№641 Лапко А.Ф.

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 6

Е. Б. ДЫНКИН и В. А. УСПЕНСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БЕСЕДЫ

ЗАДАЧИ О МНОГОЦВЕТНОЙ РАСКРАСКЕ

ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

11-3-1

Редактор *А. З. Рывкин.*

Технический редактор *Р. А. Негримовская.* Корректор *Н. В. Казанская.*

Подписано к печати 23/VI 1952 г. Бумага 84×108/32. 4,5 бум. л. 14,76 печ. л.
15,46 уч.-изд. л. 42 000 тип. зн. в печ. л. Тираж 25 000 экз. Т-02144
Цена книги 4 р. 65 к. Переплёт 1 р. Номинал по прейскуранту 1952 г. Заказ № 3398.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ (ЦЕПИ МАРКОВА)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана по материалам одной из секций школьного математического кружка при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, работавшей в 1945/46 и 1946/47 учебных годах. Один из авторов был руководителем этой секции, другой — ее участником. Секция называлась секцией общего типа. На ее занятиях рассматривались вопросы из различных областей математики. Основной целью было не столько сообщить участникам новые сведения, сколько научить их активному, творческому отношению к математике. Наиболее удачные темы складывались в процессе самой работы секции. В предлагаемую книгу вошли — в значительно переработанном и расширенном виде — три такие темы: задачи о многоцветной раскраске карт, задачи из теории чисел, решаемые с помощью арифметики вычетов, и задачи из теории вероятностей, связанные с так называемыми случайными блужданиями.

Каждой из этих тем была посвящена целая серия последовательных занятий секции. Она начиналась обычно с задач, которые не требовали никаких новых понятий по своей формулировке, но решение которых должно было сразу ввести участников секции в новый круг вопросов. И в дальнейшем беседы руководителя тесно переплетались с задачами, которые давались в ходе самой беседы, иногда решались на месте, а чаще оставлялись для домашнего решения до следующего занятия. Значительная часть всего материала темы предлагалась в виде циклов связанных между собой задач [1]. На каждом занятии секции определенное время отводилось

[1]) Помимо того, на каждом занятии давалось достаточное число задач (типа первых трех выпусков «Библиотеки математического кружка»), не связанных непосредственно с текущей темой.

разбору решений, которые служили затем материалом для обобщений и выводов, делавшихся руководителем. В своих беседах руководитель излагал также более трудные вопросы, менее поддающиеся расчленению на отдельные задачи.

Форма беседы, прерывающейся постановкой задач, решение которых существенно для дальнейшего изложения, принята и в этой книге.

Для чтения первых двух разделов достаточно знания математики в объеме 7 классов средней школы; третий раздел требует несколько большей математической культуры. Книга рассчитана в основном на школьников старших классов, но может быть использована также в студенческих кружках на младших курсах.

Мы пользуемся случаем выразить нашу благодарность А. Н. Колмогорову, советы которого способствовали значительному улучшению книги. Мы приносим также благодарность Э. Э. Балашу, задачи которого легли в основу §§ 2 и 3 главы IV второго раздела. Наконец, мы признательны М. А. Наймарку и И. М. Яглому, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд замечаний. В заключение нам хотелось бы отметить тщательную работу нашего редактора А. З. Рывкина.

Е. Дынкин
В. Успенский

Март 1952 г.

УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Все три раздела независимы друг от друга, поэтому читать их можно в любом порядке; однако при этом следует помнить, что первый раздел является наиболее легким, а третий — наиболее трудным. Добавление к первому разделу содержит решение одной задачи, примыкающей по своему характеру к тематике этого раздела; впрочем, добавление может читаться независимо от первого раздела, так как для его понимания не нужно ничего, кроме определения правильной раскраски.

Каждый раздел посвящен одной теме; отдельные его части тесно связаны между собой. Поэтому каждый раздел надо читать последовательно, от начала до конца. Исключение составляют только главы II и IV второго раздела, отмеченные звездочками. Они несколько отступают от основного плана раздела и могут быть опущены при первом чтении без ущерба для понимания дальнейшего (глава II является по существу дополнением к главе I, а глава IV — дополнением к главе III).

Книга рассчитана на активную работу читателя. В каждый раздел входят в качестве его органической части задачи. Бо̀льшая часть задач группируется в циклы. Каждый цикл составляет единое целое. Чаще всего отдельные задачи, опираясь одна на другую, ведут читателя к окончательному результату, который содержится в заключительной задаче цикла (см., например, задачи 21—27, 38—41 первого раздела, задачи 84—88, 127—131 второго раздела и др.). Иногда объединяющей целью является не получение какого-нибудь определенного результата, а овладение новым методом (например, в задачах 11—14 первого раздела). Наконец, в небольшом числе случаев задачи носят характер тренировочных упражнений, которые должны помочь читателю овладеть новыми понятиями (задачи 57—64 второго раздела, задачи 186—188 третьего раздела и др.).

Приступая к решению задач, полезно просмотреть формулировки всех задач данного цикла. Рекомендуем читателю не заглядывать в решения, помещенные в конце книги, до тех пор пока он не решит все задачи цикла: решения, которые мы приводим, направят его на определенный путь, между тем, размышляя самостоятельно, он может притти к новым, оригинальным решениям. Практика школьного кружка показывает, что при этом иногда получаются более простые и изящные решения, нежели те, которые ожидались авторами задач. Различные циклы задач значительно отличаются друг от друга по своей трудности. Однако опыт университетского школьного кружка позволяет назвать неделю в качестве примерного среднего срока работы над одним-двумя циклами задач.

Вероятно, читателю не всегда удастся самостоятельно решить все задачи цикла. Если первые задачи решены, но в дальнейшем читатель наталкивается на трудности, которые ему никак не удается преодолеть, то полезно прочесть решения первых, уже решенных задач. Иногда это окажется достаточным, чтобы натолкнуть на решение задачи, ранее не поддававшейся усилиям. Если же трудности окажутся непреодолимыми, то следует ознакомиться с решением трудной задачи и после этого продолжать решение дальнейших задач.

Несмотря на фундаментальную роль задач, книга отнюдь не является задачником. Равноправную с задачами роль играет помещенный в ней теоретический материал. Взаимоотношение этого материала с задачами различно в различных главах книги. Иногда основное содержание составляют условия задач, и роль остального текста сводится лишь к тому, чтобы ввести необходимые понятия и подвести итоги (см., например, § 1 первого раздела, главу V второго раздела и др.). В других случаях (глава II второго раздела и почти весь третий раздел) ведущая роль принадлежит теоретическому материалу, задачам же отводится подчиненное место. Во всяком случае текст и задачи тесно связаны между собой и необходимо читать их подряд в том порядке, в каком они приведены в книге.

Существенную часть содержания книги составляют решения задач, сопровождающиеся часто выводами и замечаниями принципиального характера. С решениями следует ознакомиться независимо от того, насколько удалось справиться с задачами самостоятельно.

В заключение посоветуем читателю не жалеть времени на решение задач. Каждый цикл задач, каждая задача, решенные самостоятельно, будут обогащать арсенал средств, которыми располагает читатель. Одна самостоятельно найденная идея стоит десятка идей, усвоенных с чужих слов. Даже в том случае, когда настойчивые попытки решить задачу не приведут к успеху, потраченное время не пропадет даром: основательно поработав над задачей, вы будете читать ее решение совершенно другими глазами, будете искать причины своей неудачи и сумеете выделить среди рассуждений вспомогательного характера ту основную идею, которая обеспечивает успех.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ЗАДАЧИ О МНОГОЦВЕТНОЙ РАСКРАСКЕ

Различные страны на географической карте окрашиваются для удобства в разные цвета. При этом обычно не требуется, чтобы каждая страна имела свой особый цвет. Достаточно, чтобы в различные цвета были окрашены соседние страны, т. е. страны, имеющие общую границу, например страны S_1 и S_2 на рис. 1 [1]). Такую раскраску карты мы будем на-

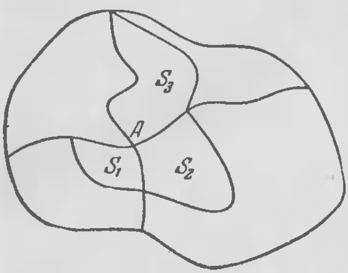


Рис. 1.

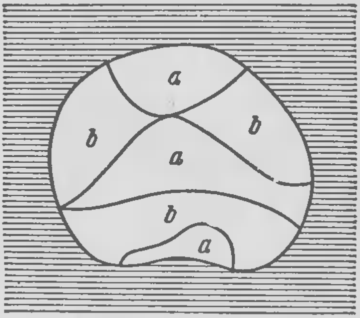


Рис. 2.

зывать *правильной*. Естественно поставить вопрос, какое число красок нужно иметь для того, чтобы правильно раскрасить данную карту. Ясно, что нас устроит число красок, равное числу стран карты; в этом случае мы просто каждую страну выкрасим в свой цвет. Однако мы не удовлетворимся таким решением: нас будет интересовать *минимальное* число красок, достаточное для правильной раскраски данной карты. Легко построить карту, для которой таким минимальным числом красок является 2 (рис. 2).

[1]) Страны S_1 и S_3 не являются соседними, хотя и соприкасаются в точке A (общей *границы* у них нет).

Карта на рис. 2 является картой острова, расположенного в море, которое показано штриховкой. Море мы не закрасили ни одной из красок a и b. Однако обычно море на картах также закрашивается, причем требуется, чтобы прибрежные страны, т. е. страны, граничащие с морем, были окрашены в отличный от моря цвет. Море, таким образом, ничем не отличается для нас от простой страны. То, что оно

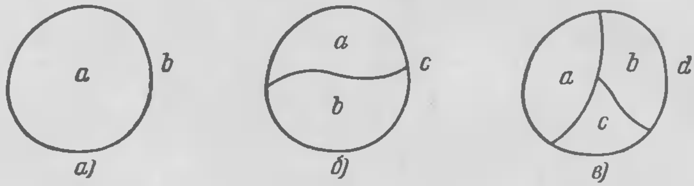


Рис. 3.

не ограничено, для нас не существенно. Поэтому в дальнейшем мы не будем выделять море особо, а включим его в число стран. Карты, которые мы будем рассматривать, не будут, таким образом, картами островов; мы будем считать их распространенными на всю плоскость. При такой точке зрения карта на рис. 2 уже не может быть правильно раскрашена двумя красками.

Вернемся теперь к вопросу о минимальном числе красок, достаточном для правильной раскраски карты. На рис. 3 изображены карты, для которых такими числами являются соответственно 2, 3, 4. На этом наши примеры обрываются. До сих пор не построена карта, для которой минимальное число красок было бы 5 или больше, иными словами, которую нельзя было бы правильно раскрасить четырьмя красками. Есть предположение, что всякую карту можно правильно раскрасить четырьмя красками (в этом состоит известная «проблема четырех красок»). Однако это никем еще не доказано. С другой стороны, доказано, что всякую карту можно правильно раскрасить пятью красками (мы покажем это в § 4). Таким образом, мы можем высказать только следующие два утверждения, досадный пробел между которыми ничем не заполнен:

Не всякую карту можно правильно раскрасить **т р е м я** красками (см. рис. 3, *в*).

Всякую карту можно правильно раскрасить пятью красками.

В следующих параграфах мы займемся вопросом о том, для каких карт достаточно двух красок (§ 1) и трех красок (§ 2). В § 3 мы постараемся вывести некоторые критерии для четырехцветной раскраски, в § 4 — докажем теорему о пяти красках.

§ 1. Задача о двух красках

1. На плоскости проведено n прямых. Докажите, что карту, ими образованную, можно правильно раскрасить двумя красками (рис. 4).

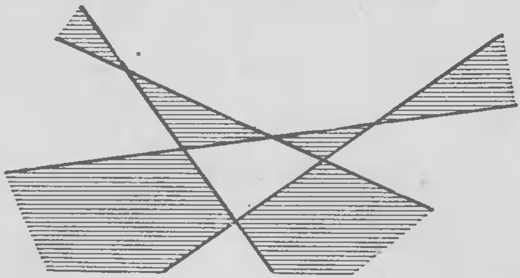


Рис. 4.

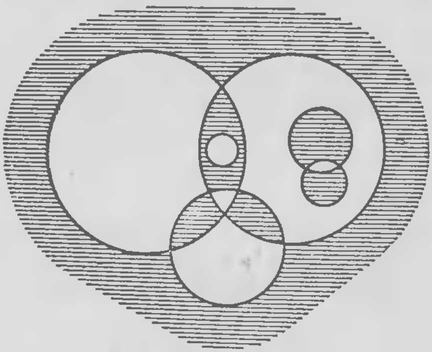


Рис. 5.

2. На плоскости проведено n окружностей. Докажите, что карту, ими образованную, можно правильно раскрасить двумя красками (рис. 5).

3. Плоскость разбита на треугольники. При этом любые два треугольника либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону [1]). В вершинах этих треугольников расставлены цифры 0, 1, 2 так, что вершины, принадлежащие одной и той же стороне, нумеруются различными цифрами (такую нумерацию мы будем называть *правильной*) (рис. 6). Докажите, что в таком случае полученную карту можно правильно раскрасить двумя красками.

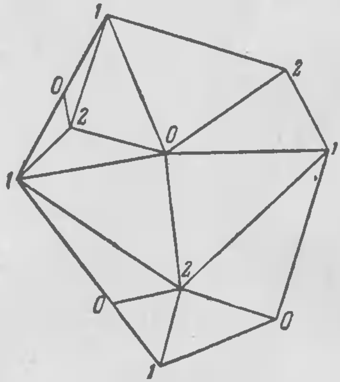


Рис. 6.

4. Если на карте имеется страна, у которой число границ не делится на m, в то время как для всех остальных стран число границ делится на m, то такую карту нельзя правильно раскрасить двумя красками [2]).

---

[1]) Разбиение на треугольники, удовлетворяющее этим условиям, называется *триангуляцией*. Примеры разбиений, не являющихся триангуляциями, изображены на рис. 7.

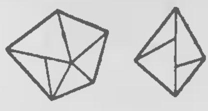


Рис. 7.

[2]) Точное определение границы читатель найдет на стр. 17.

Задачи на шахматной доске. Обычная раскраска шахматной доски может служить примером правильной раскраски (если не учитывать внешней области). Задачи на шахматной доске, которые мы приводим, помогут нам впоследствии решить общую задачу о двух красках.

Шахматный конь может перейти за один ход с поля S на любое из полей S_1—S_8 (рис. 8). Ладья по правилам шахматной игры может попасть одним ходом с поля S на любое поле той же вертикали или на любое поле той же горизонтали (рис. 9). При решении задач условимся считать, что

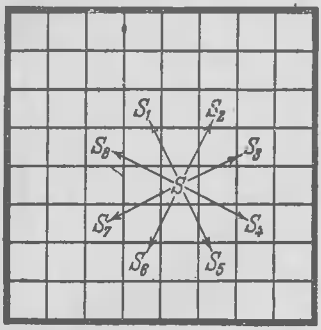


Рис. 8.

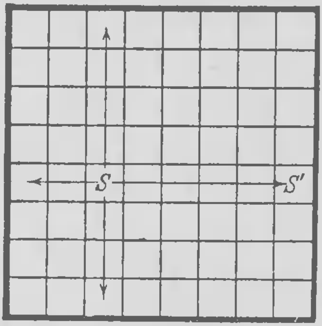


Рис. 9.

если ладья перешла с поля S на поле S' (рис. 9), то она побывала и на всех промежуточных полях.

5. Обойдите конем все поля шахматной доски, состоящей из 5×5 клеток, не побывав ни на каком поле два раза.

6. Занумеруйте поля 25-клеточной шахматной доски в том порядке, в каком вы обошли их конем в предыдущей задаче. Заштрихуйте поля, получившие четные номера. Укажите, какая получится раскраска, если проделать те же операции не на 25-клеточной доске, а на шахматной доске с произвольным числом клеток, которую можно обойти конем так, как указано в задаче 5.

7. Можно ли обойти конем по одному разу все поля 49-клеточной доски и последним ходом попасть на поле, соседнее с исходным?

8. Докажите, что нельзя обойти конем по одному разу все поля 49-клеточной доски, если выйти с поля S (рис. 10).

9. Конь сделал n ходов и вернулся на исходное поле. Докажите, что n — число четное.

10. Докажите, что нельзя пройти ладьей из угла A 64-клеточной доски в противоположный угол B, обойдя

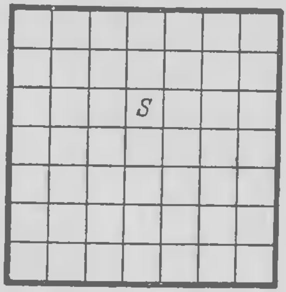


Рис. 10.

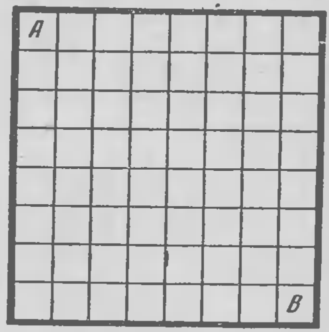


Рис. 11.

все поля и не побывав ни на каком поле дважды (рис. 11).

---

11. Можно ли выложить в цепь все 28 костей домино так, чтобы на одном из концов цепи оказалось шесть, а на другом пять очков?

12. Каждый из людей, когда-либо живших на земле, сделал в своей жизни некоторое вполне определенное число рукопожатий. Докажите, что число людей, сделавших н е ч е т н о е число рукопожатий, ч е т н о [1].

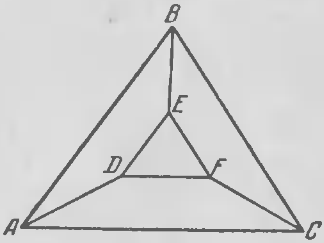


Рис. 12.

13. На собрании присутствовало 225 человек. Знакомые обменивались рукопожатиями. Докажите, что хотя бы один из участников собрания пожал руку ч е т н о м у числу знакомых [1].

[1]) Нуль — четное число, так что человек, ни с кем не здоровавшийся за руку, сделал четное число рукопожатий.

14. На рис. 12 изображено шесть точек A, B, C, D, E, F, причем каждая из этих точек соединена с тремя из остальных пяти. Докажите, что если дано не шесть, а пять точек, то нельзя провести кривые так, чтобы каждая из этих пяти точек была соединена ровно с тремя из остальных.

Начертим на плоскости какую-нибудь сеть кривых. Если из некоторой точки этой сети можно двигаться по ее кривым в k различных направлениях, то мы будем говорить, что *кратность* этой точки равна k. Например, для сети, изображенной на рис. 13, кратность точки A равна 1, кратности

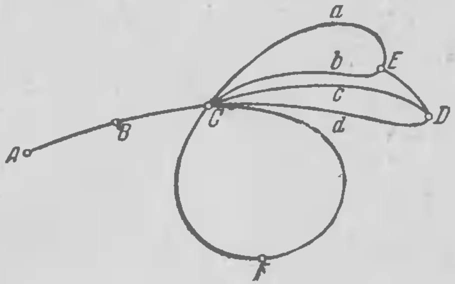


Рис. 13.

точек B и F равны 2, кратности точек E и D равны 3 и, наконец, кратность точки C равна 7. Мы будем называть *вершинами* сети те точки, кратность которых не равна 2. Сеть, приведенная нами в качестве примера, имеет всего четыре вершины A, E, D и C. Участок какой-либо кривой из сети между двумя последовательными вершинами называется *границей*. Каждая граница, таким образом, содержит две вершины (в отдельных случаях эти две вершины могут сливаться в одну). На нашей сети (рис. 13) семь границ ABC, ED, CaE, CbE, CcD, CdD и CFC. В последнем случае две вершины, заключающие между собой границу CFC, совпадают. Число вершин сети мы всегда будем обозначать v, а число границ — g.

15. Построить сеть кривых, для которой

а) $v=3$, $g=5$; б) $v=7$, $g=11$.

16. Пусть сеть кривых имеет g границ и v вершин с кратностями $k_1, k_2, \ldots, k_v$. Докажите, что

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_v = 2g.$$

17. Докажите, что в любой сети кривых число вершин, имеющих нечетную кратность, четно.

Не всякая сеть кривых может быть названа картой. На карте каждая граница обязательно разделяет две соседние

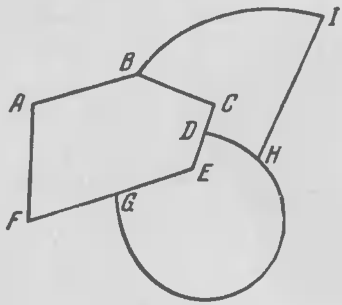


Рис. 14.

страны. Поэтому, например, на карте не может быть вершин кратности 1 (на рис. 13 граница ABC, исходящая из вершины A кратности 1, не разделяет никакие две страны). Число стран карты мы всегда будем обозначать через s.

18. Построить карту, для которой

а) $v = 5, \quad g = 8, \quad s = 5;$
б) $v = 11, \quad g = 19, \quad s = 10;$
в) $v = 6, \quad g = 12, \quad s = 9.$

19. Карта имеет g границ и s стран с числами границ $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Докажите, что

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_s = 2g.$$

20. Докажите, что в любой карте число стран, имеющих нечетное число границ, четно.

Мы условились называть вершинами те точки сети кривых, кратность которых не равна 2. Однако иногда бывает удобным считать вершинами и некоторые точки кратности 2. Границей попрежнему называется участок какой-либо кривой из сети между двумя последовательными вершинами. Например, карта на рис. 14 имеет девять вершин A, B, C, D, E, F, G, H, I и 11 границ AB, BC, CD, DE, EG, GF, FA, BI, IH, HD, HG.

Легко проверить, что утверждения и решения всех задач, формулировавшихся ранее, остаются верными и при новом понимании слова «вершина».

Задача о двух красках для произвольной карты. По аналогии с шахматной доской введем ладью на произвольной карте. Ладья ходит по странам, при этом она может за один ход перейти из любой страны в любую соседнюю (из S в S_1—S_5, рис. 15).

21. Обойдите ладьей все страны карты, изображенной на рис. 16, не побывав дважды ни в одной стране. Занумеруйте страны в том порядке, в каком вы их обошли. Заштрихуйте страны, получившие четные номера.

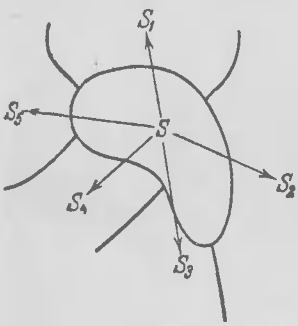


Рис. 15.

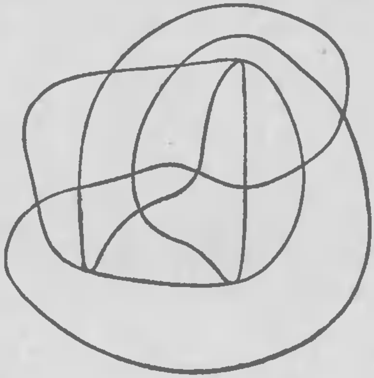


Рис. 16.

22. Докажите, что нельзя обойти ладьей все страны карты, изображенной на рис. 17, не побывав ни в какой стране дважды.

23. Карта правильно раскрашена двумя красками. Докажите, что все ее вершины имеют четную кратность.

24. Все вершины карты имеют четную кратность. Ладья обошла ряд стран этой карты, не побывав ни в одной из них дважды, и вернулась в исходную страну. Докажите, что она сделала четное число ходов.

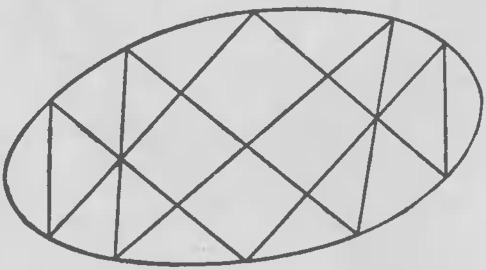


Рис. 17.

25. Все вершины карты имеют четную кратность. Ладья обошла ряд стран этой карты и вернулась в исходную страну (при этом она могла в некоторых странах побывать и более одного раза). Докажите, что она сделала четное число ходов.

26. Все вершины карты имеют четную кратность. Ладья пришла из страны S_0 в страну S_1 одним путем, затратив p ходов, и другим, затратив q ходов. Докажите, что числа p и q оба четные или оба нечетные.

27. Все вершины карты имеют четную кратность. Докажите, что ее можно правильно раскрасить двумя красками (сравните задачу 23).

Задачи 23 и 27 дают следующую теорему, полностью решающую задачу о правильной раскраске двумя красками:

Карту можно правильно раскрасить двумя красками в том и только в том случае, если все ее вершины имеют четную кратность.

§ 2. Трехцветная раскраска

28. На плоскости нарисовано n окружностей. В каждой окружности проведено по хорде так, что хорды двух различных окружностей имеют между собой самое большее одну общую точку. Докажите, что получившуюся карту

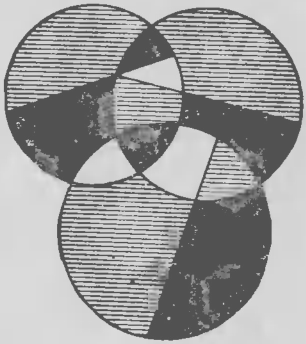


Рис. 18.

(пример такой карты см. на рис. 18) всегда можно правильно раскрасить тремя красками.

Задачи на шестиугольной доске. Шестиугольная доска, изображенная на рис. 19, имеет такое же значение для задачи о трех красках, как шахматная доска — для задачи о двух красках. Она в отличие от обычной шахматной доски состоит не из квадратов, а из правильных шестиугольников и правильно раскрашивается тремя красками: белой, черной и красной (рис. 20) [1]). Можно было бы придумать правила игры на такой доске по аналогии с правилами обычной шахматной игры. Мы ограничимся тем, что введем одну фигуру, которую назовем *верблюдом* [2]). Одним ходом верблюд может перейти на одно поле в любом из трех направлений, указанных стрелками на рис. 19: вверх, вниз влево или вниз вправо. Напри-

[1]) На рис. 20 красный цвет показан горизонтальной штриховкой.
[2]) Такое название эта фигура получила в школьном математическом кружке.

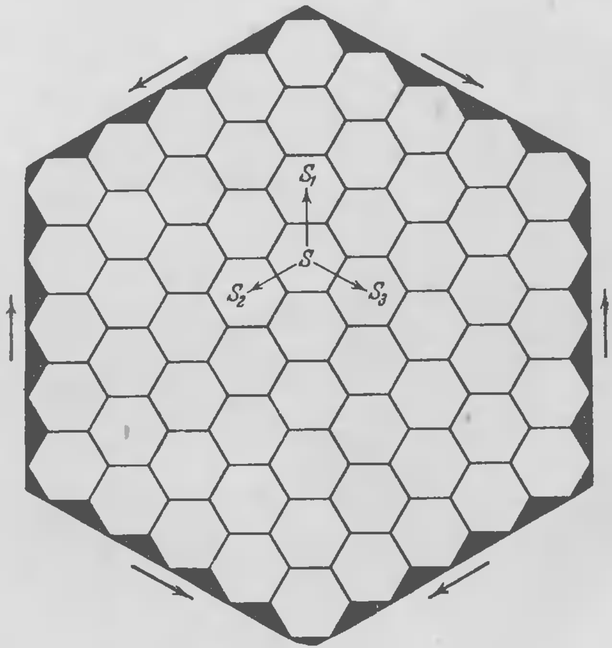


Рис. 19.

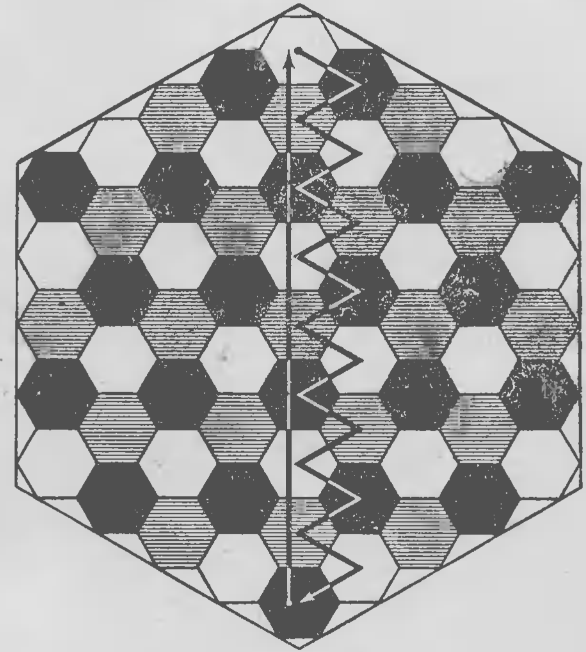


Рис. 20.

мер, с поля S он может перейти на любое из полей S_1, S_2, S_3. На рис. 20 показан путь верблюда из нижнего угла доски в верхний и из верхнего угла в нижний.

Наша доска, состоящая из шестиугольников, сама имеет форму шестиугольника. Сторона этого большого шестиугольника — сторона доски — может содержать различное число шестиугольных полей (на рис. 19 сторона доски состоит из пяти шестиугольников).

29. Сосчитайте число полей шестиугольной доски, сторона которой образована пятью, шестью, m шестиугольниками.

30. Нарисуйте шестиугольную доску со стороной из трех шестиугольников. Выйдите верблюдом из центра этой доски и обойдите все поля, не побывав два раза ни на каком поле.

31. Занумеруйте поля шестиугольной доски в том порядке, в каком вы обошли их верблюдом в задаче 30. Окрасьте черной краской поля с номерами, кратными трем, и красной краской поля, номера которых при делении на три дают в остатке 1. Какая у вас получилась раскраска? Какая получится раскраска, если проделать те же операции на другой доске, которую можно обойти верблюдом так, как указано в задаче 30?

32. Верблюд сделал n ходов и вернулся на исходное поле. Докажите, что n делится на 3.

33. Докажите, что нельзя обойти верблюдом по одному разу все поля шестиугольной доски со стороной 3, если выйти из углового поля.

34. Можно ли, обойдя верблюдом по одному разу все поля шестиугольной доски со стороной m, попасть последним ходом на поле, соседнее с исходным?

Отметим центр каждого из полей шестиугольной доски, изображенной на рис. 19. Соединим отрезком центры каждой пары соседних полей. Если теперь уничтожить контуры шестиугольных полей и оставить только отмеченные нами центры и соединяющие их отрезки, то получится схема, нарисованная на рис. 21. Точки на рис. 21 соответствуют полям доски рис. 19. Схема, которую мы начертили, весьма удобна для решения задач на ход верблюда (направления, по которым может ходить верблюд, обозначены стрелками).

35. Докажите, что невозможно обойти верблюдом все поля шестиугольной доски на рис. 19 (или, что все равно,

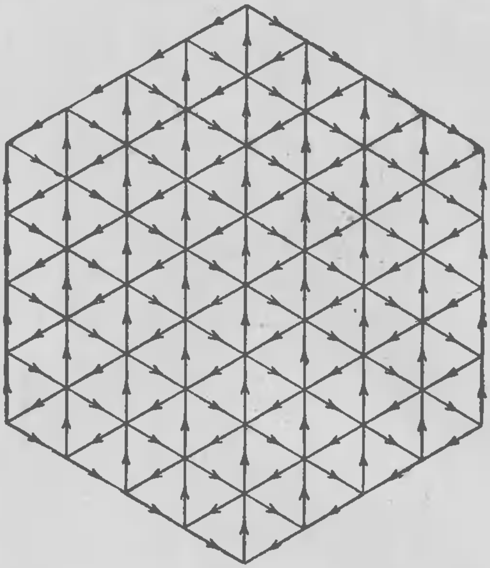


Рис. 21.

все точки схемы рис. 21), не побывав дважды на каком-нибудь поле.

На рис. 22 изображена система 25 точек, соединенных отрезками, на которых расставлены стрелки. Назовем теперь верблюдом фигуру, которая перемещается по точкам схемы, переходя за один ход из некоторой точки схемы по любому из направлений, указанных стрелками, в любую другую точку, соединенную отрезком с первой точкой. Мы видели, что безразлично, перемещать ли верблюда по полям шестиугольной доски или по точкам схемы рис. 21. В этом смысле схема рис. 21 и доска рис. 19 двойственны друг другу. На рис. 23

изображена доска, двойственная схеме рис. 22. Эта доска состоит из полей двух родов: восьмиугольников и квадратов. Если отметить в каждом из восьмиугольников и квадратов центр, соединить отрезками центры соседних полей и затем стереть контуры полей, то получится снова схема рис. 22.

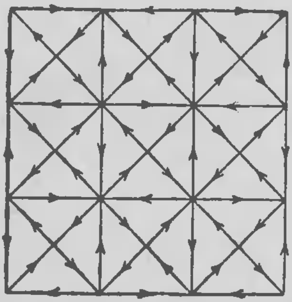


Рис. 22.

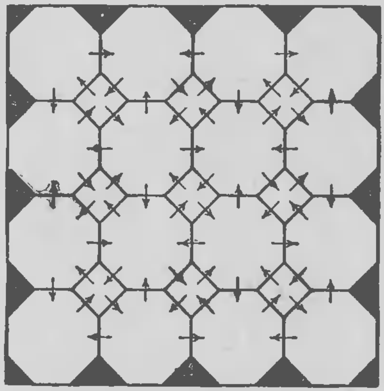


Рис. 23.

36. Обойдите верблюдом все точки схемы рис. 22, не побывав ни в какой точке два раза. Занумеруйте точки схемы в порядке следования верблюда. Замените каждый номер его остатком от деления на три. Раскрасьте черной краской те поля доски рис. 23, которым соответствуют точки схемы рис. 22, отмеченные цифрой 0. Раскрасьте красной краской поля, которым соответствуют точки, отмеченные цифрой 1.

37. Докажите, что нельзя обойти верблюдом по одному разу все поля доски рис. 23, если начинать обход с восьмиугольного поля.

Можно рассматривать верблюда на схемах, значительно более общих, чем схемы, изображенные на рис. 21 и 22. Напомним, что *триангуляцией* многоугольника называется такое его разбиение на треугольники, при котором любые два треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только одну общую вершину, либо имеют общую сторону (см. также сноску на стр. 14). Предположим, что некоторый многоугольник триангулирован (или даже вся плоскость триангулирована), и треугольники, на которые он разбит (соответственно — на которые разбита плоскость), правильно раскрашены двумя красками: белой и черной (см. пример на рис. 24). Назовем *верблюдом* фигуру, которая перемещается по сторонам и вершинам треугольников, переходя за один ход из вершины в одну из соседних[1]) вершин. При этом направление движения должно быть таким, чтобы по отношению к этому направлению черный треугольник оставался справа, а белый — слева от стороны, проходимой верблюдом (на рис. 24 возможные направления движения верблюда обозначены стрелками).

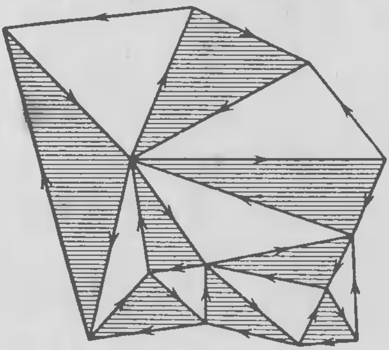


Рис. 24.

В отличие от задач предыдущих циклов нижеследующие задачи 38—41 ставятся не для какой-нибудь специальной схемы, а для произвольной схемы описанного нами типа.

38. Докажите, что верблюд может из любой вершины схемы попасть в любую другую вершину.

39. Верблюд сделал n шагов и вернулся в исходную вершину. Докажите, что n делится на 3 (см. задачу 4).

40. Пусть A и B — какие-нибудь две вершины схемы. Верблюд может перейти из A в B различными способами. Пусть при одном из таких способов число ходов равно p, а при другом — q (рис. 25). Докажите, что $p-q$ делится на 3.

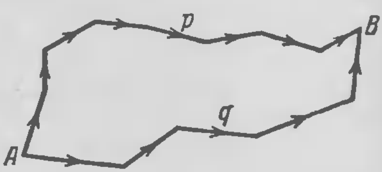


Рис. 25.

[1]) Две вершины называются *соседними*, если они принадлежат одной и той же стороне.

41. Многоугольник триангулирован (или плоскость триангулирована) и треугольники разбиения правильно раскрашены двумя красками. Докажите, что вершины всех треугольников можно занумеровать цифрами 0, 1, 2 так, чтобы любые две соседние вершины оказались занумерованными различными цифрами [1]) (сравните задачу 3).

Число красок, необходимое для правильной раскраски карты, очевидно, нисколько не зависит от размеров стран, от формы и длины границ. Оно определяется только взаим-

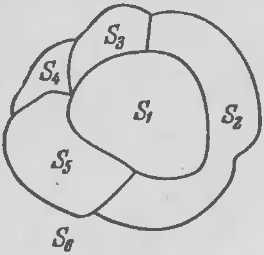


Рис. 26.

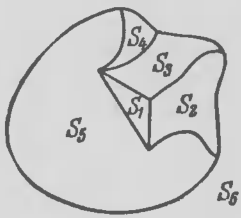


Рис. 27.

ным расположением стран, границ и вершин. Если нарисовать карту на резиновой пленке и как угодно неравномерно растягивать эту пленку (лишь бы она не разрывалась), то все карты, которые получатся из первоначальной карты, с нашей точки зрения, совершенно равносильны друг другу. Таковы, например, две карты, изображенные на рис. 26 и 27.

В формулировках задач 3 и 41 говорилось о картах, образованных прямолинейными треугольниками; однако решение этих задач нисколько не изменится, если вместо прямолинейных треугольников рассматривать треугольники с кривыми сторонами. Поэтому результат задачи 41 можно сформулировать так:

Карта состоит из стран, каждая из которых имеет ровно три границы [2]). *Тогда, если страны этой карты*

---

[1]) Напомним, что такую нумерацию мы условились называть *правильной.*

[2]) Такие стравы мы будем называть *треугольниками.* Вообще мы назовем страну *n-угольником*, если у нее *n* границ.

можно правильно раскрасить двумя красками, то ее вершины можно правильно занумеровать тремя цифрами.

Точно так же обобщается и результат задачи 3. Решение полностью сохраняется, так как два соседних треугольника

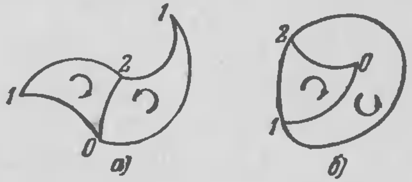


Рис. 28.

попрежнему имеют разную ориентацию, хотя теперь они могут уже граничить двумя разными способами, изображенными на рис. 28, *а* и *б*.

Двойственные карты. Рассмотрим карту, изображенную на рис. 29, и отметим внутри каждой ее страны точку — столицу этой страны. Столицы каждой пары соседних стран мы соединим железной дорогой (пунктирные линии на рис. 29),

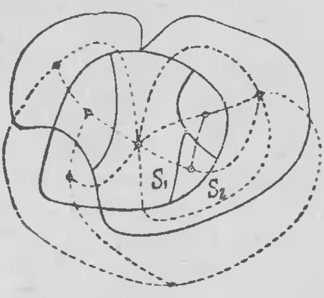


Рис. 29.

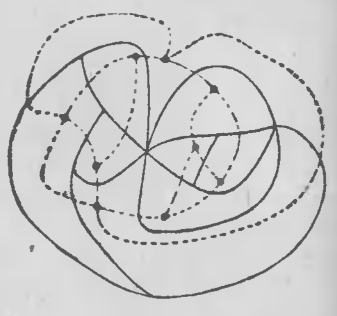


Рис. 30.

не выходящей за пределы этих двух стран и не проходящей ни через какую вершину. Если какие-нибудь две страны имеют несколько общих границ, как, например, страны S_1 и S_2 на рис. 29, то мы проведем между их столицами несколько железных дорог, по одной через каждую границу. Позаботимся еще о том, чтобы различные железные дороги не пересекали друг друга.

Заменим теперь на нашем рисунке все пунктирные линии сплошными и все сплошные пунктирными. У нас получится карта, изображенная на рис. 30. При этом первоначальная карта и карта железных дорог поменяются ролями: первоначальная карта станет картой железных дорог для своей карты железных дорог. Таким образом, две карты, изображенные на рис. 29 (или на рис. 30) одна пунктиром, другая сплошными линиями, играют вполне симметричные роли: каждая из них есть карта железных дорог для другой. Мы будем называть такие две карты *двойственными*[1]). Между двойственными картами существуют важные соотношения:

1) Каждая граница одной из карт пересекает ровно одну границу двойственной карты.

2) Каждая страна одной из карт содержит внутри себя ровно одну вершину двойственной карты.

Этим между элементами (странами, границами, вершинами) двух двойственных карт устанавливается взаимно однозначное соответствие [2]), причем странам одной из карт соответствуют вершины, вершинам — страны и границам — границы двойственной карты.

3) Соседним странам одной из карт соответствуют соседние вершины двойственной карты и обратно.

4) Если кратность некоторой вершины одной из карт равна k, то соответствующая этой вершине страна двойственной карты имеет то же число k границ, или, как мы условились говорить, является k-угольником.

Если мы попытаемся теперь строить схемы железных дорог для произвольных карт, то натолкнемся на неприятности двух родов:

---

[1]) Построение, посредством которого мы получили из карты рис. 19 карту рис. 21, отличается от построения, которое мы провели сейчас, только тем, что там мы не учитывали внешней области. Поэтому, чтобы получить карту, двойственную карте рис. 19, достаточно присоединить к карте рис. 21 еще одну вершину, соединив ее со всеми внешними вершинами этой карты. То же самое можно сказать о картах, изображенных на рис. 22 и 23.

[2]) То-есть каждому элементу одной из карт поставлен в соответствие один вполне определенный элемент двойственной карты.

а) Может случиться, что схема железных дорог вообще не будет картой в том смысле, как мы привыкли это понимать. Рассмотрим, например, схему железных дорог для карты, изображенной на рис. 31 (она нарисована отдельно на рис. 32). На этой схеме есть «границы» (AB и AC), ко-

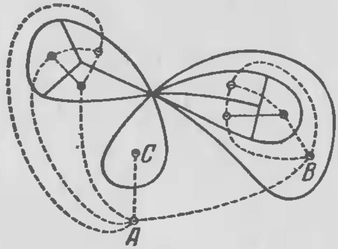


Рис. 31.

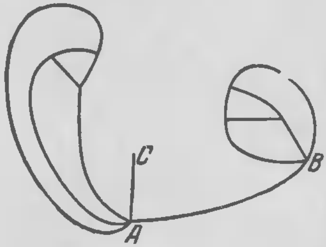


Рис. 32.

торые ничего не ограничивают: по обе стороны этих границ простирается одна и та же страна.

б) Схема железных дорог для карты, изображенной на рис. 33, является настоящей картой, но здесь внешняя область карты железных дорог содержит две вершины A и B первоначальной карты. Таким образом, двойственность между первоначальной картой и картой ее железных дорог здесь не имеет места.

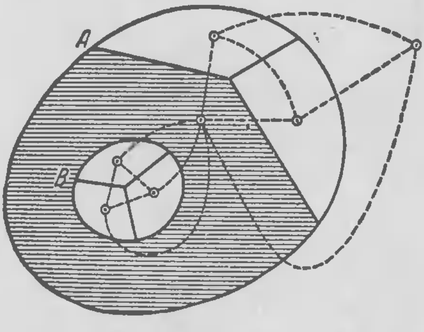


Рис. 33.

Неприятности б) можно избежать, если рассматривать только *связные* карты. При этом мы называем карту *связной*, если никакая страна не разделяет остальных стран на две или несколько не сообщающихся между собой групп. Иными словами, если мы нарисуем карту на листе бумаги, то, какую бы страну мы ни вырезали ножницами, оставшаяся часть не распадется на отдельные куски.

Карта рис. 33 не является связной («разделяющая» страна этой карты заштрихована). Связную карту можно определить еще и так: из любой вершины можно, двигаясь по границам, попасть в любую другую вершину.

