БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

ВЫПУСК 18

Н. Б. ВАСИЛЬЕВ
А. А. ЕГОРОВ

ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР
НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТ.ОБРАЗ.
Б.ВЛАСЬЕВСКИЙ,11
☏241-05-00

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.10
В19
УДК 51(023)

Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 14 л. — (Б-ка мат. кружка; вып. 18). — 288 с. — ISBN 5-02-013730-8.

Содержит около 450 задач, предлагавшихся на заключительных турах математических олимпиад СССР, начиная с самых первых. Задачи размещены в хронологическом порядке и снабжены решениями. Многие из них являются своеобразными математическими исследованиями, позволяющими читателям ознакомиться с идеями и методами современной математики.

Для школьников старших классов, учителей и руководителей математических кружков.

Рецензент
доктор физико-математических наук *В. М. Тихомиров*

В $\frac{1702010000-146}{053(02)-88}$ 52-88

ISBN 5-02-013730-8

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

Увлечение математикой часто начинается с размышлений над какой-то особенно понравившейся задачей. Она может встретиться и на школьном уроке, и на занятии математического кружка, и в журнале или книжке. Богатым источником таких задач служат различные олимпиады — от школьных и городских до международных.

В этой книге собрана полная коллекция задач заключительного тура математических олимпиад, проводимых по всей стране с начала 60-х годов. Задачи занумерованы подряд; по табличке, составленной для каждой олимпиады, можно восстановить наборы задач, предлагавшихся участникам в каждой из трех параллелей — в 8, 9 и 10 классах.

К задачам, предлагавшимся на олимпиадах 1961—1979 гг., приведены решения, задачи последних олимпиад (1980—1987) снабжены краткими указаниями.

Задачи первых олимпиад 60-х годов (они назывались всероссийскими) в среднем попроще, но и здесь встречаются замысловатые головоломки, подобрать ключ к которым нелегко. Самые трудные задачи помечены звездочкой.

Очень разнообразны задачи и по математическому содержанию.

Почти в каждом варианте олимпиадных заданий встречаются традиционные по формулировке задачи об окружностях и треугольниках, квадратных трехчленах и целых числах, уравнениях и неравенствах. Конечно, это не просто упражнения на проверку знаний и применение стандартных школьных приемов, а чаще всего теоремы, которые нужно доказать, задачи на отыскание множеств (геометрических мест), минимумов или максимумов, требующие некоторого исследования.

Значительно больше, однако, задач с далеко не стандартной формулировкой. Для поиска ответа и доказательства здесь нужны не столько школьные знания, сколько здравый смысл, изобретательность, умение логично рассуждать, перевести необычное условие на подходящий математический язык. Далеко не всегда решение такой задачи — цепочка из нескольких естественных шагов. Бывает, что, даже хорошо разобравшись в условии, долго не удается найти правильный путь рассуждений, руководящую идею, хотя готовое решение занимает всего несколько строк (что и отличает классическую олимпиадную задачу). Нужное соображение возникает иногда совершенно неожиданно, интуитивно, как некое «озарение». Эти моменты «открытия» и составляют радость математического творчества.

Конечно, идея, поначалу неожиданная, может затем встретиться еще и еще раз. (Скажем, красивая находка в задаче 7 — проследить, как меняется сумма всех чисел в таблице — в несколько ином преломлении оказывается полезной в задачах 151, 196, 271 и других.) И постепенно искусственное рассуждение начинает восприниматься уже как привычный, сознательно применяемый метод.

Проследить некоторые характерные приемы рассуждений, полезные не только в олимпиадных, но и в серьезных математических задачах — одна из целей «тематического путеводителя», помещенного в конце книги. В нем содержатся также краткие сведения об отдельных понятиях, теоремах, методах, лишь мимолетно затрагиваемых в школьном курсе или сейчас вовсе в него не входящих, но по традиции считающихся известными на олимпиадах. Это, прежде всего, метод математической индукции (П1), сведения о делимости целых чисел (П2), многочленов (П5), классическое неравенство между средними арифметическим и геометрическим (П8); номера П1, П2, ... означают ссылки на соответствующие темы путеводителя. На наш взгляд он будет полезен руководителям математических кружков и тем, кто предпочитает заниматься задачами какого-то определенного характера и хотел бы их разыскать. Разумеется, путеводитель дает лишь некоторую весьма приблизительную ориентацию в огромном разнообразии задач и идей, встречающихся в их решении, — многие задачи могут быть отнесены одновременно к нескольким темам, другие настолько своеобразны, что при попытках более тонкой классификации для каждой пришлось бы завести отдельную «тему».

Ведь главная цель жюри каждой олимпиады — подобрать новые задачи, демонстрирующие школьникам свежие, еще не встречавшиеся им идеи, темы, постановки вопросов. Математики, члены жюри, придумывают такие задачи сами, узнают у своих коллег, черпают из малоизвестных книг или новых научных статей. (Нередко красивая лемма в научной работе опирается на элементарную идею, и из нее рождается олимпиадная задача — так возникли задачи 181, 219, 248, 267 и другие; а задача 148, специально придуманная для олимпиады, оказалась в точности совпадающей с леммой из научной статьи, относящейся к современной алгебре.)

Часто, даже если сюжет задачи носит шуточный, игровой характер или взят из реальной жизни, вопрос, предлагаемый для исследования — найти оптимальный алгоритм поведения, наилучшую возможную оценку, максимум или минимум, — типичен для математики.

Во многих задачах о неравенствах, размещениях точек и покрытиях специалист узнает леммы из анализа, в задачах о знакомствах, дорогах и турнирах — варианты или частные случаи теорем теории графов. Характерные постановки задач о многократно повторяющихся операциях возникают во многих областях математики, в частности в программировании, теории динамических систем.

Таким образом, олимпиадные задачи позволяют приоткрыть завесу над серьезной математикой — классической и современной. Отчасти они даже отражают последние математические моды, — они, как и мода на одежду, меняются с годами.

Конечно, подготавливая набор задач для каждой олимпиады, члены жюри учитывают не только привлекательность формулировок и научную значимость отдельных задач. Олимпиада — это соревнования, где несколько предложенных задач нужно решить за 4—5 часов, и набор задач для каждого класса должен учитывать возможности и интересы участников: быть достаточно трудным, чтобы выявились победители, и в то же время достаточно простым и разнообразным, чтобы удовольствие и пользу получило большинство участников — и «геометры», и «алгебраисты», и любители комбинаторно-логических задач. В выборе задач видны и вкусы коллектива математиков, готовивших каждую олимпиаду, но также и многолетние традиции олимпиад, передающиеся от поколения к поколению.

* * *

Увлечение занимательными задачами имеет в нашей стране глубокие корни [61]: здесь можно вспомнить и учебники Ф. Магницкого и Л. Эйлера, и многочисленные сборники задач XIX века, и издававшийся с 1894 г. по 1917 г. в Одессе, а затем в Киеве журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики», предлагавший трудные задачи «на конкурс» своим читателям — учителям, студентам, учащимся гимназий и реальных училищ.

Первые олимпиады школьников в СССР были проведены более полувека тому назад. В 1934—35 гг. городские математические соревнования юных математиков состоялись в Ленинграде, Москве и Тбилиси, несколько позже — в Киеве. В послевоенные годы традиции разнообразной работы со школьниками (кружки при университетах, лекции, олимпиады) охватывали уже десятки городов. В конце 50-х годов идея вовлечения в эту работу школьников всей страны носилась в воздухе; интерес к науке, прежде всего математике и физике, стимулировался первыми полетами в космос, началом бурного развития вычислительной техники.

Сейчас уже трудно наверняка определить, кто первым предложил собрать вместе школьников — победителей математических олимпиад из разных городов. По-видимому, это был Борис Николаевич Делоне, замечательный математик, энтузиазму которого обязаны своим появлением и первые олимпиады в Ленинграде. Осенью 1959 г. на одной из традиционных топологических конференций в Тбилиси в экскурсионном автобусе рядом с Б. Н. Делоне оказалось несколько молодых математиков из разных городов, в их числе — И. В. Гирсанов и Д. Б. Фукс из Москвы, А. С. Шварц, работавший тогда в Воронеже. Речь зашла о математических олимпиадах в разных городах, об их победителях. И здесь же было решено для начала пригласить на заключительный тур Московской олимпиады старшеклассников хотя бы из нескольких городов и республик, где проводились олимпиады, написав письма знакомым математикам, а еще лучше — разослав официальные приглашения.

В Москве за осуществление этой идеи особенно активно взялся И. В. Гирсанов, в те годы — один из самых деятельных руководителей школьного математического кружка при МГУ. Ее реализация стала возможной благодаря поддержке ректора МГУ академика И. Г. Петровского и первого заместителя министра просвещения РСФСР профессора МГУ А. И. Маркушевича, впоследствии — вице-президента Академии педагогических наук. Здесь нельзя не отметить также И. С. Петракова, в те годы работавшего методистом Министерства просвещения РСФСР по математике, много сделавшего для организации системы олимпиад.

В становлении и развитии всероссийских и всесоюзных математических олимпиад особенно велика роль академика А. Н. Колмогорова. Андрей Николаевич был одним из руководителей первых московских олимпиад и школьного математического кружка при МГУ еще в 30-х годах. Авторитет А. Н. Колмогорова, одного из крупнейших ученых XX в., оказывал огромное влияние на перестройку математического образования, начатую в 60-х годах. Это и существенная модернизация программ и стиля учебников для массовой школы, и организация специальных физико-математических школ-интернатов при крупнейших университетах. Неоднократно высказывавшаяся А. Н. Колмогоровым идея о дифференциации образования в старших классах — о предоставлении всем школьникам возможности выбора наиболее интересующих их предметов для более глубокого изучения — еще ждет своего осуществления. Поддержав идею организации всероссийских олимпиад, А. Н. Колмогоров на долгие годы стал основным научным руководителем математической олимпиады. Позднее, когда был образован Центральный оргкомитет всесоюзной олимпиады по математике, физике и химии, А. Н. Колмогоров возглавил Методическую комиссию по математике при оргкомитете (его заместителями были в 60-е и 70-е годы М. И. Башмаков и Н. Б. Васильев, в конце 70-х годов — также Н. Х. Розов и А. Н. Земляков, в 80-е годы — В. В. Вавилов и Ю. В. Нестеренко; председателем комиссии с 1983 г. стал академик АН УССР профессор МГУ Б. В. Гнеденко).

А. Н. Колмогоров несколько раз приезжал на заключительный тур, исполнял обязанности председателя жюри. С ним обсуждались все принципиальные вопросы — состав жюри, формы проведения олимпиад и их научная программа, содержание задач, итоги олимпиад. Андрей Николаевич считал очень важным участие в работе жюри молодых математиков, в том числе студентов — победителей прошлых олимпиад; тщательную подготовку к лекциям и разбору решений задач со школьниками; поощрение (в частности, упоминание в публикациях об олимпиадах) учителей, чьи ученики показали хорошие результаты. Живо интересовался Андрей Николаевич, отнюдь не лишенный спортивной жилки, и результатами «своих» учеников — школьников из ФМШ при МГУ. Несомненно, самый факт, что олимпиаду возглавляет академик А. Н. Колмогоров, помогал привлечь к участию в олимпиаде многих талантливых людей.

Итак, весной 1960 г. на Московскую олимпиаду впервые приехали группы школьников из девяти союзных республик и нескольких областей Российской Федерации. А в следующем, 1961 г. одновременно со вторым туром Московской олимпиады была проведена Первая Всероссийская олимпиада по математике, на которую собрались команды по четыре человека из большинства областей и республик (от Украины пригласили четыре команды). Следующие олимпиады стали уже вполне самостоятельными, хотя до 1965 г. проводились также в Москве. Уже на самых первых олимпиадах в числе победителей, кроме признанных лидеров — москвичей и ленинградцев, были школьники из Казани, Киева, Еревана и других городов и республик.

Появилась возможность формировать представительную команду СССР на международные математические олимпиады (проводящиеся с 1959 г.). Как правило, советские школьники успешно выступают на этих олимпиадах и в командном первенстве занимают одно из первых мест.

Первые всероссийские олимпиады привели к расширению географии олимпиадного движения в стране — во всех областях и республиках постепенно стали проводиться свои олимпиады, победители которых становились участниками заключительного тура. К участию в местных олимпиадах и в заключительном туре активно подключались математики из разных городов. Уже с 1960 г. установилось тесное сотрудничество между Московским и Ленинградским университетами. Это касалось не только олимпиад, но и других форм работы со школьниками.

Многие интересные начинания исходили из Сибири. В Новосибирском Академгородке в эти годы под руководством академиков М. А. Лаврентьева и С. Л. Соболева и члена-корреспондента АН СССР А. А. Ляпунова создавался центр притяжения юных математиков и физиков всей азиатской части страны: по результатам Всесибирской заочной олимпиады большую группу школьников приглашали в летнюю школу, а затем лучшие из них могли поступать в созданную при НГУ физико-математическую школу-интернат. По инициативе группы академиков в 1963 г. такие школы были созданы при Московском, Ленинградском, Новосибирском и Киевском университетах, позднее — и в других республиках; это также немало способствовало популярности олимпиад (вступительные экзамены в эти школы проводятся, как правило, на областных и республиканских олимпиадах).

Большую роль сыграло присоединение к олимпиадам физиков, особенно — активной группы комсомольцев из МФТИ (знаменитого на всю страну Физтеха), опиравшейся на поддержку ЦК ВЛКСМ. Возглавлял эту группу молодой преподаватель математики А. П. Савин (в нее входили, в частности, хорошо известные школьникам по журналу «Квант» физики, тогда еще студенты Л. Г. Асламазов, Ю. М. Брук, И. Ш. Слободецкий).

Если уже предаваться воспоминаниям, нужно сказать, что объединению усилий МГУ и МФТИ предшествовали горячие дискуссии. Дело в том, что в МФТИ придумали свою систему физико-математических олимпиад: студентам, аспирантам и преподавателям, разъезжавшимся на зимние каникулы, вручаются задачи и инструкции, как провести олимпиаду в родном городе, а все работы школьников они привозят в Москву на проверку (и, конечно, на Физтех!). В тех городах, где уже имелись свои многолетние олимпиадные традиции, «конкуренция» разных олимпиад казалась многим ненужной. Андрей Николаевич Колмогоров еще долго вспоминал, как «ленинградцы не позволили Савину» проводить у себя физико-математическую олимпиаду МФТИ по такой схеме. Было решено проводить олимпиады по математике и физике по единой многоступенчатой системе, при которой главная роль в областных, городских, районных и школьных олимпиадах отводилась местным ученым, преподавателям и студентам вузов, учителям. Для руководства олимпиадой был образован центральный оргкомитет. В него вошли представители Министерства просвещения, ЦК ВЛКСМ, общества «Знание». Председателем оргкомитета долгие годы был замечательный физик академик И. К. Кикоин, принимавший, несмотря на свою занятость, живейшее участие во всех олимпиадных и школьных делах.

На первых олимпиадах в Москве заключительный тур по математике (в МГУ) и физике (в МФТИ) проводился почти одновременно, с таким расчетом, чтобы его участники могли попасть на олимпиаду по обоим предметам. По инициативе активистов из МФТИ победители олимпиады приглашались в молодежный лагерь ЦК ВЛКСМ «Орленок». Стали регулярно проводиться всесоюзные заочные олимпиады через газеты «Комсомольская правда», «Учительская газета» и местные молодежные газеты — их победидели приглашались на очные республиканские и областные олимпиады (см. [4, 12, 14, 16, 17]).

Большую помощь организаторам местных олимпиад оказывали рассылаемые из Москвы списки рекомендованных задач, а также ставшие традиционными поездки студентов, аспирантов и преподавателей ведущих вузов страны на олимпиады в качестве представителей центрального оргкомитета. Кроме работы в жюри областных и республиканских олимпиад, им поручалось и много других дел: провести приемные экзамены в школы-интернаты, рассказать о вузах и вступительных экзаменах, обсудить с местными математиками и учителями постановку работы со школьниками, прочесть лекции; естественно, для этих поездок выбирались те, кто обладал уже достаточным опытом. Эти поездки имели большое воспитательное значение для самих студентов и аспирантов; многие из них позднее стали активными организаторами работы со школьниками.

Надо заметить, что, помимо энергии и времени молодых ученых, вся эта работа — особенно поездки на олимпиады, организация летних школ — требовала немалых финансовых затрат. И тот факт, что, помимо органов народного образования, ее активно поддерживали ректоры МГУ, МФТИ и других вузов, Министерство высшего образования, Академия наук, ЦК ВЛКСМ и целый ряд других организаций, не имевших прямого отношения к школьникам, отражал всеобщее внимание к развитию научного потенциала страны, характерное для тех лет. (Отчасти его можно сравнить с нынешней всеобщей увлеченностью информатикой и компьютеризацией, но есть, конечно, существенные отличия — значительно больший, общегосударственный размах, необходимость существенно больших средств, отсутствие многолетнего предварительного опыта, какой имелся у математиков.)

Еще одна тема, которую нужно затронуть, рассказывая о развитии олимпиадного движения и других возникших в 60-е годы форм работы со школьниками, — выпуск учебной и научно-популярной литературы. В те годы (к сожалению, лишь до 1962 г.) выходили прекрасные периодические сборники «Математическое просвещение», адресованные студентам, учителям, любителям математики, где обсуждались также и педагогические вопросы. С 30-х годов издавалась серия брошюр «Популярные лекции по математике», адресованных в первую очередь школьникам. Уже вышли первые выпуски «Библиотеки математического кружка» [33] — [40], отражавшие опыт школьного математического кружка при МГУ. Для начинающих «олимпиадников» по инициативе А. Н. Колмогорова был издан наш небольшой сборник [5].

Говоря о литературе для школьников, нельзя не вспомнить, конечно, и о первых изданиях книг [20] — [22] из серии «Библиотечка физико-математической школы», служивших образцовыми пособиями для учеников Всесоюзной заочной математической школы при МГУ. Академик И. М. Гельфанд, которому принадлежала идея создания такой школы (1964 г.), и сейчас является ее научным руководителем. ВЗМШ охватила уже не сотни, как интернаты, а тысячи, позднее — десятки тысяч школьников из самых далеких мест.

Тогда же, в середине 60-х годов, было задумано создание ежемесячного физико-математического журнала для школьников, хотя выходить этот журнал «Квант» начал лишь в 1970 г. В его организации основную роль сыграл коллектив математиков и физиков, сформировавшийся вокруг олимпиады; многие из них стали активными членами редколлегии, а академики И. К. Кикоин и А. Н. Колмогоров — постоянными руководителями редакции журнала. (В 1985 г., после кончины И. К. Кикоина, на постах главного редактора «Кванта» и председателя Центрального оргкомитета олимпиады его заменил академик Ю. А. Осипьян.) «Квант» связан с олимпиадами не только генетически, но и существенной частью своего содержания, кругом читателей и авторов. Победители конкурса «Задачник Кванта» получают приглашения на республиканские олимпиады — в этом отношении «Квант» заменил и перевел на постоянную основу заочные олимпиады 60-х годов.

Десятилетие 1965—1974 гг. — период «больших» олимпиад, проходивших в различных столицах союзных республик и нескольких городах России. Шестая Всероссийская олимпиада 1966 г. проходила в Воронеже — здесь впервые собрались представители всех областей РСФСР и всех республик. Следующая олимпиада в Тбилиси уже называлась 1-й Всесоюзной. По существу, все олимпиады 1961—1966 гг. можно было бы считать всесоюзными — на них были представители большинства союзных республик. Отсчет номеров с Тбилисской олимпиады 1967 г. связан с тем, что в этом году было образовано Министерство просвещения СССР, которое приняло на себя функции главного организатора олимпиад уже по трем предметам: математике, физике и химии. Хочется отметить постоянную заботу об олимпиадах со стороны министра просвещения М. А. Прокофьева и его заместителя М. И. Кондакова, а также с благодарностью вспомнить работников министерства, занимавшихся в те годы математическими олимпиадами, Н. А. Ермолаеву и Л. М. Пашкову. Олимпиада, став всесоюзной, еще несколько увеличилась — теперь на заключительный тур приезжали команды по 4 человека из всех областей не только России, но и Украины, Казахстана и других республик с областным делением. Кроме того, было решено приглашать дополнительно победителей (получивших первые и вторые премии) предыдущей олимпиады, чтобы дать возможность более полно представить сильные команды, так что число приезжих участников больших олимпиад, включая руководителей команд, 25—30 членов жюри, лекторов, членов оргкомитета, иногда доходило до 800 человек.

Варьировалась и форма проведения олимпиад. В 1968 г. по ленинградской традиции было решено попробовать провести олимпиаду в устной форме: вместо того чтобы записывать решения, участник олимпиады тихонько рассказывает свое решение группе из двух — трех членов жюри; если найдена неточность — у него остается еще возможность подумать над задачей (на каждую задачу дается три попытки). У многих неленинградцев эта система вызывала сомнения — как сравнивать требования разных членов жюри, не возникнут ли языковые трудности, недопонимание, — и для страховки решили такой эксперимент провести во второй из двух дней соревнований, а в первый сохранить обычную форму письменной работы. Хотя очень четко организованный «устный тур» прошел гладко и всем понравился, но без большой группы опытных ленинградцев его больше никогда не решались повторять.

Все следующие олимпиады, однако, по образцу международных, было решено проводить в два дня, чтобы дать возможность тем, кто случайно потерпел неудачу в первый день, поправить свои дела, а главное, полнее использовать дни, отведенные на заключительный тур, куда многие школьники приехали за тысячи километров. При такой системе возможно и большее разнообразие в предлагаемых задачах. Например, в Риге (1971 г.) во второй день соревнований председатель жюри Я. М. Барздинь и его заместитель М. И. Башмаков предложили устроить «исследовательский тур»: участники должны были выбрать одну, самую интересную задачу и в ней постараться получить возможно более сильный результат. Этот эксперимент, одобренный А. Н. Колмогоровым, прошел весьма успешно; к нему возвращались (правда, в менее полной форме) и на некоторых следующих олимпиадах.

К сожалению, на всесоюзных олимпиадах не удалось осуществить идею, неоднократно высказывавшуюся А. Н. Колмогоровым: один из дней соревнований начать с лекции на заранее неизвестную участникам тему и затем предложить на эту тему несколько задач, продолжающих разобранные на лекции (такой эксперимент был успешно проведен лишь в 1985 году на 1-й Всесоюзной математической олимпиаде для учащихся СПТУ — лекцию на тему «геометрические вероятности» прочитал А. И. Плоткин).

К середине 60-х годов сформировался коллектив математиков из разных городов, игравших главную роль в подготовке и проведении олимпиад. Назовем некоторых из них: М. И. Башмаков, Ю. И. Ионин, А. И. Плоткин (Ленинград), А. К. Толпыго (Киев), Г. Ш. Фридман (Новосибирск — Омск), Г. А. Тоноян (Ереван), А. Д. Бендукидзе (Тбилиси), М. И. Серов (Вологда — Петрозаводск), Е. А. Морозова, В. М. Алексеев, Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, М. С. Дубсон, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Н. Н. Константинов, Ю. П. Лысов, Ж. М. Раббот, А. П. Савин, В. А. Скворцов, Д. Б. Фукс (Москва). Разумеется, состав постоянно работающей методической комиссии и жюри менялся, к нему присоединялись новые активные помощники из Москвы и других городов. Назовем еще ряд математиков из тех, кто участвовал в 70-е годы во многих олимпиадах и оказал существенное влияние на их проведение: В. Б. Алексеев, А. А. Берзиньш, И. Н. Бернштейн, Г. А. Гальперин, М. Л. Гервер, А. Г. Гейн, А. Н. Земляков, И. Н. Клумова, А. В. Кочергин, А. Г. Кушниренко, С. А. Мазуров, Н. Х. Розов, С. В. Фомин, С. А. Тресков, В. М. Харламов, Г. Н. Яковлев.

В последние годы в организации олимпиад особенно активную роль играют В. В. Вавилов, Ю. В. Нестеренко, С. В. Конягин, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, И. Н. Сергеев, А. М. Слинько, Ю. П. Соловьев (Москва); А. С. Меркурьев, Н. Ю. Нецветаев (Ленинград); А. В. Анджанс (Рига), В. И. Берник, И. К. Жук (Минск), Д. Г. Флаас, Е. И. Хухро (Новосибирск), Н. В. Карташов (Киев); Б. И. Чиник (Кишинев).

Какие же задачи ставили перед олимпиадами ее организаторы? Помимо выявления победителей, формирования команды СССР на международную олимпиаду, привлечения одаренных и серьезно увлекающихся наукой школьников в ведущие вузы страны, важной целью олимпиады было развитие интереса школьников к математике, вовлечение в постоянную работу с ними большего числа преподавателей и студентов вузов, научных сотрудников, учителей, установление постоянных контактов между энтузиастами математического просвещения. В самом деле, олимпиада играла роль «связующего стержня» различных форм работы со школьниками, возникших почти одновременно в 1963—1965 гг. и получивших затем широкое распространение — таких, как заочные конкурсы, летние лагеря, специализированные физико-математические, заочные математические школы.

На заключительном туре, да и на других этапах олимпиады, где собираются участники из разных городов, самым ценным является возникающее общение между взрослыми и юными математиками.

Большое значение имеет сотрудничество членов жюри, приезжающих из Москвы, Ленинграда и других городов, с математиками из города, где проводится олимпиада. (Как правило, один из двух «старших» по каждому классу, а также председатель жюри из города-устроителя.) Участие местных математиков — их советы, предложенные ими задачи — во многих случаях способствовало успеху олимпиады. В свою очередь, ими с одобрением воспринимались традиции центрального жюри: тщательная подготовка задач; многократная проверка работ школьников, позволяющая выявить новые идеи решений и возникшие «нюансы»; открытый и демократичный стиль всех обсуждений; подробный индивидуальный разбор работ, проходящий в атмосфере доброжелательных отношений между членами жюри и участниками. Особенно внимательны были члены жюри «больших» олимпиад при проверке работ восьмиклассников и учеников из сельских «далеко не математических» школ, авторы которых испытывали большие трудности в записи решений непривычных задач. В отличие от экзаменов, требования к оформлению работ на олимпиаде были достаточно либеральными: скажем, если изложены все основные логически важные этапы, а детали выкладок остались лишь в черновиках — оценка не снижалась. Подробнее на работе жюри мы не будем останавливаться — она в основных чертах следовала давним традициям Московской олимпиады (см. [9], [13]).

В научной программе всесоюзных олимпиад, кроме самих соревнований и разбора работ, предусматривается дополнительное время для встреч со школьниками: местные и приезжие ученые выступают перед ними с лекциями. Можно только позавидовать школьникам, которым довелось слушать лекции А. Н. Колмогорова. Не раз в качестве лекторов выступали и молодые, но уже получившие известность математики — бывшие победители олимпиад. Для восьмиклассников часто устраивались занятия в виде «математического кружка» (одно из них обычно вел Н. Н. Константинов). На олимпиаду для встреч со своими учениками приезжали преподаватели ВЗМШ. Традиционной стала встреча с редколлегией журнала «Квант».

При всей занятости члены жюри считали очень важным найти время для обстоятельных бесед с местными работниками народного образования и руководителями команд — учителями, методистами и математиками, приехавшими со всей страны. Речь шла не только об олимпиаде и конкретных работах школьников, но и о разнообразных вопросах, связанных с положением дел в массовой школе, о содержании и различных формах дополнительного математического образования.

О том, как проходила каждая олимпиада — насыщенный разнообразными впечатлениями, экскурсиями, встречами праздник для ее участников, завершающийся торжественным награждением победителей, — мы, конечно, не имеем возможности здесь рассказать (см. [78—80]).

С 1975 г. в связи с организационными трудностями было принято решение изменить структуру олимпиадной «пирамиды»: включить в нее республиканские олимпиады в РСФСР и других больших республиках, а число участников заключительного тура сократить. (Надо сказать, что математики возражали против такого изменения, — уж слишком много «ярусов» нужно преодолеть участникам — но физики и химики его поддержали: они получили возможность, как принято на международных олимпиадах, проводить для всех участников «экспериментальный тур».)

Всесоюзная математическая олимпиада школьников проходит теперь в пять этапов: школьный, городской и районный, областной, республиканский и заключительный — всесоюзный. На него приглашают школьников 8—10 классов — победителей республиканских олимпиад: 48 от РСФСР, 12 от Украины, по 6 от Белоруссии, Казахстана и Узбекистана, по 3 от других союзных республик, городов Москвы, Ленинграда и города-устроителя олимпиады, кроме того, команды ряда физико-математических школ-интернатов, а также победители заключительного тура предыдущего года — всего около 150 школьников.

Конечно, при этом олимпиада приобрела еще более «спортивный» характер. К старым традициям, которые во многом сохранились, добавились и некоторые новые; среди них — «математический бой» между сборными командами жюри и школьников. (Если команду жюри возглавляет бывший чемпион нескольких олимпиад С. В. Конягин, она, как правило, одерживает трудную победу.)

Сейчас функции «связующего стержня», которые в 60-е и 70-е годы выполнял заключительный тур, в значительной степени должны быть отнесены к предшествующим этапам — республиканским и областным олимпиадам, где работа часто возглавляется молодыми учеными — бывшими победителями олимпиад. Самым массовым и, быть может, главным в «пирамиде олимпиад» является не вершина, а скорее ее основание — школьные, районные, городские и областные олимпиады, проводимые местными математиками и учителями — настоящими энтузиастами своего дела. Ведь математика нужна не только будущим ученым, и основная цель олимпиадного движения — не «выращивание олимпиадных чемпионов», а зарождение и развитие постоянного интереса к математике, расширение кругозора школьников. Эта работа успешно проводится там, где олимпиады составляют часть продуманных, хорошо организованных занятий со школьниками и студентами — будущими учителями [11]. По итогам заключительного тура за несколько лет можно отчасти оценить результаты этой работы; отметим, в частности, постоянство успехов ленинградцев, удачные выступления школьников Латвии и Белоруссии за последние годы.

Конечно, добраться до верхних ступеней олимпиадной пирамиды — дело не простое: помимо математических способностей и большой подготовительной работы, для побед на олимпиадах требуются особые качества «спортсмена-многоборца», умение быстро переключаться с одной задачи на другую — черты характера, вовсе не обязательные даже для профессионала-математика. В связи с этим мы хотим привести один абзац из предисловия, написанного А. Н. Колмогоровым — редактором книги [5]; в той или иной форме Андрей Николаевич постоянно высказывал эту мысль перед участниками олимпиад.

«Наша страна нуждается в большом числе хорошо подготовленных и талантливых математиков. Очень важно, чтобы профессию математика выбирали те представители нашей молодежи, которые могут работать в этой области наиболее продуктивно. Одним из путей привлечения одаренной молодежи к математике являются математические олимпиады. Участие в школьных и математических кружках и олимпиадах может помочь каждому оценить свои собственные способности, серьезность и прочность своих увлечений математикой ... Желая читателям сборника всяческих успехов в решении задач и побед на школьных, городских, Всероссийских олимпиадах, я хочу в то же время заметить, что пути к серьезной работе в области математической науки разнообразны. Одним легче дается решение замысловатых задач, другие вначале не выделяются на этом поприще, но, двигаясь медленно, овладевают глубоко и серьезно теорией и несколько позднее научаются работать самостоятельно. В конечном счете при выборе математики как предмета основных интересов и работы на долгое будущее каждый должен руководствоваться собственной самооценкой, а не числом премий и похвальных отзывов на олимпиадах.»

* * *

Хотя полезность увлечения «спортивной» стороной олимпиад и небезусловна, но в опыте прежних олимпиад есть и непреходящая ценность: это — интересные задачи. За последние годы вышло несколько сборников таких задач [9], [41]. Многие из олимпиадных задач заслуживают значительно более глубокого обдумывания, чем позволяет несколько часов, отведенных на соревнованиях. Особенно это относится к неоднократно предлагавшимся на всесоюзных олимпиадах «исследовательским» задачам, решения (или обобщения) которых — по существу небольшие научные работы, содержащие интересный результат. Зачастую такие задачи представлены в виде серии усложняющихся вопросов; их больше всего в олимпиадах 70-х годов. Многие из этих задач относятся к дискретной математике, где нетривиальный результат нередко основан на хитроумных, но вполне элементарных конструкциях и рассуждениях.

Тема одной из них (158) — о «переключательных схемах» — была, по-видимому, впервые предложена А. Н. Колмогоровым на студенческом семинаре в 1957 г. (основную конструкцию, изображенную на рисунке 3 к условию задачи, придумал участник этого семинара, однокурсник авторов Ю. П. Офман).

Присланная в редакцию журнала «Квант» студентом из г. Черновцы Э. Туркевичем задача о коммутирующих многочленах (251) заинтересовала специалистов по алгебре и анализу, в том числе, — И. Н. Бернштейна — он и переделал ее в олимпиадную задачу, добавив несколько промежуточных «ступенек» (пунктов). Затем дальнейшим изучением этой темы занимались ученики 145-й математической школы г. Киева под руководством А. К. Толпыго и ФМШ при МГУ («колмогоровской» школы-интерната) под руководством А. П. Веселова.

Любопытный, хотя, пожалуй, и уникальный случай произошел с задачей 128 — довольно искусственным на вид «циклическим неравенством» — продолжая ею заниматься, один из победителей олимпиады В. Г. Дринфельд сделал свою первую научную работу (см. комментарий к решению задачи).

Мы не можем, разумеется, подробно рассказать о каждой интересной задаче всесоюзных олимпиад. В конце книги (с. 284) перечислен ряд красивых задач разной трудности — указаны их авторы, номера в книге и для некоторых — «кличка», по которой их вспомнят знатоки. Разумеется, этот список, отражающий мнение авторов и их коллег, отчасти произволен; другие математики составили бы его иначе.

Решения многих задач записаны в книге коротко, иногда это скорее подробные указания, разобраться в которых и довести решение до конца стоит определенного труда. Мы приводим, как правило, лишь одно из возможных решений, которое показалось нам более поучительным (или позволяющим получить более общий результат). Лишь к отдельным задачам даны два решения, основанные на различных идеях. В комментариях к решениям отдельных задач (после значка ∇) обсуждаются возможные обобщения.

Собранные в этой книге задачи — итог работы большого коллектива математиков разных поколений, со многими из которых авторов связывает многолетняя дружба. Мы хотели бы выразить им глубокую благодарность.

Подготовка книги была начата несколько лет назад по инициативе академика А. Н. Колмогорова. По первоначальному плану в нее должны были войти лишь задачи олимпиад 60-х и 70-х годов, в которых авторы принимали непосредственное участие. По предложению редактора книги А. П. Савина, активное участие которого в олимпиадах на протяжении уже 30 лет должно быть особо отмечено, в книгу были добавлены, в качестве задач для самостоятельного решения, задачи последних всесоюзных олимпиад. (Краткие указания к ним, написанные А. А. Егоровым, в основном следуют решениям, опубликованным в журнале «Квант».) Среди ветеранов олимпиадного движения мы считаем необходимым выделить Н. Н. Константинова, энтузиазму которого обязаны своим появлением и развитием новые формы работы со школьниками, продолжающие традиции первых олимпиад [81].

Мы признательны всем, чьи советы и помощь помогли при подготовке книги, прежде всего М. И. Башмакову, В. Л. Гутенмахеру, Ж. М. Рабботу, Ю. П. Соловьеву, А. Б. Сосинскому, В. М. Тихомирову, А. К. Толпыго, Д. Б. Фуксу.

Мы были бы рады получить от читателей письма с замечаниями, новыми решениями и результатами; просьба присылать их в адрес редакции журнала «Квант»: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Первая Всероссийская олимпиада, 1961 г. (Москва)

Класс					
8	1	2	3	4	5а
9	6а	7	8	9	10
10	11	12	7	6б	5б

1. Дана фигура, состоящая из 16 отрезков (рис. 1). Докажите, что нельзя провести ломаную, пересекающую каждый из отрезков ровно один раз. (Ломаная может быть незамкнутой и самопересекающейся, но ее вершины не должны лежать на отрезках, а стороны — проходить через вершины фигуры.)

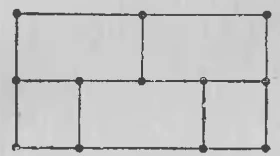


Рис. 1

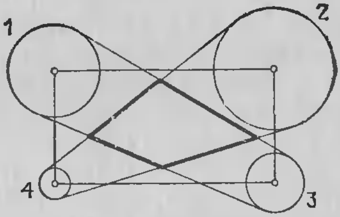


Рис. 2

2. С центрами в вершинах прямоугольника построены четыре окружности 1, 2, 3, 4 с радиусами r_1, r_2, r_3, r_4, причем $r_1+r_3=r_2+r_4<d$; d — диагональ прямоугольника (рис. 2). Проводятся две пары внешних касательных к окружностям 1, 3 и 2, 4. Докажите, что в четырехугольник, образованный этими четырьмя прямыми, можно вписать окружность.

3. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

4. Дана таблица 4×4 клетки, в некоторых клетках которой расставляются звездочки. Докажите, что можно так расставить семь звездочек, что при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда будет хотя бы одна звездочка. Докажите, что если звездочек меньше чем семь, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

5. а) Дана четверка положительных чисел (a, b, c, d). Из нее получается новая (ab, bc, cd, da) по следующему правилу: каждое число умножается на следующее, четвертое — на первое. Из новой четверки по этому же правилу получается третья и т.д. Докажите, что в полученной последовательности четверок никогда не встретится (a, b, c, d), кроме случая, когда $a = b = c = d = 1$.

б) Дан произвольный набор из чисел 1 и -1 длиной 2^k. Из него получается новый по следующему правилу: каждое число умножается на следующее за ним; последнее 2^k-е число умножается на первое. С новым набором из 1 и -1 проделывается то же самое и т. д. Докажите, что в конце концов получится набор, состоящий из одних единиц.

6. а) Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям с центрами O_1 и O_2 соответственно (по часовой стрелке). Докажите, что вершина C правильного треугольника ABC также движется равномерно по некоторой окружности.

б) Расстояния от фиксированной точки P плоскости до двух вершин A, B равностороннего треугольника ABC равны $AP = 2$; $BP = 3$. Определите, какое максимальное значение может иметь расстояние CP.

7. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любом столбце и в любой строке, неотрицательны.

8. n точек соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки можно пройти в каждую из остальных по этим отрезкам, причем нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Докажите, что общее число отрезков равно $n - 1$.

9. a, b, p — любые целые числа. Докажите, что найдутся такие взаимно простые k, l, что $ak+bl$ делится на p.

10. Коля и Петя делят $2n+1$ орехов, $n \geqslant 2$, причем каждый хочет получить возможно больше. Предполагаются три способа дележа (каждый проходит в три этапа).

1-й этап: Петя делит все орехи на две части, в каждой не меньше двух орехов.

2-й этап: Коля делит каждую часть снова на две, в каждой не меньше одного ореха.

(1-й и 2-й этапы общие для всех трех способов.)

3-й этап: при первом способе Коля берет большую и меньшую части; при втором способе Коля берет обе средние части; при третьем способе Коля берет либо большую и меньшую части, либо обе средние части, но за право выбора отдает Пете один орех.

Определите, какой способ самый выгодный для Коли и какой наименее выгоден для него.

11. Докажите, что для любых трех бесконечных последовательностей натуральных чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$
$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

найдутся такие номера p и q, что $a_p \geqslant a_q$, $b_p \geqslant b_q$, $c_p \geqslant c_q$.

12. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

Вторая Всероссийская олимпиада, 1962 г. (Москва)

Класс					
8	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
9	**18**	**19**	**20**	**21**	**17**
10	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**

13. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки A', B', C', D' так, что $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DA}$. Докажите, что площадь четырехугольника

$A'B'C'D'$ в 5 раз больше площади четырехугольника $ABCD$.

14. На плоскости заданы окружность s и прямая l, проходящая через центр O окружности s. Через точку O проводится произвольная окружность s' с центром на прямой l. Найдите множество точек M, в которых общая касательная окружностей s и s' касается окружности s'.

15. Даны целые положительные числа a_0, a_1, a_2, ..., a_{99} a_{100}. Известно, что $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1$, ..., $a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Докажите, что $a_{100} > 2^{99}$.

16. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, d таких, что выражение $ax^3 + bx^2 + cx + d$ равно 1 при $x = 19$ и равно 2 при $x = 62$.

17. В каждую клетку квадратной таблицы $n \times n$, где n нечетно, вписано одно из чисел 1 или -1 (произвольным образом). Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце, справа от каждой из строк пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма всех $2n$ написанных произведений не равна нулю. *)

18. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медианы, проведенные к этим сторонам, пересекались под прямым углом.

19. a, b, c, d — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10.$$

20. Дан правильный пятиугольник; M — произвольная точка внутри него (или на его границе). Занумеруем расстояния от точки M до сторон пятиугольника (или их продолжений) в порядке возрастания: $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4 \leqslant r_5$. Найдите все положения точки M, при которых величина r_3 принимает наименьшее значение, и все положения точки M, при которых величина r_3 принимает наибольшее значение.

21. Возьмем любое 1962-значное число, делящееся на 9. Сумму его цифр обозначим через a, сумму цифр числа a через b, сумму цифр b — через c. Чему равно c?

---

*) В 8 классе задача предлагалась для $n = 25$.

22. Из середины M основания AC равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MH на сторону BC. Точка P — середина отрезка MH. Докажите, что $AH \perp BP$.

23. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, стороны которого a, b, c заключены в следующих пределах:

$$0 \leqslant a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3?$$

24. x, y, z — произвольные попарно неравные целые числа. Докажите, что $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ делится на $5(y-z)(z-x)(x-y)$.

25. Про числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ известно, что $a_0 = a_n = 0$ и что $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geqslant 0$ при всех k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$). Докажите, что все a_k неположительны.

26. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, причем $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Докажите, что в пустую таблицу из m строк и n столбцов можно поставить не более чем $m+n-1$ положительное число так, чтобы сумма чисел в i-й строке равнялась a_i, а сумма чисел в k-м столбце равнялась b_k.

Третья Всероссийская олимпиада, 1963 г. (Москва)

Класс					
8	27	28	29а	30	31а
9	32	33	34	31б	28
10	35	36	37	29б	28
11	38	28	39	40	29б

27. Из пяти данных окружностей любые четыре проходят через одну точку. Докажите, что найдется точка, через которую проходят все пять окружностей.

28. В шахматном турнире участвовало 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

29. а) Каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ делит его площадь пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

б) Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что каждая из диагоналей AD, BE и CF делит его площадь пополам. Докажите, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

30. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a+b$ и a^2+b^2 равен 1 или 2.

31. На окружности две точки A и B зафиксированы, а точка M пробегает всю окружность. Из середины K отрезка MB опускается перпендикуляр KP на прямую MA.

а) Докажите, что все прямые KP проходят через одну точку.

б) Найдите множество точек P.

32. Дан равносторонний треугольник со стороной 1. При каком наименьшем d отрезок длины d может, скользя концами по сторонам треугольника, замести его целиком?

33. Шахматная доска размером 6×6 покрыта 18 костями домино размером 2×1 (каждая кость покрывает две клетки). Докажите, что при любом таком покрытии можно разрезать доску на две части по горизонтальной или вертикальной линии, не повредив ни одной кости домино.

34. Даны n различных положительных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Из них составляются всевозможные суммы с любым числом слагаемых (от 1 до n). Докажите, что среди этих сумм найдется по крайней мере $n(n+1)/2$ попарно различных.

35. В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B. Затем из вершины C проведены прямые, параллельные этим биссектрисам. Точки D и E пересечения этих прямых с биссектрисами соединены. Оказалось, что прямые DE и AB параллельны. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

36. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, члены которой — целые положительные числа. Один из них — полный квадрат. Докажите, что прогрессия содержит бесконечно много квадратов.

37. Дан правильный 45-угольник. Можно ли расставить в его вершинах цифры 0, 1, ..., 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

38. Найдите такие вещественные числа a, b, p, q, чтобы равенство

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

выполнялось при любых x.

39. В концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая из получившихся полуокружностей делится пополам, и в ее середине пишется сумма чисел, стоящих в концах (первый шаг). Затем каждая из четырех получившихся дуг делится пополам, и в ее середине пишется число, равное сумме чисел, стоящих в концах дуги (второй шаг). Такая операция проделывается n раз. Найдите сумму всех записанных чисел.

40. Дан равнобедренный треугольник. Найдите множество точек, лежащих внутри треугольника, расстояние от которых до основания равно среднему геометрическому расстояний до боковых сторон.

Четвертая Всероссийская олимпиада, 1964 г. (Москва)

Класс		
8	**41 42 43**	**44 45а**
9	**41 46 47**	**48 49**
10	**50 51 45а, б**	**52 53**
11	**54 55 52**	**53 44**

41. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

42. Докажите, что $m(m+1)$ не является степенью целого числа ни при каком натуральном m.

43. У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 подсчитывается сумма его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитывается сумма его цифр и т. д. до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше: 1 или 2?

44. Дан произвольный набор n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}$. Из него получается новый набор: $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2}$; из этого набора — следующий по тому же правилу и т. д. Докажите, что если все получающиеся числа целые, то все первоначальные числа равны.

45. а) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Докажите, что

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA.$$

б) Обратно, докажите, что из шести отрезков, длины которых a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 удовлетворяют соотношениям $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, можно построить выпуклый шестиугольник с равными углами.

46. Решите в целых числах уравнение

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}}_{1964} = y.$$

47. Из вершин выпуклого четырехугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры на его диагонали. Докажите, что четырехугольник, образованный их основаниями, подобен исходному.

48. Найдите все нечетные натуральные n, для которых $(n-1)!$ не делится на n^2.

49*. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1 (рис. 3). Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из

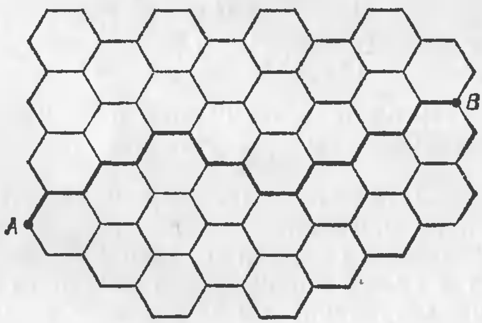


Рис. 3

узла A в узел B по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что половину всего пути он полз в одном направлении.

50. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что сумма углов AOB и COD равна 180°.

51. a, b и n — фиксированные натуральные числа. Известно, что при любом натуральном k $(k \neq b)$

число $a - k^n$ делится без остатка на $b - k$. Докажите, что $a = b^n$.

52. В выражении $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ для указания порядка действий расставляются скобки и результат записывается в виде дроби:

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_{n-k}}}$$

(при этом каждая из букв $x_1, x_2, \ldots, x_n$ стоит либо в числителе дроби, либо в знаменателе). Сколько различных выражений можно таким образом получить при всевозможных способах расстановки скобок?

53. На какое наименьшее число неперекрывающихся тетраэдров можно разбить куб?

54. Найдите наибольший полный квадрат такой, что после вычерчивания двух его последних цифр получается снова полный квадрат. (Предполагается, что одна из вычеркиваемых цифр — не нуль.)

55. $ABCD$ — описанная трапеция; E — точка пересечения диагоналей AC и BD; r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE соответственно. Докажите, что

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

Пятая Всероссийская олимпиада, 1965 г. (Москва)

Класс					
8	56а	57	58	59	60
9	61	62	63	64	65
10	56б	66	67а	68а	69
11	63	67б	70	68б	71

56. а) Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может независимо от остальных принимать значение 1, 0 или -1. Какое наименьшее значение может иметь сумма всевозможных попарных произведений этих n чисел?

б) Какое наименьшее значение может принимать сумма всевозможных попарных произведений n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждое из которых по абсолютной величине не превосходит единицы?

57. Имеется доска 3×3 клетки и 9 карточек размером в одну клетку, на которых написаны какие-то

числа. Двое играющих по очереди кладут эти карточки на клетки доски. После того, как все карточки разложены, первый (начинающий) подсчитывает сумму шести чисел; стоящих в верхней и нижней строках, второй подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в левом и правом столбцах. Выигрывает тот, у кого сумма больше. Докажите, что при правильной игре первого второй не сможет выиграть независимо от того, какие числа написаны на карточках.

58. Около треугольника ABC описаны окружность. Хорды, соединяющие середину дуги AC с серединами дуг AB и BC, пересекают стороны AB и BC в точках D и E. Докажите, что отрезок DE параллелен стороне AC и проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

59. Номер автобусного билета — шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трех цифр номера равна сумме последних трех цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

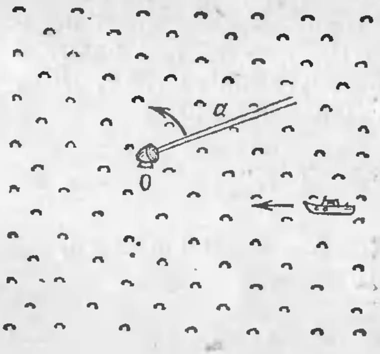


Рис. 4

60*. На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает отрезок поверхности моря длиной a (рис. 4). Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси так, что конец его луча перемещается со скоростью v. Докажите, что катер, имеющий максимальную скорость $v/8$, не сможет подойти к острову, не попав в луч прожектора.

61. В народной дружине 100 человек, и каждый вечер на дежурство выходят трое. Докажите, что нельзя так организовать график дежурств, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

62. Какое наибольшее значение может принимать длина отрезка, высекаемого боковыми сторонами треугольника на касательной к вписанной окружности, проведенной параллельно основанию, если периметр треугольника равен $2p$?

63. n^2 чисел x_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют системе из n^3 уравнений:

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Докажите, что существуют такие числа $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$, что $x_{ij} = a_i - a_j$ для любых i и j.

64*. Можно ли разместить 1965 точек в квадрате со стороной 1 так, чтобы любой прямоугольник площади 1/200 со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержал внутри хотя бы одну из этих точек?

65*. Округлением числа называется замена его одним из двух ближайших целых чисел.

Даны n чисел. Докажите, что можно так округлить их, чтобы сумма любых m округленных чисел $(1 \leqslant m \leqslant n)$ отличалась от суммы этих же неокругленных чисел не более чем на $(n+1)/4$.

66. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал и при этом идти только по улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда может это сделать.

67. а) Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовали по 10 человек, причем никакие два из членов комиссии не были вместе на заседаниях более одного раза.

Докажите, что число членов комиссии больше 60.

б) Докажите, что из 25 человек нельзя составить больше 30 комиссий по 5 человек в каждой, чтобы никакие две комиссии не имели больше одного общего члена.

68*. Даны два взаимно простых числа $p > 0$ и $q > 0$. Целое число n называется хорошим, если его можно представить в виде $n = px + qy$, где x и y — целые неотрицательные числа, и плохим — в противном случае. а) Докажите, что существует такое целое число c, что из двух целых чисел n и $c - n$ всегда одно хорошее, а другое — плохое. б) Сколько всего плохих неотрицательных чисел?

69. Самолет-разведчик летает по кругу с центром в точке A. Радиус круга 10 км, скорость самолета — 1000 км/ч. В некоторый момент из точки A выпускается ракета, которая имеет ту же скорость, что и самолет, и управляется так, что она все время находится на прямой, соединяющей самолет с точкой A. Через какое время после запуска ракета догонит самолет?

70. Докажите, что сумма длин ребер многогранника больше $3d$, где d — расстояние между наиболее удаленными вершинами многогранника.

71*. На планете, имеющей форму шара, живет один житель, который может передвигаться по поверхности планеты со скоростью, не большей u; к этой планете подлетает космический корабль, который может двигаться со скоростью v. Докажите, что если $v/u > 10$, то с корабля можно увидеть жителя планеты, как бы тот ни пытался скрыться.

Шестая Всероссийская олимпиада, 1966 г. (Воронеж)

Класс					
8	**72**	**73а**	**74**	**75а**	**76**
9	**77**	**73б**	**75б**	**78**	**79**
10—11	**75б**	**80**	**81**	**82**	**83**

72. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

73. а) Точки B и C лежат внутри отрезка AD. Докажите, что если AB равно CD, то для любой точки P плоскости выполняется неравенство: $PA + PD \geqslant PB + PC$.

б) На плоскости отмечены точки A, B, C и D. Известно, что для любой точки P выполняется неравенство $PA + PD \geqslant PB + PC$. Докажите, что точки B и C лежат на отрезке AD и $AB = CD$.

74. Существуют ли такие натуральные числа x и y, для которых $x^2 + y$ и $y^2 + x$ — квадраты целых чисел?

75. а) Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его ростом. Докажите, что если шеренгу восьмиклассников выстроить по росту и шеренгу семиклассников тоже выстроить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.

б) Полк солдат выстроен в виде прямоугольника таким образом, что в каждой шеренге солдаты стоят по росту. Докажите, что если в каждой колонне перестроить солдат тоже по росту, то в каждой шеренге они по-прежнему будут стоять по росту.

76. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $ABCD$, стороны которого лежат на линиях сетки, причем AD в k раз больше AB (k — целое число). Рассматриваются всевозможные пути, проходящие по линиям сетки и кратчайшим образом ведущие из A в C. Докажите, что среди этих путей таких, в которых первое звено лежит на AD, в k раз больше, чем таких, в которых первое звено лежит на AB.

77. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1$, $a_2 \leqslant a_3 \leqslant 2a_2$; $\ldots$; $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}$. Докажите, что в сумме $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ можно так выбрать знаки, чтобы было $0 \leqslant s \leqslant a_1$.

78. Докажите, что в выпуклый четырехугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P.

79. В некотором городе для любых трех перекрестков A, B и C есть путь, ведущий из A в B и не проходящий через C. Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два непересекающихся пути (перекресток — место, где сходятся по крайней мере две улицы; в городе не меньше двух перекрестков).

80. Дан треугольник ABC. Рассматриваются всевозможные тетраэдры $PABC$, у которых наименьшей из высот является PH (H — проекция точки P на плоскость ABC). Найдите множество точек H.

81*. На плоскости даны 100 точек. Докажите, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше 100 и расстояние между любыми двумя из которых больше единицы (расстояние между двумя непересекающимися кругами — это расстояние между их ближайшими точками).

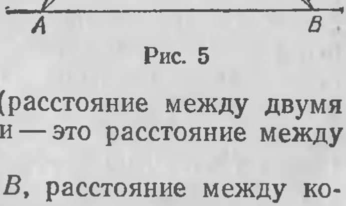


Рис. 5

82. Из двух точек A и B, расстояние между которыми равно d км, одновременно в течение одной секунды наблюдают за самолетом, летящим по прямой с постоянной скоростью (рис. 5). Из точки A

сообщили, что самолет сместился за эту секунду на угол α, а из точки B — что самолет сместился на угол β (углы α и β острые). Какую наименьшую скорость мог иметь самолет?

83*. Написано 20 чисел: 1, 2, ..., 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки «+» или «—» (знак можно ставить перед любым свободным числом). Первый стремится к тому, чтобы полученная после расстановки всех 20 знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй?

1-я Всесоюзная олимпиада, 1967 г. (Тбилиси)

Класс					
8	84а	85а	86а	87	88
9	87б	86а	85б	84б	88
10	90	86б	91	92	93

84. а) В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот AH равна медиане BM. Докажите, что угол ABC не больше 60°.

б) В остроугольном треугольнике ABC высота AH равна медиане BM и равна биссектрисе CD. Докажите, что треугольник ABC правильный.

85. а) В некотором натуральном числе произвольно переставили цифры. Докажите, что сумма полученного числа с исходным не равна $\underbrace{999\ldots9}_{1967 \text{ цифр}}$.

б) Цифры некоторого числа переставили и сложили полученное число с исходным. Докажите, что если сумма равна 10^{10}, то исходное число делилось на 10.

86. а) Прожектор освещает угол 90°. Докажите, что расположенные в четырех произвольных точках плоскости прожектора можно направить так, чтобы осветить всю плоскость.

б) В каждой из восьми точек пространства стоит прожектор, который освещает октант (трехгранный угол со взаимно перпендикулярными ребрами) с вершиной в этой точке. Докажите, что можно направить прожектора так, чтобы они осветили все пространство.

87. а) Можно ли на окружности расположить числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы любые два соседних отличались на 3, 4 или 5?

б) Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, ..., 13 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3, 4 или 5?

88. Докажите, что существует число, делящееся на 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.

89*. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y.$$

90. В последовательности целых (положительных) чисел каждый член, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих.

Какое наибольшее число членов может иметь такая последовательность, если каждый ее член не превосходит 1967?

91. «КОРОЛЬ-САМОУБИЙЦА». На шахматной доске размером 1000×1000 стоит черный король и 499 белых ладей. Докажите, что при произвольном начальном расположении фигур король может стать под удар белой ладьи, как бы ни играли белые. (Ходы делаются так же, как и в обычных шахматах.)

92. Три последовательные вершины ромба лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD данного квадрата со стороной 1. Найдите площадь фигуры, которую заполняют четвертые вершины таких ромбов.

93*. Натуральное число k обладает таким свойством: если n делится на k, то и число, записываемое теми же цифрами, что и n, в обратном порядке, делится на k. Докажите, что k — делитель числа 99.

2-я Всесоюзная олимпиада, 1968 г. (Ленинград)

Класс	Письменный тур					Устный тур				
8	94	95	96	97	98	105а	106	107	108	109
9	99	100	101	97	102	110	111	105а	108	109
10	103	95	104	97	96	105б	112	113	114	109

94. В восьмиугольнике все углы равны, а длины сторон — целые числа. Докажите, что противоположные стороны восьмиугольника равны между собой.

95. Какое из чисел больше: 31^{11} или 17^{14}?

96. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?

97. Среди студентов, поступивших в Университет дружбы народов, ровно 50 человек знают английский язык, ровно 50 человек знают французский язык и ровно 50 человек знают испанский язык. Докажите, что студентов можно разбить на 5 (не обязательно равных) групп так, чтобы в каждой группе было ровно 10 человек, знающих английский язык, ровно 10 человек, знающих французский язык, и ровно 10 человек, знающих испанский язык. (Предполагается, что некоторые из студентов могут либо не знать ни одного из этих языков, либо знать любое количество из них.)

98. Докажите тождество:

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=$$
$$=11\left(\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\ldots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right).$$

99. В правильном n-угольнике $(n>5)$ разность между наибольшей и наименьшей диагоналями равна стороне. Найдите n.

100. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... образована по следующему правилу:

$$a_1=1,\ a_2=a_1+\frac{1}{a_1},\ \ldots,\ a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}.$$

Докажите, что $a_{100}>14$.

101. Внутри остроугольного треугольника ABC взята точка O, а внутри остроугольного треугольника $A'B'C'$ — точка O'. Из точки O опущены перпендикуляры: OA_1 — на сторону BC, OB_1 — на сторону CA и OC_1 — на сторону AB. Точно так же из точки O' опущены перпендикуляры $O'A_1'$ на $B'C'$, $O'B_1'$ на $C'A'$ и $O'C_1'$ на $A'B'$. Оказалось, что $OA_1 \parallel O'A'$, $OB_1 \parallel O'B'$ $OC_1 \parallel O'C'$ и $OA_1 \cdot O'A' = OB_1 \cdot O'B' = OC_1 \cdot O'C'$.

Докажите, что $O'A_1' \parallel OA$, $O'B_1' \parallel OB$, $O'C_1' \parallel OC$ и $O'A_1' \cdot OA = O'B_1' \cdot OB = O'C_1' \cdot OC$.

102*. Докажите, что любое натуральное число, не превосходящее $n!$, можно представить как сумму не более n слагаемых, среди которых нет двух одинаковых, и каждое является делителем числа $n!$.

103. В треугольнике ABC взяли точку D на стороне AB и точку E на AC. При этом оказалось, что $DE \parallel BC$, $AD = DE = AC$, $BD = AE$.

Докажите, что длина BD равна длине стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = AC$.

104. На ребрах AB, AC, AD тетраэдра $ABCD$ построены, как на диаметрах, шары. Докажите, что эти шары покрывают тетраэдр.

105. а) В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «—», как показано на рис. 6. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 6

б) На всех клетках шахматной доски 8×8 расставлены плюсы, за исключением одной не угловой клетки, где стоит минус. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках одной горизонтали, одной вертикали или одной диагонали (в частности, в любой угловой клетке; диагональ — линия, по которой ходит шахматный слон). Докажите, что сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить доску с одними плюсами.

106. Медианы разбивают треугольник ABC на шесть треугольников. Оказалось, что четыре из окружностей, вписанных в эти треугольники, равны. Докажите, что треугольник ABC правильный.

107. Докажите, что уравнение

$$x^2 + x + 1 = py$$

имеет решение в целых числах (x, y) для бесконечного числа простых p.

108. После выступлений 20 фигуристов каждый из 9 судей по своему усмотрению распределяет среди них места с 1-го по 20-е. Оказалось, что у каждого фигуриста места, присвоенные ему разными судьями, отличаются не более чем на 3. Подсчитаем суммы мест, полученных каждым фигуристом, и расположим эти числа в порядке возрастания: $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \leqslant c_3 \leqslant \ldots \leqslant c_{20}$. Какое наибольшее значение может иметь c_1?

109*. Известно, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ встречаются по разу числа $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n$ и среди чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — тоже. Известно, кроме того, что $a_1+b_1 \geqslant a_2+b_2 \geqslant a_3+b_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n + b_n$. Докажите, что $a_m+b_m \leqslant 4/m$ для всех m от 1 до n.

110. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашку весов каждую гирю, на которой написана его фамилия. Докажите, что можно впустить в класс таких учеников, чтобы в результате перевесила не та чашка весов, которая перевешивала вначале.

111. Город имеет в плане вид прямоугольника, разбитого на клетки: n улиц параллельны друг другу, m других пересекают их под прямым углом. На улицах города — но не на перекрестках — стоят милиционеры. Каждый милиционер сообщает номер проходящего мимо него автомобиля, направление его движения и время, когда он проехал. Какое наименьшее число милиционеров нужно расставить на улицах, чтобы по их показаниям можно было однозначно восстановить путь любого автомобиля, едущего по замкнутому маршруту (маршрут не проходит по одному и тому же участку улицы дважды)?

112. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке K. Докажите, что прямая, соединяющая середину стороны AC с центром вписанной окружности, делит отрезок BK пополам.

113. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a_1=0, \quad |a_2|=|a_1+1|, \quad |a_3|=|a_2+1|, \ldots$$
$$\ldots, |a_n|=|a_{n-1}+1|.$$

Докажите, что $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

114. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, длины всех сторон и диагоналей которого рациональны. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что длина отрезка AO — рациональное число.

3-я Всесоюзная олимпиада, 1969 г. (Киев)

Класс	1-й день	2-й день
8	115 116 117	122 123 124а
9	118 119 115	124 125 126
10	119 120 121	125 126 128

115. На основании AD трапеции $ABCD$ нашлась такая точка E, что периметры треугольников ABE, BCE и CDE равны. Докажите, что $BC = AD/2$.

116. В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — четыре собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по сторонам квадрата. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Максимальная скорость каждой собаки в 1,5 раза больше максимальной скорости волка. Докажите, что собаки имеют возможность не выпустить волка из квадрата.

117. Дана конечная последовательность нулей и единиц, обладающая двумя свойствами:

а) если в некотором произвольном месте последовательности выделить 5 цифр подряд и в любом другом месте тоже выделить 5 цифр подряд, то эти пятерки будут различны (эти пятерки могут перекрываться, например 0110101);

б) если к последовательности добавить справа любую цифру 0 или 1, то свойство а) перестает выполняться.

Докажите, что первая четверка цифр нашей последовательности совпадает с последней четверкой.

118. a, b, c и d — положительные числа. Докажите, что среди неравенств

$$a + b < c + d,$$

$$(a + b)(c + d) < ab + cd,$$

$$(a + b)\,cd < ab\,(c + d)$$

есть хотя бы одно неверное.

119. Каково наименьшее натуральное число a, для которого найдется квадратный трехчлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом a, имеющий два различных положительных корня, меньших единицы?

120. Дано натуральное число n. Выпишем все дроби вида $\frac{1}{pq}$, где p и q взаимно просты, $0 < p < q \leqslant n$, $p + q > n$. Докажите, что сумма всех таких дробей равна 1/2.

121*. В пространстве расположены n точек так, что любые три из них являются вершинами треугольника, один из углов которого больше 120°. Докажите, что эти точки можно обозначить буквами A_1, A_2, ..., A_n таким образом, что каждый из углов $A_iA_jA_k$, где $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, будет больше 120°.

122. Четыре различных целых трехзначных числа, начинающихся с одной и той же цифры, обладают тем свойством, что их сумма делится на три из них без остатка. Найдите эти числа.

123. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки.

Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

124. Рассматривается выпуклый пятиугольник, у которого длины всех сторон равны.

а) Докажите, что внутри него найдется такая точка, лежащая на наибольшей диагонали, из которой все стороны видны под углами, не превышающими прямого.

б) Докажите, что круги, построенные на его сторонах как на диаметрах, не покрывают пятиугольник целиком.

125. На доске написано уравнение

$$x^3 + \ldots + x^2 + \ldots + x + \ldots = 0.$$

Двое играют в такую игру. Первый ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от нуля (положительное или отрицательное). Затем второй ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, первый ставит целое число на последнее свободное место, Докажите, что первый может играть так, чтобы независимо от хода второго все три корня получившегося уравнения оказались целыми числами.

126*. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

127. h_k — апофема правильного k-угольника, вписанного в круг радиуса R. Докажите, что

$$(n+1)h_{n+1} - nh_n > R.$$

128*. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} > \frac{n}{4}.$$

4-я Всесоюзная олимпиада, 1970 г. (Симферополь)

Класс	1-й день	2-й день
8	129 130 131 132 133а	
9	134 135 133б 136 137	
10	138 139 133б 136 140	141 142 143

129. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA.

130. Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

131. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали?

132. Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с первоначальным. Докажите, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной.

133. а) Замок имеет форму (в плане) равностороннего треугольника со стороной 100 метров. Он разделен на 100 треугольных залов. Все стены залов имеют одинаковую длину — 10 метров. В середине каждой стены между залами сделана дверь. Докажите, что если человек захочет пройти по замку, побывав в каждом зале не более одного раза, то он сможет осмотреть не более 91 зала.

б) Каждая сторона правильного треугольника разбита на k равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на k^2 маленьких треугольничков. Назовем «цепочкой» последовательность треугольничков, в которой ни один треугольник не появляется дважды, а каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное число треугольничков в «цепочке»?

134. Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

135. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Доказать, что угол BAC больше 45°.

136. Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Докажите, что

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}.$$

137*. Докажите, что из любых двухсот целых чисел можно выбрать сто чисел, сумма которых делится на сто.

138. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

139. Докажите, что для каждого натурального числа k существует бесконечно много натуральных чисел t, не содержащих нулей в десятичной записи и таких, что t и kt имеют одинаковые суммы цифр.

140. Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Докажите, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

141. На карточках написаны все пятизначные числа от 11 111 до 99 999 включительно. Затем эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Докажите, что получившееся 444 445-значное число не может быть степенью двойки.

142*. Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше n цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую — с четной суммой цифр. Докажите, что если $1 \leqslant k < n$, то сумма k-х степеней всех чисел первой группы равна сумме k-х степеней всех чисел второй группы.

143*. Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

5-я Всесоюзная олимпиада, 1971 г. (Рига)

Класс	1-й день					2-й день		
8	144	145а	146а	147		152а, б	153	154
9	144	145а	148	147	146б	156а, б, в	152в	155
10	149	145б	150	147	151	156	157	158

144. Докажите, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n.

145. а) Дан треугольник $A_1A_2A_3$. На его стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки

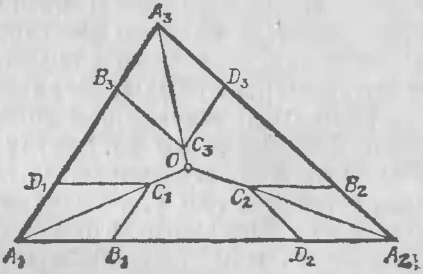


Рис. 7

B_2 и D_3, на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке O. Докажите, что если $A_1B_1 = A_2D_2$ и $A_2B_2 = A_3D_3$, то $A_3B_3 = A_1D_1$ (рис. 7).

б) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$. На его стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, ..., на стороне A_nA_1 — точки B_n и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, ..., A_nC_n пересекутся в одной точке O. Докажите, что равны произведения длин

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 \cdot \ldots \cdot A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \ldots \cdot A_nD_n.$$

146. а) Двое играют в такую игру. Первый записывает один под другим два ряда по 10 чисел так, чтобы выполнялось следующее правило: если число b записано под числом a, а число d — под числом c, то $a + d = b + c$. Второй игрок, зная это правило, хочет определить все написанные числа. Ему разрешается задавать первому игроку вопросы типа «Какое число стоит в первой строке на третьем месте?» или «Какое число стоит во второй строке на девятом месте?» и т. п. За какое наименьшее число таких вопросов второй игрок сможет узнать все числа?

б) В таблице $m \times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не меньше чем $m + n - 1$ чисел.

147*. В квадрате со стороной 1 расположено несколько кругов, диаметр каждого из которых меньше 0,001. Расстояние между любыми двумя точками любых двух кругов не равно 0,001. Докажите, что общая площадь, покрытая кругами, не превышает 0,34.

148*. В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Докажите, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю имеющуюся воду.)

149. Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство $(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0$, то квадратные трехчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

150. Проекции тела на две плоскости — круги. Докажите, что эти круги имеют равные радиусы.

151. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c)<0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

152. а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

в) Докажите, что все прямые, делящие одновременно и площадь, и периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.

153. Докажите, что из 25 различных положительных чисел можно выбрать два таких числа, что ни одно из оставшихся не равно ни сумме, ни разности (между большим и меньшим) выбранных чисел.

154. а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2 \ldots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.

б) Докажите то же утверждение, если разрешается менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знак в трех последовательных вершинах многоугольника.

155*. На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия:

1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах,

2) в любом вырезанном квадрате площадь черных клеток составит не менее 1/5 и не более 4/5 площади этого квадрата.

Условиям задач 156—158, предлагавшимся на второй день олимпиады ученикам 10 класса, был предпослан такой текст:

«Вам предлагаются три задачи. Верное решение любой из них представляет серьезные трудности и требует много времени. Выберите одну из этих задач и постарайтесь продвинуться в ней как можно дальше.

Перед окончанием работы составьте «сводку результатов» по этой задаче, которую вы решали: перечислите доказанные Вами факты, укажите примеры, в которых Вам удалось разобраться, сформулируйте гипотезы, которые Вам кажутся верными.»

156. Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?

а) Укажите ответ для маленьких значений n: для $n = 2, 3, 4$.

б)* Попробуйте найти ответ при $n = 10$.

в)* Решите общую задачу. Если Вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г)* Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так.

Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3), где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений $1, 2, \ldots, n$. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличается от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3)? Попробуйте найти ответ для более общей задачи, когда рассматриваются наборы не из трех, а из четырех или большего числа букв.

157. а) Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Докажите, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n), что $f(x-m, y-n) = (x-m)^2 + (x-m)(y-n) + (y-n)^2 \leqslant 1/2$.

б)* Обозначим через $\bar{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x-m, y-n)$ при всех целых m и n. Утверждение задачи а) состояло в том, что для всех x, y выполнено неравенство $\bar{f}(x, y) \leqslant 1/2$.

Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\bar{f}(x, y) \leqslant 1/3$. Найдите все точки, для которых достигается равенство $\bar{f}(x, y) = 1/3$.

в)* Рассмотрим функцию $f_a(x, y) = x^2 + axy + y^2$ $(0 \leqslant a \leqslant 2)$. Найдите какое-либо число c зависящее от a так, чтобы для всех (x, y) выполнялось неравенство $|f_a(x, y)| \leqslant c$. Постарайтесь найти точную оценку.

158. Переключатель (рис. 8, *а*) с двумя входами и двумя выходами может находиться в двух различных состояниях.

На рис. 8, *б* изображена схема телефонной связи с тремя входами и тремя выходами, которая обладает таким свойством «универсальности»: меняя состояния переключателей, можно осуществить любое

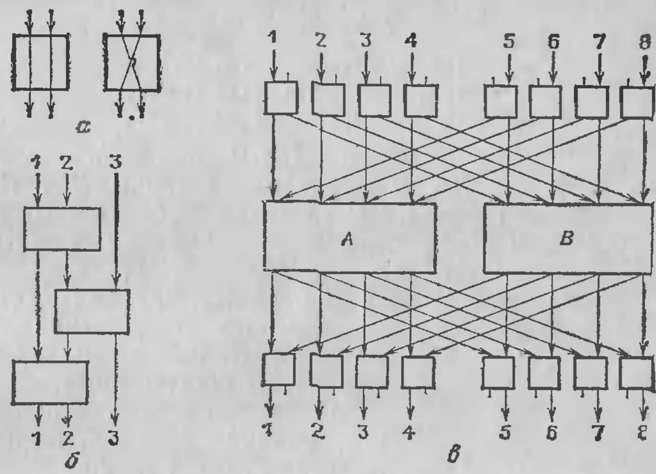


Рис. 8

из шести соединений трех входов с тремя различными выходами, т. е.

$$\begin{array}{cccccc} 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 3 \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ 1\ 2\ 3, & 3\ 1\ 2, & 2\ 3\ 1, & 2\ 1\ 3, & 3\ 2\ 1, & 1\ 3\ 2. \end{array}$$

(Проверьте это. Заметьте, что общее число различных состояний этой схемы равно $2^3 = 8$, поскольку каждый из переключателей может находиться в двух состояниях.)

а) Постройте схему с четырьмя входами и четырьмя выходами, которая была бы «универсальной», т. е. осуществляла бы любое из 24 возможных соединений выходов и входов.

б) Какое минимальное число переключателей нужно для такой схемы?

в)* Назовем схему с n входами и n выходами n-универсальной, если она осуществляет любое из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ возможных соединений n входов с n различными выходами.

На рис. 8, *в* изображена схема с восемью входами и восемью выходами, где A и B — 4-универсальные схемы. Докажите, что она является 8-универсальной.

Оцените сверху и снизу число переключателей в минимальной n-универсальной схеме.

6-я Всесоюзная олимпиада, 1972 г. (Челябинск)

Класс	1-й день	2-й день
8	159 160 161	166 167 168
9	162а 163 161 164	169 170 171
10	162г 163 165 164	166 172 173

159. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка DC за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Докажите, что $\angle QNM = \angle MNP$.

160. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;

б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

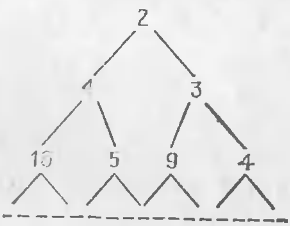


Рис. 9

161. Найдите наибольшее целое число x такое, чтобы число

$$4^{27} + 4^{1000} + 4^{x}$$

являлось полным квадратом.

162. а) Пусть a, m, n — натуральные числа, $a > 1$, Докажите, что если $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$, то m делится на n.

б) Пусть a, b, m, n — натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a > 1$. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n.

163. Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число a, а далее под каждым числом k слева пишется k^2, а справа — число $k+1$. Например, при

$a = 2$ получается таблица, изображенная на рис. 9. Докажите, что в каждой строчке такой таблицы все числа различны.

164*. Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Докажите, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2.

165. O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников AOB и COD, перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения высот треугольников BOC и AOD.

166. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как $2:3$. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

167. Семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ вписан в окружность. Докажите, что если центр этой окружности лежит внутри семиугольника, то сумма углов при вершинах A_1, A_3 и A_5 меньше 450°.

168*. Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее по своему усмотрению вместо одной из звездочек в следующей разности:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} * * * * \\ * * * * \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Докажите, что:

а) второй может расставлять числа так, чтобы получившаяся при этом разность стала бы не больше 4000 независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000 независимо от того, куда расставляет эти цифры второй.

169. Пусть x, y — положительные числа, s — наименьшее из чисел x, $y+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. Найдите наибольшее возможное значение s. При каких x и y оно достигается?

170. Точка O, лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждыми двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Докажите, что эта точка равноудалена от вершин многоугольника.

171. Можно ли расставить цифры 0, 1, 2 в клетках листа клетчатой бумаги размером 100×100 клеток таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике 3×4 клетки оказалось три нуля, четыре единицы и пять двоек?

172. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Пусть s — наибольшее из чисел

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Найдите наименьшее возможное значение s. При каких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оно достигается?

173*. Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из этой же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечетное число очков. Докажите, что в турнире участвовало четное число команд. (Поражение — 0 очков, ничья — 1 очко, выигрыш — 2 очка.)

7-я Всесоюзная олимпиада, 1973 г. (Кишинев)

Класс	1-й день	2-й день
8	174а 175 176	182 183 184
9	174б 177 178	179 185 186 184
10	180 177 181	187 188 184

174. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие. Суд же знает только то, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта — чашечные весы без гирь.

а) Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые. Как он может это сделать, используя только три взвешивания?

б) Покажите, что с помощью трех взвешиваний он может доказать даже больше: что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие.

175. Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть полным квадратом целого числа.

176. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

177. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Докажите, что $OK = KB$.

178. Действительные числа a, b, c таковы, что для всех чисел x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1.$$

Докажите, что при этих значениях x выполнено также неравенство

$$|cx^2 + bx + a| \leqslant 2.$$

179. Теннисная федерация присвоила всем входящим в нее теннисистам квалификационные номера: сильнейшему — первый номер, следующему по силе — второй и т. д. Известно, что во встречах теннисистов, квалификационные номера которых различаются более, чем на 2, всегда побеждает спортсмен с меньшим номером. Турнир, в котором участвуют 1024 сильнейших теннисиста, проводится по олимпийской системе: участники очередного тура разбиваются по жребию на пары и в следующий тур выходит победитель в каждой паре, так что число участников после каждого тура уменьшается вдвое. Таким образом, после десятого тура будет выявлен победитель. Какой наибольший номер может он иметь?

180. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней.

181. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка K приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки K и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то K становится белой, если две или три из них были черными — то черной). а) Докажите, что через конечное время на листе не останется черных клеток; б) Докажите, что черные клетки исчезнут не позже чем в момент времени $t = n$.

182. На сторонах остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены три подобных между собой остроугольных треугольника AC_1B, BA_1C, CB_1A (при этом $\angle AB_1C = \angle ABC_1 = \angle A_1BC$; $\angle BA_1C = \angle BAC_1 = \angle B_1AC$).

а) Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AC_1B, BA_1C и CB_1A, пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что в той же точке пересекаются прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

183. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

184. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле (король ходит по обычным правилам). Когда нарисовали его путь, соединив отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, то получилась замкнутая ломаная без самопересечений.

а) Приведите пример, показывающий, что король мог сделать ровно 28 ходов по горизонтали и вертикали.

б) Докажите, что он не мог сделать меньше, чем 28 таких ходов.

в) Какую наибольшую и какую наименьшую длину может иметь путь короля, если длина стороны клетки равна 1?

185. Дан треугольник с площадью 1 и сторонами a, b, c. Известно, что $a \geqslant b \geqslant c$. Докажите, что $b \geqslant \sqrt{2}$.

186. Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Докажите, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

187. Докажите, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1).$$

188. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

8-я Всесоюзная олимпиада, 1974 г. (Ереван)

Класс	1-й день			2-й день			
8	189а, б, в	190	191	197	198	199	200а
9	190	192	189г	193	201	202	200б
10	194	195	196	193	203	204	200б

189. На карточках написаны числа, каждое из которых равно «+1» или «—1». Разрешается, указав три карточки, спросить: «Чему равно произведение чисел на этих карточках?» (сами числа нам не сообщают). Какое наименьшее число таких вопросов надо задать, чтобы узнать произведение чисел на всех карточках, если число карточек равно: а) 30; б) 31; в) 32? В каждом случае докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

г) По окружности написано 50 чисел, каждое из которых равно «+1» или «—1». Требуется узнать произведение всех этих чисел. За один вопрос можно узнать произведение трех стоящих подряд чисел. Какое наименьшее число вопросов необходимо задать?

190. Среди чисел вида $36^k - 5^l$, где k и l — натуральные числа, найдите наименьшее по абсолютной величине. Докажите, что найденное число действительно наименьшее.

191. а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длины больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1?

192. Даны две окружности радиусов R и r, касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB.

193*. На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 2.

194. При каких действительных a, b, c равенство

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = \\ = |x| + |y| + |z|$$

верно для всех действительных x, y, z?

195. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ прямой.

196. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Особые точки разрешается перекрашивать: на каждом шагу выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной особой точки.

197. Найдите все натуральные числа n и k такие, что n^n имеет k цифр, а k^k имеет n цифр.

198. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотезу AB соответственно в точках K и L. Докажите, что $KL = LB$.

199. На шахматной доске 8×8 двое играют в игру «кошки-мышки». У первого одна фишка — мышка, у второго несколько фишек — кошек. Все фишки ходят одинаково: вправо, влево, вверх или вниз на одну клетку. Если мышка оказалась на краю доски, то очередным ходом она спрыгивает с доски. Если кошка и мышка попадают на одну и ту же клетку, то кошка съедает мышку.

Играющие ходят по очереди, причем второй передвигает своим ходом всех своих кошек сразу (разных кошек можно при этом сдвигать в разных направлениях). Начинает мышка. Она старается спрыгнуть с доски, а кошки стараются до этого ее съесть.

а) Пусть кошек всего две. Мышка уже поставлена на какую-то клетку не на краю. Можно ли так поставить кошек на краю доски, чтобы они сумели съесть мышку?

б) Пусть кошек три, но зато мышка имеет лишний ход: в первый раз она делает два хода подряд. Докажите, что мышка сможет убежать от кошек, каково бы ни было начальное расположение фишек.

200. а) Докажите, что числа $1, 2, 3, \ldots, 32$ можно расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними.

б) Можно ли числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

201. Найдите все трехзначные числа A, обладающие следующим свойством: среднее арифметическое всех чисел, получающихся из числа A различными перестановками его цифр, равно A.

202. Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить никакой треугольник площади 1. Докажите, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

203. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ задана функция f. Известно, что эта функция неотрицательна и $f(1) = 1$. Кроме того, для любых двух чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2).$$

а) Докажите, что какова бы ни была функция f, удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех x будет выполнено неравенство $f(x) \leqslant 2x$.

б) Верно ли, что для всех x

$$f(x) \leqslant 1{,}9x?$$

204. Дан треугольник ABC площади 1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM, если точки K, L и M лежат соответственно на отрезках AB_1, CA_1 и BC_1?

9-я Всесоюзная олимпиада, 1975 г. (Саратов)

Класс	1-й день				2-й день		
8	**205а**	**206**	**207**	**208а**	**213**	**214**	**215**
9	**209**	**206**	**210**	**208б**	**216**	**215**	**217**
10	**211**	**212**	**205б**	**208**	**214**	**218**	**219**

205. а) Из треугольника ABC поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180°, получили треугольник $A_1B_1C_1$. Соответствующие друг другу при повороте отрезки AB и A_1B_1 пересекаются в точке C_2, BC и B_1C_1 — в точке A_2, CA и C_1A_1 — в точке B_2. Докажите, что треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC подобны.

б) Из четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, поворотом вокруг центра на некоторый угол, меньший 180°, получили четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что точки пересечения соответствующих друг другу при повороте прямых: AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DA и D_1A_1, служат вершинами параллелограмма.

206. Дан треугольник ABC площади 1. Первый игрок выбирает точку X на стороне AB, второй — Y на стороне BC, затем первый — Z на стороне AC. Цель первого — получить треугольник XYZ наибольшей площади, второго — наименьшей. Какую наибольшую площадь может обеспечить себе первый?

207. Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32-угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

208*. а) В квадрате 7×7 клеток нужно отметить центры k клеток так, чтобы никакие четыре отмеченные точки не являлись вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно?

б) Решите аналогичную задачу для квадрата 13×13 клеток.

209. В выпуклом шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ середины диагоналей A_6A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_1 обозначим соответственно через B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6. Докажите, что если шестиугольник

$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ выпуклый, то его площадь в четыре раза меньше площади $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

210. Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах.

211. В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что некоторая прямая пересекает все эти многоугольники.

212. Докажите, что для положительных a, b, c имеет место неравенство $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)$.

213. Три мухи ползают по сторонам треугольника ABC так, что центр тяжести образуемого ими треугольника остается на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника ABC, если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. (Центр тяжести треугольника — точка пересечения его медиан.)

214. На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вписать вместо них цифру, отличную от стертых (вместо 0 и 1 — цифру 2, вместо 1 и 2 — 0, вместо 0 и 2 — 1). Докажите, что если в результате таких операций на доске останется одно число, то оно не зависит от порядка, в котором производились стирания.

215. Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих прямых пересекаются внутри полосы и никакие три из них не имеют общей точки. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы,

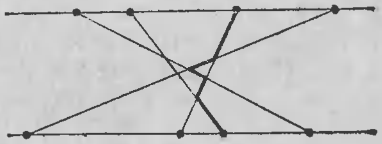


Рис. 10

идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке полосы, обладающие таким свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны переходить на другую прямую (рис. 10). Докажите, что среди таких путей а) есть не менее $n/2$ путей без общих точек;

б) есть путь, состоящий не менее чем из n отрезков;

в)* есть путь, проходящий не более чем по $\frac{n}{2}+1$ прямым;

г)* есть путь, проходящий по всем n прямым. *)

216. Для каких натуральных k можно составить куб размерами $k\times k\times k$ из белых и черных кубиков $1\times 1\times 1$ так, чтобы для любого кубика ровно два из его соседей имели тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.)

217. Дан многочлен $P(x)$ с

а) натуральными коэффициентами;

б) целыми коэффициентами.

Обозначим через a_n сумму цифр в десятичной записи числа $P(n)$. Докажите, что найдется число, которое встречается в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ бесконечно много раз.

218. В чемпионате мира и Европы участвуют 20 команд. Среди них имеется k европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачет чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг.

При каком наибольшем k может оказаться, что команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберет строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это:

а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи)?

б) чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)?

219. а) Даны вещественные числа a_1, a_2, b_1, b_2 и положительные числа p_1, p_2, q_1, q_2. Докажите, что в следующей таблице 2×2

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1}{p_1+q_1} & \dfrac{a_1+b_2}{p_1+q_2} \\[2ex] \dfrac{a_2+b_1}{p_2+q_1} & \dfrac{a_2+b_2}{p_2+q_2} \end{pmatrix}$$

найдется число, которое не меньше числа, стоящего с ним в одной строке, и не больше числа, стоящего с ним в одном столбце.

---

*) В восьмом классе предлагались вопросы а), б) и г), причем для $n=20$; в 9 классе вопросы б), в) и г) для общего случая n прямых.

б)* Даны вещественные числа a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n и положительные числа p_1, p_2, ..., p_m, q_1, q_2, ..., q_n. Составлена таблица $m \times n$, в которой на пересечении i-й строки ($i = 1, 2, \ldots, m$) и j-го столбца ($j = 1, 2, \ldots, n$) стоит число

$$\frac{a_i + b_j}{p_i + q_j}.$$

Докажите, что в этой таблице найдется число, которое не меньше любого числа, стоящего с ним в одной строке, и не больше любого числа, стоящего с ним в одном столбце.

10-я Всесоюзная олимпиада, 1976 г. (Душанбе)

Класс	1-й день				2-й день
8	220	221	222а, б	223	229 230 231
9	222б	224	223	225	230 232 231
10	223	226	227	228 225	233 234 231

220. На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

221. В строчку подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом a первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз a встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом b второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз b встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой — пятая и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Более того, докажите, что 11-я строчка совпадает с 12-й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й.

222. На плоскости даны три окружности одинакового радиуса.

а) Докажите, что если все они пересекаются в одной точке, как показано на рис. 11, *а*, то сумма отмеченных дуг AK, CK, EK равна 180°.

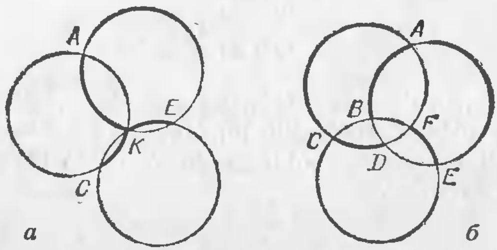


Рис. 11

б) Докажите, что если они расположены так, как показано на рисунке 11, *б*, то сумма отмеченных дуг AB, CD, EF равна 180°.

223. Натуральные числа x_1, x_2 меньше 10000. Исходя из них строится последовательность x_1, x_2, x_3, ..., x_n, где число x_3 равно $|x_1 - x_2|$, число x_4 равно наименьшему из чисел $|x_1 - x_2|$, $|x_2 - x_3|$, $|x_1 - x_3|$, число x_5 равно наименьшему из чисел $|x_1 - x_2|$, $|x_1 - x_3|$, $|x_1 - x_4|$, $|x_2 - x_3|$, $|x_2 - x_4|$, $|x_3 - x_4|$ и так далее (каждое следующее число равно наименьшей из абсолютных величин разностей между предыдущими числами). Докажите, что обязательно $x_{21} = 0$.

224. Можно ли вершины куба занумеровать различными трехзначными числами, составленными из цифр 1 и 2, так чтобы номера любых двух соседних вершин различались не менее чем в двух разрядах?

225*. На плоскости даны векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, сумма которых равна 0. Докажите неравенство

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}| \geqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|.$$

226. В правильном 1976-угольнике отмечены середины всех сторон и середины всех диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной окружности?

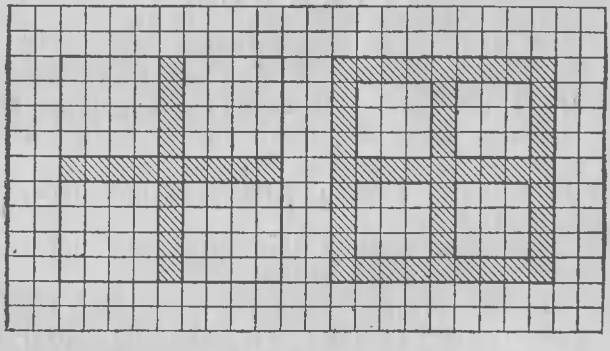
227. На квадратном листе бумаги нарисованы n прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам листа. Никакие два из этих прямоугольников

не имеют общих внутренних точек. Докажите, что если вырезать все прямоугольники, то количество кусков, на которые распадется оставшаяся часть листа, не более $n+1$.

228. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

229. На шахматной доске размера 99×99 отмечена фигура (эта фигура будет разной в пунктах а), б), в)). В каждой клетке фигуры Ф сидит по жуку. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры Ф; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)

а) Пусть фигура Ф — это «центральный крест», т. е. объединение средней вертикали и средней горизонтали (рис. 12, *а*). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетел в соседнюю клетку



а *б*

Рис. 12

б) Верно ли утверждение, если фигура — это «оконная рама», то есть объединение центрального креста и всех граничных клеток доски (рис. 12, *б*)?

в)* Верно ли утверждение, если фигура — это вся доска?

230. Будем называть треугольник «большим», если длины всех его сторон больше 1. Дан правильный треугольник ABC со стороной длины 5. Докажите, что:

а) из треугольника ABC можно вырезать 100 «больших» треугольников;

б) треугольник ABC можно целиком разрезать не менее чем на 100 «больших» треугольников.

в)* треугольник ABC можно разрезать не менее чем на 100 «больших» треугольников, соблюдая следующее условие: любые два «больших» треугольника либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую вершину, либо сторона одного из них является стороной другого. (Такое разрезание называется триангуляцией.)

г)* решите задачи б) и в) для правильного треугольника со стороной длины 3.

231. Дано натуральное число n. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geqslant n)$ назовем универсальной для данного n, если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$ (т. е. любую последовательность из n чисел, в которую каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ входит по одному разу). Например, последовательность (1, 2, 3, 1, 2, 1, 3) является универсальной для $n = 3$, а последовательность (1, 2, 3, 2, 1, 3, 1) не универсальна, так как из нее никаким вычеркиванием нельзя получить перестановку (3, 1, 2). Цель этой задачи — получить оценку числа членов самой короткой универсальной последовательности (для данного n).

а) Приведите пример универсальной последовательности из n^2 членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из $n^2 - n + 1$ членов.

в)* Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $n(n+1)/2$ членов.

г)* Докажите, что при $n = 4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д)* Попробуйте найти для данного n как можно более короткую универсальную последовательность. (Жюри умеет строить универсальную последовательность из $n^2 - 2n + 4$ членов.)

232. На окружности расположены n действительных чисел, сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Докажите, что есть два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$.

б)* Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $8/n^2$.

в)* Оценку, предложенную в предыдущем пункте, можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь большим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г)* Докажите, что для $n = 30$ на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $2/113$. Приведите пример набора из 30 чисел на окружности, в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на $2/113$.

233. В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа $(+1)$ и (-1). За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k-угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение $(+1)$ и (-1), что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $(+1)$:

а) $n = 15$;

б) $n = 30$;

в)* n — любое число, большее 2;

г)* Попробуйте пояснить для произвольного n, чему равно наибольшее число $K(n)$ различных расстановок $(+1)$ и (-1), среди которых ни одну нельзя получить из другой за несколько шагов. Докажите, например, что $K(200) = 2^{80}$.

234*. На сфере радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию f, ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора.

Проверьте, что эта функция обладает следующим свойством:

(*) если M_1, M_2, M_3 — концы трех взаимно перпендикулярных радиусов сферы, то $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=1$.

Во всех следующих пунктах f — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает свойством (*).

б) Пусть M и N — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем точка N, то $f(M)>f(N)$.

в) Пусть M и N — произвольные точки сферы. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем N, то $f(M)>f(N)$.

г) Докажите, что если точки M и N лежат на одной параллели, то $f(M)=f(N)$.

д) Докажите, что функция f совпадает с функцией, описанной в пункте а).

11-я Всесоюзная олимпиада, 1977 г. (Таллин)

Класс	1-й день	2-й день	
8	**235 236 237б 238**	**243 244а, б**	**245 246**
9	**237а 239 235 240**	**247 248**	**249 250**
10	**237а 239 241 242 235**	**251 244а, в—д**	**246**

235. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар четно.

236. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.

237. а) В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_1 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_2. Докажите, что в шестиугольнике $T_1 \cap T_2$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

б) Отрезок, соединяющий середины дуг AB и AC окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках D и K. Докажите, что точки A, D, K и центр O вписанной окружности треугольника ABC — вершины ромба.

238. По окружности расположено несколько черных и белых фишек. Двое по очереди проделывают такую операцию: первый убирает все черные фишки, имеющие белого соседа (хотя бы с одной стороны), а второй после этого убирает все белые фишки, имеющие черного соседа. Так они делают до тех пор, пока не останутся все фишки одного цвета.

а) Пусть вначале было 40 фишек. Может ли случиться, что после того, как каждый сделает два хода, на окружности останется одна фишка?

б)* На окружности сначала было 1000 фишек. Через какое наименьшее число ходов на окружности может остаться одна фишка?

239. Дана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{a_n}{2}\right)=0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

240*. В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

241. В каждой вершине выпуклого многогранника M сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

242*. Написан многочлен $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots$ $\ldots + *x^2 + *x + 1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и т. д. (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

243. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

244. Будем называть $2n$-значное число особым, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами (при этом второе n-значное число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю, а первое не может начинаться с нуля).

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Возможны ли шестизначные особые числа? (Докажите, что их нет или приведите пример такого числа.)

в)* Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

г)* Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

д)* Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

245*. Дано множество положительных чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ..., n слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.

246. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что:

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в)* нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков;

г)* Пусть билеты имеют четырехзначные номера (от 0000 до 0001) и билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера билета вычеркиванием каких-либо двух цифр. Докажите, что все четырехзначные билеты можно разложить в 34 ящика.

д)* Какой минимальный набор ящиков потребуется для k-значных билетов ($k = 4, 5, 6, \ldots$)?

247. Дан квадратный лист клетчатой бумаги 100×100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что кроме вершин квадрата найдется узел (внутри или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

248*. Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

249. На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.

250. На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R: $LRLRLR \dots$ Здесь буква L обозначает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б)* Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.

251*. Мы будем рассматривать многочлены от одного переменного x со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (т. е. после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа α найдите все многочлены Q степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены R и Q коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов $P_2, P_3, P_4, \dots, P_k, \dots$, где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x) = x^2 - 2$.

12-я Всесоюзная олимпиада, 1978 г. (Ташкент)

Класс	1-й день		2-й день
8	252 253 254	255а, б	260 261 262 263
9	252 253 256	257	260 261 264 265
10	258 259 255в, г, д	257	260 266 267 268

252. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{1980}}.$$

253. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

254. Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$.

255. На плоскости (или в пространстве) задано конечное множество K_0. К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается K_1. Аналогично из множества K_1 получается K_2, из K_2 — K_3 и т. д.

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n найдется точка, находящаяся на расстоянии 1000 от точки A?

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n ($n = 1, 2, \ldots$).

В следующих пунктах K_0 — множество из четырех точек, являющихся вершинами правильного тетраэдра единичного объема.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1. Сколько и каких граней у этого многогранника?

г) Чему равен объем этого многогранника?

д)* Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множества K_n (при $n = 2, 3, \ldots$).

256. Даны две кучки спичек. В начале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m > n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Докажите, что если $m > 2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m > \alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

257*. Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность x_n, что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m - x_k| \geqslant \frac{1}{|m-k|}.$$

258. Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального числа $m > 1$ числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, ... попарно взаимно просты.

259. Докажите, что существует такое число A, что в график функции $y = A\sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неравных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)

260. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает новую карточку $(a+1; b+1)$; второй, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a/2;\ b/2)$ (он работает только тогда, когда a и b четные); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$. Кроме того, автоматы выдают обратно все прочитанные карточки.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку: а) $(1; 50)$? б) $(1; 100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать?

261. В окружность радиуса R вписан n-угольник площади S. На каждой стороне n-угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n-угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$.

262. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

263. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

264. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0 < a < b$. Докажите неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

265*. Дано простое число $p > 3$. Рассмотрим на координатной плоскости множество M, состоящее из таких точек с целыми координатами (x, y), что $0 \leqslant x < p$, $0 \leqslant y < p$. Докажите, что можно отметить p различных точек множества M так, чтобы никакие четыре из них не лежали в вершинах параллелограмма и никакие три из них не лежали на одной прямой.

266*. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.

267. Рассмотрим n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Положим

$$b_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \quad (\text{для } k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2,$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2.$$

Докажите неравенства $C \leqslant D \leqslant 2C$.

268*. Рассмотрим последовательность чисел $x_n = \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^n$. Каждое из них приводится к виду

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}.$$

13-я Всесоюзная олимпиада, 1979 г. (Тбилиси)

Класс	1-й день	2-й день
8	269 270 271	274 275 276 277
9	269 272 271	278 279 280 281
10	273 272 271	276 275 282 283

269. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат на трех разных сторонах другого?

270. Кенгуру прыгает по углу $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x; y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x - 5; y + 7)$ или в точку $(x + 1; y - 1)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x; y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x; y)$ и найдите его площадь.

271. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если B — враг A, то A — враг B.)

272. В тетради написано несколько чисел. Разрешается приписать к уже написанным числам любое число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если только оно отлично от всех уже написанных. Докажите, что, начиная с двух чисел 0 и 1, с помощью таких приписок можно получить:

а) число 1/5;

б)* любое рациональное число между 0 и 1.

273. Убывающая последовательность x_n положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$x_1+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}\leqslant 3.$$

274. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A, B этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна 0.

275. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размером

а) 8×8 клеток,

б) $n\times n$ клеток

для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.)

276. Найти x и y из системы уравнений

$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a,\quad \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b$$

(a и b — данные числа).

277. Имеется несколько квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что такими квадратами всегда можно покрыть квадрат площади 1.

278. Докажите, что для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполняется неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2\geqslant 4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

279. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел

$$\frac{1}{p},\ \frac{2}{p},\ \ldots,\ \frac{p-1}{p},\ \frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \ldots,\ \frac{q-1}{q}.$$

280. Через точку O в пространстве проведено 1979 прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{1979}$, никакие две из которых не взаимно перпендикулярны. На прямой l_1 взята

произвольная точка A_1, отличная от 0. Докажите, что можно выбрать точки A_i на l_i, $i=2, 3, \ldots, 1979$, таким образом, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярными:

$$A_1A_3 \perp l_2,\ A_2A_4 \perp l_3,\ \ldots,\ A_{i-1}A_{i+1} \perp l_i,\ \ldots$$
$$\ldots,\ A_{1977}A_{1979} \perp l_{1978},\ A_{1978}A_1 \perp l_{1979},\ A_{1979}A_2 \perp l_1.$$

281*. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 0 до $n-1$ сумма

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\ldots+a_{n-k}a_n$$

является нечетным числом.

а) Придумайте такую последовательность для $n=25$.

б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n>1000$.

282. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разрезан своими диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что если радиусы всех четырех окружностей, вписанных в эти треугольники, равны между собой, то четырехугольник $ABCD$ — ромб.

283*. На прямой по порядку расположены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, что длины отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек $A_2, \ldots, A_{n-1}$ красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_1A_n разбивается красными точками, отличались не более чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать:

а) для $k=3$;

б) для каждого натурального $k<n-1$.

14-я Всесоюзная олимпиада, 1980 г. (Саратов)

Класс	1-й день	2-й день
8	284 285 286 287	293 294 295 296
9	288 289 286 290	295 297 298 299
10	291 289 292 290	300 301 302 303

284. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021 ... ... 7980 на 1980?

285. Вертикальная сторона AB квадрата $ABCD$ разделена на n отрезков так, что сумма длин отрезков с четными номерами равна сумме длин отрезков с нечетными номерами. Через точки деления проведены отрезки, параллельные стороне AD, а затем каждая из получившихся n полосок диагональю BD разбита на две части — левую и правую.

Докажите, что сумма площадей левых частей с нечетными номерами равна сумме площадей правых частей с четными номерами (на рис. 13 эти части заштрихованы).

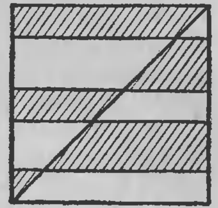


Рис. 13

286. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.

287. Точки M и P — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $AM+AP=a$. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ меньше $a^2/2$.

288. Имеет ли уравнение $x^2+y^3=z^4$ решения в простых числах x, y, z?

289. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей.

290. На берегу большого круглого озера расположено несколько населенных пунктов. Между некоторыми из них установлено теплоходное сообщение. Известно, что два пункта связаны рейсом тогда и только тогда, когда два следующих за ними против часовой стрелки пункта рейсом не связаны. Докажите, что из любого пункта в любой другой пункт можно добраться теплоходом, причем не более чем с двумя пересадками.

291. Шестизначное число, записанное шестью отличными от нуля различными цифрами, делится на 37. Докажите, что перестановками цифр этого числа

можно получить еще по крайней мере 23 различных шестизначных числа, делящихся на 37.

292. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + 2\sin(x+y+z) = 0, \\ \sin y + 3\sin(x+y+z) = 0, \\ \sin z + 4\sin(x+y+z) = 0. \end{cases}$$

293. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1979 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 векторов равна нулевому вектору.

294. Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли натуральное n такое, что $n + S(n) = 1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n + S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n.

295. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11?

296. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет — т. е. он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их.

Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

297. Обозначим через $P(n)$ произведение всех цифр натурального числа n. Может ли последовательность (n_k), заданная рекуррентной формулой $n_{k+1} = n_k + P(n_k)$ и своим первым членом $n_1 \in N$, оказаться неограниченной?

298. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Определите углы треугольника DEC.

299. Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны x, y и z сантиметров $(x < y < z)$, а $p = 4(x+y+z)$, $s = 2(xy+yz+xz)$ и $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — соответственно его периметр, площадь поверхности и длина диагонали. Докажите, что

$$x < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}s}\right),$$

$$z > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}s}\right).$$

300. Множество A состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент A, кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих A. Укажите среди всех множеств A, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.

301. Докажите, что существует бесконечно много чисел B, для которых уравнение

$$[x^{3/2}] + [y^{3/2}] = B$$

имеет по крайней мере 1980 решений в натуральных числах x, y ($[z]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее числа z).

302. В тетраэдре $ABCD$ ребро AC перпендикулярно BC, а AD перпендикулярно BD. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше чем CD/AB.

303. Число $x \in [0; 1]$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу x_1. Переставив в десятичной записи числа x_1 цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа x_2. Вообще, десятичная запись числа x_{k+1} получается перестановкой цифр в записи x_k с $(k+1)$-й по $(k+5)$-ю после запятой.

а) Докажите, что как бы ни переставлять цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел x_k всегда имеет некоторый предел.

Обозначим этот предел через y.

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса из рационального числа x получить иррациональное число y.

в) Придумайте такую дробь x, для которой описанный процесс всегда приводит к иррациональным числам y, каковы бы ни были перестановки пятерок цифр на каждом шаге.

15-я Всесоюзная олимпиада, 1981 г. (Алма-Ата)

Класс	1-й день	2-й день
8	**304 305 306 307**	**315 316 317 318**
9	**308 307 309 310**	**319 320 321 322**
10	**311 312 313 314**	**323 324 325 326**

304. Две одинаковые шахматные доски (8×8 клеток) имеют общий центр, причем одна из них повернута относительно другой на 45° около центра. Найдите суммарную площадь всех пересечений черных клеток этих двух досок, если площадь одной клетки равна 1.

305. На окружности даны точки A, B, M и N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

306. Будем говорить, что число обладает свойством $\mathrm{P}(k)$, если оно разлагается в произведение k последовательных натуральных чисел, больших 1.

а) Найдите k такое, для которого некоторое число N обладает одновременно свойствами $\mathrm{P}(k)$ и $\mathrm{P}(k+2)$.

б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами P(2) и P(4), не существует.

307. В таблице 4 строки. В первой из них записаны произвольные натуральные числа, среди которых могут быть и одинаковые. Вторая строка заполняется так: слева направо просматриваются числа первой строки и под числом a записывается число k, если a встретилось в первой строке в k-й раз. Аналогично по второй строке записывается третья, а по третьей — четвертая.

Докажите, что вторая и четвертая строки всегда получаются одинаковыми.

308. Задано число a. Найдите наименьшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат Ox и Oy и содержащего фигуру, определяемую системой неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant -x^2, \\ y \geqslant x^2 - 2x + a. \end{cases}$$

309. Правильные треугольники ABC, CDE и EHK (вершины указаны против часовой стрелки) с попарно общими вершинами и E расположены на плоскости так, что $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DK}$. Докажите, что треугольник BHD тоже правильный.

310. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка.

Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

311. Про числа a и b известно, что неравенство

$$a \cos x + b \cos 3x > 1$$

не имеет решений. Докажите, что $|b| \leqslant 1$.

312. Точки K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, точки L и N расположены на двух других сторонах так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое больше площади прямоугольника $KLMN$.

313*. Найдите все последовательности натуральных чисел (a_n) такие, что выполнены следующие два условия:

а) при любом n $a_n \leqslant n\sqrt{n}$;

б) при любых различных m и n разность $a_m - a_n$ делится на $m - n$.

314*. Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и черных клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета?

315. Докажите, что если четырехугольники $ACPH$, $AMBE$, $AHBT$, $BKXM$, $CKXP$ суть параллелограммы, то и четырехугольник $ABTE$ — параллелограмм (вершины всех четырехугольников перечислены против часовой стрелки).

316. Решите уравнение

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

в натуральных числах x, y.

317. В футбольном турнире 18 команд сыграли между собой 8 туров — каждая команда сыграла с восемью разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

318. Точки C_1, A_1, B_1 взяты соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC так, что

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1/3.$$

Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр p треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами

$$\frac{1}{2}P < p < \frac{3}{4}P.$$

319. Докажите, что если положительные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 = x - y$, то $x^2 + y^2 < 1$.

320. Ученику нужно скопировать выпуклый многоугольник, помещающийся в круге радиуса 1. Сначала ученик отложил первую сторону, из ее конца провел вторую, из конца второй — третью и т. д. Закончив построение, он обнаружил, что многоугольник не замкнулся, а первая и последняя нарисованные им вершины удалены на расстояние d одна от другой. Известно, что углы ученик откладывал точно, а относительная погрешность при откладывании длины каждой стороны не превышала числа p. Докажите, что $d \leqslant 4p$.

321. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел

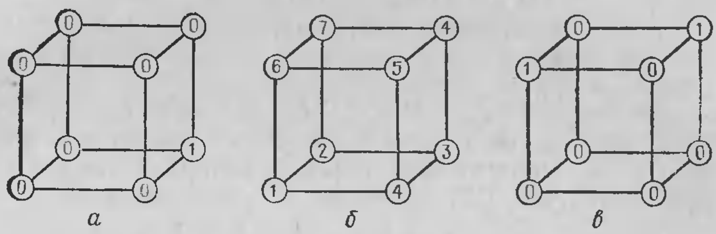


Рис. 14

равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рис. 14,*а*? Как на рис. 14,*б*? Как на рис. 14,*в*?

322. Найдите хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+20$ имеет с числом $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ общий делитель, больший единицы.

323. Натуральные числа от 100 до 999 написаны каждое на своей карточке. Карточки положены на стол числами вниз, перемешаны и сложены затем в одну стопку. Будем, открывая последовательно карточки из этой стопки, сортировать их, раскладывая на кучки числами вверх в соответствии с младшей цифрой написанного числа. В первой кучке окажутся все числа, оканчивающиеся на 0, во второй — оканчивающиеся на 1 и т. д. Сложим все кучки в одну стопку, положив поверх первой кучки вторую, затем третью и в конце концов десятую. Получившуюся стопку карточек перевернем и рассортируем еще раз, но теперь, открывая карточки, будем раскладывать их на кучки в соответствии со второй цифрой. Сложим опять получившиеся кучки в одну стопку, как указано раньше (по возрастанию второй цифры) и рассортируем их в последний раз, раскладывая и собирая кучки уже в соответствии со старшими цифрами. В каком порядке будут расположены карточки в стопке, полученной после этой сортировки.

324. В прямоугольнике 3 см $\times$ 4 см расположено 6 точек. Докажите, что найдется пара точек, удаленных одна от другой не более чем на $\sqrt{5}$ см.

325. а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена

$$P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2.$$

б)* Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y.

326. Отрезки AD, BE, CF служат боковыми ребрами правильной треугольной призмы. На ее основании ABC найдите все точки, равноудаленные от прямых AE, BF, CD.

16-я Всесоюзная олимпиада, 1982 г. (Одесса)

Класс	1-й день				2-й день			
8	327	328	329а	330	337	338	339	340
9	331	332	333	334	341	342	343	344
10	335	332	329б	336	345	346	347	348

327. На окружности с центром O_1 радиуса r_1 взяты точки M и K. В центральный угол MO_1K вписана окружность с центром O_2 радиуса r_2. Найдите площадь четырехугольника MO_1KO_2.

328. В числовых последовательностях (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательностях?

329. а) Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что если для некоторых неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ число $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_n}$ делится на $2^m - 1$, то $n \geqslant m$.

б) Существует ли натуральное число, делящееся на $\underbrace{111\ldots1}_{m}$ и имеющее сумму цифр, меньшую чем m?

330. Каждой вершине куба поставлено в соответствие некоторое неотрицательное действительное число, причем сумма всех этих чисел равна 1. Двое играют в следующую игру. Первый выбирает любую

грань куба, второй выбирает другую грань и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать грани, параллельные уже выбранным, нельзя. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы число, соответствующее общей вершине трех выбранных граней, не превосходило 1/6.

331. Однажды трое мальчиков встретились в библиотеке. Один из них сказал: «Теперь я буду ходить в библиотеку через день». Второй заявил, что он будет ходить в библиотеку через два дня, а третий — что будет ходить в библиотеку через три дня. Слышавший их разговор библиотекарь заметил, что по средам в библиотеке выходной день. Мальчики ответили, что если у кого-нибудь из них дата прихода попадет на выходной день библиотеки, то он придет на следующий день и дальнейший отсчет посещений будет вести уже с этого дня. Так мальчики и поступили. Однажды в понедельник они вновь все вместе встретились в библиотеке. В какой день недели происходил описанный выше разговор?

332. В параллелограмме $ABCD$, отличном от ромба, дано отношение длин диагоналей: $AC:BD = k$. Пусть луч AM симметричен лучу AD относительно прямой AC, луч BM симметричен лучу BC относительно прямой BD, M — общая точка лучей AM и BM. Найдите отношение $AM:BM$.

333*. На окружности отмечено $3k$ точек, разделяющих ее на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг — длину 2 и остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.

334. Внутри тетраэдра выбрана точка M. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше чем $-1/3$.

335. Числа a, b, c лежат на интервале $(0; \pi/2)$ и удовлетворяют равенствам: $\cos a = a$, $\sin \cos b = b$, $\cos \sin c = c$. Расположите эти числа в порядке возрастания.

336. Замкнутая ломаная M имеет нечетное число вершин — последовательно $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Обозначим через $S(M)$ новую замкнутую ломаную, последовательные вершины $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$ которой являются серединами звеньев ломаной M: B_1 — середина отрезка A_1A_2, B_2 — середина A_3A_4, $\ldots$, B_{n+1} —

середина $A_{2n+1}A_1$, B_{n+2} — середина A_2A_3, ..., B_{2n+1} — середина $A_{2n}A_{2n+1}$. Докажите, что в последовательности построенных таким образом ломаных

$$M_1 = S(M),\ M_2 = S(M_1),\ M_3 = S(M_2),\ \ldots$$
$$\ldots,\ M_k = S(M_{k-1}),$$

найдется замкнутая ломаная, гомотетичная исходной ломаной M.

337. Натуральные числа от 1 до 1982 расположены одно за другим в некотором порядке. ЭВМ просматривает слева направо пары стоящих рядом чисел (первое и второе, второе и третье и т. д.) вплоть до последней и меняет местами числа в просматриваемой паре, если большее из них стоит левее. Затем она просматривает все пары, двигаясь справа налево от последней пары до первой, меняя местами числа в парах по тому же закону. По окончании этого просмотра работающий с ЭВМ оператор получил информацию, что число, стоящее на сотом месте, оба раза не сдвинулось со своего места. Найдите это число.

338. Огурцовая река, протекающая в Цветочном городе, в районе пристани имеет несколько островов, общий периметр которых равен 8 метрам. Знайка утверждает, что можно отчалить на лодке от пристани и переправиться на другой берег, проплыв менее 3 метров. Берега реки в районе пристани параллельны, а ширина ее равна 1 м. Прав ли Знайка?

339. На координатной плоскости Oxy нарисовали график функции $y = x^2$. Потом оси координат стерли — осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

340. Квадратная таблица $n \times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:

а) не менее чем $[n/2]$ раз ($[a]$ — целая часть числа a);

б) не менее чем n раз.

341. Докажите, что для всех положительных значений x выполнено неравенство

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

342. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из совокупности чисел $1, 2, 3, \ldots, 1982$ так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других из оставшихся чисел? Каким образом это можно сделать?

343. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих ее клеток.

344*. Докажите, что из любой последовательности действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно выбрать часть чисел так, чтобы выполнялись следующие три условия:

а) никакие идущие подряд три числа не выбраны;

б) из каждых трех идущих подряд чисел хотя бы одно выбрано;

в) модуль суммы выбранных чисел не меньше, чем

$$\frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{6}.$$

345. В квадратной таблице $n \times n$ клеток отмечено $n-1$ клеток. Докажите, что перестановками строк между собой и столбцов между собой можно добиться того, чтобы все отмеченные клетки лежали ниже диагонали таблицы.

346. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа a справедливо неравенство

$$|a||a-1||a-2| \ldots |a-n| \geqslant \langle a \rangle \frac{n!}{2^n},$$

где $\langle a \rangle \ldots$ — расстояние от числа a до ближайшего к нему целого числа, $n! = 1, 2, \ldots, n$.

347. а) Существуют ли многочлены

$$P=P(x, y, z), \quad Q=Q(x, y, z), \quad R=R(x, y, z)$$

от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3 P+(y-z-1)^3 Q+(z-2x+1)^3 R=1.$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3 P+(y-z-1)^3 Q+(z-x+1)^3 R=1.$$

348*. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше 4/3 суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$.

17-я Всесоюзная олимпиада, 1983 г. (Кишинев)

Класс	1-й день				2-й день			
8	349	350	351	352	360	361	362	363
9	353	354	355	356	364	365	366	367
10	357	354	358	359	360	368	369	370

349. В сетке, изображенной на рис. 15, каждая ячейка имеет размер 1×1. Можно ли эту сетку представить в виде объединения следующих множеств: а) восьми ломаных, каждая из которых имеет длину 5; б) пяти ломаных, каждая из которых имеет длину 8?

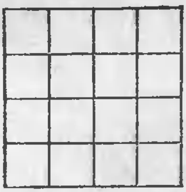


Рис. 15

350. На доске написали три целых числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других оставшихся чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа: а) 2,2,2; б) 3,3,3?

351. Три круга попарно касались друг друга внешним образом в точках X, Y, Z. Затем радиусы этих кругов увеличили более чем в $2/\sqrt{3}$ раз, сохраняя центры. Докажите, что каждая точка треугольника XYZ оказалась накрытой хотя бы одним из увеличенных кругов.

352. Даны несколько различных натуральных чисел, заключенных между квадратами двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что все их попарные произведения также различны.

353. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$$

354. Натуральное число k в десятичной записи имеет n знаков. Это число округлили с точностью до десятков, заменив последнюю цифру нулем и увеличив на единицу число десятков, если эта последняя цифра была больше четырех. Полученное число аналогичным образом округлили с точностью до сотен и так далее. В результате последнего $(n-1)$-го округления получилось число $\tilde{k}$. Докажите, что $\tilde{k} < 18k/13$.

355. В треугольнике ABC точка D является серединой стороны AB, точки E и F лежат на отрезках AC и BC соответственно. Докажите, что площадь треугольника DEF не превосходит суммы площадей треугольников ADE и BDF.

356. Будут ли периодическими последовательности (α_n) и (β_n), состоящие соответственно из последних цифр целых чисел $[(\sqrt{10})^n]$ и $[(\sqrt{2})^n]$? (Здесь $[x]$ — целая часть числа x.)

357. Величины α и β двух острых углов удовлетворяют равенству $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)$. Докажите, что $\alpha + \beta = \pi/2$.

358. Вершины тетраэдра $ABCD$ ортогонально спроектированы на две плоскости. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 — проекции соответствующих вершин. Докажите, что одну из плоскостей можно переместить в пространстве так, чтобы прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 стали параллельными.

359*. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Решив очередное квадратное уравнение и убедившись в том, что у него имеется два корня, он составляет следующее уравнение по правилу: свободный член равен большему корню, коэффициент при переменной x равен меньшему корню, коэффициент при x^2 равен единице. Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго. Каково наибольшее число уравнений, которое ему, возможно, придется решить?

360. Натуральные числа m, n, k таковы, что число m^n делится на n^m, а число n^k делится на k^n. Докажите, что число m^k делится на k^m.

361. В языке племени Абба две буквы. Известно, что никакое слово этого языка не является началом другого слова. Может ли словарь языка этого племени содержать 3 четырехбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

362. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа бумаги расставить целые числа так, чтобы в каждом прямоугольнике размерами 4×6 клеток, стороны которого идут по линиям бумаги, сумма чисел была а) 10; б) 1?

363. Все четыре треугольника, заштрихованные на рис. 16, равновелики. Докажите, что три четырехугольника, не заштрихованные на нем, также равновелики. Чему равна площадь одного четырехугольника, если площадь одного треугольника равна 1 см^2?

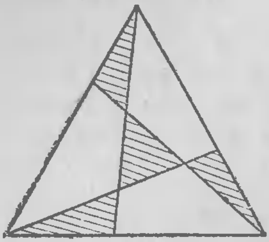


Рис. 16

364. Группа детского сада построилась парами друг за другом. При этом оказалось, что в каждой колонне стоит поровну мальчиков и девочек, а число пар, в которых стоят девочка и мальчик, равно числу остальных пар. Докажите, что число детей в группе делится на 8.

365. Длины двух параллельных сторон прямоугольника равны 1 см. Кроме того, известно, что двумя перпендикулярными прямыми он может быть разбит на четыре прямоугольника, три из которых имеют площадь, не меньшую 1 см^2, а четвертый — не меньшую 2 см^2. При какой минимальной длине двух других сторон прямоугольника это возможно?

366. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка O. Докажите, что справедливо равенство

$$S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \mathbf{0},$$

где S_A, S_B, S_C — площади треугольников BCO, CAO, ABO соответственно.

367. Докажите, что среди любых $2m+1$ различных целых чисел, не превосходящих по модулю $2m-1$, можно найти три числа, сумма которых равна 0.

368. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (но не в вершинах) выбраны точки D, E, F соответственно. Обозначим через d_0, d_1, d_2, d_3 длины наибольших сторон треугольников DEF, ADF, BDE, CEF.

Докажите, что $d_0 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$. В каких случаях имеет место равенство?

369. Множество M состоит из k попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы концы его принадлежали множеству M. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $1/k$.

370*. В бесконечном десятичном разложении действительного числа a встречаются все цифры. Пусть v_n — количество различных цифровых отрезков длины n, встречающихся в этом разложении. Докажите, что если для некоторого n выполнено условие $v_n \leqslant n + 8$, то число a рационально.

18-я Всесоюзная олимпиада, 1984 г. (Ашхабад)

Класс	1-й день				2-й день			
8	**371**	**372**	**373**	**374**	**383**	**384**	**385**	**386**
9	**375**	**376**	**377**	**378**	**387**	**388**	**389**	**390**
10	**379**	**380**	**381**	**382**	**391**	**392**	**393**	**394**

371. а) Произведение некоторых целых n чисел равно n, а сумма их равна нулю. Докажите, что число n делится на 4.

б) Пусть n — натуральное число, делящееся на 4. Докажите, что найдутся n целых чисел, произведение которых равно n, а сумма равна нулю.

372. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

373. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равные соответственно векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$. Докажите, что точки A, B, C также являются вершинами равностороннего треугольника.

374. Имеются четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной длины 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были разные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких чисел m и n из этих плиточек можно склеить прямоугольник размера $m \times n$, у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета всех сторон разные?

375. Докажите, что при всех действительных $x > 0$, $y > 0$ и при всех действительных α справедливо неравенство

$$x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} < x + y.$$

376. Имеется куб и две краски: красная и зеленая. Двое играют в такую игру. Начинающий выбирает 3 ребра куба и красит их в красный цвет. Его партнер выбирает 3 ребра из тех, что еще не покрашены, и красит их в зеленый цвет. После этого снова 3 ребра в красный цвет красит начинающий, а затем 3 ребра в зеленый цвет — его партнер. Запрещается перекрашивать ребро в другой цвет или красить дважды одинаковой краской. Выигрывает тот, кто первым сумеет покрасить своей краской все ребра какой-нибудь грани. Верно ли, что начинающий при правильной игре обязательно выигрывает?

377. По кругу записаны $n \geqslant 3$ натуральных чисел так, что для каждого числа отношение суммы его соседей к нему является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений: а) не меньше $2n$; б)* меньше $3n$.

378. Окружность с центром в точке O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AC, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность соответственно в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

379. При каких целых m и n выполняется равенство

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n?$$

380. В строку в возрастающем порядке выписали n различных действительных чисел. Под ними во вторую строку выписали те же числа, только, быть может, в другом порядке. Для каждой пары чисел, выписанных одно под другим, вычислили сумму. Эти суммы образовали третью строку. Оказалось, что

числа в третьей строке также расположены в возрастающем порядке. Докажите, что первая строка совпадает со второй.

381. Дан треугольник ABC. Через точку P провели прямые PA, PB, PC, которые пересекли описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1, C_1, отличных от вершин треугольника. Оказалось при этом, что треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC. Докажите, что существует не более восьми точек P с указанным свойством.

382. Положительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25, \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9, \\ z^2+zx+x^2=16. \end{cases}$$

Вычислите величину $xy+2yz+3zx$.

383. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2+10x+20$, после чего по очереди каждый из учеников увеличил или уменьшил на единицу либо коэффициент при x, либо свободный член, но не оба сразу. В результате на доске оказался написан квадратный трехчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

384. Монету радиуса r перемещают по плоскости так, что ее центр обходит контур выпуклого многоугольника, описанного около круга радиуса $R>r$ и имеющего периметр P. Найдите площадь фигуры, образованной следом монеты (многоугольного кольца).

385. Имеется $n+1$ гирь общим весом $2n$ и весы с двумя чашками, находящиеся в равновесии. Вес каждой из гирь выражается натуральным числом. Гири по очереди кладут на чашки весов: сначала самую тяжелую (или одну из самых тяжелых), затем самую тяжелую из оставшихся и т. д. При этом каждую следующую гирю кладут на ту чашку весов, которая в данный момент легче, а если весы находятся в равновесии, то на любую из чашек. Докажите, что после того, как на весах окажутся все гири, весы будут находиться в равновесии.

386. Назовем натуральное число абсолютно простым, если оно простое и если при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Докажите, что в записи абсолютно простого числа не может содержаться более трех различных цифр.

387. Цифры $x \neq 0$ и y таковы, что при любом $n \geqslant 1$ число $\underbrace{xx\ldots x}_{n}6\underbrace{yy\ldots y}_{n}4$ является квадратом некоторого целого числа. Найдите все такие x и y.

388. На прямой взяты четыре различные точки, обозначенные в порядке следования буквами A, B, C, D. Докажите, что для любой точки E, не лежащей на прямой AD, справедливо неравенство

$$AE + ED + |AB - CD| > BE + CE.$$

389. Последовательность x_n задана рекуррентным образом: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{2}x_n$, если $n \geqslant 1$. Докажите, что последовательность x_n имеет предел, и найдите его.

390*. В белых клетках шахматной доски размером 1983×1984 записаны числа 1 или -1 так, что для любой черной клетки произведение чисел, стоящих в соседних с ней белых клетках, равно 1. Докажите, что это возможно только в том случае, если все записанные числа равны 1.

391. В клетках квадратной таблицы 3×3 записаны числа 1 или -1. Для каждой клетки таблицы вычислим произведение чисел, стоящих в соседних с ней клетках (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). После этого впишем вычисленные произведения в клетки таблицы вместо стоявших там ранее чисел, с новой таблицей проделаем ту же операцию и т. д. Докажите, что после некоторого числа таких операций в таблице будут записаны одни единицы.

392. Какое из чисел больше:

$$\frac{2}{201} \quad \text{или} \quad \ln\frac{101}{100}?$$

393. На плоскости расположены три окружности c_1, c_2, c_3 с центрами C_1, C_2, C_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно, причем каждая лежит вне двух других, $r_1 > r_2$; $r_1 > r_3$, A — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_2 — лежит вне окружности c_3, B — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_3 — лежит вне окружности c_2. Из точки A проведены касательные к окружности c_3, из точки B — к окружности c_2. Докажите, что эти две пары касательных, пересекаясь, образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность. Вычислите радиус этой окружности.

394. Докажите, что любое сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба, имеет площадь, не меньшую площади грани куба.

19-я Всесоюзная олимпиада, 1985 г. (Могилев)

Класс	1-й день	2-й день
8	**395 396 397 398**	**407 408 409 410**
9	**399 400 401 402**	**411 410 412 413**
10	**403 404 405 406**	**414 415 416 417**

395. В остроугольном треугольнике из середины каждой стороны опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами, равна половине площади треугольника.

396. Существует ли натуральное число n, обладающее следующим свойством: сумма цифр числа n (в десятичной записи) равна 1000, а сумма цифр числа n^2 равна 1000^2?

397. Какое наибольшее число дамок можно расставить на шашечной доске 8×8 клеток так, чтобы каждая дамка билась хотя бы одной другой дамкой?

398. В правильном n-угольнике требуется покрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два из этих отрезков, имеющие общую точку, были окрашены различно. Какое наименьшее количество цветов для этого необходимо?

399. На плоскости дана прямая l, точка O, не лежащая на этой прямой, и произвольная точка A. Докажите, что точку O можно перевести в точку A, используя только симметрии относительно прямой l и повороты с центром в точке O.

400. В каком наибольшем числе различных целых точек квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, у которого

$a > 100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?

401. Различные натуральные числа $a, b, \ldots, k$ записаны в виде таблицы (рис. 17). Известно, что каждое число, к которому на рисунке ведут две стрелочки, равно сумме чисел, стоящих у начала этих стрелочек. При каком наименьшем d возможно такое расположение?

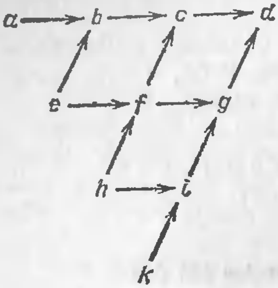


Рис. 17

402*. Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ Докажите:

а) что существует номер k_0 такой, что для всех $k \geqslant k_0$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1.$$

б) что для всех достаточно больших номеров k справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1985.$$

403. Укажите все пары чисел $(x; y)$, для которых

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y \leqslant 0.$$

404. На плоскости нарисован выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно точки B, точку B_1, симметричную точке B относительно C, ..., точку E_1, симметричную точке E относительно точки A, и после этого сотрем пятиугольник $ABCDE$. Докажите, что при помощи циркуля и линейки, зная расположение точек A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, можно восстановить пятиугольник $ABCDE$.

405. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... задается правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geqslant 1$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

406*. На плоскости проведено n прямых $(n > 2)$, делящих плоскость на несколько областей. Некоторые из этих областей окрашены, причем никакие две окрашенные области не могут соприкасаться по границе. Докажите, что число окрашенных областей не превосходит $\frac{1}{3}(n^2+n)$.

407. Имеется куб, кубическая коробка с крышкой тех же размеров и шесть красок. Каждой краской окрашивается одна грань куба и одна из граней коробки. Докажите, что куб можно таким образом положить в коробку, чтобы каждая грань куба прилегла к грани коробки, окрашенной другим цветом.

408. Диаметр A_0A_5 делит окружность с центром в точке O на две полуокружности. Одна из них разделена на пять равных дуг A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5. Прямая A_1A_4 пересекает OA_2 и OA_3 в точках M и N. Докажите, что сумма длин отрезков A_2A_3 и MN равна радиусу окружности.

409. Ученики школьного математического кружка смастерили вычислительную машину, которая четверку чисел (a, b, c, d) нажатием кнопки превращает в четверку $(a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-a)$. Докажите, что если в исходной четверке не все числа равны, то после некоторого числа нажатий кнопки получится четверка, хотя бы одно из чисел которой больше 1985.

410. Числа $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_n$ — числа первой группы, записанные в возрастающем порядке, и $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ — числа второй группы в убывающем порядке. Докажите, что

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2.$$

411. Из одинаковых кубиков составлен параллелепипед. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, покрасили. Оказалось, что у половины всех кубиков окрашена хотя бы одна грань. У скольких кубиков имеются окрашенные грани?

412. Одна из двух окружностей радиуса R проходит через вершины A и B, а другая — через вершины B и C параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если M — вторая точка пересечения этих окружностей, то радиус окружности, описанной около треугольника AMD, равен R.

413*. Правильный шестиугольник разбит на 24 треугольника. Во всех 19 узлах фигуры, показанной на рис. 18, записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения имеется по крайней мере 7 треугольников, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания, если мы будем считать против часовой стрелки.

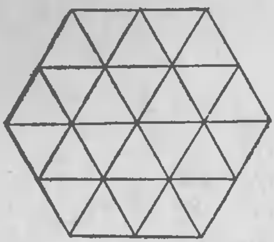


Рис. 18

414. Решите уравнение

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{\vdots}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1.$$

(в записи выражения, стоящего слева, фигурирует 1985 двоек).

415. Из правильного пятиугольника со стороной 1 см удалены все точки, отстоящие от всех вершин пятиугольника на расстояние, меньшее 1 см. Найдите площадь оставшейся части.

416. На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 разрешается делать разрезы только по линиям сетки. Докажите, что при любом целом $m > 12$ можно вырезать прямоугольник площади, большей m, из которого нельзя вырезать прямоугольник площади m.

417. Длины ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 1 см. Найдите наименьшее расстояние между точками окружностей, одна из которых вписана в основание куба $ABCD$, а вторая проходит через вершины A, C и B_1.

20-я Всесоюзная олимпиада, 1986 г. (Ульяновск)

Класс	1-й день				2-й день			
8	418	419	420	421	430	431	432	433
9	422	423	424	425	434	433б	435	436
10	426	427	428	429	437	438	439	440

418. Корни уравнения $x^2+ax+b+1=0$ являются натуральными числами. Докажите, что a^2+b^2 — составное число.

419. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, а другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

420. Точка M лежит на стороне AC остроугольного треугольника ABC. Вокруг треугольников ABM и BCM описываются окружности. При каком положении точки M площадь общей части ограничиваемых ими кругов будет наименьшей?

421. В одном государстве король хочет построить n городов и $n-1$ дорог между ними так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. (Каждая дорога соединяет два города, дороги не пересекаются и не проходят через другие города.) Король хочет, чтобы кратчайшие расстояния по сети дорог между парами городов равнялись соответственно $1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ км. Возможно ли это, если а) $n=6$; б)* $n=1986$?

422. Докажите, что на координатной плоскости нельзя нарисовать выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длиннее другой, угол между диагоналями равен 45°, а координаты каждой вершины являются целыми числами.

423. Докажите, что прямоугольную таблицу размером $m \times n$ клеток можно заполнить квадратами различных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце были также квадратами натуральных чисел.

424. Две окружности, расстояние между центрами которых равно d, пересекаются в точках P и Q. Через точки P, Q и точку A первой окружности (отличную от P и Q) проведены прямые, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. а) Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен d. б) Какое множество точек образуют центры окружностей, описанных около треугольника ABC, если точка A пробегает первую окружность?

425*. На плоскости дан правильный шестиугольник. Каждая его сторона разделена на 1000 равных частей, и точки деления соединены отрезками, параллельными сторонам шестиугольника. Выберем какие-либо три узла получившейся сетки, являющиеся вершинами правильного треугольника (любого размера и расположения), и окрасим их. Будем продолжать окрашивать таким способом тройки узлов до тех пор, пока это возможно. Докажите, что если неокрашенным останется один узел, то он не может быть вершиной исходного шестиугольника.

426. Найдите все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

427. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+\ldots+a_n}<$$
$$<4\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

428. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$, проводятся различные прямые. Докажите, что любая из них может содержать не более одной точки M, отличной от вершин треугольника и удовлетворяющей условию $\angle ABM = \angle ACM$. Определите, какие из рассматриваемых прямых не содержат ни одной такой точки.

429. Куб с ребром длины n, $n \geqslant 3$, состоит из n^3 единичных кубиков. Докажите, что в каждом из этих кубиков можно записать по целому числу так, чтобы все n^3 чисел были различными, а суммы чисел в любом ряду, параллельном какому-либо ребру куба, равнялись нулю.

430. Десятичная запись натурального числа a состоит из n одинаковых цифр x, числа b — из n одинаковых цифр y, а числа c — из $2n$ одинаковых цифр z. Для любого $n \geqslant 2$ найдите все такие цифры x, y, z, для которых $a^2 + b = c$.

431. Внутри выпуклого двенадцатиугольника даны две точки, расположенные на расстоянии 10 см друг от друга. Для каждой из этих точек нашли сумму расстояний от нее до вершин двенадцатиугольника. Докажите, что полученные суммы различаются менее чем на 1 м.

432. Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берет любые два стакана и отливает молоко из одного в другой до тех пор, пока количество молока в них не уравняется. Можно ли разлить молоко по стаканам так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

433. Некоторый прямоугольник разделен прямыми, параллельными сторонами, на квадраты со стороной 1, которые раскрашены в шахматном порядке в белый и черный цвет. Диагональ прямоугольника разбилась на белые и черные отрезки. Найдите отношение суммы длин белых отрезков к сумме длин черных отрезков, если размер прямоугольника а) 100×99; б) 101×99.

434. На плоскости дан правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$. а) Докажите, что если n — четное число, то для произвольной точки M плоскости в выражении $\pm \overrightarrow{MA_1} \pm \overrightarrow{MA_2} \pm \ldots \pm \overrightarrow{MA_n}$ можно так выбрать знаки плюс и минус, что полученная сумма будет равна 0. б) Докажите, что если n — нечетное число, то указанное выражение с помощью выбора знаков плюс и минус можно обратить в 0 только для конечного числа точек M плоскости.

435. Клетки квадратной таблицы размером $n \times n$ $(n \geqslant 3)$ заполняются числами ± 1 по следующим правилам:

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1;

2) число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы — ее можно выбирать произвольно, — равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее, в одной строке с ней или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены. а) Какое наибольшее, б) наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

436. Докажите, что для каждого натурального n справедливо неравенство

$$|\sin 1| + |\sin 2| + \ldots + |\sin(3n-1)| + |\sin 3n| > 8n/5.$$

437. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m, n — натуральные числа и $1 \leqslant m < n \leqslant 1986$, не является целым числом.

438. Около окружности радиуса 1 описаны квадрат и треугольник. Докажите, что площадь общей части квадрата и треугольника больше 3,4. Можно ли утверждать, что эта площадь больше 3,5?

439*. Многочлен $P(x)$ назовем допустимым, если все его коэффициенты равны 0, 1, 2 или 3. Для данного натурального n найдите число всех допустимых многочленов, удовлетворяющих условию $P(2)=n$.

440*. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов пространственного четырехугольника $AXBY$, т. е. величина

$$\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.

21-я Всесоюзная олимпиада, 1987 г. (Фрунзе)

Класс	1-й день				2-й день			
8	441	442	443	444	452	453	454	455
9	445	446а	447	448	456	457	458	459
10	449	450	451	446б	455	460	461	462

441. Десять спортсменов участвовали в турнире по настольному теннису. Каждые два из них сыграли между собой ровно одну партию. Первый игрок одержал в ходе турнира x_1 побед и потерпел y_1 поражений, второй одержал x_2 побед и потерпел y_2 поражений и т. д. Докажите, что

$$x_1^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + \ldots + y_{10}^2.$$

442. Известно, что с помощью набора из 6 гирь можно уравновесить 63 груза, веса которых являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие наборы.

443. Дан правильный семиугольник $A_1A_2 \ldots A_7$. Докажите, что

$$\frac{1}{A_1A_5} + \frac{1}{A_1A_3} = \frac{1}{A_1A_7}.$$

444. Игра «Морской бой» происходит в квадрате 7×7 клеток. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить четырехпалубный корабль, если известно, что он:

а) имеет вид  ;

б) состоит из четырех клеток, примыкающих друг к другу сторонами?

445. Докажите, что при каждом натуральном n число

$$1^{1987} + 2^{1987} + \ldots + n^{1987}$$

не делится на $n+2$.

446. а) Какое наименьшее число уголков  нужно разместить в квадрате 8×8 клеток, чтобы в него нельзя было больше поместить без наложения ни одной такой фигуры?

б) В квадрате из 1987×1987 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся часть всегда можно разрезать на трехклеточные «уголки».

447. Параллельно сторонам треугольника проведены три прямые. Каждая из прямых удалена от стороны, которой она параллельна, на расстояние, равное длине этой стороны. При этом для каждой стороны треугольника параллельная ей прямая и противолежащая этой стороне вершина расположены по разные стороны от нее. Докажите, что точки пересечения продолжений сторон треугольника с тремя проведенными прямыми лежат на одной окружности.

448*. На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

449. Найдите такой набор из пяти различных натуральных чисел, в котором любые два числа взаимно просты, а любые несколько чисел дают в сумме составное число.

450. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.

451. Найдите все значения α, для каждого из которых последовательность

$$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 4\alpha,\ \cos 8\alpha,\ \ldots,\ \cos 2^n\alpha,\ \ldots$$

состоит только из отрицательных чисел.

452. Положительные числа a, b, c, A, B, C удовлетворяют условиям $a+A=b+B=c+C=k$. Докажите, что

$$aB+bC+cA\leqslant k^2.$$

453. В каждой клетке квадратной таблицы $1987\times\times 1987$ написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

454. Вершина B угла ABC лежит вне окружности, а лучи BA и BC ее пересекают. Из точки K пересечения луча BA и окружности перпендикулярно биссектрисе угла проведена прямая, пересекающая окружность в точках K и P, а луч BC — в точке M. Докажите, что отрезок PM вдвое длиннее перпендикуляра, опущенного из центра окружности на биссектрису угла ABC.

455. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.

456. Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый из богатырей выходил на дежурство одинаковое число раз?

457. На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор ненулевых векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

458. Выпуклый p-угольник ($p\geqslant 5$) разрезан по всем диагоналям. Докажите, что среди получившихся при этом частей найдутся части разной площади.

459*. Множество T_0 состоит из всех чисел вида $(2^k)!$, где $k=0, 1, 2, \ldots$. При каждом значении $p=1, 2, \ldots, 1987$ множество T_p получается добавлением к множеству всех чисел, представимых в виде суммы нескольких различных чисел из T_{p-1}. Докажите, что хотя бы одно натуральное число не принадлежит множеству T_{1987}.

460. График функции $y=f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x)=x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

461. Все грани выпуклого многогранника являются треугольниками. Докажите, что каждое ребро этого многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины в любую другую можно было попасть, двигаясь только по красным ребрам, а также только по синим.

462. Докажите, что при любом натуральном значении n справедливо неравенство

$$(2n+1)^n \geqslant (2n)^n + (2n-1)^n.$$

РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

1. Предположим, что нам удалось провести ломаную, удовлетворяющую условию. Поскольку контуры заштрихованных на рис. 19 областей 1, 2, 3 содержат по пять отрезков и ломаная должна каждый из этих отрезков пересечь ровно по одному разу, каждая из этих трех областей должна содержать один из концов ломаной (если ни один из концов не принадлежит

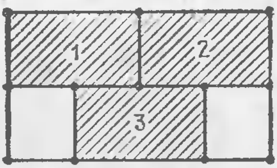


Рис. 19

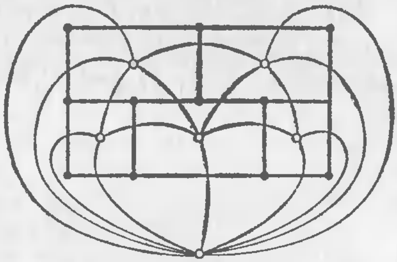


Рис. 20

области, ломаная должна входить в нее столько же раз, сколько и выходить, т. е. число ее пересечений с отрезками границы должно быть четным). Однако концов у ломаной только два. Получено противоречие, доказывающее утверждение задачи.

▼ То же решение можно изложить иначе. Поставим в каждой из 6 областей, на которые наша фигура делит плоскость, точку — «столицу» областей и для каждого из 16 отрезков нарисуем пересекающую его «дорогу», соединяющую столицы двух прилежащих к нему областей (рис. 20). Полученную сеть дорог нельзя обойти, проходя по каждой дороге один раз, поскольку имеется 4 столицы, в которых сходится нечетное число дорог. А чтобы такой обход существовал, необходимо (и, как можно показать, достаточно), чтобы таких «нечетных столиц» было 0 и 2.

2. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник и LN — общая касательная окружностей 1 и 3 с центрами в точках A и C. Из точки O — центра прямоугольника — опустим перпендикуляр OM

на прямую LN. Четырехугольник $ALNC$ — трапеция, а OM — ее средняя линия, так что $OM = (r_1 + r_3)/2$. Расстояние от точки O до второй общей касательной тех же окружностей тоже равно $(r_1 + r_3)/2$.

Точно так же устанавливается, что расстояние от точки O до общих касательных двух оставшихся окружностей равно $(r_2 + r_4)/2$. Поскольку по условию $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$, точка O одинаково удалена от всех четырех касательных, т. е. является центром круга, вписанного в образованный ими четырехугольник.

3. Среди первых двадцати из данных чисел найдутся два, у которых последняя цифра десятичной записи равна нулю.

Хотя бы у одного из этих двух чисел перед нулем стоит цифра, не равная 9. Пусть N — это число, s — сумма его цифр.

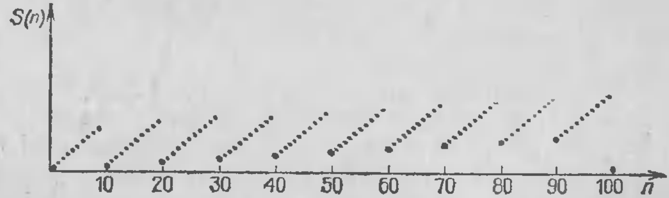


Рис. 21

Тогда числа N, $N+1$, ..., $N+9$, $N+19$ содержатся среди данных 39 и имеют суммы цифр s, $s+1$, $s+2$, ..., $s+10$. Но среди одиннадцати последовательных чисел хотя бы одно делится на 11.

∇ Вообще, для каждого $m = 2$, 3, ... можно найти наименьшее c_m такое, чтобы среди любых c_m последовательных натуральных чисел хотя бы у одного сумма цифр делилась на m (для $m < 20$ достаточно изучить поведение функции «сумма цифр числа n» в пределах одной сотни; график этой функции изображен на рис. 21); в частности, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$, ..., $c_{10} = 19$, $c_{11} = 39$, $c_{12} = 59$, ...

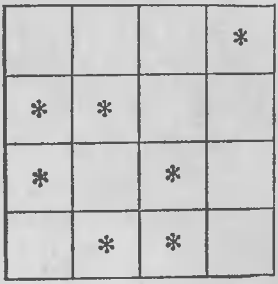


Рис. 22

4. Ясно, что расположение семи звездочек, показанное на рис. 22, удовлетворяет условию задачи.

Если же звездочек шесть или меньше, то найдутся два столбца, в каждом из которых стоит не более одной звездочки. Вычеркнем оставшиеся два столбца. После этого останется не больше двух звездочек, которые можно вычеркнуть вместе со строками, в которых они стоят.

∇ Было бы интересно исследовать общую аналогичную задачу: какое наименьшее число звездочек можно расставить в таблице $m \times n$, чтобы при вычеркивании любых k столбцов и l строк оставалась хотя бы одна звездочка. (Здесь k, l, m, n — натуральные числа, $k < m$, $l < n$.) Но даже для $m = n$, $k = l = n - 2$ она очень трудна (см. задачу 208, где $n = 7$ и $n = 13$).

5. а) Предположим, что четверка (a, b, c, d) встретилась вновь.

Докажем сначала, что в этом случае $abcd = 1$.

Пусть $abcd = p$. Тогда произведение чисел второй четверки равно p^2, третьей — p^4, четвертой — p^8, ... Ясно, что при $p \neq 1$ в последовательности произведений не будет двух одинаковых чисел и, следовательно, все получающиеся четверки будут различны. Таким образом, $p = 1$.

Теперь рассмотрим вторую четверку: ab, bc, cd, da; так как $abcd = 1$, то, как легко проверить, четвертой четверкой будет b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2. Таким образом, четвертая четверка получается из второй возведением в квадрат и перестановкой. Точно так же из четвертой получается шестая четверка, из шестой — восьмая и т. д.

Если среди чисел второй четверки не все равны единице, то наибольшее из них больше единицы. Тогда наибольшее из чисел $2n$-й четверки будет с ростом n неограниченно увеличиваться, а это противоречит тому, что они периодически повторяются.

Итак, $ab = bc = cd = da = 1$, а отсюда уже легко получить, что $a = b = c = d = 1$.

б) При $n = 1$ утверждение задачи, очевидно, справедливо.

Предположим, что оно справедливо при $n = k$, и докажем его справедливость при $n = k + 1$.

Запишем первые три строчки:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2^{k+1}},$$
$$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \ldots, x_{2^{k+1}}x_1,$$
$$x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, \ldots, x_{2^{k+1}}x_2.$$

Легко видеть, что числа, стоящие на нечетных местах, и числа, стоящие на четных местах, образуют строчки, $x_1, x_3, \ldots, x_{2^{k+1}-1}$ и $x_2, x_4, \ldots, x_{2^{k+1}}$, которые «через шаг» преобразуются так, как это требуется в условии, а так как по предположению индукции строчка длины 2^k в конце концов преобразуется в строчку из одних единиц, то и из исходной строчки длины 2^{k+1} получится строчка из одних единиц.

∇ Можно доказать, что из строки x длины $m = 2^k r$, где r нечетно, тогда и только тогда получится строка из одних единиц, когда x состоит из r одинаковых блоков длины 2^k, т. е. имеет период 2^k (см. [5], задача 134).

6. а) Пусть $\overrightarrow{O_1O_3}$ — вектор, полученный поворотом $\overrightarrow{O_1O_2}$ на $60°$ (в ту же сторону, что и поворот, переводящий $\overrightarrow{AB}$ в $\overrightarrow{AC}$), точки A' и B' — образы A и B при том же повороте вокруг O_1. При равномерном вращении векторов $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2B}$ с той же угловой скоростью будут вращаться. $\triangle O_1A'A$ — вокруг O_1, векторы $\overrightarrow{O_3B'}$ и $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{A'A}$, а значит и их сумма $\overrightarrow{O_3C}$ — вокруг O_3 (рис. 23).

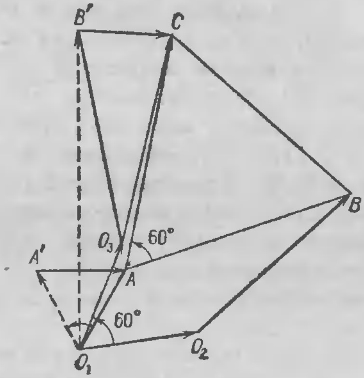


Рис. 23

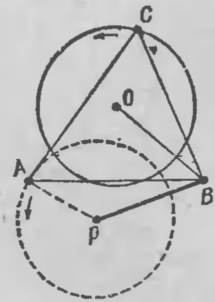


Рис. 24

б) Ответ: 5. Зафиксируем точку B на расстоянии 3 от P (рис. 24). При вращении точки A по окружности радиуса 2 с центром P вершина C будет двигаться по окружности радиуса 2, центр которой O расположен на расстоянии $OP = 3$ от P ($\triangle OPB$ — равносторонний). Самая далекая точка этой окружности находится от P на расстоянии $CO + OP = 5$.

