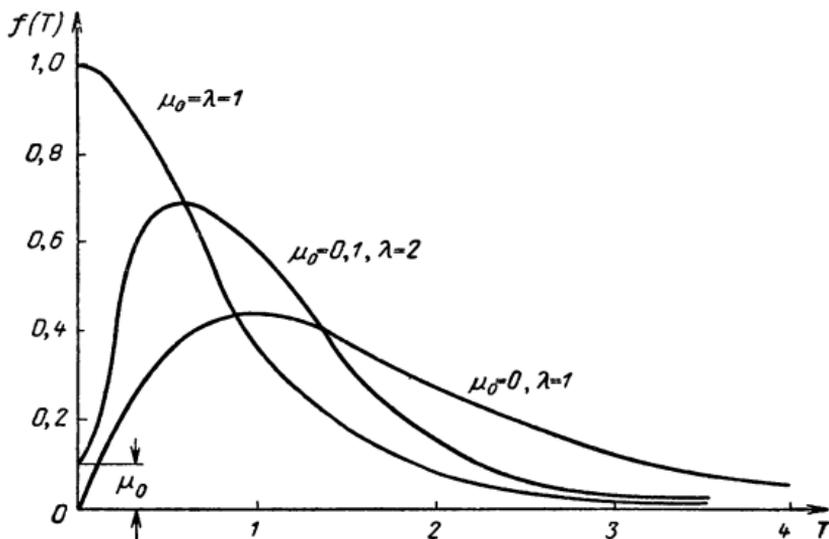


Рис 54. Плотность распределения (185) при  $\mu=1$  и различных значениях параметров  $\lambda$ ,  $\mu_0$

Проанализируем предпосылки, сделанные при выводе распределения (184). Первая предпосылка касается характера изменения прогнозирующего параметра  $\eta(T)$  и сводится к тому, что процесс  $\eta(T)$  соответствует случаю однородного начального качества объектов, постоянной средней скорости износа и наличию случайных вариаций скорости для каждой реализации (см. стр. 45). Вторая предпосылка заключается в том, что зависимость вероятности отказа от значения прогнозирующего параметра является линейной и на первый взгляд лишена наглядного физического смысла.

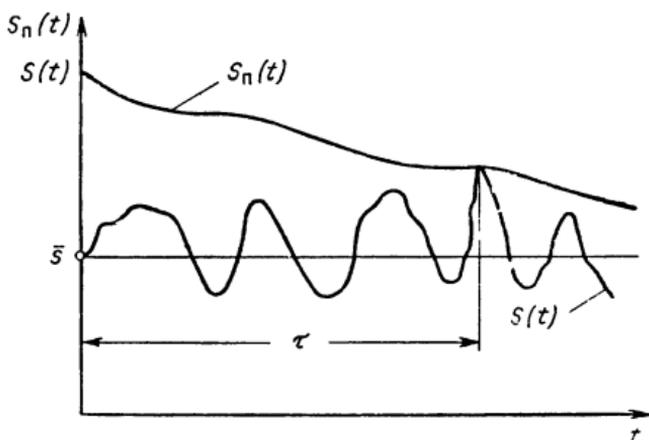


Рис. 55 Случайное нагружение при убывающем предельно допустимом уровне.

Укажем на одну часто встречающуюся ситуацию, для которой характерна линейная связь вероятности отказа и уровня прогнозирующего параметра. Вернемся к случаю отказа, который возникает при превышении рабочей нагрузкой  $S(t)$  предельно допустимого уровня  $S_{\Pi}(t)$ . Пусть нагрузка  $S(t)$  является нормальным стационарным случайным процессом со средним уровнем  $\bar{s}$ , а  $S_{\Pi}(t)$  убывает монотонно и случайно под влиянием случайно протекающего процесса старения системы (рис. 55). В этом случае вероятность отказа зависит от «расстояния» между  $S_{\Pi}(t)$  и  $\bar{s}$ , и величина  $S_{\Pi}(0) - S_{\Pi}(t) = \Delta S_T$  выступает в роли прогнозирующего параметра. Можно

показать \*, что если  $S_{\Pi}(T) = S_T$  в момент  $t = T$ , то вероятность отказа в интервале  $(T, T + \Delta_T)$  равна

$$\gamma(T) = C e^{-g(S_T - \bar{s})^2} \Delta_T + o(\Delta_T), \quad (187)$$

где  $g$  и  $C$  — некоторые постоянные.

Теперь допустим, что  $S_{\Pi}(t)$  меняется со временем медленно, т. е. за время, сравнимое со средним временем до отказа, падение предельно допустимого уровня мало. В этом случае множитель при  $\Delta_T$  в формуле (187) можно представить в виде

$$C e^{-gl_0^2 [1 + 2gl_0 \Delta S_T]}, \quad (188)$$

где

$$l_0 = S_{\Pi}(0) - \bar{s}.$$

Отсюда видно, что вероятность отказа зависит от величины прогнозирующего параметра  $\Delta S_T$  линейно.

Остановимся на оценке параметров распределения (184). Относительно приемлемый способ может быть указан лишь для случая, когда в нашем распоряжении имеются данные о времени  $\tau_1, \dots, \tau_N$  безотказной работы  $N$  экземпляров и имеется возможность наблюдать реализации прогнозирующего параметра  $\eta(T)$ . Рекомендуется следующий порядок оценки.

По реализациям  $\eta(T)$  находят параметр  $\lambda$  точно так же, как это описывалось в разделе о гамма-распределении.

По данным  $\tau_1, \dots, \tau_N$  строится гистограмма. Значение  $\mu_0$  полагается равным ординате гистограммы в точке  $T = 0$ .

Далее производится разбиение данных некоторым числом  $\theta$  и подсчитывается частота  $\nu(\theta) = \frac{m(\theta)}{N}$ , где  $m(\theta)$  — количество случаев, когда  $\tau_i < \theta$ .

Значение  $\mu$  находят, решая относительно  $\mu$  (например, графически) уравнение

$$\frac{1 - e^{-\mu\theta}}{\mu} = \theta \left( 1 + \frac{\mu_0}{\lambda} \right) + \frac{\ln [1 - \nu(\theta)]}{\lambda}. \quad (189)$$

\* О нормальном случайном процессе и его пересечениях с уровнем  $S_{\Pi}$  можно прочесть в книге Кордонского Х. Б. [14]

В правой части (189) стоит известная величина, а левая убывает с ростом  $\mu$  монотонно от значения  $\theta$  до нуля.

## § 5. НАЛОЖЕНИЕ ПРИЧИН ОТКАЗОВ И ЦЕПНЫЕ СИСТЕМЫ

### Одновременное действие нескольких причин отказов

В предыдущих параграфах рассматривалось взаимодействие «пиковых» нагрузок и процесса износа. Действие износа сказывалось в постепенном снижении предельно допустимого уровня нагрузки, а превышение этого уровня «пиком» нагрузки приводило к отказу. Таким образом, износ и мгновенное повреждение, приводящие к отказу, зависят от предельно допустимой нагрузки. Однако достаточно часто наблюдаются объекты, где износ и отказы из-за «пиковых» нагрузок не связаны друг с другом. Примерами могут служить авиационные приборы. Постепенный износ таких приборов не приводит к снижению их стойкости против перегрузок. Это объясняется тем, что воспринимающие перегрузки силовые части приборов практически не изнашиваются. Но износ способен вызвать нарушение работоспособности за счет выхода рабочей характеристики  $\eta(t)$  за допустимые пределы. Перегрузки, в свою очередь, могут вызвать отказ, если их величина превзойдет расчетные пределы. Следовательно, «пиковые» нагрузки, выступающие здесь в виде перегрузок, и износ, сказывающийся на поведении рабочей характеристики  $\eta(t)$ , действуют параллельно, но изолированно друг от друга. Подобные примеры можно было бы умножить. Фактически любой объект, имеющий несколько рабочих частей, не взаимодействующих друг с другом, имеет и несколько причин отказов, действующих параллельно и независимо одна от другой.

Пусть имеются причины  $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \dots, \Pi^{(k)}$ , действующие параллельно и независимо друг от друга. Независимость означает, что действие любой из перечисленных причин никак не сказывается на возможности отказа по любой другой причине. Допустим, что если бы причина  $\Pi^{(i)}$  была единственной, приводящей к отказу, то время безотказной работы было бы равно  $\tau^{(i)}$ . Возникает вопрос, каково будет время  $\tau$  безотказной работы при параллельном действии всех  $k$  причин?

Очевидно, что с момента, когда одна из причин уже вызвала отказ объекта, действие других причин не может изменить положения. Поэтому время, в течение которого объект будет работать безотказно, есть время до момента, когда одна из причин  $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \dots, \Pi^{(k)}$  вызовет отказ. Если причина с номером  $i$  вызвала отказ, то время безотказной работы будет равно согласно нашим обозначениям  $\tau^{(i)}$ . Понятно, что если мысленно убрать причину  $\Pi^{(i)}$ , то время безотказной работы объекта увеличится, так как до момента  $\tau^{(i)}$  отказов по остальным причинам не было. Сказанное позволяет утверждать, что время  $\tau$  безотказной работы задается равенством

$$\tau = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(k)}), \quad (190)$$

которое означает, что это время есть минимальное из величин  $\tau^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, k$ . Если  $F_i(T)$  есть функция распределения времени  $\tau^{(i)}$  безотказной работы при изолированном действии  $i$ -й причины, то функция распределения времени  $\tau$  представится как

$$F(T) = 1 - [1 - F_1(T)][1 - F_2(T)] \dots [1 - F_k(T)]. \quad (191)$$

Рассмотрим несколько примеров. В качестве первого изучим ситуацию, когда параллельно действует схема мгновенных повреждений, т. е. отказы по вине «пиковых» нагрузок, и схема накапливающихся повреждений, приводящая к нормальному распределению времени безотказной работы. Если  $\Pi^{(1)}$  — причина, состоящая в износе с постоянной скоростью и сильным перемешиванием, то в соответствии с формулами (191), (33), (103) имеем

$$F(T) = 1 - e^{-\lambda T} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{T-c}{\sigma}\right) \right]. \quad (192)$$

Плотность этого распределения задается равенством

$$f(T) = e^{-\lambda T} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(T-c)^2}{2\sigma^2}} + \lambda \left( 1 - \Phi\left(\frac{T-c}{\sigma}\right) \right) \right]. \quad (193)$$

Кривые плотности (193) представлены на рис. 56. Если среднее время до отказа по причине мгновенного повреждения  $1/\lambda$  меньше  $c$  — среднего времени до появления отказа по износу, то кривая плотности напоминает экспоненциальную функцию ( $\lambda=2$ ). При обратной

ситуации ( $c < 1/\lambda$ ) плотность имеет явно выраженный горб и напоминает нормальное распределение.

Функция распределения (192) широко используется для описания отказов электронных ламп. Физически это объясняется тем, что выход лампы из строя диктуется

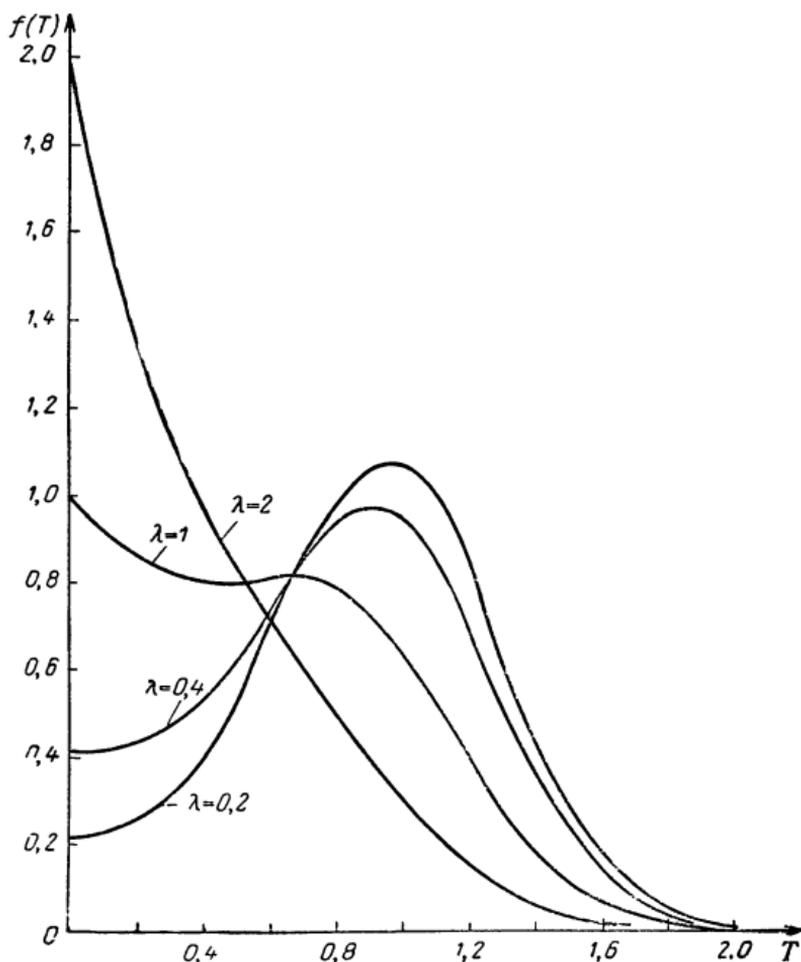


Рис 56 Плотность распределения по (193) при  $c=1$ ,  $\sigma=1/3$  и различных значениях параметра  $\lambda$ .

либо выходом параметра (например, крутизны характеристики) за заданные пределы, либо мгновенной поломкой лампы (перегорание, разрушение баллона и т. д.) под влиянием «пика» температурных и других

воздействий. В связи с широким использованием распределения (192) остановимся на возможности оценки его параметров.

Если имеется возможность разделить отказы по вине «пиковых» нагрузок и отказы по причине износа, то это еще не может служить основой для отдельного определения параметров распределений  $F_1(T)$  и  $F_2(T)$ . Для того чтобы в этом убедиться, достаточно представить себе следующую ситуацию.

Пусть износ идет очень медленно, и поэтому, если рассматривать его действие изолированно, должны наблюдаться величины времени безотказной работы большой продолжительности. Пусть далее интенсивность мгновенных отказов весьма велика, и поэтому отвечающее им время безотказной работы, как правило, мало. Наблюдая совместное действие обеих причин, в основном увидим относительно малые по величине значения  $\tau$ . Поэтому даже если среди отказов мы выделим те, которые возникли из-за износа, у нас создается ложное впечатление, что износ протекает с большой скоростью, и время безотказной работы при его изолированном действии мало.