Неприятности а) мы могли бы избежать тем же способом, что и неприятности б), просто исключив из рассмотрения карты, приводящие к этой неприятности. Однако мы пойдем по противоположному пути и введем в рассмотрение карты, подобные «карте» рис. 32, т. е. карты с неразделяющими границами. Такие карты почти нигде не встретятся нам в дальнейшем и мы вводим их только для того, чтобы не нарушать стройности принципа двойственности, который мы сейчас сформулируем для связных карт:

а) Схема железных дорог связной карты есть снова карта и притом связная.

б) Всякая связная карта является схемой железных дорог для своей карты железных дорог.

Таким образом, связная карта и карта ее железных дорог являются двойственными друг другу и для них выполняются все соотношения между двойственными картами, приведенные нами под номерами 1) — 4)[1].

Мы в состоянии высказать теперь следующую теорему, непосредственно следующую из свойства 3) двойственных карт:

Если страны некоторой карты можно правильно раскрасить n красками, то вершины двойственной карты можно правильно занумеровать n цифрами; обратно, если

[1]) Нетрудно усмотреть, что для того, чтобы утверждение 4) оставалось справедливым, при подсчете числа границ у данной страны каждую неразделяющую границу следует считать дважды. Так, например, страна, изображенная на рис. 34, является восьмиугольником (кратность соответствующей вершины A двойственной карты равна 8). С этой оговоркой остаются верными все задачи, касающиеся подсчета числа границ у стран, например задачи 19 и 20.

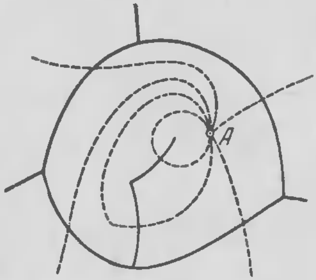


Рис. 34.

вершины некоторой карты можно правильно занумеровать n цифрами, то страны двойственной карты можно правильно раскрасить n красками[1]).

Трехцветная раскраска нормальных карт. *Нормальной картой* называется карта, на которой кратность каждой вершины равна 3. Примером нормальной карты может служить карта, изображенная на рис. 35. Значение нормальных карт будет выяснено в § 3.

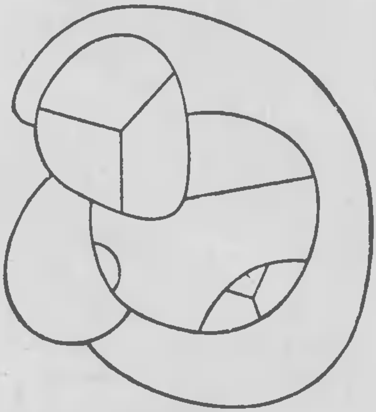


Рис. 35.

42. Докажите, что нормальную карту можно правильно раскрасить тремя красками в том и только в том случае, если все ее страны четноугольники (т. е. каждая страна имеет четное число границ).

Следует отметить, что теорема, сформулированная в задаче 42, не решает полностью задачи о правильной трехцветной раскраске, так как она касается лишь нормальных карт.

§ 3. О проблеме четырех красок. Теорема Волынского

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о четырехцветной раскраске карт (исчерпать его до конца нам, конечно, не удастся).

---

[1]) Заметим, что если карта содержит неразделяющую границу, то не имеет смысла говорить о ее правильной раскраске. В самом деле, в такой карте найдется страна, простирающаяся по обе стороны от одной из своих границ, т. е. страна, соседияя сама с собой; по точному смыслу определения правильной раскраски она должна быть выкрашена в цвет, отличный от цвета самой себя. В то же время для двойственной карты бессмысленно говорить о правильной нумерации: у такой карты обязательно будет вершина, являющаяся одновременно и началом и концом одной из своих границ, т. е. вершина, соседияя сама с собой.

Для решения общей задачи о четырех красках достаточно рассмотреть нормальные карты, ибо если мы умеем правильно раскрашивать четырьмя красками все нормальные карты, то мы можем раскрасить и все вообще карты. Дей-

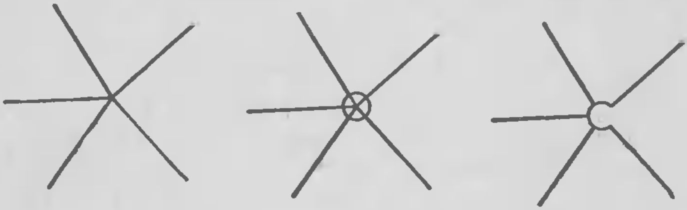


Рис. 36.

ствительно, окружим в произвольной карте каждую вершину, кратность которой более чем 3, маленьким кружочком, сотрем все границы, попавшие внутрь этого кружочка, и присоединим его внутренность к одной из прилегающих стран (рис. 36). Мы получим некоторую нормальную карту, причем, если ее можно правильно раскрасить четырьмя красками, то, очевидно, то же можно сделать и с первоначальной картой. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только нормальные карты.

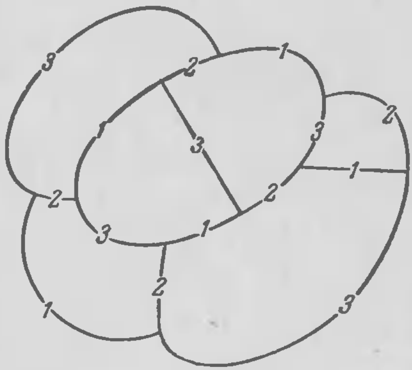


Рис. 37.

До сих пор мы рассматривали только правильную раскраску стран и правильную нумерацию вершин. Введем теперь правильную нумерацию границ.

Две границы называются *соседними*, если они имеют общую вершину.

Нумерация границ называется *правильной*, если любые две соседние границы получают различные номера. Пример правильной нумерации границ приведен на рис. 37.

3 Зак. 3398. Е. Дынкин и В. Успенский

Проблема четырех красок эквивалентна задаче о правильной нумерации границ тремя цифрами. Эта эквивалентность устанавливается теоремой Волынского[1]):

Нормальную карту можно правильно раскрасить четырьмя красками в том и только в том случае, если ее границы можно правильно занумеровать тремя цифрами.

Доказательство этой теоремы вытекает из задач 43—45. Нам будет удобнее не раскрашивать страны четырьмя красками, а нумеровать их четырьмя номерами; в качестве таких номеров мы возьмем пары чисел (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Пары эти можно почленно складывать; чтобы при этом не выйти за пределы введенных нами четырех пар, следует получающиеся при сложении числа заменять остатками от деления их на 2, например

$$(1,\ 0)+(1,\ 0)=(0,\ 0),$$
$$(0,\ 1)+(1,\ 1)=(1,\ 0).$$

43. Доказать, что если нормальную карту можно правильно раскрасить четырьмя красками, то ее границы можно правильно занумеровать тремя номерами.

44. Границы нормальной карты правильно занумерованы тремя номерами (0, 1), (1, 0), (1, 1). Ладья обошла ряд стран этой карты и вернулась в исходную страну. Докажите, что если мы сложим номера всех границ, которые ладья пересекла на своем пути, то в результате получим (0, 0).

45. Границы нормальной карты правильно занумерованы тремя номерами. Докажите, что ее можно правильно раскрасить четырьмя красками.

46. Пусть в нормальной карте число границ каждой страны делится на 3. Используя теорему Волынского, докажите, что ее можно правильно раскрасить четырьмя красками.

В конце следующего параграфа, после того как читатель познакомится с теоремой Эйлера, проблема четырех красок будет решена для карт с числом стран, меньшим двенадцати.

---

[1]) Владимир Викторович Волынский (1923—1943 гг.) — талантливый молодой математик. С 1939 по 1942 г. учился на Механико-математическом факультете МГУ. В 1943 г. погиб на фронте Великой Отечественной войны.

§ 4. Теорема Эйлера. Теорема о пяти красках

Границы некоторой страны могут распадаться на несколько контуров (рис. 38, *а* и *б*). Однако в этом случае,

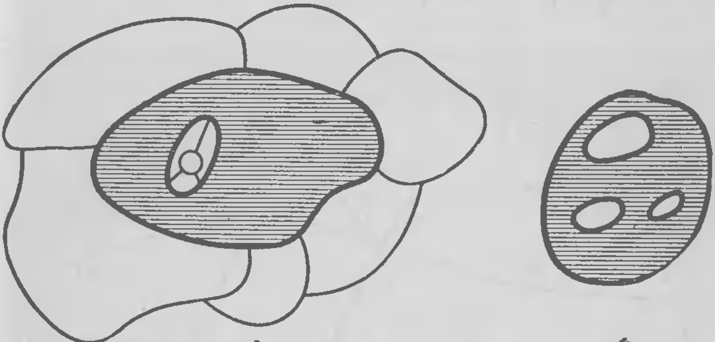


Рис. 38.

как видно из рисунков, страна будет обязательно разделяющей и, следовательно, карта — несвязной. Если же ограничиться связными картами, то границы каждой страны образуют один контур, похожий на контур прямолинейного многоугольника и отличающийся от последнего только тем, что участки между вершинами будут, вообще говоря, криволинейны. (В отдельных точках этот контур может быть склеен сам с собой, как показано на рис. 39.) Воспользовавшись этим сходством между странами связной карты и обычными многоугольниками, мы докажем знаменитую теорему Эйлера[1]):

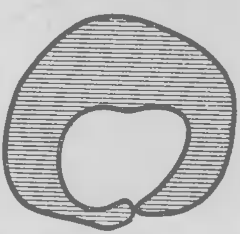


Рис. 39.

Пусть s — число стран, v — число вершин и g — число границ связной карты. Тогда

$$s+v=g+2.$$

[1]) Леонард Эйлер (1707—1783 гг.) — один из крупнейших математиков, член Петербургской академии наук.

Докажем сначала эту теорему для карт, все страны которой — многоугольники с прямолинейными сторонами. Море в такой карте — внешняя часть некоторого многоугольника (на рис. 40 море заштриховано).

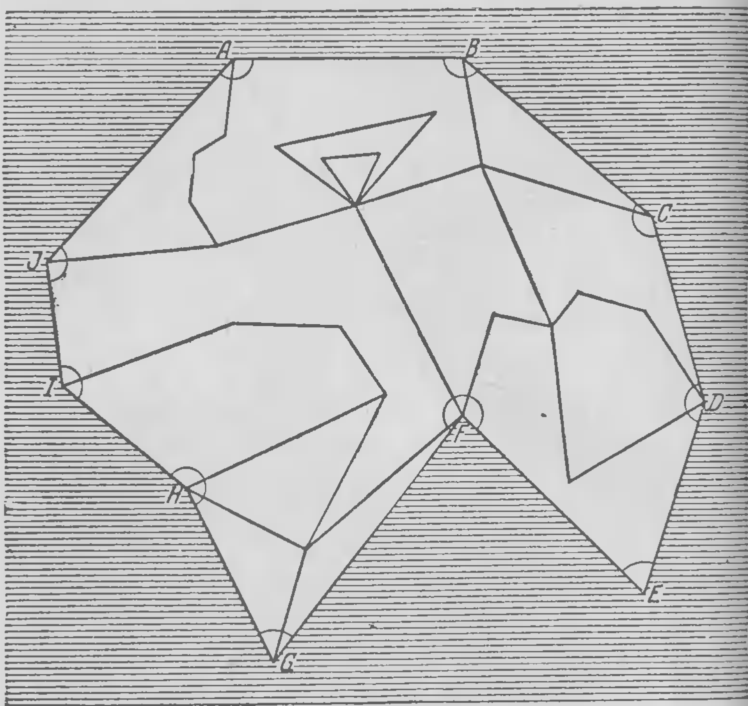


Рис. 40.

Сосчитаем сумму всех внутренних углов всех многоугольников, из которых состоит наша карта. Число этих многоугольников равно $s-1$ (все страны, кроме моря). Если многоугольник имеет n сторон, то, как известно, сумма его внутренних углов равна $2d(n-2)$, где d — прямой угол. Поэтому сумма внутренних углов всех многоугольников есть

$$T = 2d(n_1 - 2) + 2d(n_2 - 2) + \ldots + 2d(n_{s-1} - 2),$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_{s-1}$ — числа сторон наших многоугольников. Эта сумма равна

$$T = 2d\left[n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1} - 2(s-1)\right].$$

Обозначим через g_e число внешних границ (выходящих к морю) и через g_i число внутренних границ (не выходящих к морю), так что $g = g_i + g_e$ (на рис. 40 $g_i = 32$, $g_e = 10$). В силу задачи 19

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1} + g_e = 2g,$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1} = 2g - g_e.$$

Поэтому

$$T = 2d\left[2g - g_e - 2(s-1)\right].$$

Сосчитаем теперь эту же сумму T другим способом. Пусть v_i — число внутренних вершин, v_e — число вершин, принадлежащих морю (на рис. 40 $v_i = 19$, $v_e = 10$). Очевидно, $v = v_e + v_i$, $g_e = v_e$. Сумма внутренних углов многоугольников вокруг каждой вершины равна $4d$. Поэтому сумма тех внутренних углов многоугольников, которые не выходят к морю, равна $4dv_i$. Чтобы получить T, надо к этому прибавить еще все углы, выходящие к морю (они отмечены на рис. 40), иными словами, сумму всех внутренних углов многоугольника $ABC \ldots J$, т. е. $2d(v_e - 2)$. Таким образом,

$$T = 4dv_i + 2d(v_e - 2) = 4d(v - v_e) + 2d(v_e - 2) = 2d(2v - v_e - 2).$$

Приравнивая друг другу два выражения, полученные для T, имеем

$$2d\left[2g - g_e - 2(s-1)\right] = 2d\left[2v - v_e - 2\right],$$

$$2g - g_e - 2(s-1) = 2v - v_e - 2.$$

Так как $g_e = v_e$, то

$$2g - 2(s-1) = 2v - 2,$$

$$g - s + 1 = v - 1,$$

$$s + v = g + 2.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда страны могут иметь и криволинейные границы. Пусть попрежнему v —

число вершин, s — число стран, g — число границ. Введем на границах стран новые, вспомогательные вершины кратности 2 (на рис. 41 вспомогательные вершины A, B, C, D, E, F, G, H, I). У нас появятся при этом новые границы

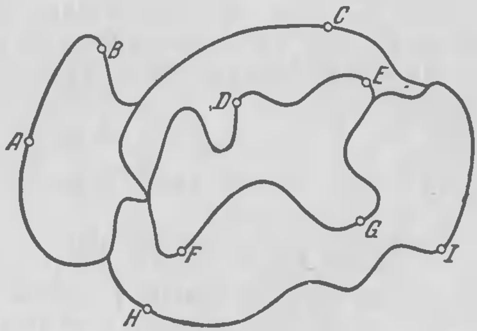


Рис. 41.

(участки старых границ между новыми вершинами), причем их появится столько же, сколько и новых вершин. Заменим теперь на вновь образованной карте каждую криволинейную

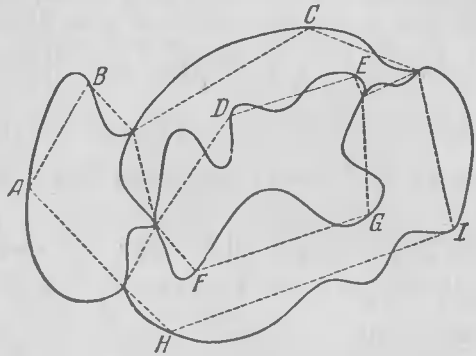


Рис. 42.

границу прямолинейным отрезком с теми же концами. Если расставить вспомогательные вершины достаточно близко друг к другу (мы можем вводить их в сколь угодно большом числе), то эти отрезки не пересекутся. У нас получится новая карта (рис. 42 — пунктирные линии), все страны которой будут уже прямолинейными многоугольниками. Если число вспомогательных вершин v', а вновь возникших границ g', то числа вершин и границ новой карты будут соответственно $v+v'$ и $g+g'$, число же стран останется тем же. По доказанному для новой карты выполняется теорема Эйлера, т. е.

$$(v+v')+s=(g+g')+2.$$

Так как $v'=g'$, то имеем

$$v+s=g+2,$$

что и требовалось доказать.

47. На плоскости дано шесть точек. Каждую точку соединили с четырьмя другими точками попарно не пересекающимися кривыми. Доказать, что на получившейся карте все страны — треугольники.

48. Пусть на плоскости даны семь точек. Доказать, что их нельзя соединить попарно не пересекающимися кривыми так, чтобы каждая точка была соединена точно с четырьмя другими точками (воспользоваться задачей 4).

49. Имеется три дома и три колодца. Докажите, что нельзя провести непересекающиеся дороги так, чтобы каждый дом был соединен с каждым колодцем.

50. На плоскости дано пять точек. Доказать, что их нельзя соединить попарно не пересекающимися кривыми так, чтобы каждая точка была соединена с каждой.

51. Доказать, что ни на какой карте не существует пяти стран, попарно граничащих друг с другом.

Задача 51 уже наводит на мысль о том, что четырех красок достаточно для правильной раскраски любой карты. На результате этой задачи основано доказательство теоремы о пяти красках. Очевидно, что при доказательстве этой теоремы можно вовсе исключить из рассмотрения вершины кратности 2. В задачах 52—54 мы будем предполагать, что кратность любой вершины не меньше 3.

52. Доказать, что на любой связной карте, кратность любой вершины которой не меньше 3, существует страна с числом границ, меньшим чем 6.

53. Доказать, что всякую карту можно правильно раскрасить шестью красками [1]).

54. Т е о р е м а о п я т и к р а с к а х. Доказать, что всякую карту можно правильно раскрасить пятью красками [1]) (воспользоваться задачей 51).

Методами, аналогичными тем, которыми решается задача о пяти красках, можно решить проблему четырех красок для частного случая. Это делается в задачах 55 и 56. Как и при решении задачи о пяти красках, мы предполагаем, что карта не содержит вершин кратности 2.

55. Докажите, что для связной карты, кратность каждой вершины которой не меньше 3, справедливо неравенство

$$g \leqslant 3s - 6.$$

56. Докажите, что любую карту с числом стран, меньшим 12, можно правильно раскрасить четырьмя красками [1]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи о свойствах фигур и тел, не меняющихся при любых деформациях без разрывов и склеиваний (такими задачами являются, в частности, задачи о многоцветной раскраске), составляют предмет особой отрасли математики, которая называется *топологией.* Топология является одной из самых молодых ветвей математики. Она оформилась как самостоятельная математическая дисциплина на рубеже XIX и XX вв. Ведущая роль в развитии топологии за последние тридцать лет принадлежит советской топологической школе,

---

[1]) Предполагается, что карта не содержит неразделяющих границ (см. подстрочное примечание к стр. 32).

крупнейшими представителями которой являются Павел Самуилович Урысон (1898—1924 гг.), Павел Сергеевич Александров (род. в 1896 г.) и Лев Семенович Понтрягин (род. в 1908 г.).

Изложение вопросов, связанных с теоремой Эйлера и задачами о многоцветной раскраске, отличное от сделанного в этой книге, читатель найдет в следующей литературе:

Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, перевод с немецкого, ОНТИ, М.—Л., 1935, гл. 13; 2-е изд., ОНТИ, М.—Л., 1938.

Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, перевод с немецкого, ОНТИ, М.—Л., 1936; 2-е изд., Гостехиздат, М.—Л., 1951, гл. 6.

В последней книге решаются задачи о раскраске карт на поверхностях, более сложных, чем плоскость. В ней же читатель найдет начальные сведения по топологии. Для дальнейшего знакомства с топологией можно порекомендовать книги:

П. С. Александров и В. А. Ефремович, О простейших понятиях современной топологии, ОНТИ, М.—Л., 1935.

П. С. Александров и В. А. Ефремович, Очерк основных понятий топологии, ОНТИ, М.—Л., 1936.

О. К. Житомирский, В. Д. Львовский, В. И. Милинский, Задачи по высшей геометрии, ч. I, ОНТИ, М.—Л., 1935, отд. I.

ДОБАВЛЕНИЕ К РАЗДЕЛУ I

О ТРЕХЦВЕТНОЙ РАСКРАСКЕ СФЕРЫ

Пусть сфера[1]) разбита на некоторое число областей, другими словами, на сфере нарисована карта. Зададимся вопросом, существует ли страна, содержащая антиподы, т. е. две диаметрально противоположные точки сферы. Если общее число стран равно четырем, то может и не найтись страны, содержащей антиподы (рис. 43). Такой страны подавно может не существовать, если число стран превышает четыре. Напротив, если на карте только две страны, то непременно хотя бы одна из них содержит два конца одного диаметра сферы[2]) (правда, иногда может случиться, что каждая такая пара точек принадлежит границе обеих стран — примером может служить сфера, разбитая на два полушария).

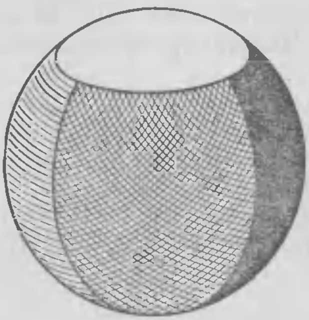


Рис. 43.

Встает вопрос, как обстоит дело в случае трех стран. Будет доказано, что и для трех стран, как и для двух, всегда найдется страна, содержащая пару диаметрально противопо-

---

[1]) Напомним, что сферой называется поверхность шара.

[2]) Для доказательства достаточно взять любую точку A на границе между обеими странами. Ее антипод точка A' принадлежит некоторой стране. Так как A принадлежит этой же стране (точку границы мы считаем принадлежащей обеим граничащим странам), то A и A' и образуют искомую пару.

ложных точек. Более того, будет доказано гораздо более общее утверждение:

Если сфера разбита на какое угодно число областей, причем эти области разделены каким-нибудь способом на три группы, то найдутся две диаметрально противоположные точки, принадлежащие странам одной и той же группы[1]).

Для наглядности мы будем представлять себе, что страны каждой группы окрашены одной и той же краской, например страны первой группы — синей краской, страны второй группы — черной краской и страны третьей группы — красной краской.

1. Докажем теорему от противного. Предположим, что на сфере нарисована карта K, раскрашенная тремя красками, на которой нет пары диаметрально противоположных точек, принадлежащих странам одного цвета (такую пару мы назовем одноцветной).

После этого придем к противоречию следующим образом: докажем, что для каждой карты, не содержащей одноцветных пар, можно построить новую карту, снова не содержащую одноцветных пар, но состоящую из меньшего числа стран, нежели первая карта. Отправляясь от карты K, существование которой мы предположили, мы построим карту K_1 с меньшим числом стран и не содержащую одноцветных пар. Но тогда для K_1 можно тем же способом построить K_2 и т. д. Мы получим бесконечную последовательность карт

$$K,\ K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots,\ K_m,\ \ldots,$$

каждая из которых не содержит одноцветных пар. Если обозначить число стран карты K через n, а число стран K_i через n_i, то

$$n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > n_m > \ldots$$

Таким образом, получится бесконечная последовательность убывающих целых положительных чисел, что невозможно. Изложенный здесь метод доказательства от противного путем получения бесконечной последовательности убывающих целых

[1]) Эта теорема (в гораздо более общей формулировке) была получена советскими математиками Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом.

положительных чисел называется *методом безграничного спуска.*

Итак, пусть дана произвольная карта K, не содержащая одноцветных пар. Нужно построить карту K_1, также не содержащую одноцветных пар, но состоящую из меньшего числа стран, чем карта K.

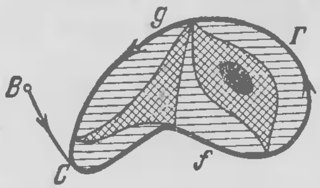


Рис. 44.

2. Заметим, что если карта K не является правильно раскрашенной, т. е. существуют границы, разделяющие страны одного цвета, то, стерев эти границы, мы сразу получим требуемую карту K_1. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только случай, когда карта K правильно раскрашена.

Докажем следующую л е м м у:

Точка, диаметрально противоположная к граничной, есть внутренняя, т. е. лежит строго внутри некоторой страны.

Действительно, на правильно раскрашенной карте каждая точка границы принадлежит странам по крайней мере двух различных цветов. Пусть, например, граничная точка A принадлежит синей и красной странам. Тогда ее антипод точка A' не может принадлежать ни синей, ни красной стране, стало быть, она лежит строго внутри черной страны.

3. Пусть B — точка, лежащая на границе некоторой страны, выкрашенной, скажем, в красный цвет. Выйдем из точки B и будем двигаться по границам карты так, чтобы слева от нашего пути все время находились красные страны (рис. 44) [1]. Движение мы продолжаем до тех пор, пока не попадем в какую-нибудь точку C, в которой мы уже были. Возьмем замкнутый самонепересекающийся контур $CfgC$ (рис. 44), который мы обозначим через Г. Карту сферы будем рисовать отдельно для «северного» и отдельно для «южного» полушарий. Для наглядности предположим, что контур Г целиком

---

[1] На рис. 44, 46, 47 красный цвет показан горизонтальной штриховкой, а синий цвет — штриховкой в клетку.

умещается в северном полушарии (рис. 45). На общность доказательства это нисколько не влияет.

Построим контур Г′, состоящий из точек, диаметрально противоположных к точкам контура Г (рис. 45). Контур Г′ состоит согласно лемме из одних внутренних точек, т. е. нигде не пересекает границ карты. В частности, он не пересекает и составленного из границ контура Г.

Контур Г разбивает сферу на две части U и V (рис. 45). Точно так же Г′ разбивает сферу на части U' и V', причем U' состоит из точек, диаметрально противоположных точкам U, а V' — из точек, диаметрально противоположных точкам V. Так как Г и Г′ не пересекаются, то контур Г′ расположен в одной из частей U или V, пусть, например, в V. Тогда контур Г расположен в V'.

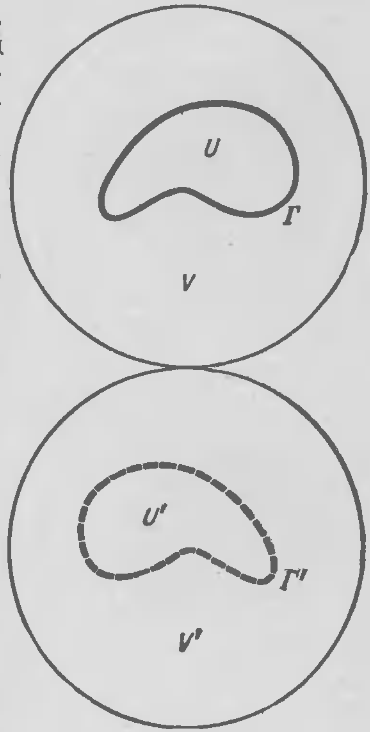


Рис. 45.

4. Так как контур Г′ не пересекает границ карты, то он лежит целиком внутри некоторой страны. Все точки контура Г принадлежат красным странам, поэтому никакая точка контура Г′ не принадлежит красной стране и страна, в которой расположен Г′, не может быть красной. Для определенности предположим, что эта страна окрашена черной краской (рис. 46)[1]). В таком случае никакая точка контура Г не может принадлежать странам черного цвета; другими словами,

[1]) Пунктиром на рис. 46 показаны линии, состоящие из точек, диаметрально противоположных к точкам границ, расположенных в области U.

все границы, из которых составлен контур Г, принадлежат только синим и красным странам. Так как по одну сторону контура Г лежат только красные страны, то по другую — только синие (карта правильно раскрашена). Пусть, например,

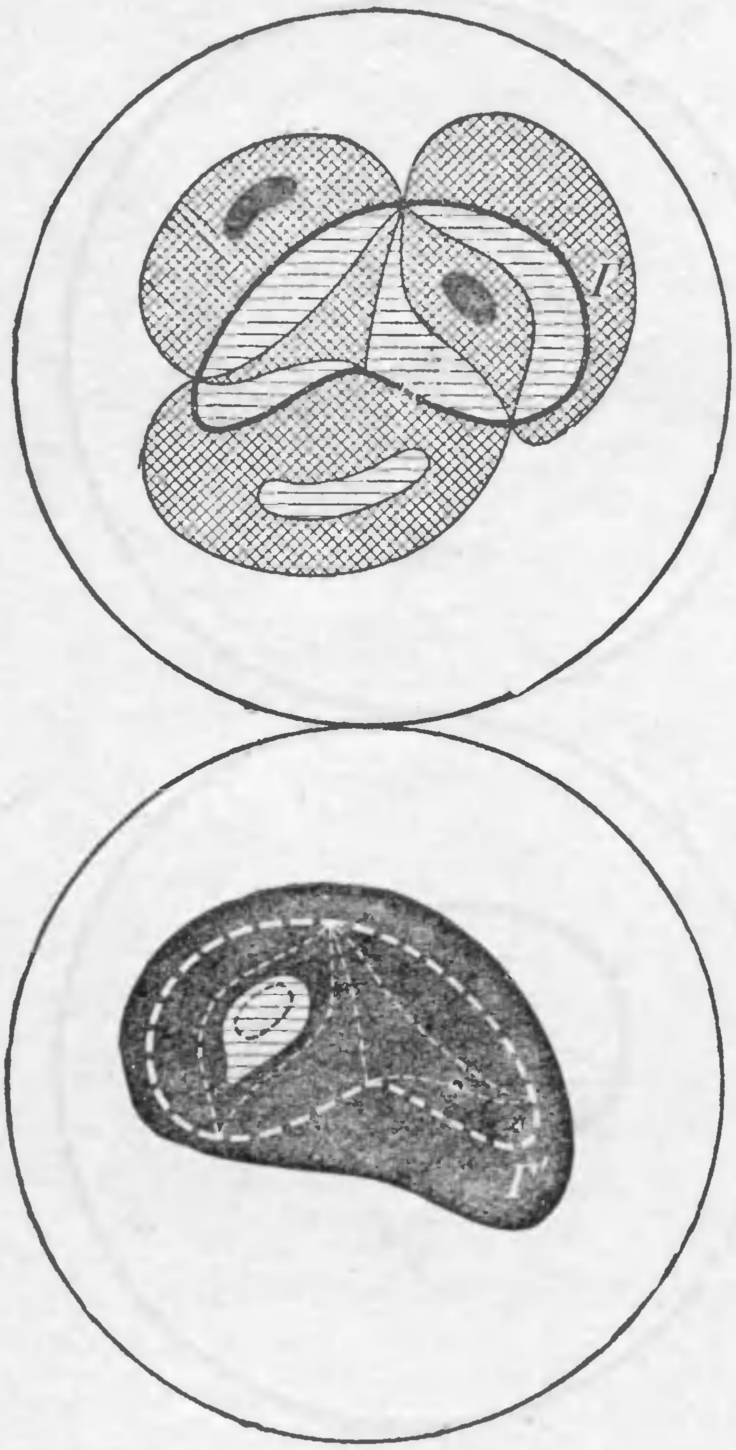


Рис. 46.

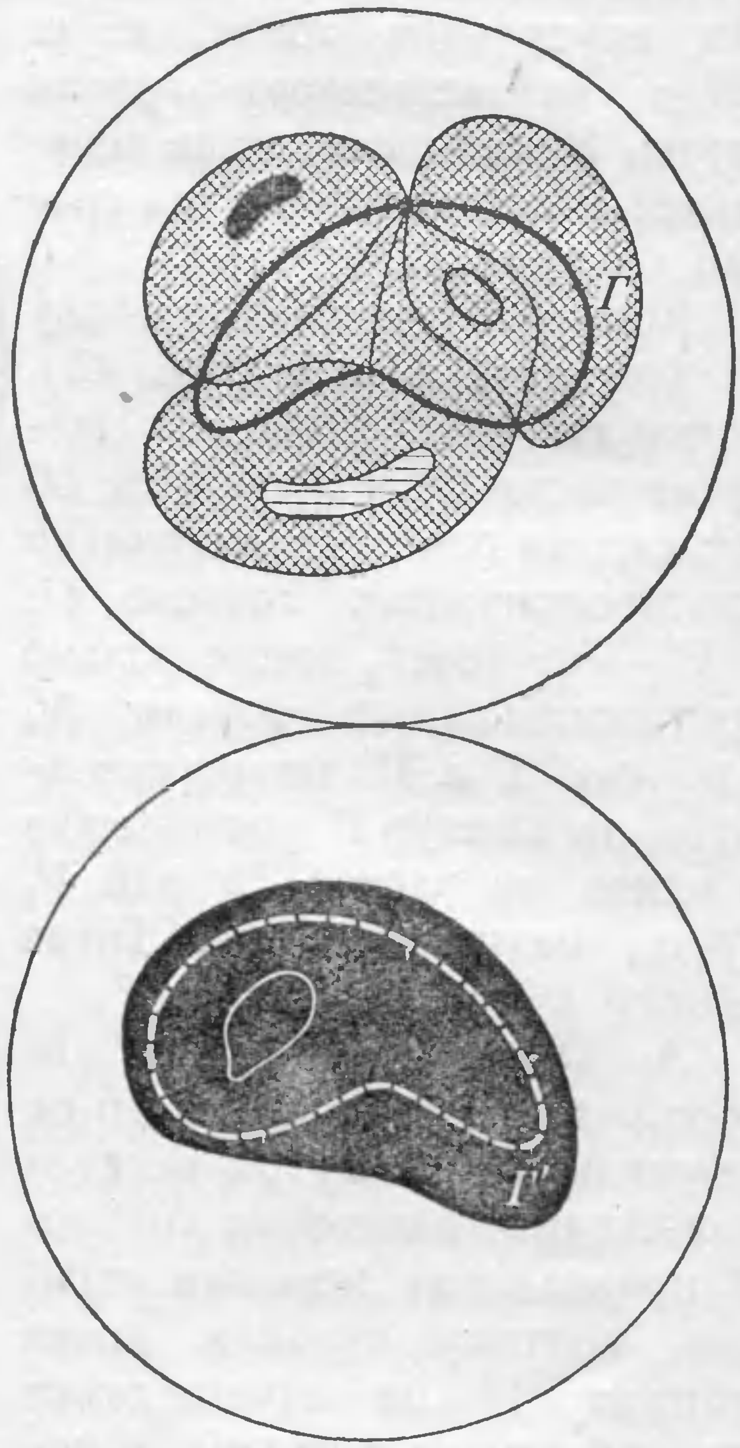


Рис. 47.

как и на нашем рисунке, со стороны U лежат красные страны, а со стороны V — синие (рис. 46).

Перекрасим теперь все страны, лежащие внутри U, в синий цвет и одновременно страны, лежащие внутри U', — в черный. Теперь к контуру Г с обеих сторон примыкают страны одного и того же цвета, а именно синего (рис. 47).

Заметим, что одноцветных пар при этой перекраске не появилось, ибо 1) точки, расположенные в U, стали синими, а их антиподы в U' — черными, 2) все остальные точки вместе с их антиподами не изменили своего цвета.

Сотрем теперь контур Г и все границы, лежащие внутри U и U'. При этом число стран уменьшится (потому, что контур Г наверняка разделял по крайней мере две страны).

Итак, для произвольной карты K, не содержащей одноцветных пар, мы построили карту K_1, снова не содержащую одноцветных пар, но имеющую меньшее число стран, чем карта K. Как уже отмечалось в n° 1, это и доказывает нашу теорему.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ГЛАВА I

АРИФМЕТИКА ВЫЧЕТОВ

§ 1. Арифметика вычетов по модулю m, или m-арифметика[1])

При сложении двух однозначных чисел может получиться либо однозначное число, например $1+4=5$, $7+2=9$, либо двузначное число, например $3+9=12$, $5+8=13$, $7+9=16$, $4+6=10$. Условимся, если сумма двузначная, оставлять только последнюю цифру и писать

$$3+9=2,$$

$$5+8=3,$$

$$7+9=6,$$

$$4+6=0.$$

При таком новом определении операции сложения сумма любых двух однозначных чисел есть снова однозначное число.

При перемножении двух однозначных чисел может получиться либо однозначное число: $2\cdot 3=6$, $1\cdot 8=8$, $3\cdot 3=9$, либо двузначное число: $6\cdot 7=42$, $7\cdot 8=56$, $9\cdot 9=81$. В случае, если произведение двузначно, будем брать только последнюю цифру и писать

$$6\cdot 7=2, \quad 7\cdot 8=6, \quad 3\cdot 3=9.$$

---

1) В главах I—IV буквой m обозначается любое натуральное (целое положительное) число, большее единицы.

При этом новом определении операции умножения произведение двух однозначных чисел всегда является однозначным числом. Введенные нами операции отличаются от действий, которые мы привыкли называть сложением и умножением и обозначать знаками «$+$» и «$\cdot$». Строго говоря, следовало бы поэтому ввести для этих новых операций новые названия и новые знаки. Однако оказывается, что все формулы обычной алгебры, содержащие только знаки «$+$», «$\cdot$» и любое число скобок, сохраняются и для новых операций [1]). В частности, остаются верными формулы

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a+b=b+a,$$
$$a(bc)=(ab)c,$$
$$a(b+c)=ab+ac,$$

а также формулы

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

и другие. Поэтому употребление привычных знаков «$+$», «$\cdot$» в новом смысле не может повести к недоразумениям.

Итак, мы построили новую арифметику, отличную от арифметики, изучаемой в школе, но при всем этом во многом похожую на нее. Эта новая арифметика окажется нам полезной при решении многих задач из обычной арифметики и алгебры.

Нашу новую арифметику мы будем называть *арифметикой вычетов по модулю* 10, или 10-*арифметикой*, потому что в ней только 10 чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

---

[1]) Эти формулы могут содержать также возведение в целую положительную степень, потому что целая положительная степень есть просто сокращенная запись для произведения нескольких одинаковых сомножителей.

Составим таблицы сложения и умножения в 10-арифметике:

Таблица сложения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Таблица умножения

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Сделаем еще одно важное замечание: если в любом правильном числовом равенстве из обыкновенной арифметики, содержащем, кроме чисел, только знаки сложения, умножения и скобки, заменить каждое число его последней цифрой, то получится равенство, верное в смысле 10-арифметики. Например, из верных равенств

$$(18+15)(123+1341)=11\cdot 8\cdot 549,$$
$$10+11+12+13+14+15=(10+15)\,3,$$
$$2^{10}+151=1175$$

мы получаем этим способом верные 10-арифметические равенства

$$(8+5)(3+1)=1\cdot 8\cdot 9,$$
$$0+1+2+3+4+5=(0+5)\,3,$$
$$2^{10}+1=5\ [1]).$$

---

[1]) Само собой разумеется, что показатель степени не следует заменять последней цифрой. Показатель степени играет в формуле другую роль, нежели числа, не являющиеся показателями: он есть просто сокращенное обозначение того, сколько раз надо взять сомножителем основание степени.

57. Разложите всеми возможными способами число 0 в произведение двух сомножителей (в смысле 10-арифметики).

58. Напишите всевозможные разложения на множители для числа 1.

59. На какую цифру оканчиваются числа

$$6^{811}, \quad 2^{1000}, \quad 3^{999}?$$

В 7-арифметике семь чисел:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Сложение и умножение в 7-арифметике определяются следующими правилами: чтобы сложить два числа, надо найти их сумму в смысле обычной арифметики и затем взять остаток от деления этой суммы на 7; чтобы перемножить два числа, надо найти их обычное произведение и взять остаток от деления его на 7.

Приведем несколько примеров:

$$3+5=1, \qquad 5\cdot 3=1,$$
$$4+6=3, \qquad 3\cdot 6=4,$$
$$3+4=0, \qquad 2\cdot 6=5.$$

60. Составьте таблицу сложения и таблицу умножения в 7-арифметике. Выпишите все разложения чисел 0 и 1 на два сомножителя.

61. Определите остаток от деления на 7 числа

$$3^{100}.$$

Разобранные нами 10-арифметика и 7-арифметика являются частными видами арифметики вычетов по модулю m, или m-арифметики. Пусть m — любое целое положительное число. Элементами m-арифметики являются числа $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Сложение и умножение в m-арифметике определяются следующим образом: чтобы сложить (или перемножить) два числа, надо взять остаток от деления на m их обычной суммы (соответственно произведения).

62. Составить таблицу сложения и таблицу умножения в 2-арифметике, 3-арифметике, 4-арифметике и 9-арифметике.

63. Вычислить в 11-арифметике выражения

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10;$$
$$2^{10};\ 3^{10};\ 4^{10};\ 5^{10};\ 6^{10};\ 7^{10};\ 8^{10};\ 9^{10};\ 10^{10}.$$

64. Определить остатки от деления числа 2^{1000} на 3, 5, 11, 13.

Вычитание в m-арифметике, подобно обычной арифметике, определяется как действие, обратное сложению: число x называется разностью чисел b и a $(x=b-a)$, если

$$a+x=b.$$

Например, в 7-арифметике

$$2-5=4,\text{ ибо } 5+4=2,$$
$$1-6=2,\text{ ибо } 6+2=1.$$

Самый быстрый способ для вычисления разности двух чисел в m-арифметике следующий: надо найти разность в обычном смысле и, если она отрицательна, увеличить ее на m. Например, в 7-арифметике

$$1-5=-4=3,$$
$$2-3=-1=6.$$

Вычитание в m-арифметике всегда возможно и приводит к единственному ответу. Употребление для m-арифметической операции вычитания обычного знака «—» оправдано тем, что если формула из обычной алгебры верна и содержит только знаки «+», «—», «·» и любое число скобок, то такая формула остается верной и при m-арифметическом истолковании встречающихся в ней знаков. В частности, сохраняются формулы

$$-(-a)=a\ ^{1)},$$
$$-(a+b)=-a-b,$$
$$-(a-b)=-a+b,$$
$$a+(-b)=a-b,$$

[1]) $-a$, как и обычно, обозначает число $0-a$. Так, например, в 8-арифметике $-3=5$.

а также формулы

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

и другие.

m-арифметика применяется к обычной арифметике для проверки действий сложения, вычитания и умножения. При этом пользуются тем, что верное равенство из обычной арифметики превращается в верное равенство из m-арифметики, если заменить каждое число его остатком от деления на m. Проверим, например, с помощью 7-арифметики равенство

$$74\,218 \cdot 21\,363 - 81\,835 = 1\,585\,446\,299. \qquad (1)$$

Заменяя каждое число его остатком от деления на 7, мы получим:

$$4 \cdot 6 - 5 = 1.$$

Это равенство не является верным в 7-арифметике и, значит, исходный пример содержит ошибку. Чаще всего для проверки пользуются 9-арифметикой. Дело в том, что любое число N и сумма его цифр дают при делении на 9 одинаковые остатки, и это очень облегчает нахождение остатков от деления на 9 [1]).

Заметим, что проверка с помощью m-арифметики не всегда позволяет обнаружить ошибку. Так, если бы мы стали проверять неверное равенство (1) с помощью 9-арифметики, то пришли бы к верному 9-арифметическому равенству

$$4 \cdot 6 - 7 = 8.$$

Для того чтобы сделать пропуск ошибки менее вероятным, можно производить проверку одновременно посредством нескольких различных m-арифметик, например посредством 7-арифметики и 9-арифметики.

---

[1]) Числа 10, 10^2, 10^3, ... дают при делении на 9 в остатке 1. Поэтому числа

$$N = a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + \ldots + f \quad \text{и} \quad a + b + \ldots + f$$

дают при делении на 9 одинаковые остатки.

65. Докажите, что сумма кубов всех чисел из 1001-арифметики равна нулю.

66. а) Докажите, что если каждое из чисел m-арифметики (при нечетном m) возвести в одну и ту же нечетную степень k и все результаты сложить, то получится нуль.

б) Докажите, что, каковы бы ни были нечетные числа m и k, сумма $1^k+2^k+\ldots+(m-1)^k$ делится на m.

§ 2. Арифметика вычетов по модулю p, или p-арифметика [1]

Схемы умножения. Малая теорема Ферма. Изобразим числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 из 7-арифметики в виде точек на рисунке и укажем стрелками, во что переходит каждое число при умножении на 4. У нас получится схема [2]), изображенная

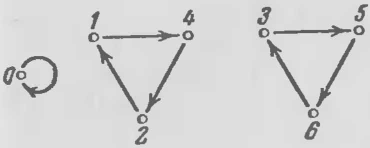


Рис. 48.

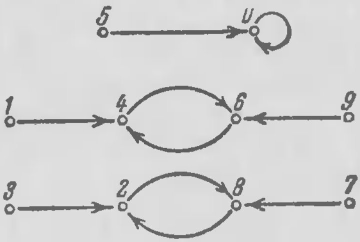


Рис. 49.

на рис. 48. Этой схемой можно пользоваться как таблицей умножения на 4 в 7-арифметике. Поэтому мы назовем ее *схемой умножения* на 4 в 7-арифметике.