∇ В доказываемом аналогичном неравенстве $PC \leqslant AP + BP$ (для любого равностороннего треугольника ABC и любой точки P) равенство достигается для всех точек P дуги AB описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей точку C.

7. Среди всех таблиц, которые можно получить из данной переменами знаков в строках и столбцах, возьмем ту, для которой сумма Σ максимальна. Такая таблица T существует, поскольку всех способов расстановки знаков перед числами таблицы $m \times n$ конечное число — 2^{mn} (способов, которыми можно осуществить перемены знаков в строках и столбцах, еще меньше:

2^{m+n-1}). В таблице T сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательна. В самом деле, если бы сумма чисел в некоторой строке (или столбце) таблицы T была отрицательна, то, изменив знак в этой строке (столбце), мы получили бы таблицу с большей суммой $\sum$ всех чисел, что противоречит выбору таблицы T.

8. Назовем одну из n точек «корнем». Поставим в соответствие каждой из остальных $n-1$ вершин последний отрезок (единственного по условию) пути, ведущего в эту точку из «корня». Это соответствие между множеством из $n-1$ вершин и множеством всех отрезков будет взаимно однозначным.

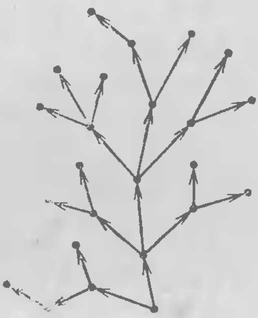


Рис. 25

Чтобы сделать это совсем очевидным, удобно расставить на всех отрезках стрелки, ведущие от корня (рис. 25); тогда в каждую точку, кроме вершины, ведет одна стрелка.

∇ Граф, который рассматривается в этой задаче, называется *деревом* (П11); мы превратили дерево, выделив в нем одну точку, в *корневое* ориентированное дерево.

Задачу можно решить также методом математической индукции (П1).

9. Пусть наибольший общий делитель чисел b и $p-a$ равен d, $b = kd$ и $p-a = ld$. Тогда числа k и l взаимно просты. Далее, $ak + bl = ab/d + (p-a)b/d = pk$. Итак, $ak + bl$ делится на p.

10. Ответ: самый выгодный для Коли способ — первый; при втором и третьем он получит, при правильной игре, на орех меньше. (Вообще, как мы увидим, спор в этом дележе идет из-за одного ореха.)

Какие бы кучи (из a и b орехов, $a < b$) ни образовались после первого хода Пети, Коля может большую из них разбить на две части по 1 и $b-1$ орехов, которые окажутся наибольшей и наименьшей, т. е. при первом способе дележа забрать $b \geqslant n+1$ орехов. (Взяв $a = n$, $b = n+1$, Петя помешает ему добиться большего.) При втором способе дележа после первого хода $a = 2$, $b = 2n+1$ и наилучшем ответе $2 = 1+1$, $2n-1 = n-1+n$ Коле достанется лишь n орехов. (Но при любом другом первом ходе он может получить не меньше $n+1$.) При третьем способе ход Пети $a = n$, $b = n+1$ не позволяет Коле добиться большего, чем забрать себе $n+1$ орех (суммы двух средних кучек и двух крайних всегда будут как раз n и $n+1$), так что лишний орех, который нужно отдать, оказывается решающим.

11. Так как числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — натуральные, то существует такая последовательность номеров $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$, что $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n} \leqslant \ldots$ (a_{i_1} — наименьшее число последовательности a_n, a_{i_2} — наименьшее из следующих и т. д.). Аналогично из последовательности номеров $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ можно выбрать последовательность $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots$, для которой

$$b_{j_1} \leqslant b_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant b_{j_n} \leqslant \ldots$$

Ясно при этом, что последовательность $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}, \ldots$ остается неубывающей. Теперь осталось из последовательности $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_n}, \ldots$ выбрать неубывающую последовательность $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_n}, \ldots$ Тогда

$$a_{k_1} \leqslant a_{k_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{k_n} \leqslant \ldots,$$
$$b_{k_1} \leqslant b_{k_2} \leqslant \ldots \leqslant b_{k_n} \leqslant \ldots,$$
$$c_{k_1} \leqslant c_{k_2} \leqslant \ldots \leqslant c_{k_n} \leqslant \ldots,$$

откуда следует утверждение задачи.

∇ В решении мы пользовались тем, что в любом (даже бесконечном) множестве натуральных чисел есть наименьшее число. Этот факт представляется очевидным; он эквивалентен принципу математической индукции (П1).

12. Центр круга диаметра 1, целиком помещающегося внутри прямоугольника, должен быть расположен на расстоянии, боль-

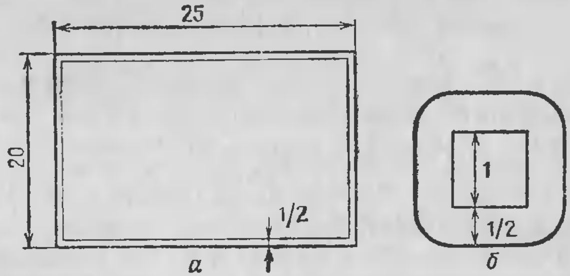


Рис. 26

шем 1/2, от любой из сторон прямоугольника, т. е. внутри «рамки», изображенной на рис. 26, *а*. Площадь внутреннего прямоугольника равна $19 \cdot 24 = 456$.

Кроме того, центр круга должен быть расположен на расстоянии, большем 1/2, от контура любого из квадратов, т. е. вне каждой фигурки площади $3 + \frac{\pi}{4}$, изображенной на рис. 26, *б*.

Даже если эти фигурки не пересекаются и не задевают рамку, их суммарная площадь равна $120\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=360+30\pi<360+30\times$ $\times 3{,}2=456$.

Таким образом, этнмн фнгурамн покрыть прямоугольник площади 456 нельзя и, следовательно, иайдется круг диаметра 1, не пересекающийся ни с однһм из квадратов.

13. Медиана делит площадь треугольника пополам. Поэтому (рис. 27) $S_{ABC}=S_{CBB'}=S_{CB'C'}$. Отсюда следует, что $S_{BB'C'}=$ $=2S_{ABC}$.

Точно так же доказываются равенства $S_{CC'D'}=2S_{BCD}$; $S_{DD'A}=2S_{CDA}$; $S_{AA'B'}=2S_{DAB}$.

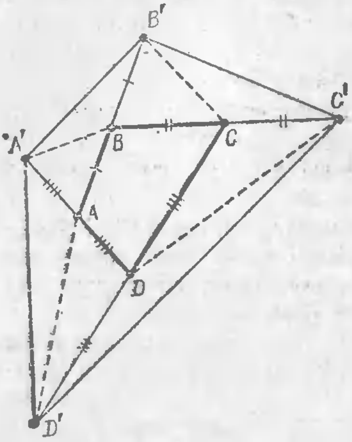


Рис. 27

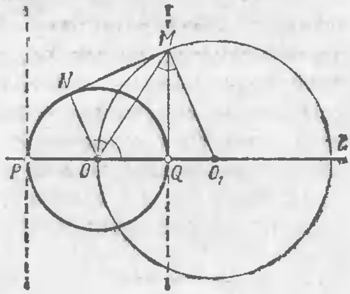


Рис. 28

Сложив эти 4 равенства, получим:

$$S_{BB'C'}+S_{CC'D'}+S_{DD'A'}+S_{AA'B'}=$$
$$=2\left(S_{ABC}+S_{BCD}+S_{CDA}+S_{DAB}\right)=4S.$$

Поэтому $S_{A'B'C'D'}=4S+S=5S$.

14. Ответ: искомое множество точек M касання — пара прямых, касающихся окружности s в точках P, Q ее пересечения с прямой l (за исключением самих точек P и Q).

Пусть общая касательная s и s' касается окружности s в точке N. Тогда $\angle NOM=\angle OMO_1=\angle MOO_1$ ($ON\|O_1M$ и $OO_1=O_1M$). Поэтому $\angle MQO$ прямой и прямая MQ касается s в точке Q (рис. 28).

С другой стороны, через любую точку указанных в ответе прямых, не лежащую на s, можно провести окружность с центром на прямой l, проходящую через точку O.

15. По условию $a_1 - a_0 \geqslant 1$. Далее, $a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0)$, $a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$, ..., $a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$. Перемножив эти 99 равенств, обе части которых положительны, и сократив общие множители $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ..., $a_{99} - a_{98}$ в обеих частях, получим

$$a_{100} = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a_0) \geqslant 2^{99}.$$

∇ Более точная оценка по индукции $a_k \geqslant 2^k$, $a_{k+1} - a_k \geqslant 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ показывает, что $a_{100} \geqslant 2^{100}$.

16. Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Разность

$$P(62) - P(19) = a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19)$$

делится на 43 и не может равняться 1.

∇ Вообще, для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами разность $P(x_1) - P(x_2)$, где x_1 и x_2 — различные целые числа, делится на $x_1 - x_2$ (П6).

17. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — произведения по строкам, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — по столбцам. Тогда $p_1p_2 \ldots p_n = q_1q_2 \ldots q_n$ — мы двумя способами вычисляем произведение всех чисел в таблице. Значит, четность количества -1 среди $p_1, p_2, \ldots, p_n$ та же, что и среди $q_1, q_2, \ldots, q_n$, т. е. всего среди $2n$ чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ четное число -1 и тем самым четное число $+1$. Но тогда число тех и других различно (так как n нечетно) и потому сумма $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ не равна 0.

∇ Эта сумма может отличаться от $2n$ лишь на число d, кратное 4. Интересно, построив соответствующие примеры, выяснить, для любого ли $d = 4k$, $|k| < n/2$, сумма может равняться $2n - d$.

18. Пусть нам известны длины a, b сторон BC и AC треугольника и мы хотим, чтобы его медианы AD и BE пересекались под прямым углом. Возьмем на отрезке AC длины b точку F так, что $AF : FC = 3$; тогда $FD \parallel BE$ и $\angle ADF$ должен быть равен 90°, т. е. точка D должна лежать на окружности с диаметром AF и, кроме того, на окружности радиуса $a/2$ с центром C. Отсюда ясно, как построить точку D, а затем и B. Задача имеет решение, если $1/2 < b/a < 2$, и при этом искомый треугольник единствен.

∇ Можно доказать, что в таком треугольнике квадрат третьей стороны c равен $c^2 = (a^2 + b^2)/5$ и получить отсюда другое решение.

19. Из неравенства $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ следует, что

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geqslant 2(ab + cd) \geqslant 4\sqrt{abcd} \geqslant 4,$$
$$ab + cd \geqslant 2, \quad bc + ad \geqslant 2, \quad ac + bd \geqslant 2.$$

∇ Пользуясь общей теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом, можно решить задачу другим способом, а также доказать, что для любых n положительных чисел с произведением 1 сумма их квадратов не меньше n, а сумма $n(n-1)/2$ их попарных произведений не меньше $n(n-1)/2$.

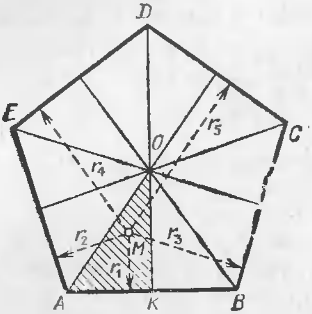


Рис. 29

20. **Ответ**: r_3 — наибольшее для вершин пятиугольника, и наименьшее — для середин сторон. Разобьем правильный пятиугольник $ABCDE$ его осями симметрии на 10 треугольников. Достаточно исследовать точки M внутри и на границе одного из них, например AOK (рис. 29). Чтобы сравнить расстояния от точки M внутри некоторого угла до его сторон, достаточно выяснить, по какую сторону от биссектрисы этого угла лежит точка M. Пользуясь этим, убеждаемся, что расстояния от точки M до сторон пятиугольника AB, AE, BC, DE, CD всегда идут в порядке возрастания:

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4 \leqslant r_5.$$

Третье по величине расстояние r_3 будет наибольшим, когда M совпадает с A, и наименьшим, когда M совпадает с K.

21. **Ответ**. $c = 9$. Сумма цифр любого числа дает при делении на 9 тот же остаток, что само число (П3). С другой стороны, $a \leqslant 1962 \cdot 9 < 19999$, поэтому $b \leqslant 1 + 4 \cdot 9 = 37$ и $c \leqslant 9$.

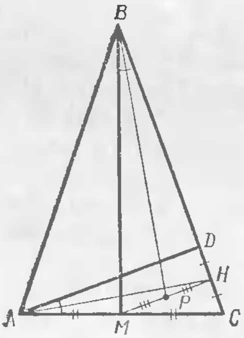


Рис. 30

22. Опустим высоту AD в $\triangle ABC$ (рис. 30). Тогда в $\triangle ADC$ отрезок MH будет средней линией, т. е. $DH = CH$. Прямоугольные треугольники BHM и ADC подобны, поскольку $\angle DAC = 90° - \angle C = \angle HBM$, причем после поворота одного из них на 90° соответствующие стороны станут параллельными; при этом соответствующие медианы BP и AH также станут параллельными, а значит, до поворота было $AH \perp BP$.

23. **Ответ**: 1. Среди треугольников с двумя сторонами a, b, которые удовлетворяют условиям $0 < a \leqslant 1$, $1 \leqslant b \leqslant 2$, наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник с кате-

тами $a = 1$, $b = 2$ (в самом деле, $s \leqslant ab/2 \leqslant 1$, поскольку высота, опущенная на сторону b, не больше a). Третья его сторона $c = \sqrt{5}$ удовлетворяет условию $2 \leqslant c \leqslant 3$, следовательно, среди всех рассматриваемых треугольников он имеет наибольшую площадь.

24. Частное равно $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$. Чтобы проверить нужное тождество, удобно положить $x - y = u$, $y - z = v$, тогда $z - x = -(u + v)$, и доказать тождество

$$(u + v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u + v)(u^2 + uv + v^2)$$

с помощью формулы бинома Ньютона (П6):

$$(u + v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5.$$

25. Решить эту задачу помогает рис. 31: ломаная с вершинами в точках (k, a_k) «выпукла», поскольку $a_{k+1} - a_k \geqslant a_k - a_{k-1}$ (т. е. угловой коэффициент каждого следующего звена больше, чем предыдущего), так что вся она, кроме концов, лежит ниже оси $0k$.

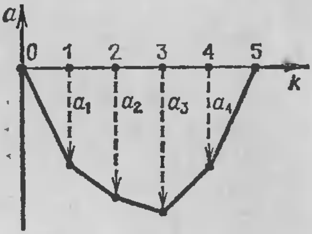


Рис. 31

Допустим, что при некотором $m \geqslant 1$ будет $a_{m-1} \leqslant 0$, $a_m > 0$. Тогда $a_n - a_{n-1} \geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant a_{m+1} - a_m \geqslant a_m - a_{m-1} > 0$ и поэтому $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_m > 0$, что противоречит условию $a_n = 0$.

26. Рассмотрим таблицу $m \times n$ и будем рассуждать по индукции, считая, что для таблиц с меньшей суммой $m + n$ утверждение уже доказано. Для таблицы 1×1 оно очевидно. Выберем наименьшее из $m + n$ данных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — пусть это будет a_1. Поставим a_1 в левый верхний угол, а затем первую строку отрежем; останется решить задачу для таблицы $(m - 1) \times n$ и набора чисел $a_2, \ldots, a_m, b_1 - a_1, b_2, \ldots, b_m$, а это по предположению индукции мы делать умеем.

Другое, типично «олимпиадное» решение. Нарисуем отрезок длины $d = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ и разобьем его двумя способами: на m «красных» отрезков длины $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и n «синих» отрезков длины $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Всего будет $(n - 1) + (m - 1)$ точек разбиения и соответственно $m + n - 1$ маленьких отрезков. Остается записать длину каждого из этих отрезков (пересечения некоторого красного a_i и некоторого синего b_j) в соответствующую клетку таблицы (стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца).

27. Пусть 1-я, 2-я, 4-я и 5-я окружности проходят через точку A; 1-я, 3-я, 4-я и 5-я — через точку B; 2-я, 3-я, 4-я и 5-я — через точку C.

Мы видим, что все три точки A, B и C не могут быть различными, так как они лежат на 4-й и 5-й окружностях, а две окружности имеют не больше двух точек пересечения. Значит, какие-то две из точек A, B и C совпадают (П9).

Пусть, например, $A = B$. Тогда все окружности проходят через точку A.

28. Ответ: шахматист, занявший третье место, выиграл у седьмого.

Шахматисты, занявшие последние четыре места, сыграли между собой 6 партий и поэтому набрали все вместе не меньше 6 очков уже в этих партиях. Следовательно, шахматист, занявший второе место, набрал не меньше 6 очков.

С другой стороны, он не мог набрать больше 6 очков: если победитель турнира набрал 7 очков, то второй ему проиграл и, значит, набрал не больше 6 очков; если же у первого 6,5 очков, то у второго также не больше 6 очков.

Отсюда следует, что второй набрал ровно 6 очков.

Последние четыре участника турнира также набрали 6 очков и, следовательно, проиграли все партии шахматистам, занявшим 1—4-е места.

29. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Поскольку треугольники ABD и BCD имеют равные площади и общее основание BD, их высоты, опущенные из вершин A и C, равны, т. е. точки A и C одинаково удалены от BD, отсюда следует, что $AO = OC$. Точно так же доказывается, что $BO = OD$.

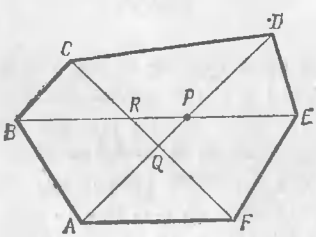


Рис. 32

Итак, диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся их точкой пересечения пополам, а это значит, что $ABCD$ — параллелограмм.

б) Первое решение. Предположим, что у некоторого выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, делят площадь пополам и в то же время не пересекаются в одной точке. Тогда их точки пересечения P, Q и R являются вершинами треугольника, лежащего внутри шестиугольника (рис. 32).

Площади четырехугольников $ABCD$ и $BCDE$ равны, поэтому равны и площади треугольников ABP и EPD, так как

$$S_{ABP} = S_{ABCD} - S_{BCDP} = S_{BCDE} - S_{BCDP} = S_{EPD}.$$

Точно так же получим, что

$$S_{BCR}=S_{EFR} \text{ и } S_{AQF}=S_{CQD}.$$

Из равенства площадей треугольников получаются следующие соотношения:

$$AP\cdot BP=EP\cdot DP,$$
$$CQ\cdot DQ=AQ\cdot FQ,$$
$$ER\cdot FR=BR\cdot CR.$$

Перемножив эти равенства, мы получим

$$AP\cdot BP\cdot CQ\cdot DQ\cdot ER\cdot FR=AQ\cdot BR\cdot CR\cdot DP\cdot EP\cdot FQ.$$

Но это невозможно: ведь $AP>AQ$, $BP>BR$, $CQ>CR$, $DQ>DP$, $ER>EP$, $FR>FQ$, поэтому произведение справа меньше, чем слева. Полученное противоречие показывает, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке (т. е. что $PQ=QR=RP=0$).

Второе решение. Это решение основано на использовании геометрического преобразования — гомотетии. Поскольку площади четырехугольников $ABCD$ и $BCDE$ равны, то равны и площади треугольников ABD и BDE (они меньше площадей соответствующих четырехугольников на S_{BCD}). Эти треугольники имеют общее основание BD. Из равенства площадей вытекает равенство высот, опущенных на BD из вершин A и E, т. е. точки A и E одинаково удалены от BD. Поэтому $AE\|BD$. Точно так же устанавливается, что $CE\|BF$ и $DF\|AC$. Таким образом, треугольники BDF и ACE подобны.

Пусть P — точка пересечения диагоналей AD и BE. Рассмотрим гомотетию с центром в точке P и коэффициентом $PE:PB$. При этой гомотетии точка B перейдет в точку E, а точка D — в точку A, прямая DF перейдет в прямую AC, а BF — в EC.

Так как F — точка пересечения прямых DF и BF, она перейдет в точку пересечения прямых AC и EC, т. е. в точку C. Поэтому точки F, P и C лежат на одной прямой, а это и означает, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в точке P.

30. Если a^2+b^2 и $a+b$ делятся на d, то и $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$ делится на d. Следовательно, $2a^2=2a(a+b)-2ab$ и $2b^2=2b(a+b)-2ab$ делятся на d.

Но если a и b взаимно просты, то a^2 и b^2 также взаимно просты, поэтому $2a^2$ и $2b^2$ не могут одновременно делиться ни на какое $d>2$. (Здесь использована основная теорема арифметики, см. П2.)

31. а) Пусть C — точка, диаметрально противоположная точке A. Угол AMC — прямой. Так как $MK=KB$ и $PK\|MC$,

то прямая PK пересекает отрезок BC в середине: $BH = HC$. Таким образом, все прямые PK проходят через точку H — середину отрезка BC.

б) Из а) следует, что множество точек P лежит на окружности, построенной на AH как на диаметре. Поскольку $\angle HBA$ — прямой, эта окружность проходит через точку B.

32. О т в е т: $d = 2/3$.

Если отрезок заметает весь треугольник, то в некотором своем положении он проходит через его центр. Докажем, что из всех отрезков с концами на сторонах и проходящих через центр O правильного треугольника самый короткий — отрезок AB, параллельный его стороне.

Пусть $A'B'$ — какой-либо отрезок с концами на тех же сторонах и проходящий через центр треугольника, причем $OB' < OA'$ (рис. 33). Тогда $AA' > BB'$ и ясно, что даже проекция

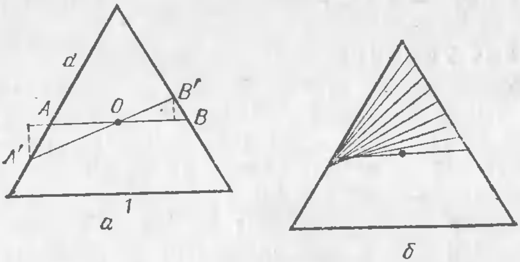


Рис. 33

этого отрезка на прямую AB имеет длину, большую 2/3. Таким образом, отрезок, заметающий весь треугольник, не может быть короче 2/3.

С другой стороны, отрезком длины 2/3 можно замести весь треугольник. Для доказательства нужно убедиться, что через любую точку P внутри треугольника можно провести отрезок длины 2/3 с концами на сторонах треугольника. Проведем через P две прямые, параллельные самой близкой к P и самой далекой от нее стороне. Они пересекают треугольник по отрезкам, длина первого из которых больше 2/3, а второго — меньше 2/3. Будем поворачивать прямую, проходящую через P, из первого положения во второе; в некотором промежуточном положении длина отрезка, по которому она пересекает треугольник, будет в точности равна 2/3.

∇ Заметим, что, при всей очевидности последнего утверждения, для его строгого доказательства нужны соображения непрерывности (П5).

33. Предположим, что можно уложить кости домино на доску так, что каждая из горизонтальных и вертикальных прямых, разделяющих доску на клетки, пересекает хотя бы одну кость домино.

Всего имеется 10 таких прямых. Каждая из этих прямых разбивает доску на 2 части, состоящие из четного числа клеток. В любой из этих частей содержится какое-то количество неразрезанных костей домино. Эти кости занимают четное число клеток. Оставшиеся клетки заняты половинками разрезанных костей, а так как их четное число, то и число разрезанных костей тоже четно.

Итак, каждая из 10 прямых разрезает не меньше двух костей, а так как каждую кость пересекает только одна прямая, то число разрезанных костей не меньше 20.

Однако общее количество костей, покрывающих доску, — 18.

∇ Интересно выяснить, для каких прямоугольников $m \times n$ (с четным m) верно аналогичное утверждение. Этот вопрос разобран в решении задачи М63 из «Задачника Кванта» (см. «Квант», 1971, № 10).

34. Можно считать, что числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Рассмотрим числа:

$$\begin{array}{lllll}
a_1, & a_2, & \ldots, a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, \\
a_1 + a_n, & a_2 + a_n, & \ldots, a_{n-2} + a_n, & a_{n-1} + a_n, & \\
a_1 + a_{n-1} + a_n, & \ldots, & \ldots, a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, & & \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & & \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_n. & & & &
\end{array}$$

Очевидно, что здесь каждое число больше предыдущего; таким образом, все выписанные числа различны. Их количество $n + (n-1) + \ldots + 1 = n(n+1)/2$ соответствует требованиям задачи.

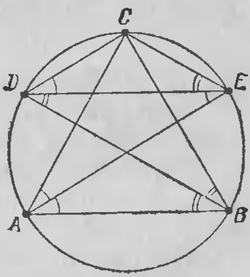


Рис. 34

Заметим еще, что первые n натуральных чисел дают пример n различных чисел, из которых нельзя составить больше чем $n(n+1)/2$ различных сумм (эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$).

35. Из равенства углов (рис. 34) следует, что точка A лежит на окружности, проходящей через точки C, D и E, а также, что точка B лежит на этой окружности, причем $DE \parallel AB$.

36. Пусть разность прогрессии равна d и один из ее членов $a = m^2$, где m — натуральное число. Тогда число $(m+kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = a + d(2km + k^2)$ также является членом

прогрессии при любом натуральном k. Мы указали тем самым бесконечное количество членов прогрессии, являющихся квадратами натуральных чисел.

37. Ответ: нельзя. Цифра a образует 9 пар (с каждой из девяти остальных цифр). Чтобы для всех этих пар нашлась сторона 45-угольника, занумерованная соответствующими цифрами, необходимо поставить a по крайней мере в пяти его вершинах. Так как цифр всего десять, то для их размещения необходимо 50 мест.

Поэтому требуемое в условии размещение цифр невозможно (П9).

∇ С другой стороны, если n четно, то числа $0, 1, \ldots, n$ можно расставить в вершинах правильного $(n+1)(n+2)/2$-угольника так, чтобы для каждой пары этих чисел нашлась сторона с соответствующими числами на концах.

38. Ответ: $a_{1,2}=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1}$; $b_{1,2}=\mp\sqrt[20]{2^{20}-1}/2$, $p=-1$, $q=1/4$ (всего два набора коэффициентов).

Подставляя $x=1/2$, получим

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)^{20}+\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{2}+q\right)^{10}=0,$$

откуда $a=-2b$.

Теперь тождество принимает вид

$$(2x-1)^{20}=(-2bx+b)^{20}+(x^2+px+q)^{10}.$$

Вычисляя коэффициент при x^{20} в обеих частях, получим

$$2^{20}=2^{20}b^{20}+1;\quad b=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1}/2.$$

Теперь тождество принимает вид

$$(x-1/2)^{20}=(x^2+px+q)^{10},$$

откуда $x^2+px+q=(x-1/2)^2$, т. е. $p=-1$, $q=1/4$.

39. Ответ: $2\cdot 3^n$. После первого шага сумма всех чисел будет равна $6=2\cdot 3$.

Пусть S_n — сумма всех чисел после n-го шага. Нетрудно доказать, что после $(n+1)$-го шага сумма станет равна $2S_n+S_n=3S_n$.

Итак, сумма всех чисел каждый раз увеличивается втрое, так что на n-шаге она будет равна $2\cdot 3^n$.

∇ Возникающая здесь интересная последовательность обсуждается в задачах 219 из книги [10] и М233 из «Задачника Кванта» («Квант», 1974, № 7).

40. Ответ: дуга окружности, касающейся боковых сторон треугольника в вершинах A и C основания.

Пусть ABC — данный треугольник, $AB = BC$ и M — некоторая точка искомого множества, E, F и H — ее проекции на стороны AB, BC и AC соответственно (рис. 35). Четырехугольники $AEMH$ и $CHMF$ подобны: у них соответственно равны углы и по условию пропорциональны пары соседних сторон $(EM : MH = MH : MF)$, тем самым подобны друг другу и треугольники, на которые они разбиваются диагоналями: $\triangle EMA \sim \triangle HMC$, $\triangle AMH \sim \triangle CMF$. Отсюда

$$\angle AMC = \angle AMH + \angle HMC = \\ = \angle HMC + \angle CMF = \angle HMF.$$

Итак, величина $\angle AMC$ постоянна, откуда следует, что точка M принадлежит дуге окружности, опирающейся на отрезок AC.

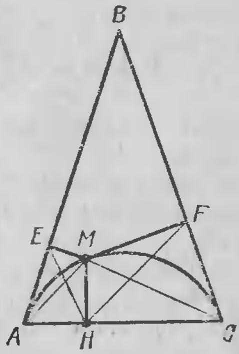


Рис. 35

Можно проверить, что любая точка этой дуги принадлежит искомому множеству точек.

∇ Если искать множество точек, расстояние которых до прямой AC равно среднему геометрическому расстояний до прямых AB и BC, на всей плоскости, а не только внутри треугольника, то искомое множество дополнится кусками гипербол.

41. Ответ: углы треугольника — 90°, 45°, 45°.

Пусть h_a и h_b — высоты, опущенные на стороны a и b. По условию $a \leqslant h_a$, $b \leqslant h_b$, но в любом треугольнике $h_a \leqslant b$, $h_b \leqslant a$, так что $a \leqslant h_a \leqslant b \leqslant h_b \leqslant a$.

Значит, $a = b = h_a = h_b$, т. е. треугольник равнобедренный и прямоугольный.

42. Предположим, что число $m(m+1)$ является k-й степенью некоторого натурального числа. Так как числа m и $m+1$ взаимно просты, то каждое из них должно быть k-й степенью натурального числа. Но это невозможно: если $m = a^k$, то уже $(a+1)^k > (a+1)\,a^{k-1} = a^k + a^{k-1} > m + 1$ $(k > 1)$.

43. Ответ: единиц получится на одну больше, чем двоек.

Всякое число дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма его цифр (П3). Поэтому в нашей задаче единицы получаются из чисел, дающих при делении на 9 остаток 1, т. е. из чисел 1, 10, 19, 28, ..., 999 999 991, 1 000 000 000, а двойки — из чисел, дающих в остатке 2, т. е. из чисел 2, 11, 20, 29, ..., 999 999 992.

44. Какой бы набор из n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (среди которых не все равны между собой) мы ни взяли, через несколько

шагов максимальное число набора уменьшится, а минимальное увеличится.

Отсюда ясно, что максимальное число не может все время оставаться целым, если, конечно, не получится набора из равных чисел $(a, a, a, \ldots a)$.

Пусть из набора $z_1, z_2, \ldots, z_n$ впервые получается набор равных чисел:

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{z_2 + z_3}{2} = \ldots = \frac{z_{n-1} + z_n}{2} = \frac{z_1 + z_n}{2}.$$

Тогда числа z_i равны через одно. При нечетном n это невозможно.

Пусть n четно. Посмотрим, из какого набора может получиться набор $(a, b, a, b, a, b, \ldots, a, b)$. Пусть

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_3 + y_4}{2} = \frac{y_n + y_{n-1}}{2} = a;$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{y_4 + y_5}{2} = \frac{y_n + y_1}{2} = b.$$

Тогда

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 2an, \quad y_2 + y_3 + \ldots + y_n + y_1 = 2nb,$$

т. е. $2an = 2nb$ и $a = b$.

Таким образом, набор из попарно равных чисел получен быть не может, что и доказывает утверждение задачи.

45. а) Величина каждого из углов шестиугольника $120°$ и, следовательно, противоположные его стороны параллельны. Можно считать при этом, что $AB \geqslant DE$ (рис. 36).

Построим теперь параллелограммы $ABCK$, $CDEL$, $AFEM$. Если точки K, L, M не совпадают, то все углы треугольника KLM составляют по $60°$, откуда $KL = LM = KM$ и, следовательно,

$$AB - DE = CD - FA = FE - BC.$$

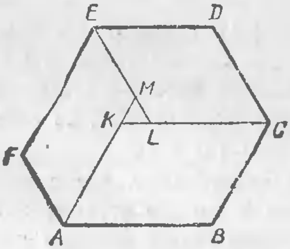


Рис. 36

б) Можно считать, что $a_1 > a_4$. Построим правильный треугольник KLM со сторонами

$$KL = LM = MK = a_1 - a_4 = a_3 - a_6 = a_5 - a_2.$$

Отложим на продолжении KL отрезок $LC = a_4$, на продолжении LM — отрезок $ME = a_6$, на продолжении MK — отрезок $KA = a_2$ и построим параллелограммы $AKCB$, $CLED$, $AFEM$. Полученный шестиугольник $ABCDEF$ — искомый.

46. Ответ: единственное решение $x = y = 0$.

Пусть x и y — целые числа, удовлетворяющие условию. После ряда возведений в квадрат убеждаемся, что $\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$ и $\sqrt{x}=k$ — целые числа, причем

$$m^2 = k(k+1). \qquad (*)$$

Если $k > 0$, то должно быть $k^2 < m^2 < (k+1)^2$, тогда $k < m < k+1$ и поэтому m — не целое число. Значит, $k = 0$, т. е. $x = 0$.

∇ Заметим, что противоречивость равенства $(*)$ следует также из задачи 42.

47. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — основания перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C и D на диагонали BD и AC, O — точка пересечения диагоналей, а α — величина острого угла между ними (рис. 37). Тогда $OA_1 = OA \cdot \cos\alpha$; $OB_1 = OB \cdot \cos\alpha$; $OC_1 = OC \cdot \cos\alpha$; $OD_1 = OD \times \cos\alpha$. Поэтому треугольники A_1OB_1, B_1OC_1, C_1OD_1 и D_1OA_1 подобны треугольникам AOB, BOC, COD и DOA с коэффициентом подобия $\cos\alpha$.

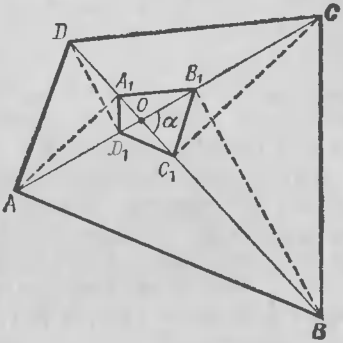


Рис. 37

Отсюда следует и подобие четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

∇ Заметим, что второй из четырехугольников получается из первого композицией следующих преобразований: симметрии относительно биссектрисы острого угла между диагоналями и гомотетии с центром O и коэффицентом $\cos\alpha$.

48. Ответ: n — простое число и $n = 9$.

Если n можно представить в виде $n = ab$, где $a \geqslant 3$, $b \geqslant 3$, $a \neq b$, то в произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ входят множители a, $2a$ и b, $2b$, поэтому $(n-1)!$ делится на $a^2b^2 = n^2$.

Если $n = p^2$, где p — простое число, то при $p^2 - 1 \geqslant 4p$ в произведение $(p^2-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p^2-1)$ входят числа p, $2p$, $3p$ и $4p$ и оно делится на $p^4 = n^2$. (Неравенство $p^2 - 4p - 1 \geqslant 0$ выполнено при всех простых $p \geqslant 5$.)

Остаются две возможности: n — простое число (в этом случае $(n-1)!$ не делится даже на n) и $n = 9$ (в этом случае $8!$ делится на 9, но не делится на 81).

∇ Согласно известной теореме Вильсона при простом p число $(p-1)!$ всегда дает остаток $(p-1)$ при делени на p.

49. Занумеруем отрезки, по которым полз жук, по порядку. Рассмотрим одно из трех направлений отрезков сети — назовем его горизонтальным. Докажем, что номера всех горизонтальных отрезков пути жука имеют одинаковую четность.

Пусть a и b — два соседних горизонтальных отрезка на этом пути, в том смысле, что путь между a и b состоит из отрезков двух других направлений. Ситуация, когда жук пересекает некоторую вертикальную полосу шестиугольников сначала «туда», а потом «обратно» (изображенная на рис. 38), невозможна: в этом случае путь жука можно было бы сократить (соединив точки P и Q пунктирной линией). Отсюда следует, что число промежуточных отрезков между a и b нечетно и что по этим отрезкам жук полз в одном направлении. Поэтому все вообще горизонтальные отрезки пути жука имеют номера одной четности (и жук ползет по ним в одном направлении).

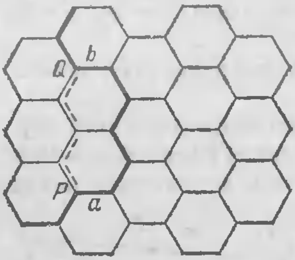


Рис. 38

Это относится и к отрезкам двух других направлений. Поскольку направлений всего три, то либо все отрезки с четными номерами, либо все отрезки с нечетными номерами имеют одинаковое направление. Таких отрезков ровно 50.

∇ Любой путь жука по сети можно задать начальным узлом и «словом» из букв p, q, r (каждая буква соответствует отрезкам пути, параллельным одному из трех направлений). Интересно описать слова, соответствующие замкнутым (приводящим в начальный узел) или несамопересекающимся путям.

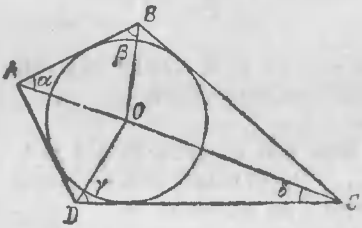


Рис. 39

50. Пусть O — центр вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности (рис. 39). Так как $\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta$, $\angle COD = 180^\circ - \gamma - \delta$, а $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180^\circ$, то $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$.

51. Так как $k^n - b^n = (k - b)(k^{n-1} + k^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, то $k^n - b^n$ делится на $k - b$.

Таким образом, $(k^n - b^n) - (k^n - a) = a - b^n$ делится на

$k-b$ при любом $k \neq b$, но это может быть только тогда, когда $a = b^n$.

52. Ответ: 2^{n-2} дробей.

Прежде всего ясно, что в полученной дроби x_1 будет стоять в числителе. Почти столь же очевидно, что x_2 окажется в знаменателе при любой расстановке скобок (знак деления, стоящий перед x_2, относится либо к самому x_2, либо к какому-либо выражению, содержащему x_2 в числителе).

Оказывается, что остальные буквы $x_3, x_4, \ldots, x_n$ могут располагаться в числителе или знаменателе совершенно произвольным образом; отсюда следует, что всего можно получить 2^{n-2} дробей: каждая из $n-2$ букв $x_3, x_4, \ldots, x_n$ может оказаться независимо от остальных в числителе или знаменателе.

Докажем это утверждение по индукции. При $n = 3$ можно получить 2 дроби:

$$(x_1 : x_2) : x_3 = \frac{x_1}{x_2 \cdot x_3} \quad \text{и} \quad x_1 : (x_2 : x_3) = \frac{x_1 x_3}{x_2},$$

так что утверждение справедливо.

Предположим, что оно справедливо при $n = k$ и докажем его для $n = k + 1$.

Пусть выражение $x_1 : x_2 : \ldots : x_k$ после некоторой расстановки скобок записывается в виде некоторой дроби A. Если в это выражение вместо x_k подставить $x_k : x_{k+1}$, то x_k окажется там же, где и было в дроби A, а x_{k+1} будет стоять не там, где стояло x_k (если x_k было в знаменателе, то x_{k+1} окажется в числителе и наоборот).

Теперь докажем, что можно добавить x_{k+1} туда же, где стоит x_k. В дроби A после расстановки скобок обязательно будет выражение вида $(p : x_k)$, где p — буква x_{k-1} или некоторая скобка; заменив $(p : x_k)$ выражением $((p : x_k) : x_{k+1}) = p : (x_k \cdot x_{k+1})$, мы получим, очевидно, ту же самую дробь A, где вместо x_k стоит $x_k \cdot x_{k+1}$. Тем самым утверждение доказано.

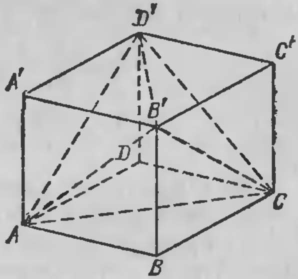


Рис. 40

53. Легко видеть, что куб можно разбить на 5 тетраэдров. На рис. 40 это тетраэдры $AA'B'D'$, $AB'BC$, $ACDD'$, $B'C'D'C$ и $ACD'B'$.

Докажем теперь, что на меньшее число тетраэдров разбить куб нельзя. Пусть куб разбит на несколько тетраэдров. Имеются по крайней мере два из них, основания которых лежат на грани $ABCD$ куба. Точно так же имеются по крайней мере 2 тетраэдра с основаниями на грани $A'B'C'D'$.

Эти тетраэдры заведомо отличны от первых двух, так как у тетраэдра не может быть двух параллельных граней. Итак, у нас уже есть 4 тетраэдра. Их общий объем не больше чем $2a^3/3$, т. е. меньше объема куба. Таким образом, на 4 тетраэдра куб разбить нельзя.

54. Ответ: $41^2 = 1681$.

Пусть число n^2 удовлетворяет условию задачи, тогда $n^2 = 100a^2 + b$, где $0 < b < 100$. Поэтому $n > 10a$ и, следовательно, $n \geqslant 10a + 1$. Это значит, что $b = n^2 - 100a^2 \geqslant 20a + 1$, откуда $20a + 1 < 100$, и поэтому $a \leqslant 4$.

При $a = 4$ лишь $n = 10a + 1 = 41$ удовлетворяет условию: если $n > 41$, то $n^2 - 40^2 \geqslant 42^2 - 40^2 > 100$.

∇ Эту тему продолжает задача 244.

55. Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 и $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$, $2p_4$ — площади и периметры треугольников ABE, BCE, CDE и DAE соответственно. Нужно доказать равенство

$$\frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} = \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_4}.$$

Поскольку $ABCD$ — трапеция, $S_1 = S_3 = S$. Поскольку $ABCD$ — описанный четырехугольник, $AB + CD = BC + AD$. Прибавив к обеим частям этого равенства сумму диагоналей, получим $2p_1 + 2p_3 = 2p_2 + 2p_4$. Чтобы получить отсюда требуемое равенство, нужно разделить обе части на $2S$ и воспользоваться соотношениями, вытекающими из равенств

$$\frac{S_2}{S} = \frac{S}{S_4} = \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{CD} = \frac{p_2}{p_4};$$

$$\frac{p_2}{S} = \frac{p_4}{S_4}; \quad \frac{p_4}{S} = \frac{p_2}{S_2}.$$

56. Ответ: минимальное значение $s_{\min}$ равно $-[n/2]$, т. е. $-n/2$, если n четно, и $-(n-1)/2$, если n нечетно.

а) Сумму s всевозможных попарных произведений чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно записать так:

$$s = \frac{1}{2}\left(\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2\right).$$

Отсюда видно, что $s \geqslant -n/2$.

Если n четно, то, положив половину из x_k равными 1, а половину равными -1, получим $s = -n/2$. Если же n нечетно, то (поскольку s — целое число) $s \geqslant -(n-1)/2$; наименьшее значение s достигается, если среди x_k имеется $(n+1)/2$ единиц и $(n-1)/2$ минус единиц.

б) Сводится к задаче а): каждое из x_k можно последовательно заменить на 1 или -1 так, что величина суммы всевозможных попарных произведений не будет увеличиваться (правило замены: x_k заменяем на -1, если сумма остальных чисел неотрицательна, и на 1, если отрицательна). Поэтому здесь такой же ответ, как в задаче а).

57. Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_9$ — числа, написанные на карточках. Если $a_1 + a_9 > a_2 + a_8$, то первый ставит число a_9 в клетку 2 (рис. 41), а вторым своим ходом — число a_2 (или a_1) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1 + a_9 < a_2 + a_8$, то первый ставит число a_1 в клетку 2, а вторым своим ходом — число a_9 (или a_8) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$, то первый может применить любую из описанных выше стратегий (при правильной игре второго результат игры в этом случае — ничья).

	1	
2		3
	4	

Рис. 41

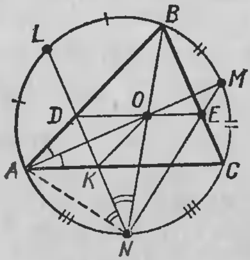


Рис. 42

58. Пусть L, M и N — середины дуг AB, BC и CA, O — центр вписанной окружности треугольника ABC, D и K — точки пересечения отрезка LN со сторонами AB и AC (рис. 42).

Докажем, что четырехугольник $ADOK$ — ромб (заодно мы решим и задачу 237). Для этого достаточно убедиться, что диагонали AO и DK служат осями симметрии этого четырехугольника.

В самом деле, $AM \perp LN$, поскольку $\smile LB + \smile BM + \smile AN = 180°$; поэтому точки D и K симметричны относительно прямой AM (биссектрисы угла BAC), точки A и O симметричны относительно прямой LN (биссектрисы угла ANB).

Отсюда следует, что $DO \| AC$; аналогично можно доказать, что $EO \| AC$, где E — точка пересечения отрезка MN со стороной BC. Итак, точки D, O и E лежат на одной прямой, параллельной AC.

59. Если счастливый билет имеет номер A, то билет с номером $A' = 999\,999 - A$ также счастливый и $A' \neq A$. Поскольку $A + A' = 1001 \cdot 999 = 13 \cdot 77 \cdot 999$ делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

60. Если катер входит в круг K, освещаемый прожектором, в точке A, то через промежуток времени $5\pi/2 \cdot a/v$ — он будет находиться на расстоянии не больше $5\pi/2 \cdot a/v \cdot v/8$ от точки A — в одной из точек заштрихованного на рис. 43 пересечения круга K и круга радиуса $5\pi a/16 < a$ с центром A. Легко видеть, что за это время луч прожектора повернется на угол $5\pi/2$ и «просмотрит» всю заштрихованную область, следовательно, катер будет обнаружен.

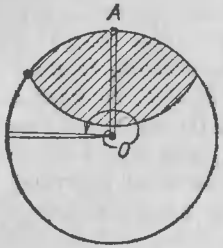


Рис. 43

∇ Более тонкие рассуждения (см. [5], «задача про катер» 4.13) показывают, что наименьшая скорость, при которой катер сможет подойти к острову, равна $v_{\min} = v\cos\beta$, где β — корень уравнения $2\pi + \beta = \operatorname{tg}\beta$, $0 < \beta < \pi/2$; $v_{\min} \approx 0{,}13v$.

61. Возьмем одного из дружинников. Если бы требуемое распределение дежурств было возможно, то остальные 99 дружинников должны были бы разбиться на пары, которые дежурили бы вместе с выбранным дружинником, а это невозможно, так как 99 — нечетное число.

∇ Задача о том, для каких n можно выделить из элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ систему троек так, чтобы каждая пара попала ровно в одну тройку (систему «троек Штейнера»), подробно обсуждается в книгах [58], [64].

62. Пусть x — длина искомого отрезка, b — длина основания AC треугольника ABC (рис. 44). Периметр треугольника BDE

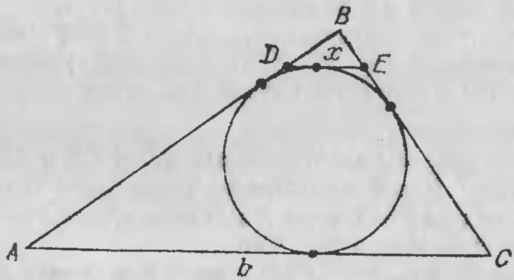


Рис. 44

равен $2p - 2b$ (убедитесь в этом, используя свойство касательных к окружности).

Из подобия $\triangle BDE$ и $\triangle ABC$ получаем

$$x = \frac{1}{p} b(p - b) = \frac{1}{p}\left(\frac{p^2}{4} - \left(b - \frac{p}{2}\right)^2\right).$$

Максимальное значение x равно $p/4$ и достигается при $b = p/2$.

63. Нетрудно доказать, что $x_{ii} = 0$ и $x_{ik} = -x_{ki}$ для всех i и k. Сложив теперь n уравнений $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ с фиксированными i и j $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$nx_{ij} = s_i - s_j,$$

где s_j — сумма всех чисел вида $x_{jk}(k = 1, 2, \ldots n)$. Положим теперь $a_i = s_i/n$, тогда $x_{ij} = a_i - a_j$, что и требовалось.

64. Ответ: можно.

В квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ на прямой $y = 1/2$ равномерно расставим $c_0 = 200$ точек: $(k/201; 1/2)$, $k = 1, 2, \ldots, 200$. Затем на каждой из прямых $y = 1/4$ и $y = 3/4$ расставим по $c_1 = 100$ точек $(k/101; 1/4)$, $(k/101; 3/4)$, $k = 1, 2, \ldots, 100$. Повторяя этот процесс, для $m = 2, 3, \ldots, 7$ на каждой прямой $y = (2l-1)2^{-m-1}$, $1 \leqslant l \leqslant 2^m$, расставим по c_m точек $\left(\frac{k}{c_m+1}; \frac{2l-1}{2^{m+1}}\right)$, где $c_m = [200 \cdot 2^{-m}]$ (при $m = 7$ на 128 соответствующих прямых будет поставлено по одной точке). Всего поставлено

$$\sum_{m=0}^{7} 2^m c_m = 200 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 50 + 8 \cdot 25 + 16 \cdot 12 + 32 \cdot 6 + 64 \cdot 3 + 128 = 1704 \text{ точек.}$$

Эту конструкцию поясняет рис. 45.

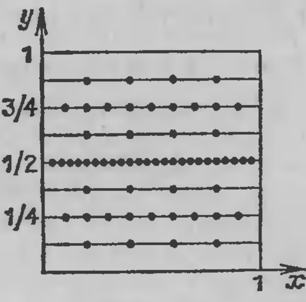


Рис. 45

Ясно, что никакой прямоугольник площади 1/200 не втиснется между расставленными точками. Если он пересекает прямую $y = 1/2$, то его основание не больше 1/201; если нет, то он расположен целиком выше или ниже этой прямой. При этом, если он пересекает прямую $y = 3/4$ или $y = 1/4$, его высота не больше 1/2, а основание не больше 1/101 и т. д. Если прямоугольник целиком расположен между прямыми вида $y = n/256$ $(n = 1, 2, \ldots, 255)$, то его высота не больше 1/256.

65. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ — данные числа, занумерованные в порядке возрастания их дробных частей $\alpha_i = x_i - [x_i]$.

Округлим первые k из этих чисел в меньшую сторону, а остальные — в большую; k будет выбрано ниже. Легко видеть, что наибольшая ошибка при округлении будет накапливаться при вычислении одной из сумм

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \text{ или } x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n.$$

Модуль первой из ошибок равен

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leqslant k\alpha_k,$$

а второй

$$(1-\alpha_{k+1}) + \ldots + (1-\alpha_n) \leqslant (n-k)(1-\alpha_{k+1}).$$

Выберем теперь k так, чтобы выполнялись неравенства

$$k\alpha_k \leqslant (n+1)/4 \text{ и } (n-k)(1-\alpha_{k+1}) \leqslant (n+1)/4.$$

Для этого достаточно взять наибольшее k, для которого выполнено первое неравенство; тогда $\alpha_{k+1} > \frac{n+1}{(k+1)}$, поэтому выполнено и второе неравенство $1-\alpha_{k+1} < 1 - \frac{n+1}{4(k+1)} \leqslant \frac{n+1}{4(n-k)}$ $\left(\text{поскольку } \frac{n+1}{4(k+1)} + \frac{n+1}{4(n-k)} = \frac{(n+1)^2}{4(k+1)(n-k)} \geqslant 1 \text{ при } 0 < k < n\right)$.

∇ Для нечетного n оценка погрешности, указанная в условии, точная (пример: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1/2$). Для четного n ее можно несколько улучшить, заменив $\frac{n+1}{4}$ на $\frac{n+1}{4} - \frac{1}{n+1}$ $\left(\text{пример: } x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{n}{2(n+1)}\right)$.

66. Турист может идти от кафе по произвольному маршруту с одним условием: попав на площадь, он выбирает следующую улицу из тех, по которым он шел до этого нечетное число раз. Нетрудно видеть, что такая улица существует для любого перекрестка, кроме вокзального (в самом деле, турист подходил к перекрестку на один раз больше, чем уходил от него), а также, что полученный маршрут не может дважды проходить по одной и той же улице. Поскольку количество улиц конечно, то турист в конце концов придет на вокзал.

67. а) Первое решение. Каждая пара членов комиссии могла встретиться не более чем на одном заседании. На каждом заседании было $C_{10}^2 = 45$ пар. Так как было 40 заседаний, то из членов комиссии можно образовать не меньше $1800 = 45 \cdot 40$ пар. Но из 60 (или меньше) человек можно образовать не больше $C_{60}^2 = 60 \cdot 59/2 < 1800$ пар.

Второе решение. Пусть число N членов комиссии не больше 60. Тогда, так как $10 \cdot 40/N > 6$, то найдется человек, побывавший по крайней мере на семи заседаниях. Все те люди, с которыми он встречался, — разные и их общее количество $7 \cdot 9 > 59$. Противоречие.

б) Эта задача решается точно так же, как и а) (годится любое решение).

∇ Любопытно, что приведенная здесь оценка является точной: 30 комиссий по 5 человек, удовлетворяющих требованиям задачи, составить можно.

68. Ответ: б) $(p-1)(q-1)/2$. Если p и q — взаимно простые натуральные числа, то каждое целое число z представляется в виде $z = px + qy$ (П2). Всякое такое представление получается из некоторого фиксированного $z = pa + qb$ по общей формуле $z = p(a - qt) + q(b + pt)$, где t — целое, причем существует единственное представление, для которого $0 \leqslant x \leqslant \leqslant q - 1$.

Каждому целому числу z мы сопоставили пару (x, y) целых чисел такую, что $0 \leqslant x \leqslant q - 1$, $z = px + qy$. Разным числам при этом соответствуют разные пары, причем z будет хорошим только при $y \geqslant 0$. (Если $z = px + qy$ — хорошее число, то при $x = qt + r \geqslant 0$, $0 \leqslant r \leqslant q - 1$, имеется представление $z = pr + q(y + t)$.)

Теперь заметим, что если число $z = px + qy$, $0 \leqslant x \leqslant \leqslant q - 1$ — хорошее, то число $z' = (q - 1 - x)p + (-1 - y)q$ — плохое и, наоборот, если z — плохое, то z' — хорошее. Точки (x, y) и $(q - 1 - x, -1 - y)$ симметричны относительно точки $(x_0, y_0) = \left(\frac{q-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, а сами числа z и z' симметричны относительно точки $z_0 = px_0 + qy_0 = (pq - p - q)/2$, поскольку $z + z' = pq - p - q = 2z_0 = c$.

Тем самым доказано а): хорошему числу z соответствует плохое (симметричное ему) $c - z = z'$ и наоборот.

Поскольку наименьшее хорошее число 0, то наибольшим плохим будет c, а всего плохих чисел будет $(c + 1)/2 = (p - 1)(q - 1)/2$.

∇ Очень полезно, разбирая решение этой задачи, опираться на геометрическую иллюстрацию: пары (x, y) — точки плоской решетки, $px + qy = z$ — проходящие через них прямые и т. д. (см. «Квант», 1973, № 11, решение задачи М194).

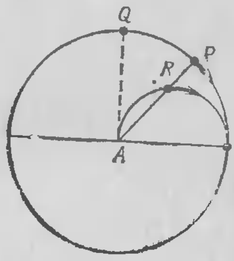


Рис. 46

69. Ответ: через $\frac{\pi}{200}$ ч. Нужно заметить, что траектория воображаемой «ракеты» в условиях задачи — окружность вдвое меньшего радиуса (рис. 46): градусная величина дуги AR вдвое большое $\angle QAP$ (угла между касательной и хордой), т. е. вдвое больше градусной величины дуги $\overset{\frown}{QP}$ вдвое большего радиуса; поэтому длины этих дуг (для каждого положения

R) равны. До встречи самолет пройдет четверть окружности, ракета — половину.

∇ Нужно было бы, конечно, доказать единственность траектории ракеты, удовлетворяющей условию (от участников олимпиады это не требовалось: в то время в школе не изучали производную). Она вытекает сравнительно несложно из общей теоремы о единственности функции с данным значением при $t=0$ и данной производной; если в момент времени t ракета ушла на расстояние $AR = AQf(t)$ от точки A (причем $f(0)=0$), то ее скорость в перпендикулярном радиусу направлении — $vf(t)$, по радиусу — $v\sqrt{1-f^2(t)}=f(t)$, так что $\dfrac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}}=v$, т. е. $(\arcsin f(t))'=v$, откуда $f(t)=\sin vt$.

70. Пусть A и B — две вершины многогранника, удаленные на расстояние d. Через точки A и B проведем плоскости, перпендикулярные прямой AB.

Ясно, что весь многогранник заключен между этими двумя плоскостями. Через каждую вершину многогранника проведем плоскость, перпендикулярную AB. Рассмотрим две соседние из проведенных плоскостей. Между ними расположены, очевидно, по крайней мере три отрезка ребер. Проекция каждого отрезка на прямую AB не меньше длины этого отрезка, причем среди них наверняка найдутся отрезки, не параллельные AB. Поэтому общая сумма длин всех таких отрезков, т. е. сумма длин ребер, больше чем $3\cdot AB = 3d$.

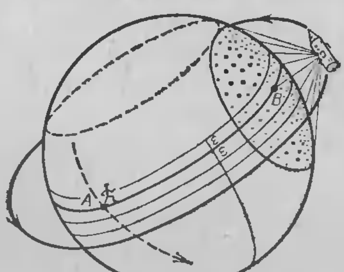


Рис. 47

Короче это решение можно пояснить так: проекция остова многогранника на отрезок покрывает его по меньшей мере троекратно.

71. Примем радиус планеты за 1. Возьмем на планете произвольные диаметрально противоположные точки (полюсы), проведем через них некоторый «основной» меридиан, разделим его на равные дуги длины ε и через точки деления проведем параллели (рис. 47).

Экипажу корабля предлагается следующий план поиска: корабль начинает облет планеты, двигаясь на постоянном расстоянии $R>1$ от центра планеты над отмеченными параллелями, причем начинает от «северного» полюса и каждый раз, дойдя до основного меридиана, перелетает вдоль него на следующую параллель. Пусть теперь $R=\sqrt{2}$. Тогда с корабля видна «сферическая шапочка» радиуса $\pi/4$ (все расстояния измеряются по сфере).

Поскольку ε можно выбрать произвольно малым, нужно лишь проверить, что при отношении скоростей, большем 10, житель планеты не успеет пересечь «полосу обнаружения» корабля с юга на север, пока тот летает по одной параллели. Это почти очевидно. Любая параллель короче экватора. Центр «круга обнаружения» перемещается по параллели со скоростью, по крайней мере в $10/\sqrt{2}$ большей скорости жителя. Если житель пересекает параллель в точке A, когда корабль находится в B, то одна из дуг $\overset{\smile}{AB}$ параллели не больше π, и пока корабль проходит ее, житель успевает отойти от A на расстояние не больше $\pi\sqrt{2}/10 < \pi/4$, так что в момент нахождения в A корабль должен (был или будет) увидеть его.

72. Возьмем две ближайшие друг к другу планеты. Ясно, что астрономы на этих планетах смотрят друг на друга.

Остается еще $n-2$ планеты и $n-2$ астронома. Если хотя бы один из них смотрит на уже выбранную планету, то на одну из $n-2$ планет не хватит астрономов. Если же на эти две планеты никто больше не смотрит, то снова можно применить то же рассуждение: выбираем уже из $n-2$ планет две ближайшие и т. д. Поскольку n нечетно, в конце концов останется одна планета, которую никто не наблюдает.

73. а) Если точка P лежит на прямой AD, утверждение очевидно.

Пусть P не лежит на AD и O — середина отрезка AD. Пусть P' — точка, симметричная точке P относительно O. Четырехугольники $BPCP'$ и $P'APD$ — параллелограммы и $AP + PD = AP' + AP > P'B + PB = BP + PC$.

б) В условии P — произвольная точка. Выбирая $P = A$, получим $AD \geqslant AB + AC$. Теперь положим $P = D$; тогда $AD \geqslant BD + DC$. Сложив эти неравенства, получаем $2AD \geqslant AB + AC + BD + CD$.

С другой стороны, всегда $AD \leqslant AC + CD$ и $AD \leqslant AB + BD$, причем в каждом из неравенств равенство возможно, лишь когда три точки лежат на одной прямой. Складывая их, получим $2AD \leqslant BD + AB + AC + CD$. Сопоставляя с полученным ранее, получаем $2AD = BD + AB + AC + CD$. Отсюда сразу следует, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой и все ранее выписанные неравенства являются равенствами; из них следует, что точки B и C лежат на отрезке AD и $AB = CD$.

74. Ответ: таких чисел x и y нет.

В самом деле, пусть $x \geqslant y$. Тогда $x^2 < x^2 + y \leqslant x^2 + x < (x+1)^2$, т. е. $x^2 + y$ не является квадратом целого числа.

75. а) Достаточно доказать, что k-й по росту восьмиклассник выше k-го семиклассника. Пусть A — k-й по росту семиклассник. Тогда существует не меньше k семиклассников (в их число входит и A), которые не ниже A. Все k восьмиклассников, стоящих за ними, выше A. Поэтому k-й по росту восьмиклассник выше A.

б) Сводится к задаче а): достаточно провести те же рассуждения для любых двух колонн.

76. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ на клетчатой бумаге размерами $m \times n$ клеток (рис. 48). Обозначим количества кратчайших путей, ведущих из вершин B_1, D_1, B_2, D_2 и A_2 в C по линиям сетки, через b_1, d_1, b_2, d_2 и a_2 соответственно. Утверждение задачи состоит в том, что $d_1/b_1 = n/m$. Докажем его индукцией по $m+n$ (П1), причем сразу для любого, не обязательно целого, отношения $n/m = k$. Начало индукции ($m = 1$ или $n = 1$) очевидно. Будем считать, что $m > 1$, $n > 1$. По предположению индукции, примененному к прямоугольникам меньших размеров $(m-1) \times n$ и $m \times (n-1)$,

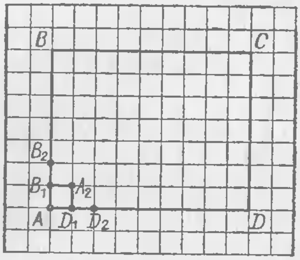


Рис. 48

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{n}{m-1} \quad \text{и} \quad \frac{d_2}{a_2} = \frac{n-1}{m}.$$

Поэтому

$$\frac{d_1}{b_1} = \frac{d_2 + a_2}{b_2 + a_2} = \frac{d_2/a_2 + 1}{b_2/a_2 + 1} = \frac{(n-1)/m + 1}{(m-1)/n + 1} = \frac{n}{m}.$$

∇ По существу в решении этой задачи доказаны равенства

$$C_{m+n-1}^{m-1} = nC_{m+n-1}^{m} = (m+n-1)\, C_{m+n-2}^{m-1}$$

(в нашей задаче $n = km$). Зная формулу для чисел C_n^m (П10), их нетрудно проверить; но можно, наоборот, использовать эти равенства для вывода общей формулы для «чисел сочетания» C_n^m.

77. Докажем утверждение задачи по индукции. При $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо.

Предположим, что для n чисел a, a_3, ..., a_{n+1} существует сумма s' вида $\pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$, для которой $0 < s' \leqslant a_2$.

Тогда либо $0 \leqslant s' \leqslant a_1$, но тогда $0 \leqslant s = a_1 - s' \leqslant a_1$, либо $a_1 < s' \leqslant a_2 \leqslant 2a_1$, а тогда $s = s' - a_1 \leqslant a_2 - a_1 \leqslant a_1$, что и требовалось.

78. Решим эту задачу для произвольного выпуклого n-угольника площади S и периметра P.

Пусть длины сторон этого многоугольника $a_1, a_2, \ldots a_n$ $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n = P)$. Рассмотрим прямоугольник площади S с основанием P, высота его равна, очевидно, S/P.

Разрежем теперь этот прямоугольник вертикальными отрезками на n-прямоугольников с основаниями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и приложим каждый из получившихся прямоугольников к соответствующей стороне изнутри.

Некоторые прямоугольники будут налезать друг на друга, некоторые могут «вылезать» за пределы данного многоугольника, и поэтому, поскольку их общая площадь равна S, а площадь многоугольника — тоже S, не покроют его целиком. Любая не покрытая точка может служить центром требуемого круга радиуса S/P.

∇ Для четырехугольника задачу можно решить иначе, но на олимпиаде несколько участников придумали решение, годящееся для любого n-угольника.

79. Назовем длиной пути число отрезков, из которых он состоит. Пусть n — длина кратчайшего пути из A в B. Докажем утверждение задачи индукцией по n.

При $n = 1$ кроме кратчайшего пути AB существует путь, идущий из A в перекресток $C \neq A$, удаленный от B на 1, и не проходящий через B.

Пусть $n > 1$, D — ближайший к A перекресток на кратчайшем пути из A в B. По предположению индукции, существует два непересекающихся пути p и q из D и B. Будем идти из A по пути l, не проходящем через D. Если этот путь не пересекается с путями p и q, то все доказано. Если же он впервые пересекает, скажем, путь p, то дальше следует идти по p прямо в B. Полученный путь не пересекается с q.

80. Пусть h^* и PH — высоты тетраэдра, опущенные из точек A и P соответственно, h_a, h_b и h_c — высоты треугольника ABC, PL — высота треугольника PBC.

Имеем $h^* S_{PBC} = HP \cdot S_{ABC}$, а так как $h^* \geqslant HP$, то $S_{PBC} \leqslant \leqslant S_{ABC}$, откуда получаем $PL \leqslant h_a$, тем самым $HL < PL \leqslant h_a$.

Итак, расстояние от H до прямой BC меньше h_a, так что точка H лежит внутри полосы, образованной двумя параллельными прямыми, которые удалены от прямой BC на расстояние h_a.

Аналогично доказывается, что точка H удалена от AC и AB на расстояния, меньшие h_b и h_c соответственно.

Таким образом, точка H принадлежит пересечению всех трех полос, т. е. лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$, у которого точки A, B, C являются серединами сторон. Наоборот, если

H — произвольная точка внутри $\triangle A_1B_1C_1$ и точка P выбрана вблизи H так, что прямая PH перпендикулярна плоскости ABC, то расстояния от точки P до сторон треугольника ABC меньше соответствующих высот, и PH — наименьшая из высот театраэдра $PABC$.

81. Опишем вокруг каждой из данных точек круг радиуса 1/2. Сумма диаметров этих кругов равна 100.

Если какие-то два круга пересекаются, то заменим их одним кругом, а именно кругом наименьшего диаметра, содержащего эти два. Сумма диаметров при этом не увеличится, а число кругов уменьшится.

Продолжая эту процедуру, мы получим систему попарно не пересекающихся кругов, содержащих все данные точки, причем сумма диаметров этих кругов не больше 100. Отметим, что расстояние от каждой точки до границы круга не меньше 1/2.

Пусть r — наименьшее расстояние между кругами. Если $r > 1$, то все доказано. При $r \leqslant 1$ заменим каждый из кругов концентрическим с ним кругом, радиус которого на $\frac{1}{2} - \frac{r}{3}$ меньше.

Полученная система кругов полностью удовлетворяет условию.

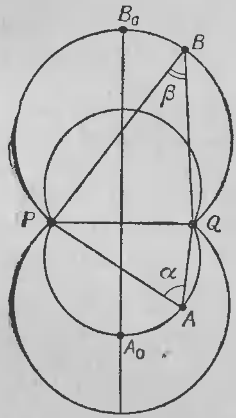


Рис. 49

82. Ответ:

$2d/(\mathrm{ctg}\,(\alpha/2) + \mathrm{ctg}(\beta/2))$ км/с.

Пусть самолет переместился за 1 с из точки P в точку Q, $PQ = r$. Нас интересует наименьшее возможное значение r, если $AB = d$ постоянно; вместо этого мы можем искать максимальное значение отношения d/r, причем удобно считать постоянным r.

Теперь можно переформулировать задачу следующим образом: среди всех точек A и B пространства, из которых данный отрезок PQ виден под углами α и β соответственно, найти такие, для которых AB имеет наибольшую возможную величину.

Так как $\angle PAQ = \alpha$, то точка A находится на поверхности, получаемой вращением сегмента, вмещающего угол α, вокруг его хорды PQ. На аналогичной поверхности находится и точка B (на рис. 49 изображено осевое сечение этих поверхностей). Легко доказать, что наибольшее расстояние между A и B достигается, когда эти точки «диаметрально противоположны» (точки A_0 и B_0 на рисунке). Для такого расположения точек A и B имеем $2d/r = \mathrm{ctg}(\alpha/2) + \mathrm{ctg}(\beta/2)$. Отсюда получим ответ.

83. Ответ: 30. Опишем стратегию второго игрока, которая обеспечит ему такую сумму. Разобьем все числа на пары (1, 2), (3, 4), ..., (19, 20). Каждый раз, когда первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел, кроме 19 и 20, второй должен ставить противоположный знак перед числом той же пары. Как только первый ставит какой-нибудь знак перед числом последней пары, второй ставит тот же знак перед другим из этих чисел. Ясно, что окончательная сумма по модулю будет не меньше чем

$$19+20-\underbrace{1-1-1-\ldots-1}_{9\text{ раз}}=30.$$

Докажем теперь, что первый может не позволить второму выбрать больше 30, если будет при каждом своем ходе ставить перед наибольшим из оставшихся чисел знак, противоположный знаку имеющейся к этому моменту суммы (если сумма равна нулю, то ставится плюс).

Рассмотрим некоторую партию. Пусть k-й ход — последний, в результате которого сумма меняет знак (включая ходы, перед которыми сумма равна нулю). За первые $k-1$ ходов будут заведомо использованы числа 20, 19, 18, ..., $20-(k-1)$. Так что максимальная по модулю сумма, которая может получиться после k-го хода $20-(k-1)+20-k=41-2k$. За каждый из следующих $10-k$ ходов сумма уменьшается по крайней мере на 1, так как первый каждый раз вычитает из модуля суммы наибольшее из оставшихся чисел m, а второй не может добавить к нему больше $m-1$. Итак, в результате сумма будет не больше чем $41-2k-(10-k)=31-k\leqslant 30$.

84. а) Величина угла B прямоугольного треугольника равна (или меньше) 30°, если длина противолежащего углу B катета равна (соответственно меньше) половине длины гипотенузы.

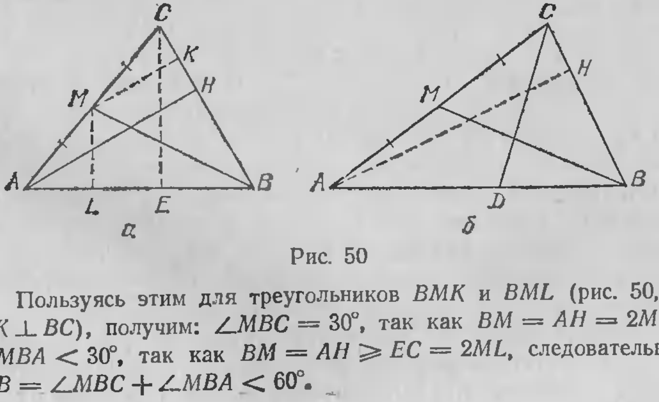


Рис. 50

Пользуясь этим для треугольников BMK и BML (рис. 50, а, $MK\perp BC$), получим: $\angle MBC=30°$, так как $BM=AH=2MK$; $\angle MBA<30°$, так как $BM=AH\geqslant EC=2ML$, следовательно, $\angle B=\angle MBC+\angle MBA<60°$.

Заметим, что слово «остроугольный» в формулировке задачи необходимо: без него утверждение задачи неверно.

б) Из задачи а) следует, что $\angle B \leqslant 60°$. Поэтому достаточно доказать, что сторона AC не меньше остальных сторон: тогда $\angle A \leqslant \angle B \leqslant 60°$ и $\angle C \leqslant \angle B \leqslant 60°$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол), а из этих неравенств сразу же получается, что $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Для доказательства заметим, что BM — наименьшая из медиан, так как медиана к стороне BC не меньше высоты $AH = BM$, а медиана к стороне AB не меньше биссектрисы CD (ведь биссектриса делит сторону AB в отношении $AC : BC$; рис. 50, *б*). Но во всяком треугольнике большей медиане соответствует меньшая сторона: достаточно заметить, что центр тяжести (точка пересечения медиан) $\triangle ABC$ лежит по ту же сторону от серединного перпендикуляра к стороне AC, что и вершина C.

85. а) Если сумма двух чисел a и b состоит из одних девяток, то при сложении этих чисел не может быть переносов единицы в следующий разряд. Поэтому $S(a+b) = S(a) + S(b)$, где $S(x)$ — сумма цифр числа x. При этом если $S(a) = S(b)$, то $S(a+b)$ четно и не может равняться $9 \cdot 1967$.

б) Если последняя цифра числа a не равна нулю, то сумма ее с последней цифрой числа b равна 10, а суммы цифр в каждом из остальных девяти разрядов равны 9. Отсюда следует, что $2S(a) = 9 \cdot 9 + 10 = 91$, что невозможно.

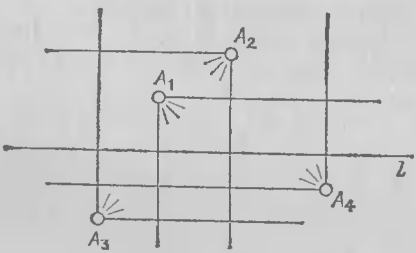


Рис. 51

86. а) Проведем прямую l так, чтобы в каждой из полуплоскостей, на которые делится плоскость этой прямой, было по две из данных точек. Ясно (рис. 51), что два прожектора, помещенных в точки одной из этих полуплоскостей, могут осветить другую полуплоскость.

б) Проведем плоскость так, чтобы четыре из данных точек лежали по одну сторону от нее, а остальные — четыре — по другую. Пользуясь задачей а), нетрудно доказать, что прожекторы, помещенные в четыре точки одного из полупространств, могут осветить другое полупространство.

Далеко идущее обобщение этой задачи было найдено десять лет спустя двумя однофамильцами — «олимпиадниками» разных поколений [70]. Оказывается, любые n данных углов

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 360°$, можно поместить в данных n вершинах так, что они покроют всю плоскость.

87. Ответ: а) нельзя. Заметим, что никакие два из чисел 0, 1, 2, 8, 9 не могут стоять рядом. Значит, они должны стоять через одно. Однако число 7 не может оказаться ни на одном из 5 оставшихся мест, ведь рядом с ним из выписанных чисел может стоять только 2.

б) Ответ: нельзя. Рассуждение аналогично а). Никакие два из чисел 1, 2, 3, 11, 12, 13 не могут стоять рядом; из этих чисел только 1 может стоять рядом с 4 и только 13 рядом с 10, то 10 и 4 должны стоять рядом, но это противоречит условию.

