

Библиотека
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
кружка

М. Б. БАЛК

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ
ПОНЯТИЯ
О ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ

Ф И З М А Т Г И З • 1959

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 9

М. Б. БАЛК

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ
ПОНЯТИЯ
О ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ

6868

БИБЛИОТЕКА ИМУ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

АННОТАЦИЯ

В настоящей книге разобрано применение одного из понятий механики — понятия центра тяжести — к математике и химии (задачи на смеси, сплавы). В каждом параграфе текстам задач предшествует изложение необходимых теоретических сведений.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, прежде всего на школьников старших классов; она будет полезна также учителям средней школы, руководителям школьных математических кружков, студентам физико-математических факультетов.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Введение	9
Задачи	11
§ 1. Решение задач с помощью основных свойств центра тяжести нескольких материальных точек	11
§ 2. Определение положения центра тяжести нескольких материальных точек. Обоснование метода предыдущего параграфа	17
§ 3. Круг задач, связанных с теоремой Чевы	37
§ 4. Теорема Менелая и некоторые другие теоремы, доказываемые с помощью понятия о центре тяжести	44
§ 5. Алгебра материальных точек	46
§ 6. Понятие о методе произвольных вещественных масс. Идея барицентрических координат	54
§ 7. Механическая теорема Лагранжа и ее геометрические приложения	71
§ 8. Центры тяжести однородных нитей и пластинок	81
§ 9. Теоремы Паппа—Гюльдена	96
§ 10. Применение понятия о центре тяжести в химии	101
Ответы	116
Указания	119
Решения	128
Приложение. О математиках, упомянутых в этой книге	224

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга выросла из бесед, проведенных мною в 1953—1956 гг. в математических кружках школьников г. Смоленска. Материалы книги были также использованы в работе студенческого математического кружка и семинара по элементарной математике в Смоленском педагогическом институте.

Настоящая книга в основном рассчитана на студентов-математиков и учащихся старших классов средней школы.

Надеюсь, что книга привлечет к себе внимание и других лиц, интересующихся математикой и механикой.

Стремление сделать книгу более доступной для широкого круга лиц существенно сказалось на стиле, на уровне строгости изложения, на степени детальности рассмотрения отдельных вопросов и т. п.

Предупредительной звездочкой (*) отмечены те задачи и отдельные параграфы, которые трудны для девятиклассника; их можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего текста. Наиболее трудные (с точки зрения ученика десятого класса) задачи и параграфы, которые можно пропустить при первом чтении, отмечены двумя звездочками (**).

Не все задачи равноценны. Наиболее интересные задачи отмечены восклицательным знаком (!).

Книга рассчитана на активную самостоятельную работу читателя. В связи с этим материал дается в виде набора задач, снабженных ответами, указаниями и решениями.

В § 1 вводится понятие центра тяжести нескольких материальных точек на основании «правила рычага» (по Архимеду). С помощью двух простейших свойств центра тяжести решаются около полутора десятков геометрических задач, главным образом, на доказательство предложений о прохождении некоторых прямых через одну и ту же точку, или на доказательство того, что какие-то точки лежат на одной прямой. На

отдельных примерах иллюстрируется также возможность применения понятия о центре тяжести для вычисления некоторых элементов треугольника и для решения задач на построение.

Мне много раз приходилось проводить занятия школьных математических кружков, и занятия по материалу § 1 этой книги, как правило, оказывались среди наиболее удачных. Поэтому считаю, что материал § 1 может быть рекомендован учителю как тема для интересного занятия математического кружка (даже не сильного состава).

В § 2 вводится понятие статического момента; даются формулы, позволяющие определить положение центра тяжести системы материальных точек; эти формулы применяются для доказательства неравенств и для вычисления сумм; приводится обоснование метода, примененного в § 1. Задачи 11—13, задачи 4—7, задачи 15—20 и задачи на вычисление сумм с помощью взвешивания могут послужить темами для отдельных сообщений в математическом кружке.

Параграфы 3, 4 посвящены задачам, связанным с теоремами Чебы и Менелая. Эти параграфы можно использовать для занятия кружка со сравнительно сильным составом.

В §§ 5, 6 вводится понятие материальной точки с отрицательной массой; дается представление о барицентрических координатах и излагаются простейшие идеи барицентрического исчисления. Эти параграфы несколько труднее других.

Параграф 7 посвящен геометрическим приложениям одной замечательной теоремы Лагранжа, еще не нашедшей достойной оценки в преподавании геометрии. Этот параграф может послужить темой для занятий математического кружка девятых-десятых классов. В конце параграфа теорема Лагранжа применяется для доказательства некоторых неравенств, в частности, неравенства Буняковского—Шварца.

Параграф 8 содержит определения понятий центров тяжести нитей и пластинок (эти понятия нужны для § 9). Набор задач, посвященных геометрическим свойствам центров тяжести отдельных фигур, может быть использован в качестве темы занятия математического или физического кружка восьмых-десятых классов. В конце этого параграфа излагается идея метода «взвешивания площадей», разработанного Архимедом.

Задачи 1 и 3—6 из § 8 вместе с задачей 3 из § 1 могут послужить темой сообщения «Где находится центр тяжести треугольника?».

Параграф 9 содержит материал для занятий кружка десятого класса (третья четверть) по теме «Теоремы Гюльдена». Я твердо убежден, что некоторые из этих задач (в частности № 1, 2, 7, 9, 14 и др.) полезно включить в *обязательные* задания для учащихся десятых классов вместо малосодержательных чисто калькуляционных упражнений.

Параграф 10 знакомит читателя с возможностью изображения химических систем с помощью материальных точек и с принятыми в физико-химическом анализе приемами использования понятия о центре тяжести (треугольник Гиббса и родственные вопросы). Показывается, как в ряде случаев чисто *химические* задачи, касающиеся растворов, смесей, сплавов и т. п., очень легко и просто решаются на основании соображений *статики*. Этот параграф можно использовать для занятия математического или химического кружка восьмых-десятых классов.

В «Приложении» приведены краткие биографические сведения о математиках, с именами которых читатель встречается при чтении книги.

Наряду с известными задачами в книгу включены также некоторые новые задачи, которые мне раньше нигде не встречались. Для некоторых задач в настоящей книге, по-видимому, впервые указываются решения, основанные на «механических соображениях».

Понятно, что число задач в книге можно было бы значительно увеличить, например, за счет использования отдельных фактов из геометрии треугольника и геометрии тетраэдра. Но мне не хотелось в обилии задач утопить те идеи, которые положены в основу этой книги. Ибо цель книги — только ознакомление читателя с некоторыми идеями, а не изложение какого-нибудь раздела геометрии на базе этих идей.

Как пользоваться этой книгой читателю, решившему прочесть ее (или какую-либо главу) целиком?

Желательно, чтобы такой читатель после прочтения условия той или иной задачи попытался ее самостоятельно решить. Для самопроверки он может посмотреть в «Ответы». Если же у него возникают затруднения, то ему нужно обратиться к «Указаниям». Иногда указания к задаче даны частями — «порциями» (отмечены буквами а, б, в, ...). Прочитав первую «порцию» указаний, надо попытаться *далее самостоятельно* решить задачу. Лишь в том случае, когда опять возни-

кают серьезные затруднения, можно прочесть вторую «порцию» указаний; и опять нужно дальше попытаться решить задачу самостоятельно, и т. д.

После того, как задача решена, полезно сравнить свое решение с тем, которое приводится в книге.

Читать подряд сразу после условия задачи все имеющиеся к ней указания и ее решение тоже возможно, но это менее желательно и значительно менее полезно, чем самостоятельное решение задачи.

Чтобы облегчить читателю работу с этой книгой, после каждой задачи приводятся в скобках страницы, где находятся ответ, указания и решение задачи.

Так, например, запись «У. 119, Р. 128» означает, что указания к задаче имеются на стр. 119, а решение — на стр. 128; ответа нет.

Несколько слов к читателю, *не располагающему временем для прочтения книги целиком.*

Советуем ему предварительно прочесть начало § 1 до задач 1—3 включительно и в § 2 начало и задачи 2, 8, 10, 11, 14. После этого он может выбрать для чтения *любой* параграф по своему усмотрению. При этом ему, может быть, иной раз и придется обратиться за справками к другим параграфам, но это его никак не затруднит.

При недостатке времени читатель может после прочтения условия той или иной задачи *сразу* (если задача его заинтересует) приступить к чтению ее решения. Если же условие задачи ему не покажется интересным, то полезно принять к сведению результат, сформулированный в этом условии; затем можно (даже не заглядывая в «Указания» или «Решения») приступить к чтению следующей задачи. Задачи, отмеченные предупредительными звездочками, такой читатель может пропустить, даже не читая их условий.

Перечислим для такого читателя наиболее доступные места книги, которые позволят ему получить представление о наиболее интересных из ее идей. Введение; начало § 1 и задачи 1—8; начало § 2 и задачи 1, 2, 4—11; из § 3 — задачи 1—8; из § 4 — задачу 1; из § 5 — начало (до мелкого шрифта) и задачу 1; из § 6 — начало (стр. 54—62) и раздел «Идея барицентрических координат»; из § 7 — начало (включая доказательство теоремы Лагранжа), задачи 4, 5, 12, 16—18, 20; из § 8 — начало (до задачи 3 включительно),

задачи 7, 10, а также «Способ Архимеда взвешивания площадей»; из § 9 — начало, задачи 1—5, 7—12; из § 10 — начало; задачи 1—4, 9—13 и 17—19.

Приношу свою благодарность И. М. Яглому, прочитавшему эту книгу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний, которые помогли улучшить книгу.

Я благодарен А. Ф. Лапко за ту добросовестность, с которой он редактировал эту книгу. А. Ф. Лапко тщательно проверил решения всех задач, улучшил некоторые из этих решений, а в двух случаях предложил свои варианты решений, которые включены в книгу (см. § 2, задачи № 6 и 7, «Другое решение»), указал мне на отдельные пропуски и погрешности в рукописи.

Буду признателен всем читателям, которые сообщат мне свои замечания по этой книге (адрес: г. Смоленск, ул. Интернациональная, 1, кв. 19).

М. Балк

ВВЕДЕНИЕ

Понятие о центре тяжести было впервые изучено примерно 2200 лет назад греческим геометром Архимедом, величайшим математиком древности. С тех пор это понятие стало одним из важнейших в механике.

Но не только в механике оно оказалось полезным.

Может показаться удивительным, что понятие о центре тяжести позволило сравнительно просто решить изрядное число трудных чисто геометрических задач. При этом решения получаются часто очень наглядными.

Со времен Архимеда геометры не раз обращались к этому понятию, применяя его совершенно неожиданным образом в таких вопросах, где ни о какой механике как будто и речи не было. Уже сам Архимед использовал понятие о центре тяжести для определения площади параболического сегмента (т. е. куска плоскости, ограниченного параболой и пересекающей ее прямой) и для вычисления объема шара.

Греческий геометр Папп, живший примерно через 500 лет после Архимеда, уже знал приемы вычисления с помощью понятия о центре тяжести объемов и поверхностей некоторых тел. Через 13 веков после Паппа, в XVII веке, эти приемы нашел (видимо, самостоятельно) швейцарский геометр Поль Гюльдён, посвятивший изучению понятия о центре тяжести обширный четырехтомный труд «Центробарика» (т. е. учение о центрах тяжести).

В XVII веке итальянец Джованни Чева интересовался вопросом о том, при каких условиях некоторые линии треугольника проходят через одну и ту же точку. Интересная теорема, которую он в связи с этим открыл, была им доказана с помощью понятия о центре тяжести.

Швейцарец Симон Льюилле в начале прошлого века, около 150 лет назад, применял понятие о центре тяжести для

разыскания геометрических мест, а его современник, известный французский общественный деятель и математик Лазарь Карно, с помощью понятия о центре тяжести устанавливал, как выражаются одни элементы геометрических фигур через другие.

Но, пожалуй, самым интересным геометрическим исследованием, основанным на понятии о центре тяжести, была книга «Барицентрическое исчисление» (т. е. исчисление центров тяжести) немецкого математика Августа Фердинанда Мёбиуса, опубликованная 130 лет назад. В этом замечательном труде Мёбиус сумел целую геометрическую дисциплину, известную сейчас под названием «проективная геометрия», построить на понятии о центре тяжести.

Важным аппаратом для математики и ее приложений в других областях является векторное исчисление. В трудах основателей векторного исчисления (например, у немца Германа Грассмана) понятие о центре тяжести было краеугольным камнем.

Понятие о центре тяжести находит все новые и новые применения для решения задач элементарной и высшей математики. Так, сравнительно недавно было замечено, что с помощью понятия о центре тяжести можно легко получить некоторые неравенства.

Применение идей и методов одной дисциплины к другой всегда, когда это оказывалось возможным, давало замечательные результаты.

Применение стереометрии позволяет сравнительно легко решить весьма трудные планиметрические задачи (например, задачу Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных окружностей). Применение Декартом алгебры к геометрии путем введения координат было подлинной революцией в истории математики. Число таких примеров можно значительно увеличить.

Применение методов геометрии и алгебры дает возможность справиться со многими задачами механики.

Ниже мы увидим на большом числе примеров, как некоторые идеи механики могут в свою очередь служить подспорьем для геометрии, как применение этих идей позволяет просто решить трудные геометрические задачи.

ЗАДАЧИ

§ 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ НЕСКОЛЬКИХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Под *материальной точкой* понимают точку, снабженную массой. Для наглядности можно себе физически представить материальную точку в виде маленького тяжелого шарика, размерами которого можно пренебречь.

Мы условимся в дальнейшем во всей книге все наименования физических и геометрических величин брать в одной и той же системе измерения, например, в системе CGS.

В связи с этим будем часто указывать только *числовое значение* той или иной физической величины, но не будем отмечать ее наименования, считая, что оно само собой подразумевается. Например, выражение: «В $\triangle ABC$ сторона BC равна a , а в вершине A мы помещаем массу a » означает: «Длина стороны BC равна a сантиметрам, а масса, помещенная в вершине A , равна a граммам».

Если в точке A помещена масса m , то образующуюся таким образом материальную точку будем обозначать так: (A, m) . Иногда, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем ее обозначать одной буквой A . Массу m иногда называют *нагрузкой* точки A .

Центром тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b) называется такая третья точка C , которая лежит на отрезке AB и удовлетворяет «*правилу рычага*»: произведение ее расстояния CA от точки A на массу a равно произведению ее расстояния CB от точки B на массу b ; таким образом,

$$a \cdot CA = b \cdot CB.$$

Это равенство можно записать и так:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{b}{a},$$

т. е. расстояния от центра тяжести двух материальных точек до этих точек обратно пропорциональны массам, помещенным в этих точках. Центр тяжести будет ближе к точке с большей массой. Из определения следует: если прямая проходит через центр тяжести двух материальных точек и через одну из них, то она пройдет и через другую.

Вместо фразы: «Центром тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b) служит точка C » мы иногда будем употреблять более компактную символическую запись¹⁾:

$$Z[(A, a), (B, b)] \equiv C.$$

Центр тяжести двух материальных точек имеет весьма простой механический смысл. Представим себе жесткий «невесомый» стержень AB , в концах которого помещены массы a и b (рис. 1). «Невесомость» стержня практически означает, что его масса по сравнению с массами a и b настолько незначительна, что ею можно пренебречь. Центр тяжести C материальных точек (A, a) и (B, b) — эта такая точка, в которой надо подпереть стержень AB , чтобы он был в равновесии.

Для дальнейшего полезно также ввести понятие «объединения» или *равнодействующей* двух материальных точек. Под этим мы будем понимать материальную точку, которая получится, если в центре тяжести двух материальных точек поместить массы обеих материальных точек.

Пример. Пусть в концах невесомого тонкого стержня AB (рис. 2), длина которого равна 20 единицам, помещены такие массы: в A — 6 единиц, в B — 2 единицы. Центром тяжести материальных точек $(A, 6)$ и $(B, 2)$ будет точка C , лежащая на стержне AB и определяемая условием: $6CA = 2CB$, или $CB = 3CA$. Поэтому $AB = CB + CA = 4AC$. Отсюда $AC = \frac{1}{4} AB = 5$ (единиц).

Мы можем написать так:

¹⁾ Запись $A \equiv B$ означает, что точка A совпадает с точкой B . Вообще знак \equiv означает совпадение, тождество каких-либо двух геометрических фигур.

$Z[(A, 6), (B, 2)] \equiv C$. Объединением материальных точек $(A, 6)$ и $(B, 2)$ будет материальная точка $(C, 8)$.

Центр тяжести трех материальных точек находится следующим образом: находят объединение двух из этих материальных точек и затем ищут центр тяжести образовавшейся таким образом четвертой материальной точки и третьей из данных материальных точек. Аналогично находится центр тяжести четырех, пяти и т. д. материальных точек.

Вообще, центр тяжести n материальных точек при $n > 2$ находится так: надо сначала найти центр тяжести $n - 1$ материальных точек, поместить в этой точке массы всех $n - 1$ точек, а затем найти центр тяжести этой вновь образовавшейся материальной точки с n -й материальной точкой.

Если поместить в центре тяжести нескольких материальных точек массы всех этих точек, то образующуюся таким образом новую материальную точку назовем *объединением* данных материальных точек.

Для решения задач важны следующие простейшие свойства центров тяжести¹⁾.

I. Положение центра тяжести n материальных точек не зависит от порядка, в котором последовательно объединяются эти точки. (*Теорема о единственности* центра тяжести для системы из n материальных точек.)

II. Положение центра тяжести системы из n материальных точек не изменится, если заменить несколько материальных точек их объединением. (*Теорема о возможности группировки* материальных точек.)

Приведем пример. На рис. 3 точка O — центр тяжести четырех материальных точек (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) , (A_4, m_4) . Пусть C — центр тяжести двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) . Если заменим эти две материальные точки их объединением $(C, m_1 + m_2)$, то система из трех материальных точек $(C, m_1 + m_2)$, (A_3, m_3) , (A_4, m_4) тоже будет иметь своим центром тяжести точку O .

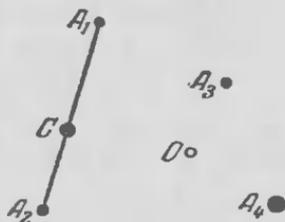


Рис. 3.

¹⁾ К строгому рассмотрению этих фактов мы еще вернемся в § 2. Здесь мы их примем без специального доказательства, как факты, известные из механики.

Применим теперь эти общие положения к решению геометрических задач.

(!) 1. Средней линией четырехугольника называют отрезок, соединяющий середины двух противоположных его сторон.

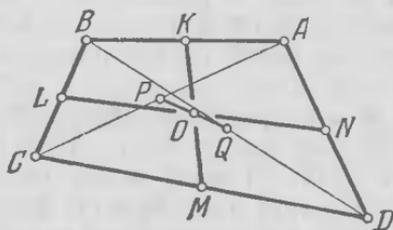


Рис. 4.

Например, на рис. 4 это будут отрезки KM и LN .

Два геометра, англичанин Симсон и француз Жергон, подметили такую любопытную теорему: *Средние линии любого четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, проходят через общую точку и делятся ею пополам.* Докажите эту теорему. (У. 119, Р. 128.)

2. Пусть в вершинах треугольника помещены массы. Докажите, что прямая, соединяющая вершину треугольника с центром тяжести образовавшейся системы материальных точек, пересекает противоположную сторону в центре тяжести двух материальных точек, помещенных в концах этой стороны. (У. 119, Р. 128.)

Следующая задача дана в качестве подготовительной к задачам 4,5 и 6.

(!) 3. Вы, конечно, знаете теорему о том, что в произвольном треугольнике три медианы пересекаются в одной точке и каждая медиана делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины. Докажите эту теорему на основании механических соображений. (У. 119, Р. 128.)

Заметим, что эта теорема была известна еще Архимеду, который пришел к ней именно на основании механических соображений. Без привлечения понятия о центре тяжести она была доказана значительно позже, примерно через 14 веков после Архимеда, итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

4. Мы только что еще раз вспомнили, что прямая, проходящая через вершину основания и середину боковой стороны треугольника, отсекает от медианы основания одну треть ее. Это предположение остается в силе, если в нем поменять местами выражения «медиана основания» и «боковая сторона», а именно:

Прямая, проходящая через вершину основания и середину медианы основания, отсекает от боковой стороны (треугольника) одну треть ее.

Докажите эту теорему. (У. 119, Р. 129.)

(!) 5. В произвольном (плоском или пространственном) шестиугольнике $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ (рис. 5) отмечены середины $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ всех его сторон и полученные точки соединены через одну, так что получаются два треугольника: $B_1 B_3 B_5$ и $B_2 B_4 B_6$. Докажите, что точки пересечения медиан у этих треугольников совпадают. (У. 119.)

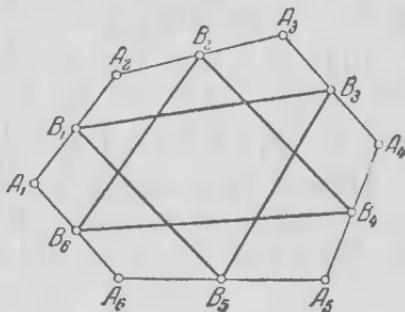


Рис. 5.

(!*) 6. В тетраэдре (произвольной треугольной пирамиде) каждая вершина соединена с точкой

пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что получающиеся таким образом четыре отрезка проходят через одну точку и каждый отрезок делится этой точкой в отношении 3:1 (считая от вершины). (У. 119, Р. 129.)

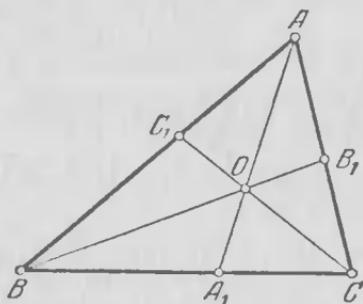


Рис. 6.

(!*) 7. Докажите: в произвольном тетраэдре отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, имеют общую точку и делятся ею пополам. (У. 119, Р. 130.)

8. Пусть O (рис. 6) — произвольная точка внутри треугольника ABC . Докажите, что всегда возможно так подобрать

три массы в вершинах треугольника, чтобы центром тяжести образующихся таким образом трех материальных точек была точка O . (У. 119, Р. 130.)

9. Докажите «лемму о трапеции»: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолженных боковых сторон и середины оснований трапеции лежат на одной прямой. (У. 119, Р. 131.)

10. Докажите: в любом треугольнике отрезок биссектрисы угла при вершине, заключенный между основанием и точкой пересечения биссектрис, во столько раз меньше всей этой биссектрисы, во сколько раз основание меньше периметра треугольника. Пусть в $\triangle ABC$ (см. рис. 6) AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы, O — точка их пересечения; a, b, c — стороны.

Надо доказать, что $\frac{A_1O}{A_1A} = \frac{a}{a+b+c}$. (У. 119, Р. 131.)

(!) 11. В $\triangle ABC$ (рис. 7) выбраны точки A_1, B_1, C_1 соответственно на сторонах BC, CA и AB так, чтобы $A_1C = \frac{1}{3}BC, B_1A = \frac{1}{3}CA, C_1B = \frac{1}{3}AB$.

Прямые, соединяющие точки деления A_1, B_1, C_1 с противоположными им вершинами A, B, C , разбивают треугольник на семь кусков. Докажите, что площадь заштрихованного на

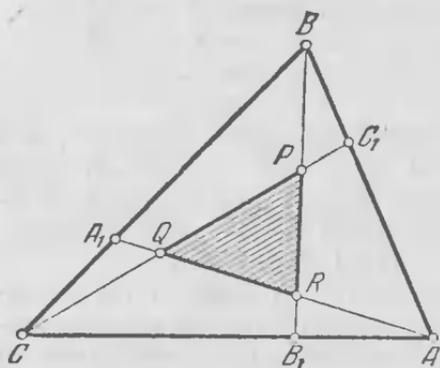


Рис. 7.

рис. 7 треугольника равно в семь раз меньше площади треугольника ABC . (У. 120, Р. 132).

12. На сторонах a, b, c треугольника ABC (см. рис. 7) выбраны точки A_1, B_1, C_1 , делящие эти стороны соответственно в отношениях k_1, k_2, k_3 : $\frac{BA_1}{A_1C} = k_1, \frac{CB_1}{B_1A} = k_2, \frac{AC_1}{C_1B} = k_3$; $k_1 > 1, k_2 > 1, k_3 > 1$.

Зная площадь S треугольника ABC , вычислите площадь треугольника PQR , ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1 . (О. 116, Р. 133.)

13. В окружность вписан четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (рис. 8). Докажите, что точка пересечения его средних линий делит пополам отрезок, соединяющий точку пересечения диагоналей с центром окружности. (У. 120, Р. 134.)

Одним из величайших математиков всех времен был швейцарец Леонард Эйлер. В 1957 г. математики отмечали

250-летие со дня его рождения. Эйлер нашел несколько очень красивых геометрических теорем. Вот одна из них:

(!**) 14. Во всяком треугольнике точка пересечения медиан лежит на отрезке, соединяющем центр описанной окружности с точкой пересечения высот, и делит этот отрезок в отношении 1:2.

Докажите эту теорему.
(У. 120, Р. 134.)

15. Внутри данного треугольника ABC постройте точку O так, чтобы площади треугольников BOC , COA и AOB были пропорциональны трем данным отрезкам p , q , r . (У. 120.)

16. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — произвольная усеченная треугольная пирамида. Тогда точка встречи плоскостей треугольников ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 и точка пересечения продолженных боковых ребер AA_1 , BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой с точками пересечения медиан оснований. (У. 120, Р. 134.)

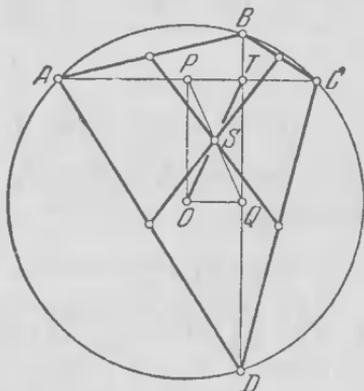


Рис. 8.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ НЕСКОЛЬКИХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ПРЕДЫДУЩЕГО ПАРАГРАФА

При рассмотрении некоторых вопросов механики оказывается выгодным ввести понятие *статического момента*.

Пусть имеется некоторая точка C и, кроме того, материальная точка $A \equiv (A, m)$. *Статическим моментом материальной точки A относительно точки C* мы назовем произведение $m \cdot CA$ и будем его кратко обозначать так: $\text{Мом}_C A$.

Пользуясь понятием статического момента, определение центра тяжести можно сформулировать так: точка C называется центром тяжести двух материальных точек $A \equiv (A, m_1)$ и $B \equiv (B, m_2)$, если C лежит на отрезке AB и $\text{Мом}_C A = \text{Мом}_C B$.

Пусть теперь на некотором луче с началом S (рис. 9) расположена система из нескольких (n) материальных точек

$$A_1 \equiv (A_1, m_1), A_2 \equiv (A_2, m_2), \dots, A_n \equiv (A_n, m_n).$$

Статическим моментом этой системы относительно начала луча S называют сумму моментов всех точек системы

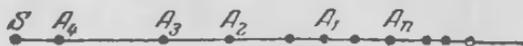


Рис. 9.

относительно начала луча, т. е. сумму

$$K = \text{Мом}_S A_1 + \text{Мом}_S A_2 + \text{Мом}_S A_3 + \dots + \text{Мом}_S A_n$$

или, подробнее,

$$K = m_1 \cdot SA_1 + m_2 SA_2 + m_3 SA_3 + \dots + m_n SA_n.$$

Пример. Если система состоит из трех точек $(A_1, 1)$, $(A_2, 4)$ и $(A_3, 9)$ и $SA_1 = 1$, $SA_2 = 2$, $SA_3 = 3$ (рис. 10), то статический момент системы равен

$$K = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 36.$$

Понятно, что в системе CGS момент будет иметь размерность $г \cdot см$. Но мы уже ранее договорились, что размерность будем каждый раз подразумевать, но нигде не указывать.



Рис. 10.

1. Имеется система из двух материальных точек P и Q , расположенных на некотором луче. Известны массы этих точек p и q и расстояния x и y каждой из этих точек от начала луча S .

Чему равно расстояние центра тяжести системы от начала луча? (О. 116, У. 121, Р. 135.)

2. Сформулируйте и решите аналогичную задачу для случая, когда система состоит из n материальных точек. Можно ограничиться каким-нибудь конкретным значением n , например, $n = 4$. (О. 116, Р. 136.)

3. Пусть Z — центр тяжести системы материальных точек, расположенных на некоторой прямой (рис. 11). Докажите, что сумма моментов (относительно Z) материальных точек, рас-

положенных слева от Z , равна сумме моментов материальных точек, расположенных справа от Z .

Ограничиться случаем, когда справа от точки Z расположены три материальные точки, слева — две материальные точки. (У. 121, Р. 138.)



Рис. 11.

Решив задачу 2, мы получили формулу, определяющую положение центра тяжести нескольких материальных точек, расположенных на одном и том же луче. Покажем, как можно воспользоваться этим результатом для *вычисления некоторых сумм*, в частности, суммы квадратов n первых чисел натурального ряда.

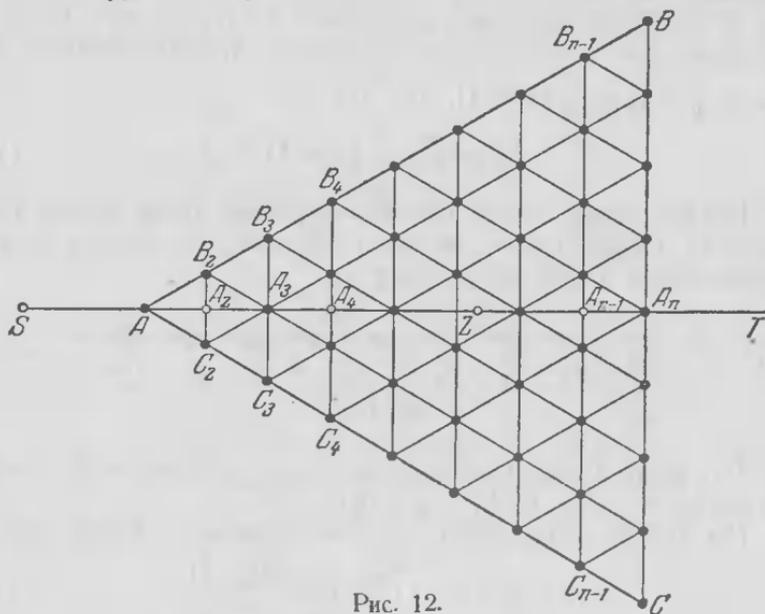


Рис. 12.

Рассмотрим правильный треугольник ABC (рис. 12), высота которого AA_n равна $n - 1$ единицам и расположена на некотором луче ST , и пусть $SA = a$, $SA_n > SA$. Высоту AA_n разобьем на равные части длиной в 1 единицу точками A_2, A_3, \dots, A_{n-1} и через эти точки проведем параллели к стороне BC . Аналогично разделим каждую из остальных двух высот

$\triangle ABC$ на $n - 1$ равных частей и через точки деления проведем параллели к соответствующим сторонам.

Треугольник ABC разобьется на равные правильные треугольники, причем каждый из них имеет высоту, равную 1 единице. В каждую из вершин этих треугольников поместим массу, равную 1 единице. Получается картина, которую можно себе легко представить по рис. 12. (Если точка служит общей вершиной нескольких треугольников, то в ней помещается все же лишь 1 единица массы.)

Центр тяжести Z всей образовавшейся системы материальных точек лежит, очевидно, на медиане AA_n , ибо материальные точки расположены симметрично относительно этой медианы. По аналогичным соображениям можно утверждать, что Z лежит на медиане, проведенной к стороне AB . Следовательно, Z — точка пересечения медиан треугольника ABC и $AZ = \frac{2}{3} AA_n = \frac{2}{3} (n - 1)$, так что

$$SZ = a + \frac{2}{3} (n - 1). \quad (1)$$

Найдем теперь число всех материальных точек данной системы (а следовательно, и массу системы, ибо каждая из ее материальных точек имеет массу 1).



Рис. 13.

Для этого будем подсчитывать число материальных точек на отрезках $B_2C_2, B_3C_3, \dots, B_nC_n$.

Мы найдем, что число всех материальных точек равно

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2)$$

Значит, масса M всей системы равна $\frac{n(n+1)}{2}$ (единицам массы). Положение центра тяжести системы не изменится, если сосредоточим массы всех материальных точек, лежащих на каком-либо отрезке B_kC_k в середине этого отрезка. Если это сделаем со всеми отрезками $B_2C_2, B_3C_3, \dots, B_nC_n$, то получим на луче ST n точек A, A_2, A_3, \dots, A_n с массами 1, 2, 3, ..., n (единиц) соответственно (рис. 13).

Ясно, что $SA = a$, $SA_2 = a + 1$, $SA_3 = a + 2, \dots, SA_n = a + n - 1$. В силу решения задачи 2 (см. формулу (2) на стр. 137)

$$1 \cdot a + 2(a + 1) + 3(a + 2) + \dots + n(a + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2} \left[a + \frac{2}{3}(n-1) \right]. \quad (3)$$

При $a = 1$ найдем, в частности, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (4)$$

При $a = 0$ получим

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \quad (5)$$

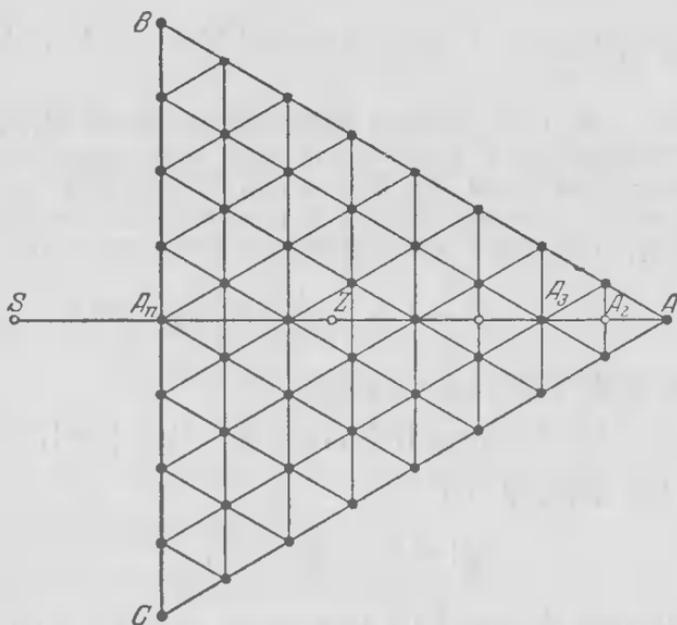


Рис. 14.

Расположим теперь $\triangle ABC$ иначе, а именно так, как указано на рис. 14. Пусть $SA_n = a$, $SA = a + n - 1$, Z — центр тяжести системы материальных точек.

Понятно, что теперь $SZ = a + \frac{1}{3}(n-1)$.

Пользуясь той же задачей 2 (см. формулу (2) на стр. 137), получим без особого труда:

$$a \cdot n + (a+1)(n-1) + (a+2)(n-2) + \dots + (a+n-1) \cdot 1 = \frac{n(n+1)}{2} \left[a + \frac{1}{3}(n-1) \right]. \quad (6)$$

В частности, при $a=1$ найдем

$$1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad (7)$$

Та же идея взвешивания может быть использована для вычисления некоторых других сумм.

Вычислим, например, сумму

$$\sum_{k=1}^n k^2 (n+1-k) = 1^2 \cdot n + 2^2 (n-1) + 3^2 (n-2) + \dots + n^2 \cdot 1.$$

Для этой цели выберем на луче ST точки A, A_2, \dots, A_n так, чтобы $SA_k = k$ ($k=1, 2, \dots, n$); в этих точках поместим соответственно массы $1 \cdot n, 2(n-1), \dots, (n-1) \cdot 2, n \cdot 1$.

Ясно, что центром тяжести Z такой системы материальных точек будет служить середина отрезка AA_n , так что

$$SZ = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Масса M этой системы равна

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \dots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1,$$

т. е. (см. формулу (7))

$$M = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Пользуясь формулой (2) из решения задачи 2 (стр. 137), найдем

$$\begin{aligned} 1^2 \cdot n + 2^2 (n-1) + \dots + (n-1)^2 \cdot 2 + n^2 \cdot 1 &= \\ &= M \cdot SZ = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}. \end{aligned}$$

Нетрудно теперь найти и сумму кубов первых n чисел натурального ряда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= (n+1) \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^2(n+1-k) = \\ &= (n+1) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} = \\ &= \frac{n(n+1)^2}{12} (4n+2-n-2) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Если в точках S, A, A_2, \dots, A_n поместим массы, равные биномиальным коэффициентам $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$, и воспользуемся известными соотношениями

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n, \quad C_n^k = C_n^{n-k},$$

то без труда найдем

$$\begin{aligned} 0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + \dots + n C_n^n &= \\ &= \frac{n}{2} (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) = n \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Помещая в тех же точках массы

$$0, \sin \frac{\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)\pi}{n}, \sin \frac{n\pi}{n},$$

и воспользовавшись равенством $\sin k \frac{\pi}{n} = \sin (n-k) \frac{\pi}{n}$, найдем

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \dots \\ \dots + (n-1) \sin (n-1) \frac{\pi}{n} + n \sin n \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} M, \end{aligned}$$

где

$$M = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin (n-1) \frac{\pi}{n}.$$

Нетрудно вычислить M :

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{2n} \cdot M &= 2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{n} + \dots \\ &\dots + 2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin (n-1) \frac{\pi}{n} = \left(\cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{3\pi}{2n} \right) + \\ &+ \left(\cos \frac{3\pi}{2n} - \cos \frac{5\pi}{2n} \right) + \dots + \left(\cos \frac{(2n-3)\pi}{2n} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} \right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{2n} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \sin (n-1) \frac{\pi}{2n} = 2 \cos \frac{\pi}{2n}, \end{aligned}$$

откуда $M = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$. Итак,

$$1 \cdot \sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \\ + n \sin \frac{n\pi}{n} = \frac{n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}.$$

Аналогичными рассуждениями можно вычислить

$$1 \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + 2 \cos \frac{4\pi}{n} + 3 \cos \frac{6\pi}{n} + \dots + (n-1) \cos \frac{(2n-2)\pi}{n}$$

и многие другие суммы.

* * *

Решение задачи 2 можно применить и для получения любопытных и весьма наглядных доказательств некоторых неравенств. Рассмотрим примеры.

4. Докажите: если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

(У. 121, Р. 138.)

5. Пусть на луче ST (рис. 15) расположены несколько материальных точек (A, a) , (B, b) , $(C, c), \dots, (L, l)$. Пусть вся масса какой-либо из этих материальных точек или ее часть



Рис. 15.

переносится вдоль луча, удаляясь от начала (например, из A переносится «вправо» в A' на рис. 15). Как сместится при этом центр тяжести данной системы материальных точек? (О. 116, У. 121, Р. 139.)

Операцию переноса масс вдоль луча можно повторить несколько раз. Если при этом массы могут перемещаться только вправо (могут только удаляться от начала луча), то и центр тяжести системы материальных точек в силу решения задачи 5 будет перемещаться вправо (удаляться от начала луча).

Этим фактом возможно, в частности, воспользоваться для доказательства неравенств.

Следующую задачу нетрудно решить и без применения понятия о центре тяжести. Однако попытайтесь ее решить на основании задачи 5.

6. Пусть $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Тогда при любом k , меньшем n ,

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} < \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

(У. 121, Р. 139.)

7. Докажите: если

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n, \quad 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n,$$

то

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) > \\ > (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

(У. 121, Р. 141.)

* * *

8. Две материальные точки (P, p) и (Q, q) лежат в плоскости чертежа по одну сторону от некоторой прямой MN (рис. 16). Их расстояния от прямой MN равны соответственно a и b . Найдите расстояние z их центра тяжести Z от прямой MN . (У. 121, Р. 144.)

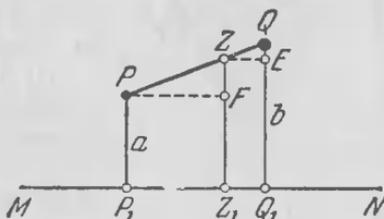


Рис. 16.

Пусть на плоскости имеется некоторая ось s . Статическим моментом материальной точки $A \equiv (A, m)$ относительно этой оси мы назовем произведение массы m на ее расстояние u от оси s , т. е. $m \cdot u$,

$$\text{Мом}_s A = m \cdot u.$$

Если имеется на плоскости система из n материальных точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, расположенных по одну сторону от некоторой оси s , то моментом этой системы относительно оси называется сумма моментов материальных точек системы, т. е.

$$\text{Мом}_s A_1 + \text{Мом}_s A_2 + \dots + \text{Мом}_s A_n$$

или, иначе говоря, сумма

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n,$$

где y_1, y_2, \dots, y_n — это расстояния точек A_1, A_2, \dots, A_n от оси (рис. 17), а m_1, m_2, \dots, m_n — массы этих материальных точек.

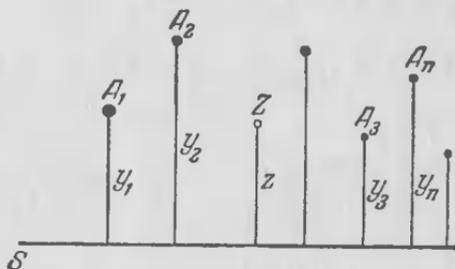


Рис. 17.

9. Как выражается момент объединения двух материальных точек, лежащих на плоскости по одну сторону от некоторой оси s , через моменты этих материальных точек относительно той же оси? (Р. 144.)

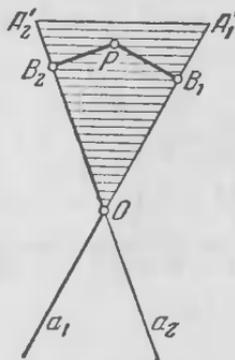


Рис. 18.

10. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 8, для случая системы из трех материальных точек. (Р. 145.)

(!) 11. Сформулируйте и решите аналогичную задачу, когда имеется n материальных точек (Р. 145).

(!*) 12. Угол $A_1'OA_2'$ — один из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми a_1 и a_2 (рис. 18). Из произвольной точки P внутри этого угла опускаем перпендикуляры PB_1 и PB_2 на прямые a_1 и a_2 . Пусть k_1 и k_2 — какие-то два данных положительных числа, d — данный

отрезок. Найдите геометрическое место таких точек P (лежащих внутри данного угла $A_1'OA_2'$), для которых

$$k_1 \cdot PB_1 + k_2 \cdot PB_2 = d. \quad (\text{У. 121, Р. 146.})$$

13. (Обобщение). Угол $A_1'OA_2'$ — один из углов, образованных n прямыми a_1, \dots, a_n , имеющими общую точку O (рис. 19). OA_1' — на прямой a_1 , OA_2' — на a_2 . Из произвольной

точки P , лежащей в угле $A'_1OA'_2$, опущены перпендикуляры PB_1, \dots, PB_n на прямые a_1, \dots, a_n . Пусть k_1, \dots, k_n — какие-либо данные положительные числа, d — длина данного отрезка. Найдите геометрическое место точек P (лежащих внутри угла $A'_1OA'_2$), для которых $k_1 \cdot PB_1 + k_2 \cdot PB_2 + \dots + k_n \cdot PB_n = d$ (можно ограничиться рассмотрением случая $n=4$). (Р. 147.)

(*) Пусть имеется некоторая плоскость α и пусть какие-то материальные точки $A_1 \equiv (A_1, m_1), A_2 \equiv (A_2, m_2), \dots, A_n \equiv (A_n, m_n)$ расположены по одну сторону от этой плоскости и отстоят от нее соответственно на расстояния y_1, y_2, \dots, y_n .

Статическим моментом какой-либо материальной точки $A \equiv (A, m)$ относительно плоскости α называется произведение массы m этой точки на ее расстояние y от плоскости α . Это запишем так:

$$\text{Мом}_\alpha A = my.$$

Статическим моментом системы из n материальных точек $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$ относительно плоскости α мы назовем сумму моментов всех материальных точек этой системы относительно той же плоскости, т. е. сумму

$$\text{Мом}_\alpha A_1 + \dots + \text{Мом}_\alpha A_n$$

или, иначе говоря, сумму

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n.$$

(*) 14. Пусть Z — центр тяжести системы из n материальных точек $A_1 \equiv (A_1, m_1), A_2 \equiv (A_2, m_2), \dots, A_n \equiv (A_n, m_n)$, лежащих по одну сторону от некоторой плоскости α ; y_1, y_2, \dots, y_n — расстояния этих материальных точек от плоскости α ; z — расстояние от точки Z до плоскости α . Докажите, что

$$z = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (\text{У. 122, Р. 148.})$$

* * *

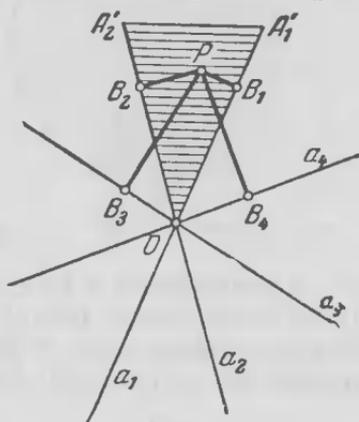


Рис. 19.

(*) Решение задачи 11 позволяет получить из чисто механических соображений много интересных неравенств.

Для этой цели нам еще понадобится понятие выпуклой фигуры. *Выпуклой фигурой* называется фигура, обладающая таким свойством: если какие-либо две точки принадлежат фигуре,

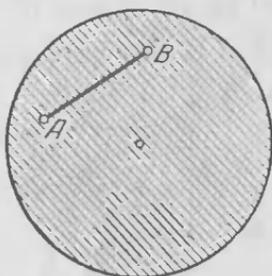


Рис. 20.

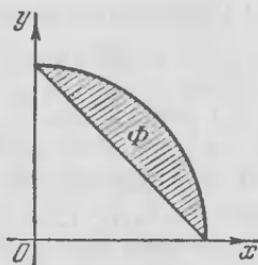


Рис. 21.

то ей принадлежит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Простейший пример выпуклой фигуры — круг ¹⁾ (рис. 20), если A и B — произвольные точки, принадлежащие кругу, то и весь отрезок AB принадлежит кругу.

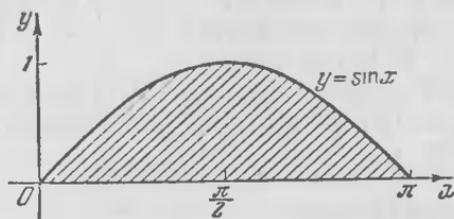


Рис. 22.

Вот еще несколько примеров выпуклых фигур.

1) Часть плоскости, ограниченная четвертью окружности и стягивающей ее хордой (рис. 21).

2) Часть плоскости, ограниченная одной аркой синусоиды $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) и осью абсцисс (рис. 22).

¹⁾ К кругу мы относим здесь также ограничивающую его окружность. Аналогично и в дальнейших примерах: говоря о фигуре, ограниченной какими-то линиями, мы будем полагать, что эти линии так же принадлежат этой фигуре.

3) Часть плоскости (рис. 23), ограниченная полуаркой синусоиды $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) и хордой этой синусоиды, соединяющей точки $O(0, 0)$ и $S(\frac{\pi}{2}, 1)$.

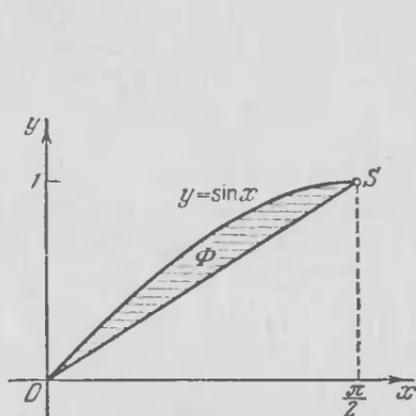


Рис. 23.

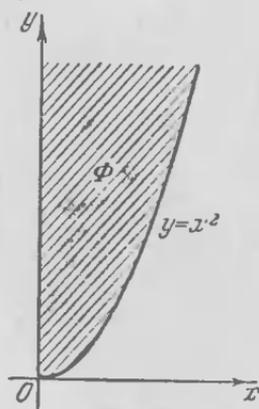


Рис. 24.

4) Часть плоскости (рис. 24), ограниченная параболой $y = x^2$ ($x \geq 0$) и осью ординат (та область, которая на чертеже заштрихована).

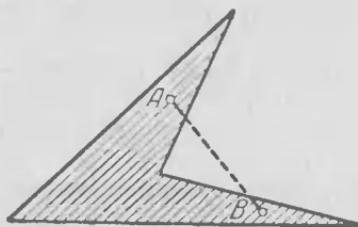


Рис. 25.

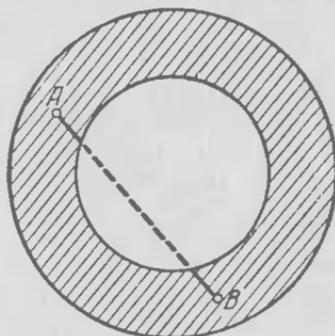


Рис. 26.

На рис. 25 и 26 изображены невыпуклые фигуры (они заштрихованы). В каждой из этих фигур можно указать такую пару точек A и B , принадлежащих фигуре, что не весь отрезок AB принадлежит той же фигуре.

Подробнее с понятием выпуклой фигуры читатель может ознакомиться по книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры», Гостехиздат 1951 г. (см. гл. I, задачи 1—9).

Строгое доказательство с помощью средств элементарной математики того, что та или иная конкретная данная фигура является выпуклой, оказывается обычно довольно громоздким или вовсе невозможным. Применение средств дифференциального исчисления значительно упрощает дело.

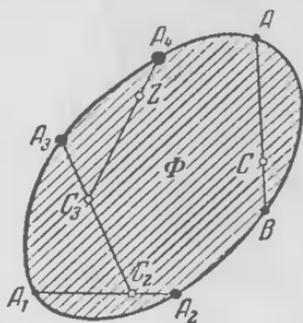


Рис. 27.

Однако, если заранее ясно, что некоторая фигура является выпуклой, то это свойство можно, оказывается, применить к доказательству неравенств¹⁾.

Пусть фигура Φ является выпуклой (рис. 27). Возьмем внутри ее или на ее границе две произвольные точки и поместим в них произвольные (положительные) массы a и b . Тогда центр тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b) лежит на отрезке AB и, следовательно, также принадлежит фигуре Φ. Аналогично, если возьмем n произвольных точек A_1, A_2, \dots, A_n фигуры Φ и в них поместим (положительные) массы m_1, m_2, \dots, m_n , то центр тяжести материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ будет также принадлежать фигуре Φ (на рис. 27 $C_2 \equiv Z[(A_1, m_1), (A_2, m_2)]$, $C_3 = Z[(A_3, m_3), (C_2, m_1 + m_2)]$, и т. д. Z — центр тяжести всей системы n материальных точек $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$).

Более того, можно показать, что если центр тяжести каких-нибудь двух из этих n материальных точек лежит *внутри* фигуры Φ (а не на ее контуре, не на ее границе), то и центр тяжести всех n материальных точек тоже лежит *внутри* фигуры Φ²⁾. Именно этот случай мы и рассмотрим.

Будем для простоты полагать, что выпуклая фигура Φ целиком расположена в первом координатном квадранте

¹⁾ Наиболее важная идея дальнейших рассуждений заимствована мною из заметки А. Лоуэна, опубликованной в журнале «Scripta mathematica» в 1955 г. (21, № 2—3, стр. 218—220).

²⁾ Точные определения понятий «граничная точка», «граница», «внутренняя точка» фигуры читатель может найти, например, в книге И. М. Яглома и В. Г. Болтянского.

(рис. 28). Пусть точки A_1, A_2, \dots, A_n лежат на границе фигуры Φ и имеют координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. В этих точках помещены массы m_1, m_2, \dots, m_n соответственно. Обозначим через Z центр тяжести n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$, а через (x, y) — координаты точки Z . В силу решения задачи 11

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (8)$$

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (9)$$

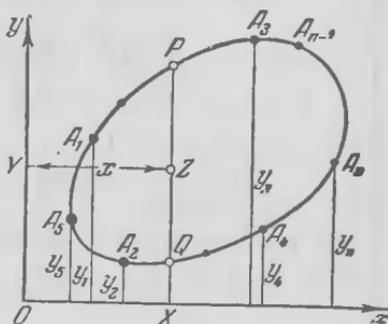


Рис. 28.

Пусть прямая XZ (X — основание перпендикуляра, опущенного из Z на ось Ox) встречает контур фигуры Φ в точках Q и P , причем $XQ < XP$. Тогда ясно, что

$$XQ < y < XP \quad (10)$$

или

$$XQ < \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} < XP. \quad (11)$$

Рассмотрим несколько примеров.

15. Считая известным, что фигура Φ на рис. 23 является выпуклой, докажите неравенство:

$$\frac{2}{\pi} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n} < \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

если x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные различные числа, заключенные между 0 и $\frac{\pi}{2}$. (У. 122, Р. 149.)

16. Считая известным, что фигура Φ (рис. 29), ограниченная кривой $y = \lg x$ ($x \geq 1$) и лучом оси абсцисс $x \geq 1$, является выпуклой, докажите неравенство:

$$\frac{\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n}{n} < \lg \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — различные положительные числа (причем некоторые из них могут быть и меньше 1). Рассмотрите вначале случай, когда каждое из этих чисел больше 1.

Выведите отсюда неравенство Коши

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Докажите затем обобщенное неравенство Коши

$$(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n})^{\frac{1}{M}} < \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M},$$

где m_1, m_2, \dots, m_n — произвольные положительные числа и $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. (У. 122, Р. 150.)

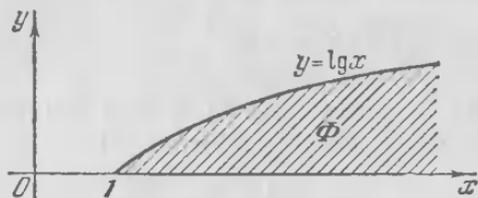


Рис. 29.

17. Считая известным, что фигура Φ (рис. 24), ограниченная дугой параболы $y = x^2$ ($x \geq 0$) и осью Oy , является выпуклой, докажите неравенства

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} > \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

и

$$\sqrt{\frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2}{M}} > \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n, m_1, m_2, \dots, m_n$ — произвольные положительные числа, причем числа x_1, x_2, \dots, x_n не все равны между собой: $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. (У. 122, Р. 152.)

18. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — любые числа, заключенные между 0 и 1, причем не все равны между собой; m_1, m_2, \dots, m_n — произвольные положительные числа и $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Считая известным, что фигура Φ на рис. 21 — выпуклая, до-

кажите, что имеют место неравенства

$$1 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} < \\ < \frac{m_1 \sqrt{1-x_1^2} + m_2 \sqrt{1-x_2^2} + \dots + m_n \sqrt{1-x_n^2}}{M} < \\ < \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} \right)^2}.$$

(Р. 153.)

19. График функции $y = -\lg \sin x$ на интервале $(0, \pi)$ имеет такой вид, как указано на рис. 30.

Считая известным, что область Φ , ограниченная этим графиком, является выпуклой, докажите неравенство

$$\sqrt[n]{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \dots \cdot \sin \alpha_n} < \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$$

$(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \pi)$. (Р. 154.)

(**) Мы будем говорить, что функция $y = f(x)$ *выпукла* на некотором отрезке $[a, b]$ (рис. 31), если дуга AmB ее графика, соединяющая точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, и хорда AB ограничивают некоторую выпуклую фигуру. Если при этом хорда AB лежит *под* дугой AmB , то функция $f(x)$ называется

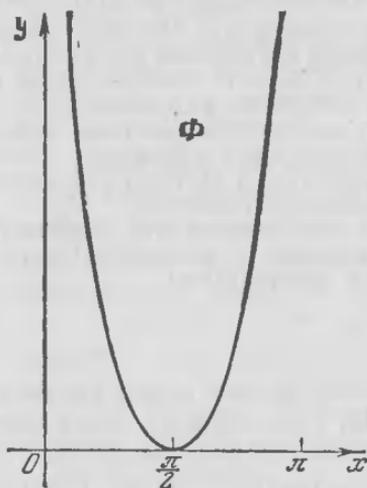


Рис. 30.

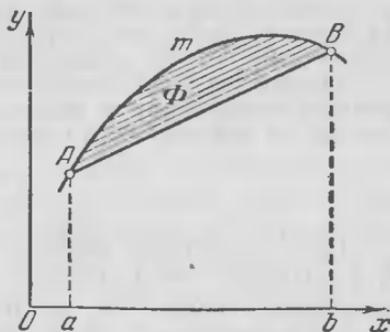


Рис. 31.

выпуклой кверху на отрезке $[a, b]$, а если хорда AB лежит *над* дугой AmB , то функция $f(x)$ называется *выпуклой книзу* на $[a, b]$.

В дальнейшем мы ради простоты полагаем, что дуга AB лежит в первом квадранте. Однако результат, который будет сформулирован, верен при любом положении дуги AB .

Вместо выражений «выпуклая кверху» и «выпуклая книзу» часто употребляются соответственно выражения «выпукла» и «вогнута».

20. Докажите: если функция $y = f(x)$ выпукла кверху на некотором отрезке $[a, b]$ и если x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные различные числа из этого отрезка, а m_1, m_2, \dots, m_n — произвольные положительные числа и $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, то

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{M}\right) > \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \dots + m_nf(x_n)}{M}$$

(неравенство Иенсена).

Запишите это неравенство для того частного случая, когда $m_1 = m_2 = \dots = m_n$. (Р. 155.)

Примечание. Если функция $f(x)$ выпуклая книзу (вогнута), то знак неравенства меняется на противоположный. При $f(x) = \sin x$, $f(x) = \lg x$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ мы получим по формуле Иенсена те неравенства, которые были нами ранее найдены при решении задач 15, 16, 18.

Выше мы получили ряд неравенств, используя решение задачи 11 и рассматривая различные выпуклые фигуры на плоскости.

Рассматривая *трехмерные* выпуклые фигуры (*выпуклые тела*) и проводя аналогичные рассуждения, возможно с помощью задачи 14 получить новые любопытные неравенства. В частности, возможно получить интересное обобщение неравенства Иенсена.

Однако мы здесь воздержимся от рассмотрения этих неравенств, ибо нам понадобились бы некоторые сведения из высшей математики (точнее, из аналитической геометрии в пространстве).