### *Оценка параметров распределения*

Для изолированной оценки параметров распределения необходимо воспользоваться данными о реализациях износа. Метод разыскания параметров по реализациям износа излагался в § 3. После того как параметры распределения  $F_2(T)$  найдены, можно по данным о величинах  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  найти параметр распределения  $\lambda$ . С этой целью достаточно воспользоваться методом разделяющих разбиений. Поскольку в распределение  $F_1(T)$  входит лишь один параметр  $\lambda$ , то совокупность величин  $\tau_i$  надо разбить на две группы, назначив границу разбиения  $\theta$ . Если  $\nu(\theta)$  — частота значений  $\tau_i$ , лежащих слева от границы  $\theta$ , то для нахождения параметра  $\lambda$  надо воспользоваться равенством

$$e^{-\lambda\theta} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\theta - c}{\sigma} \right) \right] = 1 - \nu(\theta),$$

откуда

$$\lambda = \frac{\ln \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\theta - c}{\sigma} \right) \right] - \ln [1 - \nu(\theta)]}{\theta}. \quad (194)$$

Величина  $\lambda$  может быть подсчитана, если известны входящие в эту формулу параметры  $c$  и  $\sigma$ .

Для пояснения способа оценки параметров на основе одних только данных о времени безотказной работы необходимо отметить следующее обстоятельство.

Пусть  $\tau^{(1)}$  — случайная величина, распределенная экспоненциально с параметром  $\lambda$ ;  $\tau^{(2)}$  — независимая от  $\tau^{(1)}$  случайная величина, распределенная нормально с параметрами  $c$ ,  $\sigma$ . Из предыдущего описания следует, что случайная величина

$$\tau = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})$$

подчиняется распределению (192).

Пусть имеется некоторое количество  $s$  независимых реализаций случайной величины  $\tau$ :  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ . Будем считать, что они уже перенумерованы в порядке возрастания, т. е.  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_s$ . Каждой из реализаций  $\tau_i$  соответствовали реализации случайных величин  $\tau_i^{(1)}$  и  $\tau_i^{(2)}$ . Обозначим их через  $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}$  соответственно. Из определения  $\tau$  и  $\tau_1$  теперь следует, что

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \min \{ \min(\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}); \dots; \min(\tau_s^{(1)}, \tau_s^{(2)}) \} = \\ &= \min \{ \min(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_s^{(1)}); \min(\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_s^{(2)}) \} = \\ &= \min(\tau_{min}^{(1)}, \tau_{min}^{(2)}), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\tau_{min}^{(1)} = \min(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_s^{(1)}), \quad \tau_{min}^{(2)} = \min(\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_s^{(2)}).$$

Здесь  $\tau_{min}^{(1)}$  — минимум из  $s$  независимых экспоненциально распределенных величин,  $\tau_{min}^{(2)}$  — минимум из  $s$  независимых нормально распределенных величин.

Легко показать, что  $\tau_{min}^{(1)}$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda s$ , т. е. с математическим ожиданием, в  $s$  раз меньшим, чем у  $\tau^{(1)}$ . Можно также показать, что при больших  $s$  математическое ожидание  $\tau_{min}^{(2)}$  будет приблизительно равно  $c - \sigma \sqrt{\ln s}$ , т. е. с ростом  $s$  будет крайне медленно убывать [9]. Обычно  $1/\lambda$  и  $c$  — величины примерно одного порядка, причем чаще  $1/\lambda < c$ . Тогда отмеченное свойство математических ожиданий приведет к тому, что именно случайная величина  $\tau_{min}^{(1)}$  опре-

деляющим образом будет влиять на распределение  $\tau_1$ . Так при  $1/\lambda = c$  и  $s = 10$  величина  $\tau_1$  будет иметь почти экспоненциальное распределение.

Значит, можно полагать, что  $\tau_1$  практически распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda^* = \lambda s$ . Это свойство и используется при оценке параметров. Рекомендуется следующая процедура.

1. Данные о времени безотказной работы  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подразделяются на  $l$  групп по  $s$  значений в каждой, так что  $ls = N$ . Выбор величин  $\tau_i$  должен происходить случайно, например, путем жеребьевки или с помощью таблицы случайных чисел.

2. В каждой из  $l$  групп отыскивается наименьшее значение  $\tau^*_n, n = 1, 2, \dots, l$ .

3. Параметр  $\lambda$  оценивается по формуле

$$\lambda = \frac{l}{s} \frac{1}{\sum_{n=1}^l \tau^*_n}. \quad (195)$$

4. Выбираются точки разбиения  $\theta_1, \theta_2, \theta_1 < \theta_2$  и подсчитываются количества  $m(\theta_j)$  значений  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ , лежащих в интервалах  $(0, \theta_j), j = 1, 2$ . Находятся отношения  $v(\theta_j) = \frac{m(\theta_j)}{N}$ .

5. Параметры  $c$  и  $\sigma$  оцениваются по формулам

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\Psi_1 \theta_2 - \theta_1 \Psi_2}{\Psi_1 - \Psi_2}, \\ \sigma &= \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Psi_1 - \Psi_2}, \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

где обозначено

$$\Psi_j = \Psi [1 - (1 - v(\theta_j)) e^{\lambda \theta_j}], j = 1, 2;$$

$\Psi$  — обратная функция Лапласа.

Для оценки параметров необходимо иметь по крайней мере число данных  $N$  порядка 100—200 и выбирать  $s = 10 \div 15$ .

\* \*  
\*

## Распределение Вейбулла—Гнеденко

Рассмотрим систему, состоящую из группы элементов, обладающую следующими свойствами. Отказы элементов взаимно независимы. Отказ любого из элементов рассматривается как отказ всей системы. Такие системы будем называть цепными. Пусть  $\tau$  есть время безотказной работы цепной системы, а  $\tau^{(i)}$  — время безотказной работы  $i$ -го элемента системы,  $i=1, 2, \dots, k$ . В этом случае, как уже указывалось,

$$\tau = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(k)}).$$

Отметим один важный частный случай. Пусть все элементы цепной системы имеют экспоненциальное распределение времени безотказной работы. В соответствии с формулами (191) и (33) функция распределения  $F(T)$  будет равна

$$F(T) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^k \lambda_i T}, \quad (197)$$

где  $\lambda_i$  — параметры распределений элементов цепной системы.

Особый интерес представляет ситуация, обобщающая только что описанный случай, имеющая следующие особенности. Число элементов цепной системы  $k$  велико; все функции распределения  $F_i(T)$  таковы, что при  $T \rightarrow 0$  имеет место равенство

$$F_i(T) = gT^\gamma + o(T^\gamma), \quad (198)$$

где  $g > 0, \gamma > 0$ .

Это соотношение определяет порядок роста  $F(T)$  при малых  $T$ . Соотношение (198) имеет место, в частности, для гамма-распределений. Можно показать, что при больших  $k$  функция распределения  $F(T)$  хорошо аппроксимируется выражением вида

$$F(T) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{T^\gamma}{\beta}}, & T \geq 0, \\ 0 & T < 0, \end{cases} \quad (199)$$

где

$$\beta = \frac{1}{gk}.$$

Впервые в технических приложениях это распределение было предложено в работе В. Вейбулла [39] в 1939 г. без математического обоснования. Строгое математическое рассмотрение относящихся сюда проблем было выполнено Б. В. Гнеденко в 1941 г. в работе [9].

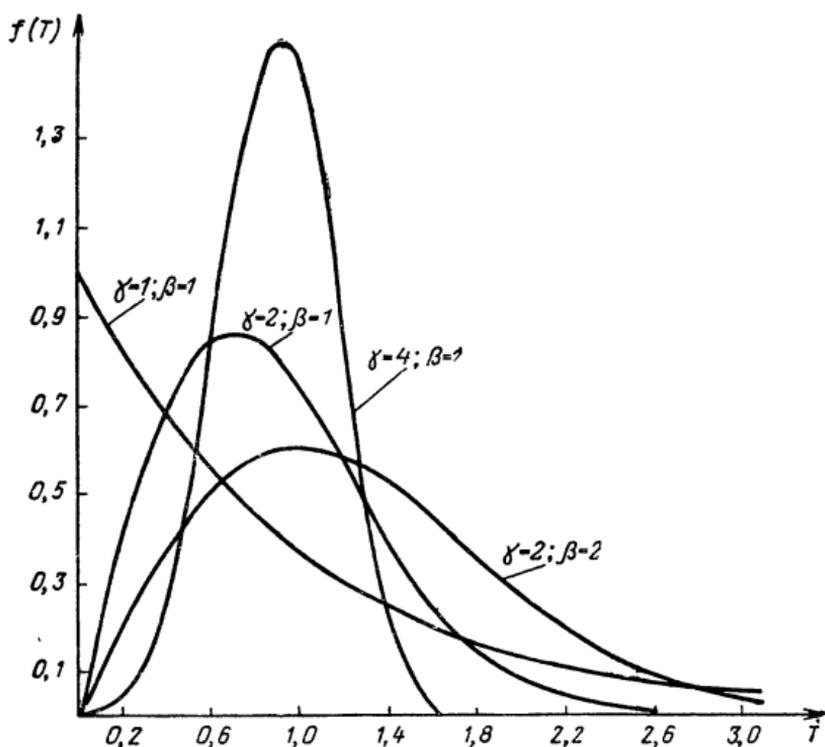


Рис 57 Плотность распределения Вейбулла — Гнеденко при различных значениях параметров  $\gamma$  и  $\beta$

В математической статистике принято называть распределение (199) распределением третьего типа для крайних членов последовательности независимых величин. В дальнейшем будем называть (199) распределением Вейбулла — Гнеденко. Плотность этого распределения имеет вид

$$f(T) = \begin{cases} e^{-\frac{T^\gamma}{\beta}} \frac{\gamma}{\beta} T^{\gamma-1}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0. \end{cases} \quad (200)$$

Кривые плотности представлены на рис. 57. Как видно из графиков, это распределение является асимметричным; в частном случае (при  $\gamma=1$ ) оно будет экспоненциальным (34).

Рассматриваемое распределение занимает важное место среди распределений времени безотказной работы. Это объясняется тем, что некоторая не слишком большая разница в распределениях времени безотказной работы элементов не препятствует использованию распределения (199) для описания времени безотказной работы устройства. Так если каждый из элементов имеет гамма-распределение времени безотказной работы, но параметры этих распределений при переходе от элемента к элементу несколько колеблются, то при достаточно большом числе элементов распределение времени безотказной работы будет хорошо аппроксимироваться формулой (199). К этому следует добавить, что многие устройства содержат значительное число одинаковых или близких по конструкции элементов, находящихся в примерно одинаковых эксплуатационных условиях. Например, двигатель внутреннего сгорания имеет несколько цилиндров, газовая турбина — большое число лопаток, радиоприемник — значительное число конденсаторов, сопротивлений и т. д. Если повторяющиеся в одном устройстве элементы являются определяющими по отношению к времени безотказной работы устройства, то образуется схема, приводящая к распределению Вейбулла — Гнеденко.

В ряде работ по надежности указывается, что распределение Вейбулла—Гнеденко хорошо описывает распределение времени безотказной работы многих элементов радиоэлектронной аппаратуры — ламп, транзисторов и др. — в случае, если отказ этих элементов рассматривается как выход какого-либо их параметра за установленные пределы (испытание на срок службы). Это до некоторой степени согласуется с теоретическими предпосылками вывода распределения (199). Так можно полагать, что случайные изменения параметров этих элементов есть слабо связанные случайные процессы. Тогда если  $\tau^{(i)}$  есть случайное время срока службы по  $i$ -му параметру, то время безотказной работы  $\tau$  элемента в целом определится приведенным выше соотношением:  $\tau = \min(\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ .

## Оценка параметров распределения Вейбулла—Гнеденко

Пусть известны величины  $\tau_1, \dots, \tau_N$  времени безотказной работы  $N$  устройств. Для оценки параметров  $\gamma$  и  $\beta$  воспользуемся методом разделяющих разбиений.

1. Выбираются границы разбиения  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ,  $\theta_1 < \theta_2$  и подсчитываются количества значений  $\tau_i$ , лежащих в диапазонах  $(0, \theta_j)$ ,  $j=1, 2$ . Пусть эти количества равны  $m(\theta_j)$ . Находятся отношения  $v(\theta_j) = \frac{m(\theta_j)}{N}$ .

2. Параметры  $\gamma$  и  $\beta$  оцениваются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\ln \ln \left[ \frac{1}{1-v(\theta_1)} \right] - \ln \ln \left[ \frac{1}{1-v(\theta_2)} \right]}{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}, \\ \beta &= \frac{\theta_1^\gamma}{\ln \left[ \frac{1}{1-v(\theta_1)} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Для грубой оценки параметров распределения, а также для проверки того, насколько хорошо выравниваются опытные данные, удобно использовать вероятностную бумагу (рис. 58). Правила пользования ею описаны в примере 8. С целью облегчения подсчетов по формулам (201) в табл. ПЗ приведены значения функций

$$y_1(x) = \ln \frac{1}{1-x}, \quad y_2(x) = \ln \ln \frac{1}{1-x}.$$

**Пример 8.** В табл. 9 приведены результаты испытаний партии в сто штук специальных германиевых транзисторов [23, стр. 53]. Отказом считался выход за установленные пределы хотя бы одного из параметров транзистора. Выбираем  $\theta_1 = 200$ ,  $\theta_2 = 2100$ . В данном случае  $v(\theta_1) = 0,36$ ;  $v(\theta_2) = 0,79$ . По формулам (201) находим  $\gamma = 0,532$ ,  $\beta = 37,6$ .