∇ Любопытно отметить, что для четырнадцати чисел (и, по-видимому, для любого $n \geqslant 14$) такая расстановка возможна:

$$— 12 — 9 — 13 — 10 — 14 — 11 — 7 — 4 — 1 — 5 — 2 — 6 — 3 — 8 —.$$

88. Число 5^{1000} оканчивается на 5. Пусть в десятичной записи этого числа на k-м месте, считая от конца, стоит 0, а все следующие цифры отличны от 0. Прибавим к этому числу $5^{1000} \cdot 10^{k-1}$. В результате получится число, делящееся на 5^{1000}, у которого отличны от нуля последние k цифр. Продолжая эту процедуру, можно получить число, у которого последние 1000 цифр отличны от нуля. Теперь отбросим все цифры, кроме 1000 последних. Полученное число, очевидно, тоже делится на 5^{1000}.

89. Ответ: (0; —1), (—1; —1), (0; 0), (—1; 0), (5; 2), (—6; 2).

Умножив обе части уравнения на 4 и прибавив к ним по 1, получим

$$(2x + 1)^2 = (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 - (y^2 - 2y).$$

Если y — целое и отлично от —1, 0, 1 и 2, то $3y^2 + 4y + 1 > 0$ и $y^2 - 2y > 0$ при этом

$$(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2.$$

Эти неравенства означают, что $(2x + 1)^2$ лежит между двумя последовательными квадратами, а это при целых x невозможно. Подставив в уравнение $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ и $y = 2$, найдем ответ.

90. Ответ: 2952. Докажем, что длина (число членов) последовательности, удовлетворяющей условию задачи, у которой наибольший член — второй и равен n, не превосходит $d_n = [3(n + 1)/2]$, причем для последовательности $n - 1, n, 1, \ldots, 1, 1$ длина в точности равна d_n.

Будем рассуждать по индукции. Для $n \leqslant 4$ утверждение легко проверить перебором ($d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$, $d_4 = 7$). Оценим максимальную длину последовательности с началом a, n, $n - a$, a, ... ($a < n$), считая, что для меньших n утверждение доказано. При $1 \leqslant a < n/2$ ее длина не больше $d_{n-a} + 1$, поскольку, убрав первый член a, можно заменить ее начало таким: $n - 2a$, $n - a$, ...; при $n/2 \leqslant a < n - 1$ она не больше $d_a + 2$ — достаточно убрать первые два члена. Таким образом, остается лишь проверить, что для таких a выполнены неравенства соответственно $d_{n-a} + 1 \leqslant d_n$ и $d_a + 2 \leqslant d_n$. При $a = n - 1$ — для последовательности $n - 1$, n, 1, $n - 1$, $n - 2$, 1, $n - 3$, ..., 1, 1 — достаточно убрать первые три члена и переставить два следующих, чтобы осталось лишь проверить равенство $d_{n-3} + 3 = d_n$.

Из общего утверждения при $n = 1967$ получаем ответ: $d_{1967} = [3 \cdot 1968/2] = 2952$.

91. Если король будет двигаться из левого нижнего угла доски в правый верхний угол по диагонали, то на каком-то ходу он обязательно встанет под удар белой ладьи.

Для доказательства достаточно заметить, что после первого хода короля все белые ладьи должны быть выше третьей горизонтали и правее третьей вертикали (после король встанет под удар следующим ходом).

Точно так же перед ходом короля в правый верхний угол все ладьи должны быть ниже 998-й горизонтали и левее 998-й вертикали.

Всего до своего последнего хода по диагонали король сделает 997 ходов. При этом каждая ладья при движении короля должна сделать 2 хода (сменить горизонталь и вертикаль, на которых она находилась первоначально), но ладей 499, и на это им понадобилось бы $2 \cdot 499 = 998 > 997$ ходов.

92. Ответ: $S = 1$.

Пусть K, L, N — вершины ромба на сторонах AB, BC и AD квадрата (рис. 52, *а*). Заметим, что длина KB равна расстоянию от точки M до прямой AD. Поэтому, если зафиксировать точку K, то возможные положения точки M заполняют некоторый отрезок M_1M_2, параллельный стороне AD.

При этом нижнему положению M_1 точки M соответствует случай $N_1 = A$, а верхнему M_2 — случай $L_2 = C$.

Чтобы определить положение точек M_1 и M_2 в зависимости от расположения точки K, введем систему координат, как это сделано на рис. 52, *б*.

Несложные вычисления показывают, что если абсцисса точки K равна $x > 0$, то $M_1 = (-x, \sqrt{2x})$, а $M_2 = (-x, \sqrt{1 - 2x} + 1)$ Пользуясь симметрией множества точек M относительно оси Oy, получаем, что это множество представляет собой фигуру, помеченную штриховкой. Брать интегралы для вычисления площади не нужно: на рис. 51, *в* фигурки, обозначенные цифрами 1 и 2, равны.

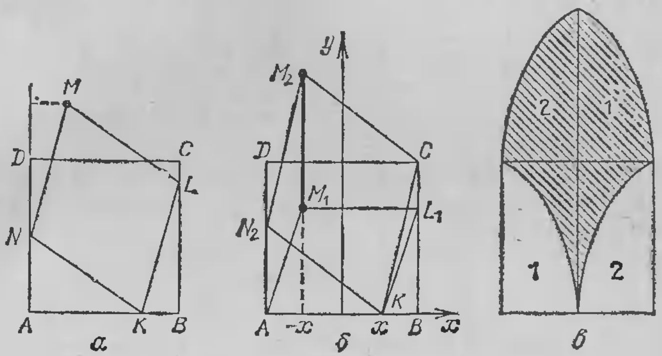


Рис. 52

93. Заметим сначала, что число k взаимно просто с 10. В самом деле, существует число, делящееся на k и начинающееся с 1. Обращенное число также делится на k и оканчивается на 1.

Возьмем теперь число, начинающееся с цифр 500 и делящееся на k: $500\,abc\ldots z$ (a, b, c, $\ldots$, z — цифры этого числа). Тогда на k делятся числа:

1) $z\ldots cba\,005$.
2) Сумма
$$\begin{array}{r} z\ldots cba\,00500\ldots 0 \\ 500\,abc\ldots z \\ \hline z\ldots cba\,01000\,ab\ldots z. \end{array}$$
3) Обращенное последнее число $z\ldots ba\,00010\,ab\ldots z$.
4) Разность
$$\begin{array}{r} z\ldots ba\,0100\,ab\ldots z \\ z\ldots ba\,0001\,ab\ldots z \\ \hline 99\,00\ldots 0. \end{array}$$

Отсюда видно, что 99 делится на k.

∇ Любопытно, что единственный участник, решивший эту задачу на олимпиаде (ленинградец А. Лифшиц), придумал еще более хитроумную неожиданную конструкцию, приводящую к тому же результату.

94. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_8 — длины сторон восьмиугольника (рис. 53). Из равенства всех его углов сразу вытекает, что его противоположные стороны параллельны. Продолжив две пары

противоположных сторон a_1 и a_5, a_3 и a_7, получим прямоугольник, из которого наш восьмиугольник можно изготовить «отрезанием уголков».

Из равенства противоположных сторон этого прямоугольника получим:

$$\frac{a_8}{\sqrt{2}}+a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}=\frac{a_6}{\sqrt{2}}+a_5+\frac{a_4}{\sqrt{2}}, \text{ или } a_5-a_1=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(a_8+a_2-a_6-a_4).$$

Так как a_i — целые числа, а $\sqrt{2}/2$ — иррационально, то $a_5=a_1$. Точно так же доказывается равенство длин остальных пар противоположных сторон.

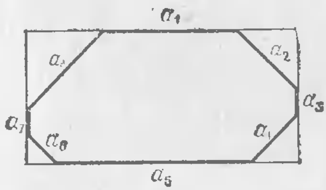


Рис. 53

95. Ответ: $17^{14}>31^{11}$. Доказательство получается из очевидных неравенств:

$$17^{14}>16^{14}=2^{56}>2^{56}=32^{11}>31^{11}.$$

96. Ответ: 800 или 799.

Одно из направлений линий сетки будем называть горизонтальным, а другое — вертикальным. Окружность диаметра 200, не проходящая через узлы и не касающаяся линий сетки, пересекает 200 горизонтальных прямых и 200 вертикальных, причем каждую из них 2 раза. Таким образом, наибольшее число точек пересечения равно 800. Эти 800 точек делят окружность на 800 частей. Каждая из этих частей лежит внутри одной клетки. Поэтому наибольшее возможное число клеток — 800.

Однако может случиться, что какие-то две части принадлежат одной клетке, т. е. что окружность дважды пересекает какую-то клетку (рис. 54). Докажем, что таких «особых» клеток не более одной.

Посмотрим, где может лежать центр O окружности диаметра 200, пересекающей некоторую сторону AB клетки дважды.

Расстояние от центра O такой окружности до точек A и B больше 100, а от прямой AB — меньше 100, поэтому O лежит вне окружностей радиуса 100 с центрами в точках A и B, между двумя вертикальными линиями сетки, проходящими через A и B и внутри полосы шириной 200 с горизонтальной осью AB. Все такие точки заполняют внутренность двух криволинейных треугольников (один из них заштрихован на рисунке).

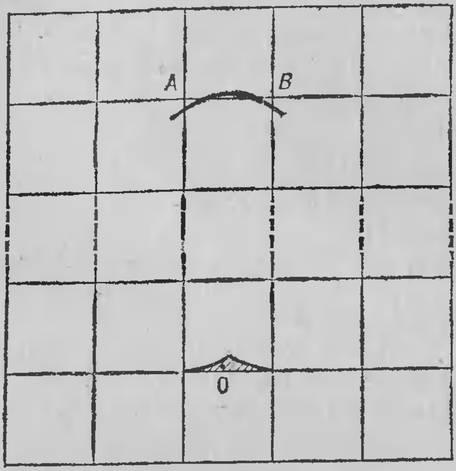


Рис. 54

Очевидно, что для разных отрезков AB такие множества не имеют общих точек, и поэтому существует не более одной особой клетки.

97. Сначала докажем, что можно выбрать группу студентов, в которой каждый язык знают ровно два человека.

Будем обозначать каждого студента набором из начальных букв названий известных ему языков. Так, студент *а* знает английский, но не знает остальных языков, студент *иф* знает испанский и французский, но не знает английского; студент *аиф* знает все три языка.

Пусть $N_а$, $N_и$, $N_ф$, $N_{аи}$, $N_{аф}$, $N_{иф}$, $N_{аиф}$ — количества студентов каждого типа.

Если $N_{аи} \neq 0$, $N_{аф} \neq 0$ и $N_{иф} \neq 0$, то выбираем группу $(аи, аф, иф)$.

Если одно из чисел, скажем $N_{аи}$, равно 0, $N_{аф}$ не равно 0, и $N_{иф}$ не равно 0, то тогда $N_а \neq 0$, $N_и \neq 0$ и требуемая группа — $(аф, иф, а, и)$.

Если $N_{аи} = N_{аф} = 0$, $N_{иф} \neq 0$ и $N_{аиф} \neq 0$, то выбираем группу $(аиф, иф, а)$; если $N_{аиф} = 0$, $N_{иф} \geqslant 2$, то группу $(иф, иф, а, а)$, если же $N_{иф} = 1$, то группу $(иф, а, а, и, ф)$.

Если $N_{аи} = N_{аф} = N_{иф} = 0$, то возможен выбор одной из трех групп: $(аиф, аиф)$, $(а, и, ф, а, и, ф)$ или $(аиф, а, и, ф)$.

Дальнейшее ясно: выбирая 5 раз по группе, в которой каждый язык знают ровно 2 человека, мы получим первую группу, в которой каждый язык знают 10 человек. Затем выбираем еще одну такую группу и т. д.

∇ В общем случае, если в некоторой группе студентов каждый из трех данных языков знают n человек, то для любого четного $p < n$ можно выбрать группу, в которой каждый язык знают p человек. (Условие четности p при этом существенно.)

98. Для решения достаточно воспользоваться тождествами

$$\frac{2k}{x^2-k^2}=\frac{1}{x-k}-\frac{1}{x+k}$$

и

$$\frac{11}{(x-11+k)(x+k)}=\frac{1}{x-11+k}-\frac{1}{x+k}.$$

99. Ответ: $n = 9$.

Пусть a_n — длина стороны, а D_n и d_n — длины наибольшей и наименьшей диагоналей правильного n-угольника. Для $n = 4$ и $n = 5$ все диагонали равны. Для $n = 6$ и $n = 7$ $D_n - a_n < a_n$.

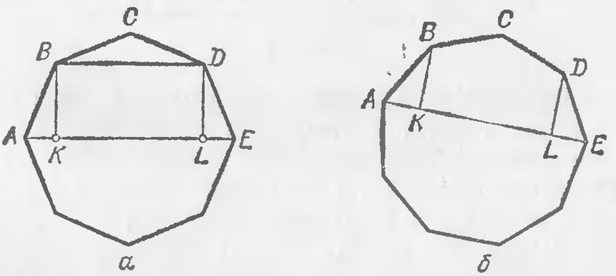


Рис. 55

При $n = 8$ (рис. 55, $а$) опустим перпендикуляры BK и DL из концов наименьшей диагонали BD на наибольшую диагональ AE.

Легко видеть, что $\angle ABK = 22{,}5^\circ < 30^\circ$. Поэтому $AB = a_8 > 2AK = D_8 - d_8$. Для $n = 9$ (рис. 55, $б$) аналогично получим $\angle ABK = 30^\circ$, поэтому $AB = a_9 = 2AK = D_9 - d_9$.

Будем далее считать n-угольник вписанным в круг радиуса 1. При $n > 9$, очевидно, $D_n \geqslant D_9$, $d_n < d_9$, $a_n < a_9$. Поэтому $D_n - d_n > D_9 - d_9 = a_9 > a_n$.

100. Докажем сразу двустороннюю оценку $14 < a_{100} < 18$. При $k > 1$ имеем $a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{k-1}^2}$, причем $a_k > 1$. Поэтому $a_{k-1}^2 + 2 < a_k^2 < a_{k-1}^2 + 3$.

Сложив эти неравенства для всех $1 \leqslant k \leqslant n$, получим (с учетом того, $a_1 = 1$)

$$2n - 1 < a_n^2 < 3n - 2,$$

откуда $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$. При $n = 100$ получим требуемые неравенства $14 < a_{100} < 18$.

∇ Интересно доказать, что последовательность $a_n/\sqrt{n}$ стремится к пределу, и найти его.

101. Перенесем параллельно $\triangle A'B'C'$ так, чтобы точка O' перешла в точку O. Вершины полученного треугольника будем обозначать, как и раньше, через A', B' и C'.

Так как $\angle A'OB = \angle A_1OB_1$ и по условию $OA' : OB' = OB_1 : OA_1$, то

$$\triangle A_1OB_1 \backsim \triangle B'OA', \quad \angle OA_1B_1 = \angle OB'A' \text{ и } \angle OB_1A_1 = \angle OA'B'.$$

Так как около четырехугольника OA_1CB_1 можно описать окружность с диаметром OC, то $\angle B_1CO = \angle OA_1B_1$ и $\angle A_1CO = \angle OB_1A_1$. Следовательно, $\triangle A_1OC \backsim \triangle C_1'OA'$ и $\triangle BOC \backsim \triangle C_1'OB_1$ откуда следует, что отрезок OC' лежит на прямой OC и $OC \cdot O'C_1' = OA \cdot O'A_1' = OB_1 \cdot O'B_1'$.

Аналогично рассматриваются треугольники $B'OC'$ и $C'OA'$.

102. Докажем утверждение задачи индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что оно справедливо при $k = n$.

Пусть $a < (n+1)!$. Разделим a на $n+1$ с остатком: $a = d(n+1) + r$, где $d \leqslant n!$, $r < n+1$.

По предположению индукции $d = d_1 + d_2 + \ldots + d_l$, где все d_i — различные делители числа $n!$ и $l \leqslant n$. Тогда $a = d_1(n+1) + \ldots + d_l(n+1) + r$ в этой сумме не больше чем $n+1$ слагаемое, каждое из них — делитель числа $(n+1)!$ и все они различны.

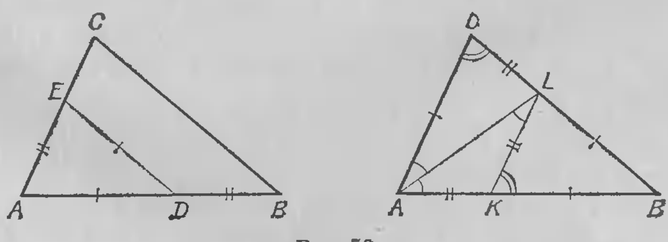


Рис. 56

103. Параллельным переносом, переводящим точку D в точку B, переведем треугольник ADE в треугольник KBL, где $KL \parallel AC$ и, кроме того, $KB = LB$ (рис. 56).

Если $\angle KAL = \alpha$, то $\angle KLA = \alpha$; $\angle BKL = 2\alpha$; $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$; далее, $\triangle ACL = \triangle BKL$ по двум сторонам и углу между ними; $\angle ALC = \angle KLB = 2\alpha$; $\alpha = \pi/5$ и $LC = AK = BD$, т. е. длина отрезка BD равна длине стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = AC$.

104. Из точки A опустим перпендикуляр AH на плоскость BCD, а из точки H — перпендикуляры HK, HL и HM на прямые BC, BD, CD. Каждая из пирамид $ABKL$, $ACKM$, $ADML$ покрывается соответствующим шаром.

105. а) Легко видеть, что каждая прямая, параллельная сторонам или диагоналям квадрата, пересекает четное число из восьми заштрихованных на рис. 57 клеток. Поэтому четность числа минусов, стоящих в этих клетках, при указанных операциях не меняется (П13).

б) на доске 8×8 можно нарисовать квадрат 4×4, в котором минус будет расположен так же, как в задаче а), после чего задача сводится к предыдущей.

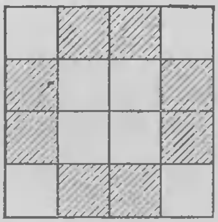


Рис. 57

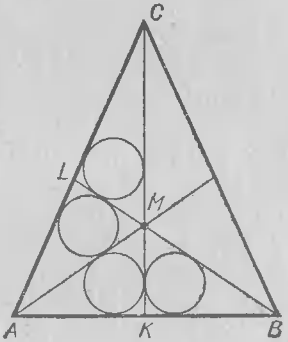


Рис. 58

106. Площади всех шести треугольников, на которые разбивается данный треугольник его медианами, равны.

В силу равенства радиусов вписанных окружностей и формулы $S = pr$ следует равенство периметров четырех из таких треугольников.

Так как два из них примыкают к одной стороне, скажем к AB (рис. 58), то $AM = MB$, поэтому MK — медиана и высота $\triangle AMB$ и $AC = BC$.

Если равны радиусы кругов, вписанных в треугольники ALM и AKM, то эти треугольники равны (как треугольники с равными площадями, основаниями и периметрами), причем $AL = AK$, т. е. $AC = AB$ и треугольник ABC правильный.

Если равны периметры треугольников CLM и KMB, то, пользуясь равенством длин отрезков касательной, проведенных из одной точки, получим: $CL+LM+CM=2\cdot CL+2x=$ $=2\cdot BK+2x$ (x — расстояние от точки M до точки касания с соответствующей окружностью). Отсюда следует, что $AC=$ $=AB$.

107. Доказательство утверждения этой задачи напоминает принадлежащее Евклиду доказательство бесконечности множества простых чисел (П2).

Предположим, что уравнение $x^2+x+1=py$ имеет целочисленные решения (x, y) лишь для конечного числа простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Пусть $P=p_1p_2\ldots p_m$. Тогда число P^2+P+1 не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и, следовательно, имеет простой делитель q, не совпадающий ни с одним из этих чисел. Тем самым, уравнение $x^2+x+1=qy$ имеет целочисленное решение $(P, (P^2+P+1)/q)$. Получено противоречие.

∇ Более общая задача разобрана в книге [60] (VIII, зад. 108).

108. Ответ: наибольшее возможное значение c_1 равно 24.

Если первое место одному фигуристу присуждено всеми судьями, то $c_1=9$. Если первые места присуждены двум фигуристам, то один из них получил не менее 5 первых мест, а остальные четыре полученных им места не выше четвертого, поэтому $c_1\leqslant 5\cdot 1+4\cdot 4=21$.

Если первые места получили 3 фигуриста, то, поскольку остальные из полученных ими мест не выше четвертого, сумма мест всех этих фигуристов не больше $1\cdot 9+3\cdot 9+4\cdot 9=72$. Следовательно, $c_1\leqslant 24$. Если спортсменов, получивших первое место, четверо, то их общая сумма мест не больше 90, следовательно, сумма баллов одного из них не больше 22. Случай, когда 5 и более спортсменов получают первое место, невозможен (на них не хватит очков от 1 до 4).

Итак, $c_1\leqslant 24$. Покажем, как построить пример с $c_1=24$.

Если судьи распределяли очки так: каждый из трех лучших фигуристов получит места 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4 4, каждый из трех следующих 2, 2, 2, 5, 5, 5, 6, 6, 6, а остальные — произвольно, то получится распределение, при котором $c_1=24$.

109. Для любого m $(1\leqslant m\leqslant n)$ среди m пар (a_k, b_k), $1\leqslant k\leqslant m$, одно из неравенств $a_k\geqslant b_k$ или $b_k\geqslant a_k$ выполнено не менее чем для $m/2$ пар.

Пусть, например, $b_k\geqslant a_k$ не менее чем в $m/2$ парах. Если b_i — наименьшее из этих b_k, то $b_i\leqslant 2/m$. Поэтому $a_i+b_i\leqslant$ $\leqslant 2b_i\leqslant 4/m$, а поскольку $i\leqslant m$, то $a_m+b_m\leqslant a_i+b_i\leqslant 4/m$.

110. Утверждение задачи можно доказать индукцией по числу учеников n. Но мы приведем другое решение, вытекающее из такого почти очевидного факта: сумма 2^k произведений $x_1x_2\ldots x_k$, где $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — всевозможные наборы из чисел $+1$ и -1, равно 0 (для его доказательства достаточно перемножить k равенств $1+(-1)=0$ и в левой части провести всеми способами почленное умножение). Будем считать, что ученики имеют номера от 1 до n; для каждого списка номеров $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ (здесь $k < n$) обозначим через $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ сумму масс гирь, на которых указан именно этот список, причем гири на одной чашке весов (перевешивающей вначале) берутся со знаком плюс, на другой — со знаком минус. Тогда нужное нам утверждение состоит в следующем: для многочлена вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{123}x_1x_2x_3 + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-2\, n-1\, n}x_{n-2}x_{n-1}x_n + \ldots + a_{1,2,\ldots n}x_1x_2\ldots x_n,$$

у которого сумма коэффициентов положительна, всегда найдется набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из чисел $+1$ и -1 такой, что значение $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ отрицательно ($f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражает разность масс на чашках весов, если $x_i = -1$ для тех учеников i, кто переставил свои гири, и $x_i = 1$ для остальных). Остается заметить, что сумма значений $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по всем наборам — даже сумма значений каждого из составляющих его одночленов — равна 0; поскольку $f(1, 1, \ldots, 1) > 0$, то должен найтись набор, для которого значение f отрицательно (П9).

111. Ответ: наименьшее число милиционеров равно $(m-1)(n-1)$.

Если милиционеры расставлены требуемым в условии образом, то вся сетка улиц распадается на какое-то число k кусков, не содержащих замкнутых маршрутов (циклов), — иначе найдется цикл, по которому можно проехать, не будучи замеченным ни одним из милиционеров. Если оставшийся кусок сетки содержит p перекрестков, то в нем содержится ровно $p-1$ отрезков улиц (см. задачу 8). Так как перекрестков всего $m \cdot n$, то число отрезков, на которых нет милиционеров, равно $mn-k$. Общее число отрезков улиц равно $2mn-m-n$. Таким образом, число занятых отрезков равно

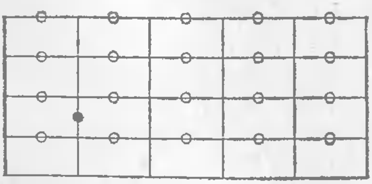


Рис. 59

$$mn - m - n + k \geqslant (m-1)(n-1).$$

Пример нужной расстановки $(m-1)(n-1)$ милиционеров показан на рис. 59.

112. Пусть L — диаметрально противоположная K точка вписанной окружности с центром O, D — середина отрезка AC, E — точка его пересечения с прямой BL. Достаточно доказать, что $ED = DK$ (тогда DO идет по средней линии $\triangle EBK$), т. е. что $AE = KC$.

Заметим, что при гомотетии с центром B, переводящей вписанную в $\triangle ABC$ окружность во вневписанную (касающуюся AC и продолжений сторон BA и BC), точка L переходит в точку E, которая тем самым является точкой касания вневписанной окружности с AC. Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны по длине, обе суммы $AK + AE$ и $CK + CE$ равны отрезкам прямых BA и BC между точками касания, поэтому

$$AK + AE = CK + CE \text{ и } AE = KC.$$

113. Возведем все равенства $a_1 = 0$; $|a_2| = |a_1 + 1|, \ldots$ $\ldots, |a_{n+1}| = |a_n + 1|$ в квадрат и сложим. После сокращений получим $a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n \geqslant 0$, откуда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant -n/2$.

Другое решение (по индукции) можно получить, заметив, что удаление пары последовательных членов $a_n \geqslant 0$, $a_{n+1} = -a_n - 1$ со средним $-1/2$ приводит к допустимой последовательности.

∇ Оценка $(-n/2)$ для суммы чисел в этой задаче является точной; в качестве примера годится любой набор, заканчивающийся числом -1 или (при нечетном n) 0.

114. Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ABD = \beta_1$; $\angle DBC = \beta_2$. Применяя теорему синусов к треугольникам AOB и BOC, получим

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{BC}{OC} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}.$$

Так как AB и BC рациональны, то достаточно доказать рациональность отношения синусов.

Из теоремы косинусов и рациональности длин сторон и диагоналей следует, что числа $\cos \beta$, $\cos \beta_1$ и $\cos \beta_2$ рациональны. $\left(\text{Например, } \cos \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}.\right)$ Рациональны также числа $\sin \beta_1 \sin \beta_2$ (так как $\cos \beta = \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2$), $\sin \beta_2^2 = 1 - \cos^2 \beta_2$, и их отношение $\sin \beta_1 / \sin \beta_2$.

115. На прямой BC выберем точку C_1 такую, что ABC_1E — параллелограмм. Тогда периметры треугольника ABE, BEC_1 и BEC равны. Отсюда следует, что точки C и C_1 совпадают. Поэтому $BC = AE$. Аналогично доказывается, что $BC = ED$.

116. Пусть v — максимальная скорость волка. Проведем через точку, в которой находится волк, две прямые, параллельные

диагоналям квадрата. Эти прямые в точках C_1, C_2, C_3, C_4 пересекают контур квадрата.

Так как скорость перемещения каждой из точек C_1, C_2, C_3 и C_4 не больше чем $v\sqrt{2} < \frac{3}{2}v$, то собаки смогут в каждый момент находиться в этих четырех точках и, следовательно, не выпустят волка.

117. Пусть $abcd$ — четверка последних цифр. В последовательности обязательно встретятся пятерка $abcd0$ (иначе можно было бы добавить 0 с сохранением свойства а), что противоречит б)) и $abcd1$. Следовательно, четверка $abcd$ встретится в последовательности трижды, а так как ни 0, ни 1 не могут стоять перед $abcd$ более одного раза, то перед одной из этих четверок не стоит никакой цифры.

∇ Для любого n (в частности, и для $n = 5$) можно расположить 2^n цифр 0 и 1 по кругу так, что любое «слово» длины n из 0 и 1 будет встречаться (при обходе против часовой стрелки) ровно один раз. Аналогичный факт верен и в алфавите из любого количества $k \geqslant 2$ букв (тогда слов длины n будет k^n).

118. Перемножив первое и второе неравенства, получим $(a+b)^2 < ab + cd$, но $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ и, следовательно, $ab + cd \geqslant 4ab$, т. е. $cd \geqslant 3ab$.

Перемножив второе и третье неравенства, получаем $ab(ab+cd) > (a+b)^2cd \geqslant 4abcd$, откуда $ab + cd > 4cd$, т. е. $ab > 3cd$.

Итак, одновременно $ab > 3cd$ и $cd > 3ab$, что невозможно.

119. Ответ: $a = 5$.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $0 < x_1 < 1$ и $0 < x_2 < 1$, числа a, b, c целые, $a > 0$.

Тогда $f(0)$ и $f(1)$ — целые положительные числа, поэтому $f(0) \cdot f(1) \geqslant 1$, т. е. $a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \geqslant 1$.

Заметим теперь, что всегда $x(1-x) \leqslant 1/4$, причем равенство возможно только при $x = 1/2$. Поскольку числа x_1 и x_2 различны, а $x_1(1-x_1)$ и $x_2(1-x_2)$ положительные, то $x_1(1-x_1) \times x_2(1-x_2) < 1/16$.

Следовательно, $a^2 > 16$, т. е. $a > 4$.

При $a = 5$ получаем квадратное уравнение $5x^2 - 5x + 1 = 0$, которое имеет два различных корня, принадлежащих отрезку $[0; 1]$.

120. Утверждение задачи можно доказать по индукции.

При $n = 1$ оно справедливо: $\frac{1}{1 \cdot 1} = 1$. При переходе от $n-1$ к n мы должны выбросить все дроби $\frac{1}{pq}$ со взаимно простыми p и q, для которых $p < q$, $p + q = n$, p и q взаимно просты, и добавить все дроби вида $\frac{1}{pn}$, где $p < n$, p и n взаимно просты.

Пусть $\frac{1}{pq}$ — одна из выброшенных дробей.

Так как

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{p(n-p)} = \frac{1}{pn} + \frac{1}{(n-p)n},$$

то ее удаление из суммы компенсируется появлением двух новых дробей $\frac{1}{pn}$ и $\frac{1}{(n-p)n}$, которые удовлетворяют условиям задачи.

Таким образом, при переходе от $n-1$ к n сумма не меняется.

121. Выберем из нашей системы точек две, расстояние между которыми наибольшее: пусть, например, это точки A и B.

Докажем, что каждый из углов XAY (и XBY), где X и Y — какие-то из данных точек, меньше 120°. В самом деле, так как в треугольниках AXB и AYB сторона AB наибольшая, то $\angle AXB > 120°$ и $\angle AYB > 120°$. Поэтому $\angle XAB < 60°$ и $\angle YAB < 60°$, а так как плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух остальных плоских углов, то $\angle XAY < \angle XAB + \angle YAB < 120°$.

Таким образом, нумерация должна начинаться с точки A и заканчиваться на точке B. Заметим, что все расстояния от точек нашей системы до точки A различны. В самом деле, если $AX = AY$, то треугольник AXY равнобедренный и $\angle XAY > 120°$, что, как мы видели, невозможно. Занумеруем данные точки, положив $A_1 = A$, A_2 — ближайшая к A точка системы, A_3 — ближайшая к A из остальных точек, ..., A_k — ближайшая из точек, не получивших еще номера, ..., $A_n = B$. Докажем, что такая нумерация удовлетворяет условию задачи.

Поскольку $\angle A_1A_iA_k > 120°$ при $1 < i < k \leqslant n$, то достаточно доказать, что $\angle A_iA_jA_k > 120°$ при $1 < i < j < k < n$.

Так как в системе $A_1, A_2, \ldots, A_k$ точки A_1 и A_k наиболее далекие, то $\angle A_iA_kA_j < 120°$, как мы убедились в начале решения.

Докажем, что $\angle A_kA_iA_j < 120°$. В самом деле, так как $\angle A_1A_iA_j > 120°$ и $\angle A_1A_iA_k > 120°$, то из неравенства $\angle A_kA_iA_j \leqslant \leqslant 120°$ вытекало бы, что сумма плоских углов трехгранного угла с вершиной A_i больше 360°.

Итак, $\angle A_iA_jA_k > 120°$ при любых $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$. Утверждение доказано.

∇ По существу в этой задаче установлено, что отношение «$\angle A_iA_jA_k > 120°$» обладает теми же свойствами, что и отношение «A_j лежит между A_i и A_k» для точек на прямой, т. е. что это отношение позволяет навести «порядок» в данном множестве. Величину 120° здесь нельзя заменить меньшей.

122. Ответ: 108, 135, 180, 117.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — искомые числа, S — их сумма, a — первая цифра каждого из них. Ясно, что $100a \leqslant x_i < 100(a+1)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Пользуясь этими неравенствами, получим $x_i + 300a \leqslant S < x_i + 300(a+1)$, откуда

$$1+\frac{300a}{x_i} \leqslant \frac{S}{x_i} < 1+\frac{300(a+1)}{x_i},$$

следовательно,

$$1+\frac{3a}{a+1} < \frac{S}{x_i} < 4+\frac{3}{a}.$$

При $a = 1$ получим неравенства $2{,}5 < S/x_i < 7$, а при $a \geqslant 2$: $3 < S/x_i < 5{,}5$. Остается сделать перебор.

Поскольку три из четырех частных S/x_i — целые и различные числа, то случай $a \geqslant 2$ невозможен (между 3 и 5,5 — лишь два целых числа). Поэтому $a = 1$ и целые частные следует искать среди чисел 3, 4, 5 и 6. Но 3 и 6 не могут одновременно быть частными, так как отношение любых двух трехзначных чисел от 100 до 199 меньше двух. Остались две возможности: 1) три частных 3, 4, 5 и 2) три частных 6, 5, 4. В обоих случаях S делится на 60: $S = 60k$. В первом случае искомые числа: $12k$, $15k$, $20k$ и $13k$.

Первая цифра одинакова у всех чисел только при $k = 9$, что и дает ответ. Во втором случае набор чисел $10k$, $12k$, $15k$ и $23k$ не удовлетворяет условию задачи ни при каком k, так как отношение чисел $23k$ и $10k$ больше двух.

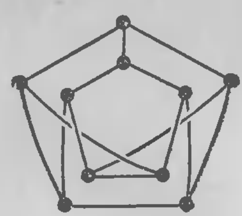


Рис. 60

123. Ответ: 10 городов.

Из любого города A можно добраться не более чем до трех городов, а из каждого из них не более, чем до двух (не считая A). Таким образом, всего городов не более $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$.

Пример на рис. 60 показывает, что нужная система авиалиний в государстве с десятью городами существует.

∇ Граф на рис. 60 часто используется в качестве примера и даже имеет специальное название «граф Петерсена».

124. а) Если K — середина наибольшей диагонали AD выпуклого пятиугольника $ABCDE$, длины всех сторон которого равны a, то $\angle AKE = \angle EKD = 90°$. Поскольку $AC \leqslant AD$, то $\angle BAC > \angle DAE$; тем более $\angle BAK > \angle KAE$. Из этого следует, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой EK. Так же доказывается, что точки C и D тоже лежат по одну сторону от прямой EK. Отсюда сразу получается, что $\angle BKA < 90°$ и $\angle CKD < 90°$.

Предположим, что $\angle BKC \geqslant 90°$, тогда $BK < a$ и $CK < a$, а так как $AK < a$ и $KD < a$, то $\angle AKB > 60°$ и $\angle CKD > 60°$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол); но это невозможно, ибо $\angle AKB + \angle BKC + \angle CKD = 180°$. Следовательно, $\angle BKC < 90°$.

Мы доказали, что точка K удовлетворяет условию задачи.

б) Если на продолжении отрезка EK взять точку M, очень близкую к точке K, то все углы AMB, BMC, CMD, DME и EMA будут острыми. Поэтому точка M не может принадлежать ни одному из полукругов, построенных на сторонах пятиугольника как на диаметрах.

125. Если первый игрок поставит -1 перед x в первой степени, а при втором своем ходе он поставит на последнее оставшееся место число, противоположное тому, которое поставил второй, то получится многочлен вида $x^3 - ax^2 - x + a = (x^2 - 1)(x - a)$. Корни этого многочлена -1, 1, a — целые числа.

126. Ответ: 90 игр.

Пусть среди любых трех команд найдутся две, уже сыгравшие между собой. Выберем команду A, которая провела наименьшее количество игр — k. Каждая из k команд, уже сыгравших с A, как и сама команда A, провела не менее k игр. Из $(19 - k)$ команд, не сыгравших с A, каждая сыграла со всеми остальными $(18 - k)$ из них — иначе нашлась бы тройка команд, среди которых никакие не играли между собой. Таким образом, удвоенное число всех игр — его можно получить, сложив количества игр, сыгранных всеми командами, — не меньше

$$k^2 + k + (19 - k)(18 - k) = 2k^2 - 36k + 18 \cdot 19 = 2(k - 9)^2 + 180 \geqslant 180.$$

Пример ситуации, когда сыграно 90 игр и удовлетворяются условия задачи, дают две группы по 10 команд, в каждой из которых все команды друг с другом сыграли, но ни одна не играла с командой другой группы.

∇ Если изобразить команды точками, а не сыгравшие друг с другом команды соединить отрезком, то получится граф, который при соблюдении условия задачи будет графом без треугольников. Можно доказать, что в таком графе с n вершинами максимум $[n^2/4]$ ребер.

Рассуждение, проведенное в решении, похоже на доказательство «леммы о кресте» в решении 156 и оценки в 246в).

127. Неравенство задачи равносильно соотношениям

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1,$$

или

$$n\left(\cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{\pi}{n}\right) > 1 - \cos\frac{\pi}{n+1},$$

т. е.

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Последнее неравенство справедливо, так как

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)} > \sin\frac{2\pi n}{2n(n+1)} = \sin\frac{\pi}{n+1} > \sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

и

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)} \geqslant \sin\frac{n\pi}{2n(n+1)} = \sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

(здесь мы воспользовались неравенством $n|\sin\alpha| \geqslant |\sin n\alpha|$, которое легко доказывается по индукции).

128. Пусть $a_{i_1} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$. Выберем a_{i_2} — наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем a_{i_1}, a_{i_3} — наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем a_{i_2} и вообще a_{i_k} — наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем $a_{i_{k-1}}$.

Ясно, что в конце концов мы придем к $a_{i_1} : a_{i_{r+1}} = a_{i_1}$.

Если номера 1, 2, ..., n расположить по кругу, то i_{k+1} и i_k (а также i_r и i_1) будут стоять рядом или через одно; значит, $r \geqslant n/2$.

Данная сумма больше чем

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \ldots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} + \ldots + \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right) = \frac{1}{2}S.$$

Поскольку среднее арифметическое не меньше среднего геометрического (П8), то

$$\frac{S}{r} \geqslant \sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\cdot\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}\ldots\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}} = 1,$$

т. е. S не меньше r. Поэтому данная сумма больше $n/4$.

∇ Может показаться, что всегда верно более сильное неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2} \qquad (*)$$

(такую гипотезу выдвинул в 1954 г. американский математик Шапиро). В самом деле, это было постепенно доказано для нечетных $n \leqslant 11$ и четных $n \leqslant 12$, но уже для четных $n \geqslant 14$ и нечетных $n \geqslant 27$ неверно (сначала контрпримеры были придуманы для больших n). Точная оценка $\gamma_n \cdot \frac{n}{2}$, которую нужно поставить в (*) вместо $\frac{n}{2}$, для каждого n неизвестна, но В. Г. Дринфельду — одному из победителей олимпиады, продолжавшему заниматься этой задачей, — удалось получить в том же 1969 г. замечательный результат *): он нашел наилучшую оценку $\gamma \cdot \frac{n}{2}$, пригодную сразу для всех n. Это число $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$ — ордината точки, в которой общая касательная к графикам функций $y=e^{-x}$ и $y=\dfrac{2}{e^{x/2}+e^{x}}$ пересекает ось Oy; $\gamma \approx 0{,}989$.

129. Предположим, что задача решена. Так как прямая CY перпендикулярна прямой AX, то $CY \| BX$. Пусть K — точка пересечения отрезков AB и XY. Ясно, что $\triangle KBX = \triangle CKY$. Поэтому $CK = KB$.

Для построения достаточно провести через середину отрезка CB перпендикуляр к прямой AB, пересекающей окружность в точках X и Y.

130. Пусть x, y, $\frac{1}{xy}$ — эти числа. Если $x+y+\frac{1}{xy}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy$, то после преобразований получим $(x-1)(y-1)\times\left(\frac{1}{xy}-1\right)>0$, откуда видно, что положительным должен быть ровно один из сомножителей.

131. Ответ: не более двух. Пример многоугольника, у которого две стороны равны наибольшей диагонали, см. на рис. 61.

Предположим, что таких сторон больше двух. Выберем две из них AB и CD, не имеющие общих вершин (это возможно,

---

*) Дринфельд В. Г. Об одном циклическом неравенстве//Мат. заметки. — 1971. — Т. 9, № 2.

поскольку многоугольник, имеющий диагонали, не является треугольником). Тогда хотя бы одна из диагоналей AC или BD длиннее стороны AB: если эти диагонали пересекаются в некоторой точке K, то

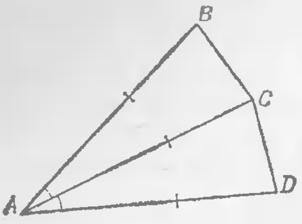


Рис. 61

$$AC + BD = AK + KC + BK + KD > AB + CD = 2AB.$$

132. Предположим противное. Запишем два числа одно под другим и будем складывать их столбиком. Так как последняя цифра суммы нечетная, то при сложении первых цифр также получится нечетная сумма. Поэтому в этот разряд из предыдущего при сложении не переходит единица. Это означает, что сумма цифр во втором, а следовательно, и в предпоследнем столбце меньше 10. Заметим, что из второго столбика в третий разряд также не переходит единица, — это могло быть, лишь если сумма цифр второго разряда была бы равна 9, а сумма цифр первого разряда — больше 10, но тогда во втором разряде суммы стоял бы 0.

Отбросив теперь у данного числа две последние и две первые цифры и проведя те же рассуждения для получившихся 13-значных, затем 9-значных и, наконец, 5-значных чисел, получим, что в средний разряд суммы из предыдущего не может перейти единица, а так как цифры, стоящие в средних разрядах, одинаковые, то средняя цифра суммы окажется четной.

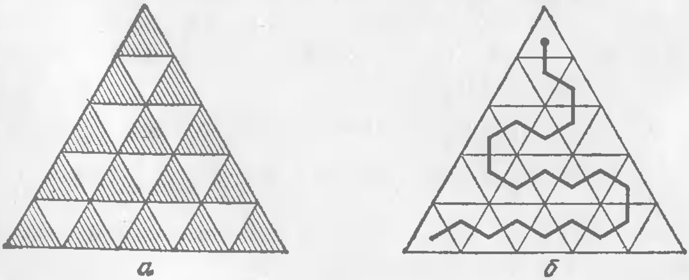


Рис. 62

Как видно из решения, утверждение задачи верно для $4k + 1$-значных чисел. Простые примеры $(12 + 21,\ 506 + 605,\ \ldots)$ показывают, что для чисел с другим числом знаков оно не верно.

133. Раскрасим треугольники в два цвета, как показано на рис. 62, *а*.

Черных треугольников получилось на k больше, чем белых. Поэтому всего белых треугольников $\frac{1}{2}(k^2-k)$, а черных $\frac{1}{2}(k^2+k)$. В цепочке цвета треугольников чередуются. Поэтому черных треугольников в цепочке не больше чем $\frac{1}{2}(k^2-k)+1$. Всего же треугольников в ней не больше чем

$$\frac{1}{2}(k^2-k)+\frac{1}{2}(k^2-k)+1=k^2-k+1.$$

Пример цепочки, в которой число треугольников в точности равно k^2-k+1, показан на рис. 62, *а*.

134. Пусть $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ — длины данных отрезков. Предположим, что ни из каких трех из этих отрезков нельзя составить остроугольный треугольник. Тогда, так как в неостроугольном треугольнике квадрат длины наибольшей стороны больше или равен сумме квадратов длин других сторон, справедливые неравенства $c^2 \geqslant a^2+b^2$, $d^2 \geqslant c^2+b^2$, $e^2 \geqslant d^2+c^2$.

Сложив их, получим $e^2 \geqslant a^2+2b^2+c^2 \geqslant a^2+2ab+b^2$, откуда $e \geqslant a+b$, т. е. из отрезков длины e, a и b нельзя составить треугольник.

135. Первое решение. Предположим, что $\angle BAC < 45°$. Тогда $\angle ACH > 45°$, $\angle BCH < 45°$, $\angle CBA > 45°$, $BC < AC$ и, следовательно, медиана CP лежит внутри треугольника ACH и пересекается с медианой BM в точке K, принадлежащей отрезку OM (O — точка пересечения BM, AD и CH). Отсюда, используя равенство $PK = KC/2$, получаем $OH : OC < 1/2$; но по свойству биссектрисы угла треугольника $OH : OC = AH : AC$, т. е. $AH < AC/2$, поэтому $\angle ACH < 30°$. Противоречие.

Второе решение. Докажем, что если $\angle BAC < 45°$, то $\angle ACB > 90°$. На прямой AB возьмем точку B_1 такую, что $HB_1 = AH$. Биссектриса B_1F угла AB_1C пройдет через точку O. (В этой точке уже пересекаются две биссектрисы углов треугольника AB_1C.) По свойству биссектрисы $AF : FC = AB_1 : B_1C$, но $AB_1 : B_1C > 1$, так как $\angle B_1AC < 45°$. Поэтому точка B_1 лежит между точками A и B, и следовательно, $\angle BCA > \angle B_1CA > 90°$.

136. Рассмотрим всевозможные пары цифр, стоящих в разных числах в одном разряде. Поскольку пар чисел 10, то всего таких пар цифр будет $10n$. При этом пар разных цифр, т. е. пар $(1, 2)$ в каждом разряде не меньше 4 и не больше 6, так что среди $10n$ выбранных пар общее количество пар $(1, 2)$ заключено между $4n$ и $6n$.

С другой стороны, так как каждые два числа совпадают в m разрядах, то каждая пара чисел дает $n-m$ пар $(1, 2)$.

Поэтому общее число таких пар $10(n-m)$. Итак, $4n \leqslant \leqslant 10(n-m) \leqslant 6n$, откуда $2/5 \leqslant m/n \leqslant 3/5$.

137. Мы докажем, что из любых 199 (целых) чисел можно выбрать 100, сумма которых делится на 100. При этом понадобятся лишь такие факты: из любых 3 чисел можно выбрать 2 одинаковой четности (это очевидно); из любых 9 чисел можно выбрать 5, сумма которых делится на 5.

Обозначим через P_m следующее общее утверждение: из любых $2m-1$ целых чисел можно выбрать m чисел, сумма которых делится на m (другими словами, можно выбрать m чисел, среднее арифметическое которых — целое число). Наше доказательство основано на такой лемме.

Лемма 1. Если верны утверждения P_k и P_m, то верно и P_{km}.

Докажем это. Пусть дано $2km-1$ чисел. Выберем из них, согласно P_m, группу из m чисел с целым средним арифметическим, из оставшихся $2km-m-1$ — еще одну такую группу, из оставшихся $2km-2m-1$ — еще одну и т. д. $2k-1$ раз, после чего останется $2km-(2k-1)m-1=m-1$ число, так что $2k-1$ раз мы действительно могли использовать P_m. Рассмотрим (целые) средние арифметические чисел в $2k-1$ выбранных группах. Из них согласно P_k можно выбрать k чисел, сумма которых делится на k. Тогда сумма km исходных чисел, входящих в соответствующие k групп, очевидно, делится на km. Лемма 1 доказана.

Поскольку $100=2\cdot2\cdot5\cdot5$, то из P_2 и P_5 трехкратным применением леммы 1 мы можем вывести P_{100}. Осталось лишь проверить P_5.

Сделать это можно сравнительно простым перебором всех возможных наборов $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_9 \leqslant 4$ из 9 остатков при делении ва 5, которые могут давать данные 9 чисел. Случаи, когда среди r_i $(1 \leqslant i \leqslant 9)$ есть 5 одинаковых или когда среди них нет трех одинаковых (и, следовательно, встречаются все остатки 1, 2, 3, 4 и 0), очевидны. Остается рассмотреть случай, когда некоторый остаток r встречается среди r_i либо 3, либо 4 раза. При этом можно считать, что $r=0$; в противном случае можно добавить ко всем 9 числам $5-r$ (условие «сумма 5 чисел делится на 5» при таком добавлении сохраняется). Дальше можно избавиться от перебора, вспомнив такую полезную лемму.

Лемма 2. Из любых q целых чисел можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на q.

(Чтобы доказать лемму для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_q$, достаточно рассмотреть q чисел a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1+ + a_2+\ldots+a_q$: либо они дают все различные остатки при делении на q, либо среди них есть два, дающих одинаковые остатки, тогда их разность делится на q.)

По лемме 2 из 5 ненулевых остатков r_i можно выбрать несколько (от 2 до 5), сумма которых делится на 5, и добавить к ним недостающее до 5 количество нулевых.

∇ Можно доказать, что утверждение P_n верно для любого натурального n (по лемме 1 достаточно доказать это для простого n; элементарное, хотя и не простое доказательство см. в журнале «Квант» (1971, № 7—8, решение задачи М45)). Интересно выяснить следующий вопрос: для какого наименьшего натурального числа $F_d(n)$ из любых $F_d(n)$ векторов с целочисленными координатами можно выбрать несколько векторов, у суммы которых все координаты делятся на n? (Здесь n — натуральное, d — «размерность»: $d = 2$ для векторов на плоскости, $d = 3$ — в пространстве.)

138. Первое решение. Пусть P — точка касания вписанной окружности со стороной BC, PQ диаметр вписанной окружности. В решении задачи 112 было доказано, что $AQ \| MO$, поэтому $AEOQ$ — параллелограмм, так что $OQ = AE = r$.

Второе решение. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, противолежащих вершинам A, B, C соответственно. Можно считать, что $b > c$. Опустим из точки O перпендикуляр OP на BC. Тогда

$$MC = \frac{a}{2}; \quad PC = \frac{a+b-c}{2}; \quad HC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a};$$

$$\frac{EH}{OP} = \frac{HM}{PM} = \frac{HC-MC}{PC-MC} = \frac{2HC-a}{b-c} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)} = \frac{b+c}{a};$$

$$\frac{AE}{r} = \frac{AH}{r} - \frac{EH}{r} = \frac{a+b+c}{a} - \frac{b+c}{a} = 1,$$

откуда $AE = r$.

139. Если запись числа k имеет вид $k = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ и t — число из $m > n$ девяток: $t = \underbrace{99\ldots9}_{m} = 10^m - 1$, то

$$kt = a_n a_{n-1} \ldots (a_0 - 1)\underbrace{99\ldots9\,(9-a_n)\,(9-a_{n-1})\ldots(9-a_1)\,(10-a_0)}_{m \text{ цифр}}.$$

Сумма цифр kt та же, что и у t: она равна $9m$.

140. Пусть a и b — длины сторон каждого прямоугольника. Если контуры прямоугольников пересекаются в восьми точках, то на каждой стороне любого из них лежит ровно две точки пересечения с соседними сторонами другого. Если на какой-то стороне окажется меньше двух точек пересечения, то всего будет меньше восьми таких точек. Поэтому никакая сторона одного прямоугольника не может пересечь двух параллельных сторон другого.

Пусть теперь A и C — точки, в которых пересекаются стороны длины a; B и D — точки, в которых пересекаются стороны длины b (рис. 63). Отрезки AC и BD, как легко видеть, служат биссектрисами углов, образованных сторонами, проходящими через точки A, C и соответственно B, D; следовательно, $AC \perp BD$. Площадь S четырехугольника $ABCD$ равна $AC \cdot BD$, а поскольку $AC \geqslant b$, $BD \geqslant a$, то $S \geqslant ab/2$.

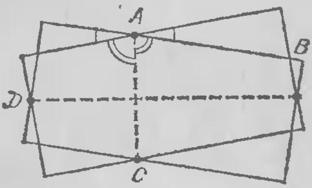


Рис. 63

141. Мы докажем, что любое такое число делится на 11111 и, следовательно, степенью двойки не является. Для этого заметим, что 10^5 при делении на 11111 дает в остатке 1: $10^5 = 9 \cdot 11111 + 1$. Поэтому любое из полученных чисел дает при делении на 11111 тот же остаток, что и сумма всех чисел на карточках.

Нетрудно показать также, что любое такое число делится на 9. Но эта сумма, как легко видеть, равна $\dfrac{11111 + 99999}{2} \times$ $\times (10^5 - 1)$, т. е. делится на 11111.

142. Пусть D_1 — множество из 10 цифр $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; $A_1 = \{0, 2, \ldots, 8\}$ — множество четных, $B_1 = \{1, 3, \ldots, 9\}$ — множество нечетных цифр. Вообще при любом n обозначим через D_n множество всех не более чем n-значных чисел, A_n и B_n — его подмножества из чисел с четной и нечетной суммой цифр ($D_n = A_n \cup B_n$). Заметим, что B_n и A_n всего содержат, считая число из одних нулей, по $5 \cdot 10^{n-1}$ элементов. Сумму всех элементов x множества X будем коротко записывать: $\sum x$ по $x \in X$. Мы должны доказать, что $\sum a^k$ по $a \in A_n$ равна $\sum b^k$ по $b \in B_n$; эту сумму мы обозначим $S_n^{(k)}$.

При $n = 2$, $k = 1$ утверждение задачи сводится к очевидному равенству (где $a \in A_1$, $p \in A_1$, $b \in B_1$, $q \in B_1$):

$$\sum (10a + p) + \sum (10b + q) = \sum (10a + q) + \sum (10b + p);$$

обе части равны $5\left(\sum 10d + \sum r\right)$ по всем $d_1 \in D_1$, $r \in D_1$, $S_2^{(1)} = 5(10 + 1)(1 + 2 + \ldots + 9)$, так как каждая цифра a, p, b, q входит в ту и другую сумму по 5 раз (a слева — в паре с пятью p и т. п.).

Дальнейшие выкладки проиллюстрируем сначала на примере $n = 3$. Найдем сумму по всем $a \in A_1$, $p \in A_2$, $b \in B_1$, $q \in B_2$ (ниже $d \in D_1$, $r \in D_2$):

$$\sum(10a+p)^2 + \sum(10b+q)^2 = 50 \cdot 10^2 \left(\sum a^2 + \sum b^2\right) + \\ + 2 \cdot 10 \left(\sum a \cdot p + \sum b \cdot q\right) + 5\sum p^2 + 5\sum q^2 = \\ = 10^2 \sum d^2 + 2 \cdot 10 \left(\sum a \cdot \sum p + \sum b \cdot \sum q\right) + 5\sum r^2 = \\ = 5 \cdot 10^3 \sum d^2 + 20 \sum dS_2^{(1)} + 5\sum r^2.$$

Ясно, что точно так же преобразуется и сумма $\sum(10a+q)^2 + \sum(10b+p)^2$. Здесь мы использовали тождества $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ и $\sum uv = \sum u \cdot \sum v$ (сумма по всем $u \in U$, $v \in V$).

Теперь докажем общее утверждение индукцией по n. При этом мы будем использовать формулы

$$(x+y)^k = x^k + C_k^1 x^{k-1} y + C_k^2 x^{k-2} y + \ldots + C_k^{k-1} x y^{a-1} + y^k = \\ = x^k + \sum C_k^j x^{k-j} y^j + y^k$$

(значения «биномиальных коэффициентов» C_k^j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, не играют роли в нашем рассуждении) и $\sum uv = \sum u \sum v$. Предположим, что для n-значных чисел и любого $1 \leqslant k < n$ нужное равенство доказано: $\sum p^j = \sum q^j = S_n^{(j)}$ (где $p \in A_n$, $q \in B_n$). Преобразуем сумму k-х степеней чисел из A_{n+1}, $k < n + 1$ (ниже мы суммируем по $a \in A_1$, $p \in A_n$, $b \in B_1$, $q \in B_n$, $d \in D_1$, $r \in D_n$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$):

$$\sum(10a+p)^k + \sum(10b+q)^k = 5 \cdot 10^{n-1} \cdot 10^k \left(\sum a^k + \sum b^k\right) + \\ + \sum C_k^j \cdot 10^{k-j} \left(\sum a^{k-j} p^j + \sum b^{k-j} q^j\right) + 5\left(\sum p^k + \sum q^k\right) = \\ = 5 \cdot 10^{n+k-1} \sum d^k + \sum_j C_k^j \cdot 10^{k-j} S_k^{(j)} \sum d^{k-j} + 5\sum r^k.$$

Ясно, что сумма k-х степеней чисел из B_{n+1} равна тому же выражению (нужно лишь поменять местами буквы p и q).

∇ Аналогичные тождества верны и в любой d-ичной системе счисления при четном d, например в двоичной, где для небольших n его легко проверить непосредственно.

143. Назовем систему единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ (с общим началом O) симметричной, если при повороте на угол $2\pi k/m$ (при некотором $k < m$) она переходит в себя. Сумма векторов такой системы очевидно равна 0, так как она не меняется при повороте на угол $2\pi k/m < 2\pi$.

В частности, симметричную систему образуют векторы, идущие в последовательные вершины правильного m-угольника: для них $k = 1$.

Подвергнем все единичные векторы с началом O преобразованию $e \to D^l e$ (l-кратному закручиванию): увеличим угол от начального направления Ox до e в l раз; полученный вектор и примем за $D^l e$. При таком преобразовании D^l симметричная система векторов перейдет в симметричную, если только kl не делится на m (угол $2\pi k/m$ между соседними векторами e_i, e_{i+1} увеличится в l раз; вычитая из $2\pi kl/m$ кратный 2π угол, получим, что угол между $D^l e_i$ и $D^l e_{i+1}$ равен $2\pi r/m$, где r — остаток от деления kl на m). Если же kl делится на m (в частности, при $k = m$), то все векторы $D^l e_i$ сольются в один.

После этих замечаний перейдем к решению задачи. Предположим, что вершины n-угольника удалось раскрасить несколькими красками, так что вершины одного цвета образуют правильные многоугольники: l-угольник, q_1-угольник, q_2-угольник, ..., ..., q_s-угольник, где $l < q_1 < q_2 < \ldots < q_s$. Симметричную систему векторов, проведенных в вершины n-угольника, мы можем тем самым разбить на $s + 1$ симметричных систем из l, q_1, q_2, ..., q_s векторов. Пока никакого противоречия нет: сумма каждой из них равна 0, и общая сумма — тоже. Но стоит подвергнуть все наши векторы l-кратному закручиванию, как противоречие возникнет: все l векторов первой системы сольются в один, так что их сумма станет отличной от 0, а остальные системы — из q_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) векторов и из всех n векторов — останутся правильными, поскольку углы между соседними векторами в них $2\pi l/q_1 < 2\pi$, $2\pi l/q_2 < 2\pi$, ..., $2\pi l/n < 2\pi$, так что сумма в них останется равной 0.

∇ Это замечательное решение придумал А. Лифшиц; на этой олимпиаде он, правда, был уже членом жюри, а никому из школьников решить задачу не удалось.

Идея «l-кратного закручивания» векторов становится более прозрачной, если рассматривать векторы как комплексные числа; преобразование D^l — это просто возвышение в степень $z \to z^l$ комплексных чисел z с $|z| = 1$; симметричная система векторов — это геометрическая прогрессия u, $u\varepsilon$, $u\varepsilon^2$, ..., $u\varepsilon^m$, где $|u| = 1$ и ε — некоторый корень m-й степени из 1, $\varepsilon \neq 1$; если аргумент числа ε — угол между соседними векторами системы — равен $2\pi k/m$, то такая система, как можно показать, состоит из векторов, идущих в вершины правильного m/d-угольника, где d — некоторый делитель m, $d < m$, причем в каждую вершину идет d векторов.

Решение этой задачи показывает, что любое разбиение множества целых чисел $\mathbf{Z}$ на несколько непересекающихся (бесконечных в обе стороны) арифметических прогрессий получается только таким способом: $\mathbf{Z}$ разбивается на d прогрессий с одной и той же разностью d, затем, быть может, одна (или несколько) из них разбивается на прогрессии с одинаковой разностью и т. д. Применение в теоретико-числовых задачах комплексных чисел, подобное описанному в нашем решении, называется «методом тригонометрических сумм».

144. Это можно доказать по индукции. При $n = 1$ следует взять число 2. Если $A = 2^n \cdot B$ — n-значное число, делящееся на 2^n, то одно из чисел $2 \cdot 10^n + A$ или $1 \cdot 10^n + A$ делится на 2^{n+1}, потому что одно из чисел $5^n + B$ или $2 \cdot 5^n + B$ четно.

∇ Искомое число для каждого n ровно одно; более того, все n-значные числа, составленные из цифр 1 и 2, дают разные остатки при делении на n. Пользуясь этим, можно получить другое решение задачи.

145. Задача а) следует из б), так что мы приведем лишь решение этой более общей задачи.

Точки B_k и D_k одинаково удалены от прямой OA_k. Поэтому $S_{OA_kB_k} = S_{OA_kD_k}$. Перемножив n равенств и записав каждую площадь как произведение основания A_kB_k или A_kD_k на половину соответствующей высоты (расстояния от O до стороны многоугольника), получим требуемое равенство: длины высот в произведении сократятся.

∇ В условиях задачи а) силы $\overrightarrow{A_kC_k}$, приложенные в точках A_k к твердой пластине $A_1A_2A_3$, взаимно уравновешиваются — пластина будет неподвижна; равны нулю сумма сил (как векторов) и сумма их моментов, поскольку момент каждой из этих сил относительно точки O равен нулю.

Для треугольника равенство произведений, выписанное в условии, является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы прямые A_kC_k пересекались в одной точке O.

146. а) Ответ: 11 вопросов. Узнав все 10 чисел в одной строке и одно — в другой, легко восстановить и все остальные числа. Если же задать лишь 10 вопросов, то однозначно восстановить числа нельзя; с одной стороны, в каждом столбце нужно знать хотя бы одно число — иначе можно прибавлять к обоим числам в этом столбце произвольное число x, сохраняя нужное свойство таблицы; с другой стороны, хотя бы в одном столбце надо узнать оба числа — иначе можно взять произвольное число y как разность между числами в каждом столбце и по имеющимся данным построить таблицу.

б) Доказательство можно провести индукцией. Будем считать, что $n \geqslant m$, и вести индукцию по $m + n$. Если в одном из n столбцов неизвестно ни одно из чисел, то, очевидно, числа восстанавливаются неоднозначно. Если же в каждом из n столбцов есть известные числа, то (поскольку общее число $m+n-2$ известных чисел не больше $2n-2$) найдется столбец, где известно лишь одно число, а оставшаяся после вычеркивания этого столбца таблица $(n-1)m$ содержит лишь $m+(n-1)-2$ известных числа и по предположению индукции восстанавливается неоднозначно.

∇ Оценка в этой задаче точна: таблицу вида

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots x_n \\ x_1+y_1, & x_2+y_1, & \ldots x_n+y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1+y_{m-1}, & x_2+y_{m-1}, & \ldots x_n+y_{m-1} \end{matrix} \qquad (*)$$

можно восстановить по $m+n-1$ числам первой строки и первого столбца.

Ответ на более тонкий вопрос — какие именно наборы Г чисел таблицы $m \times n$ для этого подходят — можно сформулировать на языке теории графов (П11).

Рассмотрим «двудольный граф» Г с $m+n$ вершинами $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$, в котором некоторые вершины A_i соединены с некоторыми B_j; тем самым указано некоторое множество $\widetilde{\Gamma}$ пар (i, j) — элементов таблицы $m \times n$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n)$. Для того чтобы по такому набору $\widetilde{\Gamma}$ пар чисел однозначно восстанавливалась вся таблица, необходимо и достаточно, чтобы граф Г был связен. В дереве с $m+n$ вершинами согласно задаче 8 будет как раз $m+n-1$ ребер; если Г — дерево, то любой набор $m+n-1$ чисел, занимающих клетки $(i, j) \in \widetilde{\Gamma}$, можно дополнить так, что полученная таблица будет иметь нужный вид $(*)$.

147. Рассмотрим фигуры F_1 и F_2, полученные из данной фигуры F (объединения кругов) переносами на векторы длины 0,001, составляющие угол 60° друг с другом.

Три фигуры F, F_1, F_2 не перекрываются и лежат внутри квадрата со стороной 1,001. Поэтому площадь S каждой из них меньше чем

$$(1{,}001)^2/3 < 0{,}34.$$

∇ Аналогичным образом для пространственного аналога этой задаче можно получить оценку $(1{,}001)^2/4 < 0{,}26$.

На плоскости можно существенно уточнить оценку: например, доказать, что $S < 0{,}287$ («Квант», 1972, № 8, с. 58).

148. Пусть в сосудах A, B и C соответственно a, b и c литров воды, $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Достаточно несколькими переливаниями добиться того, что в одном из сосудов станет меньше a литров воды (повторяя такую процедуру, мы сможем уменьшить количество воды в одном сосуде до 0). Разделим b на a с остатком: $b = ad + r$, $0 \leqslant r < a$. Будем выливать воду из B и C в A, (в A будет становиться $2a$, 2^2a, 2^3a, $\ldots$, 2^ka литров воды) с таким расчетом, чтобы из B вылить как раз da литров; тогда в B останется $r < a$ литров. Так действовать можно — ведь d, как каждое натуральное число, можно и притом единственным образом представить в виде суммы некоторых из чисел $1, 2, 2^2, \ldots, 2^k, \ldots$ Соответствующие порции воды 2^ka нужно брать из B, остальные — из C.

При этом из C нужно будет вылить не больше воды, чем из B, откуда берется последняя порция, поэтому воды в C хватит.

149. Условие, что корни трехчленов $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ и $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ вещественны и перемежаются, эквивалентно тому, что графики $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в точке (x_0, y_0), лежащей ниже оси абсцисс: $y_0 < 0$. Решая уравнение $f_1(x) = f_2(x)$, находим $x_0 = (q_2 - q_1)/(p_2 - p_1)$ и $y_0 = R(p_1 - p_2)^2$, где

$$R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1).$$

∇ Выражение R равно нулю тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 имеют общий (быть может, комплексный) корень. Такой многочлен от коэффициентов двух данных многочленов f_1 и f_2 любых степеней называется их *«результантом»*.

150. Если плоскости параллельны, это очевидно. Пусть они не параллельны. Тогда проекцию тела на линию l пересечения плоскостей можно получить как проекцию на l каждой из проекций этого тела на ту и другую плоскости. (Всюду речь идет об ортогональных проекциях: множестве оснований перпендикуляров.) Но проекция круга на прямую в его плоскости — отрезок длины, равной диаметру круга.

151. В результате каждой операции сумма S попарных произведений соседних чисел увеличивается (в этой сумме $ab + bc + cd$ заменяется на $ac + cb + bd$, а $ab + cd < ac + bd$, если $(a - d)(b - c) < 0$.) Но сумма S может принимать лишь конечное число различных значений (П13).

152. Решим сразу общую задачу б). Пусть прямая l пересекает контур описанного многоугольника в точках R и Q и делит пополам его периметр. Тогда ломаная из двух отрезков OR и OQ, где O — центр круга, делит пополам его площадь; это доказывается так же, как формула $S = Pr/2$ для площади описанного многоугольника периметра P: нужно провести из центра O отрезки ко всем вершинам многоугольника и записать площадь каждого треугольника как половину произведения длины основания на высоту, равную радиусу круга. Поэтому если прямая RQ делит также площадь пополам, то точка O должна лежать на этой прямой.

∇ Интересный вопрос — сколько может быть таких прямых (для треугольника и для n-угольника), которые делят пополам площадь и периметр («Квант», 1972, № 7, с. 35).

153. Утверждение верно для n чисел при любом $n \geqslant 4$ и доказывается «от противного». Предположим, что сумма или разность любых двух из n различных чисел $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_{n-1} < a_n$ содержится среди остальных $n-2$ чисел. Тогда $a_n + a_i > a_n$ и потому должны выполняться равенства $a_n - a_i = a_{n-i} (1 \leqslant i \leqslant n-1)$. При четном $n = 2k$ получаем $a_n - a_k = a_k$ — значит, разность a_n и a_k не содержится среди остальных чисел. При нечетном $n = 2k+1$ надо еще рассмотреть пары (a_{n-1}, a_i): для них $a_{n-1} + a_1 = a_n$, $a_{n-1} + a_i > a_n$ при $2 \leqslant i \leqslant n-2$ и потому должны выполняться равенства $a_{n-1} - a_i = a_{n-i-1}$, в частности $a_{n-1} - a_k = a_k$, что также приводит к противоречию.

154. а) Разобьем все 12 вершин на 6 пар противоположных вершин: A_1A_7, A_2A_8, A_3A_9, $\ldots$, A_6A_{12}. При каждой операции в каждой паре меняет знак только одна вершина. Поэтому в парах $A_2A_8, \ldots, A_6A_{12}$ после $(2k-1)$-й операции будут разные знаки, а после $2k$-й — одинаковые (в паре A_1A_7 будет все наоборот). Поэтому не может случиться, что в паре A_2A_8 знаки разные, а в паре A_3A_9 — одинаковые.

б) Рассмотрим разбиение на 4 группы по три вершины: $A_1A_5A_9$, $A_2A_6A_{10}$, $A_3A_7A_{11}$, $A_4A_8A_{12}$ и будем рассуждать так же, как выше. Четность числа минусов в каждой группе меняется при каждой операции, и у групп $A_2A_6A_{10}$ и $A_3A_7A_{11}$ она одинаковая.

в) Аналогичные рассуждения для разбиения на 3 группы $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_6A_{11}$, $A_3A_8A_9A_{12}$.

∇ Вообще, можно выяснить, какие наборы получаются друг из друга сменами знака у k последовательных вершин n-угольника. Ответ таков: сопоставим каждому набору $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ чисел $\varepsilon_k = \pm 1$ в вершинах n-угольника набор d чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, где $d = \text{НОД}(n, k)$, следующим образом:

$$x_i = \varepsilon_i \varepsilon_{i+d} \ldots \varepsilon_{i+n-d}.$$

Тогда два набора (ε_i), (ε'_i) можно перевести друг в друга в том и только в том случае, если либо соответствующие наборы (x_i), (x'_i) одинаковы, либо k/d четно и наборы (x_i), (x'_i) противоположны: $x_i = -x'_i$ для всех i.

155. Можно действовать методом «деления пополам». Вырежем из плоскости большой квадрат K_0 из $2^n \times 2^n$ клеток, со-

держащий все черные клетки и еще по крайней мере в 4 раза больше белых клеток; тогда площадь черных клеток составляет менее 1/5 площади квадрата K_0. Разрежем K_0 на четыре квадрата K_1 из $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ клеток. В каждом из K_1 черные клетки занимают не больше 4/5 его площади, так что либо он удовлетворяет обоим условиям 1), 2), либо его можно вновь разрезать на четыре квадрата K_2 и т. д., вплоть до квадратов 2×2, из которых все пустые нужно выбросить, а все с одной, двумя и тремя закрашенными клетками — оставить.

∇ Аналогичные задачи можно сформулировать для прямой, разбитой на единичные отрезки (с константами 1/3 и 2/3), для пространства, разбитого на кубы (с константами 1/9 и 8/9).

156. Ответ: наименьшее число A_n кубиков, удовлетворяющих условию, равно

$$A_n = \begin{cases} n^2/2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ (n^2+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В частности, $A_2 = 2$, $A_3 = 5$, $A_4 = 8$, $A_5 = 12$, $A_{10} = 50$.

Доказательство того, что меньшим числом кубиков обойтись нельзя, можно провести так. Для расстановки кубиков, удовлетворяющих условию: в каждой клетке нижней грани куба запишем число, показывающее, сколько кубиков лежит над этой клеткой. Воспользуемся теперь такой леммой.

Лемма. В таблице $n \times n$ расставлены целые неотрицательные числа, причем для каждой пары строка — столбец, на пересечении которых стоит нуль, сумма $2n-1$ чисел в их объединении («кресте») не меньше n; тогда сумма всех чисел в таблице не меньше $n^2/2$.

Ее доказательство очень похоже на рассуждение в задаче 126.

Если наименьшая из сумм по строкам и столбцам — пусть это будет сумма чисел в первой строке — равна $m < n$, то в этой строке не меньше $n - m$ нулей, и в каждом из начинающихся с них $n - m$ столбцов сумма чисел не меньше $n - m$, а в каждом из m остальных столбцов сумма чисел не меньше m, а потому общая сумма не меньше

$$(n-m)^2 + m^2 \geqslant n^2/2.$$

Пример нужной расстановки 12 кубиков в кубе $5 \times 5 \times 5$ и 50 кубиков в кубе $10 \times 10 \times 10$ указан на рис. 64, где число в клетке означает номер слоя, в который нужно поместить кубик над данной клеткой. Аналогично строятся примеры для других n.

∇ Наиболее интересный результат для k-мерного случая — оценка снизу числа «кубиков» $(x_1, \ldots, x_k)$, если дополнительно известно, что никакие два из них не отличаются лишь в одной координате: их число не превосходит $n^{k-1}/k - 1$. Точный ответ для $k \leqslant 1$ по-видимому, в общем случае неизвестен [65].

		4	3	5
		3	5	4
		5	4	3
1	2			
2	1			

$n=5$

					6	7	8	9	10
					7	8	9	10	6
					8	9	10	6	7
					9	10	6	7	8
					10	6	7	8	9
1	2	3	4	5					
2	3	4	5	1					
3	4	5	1	2					
4	5	1	2	3					
5	1	2	3	4					

$n=10$

Рис. 64

157. Мы должны для каждой точки (x, y) плоскости найти точку целочисленной решетки (m, n), для которой величина $f_a(x-m,\ y-n)$ как можно меньше, и найти оценку этого минимума $\bar{f}_a(x,\ y) = \min\limits_{m,\,n} f_a(x-m,\ y-n)$ сверху. Удобно величину $\sqrt{f_a(x_1-x_2,\ y_1-y_2)}$ называть «расстоянием» между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) по аналогии с обычным расстоянием $\sqrt{f_0(x_1-x_2,\ y_1-y_2)} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Заметим, что для этого расстояния точная оценка такова: $\bar{f}_0(x, y) \leqslant 1/2$. В самом деле, для каждого из квадратов $m-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant m+\frac{1}{2}$, $n-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant n+\frac{1}{2}$ расстояние от любой его точки (x, y) до центра (m, n) не больше $\sqrt{2}/2$, причем для любой вершины такого квадрата оно равно $\sqrt{2}/2$, т. е. $\bar{f}_0(x_0, y_0) = 1/2$.