* * *

(*) У читателя, вероятно, после рассмотрения задач из § 1 возникло такое сомнение: «Да, решения этих задач были простыми, но были ли они математически строгими»? Постараемся разобраться в этом. Мы использовали такие понятия: масса, материальная точка, центр тяжести. В наших рассуждениях они выступали как чисто математические понятия. Масса всегда у нас выступала как некоторое положительное число. Каждый раз, когда приходилось использовать это по-

нятие, мы пользовались им только как некоторым положительным числом. Когда мы рассматривали материальную точку, мы всегда на деле рассматривали два чисто математических объекта: какую-то геометрическую точку и какое-то положительное число. Материальные точки нам были нужны лишь для одной цели — для нахождения центров тяжести. Но центр тяжести двух материальных точек у нас всегда опять-таки выступал как некоторый математический объект, как геометрическая точка, известным образом определяемая в зависимости от двух (геометрических) точек и двух положительных чисел. Именно, центр тяжести появлялся как точка, делящая расстояние между двумя данными точками в отношении, равном отношению двух данных положительных чисел. А деление отрезка в данном отношении — это уже задача элементарной геометрии.

Чтобы подчеркнуть чисто геометрический характер понятия о центре тяжести (в том виде, в каком мы этим понятием здесь пользовались), некоторые геометры отказываются вовсе от этого термина.

Термин «центр тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b)» они заменяют чисто геометрическим термином «центр пропорциональных расстояний точек A и B с соответствующими им коэффициентами a и b ».

Понятие «центр тяжести нескольких материальных точек» определялось через понятие «центра тяжести двух материальных точек» и, следовательно, также может быть рассмотрено как чисто геометрическое понятие.

Таким образом, введение понятия о центре тяжести даже с точки зрения элементарной геометрии не содержит в себе ничего такого, что можно было бы назвать «математически не строгим». Однако при решении задач мы использовали без доказательства два свойства центра тяжести (см. стр. 13): «теорему о единственности центра тяжести» и «теорему о возможности группировки материальных точек». Чтобы наши рассуждения были действительно строгими, необходимо доказать эти теоремы. Начнем с теоремы о единственности центра тяжести. Ограничимся пока случаем трех материальных точек, которые обозначим так: (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) (рис. 32). Чтобы найти их центр тяжести, мы поступали так: находили центр тяжести B двух первых материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) , а затем находили точку S — центр тяжести двух других материальных точек: $(B, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3) .

Эта точка *по определению* и называется центром тяжести трех материальных точек (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) .

Но ведь мы могли бы поступить и иначе: сначала найти центр тяжести, скажем, точек (A_2, m_2) и (A_3, m_3) (обозначим его через C), а затем уже найти центр тяжести T материальных точек $(C, m_2 + m_3)$ и (A_1, m_1) . Не может ли вдруг оказаться, что точка T отлична от точки S ? Откуда следует, что они должны совпасть? Но все же они действительно совпадают; в этом и заключается смысл теоремы о единственности центра тяжести (в применении к трем материальным точкам). Итак, докажите такую теорему.

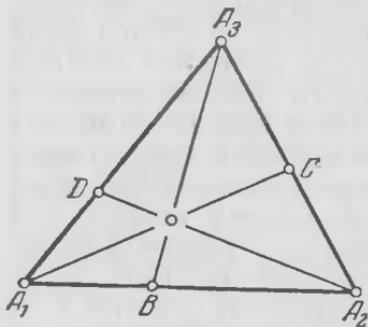


Рис. 32.

(*) 21. Центр тяжести трех материальных точек не зависит от порядка, в котором будем объединять эти точки.

Пусть (A_1, m_1) , (A_2, m_2) и (A_3, m_3) — три материальные точки: B — центр тяжести точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) , C — центр тяжести точек (A_2, m_2) и (A_3, m_3) , D — центр тяжести точек (A_3, m_3) и (A_1, m_1) . Покажите, например, что центр тяжести точек $(B, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3) совпадает с центром тяжести точек $(C, m_2 + m_3)$ и (A_1, m_1) . (У. 122, Р. 155.)

(*) 22. Докажите теорему о единственности центра тяжести n материальных точек: положение центра тяжести n материальных точек не зависит от того порядка, в котором последовательно объединяются эти точки. (У. 122, Р. 156.)

Перейдем теперь к «теореме о возможности группировки материальных точек». Рассмотрим сначала частный случай.

(*) 23. Докажите, что центр тяжести пяти данных материальных точек (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) , (A_4, m_4) , (A_5, m_5) не изменится, если заменить точки (A_2, m_2) , (A_3, m_3) и (A_5, m_5) их объединением (т. е. если поместить массы этих трех материальных точек в их центре тяжести). (Р. 156.)

Те рассуждения, которые мы провели при решении предыдущей задачи, позволяют и в общем случае доказать «теорему о возможности группировки n материальных точек».

В самом деле, пусть имеются n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ и S — их центр тяжести. Пусть, далее, выделяется из них группа k материальных точек. Без потери общности можно считать, что в группу входят материальные точки $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_k, m_k)$. Если бы это было не так, то мы бы изменили нумерацию материальных точек через B . Но тогда центр тяжести материальных точек $(B, m_1 + m_2 + \dots + m_k), (A_{k+1}, m_{k+1}), \dots, (A_n, m_n)$ совпадает, очевидно, с точкой S . А это и означает справедливость теоремы о возможности группировки.

Мы пока ограничились рассмотрением случая, когда из данных материальных точек выделяется лишь одна группа материальных точек. В некоторых случаях приходится выделить две, три и более группы (см., например, задачу 1 и др.). Но это, очевидно, сводится к тому, чтобы несколько раз выделить из каких-то имеющихся материальных точек одну группу материальных точек.

§ 3. КРУГ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРЕМОЙ ЧЕВЫ

Начертим произвольный треугольник ABC и на его сторонах выберем какие-либо три произвольные точки A_1, B_1, C_1 , как указано на рис. 33.

Пройдут ли отрезки AA_1, BB_1, CC_1 через общую точку? В некоторых случаях — да; например, если эти отрезки — три медианы треугольника, или, скажем, — три биссектрисы треугольника. А, вообще говоря, может оказаться, что эти отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не имеют общей точки (см. рис. 7). Все зависит от выбора точек A_1, B_1, C_1 на сторонах треугольника. Почти 300 лет назад итальянский геометр Джованни Чева заинтересовался таким вопросом: как должны быть связаны между собой шесть отрезков, на которые делят точки A_1, B_1, C_1 стороны треугольника ABC , чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 наперняка имели общую точку? Можно ли, зная

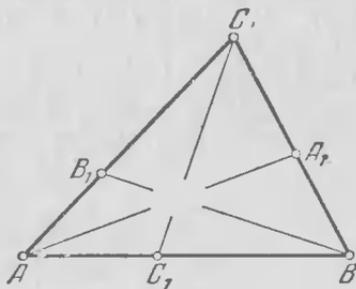


Рис. 33.

только длины этих шести отрезков, сказать заранее, еще до проведения прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 , имеют ли эти три прямые общую точку?

Используя механические соображения, Чева сумел дать исчерпывающий ответ на эти вопросы. В трактате «О прямых линиях, пересекающихся взаимно», изданном в Милане в 1678 г., им доказана замечательная теорема, носящая его имя.

Теорема Чевы. Пусть прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 (рис. 33) встречаются стороны a , b , c треугольника ABC во внутренних точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно.

Для того чтобы прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 имели общую точку, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие («условие Чевы для треугольника»):

$$\frac{AC_1}{C_1B} \frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (12)$$

«Достаточно» в данном случае означает: если «условие Чевы» (12) выполняется, то три прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 имеют общую точку.

«Необходимо» означает: если три прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 имеют общую точку, то обязательно выполняется «условие Чевы».

Вясним сначала механический смысл условия Чевы. Пусть на сторонах треугольника ABC выбраны три точки: A_1 (на BC), B_1 (на CA) и C_1 (на AB). Тогда равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ (которое называем условием Чевы) имеет место тогда и только тогда, когда возможно подобрать три массы m_1 , m_2 , m_3 для точек A , B , C так, чтобы ¹⁾

$$Z[(A, m_1), (B, m_2)] \equiv C_1, \quad (13)$$

$$Z[(B, m_2), (C, m_3)] \equiv A_1, \quad (14)$$

$$Z[(C, m_3), (A, m_1)] \equiv B_1. \quad (15)$$

Наглядно этот факт можно себе представить так:

Вообразим, что сторонами треугольника ABC служат тонкие «невесомые» стержни (т. е. весом их можно пренебречь).

¹⁾ То есть так, чтобы центром тяжести материальных точек (A, m_1) и (B, m_2) служила точка C_1 , центром тяжести материальных точек (B, m_2) и (C, m_3) служила точка A_1 , а центром тяжести материальных точек (C, m_3) и (A, m_1) служила точка B_1 .

В заранее выбранных точках A_1, B_1, C_1 (рис. 34) помещены подпорки. В вершинах A, B, C будут помещены тяжелые (по сравнению с весом стержней) шары, размерами которых можно пренебречь (по сравнению с размерами треугольника).

Выполнение условия Чевы означает, что можно так подобрать эти нагрузки в вершинах A, B, C , чтобы *каждый* стержень в отдельности (вместе с массами в его концах) находился на своей подпорке в равновесии.

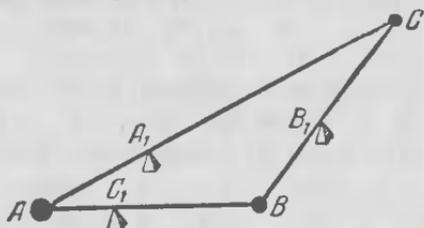


Рис. 34.

1. Докажите, что условие Чевы действительно означает, что возможно подобрать массы m_1, m_2, m_3 так, чтобы выполнялись условия (13) — (15). (У. 122, Р. 157.)

(!) 2. Пользуясь предыдущей задачей, докажите теорему Чевы. (Р. 157.)

3. В качестве следствия из теоремы Чевы выведите, что три медианы треугольника имеют общую точку. (Р. 158.)

4. То же — для биссектрис треугольника. (Р. 158.)

5. То же — для высот остроугольного треугольника. (Р. 158.)

6. То же — для трех прямых, соединяющих вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается сторон. (Р. 159.)

(!) 7. Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 35) встречаются стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 и пусть они проходят через общую точку O .

Бельгиец Ван-Обель доказал, что в таком случае

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Например, если AA_1, BB_1, CC_1 — медианы, то $\frac{CA_1}{A_1B} = 1$, $\frac{CB_1}{B_1A} = 1$ и $\frac{CO}{OC_1} = 2$.

Свойство, которое подметил Ван-Обель, можно было бы сформулировать так:

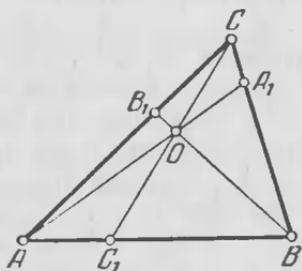


Рис. 35.

Если три отрезка, соединяющих вершины треугольника с точками на противоположных сторонах, имеют общую точку O , то отношение, в котором O делит каждый из этих отрезков (считая от вершины), равно сумме отношений, в которых два других отрезка делят стороны треугольника (считая от этой же вершины).

Докажите теорему Ван-Обеля. (У. 122, Р. 159.)

8. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы треугольника ABC , O — точка их пересечения. Тогда

$$\frac{A_1O}{A_1A} = \frac{1}{3}, \quad \frac{B_1O}{B_1B} = \frac{1}{3}, \quad \frac{C_1O}{C_1C} = \frac{1}{3},$$

так что $\frac{A_1O}{A_1A} + \frac{B_1O}{B_1B} + \frac{C_1O}{C_1C} = 1$. Французский геометр Жергон,

о котором мы уже говорили раньше, утверждал, что это равенство сохраняется, если AA_1 , BB_1 , CC_1 — произвольные три отрезка, имеющие общую точку O и соединяющие вершины треугольника с точками на противоположных сторонах. Докажите это утверждение Жергона. (У. 122, Р. 159.)

9. Докажите, что в обозначениях, принятых в предыдущей задаче, $\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$. (У. 122, Р. 160.)

Пусть имеется произвольный n -угольник $A_1A_2A_3\dots A_n$ и

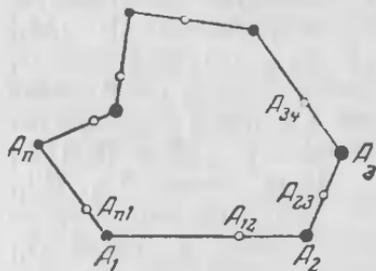


Рис. 36.

пусть на его сторонах A_1A_2 , A_2A_3 , ..., A_nA_1 (рис. 36) выбраны соответственно точки A_{12} , A_{23} , ..., A_{n1} , которые назовем *опорными точками*. Будем говорить, что для многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ выполняется условие Чевы при опорах в точках A_{12} , A_{23} , ..., A_{n1} , если

$$\frac{A_1A_{12}}{A_{12}A_2} \frac{A_2A_{23}}{A_{23}A_3} \dots \frac{A_nA_{n1}}{A_{n1}A_1} = 1. \quad (16)$$

Обозначим отношения, в которых стороны делятся опорными точками, короче, именно:

$$\frac{A_1A_{12}}{A_{12}A_2} \text{ — через } \lambda_{12}, \quad \frac{A_2A_{23}}{A_{23}A_3} \text{ — через } \lambda_{23} \text{ и т. д.,}$$

тогда условие Чевы короче можно записать так:

$$\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n1} = 1. \quad (17)$$

10. Обобщите теорему задачи 1 на случай произвольного n -угольника. Проведите доказательство при $n=4$. (Р. 160.)

11. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный пространственный (не плоский) четырехугольник (рис. 37); $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ — произвольные (внутренние) точки отрезков $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ соответственно. Тогда, для того чтобы два отрезка $A_{12}A_{34}$ и $A_{23}A_{41}$ имели общую точку, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие («условие Чебы для четырехугольника»):

$$\frac{A_1A_{12} \cdot A_2A_{23} \cdot A_3A_{34} \cdot A_4A_{41}}{A_{12}A_2 \cdot A_{23}A_3 \cdot A_{34}A_4 \cdot A_{41}A_1} = 1. \quad (18)$$

Докажите эту теорему. (Р. 161.)

12. Пусть в условиях предыдущей задачи точки $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ делят стороны четырехугольника соответственно в отношениях $\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{34}, \lambda_{41}$. В каком отношении делится каждый из отрезков $A_{12}A_{34}$ и $A_{23}A_{41}$ точкой их пересечения? (Р. 162.)

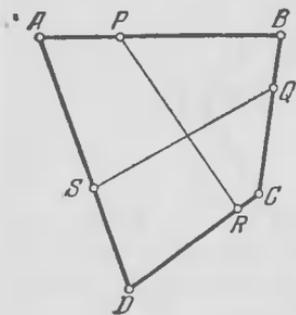


Рис. 38.

$A'B'C'D'$. Отрезки PR и QS изображают две натянутые нити, соединяющие точки на противоположных сторонах четырехугольника.

Можно ли, пользуясь рис. 38, сказать, пересекаются ли в натуре эти нити? (У. 122, Р. 162.)

(*) 14. Докажите следующий трехмерный аналог теоремы Жергона (см. задачу 8). Если четыре отрезка $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, A_4A'_4$ (рис. 39), соединяющие вершины тетраэдра

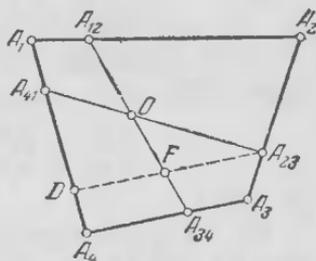


Рис. 37.

(!) 13. Четырехугольник $ABCD$ (рис. 38) представляет собой плоское изображение некоторого заведомо неплоского стержневого четырехугольника $A'B'C'D'$. Чертеж получен путем проектирования четырехугольника $A'B'C'D'$ пучком параллельных лучей. Например, можно себе представить, что четырехугольник — это тень (солнечная) четырехугольника

$A_1A_2A_3A_4$ с точками A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 , расположенными на противоположных им гранях, имеют общую точку O , то

$$\frac{A'_1O}{A_1A'_1} + \frac{A'_2O}{A_2A'_2} + \frac{A'_3O}{A_3A'_3} + \frac{A'_4O}{A_4A'_4} = 1.$$

(У. 122, Р. 163.)

(*) 15. Докажите, что в условиях предыдущей теоремы имеет место тождество

$$\frac{A_1O}{A_1A'_1} + \frac{A_2O}{A_2A'_2} + \frac{A_3O}{A_3A'_3} + \frac{A_4O}{A_4A'_4} = 3.$$

(Р. 164.)

(*) 16. (Трехмерный аналог теоремы Ван-Обеля; см. задачу 7.) Через точку O , лежащую внутри тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, и его вершину A_4 проведена прямая, встречающая проти-

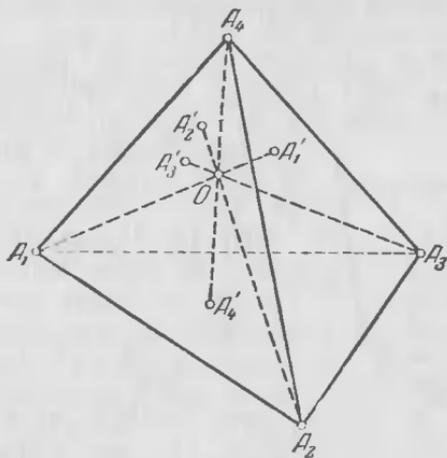


Рис. 39.

воположную грань $A_1A_2A_3$ в некоторой точке A'_4 (рис. 40). Через стороны треугольника $A_1A_2A_3$ и точку O проведены плоскости, встречающие противоположные ребра в точках A_{14}, A_{24}, A_{34} . Докажите, что

$$\frac{A_4O}{OA'_4} = \frac{A_3A_{14}}{A_{14}A_1} + \frac{A_3A_{24}}{A_{24}A_2} + \frac{A_3A_{34}}{A_{34}A_3}.$$

(У. 122, Р. 164.)

Следующую задачу можно рассматривать, как обобщение задачи 7 из § 1.

(**) 17. Пусть имеется произвольный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. На каждом из шести его ребер выберем по точке: на ребре A_1A_2 — точку A_{12} , на ребре A_2A_3 — точку A_{23} и т. д. (см. рис. 40). Короче, на ребре A_iA_k ($i \neq k$; $i, k = 1, 2, 3, 4$) выбираем точку A_{ik} . Соединим точки, выбранные на противоположных ребрах, отрезками. Таким образом получаются три отрезка: $A_{12}A_{34}$, $A_{23}A_{14}$, $A_{13}A_{24}$.

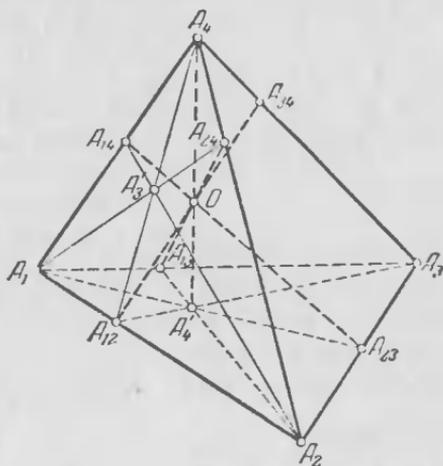


Рис. 40.

Будут ли они иметь общую точку? Да, если в каких-либо трех гранях тетраэдра выполняется условие Чевы (при опорах и выбранных точках). Докажите это. (У. 122, Р. 165.)

(**) 18. Пусть через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, разбивающая тетраэдр на две части, и пусть отмечена точка ее встречи с противоположным ребром. Докажите: если в трех гранях тетраэдра выполняется условие Чевы (при опорах в отмеченных точках), то эти шесть плоскостей имеют общую точку. (У. 122, Р. 166.)

(**) 19. Докажите теорему, обратную теореме из задачи 17: если три отрезка $A_{12}A_{34}$, $A_{23}A_{14}$, $A_{13}A_{24}$, соединяющие выбранные точки на противоположных ребрах, имеют общую точку O , то в каждой грани тетраэдра выполняется условие Чевы (при опорах в выбранных точках). (Р. 167.)

§ 4. ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ТЕОРЕМЫ, ДОКАЗЫВАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПОНЯТИЯ О ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ

Представим себе, что имеется некоторый треугольник ABC и на его сторонах или их продолжениях выбраны три точки A_1, B_1, C_1 (рис. 41). Древнегреческий геометр Менелай заинтересовался таким вопросом:

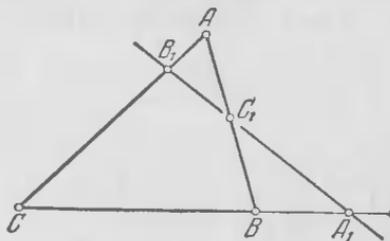


Рис. 41.

как должны быть связаны между собой шесть отрезков $AB_1, B_1C, CA_1, A_1B, BC_1, C_1A$ для того, чтобы три точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой? Менелая удалось найти исчерпывающий ответ на этот вопрос.

Прежде всего заметим, что если все три точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника (а не на их продолжениях), то они заведомо не лежат на одной прямой. Точно так же обстоит дело, если только одна из точек A_1, B_1, C_1 лежит на стороне треугольника (а две другие — на продолжениях двух других сторон).

Остается рассмотреть случаи, когда либо две из точек A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника (и одна — на продолжении стороны), либо все три точки лежат на продолжениях сторон (рис. 42). Вывод, к которому пришел Менелай, можно сформулировать в виде такой теоремы.

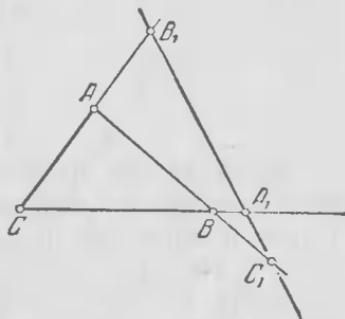


Рис. 42.

Теорема Менелая. Пусть на сторонах (или на продолжениях сторон) треугольника ABC выбраны точки: A_1 — на прямой BC , B_1 — на прямой CA , C_1 — на прямой AB , причем на самих сторонах лежат либо две из этих точек, либо ни одна. Для того чтобы эти три точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие («условие

Менелая»):

$$\frac{AB_1 CA_1 BC_1}{B_1 C A_1 B C_1 A} = 1. \quad (19)$$

1. Докажите теорему Менелая в предположении, что из трех точек A_1, B_1, C_1 две лежат на двух сторонах треугольника ABC , а третья — на продолжении третьей стороны. (У. 123, Р. 167.)

Теорему Менелая часто выгодно применять в тех случаях, когда требуется доказать, что какие-то три точки лежат на одной прямой. В качестве примера докажите, пользуясь теоремой Менелая, такую любопытную теорему Симсона¹⁾.

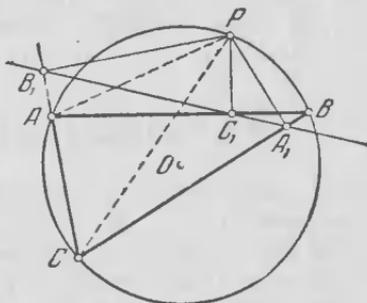


Рис. 43.

2. Если из какой-либо точки окружности (рис. 43) опущены перпендикуляры на все стороны вписанного треугольника (или на их продолжения), то основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой. (У. 123, Р. 169.)

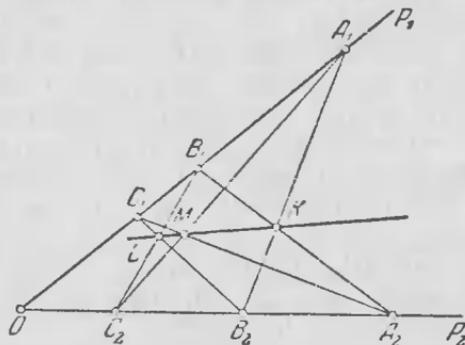


Рис. 44.

Следующая теорема представляет собой важный частный случай одной замечательной теоремы, принадлежащей

¹⁾ Другие примеры применения теоремы Менелая см. в книге Д. О. Шклярский и др., «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», ч. 2, Гостехиздат, 1952.

древнегреческому геометру Паппу и французскому ученому Б. Паскалю (1623—1662).

(**) 3. Пусть на сторонах OP_1 и OP_2 угла P_1OP_2 (рис. 44) выбраны точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 ($OA_1 > OB_1 > OC_1$, $OA_2 > OB_2 > OC_2$) и пусть $A_1B_2 \times A_2B_1 \equiv \equiv K$, $B_1C_2 \times B_2C_1 \equiv L$, $C_1A_2 \times C_2A_1 \equiv M$; тогда точки K, L, M лежат на одной прямой.

Докажите эту теорему. (У. 123, Р. 169.)

§ 5. АЛГЕБРА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В наших рассуждениях основными объектами были «материальные точки». С точки зрения математики материальная точка — это комплекс, состоящий из геометрической точки и некоторого (положительного) числа.

В математике не раз приходится сталкиваться с таким явлением: комплекс из двух каких-то математических объектов рассматривают как некоторый новый объект, который затем уже подвергается специальному изучению. Так, например, в курсе алгебры вводится понятие комплексного числа как комплекса (пары) двух действительных чисел.

В строгих курсах геометрии таким образом вводится, например, понятие отрезка как комплекса (пары) двух точек; понятие угла может быть введено сходным образом: угол можно рассматривать как комплекс двух лучей с общим началом.

Если имеется у нас какая-либо материальная точка $A \equiv \equiv (A, m)$, то мы (геометрическую) точку A будем иногда называть *носителем* или *аффиксом* этой материальной точки, а число m будем по-прежнему называть *массой* этой материальной точки.

Равенству вида $(A, a) \equiv \equiv (B, b)$ мы придаем такой смысл: две материальные точки имеют один и тот же носитель ($A \equiv \equiv B$) и равные массы ($a = b$).

Решение почти всех ранее рассмотренных задач опиралось на то, что мы «объединяли некоторые материальные точки в их центре тяжести»; точнее, заменяли некоторые материальные точки их *объединением*. При этом под *объединением* двух материальных точек (A, a) и (B, b) мы понимали некоторую новую материальную точку $(C, a + b)$, где C — центр тяжести двух данных материальных точек. Можно

было бы так сказать: *объединением* двух материальных точек называется такая новая материальная точка, носителем которой является центр тяжести данных материальных точек и масса которой равна сумме масс этих материальных точек.

Вместо «объединения» можно употреблять также выражение «сумма».

Если материальная точка $C \equiv (C, c)$ является объединением двух других материальных точек $A \equiv (A, a)$ и $B \equiv (B, b)$, то мы это будем записывать так:

$$(A, a) \dagger (B, b) = (C, c)$$

или, короче,

$$A \dagger B = C.$$

Мы не будем исключать и тот случай, когда две материальные точки имеют один и тот же носитель. В этом случае, естественно, будем считать носителем объединения их общий носитель. Таким образом, $(A, a) \dagger (A, b) = (A, a \dagger b)$.

У нас возникает своеобразное исчисление, своеобразная алгебра. В этой алгебре имеет место переместительный закон: $A \dagger B = B \dagger A$. Это следует из самого определения центра тяжести двух материальных точек. Имеет место также сочетательный закон:

$$(A_1 \dagger A_2) \dagger A_3 = A_1 \dagger (A_2 \dagger A_3),$$

или, иначе,

$$\begin{aligned} [(A_1, m_1) \dagger (A_2, m_2)] \dagger (A_3, m_3) = \\ = (A_1, m_1) \dagger [(A_2, m_2) \dagger (A_3, m_3)]. \end{aligned}$$

Подробнее: Найдем ли мы сначала объединение A_{12} двух материальных точек A_1 и A_2 и затем найдем объединение этой материальной точки A_{12} с третьей материальной точкой A_3 , или сначала найдем объединение A_{23} материальных точек A_2 и A_3 , а затем найдем объединение материальных точек A_1 и A_{23} , в обоих случаях мы придем к одному и тому же результату, к одной и той же материальной точке.

Понятно, что смысл этого утверждения состоит в том, что центр тяжести трех материальных точек не зависит от порядка, в котором объединяются эти точки.

(**) Дадим здесь доказательство этого факта, отличное от приведенного в § 2. Ограничимся случаем, когда точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой (в противном случае доказательство только упрощается).

Ясно, что отрезки $A_{12}A_3$ (рис. 45) и A_1A_{23} пересекаются. Обозначим через O точку их пересечения. Покажем, что O — центр тяжести точек $A_{12} \equiv (A_{12}, m_1 + m_2)$ и A_3 . Пусть $A_{12}K \parallel A_1O$, где K лежит на прямой A_2A_3 между A_2 и A_3 .

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\frac{A_{12}O}{OA_3} = \frac{KA_{23}}{A_{23}A_3}, \quad (20)$$

$$\frac{A_2A_{23}}{KA_{23}} = \frac{A_1A_2}{A_1A_{12}}. \quad (21)$$

Поэтому

$$\frac{A_{12}O}{OA_3} = \frac{A_2A_{23}}{A_{23}A_3} \cdot \frac{A_1A_{12}}{A_1A_2}. \quad (22)$$

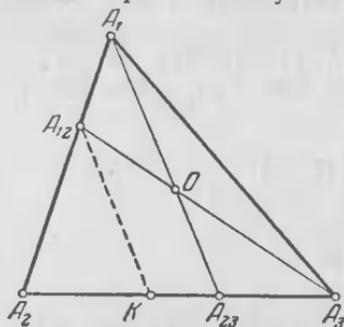


Рис. 45.

По правилу рычага имеем

$$\frac{A_2A_{23}}{A_{23}A_3} = \frac{m_3}{m_2}, \quad (23)$$

$$\frac{A_1A_{12}}{A_{12}A_3} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (24)$$

Из (24) следует

$$\frac{A_1A_{12}}{A_1A_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (25)$$

Окончательно из (22), (23) и (25) получаем

$$\frac{A_{12}O}{OA_3} = \frac{m_3}{m_2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_3}{m_1 + m_2},$$

а это и означает, что O — центр тяжести материальных точек $(A_{12}, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3) .

Аналогично можно показать, что O — центр тяжести точек (A_1, m_1) и $(A_{23}, m_2 + m_3)$.

Тем самым можно считать законченным доказательство равенства $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$.

Следствие. $A_2 + (A_1 + A_3) = (A_2 + A_1) + A_3$.

Смысл последнего равенства заключается в следующем: если $A_{13} = Z[A_1, A_3]$, то A_2A_{13} проходит через точку O .

Пусть O — центр тяжести системы из трех материальных точек $A_1 \equiv (A_1, m_1)$, $A_2 \equiv (A_2, m_2)$, $A_3 \equiv (A_3, m_3)$. Под

суммой этих трех материальных точек $(A_1, m_1) + (A_2, m_2) + (A_3, m_3)$ (или, что то же, $A_1 + A_2 + A_3$) будем понимать материальную точку $(O, m_1 + m_2 + m_3)$, т. е. под суммой *трех* материальных точек понимают такую материальную точку, которая получится, если в центре тяжести этих трех точек поместить массы всех трех материальных точек.

Понятно, что

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= (A_1 + A_2) + A_3 = \\ &= (A_2 + A_3) + A_1 = (A_3 + A_1) + A_2. \end{aligned}$$

Объединение *четырёх* материальных точек A_1, A_2, A_3, A_4 мы определяем как сумму $(A_1 + A_2 + A_3) + A_4$ и записываем его еще так: $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

Аналогично можно определить объединение пяти, шести и вообще любого числа материальных точек.

Если уже определено объединение $n - 1$ материальных точек A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , то объединение n материальных точек может быть дано «по индукции»: под объединением n материальных точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ понимают сумму $(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}) + A_n$.

Это же выражение записываем еще так: $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n$ (т. е. опуская скобки).

Нетрудно доказать, что объединение n материальных точек не зависит от того порядка, в котором последовательно объединяются эти точки.

(**) Для доказательства воспользуемся методом полной индукции. При $n = 3$ теорема верна (она была доказана ранее).

Пусть теорема верна при $n = k$. Докажем, что она верна при $n = k + 1$. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ — система каких-либо $k + 1$ материальных точек.

Пусть при каком-то способе их объединения сначала объединяются k из этих $k + 1$ точек (все, кроме какой-то точки A_m), а последней присоединяется точка A_m , отличная от A_{k+1} ($m < k + 1$).

Если не брать в рассмотрение точку A_m , то у нас только k материальных точек, а именно: $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_{m+1}, \dots, A_k, A_{k+1}$.

Поэтому, в силу индуктивного допущения, в каком бы порядке мы их ни объединяли, мы получим один и тот же результат, а именно: $A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k + A_{k+1}$. Но

$$\begin{aligned} &(A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k + A_{k+1}) + A_m = \\ &= [(A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k) + A_{k+1}] + A_m = \\ &= (A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k) + (A_{k+1} + A_m) \end{aligned}$$

в силу сочетательного закона для *трех* материальных точек. С другой стороны,

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_m + A_{m+1} + \dots + A_k + A_{k+1} &= \\ &= (A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_m + A_{m+1} + \dots + A_k) + A_{k+1} = \\ &= (A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k + A_m) + A_{k+1} = \\ &= [(A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k) + A_m] + A_{k+1} = \\ &= (A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k) + (A_m + A_{k+1}). \end{aligned}$$

Теперь понятно, что

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_{m+1} + \dots + A_k + A_{k+1}) + A_m &= \\ &= A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_m + A_{m+1} + \dots + A_k + A_{k+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из того, что объединение n материальных точек не зависит от порядка, в котором последовательно объединяются эти точки, вытекает такая теорема («теорема о возможности группировки»): *Объединение n материальных точек не изменится, если заменить некоторые из этих точек их объединением.*

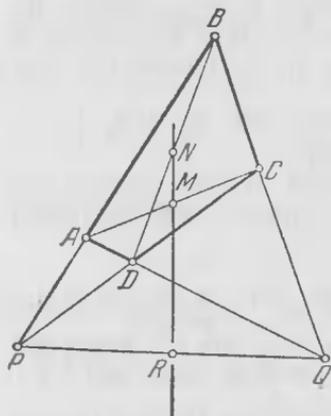


Рис. 46.

В самом деле, пусть имеется n материальных точек, и какие-то m из них мы хотим заменить их объединением. Обозначим это объединение через B . Так как порядок, в котором объединяются точки, несуществен, то мы без потери общности можем считать, что сначала мы объединяем обратные нами m материальных точек. Мы можем также считать, что они имеют номера $1, 2, \dots, m$ (в противном случае мы изменили бы нумерацию материальных точек). Но тогда очевидно, что $A_1 + A_2 + \dots + A_m + A_{m+1} + \dots + A_n = (A_1 + A_2 + \dots + A_m) + A_{m+1} + \dots + A_n = B + A_{m+1} + \dots + A_n$, а это и требовалось доказать.

Рассмотрим в качестве примера одну теорему, принадлежащую известному немецкому математику К. Ф. Гауссу:

Если противоположные стороны выпуклого четырехугольника (рис. 46) при продолжении попарно пересекаются, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на одной прямой с серединами диагоналей четырехугольника.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, P — точка пересечения прямых AB и CD , Q — точка пересечения прямых BC и AD , R — середина отрезка PQ . Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD . Утверждается, что M , N и R лежат на одной прямой. Можно, очевидно, ограничиться случаем, когда P расположена на лучах BA и CD , а Q — на лучах BC и AD (см. рис. 46). При других возможных расположениях точек рассуждения не будут существенно меняться.

Поместим в B произвольную массу b и подберем в P и Q массы p и q так, чтобы

$$Z[(B, b), (P, p)] \equiv A, \quad Z[(B, b), (Q, q)] \equiv C. \quad (26)$$

Докажем теперь такое тождество:

$$\begin{aligned} & \left[\left(P, \frac{pq}{b} \right) + \left(Q, \frac{pq}{b} \right) \right] + \{ [(P, p) + (Q, q) + (B, b)] + \\ & + (B, p + q + b) \} = \left[\left(P, \frac{q+b}{b} p \right) + (B, q + b) \right] + \\ & + \left[\left(Q, \frac{p+b}{b} q \right) + (B, p + b) \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Действительно, левая часть равна

$$\left(P, \frac{pq}{b} + p \right) + \left(Q, \frac{pq}{b} + q \right) + (B, p + q + 2b),$$

и тому же равна правая часть.

Справедливость этого тождества и доказывает теорему. Действительно, центром тяжести двух материальных точек $\left(P, \frac{pq}{b} \right)$ и $\left(Q, \frac{pq}{b} \right)$, имеющих равные массы, служит середина отрезка PQ , т. е. точка R . Поэтому

$$\left(P, \frac{pq}{b} \right) + \left(Q, \frac{pq}{b} \right) = \left(R, \frac{2pq}{b} \right).$$

Центром тяжести трех материальных точек (P, p) , (Q, q) и (B, b) служит точка D . Поэтому

$$(P, p) + (Q, q) + (B, b) = (D, p + q + b).$$

Центром тяжести материальных точек $(D, p + q + b)$ и $(B, p + q + b)$ служит середина отрезка DB , т. е. точка N . Следовательно,

$$(D, p + q + b) + (B, p + q + b) = (N, 2p + 2q + 2b),$$

или

$$[(P, p) + (Q, q) + (B, b)] + (B, p + q + b) = (N, 2p + 2q + 2b).$$

В силу самого выбора масс p и b имеем $AP \cdot p = AB \cdot b$, откуда (умножая обе части на $\frac{q+b}{b}$) получим

$$AP \cdot \frac{q+b}{b} p = AB \cdot (q+b).$$

Отсюда видно, что A — центр тяжести двух материальных точек $(P, \frac{q+b}{b} p)$ и $(B, q+b)$, т. е.

$$\begin{aligned} (P, \frac{q+b}{b} p) + (B, q+b) &= (A, \frac{q+b}{b} p + q+b) = \\ &= (A, \frac{(q+b)(p+b)}{b}). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$(Q, \frac{p+b}{b} q) + (B, p+b) = (C, \frac{(p+b)(q+b)}{b}).$$

Поэтому правая часть тождества (27) равна

$$(A, \frac{(q+b)(p+b)}{b}) + (C, \frac{(p+b)(q+b)}{b}). \quad (28)$$

Но эти два слагаемых представляют собой материальные точки с равными массами. Поэтому их центр тяжести — середина отрезка AC , т. е. точка M , так что сумма (28) равна

$$(M, \frac{2(p+b)(q+b)}{b}).$$

Итак, тождество (27) возможно переписать в виде

$$(R, \frac{2pq}{b}) + (N, 2p + 2q + 2b) = (M, \frac{2(p+b)(q+b)}{b}).$$

Отсюда видно, что точка M — центр тяжести двух материальных точек, написанных в левой части последнего равенства. Следовательно, M расположена на прямой RN , что и требовалось доказать.

Из нашего доказательства вытекает, между прочим, что при принятом нами выборе данных

$$\frac{RM}{NM} = \frac{2(p+q+b)}{2\frac{pq}{b}} = \frac{\frac{p}{b} + \frac{q}{b} + 1}{\frac{p}{b} \cdot \frac{q}{b}},$$

т. е.

$$\frac{RM}{NM} = \frac{\frac{BA}{AP} + \frac{BC}{CQ} + 1}{\frac{BA}{AP} \cdot \frac{BC}{CQ}}.$$

Мы видим, что содержание рассмотренной нами теоремы выражается некоторым алгебраическим тождеством, связывающим какие-то материальные точки. Аналогичным образом можно было бы получить алгебраические тождества, выражающие многие из ранее рассмотренных теорем.

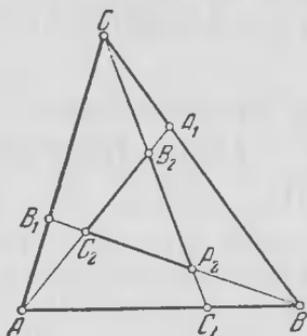


Рис. 47.

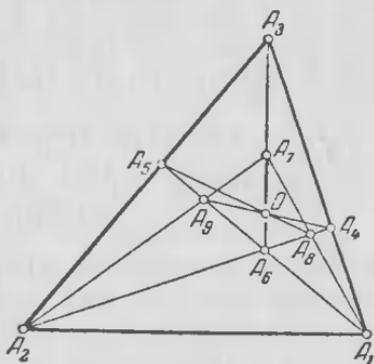


Рис. 48.

Например, справедливость теоремы из задачи 5 § 1 вытекает из тождества:

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2) + (A_3 + A_4) + (A_5 + A_6) &= \\ &= (A_2 + A_3) + (A_4 + A_5) + (A_6 + A_1), \end{aligned}$$

где A_1, A_2, \dots, A_6 — материальные точки, которые получают, если поместить в вершинах шестиугольника A_1, A_2, \dots, A_6 массы по одной единице.

Рассмотрим еще несколько примеров.

1. На сторонах треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1, C_1 (рис. 47) так, что $CA_1 = \frac{1}{3}CB$, $BC_1 = \frac{1}{3}BA$, $AB_1 = \frac{1}{3}AC$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 ограничивают некоторый новый треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что точка пересечения его медиан совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC . (Р. 171.)

Следующую теорему доказала четверть века назад Рут Мүфанг. Мы также докажем ее с помощью «алгебры материальных точек».

(**) 2. На сторонах A_1A_3 и A_2A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 48) выбраны произвольно точки A_4 и A_5 и отмечена точка A_6 пересечения прямых A_1A_5 и A_2A_4 .

Произвольная точка A_7 отрезка A_3A_6 соединена прямыми с вершинами A_1 и A_2 треугольника и отмечены точки их встречи A_8 и A_9 с прямыми A_2A_4 и A_1A_5 соответственно. Тогда точка O пересечения прямых A_5A_8 и A_4A_9 лежит на отрезке A_6A_7 . Докажите это. (Р. 172.)

(*) § 6. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МАСС. ИДЕЯ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

В наших рассуждениях «материальная точка» (A, m) выступала как комплекс, состоящий из некоторой геометрической точки A и некоторого положительного числа m . Это число m мы до сих пор называли *массой*. Однако его можно было бы назвать и каким-либо другим словом, скажем, «весом». Все наши предыдущие рассуждения останутся, конечно, в силе, если заменить слово «масса» словом «вес». Мы бы в таком случае уже не говорили, например, «рассмотрим материальную точку (A, m) с *массой* m », а сказали бы: «рассмотрим материальную точку (A, m) с *весом* m ».

До сих пор (в §§ 1—5) мы наглядно представляли материальную точку (A, m) в виде материального шарика, размерами которого можно пренебречь, имеющего *массу* m . Но с таким же успехом мы могли бы наглядно представить ту же материальную точку в виде такого же шарика с *весом* m .

Мы далее рассматривали центр тяжести двух материальных точек вида (A, a) и (B, b) и определяли его по правилу рычага. Если мы хотим этот центр тяжести наглядно представить в виде центра тяжести двух шариков, помещенных в точках A и B и *весащих* соответственно a и b единиц, то нужно сделать несколько оговорок (которые, впрочем, само собой подразумеваются). Во всяком случае, эти шарики должны быть на небольшом расстоянии друг от друга, настолько небольшом, чтобы можно было без чувствительной погрешности считать, что при свободном падении они будут перемещаться параллельно и с одним и тем же ускорением. Кроме того, если шарики из *различных* материалов, то важно, чтобы удельным весом газа или жидкости, заполняющей окружающую их среду, возможно было пренебречь. Такие условия практически будут соблюдены, например, если мы не выйдем за пределы, скажем, комнаты или даже города.

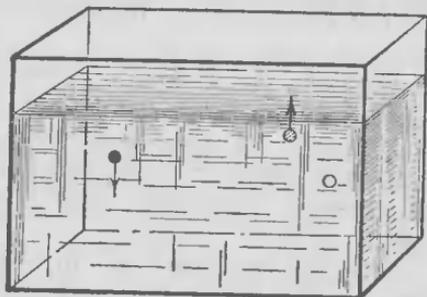


Рис. 49.

До сих пор, рассматривая материальную точку, т. е. пару вида (A, m) , мы всегда полагали, что ее «масса» (или «вес») — *положительное* число. Для решения некоторых геометрических задач весьма полезно рассмотреть и такой случай, когда это число m может оказаться также отрицательным. Мы сейчас и поведем разговор о парах вида (A, m) , где A — геометрическая точка, а m может быть *произвольным действительным числом*. Такую пару мы, сохраняя старую терминологию, будем по-прежнему называть материальной точкой, а для числа m сохраним старое название «масса» («или вес»). Как же себе наглядно представить «материальную точку» с отрицательной «массой» (или отрицательным «весом»)?

Приведем одну конкретную физическую картину, которая позволит читателю наглядно представить материальные точки с произвольными вещественными «массами» (или «весами»).

Пусть имеется какой-то бассейн, наполненный водой (рис. 49). Пусть шарик, который весит в воздухе (точнее, в пустоте) p единиц (скажем, $p g$), помещен в какую-то точку A внутри этого бассейна.

Рассмотрим сначала случай, когда удельный вес шарика больше 1 (например, когда шарик железный). Понятно, что шарик пойдет в этом случае ко дну. Если *под водой* взвесить этот шарик (скажем, с помощью пружинных весов), то весы покажут *меньше*, чем p единиц. Нетрудно, если будет необходимость, узнать, сколько будет весить шарик под водой.

Пусть удельный вес шарика равен d , а объем V . Тогда $V = \frac{p}{d}$. Считая удельный вес воды равным 1, найдем, что вес воды в объеме, занимаемом шариком, равен $\frac{p}{d} \cdot 1 = \frac{p}{d}$. В силу закона Архимеда *вес m шарика под водой* (его «подводный вес») определится по такой формуле:

$$m = p - \frac{p}{d} = p \left(1 - \frac{1}{d} \right). \quad (29)$$

Понятно, что m — подводный вес шарика — это результирующая сила, которая получается от сложения двух сил, действующих на шарик: силы тяжести и выталкивающей силы воды.

Обратим внимание на то, что в рассматриваемом случае (при $d > 1$) $m > 0$ и эта сила направлена *вниз*. Пусть теперь удельный вес шарика меньше 1 (например, когда шарик сделан из *пробки*). В этом случае шарик будет выталкиваться из воды («вверх»). Результирующая сила m , под действием которой шарик будет выталкиваться вверх, будет в соответствии с законом Архимеда равна по-прежнему

$$m = p - \frac{p}{d} = p \left(1 - \frac{1}{d} \right),$$

но теперь это выражение отрицательно (ибо $d < 1$) и, следовательно, сила направлена «*вверх*».

Пусть, наконец, $d = 1$, т. е. удельный вес шарика равен удельному весу воды. Такой шарик можно себе представить изготовленным из дерева и содержащим металлическую сердцевину (причем металл и дерево должны, понятно, быть взяты во вполне определенном отношении). Можно его себе представить изготовленным также из специальной пластмассы. Его вес в воде по-прежнему определяется формулой (29), а так как $d = 1$, то $m = 0$, т. е. такой шарик в воде невесом. При любом положении точки A в воде он останется в покое.

Таким образом, при любом $d (d > 0)$ выражение (29) характеризует величину результирующей силы, которая действует на шарик; она направлена «вниз» при $m > 0$ (т. е. при $d > 1$) и «вверх» при $m < 0$ (т. е. при $d < 1$). При $m > 0$ мы эту силу назвали «подводным весом шарика». То же название мы сохраним и при $m \leq 0$. Таким образом, подводный вес шарика может выражаться как положительным, так и отрицательным числом или нулем.

Перейдем теперь к наглядному истолкованию «материальных точек». Материальную точку (A, m) при любом m (положительном, отрицательном или равном нулю) мы можем наглядно представлять в виде шарика, размерами которого можно пренебречь, помещенного в точке A и имеющего подводный вес m .

Значит, то число m , которое мы условились называть «массой» материальной точки, мы истолковываем, как «подводный вес шарика». При $m > 0$ мы материальную точку (A, m) наглядно представляем в виде шарика, тонущего в воде (например, железного). При $m < 0$ мы материальную точку (A, m) представляем себе в виде шарика, всплывающего на поверхность воды (например, пробкового). При $m = 0$ мы материальную точку представляем себе в виде шарика (скажем, из специальной пластмассы) с таким же удельным весом, что и у воды. В воде он будет невесомым. Будучи помещен в какой-либо точке, он под действием силы тяжести и выталкивающей силы воды останется на месте.

Если будет идти речь о двух материальных точках, то мы их себе можем наглядно представлять нанизанными на тонком прямолинейном стержне, изготовленном из той же «невесомой» (в воде) пластмассы, о которой мы говорили выше. Ниже мы будем говорить о центре тяжести двух материальных точек. Практически этот центр тяжести можно наглядно представить как точку, в которой нужно подпереть или за которую нужно подвесить невесомый (в воде) стержень для того, чтобы он вместе с нанизанными на нем «материальными точками» оказался в безразличном равновесии.

Всегда ли найдется такая точка на этом стержне между этими двумя «материальными точками»? Не может ли она оказаться вне отрезка, соединяющего данные материальные точки? Не может ли случиться, что такой точки вовсе нет? Это мы выясним ниже.

Аналогичным образом можно себе представить центр тяжести *любого* числа материальных точек.

Встречающееся ниже понятие «объединение нескольких материальных точек» можно наглядно истолковать как *равнодействующую* подводных весов всех тех шариков, которые наглядно изображают эти материальные точки.

Иногда полезно дать более широкое наглядное толкование понятия материальной точки с произвольной вещественной «массой».

Сделаем одно предварительное замечание. На каждой прямой мы можем выбрать положительное направление и единицу



Рис. 50.

масштаба. Если это уже сделано, то прямую иногда называют *осью*.

Каждый отрезок (скажем, AB) можно рассматривать как направленный, причем сначала мы называем начало отрезка (A), а затем — его конец (B); направление отрезка — от A к B . Если отрезок лежит на оси (или параллелен ей), то его направление может: 1) либо совпадать с направлением оси, 2) либо быть противоположным направлению оси.

В первом случае мы *величиной отрезка* называем его длину; во втором случае величиной отрезка мы называем его длину, взятую со знаком минус ($-$).

Таким образом, *величина отрезка*, лежащего на какой-нибудь оси или параллельного оси — это его длина, взятая со знаком $+$ или $-$, в зависимости от того, будут ли направления отрезка и оси одинаковы или противоположны. Величину отрезка AB будем обозначать так: \overline{AB} .

В нашем примере (рис. 50) $\overline{AB} = 3$, $\overline{DC} = -2$, $\overline{BA} = -3$. Вообще всегда $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Вернемся теперь к вопросу о возможном физическом истолковании материальных точек с произвольными вещественными массами.

Мы будем представлять, что в пространстве произвольным образом выбрана какая-либо ось l . *Материальную точку*

(A, m) можно наглядно истолковать как силу, параллельную оси l и приложенную к точке A .

Число m («масса») характеризует абсолютную величину (или, как говорят иногда, «напряжение») и направление этой силы: сила и ось одинаково направлены, если $m > 0$, и противоположно направлены, если $m < 0$; по абсолютной величине сила равна $|m|$ (единицам силы). Если $m = 0$, то сила равна нулю. Материальную точку вида $(A, 0)$ можно называть «незагруженной точкой» или «нулевой силой».

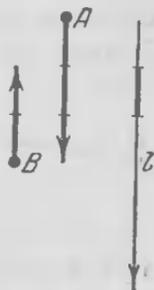


Рис. 51.

На рис. 51 изображены наглядно две «материальные точки»: $(A, 3)$ и $(B, -2)$.

Когда будем говорить ниже о «центре тяжести нескольких материальных точек», то его можно себе наглядно представлять как *центр параллельных сил*, а «объединение нескольких материальных точек» — как равнодействующую нескольких параллельных сил, приложенную в центре параллельных сил.

Для геометрических приложений важно, что почти все основное, что мы говорили относительно материальных точек с *положительными* массами, возможно обобщить на случай материальных точек с произвольными *вещественными* массами.

Понятие центра тяжести двух материальных точек (с произвольными вещественными массами) можно ввести так.

Центром тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b) (рис. 52) называется такая точка C , лежащая на оси AB (положительное направление от A к B), которая удовлетворяет условию: $a \cdot \overline{AC} = b \cdot \overline{CB}$.

Если C — центр тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b) , то этот факт записываем так:

$$Z[(A, a), (B, b)] \equiv C.$$

Нетрудно понять, что

$$Z[(A, a), (B, b)] \equiv Z[(B, b), (A, a)].$$

Центр тяжести C двух материальных точек (A, a) и (B, b) будет лежать между A и B , лишь если «массы» a и b



Рис. 52.

одного знака. Если a и b разных знаков, то C вне отрезка AB (рис. 53).

Лишь в одном случае центр тяжести материальных точек (A, a) и (B, b) с различными носителями ($A \neq B$) не существует, — именно, когда массы их противоположны по знаку, но равны по абсолютной величине (т. е., если $a = -b \neq 0$). С точки зрения механики здесь речь идет о *паре сил*.



Рис. 53.

В связи с этим мы будем называть две материальные точки вида (A, a) и $(B, -a)$ ($A \neq B, a \neq 0$) *механической парой*.

Этот случай можно себе представить как предельный для того случая, когда $a \neq -b$, но $a \rightarrow -b$. Если $a \neq -b, a \neq 0, b \neq 0$, то можно написать $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{b}{a}, \frac{\overline{AC}}{\overline{AC} + \overline{CB}} = \frac{b}{a+b}$,

т. е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{a+b}$. Если $a \rightarrow -b$, то $a + b \rightarrow 0$ и, следовательно, $\overline{AC} \rightarrow \infty$, т. е. точка C неограниченно удаляется вдоль прямой AB . Поэтому иногда говорят, что если $a = -b$, то центр тяжести материальных точек (A, a) и (B, b) «лежит в бесконечно удаленной точке прямой AB ».

Оставаясь здесь в рамках *элементарной* геометрии, мы будем эту фразу рассматривать лишь как образное выражение того, что центра тяжести в данном случае нет. В дальнейшем мы всегда будем подобные случаи избегать ¹⁾.

Если одна из двух материальных точек является незагруженной, а «масса» другой материальной точки отлична от нуля, то их центр тяжести совпадает с носителем загруженной точки. В связи с этим имеет смысл все незагруженные точки считать равными, т. е. считать, что при любых A и B $(A, 0) \equiv (B, 0)$.

Задача о нахождении центров тяжести двух незагруженных точек является неопределенной: существует бесконечно много точек, которые можно рассматривать в качестве центров тяжести этих двух точек. В дальнейшем мы такие случаи не будем рассматривать.

Понятие о центре тяжести и об объединении n материальных точек можно определить «по индукции» так же, как это

¹⁾ Рассмотрение таких случаев требовало бы привлечения системы аксиом проективной геометрии.

было сделано в § 1—2. Предлагаем это сделать читателю самостоятельно.

Пусть имеется произвольная система материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$; предположим, что выбрана какая-нибудь плоскость α и ось $M'M$, перпендикулярная к α (рис. 54). Плоскость разбивает эту прямую на два луча, из которых один одинаково направлен с осью (луч OM), другой направлен противоположно этой оси (луч OM'). Некоторые

из наших n материальных точек лежат *над* плоскостью α (это значит: по ту же сторону от плоскости α , что и луч OM), некоторые — *под* плоскостью α (по ту же сторону, что и OM'), некоторые же в самой данной плоскости α . Расстояние каждой точки от плоскости α будем брать со знаком $+$, если она над плоскостью α , и со знаком $-$, если она под этой плоскостью. Образуемое таким обра-

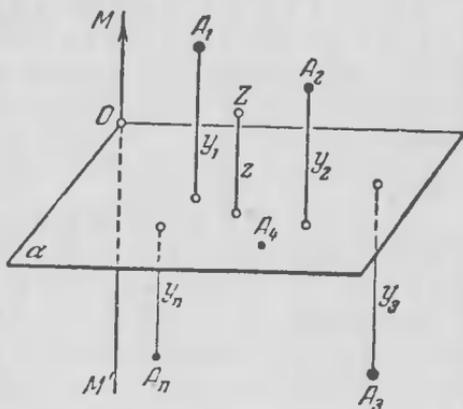


Рис. 54.

зом число мы назовем *аппликатой* точки. Так, например, если аппликата точки A_3 равна -6 , то это значит, что точка A_3 лежит *под* плоскостью α на расстоянии в 6 единиц от нее.

Если аппликаты y_1, y_2, \dots, y_n точек A_1, A_2, \dots, A_n известны, то, вообще говоря ¹⁾, можно найти аппликату z центра тяжести Z системы из n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$.

Именно, сохраняется формула из § 2:

$$z = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Отсюда уже можно заключить, что, вообще говоря ¹⁾, остаются в силе теорема о единственности центра тяжести и

¹⁾ Мы не будем здесь уточнять, что значит это «вообще говоря». Смысл в том, чтобы при последовательном объединении материальных точек не получалась механическая пара.

теорема о возможности группировки. (Основная идея доказательства при этом остается, по существу, та же, что и в § 2.)

Эти теоремы можно сформулировать теперь так:

Теорема о единственности центра тяжести.
Если при двух различных способах последовательного объединения данных материальных точек мы приходим каждый раз к какому-нибудь вполне определенному центру тяжести, то эти два центра тяжести совпадают.

Теорема о возможности группировки материальных точек. Пусть система из n материальных точек имеет определенный центр тяжести. Если существует объединение нескольких материальных точек из данной системы, то замена этой группы материальных точек их объединением не может повлиять на положение центра тяжести всей системы.

Покажем, как с помощью метода произвольных вещественных масс доказываются некоторые геометрические теоремы. Так как в этом параграфе мы намерены ознакомить читателя только с идеей метода, то доказательство существования центров тяжести встречающихся систем материальных точек мы приводить не будем.

1. Теорема Менелая. Пусть точки A_1, B_1, C_1 (рис. 55—56) расположены на сторонах треугольника ABC

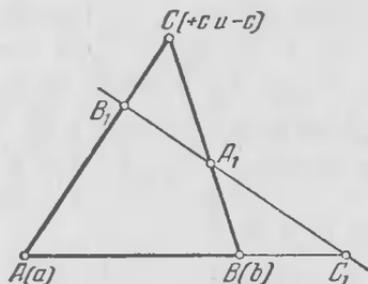


Рис. 55.

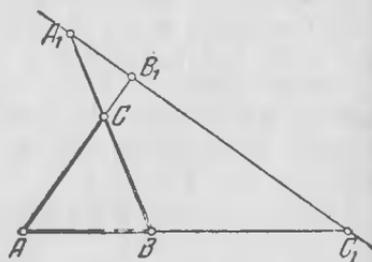


Рис. 56.