Считая, что в правой колонке табл. 9 содержатся накопленные частоты, отложим их на вероятностной бумаге (рис. 58) и по полученным точкам на глаз проведем прямую. Видим, что точки сравнительно близко ложатся около прямой. Оценим по рис. 58 параметры  $\gamma$  и  $\beta$ . Для этой цели используется специальная точка  $A$  с координатами  $(2,718; 0,632)$ , вертикальная линия  $H$  с абсциссой  $1$  и специальная шкала  $m$ . Для оценки величины  $\gamma$  следует найти значение ординаты по шкале  $m$  точки  $B$ , полученной на пересече-

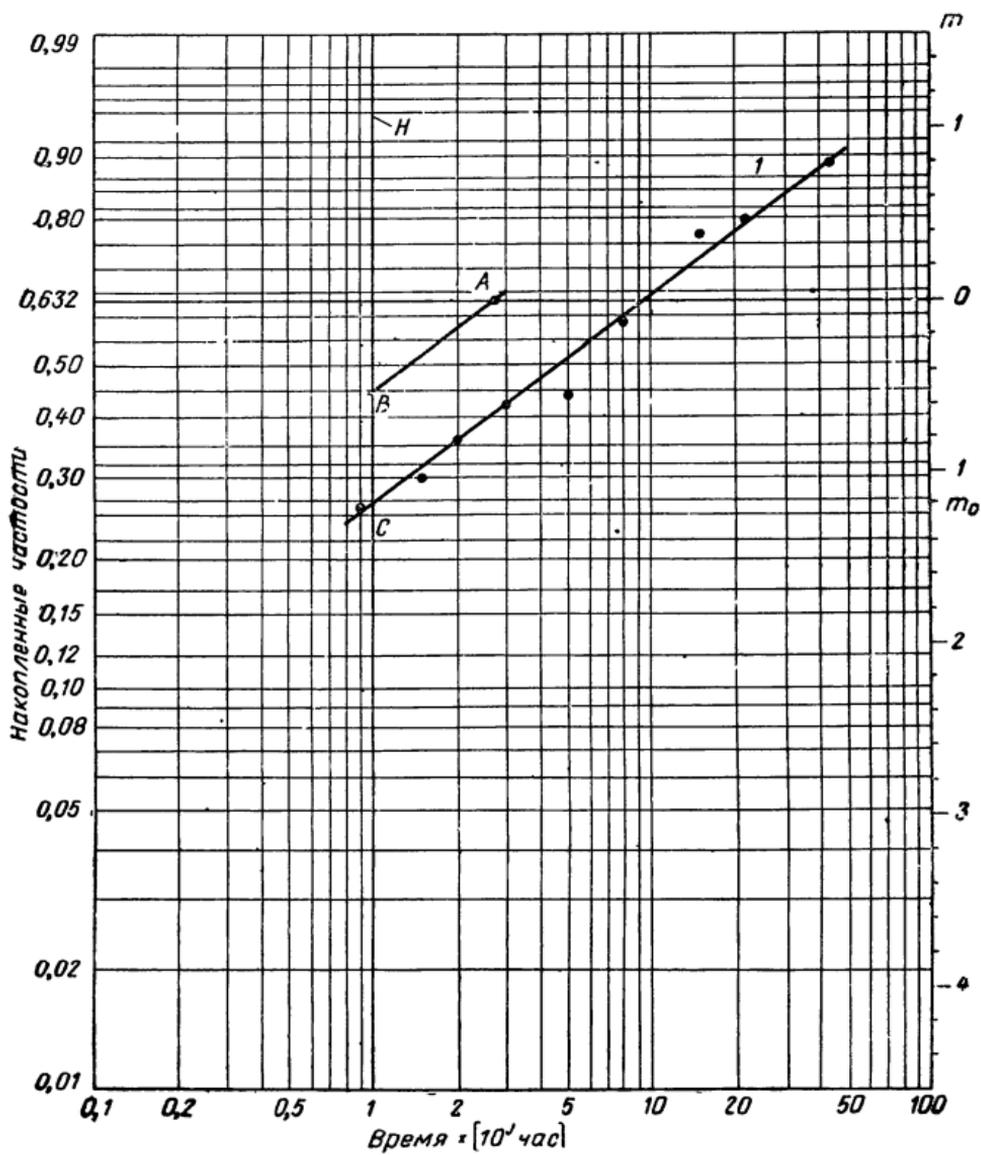


Рис. 58. Вероятностная бумага распределения Вейбулла — Гнеденко.

нии линии  $H$  и луча, проведенного через  $A$  параллельно линии  $I$ . В нашем случае  $\gamma=0,52$ . Для оценки  $\beta$  следует найти ординату  $m_0$  на шкале  $m$  точки  $C$  пересечения линии  $I$  с линией  $H$ .

Таблица 9

Параметр  $\beta$  находится по формуле

**Результаты испытания транзисторов**

$$\beta = e^{m_0} 10^{jT}, \quad (202)$$

Время проверки с момента начала испытаний, час	Доля отказавших транзисторов к моменту проверки
90	0,26
150	0,30
200	0,36
300	0,42
500	0,44
800	0,57
1 500	0,77
2 100	0,79
4 300	0,87

где  $j$  — порядок множителя шкалы времени (в нашем случае  $j=2$ ).

По рис. 58 находим  $m_0=1,16$ ; по (202) определяем  $\beta=35,0$ . Эти оценки хорошо совпали с оценками, полученными по методу разделяющих разбиений.

Отметим, что экспоненциальная бумага (рис. 9) является частным случаем бумаги рис. 58, поскольку экспоненциальное распределение есть частный случай распределения (199), выравнивание данных по экспоненциальному распределению может быть произведено и на вероятностной бумаге распределения Вейбулла — Гнеденко.

\* \*  
\*

В § 2 и 3 при рассмотрении экспоненциального и гамма-распределений описывались ситуации, когда образуется порог чувствительности  $t_0$ , приводящий к сдвигу распределения. Если каждый из элементов, входящих в цепную систему, имеет один и тот же порог чувствительности, равный  $t_0$ , то очевидно, что тот же порог будет иметь место для всей системы в целом. В предположении, что при малых  $T$  имеет место приближенное равенство

$$P\{\tau \leq t_0 + T\} = F(t_0 + T) = gT^k + o(T^k), \quad (203)$$

аналогичное равенству (198), при больших  $k$  придем к распределению Вейбулла — Гнеденко, имеющему три параметра,

$$F(T) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(T-t_0)^k}{\beta}}, & T \geq t_0, \\ 0, & T < t_0. \end{cases} \quad (204)$$

Выражение для плотности имеет вид:

$$f(T) = \begin{cases} e^{-\frac{(T-t_0)^\gamma}{\beta}} \frac{\gamma}{\beta} (T-t_0)^{\gamma-1}, & T \geq t_0, \\ 0, & T < t_0. \end{cases} \quad (205)$$

*Оценка параметров распределения  
Вейбулла — Гнеденко с порогом чувствительности*

Пусть заданы величины  $\tau_1, \dots, \tau_N$  времени безотказной работы  $N$  устройств.

1. Выбираются границы разбегания  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ , подсчитываются количества  $m(\theta_j)$  значений  $\tau_i$ , лежащих в интервалах  $(0, \theta_j), j = 1, 2, 3$ ; находятся отношения  $\nu(\theta_j) = \frac{m(\theta_j)}{N}$ .

2. Коэффициент  $z$  определяется по формуле

$$z = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3},$$

где

$$y_j = \ln \ln \frac{1}{1 - \nu(\theta_j)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

3. Параметр  $t_0$  находится путем решения трансцендентного уравнения

$$(\theta_2 - t_0) = (\theta_3 - t_0)^z (\theta_1 - t_0)^{1-z}. \quad (206)$$

Решение ищется в интервале  $0 < t_0 < \theta_1$ . Можно доказать, что существует единственное решение этого уравнения, если выполнено условие

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} < \left( \frac{\theta_3}{\theta_1} \right)^z. \quad (207)$$

Поэтому перед тем, как решать уравнение, следует проверить это условие. Если оно не выполняется, следует «передвинуть» точки разбиения.

Уравнение (206) легко решается графически.

4. Параметры  $\gamma$  и  $\beta$  оцениваются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{y_1 - y_2}{\ln(\theta_1 - t_0) - \ln(\theta_2 - t_0)}, \\ \beta &= \frac{(\theta_1 - t_0)^\gamma}{\ln \left[ \frac{1}{1 - v(\theta_1)} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

Для весьма грубой оценки величины  $t_0$  можно использовать вероятностную бумагу. Процедура оценки  $t_0$  состоит в подборе такой величины смещения  $t_0$  исходных данных, чтобы величины  $\tau'_i = \tau_i - t_0$  хорошо выравнялись по распределению (199).

Целесообразно сочетать расчетный метод, описанный выше, с методом подбора  $t_0$  на функциональной бумаге.

\* \*  
\*

### Функциональное распределение Вейбулла — Гнеденко

Исходное соотношение (198) в более общей форме может быть записано в виде

$$F_i(T) = u^\gamma(T) + o(u^\gamma(T)),$$

где  $u(T)$  — некоторая монотонная функция, причем  $\lim u(T) = 0$  при  $T \rightarrow 0$ .

Соотношение (198) получается, если положить  $u(T) = g^{1/\gamma} T$ .

Рассмотрим случай, когда  $F_i(T)$  есть логарифмическое гамма-распределение. Установим вид  $u(T)$ . Пусть математическое ожидание скорости износа задается равенством

$$M\{\xi(t)\} = \frac{1}{1+t}. \quad (209)$$

Тогда согласно (125), (126) функция распределения

времени безотказной работы элемента представится в виде

$$F_i(T) = \sum_{m=r}^{\infty} \frac{[\lambda \ln(1+T)]^m}{m!} e^{-\lambda \ln(1+T)}. \quad (210)$$

При  $T \rightarrow 0$

$$F_i(T) \approx \frac{[\lambda \ln(1+T)]^r}{r!}.$$

Тем самым  $u(T)$  задается равенством

$$u(T) = C \ln(1+T), \quad (211)$$

а в роли показателя степени  $\gamma$  выступает  $r$ .

Не останавливаясь на подробном доказательстве, укажем, что если  $\gamma$  велико, то функция распределения времени безотказной работы цепной системы хорошо аппроксимируется выражением вида

$$F(T) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{[\ln(1+T)]^\gamma}{\beta}}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0. \end{cases} \quad (212)$$

Это выражение является частным случаем функционального распределения Вейбулла — Гнеденко, задаваемого формулой

$$F(T) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{[u(T)]^\gamma}{\beta}}, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0. \end{cases} \quad (213)$$

В работах по усталостной долговечности применяют распределение (212) с параметром сдвига. Примерно такое распределение содержится в работе В. Вейбулла [40]. Правильная его запись имеет вид

$$F(T) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{[\lg(T-t_0+1)]^\gamma}{\beta}}, & T \geq t_0, \\ 0, & T < t_0, \end{cases}$$

$\beta$ ,  $\gamma$  и  $t_0$  — параметры распределения.

Оценка параметров этого распределения выполняется теми же методами, что и для распределения (204). Разница состоит лишь в том, что от величин  $\tau_1, \dots, \tau_N$  необходимо перейти к величинам  $u_1 = \lg \tau_1, \dots, u_N = \lg \tau_N$ .

## § 6. ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ

### Интенсивность отказов и остаточное время безотказной работы

В домашнем быту часто гораздо больше интересуются надежностью подержанных вещей, чем новых. Покупая часы, потребитель имеет гарантию магазина, обеспечивающую замену часов на новые или ремонт, если купленные откажут в течение некоторого гарантийного срока. Поэтому способность часов безотказно работать в течение гарантийного срока мало волнует потребителя. Совсем иначе обстоит дело со сроком их работы после истечения гарантии. Именно в этот период отказ часов целиком ложится на плечи покупателя. Интересы покупателя состоят в том, чтобы вероятность безотказной работы в течение нескольких лет после истечения гарантийного срока была достаточно велика. Рассмотрим эту ситуацию с формальных позиций. Обозначим через  $t_H$  некоторый срок, в течение которого исследуемый объект работал безотказно, и введем вероятность  $P\{\tau_k > T | t_H\}$ , которая означает вероятность безотказной работы в течение времени  $T$  после того, как объект безотказно проработал время  $t_H$ . Так, для нашего примера, если срок гарантии год, то  $t_H = 1$ . Желая определить вероятность того, что часы проработают еще двадцать лет после истечения гарантии, мы должны будем вычислить вероятность  $P\{\tau_k > 20 | t_H = 1\}$ . Рассматриваемая вероятность является условной, и для ее вычисления нам придется воспользоваться тем обстоятельством, что любое распределение времени безотказной работы может быть формально записано в следующем виде:

$$F(T) = 1 - e^{-\int_0^T \lambda(t) dt}, \quad (214)$$

где через  $\lambda(t)$  обозначена функция

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \quad (215)$$

В справедливости (214) легко убедиться непосредственной проверкой. Функция  $\lambda(t)$  широко используется

в теории надежности и носит название интенсивности отказов. Ее физический смысл будет пояснен ниже.

Условная вероятность  $P\{\tau_k > T | t_n\}$  вычисляется по общим правилам как отношение  $P\{\tau > T + t_n\}$  вероятности того, что в течение времени  $t_n + T$  не было отказов, к вероятности  $P\{\tau > t_n\}$  того, что в течение времени  $t_n$  не было отказов. Исходя из формулы (214) это отношение запишется так:

$$P\{\tau_k > T | t_n\} = \frac{P\{\tau > T + t_n\}}{P\{\tau > t_n\}} =$$

$$= \frac{e^{-\int_0^{t_n+T} \lambda(t) dt}}{e^{-\int_0^{t_n} \lambda(t) dt}}$$

и, следовательно,

$$P\{\tau_k > T | t_n\} = e^{-\int_{t_n}^{t_n+T} \lambda(t) dt}. \quad (216)$$

Пусть величина  $T$  мала. Обозначим ее через  $\Delta_T$ . Тогда формула (216) может быть представлена в виде:

$$P\{\tau_k > \Delta_T | t_n\} \approx e^{-\lambda(t_n)\Delta_T}. \quad (217)$$

Вероятность  $P\{\tau_k > \Delta_T | t_n\}$  есть вероятность того, что объект проработает еще время  $\Delta_T$  после того, как он безотказно проработал время  $t_n$ . Таким образом, формула (217) позволяет как бы экстраполировать возможность безотказной работы объекта на малое время  $\Delta_T$  вперед, если объект наблюдается в момент  $t_n$  своей безотказной работы.

Из формулы (217) следует, что чем больше  $\lambda(t_n)$ , тем менее вероятно, что объект выдержит дополнительное время работы  $\Delta_T$ . Тем самым величина  $\lambda(t_n)$  задает опасность отказа на ближайшее к  $t_n$  время. Именно поэтому функцию времени  $\lambda(t)$  называют либо интенсивностью отказов, либо «риском отказа».