Попробуем и для других «расстояний» $\sqrt{f_a}$, $0 < a < 2$, построить разбиение плоскости на фигуры $\Phi_{m,\,n}$ по такому признаку: точка (x, y) относится к $\Phi_{m,\,n}$, если «расстояние» от нее до (m, n) меньше (или не больше), чем до любой другой точки решетки. Достаточно найти фигуру Φ_{00} с центром $(0; 0)$ — остальные получатся из нее переносами центров на векторы с координатами $(m; n)$; поскольку при таких переносах сохраняется расстояние $\sqrt{f_a}$, то сохраняется и принцип, по которому отбираются точки области с тем или иным центром. Сейчас мы используем тот факт, что квадрат расстояния f_a — квадратичная функция от координат. Множество точек, которые ближе к $(0; 0)$, чем к $(m; n)$, — это просто полуплоскость: неравенство

$$x^2 + axy + y^2 \leqslant (x-m)^2 + a(x-m)(y-n) + (y-n)^2$$

эквивалентно линейному

$$(2m + an)\,x + (2n + am)\,y \leqslant m^2 + amn + n^2.$$

Чтобы найти фигуру Φ_{00}, надо было бы взять пересечение всех таких полуплоскостей (по всем $(m; n)$, отличным от $(0; 0)$). Оказывается, что достаточно взять лишь шесть из них, соответствующие шести парам $(0; \pm 1)$, $(\pm 1; 0)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$. Это будет ясно, когда мы убедимся, что пересечение таких шести полуплоскостей (это выпуклый шестиугольник ($-1 \leqslant 2x + ay \leqslant \leqslant 1$, $-1 \leqslant ax + 2y \leqslant 1$, $-1 \leqslant x - y \leqslant 1$) не пересекается со своими образами при параллельных переносах на векторы $(m; n)$ (точнее, имеет с ними лишь общие участки границы, рис. 65); таким образом Φ_{00} не может быть меньше, чем этот

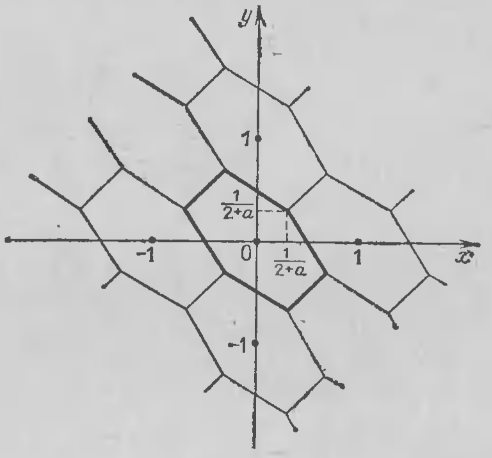


Рис. 65

шестиугольник, и значит, с ним совпадает. Максимум $f_a(x, y)$ при $(x, y) \in \Phi_{00}$ достигается в вершинах этого шестиугольника: ведь при движении по отрезку любой прямой $x = b + ut$, $y = c + vt$ квадрат расстояния $f_a(b + ut,\ c + vt)$ зависит от t как квадратный трехчлен с положительным коэффициентом $u^2 + auv + v^2$ при t^2, так что f_a принимает максимальное значение на концах отрезка. Найдя координаты вершин (рис. 65) и подставив их в выражение для f_a, мы получим точную оценку для $\bar{f}_a$: $\bar{f}_a \leqslant 1/(a+2)$. Та же оценка верна и для $a = 2$, когда $\bar{f}_2(x, y)$ есть просто квадрат разности между $x + y$ и ближайшим целым числом: точная оценка $\bar{f}_2(x, y) \leqslant 1/4$.

∇ Основная идея решения этой задачи — разбиение плоскости на области, содержащие заданные центры, при котором каждая точка относится к ближайшему центру — используется в разных задачах анализа, геометрии, теории чисел (см. [71]).

158. Оценим сначала необходимое число переключателей снизу. Поскольку каждый переключатель может находиться в двух состояниях, то схема из m переключателей может находиться в 2^m различных состояниях. Если необходимо реализовать все $n!$ различных соединений n входов с n выходами:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{array}$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — любая перестановка из чисел $1, 2, \ldots, n$, для числа переключателей m должно выполняться неравенство $2^m \geqslant n!$, т. е. число переключателей в универсальной схеме заведомо не меньше $\log_2(n!)$.

В частности, для $n = 3$ получаем: $2^m \geqslant 6$, откуда $m = 3$; нетрудно проверить, что схема, указанная на рис. 8, *б* (в условии), как раз дает пример 3-универсальной схемы. Для $n = 4$ получаем: $2^m \geqslant 4! = 24$, откуда $m \geqslant 5$. Действительно, 4-универсальную схему из 5 переключателей можно построить: проверьте, что схема на рис. 66, *а* при $2^5 = 32$ различных положениях переключателей реализует все 24 возможные перестановки множества $\{1, 2, 3, 4\}$.

Доказать 8-универсальность схемы, изображенной на рис. 8, *в* (в условии), перебором практически невозможно; число 8! слишком велико. Но нетрудно указать правило, позволяющее любую данную перестановку φ из 8 элементов $k \to i_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, реализовать на схеме. Это правило должно указать, через какой блок — A или B — осуществлять каждую из 8 связей $k \to \varphi(k) = i_k$. При этом должны выполняться такие условия:

если $k - l = 4$ или $i_k - i_l = 4$, то связи $k \to i_k$ и $l \to i_l$

должны проходить через разные блоки A и B.

Ясно, что эти условия необходимы и достаточны для отсутствия «склеек» (ситуаций, встречающихся и в реальной телефонной сети, когда два входа оказываются соединенными с одним выходом, или наоборот).

Вот нужное нам правило.

Объявляем «соседними» с парой $k \to \varphi(k)$ две пары $j \to \varphi(j)$ и $l \to \varphi(l)$ такие, что $|k - j| = 4$ и $|\varphi(k) - \varphi(l)| = 4$, тогда все пары $k \to \varphi(k)$ разобьются на «хороводы» (циклы) — у каждой будет два соседа, причем эти циклы будут содержать по четному числу пар. В каждом цикле будем попеременно осуществлять связи $k \to \varphi(k)$ через блок A и через блок B, таким образом «соседи» окажутся соединенными через разные блоки.

Теперь из 4-универсальности блоков A и B следует 8-универсальность всей схемы.

Аналогичным образом можно построить 2^{k+1}-универсальную схему, исходя из двух 2^k-универсальных схем и еще $2 \cdot 2^k$ переключателей. Если начать с 5-элементной 4-универсальной схемы

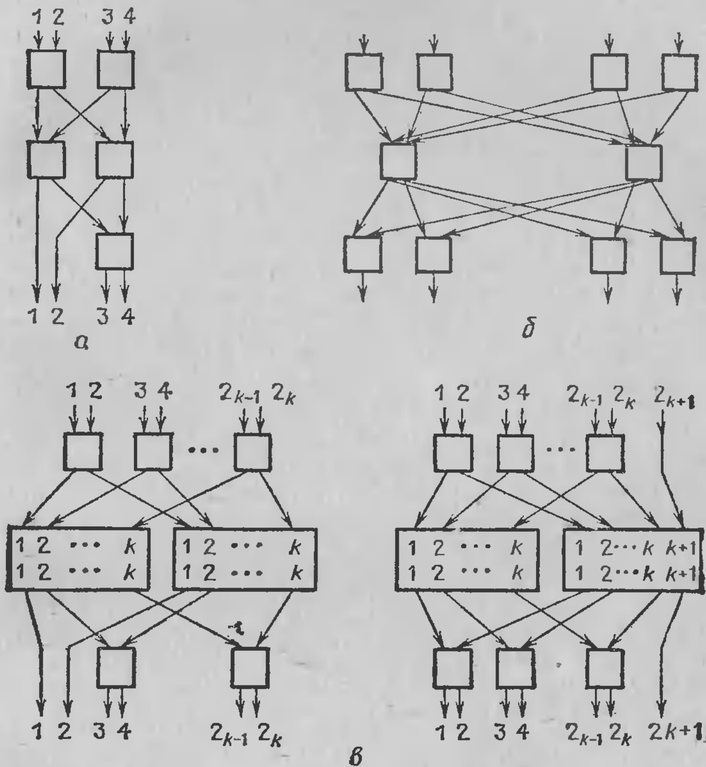


Рис. 66

(это, конечно, лучше, чем начать с 2-универсального переключателя и получить вместо рис. 66, *а* 4-универсальную схему — рис. 66, *б* — из 10 элементов!), то при $n = 2^k$ схема будет содержать $2n \log_2 n - \frac{11n}{4}$ переключателей (в частности, при $n = 8$ их 26), что для любого $n \neq 2^k$ дает оценку сверху для числа переключателей в минимальной n-универсальной схеме порядка $4n \log_2 n$. Лишь слегка изменив конструкцию схемы (рис. 66, *в*), можно переходить от k-универсальной к $2k$ и

$(2k+1)$-универсальной и улучшить оценку сверху до $n\log_2 n$. Заметим, что (при больших n) $\log_2 n! \approx n(\log_2 n - \log_2 e)$, [75].

159. Пусть R — точка пересечения прямых QN и CD, а O — центр прямоугольника $ABCD$. Из $OM = ON$ следует, что $PC = CR$, и поэтому треугольник PNR — равнобедренный (NC — одновременно медиана и высота этого треугольника).

Утверждение задачи следует из равенства углов $\angle MNP = \angle NPR$ и $\angle QNM = \angle QRP$.

160. Пусть $[a_1, b_1]$ — отрезок с наименьшим правым концом. Если число отрезков, содержащих точку b_1, больше 7, то задача решена. Если оно меньше или равно 7, то имеется по крайней мере 43 отрезка, лежащих целиком правее $[a_1, b_1]$. Выберем из них отрезок $[a_2, b_2]$ с наименьшим правым концом. Тогда либо b_2 принадлежит 8 отрезкам, либо имеется 36 отрезков, лежащих правее b_2. Продолжая это рассуждение, мы либо найдем точку, принадлежащую 8 отрезкам, либо получим 7 попарно не пересекающихся отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_7, b_7]$ таких, что правее $[a_k, b_k]$ лежит не меньше $50 - 7k$ отрезков, т. е. правее $[a_7, b_7]$ лежит еще по крайней мере один отрезок $[a_8, b_8]$.

∇ Точно так же можно доказать, что из $mn+1$ отрезков можно выбрать либо $m+1$ попарно не пересекающихся отрезков, либо $n+1$ отрезков, имеющих общую точку. Вот еще похожая задача: из любых $mn+1$ натуральных чисел можно выбрать цепочку из $m+1$ чисел, в которой каждое делится на предыдущее, либо $n+1$ чисел, из которых ни одно не делится на другое. Это частные случаи общей теоремы Дилуорса: в частично упорядоченном множестве из $mn+1$ элементов есть либо цепь из идущих в порядке возрастания элементов, либо $n+1$ попарно несравнимых элементов ([64], задача 5—5 из [4]).

Чтобы применить эту теорему к нашей задаче об отрезках, надо считать, что один отрезок «больше» другого, если он целиком лежит правее; тогда «попарно несравнимые» отрезки обязательно имеют общую точку (ею служит самый левый из их правых концов).

161. Ответ: $x = 1972$. Поскольку $4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 2^{54}(1 + 2\cdot 2^{1945} + 2^{2x-54})$, выражение в скобках будет полным квадратом при $2x - 54 = 2\cdot 1945$, т. е. при $x = 1972$. Если же $x > 1972$, то $2^{2(x-27)} < 1 + 2\cdot 2^{1945} + 2^{2(x-27)} < (2^{x-27}+1)^2$, т. е. данное число заключено между квадратами двух последовательных натуральных чисел.

162. Сначала докажем следующие два утверждения.

а) если $a^k + b^k$ делится на $a^n + b^n$, то и $a^{k-n} - b^{k-n}$ делится на $a^n + b^n$;

б) если $a^l - b^l$ делится на $a^n + b^n$, то и $a^{l-n} + b^{l-n}$ делится на $a^n + b^n$.

Эти утверждения легко следуют из взаимной простоты a и b и тождеств

$$a^k+b^k=a^{k-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{k-n}-b^{k-n}),$$
$$a^l-b^l=a^{l-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{l-n}+b^{l-n}).$$

Разделим m на n остатком: $m=qn+r$, где $0\leqslant r<n$; вычитая q раз n из m, мы получим r.

Из условия задачи и утверждений а) и б) следует, что $a^r+(-1)^q b^r$ делится на a^n+b^n; но $0\leqslant|a^r+(-1)^q b^r|<a^n+ + b^n$. Отсюда следует, что $r=0$ (и при этом q нечетно!).

163. Предположим, что в некоторых строках таблицы встречаются одинаковые числа. Пусть n — номер самой верхней из этих строк, а p и q — равные числа в этой строке.

Поскольку в $(n-1)$-й строке равных чисел нет, p и q получены из чисел r и s этой строки разными действиями: пусть $p=r^2$, $q=s+1$, тогда $s=r^2-1$.

На пути, ведущем из верхнего числа a в число s, могли встречаться возведения в квадрат и прибавления единиц. Самым большим числом, возводившимся в квадрат, могло быть $r-1$ (поскольку $s=r^2-1$). Это значит, что число s могло быть получено из последнего встретившегося на пути квадрата не менее чем за $r^2-1-(r-1)^2=2r-2$ шагов, причем на каждом шаге добавлялись единицы. Таким образом, число s получилось из a не менее чем за $2r-1$ шагов (т. е. $n-2\geqslant 2r-1$). Но в одной строчке с s стоит r, а любое число, полученное из a за такое число шагов, не меньше $a+2r-1>r$. Таким образом, при получении s не было возведений в квадрат, так что q — крайнее правое, наименьшее число в n-й строке, что противоречит равенству $p=q$.

∇ Анализ решения задачи показывает, что операцию возведения в квадрат можно заменить любой функцией f, принимающей натуральные значения и такой, что $f(n+1)-f(n)>n+1$.

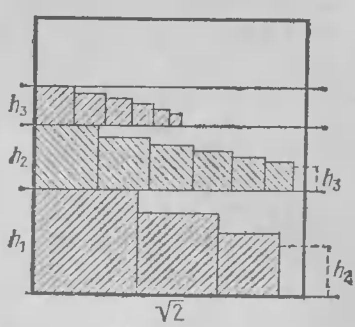


Рис. 67

164. Разложим квадраты в порядке убывания сторон и будем укладывать их, начиная с самого большого $x\times x$, слева направо на нижнюю сторону квадратной площадки $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ (рис. 67); как только очередной квадрат не помещается — вылезает за правую сторону площадки, — мы проводим по верхней стороне левого квадрата горизонтальную прямую и начинаем новый ряд. Пусть $x = h_1$, h_2, h_3 ... — стороны квадратов, примыкающих к левой стороне площадки. Мы должны доказать, что высота $h = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots$ меньше $\sqrt{2}$, т. е. что квадраты исчерпаются раньше, чем вылезут за верхнюю сторону площадки.

Оценим их общую площадь. Перенесем мысленно каждый из левых квадратов со сторонами h_k ($k = 2, 3, \ldots$) в конец предыдущего $(k-1)$-го ряда. Он вылезет за правую сторону, поэтому после такой процедуры площадь квадратов $(k-1)$-го ряда будет не меньше $(\sqrt{2} - x)\,h_k$; при этом в 1-м ряду мы не считаем левый большой квадрат. Таким образом, общая площадь всех квадратов, равная по условию 1, не меньше

$$x^2 + (\sqrt{2} - x)(h_2 + h_3 + \ldots) = x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x).$$

Отсюда можно получить оценку для h. Поскольку $\sqrt{2} - x > 0$, из неравенства $x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x) \leqslant 1$ следует

$$h \leqslant \frac{1 - x^2}{\sqrt{2} - x} + x = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\left(2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2 - x\sqrt{2}}\right) \leqslant \sqrt{2},$$

так как число в круглой скобке вида $t + \dfrac{1}{t}$ не меньше 2 (равенство возможно лишь при $x = \sqrt{2}/2$). Этой задаче и ее вариантам посвящена заметка [67].

165. Точки K, L, M, N — пересечения высот треугольников AOB, BOC, COD и DOA — вершины параллелограмма, две стороны которого идут по прямым, проведенным через точки A

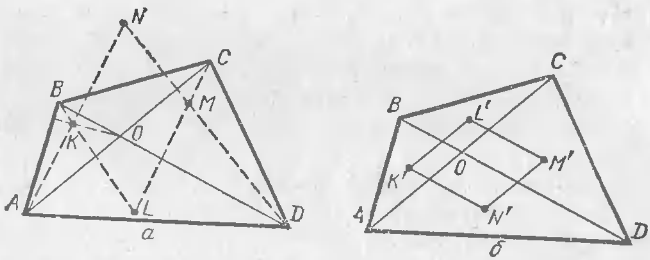


Рис. 68

и C перпендикулярно BD, две другие — по прямым, проведенным через точки B и D перпендикулярно AC (рис. 68, a).

Точки K', L', M' и N' пересечения медиан треугольников AOB, BOC, COD и DOA — вершины параллелограмма, две стороны которого параллельны BD и делят отрезок AC на три равные части, две другие параллельны AC и делят отрезок BD на три равные части (рис. 68, *б*).

Ясно, что стороны этих параллелограммов соответственно перпендикулярны. Докажем, что параллелограммы подобны; отсюда будет следовать, что если один из них повернуть на 90°, то не только его стороны, но и диагонали станут параллельны диагоналям другого, т. е. $K'M' \perp KM$ (и $L'N' \perp LN$), что и требуется. Для подобия параллелограммов нужна пропорциональность сторон. Длины сторон $K'L'$ и KN равны $AC/3$ и $BD/3$. Проекция стороны KL на прямую BD совпадает с проекцией отрезка AC на эту прямую, поэтому $KL = AC \cdot \operatorname{ctg} \varphi$, где φ — острый угол между прямыми AC и BD; аналогично $KN = BD \cdot \operatorname{ctg} \varphi$. Таким образом, стороны обоих параллелограммов относятся как $AC : BD$, откуда следует подобие.

Если угол φ — прямой, то все точки K, L, M, N сливаются, и задача теряет смысл.

166. Каждая прямая, разбивающая квадрат на две трапеции (или прямоугольника) с отношением площадей $2:3$, в таком же отношении делит среднюю линию квадрата, идущую по средним линиям этих трапеций; это следует из формулы: площадь трапеции равна произведению высоты на длину средней линии.

Таких точек, которые делят одну из средних линий в отношении $2:3$, всего четыре (рис. 69), а прямых — девять, следовательно, в какой-то из этих точек должны пересекаться три прямых (П9).

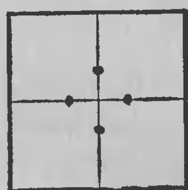


Рис. 69

167. Пользуясь теоремой о вписанном угле, сумму $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3$ можно найти как половину величины

$$(360^\circ - \overset{\smile}{A_7A_1A_2}) + (360^\circ - \overset{\smile}{A_2A_3A_7}) + (360^\circ - \overset{\smile}{A_4A_5A_6}) = 720^\circ + \overset{\smile}{A_6A_7}.$$

По условию центр O лежит внутри семиугольника, поэтому дуга A_6A_7 не может быть больше 180° и $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 < 360^\circ + 90^\circ = 450^\circ$.

168. Обозначим четыре разряда (слева направо) через r_1, r_2, r_3, r_4. Игра распадает на две фазы: «дебют» и «эндшпиль» — вторая фаза начинается, как только 2-й игрок поставит некоторую цифру в старший разряд r_1. Ясно, что в дебюте 1-й игрок не должен называть маленьких цифр (от 0 до 3) или больших (от 6 до 9), поскольку 2-й, помещая такую цифру в r_1 (маленькую — в первое число, большую — во второе), переходит в заведомо выигрышный эндшпиль: если разность первых цифр не больше 3, то разность чисел не больше 3999. Впрочем, если 1-й назвал первой цифру 4 (или 5), то 2-й может добиться разности, не меньшей 4000, сразу перейдя в эндшпиль ходом $r_1 = \binom{4}{*}$ или $r_1 = \binom{*}{5}$, а затем все появляющиеся цифры 0 (соответственно 9) помещая в разряды r_2, r_3, r_4, пока они не заполнятся; естественно, первая же цифра — не 0 (не 9) — будет поставлена в r_1 (что приведет к разности, не превосходящей 3999), и под этой угрозой 1-й не сможет добиться лучшей финальной позиции, чем $\dfrac{4000}{0000}\left(-\dfrac{9999}{5999}\right)$. Мы предъявили стратегию 2-го, доказывающую утверждение а).

Но не может ли 2-й добиться большего, в дебюте расставив в разрядах r_2—r_4 некоторые цифры 4 и 5 и в удачный для себя момент перейдя в эндшпиль? Чтобы помешать этому, 1-й должен следить за тем разрядом r_i с наименьшим i, в котором стоят одна цифра и одна звездочка либо две разные цифры. Если r_i равен $\binom{*}{4}$ или $\binom{*}{5}$, он должен называть цифру 5, если $\binom{4}{*}$ или $\binom{5}{*}$ — цифру 4 (если все разряды совпадают или $r_i = \binom{5}{4}$, ход может быть любым — скажем 5, а опасная позиция с $r_i = \binom{4}{5}$ при такой стратегии 1-го не может получиться). После перехода в эндшпиль из такого дебюта 1-й может называть нули (если в r_1 цифра поставлена в верхнее число) или девятки (если в нижнее). Мы предъявили стратегию 1-го, доказывающую утверждение б).

∇ Можно доказать, что при любом числе разрядов $n \geqslant 1$ в такой игре ее «цена» — разность, которая получается при наилучшей игре обоих, — равна $4 \cdot 10^{n-1}$.

169. О т в е т: наибольшее возможное значение s равно $\sqrt{2}$, оно достигается при $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}/2$.

Мы должны выяснить, для какого наибольшего s могут одновременно выполняться неравенства $x \geqslant s$, $y + 1/x \geqslant s$, $1/y \geqslant s$ (по крайней мере одно из них должно быть при этом равенством). Ясно, что s можно считать положительным — например, для $s = 1$ наши три неравенства совместны (годится, скажем, решение $x = 1$, $y = 1$). Из этих трех неравенств вытекают следующие: $y \leqslant 1/s$, $1/x \leqslant 1/s$, $s \leqslant y + 1/x \leqslant 2/s$, откуда $s^2 \leqslant 2$, $s \leqslant \sqrt{2}$. Возможен случай, когда все неравенства становятся равенствами: $y = 1/x = \sqrt{2}/2$, при этом $s = \sqrt{2}$.

170. Для треугольника ABC это доказать легко: если точка лежит внутри этого треугольника и треугольники AOB, BOC,

COA равнобедренные, то по крайней мере два из углов $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ больше $120°$. Пусть это углы AOB и BOC. Тогда $AO = BO = OC$. Пользуясь этим частным случаем как

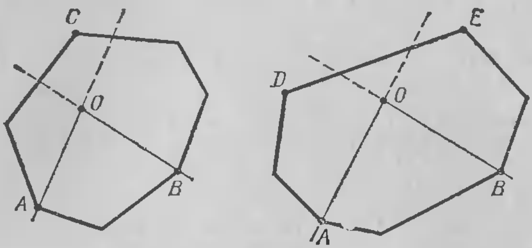


Рис. 70

леммой, докажем теперь утверждение задачи для многоугольника. Если A и B — любые две его вершины, то либо в угле, образованном продолжениями AO и BO за точку O, есть вершина C многоугольника, либо этот угол пересекает сторона DE многоугольника (рис. 70). В первом случае точка лежит внутри $\triangle ABC$ и, как доказано выше, $AO = BO = CO$, во втором — O лежит внутри $\triangle BDE$ и $\triangle ADE$, поэтому $AO = DO = EO = BO$.

171. Ответ: нельзя.

Приведем один из наиболее коротких способов получить противоречие. Будем говорить, что две фигуры заполнены одинаково, если в них одинаковое число нулей, единиц и двоек. Заштрихованные прямоугольники на рис. 71, *а* заполнены одинаково (к двум соседним можно приставить квадрат 3×3, образующий с каждым из них прямоугольник 3×4; остается вычесть из стандартного набора для прямоугольника 3×4 содержимое квадрата). Полоска

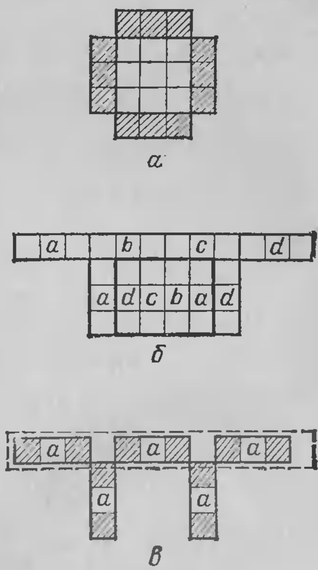


Рис. 71

1×12 всегда имеет то же стандартное содержимое, что и прямоугольник 3×4 (на рис. 71, *б* одинаковы прямоугольники, обозначенные одной буквой), т. е. в ней 5 двоек. С другой стороны, рассмотрим (не у края бумажного листа) прямоугольник *а* размерами 3×1, содержащий не менее

2 двоек; такой найдется в любом прямоугольнике 3×4, состоящем из четырех прямоугольников 3×1 и содержащем 5 двоек. Расположим рядом с ним, как показано пунктиром на рис. 71, *в*, полоску 1×12. В ней не менее $2\cdot 3=6$ двоек. Противоречие.

172. Ответ: наименьшее значение s, равное $1-2^{-1/n}$, достигается при $x_k=2^{k/n}(1-2^{-1/n})$.

Положим $y_0=1$, $y_k=1+x_1+\ldots+x_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. Тогда $y_n=2$, $x_k=y_k-y_{k-1}$, если все данные числа не превосходят s, т. е.

$$\frac{x_k}{y_k}=\frac{y_k-y_{k-1}}{y_k}=1-\frac{y_{k-1}}{y_k}\leqslant s,$$

то $1-s\leqslant y_{k-1}/y_k$. Перемножив эти неравенства ($k=1, 2, \ldots, n$), получим: $(1-s)^n\leqslant y_0/y_n=1/2$, откуда $s\geqslant 1-2^{-1/n}$. Это значение достигается, когда (для всех k) $2^{-1/n}=1-s=y_{k-1}/y_k$, т. е. когда y_k образуют геометрическую прогрессию $y_1=2^{1/n}$, $y_2=2^{2/n}, \ldots, y_n=2$ со знаменателем $2^{1/n}$, а $x_k=2^{k/n}-2^{(k-1)/n}$.

173. Заменим в таблице турнира все четные числа нулями, нечетные — единицами. Обозначим полученную таблицу через A, ее элементы — через a_{ij} ($i, j=1, 2, \ldots, n$): $a_{ij}=1$, если i-я и j-я команды сыграли вничью, $a_{ij}=0$ — в противном случае. Таблица удовлетворяет условию симметрии и на диагонали стоят нули:

$$a_{ij}=a_{ji},\quad a_{ii}=0 \text{ для всех } i,\ j. \qquad (1)$$

Требование, которое предъявляется к таблице в условии задачи, можно сформулировать так: для любого набора $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из нулей и единиц, отличного от $0=(0, 0, \ldots, 0)$, хоть одно из чисел

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \qquad (A)$$

нечетно. Для каждой группы команд мы строим набор x, полагая $x_j=1$, если j-я команда входит в группу, и 0, если не входит, при этом y_i равно количеству ничьих i-й команды с этой группой. Будем набор $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, полученный из x с помощью таблицы A по правилу (A), обозначать Ax. Поскольку нас интересует лишь различие между четными и нечетными числами, удобно упростить арифметику, оставив лишь два числа 0 и 1, и считать, что $0+1=1+0=1$, $1+1=0+0=0$ (правила умножения и все основные законы арифметики при этом сохраняются). Тогда y также будет набором из 0 и 1. При этом основное требование к таблице принимает вид:

$$\text{если } x\neq 0, \text{ то } y=Ax\neq 0; \qquad (2)$$

такую таблицу A назовем невырожденной.

Теперь, когда мы от хоккея полностью перешли к алгебре, можно приступить к решению задачи: доказать, что при нечетном n условия (1) и (2) не могут одновременно выполняться. Будем упрощать нашу таблицу A, сохраняя эти условия.

Условие (2) не нарушится, если таблицу A изменить, прибавив к первой строке вторую: если $Ax = y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то для новой таблицы A' будет $A'x = y' = (y_1 + y_2, y_2, \ldots, y_n)$; если $y \neq 0$, то и $y' \neq 0$. Условие (2) не нарушится также, если к первому столбцу A прибавить второй: если $Ax = y$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то для новой таблицы A'' будет $A''x'' = y$, где $x'' = (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n)$; если $x \neq 0$, то и $x'' \neq 0$. Разумеется, можно также прибавлять i-ю строку к j-й или i-й столбец к j-му; если сделать такие два преобразования одновременно, то новая таблица будет не только невырожденной (2), но также симметричной (1) (при этом правило $1 + 1 = 0$ сохраняет нули на диагонали).

Приступим теперь к упрощению таблицы A. Можно считать, что «первые две команды сыграли вничью», т. е. $a_{12} = a_{21} = 1$. Прибавляя первую строку (и первый столбец) к тем строкам (столбцам), где стоят единицы во втором столбце (соответственно строке), мы избавимся от всех этих единиц; точно так же, с помощью второй строки (и второго столбца) мы избавимся от единиц в первом столбце (и в первой строке) и получим таблицу A_{n-2} такого вида, как показано на рис. 72, *а*. Остающаяся после отбрасывания первых двух строк и столбцов таблица A_{n-2} размера $(n-2) \times (n-2)$ по-прежнему удовлетворяет условиям (1) и (2): ведь $Ax \neq 0$ для любого $x = (0, 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$, а остающаяся таблица A_{n-2} преобразует координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ точно так же. Продолжая те же упрощения, переходя к таблицам $A_{n-4}, A_{n-6}, \ldots$ $\ldots$, мы в конце концов, если n было нечетно, придем к таблице 3×3, из которой после упрощений получим таблицу A_3, показанную на рис. 72, *б*. Но она вырождена: если $x = (0, 0, 1)$, то $A_3x = 0$. Получили противоречие.

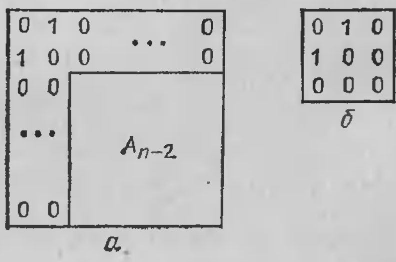


Рис. 72

∇ Содержание этой задачи совпадает с известной специалистам теоремой из линейной алгебры (о том, что кососимметрическая матрица $n \times n$ при нечетном n вырождена), которая над полем из двух элементов 0 и 1 приобретает некоторую дополнительную трудность.

174. Приведем решение задачи б). Эксперт должен проделать такие три взвешивания.

1°. Эксперт кладет на левую чашку 1-ю монету, на правую — 8-ю, так как правая чашка перевешивает, то суд видит, что 1-я монета фальшивая, а 8-я — настоящая.

2°. На правую чашку кладутся 2-я, 3-я и 8-я монеты, на левую — 9-я, 10-я и 1-я. Левая чашка перевешивает, и суд

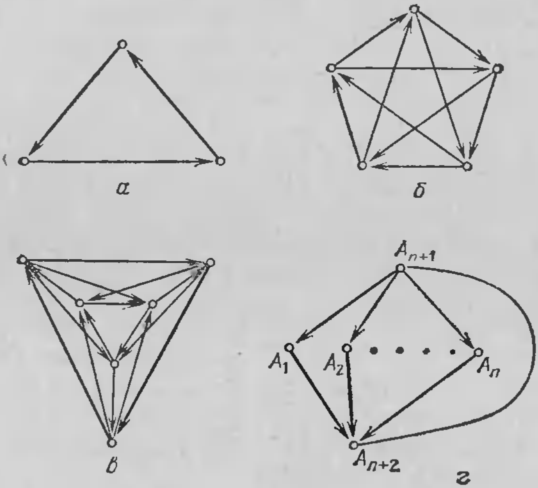


Рис. 73

убеждается, что 2-я и 3-я монеты фальшивые, а 9-я и 10-я — настоящие.

3°. Эксперт кладет на левую чашку 4-ю, 5-ю, 6-ю, 7-ю, 8-ю, 9-ю и 10-ю монеты, а на правую — остальные. Правая чашка перевешивает и суд видит, что на ней больше настоящих монет, чем на левой, а на левой чашке фальшивых монет больше, чем на правой. Это и доказывает суду, что 4-я, 5-я, 6-я и 7-я монеты фальшивые, а 11-я, 12-я, 13-я и 14-я — настоящие.

∇ Точно так же проверка 2^k-1 фальшивых и 2^k-1 настоящих монет может быть осуществлена за k взвешиваний при любых $k \geqslant 1$.

175. Предположим, что существует полный квадрат $D = A^2$, удовлетворяющий условиям задачи. Число A, очевидно, оканчивается цифрой 5, т. е. $A = 10a + 5$. Поэтому $D = 100a(a+1) + 25$ оканчивается на 25. Число $a(a+1)$ оканчивается либо на 2, либо на 6, либо на 0. Поэтому третья справа цифра числа D равна 6. Итак, $D = 1000k + 625$. Мы видим, что D делится на $5^3 = 125$, и поэтому и на 5^4. Поэтому k делится на 5 и, значит, четвертая справа цифра числа D — либо 0, либо 5, что невозможно.

176. Задача решается по индукции. Для $n=3$, $n=5$ и $n=6$ требуемые системы точек изображены на рис. 73, *а—в*, а на рис. 73, *г* показан один из способов, позволяющих из системы n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, соединенных нужным образом стрелками, получить требуемую систему с $n+2$ точками $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$. Для этого к уже имеющимся стрелкам добавим стрелки, идущие из A_{n+1} ко всем точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$; из каждой точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ проведем стрелку в A_{n+2}; наконец, из A_{n+2} — стрелку в точку A_{n+1}.

В силу принципа полной индукции утверждение задачи справедливо при всех нечетных $n \geqslant 3$ и всех четных $n \geqslant 6$.

Для $n=4$ требуемой системы точек не существует.

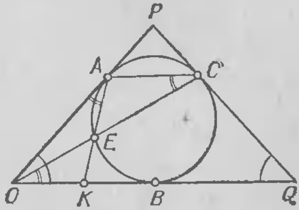


Рис. 74

177. Пусть P и Q — точки пересечения касательной к данной окружности в точке C со сторонами угла. Так как $AP = PC$, то $\triangle APC$ и вместе с ним $\triangle OPQ$ — равнобедренный. Поэтому $AO = CQ = OB = BQ$ (рис. 74).

Заметим, что $\angle OAE = \angle OCA = \angle COQ$, а $\angle AOB = \angle CQB$ Из подобия $\triangle OAK \backsim \triangle QOC$ следует:

$$\frac{OK}{OA} = \frac{CQ}{OQ} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $OK = OA/2 = OB/2$. Равенство углов $\angle OAE = \angle ACO$ следует из теоремы об угле между касательной и хордой.

178. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Так как $f(1) = g(1)$ и $f(-1) = g(-1)$, то $|g(1)| \leqslant 1$ и $|g(-1)| \leqslant 1$, кроме того, $|c| = |f(0)| \leqslant 1$.

Предположим, что существует точка x, для которой $|g(x)| > 2$. Тогда вершина параболы $y = g(x)$ — точка с координатами $(x_0, g(x_0))$, причем $|x_0| \leqslant 1$ и $|g(x_0)| > 2$. Выделяя полный квадрат, получим $g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0)$. Подставим в это равенство вместо x ближайшее к x_0 из чисел -1 и 1 (можно считать для определенности, что это 1). Тогда $|1 - x_0| \leqslant 1$ и поэтому $|g(x_0)| = |g(1) - c(1 - x_0)^2| \leqslant |g(1)| + |c| \leqslant 1 + |c| \leqslant 2$, что противоречит неравенству $g(x_0) > 2$.

Пример трехчлена $f(x) = 2x^2 - 1$ показывает, что оценку $|g(x)| \leqslant 2$ улучшить нельзя. (В этом случае $g(x) = -x^2 + 2$.)

179. Ответ: наибольший возможный номер победителя — 20.

Так как теннисист с номером k может проиграть (не считая более сильных) только $(k+1)$-му и $(k+2)$-му теннисисту, то после каждого тура номер сильнейшего из победителей не может увеличиться больше чем на 2. Таким образом, номер победителя всего турнира не больше 21. Покажем, однако, что и 21-й теннисист победителем стать не мог. Для этого после первого тура должны были бы выбыть 1-й и 2-й, проиграв 3-ему и 4-му (иначе номер победителя — меньше 21), во втором должны выбыть 3-й и 4-й, а 5-й и 6-й — победить их и т. д. вплоть до 9 тура, в котором 19-й и 20-й должны победить 17-го и 18-го. Таким образом, 21-й теннисист не попадает в финал, где встречаются двое.

Осталось привести пример турнира, в котором побеждает 20-й игрок. Для этого всех теннисистов разобьем на две группы по 512 человек. В первую группу включим 19-го, 20-го и еще 510 более слабых игроков. Турнир в группе организуем так, чтобы выиграл 20-й (это, очевидно, можно сделать). Во вторую группу отнесем 1-го, 2-го, ..., 18-го и оставшихся более слабых игроков и организуем турнир так, чтобы победил 18-й. Это можно сделать, организовав турнир так, как это описано выше: в первом туре 3-й и 4-й выигрывают у 1-го и 2-го, во втором 5-й и 6-й — у 3-го и 4-го и т. д. до восьмого тура, когда 17-й и 18-й выигрывают у 15-го и 16-го, после чего в девятом туре 18-й выигрывает у 17-го. В финале встречаются 20-й и 18-й и, следовательно, 20-й может победить.

∇ Можно доказать по индукции, что в случае 2^n игроков наибольший номер победителя — $2n$.

180. Если уравнение $f(x)=x$ не имеет корней, то либо $f(x)>x$ при всех x (если $a>0$), либо $f(x)<x$ при всех x (если $a<0$), но тогда либо $f(f(x))>f(x)>x$, либо $f(f(x))<$ $<f(x)<x$, а это значит, что уравнение $f(f(x))=x$ не имеет корней.

∇ Утверждение задачи верно не только для квадратного трехчлена, но и для любой непрерывной функции.

181. а) Заметим, что если к данному множеству черных клеток добавить еще несколько черных клеток, то после перекрашивания могут возникнуть лишь дополнительные черные клетки. Добавим к исходному множеству M клетки так, чтобы получился черный квадрат $m \times m$ клеток.

Через $2m-1$ шагов от квадрата (а, значит, и от M) ничего не останется.

б) Будем множество черных клеток, которое получается из M за t шагов, обозначать через M_t. Докажем индукцией по n, что для любого множества M из n клеток M_n пусто. (Для $n=1$ это ясно.) Пусть для множеств менее чем из n клеток это доказано, и рассмотрим произвольное множество M из n клеток. Мы можем считать, что M лежит на координатной плоскости Oxy в углу $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, причем в полосах $0 \leqslant x \leqslant \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$ лежит по крайней мере по одной клетке из M (рис. 75). Тогда по предположению индукции M_{n-1} не пересекается с углом $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$ (клетки в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ не влияют на происходящее при $x \geqslant 1$), следовательно, M_{n-1}

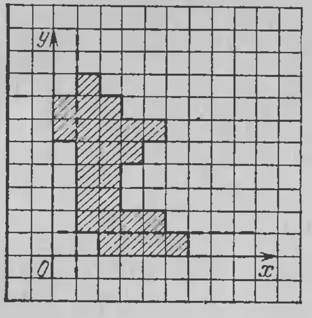


Рис. 75

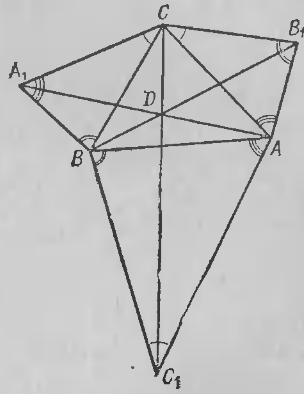


Рис. 76

лежит в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$. Аналогично можно доказать, что M_{n-1} лежит в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$. Значит, M_{n-1} может содержать лишь одну клетку, а M_n пусто.

∇ Более сложным задачам такого типа посвящена статья [74].

182. Пусть D — точка пересечения AA_1 и BB_1. Поскольку $\angle A_1CA = \angle B_1CB$ (рис. 76) и $A_1C : BC = AC : B_1C$, треугольники A_1CA и B_1CB подобны, следовательно, $\angle DBC = \angle DA_1C$. Поэтому точки B, D, C, A_1 лежат на одной окружности. Так же доказывается, что точки A, D, C, B_1 лежат на одной окружности, т. е. точка D является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1BC и AB_1C.

Заметим теперь, что $\angle ADB = 180° - \angle ADB_1 = 180° - \angle AC_1B$, поэтому точки A, D, B и C_1, лежат на одной окружности. Таким образом, D — точка пересечения всех трех описанных окружностей, а по доказанному ранее — прямая CC_1 проходит через точку D.

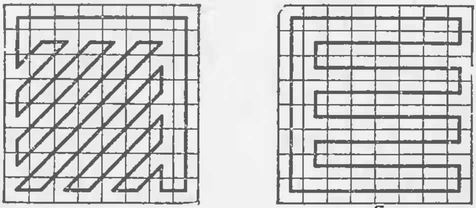
183. Эту задачу можно решить методом математической индукции. Возможно и такое решение.

Занумеруем N человек числами от 1 до N и будем знакомить человека с номером i и человека с номером j, если $|i-j| \leqslant$

$\leqslant N/2$. Легко видеть, что при таком способе знакомства одинаковое количество знакомых будет только у людей с номерами k и $N-k$. Следовательно, никакие три человека не будут иметь одинакового количества знакомых.

184. а) См. рис. 77, *б*.

б) Выделим на доске каемку из 28 крайних полей. При обходе доски король побывал в каждом из них. Занумеруем эти поля в том порядке, в каком король их посещал. Весь



а *б*

Рис. 77

путь короля разобьется на 28 участков: от поля *1* до поля *2*; от поля *2* до поля *3*; ...; от поля *28* до поля *1*. Путь короля не имеет самопересечений. Поэтому клетки *1* и *2*, *2* и *3*, ..., *27* и *28*, *28* и *1* являются соседними клетками каемки. (Если, например, клетки *1* и *2* не соседние, то они разбивают граничную каемку на 2 части и путь короля из любой клетки одной из этих частей в какую-нибудь клетку другой пересечет участок *1—2*, что противоречит условию задачи.) Но для того чтобы попасть на соседнюю клетку каемки, король на некотором шагу должен перейти с клетки одного цвета на клетку другого цвета, т. е. сделать ход либо по вертикали, либо по горизонтали. Отсюда следует, что в пути короля таких ходов не меньше 28.

в) Ясно, что длина пути короля не меньше 64 и такой короткий путь существует (рис. 77, *б*). С другой стороны мы доказали, что путь короля содержит не меньше 28 отрезков длины 1. Следовательно, король мог сделать не больше 36 диагональных ходов, так что весь его путь не больше $28+36\sqrt{2}$. (Пример такого пути приведен на рис. 77, *а*.)

185. Поскольку $1 \leqslant bc/2 \leqslant b^2/2$, $b \geqslant \sqrt{2}$.

186. Пусть каждая из двух прямых делит площадь многоугольника M пополам. Тогда в каждом из двух вертикальных углов, образуемых этими прямыми, лежат части многоугольника одинаковой площади (на рис. 78 это S_1 и S_2).

Рассмотрим вместе с данным многоугольником M симметричный ему относительно точки O многоугольник M'. Если через точку O проходит k прямых, каждая из которых делит площадь пополам, то в каждом из $2k$ углов, на которые k прямых делят плоскость, должна лежать точка пересечения контуров M и M'. Но на каждой стороне многоугольника M не более двух таких точек пересечения. Значит, если M имеет n сторон, то число точек пересечения не меньше $2k$ и не больше $2n$, откуда $k \leqslant n$.

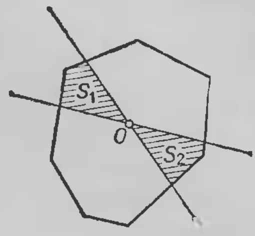


Рис. 78

187. Если $x_2 \geqslant x_1$, то неравенство вытекает из тождества

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - \\ - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = \\ = 4(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = \\ = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + \\ + 4x_5(x_2 - x_1) + 4x_1x_4.$$

Если $x_1 > x_2$, то из аналогично доказываемого тождества

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5)^2 = \\ = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5) + 4x_3(x_1 - x_2) + 4x_2x_4$$

∇ Вообще неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geqslant c_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1)$$

выполнено для следующих (наибольших) c_n: $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$ (причем при этих n неравенство верно для всех x_i, не обязательно положительных), а также для $c_n = 4$ при всех $n \geqslant 5$ (при $x_i > 0$). Последнее утверждение получается из доказанного для $n = 5$ индукцией: если передвинуть циклически номера так, чтобы x_{n+1} было наименьшим, то

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})^2 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geqslant \\ \geqslant -4x_1x_n + 4x_1x_{n+1} + 4x_nx_{n+1},$$

поскольку

$$2x_{n+1}(x_2 + \ldots + x_{n-1}) + (x_{n+1} - 2x_1)(x_{n+1} - 2x_n) \geqslant 0.$$

188. Ответ: 29 параллелепипедов.

Можно заметить, что параллелепипед однозначно определяется указанием любой его вершины и тройки «средних» плоскостей (плоскостей, каждая из которых равноудалена от всех его вершин, т. е. проходит через его центр и параллельна граням).

Для четырех данных точек K, L, M и N (не принадлежащих одной плоскости) существует семь плоскостей, равноудаленных от этих точек (они пересекают тетраэдр $KLMN$ в серединах ребер). Из этих семи плоскостей тройку плоскостей можно выбрать $C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ способами.

Но нам нужны лишь тройки плоскостей, пересекающихся в одной точке. Поэтому из 35 нужно исключить те тройки, которые параллельны одной прямой. Таких троек 6: это тройки плоскостей, параллельных одному из 6 ребер тетраэдра. Выбрав одну из $35 - 6 = 29$ троек «средних» плоскостей, мы по данным четырем вершинам однозначно построим параллелепипед — для этого достаточно через эти вершины провести плоскости (грани), параллельные «средним» плоскостям.

∇ В журнале «Квант» (1974, № 5, с. 50) нарисованы все 29 параллелепипедов и приведен также совершенно другой способ подсчета, при котором ответ 29 получается как сумма $1 + 4 + 12 + 12$.

189. Ответ: а) 10 вопросов; б) 11; в) 12; г) 50.

а) Разбиваем 30 чисел на 10 троек и узнаем произведения в этих тройках. Ясно, что меньшим числом вопросов не обойтись, так как каждое число должно входить в какую-нибудь тройку.

б) Произведение первых семи чисел находим, перемножив $a_1a_2a_3$, $a_1a_4a_5$ и $a_1a_6a_7$, а остальные 24 числа разбиваем на тройки, как в пункте а). И в этом случае ясно, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

в) Произведение первых 5 чисел находим, перемножая $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$ и $a_1a_2a_5$, а остальные разбиваем на тройки.

Так как ясно, что всякое число должно входить в некоторую тройку, то вопросов заведомо не меньше 11.

При этом одно из чисел входит ровно в две тройки (если больше, чем в две, то найдется число, не входящее ни в одну из троек). В произведение всех 11 троек войдет квадрат этого числа и, следовательно, произведение всех чисел мы не узнаем.

г) За 50 вопросов мы узнаем произведения $a_1a_2a_3$, $a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_5$, ..., $a_{50}a_1a_2$. Перемножив их, мы получим куб произведения всех чисел, который совпадает с самым этим произведением.

Меньше 50 вопросов недостаточно. Если, например, мы не знаем произведение какой-нибудь тройки $a_1a_2a_3$, то существуют два набора с разными произведениями, для которых произведения всех остальных троек совпадают: набор, в котором $a_1 = a_3 = a_6 = a_9 = \ldots = a_{48} = 1$, а остальные числа равны -1, и набор из одних единиц. Все произведения первого набора, кроме $a_1a_2a_3$, равны 1. Во втором наборе все произведения равны 1.

∇ Для n чисел, среди которых можно узнать произведение любых трех, как в задачах а)—в), наименьшее число вопросов равно: k, если $n = 3k$; $k+1$, если $n = 3k+1$; $k+2$, если $n = 3k+2$. Если же разрешается узнавать лишь произведение трех чисел, выписанных по окружности, то при n, делящемся на 3, надо задать $n/3$ вопросов, а при n, не делящемся на 3,— все n вопросов.

190. Ответ: $11 = 36 - 5^2$.

Последняя цифра числа $36^k = 6^{2k}$ равна 6, последняя цифра числа 5^l равна 5. Поэтому число $|6^{2k} - 5^l|$ оканчивается либо на 1 (если $6^{2k} > 5^l$), либо на 9 (если $6^{2k} < 5^l$).

Равенство $6^{2k} - 5^l = 1$ невозможно, так как тогда было бы $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$, а число $6^k + 1$ не делится на 5. При $k = 1$ и $l = 2$ получим $36^k - 5^l = 11$.

Равенство $5^l - 6^{2k} = 9$ также невозможно, так как 5^l при натуральном l не делится на 3.

191. а) Ответ: не всегда. Пример: если на каждой стороне правильного треугольника со стороной 2 построить равнобедренные треугольники с высотой 1/10, то все стороны полученного шестиугольника будут больше 1, а все диагонали не больше 2.

б) Ответ: всегда. Из трех диагоналей AD, BE и FC найдутся две, угол α между которыми не меньше 60°. Пусть, например, это AD и BE. Построим параллелограмм $BEDK$. Так как $BE = DK > 2$, $AD > 2$ и $\angle ADK = \alpha \geqslant 60°$, то $AK > 2$, но $AB + BK \geqslant AK$. Поэтому либо $AB > 1$, либо $ED = BK > 1$.

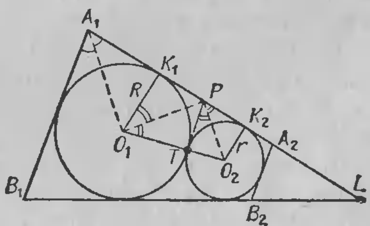


Рис. 79

192. Из подобия треугольников O_1K_1P и PK_2O_2 (обозначения ясны из рис. 79) получим $K_1P \cdot PK_2 = Rr$, а из подобия $A_1K_1O_1$ и $A_2K_2O_2$ следует, что $A_1K_1 \cdot K_2A_2 = Rr$. Теперь без труда получаем равенство $K_1P = PK_2 = \sqrt{Rr}$, а также неравенство $A_1K_1 + K_2A_2 \geqslant 2\sqrt{Rr}$ (среднее арифметическое не меньше среднего геометрического). Итак, если точка A_2, для которой $K_2A_2 = \sqrt{Rr}$, лежит между K_2 и L, то длина наименьшей боковой стороны трапеции равна $A_1K_1 + K_1K_2 + K_2A_2 = 4\sqrt{Rr}$. Если же $A_2K_2 \geqslant K_2L$, т. е. $\sqrt{Rr} \geqslant \sqrt{Rr} \cdot 2r/(R - r) = q$, $R \geqslant 3r$, то

$$A_1A_2 > 2\sqrt{Rr} + q + \frac{Rr}{q} = \sqrt{Rr}\,\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}.$$

Таким образом, если $3r > R$, то минимальная длина боковой стороны равна $4\sqrt{Rr}$.

Если же $3r \leqslant R$, то трапеции с минимальной длиной боковой стороны нет. При этом можно утверждать, что длина боковой стороны больше чем $\sqrt{Rr}\,\dfrac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$ (оценка точная).

193. Отложим все векторы от некоторой точки O.

Докажем, что если уже выбраны k векторов с суммой $s = \overrightarrow{OS}$ (рис. 80) $|s| \leqslant 1$, то из остальных векторов можно выбрать либо один вектор a, для которого $|s+a| \leqslant 1$, либо два вектора b и c, для которых $|s+b+c| \leqslant 1$. В самом деле, если среди остальных векторов есть вектор a, для которого $\angle(a, s) \geqslant 120°$, то $|s+a| \leqslant 1$. Если же такого вектора нет, то, так как по обе стороны от прямой OS есть векторы системы, можно выбрать в качестве b вектор одной из двух полуплоскостей, образующий наибольший угол с вектором s. Точно так же в другой полуплоскости выбирается вектор c. Ясно, что один из углов — $\angle(c, s)$ или $\angle(b, s)$ — тупой, а $\angle(b, c) > 120°$. Пусть, например, $\angle(b, s) > 90°$. Тогда $|s+b| < \sqrt{2}$, а $\angle(b+c, s) > 120°$ и поэтому $|s+b+c| \leqslant 1$. Таким образом, если присоединять к системе с суммой s сначала вектор b, а затем c, то сумма после каждого шага будет меньше $\sqrt{2}$.

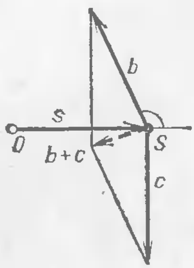


Рис. 80

∇ Мы доказали, что в условии 2 можно заменить на $\sqrt{2}$. Более тонкие рассуждения показывают, что всегда можно так занумеровать векторы, что сумма первых из них будет не больше чем $\sqrt{5}/2$, причем эта оценка уже точная: пример $2n+1$ векторов — один $(-1, 0)$, n штук $\left(1/n, \sqrt{1-1/n^2}\right)$ и n штук $\left(1/n, -\sqrt{1-1/n^2}\right)$ показывает, что константу $\sqrt{5}/2$ нельзя заменить меньшей.

∇ Аналогичную теорему (оно называется леммой Штейница) можно доказать и для m-мерного пространства, причем (для любой «нормы» векторов) соответствующая константа Штейница не превосходит m. *)

194. Ответ: два из чисел a, b, c равны 0, третье ± 1 (всего 6 решений).

Подставляя в условие последовательно: $x = y = z = 1$, затем $x = y = 0$, $z = 1$, и, наконец, $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, по-

---

*) См. статью Гринберг В. С., Севастьянов С. В. О величине константы Штейница//Функцион. анализ и его прил.— 1980. — Т. 14, вып. 2.

лучим систему $|a+b+c|=1$, $|a|+|b|+|c|=1$, $|a-b|+|b-c|+|c-a|=2$. Так как $|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$, то все числа a, b, c одного знака, т. е. $ab \geqslant 0$, $bc \geqslant 0$, $ac \geqslant 0$. Однако в неравенстве

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| \leqslant 2|a|+2|b|+2|c|=2$$

(вытекающем из $|a-b| \leqslant |a|+|b|$ и двух аналогичных) равенство возможно лишь при $ab \leqslant 0$, $bc \leqslant 0$, $ac \leqslant 0$. Отсюда $ab=bc=ac=0$, так что два из чисел a, b, c равны 0, а третье (как видно из любого из трех уравнений) по модулю равно 1.

195. Пусть F — точка пересечения прямых BH и AD (рис. 81). Из равенства треугольников ABF и BPC (по катету и острому углу) следует, что $AF = BP = BQ$ и $FD = CQ$; поэтому $QCDF$ — прямоугольник.

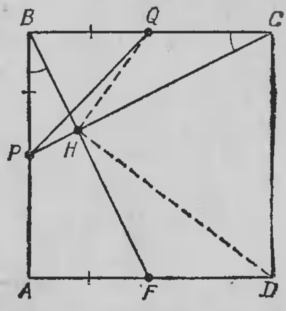


Рис. 81

Окружность, описанная около него, проходит через точку H (FC — диаметр этой окружности, а $\angle FHC = 90°$). Так как DQ — тоже диаметр, то и $\angle DHQ = 90°$.

196. Для доказательства достаточно заметить, что при перекрашивании любой «особой» точки в другой цвет число отрезков с разноцветными концами уменьшается по крайней мере на 1. Поэтому перекрашивание удается произвести только конечное число раз, после чего не остается ни одной особой точки.

197. Ответ: $n=k$ и $k=1$, 8 или 9.

Если n^n имеет k цифр, а k^k — n цифр, то $10^{k-1} \leqslant n^n < 10^k$ и $10^{n-1} \leqslant k^k < 10^n$. Пусть, для определенности, $n \geqslant k$. Тогда $n^n < 10^n$, т. е. $n < 10$ и $k < 10$. Осталось проверить, что $2^2 < 10$, $3^3 < 100$, $4^4 < 10^3$, $5^5 < 10^4$, $6^6 < 10^5$, $7^7 < 10^6$, $10^7 < 8^8 < 10^8$, $10^8 < 9^9 < 10^9$.

198. Повернем треугольник ABC вокруг вершины C на $90°$ так, чтобы точка A перешла в B. Тогда E перейдет в точку F прямой AC, для которой $FB \| CL \| DK$ и $FC = CD$, поэтому $BL = LK$.

199. а) Ответ: можно. При любом положении мышки следует поместить кошек так, чтобы мышка находилась на отрезке между ними, параллельном одной из диагоналей доски, и в ответ на любой ход мышки перемещать кошек так, чтобы мышка по-прежнему была между ними на прямой, параллельной диагонали.

б) Проведем через мышку два отрезка, параллельных диагоналям, и исключим клетки этих отрезков. В одной из четырех оставшихся частей доски кошек нет, и мышка должна идти в эту часть по направлению к краю. Ясно, что кошки не смогут ее поймать, так как после любого хода кошек перед мышкой в направлении ее движения будет свободная от кошек часть доски.

200. а) Чтобы получить требуемую расстановку, в одной половине строки запишем четные числа, а в другой — нечетные. При этом полусумма любых двух чисел из разных половин будет не целой и поэтому не содержится между ними. Затем с первой и второй половинами проделаем аналогичную процедуру: каждую из них разобьем на две четверти и разместим в них числа вида $4k$, $4k+2$, $4k+1$ и $4k+3$ соответственно: при этом полусумма чисел из разных четвертей в левой половине будет нечетной, а в правой — четной и поэтому не содержится между ними, далее разобьем каждую четверть пополам, причем роль «четных» и «нечетных» чисел теперь будут играть числа с разными остатками от деления на 8 и т. д. В итоге получится такая расстановка:

$$8,\ 24,\ 16,\ 32,\ 4,\ 20,\ 12,\ 26,\ 6,\ 22,\ 14,\ 30,\ 2,\ 18,\ 10,\ 26,$$
$$7,\ 23,\ 15,\ 31,\ 3,\ 19,\ 11,\ 27,\ 5,\ 21,\ 13,\ 29,\ 1,\ 17,\ 9,\ 25.$$

б) Для того чтобы доказать это утверждение для любого количества N чисел, достаточно доказать его для $N = 2^n$ (лишние числа можно выбросить; например, из расстановки $128 = 2^7$ чисел можно выбросить числа большие 100 и получить нужную расстановку $N = 100$ чисел). Основная идея уже показана в решении а); более формально и коротко можно изложить доказательство как индукции по n.

Для $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно: годятся расстановки $(1, 2)$, $(2, 4, 1, 3)$. Если $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — расстановка $N = 2^n$ чисел $1, 2, \ldots, N$, удовлетворяющая условию, то

$$2a_1,\ 2a_2,\ \ldots,\ 2a_N,\ 2a_1-1,\ 2a_2-1,\ \ldots,\ 2a_N-1$$

будет расстановкой $2N = 2^{n+1}$ чисел $1, 2, \ldots, 2N$, также, как нетрудно убедиться, удовлетворяющей условию: для чисел из разных половин — по соображениям четности, для чисел из одной половины — по предположению индукции.

201. Ответ: 15 чисел (111, 222, ..., 999, 407, 518, 629, 370, 481, 592).

Пусть $\overline{abc}$ — искомое число. Условие задачи означает, что

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=6\overline{abc},$$

откуда $222(a+b+c) = 6(100a+10b+c)$, или $7a = 3b + 4c$. Это уравнение можно решить перебором всех вариантов (например, полагая последовательно $a = 1, 2, \ldots, 9$ и решая затем получившееся уравнение с учетом того, что b и c — цифры). Сократить перебор позволяют соображения делимости. Например, уравнение можно переписать так: $7(a-b) = 4(c-b)$, откуда либо $a = b = c$, либо $a - b = 4$ и $c - b = 7$ (тогда $0 \leqslant b \leqslant 2$), либо $b - a = 4$, $b - c = 7$ (тогда $7 \leqslant b \leqslant 9$).

202. Рассмотрим множество вершин данного многоугольника P и выберем три из них — A, B, C — так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей. (Ясно, что площадь треугольника ABC не меньше площади любого из треугольников, которые можно поместить в многоугольник P. Мы используем дальше частные случаи этого факта.)

Пусть M — произвольная точка многоугольника P. Так как площадь треугольника MBC не больше S_{ABC}, то M лежит в полосе, ось симметрии которой — прямая BC, а ширина—удвоенная высота $\triangle ABC$, опущенная из вершины A. Проводя то же рассуждение для $\triangle MAB$ и $\triangle MCA$, получаем, что все точки многоугольника принадлежат пересечению трех построенных полос — треугольнику $A'B'C'$ (рис. 82), площадь которого равна $4S_{ABC} = 4$.

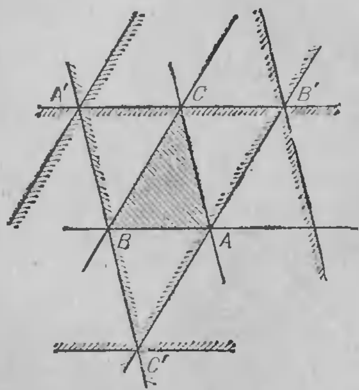


Рис. 82

∇ Подобное рассуждение уже встречалось в задаче 80, где мы по существу установили, что $\triangle A'B'C'$ — множество точек M, для которых все три площади S_{MAB}, S_{MBC}, S_{MCA} не превосходят S_{ABC}.

203. а) Функция f монотонно не убывает на отрезке $[0, 1]$, поскольку из $1 \geqslant x \geqslant y \geqslant 0$ следует $f(x) = f((x-y)+y) \geqslant$ $\geqslant f(x-y) + f(y) \geqslant f(y)$. Кроме того, $f(2x) \geqslant 2f(x)$ при всех x. Пользуясь этим, получаем:

$$\text{при } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \qquad f(x) \leqslant f(1) \leqslant 2x;$$

$$\text{при } \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2} \qquad f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 2x;$$

. . . .

$$\text{при } \frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n} \qquad f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(2x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant 2x,$$

. . . .

а так как $f(0) = 0$, то $f(2x) \leqslant 2x$ при всех x.

б) О т в е т: неверно.

П р и м е р:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 1 & \text{при} \quad 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Для этой функции выполнены все условия задачи, но

$$f(0{,}51)=1>1{,}9\cdot 0{,}51=0{,}969.$$

204. О т в е т: 1/8. Поскольку (обозначения ясны из рис. 83)

$$\frac{C_1M_2}{M_2M_1}\leqslant\frac{AK}{KC}\leqslant\frac{AB_1}{B_1C}=1,$$

то $C_1M_2\leqslant M_2M_1$, и поэтому $S_{C_1M_2K_1}\leqslant S_{M_2M_1K_1}$. Так же доказывается, что $S_{AL_2M_1}\leqslant S_{L_2L_1M_1}$ и $S_{B_1K_2L_1}\leqslant S_{K_2K_1L_1}$.

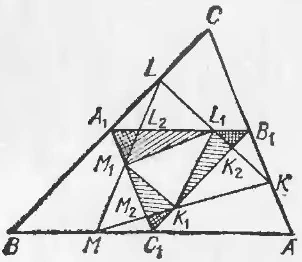


Рис. 83

Пусть S — площадь общей части треугольников KLM и $A_1B_1C_1$. Сложив полученные неравенства, получим

$$S_{A_1B_1C_1}-S\leqslant S_{K_1M_2M_1}+S_{M_1L_2L_1}+$$
$$+S_{L_1K_2K_1}=S-S_{K_1M_1L_1}\leqslant S,$$

откуда $2S\geqslant S_{A_1B_1C_1}=1/4$, т. е. $S\geqslant 1/8$. Если точка M совпадает с C_1, точка L — с C, а K — с A, то $S=1/8$.

205. Если хорда Q_1Q_2 круга с центром O получена из хорды P_1P_2 поворотом на угол α вокруг точки O, то точка пересечения R прямых P_1P_2 и Q_1Q_2 может быть получена из середины M хорды P_1P_2 поворотом с центром O на угол $\alpha/2$ (при этом точка M перейдет в некоторую точку M' на отрезке OR) и последующей гомотетией с центром O и коэффициентом $k=$ $=1/\cos(\alpha/2)=OR:OM=OR:OM'$. Применим эти соображения к решению задачи.

а) Треугольник $A_2B_2C_2$ получается описанными преобразованиями из треугольника KLM, образованного серединами сторон треугольника ABC. Поскольку $\triangle KLM\backsim\triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle KLM\backsim\triangle ABC$, получаем $\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$.

б) Четырехугольник из условия задачи получается преобразованием подобия из четырехугольника, образованного серединами сторои четырехугольника $ABCD$. Но середины любых сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

206. О т в е т: 1/4. Прежде всего заметим, что второй игрок может добиться того, что $S_{XYZ}\leqslant 1/4$ независимо от игры пер-

вого. Для этого ему достаточно выбрать Y так, что $XY \parallel AC$ (рис. 84). Тогда для любой точки Z на основании AC будет выполнено неравенство

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}}=\frac{XY}{AC}\cdot\frac{H-h}{H}=\frac{h(H-h)}{H^2}\leqslant\frac{1}{4}.$$

С другой стороны, первый игрок, взяв в качестве X и Z середины сторон AB и AC, обеспечивает себе равенство $S_{XYZ} = 1/4$ независимо от выбора второго.

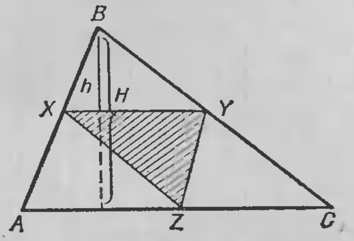


Рис. 84

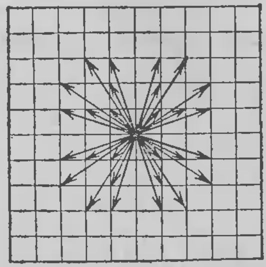


Рис. 85

∇ Более трудна аналогичная задача, где вместо площадей речь идет о периметрах треугольников (см. «Квант», 1976, № 4, с. 32).

207. Ответ: $4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$.

Контур 32-угольника $A_1A_2 \ldots A_{32}$ мы представим как изображение суммы 32 векторов $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{32}A_1}=0$.

Так как из любых 32 различных по направлению векторов с суммой 0 можно составить выпуклый 32-угольник, задача сводится к следующей: найти 32 вектора, удовлетворяющих условиям:

а) начало и конец каждого вектора лежат в узлах клетчатой бумаги;

б) любые два вектора имеют разные направления;

в) сумма всех векторов равна 0;

г) при выполнении условий а)—в) сумма длин всех векторов минимальна.

Будем откладывать векторы от одной точки. Система 32 векторов, изображенная на рис. 85, удовлетворяет всем условиям а)—г). Среди этих векторов четыре вектора длины 1 (их нет на рис. 85), четыре — $\sqrt{2}$ и по восемь векторов длины $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$.

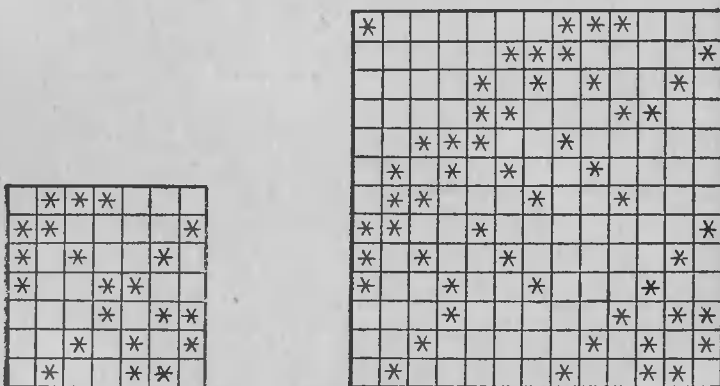
∇ Аналогичный прием «плотного заполнения уровней» — выбор n четверок различных целочисленных векторов наименьшей длины — позволяет сконструировать $4n$-угольник минимального периметра с вершинами в узлах.

208. Ответ: а) $k = 21$; б) $k = 52$ (рис. 86).

Оценим количество точек, которые можно нужным образом разместить в квадрате $m \times m$.

Пусть x_i — количество точек в строке с номером i и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = k$.

Если в некоторой строке отмечены центры каких-то двух клеток, то ни в какой другой строке такая же пара клеток не



а б

Рис. 86

может быть отмечена. Всего в i-й строке отмечено $x_i(x_i - 1)/2$ пар клеток. Так как все отмеченные пары различны, то их суммарное число не больше общего числа возможных пар, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i(x_i - 1)}{2} \leqslant \frac{m(m-1)}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant m(m-1) + \sum_{i=1}^{m} x_i = m(m-1) + k;$$

поскольку $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2/m = k^2/m$, получаем неравенство $k^2/m \leqslant m(m-1) + k$. Из этого неравенства следует, что

$$k \leqslant \frac{m + m\sqrt{4m-3}}{2}. \qquad (*)$$

При $m=7$ и $m=13$ получаем, что $k \leqslant 21$ и $k \leqslant 52$ соответственно.

∇ Самое загадочное в решении этой задачи — примеры, реализующие точную оценку. (Участниками олимпиады они были найдены подбором, с помощью каких-то соображений симметрии.) Укажем способ их построения. В примере а) в качестве «номеров» строк (а также столбцов) используем тройки из чисел 0 и 1, отличные от (0; 0; 0). Их как раз 7: (1; 1; 1), (1; 1; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечаем, если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ четно. В примере б) в качестве «номеров» строк и столбцов используем тройки из чисел 0, 1 и —1, отличные от (0; 0; 0), причем из двух троек, получающихся одна из другой умножением на —1, используется лишь одна. Их как раз 13: (1; 1; 1), три перестановки (1; 1; 0), три перестановки (1; 1; —1), три перестановки (1; —1; 0) и три перестановки (1; 0; 0). Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечаем, если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ делится на 3.

Это — конструкции конечных проективных плоскостей над полем из $p=2$ и $p=3$ элементов: столбцам соответствуют точки, строкам — прямые проективной плоскости, а требуемое в условии свойство таблицы сводится к тому, что через каждые две точки проходит одна прямая и каждые две прямые пересекаются в одной точке (прямая (a_1, a_2, a_3) содержит точку (x_1, x_2, x_3), если $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ равно 0 по модулю p).

Можно убедиться, что неравенство (*) превращается в равенство лишь при $m = p^2 + p + 1$, где p — натуральное число; при этом $k = (p+1)(p^2 + p + 1)$. Вопрос о том, существует ли для таких m и k соответствующая таблица, очень сложен: он сводится к (нерешенной в общем виде) проблеме существования конечных проективных плоскостей порядка p; во всяком случае, при p простом (или равном степени простого числа) ответ на этот вопрос положителен.

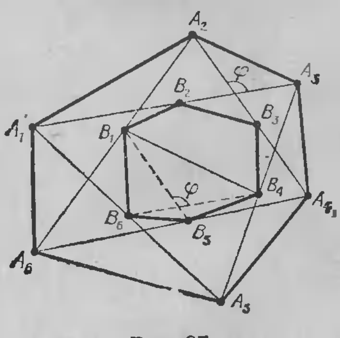


Рис. 87

209. Площадь четырехугольника $B_1B_4B_5B_6$ (рис. 87) равна четверти площади четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, поскольку диагонали его B_1B_5 и B_4B_6 параллельны диагоналям A_2A_4 и A_1A_3 и равны их половинам, а площадь выпуклого четырехугольника выражается формулой $S = d_1d_2 \sin\varphi/2$, где d_1 и d_2 — длины его

диагоналей, φ — угол между ними. Точно так же площадь $B_1B_2B_3B_4$ равна четверти площади $A_1A_4A_5A_6$.

210. При $n = 1$ четыре числа 11, 21, 12, 22 удовлетворяют условию. Докажем утверждение задачи по индукции.

Обозначим через a' число, полученное из a заменой цифр 1 на 2 и 2 на 1, а через ab — число, полученное приписыванием к a числа b. Пусть построено множество A_n из 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно, причем каждые 2 из чисел отличаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах. Рассмотрим множество A_{n+1}, состоящее из чисел aa и aa', где $a \in A_n$. Все такие числа 2^{n+1}-значны, всего их 2^{n+2}. Кроме того, любые два из них отличаются не менее чем в 2^n разрядах. В самом деле, числа aa и aa', а также числа aa и bb' при любых a и b отличаются ровно в 2^n разрядах (в тех разрядах, где a и b отличаются, a' и b' совпадают, и наоборот); числа aa и bb по предположению индукции отличаются не менее чем в 2^n разрядах. Утверждение доказано.

211. Спроектируем все многоугольники на некоторую прямую. Проекция каждого многоугольника является отрезком, причем по условию любые два отрезка имеют общую точку. Отсюда следует, что все отрезки имеют общую точку (чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть данную прямую как числовую ось и взять наименьший из правых концов этих отрезков). Прямая, перпендикулярная к данной и проходящая через отмеченную точку, пересекает все многоугольники.

212. Без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда $c(a-c)(b-c) \geqslant 0$, откуда $c^3 + abc \geqslant ac^2 + bc^2$. Достаточно доказать, что $a^3 + b^3 + 2abc \geqslant ab(a+b) + a^2c + b^2c$. Последнее неравенство преобразуется к виду $(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0$.

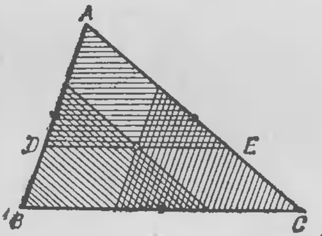


Рис. 88

∇ Легко видеть, что равенство в данном неравенстве возможно лишь при $a = b = c$.

213. Если одна из мух находится в вершине A, то центр тяжести треугольника, образованного мухами, находится в треугольнике ADE (рис. 88), где $DE : BC = 2:3$. Так как одна из мух побывала во всех вершинах, то центр тяжести «треугольника мух» должен принадлежать трем треугольникам, заштрихованным на рисунке. Единственная общая точка этих треугольников — центр тяжести данного.

214. Пусть p — число нулей, q — число единиц, r — число двоек. После каждой операции все три числа p, q и r изме-

няются на 1, тем самым меняют четность. Когда на доске останется одна цифра, одно из чисел p, q и r станет равно 1, два другие — 0. Следовательно, вначале четность одного из этих чисел была отлична от четности двух других. Соответствующая цифра и останется на доске.

215. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки пересечения прямых с нижней кромкой полосы, занумерованные по порядку (слева направо), $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — точки пересечения с верхней кромкой (также слева направо). Занумеруем пути, выходящие из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, по порядку числами $1, 2, \ldots, n$. Из правил построения путей вытекают следующие свойства.

1° По каждому отрезку каждой прямой проходит ровно один путь.

2° Соседние пути — k-й и $(k+1)$-й — соприкасаются вершинами, причем k-й всюду идет левее $(k+1)$-го (для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$). Несоседние пути вообще не имеют общих точек.

3° k-й путь оканчивается в точке B_k.

Теперь докажем все утверждения задачи.

а) Рассмотрим все пути с нечетными номерами. По свойству 1° они не могут иметь общих точек, а их число не меньше $n/2$.