или на их продолжениях. Точки A_1, B_1, C_1 будут лежать на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется такое условие Менелая (с учетом направления отрезков):

$$\frac{\overline{AB_1} \cdot \overline{CA_1} \cdot \overline{BC_1}}{\overline{B_1C} \cdot \overline{A_1B} \cdot \overline{C_1A}} = -1.$$

Необходимость. Пусть точки A_1, B_1, C_1 находятся на одной прямой. Докажем, что тогда имеет место условие Менелая.

Возьмем в C произвольную массу c ($c \neq 0$) и подберем массы a в A и b в B так, чтобы

$$Z[(A, a), (C, c)] \equiv B_1, \quad (30)$$

$$Z[(B, b), (C, -c)] \equiv A_1. \quad (31)$$

Обозначим через S центр тяжести системы, состоящей из четырех материальных точек $(A, a), (B, b), (C, c), (C, -c)$.

Если мы объединим две материальные точки (C, c) и $(C, -c)$, то получим незагруженную точку $(C, 0)$, а она не влияет на положение центра тяжести системы. Таким образом, вся система сводится лишь к двум материальным точкам (A, a) и (B, b) и, следовательно, S — на прямой AB .

Но можно сгруппировать те же четыре материальные точки и иначе: в одной группе материальные точки (A, a) и (C, c) , а в другой — материальные точки (B, b) и $(C, -c)$. Тогда мы опять приходим к системе из двух материальных точек $(A_1, a+c)$ и $(B_1, b-c)$ и, следовательно, S находится на прямой A_1B_1 . Таким образом, S — общая точка прямых AB и A_1B_1 , т. е. S совпадает с точкой C_1 . Итак, $C_1 \equiv Z[(A, a), (B, b)]$. Но тогда

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{b}{a}, \quad (32)$$

а в силу условий (30), (31)

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{c}{a}, \quad (33)$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{b}{-c}. \quad (34)$$

Перемножая последние три равенства почленно, получим условие Менелая.

Достаточность. Пусть условие Менелая выполнено. Докажем, что точка C_1 расположена на прямой A_1B_1 .

Подберем массы a, b, c так же, как и при доказательстве необходимости (т. е. так, чтобы выполнялись равенства (33) и (34)). Как и прежде, убедимся, что центр тяжести системы из четырех материальных точек $(A, a), (B, b), (C, c), (C, -c)$

служит одновременно центром тяжести каждой пары материальных точек

$$(A, a), (B, b) \text{ и } (A_1, a + c), (B_1, b - c).$$

Но в силу условия Менелая и равенств (33) и (34) ясно, что

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{b}{a}.$$

Последнее означает, что C_1 — центр тяжести пары материальных точек (A, a) и (B, b) , а следовательно, и центр тяжести двух материальных точек $(A_1, a + c)$ и $(B_1, b - c)$. Поэтому C_1 — на прямой A_1B_1 , что и требовалось доказать.

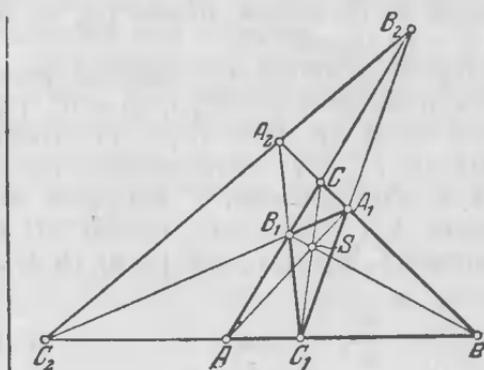


Рис. 57.

II. Малая теорема Дезарга. Пусть в $\triangle ABC$ вписан $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 57) так, что A_1 лежит на прямой BC , B_1 — на прямой CA и C_1 на AB ; пусть прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 , соединяющие соответствующие вершины двух треугольников, имеют общую точку S . Если каждая из трех пар прямых AB и A_1B_1 , BC и

B_1C_1 , CA и C_1A_1 пересекается, то эти три точки пересечения лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть $AB \times A_1B_1 \equiv C_2$, $BC \times B_1C_1 \equiv A_2$, $CA \times C_1A_1 \equiv B_2$. Так как прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 имеют общую точку (обозначим ее через S), то всегда возможно подобрать три неравные нулю массы a , b , c так, чтобы

$$\begin{aligned} Z[(A, a), (C, c)] &\equiv B_1, \quad Z[(B, b), (C, c)] \equiv A_1, \\ Z[(A, a), (B, b)] &\equiv C_1. \end{aligned}$$

Центром тяжести системы из трех материальных точек (A, a) , (B, b) , (C, c) будет, понятно, точка S .

Поместим теперь в A массу a , в B — массу $-b$, а в C две массы: $+c$ и $-c$. Четыре материальные точки (A, a) , $(B, -b)$,

(C, c) , и $(C, -c)$ можно сгруппировать двумя различными способами. Мы можем объединить (A, a) и (C, c) в одну группу, а в другую $(B, -b)$ и $(C, -c)$. Мы получим систему из двух материальных точек $(B_1, a+c)$ и $(A_1, -b-c)$, и, следовательно, центр тяжести системы из рассматриваемых четырех материальных точек лежит на прямой A_1B_1 . Но, понятно, что вся система может быть сведена лишь к двум материальным точкам (A, a) и $(B, -b)$, ибо объединение двух материальных точек (C, c) и $(C, -c)$ представляет собой незагруженную точку $(C, 0)$. Поэтому центр тяжести всей системы лежит и на прямой AB . Таким образом, он является точкой пересечения прямых AB и A_1B_1 , т. е. точкой C_2 . Итак, C_2 — это центр тяжести двух материальных точек (A, a) и $(B, -b)$:

$$Z[(A, a), (B, -b)] \equiv C_2.$$

Аналогично можно показать, что

$$Z[(B, -b), (C, c)] \equiv A_2,$$

$$Z[(C, c), (A, -a)] \equiv B_2.$$

Рассмотрим теперь систему из таких четырех материальных точек: (A, a) , $(B, -b)$, (C, c) , $(A, -a)$. Группируя их в указанном порядке по две и заменяя каждую группу ее объединением, сведем систему к двум материальным точкам $(C_2, a-b)$ и $(B_2, c-a)$, следовательно, центр тяжести системы лежит на прямой C_2B_2 .

Сгруппируем те же четыре материальные точки иначе: в одну группу объединим материальные точки $(B, -b)$ и (C, c) , а в другую — (A, a) и $(A, -a)$. Отсюда следует, что центр тяжести системы есть точка A_2 .

Итак, A_2 — на прямой C_2B_2 , что и требовалось доказать.

Верна также теорема, обратная малой теореме Дезарга. Ее можно доказать, пользуясь тем же методом.

Пользуясь методом произвольных вещественных масс, можно существенно обобщить многие из ранее рассмотренных теорем, в том числе теорему Чевы.

Соображения, которые были приведены в § 5, могут быть распространены на случай материальных точек с произвольными вещественными массами. Договоримся только относительно некоторых дальнейших записей.

Незагруженная материальная точка (т. е. материальная точка вида $(A, 0)$) не влияет на положение центра тяжести

системы. В этом отношении все незагруженные материальные точки эквивалентны между собой. Мы условимся в связи с этим всякую незагруженную материальную точку обозначать одним и тем же знаком O . Таким образом, при любой A $(A, 0) \equiv O$.

Пусть имеются две материальные точки $A \equiv (A, a)$ и $(A, -a)$, последнюю обозначим так: $-A$. Тогда

$$A \dagger (-A) = (A, a) \dagger (A, -a) = (A, a - a) = (A, 0) = O, \text{ т. е.}$$

$$A \dagger (-A) \equiv O.$$

Если (A, a) — какая-либо материальная точка, то через $k(A, a)$ будем обозначать материальную точку (A, ka) :

$$k(A, a) \equiv (A, ka).$$

Иными словами, умножить какую-либо материальную точку на число k означает: умножить на это число ее массу и оставить без изменения ее носитель. Отсюда, например, следует, что $(A, a) = a(A, 1)$.

Пусть P — центр тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b) . Тогда

$$(A, a) \dagger (B, b) = (P, p), \quad (35)$$

причем $p = a \dagger b$; положение точки P определяется по правилу рычага

$$a \cdot \overline{AP} = b \cdot \overline{PB}.$$

Последнее соотношение равносильно (при $k \neq 0$) такому:

$$ka \cdot \overline{AP} = kb \cdot \overline{PB}.$$

А это означает, что P будет также центром тяжести двух материальных точек (A, ka) и (B, kb) , так что

$$(A, ka) \dagger (B, kb) = (P, ka \dagger kb)$$

или

$$k(A, a) \dagger k(B, b) = k(P, p).$$

Иными словами, обе части равенства (35) можно умножить на одно и то же число k — новое равенство тоже будет справедливым. Аналогично можно показать, что при справедливости равенства

$$(A, a) \dagger (B, b) \dagger (C, c) = (P, p)$$

справедливо также такое равенство:

$$k(A, a) + k(B, b) + k(C, c) = k(P, p).$$

Идея барицентрических координат. Выберем на плоскости произвольный треугольник ABC (рис. 58), который в дальнейшем назовем *координатным*, или *базисным* треугольником Мёбиуса.

Пусть $p \neq 0$ и (P, p) — произвольная материальная точка, лежащая в плоскости этого треугольника. Тогда возможно подобрать для точек A, B, C такие массы a, b, c (не обязательно положительные), чтобы объединением трех материальных точек (A, a) , (B, b) и (C, c) служила точка (P, p) . Это можно себе представить следующим образом.

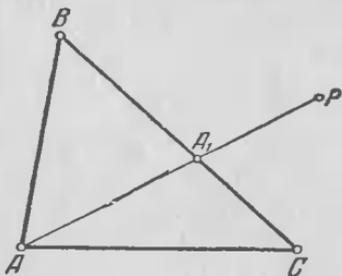


Рис. 58.

Ясно, что не может быть одновременно $PA \parallel BC$, $PB \parallel CA$, $PC \parallel AB$. Пусть, для определенности, PA и BC не параллельны. Соединим P с A и отметим точку A_1 , в которой AP встречает прямую BC . Подберем три действительных числа a, b, c так, чтобы

$$\begin{aligned} b \cdot \overline{BA_1} &= c \cdot \overline{A_1C}, \\ a \cdot \overline{AP} &= (b + c) \overline{PA_1}, \\ a + b + c &= p. \end{aligned}$$

Это всегда возможно сделать. Тогда

$$(P, p) = (A, a) + (B, b) + (C, c).$$

Обратно, если возьмем три произвольных действительных числа a, b, c , причем $a + b + c \neq 0$, то существует вполне определенная материальная точка (P, p) такая, что $(P, p) = (A, a) + (B, b) + (C, c)$.

Таким образом, каждую материальную точку $P \equiv (P, p)$ на плоскости можно вполне охарактеризовать тремя числами, а именно тремя массами a, b, c , которые надо поместить в вершинах базисного треугольника, чтобы точка P оказалась объединением трех образующихся при этом материальных точек (A, a) , (B, b) и (C, c) . Эти три числа называют *барицентрическими координатами* материальной точки P

(«барицентр» означает «центр тяжести»): a — первая барицентрическая координата, b — вторая, c — третья. Понятно, что те же три числа a , b , c определяют также положение носителя материальной точки P . Поэтому эти три числа называют также барицентрическими координатами (геометрической) точки P .

Таким образом, выражение «барицентрическими координатами точки P служат числа a , b , c » означает только то, что имеет место равенство

$$(A, a) + (B, b) + (C, c) = (P, p),$$

где

$$p = a + b + c.$$

Если массы трех материальных точек увеличить (или уменьшить) в одно и то же число раз, то от этого положение их центра тяжести не изменится. Поэтому барицентрическими координатами геометрической точки P будут также числа ka , kb , kc , где k — любое действительное число, не равное нулю.

Итак, геометрическая точка P (в отличие от материальной точки P) имеет бесконечно много троек барицентрических координат, причем каждая из этих троек может быть получена из какой-либо одной тройки (a, b, c) путем умножения на какую-либо константу k , отличную от нуля.

Если точка P находится *внутри* координатного треугольника, то все три ее барицентрические координаты одного знака (их можно считать положительными). Если точка P — на *какой-либо стороне* координатного треугольника или на ее продолжении, то хотя бы одна барицентрическая координата этой точки равна 0. В остальных случаях две координаты точки P — одного знака, а третья имеет противоположный знак.

Если точка P расположена внутри базисного треугольника ABC , то в качестве ее барицентрических координат можно принять площади треугольников BPC , CPA и APB (ср. § 1, решение задачи 8).

Применение барицентрических координат позволяет внести одно существенное упрощение в рассуждения, связанные с рассмотрением материальных точек: рассмотрение любых произвольно расположенных материальных точек в любом числе сводится к рассмотрению только таких материальных точек, которые имеют носителями вершины базисного треугольника.

Рассмотрим теперь некоторые упражнения и задачи (в задачах 1—10 $\triangle ABC$ — базисный треугольник Мёбиуса).

1. Где расположены точки, для которых две из барицентрических координат равны нулю? (О. 116.)

2. Найдите барицентрические координаты следующих материальных точек (рис. 59): 1) $(M, 15)$, где M — точка пересечения медиан треугольника; 2) $(D, 6)$, где D — середина отрезка AB ; 3) $(F, 1)$, где F — такая точка на луче AB , что $BF = AB$. (О. 116, У. 123.)

3. Найдите барицентрические координаты таких точек: 1) точки пересечения медиан треугольника ABC ; 2) середины отрезка AB ; 3) центра вписанной в $\triangle ABC$ окружности

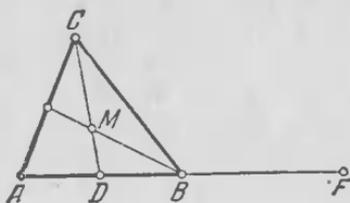


Рис. 59.

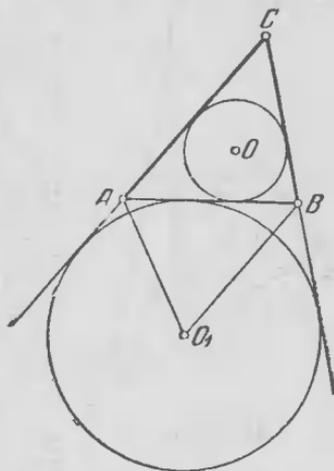


Рис. 60.

(рис. 60); 4) центра окружности, касающейся стороны AB (рис. 60) и продолжений сторон AC и BC . (О. 116.)

4. Барицентрические координаты некоторой геометрической точки P равны соответственно 3, 2, 5. Каковы барицентрические координаты материальной точки $(P, 20)$? (О. 116.)

5. Барицентрические координаты геометрической точки P равны a, b, c . Каковы барицентрические координаты материальной точки (P, p) , если $p \neq a + b + c$? (О. 116.)

6. Барицентрические координаты двух материальных точек M и N таковы: $M(m_1, m_2, m_3)$ и $N(n_1, n_2, n_3)$. Каковы барицентрические координаты их центра тяжести? (О. 116.)

7. На продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC (рис. 61) выбраны соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что $\overline{AC_1} = 2\overline{AB}$, $\overline{BA_1} = 2\overline{BC}$, $\overline{CB_1} = 2\overline{CA}$. Докажите, что

точки пересечения медиан у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают. (Р. 173.)

8. В остроугольном треугольнике ABC известны все углы (точнее, их градусные меры). Какие массы нужно поместить в его вершины для того, чтобы центром тяжести образовавшихся трех материальных точек служил ортоцентр треугольника (т. е. точка пересечения его высот)? (О. 116.)

9. Зная углы треугольника ABC , найдите барицентрические координаты центра окружности, описанной около треугольника (можно ограничиться рассмотрением остроугольного треугольника). (О. 116, У. 123.)

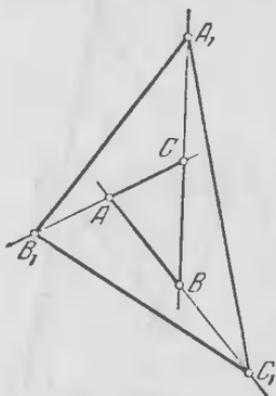


Рис. 61.

10. Барицентрические координаты двух точек M и N таковы: $M(m_1, m_2, m_3)$ и $N(n_1, n_2, n_3)$. Каковы барицентрические координаты середины отрезка MN ? (О. 116, Р. 174.)

11. Вам, вероятно, показалось искусственным то доказательство теоремы Гаусса, которое приведено на стр. 51—52. Более естественное доказательство можно получить, пользуясь методом барицентрических координат. Проведите это доказательство. (Р. 174.)

Мы ограничились рассмотрением метода барицентрических координат на *плоскости*. Но та же идея может быть применена и в *пространстве*. Тогда вместо *координатного треугольника* Мёбиуса появляется *координатный тетраэдр* Мёбиуса; каждая точка P характеризуется уже не *тройкой*, а *четверкой* чисел — теми четырьмя массами, которые надо поместить в вершинах тетраэдра, чтобы центром тяжести образовавшихся четырех материальных точек оказалась точка P .

Мы не задерживаемся на более детальном рассмотрении метода барицентрических координат. В вопросах элементарной (евклидовой) геометрии этот метод не дает ничего нового по сравнению с приемами *векторной алгебры* — дисциплины, которая сейчас входит в вузовский курс математики. Более того, возможно указать довольно простой рецепт, переводящий любое доказательство, найденное методом барицентрических координат, в «векторное» доказательство.

Исторически метод барицентрических координат возник до векторного метода и служил одной из основ при создании векторного исчисления.

Заметим, что в одном из разделов геометрии — в так называемой «*проективной геометрии*» — метод барицентрических координат и поныне очень ценен и позволяет решать такие задачи, к которым векторный метод неприменим.

§ 7. МЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА И ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Во многих вопросах, связанных с вращательным движением твердого тела, важную роль играет понятие о *моменте инерции*, введенное лет двести назад великим швейцарским математиком, петербургским академиком Леонардом Эйлером.

Пусть имеется некоторая фиксированная точка S и еще некоторая материальная точка $A \equiv (A, m)$. *Моментом инерции точки A* относительно точки S называется выражение $m \cdot SA^2$.

Пусть теперь имеется система из n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$, произвольным образом расположенных в пространстве. *Моментом инерции этой системы* относительно точки S называется сумма

$$J_S = m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + \dots \\ \dots + m_n \cdot SA_n^2.$$

Короче мы эту сумму запишем так:

$$J_S = \sum_{k=1}^n m_k \cdot SA_k^2.$$

Рассмотрим несколько примеров на нахождение момента инерции.

1. В вершинах четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 62) помещены соответственно такие массы: 2, 6, 2, 3. Вычислите момент инерции образовавшейся системы материальных точек относительно точки S . (Сторона каждого квадратика на рис. 62 равна 1 единице.) (О. 117, Р. 177.)

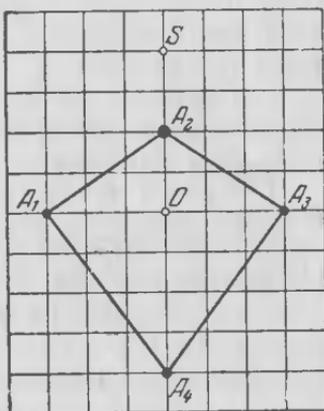


Рис. 62.

2. Вычислите момент инерции системы материальных точек, рассмотренных в предыдущем примере, относительно ее центра тяжести. (О. 117, Р. 177.)

3. Основанием треугольной пирамиды служит прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 единиц (рис. 63).

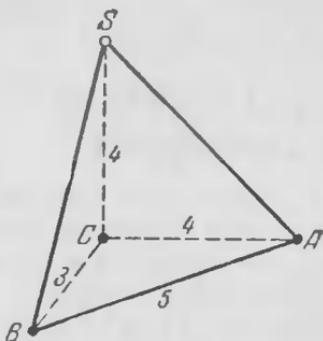


Рис. 63.

Вершина пирамиды проектируется в вершину прямого угла основания. Высота пирамиды равна четырем единицам. В каждую вершину треугольника ABC помещаем столько же единиц массы, сколько единиц длины содержит противоположная сторона треугольника.

Найдите момент инерции образовавшейся системы из трех материальных точек относительно вершины S пирамиды. (О. 117, Р. 177.)

Зная величину момента инерции системы материальных точек относительно ее центра тяжести, можно, оказывается, легко найти ее момент инерции относительно любой другой точки пространства.

Это вытекает из одной замечательной теоремы, принадлежащей крупнейшему французскому математику и механику XVIII века Лагранжу.

Теорема Лагранжа. Момент инерции (J_S) любой системы материальных точек относительно произвольной данной точки (S) равен сумме двух величин: момента инерции (J_Z) той же системы материальных точек относительно ее центра тяжести (Z) и момента инерции объединения данной системы (т. е. той материальной точки, которая получится, если всю массу системы сосредоточить в ее центре тяжести) относительно данной точки S .

Таким образом, если имеется система n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$, то $J_S = J_Z + M \cdot SZ^2$, где $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Или, подробнее,

$$m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + \dots + m_n \cdot SA_n^2 = m_1 \cdot ZA_1^2 + m_2 \cdot ZA_2^2 + \dots \\ \dots + m_n \cdot ZA_n^2 + (m_1 + \dots + m_n) \cdot SZ^2.$$

Докажем сначала эту теорему для случая $n=2$ (система состоит только из двух материальных точек). Обозначим материальные точки системы через (C, c) и (D, d) . Пусть P — их центр тяжести, B — произвольная точка (рис. 64). Нужно доказать, что

$$J_B = J_P + (c + d)BP^2,$$

т. е. что

$$c \cdot BC^2 + d \cdot BD^2 = c \cdot PC^2 + d \cdot PD^2 + (c + d)BP^2. \quad (36)$$

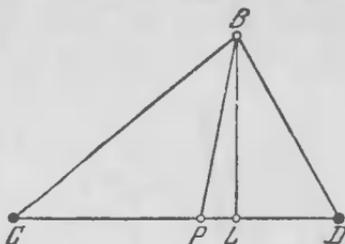


Рис. 64.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Точка B — вне

прямой CD (см. рис. 64). Обозначим через L проекцию точки B на CD . Точка L лежит на одном из лучей PC или PD . Пусть, для определенности, точка L — на луче PD . Тогда, так как $\sphericalangle DPB \leq 90^\circ$, $\sphericalangle CPB \geq 90^\circ$,

$$BC^2 = PC^2 + PB^2 + 2PC \cdot PL, \quad (37)$$

$$BD^2 = PD^2 + PB^2 - 2PD \cdot PL. \quad (38)$$

Кроме того,

$$c \cdot PC = d \cdot PD. \quad (39)$$

Если умножим (37) на c , а (38) на d , полученные равенства сложим почленно и учтем (39), то придем к соотношению (36).

Случай 2. Точка B — на прямой CD . Тогда проекцией L точки B на прямую CD будет сама эта точка B , $L \equiv B$.

Но нетрудно убедиться в том, что формулы (37) — (39) остаются в силе. Следовательно, и вытекающая из них формула (36) остается в силе.

Для дальнейшего полезно сделать одно замечание. Пусть S — произвольная точка. Подставляя в (36) S вместо B , получим:

$$c \cdot SC^2 + d \cdot SD^2 = c \cdot PC^2 + d \cdot PD^2 + (c + d)SP^2; \quad (40)$$

вычитая из (40) равенство (36), получим

$$\begin{aligned} (c \cdot SC^2 + d \cdot SD^2) - (c \cdot BC^2 + d \cdot BD^2) &= \\ &= (c + d)SP^2 - (c + d)BP^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Эту формулу можно прочесть так: *Разность между моментом инерции системы (из двух материальных точек) относительно какой-либо произвольной точки (S) и моментом инерции той же системы относительно какой-либо другой точки (B) равна разности между моментом инерции равнодействующей системы относительно первой точки (S) и моментом инерции той же равнодействующей относительно другой точки (B).*

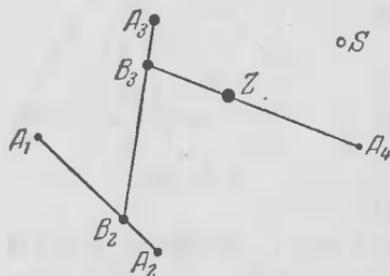


Рис. 65.

На основании этого замечания можно доказать теорему Лагранжа при любом $n > 2$. Мы рассмотрим какой-либо конкретный случай, скажем, $n = 4$. Из наших рассуждений будет ясно, что тот же метод можно применить при любом n . Пусть в пространстве имеется система из четырех материальных точек: $A_1 \equiv (A_1, m_1)$, $A_2 \equiv (A_2, m_2)$, $A_3 \equiv (A_3, m_3)$, $A_4 \equiv (A_4, m_4)$ (рис. 65); Z — их центр тяжести. Обозначим через B_2 объединение материальных точек A_1 и A_2 , через B_3 — объединение материальных точек B_2 и A_3 , через Z — объединение материальных точек B_3 и A_4 . Пусть, далее, S — произвольная точка. Введем еще такие обозначения:

$$\begin{aligned} M_2 &= m_1 + m_2, \\ M_3 &= m_1 + m_2 + m_3, \\ M &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4. \end{aligned}$$

В силу формулы (41) можно написать:

$$\begin{aligned} (m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2) - (m_1 \cdot ZA_1^2 + m_2 \cdot ZA_2^2) &= M_2 \cdot SB_2^2 - M_2 \cdot ZB_2^2, \\ (M_2 \cdot SB_2^2 + m_3 \cdot SA_3^2) - (M_2 \cdot ZB_2^2 + m_3 \cdot ZA_3^2) &= M_3 \cdot SB_3^2 - M_3 \cdot ZB_3^2, \\ (M_3 \cdot SB_3^2 + m_4 \cdot SA_4^2) - (M_3 \cdot ZB_3^2 + m_4 \cdot ZA_4^2) &= M \cdot SZ^2. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$(m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + m_3 \cdot SA_3^2 + m_4 \cdot SA_4^2) - (m_1 \cdot ZA_1^2 + m_2 \cdot ZA_2^2 + m_3 \cdot ZA_3^2 + m_4 \cdot ZA_4^2) = M \cdot SZ^2$$

или

$$J_S - J_Z = M \cdot SZ^2, \text{ откуда } J_S = J_Z + M \cdot SZ^2.$$

Итак, при $n=4$ теорема Лагранжа доказана. Аналогичными рассуждениями можно ее доказать при любом натуральном n (только пришлось бы выписать и сложить не три равенства, а $n-1$ равенств).

(*) Другое доказательство теоремы Лагранжа. Пусть в пространстве имеется n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ и Z — их центр тяжести (рис. 66).

Пусть, далее, S — произвольная точка, отличная от Z . Имеется бесконечно много плоскостей, перпендикулярных к прямой ZS . Среди них мы можем всегда выбрать такую плоскость α , чтобы все точки $A_1, A_2, \dots, A_n, Z, S$ были расположены по одну и ту же сторону от нее (см. рис. 66).

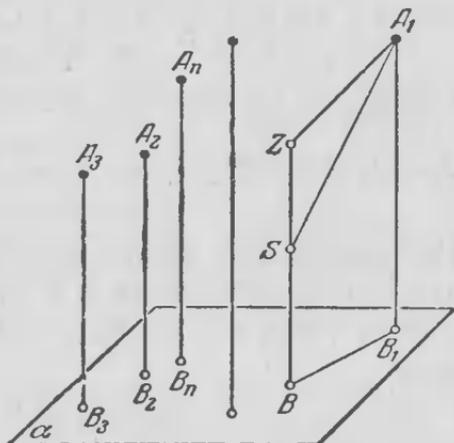


Рис. 66.

Обозначим через $z_1, z_2, \dots, z_n, z, s$ расстояния точек $A_1, A_2, \dots, A_n, Z, S$ от плоскости α , а через B_1, B_2, \dots, B_n, B — проекции точек A_1, A_2, \dots, A_n, Z на плоскость α . Пусть $B_1 \neq B$. Рассмотрим четырехугольник BB_1A_1Z ; это — трапеция (или прямоугольник).

Вычислим ZA_1^2

$$ZA_1^2 = (z_1 - z)^2 + BB_1^2. \quad (42)$$

Из трапеции (или прямоугольника) BB_1A_1S найдем:

$$SA_1^2 = (z_1 - s)^2 + BB_1^2. \quad (43)$$

Отсюда

$$SA_1^2 - ZA_1^2 = (z_1 - s)^2 - (z_1 - z)^2 = (z - s)(2z_1 - z - s) = (z - s)[(z - s) + 2(z_1 - z)] = (z - s)^2 + 2(z - s)(z_1 - z),$$

т. е.

$$SA_1^2 - ZA_1^2 = SZ^2 + 2(z - s)(z_1 - z). \quad (44)$$

Умножая обе части на m_1 , получим

$$m_1 \cdot SA_1^2 - m_1 \cdot ZA_1^2 = m_1 \cdot SZ^2 + 2(z - s)(m_1 \cdot z_1 - m_1 \cdot z). \quad (45)$$

4. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC . Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки P , лежащей на окружности, до вершин треугольника — одна и та же при любом положении точки P на окружности. (У. 123, Р. 177.)

5. Верна такая теорема: Сумма квадратов расстояний от вершин правильного n -угольника до любой точки, взятой на описанной около него окружности, есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности (она равна $2nR^2$, где R — радиус окружности).

Докажите эту теорему при $n=6$. (У. 123, Р. 178.)

6. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На ней выбрана произвольная точка P .

Докажите, что сумма $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ не зависит от выбора точки P на сфере. (Р. 178.)

7. В правильный n -угольник вписана окружность. Тогда сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин n -угольника есть величина постоянная, не зависящая от положения этой точки на окружности. Докажите эту теорему при $n=3$. (Р. 178.)

8. Найдите геометрическое место точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний от n данных точек той же плоскости постоянна и равна d^2 , где d — данный отрезок (ограничиться случаем $n=4$). (О. 117, У. 123, Р. 178.)

(*) 9. Пусть A_1, A_2, A_3 — три какие-нибудь данные точки, m_1, m_2, m_3 — произвольные действительные числа, причем $m_1 + m_2 + m_3 > 0$.

Найдите в пространстве геометрическое место таких точек P , для которых сумма $m_1 \cdot PA_1^2 + m_2 \cdot PA_2^2 + m_3 \cdot PA_3^2$ равна постоянной величине d^2 . (О. 117, Р. 179.)

(*) 10. Обобщите задачу 9 на тот случай, когда даны n точек и n чисел. (Р. 180.)

(**) 11. Можно доказать, что геометрическим местом точек плоскости, для которых разность квадратов расстояний от концов данного отрезка постоянна (равна c^2), служит некоторая прямая, перпендикулярная к этому отрезку¹⁾.

¹⁾ На луче AB существует единственная такая точка M_0 , что $AM_0^2 - BM_0^2 = c^2$; нетрудно показать, что ее положение определяется формулой $AM_0 = \frac{a^2 + c^2}{2a}$, где $a = AB$. Рассматриваемым геометри-

Пользуясь этим фактом, найдите на плоскости геометрическое место таких точек, для которых сумма

$$m_1 \cdot PA_1^2 + m_2 \cdot PA_2^2 + m_3 \cdot PA_3^2 + m_4 \cdot PA_4^2$$

постоянная. Здесь A_1, A_2, A_3, A_4 — наперед данные точки рассматриваемой плоскости, m_1, m_2, m_3, m_4 — данные не равные нулю числа, причем $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$. (О. 117, Р. 180.)

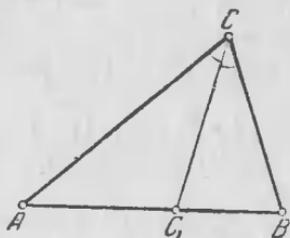


Рис. 67.

(!) 12. В треугольнике ABC проведена биссектриса CC_1 угла C (рис. 67). Докажите: $CC_1^2 = CA \cdot CB - C_1A \cdot C_1B$. (У. 123, Р. 180.)

13. Зная стороны a, b, c треугольника ABC , найдите его биссектрисы. (О. 117, Р. 181.)

(!) 14. Английский геометр М. Стюарт (1717—1785) получил любопытную теорему:

Если C_1 — произвольная точка на стороне AB треугольника ABC , то

$$CA^2 \cdot C_1B + CB^2 \cdot C_1A - CC_1^2 \cdot AB = C_1A \cdot C_1B \cdot AB.$$

Докажите теорему Стюарта. (У. 123, Р. 181.)

15. В окружность вписан четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (см. рис. 8). Докажите, что сумма квадратов двух его противоположных сторон равна квадрату диаметра описанной окружности. (У. 123, Р. 181.)

(!) 16. Известно, что сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей. А какова зависимость между суммой квадратов сторон и суммой квадратов диагоналей в других четырехугольниках, например в трапеции? Ответ на этот вопрос дал Леонард Эйлер в работе, опубликованной в «Комментариях С.-Петербургской академии наук». Эйлер установил такую теорему:

Сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника (плоского или пространственного) больше суммы квадратов

чеким местом служит прямая M_0N , перпендикулярная к AB . Действительно, если M лежит на M_0N , то $AM^2 - BM^2 = (AM_0^2 + M_0M^2) - (BM_0^2 + M_0M^2) = AM_0^2 - BM_0^2 = c^2$. Способом от противного нетрудно доказать и обратное: если $AM^2 - BM^2 = c^2$, то M расположена на прямой M_0N .

его диагоналей на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины его диагоналей.

Таким образом, если $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырехугольник (рис. 68), P и Q — середины его диагоналей A_1A_3 и A_2A_4 , то $A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + 4PQ^2$. Докажите эту теорему. (У. 123, Р. 182.)

(!) 17. Зная медианы треугольника и радиус описанной окружности, вычислите расстояние между точкой пересечения медиан и центром описанной окружности. (Р. 183.)

(!*) 18. Эйлер первый заметил, что если известны радиус r окружности, вписанной в треугольник, и радиус R описанной окружности, то можно найти расстояние d между их центрами:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Докажите эту замечательную формулу Эйлера. (У. 124, Р. 183.)

Из формулы Эйлера, между прочим, следует, что радиус окружности, описанной около треугольника, больше диаметра вписанной окружности: $R > 2r$.

Исключение составляет лишь правильный треугольник (в этом случае $R = 2r$).

Кроме окружностей, описанной около треугольника и вписанной в него, в геометрии рассматривают еще *внеписанные* окружности. Внеписанная окружность — это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и *продолжений* двух других сторон (см. рис. 60). Для каждого треугольника существуют три внеписанные окружности. Для расстояния между центром описанной и центром внеписанной окружности можно установить формулу, аналогичную формуле Эйлера.

19. Докажите: если R — радиус окружности, описанной около треугольника, ρ — радиус какой-либо внеписанной окружности, d — расстояние между центрами этих окружностей, то $d^2 = R^2 + 2R\rho$. (У. 124, Р. 185.)

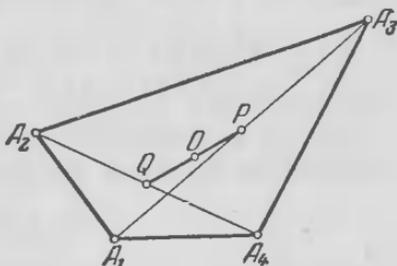


Рис. 68.

Следующая задача была рассмотрена знаменитым немецким математиком Г. В. Лейбницем.

20. Как построить на плоскости такую точку S , чтобы сумма квадратов ее расстояний до вершин данного многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ была наименьшей? (У. 124, Р. 186.)

Применение теоремы Лагранжа к доказательству неравенств. Пусть имеется система n материальных точек (с положительными массами) $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$; Z — ее центр тяжести, S — произвольная точка пространства. Тогда по теореме Лагранжа

$$J_S = J_Z + M \cdot SZ^2, \quad (46)$$

где

$$J_S = m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + \dots + m_n \cdot SA_n^2, \quad (47)$$

$$J_Z = m_1 \cdot ZA_1^2 + m_2 \cdot ZA_2^2 + \dots + m_n \cdot ZA_n^2, \quad (48)$$

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n. \quad (49)$$

Из (48) видно, что всегда

$$J_Z \geq 0, \quad (50)$$

и равенство в (50) возможно только тогда, когда все точки A_1, A_2, \dots, A_n, Z совпадают. Поэтому в силу (46)

$$M \cdot SZ^2 \leq J_S, \quad (51)$$

причем равенство имеет место *только* в случае совпадения всех точек A_1, A_2, \dots, A_n . Неравенство (51) показывает, что момент инерции системы материальных точек уменьшается от совмещения всей массы системы в ее центре тяжести.

Выбирая по-разному точки A_1, A_2, \dots, A_n, S и помещенные в них массы, мы можем получить некоторые замечательные неравенства.

Рассмотрим несколько примеров.

21. Докажите, что среднее арифметическое нескольких положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n не превосходит их среднеквадратического:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Равенство имеет место лишь при условии:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

(У. 124, Р. 186.)

22. Докажите неравенство:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

(a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа). (У. 124, Р. 187.)

23. Докажите теорему Коши — Буняковского: при любых положительных $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ имеет место неравенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

В каком случае имеет здесь место равенство? (У. 124, Р. 187.)

§ 8. ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ ОДНОРОДНЫХ НИТЕЙ И ПЛАСТИНОК

Выясним сначала, что нужно понимать под центром тяжести линии (нити).

Пусть имеем какую-нибудь линию AB длины l (рис. 69). Мы ее будем представлять себе наглядно в виде тонкой однородной проволоки. Это значит, что любые два отрезка этой



Рис. 69.



Рис. 70.

проволоки одинаковой длины имеют одну и ту же массу. Массу куска проволоки длиной в 1 единицу мы обозначим через δ . Эту величину называют линейной плотностью нити. Понятно, что масса всей нити равна $l\delta$.

В одном случае очень легко указать центр тяжести линии, а именно: когда линия представляет собой прямолинейный отрезок (рис. 70). Центр тяжести отрезка — это его середина. Это утверждение можно рассматривать как *определение* центра тяжести отрезка,

Пусть теперь линия является *ломаной* (рис. 71). Пусть она состоит из n звеньев $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$, длины которых равны соответственно l_1, l_2, \dots, l_n , так что длина l всей ломаной равна $l_1 + l_2 + \dots + l_n$.

Если линейная плотность линии равна δ , то массы звеньев равны соответственно $l_1\delta, l_2\delta, \dots, l_n\delta$.

Сосредоточим мысленно массу первого звена (звена AA_1) в его середине B_1 , массу второго звена — в его середине B_2 и т. д. Массу n -го звена будем считать сосредоточенной в его середине B_n . Таким образом, получаются n материальных точек: $(B_1, l_1\delta), (B_2, l_2\delta), \dots, (B_n, l_n\delta)$. Пусть Z — их центр тяжести. Тогда мы точку Z назовем также центром тяжести ломаной $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$.

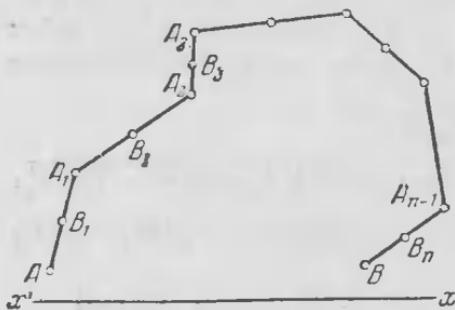


Рис. 71.

Таким образом, *центром тяжести ломаной* мы

называем центр тяжести системы материальных точек, которые образуются, если сосредоточить массу каждого звена ломаной в его центре тяжести.

Предположим теперь, что выбрана какая-то прямая $x'x$ (см. рис. 71), и ломаная $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ лежит в одной плоскости с прямой $x'x$ и притом целиком по одну сторону от этой прямой. Пусть известны расстояния y_1, y_2, \dots, y_n точек B_1, B_2, \dots, B_n (середин звеньев ломаной) от прямой $x'x$. Тогда нетрудно найти расстояние z от центра тяжести ломаной (т. е. от точки Z) до прямой $x'x$. Действительно, в силу ранее решенной задачи 11 из § 2

$$z = \frac{l_1\delta y_1 + l_2\delta y_2 + \dots + l_n\delta y_n}{l_1\delta + l_2\delta + \dots + l_n\delta}$$

или

$$z = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_n y_n}{l}.$$

Отсюда ясно, что положение центра тяжести ломаной вовсе не зависит от величины линейной плотности δ .

Рассмотрим пример:

(!) 1. Найдите центр тяжести контура треугольника.
(О. 117, Р. 188.)

Перейдем к определению центра тяжести произвольной линии. Пусть имеем линию AB длины l (рис. 72). Мы для простоты предполагаем, что эта линия сама себя не пересекает (но она может быть замкнутой).

Разобьем ее на n кусков (на n «частичных дуг») точками A_1, A_2, \dots, A_{n-1} .

Если n — достаточно большое число, а длина каждой дуги достаточно мала, то каждая из хорд AA_1, A_1A_2, \dots

$\dots, A_{n-1}B$ мало отличается (как по величине, так и по положению) от стягиваемой ею дуги (см. рис. 72) — различие будет тем меньше, чем меньше эта дуга (точнее, отношение длины дуги к длине стягивающей ее хорды будет приближаться

к единице, если уменьшается неограниченно длина этой дуги). Найдем центр тяжести ломаной $AA_1A_2A_3 \dots A_{n-1}B$. Обозначим его через $Z^{(n)}$.

Если мы теперь впишем в линию AB другую ломаную (рис. 73), с большим числом звеньев, то положение центра тяжести этой новой ломаной будет, вообще говоря, уже иным. Будем теперь брать ломаные со все большим и большим числом звеньев, и пусть при этом длина наибольшего звена становится все меньше и меньше, так что при n достаточно большом каждое звено вписанной ломаной станет меньше любого, хотя бы и очень малого, заранее данного отрезка.

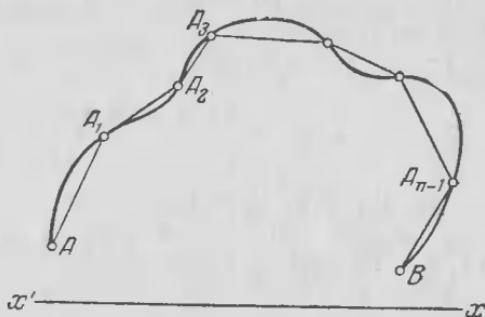


Рис. 72.



Рис. 73.

говоря, уже иным. Будем теперь брать ломаные со все большим и большим числом звеньев, и пусть при этом длина наибольшего звена становится все меньше и меньше, так что при n достаточно большом каждое звено вписанной ломаной станет меньше любого, хотя бы и очень малого, заранее данного отрезка.

При этом обычно оказывается, что точки $Z^{(n)}$ с возрастанием n приближаются неограниченно к некоторому предельному положению Z . Это записывают так: $\lim Z^{(n)} = Z$. Эту точку Z и назовем *центром тяжести линии AB* .

Пусть имеется какая-либо прямая $x'x$, лежащая в одной плоскости с линией AB , причем линия AB целиком расположена по одну сторону от этой прямой. Найдем расстояние z от точки Z до прямой $x'x$.

Расстояние z_n точки $Z^{(n)}$ от прямой $x'x$ равно:

$$z_n = \frac{y_1 \cdot AA_1 + y_2 \cdot A_1A_2 + \dots + y_n \cdot A_{n-1}B}{p_n},$$

где y_1, y_2, \dots, y_n — расстояния середин хорд $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ от прямой $x'x$, а p_n — периметр ломаной $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$.

Пусть теперь n неограниченно увеличивается, причем длина каждой хорды вписанной ломаной неограниченно уменьшается. Тогда $Z^{(n)} \rightarrow Z$, $z_n \rightarrow z$, $p_n \rightarrow l$, и мы получим:

$$z = \frac{\lim (y_1 \cdot AA_1 + y_2 \cdot A_1A_2 + \dots + y_n \cdot A_{n-1}B)}{l}.$$

Выражение

$$K = \lim (y_1 \cdot AA_1 + y_2 \cdot A_1A_2 + \dots + y_n \cdot A_{n-1}B)$$

(предел берется в предположении, что длина наибольшего звена вписанной ломаной неограниченно уменьшается) называется статическим моментом линии AB относительно оси $x'x$.

Таким образом,

$$z = \frac{K}{l}.$$

Центр тяжести плоской кривой имеет простой физический смысл. Представим себе, что однородная проволока изогнута в виде кривой AB и прикреплена к тонкому листу картона, причем лист таков, что его можно практически считать невесомым — настолько его вес меньше веса проволоки. Тогда точка Z (центр тяжести кривой AB) обладает таким замечательным физическим свойством: если подвесить лист (с наложенной на ней проволокой) на нити, прикрепленной к листу в точке Z , то лист будет в безразличном равновесии.

Рассмотрим пример.

(*) 2. Найдите центр тяжести полуокружности. (О. 117, У. 124, Р. 188.)

Перейдем теперь к рассмотрению *центров тяжести пластинок*. Пусть у нас имеется некоторая плоская фигура с площадью S . Мы себе будем наглядно представлять эту фигуру в виде *однородной* пластинки.

Это означает, что любые два куска пластинки, имеющие равные площади, имеют также равные массы. Обозначим массу



Рис. 74.

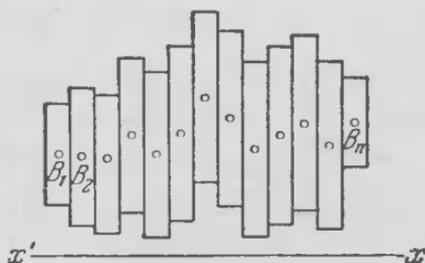


Рис. 75.

куска пластинки с площадью в 1 квадратную единицу через δ . Тогда масса всей пластинки равна $S\delta$. Договоримся о том, что мы будем понимать под центром тяжести такой пластинки.

Мы рассмотрим три случая.

I. Пластинка представляет собой *прямоугольник*. Ее центром тяжести служит точка пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 74). Это утверждение можно рассматривать как *определение* центра тяжести прямоугольника.

II. Пластинка такова, что ее можно разбить на конечное число прямоугольников (рис. 75). Такую пластинку мы кратко будем называть «многоугольником, составленным из прямоугольников». Обозначим площади прямоугольников, на которые разбивается пластинка, через S_1, S_2, \dots, S_n ($S_1 + S_2 + \dots + S_n = S$, где S — площадь всей пластинки), а центры тяжести этих прямоугольников — через B_1, B_2, \dots, B_n . Тогда массы прямоугольников равны $S_1\delta, S_2\delta, \dots, S_n\delta$. Мысленно сосредоточим массу каждого прямоугольника в его центре. Тогда у нас возникают n материальных точек $(B_1, S_1\delta), (B_2, S_2\delta), \dots, (B_n, S_n\delta)$. Пусть Z — центр тяжести этих n материальных точек. Тогда точку Z мы назовем также центром тяжести рассматриваемой пластинки.

Пусть пластинка расположена целиком по одну сторону от прямой $x'x$. Если известно, что расстояния от точек B_1, B_2, \dots, B_n до прямой $x'x$ равны соответственно y_1, y_2, \dots, y_n , то нетрудно найти расстояние z от центра тяжести пластинки (т. е. от точки Z) до той же прямой:

$$z = \frac{S_1 \delta \cdot y_1 + S_2 \delta \cdot y_2 + \dots + S_n \delta \cdot y_n}{S_1 \delta + S_2 \delta + \dots + S_n \delta}$$

или

$$z = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + \dots + S_n y_n}{S}$$

III. Пластинка ограничена произвольным контуром; l — длина контура, S — площадь пластинки. Легко начертить себе

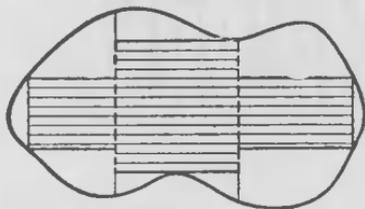


Рис. 76.

«многоугольник, составленный из прямоугольников», целиком расположенный на этой пластинке (рис. 76). Пусть его площадь $S^{(1)}$, а центр тяжести $Z^{(1)}$.

Легко также начертить другой «многоугольник из прямоугольников», с большей площадью, чем первый,

который также целиком расположен на этой пластинке (рис. 77). Пусть его площадь $S^{(2)}$ и центр тяжести $Z^{(2)}$.

Можно затем себе представить последовательность таких «многоугольников из прямоугольников», расположенных на пластинке, которые все более и более «исчерпывают» пластинку. Точнее, пусть площади этих многоугольников обозначены через $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(n)}, \dots$; тогда эти многоугольники таковы, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S^{(n)} = S$ (S — площадь пластинки).

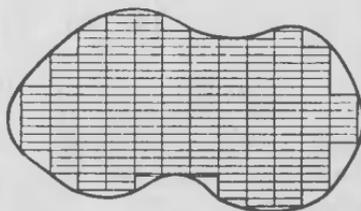


Рис. 77.

Обозначим центры тяжести этих «многоугольников из прямоугольников» соответственно через $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(n)}, \dots$ и пусть с возрастанием n точки $\{Z^{(n)}\}$ «неограниченно при-

ближаются» к некоторой точке Z . Это означает следующее: если мы выберем заранее какой угодно маленький отрезочек, то при n достаточно большим расстояние между $Z^{(n)}$ и Z будет меньше этого отрезочка. Точки $Z^{(n)}$ «накапливаются» к точке Z , «сгущаются» около этой точки. Точка Z и называется центром тяжести пластинки.

Центр тяжести пластинки обладает простым механическим свойством: если привязать нить к пластинке в точке Z и повесить пластинку на этой нити, то пластинка будет в безразличном равновесии.

Отметим без доказательства некоторые важные свойства центров тяжести однородных пластинок, которыми будем пользоваться при решении задач.

1. Каждая пластинка имеет лишь один центр тяжести.

2. Если разделить мысленно пластинку на несколько кусков и массу каждого куска сосредоточить в его центре тяжести, то центром тяжести образовавшихся таким образом материальных точек и будет центр тяжести всей пластинки.

3. Если (однородная) пластинка имеет ось симметрии, то центр тяжести пластинки лежит на этой оси.

Заметим, что аналогичными свойствами обладают также центры тяжести линий (нитей).

Рассмотрим теперь несколько задач.

(!) 3. Центром тяжести треугольной пластинки служит точка пересечения ее медиан. Докажите это, если треугольник прямоугольный. (У. 124, Р. 191.)

(!) 4. Докажите теорему из задачи 3 для любого треугольника. (У. 124. Р. 194.)

Сопоставляя задачи 1, 4 из § 8 и задачу 3 из § 1, мы видим, что выражение «центр тяжести треугольника» можно понимать в трех смыслах:

1) как центр тяжести *вершин* треугольника (точнее, как центр тяжести равных масс, помещенных в вершинах треугольника); именно так и понимается центр тяжести треугольника в школьном курсе *геометрии*;

2) как центр тяжести *контура* треугольника (точнее, как центр тяжести однородной материальной нити, изогнутой в виде контура треугольника);

3) как центр тяжести *площади* треугольника (точнее, как центр тяжести однородной пластинки, имеющей форму

треугольника; именно так и понимают центр тяжести треугольника в школьном курсе *механики*).

Решения указанных задач показывают, что центр тяжести *вершин* треугольника и центр тяжести его *площади всегда* совпадают. Центр тяжести *контура* треугольника совпадает с ними лишь в том случае, когда треугольник правильный.

Б. Если увеличить в несколько (k) раз размеры пластинки, имеющей форму многоугольника (не меняя ее форму), то расстояния ее центра тяжести от сторон многоугольника также увеличатся во столько же (k) раз. Приняв это свойство без доказательства, выведите отсюда, что центром тяжести треугольной пластинки служит точка пересечения ее медиан. (У. 125, Р. 195.)

В дальнейшем под *центром тяжести* данного *многоугольника* мы подразумеваем центр тяжести однородной пластинки, имеющей форму такого многоугольника. Под *центром тяжести вершин n -угольника* подразумевается центр тяжести n материальных точек, которые образуются, если поместить во всех вершинах n -угольника равные массы.

(!) 6. Центр тяжести треугольной пластинки совпадает с центром тяжести ее вершин — это точка пересечения медиан треугольника. Центр тяжести квадратной пластинки

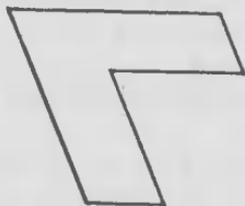


Рис. 78.

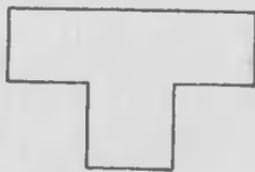


Рис. 79.

также совпадает с центром тяжести ее вершин. То же можно сказать про прямоугольник, ромб, правильный шестиугольник.

Верно ли такое общее утверждение: центр тяжести любой пластинки, имеющей форму многоугольника, совпадает с центром тяжести его вершин? Как его доказать или опровергнуть? (О. 117, У. 125, Р. 196.)

7. Из однородного листа жести вырезан многоугольник («буква Г»), изображенный на рис. 78. Как можно, распо-

лагая только линейкой (и карандашом), построить его центр тяжести? (У. 125, Р. 197.)

8. Как можно, располагая только линейкой (и карандашом), найти центр тяжести однородной пластинки, изображенной на рис. 79 («буква Т»)? (Р. 198.)

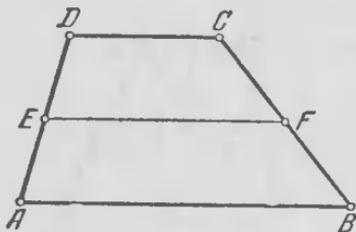


Рис. 80.

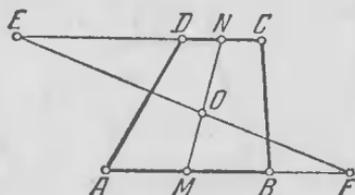


Рис. 81.

9. В трапеции $ABCD$ (рис. 80) проведена средняя линия. Как можно построить центр тяжести трапеции, располагая только линейкой? (У. 125, Р. 198.)

(!) 10. Докажите, что центр тяжести любой трапеции находится на отрезке MN , соединяющем середины оснований. (У. 125, Р. 198.)

(!) 11. Пусть основания трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b и O — центр тяжести трапеции. В каком отношении делит точка O отрезок, соединяющий середины оснований трапеции. (О. 117, У. 125, Р. 200.)

(!) 12. Чтобы найти центр тяжести трапеции $ABCD$ (рис. 81), поступают часто так: продолжают основания трапеции AB и CD ; на продолжении AB откладывают отрезок $BF = CD$, на продолжении CD — отрезок $DE = AB$;

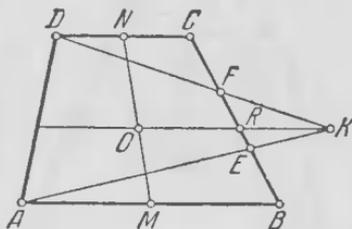


Рис. 82.

отмечают точку O пересечения прямой EF с отрезком MN , соединяющим середины оснований трапеции. Докажите, что точка O и есть центр тяжести трапеции. (Р. 200.)

13. Чтобы найти центр тяжести трапеции $ABCD$ (рис. 82), можно поступить так: разделить одну боковую сторону (например, BC) на три равные части (на рис. 82 E и F — точки деления); провести прямые AE и DF и отметить их

точку пересечения K ; через K провести параллель к основанию трапеции; отметить точку O пересечения этой прямой с прямой MN , соединяющей середины оснований трапеции. Точка O — центр тяжести трапеции. Докажите это. (У. 125, Р. 200.)

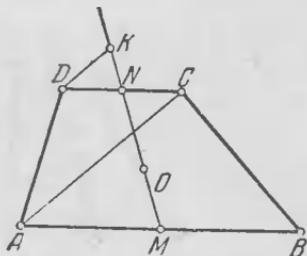


Рис. 83.

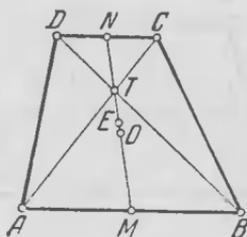


Рис. 84.

14. Вот еще один способ построения центра тяжести трапеции $ABCD$ (рис. 83): строят прямую MN , соединяющую середины оснований трапеций; проводят диагональ AC и через D — параллель к этой диагонали; отмечают точку K

встречи этой параллели с прямой MN ; строят затем точку O такую, что $MO = \frac{1}{3} MK$. Тогда O — центр тяжести трапеции. Докажите это. (У. 125, Р. 201.)

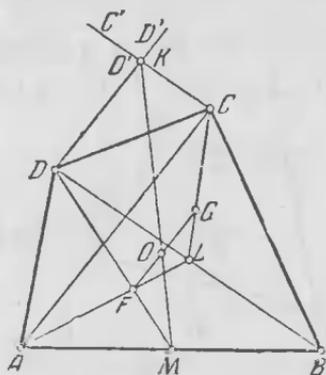


Рис. 85.

(!) 15. Докажите: центр тяжести O трапеции $ABCD$ (рис. 84) и центр тяжести вершин этой трапеции E лежат на одной прямой с точкой T пересечения диагоналей трапеции, причем $ET = 3OE$ и E — между O и T . (У. 125, Р. 202.)

(!) 16. Указанный в задаче 14 способ построения центра тяжести трапеции можно видоизменить так, чтобы он был пригоден для любого четырехугольника.

Пусть $ABCD$ (рис. 85) — произвольный (выпуклый) четырехугольник. Через концы какой-либо его стороны (например, CD) проведем параллели к его диагоналям и отметим

точку их встречи K . Тогда центр тяжести четырехугольника O лежит на отрезке, соединяющем точку K с серединой противоположной стороны (в нашем случае — с точкой M — серединой стороны AB), и делит этот отрезок (KM) в отношении 2:1. Докажите это. (У. 125, Р. 202.)

17. Около четырехугольника $ABCD$ описан параллелограмм $EFGH$ (рис. 86) так, что его стороны параллельны диагоналям четырехугольника. Точки E', G', F', H' — середины

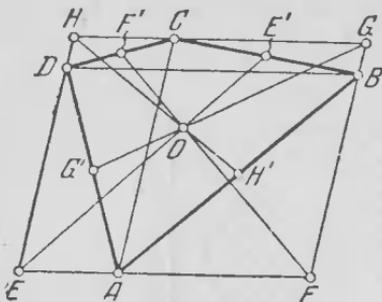


Рис. 86.

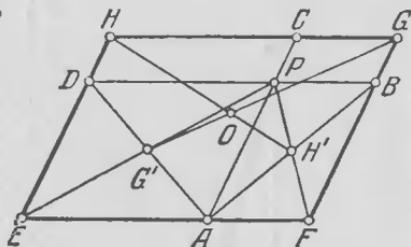


Рис. 87.

сторон четырехугольника $ABCD$. Каждая из этих точек соединена с соответствующей вершиной параллелограмма так, как указано на рис. 86. Докажите, что четыре прямые EE' , GG' , FF' и HH' имеют общую точку. (У. 125, Р. 203.)