Естественно, что владельца часов вполне устроило бы, чтобы интенсивность отказов  $\lambda(t_n)$  уменьшалась по мере роста времени  $t_n$ . Тогда «риск отказа» все время

бы убывал, и после окончания гарантийного срока можно было бы сравнительно долго не отдавать часы в починку.

Для того чтобы более подробно установить смысл интенсивности отказов  $\lambda(t)$ , рассмотрим ее еще с нескольких позиций.

Обратимся к формуле, определяющей  $\lambda(t)$ . Представим эту формулу в виде:

$$\lambda(t) \Delta t = \frac{f(t) \cdot \Delta t N}{[1 - F(t)] N},$$

где  $N$  — число наблюдаемых экземпляров исследуемого объекта.

Произведение  $f(t) \Delta t$  есть вероятность отказа объекта за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Соответственно  $f(t) \Delta t N$  есть среднее число объектов, отказавших за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Произведение  $[1 - F(t)] N$  есть среднее число объектов, не отказавших за время  $t$ . Таким образом, произведение  $\lambda(t) \Delta t$  есть отношение числа устройств, отказавших за время от  $t$  до  $t + \Delta t$ , к числу устройств, оставшихся к моменту времени  $t$  в работоспособном состоянии.

Методика построения графиков интенсивности отказов по данным о времени безотказной работы подробно описывается в руководствах по теории надежности [25, 34].

Удобство интенсивности отказов с точки зрения оценки ее по опытным данным заключается в том, что величины  $\lambda(t) \Delta t$  можно подсчитывать по ходу испытаний, не дожидаясь, пока откажут все испытываемые объекты. Однако вследствие того, что  $\lambda(t) \Delta t$  есть фактически частота, она подвержена большим случайным вариациям, особенно к концу испытаний, когда число «оставшихся в живых» объектов невелико. Поэтому для достоверной оценки интенсивности отказов необходимо располагать большой группой объектов — порядка сотни и более.

Вернемся к формуле (217) и покажем, что величина  $\lambda(t_H) \Delta t$  есть не что иное, как условная вероятность отказа на участке времени  $(t_H, t_H + \Delta t)$  в предположении, что объект безотказно проработал время  $t_H$ . Действительно, поскольку

$$P\{\tau_k \leq \Delta t | t_H\} = 1 - P\{\tau_k > \Delta t | t_H\},$$

то

$$P \{ \tau_k \leq \Delta_t | t_H \} \approx 1 - e^{-\lambda(t_H) \Delta_t}.$$

Разлагая правую часть в ряд по степеням  $\Delta_t$ , получим

$$P \{ \tau_k \leq \Delta_t | t_H \} = \lambda(t_H) \Delta_t + o(\Delta_t). \quad (218)$$

Интенсивность отказов  $\lambda(t)$  тесно связана с условным математическим ожиданием остатка времени безотказной работы, вычисленным в предположении, что в интервале  $(0, t_H)$  объект не отказал. Случайную величину времени безотказной работы, отсчитываемую от некоторого фиксированного момента времени  $t_H$  до момента отказа при условии, что до момента времени  $t_H$  не было отказа, будем называть остаточным временем безотказной работы и обозначать  $\tau_0(t_H)$ .

Если в нашем распоряжении имеются данные о времени безотказной работы  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , то эмпирическая оценка математического ожидания остаточного времени  $M\{\tau_0(t_H)\}$  получается так. Подсчитываются величины

$$\tau_0^{(j)}(t_H) = \tau_j - t_H$$

для тех значений  $\tau_j$ , которые не меньше, чем  $t_H$  (остаточное время — неотрицательная величина). Пусть таких величин  $L$ . Тогда (с небольшим смещением)

$$M\{\tau_0(t_H)\} \approx \bar{\tau}_0(t_H) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \tau_0^{(j_k)}(t_H). \quad (219)$$

Функция распределения остаточного времени согласно (216) задается равенством

$$P \{ \tau_0(t_H) \leq T \} = F(T | t_H) = 1 - e^{-\int_{t_H}^{t_H+T} \lambda(t) dt}. \quad (220)$$

Отсюда легко получить выражение для математического ожидания остаточного времени (среднего остаточного времени)

$$M\{\tau_0(t_H)\} = \int_0^{\infty} e^{-\int_{t_H}^{t_H+T} \lambda(t) dt} dT. \quad (221)$$

Эта формула задает связь между средним остаточным временем и интенсивностью отказов. Из нее, в частности, выводится следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d M \{ \tau_0(t_n) \}}{dt_n} = \lambda(t_n) M \{ \tau_0(t_n) \} - 1, \quad (222)$$

которое позволяет вычислить  $\lambda(t_n)$ , если известно выражение для остаточных математических ожиданий  $M\{\tau_0(t_n)\}$ .

Изучение поведения  $\tau_0(t_n)$  по опытным данным имеет тот недостаток, что оно возможно лишь после окончания испытаний всех объектов. Однако оценка остаточных средних времен имеет существенно меньшие случайные флюктуации, чем вычисленная по тем же данным оценка интенсивности отказов. Это объясняется лучшими статистическими свойствами оценок математического ожидания по сравнению с оценками частотей. Сказанное наглядно иллюстрируется рис. 59. На рис. 59,а приведен график поведения остаточных средних для данных табл. 1 (данные таблицы были предварительно сдвинуты влево на величину  $t_0$  порога чувствительности  $t_0 = 36$  час). На рис. 59,б представлен график поведения интенсивности отказов, построенный по тем же данным. В этом случае отклонения интенсивностей отказов от теоретического среднего уровня гораздо большие.

Рассмотрим отдельно случай экспоненциального распределения. Его функция имеет вид

$$F(T) = 1 - e^{-\lambda T}.$$

Легко убедиться в том, что для этого распределения интенсивность отказов постоянна и равна

$$\lambda(T) = \lambda.$$

Из (221) можно вывести, что

$$M \{ \tau_0(t_n) \} = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, у экспоненциального распределения среднее остаточное время совпадает со средним временем «нового» объекта. В этом смысле объекты, подчиняющиеся экспоненциальному закону, проработавшие безотказно некоторое время, ничуть не хуже новых. От-

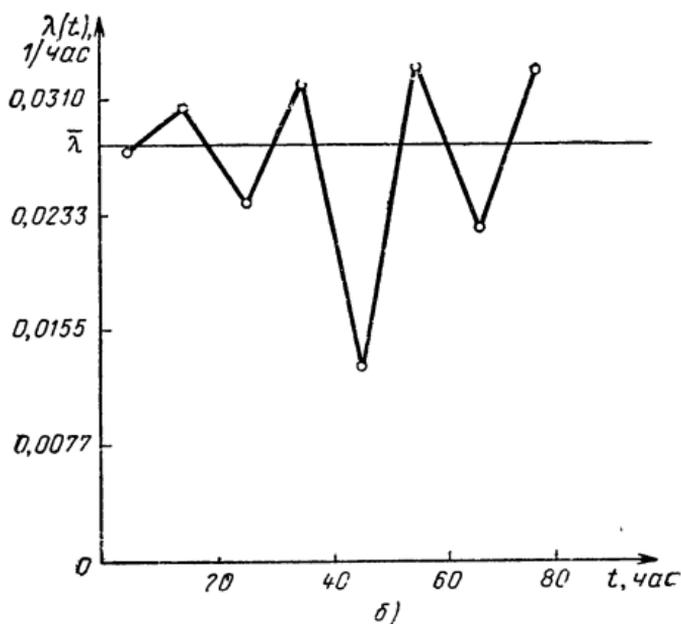
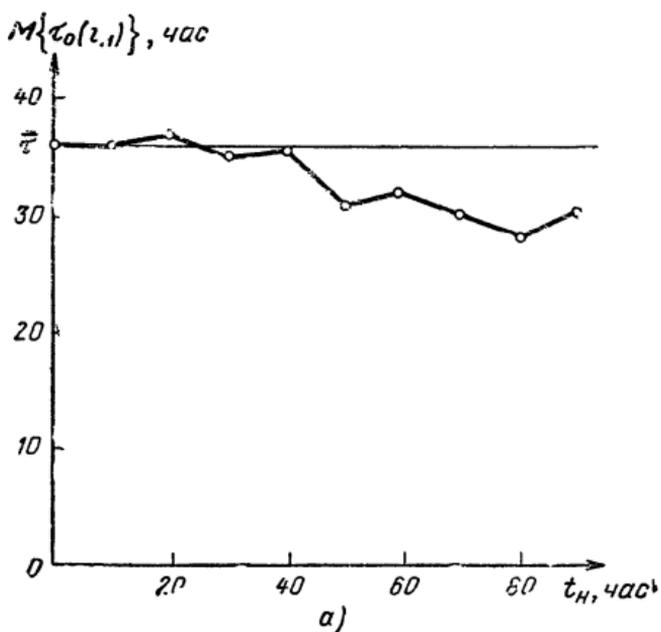


Рис. 59. Поведение среднего остаточного времени (а) и интенсивности отказов (б) по данным табл. 1.  
 $\bar{\lambda}, \bar{\tau}$  — соответствующие теоретические значения

сюда следует, в частности, что такие объекты нет смысла принудительно заменять при профилактических ремонтах.

### Монотонно-возрастающая интенсивность отказов

Для значительной части деталей и систем характерен постепенный рост интенсивности отказов  $\lambda(t)$ . Рост интенсивности означает, что с увеличением наработки возрастает опасность отказа. Естественной причиной роста опасности отказа может явиться износ. Когда износ мал, опасность отказа сравнительно невелика, но при большом износе эта опасность становится ощутимой.

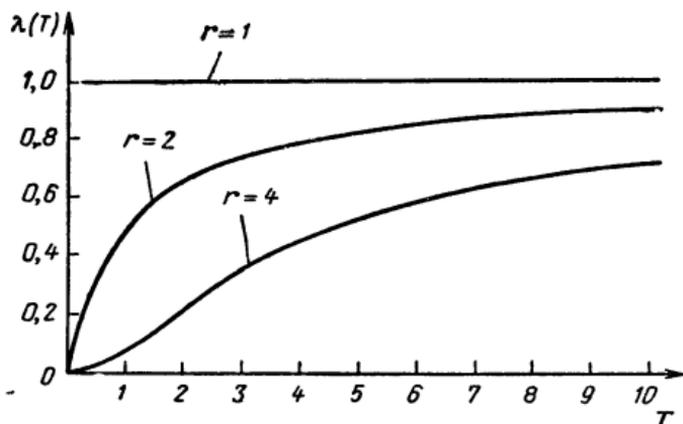


Рис. 60 Интенсивность отказов гамма-распределения при  $\lambda=1$ .

Рассмотрим интенсивность отказов гамма-распределения. Функция гамма-распределения задана формулой (73), и на основе равенства (215) легко получить, что

$$\lambda(T) = \frac{\lambda^r T^{r-1}}{(r-1)! \left[ 1 + \frac{1}{1!} \lambda T + \frac{1}{2!} (\lambda T)^2 + \dots + \frac{(\lambda T)^{r-1}}{(r-1)!} \right]} \quad (223)$$

При увеличении  $T$  имеет место монотонный рост  $\lambda(T)$ , причем  $\lambda(T)$  стремится при  $T \rightarrow \infty$  к пределу, равному  $\lambda$  (рис. 60).

Нормальное распределение также имеет монотонно возрастающую интенсивность отказа, но в отличие от

гамма-распределения интенсивность отказов  $\lambda(T) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \infty$  (рис. 61). Неограниченный рост интенсивности отказов наблюдается и для распределения Вейбулла — Гнеденко, заданного формулой (199), когда параметр  $\gamma > 1$ . Выражение для интенсивности отказов этого распределения имеет простой вид

$$\lambda(T) = \gamma \frac{T^{\gamma-1}}{\beta}. \quad (224)$$

Графики изменения интенсивности  $\lambda(T)$  распределения Вейбулла — Гнеденко при различных значениях параметра  $\gamma$  показаны на рис. 62. Наличие порога чувствительности  $t_0$  сдвигает кривую интенсивности вправо на величину  $t_0$ .

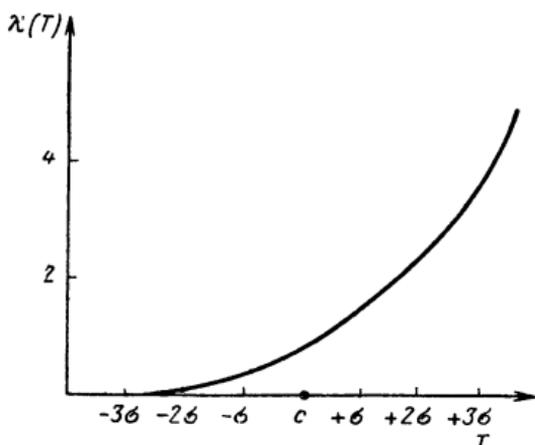


Рис. 61 Интенсивность отказов нормального распределения

Законы распределения времени безотказной работы, имеющие возрастающую интенсивность отказов, иногда называют законами «стареющего» типа. Сводка формул для  $F(T)$ ,  $f(T)$  и  $\lambda(T)$  дана в табл. 10.

Отметим интересную особенность интенсивности отказов распределения (191). Плотность этого распределения имеет вид

$$f(T) = f_1(T) \prod_{i=2}^k (1 - F_i(T)) + \dots + f_k(T) \prod_{i=1}^{k-1} (1 - F_i(T)). \quad (225)$$

Отсюда следует, что интенсивность отказов имеет вид

$$\lambda(T) = \frac{f(T)}{1-F(T)} = \frac{f_1(T)}{1-F_1(T)} + \dots + \frac{f_k(T)}{1-F_k(T)}, \quad (226)$$

т. е. равна сумме интенсивностей отказов распределений  $F_i(T)$ .

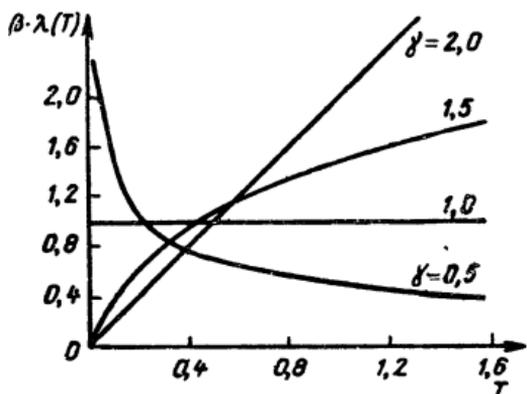


Рис 62 Интенсивность отказов распределения Вейбулла — Гнеденко.