б) Подсчитаем двумя способами общее количество отрезков на всех путях. Каждый из отрезков A_iB_{n+1-i} одной из прямых разбивается точками пересечения с остальными прямыми на n отрезков. Поэтому всего отрезков n^2. Ту же сумму n^2 согласно 1° мы должны получить, сложив количества отрезков во всех n путях. Поэтому по крайней мере одно из слагаемых будет не меньше n.

Конечно, утверждение б) следует также из г).

в) Оценим количество отрезков в двух *крайних* путях — 1-ом и n-ом.

Эти пути ограничивают выпуклые множества, лежащие левее 1-го и правее n-го пути; первый путь лежит внутри угла A_1PB_1, а второй внутри угла A_nPB_n, где P — точка пересечения прямых A_1B_n и A_nB_1. Остальные прямые A_2B_{n-1}, $A_3B_{n-2}, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}B_2$ могут иметь общий отрезок только с одним из двух крайних путей (а именно с тем из них, который лежит по другую сторону от этой прямой, чем точка P). Итак, всего в двух крайних путях не больше чем $4+(n-2)$ отрезков. Поэтому в одном из них не больше чем $\dfrac{n}{2}+1$ отрезок.

г) Рассмотрим *средний* путь, т. е. путь с номером $m = (n+1)/2$, если n нечетно и $m = n/2$, если n четно, и докажем, что он проходит по всем прямым (рис. 89). В самом деле, он делит полосу на две области: каждый из отрезков A_1B_n, A_2B_{n-1}, ..., A_nB_1 начинается в одной из областей (может быть, на границе) и кончается в другой и, следовательно, имеет со средним путем общую точку, поэтому (по правилу построения путей) — и общий отрезок.

∇ В этой задаче было бы интересно получить хорошие оценки снизу и сверху для количества отрезков максимального (по числу отрезков) пути.

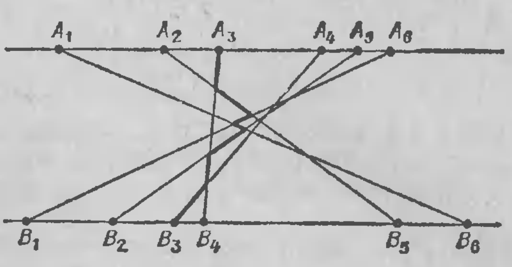


Рис. 89

216. Ответ: при четном k можно, при нечетном — нельзя.

Для четного k легко построить пример: можно изготовить куб из чередующихся черных и белых блоков $2 \times 2 \times 1$.

Предположим теперь, что нам удалось составить нужный куб при нечетном k. Соединим отрезками центры соседних белых кубиков. Из каждого центра выходят 2 отрезка. Такая система отрезков образует одну или несколько замкнутых ломаных. Заметим, что число звеньев у замкнутой ломаной, составленной из отрезков одинаковой длины и трех попарно перпендикулярных направлений, четно (четно даже число звеньев каждого из направлений). Таким образом, число белых кубиков четно. Так же доказывается четность числа черных кубиков. Противоречие.

217. а) В качестве такого числа S можно взять сумму всех цифр в записи всех коэффициентов многочлена $P(x)$: тогда для любого $n \geqslant n_0$, где n_0 выбрано так, что 10^{n_0} больше всех коэффициентов, $a_{10^n} = S$.

б) Результат а) можно применить к многочлену $Q(x) = P(x+d)$, где d — большое натуральное число; при этом получится, что при достаточно большом $n_0 = n_0(d)$ для любого $n \geqslant n_0$ сумма всех цифр числа $Q(10^n) = a_{10^n+d}$ одна и та же. Конечно, нужно проверить условие, что все коэффициенты $Q(x)$ одного знака.

При достаточно большом $d > 0$ коэффициенты многочлена $Q(x) = P(x+d)$ имеют тот же знак, что и старший коэффициент многочлена $P(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n$. Наметим два пути доказательства.

1° Коэффициенты многочлена

$$\begin{aligned} Q(x) = p_0(x+d)^n + p_1(x+d)^{n-1} + \ldots + p_n = \\ = p_0\left(x^n + C_n^1x^{n-1}d + \ldots + C_n^{n-1}xd^{n-1} + d^n\right) + \\ + p_1\left(x^{n-1} + C_{n-1}^1x^{n-2}d + \ldots + d^{n-1}\right) + \ldots + p_n = \\ = q_0x^n + q_1(d)\,x^{n-1} + \ldots + q_n(d) \end{aligned}$$

где $q_k(d)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — многочлены от d, причем $q_k(d)$ имеет степень k и старший член $p_0C_n^kd^k$ (а q_0 просто равняется p_0). Тогда при достаточно большом $d > d_0$ каждый $q_k(d)$ будет иметь тот же знак, что и p_0.

2°. Если у многочлена $P(x)$ первые несколько коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_{n-k}$ имеют один и тот же знак, то при сдвиге $P(x) \to (x+d) = Q(x)$ на d из него получится многочлен, у которого коэффициенты $q_0, q_1, \ldots q_{n-k}$ имеют тот же знак, и следующий коэффициент $q_{n-k+1} = p_0C_n^{n-k+1}d^{n-k+1} + p_1C_{n-1}^{n-k}d^{n-k} + \ldots + p_{n-k}d + p_{n-k+1}$ при достаточно большом d будет иметь тот же знак. Таким образом, за $n-1$ сдвиг мы можем получить из любого многочлена $P(x)$ такой, у которого все коэффициенты имеют тот же знак, что и p_0.

∇ Здесь использовался лишь тот факт, что числа C_n^k — коэффициенты бинома $(a+b)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^ka^kb^{n-k}$ (см. П6) — положительны.

218. Мы рассмотрим сразу случай n команд — участников чемпионата мира.

а) Ответ: $k = n-2$, если $n \geqslant 3$ (в частности, при $n = 20$ получим $k = 18$).

Общее количество очков, разыгрываемых в чемпионате мира (за победу — 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0), равно $n(n-1)$, в чемпионате Европы — $k(k-1)$.

Пусть x — количество очков, набранных чемпионом Европы в играх чемпионата мира, а y — количество очков, полученных им в играх с европейскими командами $x \geqslant y$. Пусть каждая из остальных команд набрала в играх чемпионата мира больше чем x очков, т. е. не меньше чем $x+1$ очко. Тогда $x + (n-1)(x+1) \leqslant n(n-1)$, или $x \leqslant n - 2 + \dfrac{1}{n}$, а так как x — целое число, то $x \leqslant n-2$.

Каждая из остальных европейских команд набрала не больше $y-1$ очков в чемпионате Европы и потому $y+(y-1)(k-1)\geqslant k(k-1)$, или $y\geqslant k-\frac{1}{k}$, а поскольку y — целое число, $y\geqslant k$. Итак, $k\leqslant y\leqslant x\leqslant n-2$, т. е. $k\leqslant n-2$.

1		1	2	1	1	1				1
2	1		2	0	1	1				1
3	0	0		2	1	1				1
4	1	2	0		1	1				1
5	1	1	1	1		1				
6	1	1	1	1	1					
⋮										⋮
										1
n	1	1	1	1	1		…		1	

а

								А	Б
1		1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	0	1
6	1	1	0	0	0		1	1	0
7	1	1	1	0	0	0		0	1
А	1	0	1	0	1	0	1		0
Б	0	1	0	1	0	1	0	1	

в

1		1	1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0		1	1	1	0
7	1	1	0	0	0	0		1	0	1
8	1	1	1	0	0	0	0		1	0
А	1	0	1	0	1	0	1	0		1
Б	0	1	0	1	0	1	0	1	0	

б

1		1	1	1	1	0
2	0		1	1	1	0
3	0	0		1	1	1
4	0	0	0		1	1
5	0	0	0	0		1
6	1	1	0	0	0	

г

1		1	1	1	0
2	0		1	1	0
3	0	0		1	1
4	0	0	0		1
5	1	1	0	0	

д

Рис. 90. *а*) Чемпионат по хоккею; n команд, $k=n-2$. Команды 3, ..., n — европейские, команда 3 — чемпион Европы. *б*) Чемпионат по волейболу; $n=8$, $k=3$. Команды 6, 7, 8 — европейские, команда 6 — чемпион Европы. Добавлены команды А и Б. *в*) Чемпионат по волейболу; $n=7$, $k=3$. Команды 5, 6, 7 — европейские, команда 5 — чемпион Европы. Добавлены команды А и Б. *г*) Чемпионат по волейболу; $n=6$, $k=2$. *д*) Чемпионат по волейболу; $n=5$, $k=2$.

На рис. 90, *а* приведен пример турнирной таблицы, показывающий, что чемпион Европы (третья команда) может занять последнее место в чемпионате мира.

б) Ответ: $k=n-5$ при четном $n\geqslant 8$ (в частности, $k=15$ при $n=20$), $k=n-4$ при нечетном $n\geqslant 7$; $k=2$ при $n=6$ и $n=5$.

В чемпионате по волейболу победившая команда получает 1 очко, потерпевшая поражение — 0 очков, так что разыгрывается ровно $n(n-1)/2$ очков. Рассмотрим подробно случай четного $n=2l$.

Рассуждая, как и выше, получим (x, y — те же, что и в случае а))

$$x+(2l-1)(x+1)\leqslant 2l(2l-1)/2=l(2l-1), \tag{1}$$

$$y+(k-1)(y-1)\geqslant k(k-1)/2. \tag{2}$$

Из равенства (1) следует, что $x\leqslant l-\frac{3}{2}+\frac{1}{2l}$. Поэтому $x\leqslant l-2$. Из неравенств $l-2\geqslant x\geqslant y$ и неравенства (2) следует, что

$$k^2+(5-2l)k-2\leqslant 0. \tag{3}$$

При $l\geqslant 4$ наибольшее целое k, удовлетворяющее неравенству (3), равно $2l-5$ (при $k=2l-5$ неравенство (3) справедливо, а при $k=2l-4$ его левая часть положительна).

Теперь докажем, что равенство $k=2l-5=n-5$ при $l\geqslant 4$ возможно. На рис. 90, *в* приведена турнирная таблица для $n=8$, $k=3$ (последние 3 команды — европейские). Эта таблица послужит началом индукции.

Дальнейшие построения проводим по индукции, добавляя на каждом шагу по 2 европейские команды.

Заметим прежде всего, что при $k=2l-5$ непременно $x=y=l-y$. В самом деле,

$$y\geqslant\frac{(k-1)(k+2)}{2k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},\ \text{или}\ y\geqslant l-2-\frac{1}{2(2l-5)},$$

а так как y — целое число, то $y=l-2=x$. Это значит, что чемпион Европы проиграл всем неевропейским командам.

Теперь предположим, что уже реализована таблица чемпионата с $k=n-5=2l-5$. Добавим две европейские команды A и B по следующему правилу: команда A выигрывает у старых команд с нечетными номерами и у команды B и проигрывает остальным; команда B выигрывает у команд с четными номерами и проигрывает остальным. Каждая из прежних команд получает в результате по одному очку, так что их взаимное положение не меняется.

У чемпиона Европы теперь $l-1$ очко, у команды A — $l+1$ очко; у команды B — l очков, так что старый чемпион Европы по-прежнему на последнем месте. В играх же с европейскими командами команда A наберет $l-2$ очка ($l-3$ в играх со «старыми» командами и одно — с командой B); команда B в играх с европейскими командами также наберет $l-2$ очка, так что чемпион Европы останется прежним.

Случаи нечетных $n = 2l - 1$ при $l \geqslant 4$, а также $n \leqslant 6$ рассматриваются аналогично (рис. 90*в, г, д*).

219. а) Отметим два наибольших числа из четырех, составляющих таблицу 2×2. Если они стоят в одном столбце, то искомым числом является меньшее из них, а если они стоят в одной строке, то — большее из других двух чисел (при этом допускаются и нестрогие неравенства).

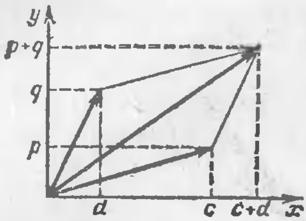


Рис. 91

Остается случай, когда два отмеченных числа стоят по диагонали (и строго больше двух других), но этот случай невозможен. Проще всего убедиться в этом, опираясь на тот факт, что дробь $(c+d)/(p+q)$ всегда лежит между c/p и d/q (при $p > 0$, $q > 0$; рис. 91 дает этому факту геометрическую интерпретацию). Из него следует, что $\dfrac{a_1+b_1+a_2+b_2}{p_1+q_1+p_2+q_2}$ лежит между $\dfrac{a_1+b_1}{p_1+q_1}$ и $\dfrac{a_2+b_2}{p_2+q_2}$, а также между $\dfrac{a_1+b_2}{p_1+q_2}$ и $\dfrac{a_2+b_1}{p_2+q_1}$, поэтому два наибольшие и два наименьшие числа в нашей таблице не могут стоять по диагоналям.

б) Дадим два решения этой задачи, одно — независимое от а) и, тем самым, дающее новое решение этого частного случая, а другое — использующее а) как лемму.

Первое решение. Мы должны указать такое число $x^* = \dfrac{a_k+b_l}{p_k+q_l}$ в нашей таблице $m \times n$, что выполнены условия $\dfrac{a_k+b_j}{p_k+q_j} \leqslant x^*$ (для всех j), $\dfrac{a_i+b_l}{p_i+q_l} \geqslant x^*$ (для всех i); перепишем эти условия так:

$$p_k x^* - a_k \geqslant -q_j x^* + b_j, \quad p_i x^* - a_i \leqslant -q_l x^* + b_l. \qquad (*)$$

Рассмотрим кусочно-линейные функции $f(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} (p_i x - a_i)$ и $g(x) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} (-q_j x + b_j)$, график каждой функции состоит из отрезков прямых и двух лучей. Первая — монотонно возрастает, вторая — убывает, и потому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение (x^*, y^*) (точка (x^*, y^*), где $y^* = f(x^*) = g(x^*)$ — самая высокая из точек пересечения прямых $y = p_i x - a_i$ с прямыми $y = -q_j x + b_j$, рис. 92). Примем за k и l номера тех линейных функций $y = p_k x - a_k$ и $y = -q_l x + b_l$, пересечение графиков которых дает точку (x^*, y^*), то есть тех, для которых $p_k x^* - a_k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} (p_i x^* - a_i) =$

$= y^* = -q_l x^* + b_l = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} (-q_j x^* + b_j)$. Для указанных k, l и x^*, выполнены все нужные условия (*).

Второе решение основано на таком замечательном наблюдении. Будем говорить, что таблица имеет «седло», если у нее есть элемент, который не меньше всех в своей строке и не больше всех в своем столбце.

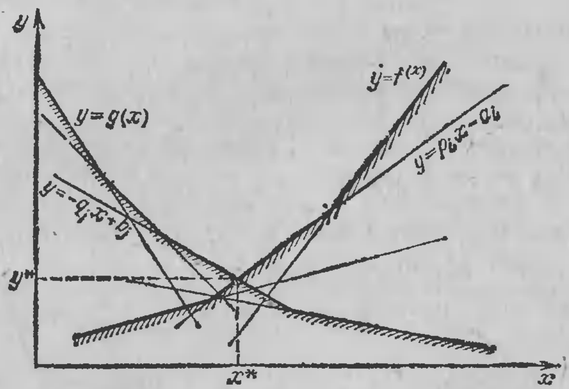


Рис. 92

Лемма. Если каждая таблица 2×2, полученная из данной таблицы $m\times n$ вычеркиванием $m-2$ строк и $n-2$ столбцов, имеет седло, то этим свойством обладает и вся таблица $m\times n$.

Эта лемма сводит задачу б) к частному случаю а).

Докажем лемму. Предположим, что существует таблица, у которой нет седла, но любая подтаблица 2×2 имеет седло. Отметим в i-й строке этой таблицы некоторое наибольшее число M_i, а в j-м столбце — наименьшее m_j. Построим из отмеченных чисел цепочку, переходя от некоторого наибольшего числа в строке к наименьшему в его столбце, а от него — к наибольшему в его строке, и т. д. Такая цепочка не может окончиться на каком-то одном элементе (так как таблица не имеет седла), поэтому она должна содержать цикл; заменив номера, т. е. переставив строки и столбцы надлежащим образом, мы можем считать, что этот цикл состоит из элементов $M_1 = x_{11}$, $m_1 = x_{21}$, $M_2 = x_{22}$, $m_2 = x_{32}$, ..., $m_r = x_{r\,r-1}$, $M_r = x_{rr}$, $m_r = x_{1r}$ (рис. 93), причем $M_1 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant r} M_i$. Поскольку таблица 2×2 в левом верхнем углу имеет седло, причем $m_1 < M_1 \leqslant M_2$, $m_1 < M_2$ и $x_{12} \leqslant M_1$, должно быть $M_1 = x_{12} \leqslant M_2$. Аналогично можно показать (рассматривая таблицы 2×2 с нижними строчками (m_2, M_3), (m_3, M_4), ..., что все элементы первой строки равны M_1: $x_{11} = x_{12} = x_{13} = \ldots = x_{1r} = M_1$. Тогда $x_{1r} = m_r$ — седловая точка. Получили противоречие.

∇ Интересно отметить, что членам жюри заранее было известно несколько разных решений задачи б), но последнее из приведенных выше — использующее пункт а) и лемму — они обнаружили лишь проверяя работы школьников на олимпиаде.

220. Идею решения можно высказать одной фразой: сумма расстояний до концов стрелок в среднем (по времени) больше, чем сумма расстояний до центров часов. Доказательство можно провести так.

Рассмотрим суммы s_1 и s_2 расстояний от центра стола O до концов минутных стрелок в два момента времени, отстоящие на 30 минут. Величина $s_1 + s_2$ больше $2s_0$, где s_0 — сумма расстояний от O до центров часов, потому что у каждого треуголь-

$$\begin{array}{|ccccc}
\hline
M_1 & M_1 & \ldots & \ldots & m_r \\
m_1 & M_2 & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & m_2 & M_3 & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & m_{r-1} & M_r \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\end{array}$$

Рис. 93

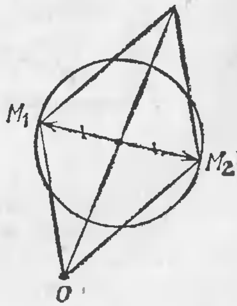


Рис. 94

ника OM_1M_2 сумма длин двух сторон OM_1 и OM_2 больше удвоенной длины медианы, расположенной между ними (рис. 94). Поэтому хотя бы одно из чисел s_1, или s_2 больше s_0.

221. Решение задачи а) вытекает из таких двух соображений: (1) под каждым числом a в m-й строчке ($m \geqslant 2$) написано число, не меньшее a; (2) каждое из этих чисел не превосходит 1000. Для решения б) нужно еще учесть, что если число a в m-й строчке ($m \geqslant 2$) строго меньше стоящего под ним числа b, то $b \geqslant 2a$: несколько групп по a чисел (каждая группа стоит под равными числами) объединяются в одну группу из b чисел; отсюда по индукции следует, что в такой ситуации $b \geqslant 2^{m-1}$. Но $2^{m-1} \leqslant 1000$ лишь при $m \leqslant 10$. Пример последовательности, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й:

$$0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, \underbrace{8, 8, \ldots, 8}_{8}, \ldots, \underbrace{256, \ldots, 256}_{256}, \underbrace{488, \ldots, 488}_{488}.$$

Вот как выглядят последовательные ее преобразования:

№ 2 1, 1, 2, 2, 4, ..., 4, 8, ..., 8, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488
№ 3 2, 2, 2, 2, 4, ..., 4, 8, ..., 8, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488
. . . .
№ 10 256, 256, ..., 256, 488, ..., 488
№ 11 512, 512, ..., 512, 488, ..., 488.

∇ Аналогично для последовательности из n чисел, где $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$, можно доказать, что $(k+2)$-я строка будет совпадать с $(k+1)$-й, но $(k+1)$-я еще может не совпадать с k-й.

222. Задача а) — вырожденный частный случай б) и решается аналогично. Укажем идею решения задачи б).

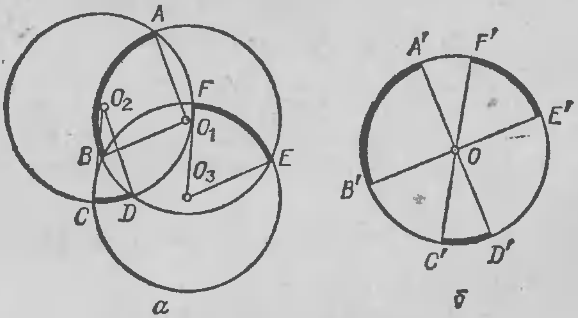


Рис. 95

Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, содержащих дуги $\smile AB$, $\smile CD$, $\smile EF$ соответственно (рис. 95, a). Тогда $\overrightarrow{O_1A} = -\overrightarrow{O_2D}$, $\overrightarrow{O_1B} = -\overrightarrow{O_3E}$, $\overrightarrow{O_3F} = -\overrightarrow{O_2C}$ (как противоположные стороны ромбов). Поэтому, перенеся секторы O_1AB, O_3EF и O_2CD к общему центру O, мы получим три сектора, которые вместе с симметричными им относительно точки O дают полный круг (рис. 95, $б$).

223. Если переставить три первых числа в порядке убывания, то для всех членов последовательности будет выполняться условие $x_k \leqslant x_{k-2} - x_{k-1}$, а последовательность станет убывающей: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_{21}$. Если предположить, что $x_{21} \geqslant 1$, то из $x_{k-2} \geqslant x_k + x_{k-1}$ следовало бы $x_{20} \geqslant 1$, $x_{19} \geqslant 2$, $x_{18} \geqslant 3$, $x_{17} \geqslant 5$, ... Остается только написать 21 член «последовательности Фибоначчи» (П21)

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots,\ 6745,\ 10916,$$

чтобы получить противоречие: $x_1 \geqslant 10\,000$.

224. Можно (пример изображен на рис. 96). Другими словами, можно устроить отображение множества вершин куба на себя так, чтобы любые две соседние (соединенные ребром) вершины перешли в вершины, не соединенные ребром.

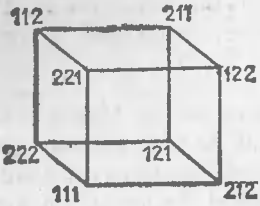


Рис. 96

225. Правая часть неравенства, так же как и левая, симметрична относительно a, b, c и d (при условии, что их сумма равна 0); поскольку $b+c=-(a+d)$ и т. д., она равна полусумме длин всех попарных сумм данных векторов. Учитывая это, можем для данной четверки векторов с суммой 0 выбрать обозначения так, чтобы ломаная, составленная из векторов $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, $\overrightarrow{CD}=c$, $\overrightarrow{DA}=d$, была самопересекающейся. Для этого достаточно, чтобы векторы a, b, c, отложенные от одной точки O, лежали в одной полуплоскости, причем a и c лежали по одну сторону от прямой, проходящей через O и параллельной b. Тогда

$$|a+d|+|c+d|=BD+AC\leqslant|b|+|d|,$$

и остается добавить к этому

$$|b+d|=|a+c|\leqslant|a|+|c|.$$

Другое решение, основанное на идее усреднения проекций векторов по всевозможным направлениям, позволяет свести двумерный и даже трехмерный вариант этой задачи к доказательству аналогичного неравенства для чисел, т. е. к одномерному варианту [73].

226. Ответ: 1976. Все отмеченные точки, кроме центра O 1976-угольника, лежат по 1976 штук на 987 окружностях с центром O. Любая другая окружность γ пересекает каждую из этих 987 окружностей в двух точках; кроме этих точек пересечения, на γ может лежать еще лишь одна отмеченная точка: O. Поэтому на такой окружности γ не более $987\cdot2+1=$ $=1975$ отмеченных точек.

227. Отметим у каждого из k кусков, на которые распалась оставшаяся часть листа, 4 вершины (углы при этих вершинах — 90° или 270°). Каждая из $4k$ отмеченных точек — вершина одного из n вырезанных прямоугольников или исходного, причем если какая-то точка отмечена дважды, то к ней примыкают и два прямоугольника. Поэтому $4k\leqslant 4n+4$, откуда $k\leqslant$ $\leqslant n+1$.

228. Три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) = 0. \qquad (*)$$

Если x_i и y_i $(i = 0, 1, 2)$ — линейные функции от времени t, то $(*)$ становится квадратным уравнением относительно t; оно имеет не более двух корней.

229. а) Можно считать, что жук из центральной клетки сместился вправо на $k \geqslant 2$ клетки. Напишем в каждой из 49 клеток правого ряда, на какое число клеток по горизонтали сместился жук из соответствующей клетки; смещение вправо считаем положительным, влево — отрицательным. Очевидно, для самого правого жука смещение отрицательно, а написанные нами числа в соседних клетках отличаются не более чем на 2. Двигаясь по ряду от центральной клетки вправо, мы где-то должны «перейти через 0», поэтому одно из написанных чисел равно 1, 0 или —1, т. е. один из жуков должен сместиться не более чем на одну клетку.

б) Ответ: утверждение не верно. На рис. 97 приведен пример, когда все жуки оказываются далеко от своих начальных

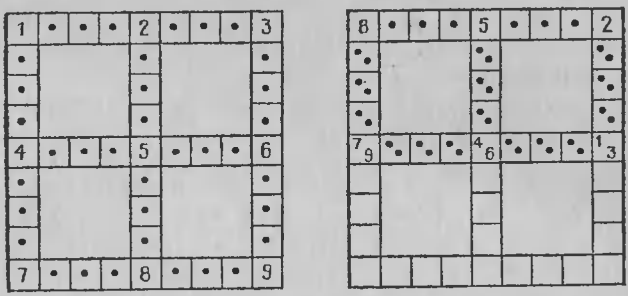


Рис. 97

клеток (слева показано, какие номера мы приписываем каждому жуку, справа — куда должны лететь жуки с соответствующими номерами).

в) Ответ: верно. Докажем это утверждение сразу для прямоугольника из $m \times n$ клеток. Для квадратов 1×1, 2×2 и прямоугольника 1×2 оно очевидно. (Вообще, для прямоугольников $1 \times n$ и $2 \times n$ его легко доказать так же, как а).) Пусть размеры прямоугольника $m \times n$ больше 2: $2 < m \leqslant n$. Мы докажем, что из него (отрезанием крайних рядов) можно получить меньший прямоугольник П, все жуки из которого вновь попадают в П, поэтому достаточно будет убедиться, что в П имеется нужный «почти неподвижный» жук.

Удобно измерять *расстояние* ρ между клетками A, B по числу ходов, за которые шахматный король может попасть из A в B: множество клеток M (на клетчатой бумаге), находящихся от данной клетки C на расстоянии не большем r, для любого $r = 1, 2, \ldots$ заполняет квадрат $(2r+1)\times(2r+1)$ с центральной клеткой C. По условию, жук из клетки K попадает в такую клетку $f(K)$, что для клеток A, B на расстоянии 1 будет $\rho(f(A), f(B)) \leqslant 1$. Тогда для любых двух клеток A и B

$$\rho(f(A), f(B)) \leqslant \rho(A, B). \qquad (*)$$

В прямоугольнике $m\times n$ $(m \leqslant n)$ будем называть «крайними» клетки, расстояние от которых до некоторых клеток прямоугольника равно $n-1$. Если $m < n$, такие клетки заполняют два крайних ряда (короткие стороны прямоугольника); в квадрате $n\times n$ они заполняют четыре крайних ряда (каемку). Заметим, что расстояние ρ между двумя клетками противоположных крайних рядов равно $n-1$, а для любых двух других клеток оно меньше.

Если в какой-то из крайних рядов не попадает ни один жук, то, убрав этот ряд, мы получим нужный прямоугольник П размерами $m\times(n-1)$; из любой клетки K жук перелетает в клетку $f(K)$ из П.

В противном случае в качестве П можно взять прямоугольник, полученный из данного отрезанием всех крайних рядов. Действительно, можно отметить несколько (две, три или четыре) клетки K_i так, что в каждом крайнем ряду содержится одна из клеток $f(K_i)$. Поскольку $\rho(M, K_i) \leqslant n-2$ для любой клетки M из П и каждой клетки K_i, то согласно $(*)$ будет $\rho(f(M), f(K_i)) \leqslant n-2$, а отсюда и из замечания о противоположных рядах следует, что $f(M)$ содержится в П.

Теперь доказательство очевидно проводится индукцией (по $n = \max\{m, n\}$ или по $m+n$). Более того, из него следует, что всегда найдется квадрат 2×2 клетки, переходящий в себя.

∇ Эта задача — один из дискретных вариантов знаменитой теоремы Брауэра о том, что непрерывное отображение выпуклого множества в себя имеет неподвижную точку.

230. На рис. 98 указан путь построения разбиений, удовлетворяющих сразу самым сильным условиям б), в) и г) для правильного треугольника со стороной 3: при переходе от левого рисунка к правому каждая из точек M_2, M_3, ... и N_1, N_2, N_3, ... слегка отодвигается вниз, образуя дополнительные очень узкие треугольники AM_kN_k, BN_kM_{k+1}; $k = 1, 2, \ldots$ (См. «Квант», 1977, № 5, с. 22.)

231. Пример а) очевиден: достаточно выписать n раз подряд «блок» $1\,2\,3 \ldots n$; i-ю цифру любой перестановки можно взять из i-го блока. В качестве примера б) годится последовательность

$$\underbrace{\underbrace{1\;2\;\ldots\;n}\;\underbrace{1\;2\;\ldots\;n}\;\ldots\;\underbrace{1\;2\;\ldots\;n}}_{n-1}\;1.$$

В самом деле, если в перестановке $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ хоть одна пара соседних чисел k_j, k_{j+1} стоит в порядке возрастания, то их можно взять из одного блока $1\,2 \ldots n$ (j-го по порядку);

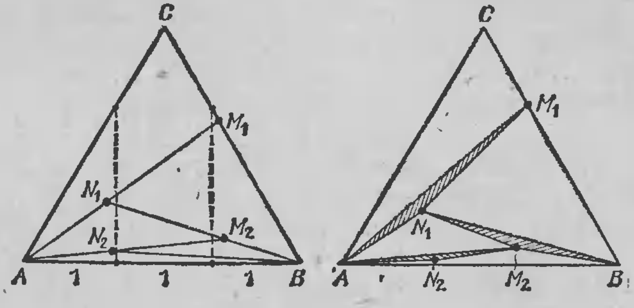


Рис. 98

при этом последняя 1 даже не понадобится. Если это не так, то перестановка обязательно совпадает с $(n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$; тогда из j-го блока нужно взять $n-j$, и пригодится последняя 1.

в) Отметим для каждого числа k (от 1 до n) первое его вхождение в универсальную последовательность. Одно из отмеченных чисел встречается на n-м месте от начала или даже дальше. Пусть для определенности таким числом будет n. Перед ним стоит по крайней мере $n-1$ чисел. После него стоит последовательность, которая должна быть универсальной для перестановок чисел $(1, 2, \ldots, n-1)$, и по индукции мы можем считать доказанным, что ее длина не меньше $n(n-1)/2$. Поэтому длина n-универсальной последовательности не меньше $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

г) Заметим, что если число n входит в n-универсальную последовательность лишь один раз, то до него и после него должна стоять $(n-1)$-универсальная последовательность. Это дает возможность получить более точную оценку снизу, чем в пункте в).

Пусть l_n — длина минимальной n-универсальной последовательности. Тогда $l_2 = 3$. Докажем, что $l_3 = 7$. Пример: 1213121 или 1231231. Если какое-то число (скажем, 3) входит в последовательность лишь один раз, то ее длина не меньше $1+2l_2 \leqslant 7$. В другом случае рассмотрим число, которое впервые встретится на 3-м месте или позже (пусть это будет 3). За ним встретится еще раз 3, а также 2-универсальная последовательность, так что общая длина не меньше $2+1+1+l_2 = 4+l_2 = 7$. Аналогично убеждаемся в том, что $l_4 = 12$. Пример: 12341231423 1 или 412341243142. Оценки: если некоторое число входит в последовательность лишь один раз, то ее длина не меньше $1+2l_3 = 15$, в другом случае она не меньше $3+1+1+l_2 = 12$.

То же рассуждение показывает, что $l_n \geqslant n(n+1)/2+n-2$.

д) Можно доказать, что n-универсальной является такая последовательность длины n^2-2n+4:

$$n\ \ \underline{1\ 2\ \ldots\ (n-1)}\ n\ \ \underline{1\ 2\ \ldots\ (n-2)\ n\ (n-1)}\ \ldots$$

$$\ldots\ \underline{1\ 2\ n\ 3\ \ldots\ (n-1)}\ \ 1\ n\ 2 \qquad (*)$$

где в каждый из $n-2$ блоков $1\,2\ldots(n-2)$ вставлено n (после $n-1$, затем после $n-2$, ..., наконец, после 2), кроме того, n стоит в начале и в конце, имеющем вид $1\ n\ 2$. (Так изготовлен второй пример для $n=4$.) Для этого достаточно убедиться в том, что слева от k-го вхождения n в $(*)$ можно вычеркиванием получить любую последовательность из $k-1$ различных чисел (среди $1, 2, \ldots, n-1$), а справа — любую из $n-k$ таких чисел; дело в том, что обе эти части — левая и правая — после вычеркивания всех вхождений n (правая — также после циклической перенумерации) имеют такой тип:

$$\underbrace{\underline{1\ 2\ \ldots\ m}\ \ \underline{1\ 2\ \ldots\ m}\ \ \underline{1\ 2\ \ldots\ m}}_{r-1\ \text{раз}}\ \ 1\ 2\ \ldots\ r, \quad \text{где } r \leqslant m = n-1.$$

А эта последовательность обладает следующим свойством «(m,r)-универсальности»: из нее вычеркиванием можно получить любую последовательность r разных чисел (среди $1, 2, \ldots, m$).

232. Пусть $m=[n/2]$, так что $n=2m$ или $n=2m+1$. Занумеруем данные числа следующим образом: $x_0 = 1$, — «начальное» число; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — идущие подряд по часовой стрелке от x_0; $x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-m+1}$ (и x_{-m}, если n нечетно) — идущие подряд против часовой стрелки от x_0.

а) Если любые два соседние числа различаются не более чем на ε, то

$$\begin{array}{ll}
x_1 \geqslant 1-\varepsilon, & x_{-1} \geqslant 1-\varepsilon, \\
x_2 \geqslant 1-2\varepsilon, & x_{-2} \geqslant 1-2\varepsilon, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{m-1} \geqslant 1-(m-1)\,\varepsilon, & x_{-m+1} \geqslant 1-(m-1)\,\varepsilon, \\
x_m \geqslant 1-m\varepsilon, & (x_{-m} \geqslant 1-m\varepsilon).
\end{array}$$

Сложив эти неравенства, включая также равенство $x_0 = 1$, и учитывая, что сумма всех n чисел равна 0, получим

$$0 \geqslant n - (1 + 2 + \ldots + (m-1) + m + (m-1) + \ldots \\ \ldots + 2 + 1)\,\varepsilon = n - m^2\varepsilon,$$

откуда $\varepsilon \geqslant n/m^2 \geqslant 4/n$ (поскольку $m^2 \leqslant n^2/4$).

∇ При четном n оценка точная. При нечетном $n = 2m+1$ ее можно, используя еще x_{-m}, слегка уточнить: $\varepsilon \geqslant n/(m^2+m) = 4n/(n^2-1)$.

б) Здесь можно дважды воспользоваться результатом а). Пусть наибольшая по модулю разность соседних чисел на окружности равна ε. Согласно а) $\varepsilon \geqslant 4/n$. С другой стороны, «нормированные» разности соседних чисел набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — числа $y_k = (x_k - x_{k-1})/\varepsilon$ — в свою очередь удовлетворяют всем условиям задачи а), поэтому для некоторого k

$$\left|\frac{x_{k+1} + x_{k-1}}{2} - x_k\right| = \left|\frac{x_{k+1} - x_k}{2} - \frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right| = \\ = |y_{k+1} - y_k|\,\frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{8}{n^2}$$

(здесь иногда индекс нужно, конечно, уменьшить или увеличить на n, так как числа расположены на окружности).

в) и г) Покажем, как для любого n получить наилучшую возможную оценку сверху для величины δ — максимальной по модулю разности между числом на окружности и средним арифметическим двух его соседей и построить оптимальный (с наименьшим значением δ) набор. При этом набор (x_k) можно сразу считать симметричным: $x_k = x_{-k}$, поскольку замена x_k на $(x_k + x_{-k})/2$ сохраняет все свойства, оговоренные в условии задачи, и оценку $|x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}| \leqslant 2\delta$. Прежде чем оценивать сами числа x_k, оценим разности $x_{k-1} - x_k$, начиная с x_0, а затем — начиная с противоположной точки (середины набора). Поскольку $x_1 = x_{-1}$,

$$\begin{gathered} x_0 - x_1 \leqslant |-x_{-1} + 2x_0 - x_1|/2 \leqslant \delta; \\ x_1 - x_2 \leqslant (x_0 - x_1) + |-x_0 + 2x_1 - x_2| \leqslant 3\delta, \\ x_2 - x_3 \leqslant (x_1 - x_2) + |-x_1 + 2x_2 - x_3| \leqslant 5\delta, \ \ldots, \\ x_{k-1} - x_k \leqslant (2k-1)\,\delta, \ \ldots \end{gathered} \tag{1}$$

При четном $n = 2m$, когда имеется одно противоположно расположенное по отношению к x_0 число x_m, аналогично получим

$$x_{m-1} - x_m \leqslant \delta, \ \ x_{m-2} - x_{m-1} \leqslant 3\delta, \ \ldots, \ x_{m-j} - x_{m-j+1} \leqslant \\ \leqslant (2j-1)\,\delta. \tag{2}$$

Если $n = 2m + 1$ нечетно ($x_m = x_{-m}$ — два соседних числа), то

$$x_{m-1} - x_m \leqslant 2\delta, \quad x_{m-2} - x_{m-1} \leqslant 4\delta, \ \ldots, \ x_{m-j} - x_{m-j+1} \leqslant 2j\delta. \tag{2'}$$

Заметим, что для k меньшего, чем $m/2$, лучшей оценкой для $x_{k-1} - x_k$ будет (1), а для k большего $m/2$ — (2) или (2'); для оптимального набора чисел (x_k) соответствующие неравенства должны стать равенствами, при этом график оптимальной последовательности будет лежать на кусочках парабол (рис. 99).

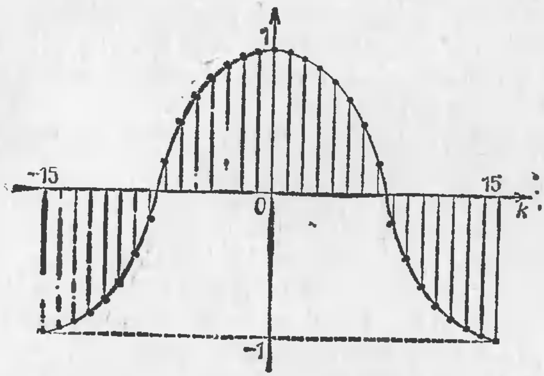


Рис. 99

Чтобы доказать это и привести точную оценку δ для каждого n, нужно разобрать отдельно четыре случая, соответствующие разным остаткам n при делении на 4. Пусть, например $n = 4l + 2$. Из (1) и (2) следует, что $x_k = x_{-k} \geqslant 1 - s_k\delta$, где s_k — сумма первых k чисел в строке:

$$1, 3, \ldots, 2l - 1, 2l + 1, 2l - 1, \ldots, 3, 1$$

Точная оценка δ получится из условия, что сумма всех x_k равна 0, а оптимальным будет набор $x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta$. В частности, для $n = 30$ $(l = 7)$ получим:

$$0 = x_0 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{14}) + x_{15} \geqslant 30 - S\delta,$$

где $S = 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_{14}) + s_{15}$. Эту сумму удобно считать так: поскольку

$$s_{15} = 1 + 3 + 5 + \ldots + 11 + 13 + 11 + \ldots + 3 + 1 = 7^2 + 8^2 =$$
$$= 113 = s_1 + s_{14} = s_2 + s_{13} = \ldots = s_7 + s_8,$$

то $S=(2\cdot 7+1)s_{15}=15\cdot 113$. Таким образом, $\delta \geqslant 2/113$, причем $\delta = 2/113$ только для набора (показанного на рисунке)

$$x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta =$$
$$= \begin{cases} 1 - k^2\delta \text{ при } 0, 1, \ldots, 7, \\ 1-(113-(15-k)^2)\delta = -1+(15-k)^2\delta \text{ при } k=8, \ldots, 15. \end{cases}$$

Аналогично можно получить точные границы δ для любого n и убедиться, что при всех n выполнено неравенство $\delta \geqslant 16/n^2$ (при больших n эта оценка близка к точной).

∇ Непрерывный аналог последней задачи: найти наибольшую возможную разность между максимумом и минимумом периодической функции с периодом T, у которого вторая производная не превосходит по модулю 1. Эта задача даже проще, чем «дискретный» вариант. График функции, имеющей наибольшее «колебание», также состоит из кусочков парабол [69].

233. Отметим сначала несколько фактов, относящихся к случаю любого натурального n. Существует всего 2^n расстановок чисел $+1$ и -1 в вершинах правильного n-угольника. Будем называть две расстановки эквивалентными, если от одной из них к другой (а стало быть, и обратно) можно перейти указанными в условии операциями — изменением знаков в вершинах правильных n-угольников. Любые две операции такого типа «коммутируют» — результат не зависит от порядка, в котором они выполняются; повторение любой операции дважды также можно исключить — оно эквивалентно тождественной операции, не меняющей расстановки. При этом можно ограничиться лишь операциями изменения знаков в вершинах правильных p-угольников с простым числом вершин p (назовем их «образующими»); множество вершин правильного n-угольника при любом n, делящемся на p, можно разбить на n/p образующих p-угольников.

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим конкретные задачи.

а) При $n=15$ существует всего 8 образующих p-угольников: 5 треугольников и 3 пятиугольника. Единичную (состоящую из всех $+1$) расстановку обозначим через E. Любая эквивалентная E расстановка определяется указанием некоторого подмножества из 8 этих p-угольников; различных подмножеств (включая пустое) существует 2^8 — это меньше, чем общее число 2^{15} расстановок. Поэтому существуют расстановки, не эквивалентные E.

б) При $n=30$ общее число образующих p-угольников равно $15+10+6=31$, так что для решения задачи нужны дополнительные соображения. Заметим, что можно ограничиться меньшим числом образующих: например, из каждой пары симметричных относительно центра треугольников (и пятиугольников) можно оставить лишь один — изменение знаков в нем, а также в трех (пяти) «двуугольниках», содержащих его вершины, эквивалентно изменению знаков в другом, ему симметричном. Остается $15+5+3=23$ образующих, таким образом, существует не более $2^{23}<2^{30}$ расстановок, эквивалентных E.

в) Покажем, как для любого n найти точное количество $T(n)$ расстановок, эквивалентных E. Заметим, что количество расстановок, эквивалентных какой-то другой расстановке A из $+1$ и -1, также равно $T(n)$: все они получаются почленным умножением знаков расстановки A на любую расстановку из класса эквивалентных E. Обозначим через $K(n)$ число «классов эквивалентности» — максимальное количество попарно неэквивалентных друг другу расстановок; тогда

$$K(n)=2^n/T(n).$$

Пусть n содержит s разных простых множителей:

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ \ldots\ p_s^{\alpha_s} \qquad (*)$$

Положим $p_1p_2\ldots p_s=q$; $n/q=m$. Разобьем правильный n-угольник на m правильных q-угольников. Задача вычисления $T(n)$ сводится к более простой задаче вычисления $T(q)=T(p_1\ldots p_s)$; ведь каждый из образующих p_i-угольников содержится лишь в одном из q-угольников, — другими словами, происходящие в разных q-угольниках изменения знаков независимы, поэтому

$$T(n)=(T(q))^m,\quad K(n)=(K(q))^m.$$

Начнем со случая $s=2$: пусть $n=p_1p_2$. Занумеруем вершины n-угольника числами $0, 1, \ldots, n-1$. Запишем эти числа в таблицу $p_1\times p_2$ так, что числа в одном столбце дают одинаковый остаток при делении на p_1, в одной строке — при делении на p_2. Это можно сделать, потому что пара остатков (r_1, r_2) от деления на p_1 и p_2 однозначно определяет номер от 0 до n (рис. 100). Расстановкам чисел $+1$ и -1 в точках на окружности соответствуют расстановки чисел $\sigma(r_1, r_2)=+1$ и -1 в клетках таблицы (r_1 — номер строки, r_2 — номер столбца), изменению знаков в p_1- и p_2-угольниках — изменение знаков σ в строках и столбцах. Любую расстановку этими операциями

	0	1	2	3	4
0	0	6	12	3	9
1	10	1	7	13	4
2	5	11	2	8	14

Рис. 100. Каждое число от 0 до 14 определяется однозначно своими остатками при делении на 5 и на 3

можно привести к такой, у которой в первой строке и первом столбце стоят одни $+1$. Такие «приведенные» расстановки будут попарно неэквивалентны; в самом деле, при замене знаков в строках и столбцах величина произведения

$$\sigma(r_1, r_2)\,\sigma(0, r_2)\,\sigma(r_1, 0)\,\sigma(0, 0)$$

сохраняется (набор таких величин для всех (r_1, r_2), $1 \leqslant r_1 \leqslant p_1 - 1$, $1 \leqslant r_2 \leqslant p_2 - 1$ определяет класс эквивалентности). Поэтому

$$K(p_1p_2) = 2^{(p_1-1)(p_2-1)}, \quad T(p_1p_2) = 2^{p_1+p_2-1}.$$

В частности, $K(15) = 2^8$, $T(15) = 2^7$; $K(10) = 2^4$. Последнее равенство позволяет найти $K(200)$: $n = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, $q = 10$, $m = 20$, $K(200) = (K(10))^{20} = 2^{4 \cdot 20} = 2^{80}$.

Аналогичные соображения позволяют найти $K(n)$ для случая любого s. Пусть $q = p_1p_2 \ldots p_s$; номер k от 0 до $q-1$ однозначно определяется остатками $r_1, r_2, \ldots, r_s$ от деления q на $p_1, p_2, \ldots, p_s$ («китайская теорема об остатках», П2); с расстановками $\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ — функциями на множестве наборов r_i, $0 \leqslant r_i \leqslant p_i - 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, принимающими значения $+1$ и -1, — разрешено проделывать операции одновременной замены знаков в одном «ряду», состоящем из p_i наборов, у которых i-я координата r_i произвольна — меняется от 0 до $p_i - 1$, а остальные $s-1$ чисел r_l фиксированы (для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$); этими операциями любая расстановка сводится к такой, для которой $\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_s) = +1$, если хоть одно r_i равно 0; полученные приведенные расстановки неэквивалентны (сохраняется произведение 2^s значений σ для наборов, получающихся из данного заменой некоторых координат на нули). Выпишем ответ для $q = p_1p_2 \ldots p_s$ и для любого $n = qm$ вида (*):

$$K(q) = 2^{(p_1-1)\ldots(p_s-1)}; \quad K(n) = 2^{\varphi(n)},$$

$$\text{где } \varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

В частности, $K(30) = 2^8$, $T(30) = 2^{22}$.

∇ Возникшая здесь несколько неожиданно функция $\varphi(n)$ хорошо известна в теории чисел: это — функция Эйлера, выражающая количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним [53].

234. Мы будем рассматривать лишь точки одного «северного» полушария с полюсом P (значения функции f в диаметрально противоположных точках одинаковы). Полюс P мы считаем самой высокой точкой сферы. Очевидно, $f(P) = 1$, $0 < f(M) < 1$ для всех других точек M сферы.

а) пусть O — центр сферы. Расстояние c_M от точки M до экваториальной плоскости равно косинусу угла MOP, так что

$$f(M) = c_M^2 = \cos^2 \gamma, \quad \gamma = \angle MOP.$$

Если c_1, c_2, c_3 — косинусы углов, образуемых с OP тремя взаимно перпендикулярными радиусами OM_1, OM_2, OM_3, то $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$, поскольку c_1, c_2, c_3 — это длины проекций единичного отрезка OP на три взаимно перпендикулярные прямые (можно построить прямоугольный параллелепипед с ребрами c_1, c_2, c_3 и диагональю $OP = 1$).

Решение задач б) и в) опирается на такое следствие условия (*).

Пусть Γ_X — половина большого круга (отличная от экватора и меридиана), с концами на экваторе, для которой X является самой высокой точкой. Тогда для любой точки Y дуги Γ_X, отличной от X, $f(Y) < f(X)$. В самом деле,

$$f(Y) + f(Y') + f(Q) = f(X) + 0 + f(Q) = 1,$$

где Y' — точка дуги Γ_X, для которой $\angle YOY' = 90°$, а Q — конец радиуса, перпендикулярного плоскости Γ_X.

б) Через каждую точку X дуги Γ_M мы можем провести свою дугу Γ_X и выбрать из них такую Γ_Y, которая содержит N. Тогда $f(M) > f(Y) > f(N)$.

в) Аналогично предыдущему для любой пары точек M и N (где M выше N) можно построить цепочку $M = X_0, X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_r = N$ так, что X_j лежит на $\Gamma_{X_{j-1}}$ для $j = 1, 2, \ldots, r$ (если M и N близки по широте, но сильно различаются по долготе, то придется сделать большое число r шагов).

г) Если для двух точек M и N, лежащих на одной параллели П на расстоянии c_1 от экваториальной плоскости, $f(M) - f(N) = \varepsilon > 0$, то для любых двух точек M', N', где M' выше c_1, а N' ниже c_1, будет

$$f(M') - f(N') \geqslant f(M) - f(N) = \varepsilon,$$

т. е. на высоте c_1 функция f совершает «скачок» величины ε. Из (*) следует, что тогда для любой пары чисел $c_2 > c_3 \geqslant 0$ такой, что $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, функция f должна совершать скачок величины не менее $\varepsilon/2$ либо на высоте c_2, либо на высоте c_3. Взяв более $[2/\varepsilon]$ таких пар (c_2, c_3), мы придем к противоречию с условием $0 \leqslant f \leqslant 1$.

д) Из предыдущих пунктов следует, что функция $f(M)$ равна $g\left(c_M^2\right)$, где c_M — расстояние точки M от экваториальной плоскости, $y = g(x)$ — некоторая монотонно возрастающая функция на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющая условиям: $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и

$$g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) = 1, \text{ если } x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Из последнего условия (при $x_1 = 0$) следует: $g(x_3) = 1 - g(1 - x_3)$, поэтому для любых x_1, x_2

$$g(x_1) + g(x_2) = 1 - g(1 - x_1 - x_2) = g(x_1 + x_2).$$

Но единственная функция, удовлетворяющая этому функциональному уравнению и условию «нормировки» $g(1) = 1$, — это $g(x) = x$. Этот факт доказывается сначала для рациональных x ($x = 1/n$, затем $x = k/n$), а потом из монотонности — для всех x (см. [72]).

235. Прямая, проходящая по некоторому звену BC ломаной, пересекает четное или нечетное число других звеньев в зависимости от того, лежат ли соседние звенья AB и CD по одну или по разные стороны от прямой BC (в последнем случае звено BC будем называть «зигзагом»); в самом деле, четность числа пересечений ломаной с прямой BC определяется тем, в одной или в разных полуплоскостях от нее расположены точки A и D (рис. 101, a). Но на каждой замкнутой ломаной четное

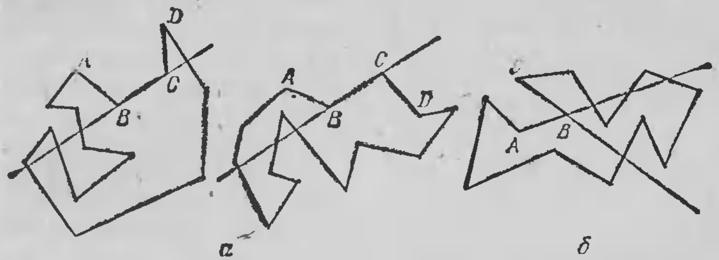


Рис. 101

число «зигзагов»: пройдя по этой ломаной и отметив, в какую сторону — влево или вправо — мы поворачиваем в каждой вершине, мы одинаковое количество раз меняем направление поворота слева направо и справа налево. Из этих двух фактов вытекает утверждение задачи.

Еще более короткое доказательство получается, если использовать тот факт, что стороны угла, получающегося при продолжении каждых двух соседних звеньев AB и BC за точку B, ломаная пересекает четное число раз (рис. 101, $б$).

236. Пусть в отмеченной точке X написано число a_X и через нее проходит $n_X > 1$ прямых, содержащих другие отмеченные точки. Сумма чисел на каждой из них по условию

равна 0. Общая сумма чисел на всех n_X прямых (в которой a_X участвует n_X раз) равна $s+(n_X-1)a_X=0$, где s — сумма всех чисел, написанных возле отмеченных точек. Предположение $s \neq 0$ приводит к явному противоречию: для каждой точки X знак числа a_X противоположен знаку суммы s этих чисел; поэтому $s=0$ и $a_X=0$ для всех X.

237. Утверждение б) доказано в решении задачи 58. Используя еще два аналогичных ромба (с вершинами B и C), легко получить и результат а).

238. Ответы: а) да, б) 8 ходов (каждый игрок — по 4 хода).

На рис. 102 показан пример расстановки 41 фишки; возле каждой фишки написан ее ранг — число, показывающее, за сколько ходов от конца она будет убрана. Строить такую расстановку удобно «с конца»: к остающейся последней черной фишке ранга 0 добавить два белых ранга 1, рядом с каждой из них добавить две черные ранга 2 (с той и другой стороны), рядом с каждой из черных — две белые ранга 3 и т. д. Ясно, что этот способ дает на каждом шагу максимально возможное число фишек соответствующего ранга. Тем самым для каждого t получается расстановка с наибольшим возможным числом $a_t=b_t+w_t$ фишек — b_t черных и w_t белых, которая может за t ходов превратиться в одну черную фишку ($b_0=1$, $w_0=0$); правило для последовательного вычисления (b_t, w_t) очень простое: при переходе от t к $t+1$ большее из чисел b_t, w_t не меняется, а к меньшему добавляется удвоенное большее:

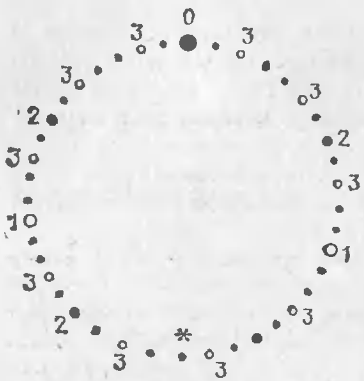


Рис. 102

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_t	1	1	5	5	29	29	169	169	985
w_t	0	2	2	12	12	70	70	408	408
a_t	1	3	7	17	41	99	239	577	1393

Для решения задачи а) достаточно из 41 точки на рис. 102 выкинуть одну фишку ранга 4, не влияющую на ситуацию после первого хода (т. е. стоящую рядом с другой фишкой «4»), — например, для сохранения симметрии, отмеченную звездочкой.

Переход от 1000 фишек к одной не может произойти менее чем за 8 ходов, поскольку, как видно из таблицы, $a_7 = 577 < 1000$. Пример ровно с 1000 фишками можно получить из максимальной расстановки для 8 ходов с $a_8 = 1393$ фишками, выбросив 393 фишки ранга 8, не влияющие на ситуацию после первого хода — это можно сделать, поскольку $2 \cdot 408 = 816$ фишек ранга 8, размещаясь среди 577 фишек ранга не более 7, образуют не менее $816 - 577 = 239$ пар стоящих рядом фишек.

239. Воспользуемся определением предела последовательности (П21). Если для всех $n \geqslant N$ и некоторого k верны неравенства

$$|a_n - a_{n+1}/2| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |a_N|/2^k < \varepsilon,$$

то при $m \geqslant N + k$ будет

$$|a_m| < \frac{1}{2}|a_{m-1}| + \varepsilon < \frac{1}{2^2}|a_{m-2}| + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon < \ldots$$

$$\ldots < \frac{1}{2^{m-N}}|a_N| + \frac{\varepsilon}{2^{m-N+1}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon <$$

$$< \frac{1}{2^k}|a_N| + 2\varepsilon < 3\varepsilon.$$

240. Установим взаимно однозначное соответствие f между $n - 1$ отрезками 1-го и 2-го маршрутов такое, что проезд по отрезку 1-го стоит не больше, чем по соответствующему отрезку 2-го. Будем через $t_i(A)$ обозначать «хвост» i-го маршрута ($i = 1, 2$), начинающийся с города A — множество городов, следующих в i-м маршруте после A. Через A' и A'' будем обозначать города, непосредственно следующие за A в том и другом маршруте.

Определим f так. Если AA' — отрезок первого маршрута такой, что $t_1(A)$ пересекается (имеет общие города) с $t_2(A)$, то положим $f(AA') = AA''$. В противном случае положим $f(AA') = BB'$, где B — последний на втором маршруте город из $t_1(A)$. Заметим, что в этом случае $t_1(B)$ также не пересекается с $t_2(B)$, причем A — последний на первом маршруте город из $t_2(B)$ (отсюда следует, что соответствие f взаимно однозначно, причем обратное к нему f^{-1} определяется тем же правилом).

Проверим, что $|f(a)| \geqslant |a|$, где $|a|$ означает стоимость проезда по отрезку a. Если C — город из пересечения $t_1(A)$ и $t_2(A)$, то $|AA'| \leqslant |AC| \leqslant |AA''|$. Во втором случае $|AA'| \leqslant |AB| = |BA| \leqslant |BB''|$ (в обоих случаях неравенства следуют из принципов составления маршрутов: $|DA| \geqslant |AA'|$ для любого D из $t_1(A)$; для любого E из $t_2(A)$, наоборот, $|EA| \leqslant |AA''|$).

∇ Другое, менее эффектное, но более простое для придумывания решение (индукция с помощью «уравнивания цен») см. в книге [43].

241. Две окружности, в которые вписаны грани, примыкающие к ребру AB многогранника, однозначно определяют сферу σ, на которой лежат эти окружности и, тем самым, все вершины этих двух граней. Если BC и BD — другие два ребра, выходящие из B, то окружность, содержащая точки B, C, D (описанная вокруг содержащей их грани), также принадлежит σ, так что вершины граней, примыкающих к ребру BC, все лежат на той же σ. Теперь можно рассмотреть аналогично грани, примыкающие к ребру, выходящему из C, и так дойти до любой вершины многогранника — все они лежат на одной сфере σ: для любой из них можно построить цепочку ребер, оканчивающуюся в этой вершине и начинающуюся с ребра AB.

242. Ответ: у второго есть выигрыш. Для доказательства нужно предъявить выигрывающую стратегию. За свои четыре хода второй заведомо сможет добиться, чтобы оставшаяся для последнего 5-го хода первого звездочка стояла при нечетной степени x^{2l+1}. Пусть перед последним 4-м ходом второго возник многочлен $P(x) + *x^m + l*x^{2l+1}$, где $P(x)$ — известный многочлен с числовыми коэффициентами.

Подберем числа μ и $c > 0$ так, чтобы при любом значении λ для многочлена $F(x) = P(x) + \mu x^m + \lambda x^{2l+1}$ было $cF(1) + F(-2) = 0$ (тогда $F(x)$ будет заведомо иметь корень на отрезке $[-2; 1]$ (см. П5); для этого достаточно взять $c = 2^{2l+1}$, $\mu = \dfrac{P(-2) - cP(1)}{c + (-2)^m}$ (конечно, роли 1 и -2 могли бы играть здесь и другие числа разных знаков.) Поставив это значение μ на 4-м ходу, второй обеспечит наличие корня.

243. Ответ: $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$, 0 литров.

Проверить, что указанные числа служат ответом, не составляет труда: после разливания молока первым гномом (по 1/7 каждому из остальных) получается точно то же распределение, но со сдвигом на одного гнома, а сумма $(1 + 2 + 3 + \ldots + 6)/7$ равна как раз 3. Нужно еще доказать, что других ответов нет. Предположим, что это не так.

Пусть x — наибольшее количество молока, оказавшееся за все время переливаний у какого-либо гнома Г, когда пришла его очередь разливать. Тогда после очередного цикла из 7 «разливаний» (их можно неограниченно продолжать, так что Г можно считать первым в цикле) у Г накопится не более чем $6 \cdot x/6 = x$ литров; причем равенство возможно, лишь если каждый из 6 других гномов наливает Г ровно по $x/6$ литров.

Таким образом, из условия следует, что каждый гном разливает одно и то же количество x молока и после получения k порций у него в кружке налито $kx/6$ литров ($k = 1, 2, \ldots, 6$); значение x находится из условия, что суммарное количество молока — 3 литра.

∇ Эта задача, формулировка которой напоминает очаровательных героев диснеевского фильма «Белоснежка и семь гномов», была признана читателями «Кванта» одной из лучших задач года. Ответ здесь угадать нетрудно — естественно предположить, что за одно переливание распределение молока претерпевает лишь сдвиг на одного гнома. Но этого, конечно, недостаточно — нужно еще доказать единственность решения (это можно сделать многими разными способами).

244. а) Ответ: существует одно двузначное 49 и одно четырехзначное $1681 = 41^2$ особое число.

Пусть $(10x+t)^2 = 100x^2 + 20xt + t^2$, где $20xt + t^2$ — квадрат натурального числа, меньшего 10, x и t — целые числа от 1 до 9 и $x^2 > 10$. Тогда $x \geqslant 4$ и $xt \leqslant 4$, что возможно лишь при $x = 4$ и $t = 1$.

б) Ответ: да; например, $256036 = 506^2$.

в) Чтобы получить нужное особое число вида

$$(10^5x + 1)^2 = 10^{10}x^2 + 2\cdot 10^5x + 1,$$

достаточно найти целое x такое, что $10^9 < x^2 < 10^{10}$ и $2\cdot 10^5x + 1 = y^2 < 10^{10}$. Можно взять $x = 5\cdot 10^4 - 1$ (искомым 20-значным особым числом будет

$$(4999900001)^2 = 24999000019999800001;$$

оно «состоит» из 49999^2 и 99999^2).

г) Для любого k особым $4k$-значным числом может быть лишь

$$(10^kx + t)^2 = 10^{2k}x^2 + 2\cdot 10^kxt + t^2$$

при $10^{2k-1} \leqslant x^2 < 10^{2k}$, откуда $x > 3\cdot 10^{k-1}$, и $6\cdot 10^{2k-1}t < 10^{2k}$, откуда $t = 1$. При этом равенство $2\cdot 10^kx + 1 = (2u+1)^2$, эквивалентное $2^{k-1}5^kx = u(u+1)$, выполняется лишь в трех случаях:

(1) $u+1$ делится на $5\cdot 10^{k-1}$;

(2) u делится на 2^{k-1}, $u+1$ — на 5^k;

(3) u делится на 5^k, $u+1$ — на 2^{k-1}.

Каждый случай дает не более чем одно решение, удовлетворяющее условию $u < 5\cdot 10^{k-1}$, эквивалентному $2u+1 < 10^k$ (в случаях (2) и (3) достаточно рассмотреть разность двух решений, чтобы прийти в противоречие с этим условием). Поэтому существует не более трех особых чисел.

∇ Более детальные рассуждения («Квант», 1978, № 6, с. 46) показывают, что таких чисел не более двух.

д) Для любого k существует по крайней мере одно $(4k+2)$-значное особое число, а именно $z^2 = v + w^2$, где $v = 25 \cdot 10^{2k-1}$, w — наименьшее натуральное число, большее $\sqrt{v}$. Пусть $y = w^2 - v$; при этом $z^2 = 4v \cdot w^2 + y^2 = 10^{2k+1}w^2 + y^2$ «состоит» из w^2 и y^2 и будет особым, если выполнены неравенства $0 < y^2 < 10^{2k+1}$ и $10^{2k} \leqslant w^2 < 10^{2k+1}$.

Поскольку $w - 1 < \sqrt{v}$ и $(w-1)^2 \leqslant v - 1$, то $y < 2\sqrt{v}$ и $y^2 < 4v = 10^{2k+1}$; далее, $10^{2k} < v < w^2 = v + y < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1}$.

∇ В частности, с помощью компьютера можно найти, при $k = 7$, число

$$z = 25 \cdot 10^{13} + 15811389^2 = 500000022109321,$$

квадрат которого — 30-значное особое число. Полнее исследование в задаче о $(4k+2)$-значных особых числах, связанное с десятичным разложением числа $\sqrt{10}$, представляется довольно безнадежным и не слишком интересным.

245. Занумеруем данные числа в порядке возрастания: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

Докажем, что каждая сумма s некоторых из них лежит в одном из промежутков между $b_k/2$ и b_k, где $b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Достаточно доказать, что никакая сумма s не может оказаться строго между b_k и $b_{k+1}/2$. Предположив, что $s > b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, и, стало быть, s содержит некоторое $a_l \geqslant a_{k+1}$, а потому $s \geqslant a_{k+1}$, мы получили бы (сложив неравенства), что $2s > a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} = b_{k+1}$, т. е. $s > b_{k+1}/2$.

246. а) Разобьем десять цифр 0, 1, 2, ..., 9 на две группы по 5 цифр в каждой (например, от 0 до 4 — одна группа, от 5 до 9 — другая). Достаточно использовать ящики, у которых обе цифры берутся из одной группы, поскольку такие две цифры есть в любом трехзначном номере.

б) Кроме 10 ящиков 00, 11, ..., 99, которые непременно будут заняты, потребуется не менее 30 ящиков, чтобы разместить билеты с тремя разными цифрами: таких билетов всего $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, а в каждый ящик с номером $\overline{pq}$ $(p \neq q)$ помещается не более $3 \cdot 8 = 24$ из них ($\overline{zpq}$, $\overline{pzq}$ и $\overline{pqz}$, где z — любая цифра, отличная от p и q).

в) Пусть x — наименьшее количество номеров занятых ящиков, начинающихся с одной какой-либо цифры $(x \geqslant 1)$; поскольку все цифры равноправны, мы можем считать, что меньше всего номеров начинается с 9 и эти номера — $\overline{99}$, $\overline{98}$, ..., $\overline{9y}$, где $y = 10 - x$. Тогда любой билет $\overline{9pq}$, где $p < y$, $q < y$, не может помещаться в ящиках $\overline{9p}$ и $\overline{9q}$, т. е. должен быть занят ящик $\overline{pq}$. Таким образом, заняты по крайней мере все y^2 ящиков с номерами, у которых обе цифры — от 0 до $y - 1$, и еще по крайней мере x^2 ящиков, начинающихся с одной из цифр от y до 9 (не менее чем по x для каждой из этих x цифр), т. е. всего занято не менее

$$y^2 + x^2 = (10 - x)^2 + x^2 \geqslant 50 \text{ ящиков.}$$

г), д) Для данных натуральных чисел k и s, $k < s$, обозначим через $F(k, s)$ наименьшее из чисел $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$ где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — натуральные числа, в сумме дающие s; величину $F(k, s)$ можно выразить через k и s — наименьшее значение суммы квадратов достигается, когда числа x_i «почти равны»; точнее, если $s = kq + r$, $0 \leqslant r < k$, то $k - r$ из них равны q и r остальных $q + 1$, так что

$$F(k, s) = (k - r) q^2 + r (q + 1)^2 = kq^2 + r (2q + 1).$$

Удобно рассматривать сразу более общую задачу — для k-значных «билетов» с s «цифрами» от 0 до $s - 1$ (в нашей задаче $s = 10$). Докажем, что наименьшее число $M(k, s)$ ящиков с номерами $\overline{pq}$ $(0 \leqslant p < s,\ 0 \leqslant q < s)$, в которые можно поместить билеты, вычеркнув $k - 2$ цифры, равно $F(k - 1, s)$.

В частности, в задаче г)

$$M(4, 10) = F(3, 10) = 3^2 + 3^2 + 4^2 = 34,$$

а ответ в задаче д) дается таблицей

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(k, 10) = F(k-1, 10)$	50	34	26	20	18	16	14	12	10

Неравенство $M(k, s) \geqslant F(k - 1, s)$ можно доказать индукцией по $k + s$, рассуждая так же, как в пункте в):

$$M(k, s) \geqslant \min_{x=1, 2, \ldots, s} (M(k - 1, s - x) + x^2).$$

Для размещения билетов по $F(k - 1, s) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k-1}^2$ ящикам достаточно, как в пункте а), разбить s цифр на $k - 1$ группу (по $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ цифр) и оставить ящики, у которых обе цифры из одной группы (см. [77]).

247. Раскрасим все узлы в шахматном порядке в черный и белый цвет. На границе лежат $4 \cdot 99$ узлов (не считая вершин) — поровну черных и белых. Пусть все они служат концами ломаных. Тогда имеется одинаковое количество ломаных с двумя белыми и двумя черными концами. Поэтому общее количество белых и черных узлов, лежащих на ломаных внутри доски, также одинаково. (На ломаных с белыми концами на один черный узел больше, на ломаных с черными — на один белый.) Но всего внутри доски 99^2 — нечетное число — узлов, так что по крайней мере один из них не лежит на ломаной.

248. Из условий задачи следует, что величина

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

не меньше 2 (поскольку $m \leqslant s$, $n \leqslant s$, $s < mn$). В случае $m = n = 2$, $2 \leqslant s \leqslant 3$ утверждение задачи легко проверяется. Докажем его в общем случае индукцией по $m + n = k$, где $k \geqslant 4$.

Пусть $x_1 > y_1$ — наибольшие числа среди x_i и y_j соответственно ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$; случай $x_1 = y_1$ очевиден). Чтобы применить индукционное предположение к равенству

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \ldots + x_m = y_2 + \ldots + y_m$$

с $k - 1 = m + n - 1$ числами в обеих частях (после чего останется, быть может, перенести y_1 в правую часть), достаточно проверить выполнение неравенства $s' = y_2 + \ldots + y_n < m(n-1)$; поскольку $y_1 > s/n$, то $s' < s - s/n = mn \cdot (n-1)/n = m(n-1)$.

249. Выберем самый большой из данных квадратов K_1, затем — самый большой K_2 из тех, чьи центры не лежат в K_1, затем — самый большой из оставшихся, чьи центры не лежат в уже отмеченных квадратах K_1 и K_2, и т. д.

Предположим, что при этом центр C некоторого квадрата попадет более чем в четыре отмеченных, тогда центры каких-то двух из них (K_i и K_j) попадут в одну и ту же из четвертей, на которую делят плоскость оси симметрии квадрата с центром C. Тот из квадратов K_i и K_j, центр которого находится дальше от этих осей (по сумме расстояний, или по наибольшему из них), содержит центр другого. Но это противоречит правилу выбора квадратов.

250. Пусть массы гирь $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$.

а) Будем ставить гири так: на левую чашку m_1, затем на правую m_2, на левую m_3, на правую m_4 и т. д. При этом последовательность результатов взвешиваний будет такой: $LRLRLR\ldots$ Это вытекает из такого простого утверждения.

Лемма. Если $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{k-1} < m_k$, то из двух сумм

$$m_1 + m_3 + m_5 + \ldots \quad \text{и} \quad m_2 + m_4 + m_6 + \ldots$$

(содержащих все n данных чисел) больше та, в которую попадает наибольшее число m_k.

Для ее доказательства надо при четном k сложить неравенства $m_1 < m_2$, $m_3 < m_4$, ..., $m_{k-1} < m_k$, а при нечетном k — $m_1 > 0$, $m_3 > m_2$, ..., $m_k > m_{k-1}$.

Эта же лемма, но в применении к отрезку $m_l < m_{l+1} < \ldots$ $\ldots < m_{k-1} < m_k$, состоящему из $k-l+1$ чисел, пригодится в решении задачи б).

б) Удобно описать порядок расстановки гирь, соответствующий данному слову из букв L и R, «начиная с конца» слова.

Поставим все гири с четными номерами на одну чашку, с нечетными — на другую, причем самую тяжелую гирю m_n поставим на левую или правую чашку в соответствии с последней буквой данного слова; затем, переходя от каждой буквы слова к предыдущей, будем снимать самую тяжелую из оставшихся гирь, если должна произойти смена буквы (L на R или R на L), и самую легкую — если не должна. При этом каждый раз остается отрезок из (занумерованных подряд) гирь, которые, чередуясь, стоят на одной и другой чашке; к нему применима лемма.

251. а) Ответ: многочлены $Q_1(x) = x$ и $Q_2(x) = P(x)$ коммутируют с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$ при любом α; многочлен Q степени 3, коммутирующий с $x^2 - \alpha$, существует при $\alpha = 0$ ($Q(x) = x^3$) и при $\alpha = 2$ ($Q(x) = x^3 - 3x$).

Доказательство, что других многочленов нет, и проверка получаются прямым сравнением коэффициентов. Например, для многочлена степени 3: тождество

$$(x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + \beta_1 (x^2 - \alpha)^2 + \\ + \beta_2 (x^2 - \alpha) + \beta_3$$

выполнено, если $\beta_1 = \beta_3 = 0$ (сравнение коэффициентов при x^5, x^3 и x), $2\beta_2 = -3\alpha$ (сравнение коэффициентов при x^4), $\beta_2^2 = 3\alpha^2 + \beta_2$ (при x^2), $\alpha = \alpha^3 + \beta_2\alpha$ (свободный член), откуда либо $\alpha = 0$ и $\beta_2 = 0$, либо

$$\beta_2 = -3\alpha/2 = 1 - \alpha^2 = \beta_2^2 - 3\alpha^2;$$

как ни удивительно, три уравнения с двумя неизвестными имеют решение $\alpha = 2$, $\beta_2 = -3$.

б) Нетрудно проверить, что при одновременном преобразовании двух коммутирующих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$

$$P(x) \to P^*(x) = P(x - \gamma) + \gamma, \qquad Q(x) \to Q^*(x) = Q(x - \gamma) + \gamma$$

(γ — некоторое число) полученные многочлены $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ также коммутируют друг с другом. (Если рассматривать многочлен как функцию, отображающую числовую прямую в себя, то указанное преобразование соответствует сдвигу на γ начала отсчета на прямой.) Любой многочлен 2-й степени со старшим коэффициентом 1 можно (выделив полный квадрат) указанным преобразованием привести к виду $P^*(x) = x^2 - \alpha$. Поэтому можно сразу считать, что $P(x) = x^2 - \alpha$, и действовать так же, как в пункте а).

Выписывая систему уравнений на коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_k$ из тождества $(Q(x))^2 - \alpha = Q(x^2 - \alpha)$, где $Q(x) = x^k + \beta_1 x^{k-1} + \beta_2 x^{k-2} + \ldots + \beta_k$, получим прежде всего равенства $\beta_1 = \beta_3 = \ldots = 0$, а далее — уравнения вида $\beta_2 = F_2$, $\beta_4 = F_4$, ... где функция F_i зависит от α и от β_{2j}, $2j < i$, так что коэффициенты $\beta_2, \beta_4, \ldots$ находятся однозначно (лишь $[k/2]$ из k уравнений, полученных приравниванием коэффициентов при $x^{2k-2}, x^{2k-4}, \ldots, x^2$ и свободного члена, используются для отыскания β_{2j}; остальные — дополнительные условия, которые могут и не выполняться).