18. Из плоского куска жести $EFGH$ (рис. 87), имеющего форму параллелограмма, собираются вырезать четырехугольник $ABCD$. Вершины этого четырехугольника уже отмечены на сторонах параллелограмма, причем $FA = GC$, $FB = ED$.

Как можно, пользуясь только линейкой (без делений), найти центр тяжести четырехугольника $ABCD$? (У. 125, Р. 203.)

Способ Архимеда «взвешивания площадей». Архимед впервые показал, как можно на основании механических соображений вычислить площади некоторых плоских фигур. Этим способом он вычисляет площадь *параболического сегмента*, т. е. части плоскости, ограниченной дугой параболы и ее хордой.

Архимед дал сначала нестрогое решение этой задачи (в «Письме к Эратосфену»), а затем — строгое решение (в своей работе «О квадратуре параболы»). Последнее весьма громоздко

и представляет, пожалуй, только исторический интерес. Идея «взвешивания площадей» выступает здесь значительно менее выпукло и менее наглядно, чем в нестрогом решении; она затемнена необходимыми для строгого доказательства выкладками.

Мы здесь ограничимся *нестрогим* решением этой задачи (строгое решение можно найти в книгах В. Ф. Кагана или С. Я. Лурье об Архимеде).

В истории математики очень часто трудные задачи получали сначала нестрогие, недостаточно обоснованные решения,

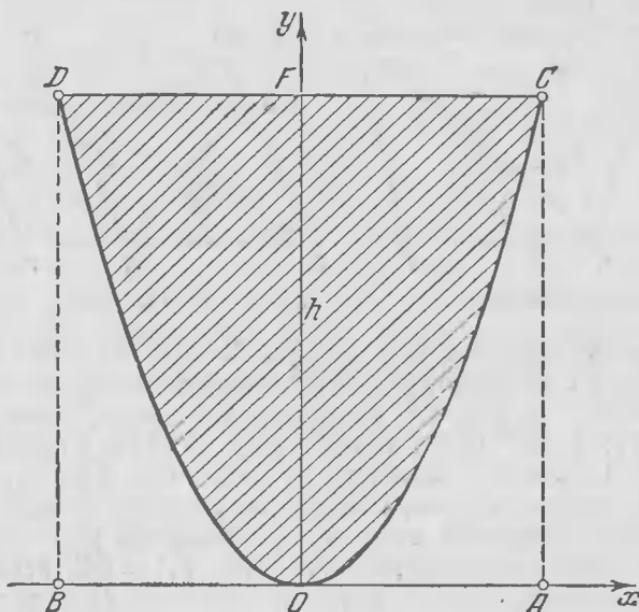


Рис. 88.

и лишь затем, отправляясь от нестрогих решений, математики решали те же задачи строго, с полным логическим обоснованием всех деталей. И сейчас математики нередко поступают именно так: сначала они решают задачу «для себя» нестрого, «по здравому смыслу», не задерживаясь на обосновании отдельных деталей, принимая для начала за истинное то, что «вероятно, имеет место»; и лишь затем, получив известную ориентировку в данном вопросе, опираясь на основные идеи «нестромого» решения, они решают ту же задачу «строго», с полным обоснованием всех моментов решения. Точно так же

поступил в свое время Архимед при решении задачи о «квадратуре параболы». Приводимое ниже рассуждение целиком основано на идее Архимеда, однако в самом оформлении этой идеи сделаны значительные отступления.

Пусть имеется парабола, т. е. кривая, задаваемая уравнением вида $y = px^2$ (рис. 88), где p — какое-то постоянное число, которое здесь полагаем положительным. Осью симметрии параболы служит ось Oy . Пусть хорда $CD \perp Oy$, причем $CD = 2a$. Пусть, далее, F — точка пересечения CD и Oy и $OF = h$. Мы хотим выразить площадь S_{COD} параболического сегмента COD (заштрихованного куска плоскости) через a и h . Для дальнейшего выразим еще p через a и h . При $x = a$ $y = h$, т. е. $h = pa^2$; следовательно,

$$p = \frac{h}{a^2}. \quad (52)$$

Очевидно, что

$$S_{COD} = S_{ACDB} - 2S_{AOC}. \quad (53)$$

Значит, задача сводится к нахождению площади криволинейного треугольника AOC (рис. 89). Именно ее мы и найдем способом взвешивания площадей.

Мы представим себе, что треугольник AOC — это однородная жесткая пластинка, причем каждый кусок пластинки с площадью в 1 квадратную единицу (скажем, в 1 см^2) имеет массу в 1 единицу (скажем, 1 г). Возьмем теперь рычажные весы (рис. 90), у которых каждое плечо равно a : $TP = TL = a$.

В конце P правого рычага этих весов мы и подвесим (мысленно!) пластинку AOC . Но предварительно мы эту пластинку разрежем на очень большое число очень тоненьких полосочек (проволочек) с помощью прямых, параллельных AC . Для определенности можно их брать равной ширины. Тогда, если всех

полосок n , то ширина d каждой полоски равна $\frac{a}{n}$, $d = \frac{a}{n}$.

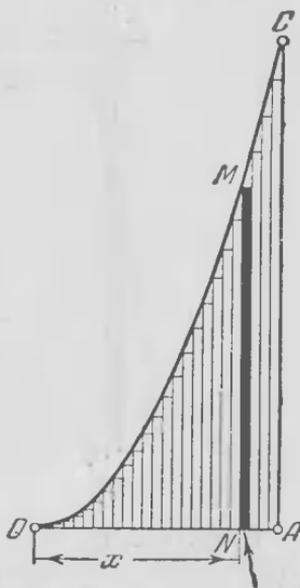


Рис. 89.

Обратим внимание на какую-нибудь одну из этих полосочек — на k -ю (на которую указывает стрелка на рис. 89). Практически можно считать ее массу равной массе заштрихованного прямоугольничка — ошибка будет незначительной. Массу всей пластинки AOC можно считать практически равной сумме масс всех вписанных в AOC прямоугольничков — ошибка тоже будет ничтожной при очень большом n .

Какова масса k -й полосочки, или — что практически то же самое — k -го (зачерненного) прямоугольничка? Пусть (рис. 89) $ON = x$. Тогда $NM = px^2$ и масса полоски равна dpx^2 .

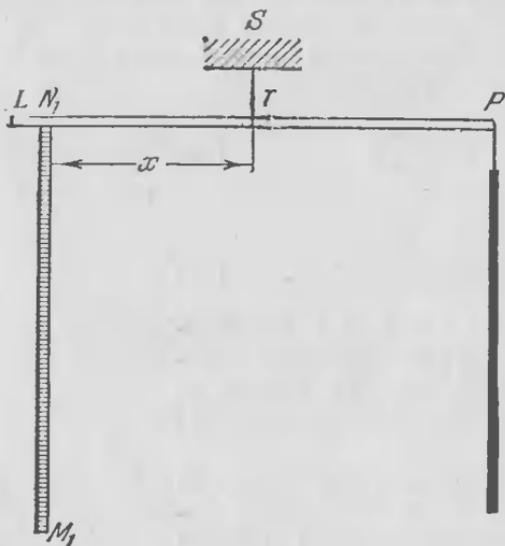


Рис. 90.

Допустим, что мы полоску подвесили в точке P (рис. 90). Чтобы весы остались в равновесии, подвесим на левом плече TL в точке N_1 на расстоянии x от точки T прямоугольную полоску ширины d , изготовленную из той же жести, что и пластинка AOC . Пусть $z(N_1M_1)$ — высота этой полосочки. Тогда полоска имеет массу zd . Расстояние от оси ST до центра тяжести полоски практически равно x . Чтобы весы остались в равновесии, нужно (в силу правила рычага) чтобы $(zd)x = (dpx^2)a$, откуда $z = apx$, т. е. (см. (52))

$$z = \frac{h}{a} x, \quad \frac{z}{x} = \frac{h}{a}. \quad (54)$$

Пусть $LH \perp TL$ и $LH = h$ (рис. 91.). Соотношение (54) показывает, что $\triangle TN_1M_1 \sim \triangle TLH$. А отсюда ясно, что M_1 лежит на гипотенузе TH . Итак, если подвесить в P зачерненную полоску треугольника AOC , а на левом плече подвесить на расстоянии $TN_1 = ON$ заштрихованную полоску треугольника TLH , то весы останутся в равновесии.

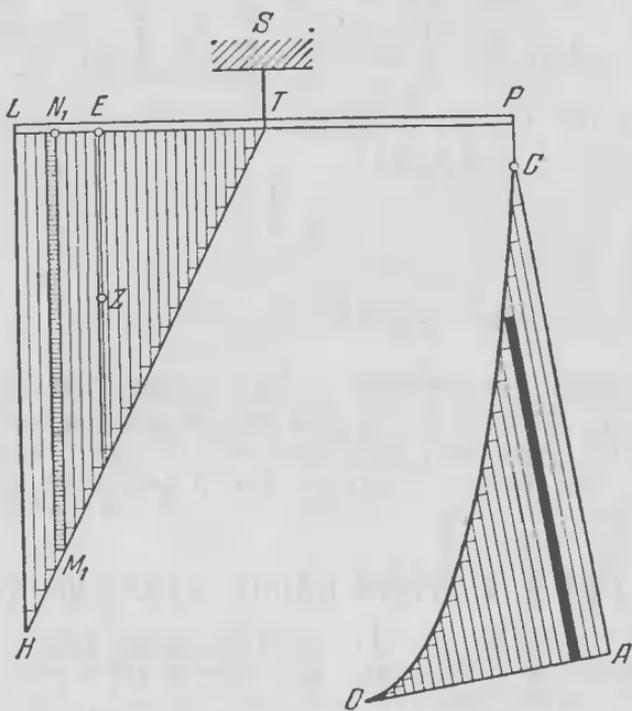


Рис. 91.

Подвесим теперь в конце P правого плеча весов все полоски, на которые разрезан $\triangle AOC$, а на левом плече будем подвешивать соответствующие полоски треугольника TLH . После этого окажется, что в конце правого плеча будет груз с массой, равной S_{AOC} , а на левом плече будет висеть фигура, составленная из $n - 1$ прямоугольных полосок.

Практически (при очень большом n , т. е. если полоски очень узенькие) масса этой фигуры равна массе треугольника TLH (т. е. S_{TLH}), а центр тяжести фигуры практически совпадает с центром тяжести Z треугольника TLH . Равновесие

не нарушится, если сосредоточить массу всей фигуры в ее центре тяжести. Но тогда, по правилу рычага, имеет (практически) место такое равенство:

$$S_{AOC} \cdot TP = S_{TLH} \cdot TE,$$

где $TE = \frac{2}{3} TL$; следовательно,

$$S_{AOC} \cdot a = \frac{1}{2} ah \cdot \frac{2}{3} a, \quad S_{AOC} = \frac{1}{3} ah.$$

Поэтому (см. рис. 88 и формулу (53)) площадь параболического сегмента COD равна

$$S_{COD} = 2ah - 2 \cdot \frac{1}{3} ah = \frac{4}{3} ah,$$

т. е.

$$S_{COD} = \frac{2}{3} CD \cdot OF = \frac{2}{3} S_{ABDC}.$$

Пользуясь аналогичными рассуждениями («взвешиванием объемов»), Архимед нашел еще объем шара и некоторых других тел (например, эллипсоида вращения), а также положение центра тяжести некоторых фигур (например, шарового сегмента).

(*) § 9. ТЕОРЕМЫ ПАППА — ГЮЛЬДЕНА

Две теоремы Паппа — Гюльдена позволяют найти площади поверхностей и объемы тел вращения в тех случаях, когда известны центры тяжести линий или пластинок, образовавших при своем вращении эти поверхности и тела. Теоремы Паппа — Гюльдена позволяют в некоторых случаях найти центры тяжести нитей и пластинок.

Эти теоремы были опубликованы в 1640 г. швейцарцем П. Гюльденом. Однако они имелись еще в сочинении «Геометрические коллекции» древнегреческого математика Паппа из Александрии.

Папп вовсе не доказывает эти теоремы. У Гюльдена под видом полного доказательства проводится обширное, но весьма туманное рассуждение. Впервые теоремы Гюльдена полностью доказал современник и идейный противник Гюльдена, итальянский геометр Бонавентура Кавальери.

Первая теорема Гюльдена. Если поверхность образована вращением некоторой линии (нити) вокруг оси, причем линия лежит в одной плоскости с осью и целиком по одну сторону от оси, то площадь поверхности равна произведению длины линии на длину окружности, описанной центром тяжести линии.

Таким образом, если вращается линия длины l и ее центр тяжести отстоит от оси на расстояние z , то площадь S образующейся при этом поверхности вращения равна

$$S = 2\pi zl.$$

Предполагается, понятно, что линия делает полный оборот вокруг оси.

(!) 1. Докажите первую теорему Гюльдена в предположении, что вращающаяся линия — отрезок. (Р. 203.)

(!) 2. Докажите ту же теорему, если вращающаяся линия — ломаная. (Р. 204.)

(!**) 3. Докажите ту же теорему, если вращающаяся линия — произвольная плоская кривая. (Р. 205.)

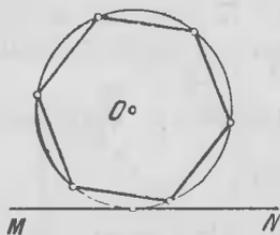


Рис. 92.

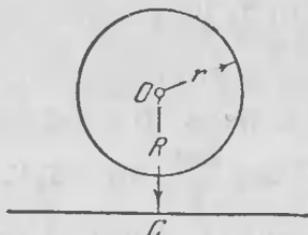


Рис. 93.

4. Правильный шестиугольник со стороной a (рис. 92) вращается вокруг одной из касательных к окружности, описанной около шестиугольника. Чему равна площадь поверхности, описанной шестиугольником? (О. 117, Р. 206.)

(!) 5. Пусть окружность вращается вокруг некоторой не пересекающей ее прямой, лежащей с нею в одной плоскости (рис. 93). Тогда она опишет поверхность (рис. 94), которая называется поверхностью тора (или просто: тор).

Такую форму имеет, например, надутая камера автомобильного колеса или спасательный круг.

Зная радиус r вращающейся окружности и расстояние R от ее центра до оси вращения ($R > r$), найдите площадь S поверхности тора. (О. 117, Р. 206.)

6. Дуга AB — четверть окружности радиуса R — вращается вокруг касательной AT к окружности в точке A (рис. 95). Найдите площадь поверхности, описанной этой дугой. (О. 117, Р. 206.)

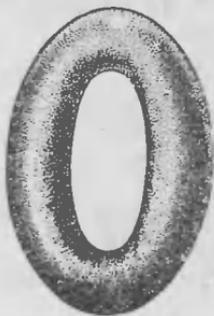


Рис. 94.

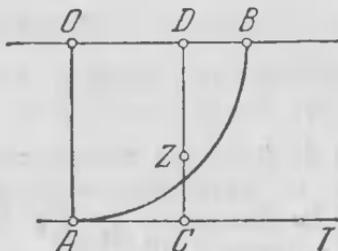


Рис. 95.

(!) 7. Дуга окружности радиуса R содержит α радиан. Найдите положение ее центра тяжести. Где находится центр тяжести полуокружности? (О. 117, Р. 206.)

8. Пусть $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Выясните, что больше: $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ или $\frac{\sin \beta}{\beta}$. (О. 117, У. 126, Р. 207.)

Вторая теорема Гюльдена. Если тело образовано вращением некоторой плоской фигуры (пластинки) вокруг некоторой оси, причем пластинка лежит в одной плоскости с осью и целиком по одну сторону от оси, то объем этого тела равен произведению площади пластинки на длину окружности, описанной центром тяжести пластинки.

Таким образом, если пластинка с площадью S и центр тяжести пластинки отстоит от оси вращения на расстоянии z , то объем V образующегося при этом тела вращения равен

$$V = 2\pi zS.$$

Предполагается при этом, что центр тяжести делает полный оборот вокруг оси.

(!) 9. Докажите вторую теорему Гюльдена, если вращающаяся пластинка имеет форму прямоугольника, две стороны которого параллельны оси вращения. (Р. 208.)

(!) 10. Докажите вторую теорему Гюльдена для того случая, когда пластинка составлена из некоторого числа прямоугольников, каждый из которых имеет две стороны, параллельные оси вращения. (Р. 208.)

(!) 11. Докажите вторую теорему Гюльдена, если вращающаяся пластинка ограничена произвольным контуром. (Р. 208.)

(!) 12. Пусть круг радиуса r (см. рис. 93) вращается вокруг некоторой прямой, отстоящей от его центра на расстояние R , причем $R > r$. Тело, которое при этом образуется, называется тором (так же, как и поверхность этого тела). Найдите его объем. (О. 117, Р. 209.)

13. Полуокруг вращается вокруг той своей касательной (MN), которая параллельна диаметру AB полуокруга (рис. 96).

Найдите объем тела, образующегося при таком вращении, если $AB = 2R$. (О. 117, Р. 209.)

14. Пластинка имеет форму правильного шестиугольника

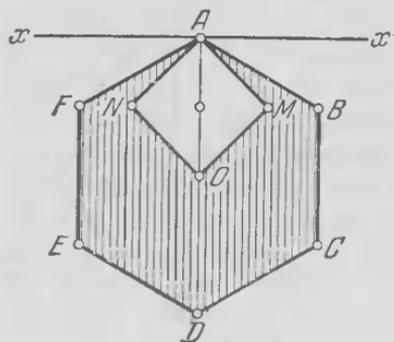


Рис. 97.

$ABCDEF$ (рис. 97) со стороной a , O — центр шестиугольника. Из пластинки вырезан квадрат $OMAN$, имеющий своей диагональю отрезок OA . Определите расстояние от O до центра тяжести оставшейся пластинки. (О. 117, Р. 209.)

15. Квадрат со стороной a (рис. 98) вращается вокруг оси, проходящей через его вершину и образующей с его стороной угол φ ($0 \leq \varphi \leq 45^\circ$).

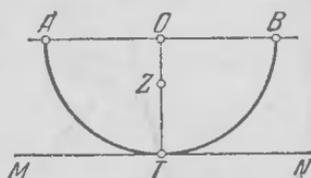


Рис. 96.

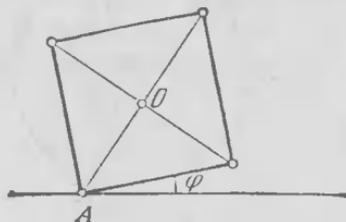


Рис. 98.

Найдите объем и площадь поверхности образовавшегося тела вращения. (О. 117, Р. 210.)

16. Равносторонний треугольник со стороной a (рис. 99) вращается вокруг оси, проходящей через его вершину и об-

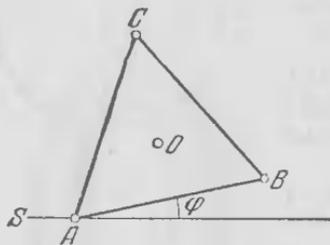


Рис. 99.

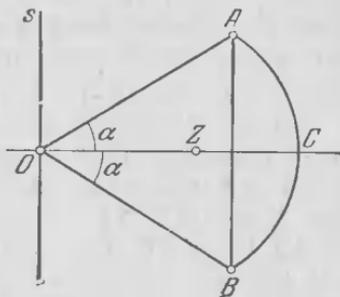


Рис. 100.

разующей с одной стороны угол φ . Найдите объем V и поверхность S образовавшегося тела вращения. (О. 117, Р. 210.)

17. Сектор круга радиуса R (рис. 100) содержит 2α радиан. Найдите положение его центра тяжести. (Р. 211.)

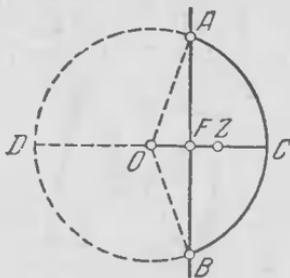


Рис. 101.

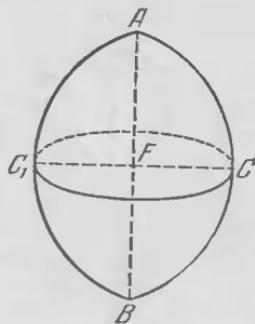


Рис. 102.

18. Круговой сегмент с площадью S , меньший полукруга, стягивается хордой длины h . Где находится центр тяжести сегмента? (Р. 212.)

19. Докажите: если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} > \frac{\sin^3 \beta}{2\beta - \sin 2\beta} \cdot (\text{Р. 213.})$$

Известный астроном Кеплер в своей «Новой стереометрии винных бочек» (1615 г.) вычислил объемы многих тел вращения. Рассмотрим два из этих тел.

Пусть какая-то прямая AB (рис. 101) разрезает круг на две неравные части. Тогда при вращении меньшей из этих частей вокруг прямой AB образуется тело (рис. 102), которое Кеплер назвал «лимоном».

Если вокруг той же прямой будем вращать большую из этих частей круга, то образуется тело, которое Кеплер назвал «яблоком» (рис. 103).

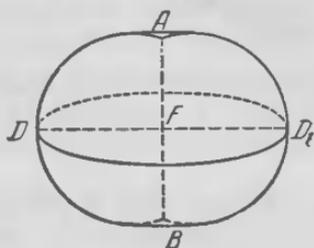


Рис. 103.

20. Зная, что высота «лимона» (т. е. отрезок AB) равна $2a$, а толщина «лимона» в наиболее широком месте (т. е. отрезок CC_1) равна $2b$, вычислите объем «лимона» V . (Р. 213.)

§ 10. ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ В ХИМИИ

В этом параграфе мы будем иметь дело с различными комбинациями или, как говорят, *системами* нескольких химических веществ. Такой системой может, в частности, быть раствор, сплав, химическое соединение, механическая смесь нескольких веществ. Мы в этом элементарном очерке воздержимся от определения понятия «*химическая система*». Более того, мы вместо выражения «химическая система» предпочтем выражение «смесь»; все наши рассуждения остаются в силе, если под смесью понимать любую химическую систему. Оказывается, что в некоторых вопросах смеси ведут себя так же, как материальные точки!

Двухкомпонентные смеси. Пусть система (смесь) состоит лишь из двух веществ A и B . Их называют *компонентами* системы. Пусть в смесь входят p весовых единиц (скажем, p грамм) компоненты A и q весовых единиц компоненты B . Вес t системы равен $p + q$ единицам:

$$t = p + q. \quad (55)$$

В химии даются различные определения концентрации. Мы здесь будем пользоваться следующим определением. Под *концентрацией* компоненты A в данной системе (смеси)

будем понимать вес компоненты A , приходящийся на единицу веса всей системы. Аналогично можно говорить о концентрации компоненты B . Концентрации компонент A и B в системе обозначим соответственно через a и b . Ясно, что концентрации a и b компонент A и B равны соответственно $\frac{p}{m}$ и $\frac{q}{m}$:

$$a = \frac{p}{m}, \quad b = \frac{q}{m}. \quad (56)$$

В силу (55) $a + b = 1$.

Концентрацию часто выражают в процентах.

Пример. Пусть составлен раствор из 100 г винного спирта и 400 г воды.

Тогда $m = 100 + 400 = 500$ (г). Концентрация спирта в этом растворе равна

$$\frac{100}{500} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%.$$

Концентрация воды в растворе равна

$$\frac{400}{500} = 80\%.$$

Начертим отрезок AB длиной в одну единицу (рис. 104).

Из двух веществ A и B возможно составить много смесей — они будут отличаться между собой либо по весу, либо по концентрации компонент.



Рис. 104.

Каждой такой смеси мы сопоставим некоторую материальную точку K с носителем K на отрезке AB . Точку K выберем так, чтобы $KA = b$, $KB = a$ (a и b — концентрации компонент в смеси), а вес материальной точки будем считать равным всему весу смеси. Иначе говоря, точка K представляет собой центр тяжести двух материальных точек (A, a) и (B, b), а значит, и точек (A, am) и (B, bm), материальная точка K — объединение этих двух материальных точек:

$$K = (A, p) + (B, q).$$

Обратно, любая материальная точка (K, m) с носителем K на отрезке AB изображает некоторую смесь из компонент A и B . Вес этой смеси равен m единицам, концентрация компоненты A равна a , концентрация компоненты B равна b .

Таким образом, если смесь характеризуется материальной точкой (K, m) , то m — вес смеси, а геометрическая точка K определяет *соотношение компонент*, концентрации компонент в этой смеси.

Если K совпадает с A , то смесь состоит только из чистой компоненты A ; если K совпадает с B , то смесь состоит только из компоненты B . Чем ближе точка K к точке A , тем больше в соответствующей системе концентрация компоненты A и тем меньше концентрация компоненты B .

Представим себе, что имеются *две* смеси из веществ A и B : одна из них характеризуется материальной точкой $K_1 \equiv (K_1, m_1)$, вторая — материальной точкой $K_2 \equiv (K_2, m_2)$. Составим теперь из них одну смесь. Какой материальной точкой отрезка AB будет характеризоваться соотношение компонент в этой новой смеси? Оказывается, что *такой точкой будет центр тяжести двух материальных точек (K_1, m_1) и (K_2, m_2)* . Точнее, верно следующее предложение:

1. Если две смеси характеризуются материальными точками (K_1, m_1) и (K_2, m_2) (рис. 105), то смесь, образованная от смешения этих смесей, характеризуется материальной точкой (K, m) , являющейся объединением этих двух материальных точек:

$$(K, m) = (K_1, m_1) \dagger (K_2, m_2).$$

Докажите это предложение. (У. 126, Р. 215.)



Рис. 105.

Смесь, которая получится от смешения двух или нескольких данных смесей, мы будем называть *объединением* этих смесей. Таким образом, теорему из задачи 1 можно так сформулировать: Если две смеси характеризуются материальными точками (K_1, m_1) и (K_2, m_2) , то объединение этих смесей характеризуется *объединением* этих двух материальных

точек, т. е. характеризуется материальной точкою

$$(K, m) \equiv (K_1, m_1) + (K_2, m_2).$$

В дальнейшем мы будем говорить «смесь (K, m) » вместо «смесь, которая характеризуется материальной точкой (K, m) ».

Рассмотрим теперь несколько примеров, иллюстрирующих теорему из задачи 1.

2. Имеются два раствора винного спирта в воде ¹⁾: Первый раствор весом 400 г содержит 30% спирта, второй раствор весом 600 г содержит 80% спирта.

Из этих двух растворов составляют один раствор. Сколько в нем будет процентов спирта? (О. 117, У. 126, Р. 215.)

3. Сколько воды надо добавить к 130 г 40-процентного раствора серной кислоты, чтобы получить 5-процентный раствор? (О. 117, Р. 216.)

4. Сколько 5-процентного раствора поваренной соли нужно прибавить к 600 г 25-процентного раствора, чтобы получить 20-процентный раствор? (О. 117, Р. 216.)

5. В качестве припоев (т. е. для соединения, «спаивания» двух кусков металла) часто используют сплавы свинца и олова. Наиболее легкоплавкий из таких сплавов — «эвтектический» или «третник» — содержит 36% Pb (около одной трети) и 64% Sn. Однажды в одной мастерской понадобился третник, но его не было. Не оказалось и чистых металлов Pb и Sn. Зато в мастерской были два других сплава из этих же металлов. Первый («четвертник») содержал 25% Pb, второй содержал 60% Pb. Сколько нужно взять граммов каждого из этих сплавов для получения 1 кг эвтектического сплава? (О. 117, Р. 217.)

Обычно два вещества образуют растворы не в произвольных соотношениях. Например, при комнатной температуре поваренная соль может образовать с водой не более чем 27-процентный раствор — в 100 г водяного раствора поваренной соли может содержаться не более 27 г соли. Если, скажем, при температуре 10° возьмем 200 г воды и 100 г соли, то только около 70 г соли растворятся в воде, образуя так

¹⁾ Известно, что спирт и вода образуют раствор при любом соотношении компонент.

называемый *насыщенный* раствор, а остальные 30 г выпадут в осадок. Пусть при какой-то данной температуре и определенной концентрации двухкомпонентная смесь образует насыщенный раствор. Растворы с такой концентрацией можно охарактеризовать некоторой точкой D на единичном отрезке AB (рис. 106). Пользуясь правилом рычага, можно определить,



Рис. 106.

сколько можно из данной смеси получить граммов насыщенного раствора, а сколько граммов одной из компонент выпадут в осадок.

Рассмотрим пример.

6. При температуре в 13° 41-процентный раствор сахара в воде является уже насыщенным. Сколько граммов сахара не растворится в воде (выпадет в осадок), если (при температуре в 15°) тщательно размешать стакан воды (220 г) с 280 г сахару? (О. 117, Р. 217.)

7. Обобщите теорему из задачи 1 на случай n смесей ($n > 2$). (О. 117, У. 126, Р. 218.)

8. «Золотые» слитки представляют собой обычно сплавы золота с какими-либо другими металлами (например, с медью). Четыре таких слитка переплавили в один весом в 1700 г и содержащий 56% золота. Известно, что из имевшихся четырех слитков один весил 300 г и содержал 96% чистого золота, второй весил 200 г и содержал 86% золота, третий весил 400 г и содержал 64% золота. Сколько процентов чистого золота содержал четвертый слиток? (О. 117, Р. 218.)

Перейдем теперь к рассмотрению более сложных химических систем.

Трехкомпонентные смеси. Пусть из трех веществ A , B , C составлена смесь с общим весом m единиц, причем концентрация вещества A (т. е. количество этого вещества на одну весовую единицу смеси) равна a , концентрация компоненты B равна b , концентрация компоненты C равна c . Таким образом, вес компоненты A равен ma единицам, веса компонент B и C — соответственно mb и mc

единицам. Каждой такой смеси можно сопоставить некоторую материальную точку следующим образом. Выберем произвольный треугольник ABC (рис. 107), который будем в дальнейшем называть *концентрационным* или *базисным*. Возьмем затем точку K так, чтобы ее барицентрическими координатами относительно треугольника ABC были числа a, b, c , иными словами, чтобы точка K была центром тяжести трех материальных точек (A, a) , (B, b) и (C, c) .

Тогда рассматриваемой трехкомпонентной смеси сопоставим материальную точку (K, m) (m — масса всей смеси). При $a > 0, b > 0, c > 0$ точка K будет *внутри* $\triangle ABC$.

Обратно, каждой материальной точке (K, m) с носителем K внутри $\triangle ABC$ соответствует, — и притом *единственная*, вполне определенная — смесь из компонент A, B, C . В самом деле, возможно подобрать единственную тройку чисел α, β, γ так, чтобы $\alpha + \beta + \gamma = m$ и

$$Z[(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)] \equiv K, \quad (57)$$

где α, β, γ — барицентрические координаты материальной точки (K, m) . Число α определяется из условия (см. рис. 107):

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{KA_1}{KA}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{KA_1}{AA_1}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{KA_1}{AA_1}. \quad (58)$$

Аналогично,

$$\frac{\beta}{m} = \frac{KB_1}{BB_1}, \quad \frac{\gamma}{m} = \frac{KC_1}{CC_1}.$$

Положим теперь

$$a = \frac{\alpha}{m}, \quad b = \frac{\beta}{m}, \quad c = \frac{\gamma}{m}. \quad (59)$$

и возьмем трехкомпонентную смесь с весом m и с такими концентрациями компонент: компонента A — с концентрацией a , компонента B — с концентрацией b , компонента C — с концентрацией c . Ясно, что этой смеси и будет соответствовать материальная точка (K, m) . Итак, каждая смесь из трех компонент A, B, C вполне характеризуется некоторой материальной точкой (K, m) . Мы будем говорить «смесь (K, m) », имея в виду «смесь, которая характеризуется материальной точкой (K, m) ».

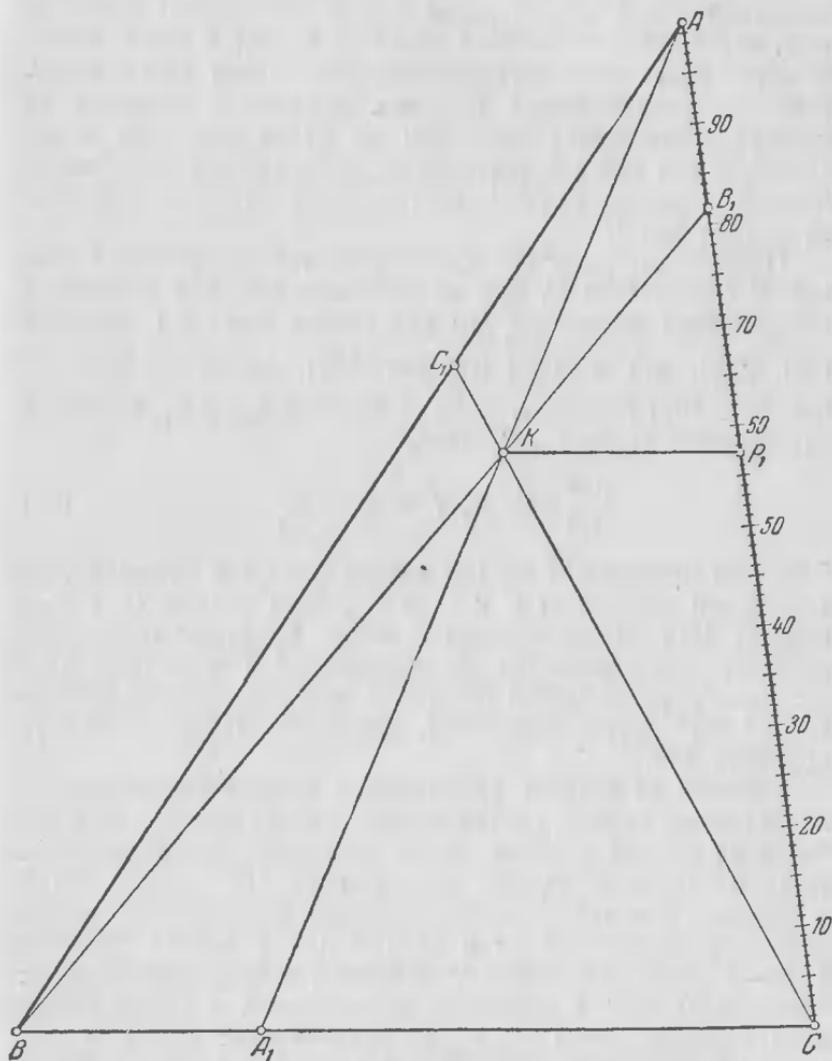


Рис. 107.

Мы будем рассматривать и тот случай, когда в трехкомпонентной смеси концентрация одной компоненты равна 0, т. е. когда одна компонента вовсе не входит в смесь (смесь является фактически двухкомпонентной). Такая смесь характеризуется материальной точкой с носителем, лежащим на контуре треугольника ABC . Мы не будем исключать и тот случай, когда смесь фактически состоит из одной компоненты. Каждой вершине $\triangle ABC$ соответствует чистое вещество A , или B , или C .

Пусть некоторая смесь характеризуется материальной точкой K с носителем K . Как на основании рис. 108 установить концентрации компонент? Мы уже видели выше (см. формулы (58), (59)), что $a = \frac{A_1 K}{A_1 A}$ (см. рис. 107). Проведем через K (см. рис. 107) параллель к BC и отметим точку P_1 , в которой она встретит сторону AC . Тогда

$$\frac{A_1 K}{A_1 A} = \frac{CP_1}{CA}, \text{ т. е. } a = \frac{CP_1}{CA}. \quad (60)$$

Разделим отрезок CA на 100 равных частей и будем отсчитывать эти деления от C к A (в C ставим пометку 0, в A — пометку 100). Тогда пометка у точки P_1 будет показывать концентрацию компоненты A , выраженную в процентах. Аналогичным образом можно поступить для определения концентрации двух других компонент. Практически это можно осуществить так.

Выберем на контуре треугольника положительное направление обхода, скажем, против часовой стрелки (как на рис. 109). Тогда на каждой стороне можно различить *начало* и *конец*. Каждую из сторон $\triangle ABC$ разделим на 100 равных частей и поставим у точек деления, в порядке их отдаления от начала стороны пометки от 0 до 100 (0 — у начала стороны, 100 — у конца). Из точки K проведем три луча, параллельных сторонам $\triangle ABC$ и одинаково направленных с этими сторонами. Отметим точки P_1, P_2, P_3 встречи этих лучей со сторонами треугольника, так что $KP_1 \parallel BC, KP_2 \parallel CA, KP_3 \parallel AB$. Тогда пометка у точки P_1 показывает концентрацию компоненты A в смеси, пометки у P_2 и P_3 — соответственно концентрации компонент B и C .

На возможность применения треугольных диаграмм для наглядного изображения тройных химических систем впервые

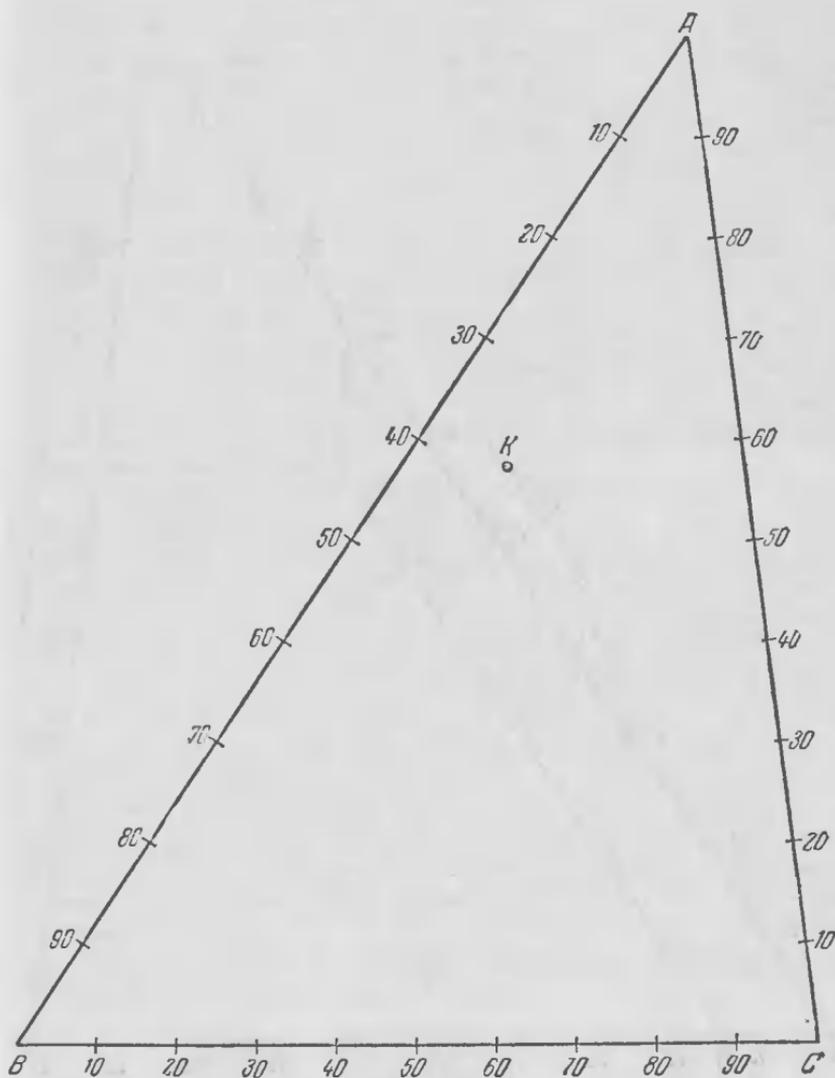


Рис. 108.

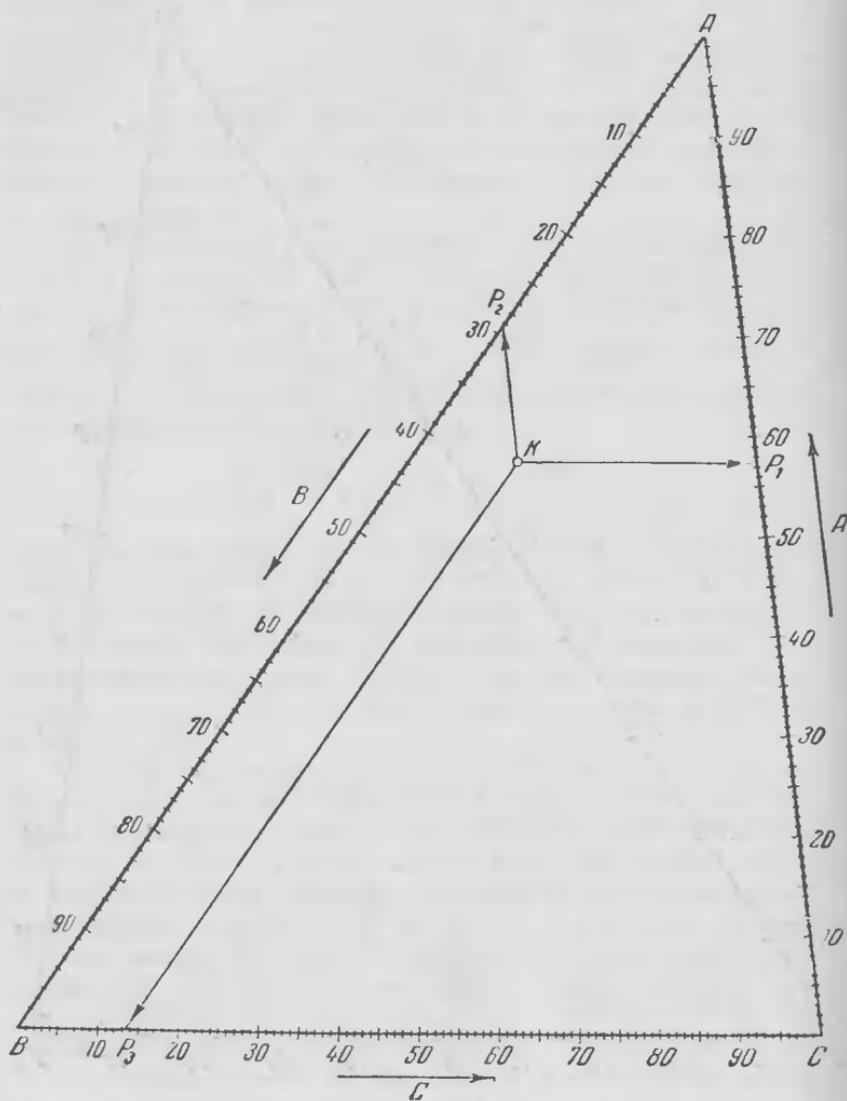


Рис. 109.

указал известный американский ученый Дж. В. Гиббс в 1876 г. Гиббс пользовался только *равносторонним* треугольником, и его способ изображения химических систем с помощью точек существенно опирается на свойства именно такого треугольника. В 1894 г. голландский химик Г. В. Б. Розебом (1854—1907 гг.) дал иной способ для изображения тройных систем с помощью точек *равностороннего* треугольника, причем Розебом также существенно опирался на свойства такого треугольника. В настоящее время в химии пользуются для изображения тройных систем почти всегда равносторонним треугольником («треугольной диаграммой Гиббса — Розебома»). Однако еще Розебом заметил, что для той же цели пригоден равнобедренный прямоугольный треугольник, и разработал способ применения такого треугольника (так называемый «первый способ Розебома»). Как показывают наши рассуждения, для изображения тройных систем пригоден треугольник произвольной формы.

Треугольник *любой* формы, который служит для изображения различных трехкомпонентных систем с помощью указанного выше способа, будем называть «*треугольником* (или *треугольной диаграммой*) *Гиббса*». В случае равностороннего треугольника мы получим для любой смеси по указанному выше способу ту же точку, которая получается по способу Гиббса.

Треугольник Гиббса находит широкое применение в химии. К нему неоднократно прибегал в своих работах знаменитый советский химик, создатель физико-химического анализа академик Н. С. Курнаков (1860—1941 гг.). Обычно пользуются для изображения трехкомпонентных смесей специальными бланками с треугольной сеткой, на которых каждая сторона базисного треугольника разбита на 100 равных частей. В учебных целях можно пользоваться более грубой сеткой, на которой каждая сторона разделена на 10 или 20 равных частей (рис. 110).

Рассмотрим теперь несколько простейших примеров (всюду ниже $\triangle ABC$ — треугольник Гиббса).

9. Каковы концентрации компонент A , B , C в трехкомпонентных смесях, соответствующих точкам K и N ? (см. рис. 110). (О. 117.)

10. Постройте точку на треугольной диаграмме Гиббса, соответствующую смеси с таким составом: 60% A , 30% B , 10% C . (О. 117, У. 126, Р. 219.)

11. Постройте точку, соответствующую раствору с таким составом: 50% воды, 40% винного спирта и 10% уксусной кислоты. (О. 118.)

12. Цинковая паста имеет такой состав: 25% окиси цинка, 25% крахмала и 50% желтого вазелина. Постройте на диаграмме Гиббса точку L , изображающую эту смесь. (О. 118.)

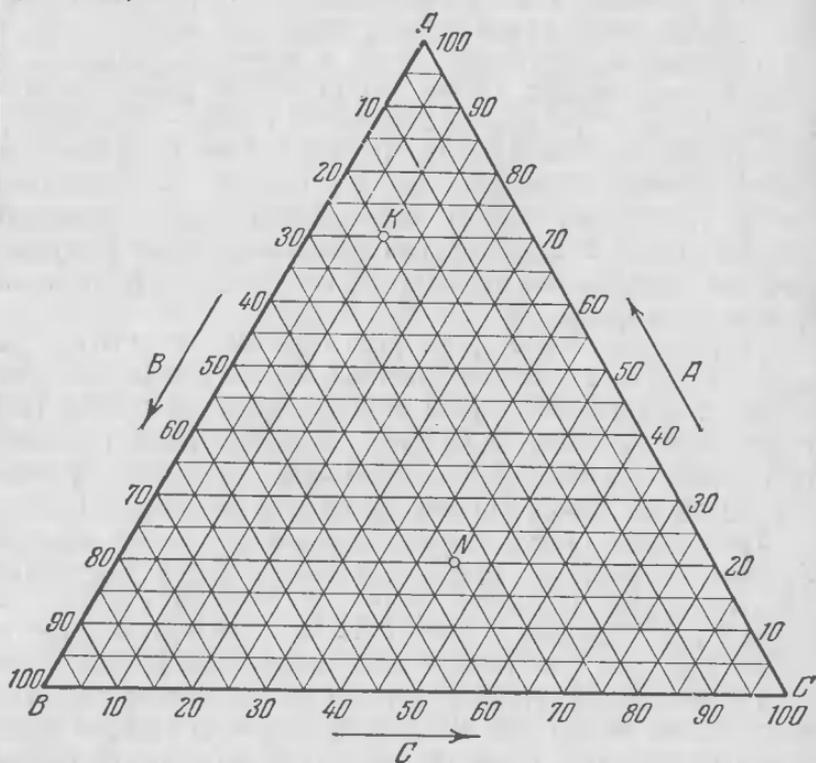


Рис. 110.

13. Постройте точки на треугольной диаграмме, соответствующие таким сплавам: а) 35% Cu, 65% Ni («монельметалл»); б) 67% Cu, 13% Ni, 20% Zn («нейзильбер»). (О. 118.)

14. Будем интересоваться такими точками, которые соответствуют смесям, в каждой из которых $a\%$ компоненты A , а компоненты B и C могут быть в любых со-

отношениях. Найдите геометрическое место таких точек. (О. 118.)

15. Найдите на диаграмме Гиббса геометрическое место точек, соответствующих смесям, в каждой из которых компоненты C столько же, сколько компоненты B . (О. 118.)

16. Имеется раствор винного спирта и глицерина (70% спирта и 30% глицерина). К этой смеси доливают воду. В зависимости от количества долитой воды получатся растворы с различными концентрациями компонент. Каково геометрическое место точек, соответствующих растворам, которые при этом могут получиться? (О. 118.)

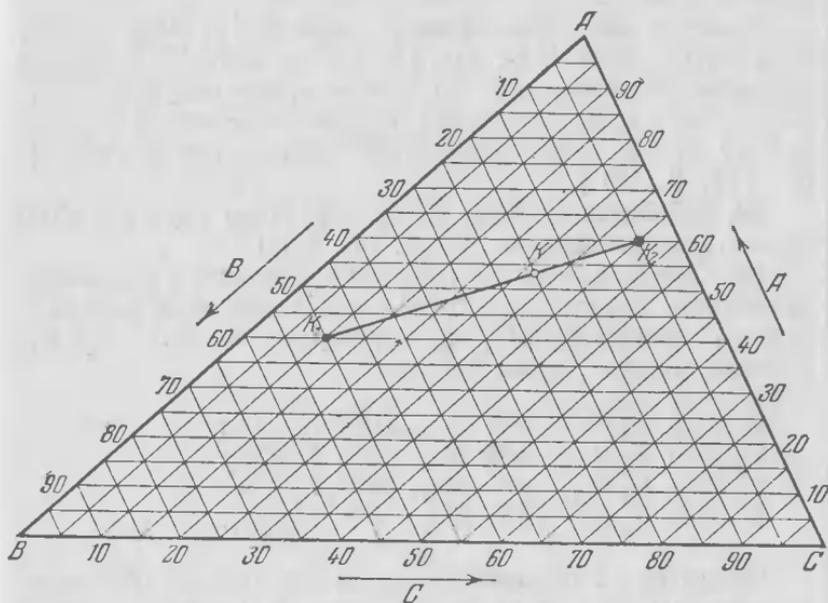


Рис. 111.

Для химических приложений треугольника Гиббса особенно полезно следующее предложение:

17. Если две трехкомпонентные смеси характеризуются материальными точками (K_1, m_1) и (K_2, m_2) (рис. 111), то от их смешения образуется смесь, которая характеризуется

материальной точкой (K, m) , являющейся объединением двух материальных точек (K_1, m_1) и (K_2, m_2) .

Докажите это предложение. (Р. 220.)

18. Имеются два вида серебряного припоя: 1) 20% Ag, 50% Cu, 30% Zn; 2) 45% Ag, 30% Cu, 25% Zn. Каков будет состав сплава, который можно получить из 15 кг первого вида припоя и 10 кг второго вида? (О. 118, У. 127.)

19. В химической промышленности — в частности, при изготовлении красителей и взрывчатых веществ — широчайшее применение имеют так называемые «нитрующие смеси», которые представляют собой смеси серной кислоты, азотной кислоты и воды.

Имеются две смеси такого состава: 1) 30% H_2SO_4 , 20% HNO_3 , 50% H_2O ; 2) 74% HNO_3 , 26% H_2O . В каком соотношении нужно взять эти смеси, чтобы получить нитрующую смесь с 20-процентным содержанием серной кислоты H_2SO_4 ? Каков будет процентный состав новой смеси¹⁾? (О. 118, У. 127.)

20. Обобщите теорему из задачи 17 на случай любого числа трехкомпонентных смесей. (У. 127.)

21. Олеум, находящий широкое применение в химической технологии, представляет собой смесь серной кислоты H_2SO_4 , серного ангидрида SO_3 и пиросерной кислоты $H_2S_2O_7$. Имеются четыре состава блеума:

- 1) 85% H_2SO_4 , 5% SO_3 , 10% $H_2S_2O_7$;
- 2) 55% H_2SO_4 , 5% SO_3 , 40% $H_2S_2O_7$;
- 3) 30% H_2SO_4 , 20% SO_3 , 50% $H_2S_2O_7$;
- 4) 60% H_2SO_4 , 35% SO_3 , 5% $H_2S_2O_7$.

Каково будет процентное содержание блеума, образованного от смешения 24 кг первой смеси, 120 кг второй смеси, 32 кг третьей смеси и 16 кг четвертой смеси? (О. 118, Р. 221.)

22. Аптекарю нужно составить из трех компонент A , B , C смесь с таким составом: $a\%$ A , $b\%$ B , $c\%$ C , но у него нет чистых веществ A , B , C . В его распоряжении

¹⁾ Этот пример заимствован из статьи Берла и О. Замлехена в «Zeitschrift für angew. Chemie» 35 (1922), 270.

имеются три различные смеси из этих веществ таких составов:

1) $a_1\%$ A, $b_1\%$ B, $c_1\%$ C;

2) $a_2\%$ A, $b_2\%$ B, $c_2\%$ C;

3) $a_3\%$ A, $b_3\%$ B, $c_3\%$ C.

Как же ему составить нужную смесь? Решите эту задачу с помощью треугольника Гиббса. Можно ограничиться рассмотрением конкретного случая, когда

$$a_1 = 10, \quad b_1 = 30, \quad c_1 = 60;$$

$$a_2 = 20, \quad b_2 = 60, \quad c_2 = 20;$$

$$a_3 = 80, \quad b_3 = 10, \quad c_3 = 10;$$

$$a = 50, \quad b = 30, \quad c = 20.$$

(Р. 221.)

ОТВЕТЫ

§ 1

$$12. \left(1 - \frac{k_1}{1+k_1+k_1k_2} - \frac{k_2}{1+k_2+k_2k_3} - \frac{k_3}{1+k_3+k_3k_1}\right) S = \\ = \frac{(1-k_1k_2k_3)^2 S}{(1+k_1+k_1k_2)(1+k_2+k_2k_3)(1+k_3+k_3k_1)}.$$

§ 2

$$1. \frac{px+qy}{p+q}. \quad 2. z = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}.$$

5. Центр тяжести тоже переместится «вправо» (точнее, он удалится от начала луча).

§ 6

1. Вершины $\triangle ABC$. 2. 1) 5, 5, 5; 2) 3, 3, 0; 3) -1, 2, 0. 3. 1) a, a, a (a — любое действительное число, $a \neq 0$; например, 1, 1, 1); 2) $a, a, 0$ (например: 1, 1, 0); 3) a, b, c , где $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$; 4) $a, b, -c$.

4. 6, 4, 10. 5. $\frac{ap}{a+b+c}$, $\frac{bp}{a+b+c}$, $\frac{cp}{a+b+c}$. 6. m_1+n_1 , m_2+n_2 , m_3+n_3 . 8. $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$. 9. $\sin 2A$,

$\sin 2B$, $\sin 2C$. 10. $\frac{m_1}{m} + \frac{n_1}{n}$, $\frac{m_2}{m} + \frac{n_2}{n}$, $\frac{m_3}{m} + \frac{n_3}{n}$, где

$m = m_1 + m_2 + m_3$, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

§ 7

1. 316. 2. 108. 3. 276. 8. Искомое геометрическое место точек есть либо окружность, либо точка, либо оно не существует. 9. Искомое геометрическое место точек (если оно существует) есть либо сфера, либо точка. 11. Искомое геометрическое место точек есть прямая. 13. $CC_1^2 = ab \left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right]$.

§ 8

1. Искомая точка — это точка пересечения биссектрис треугольника, имеющего своими вершинами основания медиан данного треугольника. 2. Расстояние от искомого центра тяжести до диаметра полуокружности равно $\frac{2R}{\pi}$ ($2R$ — диаметр). 6. Утверждение не верно. 11. $(2a+b):(a+2b)$.

§ 9

4. $12\pi a^2$. 5. $4\pi^2 Rr$. 6. $\pi R^2(\pi - 2)$. 7. Расстояние от центра окружности до центра тяжести дуги равно $\frac{2R}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$. 8. $\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\beta}$. 12. $2\pi^2 Rr^2$. 13. $\frac{\pi}{3}(3\pi - 4)R^3$. 14. $\frac{3\sqrt{3}+4}{52}a$ — расстояние от центра тяжести пластинки до центра шестиугольника. 15. $\pi a^3 \sqrt{2} \sin(\varphi + 45^\circ)$, $4\pi a^2 \sqrt{2} \sin(\varphi + 45^\circ)$. 16. $\frac{1}{2}\pi a^3 \sin(\varphi + 30^\circ)$, $2\pi a^2 \sqrt{3} \sin(\varphi + 30^\circ)$.

§ 10

2. 60% . 3. 910 г. 4. 200 г. 5. Около 686 г четверника. 6. Около 127 г. 7. Если n смесей характеризуются материальными точками $(K_1, m_1), (K_2, m_2), \dots, (K_n, m_n)$, то объединение этих смесей характеризуется материальной точкой (K, m) , являющейся объединением этих n материальных точек: $(K, m) = (K_1, m_1) + (K_2, m_2) + \dots + (K_n, m_n)$. 8. $29,5\%$. 9. 70% A, 20% B, 10% C; 20% A, 35% B, 45% C. 10. См.

точку K на рис. 112. 11. См. точку T на рис. 112 (A, B, C — соответственно чистая вода, чистый спирт и чистый уксус). 12. См. точку L на рис. 112 (A, B, C — соответственно чистая окись цинка, чистый крахмал и чистый вазелин). 13. а) См. точку M на рис. 112 (A — чистый Cu , B — чистый Zn , C — чистый Ni); б) см. точку N на рис. 112. 14. Отрезок прямой,

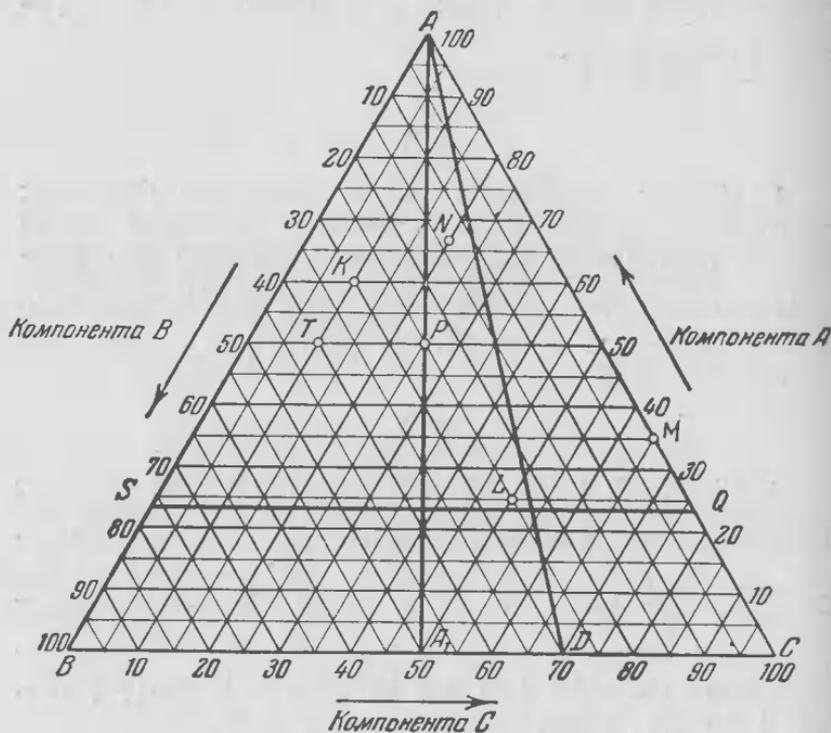


Рис. 112.