Точно так же строится схема умножения на 4 в 10-арифметике (рис. 49). Последовательность n чисел, изображенных на некоторой схеме, называется *циклом*, если от каждого из этих чисел к следующему и от последнего к пер-

---

[1]) В главах I — IV буквой p обозначается любое простое число, т. е. натуральное число, большее единицы и не имеющее других делителей, кроме единицы и самого себя.

[2]) Поскольку расположение на рисунке точек, соответствующих числам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, совершенно безразлично, мы разместили эти точки так, чтобы не пришлось проводить длинных стрелок.

вому ведет стрелка. На построенных нами схемах имеются такие циклы:

схема на рис. 48: 0; 1, 4, 2; 3, 5, 6.

схема на рис. 49: 0; 4, 6; 2, 8.

Отметим существенное различие между этими схемами: на первой каждое число попадает в некоторый цикл (и притом только один); на второй есть числа 1, 3, 5, 7, 9, не принадлежащие никакому циклу.

67. Постройте схемы умножения на 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 в 7-арифметике, схемы умножения на 2 и 5 в 10-арифметике и схему умножения на 3 в 9-арифметике.

68. Докажите, что если a и b — числа из p-арифметики и если $ab=0$, то либо $a=0$, либо $b=0$.

69. Пусть a — любое не равное нулю число из p-арифметики. Докажите, что схема умножения на a обладает следующими свойствами:

а) ни к какому числу не могут подходить две стрелки;

б) к каждому числу подходит некоторая стрелка.

70. Пусть a и b — любые числа из p-арифметики, причем $a \neq 0$. Используя предыдущую задачу, доказать, что в p-арифметике найдется и притом только одно число x такое, что $ax=b$.

71. Пусть a — отличное от нуля число из p-арифметики. Докажите, что:

а) схема умножения на a распадается на циклы;

б) все эти циклы (исключая цикл 0) имеют одинаковую длину.

Выведите отсюда, что $a^{p-1}=1$.

72. Малая теорема Ферма. Докажите, что если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.

Деление. Теорема Вильсона. Деление в m-арифметике определяется как действие, обратное умножению: число x называется *частным* от деления b на a (или *отношением* b к a), если $ax=b$. Деление в m-арифметике может оказаться невозможным. Например, в 10-арифметике нельзя подобрать такого числа x, чтобы $4x = 5$. С другой стороны, если деление возможно, оно может не приводить к единственному ответу. Например, в 10-арифметике $4 \cdot 8 = 2$ и $4 \cdot 3 = 2$, так что числа 8 и 2 с равным правом могут быть названы частными от деления двух на 4. Однако из задачи 70 следует, что в p-арифметике (p — число простое) деление на любое число $a \neq 0$ всегда возможно и однозначно [1]). Благодаря этому важному обстоятельству любое равенство из обычной алгебры, содержащее только знаки сложения, вычитания, умножения и деления (или заменяющую знак деления черту), остается верным при p-арифметическом истолковании этих знаков. В частности, в p-арифметике сохраняются формулы

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b},$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

и другие.

Используя p-арифметику, можно проверять действия с дробями подобно тому, как посредством m-арифметики проверяют действия с целыми числами (см. стр. 54). Например, чтобы проверить равенство

$$\frac{5}{22} + \frac{3}{17} - \frac{4}{15} = \frac{739}{5610},$$

---

[1]) Деление на нуль числа $a \neq 0$ в p-арифметике так же невозможно, как и в обычной арифметике, ибо не существует числа x, удовлетворяющего условию $0 \cdot x = a$. Однако иногда бывает целесообразно условно писать $\frac{a}{0} = \infty$. При этом следует помнить, что символ ∞ не является числом и с ним нельзя оперировать, как с числом.

заменяют в этом равенстве каждое целое число его остатком от деления на некоторое простое число p, например на 7 [1]). Получается

$$\frac{5}{1}+\frac{3}{3}-\frac{4}{1}=\frac{4}{3}.$$

Это равенство не является правильным 7-арифметическим равенством. Следовательно, в исходном примере допущена ошибка.

73. Составьте таблицы обратных величин $\frac{1}{k}$ в 7-арифметике, 11-арифметике и 13-арифметике.

В качестве образца приводится таблица обратных величин в 5-арифметике

k	1	2	3	4
$\frac{1}{k}$	1	3	2	4

Покажите, что в любой p-арифметике сами себе обратны только элементы 1 и -1.

74. а) Докажите, что произведение всех элементов p-арифметики, отличных от нуля, равно -1.

б) (Теорема Вильсона). Докажите, что если p — простое число, то $(p-1)!+1$ делится на p [2]).

75. (Обратная к задаче 74б). Докажите, что если $(m-1)!+1$ делится на m, то m — число простое.

---

76. Докажите, что если каждое из чисел p-арифметики возвести в одну и ту же степень k и все результаты сложить, то получится 0 или -1.

---

[1]) Число p надо выбирать так, чтобы оно не входило множителем ни в один из знаменателей. В противном случае мы пришли бы к p-арифметическому равенству, содержащему деление на нуль.

[2]) $n!$ есть сокращенная запись для произведения $1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots n$ всех целых чисел от 1 до n, так что $(p-1)!=1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(p-1)$.

§ 3. Извлечение квадратного корня. Квадратные уравнения

Как и раньше, будем изображать числа p-арифметики

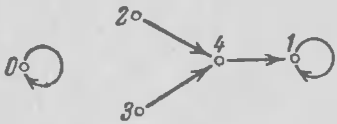


Рис. 50.

точками на рисунке. Построим схему возведения в квадрат для 5-арифметики (рис. 50).

77. Постройте схемы возведения в квадрат в 7-арифметике, 12-арифметике и 24-арифметике. (Старайтесь при этом подобрать расположение точек на рисунке так, чтобы схемы выглядели по возможности проще.)

78. Докажите, что если построить схему возведения в квадрат в p-арифметике[1]), то к каждой точке этой схемы (кроме точки 0) либо не подходит ни одной стрелки, либо подходят две стрелки. Другими словами: докажите, что при $a \neq 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет в p-арифметике два различных решения или не имеет ни одного решения.

79. Докажите, что корень квадратный извлекается ровно из $\frac{p+1}{2}$ чисел p-арифметики (и, следовательно, не извлекается из $\frac{p-1}{2}$ остальных чисел).

Если на схемах, построенных в решении задачи 77 (см. в решении задачи 77 рис. 134—136), изменить направления всех стрелок на противоположные, то получатся схемы извлечения корня в 7-, 12- и 24-арифметиках. Из этих схем видно, что в m-арифметике $\sqrt{a}$ может иметь 0, 2, 4 и более различных значений. Однако согласно задаче 78 в p-арифметике из всех этих возможностей остаются только следую-

---

1) В задачах 78—81 буква p обозначает простое число, не равное 2.

щие две: либо $\sqrt{a}$ вообще не извлекается, либо он имеет два различных значения. (Мы все время предполагаем, что $a \neq 0$; $\sqrt{0}$ имеет только одно значение, равное нулю.)

80. а) Докажите, что квадратный корень из -1 извлекается в p-арифметике, если $p = 4k + 1$, и не извлекается, если $p = 4k + 3$.

Указание. Используйте задачи 71 и 74.

б) Докажите, что все простые нечетные делители числа $a^2 + 1$ (при любом a) имеют вид $4k + 1$. Всякое простое число вида $4k + 1$ встречается в разложении на простые множители хотя бы одного числа вида $a^2 + 1$.

81. Выведите формулу для решения в p-арифметике квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(a, b и c — числа из p-арифметики, $a \neq 0$).

Пользуясь этой формулой, докажите, что

если $\sqrt{b^2 - 4ac}$ [1]) не извлекается в p-арифметике, то уравнение не имеет ни одного корня;

если $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет один корень;

если $b^2 - 4ac \neq 0$ и $\sqrt{b^2 - 4ac}$ извлекается, то уравнение имеет два различных корня.

82. Решите в 7-арифметике следующие квадратные уравнения:

$$5x^2 + 3x + 1 = 0,$$
$$x^2 + 3x + 4 = 0,$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

83. Каждое квадратное уравнение можно привести, разделив его на коэффициент при старшем члене, к виду

$$x^2 + cx + d = 0.$$

Общее число различных приведенных квадратных уравнений в p-арифметике равно p^2. Сосчитайте, сколько из них не имеют корней, сколько имеют один корень и сколько имеют два различных корня.

---

[1]) Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

§ 4. Извлечение кубического корня. Простые делители чисел вида a^2+3

84. Постройте схемы возведения в куб в 7-, 11-, 13- и 17-арифметике (сравните с задачей 77).

Если на схемах, построенных в решении задачи 84 (см. в решении задачи 84 рис. 137—140), заменить все стрелки противоположно направленными, то мы получим схемы извлечения кубического корня. Из схем видно, что в 11- и 17-арифметиках кубический корень извлекается из любого числа и имеет только одно значение, а в 7- и 13-арифметиках $\sqrt[3]{a}$ либо вовсе не извлекается, либо имеет три различных значения (исключением является $a=0$, корень кубический из которого имеет единственное значение нуль).

85. Пусть p — простое число вида $3k+2$ [1]). Доказать, что в p-арифметике:

а) $\sqrt[3]{1}$ имеет только одно значение (равное единице) (воспользоваться задачей 71);

б) ни при каком a $\sqrt[3]{a}$ не может иметь более чем одно значение;

в) $\sqrt[3]{a}$ извлекается при любом a.

86. Пользуясь равенством $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, решите уравнение

$$x^3-1=0.$$

Применяя полученные формулы, найдите три значения $\sqrt[3]{1}$ в 103-арифметике.

87. Пусть $p>3$. Докажите, что в p-арифметике $\sqrt[3]{1}$ имеет либо три различных значения, либо только одно значение, смотря по тому, извлекается или не извлекается $\sqrt{-3}$.

88. Если простое число p является делителем какого-нибудь числа вида a^2+3, то p либо равно 2 или 3, либо имеет вид $3k+1$.

---

1) Числами такого вида являются, например, $11=3\cdot 3+2$, $17=3\cdot 5+2$. Напротив, простые числа 7 и 13 имеют вид $3k+1$.

§ 5. Многочлены и уравнения высших степеней

Будем рассматривать многочлены с коэффициентами из p-арифметики

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \qquad (1)$$

При такой записи мы всегда будем предполагать $a_0 \neq 0$; в этом случае n называется *степенью* многочлена (1).

Корнем многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

называется корень уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

т. е. число x_0 такое, что

$$a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

В предыдущих параграфах мы видели, что уравнения 2-й степени или, что то же самое, многочлены 2-й степени имеют не более двух корней. Мы распространим сейчас этот результат на многочлены любой степени.

89. Докажите, что если многочлен имеет более корней, чем его степень, то все его коэффициенты — нули [1]).

90. Докажите, что если $x^k = 1$ для всех не равных нулю x, то k делится на $p - 1$.

91. Пусть $a \neq 0, p \neq 2$. Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$, если $\sqrt{a}$ извлекается в p-арифметике, и $a^{\frac{p-1}{2}} = -1$, если $\sqrt{a}$ не извлекается.

---

[1]) Строго говоря, по нашему определению степени многочлен со всеми нулевыми коэффициентами вообще не имеет никакой степени. Точный смысл задачи следующий: многочлен не может иметь более корней, чем его степень.

Утверждение этой задачи справедливо и в обычной арифметике (см. А. П. Киселев, Алгебра, ч. II, § 145).

92. Докажите, что если многочлен n-й степени имеет n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

93. Докажите, что в p-арифметике

$$(x-1)(x-2)\ldots[x-(p-1)] = x^{p-1} - 1,$$

и выведите отсюда теорему Вильсона (ср. задачу 74б).

*ГЛАВА II

m-АДИЧЕСКИЕ И p-АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА[1])

§ 1. Применение 10-арифметики к делению многозначных чисел

В начальной школе обучают производить над многозначными числами четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Сложение и умножение многозначных чисел полностью сводятся к сложению и умножению чисел однозначных: для того чтобы *сложить* или *перемножить* два числа, требуется только производить в определенном порядке действия над их отдельными цифрами, не забывая при этом о правиле переноса. Для того чтобы *вычесть* любые многозначные числа, достаточно уметь производить вычитание в пределах двадцати. Совсем не то при *делении*: общепринятый способ деления является по существу не чем иным, как упорядоченной системой подбора. Наиболее наивным способом деления был бы следующий: прикинем на-глаз, каково может быть частное, и умножим это предполагаемое частное на делитель. Если произведение равно делимому, то ответ найден. Если оно больше или меньше делимого, то надо соответственно уменьшить или увеличить взятое наугад частное. После конечного числа проб мы неизбежно придем к ответу. В случае, когда частное однозначно, способ, который мы назвали наивным, в точности совпадает со способом, которому обучают в школах. Если частное многозначно, то школьные правила позволяют расчленить пример на несколько примеров, в каждом из кото-

---

[1]) Главы, отмеченные звездочкой, содержат дополнительный материал и могут быть опущены при первом чтении.

рых частное однозначно и каждый из которых решается путем подбора. Применение 10-арифметики позволяет делить поиному, начиная с последней цифры делимого и делителя, подобно тому как это делается при сложении или умножении.

Составим таблицу обратных величин в 10-арифметике:

k	1	3	7	9
$\frac{1}{k}$	1	7	3	9

Числа этой таблицы, стоящие в одном столбце, дают при перемножении 1. В таблицу не попали числа 2, 4, 6, 8, 5, 0. Для них обратного не существует. Например, на какое бы число из 10-арифметики мы ни умножали 5, мы получим либо 0, либо 5, но никогда не получим 1. Деление в 10-арифметике возможно не всегда (10-арифметика не является p-арифметикой). Однако всегда возможно деление на числа 1, 3, 7, 9: для того чтобы поделить a на одно из этих чисел, достаточно умножить a на обратное число.

Переходим к делению многозначных чисел. Объяснения удобно провести на каком-нибудь примере. Пусть, скажем, требуется разделить 74 646 на 957. Делим в смысле 10-арифметики последнюю цифру делимого на последнюю цифру делителя

$$6:7=6\cdot 3=8.$$

Мы получили последнюю цифру частного. Умножаем эту цифру на делитель и вычитаем результат из делимого. Получаем 66 990. Делим последнюю отличную от нуля цифру результата, т. е. 9 на 7, в смысле 10-арифметики

$$9:7=9\cdot 3=7.$$

Итак, вторая справа цифра частного 7. Умножаем 7 на делитель и вычитаем результат из 66 990. Получаем 0. Следовательно, деление закончено, и частное равно 78. Выкладки располагаются следующим образом:

$$\begin{array}{r|l}
-\,74646 & 957^{3} \\
7656 & \overline{78} \\
\hline
-\,6699 & \\
6699 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

5 Зак. 3398. Е. Дынкин и В. Успенский

Сверху около делителя пишется число, обратное в смысле 10-арифметики последней цифре делителя. Деление на последнюю цифру делителя заменяется умножением на это обратное число.

Приведем еще два примера:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,61730684 & 7459^{\underset{\smile}{9}} \\
44754 & \overline{8276} \\
\hline
-\,6168593 & \\
52213 & \\
\hline
-\,611638 & \\
14918 & \\
\hline
-\,59672 & \\
59672 & \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,217 & 3^{\underset{\smile}{1}} \\
27 & \overline{739} \\
\hline
-\,19 & \\
9 & \\
\hline
-\,1 & \\
21 & \\
\hline
-2 &
\end{array}
$$

Во втором примере мы приходим к отрицательному остатку. Это показывает, что деление нацело невозможно. К этому примеру мы еще вернемся в следующем параграфе.

Способ деления, которым мы пользовались, непосредственно неприменим, если делитель оканчивается на четную цифру или на 5. В этом случае делимое и делитель предварительно сокращают на 2 или на 5 [1]. В случае надобности такое сокращение повторяют несколько раз, пока, наконец, не приходят к делителю, оканчивающемуся на одну из цифр 1, 3, 7, 9. После этого производят деление так, как это было описано.

Описанный способ деления в ряде случаев проще и удобнее обычного способа. Однако обычный способ имеет перед ним одно чрезвычайно важное преимущество: если деление нацело невозможно, то общепринятый способ деления позволяет найти частное с любой наперед заданной степенью точности, например с точностью до 0,1 или 0,001; описанный же нами способ такой возможности не дает.

---

[1] Деление на 5 может быть заменено умножением на 2 с последующим делением на 10. Точно так же вместо того, чтобы делить на 2, можно умножить на 5 и поделить на 10. Если делимое не делится нацело на 2 или на 5, то после сокращения мы получим десятичную дробь.

94. Используя 10-арифметику, произвести деление:

а) 37 233 : 189,

б) 36 408 : 328,

в) 851 : 74.

§ 2. Бесконечнозначные числа

В начальной школе обучают производить вычитание только в том случае, когда вычитаемое меньше уменьшаемого. Попытаемся применить те же правила к вычитанию большего числа из меньшего. Пусть, например, надо вычислить разность 398 — 536. Находим

$$-\begin{array}{r}\dot{0}398\\ 536\\ \hline \bar{1}862\end{array}$$

Операции начинаются, как обычно, с последних цифр. Единственным новшеством является то, что мы разрешаем себе «занимать» из нуля и в соответствии с этим получаем в качестве первой цифры результата число —1 (мы пишем $\bar{1}$ вместо —1, ставя знак «—» над цифрой 1, чтобы было ясно, что этот знак относится только к первой цифре, а не ко всему числу). Результат можно записать также в виде

$$(-1)\cdot 10^3+8\cdot 10^2+6\cdot 10+2 \quad \text{или} \quad -1000+862.$$

Приведем еще несколько примеров:

$$-\begin{array}{r}\dot{0}\dot{0}\dot{1}0\dot{9}01\\ 134521\\ \hline \bar{1}876380\end{array} \qquad -\begin{array}{r}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}1\\ 10002\\ \hline \bar{1}89999\end{array} \qquad -\begin{array}{r}\dot{0}1889\\ 2354\\ \hline \bar{1}9535\end{array}$$

Вернемся теперь к примеру деления 217 : 3, который мы уже разбирали и остановились, придя к отрицательному остатку и констатировав, что деление нацело невозможно. Теперь мы продолжим прерванные ранее вычисления, причем будем производить вычитание так, как это было только что описано.

$$\begin{array}{r|l} 217 & 3^{7} \\ \underline{27} & \overline{\ldots 66\,739} \\ 19 & \\ \underline{9} & \\ \dot{0}01 & \\ \underline{21} & \\ \dot{0}\overline{1}8 & \\ \underline{18} & \\ \dot{0}\overline{1}8 & \\ \underline{18} & \\ \overline{1}8 & \end{array}$$

При дальнейшем продолжении деления мы будем все время получать одинаковые остатки $(\overline{1}8)$ и одинаковые цифры частного (6). Таким образом, результатом деления является целое бесконечнозначное периодическое число $\ldots 6666739$. Проверим, что это число при умножении на 3 дает 217. Действительно,

$$\begin{array}{r} \ldots 6666739 \\ \underline{3} \\ \ldots 0000217 \end{array}$$

Все цифры произведения, кроме последних трех, суть нули.

Таким образом, новый способ деления, точно так же как и общепринятый способ, может приводить к ответу, записывающемуся бесконечной последовательностью цифр; только теперь эта последовательность бесконечна не вправо, а в л е в о: вместо бесконечной десятичной дроби мы получаем бесконечнозначное целое число.

Над бесконечнозначными числами можно производить операции сложения, вычитания и умножения по тем же самым правилам, что и над числами многозначными. При этом для вычисления последних n цифр результата достаточно знать только последние n цифр каждого из чисел, которые требуется сложить, вычесть или перемножить. Приведем примеры:

$$
\begin{array}{r}
\ldots 100010010\\
+\ \ldots 000990090\\
\hline
\ldots 101000100
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\ldots 175321\\
\times\ \ldots 531498\\
\hline
\ldots 402568\\
\ldots 577889\\
+\ \ldots 701284\\
\ldots 175321\\
\ldots 525963\\
\ldots 876605\\
\hline
\ldots 760858
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\ldots\ldots\\
-\ \ldots 00000\\
\ldots 00001\\
\hline
\ldots 99999
\end{array}
$$

Обратимся теперь к делению. Если делитель оканчивается на одну из цифр 1, 3, 7, 9, то деление можно произвести методом, описанным в § 1. Например,

$$
\begin{array}{l|l}
\ldots 23517 & \ldots 85143\\
\cline{2-2}
\ldots 66287 & \ldots 40619\\
\cline{1-1}
\ldots 5723 & \\
\ldots 5143 & \\
\cline{1-1}
\ldots 058 & \\
\ldots 858 & \\
\cline{1-1}
\ldots 20 & \\
\quad 2 &
\end{array}
$$

Результат деления снова является целым бесконечнозначным числом. Сложнее обстоит дело, если делитель оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8, 5: в этом случае далеко не всегда удается подобрать целое бесконечнозначное число так, чтобы при умножении на делитель оно давало делимое. Пусть, например, делимое оканчивается цифрой 1, а делитель равен 10. Какое бы целое бесконечнозначное число мы ни умножали на 10, результат всегда оканчивается нулем и, значит, заведомо не равен делимому. Таким образом, разделить на 10 число, оканчивающееся единицей, оставаясь в области целых бесконечнозначных чисел, невозможно. Естественным выходом представляется ввести в рассмотрение н е ц е л ы е б е с к о н е ч н о з н а ч н ы е числа, такие, как, например, $\ldots 66739{,}1$ или $\ldots 56429{,}0000017$ и т. п., т. е. числа, имеющие конечное число знаков после запятой. Сложение, вычитание и умножение этих чисел производятся по тем же самым правилам, что и операции над обычными десятичными дробями, и не нуждаются ни в каких дополнительных объяснениях.

После введения нецелых бесконечнозначных чисел деление на 10 становится легко выполнимым: оно сводится к перенесению запятой на один знак влево. Вместе с тем становится легко выполнимым и деление на 2 и на 5: оно сводится к делению на 10 и умножению на 5 или на 2. Умея делить на 2, на 5 и на любое число a, оканчивающееся цифрами 1, 3, 7, 9, мы тем самым получаем возможность делить на любое произведение вида 2^m5^na: для того чтобы поделить на 2^m5^na, достаточно m раз поделить на 2, n раз поделить на 5 и затем поделить на a. Так как в упомянутом виде можно представить произвольное конечнозначное число, то, стало быть, деление на конечнозначное число всегда выполнимо. Однако если делитель — число бесконечнозначное, то нет никаких оснований ожидать, что его удастся представить в виде 2^m5^na, где a оканчивается цифрами 1, 3, 7, 9; действительно, примеры показывают (см. ниже задачу 97), что *деление на бесконечнозначное число выполнимо не всегда*, даже если использовать нецелые бесконечнозначные числа [1]).

Отметим в заключение сходство между арифметикой бесконечнозначных чисел и 10-арифметикой: в каждой из этих арифметик всегда выполнимы операции сложения, вычитания и умножения, причем для этих операций справедливы все законы обычной арифметики (см. формулы на стр. 50, 53—54); в каждой из этих арифметик деление выполнимо не всегда,

95. Найти целые бесконечнозначные периодические числа, выражающие отношения 1 : 3, 1 : 7, 1 : 9. Проверить результаты умножением.

---

[1]) Читатель может спросить, почему не рассматриваются числа, имеющие бесконечное число знаков после запятой, т. е. числа, бесконечные в обе стороны. Дело в том, что для таких чисел невозможно разумно определить арифметические операции (сложение и т. д.); выражаясь фигурально, к ним «неоткуда подступиться».

96. Докажите, что в помещенной ниже таблице

$$\begin{array}{r}
5\\
2\,5\\
6\,2\,5\\
3\,9\,0\,6\,2\,5\\
1\,5\,2\,5\,8\,7\,8\,9\,0\,6\,2\,5\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

в которой каждое число, начиная со второго (сверху), получается возвышением в квадрат числа, стоящего над ним:

а) бесконечнозначное число $d = \ldots 90625$, заключенное в рамку, равно своему квадрату, т. е. $d^2 = d$;

б) тем же свойством обладает число $e = 1 - d = \ldots 09376$ (т. е. $e^2 = e$);

в) $de = 0$.

Указание. Предварительно докажите, что у n-го и $(n+1)$-го чисел таблицы совпадают последние n цифр.

97. Докажите, что число d, построенное в предыдущей задаче, не имеет обратного, т. е. нельзя подобрать никакого бесконечнозначного числа x (ни целого, ни дробного) так, чтобы $xd = 1$.

98. Докажите, что условию $x^2 = x$ удовлетворяют только четыре бесконечнозначных числа: 0, 1 и числа $d = \ldots 90625$ и $e = \ldots 09376$, построенные в задаче 96.

§ 3. m-адические и p-адические числа

Системы счисления. В предыдущих параграфах числу 10 принадлежала исключительная роль. Причина этого в том, что 10 — основание системы счисления, которой мы обычно пользуемся: если многозначное число записывается цифрами a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, то оно равно

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Предпочтение, которое при этом оказывается числу 10, объясняется, конечно, не какими-нибудь особенными математическими преимуществами этого числа перед всеми остальными числами натурального ряда, а историей возникновения нумерации, неразрывно связанной со счетом на пальцах. Вместо десяти можно принять за основание системы счисления любое натуральное число m, и среди всех этих m-ичных систем счисления десятичная система не выделяется решительно ничем, кроме того, что к ней мы привыкли.

Познакомимся ближе с какой-нибудь из систем счисления, отличных от десятичной, например с пятиричной. В этой системе только пять цифр 0, 1, 2, 3, 4; запись 122 в пятиричной системе означает число $1\cdot 5^2+2\cdot 5+2$, т. е. тридцать семь; запись 2001 обозначает число $2\cdot 5^3+0\cdot 5^2+0\cdot 5+1$, т. е. двести пятьдесят один. Вообще число, записывающееся цифрами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ в m-ичной системе, равно

$$a_n\cdot m^n+a_{n-1}\cdot m^{n-1}+\ldots+a_1\cdot m+a_0.$$

Покажем, как перейти от десятичной записи числа к пятиричной. Рассмотрим в качестве примера число 1666. Выпишем равенства:

$$\begin{aligned}
1666 &= 5\cdot 333+1,\\
333 &= 5\cdot 66+3,\\
66 &= 5\cdot 13+1,\\
13 &= 5\cdot 2+3,\\
2 &= 5\cdot 0+2.
\end{aligned}$$

Первое из этих равенств выражает, что при делении на 5 число 1666 дает в частном 333 и в остатке 1. Аналогично остальные равенства выражают результаты деления на 5 последовательных частных 333, 66, 13, 2. Запись числа 1666 в пятиричной системе счисления имеет вид 23 131; его цифрами служат найденные нами остатки. Операции сложения, вычитания и умножения многозначных чисел производятся в пятиричной системе счисления по тем же правилам, что и в десятичной системе. При их выполнении удобно пользоваться таблицами сложения и умножения, составленными в пятиричной же системе.

Приводим эти таблицы:

Таблица сложения

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Таблица умножения

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Приведем примеры, иллюстрирующие действия в пятиричной системе счисления:

$$+\begin{array}{r}4302\\3043\\\hline 12400\end{array}\qquad -\begin{array}{r}1340\\441\\\hline 344\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}421\\432\\\hline 1342\\+\ 2313\\3234\\\hline 403422\end{array}$$

Все, что мы говорили о пятиричной системе счисления, можно было бы повторить для произвольной m-ичной системы счисления. Единственное дополнительное замечание, которое необходимо сделать, касается обозначения цифр. В m-ичной системе счисления m цифр. Если $m > 10$, то обычных значков 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 нехватит для их обозначения. Придется ввести дополнительные значки. Например, в 12-ричной системе счисления потребуются новые значки для обозначения чисел 10 и 11. В качестве таких значков можно принять, например, буквы α и β.

---

m-адические числа. Сделаем теперь еще один шаг и будем рассматривать в m-ичной системе счисления не только многозначные, но и бесконечнозначные числа, т. е. бесконечные справа налево последовательности цифр m-ичной системы счисления. Так как термин «бесконечнозначные числа» ничего не говорит о том, какая именно система счисления положена в основу, вместо него употребляют другой, более определенный термин «*m-адические числа*». Сложение, вычитание и умножение m-адических чисел отличается от соответствующих операций над 10-адическими числами, рассматривавшимися в предыдущем параграфе, не больше, чем отличаются между собой действия над многозначными числами в m-ичной и десятичной системах счисления. Приведем для иллюстрации несколько примеров на сложение, вычитание и умножение 5-адических чисел

$$
+\begin{array}{r}
\ldots 3333{,}1034\\
\ldots 1111{,}432\\
\hline
\ldots 0000{,}0404
\end{array}
\qquad
-\begin{array}{r}
\ldots 13203{,}1\\
\ldots 21403{,}2\\
\hline
\ldots 41244{,}4
\end{array}
\qquad
\times\begin{array}{r}
\ldots 43001\\
\ldots 32104\\
\hline
\ldots 32004\\
+\ \ldots 001\\
\ldots 02\\
\ldots 3\\
\hline
\ldots 14104
\end{array}
$$

Мы уже отмечали в предыдущем параграфе сходство между арифметикой 10-адических чисел и 10-арифметикой. Теперь мы можем сказать, что в таком же самом отношении находятся между собой арифметика m-адических чисел и m-арифметика.

***p*-адические числа.** Среди всевозможных m-арифметик особенное место занимают, как мы видели, p-арифметики (p — простое число). Естественно поэтому ожидать особенно интересных свойств и от p-адических чисел. И, действительно, эти свойства обнаруживаются, как только мы обращаемся к операции деления: *в области p-адических чисел деление всегда выполнимо.* Опишем, как его производить. Если последняя цифра делителя не нуль, то мы находим цифру, обратную для этой цифры в смысле p-арифметики (такая всегда существует), подписываем эту обратную цифру сверху около делителя и производим деление совершенно аналогично тому, как мы делили в предыдущем параграфе на число, оканчивающееся цифрами 1, 3, 7, 9. Приведем примеры для 7-адических чисел

```
   ...001 |  3                Проверка
 −    21  |------               ...445
   ------ | ...445           ×       3
     015                      --------
 −    15                        ...001
   ------
      15

                              Проверка

   ...163 | ...346            ...346
 − ...053 |---------         × ...064
   ------ | ...064            --------
   ...11                        ...053
 − ...11                     +  ...11
   ------                       ...0
   ...                        --------
                                ...163
```

Если делитель оканчивается k нулями, то он имеет вид $p^k \cdot a$, где последняя цифра числа a отлична от нуля. Деление на такое число сводится к делению на p^k, что достигается простым переносом запятой на k знаков влево, и к последующему делению на a, которое выполняется уже известным способом. Например, деление 7-адического числа $\ldots 163$ на 7-адическое число $\ldots 34600$ производится следующим образом:

$$\ldots 163 : \ldots 34600 = (\ldots 163 : 100) : \ldots 346 =$$
$$= \ldots 1{,}63 : \ldots 346 = \ldots 0{,}64.$$

Таким образом, p-адические числа — целые и нецелые — образуют систему, в которой, как и в p-арифметике, всегда выполнимы четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление.

Геометрические прогрессии. Последовательность p-адических чисел

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

называется *геометрической прогрессией*, если каждый ее член, начиная с b_1, получается из предыдущего умножением на одно и то же число q — *знаменатель* прогрессии, т. е. $b_n = b_{n-1}q$ $(n \geqslant 1)$. Мы будем всегда предполагать, что $b \neq 0$, $q \neq 0$ (иначе прогрессия вырождается в последовательность нулей). В задачах 99—101 изучаются геометрические прогрессии, членами которых являются целые p-адические числа.

99. Пусть a — произвольное целое p-адическое число, последняя цифра которого отлична от нуля. Докажите, что последняя цифра числа $a^{p-1} - 1$ есть 0. (Для случая, когда a — конечнозначное число, эта задача совпадает с задачей 72.)

100. Пусть a — произвольное целое p-адическое число, последняя цифра которого отлична от нуля. Докажите, что число $a^{p^{k-1}(p-1)} - 1$ оканчивается k нулями.

101. Докажите, что если в каждом члене геометрической прогрессии $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ (все b_i — целые p-адические числа; знаменатель прогрессии не делится на p) оставить лишь последние k цифр, то получится периодическая последовательность, длина которой есть делитель числа $p^{k-1}(p-1)$. Другими словами, докажите, что b_n и $b_{n+p^{k-1}(p-1)}$ имеют одни и те же k последних цифр.

Извлечение квадратного корня. Квадратные уравнения

102. Докажите, что уравнение $x^2 = a$ либо имеет в арифметике p-адических чисел два различных решения, либо не имеет ни одного решения.

103. Выведите формулу для решения квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(a, b и c — p-адические числа, $a \neq 0$).

Попытаемся теперь найти способ извлечения корня из p-адических чисел. Достаточно рассмотреть извлечение корня лишь из целых чисел. Если число имеет k цифр после запятой, то поступаем так: умножаем его на p^{2k} (число становится целым), после чего извлекаем корень и результат делим на p^k.

104. Докажите, что квадратный корень из целого p-адического числа есть число целое.

105. Доказать, что если из некоторого p-адического числа извлекается квадратный корень, то в p-арифметике извлекается квадратный корень из его последней цифры.

Если целое p-адическое число оканчивается нечетным числом нулей, то из него нельзя извлечь квадратный корень. Действительно, если некоторое целое число оканчивается k нулями, то квадрат его оканчивается $2k$ нулями. Пусть теперь число оканчивается $2k$ нулями; тогда все эти нули можно отбросить (иными словами, разделить на p^{2k}), из получившегося числа извлечь корень и к результату приписать k нулей (помножить на p^k). Поэтому извлечение квадратного корня из произвольных p-адических чисел сводится к извлечению корня из целых p-адических чисел, последняя цифра которых отлична от нуля.

Мы покажем сейчас, как извлечь квадратный корень из p-адического числа, если последняя цифра этого числа отлична от нуля и из нее извлекается квадратный корень в p-арифметике (случай $p=2$ исключается). Научимся сначала извлекать корень с точностью до n цифр. Мы назовем p-адическое число B_n *квадратным корнем с точностью до n цифр* из p-адического числа A, если B_n^2 и A имеют одни и те же последние n цифр.

106. Проверьте, что в 3-адической арифметике 201 является квадратным корнем с точностью до трех цифр из числа ...112101 [1]).

Пусть мы уже нашли B_n. Покажем, как в этом случае найти B_{n+1} — квадратный корень из A с точностью до $n+1$ цифр. Ищем B_{n+1} в виде

$$B_{n+1}=B_n+x\cdot 10^n \text{ [2])},$$

где x — однозначное p-адическое число ($x\cdot 10^n = x\underbrace{00\ldots00}_{n\ \text{нулей}}$).

[1]) Мы употребляем запись 201 вместо ...000201. Каждое конечнозначное число в m-ичной системе счисления можно, таким образом, рассматривать как m-адическое.

[2]) Заметим, что число p в p-адической арифметике записывается, как 10.

Возводя B_{n+1} в квадрат, получаем

$$B_{n+1}^2 = B_n^2 + 2B_n \cdot x \cdot 10^n + x^2 \cdot 10^{2n},$$

откуда

$$2B_n \cdot x \cdot 10^n = B_{n+1}^2 - B_n^2 - x^2 \cdot 10^{2n}. \qquad (1)$$

Нам нужно, чтобы у B_{n+1}^2 и A совпадали $n+1$ последних цифр. Из формулы (1) следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы у числа $2 \cdot B_n \cdot x \cdot 10^n$ были те же последние $n+1$ цифр, что и у числа $A - B_n^2 - x^2 \cdot 10^{2n}$, или, что то же самое, у числа $A - B_n^2$ (так как $x^2 \cdot 10^{2n}$ оканчивается $2n$ нулями).

Итак, $n+1$ последних цифр у чисел $2B_n \cdot x \cdot 10^n$ и $A^2 - B_n^2$ должны совпадать. Как $2B_n \cdot x \cdot 10^n$, так и $A^2 - B_n^2$ оканчиваются на n нулей, так что последние n цифр совпадают автоматически. Пусть последняя цифра числа B_n есть b (так как по условию последняя цифра A отлична от нуля, то и $b \neq 0$). Тогда последняя цифра числа $2B_n$ есть $c = 2b$ (p-арифметическое произведение 2 и b), причем $c \neq 0$, так как $p \neq 2$ и $b \neq 0$. В таком случае c есть $(n+1)$-я справа цифра числа $2B_n \cdot 10^n$, а $(n+1)$-я цифра числа $2B_n \cdot 10^n \cdot x$ есть cx (p-арифметическое произведение c и x). Обозначив $(n+1)$-ю цифру числа $A^2 - B_n^2$ через d, имеем

$$cx = d,$$

откуда $x = \frac{d}{c}$ в p-арифметике (так как $c \neq 0$, то деление возможно). Таким образом, мы нашли B_{n+1}. Заметим, что у B_{n+1} и B_n последние n цифр совпадают.

Пример. Найти квадратный корень с точностью до четырех цифр из 3-адического числа $\ldots 112101$. Корень с точностью до трех знаков мы уже знаем (задача 106); он есть 201. Ищем нужное нам число в виде $(201 + x \cdot 10^3)$. Имеем

$$(201 + x \cdot 10^3)^2 = 201^2 + 2 \cdot 201 \cdot x \cdot 10^3 + x^2 \cdot 10^6 =$$
$$= 111101 + 1102000 \cdot x + x^2 \cdot 10^6.$$

Последние четыре цифры этого числа должны совпадать с соответствующими цифрами числа $\ldots 112101$. Это равносильно тому, что последние четыре цифры числа $1102000 \cdot x$ должны быть равны последним четырем цифрам числа

$$\ldots 112101 - 111101 - x^2 \cdot 10^6 = \ldots 001000; \qquad (2)$$

четвертая справа цифра числа $1102000 \cdot x$ есть $2x$ (в 3-арифметике), а у числа (2) эта цифра 1, откуда

$$2x = 1 \quad \text{(в 3-арифметике)}$$

и $x = 2$. Представляем читателю проверить, что $201 + 2 \cdot 10^3 = 2201$ действительно является квадратным корнем из $\ldots 112101$ с точностью до четырех цифр.

Теперь мы в состоянии построить квадратный корень из p-адического числа A. Пусть последняя цифра числа A есть a_1. Если $\sqrt{a_1}$ извлекается в p-арифметике, то $a_1 = b_1^2$ (в p-арифметике). Тогда p-адическое число $B_1 = \ldots 00b_1$ является квадратным корнем из A с точностью до одной цифры. Пользуясь нашим приемом, построим последовательно $B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$

Выпишем эти числа одно под другим:

$$\begin{aligned}
\ldots\ldots\, b_1 &= B_1,\\
\ldots\ldots\, b_2b_1 &= B_2,\\
\ldots\, b_3b_2b_1 &= B_3,\\
\ldots b_4b_3b_2b_1 &= B_4,\\
\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}$$

Цифры, стоящие по главной диагонали этой таблицы, образуют p-адическое число $B = \ldots b_4b_3b_2b_1$. Легко видеть, что $B^2 = A$.

Принимая во внимание задачу 105, мы получаем, таким образом, следующий результат:

Пусть $p \neq 2$ и последняя цифра p-адического числа A отлична от нуля; тогда из A можно извлечь квадратный корень в том и только в том случае, если из последней цифры A извлекается квадратный корень в p-арифметике.

ГЛАВА III

ПРИЛОЖЕНИЯ m-АРИФМЕТИКИ И p-АРИФМЕТИКИ К ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

§ 1. Ряд Фибоначчи

Последовательность чисел

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

называется *рядом Фибоначчи* (сокращенно рядом Φ), если каждый ее член, начиная с u_2, равен сумме двух предыдущих членов, т. е.

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (\text{для } n \geqslant 2).$$

Таким образом, ряд Φ полностью определяется, если задать два его начальных члена u_0 и u_1.

Выбирая по-разному числа u_0 и u_1, мы получим различные ряды Фибоначчи. Из этих рядов особую роль играет ряд, начинающийся числами 0, 1, т. е. ряд

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \ldots$$

Условимся называть этот ряд рядом Φ^0 и будем обозначать его члены буквами $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$:

$$a_0 = 0,\ \ a_1 = 1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = 3,\ \ a_5 = 5,\ \ a_6 = 8,\ \ldots$$

Некоторые соотношения между числами ряда Фибоначчи.

107. Пусть $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ — какой-нибудь ряд Фибоначчи. Докажите, что n-й член этого ряда выражается через u_0 и u_1 по формуле

$$u_n = a_{n-1}u_0 + a_n u_1.$$

(Для того чтобы эта формула осталась верной при $n=0$, надо положить $a_{-1}=1$.)

108. Докажите формулу

$$a_{n+m-1}=a_{n-1}a_{m-1}+a_n a_m.$$

109. Докажите, что сумма квадратов двух соседних членов ряда Φ^0 (т. е. $a_{n-1}^2+a_n^2$) есть число из того же ряда Φ^0.

110. Докажите, что если в ряде Φ^0 выбрать любые три последовательных члена a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, перемножить крайние из них и вычесть из произведения квадрат среднего, то получится 1 или -1. Докажите, что для произвольного ряда Фибоначчи (не обязательно начинающегося числами 0, 1) выражение $u_{n-1}u_{n+1}-u_n^2$ имеет при любом n одну и ту же абсолютную величину.

111. Докажите, что если выбрать в ряде Φ^0 четыре последовательных члена a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} и вычесть из произведения крайних членов $a_{n-1}a_{n+2}$ произведение средних членов $a_n a_{n+1}$, то получится 1 или -1. Докажите, что в случае произвольного ряда Фибоначчи абсолютная величина выражения $u_{n-1}u_{n+2}-u_n u_{n+1}$ не зависит от n.

***m*-арифметические ряды Фибоначчи.** Последовательность

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$$

элементов m-арифметики (см. стр. 52) называется *m-арифметическим рядом Фибоначчи* (сокращенно *рядом Φ_m*), если для $n \geqslant 2$

$$v_n=v_{n-2}+v_{n-1}$$

(сложение понимается в смысле m-арифметики). Как и в обычной арифметике, ряд Φ_m полностью определяется своими двумя начальными членами v_0, v_1. Например, ряд Φ_{11}, начинающийся с чисел 4, 5, имеет вид

$$4,\ 5,\ 9,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

6 Зак. 3398. Е. Дынкин и В. Успенский

Особенное значение имеет ряд, начинающийся элементами 0, 1. Его мы будем называть *рядом* Φ_m^0, а его члены обозначать буквами $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ Например, ряд Φ_5^0 запишется так:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 3,\ 3,\ 1,\ 4,\ 0,\ 4,\ 4,\ \ldots$$

Формулы, выведенные в задачах 107—111, справедливы и для m-арифметических рядов, если в них заменить буквы $u_0, u_1, u_2, \ldots; a_0, a_1, a_2, \ldots$ соответственно буквами $v_0, v_1, v_2, \ldots; c_0, c_1, c_2, \ldots$

Заметим еще, что если под каждым из чисел ряда Φ^0

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

написать остаток от деления этого числа на m, то остатки образуют m-арифметический ряд Фибоначчи Φ_m^0.

Распределение в ряде Фибоначчи чисел, делящихся на m.

112. Убедитесь, что последние цифры чисел ряда Φ^0 повторяются периодически. Чему равна длина периода?

113. (Обобщение задачи 112.) Докажите, что все m-арифметические ряды Фибоначчи являются периодическими, причем длина периода не превосходит m^2.

114. Пусть m — любое целое число. Докажите, что в ряде Φ^0

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

найдется бесконечно много чисел, делящихся на m [1]).

Система n элементов m-арифметики, выписанных по кругу, на равных расстояниях друг от друга, называется

---

[1]) Во втором туре IX Московской математической олимпиады для 9—10-х классов был предложен следующий частный случай этой задачи:

Докажите, что среди первых 10^8+1 членов ряда Фибоначчи

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

найдутся числа, оканчивающиеся четырьмя нулями.

круговым m-арифметическим рядом Фибоначчи, или сокращенно рядом $\breve{\Phi}_m$ (читается: «Φ_m с дугой»), если при движении по часовой стрелке каждый член ряда равен сумме двух членов, ему предшествующих. На рис. 51 даны примеры рядов $\breve{\Phi}_5$.