в) Это $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$.

г) Будем вместо $P(Q)$, $P(Q(R))$ писать $P \circ Q$, $P \circ Q \circ R$. По условию $Q \circ P = P \circ Q$ и $R \circ P = P \circ R$, откуда

$$(Q \circ R) \circ P = Q \circ R \circ P = Q \circ P \circ R = P \circ Q \circ R = P \circ (Q \circ R),$$
$$(R \circ Q) \circ P = R \circ Q \circ P = R \circ P \circ Q = P \circ R \circ Q = P \circ (R \circ Q).$$

Мы видим, что многочлены $Q \circ R$ и $R \circ Q$ оба коммутируют с P. Поскольку они имеют одинаковую степень (произведение степеней R и Q), согласно б) они совпадают.

д) Методом математической индукции можно доказать, что для любого $k \geqslant 2$ существует многочлен P_k степени k такой, что

$$t^k + \frac{1}{t^k} = P_k\left(t + \frac{1}{t}\right);$$

в частности,

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2, \quad t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

так что $P_2(x) = x^2 - 2$, $P_3(x) = x^3 - 3x$. При этом

$$t^{mn} + \frac{1}{t^{mn}} = P_m\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) = P_n\left(t^m + \frac{1}{t^m}\right) =$$
$$= P_m\left(P_n\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = P_n\left(P_m\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = P_{mn}\left(t + \frac{1}{t}\right);$$

из этих тождеств следует, что $P_m \circ P_n = P_n \circ P_m = P_{mn}$.

∇ Эти многочлены получаются простой заменой переменных из многочленов Чебышева T_k, определяемых тождествами

$$\cos k\varphi = T_k(\cos\varphi), \quad k = 2, 3, \ldots; \quad P_k(x) = 2T_k(x/2).$$

Подробное обсуждение свойств многочленов Чебышева см. в статье [68].

252. Ответ: 88.

Каждое число $k = 1, 2, 3, \ldots$ встречается в последовательности (a_n) $2k$ раз, поскольку условие $a_n = k$ эквивалентно тому, что

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad k^2 - k < n \leqslant k^2 + k.$$

Поэтому в сумме

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{a_{44\cdot 43+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{44\cdot 45}}\right)$$

каждая из 44 круглых скобок равна $2k \cdot 1/k = 2$.

253. Пусть E — вершина треугольника ADE, полученного переносом треугольника BMC (на вектор BA, рис. 103). Тогда $MDEC$ — параллелограмм, углы EAD, CBM, CDM, ECD равны и точки A, C, E и D лежат на одной окружности. Следовательно, равны также углы ACD, AED и BCM.

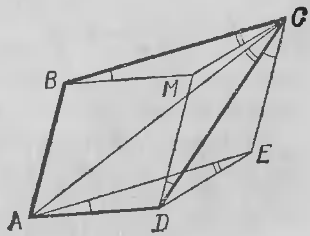


Рис. 103

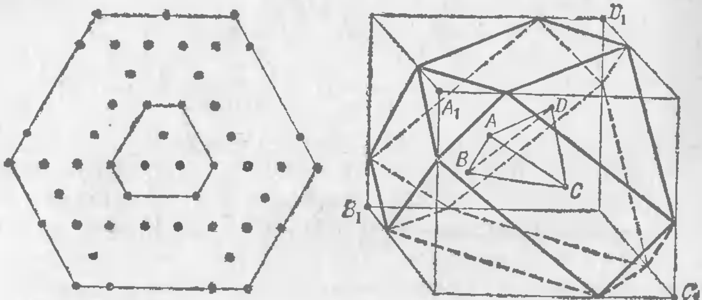
254. Если бы $1978^m - 1$ делилось на $1000^m - 1 = d$, то и число $1978^m - 1000^m = 2^m \ (989^m - 500^m)$ делилось бы на d. Но это невозможно, так как $989^m - 500^m < d$ и d нечетно.

255. а) Ответ: $n = 7$.

Множество K_n состоит из точек прямой AB, удаленных от A и B на целочисленные расстояния, причем крайние его точки удалены от середины отрезка AB на расстояние $3^n/2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, т. е. от A — на расстояния $(3^n - 1)/2$ и $(3^n + 1)/2$. Поскольку $(3^6 + 1)/2 = 365 < 1000$, а $(3^7 + 1)/2 > 1000$, искомое множество — K_7.

б) Многоугольники, являющиеся выпуклыми оболочками (см. П17) множеств $K_1, K_2, \ldots$ — шестиугольники (рис. 104, a). Вершины выпуклой оболочки K_n получаются так: надо взять каждую пару вершин треугольника ABC и проделать с ней n операций «симметричного отражения» — как в задаче а). Чтобы доказать, что все точки K_n лежат в пределах выпуклой оболочки H_n шести построенных «крайних точек», удобно рассмотреть H_n как пересечение трех полос, края которых идут по противоположным сторонам шестиугольника H_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Первоначальный треугольник ABC можно также рассматривать как пересечение трех полос; полосы, у которой один край идет по прямой AB, а другой переходит через точку C, и двух аналогичных. Все симметричные отражения полосы относительно любой ее точки принадлежат полосе с той же осью, но в три раза большей ширины. Пользуясь этим, можно доказать, что K_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) принадлежит каждой из трех полос, в пересечении дающих H_n.

Площадь H_n можно подсчитать как комбинацию площадей треугольников, гомотетичных ABC. Она равна $(3^{2n+1} - 1)/2$.



а б

Рис. 104

в) Множество K_1 содержит, кроме точек K_0, еще 12 точек, полученных отражением одной из вершин тетраэдра $ABCD$ относительно другой. Удобно представить эти 12 «крайних» точек K_1, построив куб L_0, у которого точки A, B, C, D — несмежные вершины, и гомотетичный L_0 относительно центра с коэффициентом 3 куб L_1 с соответствующими вершинами A_1, B_1, C_1, D_1: 12 точек K_1 лежат по одной на ребрах L_1 и делят их, считая от вершин A_1, B_1, C_1, D_1, в отношении $1:2$. Если от каждой вершины L_1 плоскостью, проходящей через 3 «крайние» точки на выходящих из этой вершины ребрах, отрезать пирамиду, то оставшийся многогранник M_1 — выпуклая оболочка K_1 — будет иметь 14 граней: 6 прямоугольников $a \times 2a$ (где a — длина ребра тетраэдра $ABCD$) и 8 правильных треугольников — четыре со стороной a и 4 со стороной $2a$ (рис. 104, б).

г) Объем M_1 можно подсчитать, вычтя из объема куба (81) объем отрезаемых пирамид $\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 = 18\right)$. Он равен 63.

д) Выпуклая оболочка M_n множества K_n будет выпуклым многогранником с вершинами в 12 «крайних» точках, построенных для каждой пары вершин тетраэдра $ABCD$. Вершины M_n лежат по одной на ребрах куба L_n, полученного из L_0 центральной гомотетией с коэффициентом 3^n, и делят их в отношениях $(3^n - 1):(3^n + 1)$.

В доказательстве удобно рассмотреть 7 полос, в пересечении дающих M_n: каждая из них получается раздутием в 3^n раз из полосы, края которой содержат все четыре вершины тетраэдра $ABCD$. Объем M_n равен $(5\cdot 3^{3n}-3^{n+1})/2$.

256. а) Пусть $m\geqslant 2n$. Покажем, что 1-й игрок может сделать в позиции (m, n) такой ход, что полученная позиция станет (для 2-го игрока) проигрышной. Если позиция $(m-n,\ m)$ — проигрышная, то искомый ход: $(m, n)\to(m-n,\ m)$. Если же эта позиция выигрышная, то в ней существует ход, превращающий ее в проигрышную. Поскольку $m-n\geqslant n$, этот ход имеет вид $(m-n,\ n)\to(m-kn,\ n)$, где k — некоторое натуральное число. Но тогда искомый выигрышный ход 1-го игрока: $(m, n)\to$ $\to(m-kn,\ n)$.

Любопытно, что здесь удается доказать, что позиция (m, n) при $m\geqslant 2n$ выигрышная, не предъявляя в явном виде выигрывающей стратегии.

б) Ответ: при $\alpha\geqslant(1+\sqrt{5})/2$.

Каждой позиции (m, n), где $m\geqslant n$, поставим в соответствие точку $x=m/n\geqslant 1$ на числовой оси. При каждом ходе точка x смещается на некоторое целое число k влево; если она попадает в отрезок $0<x<1$, то заменяется на обратную: $x\to 1/x$; попадание в 0 — проигрыш. Отметим на оси отрезок $[1/\beta;\ \beta]$ длины 1; $\beta-\dfrac{1}{\beta}=1$ при $\beta=(1+\sqrt{5})/2$. Точки $x=$ $=m/n$, лежащие внутри этого отрезка, соответствуют проигрышным позициям, правее него — выигрышным; в самом деле, из такой точки можно очередным (выигрывающим!) ходом попасть в этот отрезок; если $1<x<\beta$, то очередной ход выводит из отрезка, а если $x=1$, то ведет к проигрышу. Поскольку наибольшее число спичек в коробках уменьшается, через несколько ходов игра обязательно закончится.

257. Условию задачи удовлетворяет последовательность $4\{n\sqrt{2}\}$, где $\{x\}=x-[x]$ — дробная часть числа x ($n=$ $=1, 2, 3, \ldots$). Действительно, если p и q — натуральные числа, $p<(4-\sqrt{2})\,q$, то

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|2q^2-p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)}>\frac{1}{4q^2},$$

поэтому при $m>k\geqslant 1$

$$|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}|=|(m-k)\sqrt{2}-l|>\frac{1}{4(m-k)};$$

здесь $l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]<m\sqrt{2}-k\sqrt{2}+1\leqslant(m-k)(\sqrt{2}+1)<$ $<(4-\sqrt{2})(m-k)$.

∇ Здесь использован тот факт, что иррациональное число $\sqrt{2}$ плохо приближается дробями с небольшими знаменателями. Другое решение — например, конструкция последовательности с помощью десятичных дробей (см. «Квант», 1979, 5, с. 24) — значительно длиннее.

258. Поскольку $f(1) = f(0) = 1$, то свободный член $P_n(0)$ многочлена $P_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots))$ равен 1. Следовательно, при любом целом m остаток от деления $P_n(m)$ на m равен 1.

Заменив здесь m на $m' = P_k(m)$, получим, что $P_{n+k}(m)$ и $m' = P_k(m)$ взаимно просты.

∇ Из того факта, что существует последовательность $(P_n(2))$, все члены которой попарно взаимно просты, сразу следует бесконечность множества простых чисел.

259. Пусть M — любая точка пересечения графика $y = A\sin x$ с его образом $x = -A\sin y$ при повороте на 90° вокруг начала координат (рис. 105). Тогда точка M и ее образы

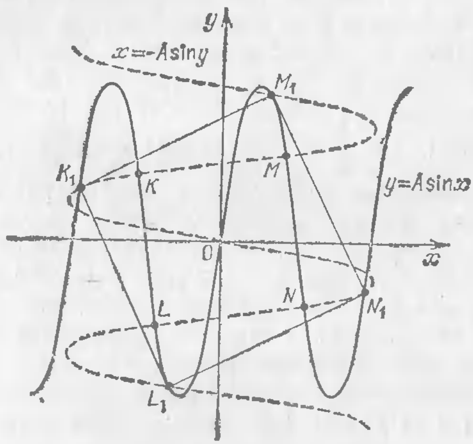


Рис. 105

K, L и N при повороте вокруг O на 90°, 180° и 270° принадлежат графику $y = A\sin x$, так что квадрат $MKLN$ вписан в данный график. При достаточно большом A точку M пересечения графиков можно выбрать более чем 1978 способами, причем на различных расстояниях от точки O; например, при $A > 1978 \cdot 2\pi$ можно взять по одной точке пересечения k-й волны исходной и k-й волны повернутой траектории (волны отсчитываются от O). Здесь используется теорема о существовании корня у непрерывной функции, меняющей знак (см. П5): из нее нетрудно вывести тот наглядно очевидный факт, что на указанных участках графики пересекаются.

260. а) Ответ: можно.

Сначала получаем карточку (1; 8):

$$(5;\ 19) \to (6;\ 20) \to (3;\ 10) \to \ldots \to (10;\ 17) \to (3;\ 17) \to$$

$$\to (4;\ 18) \to (2;\ 9) \to \ldots \to (9;\ 16) \to (2;\ 16) \to (1;\ 8),$$

а из нее уже легко получить карточки (1; 15), (1; 22), ..., $(1;\ 1+7k)$ при любом натуральном k.

б) Ответ: нельзя. При любых операциях разность чисел на карточках будет делиться на 7.

в) Ответ: пусть d — наибольший нечетный делитель разности $b-a$; тогда из карточки $(a;\ b)$ можно получить $(1;\ n)$, только если $n = 1 + dk$ при некотором натуральном k.

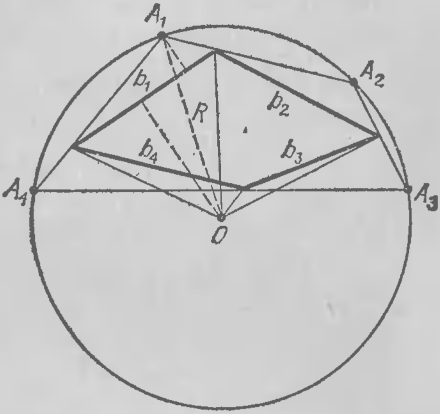


Рис. 106

Необходимость этого условия очевидна (доказывается аналогично пункту б)). Теперь достаточно доказать, что из $(a;\ b)$ можно получить $(1;\ 1+d)$. Если a и b одной четности, то выполнима операция $(a;\ b) \to \left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$ или $\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+1}{2}\right)$; она дает пару с вдвое меньшей разностью и т. д. С парой $(a,\ a+d)$ можно проделать серию операций

$$\begin{array}{r} (a;\ a+d) \to (a+d;\ a+2d) \to \\ \to (a;\ a+2d) \to \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}+d\right) \\ \text{или} \\ \left(\frac{a+1}{2};\ \frac{a+1}{2}+d\right), \end{array} \right.$$

она дает пару с той же разницей, но меньшими числами (если $a > 1$). Повторение этих серий, как в примере а), приведет к паре $(1;\ 1+d)$.

261. Пусть A_i — вершины вписанного n-угольника ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$); b_i — отрезок, соединяющий две отмеченные точки на его сторонах, выходящих из A_i; O — центр круга (рис. 106):

s_i и s_i' — площади треугольников с основанием b_i, вершинами которых служат A_i и O, причем s_i' берется со знаком минус, если A_i и O лежат по одну сторону от прямой, содержащей b_i. Тогда $s_i + s_i' \leqslant b_i R/2$ для каждого i и сумма $s_1' + s_2' + \ldots$ $\ldots + s_n'$ равна площади многоугольника с вершинами в отмеченных точках (знак $+$ или $-$ числа s_i' показывает, изнутри или снаружи из точки O видна сторона b_i). Поэтому

$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n + s_1' + s_2' + \ldots + s_n' \leqslant$$
$$\leqslant (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) R/2.$$

262. а) Если n четно, то всю доску можно разбить на прямоугольнички размером 1×2 клетки («домино»). Начинающий всегда будет иметь возможность сделать ход (и тем самым выиграет), если он будет следовать такой стратегии: если фишка стоит на одной из клеток какого-то домино, то он ставит ее на вторую клетку того же домино («закрывает» домино).

Если n нечетно, то можно разбить на домино все клетки доски, кроме начальной — угловой. Теперь аналогичная стратегия будет выигрышной для второго игрока.

б) Ответ: всегда выигрывает начинающий. При четном n стратегия та же, что в а). При нечетном n нужно снова разбить на домино все клетки, кроме угловой; раскрасив доску в шахматном порядке, легко убедиться, что на угловую клетку второй никогда пойти не сможет, поэтому первый выигрывает, следуя той же стратегии «закрывания» домино.

Рис. 107

263. Ответ: не всегда.

На рис. 107 изображен пример 6 отрезков — 3 коротких и 3 длинных, которые нельзя включить нужным образом в несамопересекающуюся (даже незамкнутую) ломаную. В самом деле, один из коротких отрезков — не крайний в ломаной, но его концы могут быть соединены лишь с концами близлежащего длинного.

264. Первое решение. Пользуясь неравенством $ab \leqslant$ $\leqslant (a+b)^2/4$, для произвольного числа $c > 0$ имеем:

$$P = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_1}{c} + \ldots + \frac{x_n}{c}\right)\left(\frac{c}{x_1} + \ldots + \frac{c}{x_n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \frac{x_2}{c} + \frac{c}{x_2} + \ldots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n}\right)^2.$$

Заметим, что функция $f(t)=\frac{c}{t}+\frac{t}{c}$ принимает наибольшее на $[a; b]$ значение обязательно на том или другом конце промежутка; выберем c так, чтобы эти значения совпадали: $f(a)=f(b)$, т. е. возьмем $c=\sqrt{ab}$. Тогда при $a\leqslant t\leqslant b$ будет $f(t)\leqslant\sqrt{a/b}+\sqrt{b/a}$. Поэтому

$$P\leqslant n^2\left(\sqrt{a/b}+\sqrt{b/a}\right)^2/4=n^2(a+b)^2/4ab.$$

Второе решение. Разместим на дуге гиперболы $y=1/x$, $a\leqslant x\leqslant b$, в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одинаковые грузы. Центр масс этих грузов — точка с абсциссой $p=(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$ и ординатой $q=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\Big/n$ — будет лежать в пределах сегмента, ограниченного дугой гиперболы и отрезком, соединяющим ее концы. Ясно, что точку $(p; q)$ в этом сегменте, для которой величина pq наибольшая, нужно искать на отрезке — верхней границе сегмента (рис. 108). Для точек $(p; q)$ прямой, содержащей этот отрезок, q можно записать как линейную функцию от p, тогда pq будет квадратным трехчленом от p (обращающимся в 0 при $p=0$). Чтобы не выписывать его в явном виде — хоть это и нетрудно, — заметим, что при $p=a$ и $p=b$ он принимает равные значения $a\cdot\frac{1}{a}=b\cdot\frac{1}{b}=1$; следовательно, наибольшее значение он принимает посередине между этими точками и оно равно $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Big/4$. Отсюда следует нужное неравенство.

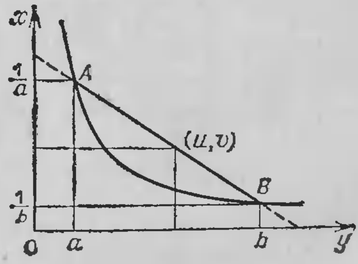


Рис. 108

∇ Из второго решения легко вывести побочный результат: отрезки любой прямой между точками пересечения с гиперболой $y=1/x$ и ее «асимптотами» — осями координат (показанные на рисунке пунктиром) равны.

Возвращаясь к исходной задаче, заметим, что при четном n неравенство дает точную оценку левой части, а при нечетном ее можно несколько уточнить. (Для $n=5$ эта задача предлагалась недавно на олимпиаде США, см. задачу 7.22 в книге [41].)

265. В качестве требуемого множества можно взять множество, состоящее из точек $A_k=(k; r(k))$, $k=0, 1, 2, \ldots$

..., $p-1$, где $r(k)$ — остаток от деления k^2 на p. Для $p=7$ это множество показано на рис. 109.

Если бы какие-то три точки A_l, A_m, A_n $(l<m<n<p)$ лежали на одной прямой, то выполнялось бы соотношение

$$\frac{r(m)-r(l)}{m-l}=\frac{r(n)-r(m)}{n-m},$$

т. е. для некоторых целых a и b выполнялось бы равенство $(n-m)(m^2-l^2+ap)=(m-l)(n^2-m^2+bp)$. Перенося члены, не содержащие p в левую часть равенства, видим, что $(n-m)(m-l)(n-l)$ делится иа p. Поскольку p простое, это иевозможно.

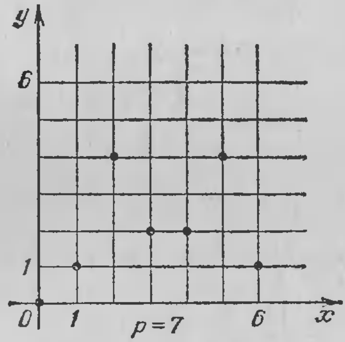


Рис. 109

Если бы какие-то четыре точки A_k, A_l, A_m, A_n лежали в вершинах параллелограмма, $\overrightarrow{A_kA_l}=\overrightarrow{A_nA_m}$, то выполнялись бы равенства $l-k=m-n$ и $r(l)-r(k)=r(m)-r(n)$, т. е. число $(l^2-k^2)-(m^2-n^2)$ делилось бы на p. Тогда число

$$(l+k)-(m+n)=2l-2m,$$

а поскольку $p>3$, и $l-m$ также должно было бы делиться на p, что невозможно.

266. Проведем через два противоположные ребра a и b тетраэдра параллельные плоскости p и p'. Пусть h — расстояние между ними. Будем рассматривать лишь проекции тетраэдра на плоскости q, перпендикулярные p, и уже среди них найдем такие, отношение площадей которых не меньше $\sqrt{2}$. Проекцией тетраэдра на плоскость q служит трапеция с основаниями a'_q и b'_q — проекциями a и b на q, высотой h (в частном случае, если проекция одного из ребер — a или b — состоит из одной точки, трапеция вырождается в треугольник); площадь проекции равна $\left(a'_q+b'_q\right)h/2$. Чтобы проследить, как зависит эта величииа от наклона ребер a и b к плоскости q, рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, изображаемые ребрами тетраэдра (рис. 110). Можно, очевидно, считать, что $a\geqslant b$ и угол γ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не превосходит 90°. Отложим их от одной точки O — тогда вместо длин проекций на плоскость q ребер тетраэдра мы можем говорить о длинах проекций векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на прямую (в плоскости, параллельной p и p'). Сумма проекций на прямую l_1, параллельную вектору $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, равна $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, а на прямую l_2,

перпендикулярную a, $b \sin\gamma$; отношение этих двух величин не меньше $\sqrt{2}$:

$$|a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \geqslant a^2 + b^2 \geqslant 2b^2 \geqslant 2b^2 \sin^2\gamma.$$

∇ Заметим, что для правильного тетраэдра оценка $\sqrt{2}$ — наилучшая: площадь любой его проекции заключена между $a^2/2$ и $a^2/(2\sqrt{2})$, где a — длина ребра.

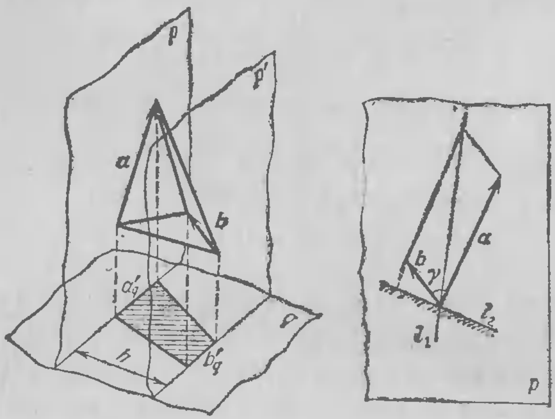


Рис. 110

267. Положим

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2.$$

Выделив в этом квадратном трехчлене полный квадрат, получим

$$f(x) = n(x - b_n)^2 + f(b_n); \qquad (*)$$

при проверке этого равенства нужно учесть, что $nb_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

При $n = 1$ нужные неравенства очевидны ($C = D$). Чтобы доказать их, пользуясь методом математической индукции, достаточно доказать неравенства

$$0 \leqslant f(b_{n+1}) - f(b_n) \leqslant (a_{n+1} - b_{n+1})^2,$$

поскольку при добавлении к $a_1, a_2, \ldots, a_n$ еще одного числа a_{n+1} величина C возрастает на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2$, а D — на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2 + f(b_{n+1}) - f(b_n)$. Левое неравенство сразу вытекает из равенства $(*)$ при $x = b_{n+1}$; правое следует из равенств

$$(n+1)b_{n+1} = nb_n + a_{n+1}, \quad n(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1} - b_{n+1},$$
$$f(b_{n+1}) - f(b_n) = n(b_{n+1} - b_n)^2 = (a_{n+1} - b_{n+1})^2/n.$$

∇ Тождество (*), выражающее суммы квадратов расстояний до n точек через квадрат расстояния до их «центра масс» (или «среднего значения»), постоянно используется в теории вероятностей, статистике, а его аналоги на плоскости и в пространстве — и в геометрии.

268. Рассмотрим вместе с числом $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ «сопряженные», отличающиеся от него знаками радикалов: $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ и $\lambda_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Если

$$\lambda_1^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

то, как можно проверить последовательно для $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$\lambda_2^n = q_n - r_n\sqrt{2} + s_n - t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_3^n = q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_4^n = q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}.$$

Сложив эти четыре равенства, поделив сумму на $4\lambda_1^n$ и перейдя к пределу, получим $\lim\left(q_n/\lambda_1^n\right) = 1/4$, поскольку $|\lambda_j| < \lambda_1$ для $j = 2, 3, 4$, и потому $\lim\left(|\lambda_j|^n/\lambda_1^n\right) = 0$. Прибавив к первому равенству одно из трех других и вычтя два оставшихся, мы получим: $\lim\left(r_n\sqrt{2}/\lambda_1^n\right) = \lim\left(s_n\sqrt{3}/\lambda_1^n\right) = \lim\left(t_n\sqrt{6}/\lambda_1^n\right) = 1/4$ (таким образом, в сумме $q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$ при больших n все слагаемые примерно равны друг другу!) Отсюда находим

$$\lim_{n\to\infty}(r_n/q_n) = 1/\sqrt{2}, \quad \lim_{n\to\infty}(s_n/q_n) = 1/\sqrt{3}, \quad \lim_{n\to\infty}(t_n/q_n) = 1/\sqrt{6}.$$

∇ Отметим, что ответ в этой задаче получился бы тем же самым, если бы вместо $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ стояло любое число $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ с натуральными a, b, c, d.

269. Ответ: 1/5. Нужно рассмотреть два случая: вершина прямого угла меньшего треугольника может лежать или на гипотенузе, или на катете большего. В первом случае отношение катетов двух треугольников не меньше 1/2, отношение их площадей — 1/4. Во втором случае, зафиксировав меньший треугольник и пользуясь тем, что вершины большего будут пробегать дуги окружностей, можно получить чисто геометрическое решение; еще проще аналитическое решение: если проекции катета меньшего треугольника на катеты большего равны x и y (рис. 111), то $x^2 + y^2 = a^2$, а катет большего равен $2x + y \leqslant a\sqrt{5}$.

270. **Ответ**: множество точек, из которых нельзя ускакать «в бесконечность», имеет площадь 15; это — ступенчатая фигура T, изображенная на рис. 112.

Из любой точки вне T можно несколькими шагами $(1; -1)$ попасть в область $x \geqslant 5$, а затем делать шаги $(-5; 7) + 5(1; -1) = (0; 2)$.

∇ Еще более интересные формы фигур образуются в этой задаче, если число разрешенных прыжков 3 и больше.

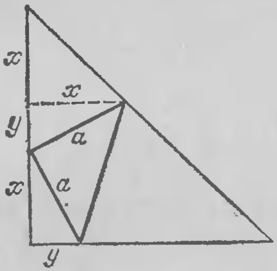


Рис. 111

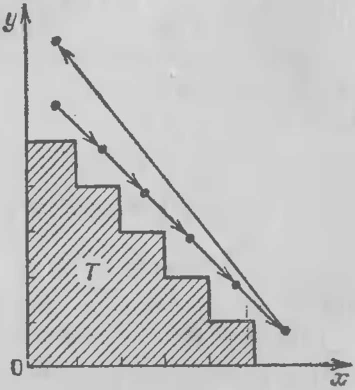


Рис. 112

271. Рассадим сначала парламентариев по двум палатам произвольным образом. Если в какой-то палате у ее члена A не менее двух врагов, то в другой палате у A не более одного врага. Пересадим A в другую палату; при этом суммарное количество s пар врагов в той и другой палате уменьшается. Поскольку s — целое неотрицательное число, такое уменьшение A может быть проделано лишь конечное число раз, и в результате получится требуемое разбиение на палаты.

272. Легко получаются все двоично-рациональные числа: дроби со знаменателями 2, 4, 8, 16 и т. д.

Для того чтобы из пары $(0; 1)$ получить дробь $1/n$, достаточно выбрать n различных двоично-рациональных чисел с суммой 1 и взять их среднее арифметическое; например, для $n = 5$:

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{1}{4^4}}{5}$$

(аналогичный набор строится для любого n).

Заметим теперь, что если мы умеем по некоторому плану из пары чисел $(0; 1)$ получать t, то по тому же плану из пары чисел $(1;0)$ мы получим $1-t$ (всюду числа x заменятся на $1-x$ — операция «среднее арифметическое» сохраняет эту замену), а из пары $(0;r)$ по тому же плану мы получим $(0;rt)$ (всюду x заменится на rx). Таким образом, если мы получили уже $1/n$ и все числа $k/(n-1)$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, то можем получить $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ и все $\frac{k}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{k}{n-1}$.

273. Рассмотрим отрезки ряда чисел x_m/m, $k^2 \leqslant m \leqslant (k+1)^2-1$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, k-й отрезок состоит из $(k+1)^2-k^2=2k+1$ чисел от x_{k^2}/k^2 до $x_{(k+1)^2-1}/((k+1)^2-1)$.

Заменив каждый член x_m/m в k-м отрезке наибольшим первым членом отрезка x_{k^2}/k^2, получим, что сумма чисел этого отрезка не больше

$$\frac{(2k+1)\,x_{k^2}}{k^2} \leqslant \frac{3kx_{k^2}}{k^2} = \frac{3x_{k^2}}{k}.$$

Теперь для любого натурального n получаем

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n} \leqslant 3\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{q^2}}{q}\right),$$

где q — наименьшее число, для которого $q^2 > n$.

274. Выберем где угодно точку O и представим каждый из взятых векторов $\overrightarrow{AB}$ как $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. В сумме всех векторов каждый вектор $\overrightarrow{OM}$, где M — одна из данных точек, будет встречаться со знаком «минус» столько же раз, сколько со знаком «плюс», так что вся сумма равна 0.

275. Ответ: а) при $n=8$ — 16 фишек; б) при n четном — $2n$, при n нечетном — $2n+1$.

Расположение такого количества фишек ясно из рис. 113, *а*, *б*. Доказательство того, что меньшим числом обойтись нельзя, проще для четного n; на каждой прямой, параллельной одной диагонали, должно стоять по фишке, а на самой диагонали — две (в углах).

Другое доказательство: на каждой показанной на рисунках пунктиром прямой должно стоять по фишке. Именно это доказательство переделывается на случай нечетного n (рис. 113, *б*): кроме $2n-2$ пунктирных прямых (на каждой — по фишке), следует рассмотреть еще шесть прямых, соединяющих центры клеток A, B, C, D; на них нужно потратить еще не менее 3 фишек.

276. Ответ: $x=\dfrac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$; $y=\dfrac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$.

Складывая и вычитая данные уравнения, а потом перемножая результаты, получим такое следствие системы:

$$x^2-y^2=a^2-b^2, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Подставляя это в исходную систему и решая ее (как линейную), найдем ответ. То, что полученные формулы совпадают с исходными с заменой a на x, b на $-y$, позволяет не делать проверку: из формул ответа получатся, как следствие, аналогичные формулы с заменой x на a, y на $-b$, т. е. исходная система.

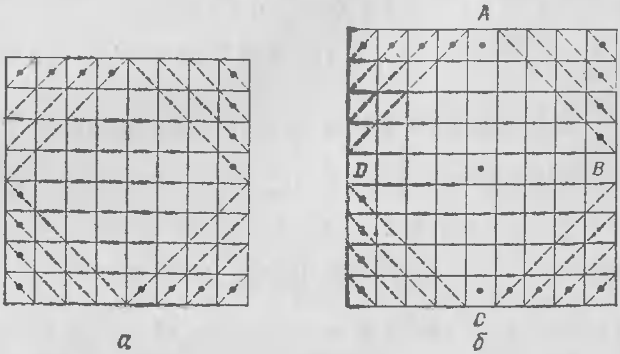


Рис. 113

∇ Заметим, что ничего не изменилось бы, если бы вместо данной системы рассматривалась такая:

$$\frac{x - yf(x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - f^2(x^2 - y^2)}} = a, \quad \frac{y - xf(x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - f^2(x^2 - y^2)}} = b,$$

где f — любая функция, не превосходящая по модулю 1. Суть этой задачи в том, что «преобразование Лоренца»

$$(x, y) \to (x', y'), \quad x' = \frac{x - vy}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$y' = \frac{y - xv}{\sqrt{1 - v^2}},$$

играющее основную роль в теории относительности Эйнштейна, сохраняет величину $x^2 - y^2$: $x^2 - y^2 = (x')^2 - (y')^2$.

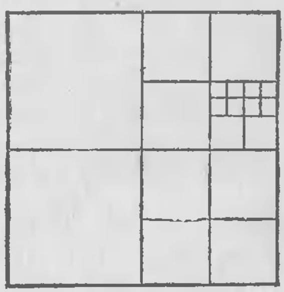


Рис. 114

277. Если покрывать квадрат набором квадратов, сторона каждого из которых уменьшена до ближайшего меньшего числа вида $1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, то эти квадраты можно разместить без наложений (рис. 114). Поскольку площадь каждого уменьшилась менее чем в 4 раза, то сумма их площадей больше 1, так что они заведомо покроют весь квадрат.

278. Положим $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Поскольку $x_i \geqslant x_i^2$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$, то нужное неравенство следует из такого: $(s+1)^2 \geqslant 4s$, эквивалентного, очевидно, $(s-1)^2 \geqslant 0$.

279. Поскольку p и q взаимно просты, то каждое из них взаимно просто с $n = p + q$. Поэтому все числа

$$\frac{i}{p}, \frac{j}{q}, \frac{i+j}{n} \qquad (i=1, 2, \ldots, p-1; \ j=1, 2, \ldots, q-1)$$

различны. Заметим, что всегда $\frac{i+j}{p+q}$ лежит между $\frac{i}{p}$ и $\frac{j}{q}$; поэтому ясно, что все дроби $\frac{i}{p}, \frac{j}{q}$ лежат в разных отрезках $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$.

280. Пусть e_i — единичный вектор, направленный по прямой l_i. Положим $e_ie_{i+1} = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 1978)$, $e_{1979}e_1 = c_{1979}$ (c_i — косинус угла между e_i и следующим по номеру вектором e_{i+1}); пусть $\overrightarrow{OA_i} = a_ie_i$. Условие перпендикулярности прямых $A_{i-1}A_{i+1}$ и l_i эквивалентно таким:

$$(a_{i-1}e_{i-1} - a_{i+1}e_{i+1})\,e_i = 0, \quad a_{i-1}c_{i-1} = a_{i+1}c_i. \qquad (*)$$

Мы можем, взяв a_1 произвольно, выбрать $a_3, a_5, \ldots, a_{1979}, a_2, a_4, \ldots, a_{1978}$ так, чтобы выполнялись все 1979 условий (*), кроме, быть может, одного: $a_{1978}c_{1978} = a_1c_{1979}$. Но, перемножив все 1978 равенств

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{a_5}{a_3} = \frac{c_3}{c_4}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{1979}}{a_{1977}} = \frac{c_{1977}}{c_{1978}},$$

$$\frac{a_2}{a_{1979}} = \frac{c_{1979}}{c_1}, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{c_2}{c_3}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{1978}}{a_{1976}} = \frac{c_{1976}}{c_{1977}},$$

мы как раз получим после сокращений недостающее 1979-е равенство.

281. Указанную в условии задачи величину

$$p_k = a_1a_{k+1} + a_2a_{k+2} + \ldots + a_{n-k}a_n$$

удобно подсчитывать так: последовательность $A_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из 0 и 1 подписывается сама под собой со сдвигом на k разрядов; при этом $p_k = p_k(A_n)$ — число разрядов, в которых в обеих строках стоят единицы.

Последовательность A_n длины n удовлетворяет условию задачи, если все $p_k(A_n)$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ нечетны.

Следующая конструкция позволяет по двум таким последовательностям A_m и A_n построить $A_l = A_n \sqcup A_m$ длины $l =$

$= (2m-1)n-(m-1) = 2mn-m-n+1$. Заменим каждую 1 в A_n на блок $A_m\underbrace{0\ \dots\ 0}_{m-1}$ из $2m-1$ цифр, каждый 0 в A_n — на блок из $2m-1$ нулей, а последние $m-1$ нулей отбросим. При подсчете p_k для A_l указанным выше способом при любом сдвиге k каждый блок A_m в верхней строке задевает лишь один блок A_m в нижней; если $k=(2m-1)q+r$ или $k= =(2m-1)q-r$, где $0 \leqslant r \leqslant m-1$, $0 \leqslant q \leqslant n-1$, то $p_k(A_l) = p_q(A_n)\cdot p_r(A_m)$, поскольку ровно $p_q(A_n)$ пар блоков A_m задевают друг друга и при этом они сдвинуты на r разрядов; отсюда ясно, что построенная последовательность $A_l = A_n \sqcup A_m$ удовлетворяет условию задачи вместе с A_n и A_m.

Эта конструкция позволяет из $A_4 = 1101$ изготовить ответ $A_{25} = A_4 \sqcup A_4$ к пункту а):

$$A_{25} = \underbrace{1101000}\ \underbrace{1101000}\ \underbrace{0000000}\ \underbrace{1101}.$$

Далее, $A_{25}\sqcup A_{25}$ имеет уже $2\cdot 25^2-50+1=1201$ — более 1000 цифр, что и требуется в пункте б).

∇ Существуют и другие серии последовательностей, удовлетворяющих условию задачи. Одну из них придумал участник олимпиады А. А. Разборов. Интересно получить их полное описание. Аналогичную задачу можно рассматривать и на окружности.

282. Предположим, что диагонали четырехугольника $ABCD$, пересекающиеся в точке O, не перпендикулярны друг другу, например, что угол AOB острый. Построим точки A' и B', симметричные A и B относительно точки O. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники $A'OB$ и $B'OC$, меньше радиуса r окружности, вписанной в $\triangle AOB$ (площади всех этих треугольников равны, а периметр $\triangle AOB$ меньше), поэтому касательные, проведенные из точек A и B к окружностям радиуса r, вписанные в углы BOC и AOD, пересекают лучи OA' и OB' в точках C и D, расположенных дальше от O, чем A' и B' соответственно, так что отрезок CD не может коснуться окружности радиуса r, вписанной в $\triangle OA'B'$.

Таким образом, в условиях задачи прямые AC и BD перпендикулярны друг другу и, с учетом равенства радиусов вписанных окружностей, служат осями симметрии четырехугольника $ABCD$. Следовательно, этот четырехугольник — ромб.

283. а) Рассмотрим возможные расстановки T пары красных точек (A_l, A_r), делящих отрезок A_0A_n на три части A_0A_l, A_lA_r, A_rA_n; наибольшую из длин этих частей обозначим M, наименьшую m. Из всех расстановок T выберем такие, для которых M минимальна, а из них — ту (или одну из тех), для которых m

максимальна. Докажем, что для такой расстановки $T = (A_l, A_r)$ будет выполнено условие $M - m \leqslant 1$.

Пусть для нее $M - m > 1$. Если ее части M и m расположены рядом, то, передвинув красную границу между ними на один отрезок, мы получим расстановку T', у которой наименьшая часть больше m и (возможно, или) наибольшая — меньше M, что противоречит выбору T. Если $m = A_0A_l$, $M = A_rA_n$, то либо у расстановки (A_{l+1}, A_r) наименьшая часть больше m, либо $A_{l+1}A_r \leqslant m < M - 1$ и тогда у расстановки (A_{l+1}, A_{r+1}) наибольшая часть меньше M: и то, и другое противоречит выбору $T = (A_l, A_r)$ (рис. 115).

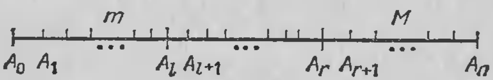


Рис. 115

б) Рассмотрим расстановку, у которой наибольшая по длине из k частей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ равна M, а наименьшая равна $m < M - 1$. Пусть $\Delta_l = m$ лежит левее $\Delta_j = M$. Передвинем правый конец части Δ_l на один или несколько отрезков так, чтобы она стала не меньше $M - 1$ (но не больше M). Если теперь $\Delta_{l+1} < M - 1$, сделаем с ней то же самое, затем перейдем к Δ_{l+2} и т. д., пока либо длины всех частей $\Delta_l, \Delta_{l+1}, \ldots, \Delta_{j-1}$ не будут больше или равны $M - 1$, либо нам удастся уменьшить $\Delta_j = M$ хотя бы на один отрезок. Затем (если в полученной расстановке по-прежнему $M - m > 1$) проделаем ту же процедуру еще несколько раз. При этом мы не можем повториться, поскольку вновь получаемая расстановка «лучше» в том смысле, что у нее либо строго меньше длина наибольшей части M, либо M одинаковы, но меньше число частей, равных M, либо и это число одинаково, но тогда больше m или (при равных m) меньше частей, равных m. Поскольку всего расстановок конечное число, после нескольких повторений процедуры мы придем к расстановке, которую «улучшить» невозможно, т. е. $M - m \leqslant 1$.

284. Ответ: делится. Данное число, очевидно, делится на 20. Делимость на 99 следует из того, что $100 = 99 + 1$, и равенства $19 + 20 + \ldots + 80 = 99 \cdot 31$.

285. Если S_1 и S_2 суммы площадей левых частей с четными и нечетными номерами, а S_3 и S_4 — аналогичные суммы для правых частей, то

$$S_2 + S_4 = S_3 + S_1 = S_3 + S_4 = S_1 + S_2.$$

286. Достаточно доказать, что в любой момент можно погрузить контейнер массой не большей 0,5 тонны.

287. $S_{ABCD} = 2S_{AMPC}$. Пусть $AM = x$, тогда

$$S_{AMCD} < 2S_{AMP} \leqslant x(a-x) \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

288. Ответ: не имеет. Из $y^3 = (z^2 - x)(z^2 + x)$ и простоты y получаем либо $z^2 - x = 1$, $z^2 + x = y^3$, либо $z^2 - x = y$, $z^2 + x = y^2$. Обе системы не имеют решений в простых числах.

289. Ответ: пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус и $OE = a$. Если $a \geqslant R/\sqrt{2}$, то искомая хорда BD стягивает дугу в $90°$ и касается окружности радиуса $R/\sqrt{2}$ с центром O. Если $a < R/\sqrt{2}$, искомая хорда перпендикулярна диаметру AC. Достаточно заметить, что $S_{ABCD} = \frac{2R}{a} S_{BOD}$, а $S_{BOD} = 1/2R^2 \sin\varphi$, где $\varphi = \angle BOD$, и найти наибольшее значение $\sin\varphi$ в зависимости от положения точки E.

290. Пусть A, B и C — три последовательных пункта на берегу озера. Из условия следует, что A и B соединены тогда и только тогда, когда B и C не соединены. Таким образом, все пункты разбиваются на пары соседних, соединенных рейсом теплохода. При этом любые две такие пары соединены, т. е. один из пунктов первой пары соединен с некоторым пунктом второй пары.

291. Вместе с числом $N = \overline{abcdef}$ делятся на 37 числа $\overline{abc} + \overline{def}$, $\overline{bcafde}$ и $\overline{cabdef}$.

922. Ответ: $(\pi k; \pi l; \pi m)$, k, l, $m \in Z$. Складывая первые два уравнения и вычитая из них третье, приходим к уравнению $\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+z}{2}\cdot\cos\frac{y+z}{2} = 0$.

293. Если $S \neq 0$ — сумма всех векторов системы, то для любого $a \neq 0$ из этой системы $S = ka$, где k — некоторое число.

294. а) Ответ: $1962 + S(1962) = 1980$.

б) Если число n оканчивается на 9, то $S_{n+1} < S_n$, если не на 9, то $S_{n+1} = S_n + 2$. Для любого натурального $m > 2$ выберем наибольшее N, для которого $S_N < m$. Тогда $S_{N+1} \geqslant m$, причем последняя цифра N — не 9, и потому либо $S_{N+1} = m$, либо $S_{N+1} = m + 1$. Здесь $S_n = S(n) + n$.

295. Ответ: 33. Каждый прямоугольник 3×1 содержит ровно одну красную клетку.

296. а) Эпидемия не кончится, например, если в первый день для трех друзей A, B, C: у A иммунитет после прививки, B болен, а C здоров.

б) Если эпидемия не кончится, то найдется коротышка A, который раньше всех заболел вторично, но тогда заразивший его в этот раз коротышка B должен был заболеть вторично до A.

297. Ответ: не может. Последовательность n_k, начиная с некоторого номера p стабилизируется, то есть $n_p = n_{p+1} = \ldots$

298. Ответ: $\angle DEC = 90°$, $\angle EDC = 60°$, $\angle DCE = 30°$. При повороте на $60°$ около точки D в нужном направлении и гомотетии с коэффициентом $1/2$ с центром в D точка P переходит в середину H отрезка MP, B — в середину K отрезка BP, прямая BP — в прямую KH, пересекающую AP в точке E.

299. Числа α и β — корни квадратного трехчлена $f(t) = (t-\alpha)(t-\beta) = t^2 - \frac{1}{6}tp + \frac{1}{6}S$, причем $x < \frac{\alpha+\beta}{2} < z$, $f(x) > 0$ и $f(z) > 0$.

300. Ответ: $\{1; 2; 3; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$. Пусть $k_1 = 1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n = 100$ — данные числа. Так как $2k_i \geqslant k_{i+1}$, то $k_i \leqslant 2^{i-1}$ для любого i. В частности, $2^{n-1} \geqslant 100$, откуда $n \geqslant 8$. Из предположения, что $n = 8$, следует, что $k_7 = 50$, а $2k_5 = 25$. Противоречие.

301. Каждая из n^2 пар натуральных чисел (x, y), где $1 \leqslant x \leqslant n$, $1 \leqslant y \leqslant n$, является решением некоторого уравнения $[x^{3/2}] + [y^{3/2}] = c$ $(1 \leqslant c \leqslant 2[n^{3/2}])$. Если при любом c число решений не больше M, то $2[n^{3/2}] \cdot M \geqslant n^2$, или $M \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}$.

302. Проведем $BE \| CA$ и $AE \| BC$. Точки A, C, B, E и D лежат на сфере с диаметром AB и центром O, CE — тоже диаметр этой сферы, $\angle CDE = 90°$, а $\cos \angle DCE = \frac{|CN|}{|AB|}$. Достаточно доказать, что $\sin \angle DBE > \sin \angle DCE$, применяя теорему синусов к треугольникам DBE и DCE.

303. а) При $k > m$ все числа x_k имеют одинаковые первые m цифр после запятой.

б) Ответ: можно. В периодической дроби $x = 0,(10)$ на участках с номерами $10^n < k < 10^n + 5$ заменим группу цифр 1010 на 1100.

в) Ответ: $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_k \ldots$, где $x_k = 1$ при $10^n < k \leqslant 10^n + 5$, а остальные $x_k = 0$.

304. Ответ: $32(\sqrt{2} - 1)$. Нужно воспользоваться тем, что при повороте на $90°$ одной из досок черные клетки сменяются белыми и наоборот, а при повороте обеих досок черные клетки сменяются белыми на обеих досках. Поэтому искомая площадь равна четверти площади восьмиугольника, образованного пересечением досок.

305. Достаточно доказать, что $\angle B_1MA = \angle AA_1B_1 = \angle A_1B_1B$.

306. а) $k = 3$; $720 = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 8\cdot9\cdot10$.

б) Если $m(m+1) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, то $m^2 + m + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$, что невозможно.

307. Если в некотором столбце таблицы первые три числа, считая сверху, a, m и n, то каждое из чисел $1, 2, \ldots, m-1, m$ встретится во второй строке левее числа m по крайней мере n раз, а любое число, большее m, встретится меньше чем n раз.

308. Ответ: $S=(1-a)\sqrt{1-a}$ при $a \leqslant 0$; $S=1-2a$ при $0<a<1/2$; $S=0$ при $a \geqslant 1/2$.

309. При повороте на 60° вокруг вершины C треугольник CAD перейдет в треугольник CBE, а при повороте на 60° вокруг точки H треугольник HBE перейдет в треугольник HDK.

310. Будем говорить, что жители $X, A_1, A_2, \ldots, A_k, Y$ образуют цепочку, если X знаком с A_1, A_2 знаком с $A_3, \ldots, A_k$ знаком с Y. Из условия следует, что любые два жителя соединены некоторой цепочкой. Будем считать, что замкнутых цепочек (т. е. цепочек, в которых X знаком с Y) нет. Возьмем самую длинную цепочку $X - A_1 - A_2 - \ldots - A_{10} - \ldots - A_k - Y$. Если $k \leqslant 19$, то новость, сообщенная A_{10}, через 10 дней станет известна всем жителям поселка. Если $k \geqslant 20$, отделим жителей $X, A_1, \ldots, A_{10}$ и всех, кто связан с ними не через A_{11} (их не меньше 11). Оставшаяся группа жителей по-прежнему удовлетворяет условию задачи. Повторяя уже описанную процедуру 89 раз (и на каждом шагу выделяя своего A_{10}), мы либо на каком-то шагу исчерпаем всех жителей, либо останется не более $1000 - 89 \cdot 11 = 21$, из которых выберем еще одного, как описано выше. Если же в поселке есть замкнутые цепочки, то их можно разорвать, сохраняя условия задачи.

311. Имеем $f(\pi n) = (-1)^n a + (-1)^n b$; $f(\pi/3) = a/2 - b$; $f(2\pi/3) = -a/2 + b$. Поэтому $|a+b| \leqslant 1$, $|a-2b| \leqslant 2$.

312. Параллелограмм $KL'MN'$, где L' и N' — середины сторон BC и AD, либо совпадает с $KLMN$, либо не совпадает. В последнем случае четырехугольник $ABCD$ — трапеция ($BC \| AD$).

313. Ответ: $x_n = 1$, $n \in N$; $x_n = n$ при $n \in Z$.

314. Назовем строку таблицы $m \times n$ белой, если в ней преобладают белые клетки, и черной — в противном случае. Пусть p и q — количества белых и черных строк, r и s — количества белых и черных столбцов ($p+q=m$, $r+s=n$). Можно считать, что $p \leqslant q$. Пусть в каждом ряду (строке и столбце) менее четверти клеток «чужого» цвета. Тогда $ps+qr$ не больше общего числа клеток «чужого» цвета во всех строках и столбцах, т. е. меньше $mn/4+mn/4=mn/2$, поэтому $r \leqslant s$, а общее число белых клеток меньше

$$pr+\frac{qn}{4}+\frac{sm}{4}=\frac{mn}{2}+pr-\frac{np}{4}-\frac{mr}{4}=\frac{mn}{2}-\frac{p}{2}\left(\frac{n}{2}-r\right)-\frac{r}{2}\left(\frac{m}{2}-p\right)\leqslant\frac{mn}{2}.$$

315. Из условия следует, что $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{XK} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BT}$.

316. Ответ: $x = 5$, $y = 6$. Если $x = d + y$, где $d \geqslant 1$, то $(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 = 61$, откуда $d \leqslant 3$.

317. Для любой команды найдутся 9 команд, с которыми она еще не играла, а среди этих девяти — две, не игравшие между собой.

318. Пусть A_2, B_2, C_2 — точки на сторонах BC, CA и AB такие, что $AC_2/C_2B = BA_1/A_1C = CB_2/B_2A = 3$. Периметр шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ равен $3/4$ P и больше периметра треугольника $A_1B_1C_1$. Далее следует записать неравенство треугольника для треугольников $A_2C_1B_1$, $C_1B_2A_1$, $A_1B_1C_2$.

319. Следует воспользоваться неравенствами $x > y > 0$ и $0 < x^3 - y^3 < x^3 + y^3$.

320. Пусть A и B — концы построенной ломаной. Спроектируем ломаную на прямую AB. Относительная погрешность каждого из звеньев равна p, поэтому сумма абсолютных погрешностей всех звеньев не больше $4p$, следовательно и $d \leqslant 4p$.

321. а) Нельзя (сумма всех поставленных чисел остается нечетной).

б) Можно.

в) Нельзя. Для доказательства утверждений пунктов а) и п) полезно рассмотреть 2 тетраэдра, образованных вершинами куба, никакие две из которых не принадлежат одному ребру. Производимые операции увеличивают на 1 сумму чисел, стоящих в вершинах каждого из этих тетраэдров.

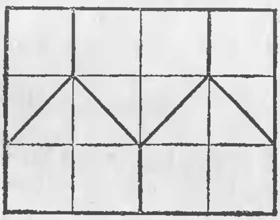


Рис. 116

322. Ответ: например, 9440. Пусть $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k$. Подбирая k так, чтобы $m - 1$ делилось на 11, а $m + 1$ — на 13, получим, что число $n = m - 10$ удовлетворяет условию задачи (П2).

323. Ответ: в последней стопке карточки будут лежать в неубывающем порядке номеров.

324. Из любых шести данных точек по крайней мере две окажутся в одной из фигур, показанных на рис. 116.

325. а) Ответ: 3 при $x = y = 1$.

Из неравенства о среднем арифметическом следует, что $1 + x^2y^4 + x^4y^2 \geqslant 3x^2y^2$.

б) Пусть $P(x, y) = g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y) + \ldots + g_n^2(x, y)$, где $g_i(x, y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — многочлены. Так как $P(x, 0) = P(0, y) = 4$, многочлены g_i не могут содержать одночленов вида ax^k и by^l. Поэтому коэффициент при x^2y^2 должен быть положителен.

326. Ответ: одна точка O — центр треугольника ABC.

327. Ответ: r_1r_2.

328. Ответ: три числа. По индукции доказывается, что $a_{n-1} < b_n < a_n$ при $n \geqslant 4$.

329. а) Из всех чисел вида $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_n}$, делящихся на $2^m - 1$, выберем числа с наименьшим n, а из полученных чисел выберем число с наименьшим $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Все числа в наборе $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ различны. Если $n < m$, то $k_i \leqslant m - 1$ и $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_n} < 2^m - 1$. Противоречие.

б) Не существует. Пусть $P = a_1 10^r + \ldots + a_r$ — наименьшее из чисел, делящихся на $M = \underbrace{11\ldots1}_{m}$ и имеющих сумму цифр, меньшую m. Тогда $r \geqslant m$ и число $P_1 = P - (10^r - 10^{r-m})$, делящееся на M, меньше P и имеет сумму цифр, не превосходящую сумму цифр числа P.

330. Среди восьми чисел найдутся три, не превосходящие 1/6, причем два из них будут стоять на концах диагонали одной из граней. Эту грань и следует выбрать первому игроку.

331. Ответ: в субботу.

332. Ответ: $MA/MB = k^2$. Пусть O — центр параллелограмма. Треугольники AOM и MOB подобны.

333. Предположим, что утверждение не верно. Покрасим концы дуг черной краской. Разделим всю окружность на дуги длины 1 и новые точки деления покрасим в красный цвет. Возьмем теперь какую-нибудь дугу AC длины 2 с черными концами и красной серединой B'. Диаметрально противоположная ей точка B черная. Пусть на дуге AB длины $3k - 1$ n_1 дуг длины 1, n_2 дуг длины 2 и n_3 дуг длины 3. На дуге BC будет n_1 дуг длины 3 (точки, диаметрально противоположные концам дуги единичной длины, красные!) Поэтому $n_3 = k - n_1$, что противоречит равенству $3k - 1 = n_1 + 2n_2 + 3n_3$.

334. Пусть AM, BM, CM и DM — отрезки длины 1, отложенные на лучах, соединяющих точку M с вершинами тетраэдра. Прямая DM пересекает треугольник ABC в некоторой точке P. Если косинусы углов AMD, BMD и CMD больше $-1/3$, то эти углы меньше $\varphi = \arccos(-1/3)$, а углы AMB, BMP и CMP больше $\pi - \varphi$. Можно считать, что $\angle APB \geqslant 120°$. Тогда, записав теорему косинусов для треугольников APB и AMB, получим, что $\cos \angle AMB < -1/3$.

335. Ответ: $b < a < c$.

336. Пусть O — точка, для которой $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots$ $\ldots + \overrightarrow{OA_{2n+1}} = 0$. Выберем k так, чтобы $2^k - 1$ делилось на

$2n+1$. Тогда ломаная M_k будет гомотетична M относительно O с коэффициентом 2^{-k}.

337. Ответ: 100. Следует рассмотреть число a — наибольшее из первых 99 чисел, и число b — наименьшее из последних 1882 чисел и убедиться, что $a < 100 < b$.

338. Ответ: Знайка прав. Общая длина проекций островов на берег меньше 4 м. Поэтому от пристани до ближайшего просвета между островами меньше 2 м.

339. Последовательно проводим: 1) две параллельные прямые, каждая из которых пересекает параболу в двух точках; 2) прямую через середины получающихся отрезков; 3) перпендикуляр к этой прямой, пересекающий параболу в двух точках A и B; 4) серединный перпендикуляр к отрезку A, B — это ось Oy. Ось Ox перпендикулярна Oy в точке пересечения с параболой. Единица масштаба — абсцисса пересечения прямой $y = x$ с параболой.

340. б) Пусть m_k и M_k — наибольшее и наименьшее из чисел k-го столбца. Тогда в столбце встретится любое $m_k \leqslant x \leqslant M_k$. Поэтому либо существует x, для которого $m_k \leqslant x \leqslant M_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$, либо $M_k \geqslant m_k > M_p \geqslant m_p$ для некоторых k и p, но тогда в каждой строке встретится любое число y, для которого $M_p \leqslant y \leqslant m_k$.

341. $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2\cdot 2^{\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[12]{x}}{2}} \geqslant 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

342. Ответ: 43 числа: 2, 3, ... 44. Если вычеркнуть меньше 43-х чисел, то хотя бы одна тройка $(k, 89-k, k(89-k))$, где $2 \leqslant k \leqslant 43$, состоит из невычеркнутых чисел.

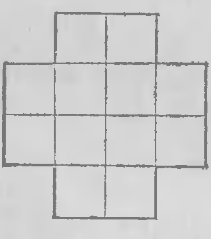


Рис. 117

343. Наименьшее из чисел, стоящих в клетках фигуры, показанной на рис. 117, удовлетворяет условию.

344. Можно считать, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant 0$. Пусть множество M_{ik} $(i, k = 0, 1, i \neq k)$ состоит из всех чисел a_l, для которых $l \equiv i \pmod 3$, а также положительных чисел a_m, для которых $m \equiv k \pmod 3$. Годится одно из множеств M_{ik}.

345. Столбец, не содержащий отмеченных клеток, переставляем с крайним правым столбцом, а последнюю строку полученной таблицы — с какой-нибудь строкой, содержащей отмеченные клетки. Задача свелась к таблице $(n-1)\times(n-1)$.

346. Пусть $a_0, a_{11}, \ldots, a_n$ — числа 0, 1, 2 ... n, занумерованные так, что $|a| \leqslant |a-a_0| \leqslant |a-a_1| \leqslant \ldots \leqslant |a-a_n|$. При

всех $1 \leqslant k \leqslant n$ верны неравенства $|a - a_k| \geqslant \frac{k}{2}$, перемножая которые получим

$$|a||a-1| \dots |a-n| =$$

$$= |a - a_0||a - a_1| \dots |a - a_n| \geqslant \langle a \rangle \frac{n!}{2^n}.$$

347. а) нет: при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ левая часть равна 0.

б) да. Пусть $u = x - y + 1$, $v = y - z - 1$, $w = z - x + 1$. В равенстве $(u + v + w)^7 = 1$ раскроем скобки. После группировки получим $u^3P + v^3Q + w^3R = 1$.

348. Пусть грань KLM тетраэдра $KLMN$ имеет наибольший периметр. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции точек A, B, C, D на плоскость KLM и пусть Γ ломаная, ограничивающая проекцию тетраэдра $KLMN$ на эту плоскость. Пусть P_{RSTQ} — сумма длин всех шести отрезков, попарно соединяющих точки R, S, T и Q. Тогда 1) $P_{KLMN} \leqslant 2P_{KLM}$; 2) $P_{KLM} \leqslant P_\Gamma$; 3) $P_\Gamma \leqslant \leqslant \frac{2}{3} P_{A_1B_1C_1D_1}$; 4) $P_{A_1B_1C_1D_1} \leqslant P_{ABCD}$.

349. б) Никакие две ломаные не должны иметь общих отрезков. Поэтому 12 узлов решетки, расположенных на границе квадрата и отличных от его вершин, должны быть концами ломаных, а у 5 ломаных всего 10 концов.

350. Ответ: а) нет; б) да.

Здесь полезно рассуждать «с конца»: тройка (17, 1967, 1983) могла быть получена только из тройки (5, 3, 3), а тройка (5, 3, 3) получается из тройки (3, 3, 3) и не получается из тройки (2, 2, 2).

351. Пусть O — точка внутри треугольника XYZ. Соединим ее с центрами O_1, O_2, O_3 данных кругов и точками X, Y, Z. Один из шести образовавшихся углов (острых!) не меньше $60°$ (например, угол O_1XA). Тогда $AO < OX/\sin 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} OX$.

352. Пусть $n^2 < a < b < c < d < (n+1)^2$, $ad = bc$. Тогда $(a+d)^2 - (d-a)^2 < (b+c)^2$ и $a + d > b + c$, откуда $(d-a)^2 > (a+d+b+c)(a+d-b-c) > 4n^2$, но $d - a < 2n$. Противоречие.

353. Ответ: (0; 0), $(2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $f(x) = f(y)$, где функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ возрастает ($f'(x) > 0$).

354. Если $k \geqslant a\underbrace{44\dots4}_{n-2}5$, ($a \geqslant 1$ — первая цифра), то

$$\tilde{k} = (a+1)\cdot 10^{n-1} \quad \text{и} \quad \tilde{k}/k \leqslant \frac{(a+1)\,10^{n-1}}{a\underbrace{44\dots4}_{n-2}5} < \frac{a+1}{a+\frac{4}{9}} \leqslant \frac{18}{13}.$$

Если $k \leqslant \underbrace{a44\dots4}_{n-1}$, то $\tilde{k} = a10^{n-1}$ и $\tilde{k}/k \leqslant 1$.

355. $S_{DEF}=\frac{1}{2}(S_{BEF}+S_{AEF})<\frac{1}{2}(S_{BEF}+S_{ADF})=$

$$=\frac{1}{2}S_{ABFE}=\frac{1}{2}(S_{ABF}+S_{AFE})\leqslant\frac{1}{2}(S_{ABF}+S_{ABE})=$$
$$=S_{BDF}+S_{ADE}.$$

356. Ответ: а) нет; б) нет.

а) Последняя цифра числа α_{2k+1} равна k-й цифре после запятой в десятичном разложении числа $\sqrt{10}$.

б) Пусть $\gamma_n=0$, если β_n — четно и $\gamma_n=1$, если β_n — нечетно. Так как γ_{2n+1} совпадает с n-ым знаком после запятой двоичного разложения числа $\sqrt{2}$, последовательность γ_{2n+1} непериодична.

357. Из условия следует, что $\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta)$. Если $\sin\alpha>\cos\beta$ и $\cos\alpha>\sin\beta$, то $\sin^2\beta+\cos^2\beta<1$. Неравенства $\sin\alpha<\cos\beta$, $\cos\alpha<\sin\beta$ также невозможны. Поэтому $\sin\alpha=\cos\beta$, $\cos\alpha=\sin\beta$.

358. Пусть α и β — данные плоскости и l — линия их пересечения. Достаточно повернуть плоскость α вокруг прямой l до совпадения с плоскостью β (точки A_1, B_1, C_1, D_1 поворачиваются вместе с плоскостью α).

359. Ответ: 5. Если уравнение $f_n(x)=x^2+p_nx+q_n=0$ не последнее, то $p_n^2>4q_n$, $q_n>p_n$, $p_nq_n>-(p_n+q_n)$, если $n\geqslant 3$ и $p_nq_n>0$. Если уравнение $f_5(x)=0$ не последнее, то либо $p_4<0<q_4$, либо $0<p_4<q_4$ и при этом $p_3<0<q_3$. Оба случая невозможны. Пример для $n=5$: $f_5(x)=x^2-\frac{1}{2}x+4$, $f_4(x)=x^2-\frac{7}{2}x-2$, $f_3(x)=x^2+\frac{11}{2}x+7$, $f_2(x)=x^2-\frac{25}{2}x+\frac{77}{2}$, $f_1(x)=x^2-26x-\frac{1925}{4}$.

360. Если a^n делится на b^n, то a делится на b.

361. Ответ: нет. Всего существует 128 двубуквенных слов длины 7. Из них «невозможными» будут $3\cdot 8+10\cdot 4+30\cdot 2=124$ слова.

362. Ответ: а) можно; б) можно.

а) Возьмем два бесконечных листа клетчатой бумаги и на диагоналях, удаленных друг от друга на 4 клетки, на первом листе расставим единицы, а в остальных клетках — нули, на втором единицы расставляются в диагоналях, отстоящих на 6 клеток, после чего складываем числа, стоящие в соответствующих друг другу клетках.

б) На тех же диагоналях расставляем через одну клетку 0 и 1 и вычитаем числа в соответствующих клетках.

363. Ответ: $\sqrt{5}+1$.

364. Если a — общее количество пар и m — количество пар, состоящих из мальчиков, то $2a = 8m$.

365. Ответ: $3 + 2\sqrt{2}$. Если S_1, S_2, S_3, S_4 — площади прямоугольников, занумерованные по часовой стрелке, то $S_1S_3 = S_2S_4 \geqslant 2$, а $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$.

366. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$; $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Достаточно доказать, что $\boldsymbol{e}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\beta + \boldsymbol{e}_3 \sin\gamma = \boldsymbol{0}$. Для этого следует рассмотреть треугольник PQR, стороны которого соответственно параллельны OA, OB и OC, и воспользоваться равенством $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} = \boldsymbol{0}$.

367. Индукция по m: при $m = 1$ утверждение правильно. Пусть оно верно для $m = k - 1$ $(k \geqslant 2)$. Рассмотрим любое множество A, состоящее из $2k + 1$ чисел, не больших $2k - 1$ по модулю. Если среди них найдутся $2k - 1$ чисел, не превосходящих по модулю $2k - 3$, то все ясно. В противном случае можно считать, что в A либо содержатся числа $2k - 1$, $2k - 2$ и $-2k + 1$, либо $2k - 1$, $2k - 2$ и $-2k - 2$. В первом случае следует рассмотреть пары $(1;\ 2k - 2)$, $(2;\ 2k - 3)$, ..., $(k - 1,\ k)$ и $(0,\ -2k + 1)$, $(-1,\ -2k + 2)$, ..., $(-k + 1,\ -k)$. Хотя бы одна пара состоит из чисел, входящих в A. Во втором случае аналогично рассматриваются пары $(1,\ 2k - 3)$, ..., $(k - 2,\ k)$ и $(0,\ -2k + 1)$, $(-1,\ -2k)$, ..., $(-k + 1,\ -k)$.

368. Ответ: равенство возможно только для равносторонних треугольников ABC и DEF с соответственно перпендикулярными сторонами. Из неравенства $d_0 < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \min(d_1, d_2, d_3)$ следует, что все углы треугольника ABC меньше 60°.

369. Если на прямой даны непересекающиеся отрезки Δ_1 и Δ_2 с длинами α и β, то множество длин отрезков с концами, принадлежащими Δ_1 и Δ_2, заполняет некоторый отрезок длины $\alpha + \beta$. Поэтому если δ_1, δ_2, ..., δ_k — длины данных отрезков, то $\delta_1 + (\delta_1 + \delta_2) + (\delta_1 + \delta_3) + \ldots + (\delta_1 + \delta_k) + \ldots + (\delta_{k-1} + \delta_k) + \delta_k = k(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k) \geqslant 1$.

370. Ясно, что $v_1 = 10$ и $v_n \leqslant v_{n+1}$. Если $v_n = v_{n+1}$ при каком-нибудь n, то дробь периодична. Если $v_{n+1} > v_n$ при всех n, то $v_n \geqslant v_{n-1} + 1 \geqslant v_{n-2} + 2 \geqslant \ldots \geqslant v_1 + n - 1 = n + 9 > n + 8$.

371. а) Если n не делится на 4, то среди сомножителей лишь одно четное число и потому их сумма не равна 0.

б) Ответ: при $n = 4k$, $n = 2 \cdot (-2k) \cdot 1^{3k-2} \cdot (-1)^k$, если k четно, и $n = (-2)(-2k) \cdot 1^{3k} \cdot (-1)^{k-2}$, если k нечетно.

372. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ и $a+b+\frac{1}{2} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

373. Вектор $\overrightarrow{AB}$ получается из $\overrightarrow{AC}$ поворотом на 60° ($\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B}$; $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_2C}$).

374. Ответ: при m и n, имеющих одинаковую четность. Если m и n нечетны, то нужно склеить полоску $1 \times n$, а из m таких полосок получить прямоугольник $m \times n$. При четных m и n сначала склеиваются прямоугольники $(m-1) \times (n-1)$, $1 \times (n-1)$, $(m-1) \times 1$ и 1×1. Если числа m и n имеют разную четность, то из предположения о возможности склеить прямоугольник требуемым образом следует, что общее количество плиточек будет нечетно.

375. $x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} \leqslant \max(x, y) < x + y$.

376. Ответ: не верно. Партнеру достаточно покрасить в зеленый цвет любые три попарно скрещивающихся ребра, а он это всегда сможет сделать.

377. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа и

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_2}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}.$$

а) $S_n = \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right) + \ldots + \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right) \geqslant 2n$.

б) Неравенство $S_n \leqslant 3n$ доказывается по индукции. Для этого следует сначала рассмотреть случай $n = 3$ и заметить, что *наибольшее* из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно сумме своих соседей.

378. Прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

379. Ответ: $m = n = 0$. Если $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$, то $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$, но это невозможно, так как $0 < 5 - 3\sqrt{2} < 1$, а $5\sqrt{2} - 3 > 1$.

380. Если в первой строке стоят числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_m < a_{m+1} < \ldots < a_n$, а вторая строка состоит из чисел $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}, a_{k_{m+1}}, \ldots, a_{k_n}$, то в третьей строке стоят числа $a_1 + a_{k_1}, a_2 + a_{k_2}, \ldots, a_m + a_{k_m}$. Пусть $a_1 \neq a_{k_1}$. Тогда $a_1 = a_{k_m}$ при некотором $m \geqslant 2$. По условию $a_1 + a_{k_1} < a_m + a_{k_m}$, $a_2 + a_{k_2} < a_m + a_2, \ldots, a_{m-1} + a_{k_{m-1}} < a_m + a_{k_m}$, откуда $a_{k_2} < a_m$, $a_{k_3} < a_m, \ldots, a_{k_{m-1}} < a_m$. Кроме того, $a_1 < a_m$, $a_{k_1} < a_m$. Мы нашли m различных чисел, меньших a_m. Противоречие.

381. Здесь удобно воспользоваться леммой: если хорда AB некоторой окружности неподвижна, а хорда A_1B_1 скользит

концами по этой окружности, то точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 описывает окружность, проходящую через точки A и B.

382. Ответ: $24\sqrt{3}$. Выразите D через площадь треугольника XYZ (рис. 118).

383. Ответ: верно. Так как $f(-1)=11$, а $g(-1)=-9$, в какой-то момент корнем полученного трехчлена будет -1.

384. Ответ: $\pi r^2+2pr-(pr^2/2R)$.

385. Пусть k — масса самой тяжелой гири, а m — число гирь массы 1. Тогда $m \geqslant k$. В каждый момент массы гирь на двух чашках отличаются не более чем на k. Поэтому, после того как будут положены на весы все гири массы, большей 1, чашки можно уравновесить добавлением гирь единичной массы.

386. В записи абсолютно простого числа могут участвовать только цифры 1, 3, 7, 9. Для любого M число $M+1379$, $M+3179$, $M+{}$ $+9137$, $M+7913$, $M+1397$, $M+3197$, или $M+7139$ делится на 7. Противоречие.

387. Ответ: $x=9$, $y=0$; $x=4$; $y=2$.

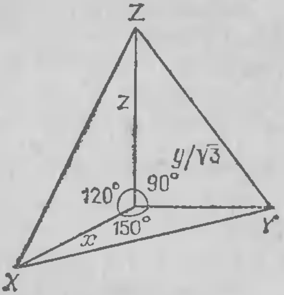


Рис. 118

388. Если точка M лежит внутри или на стороне треугольника PQR $(M \neq P)$, то $MQ+MR<PQ+PR$. Исходное неравенство достаточно доказать для случая $AB=CD$.

389. Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ $\left(|x_{n+7}|\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n \text{ при } n\geqslant 1\right)$.

390. Рассмотрим шахматную доску 1985×1986, содержащую доску 1983×1984 и имеющую с ней общий центр. Черные клетки, соседние с белыми клетками, в которых стоят -1, лежат на замкнутой траектории шахматного слона, двигающегося по большой доске, проходящего диагонали не более одного раза и меняющего направление движения только у края доски. На доске 1985×1986 такой траектории нет.

391. Уже на 4 шагу во всех клетках окажутся единицы.

392. Ответ: $\ln 1{,}01>2/201$. Функция $y=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{x+2}$ возрастает при $x>0$.

393. Ответ: $r=r_1r_2r_3/(r_1r_2-r_2r_3+r_1r_3)$.

394. Такое сечение — параллелограмм или центрально симметричный шестиугольник, периметр которого не меньше $4a$, в чем можно убедиться, рассмотрев развертку куба.

395. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон данного треугольника ABC, а O — центр его описанной окружности. Отрезки OA_1, OB_1, OC_1 разбивают шестиугольник на параллелограммы. Поэтому площадь шестиугольника равна удвоенной площади треугольника $A_1B_1C_1$.

396. Ответ: существует. Пусть n — k-значное число, записываемое с помощью m единиц и какого-то количества нулей и такое, что $S(n^2) = m^2$. Тогда для числа $n_1 = 10^{k+1}n + 1$, где k — число знаков в записи n, $S(n_1) = m + 1$, $S\left(n_1^2\right) = (m + 1)$..

397. Ответ: 16. Все дамки должны находиться на доске 6×6 с центром, совпадающим с центром доски 8×8.