параллельной стороне BC , имеющий концы на боковых сторонах $\triangle ABC$ (отрезок SQ на рис. 112). 15. Медиана AA_1 треугольника ABC . 16. Отрезок AD (см. рис. 112), соединяющий вершину A с точкой D на BC , имеющей пометку «70» (A — вода, B — глицерин, C — спирт). 18. 30% Ag , 42% Cu , 28% Zn . 19. Смеси нужно взять в соотношении 1:2; 20% H_2SO_4 , 38% HNO_3 , 42% H_2O . 21. 55% H_2SO_4 , 10% SO_3 , 35% $\text{H}_2\text{S}_2\text{O}_7$.

УКАЗАНИЯ

§ 1

1. а) Поместите в вершинах четырехугольника равные массы (по одной единице). б) Сгруппируйте образовавшиеся четыре материальные точки в две пары тремя различными способами.

2. Воспользуйтесь тем, что центр тяжести двух материальных точек лежит на отрезке, соединяющем эти точки.

3. а) Поместите в вершинах треугольника массы так, чтобы центром тяжести каждой пары образовавшихся материальных точек оказалось соответствующее основание медианы. б) Центр тяжести образовавшихся трех материальных точек лежит на каждой из медиан.

4. Нагрузите вершины так, чтобы центром тяжести системы оказалась середина медианы.

5. а) Поместите в вершинах шестиугольника равные массы. б) Сосредотачивая эти шесть масс в вершинах $\triangle B_1B_3B_5$, покажите, что центр тяжести всей системы совпадает с точкой пересечения медиан $\triangle B_1B_3B_5$. в) Аналогичные рассуждения проведите относительно $\triangle B_2B_4B_6$.

6. а) Нагрузите все вершины равными массами. б) Замените три из получившихся четырех материальных точек их объединением.

7. а) Нагрузите вершины равными массами. б) Сгруппируйте образовавшиеся материальные точки в две пары различными способами.

8. Достаточно поместить в вершинах $\triangle ABC$ массы, численно равные площадям треугольников BOC , COA , AOB .

9. Нагрузите вершины $\triangle ABE$ (рис. 113) так, чтобы центром тяжести оказалась точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$.

10. а) Нагрузите вершины так, чтобы центром тяжести системы оказалась точка пересечения биссектрис. б) В каком отношении делит биссектриса угла A противолежащую сторону?

11. а) Вычислите сначала $S_{\triangle ARB}$. Для этой цели покажите, что

$$\frac{S_{\triangle ARB}}{S_{\triangle AB_1B}} = \frac{RB}{B_1B}.$$

Ясно, что $S_{\triangle AB_1B} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$. Задача свелась к вычислению $\frac{RB}{B_1B}$. Это отношение легко найти, если вычислить $\frac{RB}{RB_1}$.

б) Нагрузите затем вершины $\triangle ABC$ так, чтобы точка R была центром тяжести трех образовавшихся материальных точек.

Затем найдите $\frac{RB}{RB_1}$.

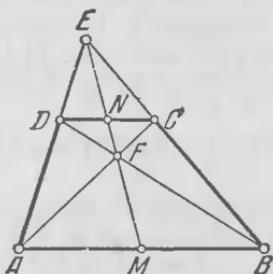


Рис. 113.

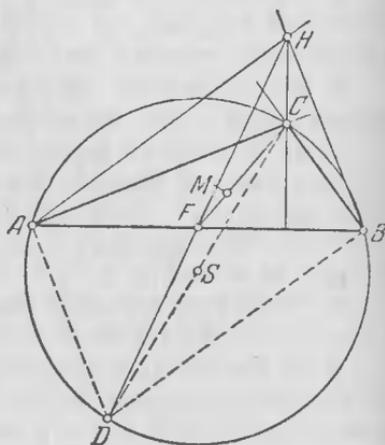


Рис. 114.

13. а) Воспользуйтесь задачей 1. б) Опустите из центра окружности перпендикуляры на диагонали.

14. а) Рассмотрите точку D (рис. 114), симметричную вершине C треугольника ABC относительно центра S описанной окружности. Если H — точка пересечения высот, то $ADBH$ — параллелограмм. б) Нагрузите равными массами вершины треугольника CDH .

15. а) См. указание и решение задачи 8. б) Задача сводится к построению центра тяжести трех материальных точек (A, p) , (B, q) и (C, r) .

16. а) Сравните с задачей 9. б) Пусть M — центр тяжести треугольника ABC ; A_2, B_2, C_2 — середины сторон BC, CA, AB . Достаточно показать, что три отрезка A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2

и C_1C_2 имеют общую точку. в) Для этой цели загрузите точки A, B, C и точку S (точку встречи боковых ребер) аналогично тому, как это делалось в задаче 9.

§ 2

1. Пусть Z — центр тяжести материальных точек P и Q . Выразите PZ и QZ через x, y и SZ . Далее воспользуйтесь правилом рычага.

3. а) Замените три материальные точки, лежащие справа от Z , их объединением. б) Аналогично поступите с двумя материальными точками слева от Z . Воспользуйтесь затем правилом рычага. в) Примените формулу (2) из решения задачи 2.

4. в) Если $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ — несколько материальных точек, лежащих на некотором луче с началом S, Z — их центр тяжести и $SA_1 < SA_2 < \dots < SA_n$, то $SA_1 < SZ < SA_n$. б) Подберите на этом луче n материальных точек так, чтобы SA_1, SA_n и SZ были равны соответственно крайним и среднему членам доказываемого неравенства.

5. Воспользуйтесь решением задачи 2.

6. а) Воспользуйтесь задачей 2. б) Рассматривайте каждую часть доказываемого неравенства как расстояние от начала некоторого луча ST до центра тяжести некоторой расположенной на луче системы материальных точек с общей массой 1. в) Воспользуйтесь затем задачей 5.

7. а) Рассматривайте каждую часть неравенства

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} > \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

как расстояние от начала луча до центра тяжести некоторой системы материальных точек. б) Массу всей системы положите равной $b_1 + b_2 + \dots + b_n$. в) Воспользуйтесь задачей 6.

8. (См. рис. 16). Если $PF \parallel ZE \parallel MN$, то $\triangle PFZ \sim \triangle ZEQ$.

12. а) Отложите от точки O на сторонах одного из углов, смежных с углом $A'_1OA'_2$, отрезки $OA_1 = k_1$ и $OA_2 = k_2$. Пусть Z — центр тяжести двух материальных точек $(A_1, 1)$ и $(A_2, 1)$, T — проекция точки Z на OP , Q — проекция точки P на OZ . Выразите PQ через OZ, k_1, k_2, PB_1 и PB_2 .

б) $PQ = \frac{k_1 \cdot PB_1 + k_2 \cdot PB_2}{2OZ}$. в) Искомое геометрическое место точек — отрезок прямой, параллельной OZ .

14. См. задачи 8, 9, 11.

15. а) Выберите на дуге синусоиды n точек с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n и поместите в этих точках равные массы. б) Воспользуйтесь затем формулами (8) — (11) § 2.

16. а) На линии $y = \lg x$ выберите точки с абсциссами x_1, \dots, x_n и в каждой поместите некоторую массу. б) Если некоторые из чисел x_1, x_2, \dots, x_n меньше, чем 1, то возможно подобрать такое k , чтобы числа $x'_1 = kx_1, \dots, x'_n = kx_n$ были все больше, чем 1.

17. В точках параболы с абсциссами x_1, \dots, x_n поместите некоторые массы.

21. а) Доказательство — способом от противного: допустите, что при двух различных способах объединения данных материальных точек возможно получить два различных центра тяжести, скажем, S и T . Рассмотрите затем плоскость α , перпендикулярную к ST . б) Воспользуйтесь задачей 14.

22. Та же идея, что и при решении задачи 21.

§ 3

1. а) Всегда возможно подобрать три массы m_1, m_2, m_3 так, чтобы выполнялись условия (13) и (14). б) Покажите затем, что из выполнения условия Чевы вытекает (15), и наоборот.

7 и 8. Загрузите вершины массами m_1, m_2, m_3 так, чтобы выполнялись условия (13) — (15) (см. стр. 38).

9. Используйте результат задачи 8.

13. а) Докажите сначала такое свойство параллельной проекции: если точка, лежащая на отрезке, делит его в каком-то отношении, то и проекция этой точки делит проекцию отрезка в том же отношении. б) Воспользуйтесь задачей 11.

14 и 16. Нагрузите вершины так, чтобы центром тяжести системы материальных точек оказалась точка O .

17. а) Нагрузите одну из вершин, скажем, A_4 , произвольной массой m_4 , а для вершины A_1 подберите массу m_1 так, чтобы центром тяжести двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_4, m_4) служила точка A_{14} . Аналогично подберите массы m_2 и m_3 в A_2 и A_3 . б) Покажите, что A_{12} — центр тяжести материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) . в) Покажите, что центр тяжести четырех материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), (A_4, m_4)$ лежит на $A_{12}A_{34}$.

18. Сведите эту задачу к предыдущей.

§ 4

1. Нагрузите A , C и A_1 так, чтобы центрами тяжести образовавшихся материальных точек, если их рассматривать попарно, служили точки B_1 и B .

2. а) $\triangle PC_1A \sim \triangle PA_1C$. б) Отсюда найдите одну из дробей, входящих в выражение $\frac{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1}{B_1C \cdot A_1B \cdot C_1A}$. в) Аналогично найдите две другие дроби, входящие в это выражение.

3. а) Нагрузите сначала точки O , A_1 , A_2 так, чтобы центром тяжести образовавшихся трех материальных точек была точка K . Загрузите затем точки O , B_1 , B_2 так, чтобы центром тяжести новой системы была точка L . Центр тяжести S всех шести материальных точек лежит на прямой KL . б) Подберите нагрузки в точке O так, чтобы точка S лежала на A_2C_1 . в) Покажите, что тогда S лежит и на A_1C_2 .

§ 6

2. 3) Точка F — центр тяжести материальных точек (A, a) и (B, b) , поэтому $a \cdot \overline{AF} = b \cdot \overline{FB}$, следовательно, $2a = -b$; кроме того, $a + b = 1$.

9. Пусть O — центр рассматриваемой окружности. За барицентрические координаты точки O можно принять площади треугольников BOC , COA , AOB .

§ 7

4—5. а) Нагрузите вершины треугольника (многоугольника) равными массами (по 1 единице). б) Выразите J_P через J_O , где O — центр окружности.

8. В точках A_1 , A_2 , A_3 , A_4 поместите единичные массы. 12 и 14. а) Поместите в A и B такие массы m_1 и m_2 , чтобы C_1 была центром тяжести образовавшихся двух материальных точек. б) Можно взять $m_1 = BC_1$, $m_2 = AC_1$.

15. а) См. задачу 13 из § 1. б) Покажите, что $J_T = J_O$.

16. а) Нагрузите вершины равными массами. б) Выразите сумму $J_{A_1} + J_{A_2} + J_{A_3} + J_{A_4}$ через стороны и диагонали четырехугольника. в) Выразите ту же сумму через J_O и элементы четырехугольника, пользуясь теоремой Лагранжа.

18. Нагрузите вершины так, чтобы центром тяжести образовавшихся трех материальных точек служил центр вписанной окружности.

19. а) См. задачу 3 (пункт 4) из § 6. б) Задача решается аналогично предыдущей.

20. а) Сумму $SA_1^2 + SA_2^2 + \dots + SA_n^2$ рассматривайте как момент инерции системы из n материальных точек $(A_1, 1)$, $(A_2, 1)$, \dots , $(A_n, 1)$ относительно точки S . б) Примените затем теорему Лагранжа.

21. а) На произвольном луче ST выберите точки $A_1, A_2, \dots, \dots, A_n$ так, чтобы $SA_1 = a_1, SA_2 = a_2, \dots, SA_n = a_n$, и нагрузите их равными массами. б) Затем примените неравенство (51).

22. Выберите на произвольном луче ST точки $A_1, A_2, \dots, \dots, A_n$ так, чтобы $SA_1 = a_1, \dots, SA_n = a_n$, и поместите в них массы $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$.

23. а) Выберите сначала на произвольном луче ST n произвольных материальных точек $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$. Пусть $SA_1 = x_1, \dots, SA_n = x_n$. К этой системе примените неравенство (51). Подберите затем числа m_1, \dots, m_n так, чтобы получить неравенство Коши — Буияковского.

§ 8

2. а) Впишите в полуокружность ломаную с равными звеньями. б) Покажите, что расстояние z_n от центра тяжести ломаной до диаметра AB равно $R \frac{\cos \alpha}{n \sin \alpha}$, где n — число звеньев, $2R$ — диаметр, $\alpha = \frac{\pi}{2n}$. в) Воспользуйтесь тем, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$.

3. а) Разбейте один из катетов на n равных частей. Впишите в треугольник «многоугольник из прямоугольников» так, чтобы высотой каждого прямоугольника служила $\frac{1}{n}$ часть этого разделенного катета. б) Найдите расстояния от центра тяжести этого «многоугольника из прямоугольников» до катетов. в) Перейдите к пределу при $n \rightarrow \infty$.

4. а) Разбейте треугольник на два прямоугольных треугольника. б) Сосредоточьте массу каждого из них в его центре тяжести и найдите затем центр тяжести образовавшихся таким образом двух материальных точек.

5. а) Разбейте данный треугольник на четыре равных треугольника. б) Если центр тяжести $\triangle ABC$ отстоит от большей стороны AB на расстояние z , то центр тяжести каждого из четырех треугольников отстоит от больших сторон этих треугольников на расстояние $\frac{z}{2}$. в) Воспользуйтесь задачей 11 из § 2. г) Покажите, что $z = \frac{h}{3}$, где h — высота, $\triangle ABC$ опущенная на AB .

д) Другая идея: разбить треугольник на параллелограмм и два треугольника.

6. Приведите опровергающий пример.

7. Разбейте «букву Г» двумя способами на два параллелограмма.

9. а) Разбейте трапецию диагональю на два треугольника. б) Центр тяжести трапеции лежит на прямой, соединяющей центры тяжести этих треугольников.

10. а) Разбейте трапецию на четыре треугольника диагоналями. б) Докажите, что центр тяжести двух треугольников, прилегающих к боковым сторонам, лежит на MN . в) Для этой цели покажите сначала, что эти два треугольника равновелики.

11. а) Предварительно разбейте трапецию диагональю на два треугольника. б) Найдите расстояние центра тяжести трапеции от ее основания. в) Для этой цели воспользуйтесь задачей 4 из § 2.

13. Покажите, что $\frac{RF}{RE} = \frac{a}{b}$ (см. рис. 82).

14. а) Постройте сначала центры тяжести $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ и соединяющий их отрезок. б) См. рис. 115.

15. а) $ME = \frac{1}{2} MN$. б) $MO = \frac{1}{3} MK$ (рис. 115).

в) Покажите, что $ET = \frac{1}{2} MN - NK$.

16. а) Пусть O' — на луче MO , причем $MO' = 3MO$ (см. рис. 85). Докажите, что O' — на прямой DD' , параллельной AC . б) Аналогично O' — на прямой CC' , параллельной BD .

17—18. Воспользуйтесь задачей 16.

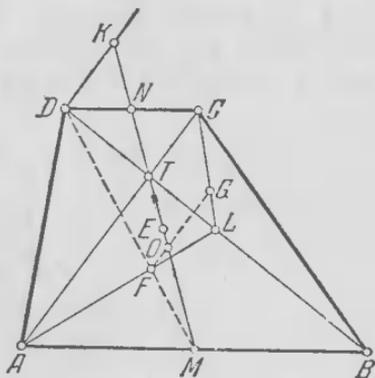


Рис. 115.

§ 9

8. а) Воспользуйтесь задачей 7. б) На окружности единичного радиуса рассмотрите такие дуги ACB и A_1CB_1 , чтобы $AC = CB = \alpha$, $A_1C = CB_1 = \beta$.

§ 10

1. а) Нужно доказать, что $K_1K:KK_2 = m_2:m_1$. б) Выразите AK и BK через массы смесей и концентрации компонент в смесях. в) $K_1K = AK - AK_1$, $KK_2 = AK_2 - AK$.

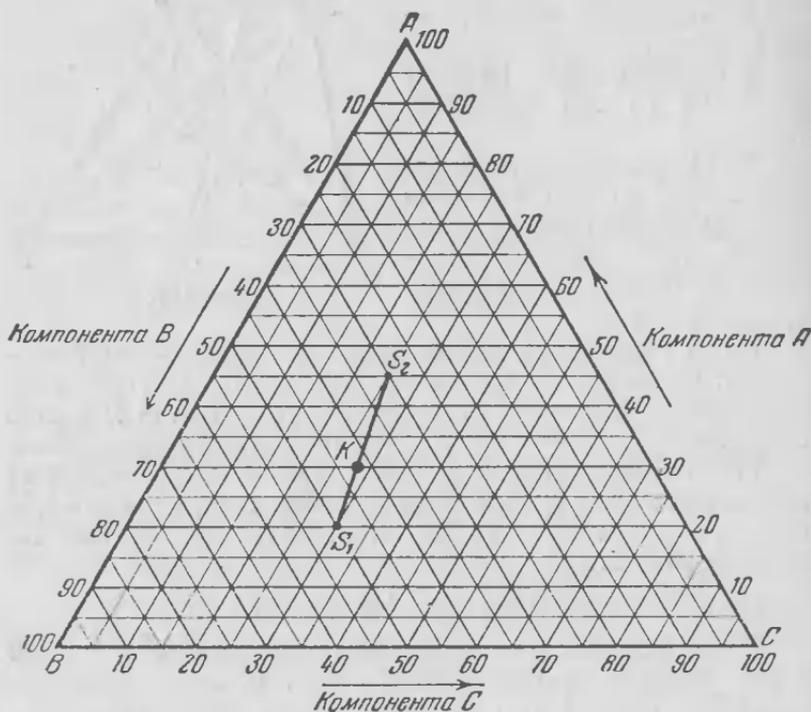


Рис. 116.

2. Задача сводится к объединению («сложению») материальных точек, характеризующих данные смеси.

7. Примените метод полной индукции.

10. Воспользуйтесь рис. 109.

18. а) Пусть точки S_1 и S_2 изображают данные сплавы. Задача сводится к нахождению центра тяжести двух материальных точек ($S_1, 15$) и ($S_2, 10$). б) См. рис. 116.

19. а) Пусть точки P_1 и P_2 изображают данные смеси, точка A — чистую серную кислоту. Точка P характеризую-

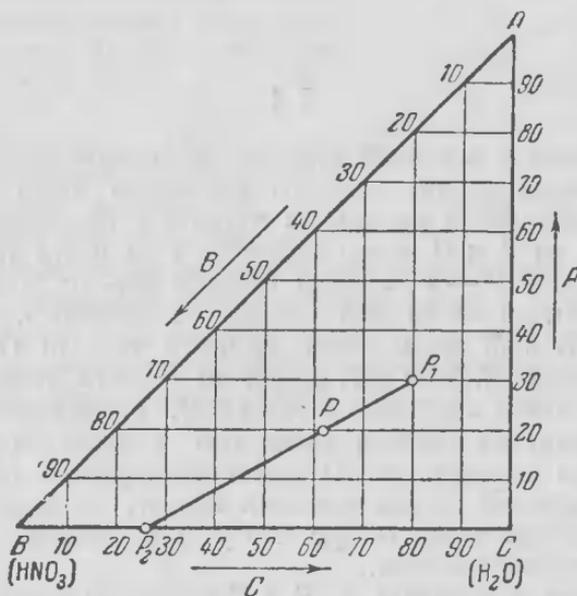


Рис. 117.

щая искомую смесь, принадлежит геометрическому месту точек, соответствующим смесям с 20-процентным содержанием H_2SO_4 (см. задачу 14). б) См. рис. 117 (для разнообразия берем в качестве треугольника Гиббса равнобедренный прямоугольный треугольник).

20. См. решение задачи 7.

РЕШЕНИЯ

§ 1

1. Поместим в каждой вершине четырехугольника $ABCD$ (рис. 4) массу в одну единицу. Обозначим через O центр тяжести полученной системы из четырех материальных точек. Но массы из A и B можно перенести в их центр тяжести K , массы из C и D — в их центр тяжести M — от этого положение центра тяжести всей системы не изменится. Так как в точках K и M массы равны, то центр тяжести O материальных точек $(K, 2)$ и $(M, 2)$ (он же — центр тяжести всей системы) служит серединой отрезка KM . Таким образом, точка O лежит на средней линии KM и делит ее пополам. Аналогично покажем, что O лежит на отрезках LN и PQ (и делит каждый из них пополам). Значит, отрезки KM , LN и PQ проходят через общую точку O и делятся в ней пополам. Теорема доказана.

2. Пусть в вершинах A , B и C помещены соответственно массы m_1 , m_2 , m_3 . Обозначим через O центр тяжести трех образовавшихся материальных точек. Пусть $C_1 \equiv Z[(A, m_1), (B, m_2)]$.

Нужно показать, что прямая CO пересекает отрезок AB в точке C_1 .

Заменяем две материальные точки (A, m_1) и (B, m_2) их объединением $(C_1, m_1 + m_2)$ — от этого положение центра тяжести системы не изменится. Но теперь система состоит только из двух материальных точек: $(C_1, m_1 + m_2)$ и (C, m_3) .

Следовательно, точки O , C и C_1 расположены на одной прямой, т. е. C_1 лежит на прямой CO . А так как C_1 еще лежит на отрезке AB , то C_1 действительно есть точка встречи прямой CO со стороной AB , что и требовалось доказать.

3. Поместим в каждую вершину треугольника ABC массу в одну единицу. Пусть O (рис. 118) — центр тяжести всей системы, пусть CC_1 — одна из трех медиан. Массы материальных точек $(A, 1)$ и $(B, 1)$ можно сосредоточить в их

центре тяжести C_1 — середине отрезка AB . Теперь вся система состоит из двух материальных точек: $(C, 1)$ и $(C_1, 2)$. Центр тяжести всей системы O лежит на отрезке CC_1 . Аналогично покажем, что O лежит на медианах AA_1 и BB_1 . Итак, все три медианы проходят через одну точку (через O). По правилу рычага $1 \cdot OC = 2 \cdot OC_1$, т. е. $OC : OC_1 = 2 : 1$.

4. Пусть (рис. 119) CC_1 — медиана основания AB в $\triangle ABC$; O — середина медианы CC_1 . Поместим в A и B массы так, чтобы

центром тяжести образующихся двух материальных точек была точка C_1 . Например, можно поместить в A и в B массы в одну единицу. В C поместим такую массу, чтобы вся система имела центром тяжести точку O . Следовательно, в C нужно поместить массу в две единицы. Пусть A_1 — центр тяжести

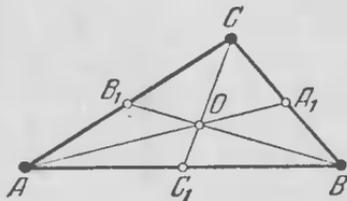


Рис. 118.

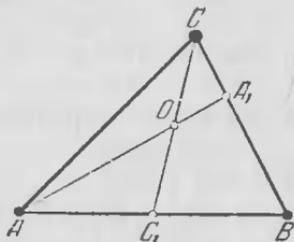


Рис. 119.

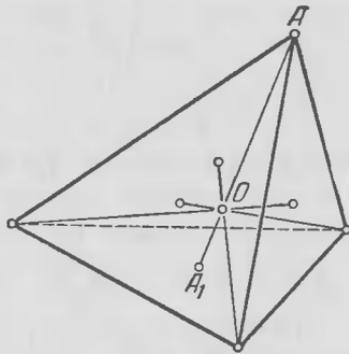


Рис. 120.

материальных точек $(B, 1)$ и $(C, 2)$. Тогда точка O лежит на AA_1 , т. е. $AO \times BC \equiv A_1^1$). Но по правилу рычага $1 \cdot A_1B = 2 \cdot A_1C$, откуда $A_1C = \frac{1}{3} BC$.

6. Поместим в вершинах тетраэдра равные массы (по одной единице). Пусть O (рис. 120) — центр тяжести полученной

¹⁾ Запись $AO \times BC \equiv A_1$ означает, что прямые AO и BC пересекаются в точке A_1 .

системы из четырех материальных точек, A_1 — точка пересечения медиан какой-либо грани, A — противоположная вершина тетраэдра. Три массы в вершинах рассматриваемой грани можно объединить в их центре тяжести A_1 . Тогда ясно, что центр тяжести O лежит на отрезке AA_1 . Итак, O лежит на любом из четырех рассматриваемых отрезков, и, значит, является их общей точкой. По правилу рычага $OA = 3 \cdot OA_1$.

7. Нагрузим вершины равными массами (по одной единице). Пусть O — центр тяжести образовавшихся четырех материальных точек, A_1A_2 и A_3A_4 — произвольная пара противоположных ребер (рис. 121). Массы, помещенные в точки A_1 и A_2 (соответственно A_3 и A_4), объединим в их центре тяжести A_{12} (соответственно A_{34}) — середине отрезка A_1A_2 (соответственно A_3A_4). Тогда O лежит на отрезке $A_{12}A_{34}$. Итак, O лежит на *любом* из трех отрезков, соединяющих середины противоположных ребер, и, значит, является общей

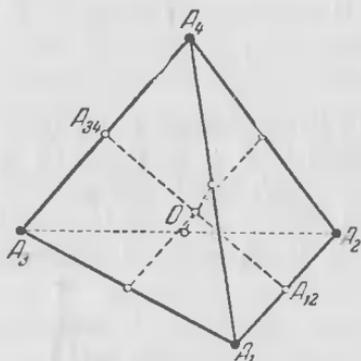


Рис. 121.

точкой этих отрезков. По правилу рычага $2 \cdot OA_{12} = 2 \cdot OA_{34}$, т. е. O — середина отрезка $A_{12}A_{34}$.

8. Пусть прямая CO встречает AB в точке C_1 . Поместим в A и B массы m_1 и m_2 так, чтобы $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{m_2}{m_1}$.

Для этого можно взять в качестве чисел m_2 и m_1 длины отрезков AC_1 и C_1B или числа $k \cdot AC_1$ и $k \cdot C_1B$, где k — любое положительное число.

Подберем затем в точке C массу m_3 так, чтобы точка O была центром тяжести двух таких материальных точек:

$(C_1, m_1 + m_2)$ и (C, m_3) , т. е. чтобы $\frac{OC_1}{OC} = \frac{m_3}{m_1 + m_2}$. А это всегда возможно сделать.

Ясно, что O — центр тяжести системы из трех материальных точек: (A, m_1) , (B, m_2) , (C, m_3) .

Другое решение. Пусть $m_1 = S_{\Delta BOC}$, $m_2 = S_{\Delta COA}$, $m_3 = S_{\Delta AOB}$. Опустим из A и B перпендикуляры AE и BF

на прямую CC_1 . Известно, что площади двух треугольников с равными основаниями пропорциональны их высотам. Поэтому

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle COA}} = \frac{BF}{AE} = \frac{BC_1}{AC_1},$$

т. е.

$$m_1 \cdot AC_1 = m_2 \cdot BC_1,$$

следовательно,

$$C_1 \equiv Z[(A, m_1), (B, m_2)].$$

Отсюда ясно, что центр тяжести системы из трех материальных точек: (A, m_1) , (B, m_2) , (C, m_3) лежит на прямой CC_1 . Аналогично покажем, что он лежит на AA_1 . Следовательно, он совпадает с точкой O .

9. Пусть $ABCD$ — трапеция (см. рис. 113), $AB > CD$, $AM = MB$, $DN = NC$, $AC \times BD \equiv F$, $AD \times BC \equiv E$. Ограничимся доказательством того, что точки M , F и E — на одной прямой. Поместим в точках A , B , E массы так, чтобы F оказалась центром тяжести образовавшихся трех материальных точек. В E помещаем произвольную массу, например 1 единицу. В A (соответственно B) подберем массу p (соответственно q) так, чтобы точка D (соответственно C) оказалась центром тяжести материальных точек (A, p) и $(E, 1)$ (соответственно (B, q) , $(E, 1)$). Тогда $p \cdot AD = 1 \cdot DE$, т. е. $p = DE : AD$. Аналогично $q = CE : BC$. Но $DE : AD = CE : BC$ (ибо параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки), так что $p = q$. Заменяем материальные точки (A, p) и $(E, 1)$ их объединением $(D, p + 1)$. Тогда ясно, что центр тяжести всей системы лежит на BD . Аналогично покажем, что он лежит и на AC , т. е. совпадает с точкой F . Кроме того, центром тяжести материальных точек (A, p) и (B, q) является середина M отрезка AB . Центр тяжести всей системы должен лежать на ME , т. е. F лежит и на ME , что и требовалось доказать.

10. Поместим в точке C произвольную массу p_3 и подберем массу p_1 в точке A так, чтобы точка B_1 была центром тяжести материальных точек (A, p_1) и (C, p_3) . Тогда $\frac{p_1}{p_3} = \frac{CB_1}{AB_1}$. Но $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{a}{c}$ (в силу известного свойства биссектрисы). Таким образом,

$$p_1 = p_3 \frac{a}{c}.$$

Подберем аналогично массу p_2 в точке B так, чтобы точка A_1 была центром тяжести материальных точек (B, p_2) и (C, p_3) . Получим $p_2 = p_3 \frac{b}{c}$.

Обозначим через M центр тяжести всей системы. Массы p_2 и p_3 можно было бы сосредоточить в точке A_1 . Тогда вся система состояла бы из двух материальных точек, и центр тяжести M должен оказаться на прямой AA_1 . Аналогично можно показать, что M лежит на прямой BB_1 . Следовательно, M совпадает с O , т. е. O — центр тяжести всей системы.

По правилу рычага $\frac{A_1O}{AO} = \frac{p_1}{p_2 + p_3} = \frac{\frac{a}{c} p_3}{\frac{b}{c} p_3 + p_3} = \frac{a}{b + c}$.

Составив производную пропорцию, получим: $\frac{A_1O}{A_1O + AO} = \frac{a}{a + b + c}$, т. е. $\frac{A_1O}{A_1A} = \frac{a}{a + b + c}$, что и требовалось доказать.

11. $S_{\Delta PQR} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ARB} - S_{\Delta BPC} - S_{\Delta CQA}$ (рис. 122). Известно, что если два треугольника имеют равные высоты,

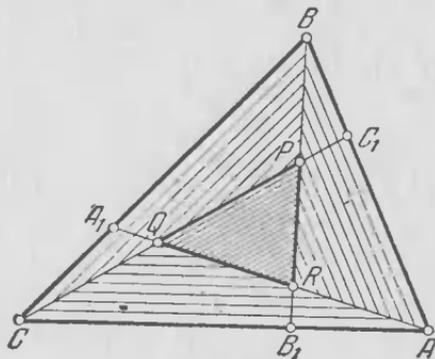


Рис. 122.

то их площади относятся как их основания. Поэтому

$$\frac{S_{\Delta BRA}}{S_{\Delta BB_1A}} = \frac{BR}{BB_1}.$$

Поместим в вершинах ΔABC такие массы, чтобы точка R оказалась центром тяжести образующихся при этом трех материальных точек. Для этой цели достаточно поместить в

B , C , A массы соответственно в 1, 2, 4 единицы. Материальные точки (C , 2) и (A , 4) заменим их объединением (B_1 , 6). Тогда R будет центром тяжести двух материальных точек (B_1 , 6) и (B , 1), и по правилу рычага $1 \cdot BR = 6 \cdot B_1R$, так что $BB_1 = 7 \cdot B_1R$ и $\frac{BR}{BB_1} = \frac{6}{7}$. Итак:

$$S_{\Delta BRA} = \frac{6}{7} S_{\Delta BB_1A} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{2}{7} S_{\Delta ABC}.$$

Аналогично можно показать, что $S_{\Delta BPC} = S_{\Delta CQA} = \frac{2}{7} S_{\Delta ABC}$.

Поэтому $S_{\Delta PQR} = \frac{1}{7} S_{\Delta ABC}$.

12. Ясно (см. рис. 122), что $S_{\Delta PQR} = S - S_{\Delta ARB} - S_{\Delta BPC} - S_{\Delta CQA}$ и

$$\frac{S_{\Delta BRA}}{S_{\Delta BB_1A}} = \frac{BR}{BB_1}.$$

Нагрузим вершины треугольника ABC так, чтобы точка R оказалась центром тяжести образующейся системы материальных точек. Для этого поместим в C произвольную массу m_3 (например, $m_3 = 1$ единице), а в A и B поместим массы m_1 и m_2 так, чтобы точка B_1 оказалась центром тяжести материальных точек (C , 1) и (A , m_1), а точка A_1 — центром тяжести материальных точек (C , 1) и (B , m_2). Тогда $1 \cdot CB_1 = m_1 B_1A$, $1 \cdot A_1C = m_2 A_1B$, т. е. $m_1 = k_2$, $m_2 = \frac{1}{k_1}$. Ясно, что R — центр тяжести точек (A , m_1), (B , m_2), (C , 1), и поэтому $\frac{BR}{RB_1} = \frac{m_3 + m_1}{m_3} = (1 + k_2) k_1$; отсюда $\frac{BR}{BB_1} = \frac{(1 + k_2) k_1}{1 + k_1 + k_1 \cdot k_2}$ и

$$S_{\Delta BRA} = \frac{(1 + k_2) k_1}{1 + k_1 + k_1 \cdot k_2} S_{\Delta BB_1A}.$$

Но $\frac{S}{S_{\Delta BB_1A}} = \frac{AC}{AB_1} = 1 + \frac{CB_1}{B_1A} = 1 + k_2$, поэтому $S_{\Delta BB_1A} = \frac{S}{1 + k_2}$.
Итак,

$$S_{\Delta ARB} = \frac{k_1}{1 + k_1 + k_1 \cdot k_2} S.$$

Круговой перестановкой букв и индексов получим

$$S_{\Delta BPC} = \frac{k_2}{1 + k_2 + k_2 \cdot k_3} S, \quad S_{\Delta CQA} = \frac{k_3}{1 + k_3 + k_3 \cdot k_1} S.$$

Итак,

$$S_{\Delta PQR} = \left(1 - \frac{k_1}{1+k_1+k_1k_2} - \frac{k_2}{1+k_2+k_2k_3} - \frac{k_3}{1+k_3+k_3k_1} \right) S = \frac{(1-k_1k_2k_3)^2 S}{(1+k_1+k_1k_2)(1+k_2+k_2k_3)(1+k_3+k_3k_1)}.$$

Например, при $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ получим: $S_{\Delta PQR} = \frac{1}{7} S$.

13. Пусть $OP \perp AC$, $OQ \perp BD$ (см. рис. 8). В силу задачи 1 точка S пересечения средних линий совпадает с серединой отрезка PQ . Но $OPTQ$ — прямоугольник. Поэтому середина S его диагонали PQ служит также серединой его другой диагонали OT , что и требовалось доказать.

14. Пусть ABC (см. рис. 114) — произвольный треугольник (но не прямоугольный), S — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан, H — точка пересечения высот. Нужно показать, что M — на отрезке HS и что $HM = 2SM$.

Пусть точка D симметрична точке C относительно S . Соединим D с A и B . Тогда $AH \parallel DB$, ибо и AH и DB перпендикулярны к BC . Аналогично $BH \parallel DA$. Следовательно, $AHBD$ — параллелограмм, и точка F — середина стороны AB — служит также серединой отрезка DH . Поместим теперь в каждой точке H, C, D массы, равные 1 единице. Обозначим через O центр тяжести образовавшейся системы трех материальных точек.

Объединим материальные точки $(H, 1)$ и $(D, 1)$. Мы получим материальную точку $(F, 2)$. Ясно, что точка O — центр тяжести точек $(F, 2)$ и $(C, 1)$. Следовательно, O лежит на отрезке FC и $1 \cdot OC = 2 \cdot OF$, т. е. O — точка пересечения медиан треугольника ABC , $O \equiv M$.

Но мы могли бы объединить материальную точку $(C, 1)$ с материальной точкой $(D, 1)$; получим материальную точку $(S, 2)$. Следовательно, центр тяжести M системы трех материальных точек $(C, 1)$, $(D, 1)$, $(H, 1)$ служит центром тяжести точек $(S, 2)$ и $(H, 1)$, и поэтому M лежит на отрезке SH и $HM = 2SM$, что и требовалось доказать.

Если $\triangle ABC$ прямоугольный, то доказательство теоремы Эйлера только упрощается.

16. Поместим в S (S — точка встречи прямых AA_1 , BB_1 и CC_1) массу в одну единицу, а в A, B, C подберем

массы m_1 , m_2 и m_3 так, чтобы

$$Z[(A, m_1), (S, 1)] \equiv A_1, \quad Z[(B, m_2), (S, 1)] \equiv B_1, \\ Z[(C, m_3), (S, 1)] \equiv C_1.$$

По правилу рычага

$$\frac{SA_1}{AA_1} = \frac{m_1}{1}, \quad \frac{SB_1}{BB_1} = \frac{m_2}{1}, \quad \frac{SC_1}{CC_1} = \frac{m_3}{1}.$$

Так как плоскости треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, то

$$\frac{SA_1}{AA_1} = \frac{SB_1}{BB_1} = \frac{SC_1}{CC_1}.$$

Поэтому $m_1 = m_2 = m_3$. Пусть O — центр тяжести системы из четырех материальных точек (A, m_1) , (B, m_2) , (C, m_3) , $(S, 1)$. Две пары материальных точек (A, m_1) , (B, m_2) и (C, m_3) , $(S, 1)$ можно заменить их объединениями $(C_2, m_1 + m_2)$ и $(C_1, m_3 + 1)$. Следовательно, O лежит на отрезке C_1C_2 .

Аналогично покажем, что O лежит на A_1A_2 и B_1B_2 .

Отсюда ясно, что O — общая точка трех треугольников ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 . Но те же четыре материальные точки можно сгруппировать и иначе.

Заменяем три материальные точки (A, m_1) , (B, m_2) и (C, m_3) их объединением $(M, m_1 + m_2 + m_3)$. M — точка встречи медиан треугольника ABC (ибо $m_1 = m_2 = m_3$). Точка O лежит на отрезке MS . Затем уже легко показать, что и точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ также лежит на MS .

§ 2

1. Пусть Z (рис. 123) — центр тяжести системы двух материальных точек, $SZ = z$. Пусть для определенности $x < y$.

Так как $\frac{PZ}{QZ} = \frac{q}{p}$, то $\frac{z-x}{y-z} = \frac{q}{p}$, откуда

$$(p+q)z = px + qy, \quad (1)$$

$$z = \frac{px + qy}{p+q}. \quad (2)$$

Пусть $Z \equiv (Z, p+q)$. Тогда равенство (1) можно записать и так:

$$\text{Мом}_S Z = \text{Мом}_S P + \text{Мом}_S Q. \quad (3)$$

Подробнее: если на некотором луче расположена система из двух материальных точек, то статический момент системы относительно начала луча равен моменту объединения материальных точек этой системы относительно того же начала луча.

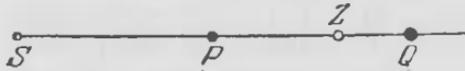


Рис. 123.

2. Пусть на некотором луче дана система из n материальных точек $A_1 \equiv (A_1, m_1)$, $A_2 \equiv (A_2, m_2)$, \dots , $A_n \equiv (A_n, m_n)$. Пусть S — начало луча и $SA_1 = x_1$, $SA_2 = x_2$, \dots , $SA_n = x_n$. Требуется найти расстояние z центра тяжести Z этой системы от начала луча.

Введем такие обозначения:

- $B_2 \equiv (B_2, m_1 + m_2)$ — объединение материальных точек A_1 и A_2 ,
 $B_3 \equiv (B_3, m_1 + m_2 + m_3)$ — объединение материальных точек B_2 и A_3 ,
 $B_4 \equiv (B_4, m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$ — объединение материальных точек B_3 и A_4 ,
 \dots
 $Z \equiv (Z, m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ — объединение материальных точек B_{n-1} и A_n .

Тогда, в силу решения предыдущей задачи,

$$\begin{aligned} \text{Мом}_S B_2 &= \text{Мом}_S A_1 + \text{Мом}_S A_2, \\ \text{Мом}_S B_3 &= \text{Мом}_S B_2 + \text{Мом}_S A_3, \\ \text{Мом}_S B_4 &= \text{Мом}_S B_3 + \text{Мом}_S A_4, \\ &\dots \\ \text{Мом}_S Z_n &= \text{Мом}_S B_{n-1} + \text{Мом}_S A_n. \end{aligned}$$

Сложив почленно все эти равенства, получим

$$\text{Мом}_S Z = \text{Мом}_S A_1 + \text{Мом}_S A_2 + \dots + \text{Мом}_S A_n, \quad (1)$$

или

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) z = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n.$$

Отсюда

$$z = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (2)$$

Другое решение. Выберем на прямой SA_n точку P так, чтобы $SP=1$ и S была между P и A_1 (рис. 124). Представим себе теперь рычажные весы с плечами SP и SA_n . Плечи будем себе представлять в виде невесомых стержней (практически это означает, что массы стержней ничтожны по сравнению с массами m_1, m_2, \dots, m_n). Если на правом плече

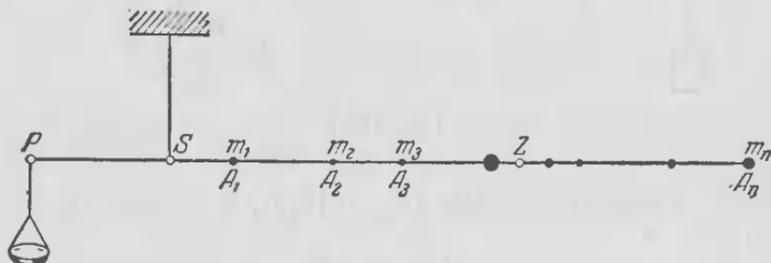


Рис. 124.

в точках A_1, A_2, \dots, A_n не помещены никакие массы, а на левом плече тоже нет никаких нагрузок, то весы будут в равновесии.

Поместим теперь в A_1 массу m_1 . Чтобы весы по-прежнему остались в равновесии (чтобы правое плечо не перетянуло), поместим в P (на левой чашке весов) тоже некоторую массу n_1 . Тогда, в силу правила рычага,

$$n_1 \cdot 1 = m_1 \cdot x_1, \text{ т. е. } n_1 = m_1 x_1.$$

Затем поместим в A_2 массу m_2 , а для сохранения равновесия нужно поместить в точке P еще массу n_2 , которая может быть определена по правилу рычага:

$$n_2 \cdot 1 = m_2 \cdot x_2, \text{ или } n_2 = m_2 x_2.$$

Аналогичным образом поместим в A_3, A_4, \dots, A_n массы m_3, m_4, \dots, m_n , а для сохранения равновесия придется в точке P еще поместить массы $m_3 x_3, \dots, m_n x_n$. В результате на плече SA_n окажутся n материальных точек $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$, а в точке P — масса $K = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$. При этом весы будут в равновесии.

Равновесие не нарушится, если массу M всех материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ сосредоточим в их центре тяжести Z (рис. 125). Но тогда точка S окажется центром

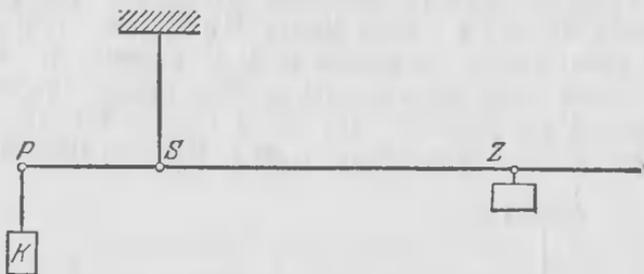


Рис. 125.

тяжести двух материальных точек: (P, K) и (Z, M) . По правилу рычага

$$K \cdot l = M \cdot SZ,$$

откуда

$$z \equiv SZ = \frac{K}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Третий подход: применить метод полной индукции.

3. Обозначим через A центр тяжести материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$ и (A_3, m_3) , расположенных справа от точки Z , а через B — центр тяжести материальных точек $(B_1, n_1), (B_2, n_2)$, расположенных слева от точки Z . Пусть $ZA_1 = x_1, ZA_2 = x_2, ZA_3 = x_3, ZB_1 = y_1, ZB_2 = y_2$. Положение центра тяжести системы пяти материальных точек не изменится, если материальные точки справа от Z и слева от Z заменить их объединениями $A \equiv (A, m_1 + m_2 + m_3), B \equiv (B, n_1 + n_2)$. Но тогда по «правилу рычага» $\text{Мом}_Z B = \text{Мом}_Z A$, т. е. $n_1 y_1 + n_2 y_2 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$, что и требовалось доказать.

4. На произвольном луче ST выберем точки A_1, A_2, \dots, A_n так, чтобы их расстояние от начала луча S было равно соответственно $\text{tg } \alpha_1, \text{tg } \alpha_2, \dots, \text{tg } \alpha_n$.

В точках A_1, A_2, \dots, A_n поместим массы $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n$. Пусть Z — центр тяжести образовавшейся системы из n материальных точек. Из определения центра тяжести

ясно, что точка Z лежит внутри отрезка A_1A_n , т. е. $SA_1 < SZ < SA_n$. Но в силу формулы (2) из решения задачи 2 (стр. 137)

$$\begin{aligned} SZ &= \frac{\cos \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n \cdot \operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} = \\ &= \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n}. \end{aligned}$$

Кроме того, $SA_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $SA_n = \operatorname{tg} \alpha_n$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

5. Обозначим через Z центр тяжести материальных точек (A, a) , (B, b) , ..., (L, l) . Тогда

$$m \cdot SZ = a \cdot SA + b \cdot SB + \dots + l \cdot SL, \quad (1)$$

где m — масса всей системы, $m = a + b + c + \dots + l$. Без потери общности можно полагать, что переносится вдоль луча часть массы материальной точки (A, a) . Таким образом, какая-то масса a'' ($a'' \geq 0$) остается в точке A , а какая-то масса a' переносится в какую-то точку A' луча ST , причем $a' + a'' = a$ и $SA' > SA$. Если Z' — центр тяжести вновь образовавшейся системы из материальных точек (A, a'') , (A', a') , (B, b) , (C, c) , ..., (L, l) , то

$$m \cdot SZ' = a'' \cdot SA + a' \cdot SA' + b \cdot SB + \dots + l \cdot SL. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned} m(SZ' - SZ) &= a''SA + a'SA' - aSA = a''SA + a'SA' - \\ &\quad - (a'' + a')SA = a'(SA' - SA) > 0. \end{aligned}$$

Значит, $SZ' - SZ > 0$, $SZ' > SZ$. Итак, от перенесения «вправо» части массы какой-либо материальной точки данной системы центр тяжести системы тоже перемещается «вправо» (удаляется от начала луча).

6. Выберем на некотором луче ST (рис. 126, а) n точек B_1, B_2, \dots, B_n так, чтобы $SB_1 = b_1, SB_2 = b_2, \dots, SB_n = b_n$. Массу, равную 1, распределим равными порциями по k точкам

B_1, B_2, \dots, B_k (рис. 126, *b*). Пусть Z — центр тяжести образовавшейся системы из k материальных точек $(B_1, \frac{1}{k}), \dots, \dots, (B_k, \frac{1}{k})$. Тогда

$$SZ = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k}. \quad (1)$$

Перераспределим теперь всю массу этой системы (равную 1), а именно, перенесем часть массы вправо так, чтобы в каждой из точек $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_n$ (рис. 126, *c*), оказалась масса, равная $\frac{1}{n}$ ($\frac{1}{n} < \frac{1}{k}$, ибо $n > k$). При этом центр

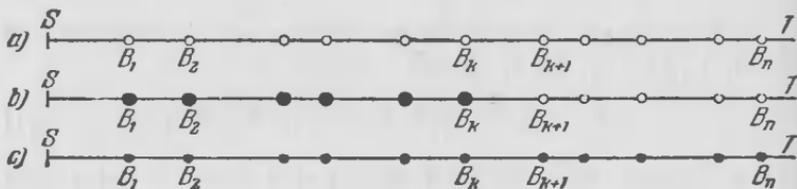


Рис. 126

тяжести системы переместится вправо: если Z' — центр тяжести новой системы материальных точек $(B_1, \frac{1}{n}), \dots, (B_k, \frac{1}{n})$, то

$$SZ' > SZ, \quad (2)$$

ио

$$SZ' = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k + \dots + b_n}{n}. \quad (3)$$

Из (1) — (3) следует доказываемое неравенство.

Другое решение. Выберем на некотором луче ST (см. рис. 126, *c*) n точек B_1, B_2, \dots, B_n так, чтобы $SB_1 = b_1, SB_2 = b_2, \dots, SB_n = b_n$. Поместим в каждую из точек $B_1, B_2, \dots, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_n$ массу, равную 1 единице. Тогда центр тяжести системы k материальных точек B_1, \dots, B_k будет удален от S на

$$SZ = \frac{b_1 + \dots + b_k}{k}.$$

Центр тяжести Z'' системы материальных точек B_{k+1}, \dots, B_n удален от S на

$$SZ'' = \frac{b_{k+1} + \dots + b_n}{n - k}.$$

Так как $SB_1 < SB_2 < \dots < SB_k < SB_{k+1} < \dots < SB_n$, то $SZ < SZ''$.

Общий центр тяжести Z' всей системы расположен между ними, т. е. $SZ < SZ' < SZ''$, причем

$$SZ' = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{b_1 + \dots + b_k}{k} < \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} < \frac{b_{k+1} + \dots + b_n}{n - k}.$$

Замечание. Как видно из этих рассуждений, требование о положительности чисел b_1, b_2, \dots, b_n возможно было опустить.

7. Положим

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = M. \quad (1)$$

На произвольном луче OT (рис. 127, а) выберем n точек A_1, A_2, \dots, A_n так, чтобы $OA_1 = a_1, OA_2 = a_2, \dots, OA_n = a_n$.

В каждой из этих точек поместим массу $\frac{M}{n}$ (рис. 127, б).

Пусть Z — центр тяжести образовавшейся системы из n материальных точек $(A_1, \frac{M}{n}), (A_2, \frac{M}{n}), \dots, (A_n, \frac{M}{n})$. Тогда

$$OZ = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}. \quad (2)$$

Теперь будем перемещать вправо некоторые массы этой системы материальных точек.

1-й шаг. Ясно, что $\frac{M}{n} > b_1$. Оставим в A_1 массу b_1 , а остаток $(\frac{M}{n} - b_1)$ перенесем в A_2 (рис. 127, в). От этого центр тяжести системы переместится *вправо*.

2-й шаг. В результате первого шага общая масса первых двух материальных точек не изменилась (она осталась равной $\frac{2M}{n}$). В A_1 оставим по-прежнему массу b_1 ; в A_2 оставим

массу b_2 (рис. 127, ε), а остаток массы $\left(\frac{2M}{n} - (b_1 + b_2)\right)$ перенесем в A_3 . Это возможно сделать, так как в силу предыдущей задачи (при $k=2$)

$$\frac{2M}{n} - (b_1 + b_2) > 0.$$

В силу задачи 5 центр тяжести системы сместился *вправо*.

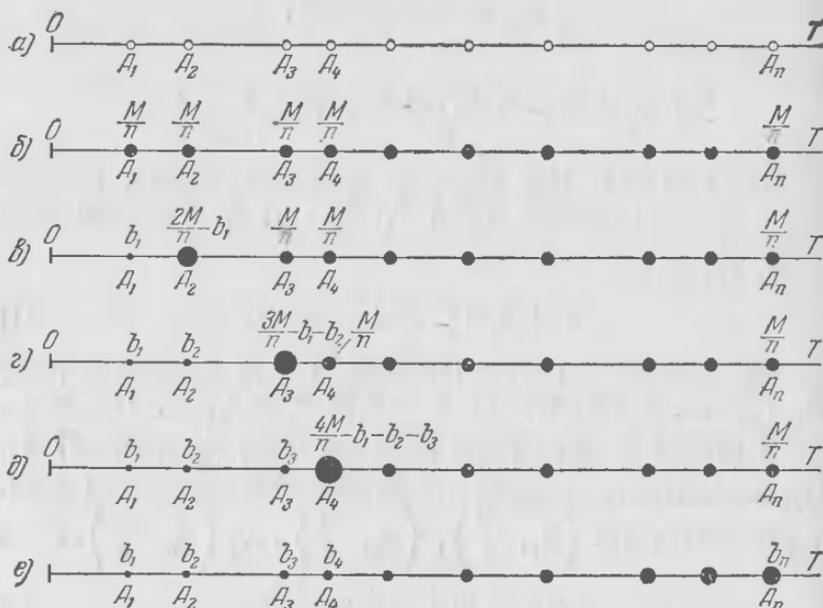


Рис. 127.

3-й шаг. Общая масса первых *трех* материальных точек не изменилась (она осталась равной $\frac{3M}{n}$). Оставим по-прежнему в A_1 и A_2 соответственно массы b_1 и b_2 ; в A_3 оставим массу b_3 (рис. 127, δ), а остаток $\frac{3M}{n} - (b_1 + b_2 + b_3)$ (который в силу задачи 6 положителен) перенесем в A_4 . От этого центр тяжести системы сдвинется *вправо*.

Аналогичные операции переноса масс сделаем всего $n - 1$ раз; при этом каждый раз центр тяжести системы будет пере-

мещаться вправо. После $n - 1$ шагов получим систему из n материальных точек $(A_1, b_1), (A_2, b_2), \dots, (A_n, b_n)$ (рис. 127, е), причем ее центр тяжести Z' расположен *правее* точки Z :

$$OZ' > OZ. \quad (3)$$

Но в силу задачи 2

$$OZ' = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{M}. \quad (4)$$

Из (1) — (4) вытекает доказываемое неравенство.

З а м е ч а н и е. Доказанное неравенство возможно уточнить таким образом: Если

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n, \quad (5)$$

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n, \quad (6)$$

$$a_1 > 0, b_1 > 0, \quad (7)$$

то

$$\begin{aligned} n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) &\geq \\ &\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n), \end{aligned}$$

причем строгое равенство имеет место тогда и только тогда, когда в соотношениях (5) и (6) имеют место строгие равенства.

Другое решение. Положим $b_1 + b_2 + \dots + b_n = M$. На произвольном луче OT , так же как и в первом решении, выберем n точек A_1, \dots, A_n ($OA_1 = a_1, OA_2 = a_2, \dots, OA_n = a_n$). Тогда для центра тяжести n материальных точек $(A_1, \frac{M}{n}), \dots, \dots, (A_n, \frac{M}{n})$ будем иметь

$$OZ = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Затем в этих же точках A_1, A_2, \dots, A_n поместим соответственно массы b_1, b_2, \dots, b_n . В этом случае для центра тяжести Z' системы материальных точек $(A_1, b_1), \dots, (A_n, b_n)$ будем иметь

$$OZ' = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{M}.$$

Так как $b_1 < \frac{M}{n} < b_n$, то предположим, что $b_1 < \frac{M}{n} \leq b_{i+1}$. Следовательно, при новой загрузке в точках A_1, A_2, \dots, A_i

будут помещены массы b_1, b_2, \dots, b_i , меньшие, чем при равномерной загрузке, а в точках A_{i+1}, \dots, A_n — большие, чем при равномерной загрузке. Таким образом при переходе от равномерной загрузки к неравномерной часть массы из точек A_1, \dots, A_i перенесена от точки O дальше вправо, и поэтому центр тяжести при этом также сместится вправо, т. е. $OZ' > OZ$, откуда и вытекает доказываемое неравенство.

8. Пусть для определенности $a < b$. Пусть далее F (см. рис. 16) лежит на Z_1Z , E на Q_1Q , $PF \parallel ZE \parallel MN$. Так как $\triangle PFZ \sim \triangle ZEQ$, то

$$\frac{FZ}{EQ} = \frac{PZ}{QZ} = \frac{q}{p}.$$

Таким образом,

$$\frac{z-a}{b-z} = \frac{q}{p}.$$

Отсюда найдем

$$(p+q) \cdot z = p \cdot a + q \cdot b, \quad (1)$$

$$z = \frac{pa + qb}{p + q}. \quad (2)$$

Наши рассуждения неприменимы, когда $PQ \perp MN$ (рис. 128). Пусть $MN \times PQ \equiv S$. Тогда в силу задачи 1 $z = SZ = \frac{pa + qb}{p + q}$.

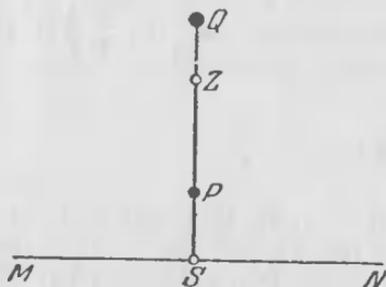


Рис. 128.

Предыдущие рассуждения неприменимы также, если $a = b$. Но тогда ясно, что $z = a$, так что формула (2) опять остается в силе.

Таким образом, последняя формула пригодна во всех случаях, предусмотренных условием задачи.

9. Пусть Z — центр тяжести системы из двух материальных точек $P \equiv (P, p)$ и $Q \equiv (Q, q)$; пусть, далее, $Z \equiv (Z, p + q)$ — их объединение. Тогда равенство (1) предыдущей задачи можно переписать так:

$$\text{Мом}_S Z = \text{Мом}_S P + \text{Мом}_S Q.$$

10. Три материальные точки $A_1 \equiv (A_1, m_1)$, $A_2 \equiv (A_2, m_2)$ и $A_3 \equiv (A_3, m_3)$ (рис. 129) лежат в одной плоскости с некоторой прямой MN , и притом по одну и ту же сторону от этой прямой. Их расстояния от прямой MN равны соответственно y_1, y_2, y_3 . Требуется найти расстояние z их центра тяжести от прямой MN .

Обозначим через B центр тяжести материальных точек A_1 и A_2 и через b — его расстояние от прямой MN . Пусть $B = (B, m_1 + m_2)$, $Z = (Z, m_1 + m_2 + m_3)$. В силу решения задачи 8

$$(m_1 + m_2)b = m_1y_1 + m_2y_2.$$

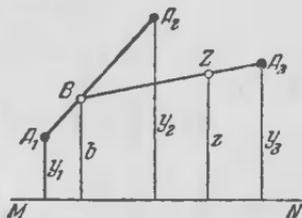


Рис. 129.

Применим решение задачи 8 к другой паре материальных точек B и A_3 .

Получим $(m_1 + m_2 + m_3)z = (m_1 + m_2)b + m_3y_3$. Сложив последние два равенства почленно, получим

$$(m_1 + m_2 + m_3)z = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3,$$

$$z = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

11. Пусть n материальных точек $A_1 \equiv (A_1, m_1)$, $A_2 \equiv (A_2, m_2), \dots, A_n \equiv (A_n, m_n)$ расположены в одной плоскости по одну и ту же сторону от некоторой прямой s . Пусть их расстояния от прямой s равны соответственно y_1, y_2, \dots, y_n . Требуется найти расстояние z центра тяжести Z этой системы от прямой s .