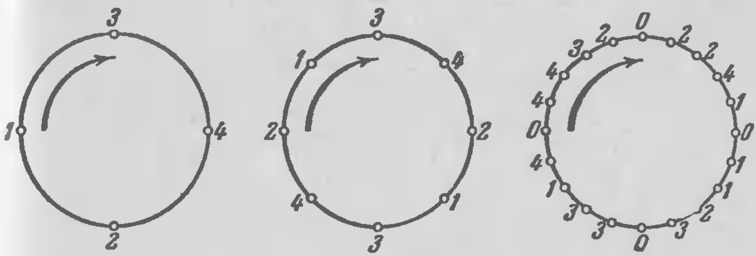


Рис. 51.

Мы будем называть ряд $\breve{\Phi}_m$ *рядом без повторений*, если он не может совместиться с собой при повороте на угол, больший 0°, но меньший 360°.

Из приведенных на рис. 51 рядов первый и третий являются рядами без повторений. Второй ряд является рядом с повторениями, ибо он совмещается с собой при повороте на 180°. Заметим, что если в некотором круговом ряде $\breve{\Phi}_m$ встречается дважды одна и та же пара соседних элементов, то этот ряд является рядом с повторениями. Действительно, если ряд имеет вид, изображенный на рис. 52, где $x=u$, $y=v$, то он совмещается с собой при повороте, переводящем x в u и y в v.

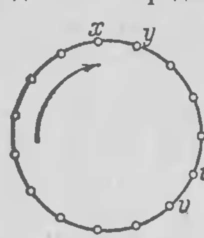


Рис. 52.

Согласно задаче 113 любой m-арифметический ряд Фибоначчи является периодическим. Поэтому при изучении такого ряда достаточно иметь дело с его первыми членами, составляющими период. Если выписать эти числа по кругу по часовой стрелке, то получится круговой m-арифметический ряд Фибоначчи без повторений.

115. Выпишите круговые ряды $\breve{\Phi}_2^0$, $\breve{\Phi}_3^0$, $\breve{\Phi}_4^0$, $\breve{\Phi}_5^0$, $\breve{\Phi}_6^0$, $\breve{\Phi}_7^0$, $\breve{\Phi}_8^0$, $\breve{\Phi}_9^0$, $\breve{\Phi}_{10}^0$, $\breve{\Phi}_{11}^0$ (буквой $\breve{\Phi}_m^0$ обозначается круговой m-арифметический ряд Фибоначчи без повторений, содержащий пару 0, 1).

116. Пусть x и y — два элемента ряда $\breve{\Phi}_m$. Докажите, что если в ряде $\breve{\Phi}_m$ найдется нуль, отстоящий на одинаковых расстояниях от x и y [1]) (рис. 53), то либо $x+y=0$, либо $x-y=0$.

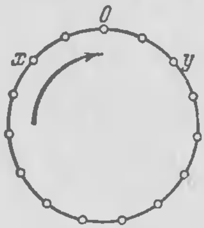


Рис. 53.

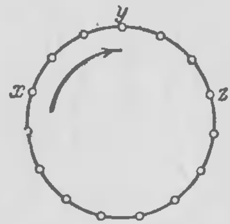


Рис. 54.

117. Пусть три элемента x, y, z кругового ряда $\breve{\Phi}_m$ расположены так, что расстояние между x и y равно расстоянию между y и z (рис. 54). Докажите, что если $x=y=0$, то $z=0$.

118. Докажите, что нули, встречающиеся в ряде $\breve{\Phi}_m$, разбивают этот ряд на части равной длины.

119. Докажите, что в ряде Φ^0

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

числа, делящиеся на m, расположены на равных расстояниях друг от друга.

120. Докажите, что если круговой ряд без повторений $\breve{\Phi}_m$ содержит нуль и состоит из нечетного числа элементов, то число его элементов равно трем.

121. Докажите, что число нулей, встречающихся в круговом ряде без повторений $\breve{\Phi}_m$, равно 0, 1, 2 или 4. (Отсюда следует, что в периоде m-арифметического ряда Фибоначчи число нулей равно 0, 1, 2 или 4.)

---

[1]) В том смысле, что дуги $\overset{\smile}{x0}$ и $\overset{\smile}{y0}$ содержат одинаковое число членов ряда.

Ряд Фибоначчи и геометрическая прогрессия. Последовательность элементов

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

из m-арифметики называется *геометрической прогрессией*, если каждый ее член, начиная с b_1, получается из предыдущего члена умножением на одно и то же постоянное число q — знаменатель прогрессии. Например, в 7-арифметике при $b_0=5$, $q=3$ имеем геометрическую прогрессию

$$5,\ 1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5,\ 1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5,\ \ldots;$$

в 12-арифметике при $b_0=1$, $q=2$

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 4,\ 8,\ 4,\ \ldots$$

Общий член b_n геометрической прогрессии выражается через начальный член b_0 и знаменатель q по формуле

$$b_n=b_0q^n,$$

которая выводится, как в обычном школьном курсе.

Мы будем рассматривать только такие геометрические прогрессии, у которых $b_0 \neq 0$ и $q \neq 0$ (иначе прогрессия вырождается в последовательность нулей).

122. Периодическая последовательность

$$1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 3,\ \ 1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 3,\ \ 1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 3,\ \ldots \qquad (1)$$

элементов 11-арифметики является одновременно геометрической прогрессией и рядом Фибоначчи. Теми же свойствами обладает последовательность

$$b,\ 4b,\ 5b,\ 9b,\ 3b,\ \ b,\ 4b,\ 5b,\ 9b,\ 3b,\ \ b,\ 4b,\ 5b,\ 9b,\ 3b,\ \ldots,$$

получающаяся из последовательности (1) умножением на произвольный элемент b из 11-арифметики.

а) Найдите все 11-арифметические последовательности, являющиеся одновременно геометрическими прогрессиями и рядами Фибоначчи.

б) Докажите, что в 7-арифметике ни одной такой последовательности не существует.

123. Разложите ряд Φ_{11}^{0}

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 2,\ 10,\ 1,\ \ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 2,\ 10,\ 1,\ \ldots,$$

в сумму двух 11-арифметических рядов Фибоначчи, являющихся в то же время геометрическими прогрессиями[1]).

124. Докажите, что:

а) Если в p-арифметике[2]) нельзя извлечь $\sqrt{5}$, то в этой арифметике нельзя построить последовательности, являющейся одновременно как геометрической прогрессией, так и рядом Фибоначчи.

б) Если в p-арифметике $\sqrt{5}$ извлекается, то в этой арифметике существуют ряды Фибоначчи, являющиеся в то же время геометрическими прогрессиями, и произвольный ряд Фибоначчи можно представить в виде суммы двух таких рядов.

125. Докажите, что если в некоторой p-арифметике извлекается $\sqrt{5}$ и если

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$$

— произвольный ряд Фибоначчи из этой арифметики, то

$$v_{p-1}=v_0,\quad v_p=v_1,\quad v_{p+1}=v_2,\ \ldots,\ v_{k+p-1}=v_k,\ \ldots$$

126. Если в p-арифметике можно извлечь $\sqrt{5}$, то число элементов всякого кругового ряда Фибоначчи без повторений является делителем числа $p-1$.

***p*-арифметические ряды Фибоначчи.** Пусть v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ... — произвольный p-арифметический ряд Фибоначчи. Построим последовательность

$$t_1=\frac{v_1}{v_0},\quad t_2=\frac{v_2}{v_1},\ \ldots,\ t_n=\frac{v_n}{v_{n-1}},\ \ldots$$

Эту последовательность мы условимся называть *рядом отношений* для ряда $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ Если некоторые из чисел

---

[1]) То-есть подберите две последовательности $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ и $b'_0, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots$, являющиеся одновременно геометрическими прогрессиями и рядами Фибоначчи, так, чтобы

$$c_0=b_0+b'_0,\quad c_1=b_1+b'_1,\quad c_2=b_2+b'_2, \ldots,\ c_n=b_n+b'_n, \ldots$$

[2]) В задачах 124—126 p обозначает простое число, отличное от 2 и 5.

$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ равны нулю, то в ряде отношений, кроме чисел из p-арифметики, встречается символ ∞ [1]) (если какие-нибудь два соседних элемента ряда $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ равны нулю, то все элементы этого ряда равны нулю; этот случай мы исключаем из рассмотрения).

127. Вычислите первые 15 членов рядов отношений, соответствующих рядам $\Phi_2^0, \Phi_3^0, \Phi_5^0, \Phi_7^0, \Phi_{11}^0, \Phi_{13}^0$.

128. а) Докажите, что последовательные члены ряда отношений, отвечающего произвольному ряду Фибоначчи, связаны формулой

$$t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}}.$$

Используя эту формулу, докажите, что ряд $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ является периодическим и на протяжении периода никакое число не повторяется дважды.

б) Выведите из задачи а), что, каково бы ни было простое число p, в ряде Фибоначчи

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots$$

встречается бесконечно много чисел, делящихся на p, и все эти числа расположены на равных расстояниях друг от друга.

129. Пусть

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, \quad v'_0, v'_1, v'_2, \ldots$$

— два произвольных p-арифметических ряда Фибоначчи и

$$t_1 = \frac{v_1}{v_0}, \quad t_2 = \frac{v_2}{v_1}, \ldots, t_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}, \ldots, \tag{2}$$

$$t'_1 = \frac{v'_1}{v'_0}, \quad t'_2 = \frac{v'_2}{v'_1}, \ldots, t'_n = \frac{v'_n}{v'_{n-1}}, \ldots \tag{3}$$

— отвечающие им ряды отношений. Докажите, что если эти ряды отношений содержат хотя бы один общий элемент (т. е. если для каких-нибудь k и l имеет место равенство $t_k = t'_l$), то они состоят из одних и тех же элементов, т. е. каждый элемент ряда (2) встречается в ряде (3), и обратно.

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 57.

130. Пусть

$$t_1 = \frac{v_1}{v_0}, \quad t_2 = \frac{v_2}{v_1}, \ \ldots, \ t_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}, \ \ldots \tag{4}$$

и

$$t_1' = \frac{v_1'}{v_0'}, \quad t_2' = \frac{v_2'}{v_1'}, \ \ldots, \ t_n' = \frac{v_n'}{v_{n-1}'}, \ \ldots \tag{5}$$

— ряды отношений, соответствующие каким-нибудь двум p-арифметическим рядам Фибоначчи. Докажите, что если ни t_1, ни t_1' не удовлетворяют уравнению $x^2 - x - 1 = 0$, то оба ряда (4) и (5) имеют одинаковую длину периода.

Указание. Рассмотрите ряд отношений

$$\bar{t}_1 = \frac{c_1}{c_0} = \infty, \quad \bar{t}_2 = \frac{c_2}{c_1} = 1, \ldots, \tag{6}$$

отвечающий ряду

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \ldots,$$

и выведите формулу

$$t_{r+1} = \frac{\bar{t}_r + (1 + \bar{t}_r)t_1}{1 + \bar{t}_r t_1},$$

выражающую элементы произвольного ряда отношений (4) через элементы специального ряда (6).

131. а) Пусть r — длина периода ряда отношений, построенного для некоторого p-арифметического ряда Фибоначчи ($p \neq 2$ и $p \neq 5$). Докажите, что:

1) если в p-арифметике не извлекается $\sqrt{5}$, то r является делителем числа $p + 1$;

2) если в p-арифметике извлекается $\sqrt{5}$, то r является делителем числа $p - 1$.

б) Докажите, что, каково бы ни было простое число p, не равное 2 и не равное 5, в ряде Фибоначчи

$a_0 = 0, \ a_1 = 1, \ a_2 = 1, \ a_3 = 2, \ a_4 = 3, \ a_5 = 5, \ a_6 = 8$

из обыкновенной арифметики либо a_{p+1}, либо a_{p-1} делится на p. Первый случай имеет место, если $\sqrt{5}$ не извлекается, второй, — если $\sqrt{5}$ извлекается[1]) (сравните задачу 125).

---

[1]) Можно доказать, что $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике ($p \neq 2$, $p \neq 5$) в том и только в том случае, если p имеет вид $5k \pm 1$.

§ 2. Треугольник Паскаля

Треугольником Паскаля называется следующая бесконечная таблица чисел:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&&\\
&&&&1&&1&&&&\\
&&&1&&2&&1&&&\\
&&1&&3&&3&&1&&\\
&1&&4&&6&&4&&1&\\
1&&5&&10&&10&&5&&1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array}$$

Каждое число в этой таблице равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа. Треугольник Паскаля симметричен относительно своей биссектрисы. Строки треугольника Паскаля нумеруются следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc l}
&&1&&& \text{нулевая строка}\\
&1&&1&& \text{первая строка}\\
1&&2&&1& \text{вторая строка}\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

Член треугольника Паскаля, стоящий в n-й строке на k-м месте слева, считая от нулевого, обозначается обычно C_n^k (например, $C_5^2 = 10$). По определению треугольника Паскаля

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Треугольник Паскаля можно, таким образом, записать в виде

$$\begin{array}{ccccccc}
&&&C_0^0&&&\\
&&C_1^0&&C_1^1&&\\
&C_2^0&&C_2^1&&C_2^2&\\
C_3^0&&C_3^1&&C_3^2&&C_3^3\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array}$$

Из свойства симметрии следует, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

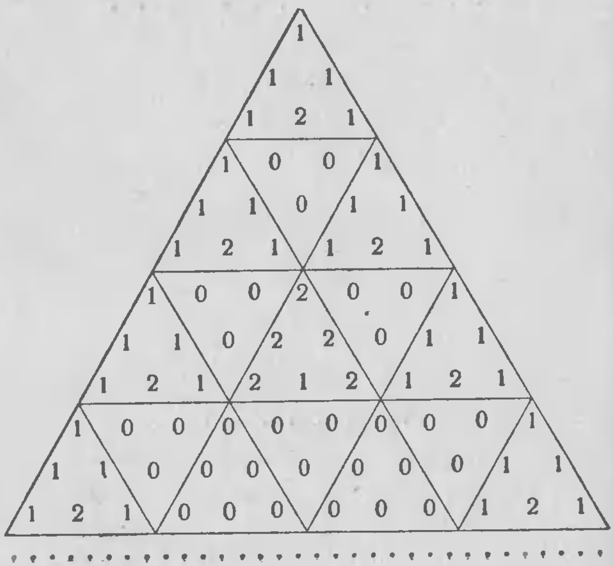
Будем изучать свойства делимости членов треугольника Паскаля. С этой целью рассмотрим m-арифметический треугольник Паскаля, который определяется совершенно так же, с той только разницей, что его членами будут уже не обыкновенные числа, а элементы m-арифметики. Например, 6-арифметический треугольник Паскаля имеет вид

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 0 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 4 & & 4 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 0 & & 3 & & 2 & & 3 & & 0 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

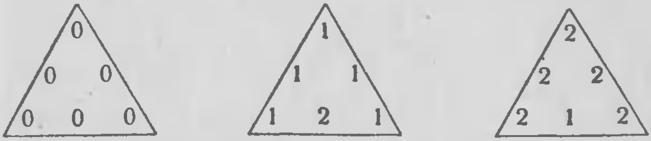
Члены m-арифметического треугольника Паскаля будем обозначать через P_n^k, где P_n^k — остаток от деления C_n^k на m.

132. Докажите, что в n-й строке 2-арифметического треугольника Паскаля все члены, кроме крайних (нулевого и n-го), суть нули в том и только в том случае, когда $n = 2^k$.

Составим 3-арифметический треугольник Паскаля



Мы видим, что он (по крайней мере в той его части, которая изображена на схеме) составлен из треугольников трех типов, обращенных вершинами вверх

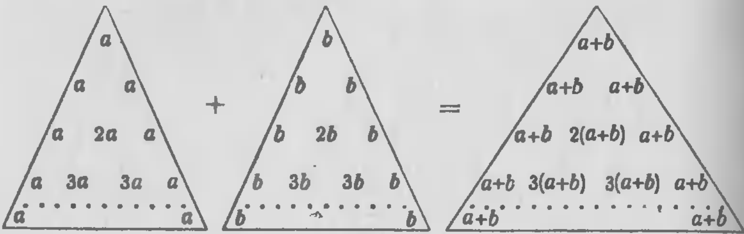


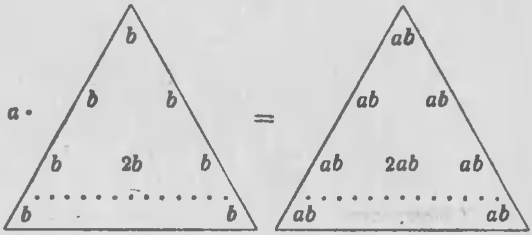
(такие треугольники мы будем называть *элементарными*), и, кроме того, из треугольников, обращённых вершинами вниз, которые сплошь заполнены нулями и нас сейчас не интересуют. Естественно ввести операцию сложения элементарных треугольников. Сумма треугольников есть треугольник, члены которого получаются суммированием соответствующих членов слагаемых треугольников. Тогда, как видно из схемы, каждый элементарный треугольник есть сумма двух элементарных треугольников, над ним стоящих. Другими словами, 3-арифметический треугольник Паскаля составлен из элементарных треугольников так же, как и из чисел. Этот факт, устанавливающий известную периодичность в строении треугольника Паскаля, носит общий характер, т. е. выполняется в любой m-арифметике. Точнее он формулируется в задаче 133 (см. ниже).

Обобщим несколько понятие треугольника Паскаля, именно, будем рассматривать числовые треугольники, у которых по сторонам стоит не обязательно 1, а любое число a:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a & & & \\ & & a & & a & & \\ & a & & 2a & & a & \\ a & & 3a & & 3a & & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Такой треугольник получается из обыкновенного треугольника Паскаля умножением всех его членов на число a. В дальнейшем нас будет интересовать не весь обобщенный треугольник, а его верхняя часть до некоторой определенной строки. Такие треугольники (с одинаковым числом строк) можно складывать между собой и умножать на число





133. Пусть все, кроме крайних, члены s-й строки m-арифметического треугольника Паскаля — нули. Дока-

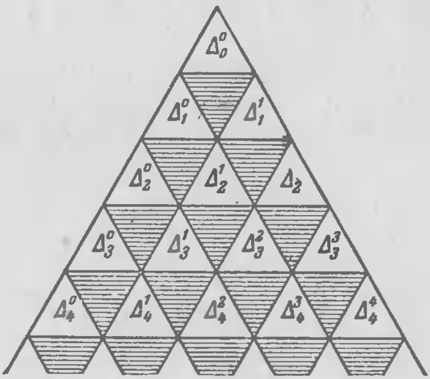


Рис. 55.

жите, что в таком случае он имеет вид, изображенный на рис. 55. Каждый из треугольников Δ_n^k, на которые разбит основной треугольник, состоит из s строк. Заштрихованные треугольники содержат только нули. Треугольники Δ_n^k подчинены следующим соотношениям:

а) $\Delta_n^{k-1} + \Delta_n^k = \Delta_{n+1}^k$,

б) $\Delta_n^k = P_n^k \cdot \Delta_0^0$.

134. Пусть в s-й строке m-арифметического треугольника Паскаля все элементы, кроме крайних, нули. Доказать, что тем же свойством обладают строки с номерами $s^2, s^3, \ldots, s^k, \ldots$

135. Докажите, что если двучлен $1+x$ возвести в n-ю степень и записать его по возрастающим степеням x, то получится равенство

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

или в m-арифметике:

$$(1+x)^n = P_n^0 + P_n^1 x + P_n^2 x^2 + \ldots + P_n^n x^n.$$

136. Докажите, что в p-арифметическом треугольнике Паскаля вся p-я строка (кроме крайних членов) состоит из нулей. (Отсюда на основании задачи 134 следует, что этим же свойством обладают строки с номерами p^2, $p^3, \ldots, p^k$.)

§ 3. Дробно-линейные функции

Выражение $ax+b$, где a и b — какие-нибудь числа, называется *линейной функцией* от x. Например,

$$5x+3, \quad x+1, \quad \frac{3}{4}x, \quad x.$$

Отношение двух линейных функций называется *дробно-линейной функцией*. Примерами дробно-линейных функций могут служить выражения

$$\frac{5x+3}{\frac{3}{4}x+5}, \quad \frac{x}{x+1}, \quad \frac{4x+6}{14x+2}.$$

Дробно-линейная функция общего вида запишется так:

$$\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Дробно-линейную функцию мы будем обозначать через $f(x)$. Если в дробно-линейную функцию $f(x)$ подставить вместо x число n, то получится число $\frac{an+b}{cn+d}$, которое мы обозначим через $f(n)$. Линейная функция есть частный случай дробно-линейной:

$$ax+b=\frac{ax+b}{0\cdot x+1}.$$

Будем рассматривать p-арифметические линейные и дробно-линейные функции, т. е. брать все числа только из p-арифметики и операции сложения, умножения и деления понимать тоже в p-арифметическом смысле. Подставляя вместо x в линейную функцию $ax+b$ число n из p-арифметики, мы получим число $an+b$ опять из p-арифметики. Таким образом, линейная функция каждому числу из p-арифметики ставит в соответствие число из p-арифметики. Например, для 11-арифметической линейной функции $f(x)=7x+4$ имеем

$$f(0)=4;\ f(1)=0;\ f(2)=7;\ f(3)=3;\ f(4)=10;$$
$$f(5)=6;\ f(6)=2;\ f(7)=9;\ f(8)=5;\ f(9)=1;\ f(10)=8.$$

Это можно записать в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 0 & 7 & 3 & 10 & 6 & 2 & 9 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

где в верхней строке выписаны все возможные значения x, а в нижней строке под каждым из них стоит соответствующее значение функции $7x+4$. Вместо таблицы можно нарисовать схему (рис. 56). Стрелки указывают, во что перейдет при применении функции $7x+4$ каждое из чисел 11-арифметики. Из схемы видно, что 11-арифметическая линейная функция $7x+4$ имеет одну неподвижную точку 3; остальные точки образуют один цикл (определение цикла см. на стр. 55).

С частным случаем линейной функции мы уже встречались в § 2 главы I, где изучалось умножение на число a, т. е. линейная функция ax. Повторяя те же рассуждения, легко убедимся, что и схема произвольной линейной функции распадается на циклы, которые, кроме неподвижных точек, все имеют одинаковую длину. Мы вернемся к этому ниже, рассматривая вопрос для дробно-линейных функций.

Рассмотрим теперь произвольную дробно-линейную функцию

$$\frac{ax+b}{cx+d}.$$

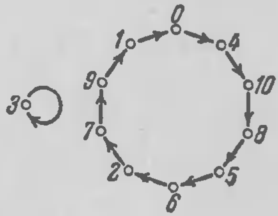


Рис. 56.

Если $ad = bc$, то

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\,\frac{c\,(ax+b)}{a\,(cx+d)} = \frac{a}{c}\,\frac{cax+cb}{acx+ad} = \frac{a}{c},$$

стало быть, при $ad = bc$ выражение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависит от x. Поэтому мы будем постоянно предполагать, что $ad \neq bc$.

Если мы будем подставлять в дробно-линейную функцию вместо x числа из p-арифметики, то мы уже не можем быть уверены, что эта подстановка всегда приведет нас снова к числу из p-арифметики. В самом деле, при подстановке в функцию $\frac{ax+b}{cx+d}$ числа n знаменатель $cn+d$ может обратиться в 0, и в качестве значения функции мы должны принять $\frac{an+b}{0}$ (из условия $ad \neq bc$ следует, что в этом случае $an+b \neq 0$). Деление же на 0 в p-арифметике невозможно. Поэтому расширим p-арифметику, введя в нее символ ∞[1]), и условимся считать ∞ значением функции в нашем случае. Наконец, условимся считать значением дробно-линейной функ-

[1]) Ср. подстрочное примечание на стр. 57. Еще раз напоминаем, что символ ∞ не есть число и с ним нельзя оперировать, как с числом. Случаи, в которых приходится сталкиваться с ∞, следует всегда рассматривать особо.

ции при $x=\infty$ число $\frac{a}{c}$, т. е. положим $f(\infty)=\frac{a}{c}$ [1]). Так определенная дробно-линейная функция каждому из $(p+1)$-го элемента $0, 1, \ldots, p-1, \infty$ ставит в соответствие снова один из этих элементов. Например, 7-арифметическая дробно-линейная функция $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ принимает следующие значения:

$$f(0)=2;\quad f(1)=5;\quad f(2)=6;\quad f(3)=3;\quad f(4)=4;$$

$$f(5)=0;\quad f(6)=\infty;\quad f(\infty)=1.$$

Это можно записать в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \infty \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 0 & \infty & 1 \end{pmatrix}$$

или изобразить в виде схемы (рис. 57).

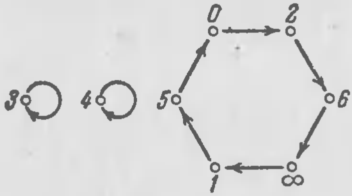


Рис. 57.

Из приведенной схемы видно, что 7-арифметическая дробно-линейная функция $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ имеет две неподвижные точки 3 и 4; все остальные точки образуют один цикл.

---

[1]) В самом деле, естественно считать $\frac{a}{\infty}=0$. Но

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}.$$

Поэтому

$$f(\infty)=\frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}}=\frac{a+0}{c+0}=\frac{a}{c}.$$

137. Составьте схемы, соответствующие 7-арифметическим дробно-линейным функциям

$$\frac{4x+1}{2x+3}, \qquad \frac{2x+1}{3x+2}, \qquad \frac{3x-1}{x+1}.$$

Рассмотрим две дробно-линейные функции

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{и} \quad g(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}.$$

Нетрудно видеть, что если $f(x)$ переводит число m в число n, т. е. $f(m)=n$, то $g(x)$ переводит n обратно в m, $g(n)=m$. Схема функции $g(x)$ получается из схемы функции $f(x)$ простой заменой направления всех стрелок на обратное.

Такая функция $g(x)$ называется *обратной* к $f(x)$ (функция $f(x)$ в свою очередь является обратной к $g(x)$). Функцию, обратную к $f(x)$, мы будем обозначать $f_{-1}(x)$.

138. Пусть $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ — произвольная дробно-линейная функция. Докажите, что в ее схеме к каждой точке подходит некоторая стрелка и притом только одна.

139. Докажите, что схема дробно-линейной функции всегда распадается на циклы: каждая точка схемы попадает в один и только один цикл (сравните с задачей 71).

140. Докажите, что если дробно-линейная функция имеет три неподвижные точки, то она оставляет на месте все без исключения точки.

При изучении дробно-линейной функции для нас существенно то соответствие, которое она устанавливает между числами p-арифметики, т. е. ее таблица или схема, и несущественна ее алгебраическая запись. Одна и та же дробно-линейная функция может записываться различными выражениями: умножая числитель и знаменатель одного такого выражения на некоторое число, мы всегда можем получить другую запись той же функции, не совпадающую с первой. Например, выражения

$$\frac{2x+1}{7x+5} \quad \text{и} \quad \frac{7x-2}{8x+1}$$

суть записи одной и той же 11-арифметической дробно-линейной функции (в этом легко убедиться, написав соответствующую таблицу).

Пусть даны две дробно-линейные функции

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \text{ и } g(x)=\frac{a'x+b'}{c'x+d'}.$$

Новая дробно-линейная функция $f(g(x))$ образуется при помощи подстановки в $f(x)$ вместо x функции $g(x)$:

$$f(g(x))=\frac{a\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}+b}{c\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}+d}=\frac{(aa'+bc')\,x+ab'+bd'}{(ca'+dc')\,x+cb'+dd'}.$$

141. Даны две 7-арифметические функции

$$f(x)=\frac{x+5}{5x+1}, \quad g(x)=\frac{4x+3}{6x+3}.$$

Вычислите $f(g(x))$ и $g(f(x))$.

142. Подберите 7-арифметическую дробно-линейную функцию $f(x)$ так, чтобы $f(0)=0$, $f(1)=4$, $f(4)=2$.

143. Задана тройка различных точек x_1, x_2, x_3. Найдите дробно-линейную функцию $f(x)$ такую, что

$$f(x_1)=0,\ f(x_2)=1,\ f(x_3)=\infty.$$

144. Задана тройка различных точек y_1, y_2, y_3. Докажите, что всегда существует дробно-линейная функция $f(x)$ такая, что $f(0)=y_1$, $f(1)=y_2$, $f(\infty)=y_3$.

145. Заданы две тройки различных точек x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3. Докажите, что всегда можно подобрать и притом единственным образом дробно-линейную функцию $f(x)$ так, чтобы $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $f(x_3)=y_3$.

146. Сосчитайте, сколько всего различных p-арифметических дробно-линейных функций.

Функцию $f(f(x))$ обозначим через $f_2(x)$. Аналогично введем дробно-линейные функции $f_3(x)$, $f_4(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, положив

$$f_3(x) = f(f_2(x)),$$
$$f_4(x) = f(f_3(x)),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

Например,

$$f(x) = \frac{x+1}{x},$$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1},$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{2x+1}{x+1}+1}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{3x+1}{2x+1}.$$

Действие всех функций $f_n(x)$ можно проследить на схеме, построенной для функции $f(x)$. Действие функции $f(x)$ заключается в том, что каждая из точек ее схемы переходит в следующую, т. е. делает один шаг по направлению стрелок. При применении функции $f_2(x)$ каждая точка на схеме $f(x)$ делает уже два шага, попадая во вторую точку. Вообще при применении $f_n(x)$ каждая из точек на схеме $f(x)$ делает по своему циклу n шагов в направлении стрелок, перепрыгивая через $n-1$ точек в n-ю. Это позволяет строить по схеме функции $f(x)$ схемы функций $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... без вычислений.

147. Составьте схемы для 7-арифметических функций $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, если

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}.$$

148. Пусть на схеме функции $f(x)$ точка x_0 принадлежит циклу длины s. Докажите, что если число k делится на s, то $f_k(x_0) = x_0$. Обратно, если $f_k(x_0) = x_0$, то k делится на s.

149. Пусть $f(x)$—произвольная p-арифметическая дробно-линейная функция. Докажите, что если какая-нибудь из функций $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_k(x)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку, не являющуюся неподвижной для $f(x)$, то она оставляет неизменными все точки.

150. Пусть $f(x)$—произвольная p-арифметическая дробно-линейная функция. Докажите, что циклы, на которые распадается ее схема, имеют все одинаковую длину (не считая циклов, состоящих из одной точки, т. е. неподвижных точек функции $f(x)$) (сравните с задачей 71).

151. Пусть задана p-арифметическая последовательность

$$x_0, \qquad x_1 = f(x_0) = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d},$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \ \ldots, \ x_k = f(x_{k-1}) = \frac{ax_{k-1} + b}{cx_{k-1} + d}, \ldots$$

(или, что то же самое, $x_k = f_k(x_0)$). Докажите, что

1) если $\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$ не извлекается в p-арифметике, то $x_{p+1} = x_0$;

2) если $(a-d)^2 + 4bc = 0$, то $x_p = x_0$;

3) если $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$ и $\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}$ извлекается в p-арифметике, то $x_{p-1} = x_0$.

152. Вычислите функции $f_2(x)$ и $f_3(x)$ для p-арифметической функции $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$. Каковы могут быть длины циклов $f(x)$? Покажите, что существует цикл длины 3.

153. а) Пусть p — простое число, большее трех. Докажите, что в p-арифметике $\sqrt{-3}$ можно извлечь тогда и только тогда, когда p имеет вид $3k+1$.

б) Докажите, что, каково бы ни было целое число a, все простые делители числа a^2+3, большие трех, имеют вид $3k+1$. Обратно, для любого простого числа p вида $3k+1$ можно подобрать a так, чтобы a^2+3 делилось на p.

154. Вычислите функции $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ для p-арифметической функции

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Каковы могут быть длины ее циклов? Покажите, что существует цикл длины 4.

155. а) Пусть p — простое число, большее двух. Докажите, что в p-арифметике можно извлечь $\sqrt{-1}$ тогда и только тогда, когда $p = 4k + 1$.

б) Докажите, что для любого целого a все простые нечетные делители числа $a^2 + 1$ имеют вид $4k + 1$. Каждое простое число вида $4k + 1$ встречается в разложении на простые сомножители хотя бы одного числа $a^2 + 1$.

* ГЛАВА IV

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РЯДЕ ФИБОНАЧЧИ И ТРЕУГОЛЬНИКЕ ПАСКАЛЯ [1]

§ 1. Приложение p-адических чисел к ряду Фибоначчи

Выше (стр. 86) было показано, что в том частном случае, когда $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике, вопрос о делимости членов ряда Фибоначчи на p легко решается сведением этого ряда к геометрическим прогрессиям. Покажем теперь, что те же самые рассуждения, если только пользоваться вместо p-арифметики арифметикой p-адических чисел, приводят к отысканию в ряде Фибоначчи чисел, делящихся на произвольную степень простого числа p^k.

Последовательность p-адических чисел

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

называется *рядом Фибоначчи*, если для $n \geqslant 2$

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}.$$

156 [2]**.** Найдите все p-адические ряды Фибоначчи, являющиеся в то же время геометрическими прогрессиями. Докажите, что такие ряды существуют в том и только в том случае, если $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике.

157. Пусть $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике. Докажите, что произвольный p-адический ряд Фибоначчи можно представить в виде суммы двух геометрических прогрессий.

---

[1] Главы, отмеченные звездочкой, содержат дополнительный материал и могут быть опущены при первом чтении.

[2] В задачах 156—159 p обозначает простое число, отличное от 2 и 5.

158. Пусть $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике. Докажите, что у членов p-адического ряда Фибоначчи последние k цифр периодически повторяются; длина периода есть делитель числа $p^{k-1}(p-1)$, так что члены с номерами n и $n+p^{k-1}(p-1)$ (члены u_n и $u_{n+p^{k-1}(p-1)}$) имеют одни и те же k последних цифр.

159. Докажите, что если $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике, то в ряде Фибоначчи из обыкновенных целых чисел

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots$$

член с номером $p^{k-1}(p-1)$ (т. е. $a_{p^{k-1}(p-1)}$) делится на p^k.

§ 2. Связь между треугольником Паскаля и рядом Фибоначчи

160. Докажите, что члены треугольника Паскаля можно вычислять по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

($n!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$; под символом $0!$, не имеющим, вообще говоря, смысла, условно понимают 1).

Заметим, что если $k < p$ и $n-k < p$, то $k!$ и $(n-k)!$ не равны нулю в p-арифметике. Следовательно, в этом случае деление на $k!\,(n-k)!$ возможно в p-арифметике, и равенство, установленное в задаче, сохраняется и при p-арифметическом толковании, т. е.

$$P_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ ^{1)}.$$

161. Докажите, что в p-арифметическом треугольнике Паскаля

$$P_{p-1-k}^k = (-1)^k P_{2k}^k \quad \left(\text{при } k \leqslant \frac{p-1}{2}\right).$$

162. Докажите, что в p-арифметическом треугольнике Паскаля

$$P_{2n}^n = (-4)^n P_{\frac{p-1}{2}}^n \quad \left(\text{при } n \leqslant \frac{p-1}{2}\right).$$

---

[1]) Равенство это p-арифметическое, т. е. все действия в правой части надо понимать в смысле p-арифметики. Символ $n!$ также следует понимать в p-арифметическом смысле, именно, заменить каждый множитель в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$ (и само произведение) остатком от деления на p.

По оси симметрии треугольника Паскаля стоят члены вида C_{2n}^{n}: 1, 2, 6, 20, 70, 252, ... Можно выделить в треугольнике и другие линии — диагонали (рис. 58). Например, по 3-й диагонали стоят члены 1, 1, по 4-й — члены 1, 2 и вообще по n-й диагонали стоят члены C_{n-1}^{0}, C_{n-2}^{1}, ..., C_{n-1-k}^{k}, ... (они продолжаются до тех пор, пока символ C_{n-k}^{k-1} имеет смысл, т. е. пока $k \leqslant n-1-k$, $2k \leqslant n-1$, $k \leqslant \frac{n-1}{2}$).

Задача 161 показывает, что k-й член p-й диагонали p-арифметического треугольника равен k-му члену оси симметрии, умноженному на $(-1)^k$. Задача 162 устанавливает связь между осью симметрии и $\frac{p-1}{2}$-й строкой p-арифметического треугольника.

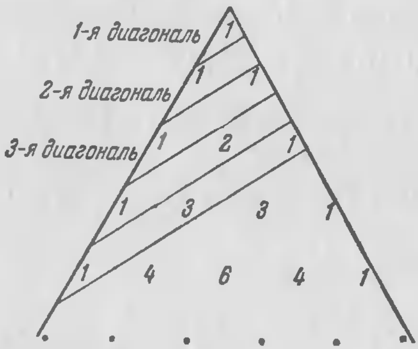


Рис. 58.

Умножим числа, стоящие на оси симметрии p-арифметического треугольника Паскаля, на члены произвольной геометрической прогрессии

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots$$

и сложим $\frac{p+1}{2}$ первых членов построенной таким образом последовательности. Мы получим сумму

$$S = 1 + 2q + \ldots + P_{2n}^{n} q^{n} + \ldots + P_{p-1}^{\frac{p-1}{2}} q^{\frac{p-1}{2}}.$$

163. Докажите, что p-арифметическая сумма

$$S = 1 + 2q + \ldots + P_{2n}^{n} q^{n} + \ldots + P_{p-1}^{\frac{p-1}{2}} q^{\frac{p-1}{2}}$$

равна $0, +1$ или -1, причем она равна нулю только в том случае, когда $q = \frac{1}{4}$.

Установим теперь связь между треугольником Паскаля и рядом Фибоначчи. Эта связь, помимо того, что она любопытна сама по себе, позволит нам обнаружить новые свойства ряда Фибоначчи.

164. Пусть b_n — сумма чисел треугольника Паскаля, стоящих на n-й диагоиалн. Покажите, что $b_n = a_n$, где a_n — n-й член ряда Фибоначчи

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2, \ldots$$

165. Найдите выражение для p-го члена p-арифметического ряда Фибоначчи $\left(\text{докажите, что } c_p = 5^{\frac{p-1}{2}}\right)$.

Из задачи 165 следует, что $c_p = 1$, если $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике, и $c_p = -1$, если $\sqrt{5}$ не извлекается (задача 91). В первом случае, как мы знаем из задачи 131б, $c_{p-1} = 0$; у рядов Фибоначчи $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1, \ldots$ и $c_{p-1}, c_p, c_{p+1}, \ldots$ совпадают первые два члена; но тогда эти ряды совпадают целиком, т. е. $c_{p-1+k} = c_k$; длина периода в этом случае является делителем числа $p - 1$. Во втором случае $c_{p+1} = 0$, $c_{p+2} = c_p + c_{p+1} = -1$; у рядов Фибоначчи $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1, \ldots$ и $c_{p+1}, c_{p+2}, c_{p+3}, \ldots$ первые два члена отличаются множителем -1, поэтому весь второй ряд получается из первого умножением на -1: $c_{p+1+k} = -c_k$, откуда $c_{2p+2} = 0$, $c_{2p+3} = -c_{p+2} = 1$; длина периода в этом случае является делителем числа $2p + 2$.

Укажем теперь другое применение свойств треугольника Паскаля к ряду Фибоначчи.

166. Пусть даны n произвольных чисел $d_0, \ldots, d_{n-1}$. Составим суммы

$$d_0^{(1)} = d_0 + d_1,\quad d_1^{(1)} = d_1 + d_2,\ \ldots,\ d_{n-2}^{(1)} = d_{n-2} + d_{n-1}.$$

У нас возникнет $n - 1$ чисел $d_0^{(1)}, d_1^{(1)}, \ldots, d_{n-2}^{(1)}$. Продолжим этот процесс и дальше

$$d_0^{(2)} = d_0^{(1)} + d_1^{(1)},\ \ldots,\ d_{n-3}^{(2)} = d_{n-3}^{(1)} + d_{n-2}^{(1)}.$$

Мы получим треугольную таблицу

$$\begin{array}{ccccccccccc}
d_0 & & d_1 & & d_2 \ \ldots \ d_{n-3} & & & d_{n-2} & & d_{n-1} \\
& d_0^{(1)} & & d_1^{(1)} & \ldots\ldots & & d_{n-3}^{(1)} & & d_{n-2}^{(1)} & \\
& & d_0^{(2)} & & \ldots\ldots & & & d_{n-3}^{(2)} & & \\
& & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\
& & & & \ldots\ldots & & & & & \\
& & & & d_0^{(n-1)} & & & & &
\end{array}$$

Докажите, что

$$d_0^{(n-1)} = C_{n-1}^0 d_0 + C_{n-1}^1 d_1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} d_{n-1}.$$

167. Покажите, что сумма квадратов строки треугольника Паскаля есть снова число из треугольника Паскаля.

168. Докажите, что во всяком p-арифметическом ряде Фибоначчи

$$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

имеет место равенство

$$v_k + v_{k+p} = v_{k+2p} \text{ (при любом } k).$$

169. Докажите, что в p-арифметическом ряде Фибоначчи члены, номера которых делятся на p, образуют снова p-арифметический ряд Фибоначчи.

§ 3. Члены ряда Фибоначчи, кратные заданному числу

Изучим теперь распределение в ряде Фибоначчи чисел, делящихся на произвольное число m.

170. Докажите, что если a и b — целые числа, то

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + b^2S,$$

где S — некоторое целое число.

171. Докажите, что если k-й член ряда Фибоначчи a_k делится на d, то каждая из разностей

$$a_{kl-1} - a_{k-1}^l,$$

$$a_{kl+1} - a_{k+1}^l$$

при любом l делится на d^2.

Указание. Воспользуйтесь задачами 108 и 119.

172. Докажите, что если a_k делится на m^n, то разность $a_{k+1}^m - a_{k-1}^m$ делится на m^{n+1}.

173. Докажите, что если a_k делится на m^n, то a_{km} делится на m^{n+1}.

174. Докажите, что если a_k делится на m, то все числа с номерами $km^{n-1}s$ (при любом s) делятся на m^n (см. задачу 119).

Задача 174 позволяет нам указать члены ряда Фибоначчи, делящиеся на любую степень произвольного простого числа p. Для p, отличного от 2 и 5, мы можем воспользоваться результатом задачи 131б):

если $\sqrt{5}$ извлекается в p-арифметике, то a_{p-1} делится на p, поэтому в силу задачи 174 все члены вида $a_{(p-1)p^{n-1}s}$ делятся на p^n;

если $\sqrt{5}$ не извлекается в p-арифметике, то на p^n делятся члены вида $a_{(p+1)p^{n-1}s}$.

Для $p=2$ и $p=5$ номера членов, делящихся на степень p, найдем непосредственно. Выпишем ряд Фибоначчи

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

Мы видим, что a_3 делится на 2 и a_5 делится на 5. Поэтому $a_{3\cdot 2^{n-1}s}$ делится на 2^n, а $a_{5\cdot 5^{n-1}s}=a_{5^n s}$ делится на 5^n.

Мы в состоянии теперь для каждого числа m указать в ряде Фибоначчи члены, на него делящиеся. В качестве примера найдем номера членов, делящихся на 10 000 (см. сноску к стр. 82). Разлагаем 10 000 на множители: $10\,000=2^4\cdot 5^4$. На 2^4 делятся члены с номерами $3\cdot 2^{4-1}s=24s$, т. е. члены, номера которых делятся на 24; на 5^4 делятся члены с номерами $5^4t=625t$, т. е. все члены, номера которых делятся на 625. Члены, номера которых делятся и на 24 и на 625, будут делиться и на 2^4 и на 5^4, т. е. будут делиться на 10 000. Номера таких членов имеют вид

$$24\cdot 625r=15\,000r.$$

Заметим, что указанный нами способ не дает, вообще говоря, номеров **всех** членов ряда Фибоначчи, делящихся на данное число m. Так, в разобранном нами примере член с номером 12 ($a_{12}=144$) делится на 2^4. Поэтому на 2^4 будут делиться все члены с номерами $12s$, а на 10 000 — члены с номерами

$$12\cdot 625r=7500r.$$

Рассмотрим еще один пример. Требуется определить, какие члены ряда Фибоначчи делятся на 45 566. Разлагая на множители, получаем $45\,566=2\cdot 3^4\cdot 7^3$. На 2 делятся члены с номерами $3s$. В 3-арифметике $\sqrt{5}$ означает $\sqrt{2}$ (2 — остаток от деления 5 на 3), но $\sqrt{2}$ в 3-арифметике не извлекается, следовательно, на 3^4 делятся члены с номерами $(3+1)\,3^{4-1}t = 108t$. В 7-арифметике $\sqrt{5}$ также не извлекается, на 7^3 делятся члены с номерами

$$(7+1)\,7^{3-1}q = 376q.$$

На 45 566 делятся члены с номерами $10\,584r$, где 10 584 — общее наименьшее кратное чисел 3, 108 и 376.