Таким образом, установлен следующий факт. Если время безотказной работы системы определяется как минимум из системы  $k$  независимых случайных величин, имеющих закон распределения  $F_i(T)$  с интенсивностью отказов  $\lambda_i(T)$ , то интенсивность отказов системы  $\lambda(T) =$

$$= \sum_{i=1}^k \lambda_i(T).$$

Отсюда, в частности, следует, что распределение минимума из системы случайных величин с законами «стареющего» типа есть также распределение «стареющего» типа.

### Немонотонная интенсивность отказов

В современном производстве предусматриваются специальные меры по предотвращению технологических дефектов. В последние годы эффективность этих мер существенно повысилась за счет использования совершенных методов неразрушающего контроля: рентгеноскопии, ультразвуковых дефектоскопов, цветной дефектоскопии

Сводная таблица распределений

Наименование распределения	Плотность $f(T)$	Функция распределения $F(T)$	Интенсивность отказов $\lambda(T)$	Математическое ожидание $M\{\tau\}$	Дисперсия $D\{\tau\}$
Экспоненциальное распределение*	$\lambda e^{-\lambda T}$	$1 - e^{-\lambda T}$	$\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Гамма-распределение*	$\frac{\lambda^r T^{r-1} e^{-\lambda T}}{\Gamma(r)}$ ( $r$ — целое число)	$1 - e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda T)^k}{k!}$	$\frac{\lambda^r T^{r-1}}{\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(r-1)!}{k!} (\lambda T)^k}$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$
Нормальное распределение	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(T-c)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{T-c}{\sigma}\right)$	$\frac{-(T-c)^2}{e \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma\Phi\left(\frac{c-T}{\sigma}\right)}}$	$c$	$\sigma^2$

\* При наличии порога чувствительности  $t_0$  в выражениях для  $f(T)$ ,  $F(T)$  и  $\lambda(T)$  вместо аргумента  $T - t_0$ ; соответствующие плотности, функции распределения, интенсивности отказов равны нулю при  $T < t_0$ ; к математическим ожиданиям распределений прибавляется величина  $t_0$ ; Дисперсия при введении порога чувствительности остаются без изменений.

Наименование распределения	Плотность $f(T)$	Функция распределения $F(T)$	Интенсивность отказов $\lambda(T)$	Математическое ожидание $M\{\tau\}$	Дисперсия $D\{\tau\}$
Логарифмическое нормальное распределение *	$\frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{T} e^{-\frac{(\lg T - c)^2}{2\sigma^2}}$ $A = \lg e = 0,4343$	$\Phi\left(\frac{\lg T - c}{\sigma}\right)$	$Ae^{-\frac{(\lg T - c)^2}{2\sigma^2}}$ $\sqrt{2\pi\sigma} \Phi\left(\frac{c - \lg T}{\sigma}\right)$	$\frac{c}{A} + \frac{\sigma^2}{2A^2}$	$\frac{2}{e} \frac{c}{A} + \frac{\sigma^2}{A^2} \times$ $\times \left( e^{\frac{\sigma^2}{A^2}} - 1 \right)$
Релаксационное распределение	$[\mu_0 + \lambda(1 - e^{-\mu T})] \times$ $\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu T}) - (\lambda + \mu_0) T$ $\times e^{-\frac{\lambda}{\mu} - (\lambda + \mu_0) T - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu T}}$	$1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu} - (\lambda + \mu_0) T - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu T}}$	$\mu_0 + \lambda(1 - e^{-\mu T})$	**	**
Распределение Вейбулла — Гнеденко *	$e^{-\frac{T\gamma}{\beta}} \frac{\gamma}{\beta} T^{\gamma-1}$	$1 - e^{-\frac{T\gamma}{\beta}}$	$\frac{\gamma}{\beta} T^{\gamma-1}$	**	**
Распределение минимума экспоненциально и нормально распределенной случайной величины	$e^{-\lambda T} \left[ \lambda \Phi\left(\frac{c - T}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T - c)^2}{2\sigma^2}} \right]$	$1 - e^{-\lambda T} \Phi\left(\frac{c - T}{\sigma}\right)$	$\lambda + \frac{c}{\sigma} \sqrt{2\pi} \Phi\left(\frac{c - T}{\sigma}\right)$	**	**

\* См. сноску на стр. 145.

\*\* Через элементарные функции не выражаются.

и т. д. Тем не менее приходится считаться с тем, что отдельные случайные «сбои» технологического процесса приводят к появлению «слабых» мест, разрушающихся при пиковых нагрузках. Укажем, например, на соединения пайкой. В настоящее время нет достаточно удобных производственных методов контроля паяных соединений проводников. Поэтому «слабое» соединение может остаться незамеченным при выходном контроле устройства, что приведет к его разрушению в процессе эксплуатации. С целью предохранения от проникновения к потребителю дефектных экземпляров прибегают к «тренировке». Тренировка состоит в том, что выпускаемые экземпляры устройств подвергаются относительно кратковременным специальным испытаниям, во время которых величина нагрузки близка к предельной, встречающейся в эксплуатации. Так устройства, подвергающиеся на эксплуатации вибрационным нагрузкам, проходят испытания на вибростендах. Испытания такого рода проводятся в расчете, что выявятся «слабые» места дефектных экземпляров, и к потребителю поступят лишь устройства, не имеющие технологических дефектов.

Указанные испытания не могут быть слишком длительными, так как это привело бы к износу устройств и к снижению их работоспособности. Но время испытания не может быть и слишком малым, так как при малом времени могут не проявиться «слабые» места дефектных экземпляров. Дороговизна испытаний и опасение износа устройств приводят к тому, что на эксплуатацию все же попадает некоторое, обычно весьма незначительное, число устройств с дефектами.

Рассмотрим теперь описываемую ситуацию с вычислительных позиций. Если некоторая часть устройств имеет технологические дефекты — «слабые» места, — а основная масса выходит из строя по причине износа (старения) элементов, то распределение времени безотказной работы является суперпозицией двух распределений: экспоненциального распределения для дефектных экземпляров и распределения, отвечающего характеру износа, для остальных экземпляров. Обозначим через  $F_1(T)$  функцию распределения времени безотказной работы дефектных экземпляров и через  $\varepsilon$  — долю этих экземпляров в общей совокупности, а через  $F_2(T)$  — функцию распределения времени безотказной работы осталь-

ных экземпляров. Понятно, что их доля в общей совокупности будет равна  $1-\varepsilon$ . Тогда функция распределения для всей совокупности в целом представится как

$$F(T) = \varepsilon F_1(T) + (1 - \varepsilon) F_2(T). \quad (227)$$

Остановимся на часто встречающейся ситуации, когда  $F_2(T)$  есть гамма-распределение. Плотность для (227) имеет в соответствии с (33) и (73) вид

$$f(T) = \varepsilon \lambda_1 e^{-\lambda_1 T} + (1 - \varepsilon) \frac{\lambda_2^r T^{r-1} e^{-\lambda_2 T}}{\Gamma(r)}. \quad (228)$$

На рис. 63 представлен график  $f(T)$  для значений параметров  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $r = 5$ ,  $\varepsilon = 0,1$  (кривая 3) и отдельно обе компоненты распределения (кривые 1, 2).

В результате эксплуатации в течение времени  $t_H$  значительное число дефектных экземпляров погибнет. «Выжившие» экземпляры будут обладать в среднем боль-

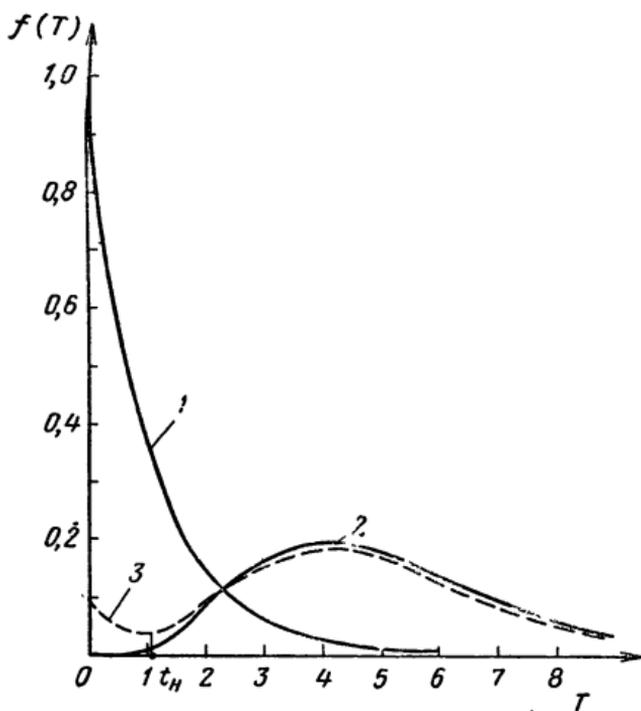


Рис 63 Плотность экспоненциального распределения (кривая 1), гамма-распределения (кривая 2) и их суперпозиция с весами  $\varepsilon=0,1$ ;  $1-\varepsilon=0,9$  (кривая 3).

шой долговечностью. Следовательно, если экземпляр, проработавший время  $t_H$ , выжил, то вероятность его отказа на промежутке времени от  $t_H$  до  $t_H + \Delta_T$  будет меньше, чем вероятность его отказа на промежутке от 0 до  $\Delta_T$ . Именно поэтому говорят, что имеет место тренировка. Тренируемость объектов находит свое выражение

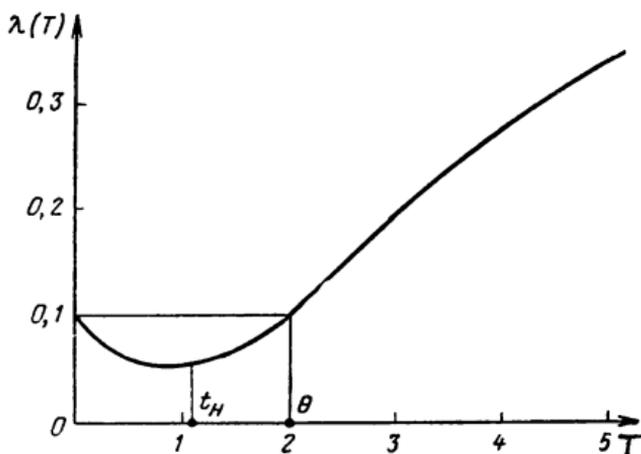


Рис 64 Интенсивность отказов при суперпозиции экспоненциального распределения и гамма-распределения.

в поведении интенсивности отказов  $\lambda(T)$ . На рис. 64 показана интенсивность отказов для распределения, изображенного на рис. 63. Как видно из рис. 64, имеется участок снижения интенсивности отказов. Этот участок отвечает периоду гибели «слабых» экземпляров, или, иначе говоря, периоду «естественного отбора». В дальнейшем по мере роста износа элементов интенсивность отказов начинает расти и может достичь больших величин.

Из рис. 64 видно, что по крайней мере до времени  $\theta$  нет смысла в профилактической замене элементов, так как такая замена могла бы только привести к росту интенсивности отказов. Понятно также, что если бы в условиях производства осуществлялась тренировка, то ее следовало бы проводить до момента времени, примерно равного  $t_H$ , когда основная масса дефектных экземпляров уже погибнет. Заметим, что для тренируемых устройств с точки зрения обеспечения высокой надеж-

ности менее опасны грубые технологические дефекты. Такие дефекты легко выявляются в процессе тренировки. Иначе обстоит дело, когда технологический дефект носит скрытый характер, т. е. среднее время до наступления отказа у дефектного экземпляра сравнимо по величине со средним временем до отказа по износу экземпляров высокого качества. На рис. 64 заметен явный провал кривой  $\lambda(T)$ ; соотношение средних времен здесь таково:  $M\{\tau^{(1)}\} = 1/\lambda_1 = 1$ ,  $M\{\tau^{(2)}\} = r/\lambda_2 = 5$ , т. е. среднее время до отказа дефектного экземпляра в 5 раз меньше, чем до отказа по износу основной массы изделий. Если бы это соотношение было иным, например при  $r=5$ ,  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=2,5$ ,  $M\{\tau^{(2)}\}/M\{\tau^{(1)}\}=2$ , то в этом случае тренировка практически не дала бы эффекта. Действительно, если тренировать до гибели «слабых» экземпляров, то это приведет к существенному износу и всех остальных. Если тренировать малое время, то погибнет лишь малая часть дефектных экземпляров. Сказанное означает, что в производственных условиях следует опасаться не так грубых промахов, как относительно небольших нарушений в ходе технологического процесса. Поддержание технологической дисциплины и общего порядка оказывает здесь решающее влияние.

Вернемся теперь к равенству (221). Пусть  $\lambda(t)$  монотонно возрастает по  $t$ . Тогда если  $t_n^{(1)} > t_n^{(2)}$ , то из этой формулы следует, что

$$M\{\tau_0(t_n^{(1)})\} > M\{\tau_0(t_n^{(2)})\}. \quad (229)$$

Это означает, что для законов распределения стареющего типа с возрастающей интенсивностью отказов математическое ожидание остаточного времени монотонно убывает по  $t_n$ . Такое обстоятельство выглядит совершенно естественным, так как с ростом предварительной наработки  $t_n$  растет износ, и остаток долговечности должен убывать.

Однако может иметь место и обратное явление, которое на первый взгляд кажется странным. А именно, может иметь место возрастание величины среднего остаточного времени. Действительно, пусть интенсивность отказов  $\lambda(t)$  с некоторого  $t=t_n^*$  начинает монотонно убывать.

Тогда если  $t_{\text{н}}^* < t_{\text{н}}^{(1)} < t_{\text{н}}^{(2)}$ , то из (221) следует, что

$$M\{\tau_0(t_{\text{н}}^{(1)})\} < M\{\tau_0(t_{\text{н}}^{(2)})\}, \quad (230)$$

т. е. с некоторого момента среднее остаточное время будет возрастать. Кроме того, можно показать, что если  $\lambda(t)$  стремится к нулю, то  $M\{\tau_0(t_{\text{н}})\} \rightarrow \infty$ , и наоборот, если  $\lambda(t) \rightarrow \infty$ , то  $M\{\tau_0(t_{\text{н}})\} \rightarrow 0$ .