Введем такие обозначения:

Через B_2 обозначим объединение материальных точек A_1 и A_2 ;

через B_3 обозначим объединение материальных точек B_2 и A_3 ;

.....

через B_{n-1} обозначим объединение материальных точек B_{n-2} и A_{n-1} ;

через Z обозначим объединение материальных точек B_{n-1} и A_n .

Тогда, в силу решения задачи 9,

$$\begin{aligned} \text{Мом}_s B_2 &= \text{Мом}_s A_1 + \text{Мом}_s A_2, \\ \text{Мом}_s B_3 &= \text{Мом}_s B_2 + \text{Мом}_s A_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \text{Мом}_s B_{n-1} &= \text{Мом}_s B_{n-2} + \text{Мом}_s A_{n-1}, \\ \text{Мом}_s Z &= \text{Мом}_s B_{n-1} + \text{Мом}_s A_n. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства почленно, мы после упрощений получим

$$\text{Мом}_s Z = \text{Мом}_s A_1 + \text{Мом}_s A_2 + \dots + \text{Мом}_s A_n \quad (1)$$

или

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n)z = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n.$$

Отсюда

$$z = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (2)$$

Формула (1) показывает, что момент системы из n материальных точек, лежащих в одной плоскости и по одну сторону от некоторой прямой, относительно этой прямой равен моменту их объединения относительно той же прямой.

12. На сторонах одного из углов, смежных к углу $A'_1 O A'_2$, отложим от точки O отрезки OA_1 и OA_2 такие, что $OA_1 = k_1$ (т. е. длина отрезка OA_1 равна k_1 единицам) и $OA_2 = k_2$ (рис. 130). Из точек A_1 и A_2 опустим перпендикуляры $A_1 C_1$ и $A_2 C_2$ на прямую OP . Ясно, что $\triangle POB_1 \sim \triangle A_1 OC_1$. Поэтому

$$\frac{OA_1}{OP} = \frac{A_1 C_1}{PB_1},$$

или

$$OA_1 \cdot PB_1 = OP \cdot A_1 C_1,$$

т. е.

$$k_1 PB_1 = OP \cdot A_1 C_1.$$

Аналогично можно показать, что

$$k_2 PB_2 = OP \cdot A_2 C_2.$$

Складывая последние равенства почленно, получим, что

$$k_1 \cdot PB_1 + k_2 \cdot PB_2 = OP (A_1 C_1 + A_2 C_2).$$

Обозначим через Z центр тяжести материальных точек $(A_1, 1)$ и $(A_2, 1)$ (иначе говоря, середину отрезка A_1A_2). Пусть T — проекция точки Z на прямую OP .

Тогда, понятно,

$$A_1C_1 + A_2C_2 = 2ZT,$$

так что

$$k_1PB_1 + k_2PB_2 = 2OP \cdot ZT.$$

Опустим из P перпендикуляр PQ на OZ . Тогда $\triangle OQP \sim \triangle OTZ$. Поэтому

$$\frac{PQ}{OP} = \frac{ZT}{OZ},$$

т. е.

$$OP \cdot ZT = PQ \cdot OZ,$$

или

$$k_1PB_1 + k_2PB_2 = 2PQ \cdot OZ,$$

$$PQ = \frac{k_1 \cdot PB_1 + k_2 \cdot PB_2}{2OZ}.$$

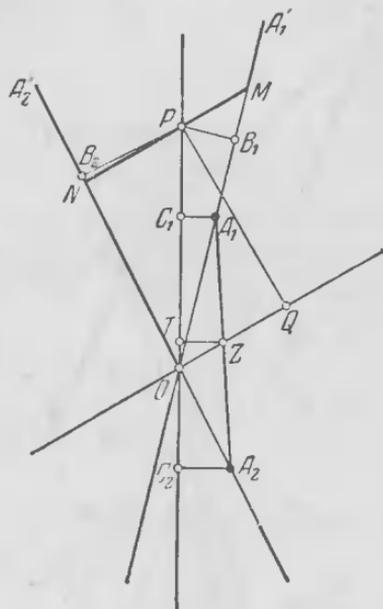


Рис. 130.

Отсюда видно, что $k_1 \cdot PB_1 + k_2 \cdot PB_2$ будет тогда и только тогда равно d , когда $PQ = \frac{d}{2OZ}$, т. е. когда точка P (лежащая внутри угла $A_1'OA_2'$) лежит на прямой, параллельной прямой OZ и отстоящей от нее на расстоянии в $\frac{d}{2OZ}$ единиц.

Отсюда ясно, что отрезок MN этой прямой, лежащий внутри угла $A_1'OA_2'$, и есть искомое геометрическое место точек.

13. Выберем один из двух углов, смежных к углу $A_1'OA_2'$. В качестве такого возьмем, например, ту часть плоскости, которая лежит справа от двух заштрихованных вертикальных углов (рис. 131). На лучах прямых a_1, a_2, \dots, a_n , лежащих в этом угле, выберем точки A_1, A_2, \dots, A_n так, чтобы $OA_1 = k_1, OA_2 = k_2, \dots, OA_n = k_n$. Из этих точек опустим перпендикуляры $A_1C_1, A_2C_2, \dots, A_nC_n$ на OP . Через Z обо-

значим теперь центр тяжести n материальных точек $(A_1, 1)$, $(A_2, 1)$, ..., $(A_n, 1)$, а через T — проекцию точки Z на OP , через Q — проекцию точки P на OZ . Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, найдем

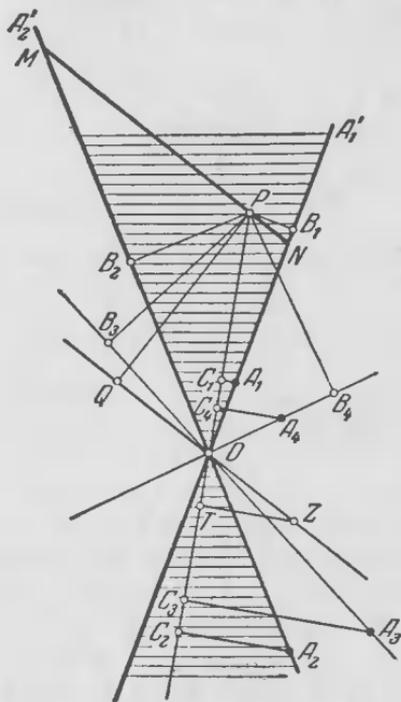


Рис. 131.

$$k_1PB_1 + k_2PB_2 + \dots \\ \dots + k_nPB_n = OP(A_1C_1 + \\ + A_2C_2 + \dots + A_nC_n).$$

Но в силу задачи 11

$$ZT = \frac{A_1C_1 + A_2C_2 + \dots + A_nC_n}{n}.$$

Поэтому

$$k_1PB_1 + k_2PB_2 + \dots \\ \dots + k_nPB_n = n \cdot OP \cdot ZT.$$

Проволя дальше рассуждения так же, как при решении предыдущей задачи, найдем:

$$OP \cdot ZT = PQ \cdot OZ.$$

Поэтому:

$$PQ = \frac{k_1PB_1 + k_2PB_2 + \dots + k_nPB_n}{n \cdot OZ}.$$

Отсюда следует, что искомое геометрическое место точек — отрезок прямой, отстоящей от прямой OZ на расстоянии $\frac{d}{n \cdot OZ}$ (отрезок MN на рис. 131).

14. Доказательство при $n=2$ такое же, как при решении задачи 8. Для любого $n > 2$ доказательство в основном такое же, как при решении задачи 11. Заметим, что если под Z понимать объединение всех материальных точек системы (т. е. материальную точку $(Z, m_1 + m_2 + \dots + m_n)$), то доказываемую формулу можно записать так:

$$\text{Мом}_\alpha Z = \text{Мом}_\alpha A_1 + \text{Мом}_\alpha A_2 + \dots + \text{Мом}_\alpha A_n.$$

15. Рассмотрим на линии

$$y = \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

n точек

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$$

так, что (рис. 132)

$$y_1 = \sin x_1, \quad y_2 = \sin x_2, \quad \dots, \quad y_n = \sin x_n.$$

Поместим в каждой из этих точек массу в одну единицу. Пусть точка Z с координатами (x_0, y_0) — центр тяжести образовавшихся n материальных точек. Тогда (см. формулы (8) — (9) § 2)

$$x_0 = OX = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$y_0 = XZ = \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n}.$$

Если прямая XZ встречается дугу OS синусоиды в точке P , а хорду OS — в точке Q , то (см. формулу (10) § 2)

$$XQ < y_0 < XP.$$

Найдем уравнение прямой OS . Так как она проходит через начало координат, то уравнение имеет вид: $y = kx$. Так как она проходит через точку S с координатами $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, то $y = 1$ при

$x = \frac{\pi}{2}$, поэтому $1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $k = \frac{2}{\pi}$ и уравнение прямой OS таково:

$$y = \frac{2}{\pi} x.$$

При $x = x_0$ получим $y = \frac{2}{\pi} x_0$, т. е. $XQ = \frac{2}{\pi} x_0$. Так как точка P — на синусоиде, то $XP = \sin x_0$. Итак,

$$\frac{2}{\pi} x_0 < y_0 < \sin x_0,$$

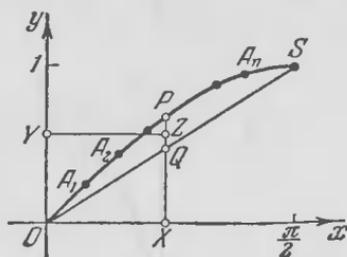


Рис. 132.

или, подробнее,

$$\frac{2}{\pi} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n} < \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Если бы мы в точках A_1, A_2, \dots, A_n поместили массы m_1, m_2, \dots, m_n (m_1, \dots, m_n — произвольные положительные числа), то получили бы неравенства:

$$\frac{2}{\pi} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} < \frac{m_1 \sin x_1 + m_2 \sin x_2 + \dots + m_n \sin x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} < \sin \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

16. Ограничимся сначала случаем, когда каждое из чисел x_1, x_2, \dots, x_n больше, чем 1.

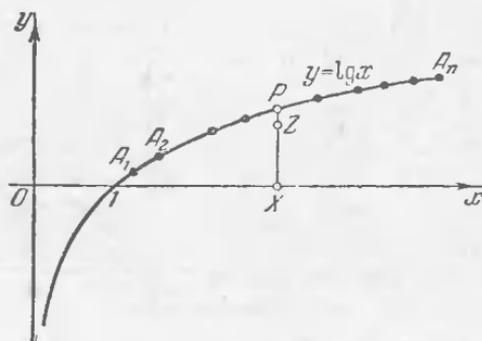


Рис. 133.

Рассмотрим точки A_1, A_2, \dots, A_n , лежащие на кривой $y = \lg x$ и имеющие абсциссы x_1, x_2, \dots, x_n (рис. 133). Тогда их ординаты равны:

$$y_1 = \lg x_1, y_2 = \lg x_2, \dots, y_n = \lg x_n.$$

Поместим теперь в каждой из точек A_1, A_2, \dots, A_n массу, равную 1 единице. Обозначим через Z центр тяжести n материальных точек $(A_1, 1), (A_2, 1), \dots, (A_n, 1)$, а его координаты

наты — через (x_0, y_0) . Тогда, в силу формул (8) — (11) § 2,

$$x_0 = OX = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$y_0 = XZ = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n}{n},$$

$$y_0 < XP.$$

Но XP — ордината точки, лежащей на кривой $y = \lg x$ и имеющей абсциссу x_0 . Поэтому

$$XP = \lg x_0 = \lg \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Итак,

$$\frac{\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n}{n} < \lg \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные положительные числа, причем некоторые из них *меньше*, чем 1.

Тогда возможно подобрать настолько большое число k , чтобы числа $x'_1 = kx_1, x'_2 = kx_2, \dots, x'_n = kx_n$ были все больше, чем 1. Но тогда

$$\frac{\lg x'_1 + \lg x'_2 + \dots + \lg x'_n}{n} < \lg \frac{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n}{n},$$

т. е.

$$\frac{(\lg k + \lg x_1) + (\lg k + \lg x_2) + \dots + (\lg k + \lg x_n)}{n} <$$

$$< \lg k + \lg \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Отсюда

$$\frac{\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n}{n} < \lg \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1)$$

Последнее неравенство можно переписать так:

$$\lg (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} < \lg \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

а отсюда и следует неравенство Коши:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (2)$$

Таким образом, формулы (1) и (2) верны для любых положительных не равных между собой чисел x_1, x_2, \dots, x_n .

Если бы мы поместили в точках A_1, A_2, \dots, A_n произвольные (положительные) массы m_1, m_2, \dots, m_n ($m_1 + m_2 + \dots + m_n = M$), то мы, рассуждая примерно так же, как и раньше, получили бы вместо неравенства (1) такое соотношение:

$$\frac{m_1 \cdot \lg x_1 + m_2 \lg x_2 + \dots + m_n \lg x_n}{M} < \lg \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}.$$

Отсюда, потенцируя, выведем обобщенное неравенство Коши:

$$(x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_n^{m_n})^{\frac{1}{M}} < \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}.$$

Если рассмотреть выпуклую фигуру (рис. 134), ограниченную линией $y = \lg x$ ($1 \leq x \leq a$) и хордой, соединяющей

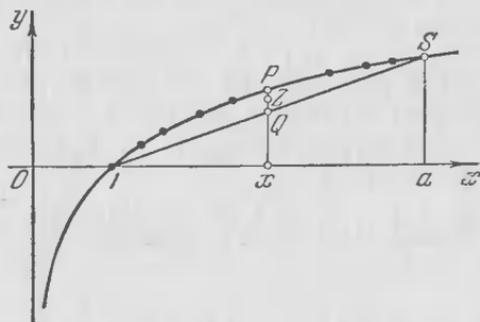


Рис. 134.

точки $(1, 0)$ и $(a, \lg a)$, то можно было бы (рассуждая, как при решении задачи 15) доказать такое предложение:

Если $1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq a$, то

$$\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n}{n(a-1)} \lg a < \frac{\lg x_1 + \lg x_2 + \dots + \lg x_n}{n}.$$

Отсюда

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} > a \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n}{n(a-1)}.$$

Последнее неравенство дополняет, в известном смысле, неравенство Коши.

17. Пусть (рис. 135) A_1, A_2, \dots, A_n — точки параболы с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n , и пусть точка Z с координатами

тами (x_0, y_0) — центр тяжести материальных точек (A_1, m_1) , $(A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$. Обозначим через X — проекцию точки Z на ось абсцисс, а через Q — точку встречи прямой XZ с параболой. Тогда $XQ < XZ$.

Но (см. формулы (8) и (9) на стр. 31)

$$XZ = y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{M} = \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2}{M},$$

$$XQ = x_0^2 = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} \right)^2,$$

поэтому

$$\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} \right)^2 < \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2}{M},$$

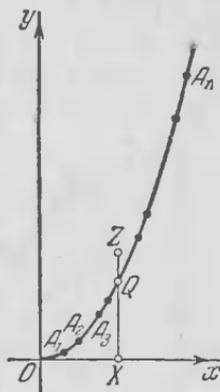


Рис. 135.

что и требовалось доказать. При $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$ получим

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

Выбирая точки на линии $y = x^k$, можно аналогично доказать, что при любом $k > 1$ и любых положительных числах $x_1, x_2, \dots, x_n, m_1, m_2, \dots, m_n$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{m_1 x_1^k + m_2 x_2^k + \dots + m_n x_n^k}{M} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}$$

(равенство будет только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$). При $0 < k < 1$ знак неравенства « \geq » нужно заменить на « \leq ».

18. Уравнение дуги AmB таково:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Уравнение прямой AB :

$$y = 1 - x.$$

Возьмем на дуге AB n точек A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 136) с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n . Их ординаты таковы:

$$y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}, \quad y_2 = \sqrt{1 - x_2^2}, \quad \dots, \quad y_n = \sqrt{1 - x_n^2}.$$

Пусть точка Z с координатами (x_0, y_0) — центр тяжести материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$, X — проекция точки Z на ось абсцисс, Q и P — точки встречи прямой XZ с хордой AB и дугой AB . Тогда

$$XQ < XZ < XP,$$

т. е.

$$1 - x_0 < y_0 < \sqrt{1 - x_0^2}.$$

Но

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{M},$$

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}.$$

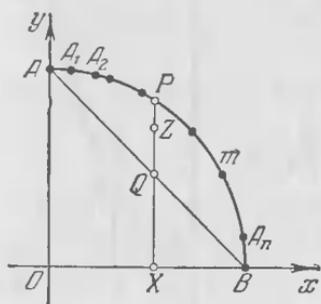


Рис. 136.

Поэтому

$$\begin{aligned} 1 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} &< \\ &< \frac{m_1 \sqrt{1 - x_1^2} + m_2 \sqrt{1 - x_2^2} + \dots + m_n \sqrt{1 - x_n^2}}{M} < \\ &< \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} \right)^2}. \end{aligned}$$

19. Выберем на графике точки A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 137) с абсциссами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Их ординаты y_1, y_2, \dots, y_n равны соответственно:

$$y_1 = -\lg \sin \alpha_1, \quad y_2 = -\lg \sin \alpha_2, \quad \dots, \quad y_n = -\lg \sin \alpha_n.$$

Пусть точка Z с координатами (x_0, y_0) — центр тяжести материальных точек $(A_1, 1), (A_2, 1), \dots, (A_n, 1)$; X — проекция точки Z на ось абсцисс, Q — точка встречи прямой XZ с графиком. Тогда

$$XQ < XZ,$$

т. е.

$$-\lg \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} < \frac{-\lg \sin \alpha_1 - \lg \sin \alpha_2 - \dots - \lg \sin \alpha_n}{n},$$

откуда после упрощений получим доказываемое неравенство.

20. Выберем на дуге AmB n точек A_1, A_2, \dots, A_n с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n и ординатами $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$. Пусть точка Z с координатами (x_0, y_0) — центр тяжести n материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$; P — точка пересечения прямой XZ с дугой AmB . Тогда $XP = f(x_0)$ и в силу формул (11) и (8) (см. стр. 31)

$$\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n)}{M} < \\ < f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M}\right).$$

21. Пусть S — центр тяжести материальных точек $(B, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3) , T — центр тяжести материальных точек $(C, m_2 + m_3)$

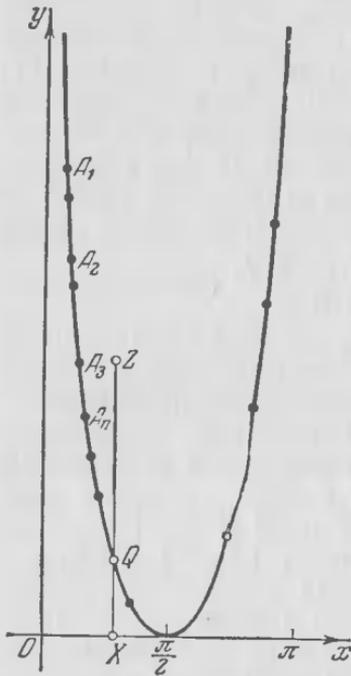


Рис. 137.

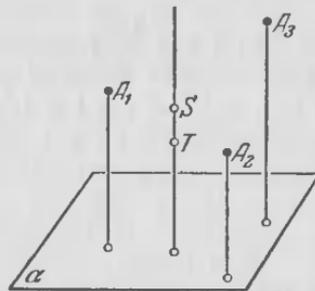


Рис. 138.

и (A_1, m_1) , и пусть $S \neq T$. Рассмотрим тогда прямую ST . Среди плоскостей, перпендикулярных к ST , возьмем такую плоскость α , чтобы точки A_1, A_2, A_3, S, T лежали по одну сторону от нее (рис. 138). Обозначим расстояния этих пяти точек от плоскости α соответственно через y_1, y_2, y_3, s, t . Тогда, в силу решения задачи 14,

$$s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad t = \frac{m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_1 y_1}{m_1 + m_2 + m_3},$$

т. е. $s = t$, что в данном случае возможно лишь, если $S \equiv T$. Значит, допущение, что $S \neq T$, неверно.

Аналогично можно было бы показать, что центр тяжести точек $(D, m_2 + m_1)$ и (A_2, m_2) тоже совпадает с S . Тем самым теорема доказана.

22. Пусть имеется n материальных точек (A_1, m_1) , $(A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$. Пусть, объединяя их последовательно в порядке возрастания номеров, мы получили в качестве центра тяжести точку S , а объединяя их в каком-то ином порядке, мы получили другую точку T . Докажем, что $S \equiv T$. Допустим, что $S \not\equiv T$. Среди плоскостей, перпендикулярных к прямой ST , выберем такую плоскость α , что все точки $A_1, A_2, \dots, A_n, S, T$ расположены по одной стороне от нее. Обозначим расстояния этих точек от плоскости α через $y_1, y_2, \dots, y_n, s, t$. Тогда, в силу задачи 14, расстояние s равно

$$s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

а расстояние t мы можем получить из этой формулы путем некоторого изменения порядка слагаемых в числителе и знаменателе. Но от этого, понятно, величина дроби не изменяется.

Поэтому $t = s$ и, следовательно, $T \equiv S$.

23. Обозначим через B центр тяжести трех материальных точек (A_2, m_2) , (A_3, m_3) и (A_5, m_5) , а через T — центр тяжести объединения этих материальных точек $(B, m_2 + m_3 + m_5)$ и оставшихся двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_4, m_4) . Пусть S — центр тяжести всех пяти данных материальных точек, объединенных последовательно в порядке возрастания номеров. Нам нужно доказать, что $T \equiv S$. Рассуждение проводим так же, как при рассмотрении предыдущей задачи.

Пусть $T \not\equiv S$. Выберем плоскость α , перпендикулярную к TS и оставляющую все точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B, S, T$ по одну сторону от себя. Обозначим расстояния этих точек от плоскости α соответственно через $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, b, s, t$. В силу задачи 14

$$s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4 + m_5 y_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5},$$

$$b = \frac{m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_5 y_5}{m_2 + m_3 + m_5},$$

$$t = \frac{(m_2 + m_3 + m_5) b + m_1 y_1 + m_4 y_4}{(m_2 + m_3 + m_5) + m_1 + m_4} =$$

$$= \frac{(m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_5 y_5) + m_1 y_1 + m_4 y_4}{m_2 + m_3 + m_5 + m_1 + m_4}.$$

Но тогда $t \equiv s$, и так как точки T и S расположены на одном перпендикуляре к плоскости α и по одну сторону от нее, то $T \equiv S$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Другое решение. Положение центра тяжести S пяти материальных точек не зависит от порядка, в котором последовательно объединим эти точки. Так будем их объединять в таком порядке:

$$(A_2, m_2), (A_3, m_3), (A_5, m_5), (A_1, m_1), (A_4, m_4).$$

Но, объединив первые три точки, получим точку $(B_2, m_2 + m_3 + m_5)$. Таким образом, центр тяжести системы из данных пяти материальных точек совпадает с центром тяжести таких трех материальных точек: $(B, m_2 + m_3 + m_5)$, (A_1, m_1) , (A_4, m_4) , т. е. с точкой T . Итак, $T \equiv S$, что и требовалось доказать.

§ 3

1. В самом деле, пусть условие Чевы выполняется. Тогда подберем в B произвольную массу $m_2 \neq 0$, а в A и C массы m_1 и m_3 так, чтобы выполнялись условия (13) и (14) § 3, т. е.

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (13')$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{m_2}{m_3}. \quad (14')$$

Это, очевидно, всегда возможно. Из (12) (условие Чевы), (13') и (14') следует, что

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{m_1}{m_3}. \quad (15')$$

А это как раз и означает (в силу «правила рычага»), что

$$Z[(C, m_3), (A, m_1)] \equiv B_1. \quad (15)$$

Обратно, пусть возможно подобрать три массы так, чтобы выполнялись условия (13) — (15) или, что то же, условия (13') — (15'). Перемножив (13'), (14'), (15') почленно, получим (12), что и требовалось доказать.

2. Достаточность. Пусть (12) выполняется. Тогда можно подобрать три массы m_1, m_2, m_3 так, чтобы выполнялись

равенства (13) — (15) § 3. Обозначим через O центр тяжести системы точек (A, m_1) , (B, m_2) , (C, m_3) . Положение центра тяжести O не изменится, если заменим точки (A, m_1) и (B, m_2) их объединением $(C_1, m_1 + m_2)$. Отсюда видно, что O — на отрезке CC_1 . Аналогично можно показать, что O — на AA_1 и BB_1 , т. е. AA_1 , BB_1 и CC_1 проходят через одну точку (через O).

Необходимость. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 проходят через общую точку O . Покажем, что возможно выбрать три массы m_1 , m_2 и m_3 так, чтобы выполнялись условия (13) — (15) § 3. Для этой цели в B подберем массу m_2 произвольно, а в A и C подберем массы m_1 и m_3 так, чтобы выполнялись условия (13) — (14) § 3, или, что то же, (13') и (14') из решения задачи 1. Ясно, что центр тяжести системы трех материальных точек (A, m_1) , (B, m_2) , (C, m_3) должен лежать на прямых AA_1 и CC_1 , т. е. это точка O . С другой стороны, O , B и $Z[(A, m_1), (C, m_3)]$ — на одной прямой, т. е. $Z[(A, m_1), (C, m_3)]$ лежит на прямой BO , а также и на AC , так что $Z[(A, m_1), (C, m_3)] \equiv B_1$. Итак, условия (13) — (15) § 3 выполняются, а следовательно, и условие Чевы (12).

3. Если AA_1 , BB_1 и CC_1 — медианы, то $\frac{AC_1}{C_1B} = 1$,

$\frac{BA_1}{A_1C} = 1$, $\frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Отсюда следует, что выполняется условие Чевы.

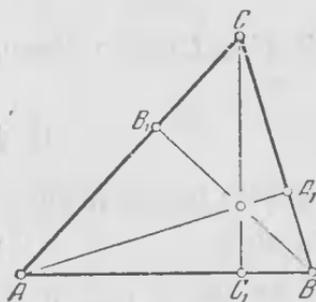


Рис. 139.

4. Если AA_1 , BB_1 , CC_1 — биссектрисы $\triangle ABC$, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a},$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b},$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c},$$

так что $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

5. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — три высоты треугольника ABC (рис. 139). Так как $\triangle AC_1C \sim$

$\sim \triangle AB_1B$, то $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC}$.

Аналогично $\frac{CA_1}{CB_1} = \frac{CA}{CB}$, $\frac{BC_1}{BA_1} = \frac{BC}{BA}$. Умножая эти три равенства почленно, получим

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

В силу задачи 2, высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 имеют общую точку.

6. Пусть A_1 , B_1 , C_1 (рис. 140) — точки касания сторон $\triangle ABC$ и вписанной окружности. Тогда $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$, $CA_1 = CB_1$, и поэтому

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1. \quad \text{Дальше}$$

применяем теорему Чевы.

7. Как мы видели при доказательстве теоремы Чевы (необходимость), можно поместить в вершинах A , B , C массы m_1 , m_2 , m_3 так, чтобы выполнялись условия (13) — (15).

При этом O оказывается центром тяжести материальных точек (A, m_1) , (B, m_2) , (C, m_3) . Заменим точки (A, m_1) и (B, m_2) их объединением $(C_1, m_1 + m_2)$. Тогда по «правилу рычага»

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{m_1 + m_2}{m_3} = \frac{m_1}{m_3} + \frac{m_2}{m_3}.$$

Применяя затем «правило рычага» к точкам (A, m_1) и (C, m_3) , (B, m_2) и (C, m_3) , найдем

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{CB_1}{B_1A}, \quad \frac{m_2}{m_3} = \frac{CA_1}{A_1B}.$$

Следовательно,

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CB_1}{B_1A} + \frac{CA_1}{A_1B}.$$

8. Нагружаем вершины так же, как и в решении предыдущей задачи. Тогда

$$\frac{C_1O}{OC} = \frac{m_3}{m_1 + m_2}.$$

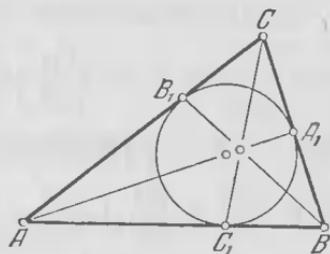


Рис. 140.

Иными словами, выполняются соотношения

$$\frac{A_1 A_{12}}{A_{12} A_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (1)$$

$$\frac{A_2 A_{23}}{A_{23} A_3} = \frac{m_3}{m_2}, \quad (2)$$

$$\frac{A_3 A_{34}}{A_{34} A_4} = \frac{m_4}{m_3}, \quad (3)$$

$$\frac{A_4 A_{41}}{A_{41} A_1} = \frac{m_1}{m_4}. \quad (4)$$

Перемножив эти четыре равенства почленно, получим равенство (16'). Обратное, пусть выполняется равенство (16'). Мы всегда можем подобрать числа m_1, m_2, m_3, m_4 так, чтобы выполнялись равенства (1) — (3). Но тогда из (16') и (1) — (3) вытекает, что

$$\frac{A_4 A_{41}}{A_{41} A_1} = \frac{m_1}{m_4}, \text{ т. е. } A_{41} \equiv Z[(A_4, m_4), (A_1, m_1)],$$

что и требовалось доказать.

11. Пусть условие (18) § 3 выполняется. Тогда в силу решения предыдущей задачи можно подобрать четыре массы m_1, m_2, m_3, m_4 так, чтобы выполнялись условия (1) — (4) этого решения.

Обозначим через O центр тяжести четырех материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), (A_4, m_4)$. Мы можем заменить две материальные точки (A_1, m_1) и (A_2, m_2) их объединением $(A_{12}, m_1 + m_2)$, а две другие материальные точки (A_3, m_3) и (A_4, m_4) — их объединением $(A_{34}, m_3 + m_4)$.

Отсюда видно, что O находится на отрезке $A_{12}A_{34}$. Аналогично покажем, что O — на $A_{23}A_{41}$. Следовательно, $A_{12}A_{34}$ и $A_{23}A_{41}$ пересекаются (в точке O).

Обратно, пусть отрезки $A_{12}A_{34}$ и $A_{23}A_{41}$ имеют общую точку O . Покажем, что тогда возможно подобрать четыре массы так, чтобы выполнялись четыре условия (1) — (4) решения предыдущей задачи.

В A_1 поместим любую массу m_1 . Подберем затем массы m_2, m_3 и m_4 так, чтобы выполнялись условия (1) — (3) предыдущей задачи. Этими условиями массы m_2, m_3, m_4 определяются однозначно. Покажем, что $Z[(A_4, m_4), (A_1, m_1)] \equiv A_{41}$. Обозначим через F (см. рис. 37) центр тяжести системы

четырёх материальных точек $(A_1, m_1), \dots, (A_4, m_4)$, а через D — центр тяжести материальных точек (A_4, m_4) и (A_1, m_1) . Тогда F лежит на $A_{12}A_{34}$ и на DA_{23} . Пусть D отлично от A_{41} . Тогда и F отлично от O . Следовательно, прямые A_1A_4 и $A_{12}A_{34}$ лежат в одной плоскости — в плоскости треугольника $A_{41}A_{23}D$. Но тогда прямые A_1A_2 и A_3A_4 лежат в одной (в той же) плоскости, так что четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ — *плоский*, вопреки условию теоремы. Итак, $A_{41} \equiv D$, т. е. $A_{41} \equiv Z[(A_4, m_4), (A_1, m_1)]$; условия (1) — (4) выполняются, а следовательно, выполняется и условие Чебы (18) § 3.

12. Из рассуждений при решении предыдущей задачи следует, что

$$\frac{A_{12}O}{OA_{31}} = \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2}.$$

По правилу рычага $m_2 = \lambda_{12}m_1$, $m_3 = \lambda_{23}m_2$, $m_4 = \lambda_{34}m_3$, $m_1 = \lambda_{41}m_4$. Поэтому

$$\frac{A_{12}O}{OA_{31}} = \frac{1 + \lambda_{34}}{(1 + \lambda_{12})\lambda_{31}\lambda_{34}}.$$

Аналогично можно найти $A_{23}O : OA_{41}$.

13. Пусть точкам P, Q, R, S соответствуют в пространстве точки P', Q', R', S' . Нити $P'R'$ и $Q'S'$ мыслятся в виде прямолинейных отрезков. Они будут пересекаться тогда и только тогда, когда

$$\frac{A'P'}{P'B'} \cdot \frac{B'Q'}{Q'C'} \cdot \frac{C'R'}{R'D'} \cdot \frac{D'S'}{S'A'} = 1.$$

Выразим отношение $\frac{A'P'}{P'B'}$ через отрезки, имеющиеся на чертеже. По условию отрезок AB получен из отрезка $A'B'$ с помощью проектирования параллельным пучком лучей. Из рис. 141 ясно, что

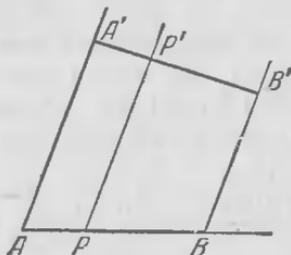


Рис. 141.

$$\frac{A'P'}{P'B'} = \frac{AP}{PB}.$$

Аналогично получим, что

$$\frac{B'Q'}{Q'C'} = \frac{BQ}{QC}, \quad \frac{C'R'}{R'D'} = \frac{CR}{RD}, \quad \frac{D'S'}{S'A'} = \frac{DS}{SA}.$$

Следовательно,

$$\frac{A'P' B'Q' C'R' D'S'}{P'B' Q'C' R'D' S'A'} = \frac{APBQ CRDS}{PBQC RDSA}.$$

Если правая часть равна 1, то отрезки $P'R'$ и $Q'S'$ пересекаются; в противном случае они не пересекаются.

Пример. Пусть на рисунке отрезки имеют такие длины:

$$AP=3, PB=6, BQ=2, QC=4, CR=1, RD=5, \\ DS=4, SA=6.$$

Рассмотренное произведение равно:

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{30} \neq 1.$$

Следовательно, в натуре отрезки $P'R'$ и $Q'S'$ не пересекаются.

14. Поместим в вершинах тетраэдра A_1, A_2, A_3 такие массы m_1, m_2, m_3 , чтобы их центром тяжести оказалась точка A'_1 (см. задачу 8 из § 1). Затем подберем в A_4 массу m_4 так, чтобы точка O была центром тяжести двух материальных точек: (A_4, m_4) и $(A'_1, m_1 + m_2 + m_3)$. Таким образом O будет центром тяжести системы из четырех материальных точек: $(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), (A_4, m_4)$. Но мы можем сгруппировать эти точки и иначе, например, можем поступить так: объединить в одну группу три точки: $(A_2, m_2), (A_3, m_3)$ и (A_4, m_4) . Тогда центр тяжести этих трех материальных точек должен лежать на одной прямой с точками O и A_1 . Кроме того, он лежит в плоскости грани $A_2A_3A_4$, следовательно, он совпадает с точкой A'_1 .

Объединим материальные точки $(A_2, m_2), (A_3, m_3)$ и (A_4, m_4) в их центр тяжести. Тогда система сведется к двум материальным точкам:

$$(A'_1, m_2 + m_3 + m_4) \text{ и } (A_1, m_1).$$

По правилу рычага

$$\frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{m_1}{m_2 + m_3 + m_4}.$$

Отсюда

$$\frac{OA'_1}{A_1A'_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$\frac{OA'_2}{A_2A'_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$\frac{OA'_3}{A_3A'_3} = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$\frac{OA'_4}{A_4A'_4} = \frac{m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$\frac{OA'_1}{A_1A'_1} + \frac{OA'_2}{A_2A'_2} + \frac{OA'_3}{A_3A'_3} + \frac{OA'_4}{A_4A'_4} = 1,$$

что и требовалось доказать.

$$15. \quad \frac{OA_1}{A_1A'_1} + \frac{OA_2}{A_2A'_2} + \frac{OA_3}{A_3A'_3} + \frac{OA_4}{A_4A'_4} =$$

$$= \left(1 - \frac{OA'_1}{A_1A'_1}\right) + \left(1 - \frac{OA'_2}{A_2A'_2}\right) + \left(1 - \frac{OA'_3}{A_3A'_3}\right) + \left(1 - \frac{OA'_4}{A_4A'_4}\right) =$$

$$= 4 - \left(\frac{OA'_1}{A_1A'_1} + \frac{OA'_2}{A_2A'_2} + \frac{OA'_3}{A_3A'_3} + \frac{OA'_4}{A_4A'_4}\right) = 4 - 1 = 3.$$

16. Заметим предварительно, что три плоскости $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$ и $A_3A_1A_4$ не могут иметь еще одной общей точки помимо O . Действительно, имея две общие точки, эти плоскости имели бы общую прямую, скажем a . В пересечении с плоскостью $A_1A_2A_3$ эти три плоскости дали бы три прямые, имеющие общую точку (а именно точку пересечения прямой a с плоскостью треугольника $A_1A_2A_3$), либо три параллельные прямые. Но в нашем случае ни то, ни другое не имеет места: прямые A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 не параллельны и не имеют общей точки. Следовательно, точка O — единственная общая точка плоскостей $A_1A_2A_4$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_1A_4$.

Поместим в A_4 произвольную массу m_4 и подберем затем массы m_1 , m_2 , m_3 в вершинах A_1 , A_2 , A_3 так, чтобы

$$Z[(A_1, m_1), (A_4, m_4)] \equiv A_{14}, \quad (1)$$

$$Z[(A_2, m_2), (A_4, m_4)] \equiv A_{24}, \quad (2)$$

$$Z[(A_3, m_3), (A_4, m_4)] \equiv A_{34}. \quad (3)$$

Понятно, что всю систему из четырех материальных точек можно заменить тремя материальными точками: $(A_{14}, m_1 + m_4)$, (A_2, m_2) , (A_3, m_3) . Следовательно, центр тяжести всей системы лежит во всяком случае в плоскости $A_{14}A_2A_3$. Аналогично покажем, что центр тяжести лежит в плоскостях $A_{24}A_1A_3$ и $A_{34}A_1A_2$. Следовательно, он является общей точкой этих плоскостей, т. е. совпадает с точкой O .

Центр тяжести трех материальных точек (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) лежит в плоскости $A_1A_2A_3$ и на одной прямой с точками O и A_4 , т. е. совпадает с A'_4 .

Всю систему из четырех материальных точек можно заменить двумя материальными точками,

$$(A'_4, m_1 + m_2 + m_3) \text{ и } (A_4, m_4).$$

По правилу рычага

$$\frac{A_4O}{OA'_4} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_4} = \frac{m_1}{m_4} + \frac{m_2}{m_4} + \frac{m_3}{m_4}.$$

Но в силу самого выбора масс m_1 , m_2 , m_3 (см. (1)–(3))

$$\frac{m_1}{m_4} = \frac{A_4A_{14}}{A_{14}A_1}, \quad \frac{m_2}{m_4} = \frac{A_4A_{24}}{A_{24}A_2}, \quad \frac{m_3}{m_4} = \frac{A_4A_{34}}{A_{34}A_3}.$$

Следовательно,

$$\frac{A_4O}{OA'_4} = \frac{A_4A_{14}}{A_{14}A_1} + \frac{A_4A_{24}}{A_{24}A_2} + \frac{A_4A_{34}}{A_{34}A_3},$$

что и требовалось доказать.

17. Пусть условие Чевы выполняется в каждой из боковых граней тетраэдра: $A_1A_4A_2$, $A_1A_4A_3$, $A_2A_4A_3$ (см. рис. 40). Это означает, что выполняются такие соотношения:

$$\frac{A_1A_{12}}{A_{12}A_2} \cdot \frac{A_2A_{24}}{A_{24}A_4} \cdot \frac{A_4A_{14}}{A_{14}A_1} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{A_1A_{13}}{A_{13}A_3} \cdot \frac{A_3A_{34}}{A_{34}A_4} \cdot \frac{A_4A_{14}}{A_{14}A_1} = 1, \quad (2)$$

$$\frac{A_2A_{23}}{A_{23}A_3} \cdot \frac{A_3A_{34}}{A_{34}A_4} \cdot \frac{A_4A_{24}}{A_{24}A_2} = 1. \quad (3)$$

Нужно доказать, что тогда три отрезка $A_{12}A_{34}$, $A_{23}A_{14}$ и $A_{13}A_{24}$ имеют общую точку. Поместим в A_4 произвольную массу m_4 , а в A_1 — массу m_1 такую, чтобы точка A_{14} была

центром тяжести двух материальных точек (A_4, m_4) и (A_1, m_1) . Аналогично подберем массы в A_2 и A_3 так, чтобы

$$Z[(A_4, m_4), (A_2, m_2)] \equiv A_{24}, \quad Z[(A_4, m_4), (A_3, m_3)] \equiv A_{34}.$$

Выполнение условия Чебы в треугольнике $A_1A_2A_4$ означает в силу теоремы Чебы, что три прямые A_1A_{24} , A_2A_{14} и A_4A_{12} имеют общую точку. Докажем, что центром тяжести двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) служит точка A_{12} . Обозначим через A'_3 центр тяжести трех материальных точек, помещенных в вершинах треугольника $A_1A_2A_4$. Ясно, что A'_3 — это и есть точка пересечения прямых A_2A_{14} и A_1A_{24} . Тогда центр тяжести материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) должен лежать на одной прямой с точками A_4 и A'_3 , т. е. он совпадает с точкой A_{12} . Итак,

$$Z[(A_1, m_1), (A_2, m_2)] \equiv A_{12}.$$

Аналогично покажем, что

$$\begin{aligned} Z[(A_2, m_2), (A_3, m_3)] &\equiv A_{23}, \\ Z[(A_1, m_1), (A_3, m_3)] &\equiv A_{13}. \end{aligned}$$

(Отсюда, между прочим, следует в силу задачи 1, что в грани $A_1A_2A_3$ также выполняется условие Чебы и прямые A_1A_{23} , A_2A_{13} , A_3A_{12} имеют общую точку A'_1 , которая будет центром тяжести материальных точек (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) .)

Обозначим через O центр тяжести системы из четырех материальных точек

$$(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), (A_4, m_4).$$

Мы можем заменить первые две из них их объединением $(A_{12}, m_1 + m_2)$, а последние две — их объединением $(A_{34}, m_3 + m_4)$. Теперь ясно, что O лежит на отрезке $A_{12}A_{34}$. Аналогично, группируя иначе данные четыре материальные точки, можно показать, что O лежит на отрезках $A_{13}A_{24}$ и $A_{23}A_{14}$, а это и доказывает теорему.

18. Каждая из шести плоскостей пересекает лишь одно ребро. Например, плоскость, проходящая через ребро A_3A_4 (см. рис. 40), пересекает ребро A_1A_2 в некоторой точке A_{12} . Аналогично у нас определятся пять других точек: A_{23} , A_{31} , A_{14} , A_{24} , A_{34} . В силу предыдущей задачи три отрезка $A_{12}A_{34}$, $A_{23}A_{14}$, $A_{31}A_{24}$ имеют некоторую общую точку O . Так как O

лежит на $A_{12}A_{34}$, то она также лежит в плоскостях $A_1A_2A_{34}$ и $A_{12}A_3A_4$. Аналогично можно показать, что O лежит и в остальных четырех рассматриваемых плоскостях.

19. Нагрузим вершины A_1, A_2, A_3, A_4 массами m_1, m_2, m_3, m_4 так же, как и при решении задачи 17. Тогда центр тяжести системы из этих четырех материальных точек должен одновременно лежать в таких плоскостях: $A_1A_2A_{34}, A_2A_3A_{14}, A_3A_1A_{24}$. Но эти плоскости имеют лишь *единственную* общую точку (см. решение задачи 16). С другой стороны, таковой является точка O . Следовательно, O и есть центр тяжести системы из четырех материальных точек

$$(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), (A_4, m_4).$$

Тогда O — центр тяжести таких трех материальных точек:

$$(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_{34}, m_3 + m_4).$$

Поэтому (см. задачу 2 § 1) центр тяжести двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) лежит на прямой $A_{34}O$. Следовательно, он совпадает с точкой A_{12} . Итак,

$$Z[(A_1, m_1), (A_2, m_2)] \equiv A_{12}.$$

Аналогично

$$Z[(A_2, m_2), (A_3, m_3)] \equiv A_{23},$$

$$Z[(A_3, m_3), (A_1, m_1)] \equiv A_{31}.$$

Поэтому в треугольнике $A_1A_2A_3$ в силу задачи 1 выполняется условие Чебы при опорах в точках A_{12}, A_{23}, A_{31} . Аналогично возможно доказать теорему и относительно любой другой грани тетраэдра.

§ 4

1. **Достаточность.** Пусть условие Менелая выполнено. Требуется доказать, что точки A_1, B_1, C_1 — на одной прямой.

Без потери общности можно полагать, что B_1 и C_1 лежат соответственно на *отрезках* AC и AB , а точка A_1 — на луге CB вне отрезка CB (см. рис. 41).

Подберем массы таким образом: в точке A поместим произвольную массу a , в C — такую массу c , чтобы

$Z[(A, a), (C, c)] \equiv B_1$; в A_1 — такую массу a_1 , чтобы $Z[(C, c), (A_1, a_1)] \equiv B$. Тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}, \quad \frac{CB}{BA_1} = \frac{a_1}{c}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{a_1 + c}{c}.$$

Но тогда в силу условия Менелая

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{a_1 + c}{c} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

$$(a_1 + c)BC_1 = a \cdot AC_1.$$

Отсюда в силу «правила рычага» следует, что C_1 — центр тяжести материальных точек (A, a) и $(B, c + a_1)$. Но тогда C_1 — центр тяжести системы из трех материальных точек: (A, a) , (C, c) и (A_1, a_1) . Точки (A, a) и (C, c) заменим их объединением $(B_1, a + c)$. Тогда вся система сводится к двум материальным точкам $(B_1, a + c)$ и (A_1, a_1) . Поэтому центр тяжести всей системы, т. е. точка C_1 , лежит на прямой A_1B_1 , что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть A_1, B_1, C_1 — на одной прямой. Нужно доказать, что выполняется условие Менелая. Выбирая нагрузки так же, как и при доказательстве достаточности, убеждаемся, как и раньше, что

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{a_1 + c}{c}.$$

Кроме того, центр тяжести системы из трех материальных точек (A, a) , (C, c) , (A_1, a_1) должен лежать на прямых B_1A_1 и BA , так что таковым является точка C_1 . Так как C_1 — центр тяжести материальных точек (A, a) и $(B, c + a_1)$, то

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{a}{c + a_1}.$$

Перемножая почленно полученные три равенства, получим условие Менелая.

Несколько видоизменив рассуждения, можно было бы доказать теорему Менелая и в том случае, когда все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника. Мы это опускаем, так как ниже дадим еще другое доказательство этой теоремы, охватывающее оба случая.

2. $\triangle PAC_1 \sim \triangle PCA_1$, ибо они прямоугольные и $\sphericalangle PCA_1 = \sphericalangle PAC_1$. Поэтому

$$\frac{CA_1}{C_1A} = \frac{PC}{PA}.$$

Аналогично можно доказать:

$$\frac{AB_1}{A_1B} = \frac{PA}{PB}, \quad \frac{BC_1}{B_1C} = \frac{PB}{PC}.$$

Поэтому

$$\frac{AB_1}{B_1C} \frac{CA_1}{A_1B} \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{CA_1}{C_1A} \frac{AB_1}{A_1B} \frac{BC_1}{B_1C} = \frac{PC}{PA} \frac{PA}{PB} \frac{PB}{PC} = 1.$$

Следовательно, в силу теоремы Менелая точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

3. Поместим в O произвольную массу p и подберем массы a_1 и a_2 в A_1 и A_2 так, чтобы

$$Z[(O, p), (A_1, a_1)] \equiv B_1, \quad Z[(O, p), (A_2, a_2)] \equiv B_2. \quad (1)$$

Тогда центром тяжести трех материальных точек (O, p) , (A_1, a_1) и (A_2, a_2) будет точка K .

Аналогично поместим произвольную массу q в точке O и подберем массы b_1 и b_2 в точках B_1 и B_2 так, чтобы

$$Z[(O, q), (B_1, b_1)] \equiv C_1, \quad Z[(O, q), (B_2, b_2)] \equiv C_2. \quad (2)$$

Тогда центром тяжести трех материальных точек (O, q) , (B_1, b_1) и (B_2, b_2) служит точка L .

Следовательно, при любых p и q центр тяжести S системы из шести рассмотренных материальных точек лежит на прямой KL .

Покажем, что можно для заданного p подобрать q так, чтобы центр тяжести S лежал одновременно на прямых A_2C_1 и A_1C_2 .

Это будет означать, что $S \equiv M$, т. е. M лежит на KL . Возможность такого подбора q следует из дальнейших выкладок. Подберем сначала q так, чтобы S лежал на A_2C_1 .

Для этого заменим материальную точку (B_2, b_2) двумя такими материальными точками (O, r_2) и (A_2, a_2) , чтобы их объединением служила точка (B_2, b_2) ; от этого положение

центра тяжести S не изменится. r_2 найдем из соотношения:

$$\frac{r_2}{B_2 A_2} = \frac{a'_2}{OB_2} = \frac{r_2 + a'_2}{OB_2 + B_2 A_2} = \frac{b_2}{OA_2}.$$

Отсюда

$$r_2 = \frac{B_2 A_2}{OA_2} b_2.$$

Но в силу (2)

$$q \cdot OC_2 = b_2 \cdot C_2 B_2.$$

Поэтому

$$r_2 = \frac{B_2 A_2}{OA_2} \frac{OC_2}{C_2 B_2} q. \quad (3)$$

Подберем теперь q так, чтобы центром тяжести точек (O, p) , (O, q) , (O, r_2) , (B_1, b_1) , (A_1, a_1) служила точка C_1 ; тогда центр тяжести всей системы будет на $A_2 C_1$.

Нужно, чтобы выполнялось равенство

$$(p + q + r_2) OC_1 = b_1 \cdot C_1 B_1 + a_1 \cdot C_1 A_1.$$

Но b_1 связано с q такой зависимостью: $q \cdot OC_1 = b_1 \cdot C_1 B_1$ (см. (2)). Поэтому должно выполняться равенство

$$p + r_2 = a_1 \frac{C_1 A_1}{OC_1}.$$

Но в силу (1)

$$a_1 \cdot B_1 A_1 = p \cdot OB_1.$$

Поэтому

$$p + r_2 = p \cdot \frac{OB_1}{B_1 A_1} \cdot \frac{C_1 A_1}{OC_1}.$$

После преобразования, учитывая тождество¹⁾

$$OB_1 \cdot C_1 A_1 - OC_1 \cdot B_1 A_1 = OA_1 \cdot B_1 C_1,$$

¹⁾ $OB_1 \cdot C_1 A_1 - OC_1 \cdot B_1 A_1 = OB_1 (C_1 B_1 + B_1 A_1) - OC_1 \cdot B_1 A_1 =$
 $= OB_1 \cdot C_1 B_1 + OB_1 \cdot B_1 A_1 - OC_1 \cdot B_1 A_1 =$
 $= OB_1 \cdot C_1 B_1 + (OB_1 - OC_1) \cdot B_1 A_1 = OB_1 \cdot C_1 B_1 + C_1 B_1 \cdot B_1 A_1 =$
 $= (OB_1 + B_1 A_1) \cdot B_1 C_1 = OA_1 \cdot B_1 C_1.$

получим

$$r_2 = p \frac{C_1 B_1}{B_1 A_1} \cdot \frac{O A_1}{O C_1}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$q = p \frac{C_1 B_1 \cdot O A_1 \cdot C_2 B_2 \cdot O A_2}{B_1 A_1 \cdot O C_1 \cdot B_2 A_2 \cdot O C_2}. \quad (5)$$

Итак, если взять q по формуле (5), то центр тяжести S всей системы будет на $A_2 C_1$.

Найдем теперь, каким нужно взять q , чтобы центр тяжести S оказался на прямой $A_1 C_2$. Для этой цели достаточно во всех выкладках поменять местами индексы 1 и 2. Но такая замена не влияет на окончательный результат. Это следует из формулы (5), которая симметрична относительно индексов 1 и 2. Следовательно, если взять q по формуле (5), то центр тяжести S всей системы будет также на прямой $A_1 C_2$, т. е. $S \neq M$. Но S лежит на прямой KL , так что три точки K , L , M находятся на одной прямой, что и требовалось доказать.

§ 5

1. Справедливость теоремы вытекает из тождества

$$[(A, 1) + (B, 2) + (C, 4)] + [(B, 1) + (C, 2) + (A, 4)] + \\ + [(C, 1) + (A, 2) + (B, 4)] = (A, 7) + (B, 7) + (C, 7),$$

справедливость которого очевидна. Центром тяжести материальных точек $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 4)$ будет точка B_2 . Поэтому $(A, 1) + (B, 2) + (C, 4) = (B_2, 7)$. Аналогично $(B, 1) + (C, 2) + (A, 4) = (C_2, 7)$, $(C, 1) + (A, 2) + (B, 4) = (A_2, 7)$. Ясно, что центром тяжести трех материальных точек $(A, 7)$, $(B, 7)$ и $(C, 7)$ будет точка O пересечения медиан треугольника ABC . Поэтому

$$(A, 7) + (B, 7) + (C, 7) = (O, 21).$$

В силу записанных выше равенств получаем

$$(B_2, 7) + (C_2, 7) + (A_2, 7) = (O, 21).$$

А это равенство показывает, что точка O является центром тяжести трех материальных точек: $(B_2, 7)$, $(C_2, 7)$ и $(A_2, 7)$,

т. е. служит точкой пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$, что и требовалось доказать.

2. Поместим в вершинах A_1, A_2, A_3 такие массы m_1, m_2, m_3 , чтобы

$$Z[(A_1, m_1), (A_3, m_3)] \equiv A_4, \quad (1)$$

$$Z[(A_2, m_2), (A_3, m_3)] \equiv A_5. \quad (2)$$

Понятно, что

$$A_6 \equiv Z[(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)]. \quad (3)$$

Подберем теперь массу m_6 в точке A_6 так, чтобы

$$Z[(A_6, m_6), (A_3, m_3)] \equiv A_7. \quad (4)$$

Рассмотрим три материальные точки $(A_1, m_1), (A_3, m_3), (A_6, m_6)$. Центр тяжести этой системы лежит в силу (1) на прямой A_6A_4 , а в силу (4) — на прямой A_1A_7 , т. е. он совпадает с точкой A_8 . Отсюда следует, что

$$Z[(A_4, m_1 + m_3), (A_6, m_6)] \equiv A_8. \quad (5)$$

Аналогично можно показать, что центром тяжести материальных точек $(A_2, m_2), (A_3, m_3)$ и (A_6, m_6) служит точка A_9 . Отсюда можно заключить, что

$$Z[(A_5, m_2 + m_3), (A_6, m_6)] \equiv A_9. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь треугольник $A_4A_5A_6$. Центром тяжести материальных точек $(A_4, m_1 + m_3), (A_5, m_2 + m_3), (A_6, m_6)$ служит точка O пересечения отрезков A_5A_8 и A_4A_9 , что следует из формул (5) и (6).

Мы можем написать:

$$\begin{aligned} (A_4, m_1 + m_3) + (A_5, m_2 + m_3) + (A_6, m_6) = \\ = (O, m_1 + m_2 + 2m_3 + m_6). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} (A_4, m_1 + m_3) + (A_5, m_2 + m_3) + (A_6, m_6) = \\ = (A_1, m_1) + (A_3, m_3) + (A_2, m_2) + (A_3, m_3) + (A_6, m_6) = \\ = [(A_1, m_1) + (A_2, m_2) + (A_3, m_3)] + (A_6, m_6) + (A_3, m_3) = \\ = (A_6, m_1 + m_2 + m_3) + (A_6, m_6) + (A_3, m_3) = \\ = (A_6, m_1 + m_2 + m_3 + m_6) + (A_3, m_3). \end{aligned}$$

Итак,

$$(O, m_1 + m_2 + 2m_3 + m_6) = (A_6, m_1 + m_2 + m_3 + m_6) + (A_3, m_3),$$

а отсюда следует, что O лежит на отрезке A_3A_6 , что и требовалось доказать.

Из последнего равенства можно узнать, в каком отношении делится отрезок A_3A_6 точкой O . В самом деле, из этого равенства ясно, что

$$\frac{OA_3}{OA_6} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_6}{m_3} = \frac{m_1}{m_3} + \frac{m_2}{m_3} + 1 + \frac{m_6}{m_3}.$$

Но по правилу рычага

$$m_1 A_4 A_1 = m_3 A_4 A_3,$$

$$m_2 A_5 A_2 = m_3 A_5 A_3,$$

$$m_6 A_7 A_6 = m_3 A_7 A_3.$$

Поэтому

$$\frac{OA_3}{OA_6} = \frac{A_3 A_4}{A_4 A_1} + \frac{A_3 A_5}{A_5 A_2} + \frac{A_3 A_7}{A_7 A_6} + 1.$$

§ 6.

7. Примем треугольник ABC в качестве базисного. Найдем барицентрические координаты точек A_1, B_1, C_1 . Подберем в A и B массы a и b так, чтобы точка C_1 была центром тяжести образовавшихся материальных точек (A, a) и (B, b) . Тогда $\frac{b}{a} = \frac{AC_1}{C_1B} = -2$. Отсюда видно, что можно взять $b=2$, $a=-1$. Таким образом,

$$(A, -1) + (B, 2) = (C_1, 1). \quad (1)$$

Точка C_1 «выражена» через материальные точки с носителями в вершинах треугольника ABC . Аналогично найдем, что

$$(B, -1) + (C, 2) = (A_1, 1), \quad (2)$$

$$(C, -1) + (A, 2) = (B_1, 1). \quad (3)$$

Но центром тяжести трех материальных точек $(A_1, 1), (B_1, 1), (C_1, 1)$ служит точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$. Мы ее обозначим через O_1 . Следовательно,

$$(A_1, 1) + (B_1, 1) + (C_1, 1) = (O_1, 3). \quad (4)$$

Из равенств (1)—(4) найдем

$$(O_1, 3) = [(A, -1) + (A, 2)] + [(B, -1) + (B, 2)] + [(C, -1) + (C, 2)],$$

т. е.

$$(O_1, 3) = (A, 1) + (B, 1) + (C, 1).$$

А это как раз и означает, что O_1 служит также центром тяжести треугольника ABC .