Читателю, заинтересовавшемуся свойствами членов ряда Фибоначчи, можно порекомендовать книжку Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи», Гостехиздат, М.—Л., 1951, из серии «Популярные лекции по математике».

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЕ $x^2 - 5y^2 = 1$

Поставим перед собой задачу: найти все целые решения уравнения

$$x^2 - 5y^2 = 1 \text{ [1]}, \tag{1}$$

т. е. найти все пары целых чисел a, b, для которых

$$a^2 - 5b^2 = 1.$$

Каждой паре a, b таких целых чисел мы поставим в соответствие иррациональное число $a + b\sqrt{5}$, которое будем условно называть *решением* уравнения (1). Ниже будет показано, что все целые решения уравнения (1) получаются по формуле

$$x + y\sqrt{5} = \pm(9 + 4\sqrt{5})^n,$$

где показатель n пробегает все целые (не обязательно положительные) числа. Рекомендуем читателю, прежде чем читать дальше, попытаться самому доказать это.

Установим сначала некоторые свойства целых чисел вида $p + q\sqrt{5}$ [2]).

---

[1]) Уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$x^2 - Ay^2 = 1,$$

в котором A — целое положительное число такое, что $\sqrt{A}$ есть число иррациональное. Задачи, которые мы ставим для уравнения (1), решаются аналогично и для общего уравнения. Другой метод решения уравнения $x^2 - Ay^2 = 1$ дан в книжке А. О. Гельфонда. Решение уравнений в целых числах, Гостехиздат, 1952, из серии «Популярные лекции по математике».

[2]) В главе V все буквы (в частности, p и q) обозначают целые числа.

175. Докажите, что если $a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}$, то $a=c$ и $b=d$.

176. Проверьте, что произведение $(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})$ можно снова представить в виде $p+q\sqrt{5}$. Убедитесь, что если $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, то и $p\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$.

177. Докажите, что если

$$m+n\sqrt{5}=(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}),$$

то

$$m-n\sqrt{5}=(a-b\sqrt{5})(c-d\sqrt{5}).$$

Перейдем теперь к рассмотрению решений уравнения (1).

178. Пусть $a+b\sqrt{5}$ — решение уравнения (1). Покажите, что

а) $a-b\sqrt{5}$ — тоже решение уравнения (1);

б) $\dfrac{1}{a+b\sqrt{5}}=a-b\sqrt{5}$.

179. Пусть $a+b\sqrt{5}$ и $c+d\sqrt{5}$ — решения уравнения (1). Докажите, что

а) их произведение

$$m+n\sqrt{5}=(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})$$

есть решение уравнения (1);

б) их частное $\dfrac{a+b\sqrt{5}}{c+d\sqrt{5}}$ представимо в виде $p+q\sqrt{5}$ и тоже есть решение уравнения (1).

180. Проверьте, что $9+4\sqrt{5}$ есть решение уравнения (1). Докажите, что уравнение (1) имеет бесконечное число различных целых решений.

181. Пусть $a+b\sqrt{5}$ и $c+d\sqrt{5}$ — решения уравнения (1), причем $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$. Докажите, что если

$$a+b\sqrt{5}<c+d\sqrt{5},$$

то $a<c$ и $b<d$.

182. Пусть $a+b\sqrt{5}$ — решение уравнения (1). Докажите, что

а) если $0<a+b\sqrt{5}$, то $a\geqslant 0$;

б) если $1<a+b\sqrt{5}$, то $a\geqslant 0$, $b>0$.

183. Покажите, что не существует целого решения уравнения (1), удовлетворяющего неравенству

$$1<a+b\sqrt{5}<9+4\sqrt{5}.$$

184. Докажите, что все целые решения $p+q\sqrt{5}$ уравнения (1), у которых $p\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$, получаются по формуле

$$p+q\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^n,$$

где показатель n принимает все возможные целые неотрицательные значения.

185. Докажите, что все решения уравнения $x^2-5y^2=1$ в целых числах получаются по формуле

$$x+y\sqrt{5}=\pm(9+4\sqrt{5})^n,$$

где показатель n принимает все возможные целые значения $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Арифметики p-адических чисел, так же как и p-арифметики, имеют глубокое сходство с арифметикой обычных рациональных (или действительных) чисел. Это сходство состоит в том, что в каждой из этих арифметик определены четыре действия — сложение, вычитание, умножение и деление, которые всегда выполнимы и для которых справедливы все законы обычной алгебры. В силу этого обычная алгебра так же хорошо применима в p-арифметике или p-адической арифметике, как и в обычной арифметике. Произвольное алгебраическое буквенное тождество, которое содержит только операции сложения, вычитания, умножения и деления, дает при подстановке в него чисел из p-арифметики верное p-арифметическое равенство, а при подстановке p-адических чисел — равенство, верное в p-адической арифметике, точно так же, как оно дает равенство, верное в обычной арифметике, при подстановке действительных чисел.

В современной алгебре всякая система объектов, в которой определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, удовлетворяющие всем законам обычной алгебры, называется *полем*. Таким образом, и системы p-адических чисел и p-арифметики являются полями. Точно так же являются полями множество всех рациональных чисел и множество всех действительных чисел.

Напротив, целые числа не образуют поля: оставаясь в области целых чисел, можно всегда производить сложение, вычитание и умножение, но деление при этом выполнимо не всегда. Системы объектов, в которых определены операции сложения, вычитания и умножения, подчиняющиеся всем обычным алгебраическим законам, называются *коммутативными кольцами*. Примерами коммутативных колец могут служить:

множество всех целых чисел, m-арифметика при любом m, арифметики m-адических чисел, множество чисел вида $a+b\sqrt{5}$ с целыми a и b, множество всех многочленов с рациональными (или действительными) коэффициентами, множество всех многочленов с коэффициентами из p-арифметики и вообще множество всех многочленов с коэффициентами из любого поля. Ясно, что всякое поле является коммутативным кольцом.

Доказано, что все законы алгебры можно вывести из небольшого числа основных законов. В качестве таких основных законов обычно принимаются следующие:

1) $a+b=b+a$ (коммутативность, или перестановочность, сложения);

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность, или сочетательность, сложения);

3) для всяких a и b существует их разность, т. е. такое x, что $a+x=b$ (другими словами, вычитание всегда возможно);

4) $ab=ba$ (коммутативность, или перестановочность, умножения);

5) $(ab)c=a(bc)$ (ассоциативность, или сочетательность, умножения);

6) $a(b+c)=ab+ac$ (дистрибутивность, или распределительность, умножения относительно сложения);

7) для всякого b и всякого $a\neq 0$ существует их частное, т. е. такое x, что $ax=b$ (возможность деления).

Поэтому поле можно определить как систему объектов, для которых определены операции сложения и умножения, подчиняющиеся условиям 1) — 7). Аналогично коммутативное кольцо можно определить как систему объектов, подчиняющуюся условиям 1) — 6) [1]).

В этом разделе мы встретились и с другой категорией алгебраических систем, именно с *группами*. Над элементами групп производится одна операция, называемая *композицией*. Композицию элементов a и b мы будем обозначать $a*b$. Эта операция подчиняется следующим законам:

I. Для каждых трех элементов a, b, c

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

---

[1]) Система, удовлетворяющая условиям 1) — 3) и 5) — 6) (так что условие 4) не обязательно должно выполняться), а также условию $(b+c)a=ba+ca$, называется просто *кольцом*.

II. Существует единица, т. е. такой элемент e, что $e*a=a$ для всех a.

III. Для каждого a существует обратный элемент, т. е. элемент a^{-1}, обладающий тем свойством, что

$$a^{-1}*a=e.$$

Так как произведение решений уравнения $x^2-5y^2=1$ снова является решением этого уравнения, то если в качестве композиции решений принять их произведение, решения составят группу. Группу образует и множество дробно-линейных функций с коэффициентами из любого поля, если композицию определить как подстановку:

$$f(x)*g(x)=f(g(x))\ ^{1)}.$$

Наконец, группу образуют все элементы любого поля, отличные от нуля (композиция — произведение), и все элементы любого кольца (композиция — сложение). Предоставляем читателю проверить, что все эти множества действительно являются группами (нужно установить справедливость законов I, II, III).

Понятия группы, кольца и поля являются основными понятиями современной алгебры и играют очень важную роль во всей математике. Более ясное представление о значении, которое эти понятия имели в развитии алгебры, читатель может получить из статьи О. Ю. Шмидта и А. Г. Куроша «Алгебра» во втором томе 2-го издания Большой советской энциклопедии.

Основы теории групп с ее приложениями можно найти в книгах:

П. С. Александров, Введение в теорию групп, Учпедгиз, М., 1938; изд. 2-е, Учпедгиз, М., 1951.

Л. Баумгартнер, Теория групп, перевод с немецкого, ГТТИ, М.—Л., 1934.

Для знакомства с теорией полей и колец могут быть рекомендованы книги:

А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, издание 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1949, §§ 1—3.

---

1) Заметим, что в этом примере композиция двух элементов зависит от их порядка, так как $f(g(x))$, вообще говоря, не равно $g(f(x))$ (см. задачу 141).

И. В. Проскуряков, Числа и многочлены, изд-во Акад. пед. наук РСФСР, М., 1949, главы II и VIII.

Задачи, которыми мы занимались в этом разделе, лежат на границе между алгеброй и теорией чисел и составляют предмет так называемой *алгебраической теории чисел*. Одним из создателей этой теории является выдающийся русский математик Егор Иванович Золотарев (1847—1878). Важную роль в развитии алгебраической теории чисел сыграли работы замечательного советского математика Николая Григорьевича Чеботарева (1894—1947). К числу наиболее крупных последних достижений в этой области относятся результаты, полученные недавно советским математиком Игорем Ростиславичем Шафаревичем (род. в 1923 г.).

Из популярной литературы по алгебраической теории чисел укажем:

Г. Радемахер и О. Теплиц, перевод с немецкого, ОНТИ, М.—Л., 1938, Числа и фигуры, глава 12.

Л. Я. Окунев, Целые комплексные числа, Учпедгиз, М., 1941.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ (ЦЕПИ МАРКОВА)

Широко известна настольная детская игра «Цирк». Двое играющих бросают по очереди кость с занумерованными гранями и каждый передвигает свою фишку вперед по квадратной доске, разделенной на 100 занумерованных квадратов (полей). Фишка передвигается на столько полей, сколько очков выпадет на кости. В начале игры обе фишки ставятся на первое поле. Выигрывает тот, кто раньше достигнет последнего поля с номером 100. Дополнительное правило состоит в следующем: если фишка попадет на поле с красным номером, то она передвигается на другое поле (либо вперед, либо назад), номер которого обозначен синим цветом: куда именно— указывают нарисованные на доске изображения цирковых аттракционов. Очевидно, что при этой игре движение каждой фишки нисколько не зависит от умения играющих, а зависит только от случая (предполагается, конечно, что кость подбрасывается «честно»). Это движение фишки дает нам один из простых примеров случайного блуждания.

Приведем еще пример случайного блуждания.

Два приятеля живут в городе, план которого приведен на рис. 59. Они выходят из своего дома, расположенного на перекрестке A, и намереваются прогуляться. Однако между ними возникает спор о выборе направления и они разрешают его, договорившись о том, что на каждом перекрестке, начиная с A, они будут дважды бросать монету и в зависимости от четырех возможных исходов (герб герб, герб решетка, решетка герб, решетка решетка) будут идти соответственно на север, восток, запад или юг. Так начинают они свою прогулку с перекрестка A, доходят до следующего перекрестка, где опять дважды бросают монету и снова в зависимости от исхода бросания выбирают свой путь. Если они доходят до края города (например, до точки X), то поворачиваются и идут назад. Здесь мы также имеем дело со случайным блужданием.

Процессы, подобные рассмотренному случайному блужданию (только гораздо более сложные), встречаются и в при-

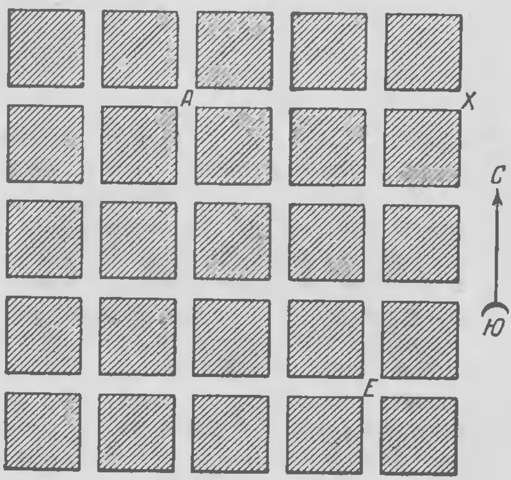


Рис. 59.

роде. Примером может служить броуновское движение. Как известно, «если взболтать в воде какой-нибудь легкий порошок, например краску гуммигут, и поместить каплю воды со взвешенными в ней частичками под покровное стеклышко микроскопа, то можно наблюдать, что видимая в микроскоп частичка порошка (значительно более крупная, чем молекула) находится в непрерывном движении по зигзагообразной траектории»[1]) (рис. 60). Случайное блуждание частицы носит более сложный характер, чем блуждание путника по городу: во-первых, частица может изменить направление своего движения в любой момент, в то время как путник — только дойдя до перекрестка; во-вторых, при изменении направления у путника имеется выбор только между четырьмя направле-

---

[1]) И. И. Соколов, Курс физики, ч. 2, изд. 5-е, Учпедгиз, М., 1943, стр. 74.

ниями, частица же может изменить направление своего движения на любое другое.

В этом разделе мы займемся изучением простейших примеров случайных блужданий.

Вернемся к игре «Цирк», описанной выше, и поставим вопрос о длительности такой игры. Чтобы ответить на него, заменим доску менее сложной доской (рис. 61), состоящей из 25 полей; фишка, попавшая на поле 24, автоматически

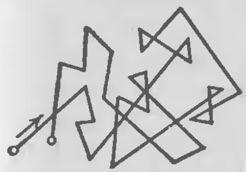


Рис. 60.

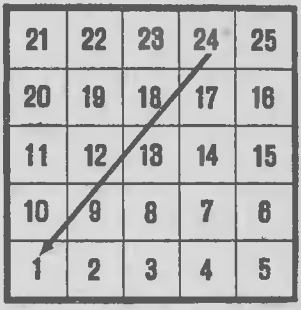


Рис. 61.

переставляется на исходное поле 1; никаких других переходов нет. Как долго будет продолжаться игра на такой доске? Может случиться, что уже после четырех подбрасываний кости один из играющих достигнет последнего поля 25: для этого достаточно, чтобы кость выпала у него четыре раза подряд шестеркой. С другой стороны, если фишки каждого из играющих будут многократно попадать на поле 24, то игра может не закончиться и за 1000 ходов. Более того, может случиться, что игра вообще никогда не закончится: для этого достаточно, например, чтобы у каждого из играющих кости выпадали в следующей последовательности:

6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5, 6, 6, 6, 5,...

Таким образом, для продолжительности игры нельзя указать никаких достоверных границ. Попробуйте, однако, сыграть одну-другую партию. Вы убедитесь, что игра кончается и притом довольно быстро. В чем же здесь дело?

Как отмечалось выше, нельзя указать никаких абсолютно достоверных границ для продолжительности игры. Но положение в корне изменится, если не гнаться за абсолютной достоверностью. Чтобы пояснить это, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Представим себе урну, в которой лежат 1000 шаров. Из них один черный, а остальные белые. Пусть из этой урны вынимается наудачу один шар. Может ли случиться, что этот шар окажется черным? Конечно, может, но это мало вероятно.

Пример 2. Предположим, что человек, не знающий русского языка, беспорядочно ударяет по клавиатуре пишущей машинки с русским алфавитом. Может ли случиться, что при этом он нечаянно напечатает повесть Пушкина «Капитанская дочка»? Очевидно, что и это не является абсолютно невозможным. Однако вряд ли хотя бы один человек станет практически считаться с этим, как с реальной возможностью. (Ведь и буквальное совпадение сочинений двух экзаменующихся школьников тоже могло бы, строго говоря, произойти чисто случайно. И тем не менее такое совпадение с полным основанием считается доказательством того, что одно из сочинений списано.)

Пример 3. Согласно молекулярной теории газов воздух представляется в виде совокупности огромного числа хаотически движущихся молекул. Взаимодействие между отдельными молекулами почти отсутствует, и поэтому положение в пространстве каждой молекулы не влияет на положение остальных. Разделим мысленно объем комнаты, в которой мы находимся, на две половины: верхнюю и нижнюю. Не исключена возможность (это вытекает из основных предпосылок молекулярной теории), что все молекулы воздуха, имеющиеся в комнате, соберутся в верхней половине, и тогда обитатели комнаты погибнут от удушья. Этот вывод кажется нелепым. Не означает ли он крушение всей молекулярной теории газов? Надо надеяться, что после предыдущих примеров читатель не сделает такого заключения: явление, которое мы себе вообразили, хотя и не является абсолютно невозможным, но с полным основанием может считаться практически невозможным. Оснований для этого еще неизмеримо больше, чем в предыдущем примере, ибо молекул воздуха в комнате неизмеримо больше, чем печатных знаков в «Капитанской дочке».

Итак, маловероятные события могут с полным правом рассматриваться как практически невозможные. Вместе с тем существуют различные уровни такой невозможности: этот уровень невозможности гораздо выше в примере 2, чем в примере 1, и гораздо выше в примере 3, чем в примере 2.

Возвращаясь снова к нашей задаче, мы ставим ее теперь по-новому: какую границу для продолжительности игры можно указать, если желать, чтобы ошибка была практически невозможна в такой же мере, в какой невозможны события из рассмотренных нами примеров?

Как решается эта и подобные ей задачи — читателю станет ясно после того, как он прочтет настоящий раздел. Здесь же мы приведем только ответ. Если сказать, что игра закончится не более, чем за 200 ходов, то ошибка при этом утверждении будет приблизительно так же невозможна, как и событие из примера 1. Если число ходов увеличить до 30 миллионов, то ошибка будет приблизительно так же невозможна, как событие из примера 2, и при числе ходов, равном 10^{25}, — как событие из примера 3.

§ 1. Основные свойства вероятности

Прежде всего мы должны научиться вычислять вероятности.

Представим себе две урны, в каждой из которых лежит по 100 шаров. В первой урне один шар белый, а остальные 99 черные. Во второй урне имеется 10 белых шаров и 90 черных. Из какой урны более вероятно вынуть белый шар[1])? Читатель, не задумываясь, ответит, что из второй. Если мы спросим, во сколько раз это более вероятно, читатель, надо полагать, ответит, что в 10 раз. Представим себе теперь третью урну, в которой все 100 шаров белые. Подобно предыдущему, мы скажем, что вынуть белый шар из третьей урны в 100 раз более вероятно, чем из первой. Но шар, вынутый из третьей урны, окажется белым наверняка. Если

---

[1]) Предполагается, что шары в урнах совершенно одинаковы, хорошо перемешаны и что вытаскивают шары не глядя; таким образом, имеются равные возможности вынуть из урны любой шар, или, другими словами, выход каждого шара равновероятен с выходом любого другого.

принять вероятность достоверного события равной единице, то из сказанного вытекает, что мы должны считать вероятность вынуть белый шар из первой урны равной $\frac{1}{100}$, а вероятность вынуть белый шар из второй урны равной $\frac{10}{100}$.

Рассмотрим общий случай, когда урна содержит n шаров, из которых m белых. Те же соображения заставляют принять вероятность вынуть белый шар из такой урны равной $\frac{m}{n}$.

Схема урн чрезвычайно удобна тем, что к ней сводятся многие задачи.

Пример 1. Бросается монета. Какова вероятность, что выпадет герб? Рассмотрим урну с двумя шарами: белым и черным. Белый шар соответствует гербу, черный — решетке. Очевидно, вероятность выпадения герба равна вероятности вынуть белый шар из нашей урны и, следовательно, равна $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Бросается игральная кость. Какова вероятность выпадения 5 очков? Задача равносильна следующей: в урне 6 шаров, из которых 1 белый. Какова вероятность вынуть белый шар? Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 3. Из ящика с домино наугад вынимается кость. Какова вероятность, что хотя бы на одной ее половинке будет 6 очков? Рассмотрим урну с 28 шарами, из которых 7 шаров (соответствующие 7 костям, у которых хотя бы одна из половинок содержит 6 очков) — белые. Вероятность вынуть кость указанного вида равна вероятности вынуть белый шар и равна $\frac{7}{28}$.

Пример 4. В урне лежат 5 красных, 7 синих и 13 черных шаров. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется или красным или синим? Перекрасим красные и синие шары в белый цвет, или, иначе, рассмотрим новую урну, в которой $5+7=12$ белых и 13 черных шаров. Вероятность вынуть красный или синий шар из первой урны равна вероятности вынуть белый шар из новой урны, т. е. равна $\frac{12}{25}$.

Пусть вообще некоторый опыт может иметь n равновероятных исходов и из них m благоприятствуют событию A, а остальные не благоприятствуют. Любой такой опыт равносилен выниманию шара из урны, содержащей n шаров, из которых m белых, а остальные черные. Наступление события A имеет ту же вероятность, что и выход белого шара из урны, т. е. $\frac{m}{n}$. Или словами: *вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих исходов к общему числу исходов*. Вероятность события A обозначается $\mathbf{P}(A)$.

Сформулируем следующие свойства вероятности:

Свойство 1. Если из события A *следует* событие B, т. е. наступление события A влечет за собой наступление события B, то

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B).$$

Свойство 2. Если события A и B *несовместны* (т. е. не может случиться так, что происходят и A и B), то

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B), \tag{1}$$

где под $A+B$ понимается событие, состоящее в том, что происходит хотя бы одно из событий A и B.

Свойство 3. Если события A и B *противоположны*, т. е. наступление A равносильно ненаступлению B, то

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 1. \tag{2}$$

Свойство 4. Если событие E *достоверно*, т. е. непременно произойдет, то

$$\mathbf{P}(E) = 1.$$

Свойство 5. Если событие O *невозможно*, т. е. не может наступить, то

$$P(O) = 0.$$

Вывод этих свойств из рассмотрения урновых схем несложен, и читатель при желании может легко его провести [1]). Поясним только некоторые определения: пример несовместных событий — выход синего и выход красного шара (если вынимается только один шар из урны); пример противоположных

---

[1]) Заметим, что свойство 2 было фактически выведено нами в примере 4. Здесь A — «выход красного шара», B — «выход синего шара», $A+B$ — «выход красного или синего шара».

событий — попадание и непопадание в цель при выстреле, выпадение герба или решетки при бросании монеты. Достоверным событием является, например, появление белого шара из урны, наполненной одними белыми шарами, невозможным — появление черного шара из той же урны.

Несмотря на то, что многие задачи сводятся к схеме урн, многие (и притом наиболее интересные) задачи к этой схеме не сводятся. Однако свойства вероятности 1—5 сохраняются и для этого класса задач.

Условная вероятность. Независимые события. Познакомимся теперь с так называемой *условной вероятностью.* Начнем с примера.

После уроков ученики первого и второго классов собираются играть в прятки. В игре участвуют 11 первоклассников, из которых 8 мальчиков и 3 девочки, и 6 второклассников, из которых 2 мальчика и 4 девочки. С помощью жребия определяется, кому водить [1]). Какова вероятность, что водящий окажется первоклассником?

Для вычисления этой вероятности нужно число первоклассников поделить на общее число играющих. Результат равен $\frac{11}{17}$.

Предположим теперь, что нам известно, что водит мальчик. Повлияет ли это на интересующую нас вероятность? Посмотрим, какова теперь вероятность того, что водящий учится в первом классе.

Водящий мальчик может быть с равной вероятностью любым из 10 мальчиков, участвующих в игре. Среди этих 10 мальчиков 8 учатся в первом классе. Поэтому вероятность того, что водящий учится в первом классе, равна теперь $\frac{8}{10}$. Мы видим, что вероятность изменилась.

Мы получили *условную вероятность* того, что водящий учится в первом классе, *при условии*, что водящий — мальчик.

---

[1]) Жребий должен обеспечить для всех участников игры равные вероятности оказаться водящим. Среди различных возможных форм жеребьевки наилучшей должна быть признана та, при которой такая равновероятность осуществляется с наибольшей точностью.

186. Вычислите условную вероятность того, что водящий учится в первом классе, при условии, что водит девочка.

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, обозначается $\mathbf{P}(B/A)$. В нашем примере B — «водит первоклассник», A — «водит мальчик». Как мы подсчитали, $\mathbf{P}(B)=\frac{11}{17}$, $\mathbf{P}(B/A)=\frac{8}{10}$. Итак, в нашем случае $\mathbf{P}(B/A)\neq\mathbf{P}(B)$. Это показывает, что наступление события A существенно влияет на вероятность события B.

К перечисленным выше пяти свойствам вероятности прибавим теперь еще одно.

Свойство 6.

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B/A), \tag{3}$$

где под AB понимается событие, состоящее в том, что наступают оба события: и A и B.

Это свойство выводится с помощью расчета, который мы проведем на том же примере детской игры, где водящий определяется жребием. Пусть снова A — «водит мальчик» и B — «водит первоклассник». В таком случае AB означает «водит мальчик, который учится в первом классе». Из 17 возможных исходов событию AB благоприятствуют 8 исходов (8 мальчиков-первоклассников), а событию A — 10 исходов. Поэтому $\mathbf{P}(AB)=\frac{8}{17}$; $\mathbf{P}(A)=\frac{10}{17}$. Как уже вычислялось, $\mathbf{P}(B/A)=\frac{8}{10}$. Мы видим, что

$$\frac{8}{17}=\frac{10}{17}\cdot\frac{8}{10},$$

т. е.

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B/A).$$

Если события A и B независимы, то наступление или ненаступление события A не изменяет вероятности события B, и поэтому условная вероятность $\mathbf{P}(B/A)$ события B при условии A должна быть равна безусловной вероятности $\mathbf{P}(B)$:

$$\mathbf{P}(B/A)=\mathbf{P}(B).$$

В таком случае формула (3) принимает вид

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B).$$

Таким образом, имеет место

Свойство 6а. Если события A и B независимы, то

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B). \tag{4}$$

Например, выпадения гербов при двух бросаниях монеты — это события независимые. Поэтому вероятность двукратного выпадения герба равна

$\mathbf{P}$ («при первом бросании выпал герб» и «при втором бросании выпал герб») $=\mathbf{P}$ («при первом бросании выпал герб») $\cdot\,\mathbf{P}$ («при втором бросании выпал герб») $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Формула (1) — формула сложения вероятностей — и формула (4) — формула умножения вероятностей — легко обобщаются на случай большего, чем 2, числа событий. Пусть дано n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, из которых каждые два несовместны. Тогда

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=$$
$$=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}(A_3)+\ldots+\mathbf{P}(A_n). \tag{5}$$

Докажем эту формулу для $n=3$. Событие A_3, будучи несовместно как с A_2, так и с A_1, очевидно, несовместно и с A_1+A_2. Поэтому в силу свойства 2

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+A_3)=\mathbf{P}(A_1+A_2)+\mathbf{P}(A_3). \tag{5'}$$

Так как A_1 и A_2 несовместны, то

$$\mathbf{P}(A_1+A_2)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2). \tag{5''}$$

Из (5′) и (5″) вытекает формула (5) для случая $n=3$; аналогично формула (5) доказывается и для любого n. Точно так же, если A_1 и A_2 независимы и A_1A_2 и A_3 независимы, то

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3)=\mathbf{P}(A_1A_2)\,\mathbf{P}(A_3)=\mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}(A_3).$$

Вообще, если A_1 и A_2 независимы, A_1A_2 и A_3 независимы, $A_1A_2A_3$ и A_4 независимы и т. д., $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$ и A_n независимы, то

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3\ldots A_n)=\mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}(A_3)\ldots\mathbf{P}(A_n). \tag{6}$$

Например, если A_k — выпадение герба при k-м бросании монеты, то вероятность выпадения одних гербов при n бросаниях равна по формуле (6)

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{2^n}.$$

Тем же числом выражается вероятность выпадения одних решеток и вообще вероятность выпадения любой наперед заданной последовательности гербов и решеток при n бросаниях.

187. Какова вероятность, что при 6-кратном бросании игральной кости ни разу не выпадет 6 очков?

188. Обозначим через p вероятность попадания в цель при одном выстреле. Вычислить вероятность того, что при n выстрелах цель будет поражена, т. е. произойдет хотя бы одно попадание.

В начале раздела отмечалось, что маловероятные события могут с полным основанием считаться практически невозможными и что бывают разные степени такой невозможности. Уточним это.

Если для изучения какого-нибудь реального явления применяются методы теории вероятностей, то каждый раз приходится выбирать какое-нибудь малое число ε в качестве *допустимой вероятности ошибки*. Это означает, что, предсказывая методами теории вероятностей ход реального явления, мы вынуждены допустить некоторую возможность ошибочности нашего прогноза и требуем только, чтобы вероятность ошибки не превосходила ε. При таком допущении мы имеем основания всякое событие, вероятность которого меньше ε, считать *практически невозможным*, а всякое событие, вероятность которого больше $1-\varepsilon$, считать *практически достоверным*. Число ε может быть также названо допускаемой *степенью* (или *уровнем*) *недостоверности*, а число $1-\varepsilon$ — требуемой *степенью* (или *уровнем*) *достоверности*. Само собой разумеется, что значение ε выбирается в каждой отдельной задаче с учетом практических требований к достоверности выводов. Часто применяются значения 0,01; 0,005; 0,001; 0,0001.

Иллюстрируем сказанное на примере задачи о числе выстрелов, необходимом для поражения цели (см. задачу 188). Пусть для определенности вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Сколько нужно затратить выстрелов, чтобы поразить цель? Ясно, что никакого абсолютно достоверного числа выстрелов указать нельзя: может случиться, что цель будет поражена первым же выстрелом, и в то же время не исключена возможность, что, скажем, 100 или 200 выстрелов не дадут ни одного попадания. Итак, не будем гнаться за абсолютной достоверностью и введем какую-нибудь допустимую степень недостоверности ε. Практически вполне приемлемым является, например, значение ε, равное 0,001. Утверждая, что цель будет поражена при n выстрелах, мы сделаем ошибку с вероятностью $(1-0{,}2)^n = (0{,}8)^n$ (см. решение задачи 188). Подберем теперь n так, чтобы

$$(0{,}8)^n < 0{,}001.$$

Наименьшее значение n, удовлетворяющее этому неравенству, равно 31 (оно легко находится с помощью таблицы логарифмов). Итак, утверждая, что 31 выстрел достаточен для поражения цели, мы можем ошибиться лишь с вероятностью, не превосходящей допустимой границы 0,001. Таким образом, при принятых требованиях к уровню достоверности можно считать поражение цели 31 выстрелом практически достоверным.

Найденное число выстрелов изменится, если изменить допускаемую степень недостоверности. В приводимой ниже таблице указаны значения n, соответствующие различным допустимым уровням недостоверности

ε	n
0,01	21
0,005	24
0,001	31
0,0001	42

Задача. Вычислить вероятность того, что при неограниченном бросании игральной кости ни разу не выпадет 6 очков.

Решение. Вычислим сначала вероятность события B_n «за n бросаний ни разу не выпало 6 очков». При решении задачи 187 мы обнаружили, что $\mathbf{P}(B_6)=\left(\frac{5}{6}\right)^6$. Аналогично при произвольном n (в силу формулы (6))

$$\mathbf{P}(B_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Обозначим интересующее нас событие «при неограниченном бросании кости ни разу не выпадет 6 очков» через B. Из события B следует каждое из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ Поэтому в силу 1-го свойства вероятности

$$\mathbf{P}(B)\leqslant\mathbf{P}(B_1)=\frac{5}{6},$$

$$\mathbf{P}(B)\leqslant\mathbf{P}(B_2)=\left(\frac{5}{6}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{P}(B)\leqslant\mathbf{P}(B_n)=\left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Но числа $\frac{5}{6}, \left(\frac{5}{6}\right)^2, \ldots, \left(\frac{5}{6}\right)^n, \ldots$ как члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии делаются с возрастанием n меньше любого наперед заданного положительного числа [1]. Отсюда и $\mathbf{P}(B)$ меньше любого положительного числа, т. е. $\mathbf{P}(B)=0$.

Итак, вероятность того, что при неограниченном бросании кости ни разу не выпадет 6 очков, равна нулю.

События, с которыми мы встречались до сих пор, были либо невозможны, либо, если возможны, то имели вероятность, бóльшую нуля. Здесь мы впервые сталкиваемся с событием, имеющим вероятность нуль и тем не менее представляющимся логически возможным. Мы не могли бы получить такого результата, если бы вероятность нашего события можно было бы подсчитать по правилу, указанному в начале параграфа, именно как отношение числа благоприятных исходов опыта к общему числу всех возможных равновероятных исходов.

---

[1]) А. П. Киселев, Алгебра, ч. 2, изд. 23-е, стр. 78.

9 Зак. 3398. Е. Дынкин и В. Успенский

Результат, который мы получили, решая нашу задачу, можно истолковать также следующим образом: какую бы высокую степень достоверности мы ни пожелали иметь, можно указать такое число бросаний, что выпадение 6 очков хотя бы один раз будет практически достоверным[1]). В этом и состоит реальный смысл утверждения, что при неограниченном бросании кости 6 очков выпадет с вероятностью 1.

Формула полной вероятности. Система событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называется *полной*, если хотя бы одно из них непременно произойдет (другими словами, если событие $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ достоверно). Заметим, что если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную систему и попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) = 1 \tag{7}$$

(следует из формулы (5) и свойства 4).

Свойство 7 (формула полной вероятности). Пусть дана полная система попарно несовместных событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Тогда вероятность любого события B может быть найдена по формуле

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(B/A_1) + \mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}(B/A_2) + \ldots \\ \ldots + \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{P}(B/A_n). \tag{8}$$

Для доказательства заметим, что так как одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непременно произойдет, то наступление события B равносильно наступлению одного из событий $BA_1, BA_2, \ldots, BA_n$; поэтому

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\big((A_1B) + (A_2B) + \ldots + (A_nB)\big).$$

Так как события $A_1B, A_2B, \ldots, A_nB$ попарно несовместны (ибо уже $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны), то по формуле (5)

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1B) + \mathbf{P}(A_2B) + \ldots + \mathbf{P}(A_nB).$$

Используя свойство 6, получаем

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(B/A_1) + \mathbf{P}(A_2)\,\mathbf{P}(B/A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{P}(B/A_n).$$

---

[1]) Действительно, утверждая, что 6 очков выпадет за n бросаний, мы ошибаемся с вероятностью $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. При достаточно большом n вероятность ошибки может быть сделана сколь угодно малой.

Вычислим по этой формуле вероятность того, что в игре, описанной на стр. 124, водит первоклассник. Здесь B—«водит первоклассник», A_1—«водит мальчик», A_2—«водит девочка». Имеем

$$\mathrm{P}(A_1)=\frac{10}{17},\ \mathrm{P}(A_2)=\frac{7}{17},\ \mathrm{P}(B/A_1)=\frac{8}{10},\ \mathrm{P}(B/A_2)=\frac{3}{7},$$

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(B/A_1)+\mathrm{P}(A_2)\,\mathrm{P}(B/A_2)=$$
$$=\frac{10}{17}\cdot\frac{8}{10}+\frac{7}{17}\cdot\frac{3}{7}=\frac{8}{17}+\frac{3}{17}=\frac{11}{17}$$

в соответствии с тем, что было вычислено на стр. 124.

189. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого первого выпадет герб. Какова вероятность, что игра никогда не кончится? Какова вероятность, что выиграет начинающий? Какова вероятность, что выиграет второй игрок?

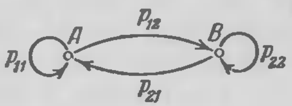


Рис. 62.

190. Частица, находящаяся в точке A (рис. 62), через единицу времени с вероятностью p_{11} остается в A, а с вероятностью p_{12} переходит в B. Находясь в B, она через единицу времени с вероятностью p_{22} остается в B и с вероятностью p_{21} переходит в A. Какова вероятность, что через n шагов (единиц времени) она окажется в точке A, если в начальный момент времени она находится

а) в точке A?
б) в точке B?

К схеме задачи 190 можно свести множество различных явлений. Следуя знаменитому русскому математику А. А. Маркову, рассмотрим первые 20 000 букв «Евгения Онегина», не считая «ъ» и «ь». Будем помещать фишку в точку A, если буква гласная, и в точку B, если буква согласная («й» считается гласной). Чередование гласных и согласных изобразится движением фишки по схеме рис. 62. Очевидно, после гласной буквы более вероятно появиться согласной, чем снова гласной. И действительно, подсчеты Маркова показывают, что вероятность p_{12} появления согласной при условии, что предыдущая буква была гласная, равна приблизительно 0,872, в то время как вероятность появления гласной при этом же условии $p_{11} \approx 0{,}128$. Точно так же $p_{21} \approx 0{,}663$; $p_{22} \approx 0{,}337$.

Аналогичные подсчеты, проведенные для первых 100 000 букв повести Аксакова «Детство Багрова внука», дали несколько иные результаты: $p_{11} \approx 0{,}147$; $p_{21} \approx 0{,}695$; $p_{12} \approx 0{,}853$; $p_{22} \approx 0{,}305$.

Той же схеме подчиняются с известным приближением и некоторые метеорологические явления, например чередование ясных и пасмурных дней. День, следующий за пасмурным, имеет бо́льшую вероятность быть пасмурным, нежели день, следующий за ясным, а день, следующий за ясным, имеет бо́льшую вероятность быть ясным, чем день, следующий за пасмурным. Вероятности перехода от пасмурного дня к ясному, от ясного к пасмурному и т. д. (этим переходам отвечают перемещения фишки в задаче 190) оказываются приблизительно постоянными для данной местности и данного времени года и могут быть вычислены из наблюдений.

191. Производится следующий опыт. В комнате поставлены две одинаковые с виду урны. В левой из них лежит a шаров, в правой — b шаров. В комнату по очереди входят люди и каждый из них перекладывает шар из левой урны в правую или из правой в левую. Предполагается, что вероятность того, что шар перекладывается из левой урны в правую, так же как вероятность того, что шар перекладывается из правой урны в левую, равна $\frac{1}{2}$. Опыт продолжается до тех пор, пока одна из урн не опустеет. Какова вероятность, что опустеет левая урна? Какова вероятность, что опустеет правая урна? Какова вероятность, что опыт никогда не закончится?

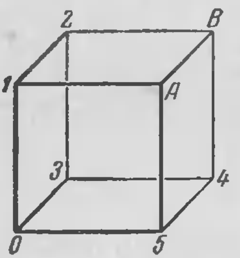


Рис. 63.

192. По ребрам проволочного куба (рис. 63) ползает гусеница. Дойдя до вершин, она с вероятностью $\frac{1}{3}$ ползет по каждому из ребер, исходящих из этой вершины. Точки A и B намазаны клеем. Гусеница выползает из точки 0. Какова вероятность, что она приклеится в точке A? Какова вероятность, что она приклеится в точке B?

§ 2. Задачи о блуждании по бесконечной прямой. Треугольник вероятностей

Отметим на прямой точки $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ и проделаем следующий опыт. Поставим в точку, помеченную числом 0, фишку. Подбросим монету, и если она упадет вверх гербом, передвинем фишку на одно деление влево, если же монета упадет вверх решеткой, то на одно деление вправо. Повторим бросание монеты второй, третий раз и т. д. и будем каждый раз передвигать фишку в соответствии с результатом бросания. Законно предположить, что оба возможных исхода бросания монеты одинаково вероятны, и таким образом при каждом бросании фишка сдвигается с вероятностью $\frac{1}{2}$ влево и с вероятностью $\frac{1}{2}$ вправо.

Закон образования треугольника вероятностей. Очевидно, после первого шага фишка может оказаться в точках —1 или 1, после второго шага в одной из точек —2, 0, 2, после третьего в —3, —1, 1, 3 и т. д. Наглядное изображение возможных положений фишки в каждый момент времени дает схема, изображенная на рис. 64.

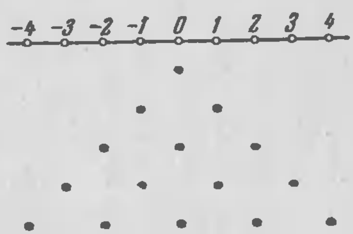


Рис. 64.

Точки, изображенные на этой схеме, образуют треугольник (этот треугольник можно неограниченно продолжать вниз). Вершина треугольника находится под числовой отметкой 0, и это соответствует тому факту, что 0 — начальное положение нашей фишки. Первая строка треугольника состоит из двух точек. Стоящие над этими точками числа —1 и 1 показывают возможные положения фишки через 1 шаг. Следующая строка задает возможные положения фишки через 2 шага и т. д.

Схема, изображенная на рис. 64, указывает все возможные положения фишки, но среди этих положений одни более, другие менее вероятны. Попытаемся вычислить их вероятности. В начальный момент фишка находится с вероятностью 1 в точке 0. После одного подбрасывания монеты она находится с вероятностью $\frac{1}{2}$ в каждой из точек -1, 1. Результаты двух подбрасываний могут быть следующие:

$$\text{гг, гр, рг, рр}$$

(буква «г» сокращенно обозначает «герб», а буква «р» — «решетку»). Эти четыре исхода равновероятны и, следовательно, каждый имеет вероятность $\frac{1}{4}$. Первый исход приводит фишку в положение -2, второй и третий в 0, а четвертый в $+2$. Поэтому после двух шагов частица будет находиться с вероятностью $\frac{1}{4}$ в -2, с вероятностью $\frac{2}{4}$ в 0 и с вероятностью $\frac{1}{4}$ в $+2$. Аналогично можно вычислить вероятности каждого из возможных положений фишки после 3, 4 и т. д. ходов. Заменяя каждую точку схемы соответствующей вероятностью, получим числовой треугольник, изображенный на рис. 65. Этот числовой треугольник (мы будем называть его *треугольником вероятностей*) обладает замечательным свойством: *каждый его член равен полусумме двух стоящих над ним членов.* Легко проверить это свойство для всех членов, выписанных на рис. 65. Однако ясно, что такая проверка еще не доказывает, что то же свойство сохранится при любом продолжении нашего треугольника.

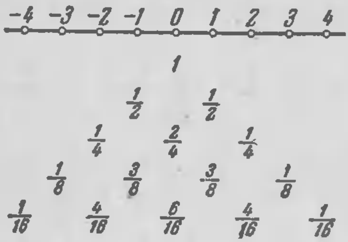


Рис. 65.

193. Пользуясь формулой полной вероятности (свойство 7, стр. 130), докажите, что

$$Z_n^k = \frac{1}{2}\left(Z_{n-1}^{k-1} + Z_{n-1}^{k+1}\right), \tag{1}$$

где Z_n^k обозначает вероятность того, что в момент n фишка находится в точке k.

С помощью «правила полусуммы» легко продолжить треугольник вероятностей. На рис. 66 выписаны первые девять

1	*0-я строка*
$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$	*1-я строка*
$\frac{1}{4}\quad\frac{2}{4}\quad\frac{1}{4}$	*2-я строка*
$\frac{1}{8}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{1}{8}$	*3-я строка*
$\frac{1}{16}\quad\frac{4}{16}\quad\frac{6}{16}\quad\frac{4}{16}\quad\frac{1}{16}$	*4-я строка*
$\frac{1}{32}\quad\frac{5}{32}\quad\frac{10}{32}\quad\frac{10}{32}\quad\frac{5}{32}\quad\frac{1}{32}$	*5-я строка*
$\frac{1}{64}\quad\frac{6}{64}\quad\frac{15}{64}\quad\frac{20}{64}\quad\frac{15}{64}\quad\frac{6}{64}\quad\frac{1}{64}$	*6-я строка*
$\frac{1}{128}\quad\frac{7}{128}\quad\frac{21}{128}\quad\frac{35}{128}\quad\frac{35}{128}\quad\frac{21}{128}\quad\frac{7}{128}\quad\frac{1}{128}$	*7-я строка*
$\frac{1}{256}\quad\frac{8}{256}\quad\frac{28}{256}\quad\frac{56}{256}\quad\frac{70}{256}\quad\frac{56}{256}\quad\frac{28}{256}\quad\frac{8}{256}\quad\frac{1}{256}$	*8-я строка*
$\frac{1}{512}\quad\frac{9}{512}\quad\frac{36}{512}\quad\frac{84}{512}\quad\frac{126}{512}\quad\frac{126}{512}\quad\frac{64}{512}\quad\frac{36}{512}\quad\frac{9}{512}\quad\frac{1}{512}$	*9-я строка*

Рис. 66.