Рассмотрим несколько примеров. Распределение Бернштейна (152), отвечающее схеме линейного износа, имеет интенсивность отказов, выражающуюся формулой

$$\lambda(T) = \frac{e^{-\frac{(T-c)^2}{2(aT^2+b)}}}{\sqrt{2\pi} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{T-c}{\sqrt{aT^2+b}}\right) \right]} \frac{b + caT}{[b + aT^2]^{3/2}}. \quad (231)$$

Легко убедиться, что  $\lambda(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Поведение  $\lambda(T)$  показано на рис. 65. Падение интенсивности отказов после момента  $\theta$  объясняется тем, что успевают погиб-

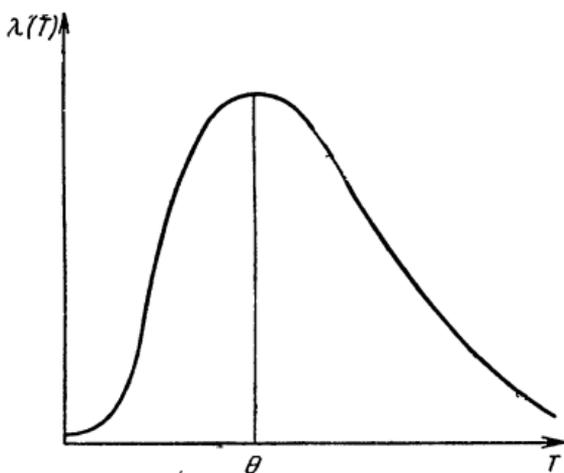


Рис. 65 Поведение интенсивности отказов у логарифмически-нормального распределения и распределения Бернштейна.

нуть экземпляры, обладающие высокой скоростью износа, а скорость износа «выживших» экземпляров относительно мала, и они имеют бóльшую долговечность.

Примерно такой же характер изменения имеет интенсивность отказов у логарифмически-нормального распределения, задаваемого формулой (131):

$$\lambda(T) = \frac{A e^{-\frac{(\lg T - c)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma T \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\lg T - c}{\sigma}\right) \right]}. \quad (232)$$

Можно убедиться, что  $\lambda(T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$  и в этом случае. Для обоих указанных распределений существует точка  $\theta$  максимума интенсивности; поэтому можно утверждать, что начиная с этого момента среднее остаточное время безотказной работы будет возрастать.

Для распределения Вейбулла — Гнеденко при значении параметра  $\gamma < 1$  интенсивность отказов монотонно убывает по  $T$ :

$$\lambda(T) = \frac{\gamma}{\beta} T^{\gamma-1}. \quad (233)$$

В этом случае  $M\{\tau_0(t_n)\}$  монотонно возрастает по  $t_n$  на всем интервале  $(0, \infty)$ . Так, например, для  $\gamma = 1/2$  можно получить выражение ( $\beta = 1$ ):

$$M\{\tau_0(t_n)\} = 2(1 + \sqrt{t_n}).$$

Таким образом, немонотонный характер изменения  $\lambda(T)$ , увеличение среднего остаточного времени и возможность тренировок наблюдаются довольно часто.

До сих пор, говоря о тренировке, мы ссылались на гибель «слабых» экземпляров. Однако в ряде систем наблюдается свойство тренируемости, которое нельзя объяснить на этой основе. Укажем, например, на способность металлов тренироваться за счет приложения малой циклической нагрузки. Известно [27], что металлы, тренированные малой циклической нагрузкой, способны выдерживать высокие циклические нагрузки в течение гораздо более длительного времени, чем нетренированные. При этом характерной особенностью является то, что не наблюдается гибели экземпляров в процессе тренировки. Поэтому следует предположить, что в процессе тренировки идет «укрепление здоровья» объектов. Процесс увеличения стойкости металла при его

тренировке получил в теории усталостной долговечности металлов название упрочнения.

В силу сказанного следует различать два вида тренировки. Первый вид может быть назван как «тренировка выжиганием». Термин «выжигание» имеет источником радиопромышленность, где «слабые» экземпляры «выжигают» путем тренировки в заводских условиях. Второй вид тренировки — «тренировка за счет упрочнения». Упрочнение выступает здесь как процесс, создающий препятствия развитию износа.

Для того чтобы сделать понятие упрочнения более ясным, прибегнем к аналогии с процессом обучения\*.

Рассмотрим процесс обучения крысы в лабиринте\*\*.

Пусть имеется лабиринт, изображенный на рис. 66. По этому лабиринту пропускают крысу. При повороте направо крысу кормят мясом, а при повороте налево вводят в нее яд. Предполагается, что после ввода  $r$  доз яда крыса погибает. Эффект обучения состоит в том, что если крыса повернула направо, то при следующем пропуске через лабиринт вероятность ее поворота направо возрастает. Таким образом, чем больше раз крыса поворачивала направо, тем более вероятно, что она

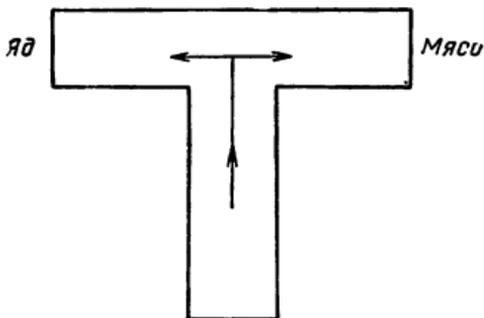


Рис. 66 Схема обучения крысы в лабиринте

будет продолжать делать этот поворот, и тем менее вероятно, что она получит следующую дозу яда. Крыса, обучившаяся поворачивать направо, будет обладать большой долговечностью, так как если она и будет получать дозы яда, то через весьма большие промежутки времени. В значительной мере долговечность крысы определяется ходом начального периода обучения. При первом пропуске, когда крыса еще не обучена, она имеет большую вероятность поворота налево (в теории обу-

\* Эта аналогия была подсказана авторам академиком Линником Ю. В.

\*\* Модели обучения такого типа рассматриваются в книге [7].

чения считается, что эта вероятность равна 0,5), и если процесс обучения сложится неудачно, то крыса получит  $r$  доз яда за малое число пропусков через лабиринт. Если же в начальный период крыса сделает много поворотов направо, то в дальнейшем скажется эффект обучения и ее долговечность будет велика.

Процесс обучения крысы в лабиринте может в известной мере рассматриваться как аналог процесса циклического нагружения металла. Каждый пропуск через лабиринт можно принять за один цикл нагружения. Последовательные дозы яда выступают как единичные повреждения, а эффект обучения — как процесс упрочнения. Весьма важной особенностью рассматриваемой схемы является параллельное действие процессов повреждения и упрочнения. В металлах упрочняющим фактором является выравнивание свойств их зерен за счет перераспределения напряжений. Повреждение состоит в накоплении пустот (развитие линий скольжения в трещины).

Необходимо подчеркнуть, что образующаяся здесь тренировка не связана с гибелью слабых экземпляров. Более того, в начальный период все экземпляры одинаковы по качеству. Вариации времени  $\tau$  безотказной работы диктуются исключительно случайностью процесса накопления повреждений. Тренировка выступает как некоторое свойство «приспосабливаться» к условиям нагружения.

Обратимся теперь к схеме образования логарифмического гамма-распределения (стр. 82). Согласно этой схеме вероятность повреждения за время от  $T$  до  $T + \Delta T$  задается как

$$\gamma(T) = \frac{a\lambda}{1+T} \Delta T + o(\Delta T).$$

Таким образом, по мере увеличения времени  $T$  вероятность  $\gamma(T)$  убывает. Убывание вероятности  $\gamma(T)$  является отражением процесса упрочнения. Процесс накопления повреждений является процессом износа. Поэтому схема образования логарифмического гамма-распределения по своей сути содержит свойство тренируемости объектов. Объект, который за большое время  $t_n$  получит малое число повреждений, окажется упрочненным, и его долговечность будет велика. Если же объект за малое

время  $t_n$  получит большое число повреждений, то, поскольку упрочнение еще мало, он будет иметь малую долговечность. Сказанное находит свое выражение в поведении интенсивности отказов, которая имеет график, подобный изображенному на рис. 65.

Поскольку логарифмически-нормальное распределение, логарифмическое распределение Вейбулла — Гнеденко получены как следствия из логарифмического гамма-распределения, то они также отражают наличие процессов упрочнения. Поэтому естественно, что все три указанных распределения имеют однотипное поведение интенсивности  $\lambda(t)$  отказов и математического ожидания  $M\{\tau_0(t_n)\}$  остаточного времени безотказной работы.

Из проведенного рассуждения следует, что упрочнение приводит к постепенному уменьшению скорости  $M\{\xi(t)\}$  износа. Однако было бы неправильно считать, что если скорость износа уменьшается, то обязательно имеют место упрочнение и тренировка. На самом деле упрочнение и тренировка будут наблюдаться, если помимо уменьшения скорости износа соблюдается еще и свойство сильного перемешивания процесса износа.

Аналогично обстоит дело и с интенсивностью отказов  $\lambda(t)$ . Хотя для распределения (152), полученного при линейном износе, интенсивность отказов ведет себя примерно так же, как и для логарифмически-нормального распределения, тем не менее здесь нет упрочнения. Тренировка, наблюдаемая при линейчатых реализациях, является следствием «выжигания» экземпляров, имеющих большую скорость износа.

Из сказанного видно, что при анализе явления тренировки нельзя исходить из внешнего вида поведения скорости износа или интенсивности отказов. Всякий раз для выявления причин тренируемости необходим анализ физической картины явления. Помимо этого некоторые основания для предположения о причинах тренируемости может дать эксперимент по ступенчатому нагружению объекта, подобный проводимым при циклическом нагружении металлов [27]. Суть этого эксперимента состоит в том (рис. 67), что объект в течение некоторого, сравнительно длительного времени тренируется малой нагрузкой  $S_n$ , а затем «доламывается» при относительно высокой нагрузке  $S_k$ . Если при некоторой длительности  $t_n$  тренировки обнаруживается, что долговечность

на уровне  $S_k$  в среднем больше, чем у нетренированных объектов, и при этом в процессе тренировки не наблюдается гибели экземпляров, то имеются основания полагать, что тренировка объектов достигнута за счет упрочнения.

Анализ поведения интенсивности отказов  $\lambda(t)$  важен при оценке целесообразности профилактической замены элементов. С момента, когда интенсивность отказов  $\lambda(t)$  начала убывать, нет смысла прибегать к профилактиче-

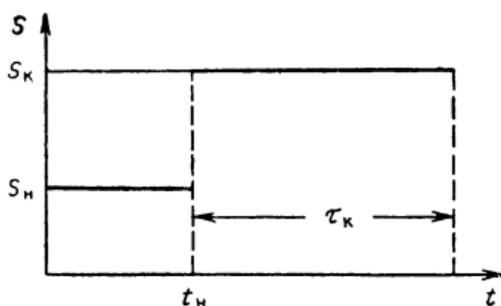


Рис. 67 Схема ступенчатого нагружения.

ской замене. Так при интенсивности отказов, изображенной на рис. 65, профилактическая замена может оказаться целесообразной до момента времени  $\theta$ ; если же объект проработал время, большее чем  $\theta$ , профилактическая замена теряет смысл.

Тот факт, что поведение интенсивности отказов самым существенным образом влияет на оценку целесообразности профилактической замены элементов, заставляет с особой тщательностью относиться к возможности использования того или иного распределения для описания опытных данных о величинах  $\tau_i$ . Так, например, данные по усталостной долговечности примерно с одной и той же мерой согласия могут быть выравнены на основе логарифмически-нормального распределения и распределения Вейбулла — Гнеденко [40]. Однако поведение интенсивностей отказов этих распределений является существенно разным. Как правило, при выравнивании данных по усталостной долговечности параметр  $\gamma$  получается больше единицы. В этом случае, как уже указывалось, интенсивность отказов имеет монотонный

рост. В то же время логарифмически-нормальное распределение имеет немонотонную интенсивность отказов (рис. 65). Выводы о целесообразности профилактической замены элементов могут оказаться противоположными в зависимости от выбранного распределения.

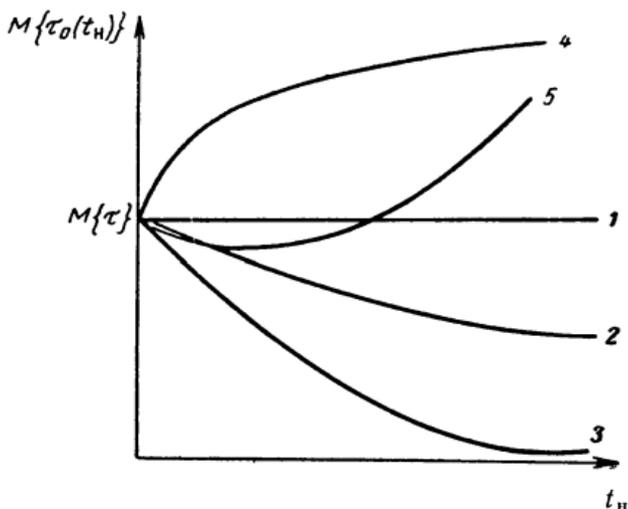


Рис 68 Качественный характер поведения  $M\{\tau_0(t_n)\}$  для различных распределений  
 1 — экспоненциальное, 2 — гамма-распределение, 3 — нормальное, Вейбулла — Гнеденко при  $\gamma > 1$ , 4 — Вейбулла — Гнеденко при  $\gamma < 1$ , 5 — логарифмически-нормальное

Для того чтобы не сделать грубых ошибок, полезно при наличии нескольких сотен данных о величинах  $\tau_i$  прибегнуть не только к анализу и выравниванию полигона распределения, но и к анализу поведения математического ожидания остатка долговечности  $M\{\tau_0(t_n)\}$ . На рис. 68 приводятся графики, иллюстрирующие характер изменения  $M\{\tau_0(t_n)\}$  для различных типов распределений.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Картина отказа, как правило, оказывается весьма сложной, а знание его физической природы — более или менее относительным. Однако не всегда удается проследить все факторы, влияющие на отказ. Поэтому модель возникновения отказа всегда оказывается в той или иной степени приближенной. Это означает, что приня-

тый закон распределения времени  $\tau$  безотказной работы отражает лишь некоторые черты наблюдаемого явления. Возникающие здесь трудности приводят к необходимости учитывать не только физику явления отказа, но и конкретные потребности решаемой задачи. Отнюдь не для всех задач расчета надежности требуются очень подробные сведения о физической картине отказа и виде распределения времени безотказной работы. Было бы в корне неправильно утверждать, что всякий раз, когда решаются задачи анализа и расчета надежности, следует стремиться возможно точнее определить вид закона распределения времени безотказной работы. Достаточно указать, что если практический интерес представляет среднее время безотказной работы, то для его оценки по данным  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  вовсе нет надобности устанавливать закон распределения, так как оценка среднего времени безотказной работы будет задаваться средней арифметической величиной  $\bar{\tau}$ .