398. Ответ: n цветов. Пусть A, B и C — три идущие подряд вершины. Любые два из n отрезков: BA, BC, AC и $n - 3$ диагонали, выходяшие из B, имеют общую точку. Далее следует покрасить в один из n цветов все стороны и диагонали, образующие со стороной AB соответственно один и тот же угол $\frac{k \cdot 180^\circ}{n}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

399. Пусть $S_l(O) = O_1$. С помощью симметрии S_l и поворотов с центром O точку O можно перевести в любую точку окружности ω с центром O_1 и радиусом $r = OO_1$. Окружность ω можно перевести в любую из окружностей, показанных на

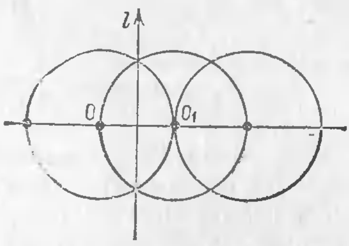


Рис. 119

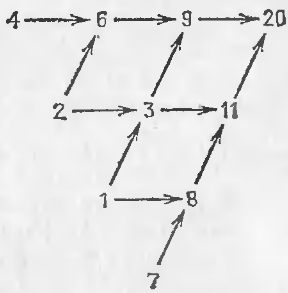


Рис. 120

рис. 119. При вращении вокруг точки O цепочка окружностей заметает всю плоскость.

440. Ответ: в двух точках. Если есть три точки, удовлетворяющие условию, то какие-то две из них лежат по одну сторону от точки $x = -b/2a$. Осталось оценить модуль разности $y(x_1) - y(x_2)$.

401. Ответ: $d = 20$ (рис. 120). Если $d < 20$, то $20 > d = 2(l + h) + a + l + h + k \geqslant 2(l + h) + 10$, откуда $l + h \leqslant 4$. Можно считать при этом, что $l < h$. Отсюда либо $l = 1$, $h = 3$, либо $l = 1$, $h = 2$. Оба эти случая приводят к противоречию.

402. Пусть $S_k = \frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_k}{a_{k+1}}$. При достаточно больших k $(m < k)$ справедливы неравенства $S_k < k - \frac{1}{2}$, $S_k - S_m < < k - m - \frac{1}{2}$.

403. Ответ: $x = \pi m$, $y = \pi n$ $(m, n \in Z)$. Из условия следует, что

$$|\sin x| + |\sin y| \leqslant |\sin x| \cdot |\sin y|.$$

404. Пусть O и X — любые точки плоскости и $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$. По условию $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}_1 = 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}_1 = 2\boldsymbol{a}$. Решая эту систему, находим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$.

405. Если $T = 2^r \cdot q$ (q — нечетно) — период данной последовательности, то при $q = 4m + 3$ и $k \geqslant p + 2$: $1 = a_{2^k} = = a_{2^k + T} = 0$. Противоречие. При $q = 4m + 1$: $1 = a_{2^k} = a_{2^k + 3T} = = 0$, что также приводит к противоречию.

406. Если все данные прямые попарно параллельны, утверждение очевидно. Пусть m_2, m_3, ..., m_k — количества окрашенных областей, имеющих k сторон. Тогда $m_2 \leqslant n$. Кроме того, каждая прямая делится остальными не более чем на n частей, так что общее количество частей прямых не больше n^2. Поэтому $2m_2 + 3m_3 + \ldots \leqslant n^2$. Наконец, $m_2 + m_3 + \ldots + m_k + \ldots \leqslant \leqslant \frac{m_2}{3} + \frac{2m_2 + \ldots + km_k}{3} \leqslant \frac{n(n+1)}{3}$.

407. Пусть A и B — цвета дна и крышки коробки. Какие-то две противоположные грани куба покрашены в другие цвета C и D. Вложим куб в коробку так, чтобы грань цвета D оказалась на дне коробки, а грань куба цвета E прилегла к грани шестого цвета F коробки.

408. Треугольники A_2MN, A_2A_3N и NA_3O равнобедренные.

409. Если четверка (a_n, b_n, c_n, d_n) получена из данной на n-м шаге $(n \geqslant 1)$, то $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ и $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geqslant \geqslant 2\left(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2\right)$.

410. Каждое слагаемое $|a_k - b_k|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ равно разности числа, большего n, и числа, не превосходящего n. Поэтому

$$|a_1 - b_1| + \ldots + |a_n - b_n| = (n+1) + (n+2) + \ldots$$
$$\ldots + 2n - (1 + 2 + \ldots + n) = n^2$$

411. Ответ: число окрашенных кубиков может принимать одно из пяти значений: 60, 72, 84, 90, 120. Пусть параллелепипед имеет размеры $m \times n \times k$ $(k \leqslant n \leqslant m)$. Всего неокрашенных кубиков будет $(m-1)(n-1)(k-1)$. По условию $mnk =$

$-2(m-1)(n-1)(k-1)$, откуда следует, что $2 < k < 5$. Осталось решить в целых числах уравнение относительно m и n при $k=3$ и $k=4$.

412. Точка K, симметричная точке C относительно P, лежит на окружности, проходящей через A и $AKMD$ — параллелограмм, так что треугольники AKM и AMD равны.

413. Пусть числа a и b $(a < b)$ стоят в соседних узлах A и B сетки. Проведем маленькую стрелку, направленную влево от AB, если двигаться от A к B (рис. 121).

Если числа, записанные в вершинах треугольника, возрастают при обходе по часовой стрелке, то внутри него находятся 2 стрелки, если против часовой стрелки — то одна. Пусть n — количество треугольников первого типа. Общее количество N

Рис. 121

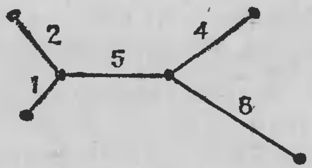


Рис. 122

стрелок внутри шестиугольника равно $2n+24-n=n+24$. Осталось заметить, что $N \geqslant 31$ (есть 30 стрелок, идущих от внутренних отрезков, и хотя бы одна — от граничных).

414. Ответ: 3. $\sqrt{x+1}-1=x/(\sqrt{x+1}+1)$, поэтому при $x \geqslant -1$ дробь равна $\sqrt{x+1}-1$.

415. Ответ: $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}$.

416. Прямоугольник удовлетворяет условиям, если для его сторон x и y $(x \leqslant y)$ выполнены неравенства $xy > m$ и $x(y-1) < m$. При любом $m > 12$ эта система имеет решения: $x=k-1$, $y=k+2$ при $m=k^2$; $x=k$, $y=k+1$ при $k^2 < m < k(k+1)$; $x=k-1$, $y=k+3$ при $m=k(k+1)$ и $x=y=k+1$ при $k(k+1) < m < (k+1)^2$.

417. Ответ: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$. Рассматриваемые окружности лежат на двух концентрических сферах: описанной около куба и касающейся всех его ребер. Наименьшее расстояние равно разности радиусов этих сфер.

418. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда $a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$.

419. При параллельном переносе синего квадрата вдоль одной из его сторон сумма синих сторон восьмиугольника не ме-

няется, а когда центры синего и красного квадратов совпадают, сумма синих сторон равна сумме красных.

420. **О т в е т**: когда BM — высота треугольника.

421. а) Можно (рис. 122).

б) Нельзя.

Если требуемая сеть дорог существует, то одно из чисел — n или $n-2$ — является квадратом целого числа.

Выберем какой-нибудь город A и назовем его «хорошим». Любой город называется «хорошим», если длина пути A и B — четное число, и «плохим» — если нечетное. Пусть x — число «хороших» городов, y — число «плохих» городов $(x+y=n)$. Всего есть xy пар городов, в которых один город хороший, а другой — плохой. Значит, среди чисел $1, 2, \ldots \frac{n(n-1)}{2}$ имеется xy нечетных чисел. Если n нечетно, то $n = n^2 - 4xy = (x-y)^2$, если же четно, то $n = (x-y)^2 + 2$.

422. Равенство $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = BD^2\sqrt{2}$ невозможно (числа $\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{BD}$ и BD^2 — целые).

423. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$, где $a_1 \geqslant 3$ — нечетно, а остальные a_i $(i=2, \ldots, n-1)$ — четны. Пусть $a_1^2 + a_2^2 + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}^2 = 2k+1$ и $a_n = k$. Тогда $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 =$ $= (k+1)^2$. Рассмотрим также числа $b_1 < b_2 < \ldots < b_{m-1}$, где $b_1 > 2a_n$ нечетно, а $b_2, \ldots, b_{m-1}$ — четные, причем $b_{i+1} > b_i a_n$ и $b_m = S$, где $2S + 1 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{m-1}^2$.

Требуемая таблица получается расстановкой в пересечении i-й строки и j-го столбца чисел $a_i^2 b_j^2$.

424. а) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей и точка O_3 такова, что $AO_1O_2O_3$ — параллелограмм. Тогда O_3 — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

б) **О т в е т**: все точки окружности с центром O_2 второй окружности и радиусом, равным радиусу первой окружности, кроме точек M^* и N^*, получающихся из M и N параллельным переносом, переводящим O_1 в O_2.

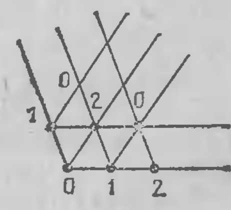


Рис. 123

425. Занумеруем узлы сетки числами 0, 1, 2 так, чтобы: а) в вершинах любого маленького треугольника стояли все три числа, б) в вершинах шестиугольника стояли цифры 0 и 1 (рис. 123). Сумма всех чисел, стоящих в узлах сетки, при делении на 3 дает в остатке 2. Пусть P, Q, R — любой правильный треугольник с вершинами в узлах. Если в вершинах P и Q

стоят одинаковые числа, то это же число стоит и в вершине R. Если в вершинах P и Q стоят разные числа, то в вершине R стоит третье из чисел. В любом случае сумма чисел, стоящих в точках P, Q и R, делится на 3. И, следовательно, в любой момент сумма чисел в еще непокрашенных узлах при делении на 3 дает в остатке 2.

426. Ответ: 1 и 9. Если число $n = m^2$ имеет $m > 1$ делителей, то m нечетно ($m = 2k + 1$), а n имеет ровно k делителей, меньших m, и потому делится на $2k - 1$.

427. Можно считать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Неравенство теперь следует из оценок:

$$\frac{2}{a_1 + a_2} \leqslant \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{2k-1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k-1}} \leqslant \frac{2k-1}{a_k + \ldots + a_{2k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2k-1}{k \cdot a_{k-1}} < \frac{2}{a_{k-1}} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2},$$

$$\frac{2k}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}} \leqslant \frac{2k}{a_{k+1} + \ldots + a_{2k}} \leqslant \frac{2}{a_k}.$$

428. Ответ: AB, AC, биссектриса угла BAC, касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC, касательная в точке A к окружности, описанной около треугольника AB_1C, где точка B_1 симметрична B относительно A.

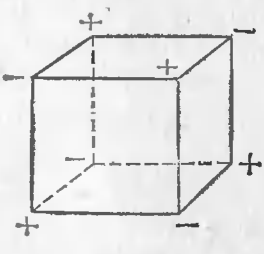


Рис. 124

429. Требуемая расстановка получается из расстановки одних нулей с помощью повторения следующих двух операций: а) перестановка местами двух слоев единичных кубиков, параллельных какой-либо грани куба); б) прибавление к числам, стоящим в вершинах исходного куба и помеченных знаком «+», и одновременно вычитание из чисел, стоящих у вершин, помеченных знаком «—» (см. рис. 124), одного и того же числа.

430. Ответ: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, $n \geqslant 2$; $x = 6$, $y = 8$, $z = 4$, $n \geqslant 2$; $x = 8$, $y = 3$, $z = 7$, $n = 2$.

431. Пусть O и O' — данные точки, причем, для определенности, точка O' лежит внутри или на сторонах треугольника OA_1A_2. Тогда $O'A_1 + O'A_2 < OA_1 + OA_2$ и $O'A_i - OA_i \leqslant 10$ см ($i = 3, 4, \ldots, 12$).

432. Ответ: можно. Нужно налить во все стаканы, кроме одного, по 100 г молока, а в оставшийся — 200 г.

433. Ответ: а) 1; б) 5000/4999.

а) при симметрии относительно центра прямоугольника раскраска переходит в противоположную.

б) следует рассмотреть проекции белых и черных отрезков на одну из сторон прямоугольника.

434. а) Пусть O — центр описанной около многоугольника окружности. Тогда $\overrightarrow{MA_i}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i}$ и в сумме достаточно взять знак «+» у слагаемых с четными номерами, знак «—» — у остальных.

б) Пусть $\overrightarrow{MA_{i_1}}, \overrightarrow{MA_{i_2}}, \ldots, \overrightarrow{MA_{i_k}}$ входит в сумму со знаком «+» и $\overrightarrow{MA_{j_1}}, \ldots, \overrightarrow{MA_{j_{n-k}}}$ — со знаком «—». Если сумма равна 0, то

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{n-2k}\left(\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+\ldots+\overrightarrow{OA_{i_k}}-\overrightarrow{OA_{j_1}}-\ldots-\overrightarrow{OA_{j_{n-k}}}\right),$$

а этим условием M определяется однозначно.

435. Ответ: а) 1 при $n=3$; $(n-1)^2-1$ при $n\geqslant 4$; б) $n-2$.

436. Достаточно доказать при всех x неравенство $|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|>8/5$.

437. Среди чисел от 1 до 1986 ровно два, $729=3^6$ и $1458=2\cdot 3^6$, делятся на 3^6. Приведя сумму всех дробей, кроме $\frac{1}{729\cdot 1458}$, к общему знаменателю, получим дробь $\frac{a}{3^{11}\cdot b}$, где b не делится на 3.

438. Любая касательная отсекает прямоугольный треугольник с острым углом φ и площадью $1-\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi+1}\leqslant(\sqrt{2}-1)^2$. Площадь S общей части квадрата и треугольника удовлетворяет неравенству $S\geqslant 4-3(\sqrt{2}-1)^2>3{,}4$.

439. Ответ: $\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Каждому значению $m=0, 1, 2, \ldots$ поставим в соответствие многочлен $P_m(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(a_i+2b_i)x^i$, где a_i и b_i соответственно — цифры записи чисел $n-2m$ и m в двоичной системе. Любой из многочленов $P_m(x)$ допустим и, наоборот, каждый допустимый многочлен совпадает с некоторым из $P_m(x)$.

440. Пусть A_1, B_1, X_1, Y_1 — точки касания сферы с гранями BXY, XYA, YAB, ABX соответственно. Тогда $\triangle XY_1B=\triangle XA_1B$, $\triangle AY_1X=\triangle AB_1X$ и т. д. Используя эти равенства, можно показать, что сумма углов пространственного четырехугольника $AXBY$ равна $\angle AY_1B+\angle AX_1B=2\angle AX_1B$ и убедиться, что $\angle AY_1B+\angle AX_1B$ не зависит от X и Y.

441. $x_1+y_1=x_2+y_2=\ldots=x_{10}+y_{10}=9$ и $x_1+x_2+\ldots$ $\ldots+x_{10}=y_1+y_2+\ldots+y_{10}$. Поэтому разность $x_1^2+x_2^2+\ldots$ $\ldots+x_{10}^2-y_1^2-y_2^2-\ldots-y_{10}^2=9(x_1+\ldots+x_{10}-y_1-$ $-y_2-\ldots-y_{10})=0$.

442. Ответ: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Пусть $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_6$ — массы гирь. Ясно, что $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$. Если $x_k=2^{k-1}$ при всех $k\leqslant m$, то $x_{m+1}=2^m$, так как наибольшая масса, которую можно взвесить с помощью гирь 1, 2, ..., 2^{m-1} равна 2^m-1.

443. Пусть B — точка пересечения A_1A_2 и A_3A_4. Треугольник BA_3A_1 — равнобедренный, а $\triangle A_2BA_3\sim\triangle A_1BA_4$.

444. Ответ: а) 12 выстрелов; б) 20 выстрелов.

а) В квадрате 7×7 можно разместить 12 неналегающих прямоугольников 1×4; б) в каждый прямоугольник 3×4 необходимо сделать 5 выстрелов.

445. $2(1+2^{1987}+\ldots+n^{1987})=(n^{1987}+2^{1987})+\ldots$ $\ldots+(2^{1987}+n^{1987})+2=(n+2)M+2$, где M — целое число.

446. Ответ: а) 11 фигур. В каждом квадрате 2×2 должно быть покрыто не меньше двух клеток.

б) Утверждение справедливо для квадрата 7×7. Если оно справедливо для доски $(6n+1)\times(6n+1)$, то в одном из углов квадрата $(6n+7)\times(6n+7)$ поместим квадрат $(6n+1)\times$ $\times(6n+1)$, закрывающий вырезанную клетку, а оставшуюся часть разрежем на прямоугольники 2×3.

447. Пусть A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — точки пересечения продолжений сторон с данными прямыми. Точки B_1 и B_2 лежат на окружности, описанной около равнобедренной трапеции $A_1A_2C_1C_2$.

448. Если утверждение неверно, то каждая прямая, содержащая звено одной из ломаных, пересекает звенья другой ломаной во внутренних точках и число таких точек пересечения четно.

449. Ответ: 121, 241, 361, 481, 601. Условию удовлетворяет любой набор из n чисел $a_i=i\cdot n!+1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Сумма любых k чисел этого набора делится на k.

450. Пусть F — точка пересечения диагоналей BD и CE. Точки A, F, D, E лежат на одной окружности. Точки A, B, C, F также лежат на одной окружности.

451. Ответ: $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Если α удовлетворяет условию, то $\cos\alpha\leqslant-\frac{1}{4}$ (иначе $\cos4\alpha>0$). Точно так же при любом натуральном n: $\cos2^n\alpha\leqslant-\frac{1}{4}$, откуда $\left|\cos2^n\alpha-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{3}{4}$.

Но тогда

$$\left|\cos 2^n \alpha + \frac{1}{2}\right| = 2\left|\cos 2^{n-1}\alpha - \frac{1}{2}\right| \cdot \left|\cos 2^{n-1}\alpha + \frac{1}{2}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{8}{2}\left|\cos 2^{n-1}\alpha + \frac{1}{2}\right|.$$

Итак,

$$\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|\cos 2^n \alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

при любом n. Отсюда следует, что $\cos\alpha = -1/2$.

452. $k^3 = (a + A)(b + B)(c + C) = abc + ABC + k(aB + bC + cA)$.

453. Выделим левую верхнюю угловую клетку таблицы. Затем рассмотрим области: угловой квадрат 3×3 без этой клетки, квадрат 5×5 без квадрата 3×3, квадрат 7×7 без квадрата 5×5 и т. д. Сумма чисел, стоящих в клетках любой из построенных областей, не больше 2.

454. Пусть биссектриса угла ABC и прямая l, симметричная ей относительно центра окружности, пересекают прямую в точках L и N соответственно. Тогда $NP = KL = LM$, $PM = LN$.

455. Ответ: а); б): начинающий выигрывает. а) Например, первым ходом пишет число 6, после чего второй может написать одно из чисел (4, 5), (7, 8), (9, 10), которые мы объединили в пары. Первому в ответ на любой ход второго следует записывать другое число из той же пары.

б) Рассмотрим новую игру: правила те же, но среди чисел нет единицы. Если у первого есть выигрывающая стратегия в этой игре, то он сразу ее применяет. Если нет, то он сначала пишет 1 и потом применяет выигрывающую стратегию второго в новой игре.

456. Ответ: 7 дней. Пусть k — число дней, когда дежурили 9 богатырей, а l — когда дежурили 10 богатырей, причем каждый из них дежурил m раз. Тогда $9k + 10l = 33m$. При $m = 1$ решений нет, а при $m = 2$ имеем $k = 4$ и $l = 3$.

457. Если число отмеченных узлов конечно, то, отложив от правого верхнего узла все векторы, получим, что векторов (x, y) с $y > 0$ и $x > 0$ и $y = 0$ больше, чем остальных. Откладывая все векторы от левого нижнего узла, получим, что их меньше, чем остальных.

458. Рассмотрим вершины A_{p-1}, A_p, A_1, A_2, A_3 и A_4 данного p-угольника. Проведем диагонали A_1A_3, A_2A_4, A_pA_2, $A_{p-1}A_2$. Пусть B_1, B_2 — точки пересечения диагонали A_pA_2 с A_1A_4 и A_1A_3, а B_4, B_3 — точки пересечения $A_{p-1}A_2$ с теми же диагоналями.

(Если $p=5$, то $B_4=A_4$.) Из равенства площадей следует, что $B_1B_2=B_2A_2$ и $A_1B_2=B_2B_3$. Поэтому $A_1A_4 \| A_2A_{p-1}$. Противоречие.

459. Пусть $T_p(n)$ — множество всех чисел из T_p, меньших $(2^n)!$, и $N_p(n)$ — количество чисел в нем. Всякое число из $T_p(n)$ представимо в виде $\beta_0+\beta_1(2^1)!+\beta_2(2^2)!+\ldots+\beta_{n-1}(2^{n-1})!$. Пусть $A_p(n)-1$ — наибольший из всех коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \ldots$ $\ldots, \beta_{n-1}$ среди *всех* чисел из $T_p(n)$. Для любого k $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ коэффициент при $(2^k)!$ принимает не больше чем $A_p(n)$ различных значений. Поэтому $N_p(n) \leqslant$ $\leqslant (A_p(n))^n$. Осталось доказать следующие леммы. 1) $A_{p+1}(n) \leqslant A_p(n)\cdot N_p(n) \leqslant (A_p(n))^{n+1}$; 2) $A_{1987}(n) \leqslant 2^{(n+1)^{1987}}$; 3) $2^{(n+1)^{1987}} < (2^n)!$ при некотором n; 4) $(2^n)! > 2^{2^n}$ при $n \geqslant 2$; 5) $2^n > (n+1)^{1987}$ при некотором n.

460. а) Если $f(0)=a$, то $f(-a)=0$ и $f(0)=-a$, так что $f(0)=0$.

Равенство $f(x_0)=x_0$ при $x_0 \neq 0$ невозможно.

б) Ответ: $$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x=0, \\ -x/2 & \text{при} \quad 4^k \leqslant |x| < 2\cdot 4^k, \\ 2x & \text{при} \quad 2\cdot 4^{k-1} \leqslant |x| < 4^k. \end{cases}$$

461. Пусть A—вершина многогранника и $AA_1, AA_2, \ldots, AA_n$— ребра, из нее выходящие. Ребро AA_1 красим в синий цвет, остальные ребра — в красный. Все звенья ломаной $A_2A_3 \ldots A_n$ красим в синий цвет. Ребро A_1A_2 — в красный. Последовательно добавляем грани, примыкающие к уже покрашенной части многогранника. Если у грани оказались два покрашенных ребра, то третье ребро красим любым цветом, если покрашено одно ребро, то оставшиеся два красим разными цветами.

462. $$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n-1=\frac{a_3}{(2n)^3}+\frac{a_5}{(2n)^5}+\ldots,$$ где числа $a_3, a_5, \ldots$ положительны.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПУТЕВОДИТЕЛЬ

Темы, указанные в путеводителе, объединяют задачи по разным признакам: по методу, используемому в решении, либо по объекту, фигурирующему в условии.

1. Метод индукции

Метод доказательства некоторого утверждения для любого натурального n основан на следующем принципе: если утверждение верно для $n = 1$ и из справедливости его для $n = k$ вытекает справедливость этого утверждения для $n = k + 1$, то оно верно для всех n (*принцип математической индукции*). Часто доказательство по индукции имеет форму «спуска»: доказательство утверждения для некоторого n сводится к тому, что утверждение верно для некоторого меньшего значения $n_1 < n$; здесь используется принцип индукции в такой форме: если утверждение верно для $n = 1$ и (при $n > 1$) из справедливости его для всех $k < n$ следует справедливость для $k = n$, то утверждение верно для всех n. Иногда удобно начать индукцию не с $n = 1$, а с $n = 0$ или с некоторого $n = n_0$. Принцип индукции эквивалентен такой аксиоме: в любом множестве натуральных чисел есть наименьшее (см. задачу 11).

Часто метод индукции присутствует в доказательстве неявно. Например, доказательство тождества

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

по индукции сводится к проверке его для $n = 1$ и выкладке («шагу индукции»): если $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$, то $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. По существу то же доказательство можно записать так (собрав мысленно первые n шагов индукции вместе):

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) =$$
$$= 1 + (4 - 1) + (9 - 4) + \ldots + ((n + 1)^2 - n^2) = (n + 1)^2.$$

№ 5, 15, 26, 36, 39, 52, 72, 76, 77, 90, 97, 100, 102, 110, 113, 120, 137, 142, 144, 148, 164, 176, 179, 181, 183, 193, 203, 210, 218, 223, 229, 231, 240, 246, 248, 260, 267, 345, 367, 396, 446б.

Выделим еще задачи со специфической идеей многократного деления пополам (или удвоения).

№ 155, 200, 277.

2. Целые числа. Делимость

В разнообразных задачах про целые числа используются основные понятия и теоремы, связанные с делимостью. Каждое целое число a можно разделить на натуральное число m с остатком, то есть представить в виде $a = mq + r$, где q и r (остаток) — целые числа и $0 \leqslant r < m$.

Среди любых m последовательных целых чисел найдется ровно одно число, делящееся на m. Если два числа a и b при делении на число m дают одинаковые остатки, то говорят, что a сравнимо с b по модулю m. Записывают это так $a \equiv b \pmod m$.

Если a и b — натуральные числа и $a = bq + r$ $(0 \leqslant r < b)$, то наибольший общий делитель d этих чисел равен наибольшему общему делителю b и r; пользуясь этим утверждением несколько раз, можно найти его как последний не равный нулю остаток в цепочке делений с остатком:

$$a = bq + r,\ b = rq_1 + r_1,\ r = r_1q_2 + r_2,\ r_1 = r_2q_3 + r_3,\ \ldots$$
$$\ldots,\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} + d,\ r_n = dq_{n+2}$$

(*алгоритм Евклида*); отсюда следует, что существуют целые числа x и y, такие, что $d = ax + by$. В частности, если числа a и b *взаимно просты*, т. е. не имеют общих множителей, больших 1, то существуют целые x и y, для которых $ax + by = 1$ (см. задачу 68).

Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых (*основная теорема арифметики*). Количество простых чисел бесконечно; доказательство этого утверждения по Евклиду основано на том, что произведение нескольких простых, сложенное с единицей, имеет отличные от всех этих простых чисел множители.

Если числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ попарно взаимно просты, то для любых остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ $(0 \leqslant r_i < b_i)$ найдется число a, которое при делении на b_i дает остаток r_i, т. е. $a \equiv r_i \pmod{b_i}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ (*китайская теорема об остатках*).

№ 3, 9, 16, 30, 36, 42, 46, 48, 51, 59, 68, 74, 85, 88, 89, 93, 102, 107, 122, 137, 141, 162, 190, 233, 254, 258, 260, 288, 306, 316, 322, 352, 360, 371, 386, 411, 416, 426, 436, 445, 449, 456.

3. Цифры и системы счисления

В задачах, где речь идет о цифрах в десятичной записи натурального числа $A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ (эта запись иногда обозначается через $\overline{a_na_{n-1} \ldots a_1a_0}$), используются разнообразные соображения: делимость целых чисел, алгебраические преобразования, оценки. В частности, полезен признак делимости на 3 и на 9, а также следующее его уточнение: число $A = \overline{a_na_{n-1} \ldots a_1a_0}$ дает при делении на 9 (и на 3) тот же остаток, что и его сумма цифр (разность

$$A - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) =$$
$$= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1(10 - 1),$$

очевидно, делится на 9).

Иногда оказывается полезной запись натурального числа A в системе счисления с основанием q:

$$A = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_1 q + a_0,$$

где a_i, $0 \leqslant a_i < q$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — «цифры» этой системы счисления.

№ 3, 21, 43, 54, 85, 88, 93, 122, 132, 139, 141, 142, 144, 148, 168, 175, 197, 201, 244, 291, 294, 297, 329, 354, 396, 430, 439.

4. Числа рациональные и иррациональные

Рациональное число a представимо в виде $a = m/n$, где $m \in Z$, $n \in N$, а также в виде периодической бесконечной десятичной (q-ичной) дроби. Десятичные (q-ичные) дроби, представляющие *иррациональные* числа, не периодичны.

Вместе с иррациональным числом $a + b\sqrt{d}$ (где a и b — рациональные числа, d — целое, не являющееся квадратом натурального числа) полезно рассмотреть «сопряженное» с ним число $a - b\sqrt{d}$: его сумма и произведение с исходным — рациональные числа, так что $a \pm b\sqrt{d}$ являются корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

№ 94, 114, 257, 268, 303, 356, 370, 379, 422.

5. Квадратный трехчлен. Непрерывные функции, графики и корни уравнений

В большинстве задач, сводящихся к исследованию квадратичной функции $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, полезно представить себе ее график. Если он пересекает ось Ox в двух точках (корнях) x_1 и x_2, то между корнями значения функций $y = f(x)$ противоположны по знаку числу a, а вне отрезка $[x_1, x_2]$ — совпадают по знаку с числом a. При этом вершина параболы $y = f(x)$ (абсцисса которой равна полусумме корней) соответствует точке экстремума функции $y = f(x)$: минимума, если $a > 0$, и максимума, если $a < 0$.

В ряде задач полезно использовать такой факт: если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает в концах этого отрезка значения разных знаков, то между точками a и b лежит хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

№ 32, 119, 149, 157, 178, 180, 206, 228, 242, 259, 264, 269, 278, 299, 308, 339, 359, 383, 400, 418.

6. Алгебра многочленов

Многочлен $P(x)$, имеющий число a корнем, делится на двучлен $x - a$, то есть представляется в виде $P(x) = (x - a)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен на единицу меньшей степени (при этом, если $P(x)$ имеет целые коэффициенты, то и $Q(x)$ — тоже). Многочлен степени n имеет не более n корней (даже с учетом кратности). Отсюда следует, что если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени, не большей n, принимают одинаковые значения более, чем в n точках, то их коэффициенты при соответствующих степенях равны.

Часто используются тождества для многочленов с двумя переменными x и y:

$$x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right),$$

$$x^{2m+1} + y^{2m+1} =$$
$$= (x + y)\left(x^{2m} - x^{2m-1}y + x^{2m-2}y^2 - \ldots - xy^{2m-1} + y^{2m}\right),$$

а также формула «бинома Ньютона»

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^{n-1} xy^{n-1} + y^n,$$

где биномиальные коэффициенты вычисляются по формулам

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

№ 16, 24, 38, 51, 125, 142, 162, 217, 242, 251, 258, 325, 347, 439.

7. Тождества. Уравнения и системы уравнений

При решении и исследовании уравнений, помимо обычных «школьных» методов (подстановки, замены переменной, преобразования), иногда используются соображения монотонности: если функция $y = f(t)$ — строго возрастает или строго убывает, то уравнения $f(g_1) = f(g_2)$ и $g_1 = g_2$ равносильны. При решении систем уравнений иногда бывают полезны геометрическая интерпретация, соображения симметрии и т. д.

Ряд задач связан с линейными соотношениями между несколькими переменными.

№ 33, 63, 98, 146, 189, 194, 243, 276, 292, 353, 357, 364, 382, 414, 460.

8. Неравенства

Среди часто используемых неравенств отметим следующие:

1) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, $\quad |x - y| \geqslant |x| - |y|$;

2) $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;

3) если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа, то

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

(неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим);

4) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)/n$ (для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$);

5) для положительных чисел a, b дробь $\dfrac{c+d}{a+b}$ заключена между дробями $\dfrac{c}{a}$ и $\dfrac{b}{d}$ (см. задачу 219).

6) $\sin < x$ при $x > 0$.

№ 19, 56, 95, 109, 113, 118, 127, 128, 130, 134, 169, 172, 187, 203, 208, 212, 232, 264, 267, 278, 279, 299, 308, 311, 319, 325а, 335, 341, 346, 354, 357, 365, 372, 375, 377, 392, 403, 427, 436, 452, 462.

9. Принцип Дирихле

Если в k клетках больше nk зайцев, то хотя бы в одной клетке сидит больше n зайцев. Подобные соображения используются в разных задачах для доказательства существования [65].

Приведем еще несколько похожих на «принцип Дирихле» (и столь же очевидных) утверждений, используемых в геометрических и аналитических задачах. Если сумма площадей нескольких фигур меньше S, то ими нельзя покрыть фигуру площади S. Если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков с суммой длин L, то найдется точка, покрытая не более чем $[L]$ этими отрезками. Если среднее арифметическое нескольких чисел больше a, то хотя бы одно из этих чисел больше a.

№ 3, 4, 12, 37, 67, 72, 78, 87, 91, 110, 166, 220, 342, 367, 444, 446.

10. Комбинаторика

Основной прием в задачах на подсчет числа различных комбинаций элементов конечного множества — установление соответствия между множествами, заданными различными условиями.

В частности, множество всех упорядоченных наборов из n единиц и нулей — всего таких наборов 2^n — может быть поставлено в соответствие множеству всех подмножеств данного множества из n элементов. Множество таких наборов, содержащих k единиц, соответствует множеству всех k-элементных подмножеств n-элементного множества. Всего таких наборов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\,\ldots\,\cdot k}.$$

При $n = 2$ это — число неупорядоченных пар элементов из данного множества: $C_n^2 = n\,(n-1)/2$.

Число перестановок (упорядочений) данного множества из n элементов равно $n! = 1\cdot 2\cdot\,\ldots\,\cdot n$.

№ 52, 61, 76, 117, 136, 210, 231, 246, 301, 361, 439, 442.

11. Графы, отображения

Изображая элементы некоторого множества точками и соединяя некоторые пары точек отрезками, мы получаем наглядное представление для очень популярного объекта дискретной математики. Он называется *графом*; точки (элементы множества) называются *вершинами*, отрезки (или дуги) — *ребрами* графа. Граф, из любой вершины которого можно пройти в любую другую путем, состоящим из ребер, называется *связным*. Замкнутый путь по ребрам графа называется *циклом*. Связный граф без циклов — *дерево* — имеет вершин на одну больше, чем ребер (см. задачу 8). Если все циклы графа имеют четную длину, то его вершины можно раскрасить в два цвета так, что вершины одного цвета не соединены ни одним ребром; такой граф называется двудольным.

Если на ребрах графа расставить стрелки, то получится ориентированный граф (*орграф*). Любое отображение f конечного множества A в себя задает орграф, из каждой вершины $a \in A$ которого выходит одна стрелка — в вершину $f(a)$. (При этом возможны и петли — стрелки, идущие из a в a; они соответствуют *неподвижным точкам* отображения f.) Если f взаимнооднозначно, то орграф распадается на циклы (и петли).

Один из примеров сложного графа — схема телефонной сетя (см. задачу 158).

Рассматриваются также графы, ребра или вершины которых раскрашены в несколько цветов, или помечены числами.

№ 8, 72, 79, 111, 123, 126, 163, 176, 183, 196, 240, 271, 290, 296, 310, 317, 421, 461.

12. Четность, раскраска. Задачи на решетках

В задачах про графы часто важны соображения четности. Например, число вершин, к которым примыкает нечетное число ребер, всегда четно (см. также задачу 1). Соображения подобного рода полезны и в других задачах; например, для решения классической задачи: можно ли шахматную доску 8×8 клеток без двух клеток в противоположных углах покрыть «доминошками» 1×2 — достаточно заметить, что каждая доминошка покрывает две клетки разного цвета (при обычной шахматной раскраске), а угловые клетки — одного цвета. Бывает полезна и раскраска в большее число цветов.

№ 1, 17, 33, 49, 61, 72, 85, 132, 133, 142, 143, 154, 184, 235, 247, 262, 333, 364, 374, 413.

Помимо четности или раскраски, в задачах на клетчатой бумаге и других плоских и пространственных решетках также нередко используются различные геометрические и комбинаторные соображения, метод координат. Бывает полезно рассмотреть клетчатую бумагу как числовую плоскость, на которой узлы решетки — точки с целочисленными координатами, или квадрат из p^2 узлов, координаты которых — пары остатков (x, y) при делении на p.

№ 91, 96, 111, 181, 199, 207, 208, 229, 265, 275, 295, 304, 314, 349, 362, 397, 416, 425, 433, 444, 446, 457.

13. Операции и инварианты

В задачах, где требуется выяснить, можно ли с помощью заданных операций перейти от одного из объектов к другому, часто полезно найти «инвариант» — числовую характеристику объектов (или функцию с какими-то другими значениями на множестве объектов), которая не меняется при указанных операциях. Если при этом значение инварианта на двух объектах различно, то превратить один в другой нельзя. В целочисленных и других «дискретных» задачах инвариантом часто служит остаток от деления на 2 (четность) или на другое натуральное число.

Если все выполняемые операции обратимы, то все множество объектов, над которыми они выполняются, разбивается на классы эквивалентности (два объекта эквивалентны, если один из них может быть получен из другого заданными операциями).

№ 105, 154, 214, 233, 260, 276, 321, 425.

В задачах, где требуется оценить количество операций или доказать, что их нельзя проделывать бесконечное число раз (скажем, убедиться в отсутствии «цикла»), иногда бывает полезно придумать функцию, которая при каждой операции возрастает (или при каждой операции убывает).

№ 5, 7, 21, 44, 151, 196, 271, 283, 409.

14. Расстановки цифр и целых чисел, их преобразования. Турниры

В решениях задач о конечных последовательностях из целых чисел, букв, фишек, расстановках их по окружности или в таблице сочетаются различные соображения, связанные с делимостью, комбинаторикой, оценками, использующими индукцию.

№ 4, 37, 39, 87, 117, 143, 154, 156, 181, 200, 221, 224, 229, 231, 238, 275, 281, 300, 307, 321, 323, 337, 340, 345, 350, 385, 390, 391, 409, 413, 432, 435, 442, 456.

Задачи о турнирах, набранных очках и занятых участниками местах, объединенные спортивной тематикой:

№ 28, 108, 126, 179, 218, 317, 441.

15. Планиметрия

Почти в каждом варианте олимпиадных задач встречается традиционная школьная, хотя и не простая, задача по геометрии. Среди наиболее распространенных геометрических теорем, используемых для их решения, отметим следующие. Угол между касательной и секущей окружности равен полуразности величин дуг, заключенных между сторонами угла; квадрат длины касательной равен произведению отрезков секущей от вершины угла до точек ее пересечения с окружностью. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны; четырехугольник описан около окружности, если и только если суммы противоположных сторон равны. Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус окружности.

№ 2, 13, 35, 50, 55, 58, 69, 84, 92, 103, 104, 106, 112, 114, 115, 129, 138, 145, 152, 159, 165, 166, 170, 177, 182, 195, 198, 209, 222, 237, 253, 305, 332, 378, 381, 393, 412, 428, 447, 450, 454.

В отдельные группы выделим задачи

а) о правильных многоугольниках:

№ 20, 99, 103, 127, 226, 398, 408, 434, 443;

б) использующие понятие «геометрического места» (множества) точек:

№ 6, 12, 14, 18, 20, 31, 40, 60, 69, 78, 82, 157, 202, 207, 213, 270, 424;

г) на применение геометрических преобразований (поворотов, параллельных переносов, подобий и их композиций):

№ 6, 22, 45, 47, 73, 101, 112, 140, 147, 165, 182, 198, 205, 222, 253, 259, 298, 309, 315, 373, 399, 414, 460;

д) задачи, в которых речь идет о площади фигур (или, как нередко бывает, площадь служит вспомогательным инструментом в решении):

№ 12, 13, 23, 29, 53, 55, 78, 106, 147, 152, 186, 204, 261, 255, 285, 312, 327, 363, 366, 384, 395, 415, 438, 458.

16. Стереометрия

В решениях задач полезно рассмотреть проекции фигур на плоскость (или на прямую). Отметим также теорему, не входящую обычно в школьный курс: в трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других.

№ 53, 70, 80, 82, 104, 121, 150, 188, 234, 241, 255, 266, 299, 326, 348, 358, 394, 417, 461.

17. Комбинаторная геометрия

Это название относится к разнообразным оценкам, связанным с размещениями, покрытиями, различными комбинациями фигур. Здесь используются самые общие свойства, связанные с расположением фигур на плоскости (и в пространстве).

Укажем среди них теорему Жордана: любая несамопересекающаяся замкнутая ломаная делит плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю, причем любой путь из точки внутренней области в точку внешней пересекает эту ломаную, а две точки каждой области можно соединить путем, не пересекающим ломаной.

Напомним определение выпуклого множества: это — множество, которое вместе с каждыми двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее эту фигуру; выпуклая оболочка конечного множества — многоугольник (в пространстве — многогранник) с вершинами в некоторых из данных точек.

Вместе с данной фигурой бывает полезно рассмотреть ее *r-окрестность*: множество точек, наименьшее расстояние от которых до точек фигуры меньше чем r; две фигуры (в частности, точки) находятся на расстоянии не меньшем $2r$, если и только если их r-окрестности не пересекаются (задачи 12, 81).

№ 27, 49, 53, 64, 86, 147, 155, 156, 157, 164, 188, 202, 211, 215, 226, 227, 229, 230, 235, 237, 249, 255, 277, 314, 324, 338, 351, 406, 448, 461.

18. Геометрические неравенства, оценки, экстремумы

Среди многочисленных теорем, используемых в оценках и доказательстве неравенств геометрическими средствами, отметим следующие, наиболее распространенные. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других (неравенство треугольника). Угол треугольника меньше, равен или больше $90°$ в зависимости от того, меньше, равен или больше суммы квадратов двух прилежащих к нему сторон квадрат противолежащей стороны. Длина проекции отрезка на плоскость или прямую не больше длины этого отрезка. Площадь проекции многоугольника на любую плоскость не больше площади многоугольника.

№ 23, 29, 32, 41, 62, 70, 73, 78, 82, 84, 86, 104, 115, 121, 124, 127, 131, 134, 135, 140, 167, 185, 191, 192, 193, 202, 204, 206, 213, 222, 225, 261, 266, 269, 282, 290, 287, 299, 302, 318, 320, 334, 348, 355, 365, 368, 388, 394, 420, 431, 438.

19. Векторы

Кроме наиболее стандартных операций над векторами — сложения, вычитания и умножения на число — полезно использовать также скалярное произведение $uv = |u||v|\cos\alpha$, где $\alpha = \angle(u, v)$. Если $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, то $uv = x_1x_2 + y_1y_2$.

Для любых n точек плоскости (или пространства) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ существует единственная точка O (центр тяжести) такая, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = 0.$$

№ 6, 13, 143, 193, 207, 222, 225, 234, 270, 274, 280, 293, 315, 336, 366, 373, 404, 434, 457.

20. Оценки и экстремальные задачи для наборов чисел и таблиц

Во многих олимпиадах встречаются задачи о сравнении по величине чисел из некоторого конечного набора, расположениях точек на прямой, оценках сумм, разностей и других функций, связанных с числовым набором или таблицей.

№ 56, 77, 127, 232, 252, 283, 344, 354, 369, 377, 453.

Часто в таких задачах бывает полезным:

а) выбрать наибольшее или наименьшее число из набора («принцип крайнего»):

№ 5, 26, 44, 72, 109, 126, 128, 156, 160, 163, 202, 219, 243, 246, 248, 283, 337, 343, 380, 401, 409;

б) упорядочить числа набора по величине:

№ 34, 65, 75, 153, 245, 250, 346, 410.

21. Последовательности

Последовательность x_n называется периодической, если $x_{n+t} = x_n$, $n \in N$ (натуральное число t — период). В ряде задач встречаются *рекуррентные* последовательности x_n — такие, для которых $x_{n+1} = f(x_n)$, где f — некоторая функция, либо каждый член (начиная с $(k+1)$-го) определяется через k предыдущих. Такова, например, последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ..., в которой каждый член равен сумме двух предыдущих. В оценках последовательностей часто помогает метод индукции, используются «огрубление» оценок и соображения монотонности.

№ 11, 15, 25, 36, 90, 100, 113, 223, 251, 255, 257, 267, 273, 303, 313, 328, 356, 402, 405, 459.

Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для любого $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

№ 239, 268, 300, 389, 451.

22. Игры, преследование, стратегии и алгоритмы

Решение задач, в которых речь идет о достижении цели с помощью последовательности ходов — в частности, требуется выяснить, кто из игроков побеждает в той или иной игре — требует описания стратегии, правила выбора ходов, обеспечивающего достижение цели; в задачах про игры (или в задачах «погони», преследования) при этом требуется доказать, что стратегия обеспечивает выигрыш при любом поведении партнера.

№ 10, 57, 60, 71, 83, 91, 110, 116, 125, 168, 174, 199, 206, 242, 250, 256, 262, 283, 330, 376, 455.

23. Интересные примеры и конструкции

Во многих задачах наиболее трудная часть решения — не доказательство, а построение необычного примера.

№ 123, 156, 202, 208, 230, 231, 244, 257, 263, 300, 371, 398, 401, 416, 423, 444, 446, 456, 460.

К этим задачам относятся и такие, где построение и исследование примера — многошаговая конструкция (при этом часто используется принцип индукции).

№ 64, 144, 158, 183, 200, 210, 238, 272, 281, 405.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕНИРОВКИ

Здесь приведены около ста задач для самостоятельного решения. Их расположение в основном следует тематическому путеводителю. Некоторые темы («индукция», «принцип Дирихле») представлены полнее, другие, более связанные со школьным курсом — меньше; к последним, в частности, относятся геометрические темы, которым посвящены вышедшие недавно большие сборники [31], [49]. Среди включенных в этот список задач несколько классических теорем, разбираемых обычно на занятиях кружков, но основная часть — задачи, предлагавшиеся на областных и республиканских турах олимпиады. Несколько задач предлагались на Турнире городов — математическом соревновании школьников, проводящемся регулярно с 1980 г. по единым задачам, высылаемым из Москвы (редакцией журнала «Квант») и охватывающем уже несколько десятков городов в СССР, а также Болгарии и Польше [81]. В последние годы турнир проводится дважды в год — весной и осенью; в заключение мы приводим набор задач последнего турнира.

1. Докажите для любого натурального n равенство

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)!$$

2. Докажите, что при любом натуральном n

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

3. Докажите, что $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} > \dfrac{n}{2}$ при $n > 1$.

4. а) На сколько частей делят плоскость n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

б) Докажите, что n плоскостей в общем положении (никакие три не параллельны одной прямой и никакие четыре не проходят через одну точку) делят пространство на $(n^3 + 5n)/6 + 1$ частей.

5. а) Плоскость разбита несколькими окружностями на части. Докажите, что каждую часть можно выкрасить одной из двух красок так, что две части, граничащие по дуге, были выкрашены в разные краски.

б) На плоскости расположены несколько «треножников» (треножник состоит из трех лучей с общей вершиной). Докажите, что части, на которые они разбивают плоскость, можно выкрасить в три краски так, чтобы две части, граничащие по отрезку или лучу, были выкрашены в разный цвет.

6. В таблицу из трех строк и n столбцов расставлены произвольным образом фишки трех цветов: n белых, n красных и n зеленых. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце стояли фишки трех разных цветов.

7. По окружности расставлены n точек — черных и красных. Докажите, что можно провести не более чем $3n/2-2$ хорды с концами в точках разного цвета, не пересекающиеся внутри окружности.

8. Докажите, что каждое целое неотрицательное число единственным образом представляется в виде $x+(y^2+y)/2$, где x и y — целые неотрицательные числа, $x \leqslant y$.

9. Число $\alpha+1/\alpha$ — целое. Докажите, что тогда число α^n+1/α^n — целое при любом натуральном n.

10. Докажите, что n участникам теннисного турнира, где каждые двое встречались один раз, можно присвоить номера $1, 2, \ldots, n$ так, что k-й выиграл у $(k+1)$-го (для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$).

11. В городе живут N жителей, любые два из которых либо друзья, либо враги. Каждый день не более чем один житель может начать «новую жизнь»: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Известно, что любые трое могут подружиться. Докажите, что все жители могут подружиться.

12. а) На какую наибольшую степень числа 3 делится число $2^{3^n}+1$?

б) Докажите, что число, записываемое в десятичной системе 3^n единицами, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1}.

13. Докажите, что с помощью n гирь массами $1, 3, 9, \ldots, 3^{n-1}$ граммов можно взвесить на чашечных весах любой предмет массой $M \leqslant (3^n-1)/2$ граммов (M — целое число, гири можно класть на обе чашки весов).

14. Отрезок длиной 3^k разбивается на три равные части. Первая и третья из них называются отмеченными. Каждый из отмеченных отрезков снова разбивается на три части, из которых 1-я и 3-я снова называются отмеченными и т. д. до тех пор, пока не получатся отрезки длиной 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Докажите, что для любого натурального d, меньшего 3^k, можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно d.

15. а) Докажите равенство

$$(1+2)(1+2^2)\left(1+2^{2^2}\right)\left(1+2^{2^3}\right)\ldots\left(1+2^{2^n}\right)=2^{2^{n+1}}-1.$$

б) Докажите, что любые два числа последовательности $3, 5, 17, \ldots, 1+2^{2^n}, \ldots$ взаимно просты.

16. 15 простых чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что разность прогрессии больше 30 000.

17. Натуральное число x делят последовательно на все числа от 2 до $x-1$ и выписывают получившиеся остатки. Найдите x, для которого сумма всех различных выписанных остатков равна x.

18. Докажите, что произведение цифр натурального числа, большего 100, не превосходит 27/37 этого числа.

19. Подряд выписано 99 девяток. Докажите, что к ним можно приписать справа еще ровно 100 цифр так, что получившееся 199-значное число окажется квадратом целого числа.

20. Докажите, что существуют иррациональные числа α и β такие, что α^β рационально.

21. Пусть α и β — иррациональные числа, связанные соотношением $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. Докажите, что среди чисел $[n\alpha]$ и $[m\beta]$, где n и m — всевозможные целые числа, каждое целое число встречается ровно один раз.

22. Докажите, что первые n знаков после запятой в десятичном разложении числа $(\sqrt{26}+5)^n$ — все нули или все девятки.

23. а) Докажите, что если $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ — рациональные числа, то $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ — рациональные при любом натуральном n.

б) Докажите, что для любого N существуют N точек плоскости, никакие три из которых не лежат на прямой, все попарные расстояния между которыми — целые числа.

24. Найдите a и b такие, что каждый из квадратных трехчленов x^2-ax+b и x^2-bx+a имеет различные целые положительные корни.

25. Докажите, что если $\overline{abc}$ — трехзначное простое число, то b^2-4ac не может быть полным квадратом.

26. Докажите, что если $a^2+pa+q=0$ и $b^2-pb-q=0$, то уравнение $x^2+2px+q=0$ имеет корень, заключенный между a и b $(q\neq 0)$.

27. Докажите, что для любых чисел p и q суммарная длина отрезков оси Ox, на которых выполняется неравенство $|x^2+2px+2q|\leqslant 2$, не превосходит 4.

28. Укажите все целые n, для которых: а) n^2+1 делится на $n+5$; б) n^5+3 делится на n^2+1.

29. Найдите все многочлены $F(x)$, для которых $F(x+y)=F(x)+F(y)+3xy(x+y)$ при всех x и y.

30. На встрече собрались все участники двух туристских походов (некоторые из них были в двух походах, некоторые — только в одном). В первом походе было 60% мужчин, во втором — 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

31. Какое число больше: $\sqrt{1001}+\sqrt{999}$ или $2\sqrt{1000}$?

32. Докажите, что при любом n

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2.$$

33. Докажите неравенство

$$\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

34. Пусть $x_1+x_2+\ldots+x_k=0$, m — наименьшее, M — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Докажите неравенство

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2\leqslant -kmM.$$

35. Сумма неотрицательных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство $a^2b+b^2c+c^2a\leqslant 4/27$.

36. На окружности расставлено n чисел, сумма которых положительна. Докажите, что можно выбрать из них такое число, которое само положительно, а также сумма его со следующим, со следующими двумя, ..., со следующими $n-2$ числами — все положительны (окружность обходится против часовой стрелки).

37. Докажите, что для любого натурального числа можно найти делящееся на него число вида 111...100...0 (в десятичной записи которого встречаются только единицы и нули).

38. В группе 30 человек. Каждому нравятся ровно k людей из этой группы. При каком наименьшем k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой группы, которые нравятся друг другу?

39. Задано число α. Докажите, что для любого натурального N можно найти целое n такое, что $0 \leqslant n \leqslant N$ и αn отличается от целого числа меньше чем на $1/N$.

40. На земле живут 5 миллиардов человек, из которых менее 1 % имеют возраст свыше 100 лет. Докажите, что найдутся 100 человек, родившихся в одну и ту же секунду.

41. Имеется 30 медных монет. Докажите, что из них можно собрать сумму в 30 коп. (Медными называем монеты стоимостью в 1, 2, 3, 5 коп.).

42. На полосе бумаги записана последовательность из 860 цифр 1 231 231...123 123...123. На какое наибольшее число частей можно разрезать полосу, чтобы все числа на полученных кусках ленты были различными?

43. а) Докажите, что из любых n натуральных чисел, меньших $2n-1$, можно выбрать два, из которых одно делится на другое.

б) Докажите, что из n различных натуральных чисел, меньших $2n-2$, можно выбрать три, большее из которых равно сумме двух других.

44. Какое наибольшее число точек можно расставить на отрезке длиной 1 так, чтобы на любом содержащемся в нем отрезке длины d лежало не более $1+100d^2$ из расставленных точек?

45. а) В окружности диаметра 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин всех хорд меньше $3{,}15k$.

б) В кубе с ребром a лежит ломаная, которую каждая плоскость, параллельная одной из граней, пересекает не более k раз. Докажите, что длина ломаной не больше $3ka$.

46. На площади 1 км $\times$ 1 км растет сосновый лес, состоящий из 4 500 деревьев диаметром 50 см каждое. Докажите, что на этом квадратном участке можно разместить 50 прямоугольных площадок 10 м $\times$ 20 м, на которых не растет ни одного дерева.

47. На окружности отмечены 100 точек $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Каких выпуклых многоугольников больше: тех, у которых A_1 является вершиной, или остальных? На сколько?

48. Каких шестизначных чисел больше: таких, которые можно представить в виде произведения двух трехзначных, или таких, которые нельзя?

49. а) Можно ли все десятизначные числа, записываемые при помощи цифр 1 и 2, разбить на две группы так, чтобы сумма любых двух чисел в каждой группе содержала в десятичной записи не менее двух цифр 3?

б) Докажите, что среди n-значных чисел из цифр 1 и 2 нельзя выбрать более $2^n/(2n+1)$ чисел, каждые два из которых отличались бы по крайней мере в трех разрядах.

50. а) Сколькими способами можно раскрасить n разными красками круг, разбитый на p секторов, где p — простое число? (Каждый сектор окрашивается одной краской; все краски использовать не обязательно; две раскраски, совпадающие при повороте круга, считаются одинаковыми.)

б) Докажите, что при любом натуральном n и простом p число $n^p - n$ делится на p (*малая теорема Ферма*).

51. На фестиваль собрались 6 музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) каждого из остальных?

52. В городе X, где все семьи живут в отдельных домах, разрешаются только парные обмены одного домика на другой (семьи, которые меняются домами, в тот же день не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен домами в городе X можно осуществить за два дня.

53. Докажите, что из куска проволоки длиной 120 см, не разламывая его, нельзя сделать каркас куба с ребром 10 см.

54. В пруд пустили 30 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съест трех щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

55. Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из любого города можно было попасть в любой другой, сделав не более двух пересадок?

56. Каждая из 8 футбольных команд сыграла с каждой из остальных по одной игре. При этом не было ничьих. Докажите, что можно выделить такие четыре команды A, B, C, D, что A выиграла у B, C и D, B выиграла у C и D, C выиграла у D.

57. Докажите, что двадцать карточек, на которых написаны цифры 0, 1, ..., 9 (каждая — на двух карточках), нельзя выложить в ряд так, чтобы между карточками с цифрами «k» лежало ровно k других карточек (для всех $k = 0, 1, \ldots, 9$).

58. Написано $(2m+1)$-значное число. Докажите, что можно вычеркнуть одну из его цифр так, что в полученном $2m$-значном числе количество семерок на четных местах будет равно количеству семерок на нечетных местах.

59. Можно ли найти 100 различных нечетных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ таких, что $1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_{100} = 1$?

60. Докажите, что шахматную доску 50×50 клеток нельзя разбить на фигурки из четырех клеток в форме буквы Т.

61. Докажите для любого натурального n равенство

$$[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n].$$

62. Из двух точек, заданных на плоскости, разрешается получать третью, симметричную одной из них относительно другой. Даны три вершины квадрата. Можно ли из них указанными операциями получить четвертую вершину этого квадрата?

63. Любую вершину треугольника разрешается симметрично отразить относительно другой и заменить ее полученной точкой. Можно ли такими операциями любой треугольник превратить в прямоугольный или остроугольный?

64. Докажите, что площадь многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги равна $i + r/2 - 1$, где i — число узлов, лежащих внутри этого многоугольника, r — число узлов, лежащих на его сторонах и в вершинах; сторона клетки принята за 1 (*теорема Пика*).

65. Имеется много одинаковых правильных треугольников, вершины каждого из которых помечены (в произвольном порядке) цифрами 1, 2 и 3. Треугольники сложили в стопку и нашли суммы чисел в каждой вершине. Может ли оказаться, что в каждом углу она равна: а) 25? б) 50?

66. Дан невыпуклый многоугольник. С ним проделывают следующую операцию: выбирают некоторые две несоседние вершины A и B так, что многоугольник лежит целиком по одну сторону от прямой AB, и часть контура между точками A и B симметрично отражают относительно середины отрезка AB. Если вновь получился невыпуклый многоугольник, операцию повторяют. Докажите, что после конечного числа операций многоугольник станет выпуклым.

67. В вершинах правильного: а) 7-угольника, б) 8-угольника, в) n-угольника ($n \geqslant 9$) расставлены черные и белые фишки. Верно ли, что найдутся три фишки одного цвета, стоящие в вершинах равнобедренного треугольника?

68. Можно ли занумеровать ребра куба числами 1, 2, 3, ..., ..., 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров выходящих из нее ребер была одинаковой? Можно ли расставить на ребрах числа $-6, -5, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, 6$ так, чтобы выполнялось такое же условие?

69. Три равных окружности пересекаются в одной точке. Докажите, что три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности того же радиуса.

70. По двум прямым, пересекающимся в точке P, равномерно с одинаковой скоростью движутся точки: по одной прямой — M, по другой — N. Через точку P они проходят не одновременно. Докажите, что окружность, описанная вокруг треугольника MNP, все время проходит через некоторую фиксированную точку, отличную от P.

71. Докажите, что если точки A, B, C, D, лежащие на окружности, таковы, что касательные в точках A и C пересекаются на прямой BD, то касательные в точках B и D пересекаются на прямой AC.

72. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABDK$ и $CBEL$. Докажите, что продолжением высоты BH треугольника ABC служит медиана треугольника DBE.

73. Докажите, что внутри треугольника, углы которого меньше 120°, существует единственная точка T, из которой все стороны видны под углами 120°, и что сумма расстояний от точки T до вершин треугольника меньше, чем от любой другой точки плоскости.

74. Пусть a, b, c и d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что площадь четырехугольника не больше:
а) $(ab + cd)/2$; б) $(ac + bd)/2$.

75. На каждой стороне параллелограмма выбрано по точке. Докажите, что если площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма, то хотя

бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

76. На основании AB трапеции $ABCD$ задана точка K. Где на основании CD нужно выбрать точку M, чтобы площадь четырехугольника, получающегося при пересечении треугольников AMB и CKD, была наибольшей?

77. Можно ли расположить на плоскости 7 точек так, чтобы среди любых трех из них нашлись две на расстоянии 1?

78. Проекция плоской фигуры на любую прямую в ее плоскости имеет длину не больше 1. Верно ли, что эту фигуру можно поместить в окружность диаметра: а) 1? б) 1,5?

79. Параллелепипед разрешается перемещать в пространстве. Докажите, что его «тень» — ортогональная проекция на горизонтальную плоскость — будет иметь наибольшую площадь в том положении, когда некоторые три вершины параллелепипеда лежат в одной горизонтальной плоскости.

80. Найдите зависимость длительности T самого короткого дня в пункте, расположенном на поверхности Земли, от его широты φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. Землю можно считать шаром, ось вращения которого образует с плоскостью движения Земли вокруг Солнца известный угол α.

81. 300 человек выстроены в прямоугольник 30×10 (30 человек в каждой шеренге и 10 человек в каждой колонне). Из каждой шеренги выбрали самого высокого; самым низким из этих 10 человек оказался Петров. Затем из каждой колонны выбрали самого низкого; самым высоким из них оказался Иванов. Кто выше: Иванов или Петров?

82. Числа 1, 2, 3, ..., 81 расставляют в таблицу 9×9 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в пятом столбце?

83. В таблицу $n \times n$ расставлены целые неотрицательные числа. Известно, что если на пересечении строки и столбца стоит 0, то сумма остальных $2n-1$ чисел в образуемом ими «кресте» не меньше n. Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.

84. Решите систему уравнений

$$x_1 + \sqrt{x_2} = 1,\ \ x_2 + \sqrt{x_3} = 1,\ \ldots,\ x_8 + \sqrt{x_9} = 1,\ \ x_9 + \sqrt{x_1} = 1.$$

85. Двое играют в такую игру. Перед ними две кучки спичек. Один из них выбрасывает какую-нибудь кучку, а оставшуюся разбивает на две. Второй снова выбрасывает одну из кучек, а другую делит на две и так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход из-за того, что в каждой кучке осталось по одной спичке. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер, если вначале в одной кучке было 19 спичек, а в другой 88?

86. Имеется несколько кучек камней. Двое играют в игру, ход которой состоит в том, что игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Ходы делаются поочередно до тех пор, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как должен играть начинающий, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней?

87. Среди n одинаковых по виду монет могут быть одна или две фальшивых, отличающихся от остальных по весу (но может не быть и ни одной фальшивой; если фальшивых две, то они между собой равны по весу). За три взвешивания на чашечных весах без гирь нужно определить, есть ли фальшивые монеты и какие монеты тяжелее — фальшивые или настоящие. Как это сделать, если: а) $n = 8$; б) n — любое целое число, $n > 8$?

88. N друзей одновременно узнали N новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится один час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? Укажите ответ, если: а) $N = 64$, б) $N=55$, в) $N=100$.

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР
(март 1988 г.)

Задачи 1—7 предлагались ученикам 7—8 класса, задачи 8 — 12 — ученикам 9 — 10 класса.

1. a, b и c — целые числа. Докажите, что если $a + b = c$, то $a^4 + b^4 + c^4$ — удвоенный квадрат целого числа.

2. Дан треугольник ABC. Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

3. Решите систему

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5. \end{cases}$$

4. В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г и т. д. (все степени числа 2), причем среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили некоторое количество гирь, так что наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны. Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.

5. Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы через каждую точку проходило ровно 1988 окружностей?

6. Рассматривается последовательность слов из букв A и B. Первое слово — «A», второе — «B», k-е получается приписыванием к $(k-2)$-му слову справа $(k-1)$-го, так что начало последовательности имеет вид «A», «B», «AB», «BAB», «$ABBAB$»... Может ли в последовательности встретиться «периодическое» слово, т. е. слово вида $PP \ldots P$, где P — некоторое слово, повторенное по крайней мере дважды?

7. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные» ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

8. При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой 6 точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают 5 равных отрезков?

9. Про многочлен с целыми коэффициентами известно, что 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что найдется коэффициент, который меньше -1.

10. Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может прочитать список из нескольких номеров (возможно — из одного) и попросить их владельцев поднять руки. Какое наименьшее число списков он должен огласить, чтобы узнать номер билета каждого ученика? (Учеников не обязательно 30.)

11. Куб $20 \times 20 \times 20$ составлен из 2000 кирпичей размером $2 \times 2 \times 1$. Докажите, что его можно проткнуть иглой так, чтобы игла прошла через куб и не уткнулась в кирпич.

12. Рассматривается последовательность слов, состоящая из букв A и B. Первое слово в последовательности — «A», k-е слово получается из $(k-1)$-го с помощью следующей операции: каждое A заменяется на AAB, каждое B — на A. Легко видеть, что каждое слово является началом следующего, тем самым получается бесконечная последовательность букв:

$$AABAABAAABAABAAAB\ldots$$

а) На каком месте в этой последовательности встретится 1000-я буква A?

б) Докажите, что эта последовательность непериодическая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Сборники олимпиадных задач и книги об олимпиадах

1. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975.
2. Белоусов В. Д., Изман М. С., Солтан В. П., Чиник Б. И. Республиканские математические олимпиады — Кишинев: Штиинца, 1986.
3. Брудно А. Л., Каплан А. И. Олимпиады по программированию для школьников. — М.: Наука, 1985.
4. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1986.
5. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. — М.: Учпедгиз, 1963.
6. Васильев Н. Б., Савин А. П. Избранные задачи математических олимпиад. — М.: Изд-во МГУ, 1968.
7. Венгерские математические олимпиады. — М.: Мир, 1976.
8. Вышенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. — Киев: «Вища школа», 1984.
9. Задачи Московских математических олимпиад/Сост. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. — М.: Просвещение, 1986.
10. Избранные задачи (из журнала American Mathematical Monthly). — М.: Мир, 1977.
11. Математические олимпиады: Сб. статей/Под ред. А. М. Абрамова. — М.: Просвещение, 1988.
12. Морозова Е. А., Петраков И. С. Международные математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1976.
13. Сборник задач московских математических олимпиад/Сост. Леман А. А. — М.: Просвещение, 1965.
14. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников. — М.: Просвещение, 1982.
15. Польские математические олимпиады. — М.: Мир, 1978.
16. Олимпиады, алгебра, комбинаторика/Под ред. Л. Я. Савельева. — Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1979.
17. Физико-математические олимпиады/Сост. Брук Ю. М., Савин А. П. — М.: Знание, 1977.

Книги из серии «Библиотечка физико-математической школы». — М.: Наука

18. Башмаков М. И. Уравнения и неравенства. — 1976.
19. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. — 1978.

20. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. — 1973.
21. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики. —1973.
22. Кириллов А. А. Пределы. — 1973.
23. Васильев Н. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Савин А. П. Математические соревнования (геометрия). — 1974.

Книги из серии
«Популярные лекции по математике». — М.: Наука

24. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — 1983.
25. Виленкин Н. Я. Метод последовательных приближений. — 1968.
26. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. — 1983.
27. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. — 1969.
28. Коровкин П. П. Введение в неравенства. — 1983.
29. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. — 1983.
30. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — 1979.

Книги из серии
«Библиотека математического кружка»

31. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. I, II. — М.: Наука, 1986.
32. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. — М.: Физматгиз, 1962.
33. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1965.
34. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. — М.: Наука, 1967.
35. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). — М.: Гостехиздат, 1954.
36. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.
37. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974.
38. Яглом И. М. Геометрические преобразования. Ч. I, II. — М.; Л.: Гостехиздат, 1956.
39. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. — М.; Л.: Гостехиздат, 1954.
40. Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — М.: Гостехиздат, 1954.
41. Зарубежные математические олимпиады//Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др./Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987.

Книги из серии «Библиотечка «Квант»

42. Александров П. С. Введение в теорию групп. — 1980.
43. Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М. Задачи по математике (алгебра и анализ). — 1982.
44. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — 1982.
45. Занимательно о физике и математике/Сост. Кротов С. С. и Савин А. П.; Под ред. Л. Г. Асламазова. — 1987.
46. Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия. — 1988.
47. Оре О. Приглашение в теорию чисел. — 1980.
48. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — 1986.
49. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. — 1986.

Учебники, монографии

50. Башмаков М. И. Математика: Экс. учеб. пособие для СПТУ. — М.: Высшая школа, 1987.
51. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.
52. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.
53. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1972.
54. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.
55. Зыков А. А. Введение в теорию графов. — М.: Наука, 1987.
56. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. — М.: Наука, 1987.
57. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 2. Геометрия. — М.: Наука, 1987.
58. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения/Под ред. К. А. Рыбникова. — М.: Наука, 1982.
59. Математическое просвещение. Вып. 1—6. — М.: Физматгиз, 1957—1962.
60. Пойа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1978.
61. Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи. М.: Наука, 1985.
62. Фаддеев Д. К. Лекции по высшей алгебре. — М.: Наука, 1984.
63. Харари Ф. Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1983.
64. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.

Статьи из журнала «Квант»

65. Болтянский В. Г. Шесть зайцев в пяти клетках. — 1977, № 2.
66. Васильев Н. Б. Расстановка кубиков. — 1972, № 4.
67. Васильев Н. Б., Гальперин Г. А. Упаковка квадратов. — 1973, № 4.

68. Васильев Н. Б., Зелевинский А. В. Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения. — 1973, № 4.
69. Васильев Н. Б., Толпыго А. К. Плавные последовательности. — 1977, № 6.
70. Гальперин Г. А., Гальперин В. М. Освещение плоскости прожекторами. — 1981, № 11.
71. Гутенмахер В. Л. Косоугольные координаты и области Дирихле. 1972, № 4.
72. Лодкин А. А. Функциональное уравнение на сфере. — 1977, № 6.
73. Ионин Ю. И., Плоткин А. И. Среднее значение функции. — 1977, № 7.
74. Тоом А. Л. Из жизни единиц. — 1977, № 4.
75. Фрейвальд Р. В. Переключательные схемы. — 1972, № 2.
76. Тихомиров В. М. Об одной олимпиадной задаче. — 1983, № 1.
77. Фомин С. В. Билеты и ящики. — 1978, № 5.

Информация о всероссийских и всесоюзных олимпиадах в журнале «Математика в школе»

78. Н. А. Ермолаева, Л. М. Пашкова, Т. А. Сарычева, М. И. Башмаков, И. Н. Бернштейн, Н. Б. Васильев, Г. А. Гальперин, В. Л. Гутенмахер, Ю. В. Нестеренко, И. С. Петраков, А. С. Пономаренко, А. М. Слинько и др. 1961, № 5; 1962, № 5; 1964, № 6; 1965, № 5; 1966, № 6; 1967, №5; 1968, № 5; 1969, № 4; 1970—1973, № 5; 1974—1979, № 6; 1981, № 6; 1982, № 6; 1984, № 5; 1985, № 6.

Информация о всесоюзных олимпиадах в журнале «Квант»

79. В. Л. Гутенмахер, И. Н. Клумова, М. Л. Смолянский, Н. Х. Розов и др. 1970, № 5; 1971, № 11; 1972, № 10; 1973, № 9; 1974, № 10; 1975, № 11; 1976, № 11; 1977, № 11; 1978, № 10; 1979, № 11.
80. В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, И. Н. Клумова, Л. П. Купцов, А. М. Слинько, С. В. Резниченко и др. 1980—1987, № 11.
81. Н. Н. Константинов. Шестой турнир городов. 1985, № 11.

СПИСОК АВТОРОВ ЗАДАЧ

Здесь мы постарались упомянуть тех, кто предложил наиболее оригинальные задачи и чье творчество существенно повлияло на стиль олимпиад. Как правило, очень трудно установить истинных авторов той или иной задачи — многие факты элементарной математики многократно переоткрываются; окончательный вид задача приобретает обычно в результате коллективной работы жюри. Этот список основан на публикациях об олимпиадах [78—80] и частично на наших воспоминаниях.

Агафонов Б. Г. 280
Агаханов Н. Х. 435, 449
Алексеев В. Б. 179 (теннис)
Аиджанс А. В. 339 (парабола), 344, 421, 441, 458
Арнольд В. И. 81, 406 (черные и белые области)
Батырев В. В. 269
Башмаков М. И. 66 (турист), 82 (самолет), 157 (области Дирихле)
Берзиньш А. А. 240, 266, 340 (таблица), 350, 383 (ряд трехчленов), 401, 409, 413, 446
Берник В. И. 436
Бернштейн И. Н. 218, 242 (игра с многочленом), 250 (слона и гири), 268
Болотов А. А. 394
Бородин О. В. 271 (парламент)
Васильев Н. Б. 49 (жук и соты), 83 (игра в сумму), 108, 143, 179, 188, 225
Вайнтроб А. Ю. 294
Гальперин Г. А. 131, 139, 140, 153, 176, 183
Гашков С. Б. 208, 334
Гервер М. Л. 193, 199, 202
Гейн А. Г. 216
Гинзбург Б. Д. 26 (минимум перевозок), 187
Григорян А. А. 343
Гринберг В. С. 219 (седловая точка), 283
Гуревич Г. А. 231 (универсальная перестановка)
Гусятников П. Б. 348 (периметр тетраэдра)
Гутенмахер В. Л. 8, 16, 145, 243 (гномы), 260 (автоматы и карточки), 276 (преобразование Лоренца)
Дубровский В. Н. 261
Дужин С. А. 425
Егоров А. А. 11, 239, 282
Ивлев Б. М. 105, 144, 166, 204, 426, 456
Ионин Ю. И. 126, 137 (из 200 чисел — 100), 168 (игра с числами)

Задачи Турнира городов (с 278—279) предложили А. В. Анджанс (6 и 11), Н. Б. Васильев (5), В. М. Гальперин (12), Э. Г. Готман, (8), Л. Д. Курляндчик (9), В. Ю. Протасов (2), Л. Тутеску (3), В. С. Шевелев (7).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

N — множество натуральных чисел

Z — множество целых чисел

R — множество действительных (вещественных) чисел

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A

$A \cap B$ — пересечение (общая часть) множеств A и B

$A \cup B$ — объединение множеств A и B

$a_1 a_2 \ldots a_n$ — запись n-значного числа в десятичной системе (или в системе с другим основанием, П3)

$a \equiv b \pmod m$ — (a сравнимо с b по модулю m) остатки целых чисел a и b при делении на m равны; разность $a - b$ делится на m

$n!$ — (n факториал) произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$; $0! = 1! = 1$

C_n^k — биномиальный коэффициент $n!/(k!(n-k)!)$; см. П6, П10

$[x]$ — целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x)

$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \max\limits_i x_i$ — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \min\limits_i x_i$ — наименьшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ — сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

AB — отрезок с концами A, B; длина этого отрезка; луч с началом A, проходящий через B; прямая, проходящая через точки A и B

$AB : CD = AB/CD$ — отношение (длин) отрезков AB и CD

$u = \overrightarrow{AB}$ — вектор с началом A и концом B

$u \cdot v = uv$ — скалярное произведение векторов u и v

$\angle ABC\,(\angle(u, v))$ — угол ABC; величина этого угла (величина угла между векторами u и v)

$\smile{AB}\,(\smile{AMB})$ — дуга с концами A и B (проходящая через точку M)

$\triangle ABC$ — треугольник с вершинами A, B, C

$\triangle ABC = \triangle KLM$ — треугольники ABC и KLM равны (конгруэнтны)

$\triangle ABC \sim \triangle KLM$ — треугольники ABC и KLM подобны

S_{ABC} (S_{ABCD}) — площадь треугольника ABC (четырехугольника $ABCD$).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Васильев Николай Борисович
Егоров Андрей Александрович

ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Библиотека математического кружка
Выпуск 18

Заведующий редакцией *Н. А. Угарова*
Редактор *А. П. Савин*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *Н. Б. Румянцева, Н. Д. Храпко*

ИБ № 32657

Сдано в набор 03.12.87. Подписано к печати 06.06.88. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,54. Уч.-изд. л. 16,6. Тираж 400 000 экз. (1-й завод 1—200 000 экз.). Заказ № 810. Цена 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Н. Б. Васильев, А. А. Егоров

ЗАДАЧИ всесоюзных математических ОЛИМПИАД