строк треугольника вероятностей (не считая нулевой, состоящей из одной вершины треугольника). Подсчитать их прямым путем (как это было сделано с первыми четырьмя строчками) было бы нелегкой задачей.

194. Докажите, что в треугольнике вероятностей сумма элементов каждой строки равна 1.

Заметим, что «правило полусуммы» равносильно следующему «правилу деления пополам». Рассмотрим какую-нибудь строку треугольника, разделим пополам каждое число этой строки и сдвинем одну половинку вниз влево, а другую вниз вправо (см. рис. 67, где это сделано для 4-й строки). После сложения чисел, попавших в одну точку, мы получим следующую строку треугольника, Вообразим теперь, что в начальный момент времени в точке 0 находится единичная масса и что в течение одной секунды она делится на две равные половины, которые смещаются одна вправо, другая влево (на одно деление). В течение второй секунды каждая из половинок в свою очередь

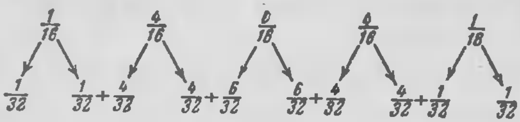


Рис. 67.

делится пополам, и одна ее часть сдвигается вправо, другая влево и т. д. Ясно, что сумма масс, собравшихся в точке k, через n секунд будет равна члену нашего числового треугольника, стоящему в n-й строке под k-й отметкой числовой шкалы. Эта связь между задачей о случайном блуждании фишки и задачей о перемещении дробящейся массы бывает полезна при решении ряда задач[1]).

Если помножить первую строку треугольника вероятностей на 2, вторую на 2^2, третью на $2^3, \ldots$, n-ю на 2^n, то мы получим треугольник, составленный из целых чисел. Читатель легко проверит, что в этом новом треугольнике каждое число равно сумме двух чисел, стоящих над ним. Такой треугольник носит название *треугольника Паскаля.* Нам уже приходилось иметь с ним дело во втором разделе (см. § 2 гл. II).

Поделим в треугольнике вероятностей каждый элемент на соседний элемент слева. Что же касается элементов, стоящих на левом краю треугольника, для которых левого соседа не существует, то их мы просто отбросим. Мы получим треугольник отношений, изображенный на рис. 68. Легко усмотреть закон, по которому составлен этот треугольник: в n-й строке знаменатели дробей пробегают по порядку все числа от 1 до n, а числители — все числа от n до 1. Мы

---

[1]) Аналогичная схема рассматривалась в одной из задач VIII Московской математической олимпиады. В этой задаче говорилось о 2^n людях, которые вышли из вершины треугольника на рис. 64, причем половина из них пошла вниз налево, а половина — вниз направо. Далее в каждой точке они снова делились по «правилу деления пополам». Спрашивалось, сколько людей придет в каждую точку n-й строки.

предоставляем читателю проверить этот закон, отправляясь от формулы (1).

По треугольнику отношений нетрудно обратно восстановить треугольник вероятностей. Мы начинаем n-ю строку

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&&&& \\
&&&&&&&\frac{2}{1}&&\frac{1}{2}&&&&&&& \\
&&&&&&\frac{3}{1}&&\frac{2}{2}&&\frac{1}{3}&&&&&& \\
&&&&&\frac{4}{1}&&\frac{3}{2}&&\frac{2}{3}&&\frac{1}{4}&&&&& \\
&&&&\frac{5}{1}&&\frac{4}{2}&&\frac{3}{3}&&\frac{2}{4}&&\frac{1}{5}&&&& \\
&&&\frac{6}{1}&&\frac{5}{2}&&\frac{4}{3}&&\frac{3}{4}&&\frac{2}{5}&&\frac{1}{6}&&& \\
&&\frac{7}{1}&&\frac{6}{2}&&\frac{5}{3}&&\frac{4}{4}&&\frac{3}{5}&&\frac{2}{6}&&\frac{1}{7}&& \\
&\frac{8}{1}&&\frac{7}{2}&&\frac{6}{3}&&\frac{5}{4}&&\frac{4}{5}&&\frac{3}{6}&&\frac{2}{7}&&\frac{1}{8}& \\
\frac{9}{1}&&\frac{8}{2}&&\frac{7}{3}&&\frac{6}{4}&&\frac{5}{5}&&\frac{4}{6}&&\frac{3}{7}&&\frac{2}{8}&&\frac{1}{9} \\
\hline
\end{array}
$$

Рис. 68.

числом $\frac{1}{2^n}$, а затем восстанавливаем все элементы этой строки один за другим, умножая уже полученный элемент на соот-

$$
\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&& \\
&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}&&& \\
&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}&&\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}&& \\
&\frac{1}{8}&&\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1}&&\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}&&\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}& \\
\frac{1}{16}&&\frac{1}{18}\cdot\frac{4}{1}&&\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}&&\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}&&\frac{1}{18}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}
$$

Рис. 69.

ветствующий элемент из n-й строки треугольника отношений. Таким образом, треугольник вероятностей может быть записан в форме, изображенной на рис. 69.

Отсюда видно, что k-й элемент n-й строки треугольника вероятностей равен

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n-k+1}{k}. \tag{2}$$

Центральные элементы треугольника вероятностей. Нас будут особенно интересовать центральные элементы треугольника вероятностей, т. е. элементы, стоящие на его вертикальной биссектрисе. Такие элементы имеются только в строках с четными номерами. Центральный элемент Z_{2k}^0, стоящий в строке с номером $2k$, означает вероятность события: «после $2k$ ходов фишка вернулась на исходное поле». Мы обозначим его через w_{2k}, так что

$$w_0=1,\quad w_2=\frac{2}{4},\quad w_4=\frac{6}{16},\quad w_6=\frac{20}{64},\quad w_8=\frac{70}{256},\ \ldots$$

или из рис. 69

$$w_0=1,\quad w_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1},\quad w_4=\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2},\ \ldots$$

Если воспользоваться общим выражением (2) и учесть, что $2k$-я строка содержит $2k+1$ членов, из которых k стоят справа и k слева от среднего члена w_{2k}, то мы придем к формуле

$$w_{2k}=\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{2k}{1}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-2}{3}\cdots\frac{k+1}{k}. \tag{3}$$

По этой формуле нетрудно вычислять значение w_{2k}, пока k не слишком велико. Если же k становится большим, то эти вычисления делаются весьма трудоемкими. (Попробуйте, например, сосчитать $w_{10\,000}$!) Для того чтобы оценить величину w_{2k}, не вычисляя ее точного значения, можно воспользоваться следующими замечательными неравенствами:

$$\frac{1}{\sqrt{4k}}\leqslant w_{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k}}\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{4}$$

Докажем эти неравенства. Прежде всего преобразуем формулу (3):

$$w_{2k}=\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{2k}{1}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-2}{3}\cdots\frac{k+1}{k}=$$

$$=\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{2k}{1}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-2}{3}\cdots\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k}\cdot\frac{k-1}{k-1}\cdots\frac{1}{1}=$$

$$=\frac{1}{2^{2k}}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots 2k-1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\dots 2k}{1\cdot 2\cdot 3\dots k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots k}=$$

$$=\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdots\frac{2k-1}{k}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdots\frac{2k}{k}=$$

$$=\frac{1}{2^{k}}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdots\frac{2k-1}{k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}.$$

Напишем теперь одно под другим три произведения:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-1}{2k},\quad(5)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-1}{2k},\quad(6)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k}{2k+1}.\quad(7)$$

Читатель легко заметит, что из каждых трех чисел, стоящих в одном столбце, второе больше чем первое или равно ему, а третье больше чем второе или равно ему. Поэтому из трех написанных произведений наименьшим является верхнее, а наибольшим нижнее. Однако среднее произведение равно

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdots\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2=w_{2k}^2,$$

верхнее после сокращений равно $\frac{1}{4k}$, а нижнее равно $\frac{1}{2k+1}$.

Отсюда

$$\frac{1}{4k}\leqslant w_{2k}^2<\frac{1}{2k+1}.$$

И подавно

$$\frac{1}{4k} \leqslant w_{2k}^2 < \frac{1}{2k}.$$

Извлекая из каждой части этого неравенства квадратный корень, получим

$$\frac{1}{\sqrt{4k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k}},$$

что и требовалось доказать.

Тем же методом можно вывести еще более точные оценки для w_{2k}.

195. Докажите, что:
для всех значений k, начиная с 2,

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2k}} \leqslant w_{2k} < \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k}}; \tag{8}$$

для всех значений k, начиная с 3,

$$\sqrt{5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2k}} \leqslant w_{2k} < \sqrt{5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k}}; \tag{9}$$

вообще для всех значений k, начиная с a,

$$\sqrt{(2a-1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2}\right)^2 \cdot \frac{2a-1}{2a} \cdot \frac{1}{2k}} \leqslant$$
$$\leqslant w_{2k} < \sqrt{(2a-1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2a-3}{2a-2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k}}. \tag{10}$$

Указание. Измените в каждом из произведений (5) и (7) начальные члены так, чтобы они совпали с начальными членами произведения (6).

Задача 195 дает последовательность все более и более точных оценок для w_{2k}: мерой точности может служить отношение крайнего левого члена неравенства к крайнему правому, которое

в оценке (4) равно $\sqrt{\frac{1}{2}}$,

в оценке (8) » $\sqrt{\frac{3}{4}}$,

в оценке (9) равно $\sqrt{\frac{5}{6}}$,

в оценке (10) » $\sqrt{1-\frac{1}{2a}}$

и, следовательно, все более и более приближается к 1. Если подсчитать численное значение произведений, стоящих в неравенствах (8) и (9), то мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}56k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2{,}66k}} \qquad (\text{для } k \geqslant 2), \qquad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}42k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2{,}84k}} \qquad (\text{для } k \geqslant 3). \qquad (12)$$

Далее, подставляя в общее неравенство (10) частные значения $a = 4$, 5, 60, 150, найдем

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}35k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2{,}92k}} \qquad (\text{для } k \geqslant 4), \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}31k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2{,}98k}} \qquad (\text{для } k \geqslant 5), \qquad (14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}18k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{3{,}10k}} \qquad (\text{для } k \geqslant 60), \qquad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}15k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{3{,}14k}} \qquad (\text{для } k \geqslant 150). \qquad (16)$$

Последовательность коэффициентов в левой части все время убывает, а последовательность коэффициентов в правой части все время возрастает. Можно строго доказать (мы этого делать не будем), что обе эти последовательности приближаются к одному и тому же пределу, и этот предел — известное число π (отношение длины окружности к диаметру). Таким образом, при больших значениях $2k$ можно вычислять w_{2k} по следующей приближенной формуле:

$$w_{2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}. \qquad (17)$$

Можно доказать (читатель может попробовать сделать это самостоятельно), что эта формула дает верные две значащие цифры уже начиная с $k = 25$, а при дальнейшем росте k точность будет все более и более улучшаться.

196. Вычислить с двумя десятичными знаками значение $w_{10\,000}$.

В треугольнике вероятностей числа возрастают от краев к середине. Поэтому, опираясь на неравенство (4), нетрудно найти верхнюю границу для чисел n-й строки.

197. Докажите, что все числа, стоящие в n-й строке треугольника вероятностей, не превосходят $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Оценка произвольного элемента треугольника. После того как мы достигли такого полного успеха в приближенном вычислении центральных членов треугольника вероятностей, естественно попытаться найти такие же удобные формулы для остальных его членов.

Рассмотрим строку с четным номером $2k$. Обозначим центральный член этой строки через v_0 (раньше мы его обозначали через w_{2k}) и, начиная с этого члена, перенумеруем по порядку все числа нашей строки, стоящие правее него:

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{k-2},\ v_{k-1},\ v_k.$$

Выпишем теперь правую половину $2k$-й строки треугольника отношений:

$$\frac{k}{k+1},\ \frac{k-1}{k+2},\ \ldots,\ \frac{2}{2k-1},\ \frac{1}{2k}.$$

По определению треугольника отношений

$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{k}{k+1};\quad \frac{v_2}{v_1}=\frac{k-1}{k+2};\ \ldots;\ \frac{v_{k-1}}{v_{k-2}}=\frac{2}{2k-1};\quad \frac{v_k}{v_{k-1}}=\frac{1}{2k}.$$

Выберем теперь какой-нибудь номер s, заключенный между нулем и k, и постараемся оценить отношение $\frac{v_s}{v_0}$. Имеем

$$\frac{v_s}{v_0}=\frac{v_1}{v_0}\cdot\frac{v_2}{v_1}\ \cdots\ \frac{v_{s-1}}{v_{s-2}}\cdot\frac{v_s}{v_{s-1}}=$$
$$=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k-1}{k+2}\ \cdots\ \frac{k-s+2}{k+s-1}\cdot\frac{k-s+1}{k+s}.$$

Изменив порядок множителей в знаменателе на обратный, получим

$$\frac{v_s}{v_0}=\frac{k}{k+s}\,\frac{k-1}{k+s-1}\cdots\frac{k-s+2}{k+2}\cdot\frac{k-s+1}{k+1}=$$
$$=\left(1-\frac{s}{k+s}\right)\left(1-\frac{s}{k+s-1}\right)\cdots\left(1-\frac{s}{k+2}\right)\left(1-\frac{s}{k+1}\right).$$

Легко видеть, что среди всех скобок наибольшей является первая, а наименьшей последняя. Поэтому если мы заменим все скобки на первую, то от этого наше произведение увеличится, а если заменим все скобки на последнюю, — оно уменьшится, т. е.

$$\left(1-\frac{s}{k+1}\right)^s\leqslant\frac{v_s}{v_0}\leqslant\left(1-\frac{s}{k+s}\right)^s \tag{18}$$

или

$$\left(\frac{k+1-s}{k+1}\right)^s\leqslant\frac{v_s}{v_0}\leqslant\left(\frac{k}{k+s}\right)^s. \tag{19}$$

| **198.** В каких пределах заключена вероятность Z_{120}^{20}?

Аналогичные оценки можно было бы получить и для элементов строки с нечетным номером, однако мы этим заниматься не будем.

§ 3. Закон больших чисел

Предположим, что наш опыт с подбрасыванием монеты и передвижением фишки продолжается достаточно долго, скажем 1000 раз. Насколько далеко от начального положения уйдет при этом фишка? Во всяком случае не дальше, чем на 1000 делений влево или вправо. И это единственное, что мы можем предвидеть с абсолютной уверенностью. Если мы попытаемся предсказать, что фишка уйдет менее чем на 1000 делений, т. е. не далее, чем на 998 делений, то возможность ошибки при этом уже не будет исключена: монета может выпасть все 1000 раз одной стороной: гербом или решеткой, и тогда фишка окажется в точках —1000 или $+1000$. Однако вероятность этого $\left(\text{равная } 2\cdot\frac{1}{2^{1000}}\right)$ настолько мала, что бесспорно можно считать ошибку практически невозможной. Невелика будет вероятность ошибки и при более смелом утверждении, что фишка уйдет не дальше, чем на 990 делений. Для того чтобы мы ошиблись, монета должна оказаться в одной из точек

$$-1000,\ -998,\ -996,\ -994,\ -992,$$
$$+992,\ +994,\ +996,\ +998,\ +1000.$$

Чтобы подсчитать вероятность ошибки, надо рассмотреть 1000-ю строку треугольника вероятностей и найти сумму десяти его членов: пяти самых левых и пяти самых правых. Ввиду симметрии треугольника вероятностей эта сумма равна удвоенной сумме пяти левых членов:

$$2\left(\frac{1}{2^{1000}}+\frac{1}{2^{1000}}\cdot\frac{1000}{1}+\frac{1}{2^{1000}}\cdot\frac{1000}{1}\cdot\frac{999}{2}+\frac{1}{2^{1000}}\cdot\frac{1000}{1}\cdot\frac{999}{2}\cdot\frac{998}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^{1000}}\cdot\frac{1000}{1}\cdot\frac{999}{2}\cdot\frac{998}{3}\cdot\frac{997}{4}\right)\approx\underbrace{0,00\ldots0}_{290\text{ нулей}}\ldots$$

Таким образом, и здесь ошибка может считаться практически невозможной. В этом результате нет, конечно, ничего удивительного, ибо, предсказывая, что после 1000 шагов отклонение фишки не превысит 990 делений, мы пренебрегли из 1001 возможных положений частицы 10 самыми маловероятными. Гораздо более рискованным было бы утверждение, что отклонение фишки будет меньше 100 делений (т. е. не более 98 делений). Здесь мы пренебрегаем большей частью возможных положений: 902 из 1001. Насколько это допустимо? Насколько мала или, наоборот, близка к 1 вероятность ошибки при этом утверждении? На эти вопросы невозможно ответить без вычисления. Для того чтобы провести это вычисление, мы должны найти сумму 902 членов из 1000-й строки треугольника вероятностей: 451 крайнего левого и 451 крайнего правого. Хотя для этой выкладки не требуется ничего, кроме знания четырех арифметических действий, вряд ли кто-нибудь из наших читателей смог бы довести ее до конца: слишком много времени и сил пришлось бы на нее затратить [1]). Поэтому мы попытаемся оценить вероятность ошибки, не вычисляя ее точно. Наши рассуждения будут иметь совершенно общий характер. Однако для простоты вычислений будем всюду предполагать, что число n ходов фишки является четным.

Рассмотрим $2k$-ю строку треугольника вероятностей и занумеруем ее члены, начиная от центрального до крайнего правого

$$v_0, \ v_1, \ v_2, \ \ldots, \ v_k.$$

Оценим сумму

$$S = v_r + v_{r+1} + \ldots + v_k.$$

Воспользуемся для этой цели неравенством (19) из § 2. Согласно этому неравенству

$$\frac{v_r}{v_0} \leqslant \left(\frac{k}{k+r}\right)^r,$$

$$\frac{v_{r+1}}{v_0} \leqslant \left(\frac{k}{k+r+1}\right)^{r+1},$$

$$\frac{v_{r+2}}{v_0} \leqslant \left(\frac{k}{k+r+2}\right)^{r+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{v_k}{v_0} \leqslant \left(\frac{k}{k+k}\right)^k.$$

Обозначим для сокращения $\frac{k}{k+r}$ через g. Очевидно, что каждая из дробей, стоящих в скобках в правых частях наших

---

[1]) Конечно, мы могли бы сосчитать эту сумму и так: вычесть из единицы сумму 99 средних членов. В этой последней сумме число слагаемых меньше (99, а не 902), однако сами эти слагаемые вычислить значительно труднее.

10 Зак. 3398. Е. Дынкин и В. Успенский

неравенств, не превосходит g. Поэтому

$$\frac{v_r}{v_0} \leqslant g^r,$$

$$\frac{v_{r+1}}{v_0} \leqslant g^{r+1},$$

$$\frac{v_{r+2}}{v_0} \leqslant g^{r+2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{v_k}{v_0} \leqslant g^k.$$

Складывая эти неравенства, мы получим

$$\frac{S}{v_0} \leqslant g^r + g^{r+1} + g^{r+2} + \ldots + g^k.$$

В правой части написана геометрическая прогрессия. Суммируя ее, найдем

$$\frac{S}{v_0} \leqslant \frac{g^r - g^{k+1}}{1-g}.$$

Поскольку $g = \frac{k}{k+r} < 1$, то $1 - g > 0$, и мы только усилим неравенство, если отбросим в правой части отрицательный член $\frac{-g^{k+1}}{1-g}$. Поэтому

$$\frac{S}{v_0} < \frac{g^r}{1-g}.$$

Умножая это неравенство на v_0 и заменяя g его значением, получим окончательно

$$S < v_0 \frac{k+r}{r} \left(\frac{k}{k+r}\right)^r. \qquad (1)$$

Теперь мы в состоянии оценить вероятность P события «после $n = 2k$ переходов фишка отклонилась от начального положения не меньше чем на $m = 2r$ делений». Эта вероятность равняется удвоенной вероятности события: «после $n = 2k$ переходов фишка отклонилась от начального положения вправо не меньше чем на $m = 2r$ делений». Последняя же вероятность как раз и равна сумме S, которую мы оценили. Заменим в формуле (1) обозначение v_0 для центрального члена $2k$-й строки на старое обозначение w_{2k}, которое удобнее тем, что явным образом отражает зависимость центрального члена от номера строки. Умножим неравенство (1) на 2 и подставим в него $\frac{n}{2}$ вместо k и $\frac{m}{2}$ вместо r. Мы получим

$$P \leqslant 2w_n \cdot \frac{n+m}{m}\left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}}. \tag{2}$$

Центральный член $w_n = w_{2k}$ можно оценить по одной из формул (4) или (11)—(16) § 2. Из этих формул

$$w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{Bk}}, \tag{3}$$

где B — число, которое можно выбирать тем более близким к π, чем больше k. (В неравенстве (4) $B = 2$, в неравенстве (11) $B = 2{,}66$ и т. д.)

Заменим в неравенстве (3) k на $\frac{n}{2}$. Сопоставляя это неравенство с неравенством (2), получим

$$P \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{Bn}} \cdot \frac{n+m}{m} \cdot \left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}}. \tag{4}$$

Воспользуемся выведенной формулой, чтобы рассчитать числовой пример, о котором шла речь в начале параграфа. Пусть фишка сделала 1000 переходов. Какова вероятность, что она отклонится не менее чем на 100 делений от своего начального положения? Подставим в формулу (4) $n = 1000$, $m = 100$:

$$P \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{1000B}} \cdot 11 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{50}.$$

Поскольку $k = \frac{n}{2} > 150$, мы можем в согласии с формулой (16) § 2 положить $B = 3{,}14$. После вычислений получим

$$P < 0{,}0048.$$

Таким образом, событие «фишка после 1000 шагов отклонилась не менее чем на 100 делений» оказывается маловероятным. Если требования к уровню достоверности не слишком велики и можно принять в качестве допускаемого уровня недостоверности, скажем, 0,005, то законно сказать, что «практически невозможно, чтобы после 1000 шагов фишка отклонилась более чем на 98 делений» или «практически достоверно, что фишка отклонится менее чем на 100 делений».

«Закон корня квадратного из n». Для дальнейшего изучения отклонений фишки выгодно заменить оценку (4) другой оценкой, более грубой, но зато более простой и удобной для вычислений. Нам потребуется одно вспомогательное неравенство, которое мы предлагаем доказать читателю в виде задачи:

199. Докажите, что для любого положительного p и целого положительного r

$$(1+p)^r \geqslant 1 + rp. \tag{5}$$

Пусть m и n — четные положительные числа. Заменим в неравенстве (5) r на $\frac{m}{2}$ и p на $\frac{m}{n}$. Мы получим

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \geqslant 1 + \frac{m^2}{2n} > \frac{m^2}{2n}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{n}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}} < \frac{2n}{m^2}. \tag{6}$$

Из неравенств (2) и (6) выводим, что

$$P < 2w_n(n+m)\frac{2n}{m^3}. \tag{7}$$

Заметим теперь, что в силу неравенства (4) § 2 $w_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Кроме того, $m \leqslant n$. Поэтому из неравенства (7) вытекает оценка

$$P < \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot 2n \cdot \frac{2n}{m^3} = \left(\frac{2\sqrt{n}}{m}\right)^3.$$

Итак, если утверждать, что после n переходов фишка отклонится от начального положения менее чем на m делений, то при этом вероятность ошибки будет меньше чем $\left(\frac{2\sqrt{n}}{m}\right)^3$.

Выберем какое-нибудь положительное число t и оценим вероятность ошибки при следующем утверждении:

(А) «после n переходов отклонение фишки от начала будет меньше чем $t\sqrt{n}$».

Обозначим через m наименьшее четное число, удовлетворяющее условию

$$m \geqslant t\sqrt{n}.$$

Так как отклонение фишки за четное число шагов является четным числом, то утверждение (А) равносильно следующему утверждению:

(Б) «после n переходов фишка отклонится от начала меньше чем на m делений».

Следовательно, вероятности ошибок при утверждениях (А) и (Б) равны между собой. Их значение меньше чем

$$\left(\frac{2\sqrt{n}}{m}\right)^3 \leqslant \left(\frac{2\sqrt{n}}{t\sqrt{n}}\right)^3 = \left(\frac{2}{t}\right)^3.$$

Итак, мы доказали следующий замечательный закон:

«Закон корня квадратного из n». *С вероятностью ошибки, меньшей* $\left(\frac{2}{t}\right)^3$, *можно утверждать, что отклонение фишки от начала за n ходов будет меньше чем* $t\sqrt{n}$ (т. е. фишка будет находиться между $-t\sqrt{n}$ и $+t\sqrt{n}$).

Выберем какой-нибудь определенный уровень недостоверности, например 0,005, и подберем t так, чтобы

$$\left(\frac{2}{t}\right)^3 = 0{,}005.$$

Разрешая это соотношение относительно t, найдем

$$t = \frac{2}{\sqrt[3]{0{,}005}} \approx 12\ ^{1)}.$$

---

1) Приближение взято с избытком.

Из «закона корня квадратного из n» вытекает, что при любом значении n является практически достоверным утверждение:

Через n ходов фишка отклонится от исходного положения менее чем на $12\sqrt{n}$.

Составим табличку:

n	$n' = 12\sqrt{n}$	$\frac{n'}{n} = \frac{12}{\sqrt{n}}$
2 500	600	0,24
10 000	1 200	0,12
250 000	6 000	0,024
1 000 000	12 000	0,012

Вторая графа этой таблички дает практически достоверные границы отклонений, соответствующие различным значениям n. Отношение $\frac{n'}{n} = \frac{12}{\sqrt{n}}$ с ростом n убывает, неограниченно приближаясь к нулю.

Предположим, что за n ходов фишка отклонилась от начального положения на m делений. Отношение $\frac{m}{n}$ мы назовем *приведенной скоростью* фишки: если выпустить из точки 0 частицу, движущуюся с этой скоростью, не меняя направления, то через n единиц времени ее отклонение также составит m делений. $\Big($Например, если после 100 ходов фишка окажется в точке -20, то ее приведенная скорость равна $\frac{1}{5}$.$\Big)$ Приведенная скорость фишки может изменяться от 1 (если фишка движется все время в одном направлении) до 0 (если она возвращается в исходное положение, стало быть, делает влево столько же ходов, сколько и вправо). Из «закона квадратного корня из n» нетрудно вывести, что

Если фишка движется достаточно долго, то практически достоверно, что ее приведенная скорость близка к нулю.

Действительно, практически достоверно, что отклонение фишки будет меньше $12\sqrt{n}$ и, следовательно, ее приведенная скорость будет меньше $\frac{12\sqrt{n}}{n}=\frac{12}{\sqrt{n}}$. Если n достаточно велико, то эта граница будет сколь угодно близка к нулю.

До сих пор мы принимали в качестве допустимой вероятности ошибки 0,005. Однако все наши рассуждения можно без каких-либо существенных изменений повторить и для любого значения ε этой ошибки. В результате мы придем к следующему выводу:

С вероятностью ошибки, меньшей чем ε, можно утверждать, что

а) отклонение фишки за n ходов меньше чем $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\sqrt{n}$;

б) ее приведенная скорость за n ходов меньше по абсолютной величине, чем $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}}:\sqrt{n}$.

200. Принимая допустимую вероятность ошибки равной 0,05, укажите практически достоверную границу для отклонения и для приведенной скорости фишки за 1000 ходов.

201. Пусть α — произвольное положительное число. Докажите, что с вероятностью ошибки, меньшей чем $\left(\frac{2}{\alpha\sqrt{n}}\right)^3$, можно утверждать, что приведенная скорость фишки за n ходов будет меньше чем α.

202. Укажите число шагов, достаточное для того, чтобы с вероятностью ошибки, не превышающей 0,001, можно было утверждать, что приведенная скорость фишки меньше 0,01.

Вспомним теперь, что каждое перемещение фишки обусловлено результатом подбрасывания монеты. Если при n подбрасываниях монеты выпадает l раз решетка и $n-l$ раз герб, то фишка сделает l шагов вправо и $n-l$ шагов влево и попадет в точку

$$l-(n-l)=2l-n.$$

Приведенная скорость фишки за n шагов выразится абсолютной величиной отношения

$$\frac{2l-n}{n}=2\frac{l}{n}-1. \tag{8}$$

Дробь $\frac{l}{n}$ характеризует *частоту* выпадения решетки.

Пусть задана какая-нибудь допустимая вероятность ошибки. Как мы знаем, для больших значений n можно с практической достоверностью утверждать, что приведенная скорость близка к нулю. Из выражения (8) видно, что если приведенная скорость мала, то $2\frac{l}{n}$ приблизительно равно 1 и, следовательно, частота $\frac{l}{n}$ близка к $\frac{1}{2}$. Таким образом:

Если монета подбрасывается большое число раз, то практически достоверно, что частота выпадения решетки будет близка к $\frac{1}{2}$.

Грубо говоря, практически достоверно, что решетка будет выпадать примерно в половине случаев. Более точная формулировка гласит:

Выберем произвольную допустимую вероятность ошибки ε *и зададим сколь угодно малое число* α. *Если число бросаний монеты превосходит*

$$N=\frac{1}{\alpha^2\sqrt[3]{\varepsilon^2}},$$

то с вероятностью ошибки, меньшей чем ε, *можно утверждать, что частота выпадения решетки отличается от* $\frac{1}{2}$ *меньше чем на* α.

Доказательство этой точной формулировки легко вытекает из предложения б) на стр. 151: если $n>\frac{1}{\alpha^2\sqrt[3]{\varepsilon^2}}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\alpha\sqrt[3]{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}}}{\sqrt{n}}<2\alpha.$$

Итак, с вероятностью ошибки, меньшей ε, приведенная скорость фишки меньше по абсолютной величине, чем 2α.

Но приведенная скорость в нашем случае равна абсолютной величине $\frac{2l-n}{n}=2\frac{l}{n}-1$. Поэтому с вероятностью ошибки, меньшей ε, можно утверждать, что $2\frac{l}{n}$ отличается от 1 меньше чем на 2α или, другими словами, $\frac{l}{n}$ отличается от $\frac{1}{2}$ меньше чем на α.

203. Сколько раз достаточно бросить монету, чтобы с вероятностью ошибки, меньшей 0,01, можно было утверждать, что частота выпадения решетки будет заключена между 0,4 и 0,6?

Пусть теперь подбрасывается не монета, а игральная кость. С какой частотой будет выпадать шестерка? Если провести для этого нового случая расчеты и рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены для случая монеты, то получится следующий результат: при большом числе бросаний кости практически достоверно, что частота выпадения шестерки будет близка к $\frac{1}{6}$.

Рассмотрим еще один опыт. Берется урна, содержащая всего a шаров, из которых b белых, а остальные черные. Из этой урны n раз извлекается шар и каждый раз опускается обратно. С какой частотой будут появляться белые шары? Можно доказать, что при большом числе выниманий практически достоверно, что частота появления белых шаров будет близка к дроби $\frac{b}{a}$.

Сформулируем теперь общий результат, который содержит как частные случаи все приведенные выше формулировки.

Пусть проделывается какой-нибудь опыт, в результате которого может наступить или не наступить некоторое событие A (выпадение решетки при бросании монеты, выпадение шестерки при бросании кости, появление белого шара при вынимании из урны и т. д.), *и пусть вероятность наступления A равна p.* (В наших примерах p равно, соответственно, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{b}{a}$.) *Пусть этот опыт* *повторяется многократно, причем на результат каждого нового испытания не оказывают влияния исходы всех предшествующих испытаний. Тогда при большом числе испытаний практически достоверно, что частота наступлений события А будет близка к вероятности р этого события.*

Эта общая формулировка уточняется таким же образом, как и формулировка для случая монеты.

Описанный результат составляет содержание известной теоремы Бернулли [1]), представляющей собой простейшую форму одного из основных законов теории вероятностей — *закона больших чисел.* Мы не имеем возможности останавливаться на обобщениях теоремы Бернулли. Скажем только, что важнейшее из них принадлежит великому русскому математику П. Л. Чебышеву.

Читателю должно быть понятно огромное значение закона больших чисел. Ведь утверждая, что с практической достоверностью вероятность события *А* приблизительно равна частоте его появления в длинной серии испытаний, закон больших чисел открывает возможности экспериментального вычисления вероятности. Во многих случаях этот экспериментальный путь вычисления вероятности является единственно возможным. Далее, знание связи между вероятностью и частотой позволяет из теоретически вычисленной вероятности события делать практические выводы о числе его наступлений в длинной серии испытаний. Связь между вероятностью и частотой является основой всех многочисленных приложений теории вероятностей к физике, технике и т. д.

§ 4. Блуждания с конечным числом состояний

В предыдущих параграфах мы рассмотрели простейший пример случайного блуждания — блуждание по прямой линии. Задачи, которыми мы занимались при этом, имели следующий характер: фиксируя некоторый момент времени, мы спрашивали себя, где может находиться фишка в этот момент, с какой вероятностью она находится в данной точке, насколько она отклонилась от исходного положения? В этом параграфе мы

---

[1]) Я к о в Б е р н у л л и (1654—1705) — известный швейцарский математик.

рассмотрим более сложные схемы блужданий, включающие в себя и случайную прогулку по городу, и детскую игру, о которых говорилось во введении. Задачи, относящиеся к этим схемам, будут носить несколько иной характер, чем те, которые мы изучали в §§ 2—3. Именно, выбрав некоторую точку, мы спросим себя, попадет ли в нее когда-нибудь частица и если попадет, то как скоро? Первый из этих вопросов решается общей теоремой (стр. 165). Что же касается второго вопроса, вопроса о числе шагов, нужном для того, чтобы с заданной вероятностью побывать в данной точке, то точно ответить на него удается лишь для простейших случаев (см. задачу 205). Для общего же случая мы сможем получить лишь оценку нужного числа шагов.

Начнем с небольшого изменения схемы блуждания по прямой. Поставим на пути движения частицы в точках m_1 и m_2 (рис. 70) о т р а ж а ю щ и е э к р а н ы. Действие этих экранов

Рис. 70.

заключается в том, что частица, попав в m_1, следующим шагом переходит в m_1+1, а попав в m_2, следующим шагом переходит в m_2-1. Таким образом, движение частицы будет происходить между точками m_1 и m_2.

Мы могли бы ограничить движение частицы, поставив в точках m_1 и m_2 не отражающие, а поглощающие экраны. В этом случае, попав в m_1 или m_2, частица остается там навсегда. (С такой схемой мы уже встречались при решении задачи 191.)

Наконец, мы можем поставить в одну из точек отражающий, а в другую — поглощающий экран.

204. Докажите, что вероятность того, что частица за n шагов хоть раз попадет в точку m, не зависит от того, стоит ли в точке m экран, и если стоит, то какой.

Поставим в точку 0 отражающий экран. Частица вышла из точки 1 и сделала n шагов. Какова вероятность, что она хоть раз побывала в точке 3? Для вычисления этой вероятности в силу задачи 204 мы имеем право поставить в точку 3 поглощающий экран (рис. 71). Но тогда событие «за n шагов частица хотя бы раз побывала в точке 3» равносильно событию «через n шагов частица находится в точке 3» (ибо если она попала туда, то она там и осталась). Вероятность того, что частица через n шагов находится в точке 3 (обозначим ее через d_n), мы и вычислим. Обозначим через a_n, b_n, c_n вероятности событий «частица через n шагов находится в точке 0», «частица через n шагов находится в точке 1», «частица через n шагов находится в точке 2».

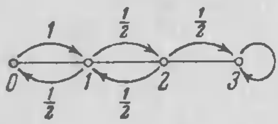


Рис. 71.

Чтобы оказаться через n шагов в точке 0 (вероятность чего есть a_n), частица должна быть через $n-1$ шагов в точке 1 (вероятность этого равна b_{n-1}) и затем перейти за 1 в 0 $\left(\text{что случится с вероятностью } \frac{1}{2}\right)$. В силу свойства 6

$$a_n = b_{n-1} \cdot \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Аналогично, используя свойства 6 и 7, можно вывести соотношения

$$b_n = a_{n-1} \cdot 1 + c_{n-1} \cdot \frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$c_n = b_{n-1} \cdot \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$d_n = d_{n-1} \cdot 1 + c_{n-1} \cdot \frac{1}{2}. \tag{4}$$

205. Вывести из соотношений (1) — (4), что

$$d_{2k} = d_{2k+1} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k. \tag{5}$$

Равенство (5) можно истолковать и так: утверждая, что после $2k$ шагов частица хоть раз побывала в точке 3, мы ошибаемся с вероятностью $\left(\frac{3}{4}\right)^k$. Потребуем, чтобы вероятность ошибки была меньше 0,01. Сколько шагов надо для этого сделать?

Решая показательное уравнение $\left(\frac{3}{4}\right)^{k_0}=0{,}01$, получим $k_0=16{,}006$. Отсюда заключаем, что при

$$k>16{,}006 \tag{6}$$

выполняется неравенство

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k<0{,}01. \tag{7}$$

Итак, при любом k, начиная с 17, т. е. при любом числе шагов, начиная с $2\cdot 17=34$, частица побывает в точке 3 с вероятностью, большей, чем 0,99 (сравните с вычислениями на стр. 163).

Общая задача. Займемся теперь изучением случайной прогулки по городу, описанной во введении к данному разделу (см. рис. 59). Поставим вопрос, дойдут ли когда-нибудь приятели до перекрестка E. Покажем, что если не ограничивать времени их блуждания, они с вероятностью 1 побывают на перекрестке E, как и на всяком другом перекрестке. Наряду с этим оценим вероятность, с которой они побывают в E, сделав данное число шагов.

Будем вести рассуждения сразу в общем виде, не предполагая, что город имеет непременно вид, изображенный на рис. 59. Пусть по городу бродит путник. Дойдя до перекрестка, из которого исходят k улиц, он с вероятностью p_1 выбирает для продолжения пути первую улицу, с вероятностью p_2 — вторую и т. д., с вероятностью p_k — k-ю (в том числе он может с определенной вероятностью пойти по той улице, по которой он только что пришел). Мы предполагаем, что эти вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_k$ отличны от нуля и остаются постоянными для данного перекрестка, так что если путник когда-нибудь снова попадет на него, он будет выбирать свой дальнейший путь с теми же самыми вероятностями независимо от того, откуда он на этот перекресток пришел (в примере блуждания, приведенном на стр. 117, для каждого перекрестка $k=4$ и $p_1=p_2=p_3=p_4=\frac{1}{4}\Big)$. Дойдя до края города, путник поворачивает и идет назад. Мы допускаем, что он может блуждать таким образом неограниченно долго. Утверждается, что, откуда бы ни вышел путник, он на каждом перекрестке побывает с вероятностью *единица.*

Итак, пусть E_0 — некоторый перекресток; покажем, что с вероятностью 1 путник на нем побывает. Остальные перекрестки города обозначим $E_1, E_2, \ldots, E_v$.

1-я часть доказательства. Предположим, что мы нашли два числа N и $\alpha>0$, обладающие следующими свойствами: откуда бы ни вышел путник, он с вероятностью, большей или равной α, за N шагов[1]) хотя бы раз побывает в E_0. (Как находить числа N и α, будет указано во 2-й части доказательства.)

Всю последовательность шагов путника разобьем на серии по N шагов в каждой:

с 1-го по N-й шаг включительно — 1-я серия,

с $(N+1)$-го по $2N$-й шаг включительно — 2-я серия и т. д.

Обозначим через D_k событие «за первые k серий путник хоть раз побывал в E_0» и через $\overline{D_k}$ противоположное событие «за k серий путник ни разу не побывал в E_0».

Цель 1-й части доказательства — установление неравенства

$$\mathbf{P}(\overline{D}_k)\leqslant\mathbf{P}(\overline{D}_{k-1})(1-\alpha).$$

Для этого рассмотрим события $F_{k-1}^{(s)}$:

«за первые $k-1$ серий путник ни разу не побывал в E_0 и очутился через $(k-1)N$ шагов в E_s».

События $D_{k-1}, F_{k-1}^{(1)}, F_{k-1}^{(2)}, \ldots, F_{k-1}^{(v)}$ попарно-несовместны и образуют полную систему; в силу свойства 7

$$\mathbf{P}(D_k)=\mathbf{P}(D_{k-1})\mathbf{P}(D_k/D_{k-1})+\mathbf{P}(F_{k-1}^{(1)})\mathbf{P}(D_k/F_{k-1}^{(1)})+\ldots$$
$$\ldots+\mathbf{P}(F_{k-1}^{(v)})\mathbf{P}(D_k/F_{k-1}^{(v)}). \quad (8)$$

[1]) Для краткости мы будем говорить, что когда путник из одного перекрестка переходит в соседний, он делает один «шаг».

Очевидно,

$$P(D_k/D_{k-1}) = 1. \tag{9}$$

Далее, $P(D_k/F^{(1)}_{k-1})$ есть вероятность побывать в E_0 за k-ю серию шагов при условии, что в начале этой серии путник находился в E_1. Другими словами, это есть вероятность, выйдя из E_1, побывать за N шагов хотя бы раз в E_0. В силу выбора α эта вероятность больше или равна α:

$$P(D_k/F^{(1)}_{k-1}) \geqslant \alpha. \tag{10}$$

Точно так же

$$P(D_k/F^{(2)}_{k-1}) \geqslant \alpha, \ \ldots, \ P(D_k/F^{(v)}_{k-1}) \geqslant \alpha. \tag{11}$$

Поэтому из формул (8) — (11) вытекает

$$P(D_k) \geqslant P(D_{k-1}) + P(F^{(1)}_{k-1})\alpha + P(F^{(2)}_{k-1})\alpha + \ldots + P(F^{(v)}_{k-1})\alpha =$$
$$= P(D_{k-1}) + [P(F^{(1)}_{k-1}) + P(F^{(2)}_{k-1}) + \ldots + P(F^{(v)}_{k-1})]\alpha. \tag{12}$$

Но сумма вероятностей попарно-несовместных событий D_{k-1}, $F^{(1)}_{k-1}$, $F^{(2)}_{k-1}$, ..., $F^{(v)}_{k-1}$, образующих полную систему, равна 1 (формула (7) из § 1). Поэтому сумма, стоящая в квадратных скобках, равна

$$1 - P(D_{k-1}),$$

и формула (12) принимает вид

$$P(D_k) \geqslant P(D_{k-1}) + [1 - P(D_{k-1})]\alpha. \tag{13}$$

В силу свойства 3

$$P(\bar{D}_k) = 1 - P(D_k),$$
$$P(\bar{D}_{k-1}) = 1 - P(D_{k-1}).$$

Отсюда и из (13) выводим

$$P(\bar{D}_k) = 1 - P(D_k) \leqslant 1 - P(D_{k-1}) - [1 - P(D_{k-1})]\alpha =$$
$$= P(\bar{D}_{k-1}) - P(\bar{D}_{k-1})\alpha = P(\bar{D}_{k-1})(1 - \alpha).$$

2-я часть доказательства. Найдем теперь числа N и α, обладающие указанными свойствами.

Возьмем произвольный перекресток E_i. Из него путник может пройти в E_0 разными путями. Выберем один из таких путей $E_iE_jE_k \ldots E_rE_sE_0$. Число шагов в этом пути обозначим N_i. Вычислим вероятность α_i того, что путник, выйдя из E_i, пошел по пути $E_iE_jE_k \ldots E_rE_sE_0$.