Однако если всегда пренебрегать необходимостью возможно более точного описания распределения величины  $\tau$ , то можно впасть в грубые ошибки и нанести существенный ущерб надежности изделия. Для того чтобы убедиться в этом, воспользуемся данными табл. 4 и покажем, что при обработке этих данных на основе различных законов распределения времени безотказной работы будут получены совершенно различные оценки надежности.

Пусть требуется на основе 22 опытных данных (имеются в виду результаты испытаний на долговечность при высокой нагрузке  $\sigma_{max}=30 \text{ кг/мм}^2$ , табл. 4) найти вероятность отказа в интервале  $(0; 0,45 \cdot 10^5)$  циклов и время  $T_{0,01}$ , за которое успеет отказать один процент изделий (квантиль уровня 0,01). Предполагаем, что картина отказа не изучена и производится формальное выравнивание данных по различным законам распределений. Результаты этого выравнивания приведены в табл. 11. Все упомянутые в ней распределения обнаруживают хорошее согласие с опытными данными. Оценка согласия производилась с помощью критерия Колмогорова [4, стр. 126]. Максимальное расхождение эмпирического и теоретического распределений не превышало величины 0,1 для первых двух распределений табл. 11 и для остальных — величины 0,15. Эти откло-

нения значительно меньше допустимых при 20%-ном уровне значимости [4, стр. 409].

Таблица 11

Результаты выравнивания данных табл. 4 по различным распределениям

Вид распределения	Параметры	$P\{\tau \leq 0,45 \cdot 10^5\}$	$T_{0,01}$
Логарифмически-нормальное	$c=5,084$ $\sigma=0,189$	0,011	$4,4 \cdot 10^4$
Распределение Бернштейна с параметром $b=0$	$c=1,21 \cdot 10^5$ $\sqrt{a}=0,437 \cdot 10^5$	0,00005	$6 \cdot 10^4$
Нормальное неусеченное	$c=1,33 \cdot 10^5$ $\sigma=0,6 \cdot 10^5$	0,071	Меньше нуля
Вейбулла—Гнеденко	$\gamma=2,15$ $\beta=2,61$	0,067	$0,18 \cdot 10^4$

Параметры  $\gamma$  и  $\beta$  вычислены в шкале времени, где за единицу принято  $10^5$  циклов.

Из таблицы видно, что оценка вероятности безотказной работы резко отличается для различных распределений. Колебания величин  $T_{0,01}$  не столь велики, однако и они в случае их использования в качестве гарантийного срока могут сильно повлиять на расчетную надежность изделия.

Следовательно, привлечение физической картины отказа и выбор определенного распределения на основе этого были бы весьма желательными. Для этого приведем табл. 12, которая классифицирует задачи расчета надежности и содержит указания о приемлемости того или иного закона распределения времени безотказной работы. Таблица построена следующим образом. Если при решении задачи закон распределения безразличен, то в столбце «вид распределения» стоит прочерк. Если вне зависимости от действительного закона распределения времени  $\tau$  можно принять некоторый стандартный тип закона, то указывается его название. Если требуется подробное знание физической картины и построение модели отказа, то пишется буква «М».

## Классификация задач расчета надежности

Тип задачи расчета надежности	Вид распределения
Оценка среднего времени безотказной работы	—
Оценка коэффициента использования	—
Оценка коэффициента вариации времени безотказной работы	—
Расчет многостаночного обслуживания	Экспоненциальное
Расчет ремонтируемого резерва	Экспоненциальное
Расчет вероятности отказа сложной системы после многократных аварийных замен элементов	Экспоненциальное
Расчет профилактических замен элементов при монотонно возрастающей интенсивности отказов	Гамма-распределение
Расчет вероятности отказа большой цепной системы с независимыми элементами	Вейбулла—Гнеденко
Оценка вероятности безотказной работы при малом числе испытываемых образцов	<i>M</i>
Расчет ненагруженного резерва при монотонно возрастающей интенсивности отказа	Гамма-распределение
Форсированные и ускоренные испытания надежности	<i>M</i>

Приведенная таблица, конечно, не является исчерпывающей, но из нее видно, что ситуации, когда надо весьма подробно знать физическую картину и модель отказа, оказываются довольно редкими. В основном, это ситуации, связанные с испытаниями на надежность. Таким образом, если в процессе проектирования системы можно использовать некоторый набор стандартных распределений, то при испытаниях систем и их элементов необходимо проникать в физическую суть отказов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица III

$$\text{Функция Лапласа } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8437	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987									

Для отрицательных значений аргумента  $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$   
 Пример. Пусть  $x=-0,53$ ;  $\Phi(-0,53)=1-\Phi(0,53)=1-0,7019=0,2981$ .

Обратная функция Лапласа  $\Psi(\nu)$ 

$\nu$	$\Psi(\nu)$	$\nu$	$\Psi(\nu)$	$\nu$	$\Psi(\nu)$	$\nu$	$\Psi(\nu)$
0,01	-2,3263	0,26	-0,6433	0,51	0,0251	0,76	0,7063
0,02	-2,0537	0,27	-0,6128	0,52	0,0502	0,77	0,7388
0,03	-1,8808	0,28	-0,5828	0,53	0,0753	0,78	0,7722
0,04	-1,7507	0,29	-0,5534	0,54	0,1004	0,79	0,8064
0,05	-1,6449	0,30	-0,5244	0,55	0,1257	0,80	0,8416
0,06	-1,5548	0,31	-0,4958	0,56	0,1510	0,81	0,8779
0,07	-1,4758	0,32	-0,4677	0,57	0,1764	0,82	0,9154
0,08	-1,4051	0,33	-0,4399	0,58	0,2019	0,83	0,9542
0,09	-1,3408	0,34	-0,4125	0,59	0,2275	0,84	0,9945
0,10	-1,2816	0,35	-0,3853	0,60	0,2533	0,85	1,0364
0,11	-1,2265	0,36	-0,3585	0,61	0,2793	0,86	1,0803
0,12	-1,1750	0,37	-0,3319	0,62	0,3055	0,87	1,1264
0,13	-1,1264	0,38	-0,3055	0,63	0,3319	0,88	1,1750
0,14	-1,0803	0,39	-0,2793	0,64	0,3585	0,89	1,2265
0,15	-1,0364	0,40	-0,2533	0,65	0,3853	0,90	1,2816
0,16	-0,9945	0,41	-0,2275	0,66	0,4125	0,91	1,3408
0,17	-0,9542	0,42	-0,2019	0,67	0,4399	0,92	1,4051
0,18	-0,9154	0,43	-0,1764	0,68	0,4677	0,93	1,4758
0,19	-0,8779	0,44	-0,1510	0,69	0,4958	0,94	1,5548
0,20	-0,8416	0,45	-0,1257	0,70	0,5244	0,95	1,6449
0,21	-0,8064	0,46	-0,1004	0,71	0,5534	0,96	1,7507
0,22	-0,7722	0,47	-0,0753	0,72	0,5828	0,97	1,8808
0,23	-0,7388	0,48	-0,0502	0,73	0,6128	0,98	2,0537
0,24	-0,7063	0,49	-0,0251	0,74	0,6433	0,99	2,3263
0,25	-0,6745	0,50	0,0000	0,75	0,6745		

ФУНКЦИИ  $y_1(x) = \ln \frac{1}{1-x}$  И  $y_2(x) = \ln \ln \frac{1}{1-x}$

$x$	$y_1(x)$	$y_2(x)$									
0,01	0,010	-4,600	0,26	0,301	-1,200	0,51	0,713	-0,338	0,76	1,427	0,356
0,02	0,020	-3,902	0,27	0,315	-1,156	0,52	0,734	-0,309	0,77	1,470	0,385
0,03	0,030	-3,491	0,28	0,329	-1,113	0,53	0,755	-0,281	0,78	1,514	0,415
0,04	0,041	-3,199	0,29	0,342	-1,072	0,54	0,777	-0,253	0,79	1,561	0,445
0,05	0,051	-2,970	0,30	0,357	-1,031	0,55	0,799	-0,225	0,80	1,609	0,476
0,06	0,062	-2,783	0,31	0,371	-0,991	0,56	0,821	-0,197	0,81	1,661	0,507
0,07	0,073	-2,623	0,32	0,386	-0,952	0,57	0,844	-0,170	0,82	1,715	0,539
0,08	0,083	-2,484	0,33	0,400	-0,915	0,58	0,868	-0,142	0,83	1,772	0,572
0,09	0,094	-2,361	0,34	0,416	-0,878	0,59	0,892	-0,115	0,84	1,833	0,606
0,10	0,105	-2,250	0,35	0,431	-0,842	0,60	0,916	-0,087	0,85	1,897	0,640
0,11	0,116	-2,150	0,36	0,446	-0,807	0,61	0,942	-0,061	0,86	1,966	0,676
0,12	0,128	-2,057	0,37	0,462	-0,772	0,62	0,968	-0,033	0,87	2,040	0,713
0,13	0,139	-1,971	0,38	0,478	-0,738	0,63	0,994	-0,006	0,88	2,120	0,752
0,14	0,151	-1,892	0,39	0,494	-0,705	0,64	1,022	0,009	0,89	2,207	0,792
0,15	0,163	-1,817	0,40	0,511	-0,672	0,65	1,050	0,049	0,90	2,303	0,834
0,16	0,174	-1,747	0,41	0,528	-0,639	0,66	1,079	0,076	0,91	2,408	0,879
0,17	0,186	-1,680	0,42	0,545	-0,607	0,67	1,109	0,103	0,92	2,526	0,927
0,18	0,198	-1,617	0,43	0,562	-0,576	0,68	1,139	0,131	0,93	2,659	0,978
0,19	0,211	-1,557	0,44	0,580	-0,545	0,69	1,171	0,158	0,94	2,813	1,034
0,20	0,223	-1,500	0,45	0,598	-0,514	0,70	1,204	0,186	0,95	2,996	1,097
0,21	0,236	-1,445	0,46	0,616	-0,484	0,71	1,238	0,213	0,96	3,219	1,169
0,22	0,248	-1,392	0,47	0,635	-0,454	0,72	1,273	0,241	0,97	3,507	1,255
0,23	0,261	-1,342	0,48	0,654	-0,425	0,73	1,309	0,270	0,98	3,912	1,364
0,24	0,274	-1,293	0,49	0,673	-0,395	0,74	1,347	0,298	0,99	4,405	1,527
0,25	0,288	-1,246	0,50	0,693	-0,367	0,75	1,386	0,327			

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Базовский И Надежность. Теория и практика. Изд-во «Мир», 1965.
- 2 Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. ОГИЗ, 1946.
- 3 Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике, Стройиздат, 1965.
- 4 Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики Изд-во «Наука», 1965
- 5 Бруевич Н. Г., Сергеев В. И. Некоторые общие вопросы точности и надежности устройств Сб. «О точности и надежности в автоматизированном машиностроении». Изд-во «Наука», 1964.
- 6 Бруевич Н. Г., Грабовецкий В. П. Об основных направлениях теории надежности. Сб «Кибернетику — на службу коммунизму» Изд-во «Энергия», 1964.
- 7 Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. Физматгиз, 1962.
- 8 Герцбах И. Б. О некоторых вероятностных моделях возникновения отказов В сб «Исследование надежности аппаратуры связи и радиоприемных устройств», ЛатИНТИ, Рига, 1963.
- 9 Гнеденко Б. В. Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда ДАН СССР, 1941, т. 32.
- 10 Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961
11. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности Изд-во «Наука», 1965.
- 12 Ибрагимов И. А. Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов. «Теория вероятностей и ее применения», 1962, вып. 4.
- 13 Каган А. М. Семейства распределений и разделяющие разбиения ДАН СССР, 1963, т. 153, № 3
- 14 Кордонский Х. Б. Приложения теории вероятностей в инженерном деле. Физматгиз, 1963
- 15 Кордонский Х. Б. Расчет и испытания усталостной долговечности Труды 4-го математического съезда, Ленинград, 3—12 июня, 1961, Изд-во «Наука», 1964, том 2.
16. Кордонский Х. Б. Форсированные испытания надежности машин и приборов, «Стандартизация», 1964, № 7.
17. Кордонский Х. Б. Усталостная долговечность в свете общей теории изнашивания. Сб докладов Совещания по статистическим вопросам прочности, Л., 1964.
- 18 Костецкий Б. И. Сопrotивление изнашиванию деталей машин Машгиз, 1959.
19. Крагельский И. В. Трение и износ Машгиз, 1962.
- 20 Леонтьев Л. П., Маргулис А. М. Надежность и срок службы некоторых электронных ламп. Труды Института электроники и вычислительной техники АН ЛССР, 1963, вып. 5.
- 21 Леонтьев Л. П. Введение в теорию надежности радиоэлектронной аппаратуры. Изд-во АН ЛССР, Рига, 1963.

22. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1962.
23. Обеспечение надежности полупроводниковых устройств. Пер. с англ. под ред А. С. Савиной. Изд-во «Мир», 1964.
24. Пароль Н. В. Надежность приемно-усилительных ламп. Изд-во «Советское радио», 1964
25. Половко А. М. Основы теории надежности. Изд-во «Наука», 1964.
26. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
27. Серенсен С. В., Кагаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Машгиз, 1963.
28. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. «Наука», 1965
29. Томашов Н. Д. Теория коррозии и защиты металлов. Изд-во АН СССР, 1959.
30. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Пер. с англ. под ред Е. Б. Дынкина. Изд-во «Мир», 1965.
31. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. Изд-во иностранной литературы, 1956
32. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. Труды Математ. ин-та АН СССР, 1955.
33. Хрущов М. М. Классификация условий и видов изнашивания деталей машин. Сб. «Трение и износ в машинах». АН СССР, 1953.
34. Шишонок Н. А., Репкин В. Ф., Барвинский Л. Л. Основы теории надежности. Изд-во «Советское радио», 1964.
35. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. Изд-во «Советское радио», 1962
36. Aitchison J, Brown J. A The Lognormal Distribution Cambridge, 1957.
37. Berrettoni J. N. Practical Applications of the Weibull Distribution «Ind. Qual. Control», August, 1964
38. Cox D. R. Renewal Theory London, 1962
39. Weibull W. A statistical theory of strength of Materials Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Research 1939, v. 15.
40. Weibull W. Scatter of fatigue life and fatigue strength in aircraft structural materials and parts. «Fatigue in aircraft structures», 1956, № 4.