10. Пусть S — середина отрезка MN . Тогда

$$(S, 1) = \left(M, \frac{1}{2}\right) + \left(N, \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Положим $m_1 + m_2 + m_3 = m$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ($m \neq 0$, $n \neq 0$). Тогда $(M, m) = (A, m_1) + (B, m_2) + (C, m_3)$, откуда, уменьшая все массы в $2m$ раз, получим:

$$\left(M, \frac{1}{2}\right) = \left(A, \frac{m_1}{2m}\right) + \left(B, \frac{m_2}{2m}\right) + \left(C, \frac{m_3}{2m}\right). \quad (2)$$

Аналогично

$$\left(N, \frac{1}{2}\right) = \left(A, \frac{n_1}{2n}\right) + \left(B, \frac{n_2}{2n}\right) + \left(C, \frac{n_3}{2n}\right). \quad (3)$$

Из (1)—(3) получим

$$(S, 1) = \left(A, \frac{m_1}{2m} + \frac{n_1}{2n}\right) + \left(B, \frac{m_2}{2m} + \frac{n_2}{2n}\right) + \left(C, \frac{m_3}{2m} + \frac{n_3}{2n}\right).$$

Отсюда видно, что в качестве барицентрических координат точки можно принять числа

$$k \left(\frac{m_1}{2m} + \frac{n_1}{2n}\right), k \left(\frac{m_2}{2m} + \frac{n_2}{2n}\right), k \left(\frac{m_3}{2m} + \frac{n_3}{2n}\right),$$

где k — любое действительное число, не равное нулю (например, $k=2$).

11. Сохраним обозначения, принятые в § 5 и на рис. 46. Примем треугольник PQB в качестве координатного. Пусть (p, q, b) — барицентрические координаты точки D . Тогда

$$(D, p+q+b) = (P, p) + (Q, q) + (B, b). \quad (1)$$

Разделив все массы на $p+q+b$, получим опять-таки справедливое равенство

$$(D, 1) = \left(P, \frac{p}{p+q+b}\right) + \left(Q, \frac{q}{p+q+b}\right) + \left(B, \frac{b}{p+q+b}\right). \quad (2)$$

Ясно, что

$$A \equiv Z[(P, p), (B, b)], \quad C \equiv Z[(Q, q), (B, b)].$$

Поэтому

$$(A, p+b) = (P, p) + (B, b), \quad (3)$$

$$(C, q+b) = (Q, q) + (B, b). \quad (4)$$

Отсюда

$$(A, 1) = \left(P, \frac{p}{p+b}\right) + \left(B, \frac{b}{p+b}\right), \quad (5)$$

$$(C, 1) = \left(Q, \frac{q}{q+b}\right) + \left(B, \frac{b}{q+b}\right). \quad (6)$$

Так как M — середина отрезка AC , то

$$(M, 2) = (A, 1) + (C, 1) = \left(P, \frac{p}{p+b}\right) + \left(Q, \frac{q}{q+b}\right) + \left(B, \frac{b}{p+b} + \frac{b}{q+b}\right). \quad (7)$$

Так как N — середина отрезка DB , то

$$(N, 2) = (D, 1) + (B, 1) = \left(P, \frac{p}{p+q+b}\right) + \left(Q, \frac{q}{p+q+b}\right) + \left(B, \frac{b}{p+q+b} + 1\right). \quad (8)$$

Наконец, R — середина отрезка PQ , так что

$$(R, 2) = (P, 1) + (Q, 1). \quad (9)$$

Нам нужно доказать, что M — на прямой NR . Для этого достаточно показать, что возможно так подобрать число x , чтобы центром тяжести материальных точек $(N, 2)$ и $x(R, 2)$ служила точка M . Иначе говоря, чтобы имело место равенство

$$(N, 2) + x(R, 2) = (M, 2(1+x)). \quad (10)$$

В силу (7)—(9) это равносильно такому равенству:

$$\begin{aligned} & \left(P, \frac{p}{p+q+b} + x \right) + \left(Q, \frac{q}{p+q+b} + x \right) + \\ & \quad + \left(B, \frac{b}{p+q+b} + 1 \right) = \left(P, \frac{p(1+x)}{b+p} \right) + \\ & \quad + \left(Q, \frac{q(1+x)}{q+b} \right) + \left(B, \left(\frac{b}{p+b} + \frac{b}{q+b} \right) (1+x) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Подберем сначала x так, чтобы материальные точки с носителем B , записанные в левой части и в правой части последнего равенства, были равны между собой:

$$\frac{b}{p+q+b} + 1 = \left(\frac{b}{p+b} + \frac{b}{q+b} \right) (1+x). \quad (12)$$

Отсюда $1+x = \frac{(p+b)(q+b)}{b(p+q+b)}$, или

$$x = \frac{pq}{b(p+q+b)}. \quad (13)$$

Но при таком x левая часть равенства (11) равна

$$\begin{aligned} & \left(P, \frac{p}{p+q+b} + \frac{pq}{b(p+q+b)} \right) + \\ & \quad + \left(Q, \frac{q}{p+q+b} + \frac{pq}{b(p+q+b)} \right) + \left(B, \frac{p+q+2b}{p+q+b} \right) = \\ & = \left(P, \frac{p(q+b)}{b(p+q+b)} \right) + \left(Q, \frac{q(p+b)}{b(p+q+b)} \right) + \left(B, \frac{p+q+2b}{p+q+b} \right), \end{aligned}$$

а правая часть равенства (11) равна

$$\begin{aligned} & \left(P, \frac{p}{p+b} \cdot \frac{(p+b)(q+b)}{b(p+q+b)} \right) + \left(Q, \frac{q}{q+b} \cdot \frac{(p+b)(q+b)}{b(p+q+b)} \right) + \\ & \quad + \left(B, \left(\frac{b}{p+b} + \frac{b}{q+b} \right) \frac{(p+b)(q+b)}{b(p+q+b)} \right) = \left(P, \frac{p(q+b)}{b(p+q+b)} \right) + \\ & \quad + \left(Q, \frac{q(p+b)}{b(p+q+b)} \right) + \left(B, \frac{p+q+2b}{p+q+b} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если x определяется по формуле (13), то в (11), а значит и в (10), левая часть равна правой. Следовательно, точка M — на прямой NR (ибо M оказывается центром тяжести двух материальных точек: $(N, 2)$ и $(R, 2x)$).

Заметим еще, что по правилу рычага

$$\begin{aligned} \frac{NM}{MR} &= \frac{2x}{2} = \frac{pq}{b(p+q+b)} = \frac{\frac{p}{b} \cdot \frac{q}{b}}{\frac{p}{b} + \frac{q}{b} + 1} = \\ &= \frac{\frac{BA}{AP} \cdot \frac{BC}{CQ}}{\frac{BA}{AP} + \frac{BC}{CQ} + 1}. \end{aligned}$$

§ 7

1. Искомый момент инерции равен

$$\begin{aligned} J_S &= 2 \cdot SA_1^2 + 6 \cdot SA_2^2 + 2 \cdot SA_3^2 + 3 \cdot SA_4^2 = \\ &= 2(3^2 + 4^2) + 6 \cdot 2^2 + 2(3^2 + 4^2) + 3 \cdot 8^2 = 316. \end{aligned}$$

2. Обозначим через O точку пересечения диагоналей четырехугольника. Тогда

$$Z[(A_1, 2), (A_3, 2)] \equiv O, \quad Z[(A_2, 6), (A_4, 3)] \equiv O.$$

Поэтому O — центр тяжести всей системы и, следовательно,

$$J_O = 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 = 108.$$

Заметим, что объединением всей системы будет материальная точка $O \equiv (O, 13)$ и ее момент инерции относительно S равен $13 \cdot 4^2 = 208$, т. е. в точности равен разности $J_S - J_O$. Это, как мы увидим ниже, не случайно.

$$\begin{aligned} 3. \quad J_S &= 3 \cdot SA^2 + 4 \cdot SB^2 + 5 \cdot SC^2 = \\ &= 3(4^2 + 4^2) + 4(3^2 + 4^2) + 5 \cdot 4^2 = \\ &= 276. \end{aligned}$$

4. Нужно показать, что сумма $PA^2 + PB^2 + PC^2$ (рис. 142) будет иметь одно и то же значение при любом положении точки P на окружности. Поместим в вершины треугольника равные массы, скажем, по 1 единице (1 г). Тогда центром тяжести получившейся системы материальных точек будет служить точка пересечения медиан треугольника ABC , которая

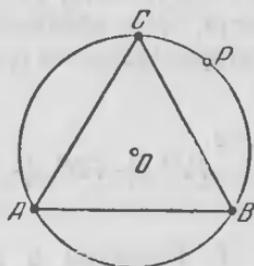


Рис. 142.

в правильном треугольнике совпадает с центром O описанной окружности. В силу теоремы Лагранжа $J_P = J_O + 3 \cdot PO^2$. (Здесь J_P — момент инерции системы материальных точек $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ относительно точки P ; J_O — момент инерции той же системы относительно O .)

Таким образом, при любом положении точки P на окружности

$$1 \cdot PA^2 + 1 \cdot PB^2 + 1 \cdot PC^2 = 1 \cdot OA^2 + 1 \cdot OB^2 + 1 \cdot OC^2 + 3 \cdot PO^2,$$

т. е. $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6R^2$, где R — радиус окружности.

5. Пусть $A_1 A_2 \dots A_6$ — правильный шестиугольник, O — центр описанной окружности, R — ее радиус.

Поместим в каждую вершину шестиугольника массу в 1 единицу. Тогда (сохраняя обозначения задачи 4) будем иметь $J_P = J_O + 6 \cdot PO^2$, т. е.

$$PA_1^2 + \dots + PA_6^2 = A_1 O^2 + \dots + A_6 O^2 + 6PO^2 = 12R^2,$$

при любом положении точки P на окружности.

6. Пусть O — центр сферы, R — ее радиус. Поместим в A, B, C, D равные массы (по 1 единице). Тогда $J_P = J_O + 4PO^2$, т. е.

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 4PO^2 = 8R^2,$$

при любом положении точки P на сфере.

7. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр вписанной окружности, r — ее радиус, R — радиус описанной окружности, P — произвольная точка на вписанной окружности. Нагрузим вершины треугольника равными массами (по 1 единице)

$$J_P = J_O + 3PO^2,$$

т. е.

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3PO^2 = 3(R^2 + r^2).$$

8. Поместим в каждой из данных точек A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 143) массу в 1 единицу. Обозначим через O центр тяжести образовавшейся системы материальных точек. Пусть P — произвольная точка плоскости. По теореме Лагранжа имеем

$$OP^2 = \frac{1}{4}(J_P - J_O).$$

Ясно, что J_O не зависит от положения точки P и, следовательно, есть постоянная величина.

Нас интересуют те и только те точки P , для которых

$$J_P = PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_4^2 = d^2.$$

Но для таких (и только для таких) точек $OP^2 = \frac{1}{4}(d^2 - J_O)$, т. е. OP^2 имеет постоянное значение.

Теперь ясно, что если $d^2 > J_O$, то искомым геометрическим местом точек будет окружность с центром

в O и радиусом $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - J_O}$. Если

$d^2 = J_O$, то искомое геометри-

ческое место точек — сама точка O . Если $d^2 < J_O$, то искомое геометри-

ческое место точек не существует.

9. Поместим в точках A_1, A_2, A_3 массы m_1, m_2, m_3 . Пусть O — центр тяжести трех материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)$; P — произвольная точка пространства. Тогда

$$J_P = J_O + m \cdot OP^2,$$

где

$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

$$J_P = m_1 \cdot PA_1^2 + m_2 \cdot PA_2^2 + m_3 \cdot PA_3^2,$$

$$J_O = m_1 \cdot OA_1^2 + m_2 \cdot OA_2^2 + m_3 \cdot OA_3^2.$$

Следовательно,

$$OP^2 = \frac{J_P - J_O}{m}.$$

Нас интересует геометрическое место таких точек P , для которых $J_P = d^2$, но для таких (и только для таких) точек

$$OP^2 = \frac{1}{m}(d^2 - J_O).$$

Отсюда видно, что искомое геометрическое место точек — либо сфера радиуса $\sqrt{\frac{1}{m}(d^2 - J_O)}$ (если $d^2 > J_O$), либо точка O (если $d^2 = J_O$), либо не существует (если $d^2 < J_O$).

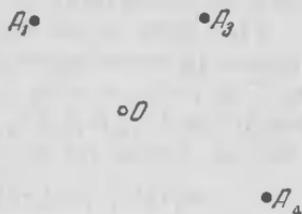


Рис. 143.

10. Если A_1, A_2, \dots, A_n суть n произвольных точек, m_1, m_2, \dots, m_n — произвольные действительные числа, причем $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m \neq 0$, то геометрическим местом точек пространства, для которых сумма $m_1 \cdot PA_1^2 + m_2 \cdot PA_2^2 + \dots + m_n \cdot PA_n^2$ постоянна, служит либо сфера с центром в центре тяжести O материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$, либо сама точка O , либо искомое геометрическое место точек вовсе не существует.

11. Среди чисел m_1, m_2, m_3, m_4 хотя бы одно отрицательное (в противном случае $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \neq 0$). Пусть $m_4 < 0$, тогда $m = m_1 + m_2 + m_3 > 0$. Рассмотрим материальные точки $(A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)$, и пусть O — их центр тяжести. Тогда, по теореме Лагранжа,

$$m_1 \cdot PA_1^2 + m_2 \cdot PA_2^2 + m_3 \cdot PA_3^2 = J_O + m \cdot PO^2,$$

где $J_O = m_1 \cdot OA_1^2 + m_2 \cdot OA_2^2 + m_3 \cdot OA_3^2$. Кроме того, $m_4 = -m$. Но тогда

$$\begin{aligned} m_1 \cdot PA_1^2 + m_2 \cdot PA_2^2 + m_3 \cdot PA_3^2 + m_4 \cdot PA_4^2 &= J_O + mPO^2 - mPA_4^2 = \\ &= J_O + m(PO^2 - PA_4^2). \end{aligned}$$

Ясно, что m и J_O — постоянные, не зависящие от положения точки P . Поэтому в последнем равенстве левая часть постоянна тогда и только тогда, когда постоянна разность $PO^2 - PA_4^2$, так что искомое геометрическое место точек — некоторая прямая, перпендикулярная к прямой OA_4 .

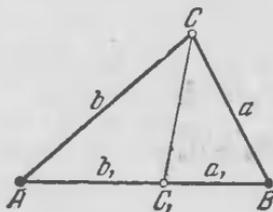


Рис. 144.

12. Введем обозначения: $AC = b$, $BC = a$, $AC_1 = b_1$, $BC_1 = a_1$ (рис. 144). Подберем в точках A и B такие массы, чтобы точка C_1 была центром тяжести образующихся материальных точек. Можно, например, поместить в A массу в a_1 единиц, а в B — массу в b_1 единиц. Тогда $a_1 AC_1 = b_1 BC_1$, так что C_1 — действительно центр тяжести системы из двух материальных точек (A, a_1) и (B, b_1) . По теореме Лагранжа

$$(a_1 + b_1) CC_1^2 = J_C - J_{C_1} = (a_1 \cdot b^2 + b_1 \cdot a^2) - (a_1 b_1^2 + b_1 a_1^2).$$

Так как CC_1 — биссектриса угла C , то

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{a_1 + b_1}{a + b} = \frac{c}{a + b};$$

отсюда

$$a_1 = \frac{ac}{a+b}, \quad b_1 = \frac{bc}{a+b}.$$

Кроме того, $a_1 + b_1 = c$. Поэтому

$$c \cdot CC_1^2 = \frac{b^2 ac}{a+b} + \frac{a^2 bc}{a+b} - a_1 b_1 (a_1 + b_1)$$

или

$$c \cdot CC_1^2 = \frac{abc}{a+b} (a+b) - a_1 b_1 c,$$

следовательно,

$$CC_1^2 = ab - a_1 b_1,$$

что и требовалось доказать.

13. Сохраним обозначения предыдущей задачи. Так как

$$a_1 = \frac{ac}{a+b}, \quad b_1 = \frac{bc}{a+b},$$

то

$$CC_1^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}, \quad \text{или} \quad CC_1^2 = ab \left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right].$$

Можно было бы несколько видоизменить решение задачи, поместив в A и B массы в a и b единиц соответственно.

14. Введем обозначения: $CA = b$, $CB = a$, $C_1A = b_1$, $C_1B = a_1$, $CC_1 = d$. Подберем нагрузки в A и B так, чтобы точка C_1 была их центром тяжести. Для этого достаточно в A поместить массу в a_1 единиц, а в B — массу в b_1 единиц. Применяя к системе из двух точек (A, a_1) и (B, b_1) теорему Лагранжа, получим

$$J_C = J_{C_1} + (a_1 + b_1) \cdot CC_1^2,$$

или

$$a_1 b^2 + b_1 a^2 = a_1 b_1^2 + b_1 a_1^2 + (a_1 + b_1) d^2.$$

Учитывая, что $a_1 + b_1 = c$, получим:

$$a^2 b_1 + b^2 a_1 - d^2 c = a_1 b_1 c,$$

что и требовалось доказать.

15. Поместим в вершинах массы по 1 единице (см. § 1, задачу 13); центром тяжести всей системы служит середина S

отрезка OT , где O — центр описанной окружности, T — точка пересечения диагоналей. По теореме Лагранжа

$$J_T = J_S + 4TS^2,$$

$$J_O = J_S + 4OS^2.$$

Но $TS = OS$, так что $J_T = J_O$, т. е.

$$TA^2 + TB^2 + TC^2 + TD^2 = 4R^2.$$

Но в силу теоремы Пифагора $TA^2 + TB^2 = AB^2$, $TC^2 + TD^2 = CD^2$. Поэтому $AB^2 + CD^2 = (2R)^2$.

16. Поместим в вершинах четырехугольника равные массы (по 1 единице). Понятно, что центр тяжести O всей системы является серединой отрезка PQ (см. § 1, задачу 1). По теореме Лагранжа

$$J_{A_1} = J_O + 4 \cdot OA_1^2,$$

или

$$A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + A_1A_4^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + OA_4^2 + 4OA_1^2.$$

Аналогично

$$A_2A_1^2 + A_2A_3^2 + A_2A_4^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + OA_4^2 + 4OA_2^2,$$

$$A_3A_1^2 + A_3A_2^2 + A_3A_4^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + OA_4^2 + 4OA_3^2,$$

$$A_4A_1^2 + A_4A_2^2 + A_4A_3^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + OA_4^2 + 4OA_4^2.$$

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$\begin{aligned} 2(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2) + 2A_1A_3^2 + 2A_2A_4^2 = \\ = 8(OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + OA_4^2). \end{aligned}$$

Применяя теорему Лагранжа к системе точек $(A_1, 1)$ и $(A_3, 1)$, получим

$$\begin{aligned} OA_1^2 + OA_3^2 = PA_1^2 + PA_3^2 + 2OP^2 = \left(\frac{1}{2}A_1A_3\right)^2 + \\ + \left(\frac{1}{2}A_1A_3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}PQ\right)^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$OA_1^2 + OA_3^2 = \frac{1}{2}(A_1A_3^2 + PQ^2).$$

Аналогично, рассматривая систему двух точек $(A_2, 1)$ и $(A_4, 1)$, получим

$$OA_2^2 + OA_4^2 = \frac{1}{2}(A_2A_4^2 + PQ^2).$$

Из полученных равенств следует:

$$\begin{aligned} A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2 + A_1A_3^2 + A_2A_4^2 = \\ = 2A_1A_3^2 + 2A_2A_4^2 + 4PQ^2, \end{aligned}$$

откуда

$$A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2 + 4PQ^2,$$

что и требовалось доказать.

17. Пусть S — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан (рис. 145), m_a, m_b, m_c — сами медианы.

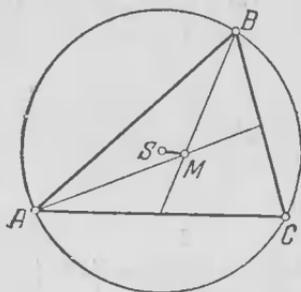


Рис. 145.

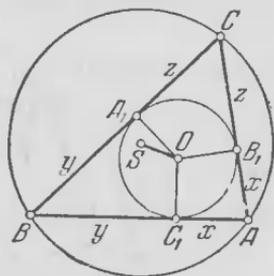


Рис. 146.

Поместим в вершинах треугольника ABC равные массы (по 1 единице). По теореме Лагранжа $J_S = J_M + 3 \cdot SM^2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} SM^2 &= \frac{1}{3}(J_S - J_M) = \frac{1}{3} \left[3R^2 - \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \right] = \\ &= R^2 - \frac{4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{27}. \end{aligned}$$

18. Пусть S (рис. 146) — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, O — центр вписанной окружности. Поместим в вершинах A, B, C такие массы, чтобы точка O (центр вписанной окружности) оказалась их центром тяжести. Для этого достаточно поместить в A, B, C массы соответственно в a, b, c единиц (a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$).

В силу теоремы Лагранжа

$$J_S = J_O + (a + b + c) SO^2, \quad (1)$$

где

$$J_S = a \cdot SA^2 + b \cdot SB^2 + c \cdot SC^2 = (a + b + c) R^2,$$

$$J_O = a \cdot OA^2 + b \cdot OB^2 + c \cdot OC^2.$$

Опустим из O перпендикуляры OA_1 , OB_1 , OC_1 на стороны $\triangle ABC$. Пусть $AB_1 = AC_1 = x$, $BA_1 = BC_1 = y$, $CA_1 = CB_1 = z$. Покажем, что

$$a \cdot OA^2 = 4R \cdot r \cdot x. \quad (2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} a \cdot OA^2 &= 2R \sin A \left(\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \right)^2 = \\ &= 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = 4R \cdot r \left(r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \right) = 4Rrx. \end{aligned}$$

Аналогично покажем, что

$$b \cdot OB^2 = 4R \cdot r \cdot y, \quad (3)$$

$$c \cdot OC^2 = 4R \cdot r \cdot z. \quad (4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_O &= 4R \cdot r (x + y + z) = \\ &= 2R \cdot r (2x + 2y + 2z) = 2Rr (a + b + c). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя значения для J_S и J_O в формулу (1), получим:

$$(a + b + c) R^2 = 2Rr (a + b + c) + (a + b + c) d^2,$$

откуда

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Замечание. При доказательстве формулы (2) мы использовали тригонометрию. Однако ту же формулу можно доказать чисто геометрически. Пусть точка O_1 (рис. 147) симметрична точке O относительно AB .

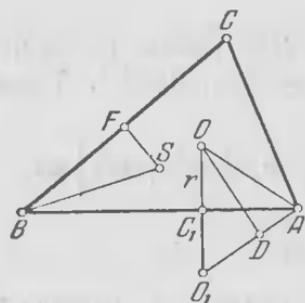


Рис. 147.

Из O опустим перпендикуляр OD на AO_1 и из S — перпендикуляр SF на BC . Ясно, что

$$\angle OAO_1 = \angle A, \quad \angle BSF = \angle A.$$

Поэтому $\triangle BFS \sim \triangle ODA$, откуда

$$\frac{BF}{BS} = \frac{OD}{OA} \quad \text{или} \quad \frac{a}{2R} = \frac{OD}{OA}. \quad (6)$$

Но $S_{\triangle O_1OA} = 2S_{\triangle AC_1O}$, т. е. $\frac{1}{2} O_1A \cdot OD = x \cdot r$. Отсюда

$$OD = \frac{2x \cdot r}{O_1A} = \frac{2x \cdot r}{OA}.$$

Учитывая (6), найдем

$$\frac{a}{2R} = \frac{2xr}{OA^2}, \quad \text{т. е.} \quad a \cdot OA^2 = 4R \cdot r \cdot x,$$

что и требовалось доказать.

19. Пусть (рис. 148) S — центр описанной окружности, O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны c и продолжений сторон a и b .

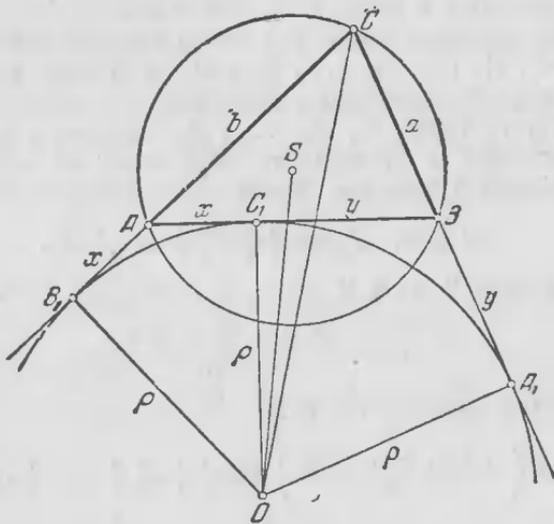


Рис. 148.

Рассуждения, проведенные при решении предыдущей задачи (до формулы (5) включительно), остаются в силе, если заменить в них c на $-c$, z на $-z$, r на ρ , A — на $180^\circ - A$.

Однако для вневписанной окружности $2x + 2y - 2z = -(a + b - c)$. Поэтому

$$J_O = -2R\rho(a + b - c).$$

Подставляя затем выражения для J_S и J_O в (1), получим

$$(a + b - c)R^2 = -2R\rho(a + b - c) + (a + b - c)d^2$$

и, следовательно, $d^2 = R^2 + 2R\rho$.

20. Пусть Z — центр тяжести n материальных точек $(A_1, 1), (A_2, 1), \dots, (A_n, 1)$. При любом положении точки S

$$J_S = J_Z + n \cdot SZ^2, \quad (1)$$

где $J_S = SA_1^2 + SA_2^2 + \dots + SA_n^2$. В формуле (1) J_Z не зависит от положения точки S на плоскости.

Ясно, что наименьшее значение сумма J_S будет иметь в том и только в том случае, когда неотрицательное слагаемое $n \cdot SZ^2$ обратится в нуль, т. е. при $S \equiv Z$.

Итак, искомая точка — это центр тяжести n материальных точек $(A_1, 1), (A_2, 1), \dots, (A_n, 1)$, а такую точку можно легко построить циркулем и линейкой.

21. Пусть точки A_1, A_2, \dots, A_n выбраны так, как предложено сделать в «указаниях». В каждой из них поместим массу, равную 1 единице. Тогда

$$M = n, \quad J_S = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

В силу задачи 2 из § 2

$$SZ = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Поэтому (см. неравенство (51))

$$n \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

следовательно,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Равенство имеет место лишь при совпадении точек A_1, A_2, \dots, A_n , т. е. когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

22. При том выборе системы материальных точек, о котором говорится в указании,

$$M = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n},$$

$$J_S = \frac{1}{a_1} a_1^2 + \frac{1}{a_1} a_2^2 + \dots + \frac{1}{a_n} a_n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$SZ = \frac{\frac{1}{a_1} a_1 + \frac{1}{a_2} a_2 + \dots + \frac{1}{a_n} a_n}{M} = \frac{n}{M}.$$

Поэтому

$$M \left(\frac{n}{M} \right)^2 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

откуда

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) M \geq n^2,$$

что и требовалось доказать.

Равенство имеет место при совпадении точек A_1, A_2, \dots, A_n , т. е. при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

23. На произвольном луче возьмем точки A_1, A_2, \dots, A_n так, чтобы $SA_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $SA_2 = \frac{b_2}{a_2}$, \dots , $SA_n = \frac{b_n}{a_n}$. В них поместим соответственно массы $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$. Тогда

$$M = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

$$J_S = a_1^2 \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^2 + a_2^2 \left(\frac{b_2}{a_2} \right)^2 + \dots + a_n^2 \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2,$$

$$SZ = \frac{a_1^2 \frac{b_1}{a_1} + a_2^2 \frac{b_2}{a_2} + \dots + a_n^2 \frac{b_n}{a_n}}{M} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{M}.$$

Неравенство (51) примет вид

$$M \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{M} \right)^2 \leq b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2,$$

т. е.

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{M (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)},$$

что и требовалось доказать.

Равенство имеет место лишь тогда, когда точки A_1, A_2, \dots, A_n совпадают, т. е.

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}.$$

§ 8

1. Представим себе, что контур треугольника ABC (рис. 149) изготовлен из однородной проволоки с линейной плотностью δ . Массы сторон равны $\delta a, \delta b, \delta c$, где $a = BC, b = CA, c = AB$. Сосредоточим массу каждой стороны треугольника в ее середине. Тогда образуется система из трех материальных точек $(A_1, \delta a), (B_1, \delta b), (C_1, \delta c)$. Центром тяжести первых двух из них служит точка C_2 , определяемая, по правилу рычага,

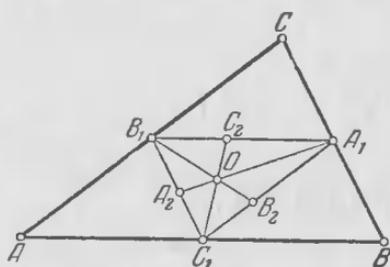


Рис. 149.

из условия $\delta a \cdot C_2 A_1 = \delta b \cdot C_2 B_1$.

Но $a = 2C_1 B_1, b = 2C_1 A_1$. Поэтому

$$\delta \cdot 2C_1 B_1 \cdot C_2 A_1 = \delta \cdot 2C_1 A_1 \cdot C_2 B_1,$$

т. е.

$$\frac{C_2 B_1}{C_2 A_1} = \frac{C_1 B_1}{C_1 A_1}.$$

Отсюда ясно, что $C_1 C_2$ — биссектриса угла C_1 треугольника $A_1 B_1 C_1$. Мы видим, что центр тяжести O контура треугольника лежит на биссектрисе $C_1 C_2$ треугольника $A_1 B_1 C_1$. Аналогично можно показать, что точка O лежит и на биссектрисах $A_1 A_2$ и $B_1 B_2$ того же треугольника. Итак, центр тяжести контура треугольника ABC — это точка пересечения биссектрис треугольника, имеющего своими вершинами середины сторон треугольника ABC .

2. Пусть C — середина полуокружности ACB (рис. 150), O — середина диаметра $AB, AB = 2R$. Пусть Z — центр тяжести полуокружности, z — расстояние от точки Z до диаметра AB .

Разобьем полуокружность на n равных дуг точками A_1, A_2, \dots, A_{n-1} так, что каждая дуга содержит $\frac{\pi}{n}$ радиан. Будем

сначала искать центр тяжести ломаной $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$, где $A_0 \equiv A$, $A_n \equiv B$. Обратим внимание на k -е звено этой ломаной, т. е. на отрезок $A_{k-1}A_k$. Опустим из точек A_{k-1}, A_k и из середины C_k отрезка $A_{k-1}A_k$ перпендикуляры $A_{k-1}B_{k-1}$,

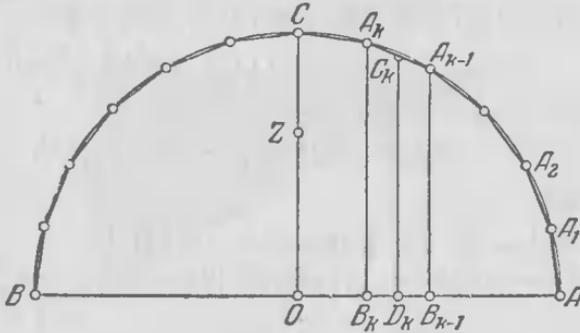


Рис. 150.

A_kB_k, C_kD_k на диаметр AB . Отрезок C_kD_k — средняя линия трапеции $A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} y_k \equiv D_kC_k &= \frac{1}{2} (B_{k-1}A_{k-1} + B_kA_k) = \\ &= \frac{1}{2} \left[R \sin \frac{\pi}{n} (k-1) + R \sin \frac{\pi}{n} k \right] = \\ &= R \sin (2k-1) \alpha \cos \alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Полагая в этой формуле $k=1, 2, \dots, n$, найдем расстояния y_1, y_2, \dots, y_n от середин звеньев $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ до прямой AB .

Все звенья ломаной равны между собой (как хорды, стягивающие равные дуги). Обозначим длину одного из них через d . Тогда длина всей ломаной p_n равна nd .

Так как ломаная симметрична относительно прямой OC , то ее центр тяжести $Z^{(n)}$, очевидно, лежит на этой прямой.

Пусть z_n — расстояние от точки $Z^{(n)}$ до прямой AB . Тогда

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{A_0A_1 \cdot y_1 + A_1A_2 \cdot y_2 + \dots + A_{n-1}A_n \cdot y_n}{p_n} = \\ &= \frac{dR \sin \alpha \cdot \cos \alpha + d \cdot R \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha + \dots + dR \sin(2n-1)\alpha \cos \alpha}{nd} = \\ &= \frac{R}{n} \cos \alpha (\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin(2n-1)\alpha). \end{aligned}$$

Нам надо теперь преобразовать сумму

$$S = \sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin (2n-1)\alpha.$$

Умножим обе части последнего равенства на $2 \sin \alpha$:

$$2 \sin \alpha \cdot S = 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \sin 3\alpha + 2 \sin \alpha \cdot \sin 5\alpha + \dots \\ \dots + 2 \sin \alpha \cdot \sin (2n-1)\alpha$$

и воспользуемся формулой

$$2 \sin x \cdot \sin y = \cos (y-x) - \cos (y+x).$$

Мы получим:

$$2 \sin \alpha \cdot S = (1 - \cos 2\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \\ + (\cos 4\alpha - \cos 6\alpha) + \dots + (\cos (2n-2)\alpha - \cos 2n\alpha) = \\ = 1 - \cos 2n\alpha.$$

Так как $\alpha = \frac{\pi}{2n}$, то $\cos 2n\alpha = -1$, и, следовательно,

$$2 \sin \alpha \cdot S = 2, \quad \text{т. е.} \quad S = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Поэтому

$$z_n = \frac{R}{n} \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Последнее выражение преобразуем так:

$$z_n = \frac{2R}{\pi} \cos \alpha \cdot \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \alpha} = \frac{2R}{\pi} \cos \alpha \frac{\alpha}{\sin \alpha}.$$

Когда n неограниченно возрастает ($n \rightarrow \infty$), то $\alpha \rightarrow 0$ и $\cos \alpha \rightarrow 1$. Во многих книгах¹⁾ доказывается, что при $\alpha \rightarrow 0$ отношение $\frac{\alpha}{\sin \alpha} \rightarrow 1$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{2R}{\pi}.$$

Итак,

$$z = \frac{2R}{\pi}.$$

Так как при любом n точки $Z^{(n)}$ — на радиусе OC , то и Z (центр тяжести полуокружности) — на OC .

¹⁾ См., например, Н. Рыбкин, Прямолинейная тригонометрия, § 75, М., Учпедгиз, 1954.

3. Дадим сначала наглядное, хотя и весьма нестрогое, доказательство рассматриваемой теоремы. Оно применимо к любому (не только прямоугольному) треугольнику. Представим себе, что $\triangle ABC$ (рис. 151) целиком выткан из очень тонких проволочек одинаковой толщины и плотности, причем все они

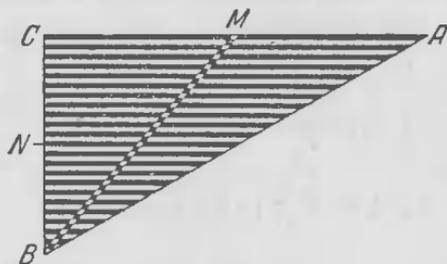


Рис. 151.

расположены параллельно стороне AC . На нашем чертеже самая верхняя проволочка черная, следующая — белая, следующая — опять черная и т. д. Сосредоточим массу каждой проволочки в ее центре тяжести, т. е. в ее середине. Заметим, что середины всех проволочек лежат на медиане BM . Таким

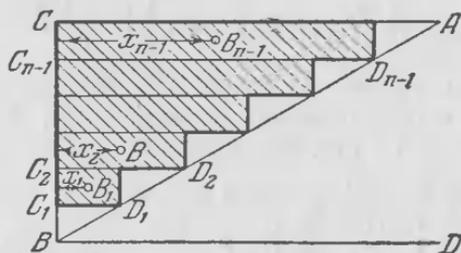


Рис. 152.

образом, вся масса треугольника окажется сосредоточенной на медиане BM , а значит, и центр тяжести треугольника не может оказаться вне этой медианы.

Но совершенно аналогичными рассуждениями можно было бы показать, что центр тяжести треугольника должен лежать и на медиане AN . Следовательно, центр тяжести треугольника ABC — это точка пересечения его медиан.

Докажем теперь строго рассматриваемую теорему.

Пусть $CB = a$, $CA = b$ (рис. 152). Разделим CB на n равных частей точками C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Через эти точки проведем параллели к CA и отметим точки D_1, D_2, \dots, D_{n-1} их встречи с AB . На отрезках $C_1D_1, C_2D_2, \dots, C_{n-1}D_{n-1}$, как на основаниях, построим прямоугольники с высотой $\frac{a}{n}$, как указано на рис. 152. Обозначим их площади через S_1, S_2, \dots, S_{n-1} , а их центры тяжести — через B_1, B_2, \dots, B_{n-1} . Определим положение центра тяжести $Z^{(n)}$ заштрихованного «многоугольника, составленного из прямоугольников». Ясно, что

$$C_1D_1 = \frac{b}{n}, \quad C_2D_2 = 2 \frac{b}{n}, \quad \dots, \quad C_{n-1}D_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n}.$$

Поэтому площадь

$$S_1 = \frac{ab}{n^2}, \quad S_2 = \frac{2ab}{n^2}, \quad \dots, \quad S_{n-1} = \frac{(n-1)ab}{n^2}.$$

Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_{n-1} расстояния от центров этих прямоугольников до прямой BC . Тогда

$$x_1 = \frac{1}{2} C_1D_1 = \frac{1}{2} \frac{b}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{2} C_2D_2 = \frac{1}{2} \frac{2b}{n}, \\ x_3 = \frac{1}{2} \frac{3b}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{1}{2} \frac{(n-1)b}{n}.$$

Пусть $x^{(n)}$ — расстояние от точки $Z^{(n)}$ (центра тяжести заштрихованного многоугольника) до прямой CB . Тогда по формуле, приведенной на стр. 86, получим:

$$x^{(n)} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + \dots + S_{n-1}x_{n-1}}{S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}} = \\ = \frac{\frac{ab}{n^2} \frac{1}{2} \frac{b}{n} + 2 \frac{ab}{n^2} \frac{1}{2} \frac{2b}{n} + 3 \frac{ab}{n^2} \frac{1}{2} \frac{3b}{n} + \dots + (n-1) \frac{ab}{n^2} \frac{1}{2} \frac{(n-1)b}{n}}{\frac{ab}{n^2} + 2 \frac{ab}{n^2} + \dots + (n-1) \frac{ab}{n^2}}.$$

После преобразований получим

$$x^{(n)} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)} \frac{b}{2n} = \frac{\frac{1}{6} (n-1)(2n-1)n}{\frac{1}{2} (n-1)n} \frac{b}{2n} = \\ = \frac{2n-1}{2n} \frac{b}{3} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{b}{3}.$$

Проведем через B параллельно CA прямую BD . Найдем расстояние $y^{(n)}$ от точки $Z^{(n)}$ до прямой BD . Пусть y_1, y_2, \dots, y_{n-1} — расстояния от точек B_1, B_2, \dots, B_{n-1} до BD . Тогда

$$y_1 = BC_1 + \frac{1}{2} C_1 C_2 = \frac{a}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} = \frac{3a}{2n},$$

$$y_2 = BC_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} = \frac{2a}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} = \frac{5a}{2n}.$$

Аналогично

$$y_3 = \frac{7a}{2n}, \quad y_4 = \frac{9a}{2n}, \quad \dots, \quad y_{n-1} = \frac{(2n-1)a}{2n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + \dots + S_{n-1} y_{n-1}}{S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}} = \\ &= \frac{\frac{ab}{n^2} \cdot \frac{3a}{2n} + 2 \frac{ab}{n^2} \cdot \frac{5a}{2n} + 3 \frac{ab}{n^2} \cdot \frac{7a}{2n} + \dots + (n-1) \frac{ab}{n^2} \cdot \frac{(2n-1)a}{2n}}{\frac{ab}{n^2} + 2 \frac{ab}{n^2} + 3 \frac{ab}{n^2} + \dots + (n-1) \frac{ab}{n^2}} = \\ &= \frac{a}{2n} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1)(2n-1)}{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)}. \end{aligned}$$

Но

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + k(2k+1) + \dots + (n-1)(2n-1) &= \\ &= 1(2 \cdot 1 + 1) + 2(2 \cdot 2 + 1) + 3(2 \cdot 3 + 1) + \dots \\ &\dots + k(2 \cdot k + 1) + \dots + (n-1)[2(n-1) + 1] = \\ &= 2[1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + \dots + (n-1)^2] + \\ &+ [1 + 2 + \dots + k + \dots + (n-1)] = \\ &= 2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(4n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$y^{(n)} = \frac{a}{2n} \frac{4n+1}{3} = \frac{a}{3} \left(2 + \frac{1}{2n} \right).$$

Когда $n \rightarrow \infty$,

$$x^{(n)} \rightarrow \frac{b}{3}, \quad y^{(n)} \rightarrow \frac{2a}{3}.$$

Итак, при $n \rightarrow \infty$ точка $Z^{(n)}$ неограниченно приближается к некоторой точке Z , лежащей внутри треугольника и отстоящей от стороны BC на расстоянии $\frac{b}{3}$ и от прямой BD —

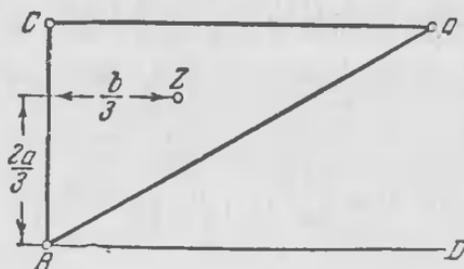


Рис. 153.

на расстоянии $\frac{2}{3}a$ (рис. 153) (так что Z отстоит от CA на расстоянии $\frac{a}{3}$). Этим свойством обладает точка пересечения медиан треугольника ABC —и только эта точка. Поэтому Z

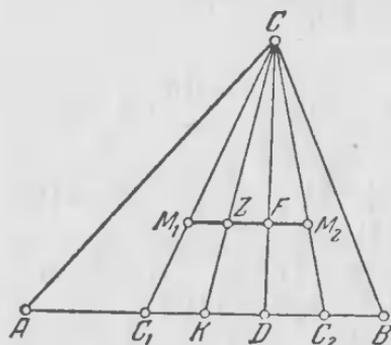


Рис. 154.

и есть точка пересечения медиан треугольника ABC . Но по самому определению центра тяжести пластинки точка Z —центр тяжести треугольника ABC . Итак, центр тяжести треугольника ABC —это точка пересечения его медиан, что и требовалось доказать.

4. Пусть AB —большая сторона треугольника ABC (рис. 154). CD —его высота, M_1 и M_2 —центры тяжести

треугольников ACD и BCD , S_1 и S_2 —их площади. Тогда центр тяжести Z треугольника ABC совпадает с центром тяжести двух материальных точек (M_1, S_1) и (M_2, S_2) . Следовательно, Z —на отрезке M_1M_2 . Кроме того,

$$\frac{ZM_1}{ZM_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{BD}{AD}.$$

Проведем прямую CZ и отметим точку K ее встречи с AB . Тогда

$$\frac{ZM_1}{ZM_2} = \frac{KC_1}{KC_2} \quad (\text{ибо } M_1M_2 \parallel C_1C_2).$$

Таким образом,

$$\frac{KC_1}{KC_2} = \frac{BD}{AD}.$$

Составим производную пропорцию: $\frac{KC_1}{KC_1 + KC_2} = \frac{BD}{BD + AD}$.

Иначе говоря,

$$\frac{KC_1}{C_1C_2} = \frac{BD}{AB}.$$

Но

$$C_1C_2 = C_1D + C_2D = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB.$$

Поэтому

$$KC_1 = \frac{1}{2}BD.$$

Следовательно,

$$AK = AC_1 + KC_1 = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB.$$

Таким образом, CK — медиана $\triangle ABC$. Так как $M_1Z \parallel C_1K$, то

$$\frac{CZ}{ZK} = \frac{CM_1}{M_1C_1} = 2, \quad \text{т. е.}$$

$$CZ:ZK = 2:1.$$

Итак, точка Z лежит на медиане CK и делит ее в отношении 2:1 (считая от вершины). Следовательно, Z — точка пересечения медиан треугольника ABC , что и требовалось доказать.

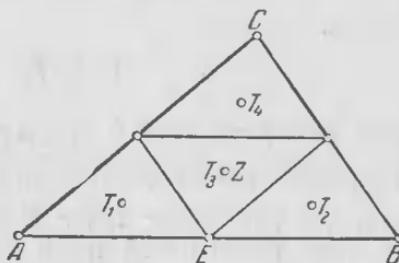


Рис. 155.

5. Пусть z — расстояние от центра тяжести Z (рис. 155) треугольника ABC до одной из его сторон (пусть это будет AB), h — высота, опущенная на AB . Соединяя середины сторон треугольника, разобьем его на четыре равных

треугольника. Обозначим их центры тяжести через T_1, T_2, T_3, T_4 , а через y_1, y_2, y_3, y_4 — их расстояния от прямой AB . Каждый из получившихся четырех треугольников подобен треугольнику ABC и имеет стороны, вдвое меньшие соответствующих сторон треугольника ABC . Поэтому расстояния точек T_1, T_2, T_3, T_4 от наибольших сторон соответствующих треугольников равны $\frac{z}{2}$ (в силу условия задачи).

Если площадь большого треугольника S , то площадь каждого из малых треугольников $\frac{S}{4}$. Будем считать всю массу каждого из треугольников сосредоточенной в его центре тяжести. Тогда Z — центр тяжести четырех материальных точек $(T_1, \frac{S}{4}), (T_2, \frac{S}{4}), (T_3, \frac{S}{4}), (T_4, \frac{S}{4})$:

$$z = \frac{\frac{S}{4}y_1 + \frac{S}{4}y_2 + \frac{S}{4}y_3 + \frac{S}{4}y_4}{S} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$

Но

$$y_1 = y_2 = \frac{z}{2}, \quad y_3 = \frac{h}{2} - \frac{z}{2}, \quad y_4 = \frac{h}{2} + \frac{z}{2}.$$

Поэтому

$$z = \frac{\frac{z}{2} + \frac{z}{2} + \left(\frac{h}{2} - \frac{z}{2}\right) + \left(\frac{h}{2} + \frac{z}{2}\right)}{4}.$$

Отсюда

$$3z = h, \quad z = \frac{h}{3}.$$

Итак, центр тяжести Z треугольной пластинки ABC отстоит от стороны AB на расстоянии $\frac{h}{3}$. Аналогично можно показать, что расстояние точки Z от любой из двух других сторон тоже равно одной трети высоты, опущенной на эту сторону. Но единственная точка, обладающая этим свойством, — это точка пересечения медиан треугольника ABC . Итак, Z (центр тяжести треугольной пластинки) — это точка пересечения его медиан, что и требовалось доказать.

6. Чтобы опровергнуть какое-либо неправильное утверждение, достаточно привести хотя бы один опровергающий пример (как говорят, контрпример). Приведем такой пример.

Рассмотрим пятиугольник (рис. 156), составленный из квадрата со стороной a и равнобедренного треугольника с основанием a и высотой a . Пусть L — середина стороны AB , F — центр тяжести пятиугольника. Всю массу треугольника сосредоточим в его центре тяжести M , массу квадрата — в его центре тяжести P . Если S — площадь треугольника, то площадь квадрата равна $2S$, и у нас возникают две материальные точки: (M, S) и $(P, 2S)$.

Поэтому

$$LF = \frac{2S \cdot LP + S \cdot LM}{3S} = \frac{2S \cdot \frac{a}{2} + S \cdot \frac{4}{3}a}{3S} = \frac{7}{9}a.$$

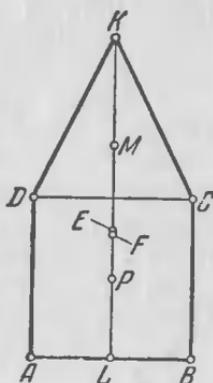


Рис. 156.

Найдем теперь положение центра тяжести вершин пятиугольника. Поместим в каждой вершине массу, равную 1 единице, тогда вся система из пяти материальных точек легко сводится к двум материальным

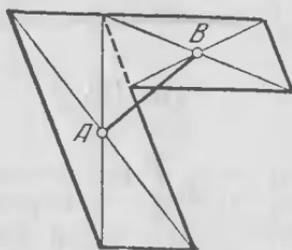


Рис. 157.

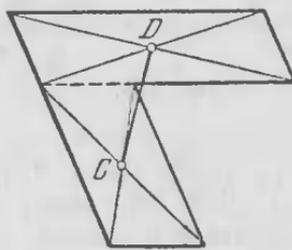


Рис. 158.

точкам: $(P, 4)$ и $(K, 1)$. Поэтому центр тяжести вершин пятиугольника E лежит на отрезке LK и

$$LE = \frac{4 \cdot \frac{a}{2} + 1 \cdot 2a}{5} = \frac{4}{5}a.$$

Отсюда ясно, что

$$LF \neq LE \quad (LF < LE).$$

7. «Букву Г» можно разбить на два параллелограмма (рис. 157), и центр тяжести «буквы Г» лежит на прямой,

соединяющей центры этих параллелограммов. Но «букву Г» можно и другим способом разбить на два параллелограмма (рис. 158), и мы находим другую прямую, на которой лежит ее центр тяжести. Искомый центр тяжести — точка пересечения этих прямых.

8. Центр тяжести «буквы T » лежит на ее оси симметрии, которую нетрудно построить. Кроме того, можно разбить «букву T » на «букву Г» и прямоугольник. На отрезке, соединяющем их центры тяжести, лежит искомый центр тяжести «буквы T », так что он находится в пересечении этого отрезка с осью симметрии «буквы T ».

9. Пусть EF — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 159). Проведем диагональ AC и пусть $K \equiv EF \times AC$. Центром

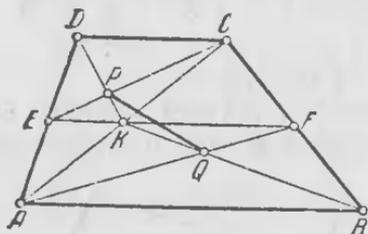


Рис. 159.

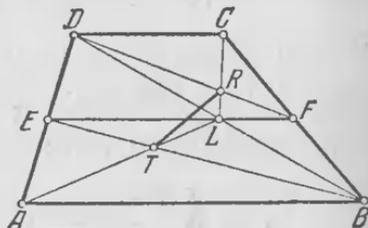


Рис. 160.

тяжести треугольника ACD служит точка P пересечения его медиан CE и DK . Центр тяжести $\triangle ACB$ — это точка Q пересечения его медиан AF и BK . Поэтому центр тяжести всей трапеции Z лежит на прямой PQ . Разбив трапеции на два треугольника другой диагональю BD (рис. 160), найдем аналогично другую прямую RT , на которой лежит центр тяжести трапеции. Следовательно, он может быть построен как точка пересечения прямых PQ и RT .

10. Пусть M и N — середины оснований трапеции $ABCD$ (рис. 161), T — точка пересечения его диагоналей. T лежит на MN (см. задачу 9 § 1). Пусть EF — средняя линия трапеции и $R \equiv EF \times MN$. Тогда ясно, что $ER = RF$, так что TR — медиана в $\triangle ETF$.

Обозначим через K, L, P, Q центры тяжести треугольников ATD, BTC, ATB, CTD , а через S_1, S_2, S_3, S_4 — их площади.

Центр тяжести трапеции совпадает с центром тяжести таких четырех материальных точек: (K, S_1) , (L, S_2) , (P, S_3) , (Q, S_4) . Покажем, что центр тяжести материальных точек (K, S_1) и (L, S_2) расположен на прямой MN . Имеем

$$S_{\triangle ATD} = S_{\triangle ADB} - S_{\triangle ATB},$$

$$S_{\triangle BTC} = S_{\triangle BAC} - S_{\triangle ATB}.$$

Но $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle BAC}$, ибо $\triangle ADB$ и $\triangle BAC$ имеют равные основания и равные высоты. Поэтому $S_{\triangle ATD} = S_{\triangle BTC}$, $S_1 = S_2$, следовательно, массы $\triangle ATD$ и $\triangle BTC$ равны; поэтому центром тяжести двух материальных точек (K, S_1) и (L, S_2) служит середина H отрезка KL . Ясно, что

$$\frac{TK}{TE} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{TL}{TF} = \frac{2}{3},$$

так что

$$\frac{TK}{TE} = \frac{TL}{TF},$$

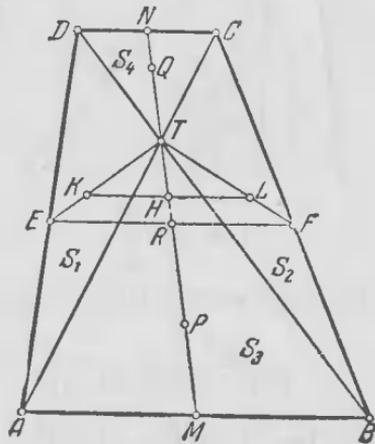


Рис. 161.

и поэтому $KL \parallel EF$. Следовательно, медиана TR , а значит, и прямая MN треугольника ETF проходит через середину отрезка KL , т. е. через точку H . Итак, центр тяжести трапеции совпадает с центром тяжести таких трех материальных точек: $(H, S_1 + S_2)$, (P, S_3) , (Q, S_4) . Все эти точки лежат на прямой MN , так что и центр тяжести трапеции лежит на MN , что и требовалось доказать.

Другое доказательство (наглядное, но не строгое). Можно себе представить трапецию состоящей из очень большого числа очень тонких однородных проволочек, расположенных параллельно основаниям трапеции. Центр тяжести каждой проволочки, т. е. ее середина, лежит на отрезке MN . Значит, центр тяжести всей трапеции тоже не может оказаться вне отрезка MN .

11. Обозначим высоту трапеции $ABCD$ (рис. 162) через h . Определим сначала расстояние z от точки O до прямой AB . Пусть $AB = a$, $CD = b$. Разобьем трапецию диагональю AC на два треугольника ACD и ACB с площадями S_1 и S_2 и центрами тяжести P и Q . Тогда O — центр тяжести двух материальных точек: (P, S_1) и (Q, S_2) ; расстояния от точек P и Q до прямой AB равны соответственно $\frac{2}{3}h$ и $\frac{1}{3}h$.

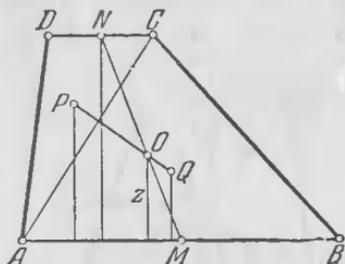


Рис. 162.

Поэтому

$$z = \frac{\frac{2}{3}h \cdot S_1 + \frac{1}{3}h \cdot S_2}{S_1 + S_2} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}h \cdot \frac{1}{2}bh + \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}ah}{\frac{a+b}{2} \cdot h} = \frac{2b+a}{a+b} \cdot \frac{h}{3};$$

$$\frac{MO}{MN} = \frac{z}{h} = \frac{2b+a}{3(a+b)}.$$

Составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{MO}{MN - MO} = \frac{2b+a}{3(a+b) - (2b+a)}, \text{ т. е. } \frac{MO}{ON} = \frac{2b+a}{2a+b}.$$

12. $\triangle ONE \sim \triangle OMF$. Поэтому

$$\frac{MO}{ON} = \frac{MF}{NE} = \frac{\frac{1}{2}a+b}{\frac{1}{2}b+a} = \frac{2b+a}{2a+b}.$$

В силу предыдущей задачи отсюда следует, что O — центр тяжести трапеции.

13. Ясно, что $\frac{MO}{ON} = \frac{BR}{RC}$. Пусть $CF = FE = EB = c$, $RK = d$;

$$\triangle KRF \sim \triangle DCF.$$

Поэтому

$$\frac{RF}{FC} = \frac{RK}{CD}, \text{ т. е. } \frac{RF}{c} = \frac{d}{b}. \quad (1)$$

Аналогично, из того, что $\triangle KRE \sim \triangle ABE$, получим

$$\frac{RE}{c} = \frac{d}{a}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{RF}{RE} = \frac{a}{b}. \quad (3)$$

Кроме того,

$$RF + RE = c. \quad (4)$$

Из (3) и (4) найдем RF и RE :

$$RF = \frac{ac}{a+b}, \quad RE = \frac{bc}{a+b},$$

$$RC = RF + c = c \frac{2a+b}{a+b}, \quad RB = RE + c = c \frac{2b+a}{a+b},$$

$$\frac{RB}{RC} = \frac{2b+a}{2a+b}.$$

Поэтому

$$\frac{OM}{ON} = \frac{2b+a}{2a+b}.$$

В силу задачи 11 O — центр тяжести трапеции.

14. Пусть L (см. рис. 115) — середина диагонали BD . Пусть F и G — центры тяжести треугольников ABD и CBD . Пусть Z — центр тяжести трапеции. Тогда Z — точка пересечения прямых MN и FG . Но F — точка пересечения медиан AL и MD треугольника ABD . Поэтому

$$LF = \frac{1}{3} LA, \quad (1)$$

$$MF = \frac{1}{3} MD. \quad (2)$$

Кроме того, ясно, что

$$LG = \frac{1}{3} LC. \quad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что $\frac{LF}{LA} = \frac{LG}{LC}$. Поэтому $FG \parallel AC$ и, значит, $FZ \parallel AC$. Но $DK \parallel AC$ по построению, так что

$FZ \parallel DK$. Поэтому $\frac{MZ}{MK} = \frac{MF}{MD} = \frac{1}{3}$, $MZ = \frac{1}{3} MK$, т. е. Z совпадает с O .

15. В силу задачи 1 из § 1 E — середина отрезка MN , так что

$$ME = \frac{1}{2} MN. \quad (1)$$

Так как (см. рис. 115) $\triangle TNC = \triangle KND$, то

$$NK = TN < \frac{1}{2} MN. \quad (2)$$

В силу задачи 14 $MO = \frac{1}{3} (MN + NK)$. Поэтому

$$MO < \frac{1}{3} \left(MN + \frac{1}{2} MN \right) = \frac{1}{2} MN = ME,$$

т. е.

$$MO < ME.$$

Кроме того, ясно, что

$$ME = \frac{1}{2} MN < MT.$$

Поэтому точка E расположена на отрезке OT . Тогда

$$\begin{aligned} OE &= ME - MO = \frac{1}{2} MN - \frac{1}{3} (MN + NK) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} MN - NK \right); \end{aligned}$$

$$ET = \frac{1}{2} MN - TN = \frac{1}{2} MN - NK.$$

Таким образом

$$ET = 3 OE.$$

Заметим, что рассмотренная здесь теорема остается в силе для любого (выпуклого) четырехугольника.

16. Пусть L (см. рис. 85) — середина диагонали DB , F и G — центры тяжести треугольников ADB и CDB , O — центр тяжести четырехугольника.