Вероятность того, что путник, выйдя из перекрестка E_i, пойдет по пути E_iE_j (рис. 72), обозначим p_{ij}. Вероятность p_{ij} —

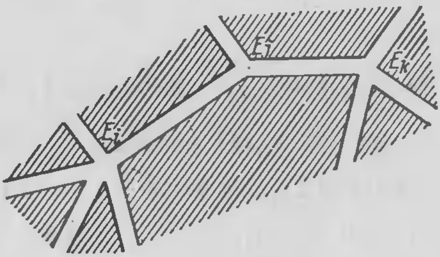


Рис. 72.

это условная вероятность оказаться на n-м шагу в E_j при условии, что на $(n-1)$-м ходу путник находился в E_i. Тогда вероятность того, что, выйдя из E_i, путник пойдет по пути $E_iE_jE_k$ (рис. 72), равна $p_{ij}p_{jk}$. Действительно, в силу свойства 6 эта вероятность равна произведению двух множителей: 1) вероятности оказаться через один шаг в E_j и 2) вероятности при этом условии оказаться еще через шаг в E_k. Первый множитель равен p_{ij}, второй — p_{jk}, поэтому искомая вероятность равна $p_{ij}p_{jk}$. Вообще вероятность того, что путник, выйдя из E_i, пойдет по пути $E_iE_jE_k \ldots E_rE_sE_0$, равна $p_{ij}p_{jk} \ldots p_{rs}p_{s0} = \alpha_i$.

Проведем такое построение для каждого перекрестка $E_1, E_2, \ldots, E_v$. Мы получим числа $N_1, N_2, \ldots, N_v$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v$. Примем за N наибольшее из чисел $N_1, \ldots, N_v$, а за α — наименьшее из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_v$. Докажем, что N и α обладают нужными нам свойствами.

Прежде всего все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v$ больше нуля, следовательно, и $\alpha > 0$.

Пусть путник вышел из перекрестка E_i и сделал N шагов. Нужно показать, что с вероятностью, большей или равной α, он хоть раз побывал в E_0. Действительно, из события «первые N_i шагов путника были по пути $E_iE_jE_k \ldots E_rE_sE_0$» следует событие «за N шагов путник хоть раз побывал в E_0» (ибо, если произошло первое событие, то путник попал в E_0, сделав N_i шагов). Поэтому в силу первого свойства вероятности вероятность второго из этих событий больше или равна вероятности первого, которая есть $\alpha_i \geqslant \alpha$.

3-я часть доказательства. Оценим последовательно вероятности $\mathbf{P}(\overline{D}_1)$, $\mathbf{P}(\overline{D}_2)$, ..., $\mathbf{P}(\overline{D}_k)$, ...

Прежде всего $\mathbf{P}(D_1) \geqslant \alpha$ и поэтому, в силу свойства 3 (§ 1),

$$\mathbf{P}(\overline{D}_1) = 1 - \mathbf{P}(D_1) \leqslant 1 - \alpha.$$

Далее, с помощью формулы

$$\mathbf{P}(\overline{D}_k) \leqslant \mathbf{P}(\overline{D}_{k-1})(1-\alpha),$$

выведенной в 1-й части доказательства, находим:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{P}(\overline{D}_2) \leqslant \mathbf{P}(\overline{D}_1)(1-\alpha) \leqslant (1-\alpha)^2, \\ \mathbf{P}(\overline{D}_3) \leqslant \mathbf{P}(\overline{D}_2)(1-\alpha) \leqslant (1-\alpha)^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{P}(\overline{D}_k) \leqslant \mathbf{P}(\overline{D}_{k-1})(1-\alpha) \leqslant (1-\alpha)^k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Рассмотрим событие $\overline{D}$ «путник никогда не побывает в E_0». Из $\overline{D}$ следует каждое из событий $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_k \ldots$ Поэтому в силу свойства 1 $\mathbf{P}(\overline{D})$ не превосходит вероятностей событий $\mathbf{P}(\overline{D}_1)$, $\mathbf{P}(\overline{D}_2)$, ..., $\mathbf{P}(\overline{D}_k)$ и, следовательно, не превосходит каждого из чисел

$$1-\alpha,\ (1-\alpha)^2,\ \ldots,\ (1-\alpha)^k,\ \ldots \qquad (15)$$

Так как $\alpha > 0$ и $1 - \alpha < 1$, то члены последовательности (15) образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и с возрастанием k делаются меньше любого положительного числа[1]). Отсюда вероятность никогда не побывать в E_0

[1]) А. П. Киселев, Алгебра, часть 2, изд. 23-е, стр. 78.

меньше любого положительного числа, следовательно, она есть 0. В силу свойства 3 вероятность когда-нибудь побывать в E_0 равна 1.

Теорема доказана:

Откуда бы ни вышел путник, на каждом перекрестке он побывает с вероятностью 1.

Замечание 1. Рассмотрим любые два перекрестка и обозначим их через E_0 и E_1. Предположим, что путник начинает прогулку с перекрестка E_1 и вычислим вероятности следующих событий:

A_0: «путник когда-нибудь попадет в E_0»,

A_{01}: «путник побывает в E_0 и после этого побывает в E_1»,

A_{010}: «путник побывает в E_0, после этого побывает в E_1 и затем побывает в E_0» и т. д.

Согласно доказанной теореме, $\mathbf{P}(A_0) = 1$. По свойству 6 § 1 вероятность события A_{01} равна произведению $\mathbf{P}(A_0)$ на вероятность того, что путник, попавший в E_0, побывает после этого в E_1. По нашей теореме оба множителя равны 1, следовательно, $\mathbf{P}(A_{01}) = 1$. Далее, вероятность $\mathbf{P}(A_{010})$ по тому же свойству 6 равна произведению $\mathbf{P}(A_{01})$ на вероятность того, что путник, попавший в E_1, побывает после этого в E_0. Отсюда видно, что $\mathbf{P}(A_{010}) = 1$.

Аналогично доказывается, что $\mathbf{P}(A_{0101}) = \mathbf{P}(A_{01010}) = \ldots = 1$.

Зададим произвольное число k. Из доказанного вытекает, что:

а) с вероятностью 1 путник вернется на исходный перекресток не менее k раз;

б) с вероятностью 1 путник побывает на любом наперед заданном перекрестке E_0 не менее k раз.

Замечание 2. Формула $\mathbf{P}(\bar{D}_k) \leqslant (1-\alpha)^k$ [сравните с (14)] дает оценку для вероятности ошибки при утверждении «за kN шагов путник хоть раз побывал в E_0». Выберем произвольную вероятность ε. Мы можем найти такое число k, чтобы было

$$(1-\alpha)^k < \varepsilon.$$

Тогда тем более

$$\mathbf{P}(\bar{D}_k) < \varepsilon,$$

и, утверждая, что за kN шагов путник хоть раз побывает в E_0, мы делаем ошибку с вероятностью, меньшей, чем ε. Таким образом, при любых сколь угодно высоких требованиях к степени достоверности можно указать такое число шагов, что, сделав его, путник побывает в E_0 с практической достоверностью.

Формула (14) универсальна, т. е. позволяет оценить вероятность $\mathbf{P}(\overline{D}_k)$ для любого конкретного города. Однако она дает лишь грубую оценку для этих вероятностей. В самом деле, применим эту оценку к рассмотренному ранее примеру (см. рис. 71). В этом примере можно принять $N=3$, $\alpha=\frac{1}{4}$. Поэтому вероятность того, что путник за $k\cdot 3$ шагов ни разу не побывал в точке 3, удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{P}(\overline{D}_k)\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Потребуем, чтобы

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k<0{,}01.$$

Наименьшее значение k, для которого выполняется это неравенство, равно 17 (см. стр. 157). Итак, минимальное подходящее число серий равно 17, и, сделав $17\cdot 3=51$ шаг, мы побываем в точке 3 с вероятностью, большей, чем 0,99. Но, как показано ранее, для этого достаточно сделать и 34 шага (меньше уже нельзя). Таким образом, уже в этом простом случае наша оценка дает в полтора раза более грубый результат, чем точное вычисление. В более сложных примерах результат будет еще грубее.

Наш путник вовсе не обязан ходить пешком — он может пользоваться всеми видами городского транспорта: трамваем, автобусом, троллейбусом, метро. На остановке он с определенной вероятностью садится, скажем, в автобус. Далее, на каждой следующей остановке он с определенной вероятностью сходит и с определенной вероятностью едет дальше.

При таком подходе блуждание путника по городу ничем по существу не отличается от упомянутой во введении детской игры «Цирк». Вместо нее можно было бы предложить игру под названием «Путешествие по городу». Поля доски изображали бы перекрестки. Место цирковых аттракционов заняли бы линии городского транспорта. Внезапные перемещения на другой край доски происходили бы, конечно, при попадании на станцию метро. Желательно было бы, разумеется, использовать в качестве жребия что-нибудь более богатое возможностями, чем игральная кость. Можно, например, прибегнуть к помощи урны и определять, куда двигаться, вытаскивая билетики с названиями перекрестков. Ясно, однако, что одной урны нехватило бы, потому что пункт, куда мы попадаем, должен как-то зависеть от того, где мы находимся. Лучше всего иметь столько различных урн, сколько полей на доске.

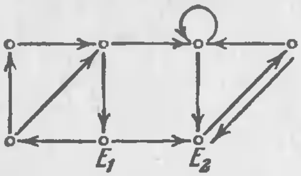


Рис. 73.

Рассмотрим, наконец, произвольную схему, состоящую из точек $E_1, E_2, \ldots, E_n$, причем некоторые из них соединены стрелками, указывающими направление возможных переходов. Такая система из n точек или состояний, для которых указаны возможные переходы между ними и заданы вероятности, с которыми эти переходы происходят, называется *цепью Маркова*. Вероятность, находясь в некоторый момент времени в E_i, оказаться после одного перехода в E_j, обозначается обычно p_{ij}[1]) (в частности, p_{ii} означает вероятность остаться за один шаг в E_i). Переход из E_i в E_j возможен, если $p_{ij} > 0$ (в этом случае мы и проводим из E_i в E_j стрелку). Цепь Маркова называется *связной*, если посредством цепочки возможных переходов можно попасть из любого состояния E_i в любое состояние E_j. На языке стрелок это означает, что из любого состояния E_i в любое состояние E_j можно пройти по направлению стрелок. Пример несвязной цепи приведен на рис. 73 (из E_2 нельзя пройти по направлению стрелок в E_1). Примеры связных цепей даны ниже на рис. 74—78. Цепь Маркова из двух состояний уже рассматривалась нами в задаче 190 (рис. 62).

---

[1]) Заметим, что для всякого i

$$p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ii} + \ldots + p_{in} = 1,$$

так как $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}$ — вероятности событий (переход из E_i в E_1, переход из E_i в $E_2, \ldots$, переход из E_i в E_n), которые попарно несовместны и образуют полную систему.

Имеет место следующая общая теорема:

При блуждании частицы по любой системе состояний, образующей связную цепь Маркова, эта частица с вероятностью 1 *попадает в любое состояние* (*независимо от того, откуда она вышла*).

Эта теорема по существу была уже доказана нами как теорема о блуждании путника по городу. В самом деле, читатель без труда убедится, что проведенное нами доказательство проходит шаг за шагом без всяких изменений и для произвольной связной цепи Маркова.

Цепи Маркова названы по имени знаменитого русского математика Андрея Андреевича Маркова (1856—1922), открывшего и изучившего их. Цепи Маркова имеют большое значение как в самой теории вероятностей, так и в ее приложениях к естествознанию и технике.

При решении задачи 190 было замечено, что для цепи из двух состояний вероятность оказаться в данном состоянии через n шагов с увеличением n все меньше и меньше зависит от того, из какой точки мы вышли вначале. Это обстоятельство справедливо для всех (с незначительными ограничениями) связных цепей Маркова.

Задача о встрече. Вернемся еще раз к плану города на рис. 59. Пусть приятели, гуляющие по городу, попрежнему выходят из перекрестка A, но блуждают по городу уже не вместе, а порознь, т. е. каждый из них независимо от другого дважды бросает монету и в зависимости от исхода бросания выбирает свой путь. Спрашивается, встретятся ли они снова после того, как выйдут из A. Мы покажем, что с вероятностью 1 эта встреча когда-нибудь произойдет и даже более того, если фиксирован какой угодно перекресток E, то можно утверждать, что с вероятностью 1 приятели когда-нибудь встретятся на этом перекрестке.

Дадим задаче общую формулировку.

Пусть по связной цепи K блуждают две частицы, вышедшие одновременно из какого-нибудь состояния. За один шаг каждая частица независимо от другой переходит из одного состояния в другое. Покажем, что с вероятностью 1 они встретятся снова в любом наперед заданном состоянии.

Предварительно мы опишем одно важное построение.

Пусть цепь K состоит из n состояний $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Рассмотрим n^2 точек и обозначим их $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{n1}, E_{n2}, \ldots, E_{nn}$. Положение пары частиц в цепи K будем отмечать фишкой помещенной в одну из точек $E_{11}, \ldots, E_{nn}$. Именно, если первая частица находится в состоянии E_i, а вторая — в состоянии E_k, то мы поместим фишку в точку E_{ik}. Переход 1-й частицы из E_i в E_j происходит с вероятностью p_{ij}, а переход 2-й из E_k в E_l — с вероятностью p_{kl}. Одновременный переход первой из E_i в E_j, а второй из E_k в E_l происходит с вероятностью $p_{ij}p_{kl}$ (по формуле (4) из § 1), следовательно, фишка из состояния E_{ik} переходит в E_{jl} с вероятностью $p_{ij}p_{kl}$. Мы получили, таким образом, новую цепь Маркова, которую обозначим K^2. Для цепи K, изображенной на рис. 74, цепь K^2 приведена на рис. 75.

Рис. 74.

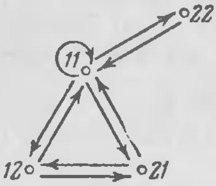


Рис. 75.

Согласно общему правилу мы проводим стрелку из E_{ik} в E_{jl}, если вероятность перехода из E_{ik} в E_{jl} положительна. Отсюда вытекает, что из E_{ik} в E_{jl} идет стрелка в том и только в том случае, если обе вероятности p_{ij} и p_{kl} положительны, т. е. если из E_i в E_j идет стрелка и из E_k в E_l идет стрелка. Таким образом, система стрелок цепи K^2 строится по системе стрелок цепи K, причем знание вероятностей p_{ij} несущественно.

206. а) Система стрелок цепи K изображена на рис. 76. Построить систему стрелок для цепи K^2.

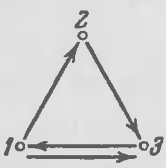


Рис. 76.

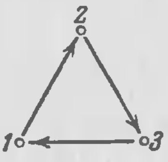


Рис. 77.

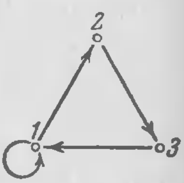


Рис. 78.

б) Та же задача для системы стрелок на рис. 77.

в) Та же задача для системы стрелок на рис. 78.

Рассмотрим совокупность L тех состояний из K^2, в которые можно пройти из E_{11}, двигаясь по направлениям стрелок.

207. Доказать, что L
а) содержит состояния $E_{22}, E_{33}, \ldots, E_{nn}$,
б) связная цепь.

Доказательство теоремы о встрече получается теперь в несколько слов. Пусть K — произвольная связная цепь и пусть обе частицы выходят одновременно из состояния E_{11}. Построим цепь K^2. Она может оказаться несвязной (как показывает задача 206 б). Выделим из K^2 цепь L. Как показывает задача 207 б), эта цепь связна, и мы можем применить общую теорему, сформулированную на стр. 165. Поэтому с вероятностью 1 фишка после выхода из E_{11} побывает в любом состоянии из L, в том числе в $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$. Это и означает, что наши частицы с вероятностью 1 встретятся в любом наперед заданном состоянии.

Совершенно так же доказывается, что три, четыре и вообще n частиц, одновременно вышедших из некоторого состояния связной цепи, с вероятностью 1 когда-нибудь снова все сойдутся и даже более того, с вероятностью 1 сойдутся на любом наперед заданном перекрестке.

§ 5. Блуждания с бесконечным числом состояний

Цепи Маркова, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе, имели конечное число состояний. Перейдем теперь к цепям с бесконечным числом состояний (с одной такой цепью — схемой блуждания по прямой — мы уже встречались). Как и в предыдущем параграфе, нас будет интересовать вопрос, попадет ли частица в данную точку и если попадет, то как скоро. Блуждание частицы по бесконечной цепи качественно отличается от блуждания по конечной цепи. Например, здесь нельзя, вообще говоря, утверждать, что в каждом состоянии частица побывает с вероятностью 1 (хотя это и верно в отдельных случаях).

Ограничимся лишь простейшими цепями с бесконечным числом состояний. Прежде всего изучим уже знакомую нам схему блуждания по прямой линии (эту цепь мы будем называть также «бесконечной дорогой»). Затем рассмотрим другой простой пример цепи с бесконечным числом состояний —

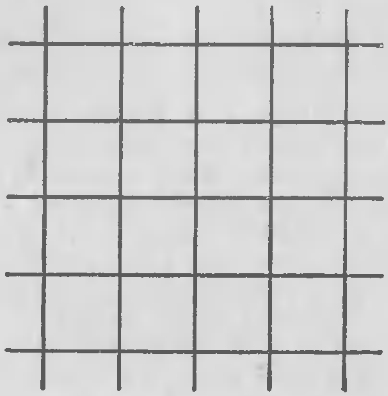


Рис. 79.

бесконечный город с шахматным планом (он изображен схематически на рис. 79). Попав на какой-нибудь перекресток, путник с вероятностью $\frac{1}{4}$ идет по каждому из четырех направлений.

Задачи о блуждании по прямой.

208. На прямой отмечены точки $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

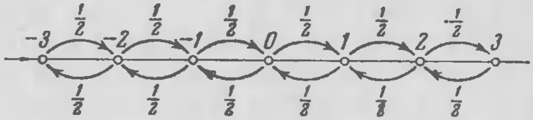


Рис. 80.

(рис. 80). Частица, попав в точку n, за единицу времени с вероятностью $\frac{1}{2}$ переходит в точку $n+1$ и с вероятностью $\frac{1}{2}$ — в точку $n-1$. В начальный момент времени частица находится в точке 0. Найти:

а) вероятность x того, что частица когда-нибудь побывает в точке 1;

б) вероятность y того, что частица когда-нибудь побывает в точке -1;

в) вероятность z того, что она когда-нибудь снова вернется в точку 0 (т. е. побывает в точке 0 в момент, отличный от начального).

209. Докажите, что частица из задачи 208 побывает в каждой точке с вероятностью 1.

210. Пусть на схеме рис. 81 частица из точки n с вероятностью p попадает за единицу времени в точку $n+1$,

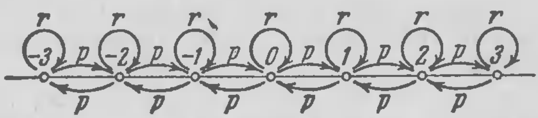


Рис. 81.

с той же вероятностью p — в точку $n-1$, с вероятностью r остается на месте $\left(\text{в задаче 208 } p=\frac{1}{2},\ r=0\right)$. Докажите, что если $p>0$, то частица в каждой точке побывает с вероятностью 1, откуда бы она ни вышла.

Для цепей, разобранных в задачах 209—212, было установлено, что, откуда бы ни вышла частица, в каждом состоянии она побывает с вероятностью единица. Этим свойством

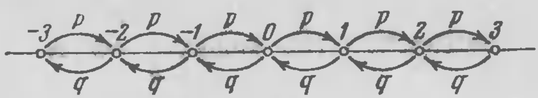


Рис. 82.

уже не обладает цепь, изображенная на рис. 82, где частица с вероятностью p переходит из n в $n+1$ и с вероятностью $q=1-p$ из n в $n-1$, причем $p>q$. Можно доказать (мы этого делать не будем), что если частица выходит из 0, то уже вероятность побывать когда-нибудь в -1 меньше единицы.

211. Пользуясь тем, что на схеме рис. 82 вероятность, выйдя из 0, попасть когда-нибудь в -1 меньше единицы, найти вероятности x, y, z (обозначения те же, что и в задаче 208).

Мы получили в задаче 208, что частица, блуждающая по прямой линии, с вероятностью 1 возвращается в исходную точку. Сколько же шагов должна она сделать, чтобы ее возвращение стало практически достоверным? Расчет показывает, что потребуется несколько тысяч шагов, чтобы вероятность возвращения стала больше 0,99; потребуется несколько сот тысяч шагов, чтобы эта вероятность стала больше 0,999.

Можно доказать, что если частица сделает меньше чем $\frac{0{,}2}{\varepsilon^2}$ шагов, то вероятность ее возвращения будет меньше $1-\varepsilon$. Если же она сделает больше чем $\frac{0{,}87}{\varepsilon^2}$ шагов, то эта вероятность будет больше $1-\varepsilon$.

Было показано, далее, что частица с вероятностью 1 побывает в каждой точке. Снова поставим вопрос, сколько шагов надо сделать, чтобы попадание частицы в данную точку стало практически достоверным. Ясно, что нужное число шагов тем больше, чем дальше интересующая нас точка удалена от исходной. Чтобы побывать с вероятностью 0,99 в точке 10, частица должна сделать свыше 100 000 шагов, а чтобы побывать с этой же вероятностью в точке 100, — несколько десятков миллионов шагов.

Положим

$$N_1 = \frac{2\left(\frac{3}{4}k - 1\right)^2}{\varepsilon^2},$$

$$N_2 = \frac{10k^2}{\varepsilon^2} + \frac{6}{\varepsilon} + 2.$$

Можно доказать, что если частица сделала менее N_1 шагов, то вероятность того, что она побывала хоть раз в точке $2k$, меньше чем $1-\varepsilon$[1]). Если же она сделала более N_2 шагов, то вероятность эта станет больше $1-\varepsilon$.

Задача о встрече. Займемся теперь задачей о вероятности встречи двух путников, идущих по бесконечной дороге K (см. рис. 80). В предыдущем параграфе мы решили аналогичную задачу для любой цепи Маркова с конечным числом состояний, сведя ее к задаче о блуждании одной частицы по некоторой новой, более сложной, цепи с конечным числом состояний. Этого сведéния было достаточно для решения задачи о встрече, так как мы имели общую теорему о блуждании частицы, справедливую для всех сколь угодно сложных связных цепей Маркова с конечным числом состояний. В случае же бесконечного числа состояний задача о встрече не может быть решена таким способом, так как у нас нет соответствующей теоремы, справедливой для всех цепей с бесконечным числом состояний. Поэтому мы вынуждены решать задачу о встрече прямым методом.

В случае бесконечного числа состояний удобно не задачу о блуждании двух частиц сводить к задаче о блуждании одной частицы по более сложной цепи, а наоборот, задачу о блуждании одной частицы по сложной цепи сводить к задаче о блуждании двух (или нескольких) частиц по более простым цепям. Именно так мы поступим в дальнейшем при изучении бесконечного шахматного города. Блуждание по нему одной частицы (фишки) мы сведем к блужданию двух частиц (путников) по бесконечной дороге K.

Нам понадобится следующая вспомогательная задача:

212. Доказать, что выражение

$$S_k=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k},$$

возрастая с увеличением k, может стать больше любого числа.

---

[1]) Это утверждение справедливо при $k\geqslant 2$, $\varepsilon<\frac{3}{4}-\frac{1}{k}$.

Пусть путники вышли одновременно из точки 0. Докажем, что с вероятностью 1 они снова встретятся в этой точке.

1-я часть доказательства. Рассмотрим события

A_s: «оба путника находятся в точке 0 через s шагов»;

B_s: «оба путника находятся в точке 0 через s шагов, причем ранее[1]) они в этой точке не встречались»;

C_s: «до s-го шага включительно путники ни разу[1]) не встретились в точке 0».

События $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{s-1}, B_s, C_s$ попарно-несовместны и образуют полную систему, поэтому (свойство 7)

$$\mathbf{P}(A_s) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A_s/B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A_s/B_2) + \ldots \\ \ldots + \mathbf{P}(B_s)\mathbf{P}(A_s/B_s) + \mathbf{P}(C_s)\mathbf{P}(A_s/C_s). \quad (1)$$

Очевидно,

$$\mathbf{P}(A_s/C_s) = 0, \quad \mathbf{P}(A_s/B_s) = 1.$$

Далее $\mathbf{P}(A_s/B_i)$ есть вероятность того, что оба путника будут на s-м ходу в 0 при условии, что они оба находились там на i-м ходу, т. е. вероятность того, что, выйдя из 0, они через $s-i$ шагов снова придут в 0. Следовательно, $\mathbf{P}(A_s/B_i) = \mathbf{P}(A_{s-i})$. Если теперь положить

$$\mathbf{P}(A_s) = a_s, \quad \mathbf{P}(B_s) = b_s,$$

то равенство (1) перепишется в виде

$$a_s = b_1 a_{s-1} + b_2 a_{s-2} + \ldots + b_{s-1} a_1 + b_s.$$

Выпишем такие равенства для $s = 1, 2, 3, \ldots, n$ и сложим их:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2 + a_1 b_1, \\ a_3 = b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{a_n = b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1} \\ R_n = Q_n + a_1 Q_{n-1} + a_2 Q_{n-2} + \ldots + a_{n-1} Q_1. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Мы обозначили

$$R_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \quad Q_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n.$$

[1]) Кроме, разумеется, начального момента времени.

Очевидно, Q_n есть вероятность события D_n: «путники хоть раз встретятся в 0 в течение n первых шагов». Действительно,

$$D_n = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n,$$
$$\mathbf{P}(D_n) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \ldots + \mathbf{P}(B_n) =$$
$$= b_1 + b_2 + \ldots + b_n = Q_n.$$

Вероятность Q того, что путники когда-нибудь встретятся в 0 (эту-то вероятность мы и ищем), в силу свойства 1 больше или равна Q_n:

$$Q \geqslant Q_n, \tag{3}$$

для всякого n. Из (2) и (3) следует

$$R_n \leqslant Q + a_1 Q + a_2 Q + \ldots + a_{n-1} Q = (1 + R_{n-1}) Q,$$
$$Q \geqslant \frac{R_n}{1 + R_{n-1}}. \tag{4}$$

Неравенство (4) справедливо для любого n.

2-я часть доказательства. Покажем, что R_n с увеличением n может быть сделано больше любого числа. В самом деле, $R_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, где a_n — вероятность того, что оба путника через n шагов окажутся в точке 0. Так как путники блуждают независимо друг от друга, то a_n найдется по формуле умножения вероятностей:

$$a_n = w_n^2,$$

где w_n — вероятность того, что один путник окажется через n шагов в точке 0. Вероятность w_{2k+1}, очевидно, равна нулю. Как было показано в § 2,

$$w_{2k} \geqslant \frac{1}{\sqrt{4k}}.$$

Поэтому

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} \geqslant \frac{1}{4k}.$$

Отсюда

$$R_{2k+1} = R_{2k} \geqslant \frac{1}{4} S_k,$$

где $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$. Так как S_k неограниченно возрастает, то неограниченно возрастает и R_n.

3-я часть доказательства. Докажем теперь, что $Q = 1$. Прежде всего, как всякая вероятность, $Q \leqslant 1$. Предположим, что $Q = 1 - d$, где $d > 0$, и придем к противоречию. Действительно, в силу неравенства (4)

$$1 - d \geqslant \frac{R_n}{1 + R_{n-1}} = \frac{R_{n-1} + a_n}{R_{n-1} + 1},$$

$$R_{n-1} + 1 - d(R_{n-1} + 1) \geqslant R_{n-1} + a_n,$$

$$1 - a_n \geqslant d(R_{n-1} + 1),$$

$$1 > dR_{n-1},$$

$$R_{n-1} < \frac{1}{d},$$

что неверно, так как R_{n-1} с ростом n неограниченно увеличивается.

Бесконечный шахматный город. Как уже говорилось, мы будем изучать блуждание по бесконечному шахматному городу, сводя его к блужданию двух путников по бесконечной дороге K.

Итак, представим себе, что по дороге K блуждают два путника. По рецепту предыдущего параграфа построим цепь K^2, содержащую состояния (0, 0), (0, 1), (0, —1), (1, 1), (1, —1), (—1, 1), (—1, —1) и т. д. Цепь K^2 изображена на рис. 83.

Пусть путники находятся в точках m и n цепи K. С вероятностью $\frac{1}{2}$ первый путник переходит из m в $m+1$; с вероятностью $\frac{1}{2}$ второй путник переходит из n в $n+1$. Поэтому вероятность того, что оба путника переходят из пары точек (m, n) в пару $(m+1, n+1)$, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Другими словами, фишка, блуждающая по цепи K^2 и отражающая положение обоих путников в K, с вероятностью $\frac{1}{4}$ перейдет из (m, n) в $(m+1, n+1)$. С той же вероятностью $\frac{1}{4}$ фишка перейдет из (m, n) в каждое из остальных состояний, соединенных с (m, n) отрезком:

$$(m+1, n-1), (m-1, n+1), (m-1, n-1).$$

Заметим, что с каждым шагом расстояние между путниками либо вовсе не меняется, либо изменяется на 2 единицы. Поэтому, если в начальный момент путники находились в точках k и l, то в дальнейшем они могут одновременно оказаться только в таких точках m и n, для которых разность $m-n$ имеет ту же четность, что и $k-l$. Отсюда

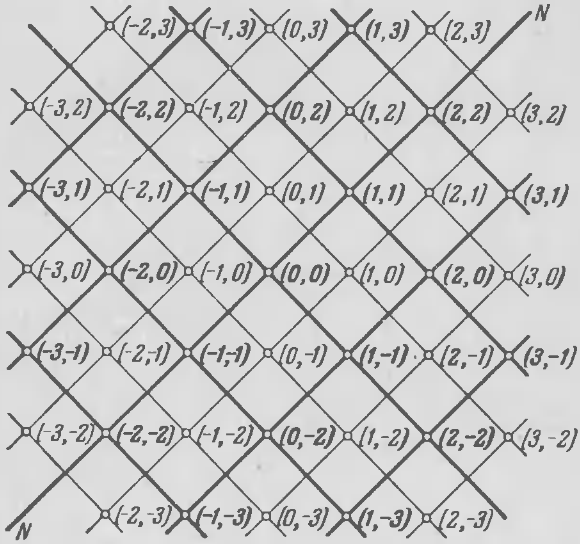


Рис. 83.

следует, что цепь K^2 несвязна; она распадается на две связные цепи: L, содержащую пары (m, n) с четной разностью (точки, соединенные толстыми линиями на рис. 83), и M, содержащую пары с нечетной разностью (точки, соединенные тонкими линиями).

Мы будем предполагать, что фишка вышла из состояния $(0, 0)$ цепи L (это соответствует тому, что оба путника вышли одновременно из состояния 0 цепи K). При дальнейшем блуждании фишка не может выйти за пределы L. Цепь L изображена отдельно на рис. 84 (повернутом относительно рис. 83 на 45°). Но рис. 84 совпадает с рис. 79. Таким образом, мы получили, что задача о блуждании двух путников по дороге K эквивалентна задаче о блуждании одного путника (фишки) по бесконечному шахматному городу L.

Мы доказали, что с вероятностью 1 два путника, вышедшие одновременно из точки 0 дороги K, снова встретятся в этой точке. В переводе на язык города L это означает, что фишка, вышедшая из (0, 0), с вероятностью 1 снова побывает на этом перекрестке. Таким образом, простой перевод результата предыдущего пункта на новый язык доказывает, что *с вероятностью* 1 *фишка возвращается на исходный перекресток.*

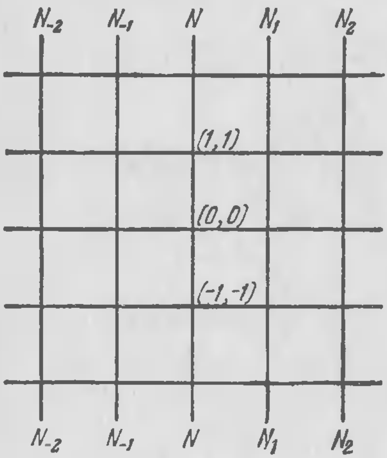


Рис. 84.

Возвращение фишки в исходное положение при блуждании по бесконечному шахматному городу происходит гораздо медленнее, чем при блуждании по бесконечной дороге, т. е. нужно сделать гораздо больше шагов, чтобы возвращение стало практически достоверным.

Например, чтобы вероятность возвращения стала больше 0,99, фишка должна сделать совершенно астрономическое число шагов: свыше 10^{88} (в случае дороги K заведомо хватало 10000 шагов).

Вообще можно доказать, что если фишка сделала менее $10^{\frac{0,9}{\varepsilon}-1,7}$ шагов, то вероятность того, что она хоть раз побывала в исходной точке, меньше $1-\varepsilon$. Эта вероятность становится больше $1-\varepsilon$, если фишка сделает более $10^{\frac{2}{\varepsilon}-1,6}$ шагов.

Докажем теперь, что фишка, блуждающая по бесконечному шахматному городу, не только с вероятностью 1 вернется на исходный перекресток, но что *она и на любом наперед заданном перекрестке побывает с вероятностью* 1.

Пусть E_0 и E_1 — два соседних перекрестка. Обозначим через x вероятность того, что фишка, выходящая из точки E, когда-нибудь попадет в точку E_1. В силу однородного устройства нашего шахматного города, эта вероятность имеет одинаковую величину для любой пары соседних перекрестков.

Пусть фишка выходит из точки E_0. За один шаг она может попасть на один из четырех перекрестков O_1, O_2, O_3, O_4, являющихся соседними для перекрестка E_0. Рассмотрим события

A_i: «за один шаг фишка попадет в O_i»,

B: «фишка когда-нибудь вернется в E_0».

По свойству 7 § 1

$$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B/A_1)+\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B/A_2)+\mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}(B/A_3)+ \\ +\mathbf{P}(A_4)\mathbf{P}(B/A_4). \quad (5)$$

По определению шахматного города

$$\mathbf{P}(A_1)=\mathbf{P}(A_2)=\mathbf{P}(A_3)=\mathbf{P}(A_4)=\frac{1}{4}.$$

Наступление B при условии A_i означает, что фишка должна когда-нибудь попасть из точки O_i (куда она попала первым ходом) в точку B. Поэтому

$$\mathbf{P}(B/A_1)=\mathbf{P}(B/A_2)=\mathbf{P}(B/A_3)=\mathbf{P}(B/A_4)=x.$$

Наконец, по доказанному выше, $\mathbf{P}(B)=1$. Подставляя все эти значения в формулу (5), найдем

$$1=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x,$$

откуда $x=1$.

Пусть теперь E — произвольный перекресток шахматного города. Рассмотрим какой-нибудь путь, ведущий из E_0 в E и перенумеруем по порядку все перекрестки, лежащие на этом пути: E_0, E_1, E_2, ..., $E_n=E$.

Обозначим через D событие:

«фишка, вышедшая из E_0, когда-нибудь побывает в E_1, после этого когда-нибудь побывает в E_2 и т. д., и, наконец, побывает в $E_n=E$».

Как было подсчитано, вероятность того, что фишка, вышедшая из E_i, когда-нибудь попадет в E_{i+1}, равна 1. Согласно формуле умножения вероятностей, перемножая эти вероятности для $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим $\mathbf{P}(D)$. Очевидно, из наступления события D следует наступление события C:

«фишка когда-нибудь попадет в E».

В силу свойства 1 § 1

$$\mathbf{P}(C) \geqslant \mathbf{P}(D) = 1$$

и, следовательно, $\mathbf{P}(C) = 1$.

Проведенное изучение блуждания по шахматному городу дает возможность усилить формулировки, относящиеся к бесконечной дороге. Ранее было доказано, что путники, блуждающие по дороге, с вероятностью 1 встретятся в исходной точке. Теперь мы можем утверждать, что с вероятностью 1 путники встретятся в любом наперед заданном пункте n. Действительно, это равносильно утверждению о том, что фишка, блуждающая по шахматному городу, попадет с вероятностью 1 на перекресток (n, n).

Этот результат, однако, не обобщается на случай любого числа путников, как это было в случае конечных цепей Маркова. Для четырех и большего числа путников, блуждающих по дороге K, вероятность того, что они когда-нибудь снова соберутся все вместе, меньше 1. Для трех путников вероятность когда-нибудь снова встретиться всем троим равна 1, но для каждой данной точки вероятность того, что встреча произойдет именно в этой точке, меньше 1.

Итоги нашего изучения задачи о встрече и блуждании по шахматному городу можно сформулировать в виде следующих теорем:

1. *Пусть A и B — любые два пункта дороги K. Два путника, вышедшие одновременно из пункта A, с вероятностью 1 встретятся в пункте B.*

2. *Пусть A и B — любые два перекрестка города L. Путник, вышедший из перекрестка A, с вероятностью 1 побывает на перекрестке B.*

Доказательства этих теорем были тесно связаны между собой. Доказательство второй теоремы выводилось из частного случая первой теоремы, когда пункты A и B совпадают. Общая формулировка теоремы 1 выводилась в свою очередь из теоремы 2.

Частный случай теоремы 1, составивший первое звено в цепи наших рассуждений, потребовал для своего доказательства выкладок. Этих выкладок можно избежать, если довольствоваться более слабым, чем теорема 1, утверждением.

1а. *Два путника, вышедшие одновременно из некоторого пункта n дороги K, с вероятностью* 1 *где-нибудь снова встретятся.*

Если перевести это утверждение на язык шахматного города, то оно примет вид:

2а. *Путник, вышедший из перекрестка* (n, n) *города* L, *с вероятностью* 1 *снова попадет на прямую* NN (рис. 84).

Доказательство утверждения 2а можно провести, опираясь только на задачу 210. Мы предлагаем поэтому следующую задачу:

213. Вывести утверждение 2а из задачи 210.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели в этом разделе ряд задач из теории вероятностей. Нашей целью было познакомить читателя с понятиями и методами этой своеобразной науки на материале, достаточно наглядном и в то же время требующем для своего изучения приемов, более сложных, чем простой подсчет числа благоприятствующих исходов. Дело в том, что подавляющее большинство задач, с которыми имеет дело современная теория вероятностей, никак не могут быть решены таким простым подсчетом.

Вместе с тем мы не имели возможности рассмотреть более сложные и более интересные задачи, потому что они потребовали бы использования аппарата, выходящего за пределы элементарной математики. Однако нам не хотелось бы, чтобы у читателя сложилось впечатление о теории вероятностей, как о науке о детских играх и праздных прогулках по городу. В действительности область приложений теории вероятностей очень велика. Теория вероятностей широко применяется в технике (радиотехника, расчет телефонных сетей, выборочный контроль качества продукции и т. п.), в теории стрельбы (изучение рассеивания снарядов), при обработке экспериментальных данных (теория ошибок). Важные и разнообразные применения находит теория вероятностей и в физике. О некоторых из них (броуновское движение) уже говорилось.

Начиная с замечательных работ великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева (1821—1894), русская наука завоевывает ведущее место в теории вероятностей. Продолжателями работ Чебышева явились его ученики Андрей Андреевич Марков (1856—1922) и Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918). В настоящее время советская школа теории вероятностей, выдвинувшая таких крупных ученых, как Сергей Натанович Бернштейн (род. в 1880 г.), Андрей Николаевич Колмогоров (род. в 1903 г.), Александр Яковлевич Хинчин (род. в 1894 г.), бесспорно занимает первое место в мире.

Рекомендуемая литература:

Г. П. Боев, Теория вероятностей, Гостехиздат, М.—Л., 1950, введение и глава 1.

Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин, Элементарное введение в теорию вероятностей, Гостехиздат, М.—Л., 1952.

Б. В. Гнеденко, Очерки по истории математики в России, Гостехиздат, М.—Л., 1946, § 20.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ЗАДАЧИ О МНОГОЦВЕТНОЙ РАСКРАСКЕ

1. Докажем эту теорему методом математической индукции. Карту, образованную одной прямой, можно правильно раскрасить двумя красками. Пусть теорема уже доказана для n прямых. Докажем, что она верна и для $n+1$ прямых.

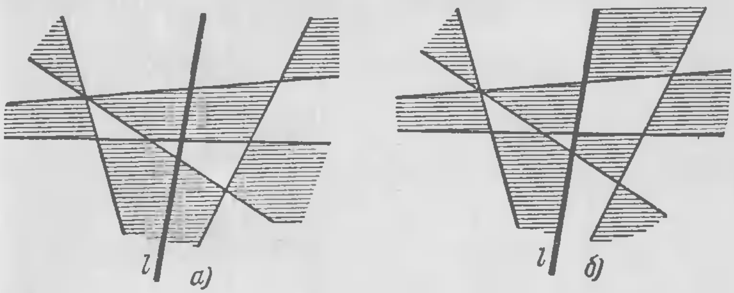


Рис. 85.

Рассмотрим карту K, образованную $n+1$ прямыми, и откинем одну из этих прямых — прямую l. Мы получим карту K^*, которую, по предположению, можно правильно раскрасить двумя красками. Выкрасим ее в черный и белый цвета. После этого мы снова присоединим откинутую прямую l. Она разбивает плоскость на две части, каждая из которых правильно раскрашена двумя красками (рис. 85, *а*). Оставим в одной из них цвета всех стран неизменными, а в другой — изменим белый цвет на черный, а черный — на белый (рис. 85, *б*). При этом каждая полуплоскость останется правильно раскрашенной; если же две соседние страны карты K находятся в разных полуплоскостях, то это значит, что они граничат по участку прямой l и образованы рассечением этой прямой некоторой страны карты K^*. Эта страна карты K^* была окрашена в какой-то цвет; после разбиения ее на две новые страны мы изменили цвет одной из этих половин. Таким образом, и в этом случае две соседние страны из K окрашены в различные цвета, т. е. мы получили правильную раскраску. Теорема верна для $n=1$, по доказанному она верна и для $1+1=2$ прямых, для $2+1=3$ прямых и т. д. для любого числа прямых.

2. Эту задачу, как и предыдущую, можно решить методом математической индукции. Мы этого, однако, делать не будем (предоставляем это читателю в качестве полезного упражнения), а проведем следующее рассуждение. Для каждой из областей, на которые разбита плоскость, сосчитаем, сколько из проведенных нами окружностей содержат ее внутри себя (для карты рис. 5 результаты такого подсчета приведены на рис. 86). Заметим, что числа, отвечающие соседним областям, всегда отличаются на 1. Действительно, если две соседние области A и B разделены дугой окружности C, то одна из них лежит внутри, а другая вне C, по отношению же к любой окружности, отличной от C, обе области A и B лежат одновременно либо внутри, либо снаружи. Достаточно окрасить одной краской все страны с четными номерами и другой краской все страны с нечетными номерами, чтобы получить правильиую раскраску нашей карты.

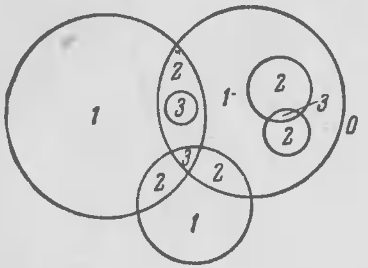


Рис. 86.

3. При такой нумерации вершины любого треугольника окажутся занумерованными всеми тремя цифрами 0, 1, 2. Расставим на сторонах треугольников стрелки в направлении от 0 к 1, от 1 к 2 и от 2 к 0. Каждый треугольник получит при этом определенную ориентацию (направление обхода). Треугольники будут двух типов: ориентированные по часовой стрелке (рис. 87) и против часовой стрелки (рис. 88). Окрасим треугольники первого типа в белый цвет, а треугольники второго типа — в черный. Так как два соседних треугольника

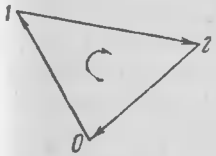


Рис. 87.

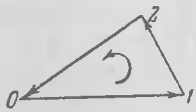


Рис. 88.

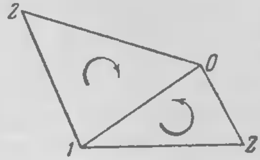


Рис. 89.

всегда имеют противоположную ориентацию (рис. 89), то мы получим правильную раскраску.

4. Предположим противное и раскрасим нашу карту правильно в белый и черный цвета. Пусть при этом получилось k белых стран с числами границ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и l черных стран с числами границ $n'_1, n'_2, \ldots, n'_l$. Каждая граница принадлежит ровно одной белой и ровно одной черной стране; если число границ обозначить g, то

$$g = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n'_1 + n'_2 + \ldots + n'_l.$$

Из этого равенства вытекает, что если про числа $n_1, n_2, \ldots, n_k, n'_1, n'_2, \ldots, n'_l$ известно, что $k + l - 1$ из них делятся на m, то они *все* делятся на m.