ИЛЬЯ БОРУХОВИЧ ГЕРЦБАХ  
ХАИМ БОРИСОВИЧ КОРДОНСКИЙ  
**МОДЕЛИ ОТКАЗОВ**

Редактор *А. А. Александрова*  
Обложка художника *Д. З. Фишкина*  
Художественный редактор *В. Т. Сидоренко*  
Технический редактор *Э. Н. Ратникова*

Сдано в набор 22/VI 1966 г.

Подписано в печать 21/X 1966 г.

Формат 84×108/<sub>32</sub> Объем 8,82 п. л+вкл. 0,66 п. л.

Уч -изд. л. 8,926 Т-11234 Заказ 2522

Тираж 15 200 экз. Цена 45 коп.

Бумага типографская № 3

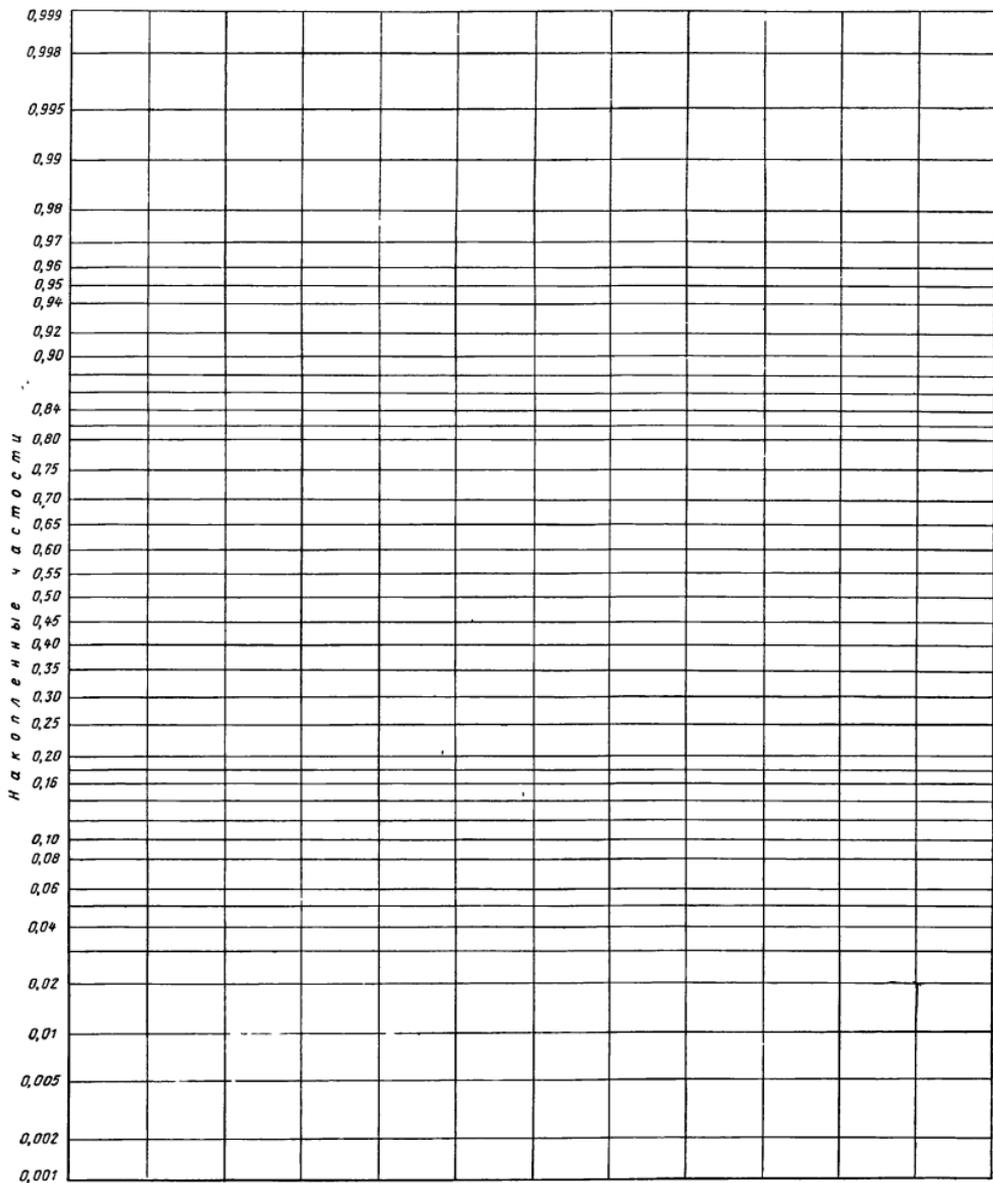
---

Московская типография № 10 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Шлюзовая наб., 10.

---

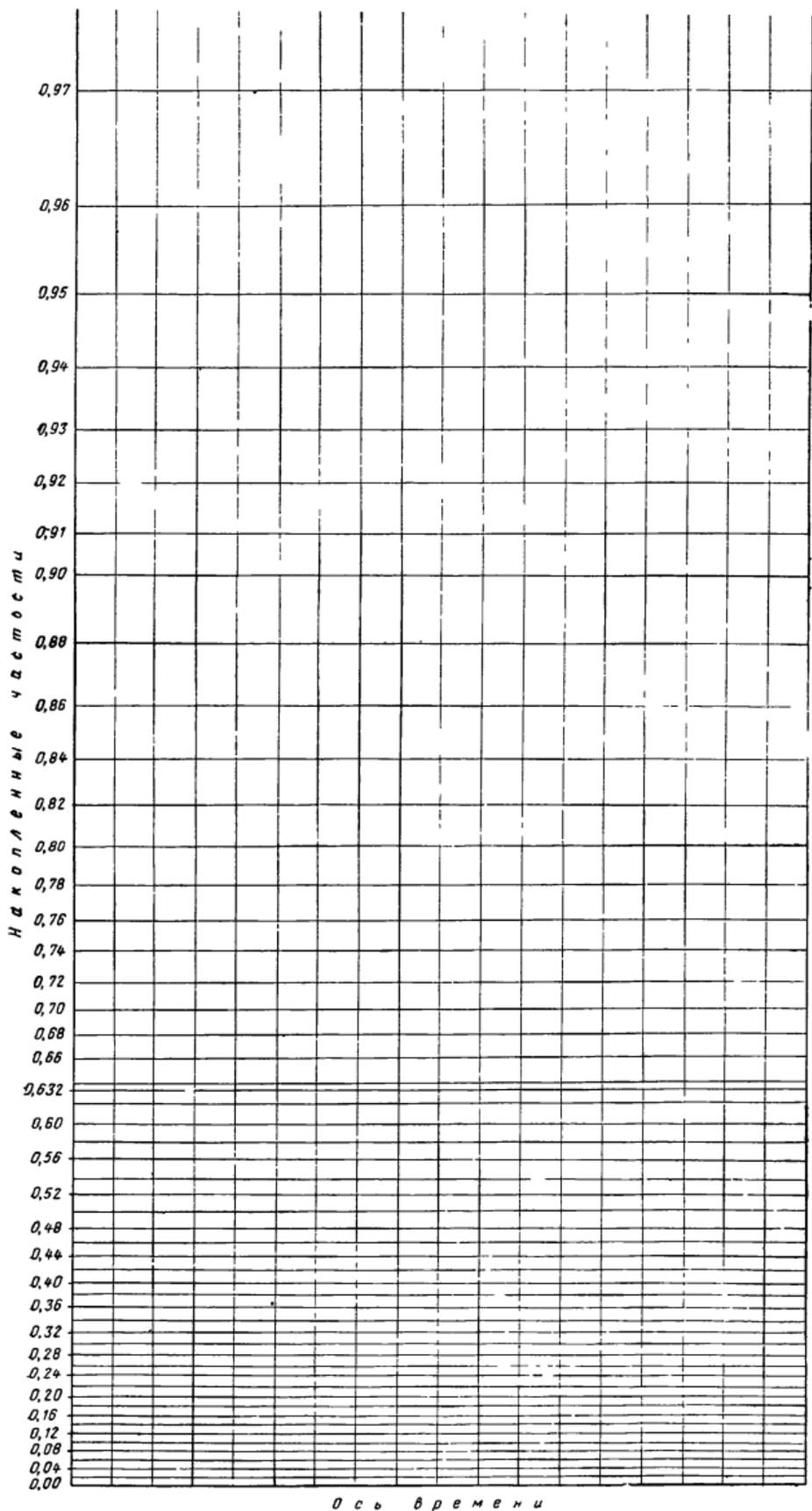
Отпечатано в типографии  
издательства „Советское радио“

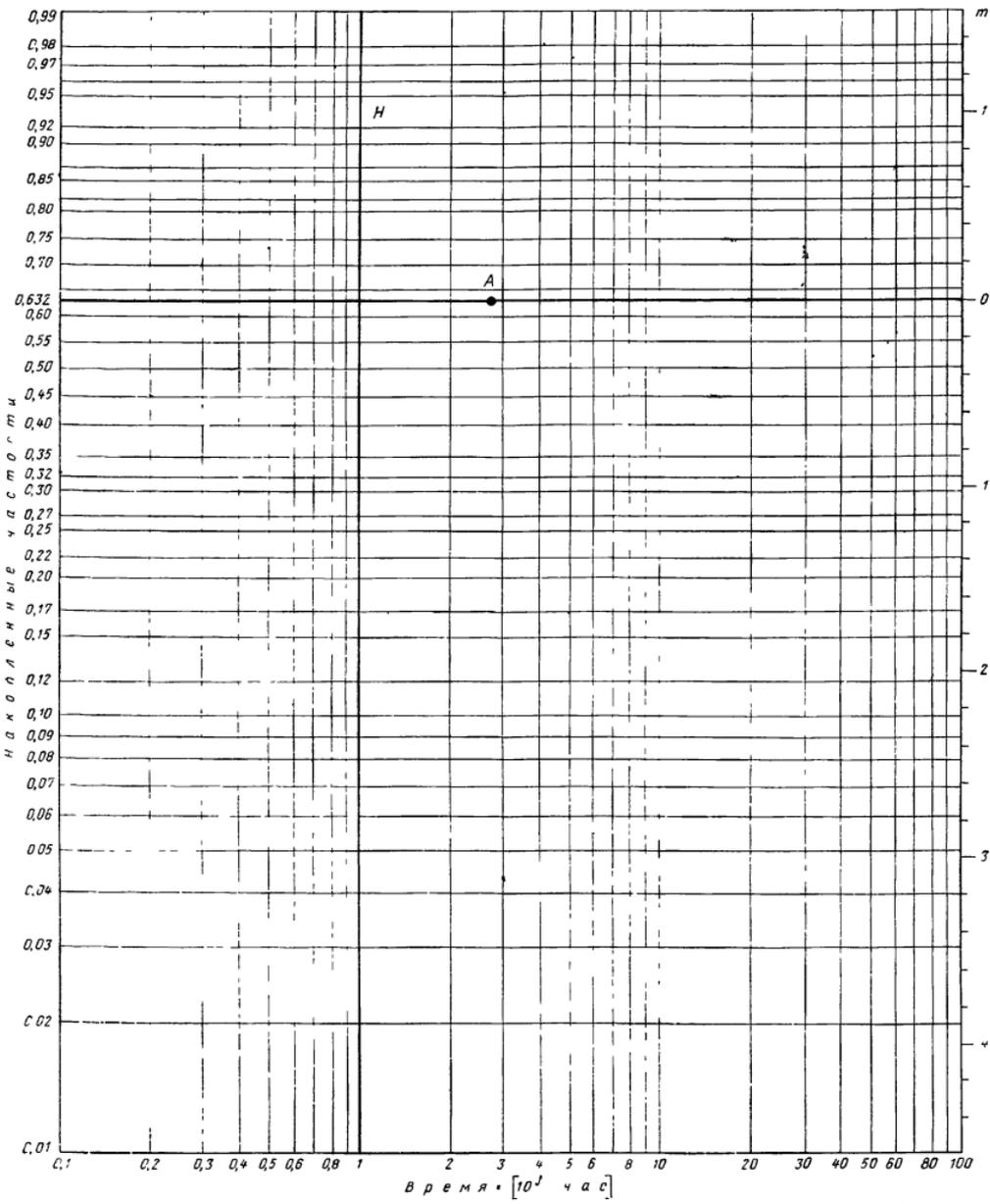
Зак. 1794

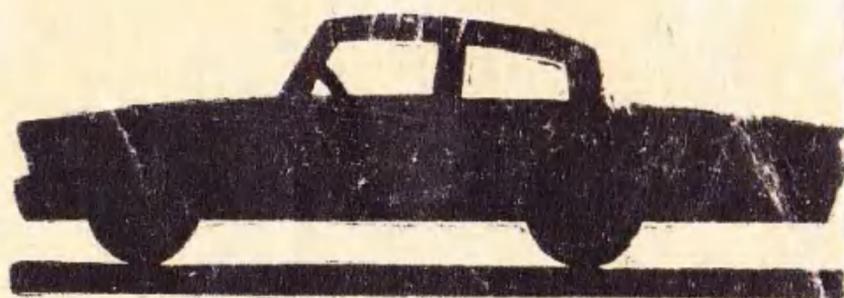
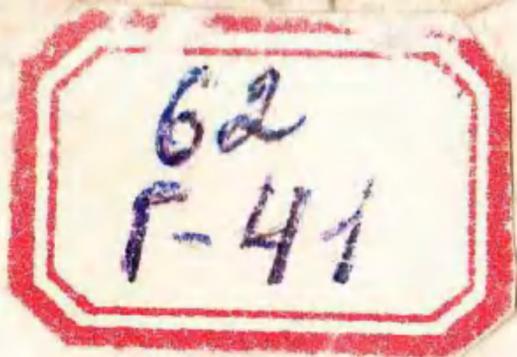


Вероятностная бумага нормального распределения (правила пользования см на стр 29, 72)









БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА ПО НАДЕЖНОСТИ



И. Б. ГЕРЦБАХ

Х. Б. КОРДОНСКИЙ

# МОДЕЛИ ОТКАЗОВ

Цена 45 коп.

а была в р  
свче а, не р  
и  
МО  
рывает  
оценк  
Д  
и