Рассуждая, как при решении задачи 14, покажем, что O — на отрезке FG , $FO \parallel AC$, $MO = 3 MF$. Построим на

луче MO точку O' такую, чтобы $MO' = 3MO$. Тогда $\frac{MO'}{MD} = \frac{MO}{MF}$; отсюда следует, что $DO' \parallel AC$, так что O' лежит на прямой DD' , параллельной AC . Аналогичными рассуждениями можно показать, что O' расположена на прямой CC' , параллельной диагонали BD . Следовательно, O' — точка пересечения прямых CC' и DD' , т. е. совпадает с точкой K . Но после построения точки O' можно построить точку O , так как $MO = \frac{1}{3}MO'$. Отсюда ясно, что $O'O:OM = 2:1$, т. е. $KO:OM = 2:1$.

17. В силу задачи 16 каждый из отрезков EE' , GG' , FF' , HH' (см. рис. 86) проходит через центр тяжести O четырехугольника $ABCD$. Точкой O каждый из этих четырех отрезков делится в отношении 2:1.

18. Обозначим через P точку встречи прямых AC и BD (см. рис. 87). Ясно, что $DPAE$ — параллелограмм, и поэтому точка G' пересечения прямых AD и PE — середина отрезка AD . Аналогично построим H' — середину отрезка AB . Искомый центр тяжести O есть точка встречи прямых GG' и $H'H$.

§ 9

1. При своем вращении отрезок A_1A_2 может описать одну из следующих пяти фигур (рис. 163): а) боковую поверхность

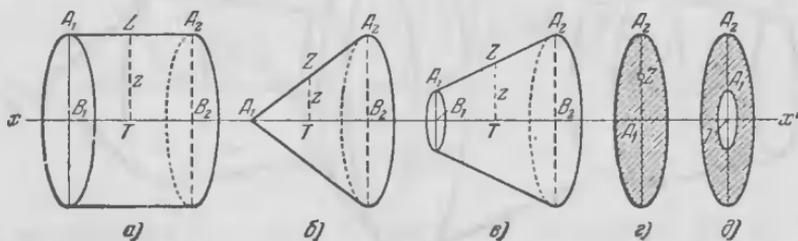


Рис. 163.

цилиндра, б) боковую поверхность конуса, в) боковую поверхность усеченного конуса, г) круг, д) кольцо.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности. Будем придерживаться обозначений, принятых на рис. 163. Покажем, что в каждом случае площадь S поверхности, описанной

отрезком, равна $2\pi z \cdot A_1 A_2$:

- а) $S = 2\pi \cdot A_1 B_1 \cdot B_1 B_2 = 2\pi z \cdot A_1 A_2$;
 б) $S = \pi \cdot A_2 B_2 \cdot A_1 A_2 = \pi \cdot 2z \cdot A_1 A_2$;
 в) $S = \pi (A_1 B_1 + A_2 B_2) A_1 A_2$.

Так как ZT — средняя линия трапеции $A_1 B_1 B_2 A_2$, то $A_1 B_1 + A_2 B_2 = 2ZT = 2z$. Поэтому

- $$S = \pi \cdot 2z \cdot A_1 A_2.$$
- г) $S = \pi \cdot A_1 A_2^2 = \pi \cdot A_1 A_2 \cdot A_1 A_2 = \pi \cdot 2z \cdot A_1 A_2$;
 д) $S = \pi \cdot TA_2^2 - \pi \cdot TA_1^2 = \pi (TA_2 + TA_1)(TA_2 - TA_1) =$
 $= \pi (TA_1 + TA_2) \cdot A_1 A_2$.

Но

$$z = TA_1 + \frac{1}{2} A_1 A_2 = \frac{1}{2} (TA_1 + TA_1 + A_1 A_2) =$$

$$= \frac{1}{2} (TA_1 + TA_2).$$

Поэтому

$$S = \pi \cdot 2z \cdot A_1 A_2.$$

2. Пусть вращающаяся линия есть ломаная $AA_1 A_2 \dots A_{n-1} B$ (рис. 164), число звеньев — n . Обозначим через S_1, S_2, \dots, S_n

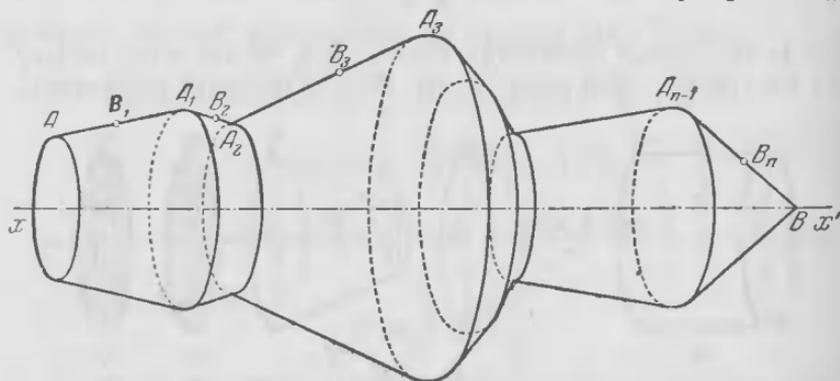


Рис. 164.

площади поверхностей, описываемых соответственно звеньями $AA_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} B$, а через l_1, l_2, \dots, l_n — длины этих звеньев. Обозначим также середины этих звеньев соответственно через B_1, B_2, \dots, B_n , а их расстояния от оси вращения xx' через y_1, y_2, \dots, y_n . Ясно, что площадь S всей

поверхности, получившейся от вращения ломаной, равна $S_1 + S_2 + \dots + S_n$. Поэтому в силу задачи 1

$$S = 2\pi y_1 \cdot l_1 + 2\pi y_2 l_2 + \dots + 2\pi y_n l_n = \\ = 2\pi (y_1 l_1 + y_2 l_2 + \dots + y_n l_n).$$

Раньше мы видели (стр. 82), что расстояние центра тяжести ломаной от оси xx' можно найти по формуле

$$z = \frac{y_1 l_1 + y_2 l_2 + \dots + y_n l_n}{l}$$

(l — длина всей ломаной). Поэтому $S = 2\pi z \cdot l$, что и требовалось доказать.

3. Вращающаяся линия — произвольная плоская линия (рис. 165).

Пусть l — длина линии, Z — ее центр тяжести, z — расстояние точки Z от оси вращения. Впишем в заданную линию

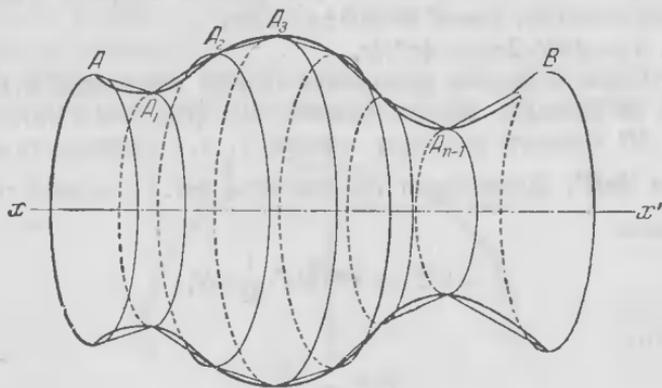


Рис. 165.

ломаную $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$. Пусть $l^{(m)}$ — ее длина. Пусть при вращении вокруг оси xx' кривая линия описывает поверхность с площадью S , а вписанная ломаная — поверхность с площадью $S^{(m)}$. По ранее доказанному,

$$S^{(m)} = 2\pi \cdot z^{(m)} \cdot l^{(m)},$$

где $z^{(m)}$ — расстояние центра тяжести ломаной от оси вращения.

Будем теперь рассматривать ломаные, вписанные в кривую и имеющие все большее и большее число звеньев, причем сами звенья становятся все меньше и меньше — меньше любого заранее указанного отрезка.

Короче эту мысль выражают следующей фразой: «перейдем к пределу, когда $n \rightarrow \infty$, а длина наибольшего звена вписанной ломаной стремится к нулю». Учитывая, что при этих условиях

$$\lim S^{(n)} = S, \quad \lim l^{(n)} = l, \quad \lim z^{(n)} = z,$$

получим

$$S = 2\pi z l,$$

что и требовалось доказать.

4. Периметр шестиугольника — $6a$. Центр тяжести контура шестиугольника — в центре O описанной окружности. Расстояние от O до MN равно a . По первой теореме Гюльдена искомая площадь равна $2\pi a \cdot 6a = 12\pi a^2$.

$$5. S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

6. Сначала найдем положение центра тяжести Z дуги AB . Будем ее вращать вокруг прямой OB (см. рис. 95). Тогда дуга AB опишет половину сферы, т. е. поверхность с площадью $2\pi R^2$. Длина дуги AB равна $\frac{1}{2}\pi R$. По первой теореме Гюльдена

$$2\pi R^2 = 2\pi \cdot DZ \cdot \frac{1}{2}\pi R,$$

так что

$$DZ = \frac{2R}{\pi}.$$

Площадь S поверхности, образующейся при вращении дуги AB вокруг оси AT , равна

$$S = 2\pi \cdot CZ \cdot \frac{1}{2}\pi R = 2\pi \left(R - \frac{2R}{\pi} \right) \frac{1}{2}\pi R = \pi R^2 (\pi - 2).$$

7. Пусть O — центр окружности (рис. 166), \widehat{AB} — данная дуга, AB — стягивающая ее хорда, $OC \perp AB$, $MN \perp OC$.

Центр тяжести Z дуги лежит на радиусе OC (в силу симметрии дуги относительно OC).

При вращении вокруг оси MN дуга \overline{AB} опишет сферический пояс с поверхностью S , где

$$S = 2\pi R \cdot AB = 2\pi R \cdot 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 4\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Так как длина дуги \overline{AB} равна $R\alpha$, то по первой теореме Гюльдена

$$S = 2\pi \cdot OZ \cdot R \cdot \alpha.$$

Сравнивая два выражения для S , найдем

$$OZ = \frac{2R}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Если \overline{AB} — полуокружность, то $\alpha = \pi$ и $OZ = \frac{2R}{\pi}$ (сравните с задачей 2 § 8).

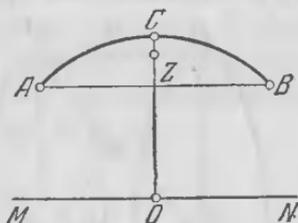


Рис. 166.

8. Пусть ACB и A_1CB_1 (рис. 167) — две дуги окружности единичного радиуса, $\sphericalangle AC = \sphericalangle CB = \alpha$, $\sphericalangle A_1C = \sphericalangle CB_1 = \beta$. O — центр окружности.

Мы будем себе представлять, что эти дуги сделаны из проволоки с погонной плотностью 1 (т. е. любой кусок

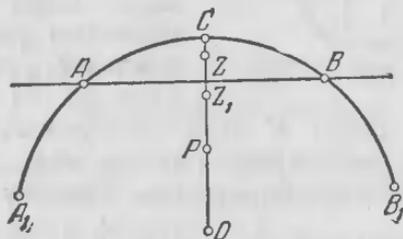


Рис. 167.

проволоки, длиной в 1 единицу, имеет массу, равную 1). Масса дуги ACB равна 2α , а масса дуги A_1CB_1 равна 2β . Так как две дуги AA_1 и BB_1 симметричны относительно OC , то их центр тяжести P лежит на OC .

Пусть Z — центр тяжести дуги ACB . Ясно, что центр тяжести всей дуги A_1CB_1 совпадает с центром тяжести двух материальных точек: $(Z, 2\alpha)$ и $(P, 2\beta - 2\alpha)$. Поэтому Z_1 лежит между P и Z , откуда

$$OZ_1 < OZ.$$

Но в силу решения предыдущей задачи $OZ = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$,
 $OZ_1 = \frac{\sin \beta}{\beta}$, поэтому $\frac{\sin \beta}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

9. Пусть Z (рис. 168) — центр тяжести пластинки $ABCD$, удовлетворяющей условию задачи; $AB \parallel xx'$, $ZK = z$. Объем V тела, образующегося при вращении пластинки, равен (в общем случае) разности объемов двух цилиндров:

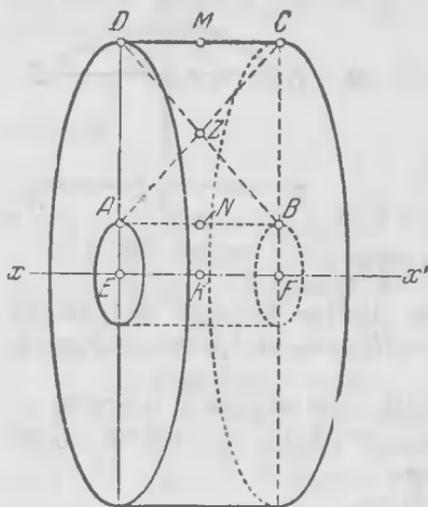


Рис. 168.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot ED^2 \cdot EF - \pi EA^2 \cdot EF = \\ &= \pi (ED - EA) (ED + EA) EF = \pi \cdot AD \cdot EF (KM + KN) = \\ &= \pi \cdot S_{ABCD} \cdot 2KZ = \\ &= 2\pi \cdot z \cdot S_{ABCD}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

10. Обозначим через S_1, S_2, \dots, S_n те n прямоугольников, из которых составлена пластинка, а также их площади; через y_1, y_2, \dots, y_n обозначим расстояния центров тяжести этих прямоугольников от оси вращения.

Понятно, что объем V тела, полученного от вращения всей пластинки, равен сумме объемов тел, полученных от вращения отдельных прямоугольников. Поэтому

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot y_1 \cdot S_1 + 2\pi \cdot y_2 \cdot S_2 + \dots + 2\pi \cdot y_n \cdot S_n = \\ &= 2\pi \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + \dots + y_n S_n}{S} S \text{ (здесь } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n \text{)}. \end{aligned}$$

Но мы раньше уже видели (стр. 86), что величина $\frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + \dots + y_n S_n}{S}$ как раз и равна расстоянию z от центра тяжести рассматриваемой пластинки до оси вращения. Поэтому

$$V = 2\pi \cdot z \cdot S,$$

что и требовалось доказать.

11. Мы можем себе мыслить последовательность «многоугольников из прямоугольников», целиком расположенных на

пластинке, причем площади этих многоугольников неограниченно приближаются к площади S пластинки.

Обозначим площади этих многоугольников через

$$S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(n)}, \dots; \text{ тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} S^{(n)} = S.$$

Обратим внимание на n -й многоугольник этой последовательности. Пусть $Z^{(n)}$ — его центр тяжести, z_n — расстояние от $Z^{(n)}$ до оси вращения, V_n — объем тела, образованного от вращения этого многоугольника вокруг оси.

По ранее доказанному

$$V_n = 2\pi \cdot z_n \cdot S^{(n)}. \quad (1)$$

Пусть теперь n неограниченно возрастает; учтем, что тогда $\lim S^{(n)} = S$, $\lim V_n = V$ (где V — объем тела, полученного от вращения пластинки вокруг оси), $Z^{(n)}$ будет неограниченно приближаться к некоторой точке Z — центру тяжести пластинки, и, следовательно, $\lim z_n = z$.

Переходя к пределу в равенстве (1), получим

$$V = 2\pi \cdot z \cdot S,$$

что и требовалось доказать.

12. По второй теореме Гюльдена

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2.$$

13. Сначала определим положение центра тяжести полукруга. В силу симметрии полукруга относительно прямой OT его центр тяжести лежит на OT .

Будем вращать полукруг вокруг AB . Тогда он опишет шар с объемом $\frac{4}{3} \pi R^3$. Так как площадь полукруга $\frac{1}{2} \pi R^2$, то

$$2\pi \cdot OZ \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3. \text{ Отсюда } OZ = \frac{4R}{3\pi}, TZ = R \left(1 - \frac{4}{3\pi} \right).$$

Искомый объем V равен:

$$V = 2\pi \cdot TZ \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi}{3} (3\pi - 4) R^3.$$

14. Будем вращать пластинку вокруг оси xx' , проходящей через A и перпендикулярной к AO . Тогда объем V тела, образовавшегося при вращении пластинки, найдем, если из

объема тела, получившегося от вращения шестиугольника, вычтем объем тела, образовавшегося от вращения квадрата. Поэтому

$$V = 2\pi a \cdot 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - 2\pi \frac{a}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = \pi a^3 (3\sqrt{3} - \frac{1}{2}).$$

Пусть Z — искомый центр тяжести пластинки. В силу симметрии пластинки относительно прямой AD центр тяжести пластинки лежит на AD . Так как площадь пластинки равна

$$6 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} - \left(a \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = (3\sqrt{3} - 1) \frac{a^2}{2},$$

то по второй теореме Гюльдена

$$V = 2\pi \cdot AZ \cdot (3\sqrt{3} - 1) \frac{a^2}{2}.$$

Сравнивая два выражения для V , найдем

$$AZ = \frac{6\sqrt{3} - 1}{6\sqrt{3} - 2} a.$$

Поэтому

$$OZ = AZ - a = \frac{1}{6\sqrt{3} - 2} a = \frac{3\sqrt{3} + 1}{52} a.$$

15. Пусть O — центр квадрата (см. рис. 98), R — расстояние от оси вращения до O . Тогда

$$R = AO \cdot \sin(\varphi + 45^\circ) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin(\varphi + 45^\circ).$$

Объем V и поверхность S тела вращения найдем по теоремам Гюльдена:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi R \cdot a^2 = 2\pi \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin(\varphi + 45^\circ) a^2 = \\ &= \pi a^3 \sqrt{2} \cdot \sin(\varphi + 45^\circ), \end{aligned}$$

$$S = 2\pi R \cdot 4a = 4\pi a^2 \sqrt{2} \sin(\varphi + 45^\circ).$$

16. Расстояние R от центра O треугольника ABC до оси вращения равно $AO \cdot \sin(\varphi + 30^\circ) = \frac{a\sqrt{3}}{3} \sin(\varphi + 30^\circ)$.

В силу теорем Гюльдена

$$V = 2\pi R \cdot S_{ABC} = 2\pi \frac{a\sqrt{3}}{3} \sin(\varphi + 30^\circ) \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\pi a^3 \cdot \sin(\varphi + 30^\circ),$$

$$S = 2\pi R \cdot 3a = 2\pi a^2 \sqrt{3} \cdot \sin(\varphi + 30^\circ).$$

17. Пусть Z (рис. 169) — центр тяжести сектора $OACB$. Ясно, что Z лежит на оси симметрии сектора (на прямой OC). Найдём расстояние OZ . При вращении сектора вокруг оси s , перпендикулярной к OC и проходящей через точку O , образуется тело, называемое *сферическим сектором*. Его объём V равен (см. А. П. Киселев, Геометрия, ч. 2) $\frac{2}{3}\pi R^2 h$, где $h = AB = 2R \cdot \sin \alpha$. Площадь сектора S равна $R^2 \alpha$. По второй теореме Гюльдена

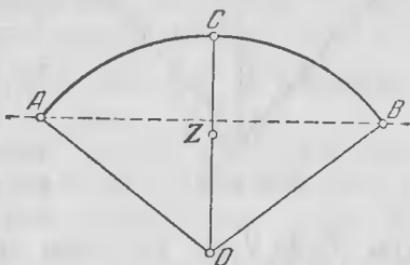


Рис. 169.

$$V = 2\pi \cdot OZ \cdot S,$$

следовательно,

$$\frac{2}{3}\pi R^2 h = 2\pi \cdot OZ \cdot R^2 \alpha,$$

откуда

$$OZ = \frac{1}{3} \frac{h}{\alpha}, \quad (1)$$

или

$$OZ = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (2)$$

Пусть длина дуги ACB равна l . Тогда

$$l = 2\alpha \cdot R, \quad \alpha = \frac{l}{2R}.$$

Поэтому из (1) получим

$$OZ = \frac{2h}{3l} R. \quad (3)$$

18. Воспользуемся предыдущей задачей. Пусть $ACBA$ (рис. 170) — данный сегмент, O — центр круга.

Будем считать, что сектор $OACB$ представляет собой однородную пластинку, причем поверхностная плотность (т. е. масса любого куска пластинки, имеющего площадь, равную 1 единице) равна 1. Пусть P — центр тяжести сектора, S_1 — его площадь, T — центр тяжести треугольника AOB , S_2 — его площадь, Z — центр тяжести сегмента $ACBA$, S — его площадь.

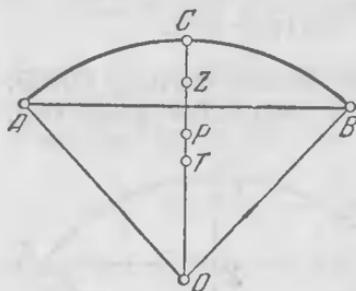


Рис. 170.

Мы можем считать, что площадь каждой из трех фигур: сегмента, треугольника и сектора — сосредоточена в ее центре тяжести. Тогда у нас возникают три материальные точки (Z, S) , (T, S_2) и (P, S_1) , причем третья является объединением первых двух. Поэтому

$$S_1 \cdot OP = S \cdot OZ + S_2 \cdot OT,$$

откуда

$$OZ = \frac{-S_2 \cdot OT + S_1 \cdot OP}{S}.$$

Пусть дуга ACB содержит 2α радиан. Тогда

$$S_1 = R^2 \alpha, \quad S_2 = R^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha,$$

$$OT = \frac{2}{3} R \cos \alpha, \quad OP = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

поэтому

$$OZ = \frac{R^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} - R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2}{3} R \cos \alpha}{S},$$

т. е.

$$OZ = \frac{2}{3} \frac{R^3}{S} \sin^3 \alpha. \quad (1)$$

Пусть $AB = 2a$; тогда $R \cdot \sin \alpha = a$ и

$$OZ = \frac{2a^3}{3S}. \quad (2)$$

Если были бы даны α и R , то S можно бы найти и так:

$$S = S_1 - S_2 = R^2 (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha). \quad (3)$$

Тогда в силу формулы (1) мы получили бы

$$OZ = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \quad (4)$$

Другая идея. Сначала вычислить объем тела, полученного от вращения сегмента ACB вокруг диаметра MN , перпендикулярного к OC (этот объем равен $\frac{1}{6} \pi \cdot AB^3$), затем воспользоваться второй теоремой Гюльдена.

19. На окружности единичного радиуса (рис. 171) отложим по обе стороны от некоторой точки C дуги $CA = CB = \alpha$, $CA_1 = CB_1 = \beta$. Пусть Z, Z_1 и P соответственно центры тяжести сегмента $ACBA$, сегмента $A_1CB_1A_1$ и полосы A_1ABB_1 , а S, S_1 и S_2 — их площади.

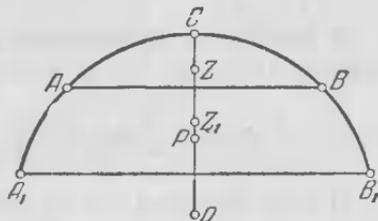


Рис. 171.

Мы представляем сегмент $A_1CB_1A_1$ в виде однородной пластинки с поверхностной плотностью, равной 1. Сосредоточим мысленно массы сегмента $ACBA$ и полосы A_1ABB_1 в их центрах тяжести. Тогда центром тяжести образовавшихся двух материальных точек (Z, S) и (P, S_2) будет служить точка Z_1 — центр тяжести сегмента $A_1CB_1A_1$. Поэтому точка Z_1 находится на отрезке PZ , так что

$$OZ_1 < OZ. \quad (1)$$

Но в силу решения предыдущей задачи (см. формулу (4))

$$OZ = \frac{4}{3} R \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}, \quad OZ_1 = \frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \beta}{2\beta - \sin 2\beta}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает доказываемое неравенство.

20. По второй теореме Гюльдена

$$V = 2\pi FZ \cdot S,$$

где Z (см. рис. 101) — центр тяжести сегмента $ACBA$, а S — площадь сегмента. Но $FZ = OZ - OF$. Поэтому

$$V = 2\pi \cdot OZ \cdot S - 2\pi \cdot OF \cdot S.$$

Но в силу решения задачи 18 (см. формулу (2)) $OZ = \frac{2a^3}{3S}$, откуда $2\pi \cdot OZ \cdot S = \frac{4}{3} \pi a^3$. Найдем OF . Пусть R — радиус круга. Тогда $OF^2 = R^2 - a^2$. Но ясно, что $FC \cdot FD = FA^2$, т. е. $b(2R - b) = a^2$, откуда $R = \frac{a^2 + b^2}{2b}$. Поэтому $OF^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2b}\right)^2 - a^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2b}\right)^2$. Отсюда получим, что $OF = (a^2 - b^2) : 2b$. Итак,

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 - \pi \frac{a^2 - b^2}{b} S. \quad (1)$$

В общем случае возможно S выразить через a и b следующим образом. Пусть угол AOC содержит α радиан. Тогда

$$\sin \alpha = \frac{a}{R} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \arcsin \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

В силу формулы (3) из решения задачи 18

$$S = \frac{1}{2} R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha). \quad (3)$$

Формулы (1) — (3) позволяют вычислить S , если известны a и b .

На практике было бы удобнее найти S по известной приближенной формуле (см. А. П. Киселев, Геометрия, ч. 1):

$$S \approx \frac{2}{3} AB \cdot FC = \frac{4}{3} ab.$$

Тогда получим

$$V \approx \frac{4}{3} \pi a^3 - \pi \frac{a^2 - b^2}{b} \frac{4}{3} ab,$$

т. е.

$$V \approx \frac{4}{3} \pi \cdot ab^2. \quad (4)$$

§ 10

1. Пусть в первой смеси концентрации компонент A и B равны соответственно a_1 и b_1 , а во второй смеси — a_2 и b_2 . Тогда в первой смеси имеется $m_1 \cdot a_1$ единиц компоненты A и $m_1 \cdot b_1$ единиц компоненты B , а во второй смеси — $m_2 \cdot a_2$ единиц компоненты A и $m_2 \cdot b_2$ единиц компоненты B . Следовательно, в объединении этих смесей $m_1 a_1 + m_2 a_2$ единиц компоненты A и $m_1 b_1 + m_2 b_2$ единиц компоненты B . Поэтому концентрации компонент A и B равны соответственно $(m_1 a_1 + m_2 a_2) : m$ и $(m_1 b_1 + m_2 b_2) : m$, где $m = m_1 + m_2$. Если материальная точка (K, m) характеризует новую смесь, то

$$AK = \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m}, \quad KB = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m}.$$

Но тогда

$$K_1 K = AK - AK_1 = \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} - b_1 = \frac{m_2 (b_2 - b_1)}{m_1 + m_2}.$$

Аналогично

$$K K_2 = AK_2 - AK = b_2 - \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (b_2 - b_1)}{m_1 + m_2}.$$

Поэтому

$$\frac{K_1 K}{K K_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

а это как раз и означает, что K — центр тяжести двух материальных точек (K_1, m_1) и (K_2, m_2) .

2. а) Изобразим данные растворы с помощью материальных точек. Для этого возьмем отрезок AB длиной в одну единицу (рис. 172). Пусть точка A будет изображать чистую воду

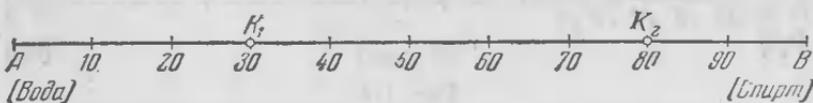


Рис. 172.

(100% воды), B — чистый спирт (100% спирта). Первый раствор изобразится тогда материальной точкой $K_1 \equiv (K_1, 400)$, где $AK_1 = 0,3$ (отметка «30» возле точки K_1 означает, что

AK_1 содержит 30 сотых). Второй раствор изобразится с помощью материальной точки $K_2 \equiv (K_2, 600)$. Объединением этих двух растворов будет раствор $K \equiv (K, 1000)$, где $K \equiv Z[K_1, K_2]$. По правилу рычага

$$\frac{K_1 K}{K K_2} = \frac{600}{400} = \frac{3}{2}.$$

Полагаем $AK = x$. Тогда получим: $\frac{x - 0,3}{0,8 - x} = \frac{3}{2}$, откуда $x = 0,6$. Итак, концентрация спирта в растворе $(K, 1000)$ составляет 60%. Тот же результат можно было бы получить и из соотношения

$$\text{Мом}_A K \equiv \text{Мом}_A K_1 + \text{Мом}_A K_2,$$

т. е. $1000 \cdot x = 400 \cdot 0,3 + 600 \cdot 0,8$. Задача может быть решена и чисто графически.

3. Пусть (рис. 173) точка A соответствует чистой воде, точка B — чистой серной кислоте. Задача сводится к нахождению массы материальной точки (A, m) , если известно, что

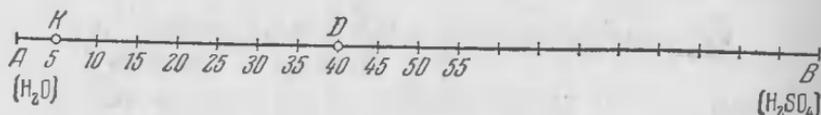


Рис. 173.

центром тяжести материальных точек (A, m) и $(D, 130)$ служит точка K .

По правилу рычага $\frac{m}{130} = \frac{KD}{AK} = \frac{7}{1}$, откуда $m = 910$ (г).

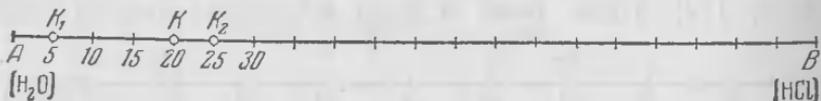


Рис. 174.

4. Задача сводится к нахождению массы материальной точки (K_1, m) (рис. 174) из условия

$$(K_1, m) + (K_2, 600) = (K, m + 600).$$

По правилу рычага

$$\frac{m}{600} = \frac{KK_2}{KK_1} = \frac{1}{3},$$

т. е.

$$m = 200 \text{ (г)}.$$

5. Задача сводится к разложению материальной точки $(K, 1000)$ (рис. 175) по двум носителям — C и D . Иначе



Рис. 175.

говоря, нужно подобрать две массы x и $1000 - x$ так, чтобы

$$Z[(C, x), (D, 1000 - x)] \equiv K.$$

По правилу рычага

$$\frac{CK}{KD} = \frac{1000 - x}{x}, \text{ т. е. } \frac{11}{24} = \frac{1000 - x}{x},$$

отсюда

$$x \approx 685 \text{ (г)}.$$

6. В образовавшейся смеси сахару будет $\frac{280}{500} \cdot 100\%$, т. е. 56% . Этой смеси соответствует на рис. 176 точка K , а насыщенному (41-процентному раствору сахара в воде) соответствует точка D . Задача сводится к разложению материальной

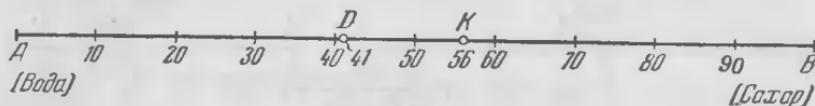


Рис. 176.

точки $(K, 500)$ на две материальные точки с носителями D и B . Пусть выделится в осадке m граммов сахара. Тогда по правилу

рычага $\frac{m}{500 - m} = \frac{KD}{KB} = \frac{15}{44}$, откуда (составляя производную пропорцию) получим: $\frac{m}{500} = \frac{15}{59}$, $m \approx 127 \text{ (г)}.$

7. Пусть теорема (см. «ответы») верна при $n=p$. Это значит: при смешении смесей

$$(K_1, m_1), (K_2, m_2), \dots, (K_p, m_p)$$

получится смесь $(C, m_1 + m_2 + \dots + m_p)$, определяемая из условия: $(C, m_1 + \dots + m_p) = (K_1, m_1) + (K_2, m_2) + \dots + (K_p, m_p)$. (1)

Докажем, что тогда теорема верна и при $n=p+1$. Действительно, смесь, получающаяся от смешения $p+1$ смесей

$$(K_1, m_1), \dots, (K_p, m_p), (K_{p+1}, m_{p+1}),$$

совпадает, очевидно, со смесью, которая получится от смешения двух смесей:

$$(C, m_1 + \dots + m_p) \text{ и } (K_{p+1}, m_{p+1}).$$

Но в силу задачи 1 эта смесь характеризуется материальной точкой, определяемой из условия:

$$(K, m) = (C, m_1 + \dots + m_p) + (K_{p+1}, m_{p+1}).$$

Если еще учтем написанное выше равенство (1), то получим:

$$(K, m) = (K_1, m_1) + \dots + (K_p, m_p) + (K_{p+1}, m_{p+1}).$$

Итак, теорема верна при $n=p+1$, если она верна при $n=p$. Кроме того, она верна при $n=1$. Следовательно, она верна для любого натурального n .

8. Обозначим концентрацию золота в четвертом слитке через x . Тогда пяти образовавшимся слиткам соответствуют материальные точки (см. рис. 177) $K_1 \equiv (K_1, 300)$, $K_2 \equiv (K_2, 200)$,

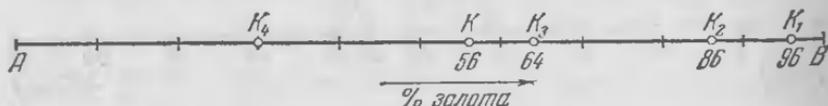


Рис. 177.

$K_3 = (K_3, 400)$, $K_4 = (K_4, 800)$ (где $AK_4 = x$) и $K = (K, 1700)$. В силу задачи 7

$$K = Z[K_1, K_2, K_3, K_4].$$

Ясно, что точка K_4 лежит левее точки K (в противном случае мы смогли бы получить из этих четырех слитков сплав с 56%

золота). Но сумма моментов относительно K материальных точек, лежащих слева от центра тяжести системы, равна сумме моментов тех точек, которые лежат справа от того же центра тяжести. Поэтому

$$m_4 \cdot KK_4 = m_3 \cdot KK_3 + m_2 \cdot KK_2 + m_1 \cdot KK_1,$$

или

$$800 \cdot (0,56 - x) = 400 \cdot 0,08 + 200 \cdot 0,30 + 300 \cdot 0,40;$$

отсюда

$$x = 0,295,$$

т. е. $x = 29,5\%$.

Другая идея. Воспользоваться тем, что

$$\text{Мом}_A K = \text{Мом}_A K_1 + \text{Мом}_A K_2 + \text{Мом}_A K_3 + \text{Мом}_A K_4.$$

10. Выберем (рис. 178) на стороне CA точку P_1 так, чтобы отрезок CP_1 составлял 60% от CA (иными словами, P_1 — это точка с пометкой «60»). Через P_1 проводим параллель к BC . Выберем затем на AB точку P_2 так, чтобы отрезок AP_2 составлял 30% от AB (иначе говоря, P_2 — это точка с пометкой «30»). Через P_2 проводим параллель к AC . В пересечении две построенные прямые дадут искомую точку K .

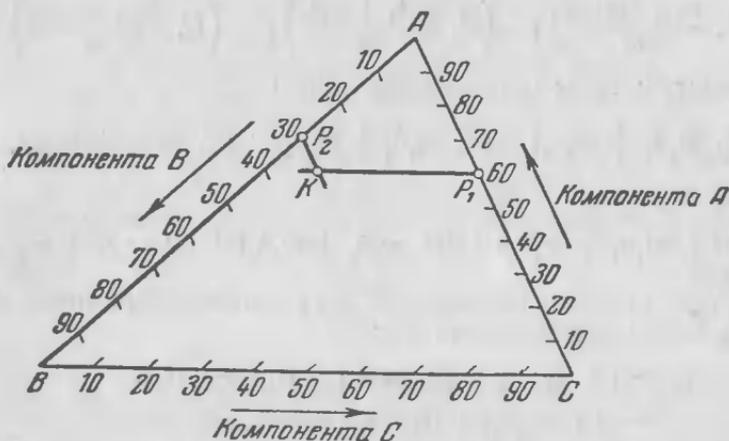


Рис. 178.

лель к BC . Выберем затем на AB точку P_2 так, чтобы отрезок AP_2 составлял 30% от AB (иначе говоря, P_2 — это точка с пометкой «30»). Через P_2 проводим параллель к AC . В пересечении две построенные прямые дадут искомую точку K .

17. Пусть концентрации компонент A , B , C в первой смеси равны соответственно a_1 , b_1 , c_1 , а во второй смеси — a_2 , b_2 , c_2 . Тогда первая смесь содержит $m_1 \cdot a_1$ единиц компоненты A , $m_1 b_1$ единиц компоненты B и $m_1 c_1$ единиц компоненты C ; вторая смесь содержит $m_2 a_2$ единиц компоненты A , $m_2 b_2$ единиц компоненты B и $m_2 c_2$ единиц компоненты C . Следовательно, в объединении этих смесей компоненты A , B , C будут содержаться соответственно в количествах $m_1 a_1 + m_2 a_2$, $m_1 b_1 + m_2 b_2$, $m_1 c_1 + m_2 c_2$. Поэтому в новой смеси, имеющей массу m ($m = m_1 + m_2$), концентрации компонент A , B , C равны соответственно

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m}, \quad \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m}, \quad \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m}.$$

Поэтому, если материальная точка

$$K \equiv (K, m)$$

соответствует новой смеси, то точка K — центр тяжести трех материальных точек

$$\left(A, \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m}\right), \quad \left(B, \frac{m_1 b_1 + m_2 b_2}{m}\right), \quad \left(C, \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m}\right),$$

а значит, и таких материальных точек:

$$(A, m_1 a_1 + m_2 a_2), \quad (B, m_1 b_1 + m_2 b_2), \quad (C, m_1 c_1 + m_2 c_2).$$

Таким образом,

$$K = (A, m_1 a_1 + m_2 a_2) + (B, m_1 b_1 + m_2 b_2) + (C, m_1 c_1 + m_2 c_2).$$

С другой стороны, объединение двух материальных точек K_1 и K_2 можно преобразовать так:

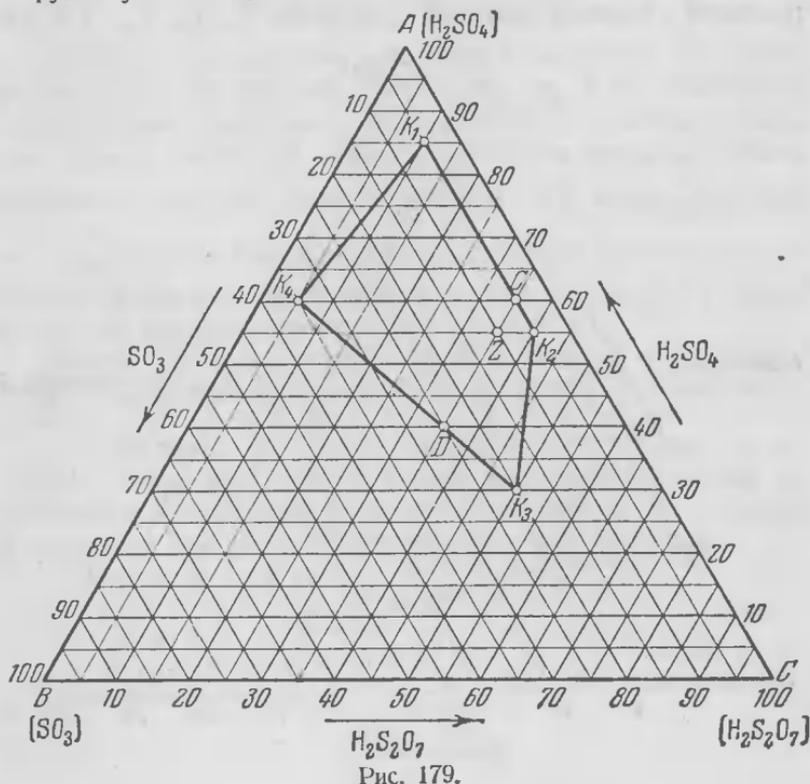
$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= [(A, m_1 a_1) + (B, m_1 b_1) + (C, m_1 c_1)] + \\ &\quad + [(A, m_2 a_2) + (B, m_2 b_2) + (C, m_2 c_2)] = \\ &= (A, m_1 a_1 + m_2 a_2) + (B, m_1 b_1 + m_2 b_2) + (C, m_1 c_1 + m_2 c_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K = K_1 + K_2,$$

что и требовалось доказать.

21. На рис. 179 точки K_1, K_2, K_3, K_4 характеризуют составы четырех сортов блеума. Задача сводится к нахождению центра тяжести четырех материальных точек: $(K_1, 24)$, $(K_2, 120)$, $(K_3, 32)$, $(K_4, 16)$. Пользуясь правилом рычага, нетрудно убедиться, что центром тяжести двух материальных



точек $(K_1, 24)$ и $(K_2, 120)$ служит на рис. 179 точка C , а центром тяжести двух материальных точек $(K_3, 32)$ и $(K_4, 16)$ служит точка D . Находим затем центр тяжести Z материальных точек $(C, 144)$ и $(D, 48)$ (см. рис. 179). Эта точка характеризует состав объединения четырех данных сортов блеума. По диаграмме Гиббса устанавливаем состав образовавшейся смеси.

22. Пусть четыре рассматриваемые смеси изображаются точками K_1, K_2, K_3, K (рис. 180). Задача сводится к пред-

ставлению материальной точки ($K, 1$) в виде объединения трех материальных точек с носителями K_1, K_2, K_3 . Пусть массы (искомые) этих трех материальных точек соответственно m_1, m_2, m_3 . Проведем через K и каждую вершину треугольника $K_1K_2K_3$ прямую и отметим ее точку встречи с противоположной стороной; получим три точки L_1, L_2, L_3 . Так как

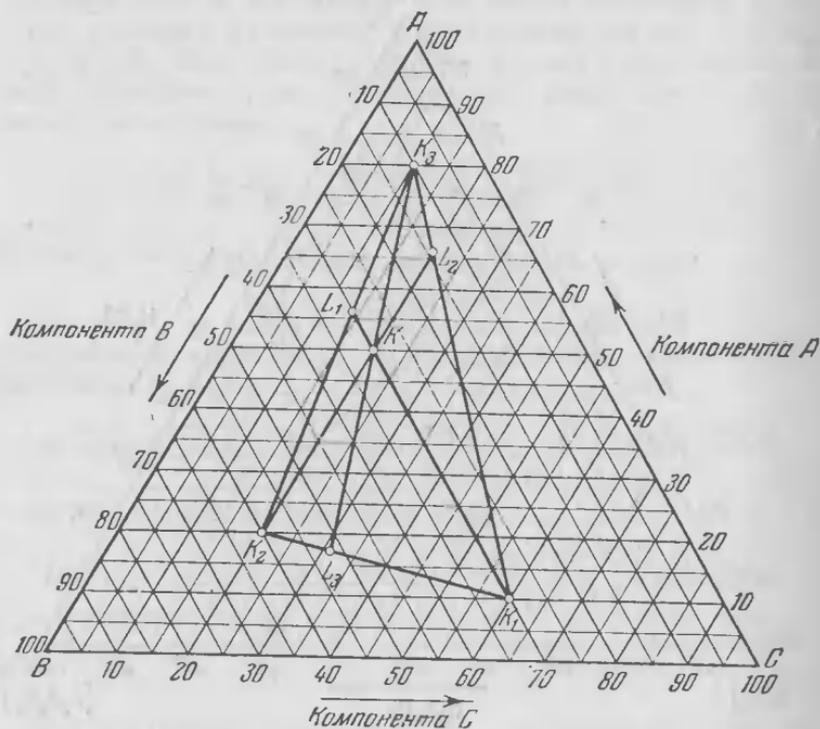


Рис. 180.

K — центр тяжести трех материальных точек (K_1, m_1), (K_2, m_2) и (K_3, m_3), то отсюда нетрудно заключить, что

$$\frac{m_1}{m_2 + m_3} = \frac{L_1K}{KK_1}.$$

Составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{L_1K}{L_1K_1}.$$

Так как $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, то

$$m_1 = \frac{L_1 K}{L_1 K_1}.$$

Аналогично

$$m_2 = \frac{L_2 K}{L_2 K_2} \text{ и } m_3 = \frac{L_3 K}{L_3 K_3}.$$

Длины шести отрезков, входящих в последние три дроби, можно найти из чертежа. Числа m_1 , m_2 и m_3 показывают концентрации, с которыми должны войти в требуемую смесь три данные смеси. В нашем конкретном примере найдем, пользуясь рис. 180, что $m_1 = \frac{3}{23} \approx 0,13$, $m_2 = \frac{8}{23} \approx 0,35$,

$m_3 = \frac{12}{23} \approx 0,52$. Иными словами, аптекарю нужно для составления каждых 100 г требуемой смеси взять 13 г первой смеси, 35 г второй смеси и 52 г третьей.

Задача 22 не имеет решения, если точка K вне треугольника $K_1 K_2 K_3$; нужную смесь в этом случае невозможно составить.

Случай, когда $\triangle K_1 K_2 K_3$ вырождается в отрезок, не составляет исключения. Но тогда для разрешимости задачи необходимо, чтобы точка K лежала на этом отрезке. Задача в последнем случае имеет бесконечно много решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О МАТЕМАТИКАХ, УНОМЯНУТЫХ В ЭТОЙ КНИГЕ

Архимед (287—212 до н. э.) — гениальный древнегреческий математик. Родился и почти всю жизнь провел в Сиракузах (Сицилия). Во время осады Сиракуз римлянами оказал большие услуги родному городу, изобретая различные военные орудия и заградительные сооружения. Был убит при взятии города римлянами.

Архимед впервые изучил понятие о центре тяжести. Пользуясь приемом «взвешивания площадей», он вычислил площадь параболического сегмента. Аналогичным приемом он впервые вычислил объем шара и шарового сегмента.

В интересной работе «Об измерении круга» он показывает, что число π (отношение длины окружности к ее диаметру) заключено между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Тем самым он дает приближение для π , достаточное почти во всех случаях, встречающихся на практике. Архимед нашел формулы для объема и поверхности шара. Он впервые обнаружил и изучил так называемые полуправильные многогранники, носящие его имя (они составлены из правильных многоугольников *нескольких* различных наименований, в то время как правильные многогранники составлены из правильных многоугольников *одного и того же* наименования; детальнее о полуправильных телах Архимеда см., например, в книге Д. И. Перепелкина «Курс элементарной геометрии», ч. II). Архимед указал любопытный способ деления угла на три равные части посредством циркуля и линейки с двумя пометками (если нет пометок на линейке, то задача вовсе не разрешима). Им же указан приближенный способ для деления окружности на семь равных частей, который применяют до сих пор.

Архимед в своих исследованиях пользуется, по существу, идеями интегрального исчисления, которое было развито лишь в XVII—XVIII веках, через 2000 лет после его смерти.

Большой интерес представляют работы Архимеда по арифметике (сочинение «Исчисление песчинок») и по гидростатике («О плавающих телах», где дан известный «закон Архимеда»).

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — один из величайших математиков мира, внесший существенный вклад почти во все отрасли математики.

Еще в детские годы Гаусса его исключительные способности к математике и языкознанию привлекли к себе внимание его земляков, и это позволило ему, сыну бедного водопроводчика из Брауншвейга (Германия), получить образование. Гаусс почти 50 лет занимал кафедру математики и астрономии в Геттингенском университете (Германия), в котором раньше учился. Уже в 19 лет Гаусс сделал замечательное открытие: он полностью выяснил, в каких случаях возможно построить правильный n -угольник циркулем и линейкой. В 1799 г. Гаусс доказал так называемую «основную теорему алгебры» о существовании корня у всякого алгебраического уравнения n -й степени. Его книга «Арифметические исследования», написанная им в 1796—1801 гг., послужила основой для современной теории чисел.

В 1801 г. была обнаружена первая малая планета, названная Церерой. Однако после нескольких наблюдений астрономы ее потеряли из виду. Гаусс разработал способ, позволяющий по трем наблюдениям восстановить всю орбиту планеты. С помощью этих вычислений было указано место, где должна была находиться Церера, и она там действительно была обнаружена.

В связи с запросами астрономии Гаусс занялся также теорией рядов и дифференциальными уравнениями. Он опубликовал по этим разделам математического анализа фундаментальные исследования.

Гауссу было поручено составить подробную карту Ганноверского королевства. В связи с этой работой Гаусс фактически создал новую науку «высшая геодезия» и разработал теорию поверхностей. В 1830—1840 гг. Гаусс разрабатывал отдельные вопросы теоретической физики (магнитные явления, оптика).

Гауссу принадлежат важнейшие методы вычислительной математики (заметим, что он сам был отличным вычислителем). Независимо от Н. И. Лобачевского Гаусс пришел к идее о неевклидовой геометрии.

Джошуа Виллард Гиббс (правильнее Джиббс, 1839—1903 гг.) работал в областях, смежных для химии, физики и математики. Наиболее интересные его работы относятся к термодинамике.

Гиббс родился и почти всю свою жизнь прожил в г. Нью-Хевене (США), где свыше 30 лет был профессором математической физики Йельского университета.

В физико-химическом анализе фундаментальное значение имеет так называемое «правило фаз» Гиббса, позволившее объединить многочисленные разрозненные экспериментальные результаты.

Поль Гюльдён (по-немецки Пауль Гульдин, 1577—1643 гг.), родом из Швейцарии. В 20 лет стал монахом ордена иезуитов. Преподавал математику в иезуитских училищах в Риме и Граце (Австрия). Его четырехтомный труд «Центробарика» был опубликован в 1635—1641 гг. Гюльден резко критиковал тех математиков (например, Кеплера и Кавальери), которые использовали в математических рассуждениях идею предельного перехода. Он считал такие рассуждения ненаучными. Любопытно, что именно на основании идеи предельного перехода и доказывают сейчас «теоремы Гюльдена».

Жирар Дезарг (1593—1662 гг.) — французский геометр; архитектор и военный инженер по профессии. Один из основоположников «проективной геометрии». Идеи Дезарга были поняты лишь немногими из его современников и были развиты только лет через 200 после его смерти в трудах Понселё, Штейнера, Бриансона и других геометров.

Жозёф Жергон (1771—1859 гг.) — французский геометр, издатель известного математического журнала. Из исследований Жергона по элементарной математике укажем на интересные работы, посвященные геометрии треугольника. Оригинален стереометрический метод, примененный Жергоном для решения задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных (см., например, об этом в «Теории геометрических построений» А. Адлера).

Лазарь Карно (1753—1823 гг.) — видный общественный деятель Франции эпохи французской буржуазной революции. Когда реакционные правительства Европы напали на молодую французскую республику, Карно руководил организацией 14 армий, выступивших против врага, и лично участвовал в сражениях. Был прозван современниками «организатором

побед». Будучи убежденным республиканцем, Карно энергично выступал против предоставления власти Наполеону Бонапарту (в частности, против объявления Наполеона императором Франции).

После реставрации Бурбонов в 1815 г. Карно оставил родину и прожил до смерти в Германии.

Наиболее ценные геометрические результаты Карно собраны в книгах «Геометрия положения» (1803 г.) и «Очерк теории трансверсалий» (1806 г.). Здесь он устанавливает ряд теорем, входящих сейчас в так называемую «проективную геометрию». Понятие о центре тяжести он использует, в частности, в книге «Геометрия положения», причем он ограничивается тем случаем, который соответствует нагрузке точек равными массами; в связи с этим он и употребляет вместо термина «центр тяжести» термин «центр средних расстояний».

Карно принадлежат также книги по математическому анализу («Размышление о метафизике исчисления бесконечно малых», 1797 г.), по военно-инженерному делу (трехтомное сочинение «Об обороне крепостей», 1810 г.) и по теории машин («Опыт о машинах вообще», 1783 г.).

Иоганн Кеплер (1571—1630 гг.) — видный германский астроном, последователь Коперника. Открыл носящие теперь его имя законы движения планет. Кеплер впервые правильно объяснил причину приливов и отливов и природу комет, изучал рефракцию, изобрел новую систему телескопа.

В то же время Кеплер всегда увлекался мистикой. Так, например, его большой труд «Гармония мира» (в которой дается его третий закон и где рассматривается теория полуправильных многогранников) в основном заполнен мистическими рассуждениями о «музыке небесных движений». Кеплер во время 30-летней войны состоял при полковнике Валленштейне в качестве астролога (предсказателя событий по звездам).

В своей книге «Новая стереометрия винных бочек» (1615 г.) Кеплер вычисляет объемы большого числа тел, ограниченных кривыми поверхностями («тела Кеплера»), пользуясь фактически идеями интегрального исчисления, которые были систематически разработаны лишь более чем через полвека после Кеплера.

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813 гг.) был одним из виднейших математиков и механиков XVIII века. Теперь

в учебниках по математическому анализу и теории функций обязательно встретишь формулу Лагранжа, теорему Лагранжа, ряд Лагранжа, метод Лагранжа и т. п. Лагранж вместе с Эйлером разработал такой важный раздел математического анализа, как вариационное исчисление. В своей знаменитой «Аналитической механике» он впервые формулирует важный и плодотворный «принцип возможных перемещений», впервые дает уравнения движения, носящие сейчас его имя.

Лагранж родился в итальянском городе Турине, там он начал, 17 лет от роду, свою преподавательскую деятельность в артиллерийской школе. В течение двадцати лет (1766—1787) был президентом Берлинской Академии наук. Был профессором в знаменитой Французской политехнической школе, из которой вышли многие видные французские математики и инженеры.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716 гг.) — гениальный ученый, оказавший громадное влияние на развитие математики. Родился в Лейпциге (Германия).

Лейбниц вместе с И. Ньютоном делит честь открытия исчисления бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчислений) — открытия, послужившего поворотным пунктом в истории математики.

Лейбниц отличался исключительной разносторонностью и необычайным богатством творческой фантазии. Он проявил себя не только как один из величайших математиков, но и как выдающийся философ, историк, юрист, дипломат, языковед. Он изобрел одну из первых вычислительных машин. Лейбниц впервые высказал идеи, предвосхитившие важный раздел современной математики — математическую логику.

Симон Люилье (L'Huilier) (1750—1810 гг.) — швейцарский математик и философ. В течение многих лет (начиная с 1775 г.) жил и работал в Варшаве. Работал в различных областях геометрии, алгебры и анализа. В частности, хорошо известны выведенные им формулы сферической тригонометрии («формулы Люилье»).

В качестве примера геометрической задачи, которой занимался Люилье, можно назвать задачу о вписании в данную окружность многоугольника, стороны которого проходят через данные точки. Его исследования о применении понятия центра тяжести к решению геометрических задач (главным образом, на разыскание геометрических мест) собраны им, в основном, в книге «Элементы геометрического и алгебраического анализа,

примененные к разысканию геометрических мест» (Париж, 1809).

Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868 гг.)—видный немецкий геометр и астроном. Жил в Лейпциге, где долгое время был директором обсерватории и профессором университета. Известен прежде всего своим барицентрическим методом (1827), который был им применен для разработки проективной геометрии. В 1858 г. Мёбиус первый обнаружил существование поверхностей, имеющих только одну сторону (О «листе Мёбиуса» см., например, в книге «Что такое математика» Р. Куранта и Г. Роббинса). Мёбиус занимался изучением геометрического преобразования, известного под названием «инверсия». Большой интерес представляют так же работы Мёбиуса по механике.

Менелай из Александрии (I век н. э.)—греческий геометр и астроном. Много занимался вопросами сферической геометрии (т. е. изучением геометрических фигур на поверхности шара), в виду их приложений к астрономии. Теорема Менелая послужила отправным пунктом теории трансверсалией Лазаря Карно.

Папп из Александрии (IV в. н. э.)—последний крупный математик древней Греции. Из его сочинений до нас дошли только «Математические коллекции», в которых собрано много интересных теорем. Видимо, некоторые из них принадлежат самому Паппу.

Мы уже выше говорили о теоремах Паппа—Гюльдена и теореме Паппа—Паскаля. Здесь уместно привести еще одну теорему Паппа: «Центр тяжести треугольника совпадает с центром тяжести другого треугольника, вершины которого лежат на сторонах данного и делят их в одном и том же отношении». Паппу принадлежит также одна теорема, обобщающая теорему Пифагора.

Джованни Чева (1648—1734 гг.)—итальянский геометр. По профессии инженер-гидравлик. Работал и умер в г. Мантуе. Считался также видным специалистом в области экономики. В его сочинении «О прямых линиях» (1678 г.) он дает помимо механического доказательства своей теоремы еще два чисто геометрических доказательства.

Леонард Эйлер (1707—1783 гг.)—один из величайших математиков всех времен. Работал во всех отраслях математики, решая с изумительной находчивостью многие труднейшие

задачи. Оставил громадное научное наследство (известны 865 его сочинений). Новые сочинения Эйлера печатались еще в течение 80 лет после его смерти.

Эйлер родился в Базеле (Швейцария) в семье пастора. В 1727 г. он был приглашен на работу в открывшуюся тогда Петербургскую Академию наук.

В России он прожил с перерывом (с 1741 по 1766 г. он жил в Берлине) свыше 30 лет. Большинство его работ опубликовано в изданиях С.-Петербургской Академии наук. Геометрические теоремы Эйлера, о которых мы говорили выше, опубликованы там же.

Хотя Эйлер в 1736 г. ослеп на один глаз (после выполнения срочной вычислительной работы), а лет через 30 ослеп и на второй глаз, это не сказалось ни на качестве, ни на количестве его научной продукции. Особенно многочисленны его работы в области математического анализа, где постоянно можно встретиться с формулами Эйлера, методами Эйлера, функциями Эйлера, числами Эйлера, теоремами Эйлера и т. д. Эйлера можно по праву назвать одним из создателей интегрального исчисления и вариационного исчисления (два важных раздела «высшей математики»).

Большое влияние на развитие науки оказали труды Эйлера по теории чисел и другим разделам математики, по астрономии (например, «Теория движения луны»), по мореплаванию (книга «Морская наука»), по артиллерии, по оптике и другим разделам физики.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
«ФИЗМАТГИЗ»

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

- Вып. 1. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,
• Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1. Арифметика и алгебра.
- Вып. 2. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,
Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2. Геометрия (планиметрия).
- Вып. 3. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,
Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3. Геометрия (стереометрия).
- Вып. 4. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры.
- Вып. 5. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении.
- Вып. 6. Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы.
- Вып. 7. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I. Движения и преобразования подобия.
- Вып. 8. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, II. Линейные и круговые преобразования.
- Вып. 9. М. Б. Балк, Геометрические приложения понятия о центре тяжести.

Балк Марк Беневич.

Геометрические приложения понятия о центре тяжести.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*

Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 1/IX 1958 г. Подписано к печати 25 XI 1958 г. Бумага $84 \times 108^{1/2}$. Физ. печ. л. 7,25. Услови. печ. л. 11,89. Уч.-изд. л. 11,18. Тираж 25 000 экз., Т-11559. Цена 4 р. 35 к. Заказ 2252.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Левинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза,
Москва, Ж-54, Валовая, 28.