5. См. рис. 90, на котором поля занумерованы в порядке их обхода.

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

Рис. 90.

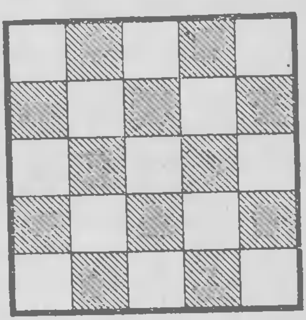


Рис. 91.

6. См. рис. 90 и 91. Мы получили правильную раскраску 25-клеточной доски. На любой другой доске мы также получим правильную раскраску. Действительно, пусть шахматная доска уже правильно раскрашена двумя красками. Тогда каждым ходом конь переходит с поля одного цвета на поле противоположного цвета. Поэтому, если нумеровать поля в порядке их обхода, то все поля с четными номерами будут одного цвета (например, черного), а все поля с нечетными номерами — другого цвета (например, белого). Следовательно, если мы, наоборот, закрасим поля, получившие четные номера, в черный цвет, то мы просто вернемся к прежней раскраске, т. е. получим правильную раскраску.

7. Нет, нельзя. Раскрасим доску правильно двумя красками и занумеруем поля в том порядке, в каком мы их обошли. Первое поле имеет номер 1, последнее — номер 49, поэтому они должны иметь одинаковый цвет (как поля с нечетными номерами, см. решение предыдущей задачи). Но два соседних поля окрашены в разные цвета.

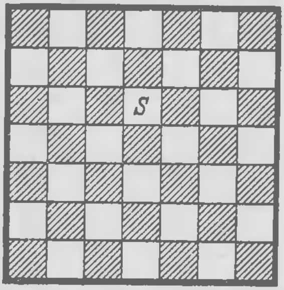


Рис. 92.

8. Раскрасим нашу доску правильно двумя красками. Пусть при этом поле S получило белый цвет (рис. 92). Если бы можно было обойти доску, начиная с этого поля, то, нумеруя поля в порядке их обхода, мы дали бы всем белым полям нечетные номера (см. решение задачи 6) 1, 3, ..., 49. Отсюда число белых полей было бы равно 25, но их всего 24, как явствует из рис. 92.

9. Каждым ходом конь меняет цвет своего поля. Поэтому, если он попал на поле того же цвета, что и исходное (в данном случае на само исходное поле), то он сделал четное число ходов.

10. Каждый ход ладьи можно заменить серией простых ходов, при которых ладья передвигается на соседнее поле. Каждым таким простым ходом ладья меняет цвет своего поля. Обойдя всю доску, она сделает 63 простых хода, т. е. нечетное число простых ходов, и попадет на поле другого цвета, нежели исходное, в то время как поля A и B имеют один и тот же цвет.

11. Нет, нельзя. Кость домино состоит из двух половинок, на каждой из которых изображен один из 7 номеров: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Костей столько, сколько всевозможных пар таких номеров. Каждый номер поэтому встречается шесть раз в сочетании с другими номерами; кроме того, имеется одна кость — дубль, — в которой этот номер сочетается сам с собой. Всего, таким образом, каждый номер встречается восемь раз. При составлении цепи кости прикладываются друг к другу половинками с одинаковыми номерами, поэтому внутри цепи каждый номер встречается четное число раз n, а на концах $8-n$, т. е. тоже четное число раз. Следовательно, каждый номер либо вовсе не попадает на концы (нуль — число четное), либо попадает сразу на оба конца.

12. Пусть общее число людей, когда-либо живших на Земле, есть N, а число сделанных ими рукопожатий m. Перенумеруем всех людей и обозначим через n_k число рукопожатий, сделанных k-м человеком. Если k-й человек жал руку l-му, то это рукопожатие сосчитается как в числе n_k, так и в числе n_l, поэтому в сумме

$$S = \underbrace{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_N}_{N \text{ слагаемых}}$$

каждое рукопожатие сосчитается два раза и

$$S = 2m.$$

Но если сумма нескольких чисел четна, то нечетные слагаемые входят четное число раз.

13. Если бы все участники собрания пожали руку нечетному числу знакомых, то вышло бы, что каждый из 225 человек (225 — нечетное число) сделал нечетное число рукопожатий. Это противоречит предыдущей задаче (если положить $N = 225$).

14. Если бы это было возможно, то из каждой точки исходили бы три кривые. Умножив число точек 5 на 3, мы сосчитали бы каждую кривую дважды (ибо она имеет два конца) и получили бы удвоенное число кривых. Но

$$5 \cdot 3 = 15$$

число нечетное.

15. Одно из возможных решений для а) приведено на рис. 93, для б) — на рис. 94.

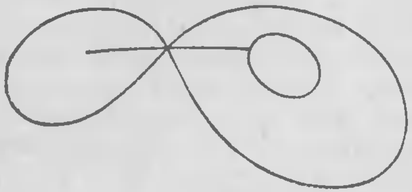


Рис. 93.

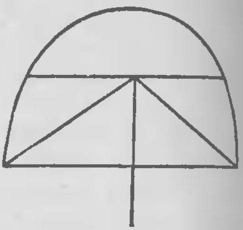


Рис. 94.

16. В сумме $k_1+k_2+\ldots+k_v$ каждая граница засчитывается два раза, так как учитывается в кратности каждого из своих концов (если ее концы совпадают, то граница учитывается дважды при подсчете кратности соответствующей вершины).

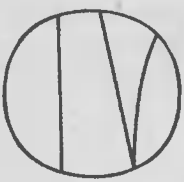


Рис. 95.

17. Утверждение следует из задачи 16. В самом деле, если сумма нескольких чисел четна, то нечетные слагаемые встречаются четное число раз.

18. Возможные решения для а), б), в) приведены соответственно на рис. 95, 96, 97.

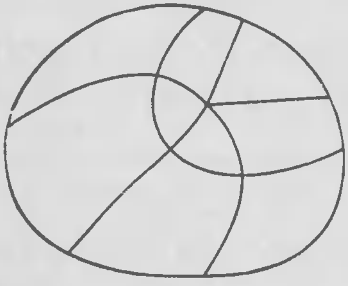


Рис. 96.

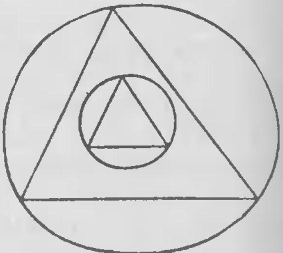


Рис. 97.

19. В сумме $n_1+n_2+\ldots+n_8$ каждая граница засчитывается два раза, так как принадлежит двум соседним странам.

20. Следует из задачи 19 совершенно так же, как задача 17 — из задачи 16.

21. См. рис. 98 и 99.

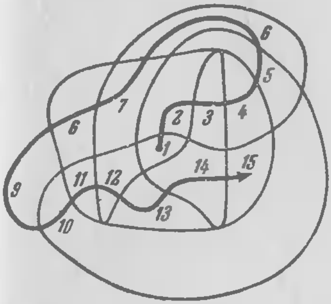


Рис. 98.

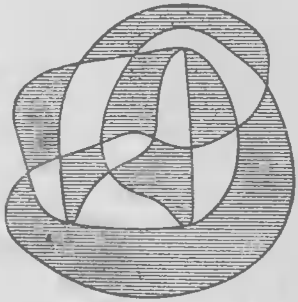


Рис. 99.

22. Раскрасим нашу карту правильно двумя красками (рис. 100). Если мы будем нумеровать страны в порядке их обхода, то, так как ладья каждым ходом переходит из страны одного цвета в страну другого цвета, все страны с четными номерами будут одного, а нечетными — другого цвета (см. решение задачи 6). Всего стран 21, из них с нечетными номерами должно быть 11 (1-я, 3-я, ..., 21-я), а с четными — 10. В то же время черных стран 12, а белых только 9.

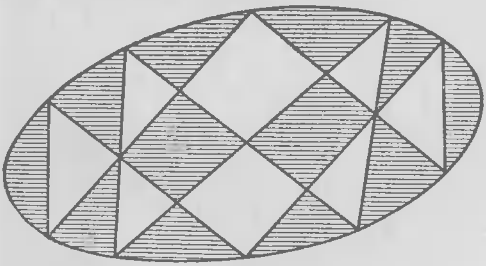


Рис. 100.

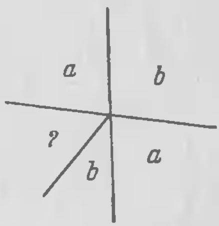


Рис. 101.

23. Если бы какая-нибудь вершина имела нечетную кратность, то уже страны, к ней прилегающие, нельзя было бы правильно раскрасить двумя красками (рис. 101).

24. Рассмотрим путь нашей ладьи (он дан прерывистой линией на рис. 102). Уничтожим теперь всю ту часть карты, которая находится вне нашего пути, сам же путь присоединим к карте. У нас получится новая карта, изображенная на рис. 103. Все внутренние вершины этой карты

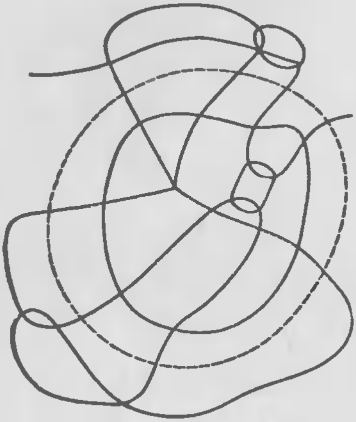


Рис. 102.

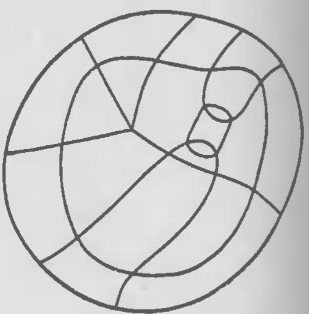


Рис. 103.

имеют по условию четную кратность, наружные же вершины, образованные пересечением границ старой карты с путем ладьи, имеют кратность 3. Вершин, имеющих нечетную кратность, будет четное число (задача 17), поэтому ладья пересекла границы четное число раз, или, что то же самое, сделала четное число ходов.

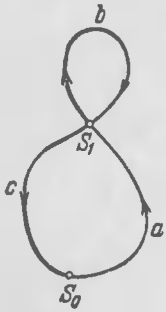


Рис. 104.

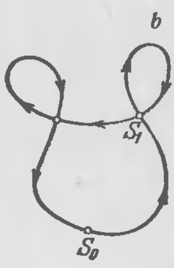


Рис. 105.

25. Случай, когда ладья, вышедшая из S_0, побывала в каждой стране не более одного раза, уже разобран в задаче 24. Пусть теперь она побывала дважды в некоторой стране S_1, т. е. пересекла в этой стране свой путь (рис. 104). Пусть число ходов на участке S_0aS_1 равно p, на S_1bS_1 равно q, на S_1cS_0 равно r. Надо доказать, что $p+q+r$ четно. Но q четно в силу задачи 24, путь

$S_0aS_1cS_0$ тоже удовлетворяет условиям задачи 24, поэтому $p+r$ также четно. Отсюда $p+q+r$ четно. Если ладья делает не одну, а две петли (рис. 105), то, отбросив одну из них, например S_1bS_1, мы придем к только что рассмотренному случаю; на прохождение же петли S_1bS_1 снова в силу задачи 24 потребуется четное число ходов, поэтому и во всем пути будет содержаться четное число ходов. Так мы можем доказать наше утверждение для любого числа петель.

26. Если пройти второй путь в обратном направлении, то мы придем из S_2 в S_1 на q-м ходу. Поэтому, если, выйдя из S_1, пойти первым путем в S_2 и затем из S_2 пойти в S_1, проходя второй путь в обратном направлении, то мы вернемся в S_1, сделав $p+q$ ходов. В силу задачи 25 $p+q$ четно, откуда p и q либо оба четны, либо оба нечетны.

27. Первый способ. Выйдем ладьей из некоторой страны S_0 и будем обходить одну за другой страны нашей карты, нумеруя их в порядке обхода. Может быть, нам случится побывать дважды или даже большее число раз в одной и той же стране. Тогда эта страна получит не один номер, а два или несколько номеров. Однако в силу задачи 26 все эти номера будут иметь одинаковую четность. Напротив, соседние страны получат номера различной четности. Действительно, если в страну S_1 можно притти из S_0 за p ходов и если S_1 граничит с S_2, то в S_2 можно притти из S_0 за $p+1$ ход. Значит, всякий путь, ведущий из S_0 в S_2, состоит из числа ходов той же четности, что и $p+1$, и, следовательно, противоположной четности p. Таким образом, если обойти ладьей все страны карты и окрасить затем одной краской страны с четными и другой краской страны с нечетными номерами, то мы получим правильную раскраску.

Второй способ. Будем ходить по границам и вершинам нашей карты. При этом, пройдя границу и оказавшись в некоторой вершине, мы пойдем дальше по любой другой границе (не по той, по которой пришли!), исходящей из этой вершины. Вершин кратности 1 в карте нет, и, войдя в любую вершину, мы всегда сможем из нее выйти. Будем итти до тех пор, пока первый раз не попадем в вершину, в которой мы уже были, например в вершину A. Участок нашего пути между выходом из вершины A и возвращением в нее представляет собой замкнутый самонепересекающийся контур;

снимем его с карты. При этом кратность каждой вершины либо не изменится (если контур не проходит через нее), либо уменьшится на 2 (если контур через нее проходит), т. е. попрежнему останется четной (некоторые вершины кратности 2 могут при этом исчезнуть). Поэтому во вновь получившейся карте мы снова можем выделить некоторый замкнутый самонепересекающийся контур, составленный из границ, который мы опять снимем. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всю карту. Итак, карта, все вершины которой имеют четную кратность, может быть получена наложением друг на друга контуров, разбивающих плоскость на две части, подобно тому как карта рис. 5 получается наложением окружностей. Совершенно так же, как и в задаче 2, доказывается, что такую карту можно правильно раскрасить двумя красками.

З а м е ч а н и е. Аналогичными рассуждениями нетрудно показать, что карту, у которой все вершины имеют четную кратность, можно начертить одним росчерком пера, т. е. не отрывая пера от бумаги и не проводя никакую границу дважды. Вообще сеть кривых может быть вычерчена одним росчерком пера лишь в одном из двух случаев: если все вершины имеют четную кратность или если нечетную кратность имеют ровно две вершины (в последнем случае надо начинать росчерк в одной из этих вершин и кончать в другой).

28. При решении этой задачи можно воспользоваться либо методом индукции (см. задачу 1), либо методом, которым решается задача 2. Мы дадим схему решения вторым методом. Возьмем какую-то из наших фигур (окружность с хордой). Она разбивает плоскость на три части. Во всех странах карты, лежащих внутри одной из этих частей, поставим цифру 0, в странах, лежащих внутри второй части, — цифру 1 и в странах, расположенных в третьей части, — цифру 2. Проделаем такую операцию для всех фигур. Каждой стране при этом будет сопоставлено n цифр. Сложим их и возьмем остаток от деления их суммы на 3. Страны, у которых этот остаток равен 0, выкрасим белой краской, страны, для которых он равен 1 и 2, — соответственно красной и черной. Так же как и в задаче 2, легко показать, что полученная раскраска будет правильной.

29. Пусть сторона доски образована m шестиугольниками. Откинем $6(m-1)$ полей, лежащих на всех ее шести сторонах. У нас останется доска того же вида, но со стороной $m-1$. Поэтому, если мы обозначим через S_m число полей доски со стороной m, то

$$S_m = 6(m-1) + S_{m-1}.$$

Точно так же

$$S_{m-1} = 6(m-2) + S_{m-2},$$
$$S_{m-2} = 6(m-3) + S_{m-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_2 = 6\cdot 1 + S_1,$$
$$S_1 = 1.$$

Отсюда

$$S_m = 6(m-1) + 6(m-2) + \ldots + 6\cdot 1 + 1 = $$
$$= 1 + 6[1 + 2 + \ldots + (m-2) + (m-1)].$$

Но

$$1 + 2 + \ldots + (m-2) + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2}\ ^{1)}.$$

Поэтому

$$S_m = 1 + 6\frac{(m-1)m}{2} = 3m^2 - 3m + 1.$$

30. См. рис. 106.

31. Мы получили правильную трехцветную раскраску доски со стороной 3 (рис. 106 и 107)[2]). То же самое мы получим на любой другой доске. В самом деле, пусть доска уже правильно раскрашена тремя красками. В таком случае верблюд переходит с красного поля на белое, с белого на черное и с черного на красное (сравните рис. 19 и 20). Если верблюд выходит с центрального, красного, поля и мы выпишем последовательно цвета полей, которые он проходит, то получится последовательность (*к* — красный, *б* — белый, *ч* — черный):

кбч кбч кбч кбч кб ...

---

[1]) Киселев, Алгебра, часть II (изд. 23-е), стр. 70.

[2]) На рис. 107 красный цвет показан горизонтальной штриховкой.

Поэтому, как бы верблюд ни обходил доску (при условии, что вышел с красного поля), поля, номера которых делятся на 3, будут окрашены в черный цвет, а поля, номера которых дают при делении на 3 в остатке 1 и 2, будут выкрашены соответственно в красный и белый цвета.

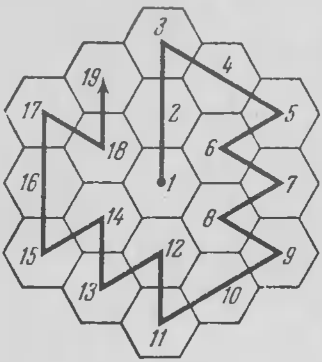


Рис. 106.

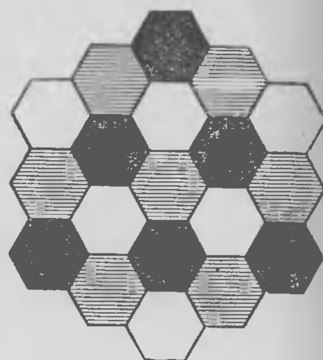


Рис. 107.

Таким образом, раскраска, описанная в формулировке задачи 31, совпадает с исходной правильной раскраской шестиугольной доски (сравните задачу 6).

32. Если, например, верблюд вышел с черного поля, то последовательность цветов проходимых им полей имеет вид (см. предыдущую задачу)

чкб чкб чкбч. . .

Период этой последовательности состоит из трех членов, поэтому верблюд может оказаться на поле того же цвета, что и исходное (в частности, на самом исходном поле) только в том случае, если он сделал число ходов, кратное трем.

33. Чтобы обойти доску, состоящую из 19 полей (рис. 107), верблюд должен сделать 18 ходов, т. е. число ходов, кратное трем, и оказаться поэтому на поле того же цвета, что и исходное. Следовательно, полей этого цвета он проходит больше, чем полей каждого из остальных цветов. Но полей цвета углового поля не больше, чем полей каждого из остальных цветов (см. рис. 107).

34. Чтобы обойти доску из $3m^2-3m+1$ полей (см. задачу 29), верблюд должен сделать $3m^2-3m=3(m^2-m)$ ходов и, так как это число кратно трем, он попадет последним ходом на поле того же цвета, что и исходное. Но поле, соседнее с исходным, всегда другого цвета. Следовательно, попасть на соседнее поле верблюд не может.

35. Последним ходом верблюд попадает на поле того же цвета, что и исходное. Полей этого цвета, следовательно, должно быть больше, чем полей каждого из остальных цветов. В то же время на нашей доске (см. рис. 20 на стр. 22) 21 черное поле, 21 белое поле и 19 красных полей.

36. См. рис. 108 и 109[1]). Мы получили правильную раскраску.

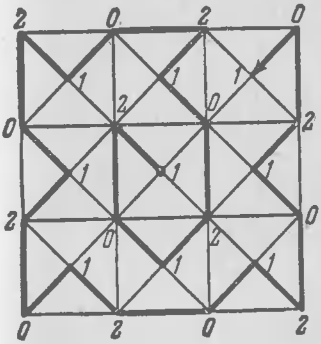


Рис. 108.

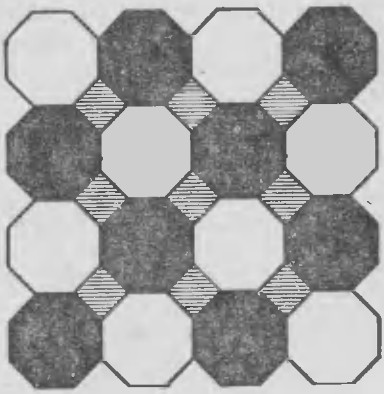


Рис. 109.

37. На нашей доске 25 полей. Чтобы обойти ее указанным образом, надо сделать 24 хода. Каждым третьим ходом верблюд попадает на поле того же цвета, что и исходное (см. рис. 109). Таким образом, последним ходом верблюд

---

[1]) На рис. 109 красный цвет показан горизонтальной штриховкой.

попадает на поле цвета исходного поля и полей этого цвета должно быть больше, чем полей каждого из остальных цветов. Но восьмиугольные поля красятся в черный и белый цвета, причем имеется 9 красных и всего лишь 8 черных и 8 белых полей.

38. Из любой вершины в любую мы можем пройти по сторонам треугольников, если не обращать внимания на стрелки. Исправим теперь этот путь так, чтобы наше движение все время происходило по направлению стрелок. Исправление пути протекает следующим образом. Там, где мы проходили сторону по направлению стрелки, мы оставляем путь без изменения. Там же, где мы шли по сторонам против стрелки, мы делаем обход по двум другим сторонам одного из двух соседних треугольников (рис. 110; путь от A к B против стрелки мы заменяем путем ACB или путем ADB).

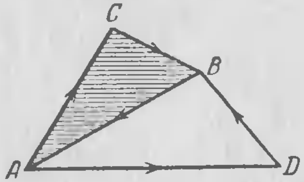


Рис. 110.

39. Прежде всего ясно, что достаточно доказать эту теорему для того случая, когда верблюд нигде не пересекает

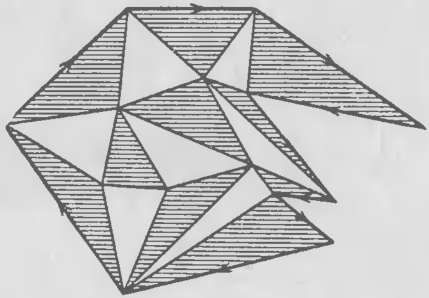


Рис. 111.

свой путь, потому что с петлями можно справиться точно так же, как при решении задачи 25. Итак, пусть верблюд побывал в каждой вершине только один раз и вернулся в исходную. Уничтожим все то, что находится вне области, ограниченной путем верблюда (рис. 111). Останется карта, которую можно правильно раскрасить двумя красками. В самом деле, треугольники, примыкающие к пути верблюда справа, выкрашены в черный цвет, а примыкающие слева — в белый. Поэтому все треугольники, примыкающие к внешней области, имеют один и тот же цвет, и мы получим правильную раскраску, окрасив внешнюю область в противоположный цвет.

Так как на полученной карте все страны, кроме одной, — треугольники, то в силу задачи 4 число границ внешней области, т. е. число сторон, лежащих на пути верблюда, также делится на 3, что и требовалось доказать.

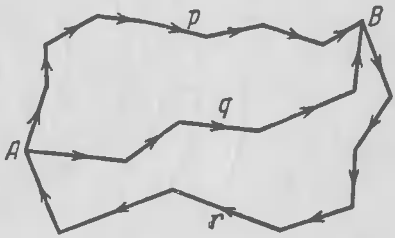


Рис. 112.

40. Проведем вспомогательный путь из B в A (это можно сделать в силу задачи 38). Пусть на его прохождение верблюд затратил r ходов (рис. 112). Тогда в силу задачи 39 $p+r$ делится на 3 и $q+r$ делится на 3, откуда $(p+r)-(q+r)=$ $=p-q$ тоже делится на 3.

41. Отметим некоторую вершину A. Пусть B — любая вершина. Верблюд может пройти из A в B, вообще говоря, многими различными путями, и каждому из этих путей отвечает свое число ходов. Однако в силу задачи 40 остаток от деления на 3 для всех этих чисел один и тот же. Отнесем этот остаток вершине B в качестве ее номера. Проделаем то же самое для всех вершин. Они окажутся занумерованными цифрами 0, 1, 2. Докажем, что соседние вершины получили различные номера. Пусть B_1 и B_2 — две такие вершины. Их соединяет стрелка, которая идет, например, от B_1 к B_2. Пройдя верблюдом из A в B_1 за p ходов и сделав еще один ход по направлению стрелки B_1B_2, мы попадем в B_2. Таким образом, из A в B_2 можно пройти за $p+1$ ход. Но числа p и $p+1$ дают при делении на 3 различные остатки.

42. Построим карту K^*, двойственную нормальной карте K. В силу соотношения 4) между двойственными картами карта K^* состоит из треугольников. По теореме, приведенной на стр. 31, карту K можно правильно раскрасить тремя красками тогда и только тогда, если вершины K^* можно правильно занумеровать тремя цифрами. Но вершины карты K^*, состоящей из треугольников, можно правильно занумеровать тремя цифрами в том и только в том случае, когда сами

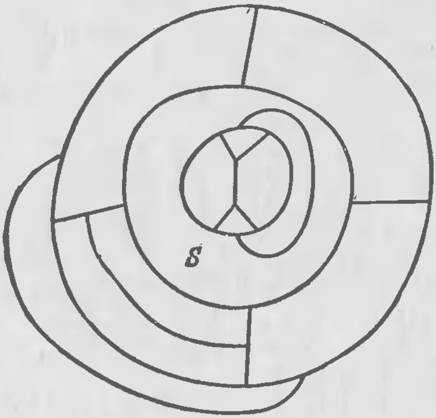


Рис. 113.

треугольники можно правильно раскрасить двумя красками, (см. стр. 27—28), или, что то же самое, когда все вершины K^* имеют четную кратность. Последнее же условие равносильно тому, что каждая страна карты K имеет четное число границ (соотношение 4) между двойственными картами).

Наше утверждение, таким образом, доказано.

Собственно говоря, доказательство приведено нами лишь для связных карт: только в этом случае мы можем без каких-либо неприятностей переходить к двойственным картам. Однако теорема верна и для несвязных карт. Докажем ее для случая, когда карта распадается только на две несообщающиеся между собой части. Пусть S — разделяющая страна несвязной нормальной карты K, все страны которой четноугольники (рис. 113). Рассмотрим отдельно две карты K' и K'' (рис. 114, *а* и *б*), на которые распадается карта K.

Каждая из этих карт связна. Все стороны карт K' и K'', кроме, быть может, S' и S'', — четноугольники по условию. Но так как на карте K' (как и на карте K'') не может существовать только *одна* страна с нечетным числом границ (задача 20), то и S' и S'' — тоже четноугольники. По только что доказанной теореме карты K' и K'' можно правильно раскрасить тремя красками. Позаботимся при этом, чтобы S'

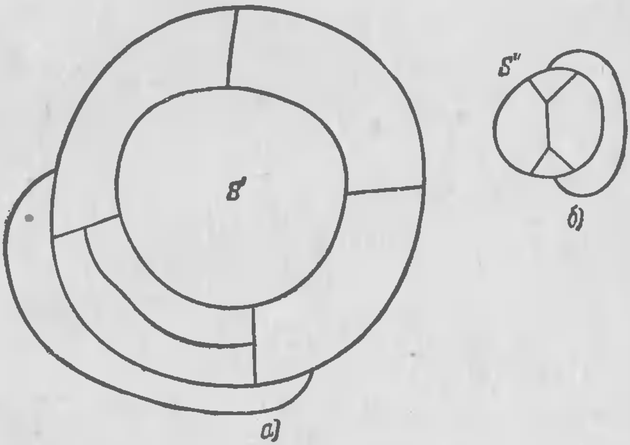


Рис. 114.

и S'' были выкрашены в один и тот же цвет. Тогда, очевидно, и карту K можно правильно раскрасить тремя красками. Аналогично теорема доказывается и для случаев, когда карта распадается на три, четыре и более частей.

43. С каждой границей сопоставляем в качестве номера сумму номеров двух прилегающих к ней стран. При этом получается один из трех номеров (0, 1), (1, 0) или (1, 1), ибо сумма двух номеров дает (0, 0) только в том случае, если эти номера равны. Нумерация правильная, ибо если a, b, c — номера стран, сходящихся в некоторой вершине, то границы, исходящие из этой вершины, получают номера $a+b$, $a+c$ и $b+c$. Но $a+b \neq a+c$, так как $b \neq c$. Точно так же $a+b \neq b+c$ и $a+c \neq b+c$. (Буквами a, b, c мы сокращенно обозначаем пары (0, 0), (0, 1), (1, 0) и (1,1).)

44. Достаточно рассмотреть случай, когда ладья в каждой стране побывала не более одного раза. Общий случай сводится к этому так же, как в задаче 25 (если ладья делает петли и сумма номеров по каждой петле равна (0, 0), то сумма номеров по всему пути также равна (0, 0)).

Пусть внутри области, ограниченной путем ладьи (на рис. 115 путь ладьи показан пунктирной линией), лежат вер-

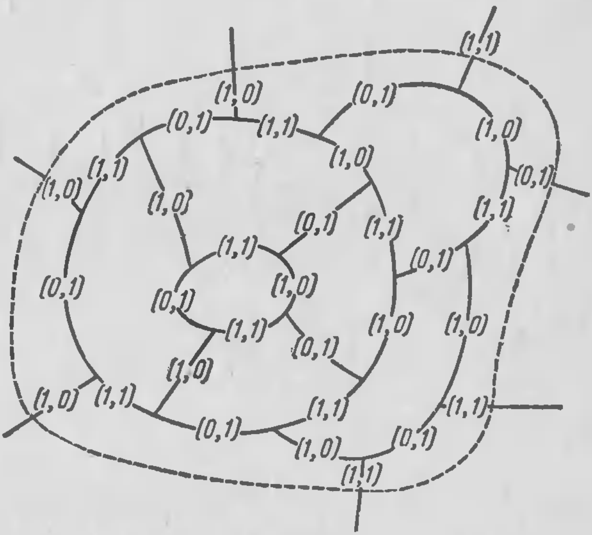


Рис. 115.

шины $A_1, A_2, \ldots, A_v$. Если сложить номера границ, сходящихся в каждой из этих вершин, то получим (0, 0). Выпишем эти равенства для каждой из вершин $A_1, A_2, \ldots, A_v$ и сложим их. Мы получим в правой части (0, 0), а в левой части — сумму номеров всех границ, у которых один или оба конца лежат внутри области, обойденной ладьей. При этом границы, у которых оба конца внутренние, будут сосчитаны дважды, а границы, у которых только один конец лежит внутри нашей области, будут сосчитаны один раз. Если сумма номеров первых границ есть x, а вторых — y, то $2x + y = (0, 0)$. Но $2x = (0, 0)$ для всякого номера x, поэтому $y = (0, 0)$, что и требовалось доказать.

45. Первый способ. Фиксируем некоторую страну S и отнесем ей номер (0, 0). Выйдем ладьей из этой страны и обойдем ею все страны карты так, чтобы в каждой стране мы побывали хотя бы один раз. Вычислим сумму номеров тех границ, которые пересекла ладья на пути из S в данную страну Q; пусть эта сумма есть a. Припишем a стране Q в качестве ее номера.

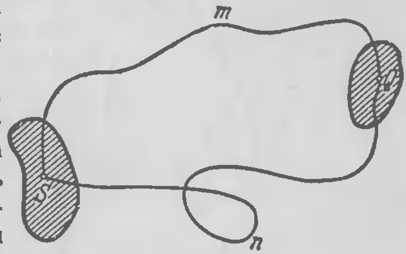


Рис. 116.

Убедимся прежде всего, что нумерация стран не зависит от способа обхода карты. Действительно, пусть мы пришли из S в некоторую страну Q двумя путями (рис. 116). Пусть сумма номеров границ на пути SmQ есть a, а на пути SnQ есть b. В силу задачи 44 сумма номеров границ, взятая по пути $SmQnS$, есть (0, 0), следовательно, $a+b=(0, 0)$. Но два номера в сумме дают (0, 0) только в том случае, если эти номера равны, поэтому $a=b$ и Q получит вполне определенный номер a.

Покажем теперь, что полученная нумерация — правильная. Пусть P и Q — две соседние страны, разделенные границей с некоторым номером c, и пусть сумма номеров границ на пути из S в P есть a, так что P имеет номер a. Пройдем из P в Q, перешагнув через границу с номером c. Тогда Q получит номер $a+c$. Но $a+c \neq a$.

Второй способ. Занумеруем границы цифрами 1, 2, 3. Выйдем из некоторой вершины A по границе с номером 1 и будем ходить по вершинам и границам карты; при этом, пройдя границу с номером 1, мы всякий раз пойдем дальше по границе с номером 2, а пройдя границу с номером 2, мы перейдем на границу с номером 1. Наступит момент, когда мы первый раз придем в вершину B, в которой мы уже были.

Граница, по которой мы приходим в B, имеет номер 1 или 2. В силу правильности нумерации вершина B должна совпасть с A (если бы вершина B не совпала с A, то нумерация границ, сходящихся в B, не была бы правильной (рис. 117)). Таким образом, наш путь, состоящий из границ с номерами 1 и 2, представляет собой замкнутый самонепересекающийся контур. Возьмем любую границу с номером 1 или 2, не попавшую в этот контур, и, начиная с нее, проделаем такой же обход; мы снова получим некоторый контур. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всех границ с номерами 1 и 2.

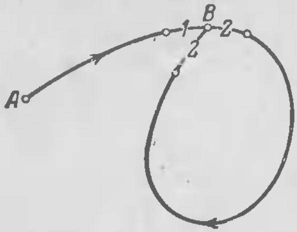


Рис. 117.

Итак, границы с номерами 1 и 2 образуют систему замкнутых самонепересекающихся контуров. Эти контуры разбивают карту на области $M_1, M_2, \ldots, M_p$; каждая область содержит несколько стран. Если стереть все границы с номером 3, то останется карта, границами которой будут наши контуры, а странами — области $M_1, M_2, \ldots, M_p$. Дословно так же, как и в задаче 2, доказывается, что $M_1, M_2, \ldots, M_p$ можно правильно раскрасить двумя красками a и b. Рассмотрим аналогичную систему контуров, составленную из границ с номерами 1 и 3. Она разбивает плоскость на области $N_1, N_2, \ldots, N_r$, которые мы правильно раскрасим красками c и d. Каждая страна S первоначальной карты содержится в одной из областей $M_1, M_2, \ldots, M_p$, имеющей цвет a или b, и в одной из областей $N_1, N_2, \ldots$ $\ldots N_r$, имеющей цвет c или d. Соответственно этому отнесем стране одну из четырех пар (a, c), (a, d), (b, c) или (b, d). Легко убедиться, что такая нумерация стран парами является правильной.

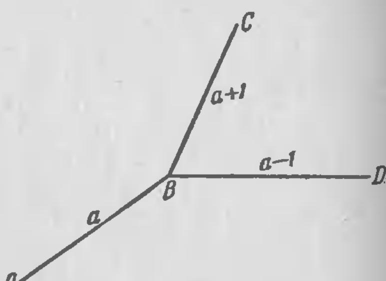


Рис. 118.

46. Согласно задаче 45 достаточно показать, что границы такой карты можно правильно занумеровать тремя цифрами. Будем ходить верблюдом по границам карты, переходя с каждой границы на любую соседнюю. Выйдем из некоторой границы, которой присвоим номер 1, и дальше нумера-

цию производим так. Пройдя какую-нибудь границу AB, уже имеющую номер a (рис. 118), мы попадаем в вершину B. Дальше можно пойти либо налево (по BC), либо направо (по BD). Если мы пойдем налево, то увеличиваем наш номер на 1, т. е. приписываем границе BC номер $a+1$. Если же мы идем направо, то уменьшаем номер a на 1, т. е. приписываем BD номер $a-1$. При этом каждая граница получает, вообще говоря, не один, а несколько номеров (заметим, что номерами могут служить и отрицательные числа). Покажем, что все номера, отвечающие одной и той же границе, дают при делении на 3 один и тот же остаток. (Если нам это удастся, то, отнеся каждой границе соответствующий остаток, мы получим правильную нумерацию.) Доказательство опирается на л е м м у:

Верблюд вышел из границы с номером a и вернулся в нее. При возвращении он нумерует эту границу номером b. Тогда $b-a$ делится на 3.

Пусть путь верблюда содержит g' границ и пусть мы g_1 раз шли налево и g_2 раз шли направо ($g'=g_1+g_2$). Очевидно, $b=a+g_1-g_2$, поэтому нужно доказать, что g_1-g_2

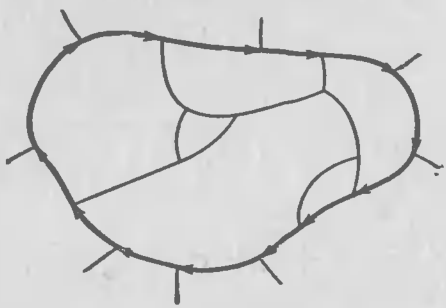


Рис. 119.

делится на 3. Как обычно, доказательство достаточно провести для случая, когда верблюд ни в какой границе не был более одного раза. Путь верблюда показан на рис. 119 ($g'=13$). Все границы, исходящие из вершин, которые лежат на пути верблюда, но сами не принадлежащие этому пути, распадаются на два типа: оставшиеся справа от направления движения верблюда (их число g_1 [1])) и оставшиеся слева от этого направления (их число g_2 [1])). Если верблюд обошел свой путь по часовой стрелке (как на рис.119), то границы первого типа лежат внутри области G, ограниченной путем верблюда, а границы второго типа — вне этой области (на рис. 119 $g_1=5$, $g_2=8$). Таким образом, надо доказать, что разность между числом границ, отходящих от пути верблюда внутрь, и числом границ, отходящих от пути верблюда наружу, делится на 3.

Пусть v — число вершин, лежащих как в области G, так и на самом пути верблюда, g_i — число границ, лежащих строго внутри области G, и $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — числа границ стран, расположенных в G. Имеют место соотношения

$$3v=2(g_i+g')+g_2, \tag{1}$$

$$n_1+n_2+\ldots+n_s=2g_i+g'. \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1), получаем

$$g'+g_2=3v-(n_1+n_2+\ldots+n_s).$$

Так как каждое из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ по условию делится на 3, то и $g'+g_2$ тоже делится на 3. Но $g'=g_1+g_2$, поэтому и g_1+2g_2 делится на 3, равно как и $g_1+2g_2-3g_2=g_1-g_2$, что и требовалось доказать.

Мы ограничимся доказательством этой леммы и предоставим читателю завершить решение задачи самостоятельно (схема доказательства такая же, как в задачах 39—41).

47. На получившейся карте кратность каждой из вершин равна 4. В силу задачи 16

$$4\cdot 6=k_1+k_2+\ldots+k_6=2g,$$

откуда $g=12$.

Карта связна. Если бы она была несвязна, то по крайней мере в одной из частей, на которые она распалась бы, было бы меньше четырех вершин, ибо число всех вершин равно 6. В то же время, так как эта часть совершенно изолирована, каждая из ее вершин может быть соединена только с вершиной той же части. Это противоречит тому,

---

[1]) При этом граница считается дважды, если обе ее вершины лежат на пути верблюда.

что каждая вершина соединена ровно с четырьмя другими вершинами.

Так как карта связна, то мы можем применить теорему Эйлера

$$s = g + 2 - v = 8.$$

В силу задачи 19

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_8 = 2g = 24.$$

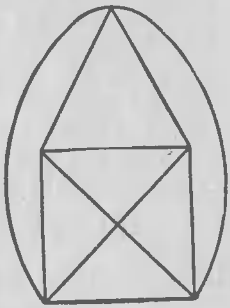


Рис. 120.

Одноугольников и двуугольников на карте нет (никакая вершина не соединена сама с собой и никакие две вершины не соединены двумя различными границами). Поэтому все числа $n_1, n_2, \ldots, n_8$ не меньше 3. Если бы хотя бы одно из них было больше 3, то их сумма была бы больше чем $3 \cdot 8 = 24$, что неверно. Поэтому $n_1 = n_2 = \ldots = n_8 = 3$ (требуемая карта построена на рис. 120).

48. Предположим противное и проведем требуемые линии. Мы получим карту, кратность каждой вершины которой равна 4. На основании задачи 16

$$g = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_7}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14.$$

По теореме Эйлера $s = g + 2 - v = 9$ (связность устанавливается совершенно так же, как в предыдущей задаче). В силу задачи 19

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_9 = 28. \tag{1}$$

Так как число границ в каждой стране равно самое меньшее 3 (см. решение предыдущей задачи), то из формулы (1) следует, что имеется восемь треугольников и один четырехугольник. Поэтому в силу задачи 4 нашу карту нельзя правильно раскрасить двумя красками. В то же время кратность каждой вершины равна 4, т. е. четна; приходим к противоречию с задачей 27.

49. Предположим, что такие дороги можно провести. Мы получим карту, вершинами которой будут дома и колодцы, а границами — дороги. Число вершин — 6, кратность каждой вершины — 3. Число границ $g=\frac{3\cdot 6}{2}=9$ (задача 16), число стран $s=g+2-v=5$. Так как никакая дорога не соединяет дом с домом или колодец с колодцем, то, сопоставив каждому дому цифру 0, а каждому колодцу — цифру 1, мы получим правильную нумерацию нашей карты. Отсюда следует, что каждая страна имеет четное число границ (двойственное обращение задачи 23). Двуугольников нет, поэтому наименьшее число границ, которое может иметь страна, равно 4. В силу задачи 19

$$18=2g=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5\geqslant 4\cdot 5=20,$$

и мы приходим к противоречию.

50. Предположим противное. У нас получится некоторая карта, имеющая пять вершин; проведенные линии будут служить границами. Кратность каждой вершины равна 4. Имеем $g=\frac{4\cdot 5}{2}=10$ (задача 16). Отсюда по теореме Эйлера $s=g+2-v=7$. В силу задачи 19 $n_1+n_2+\ldots$ $\ldots+n_7=2g=20$. С другой стороны, так как все $n_1, n_2, \ldots, n_7$ не меньше 3, то

$$n_1+n_2+\ldots+n_7\geqslant 3\cdot 7=21.$$

Мы приходим к противоречию.

Замечание. Если пять точек на плоскости нельзя попарно соединить не пересекающимися друг с другом кривыми, то в пространстве эта задача легко разрешима (рис. 121). Аналогично в пространстве могут быть построены и конфигурации задачи 49 (рис. 122) и задачи 48. Вообще любую схему соединений n точек, нарисованную на плоскости с пересечениями, можно расположить в пространстве без пересечений (в виде сети непересекающихся нитей, соединяющих n точек — вершин сети). Трудности встречаются при решении задачи обратного характера: какие пространственные сети кривых нитей можно без пересечений расположить на плоскости? Примерами пространственных сетей, для которых такое помещение на плоскость невозможно, являются сети рис. 121 и 122. Очевидно, что если какая-нибудь пространственная сеть содержит часть, устроенную как сеть рис. 121 или рис. 122 (в том смысле, что, уничтожив ряд кривых и вершин, мы получим пять точек, соединенных друг с другом так, как указано в задаче 50, или шесть точек, соединенных так, как указано в задаче 49), то такую сеть нельзя без пересечений положить на плоскость. Доказано,

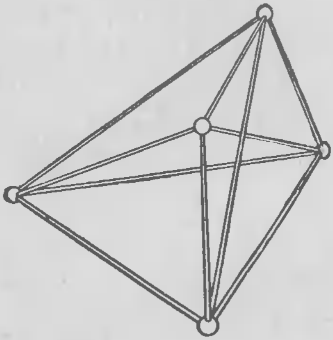


Рис. 121.

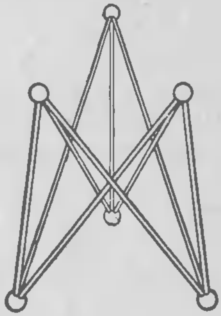


Рис. 122.

что этим исчерпываются все вообще сети, не помещающиеся без самопересечений на плоскости, т. е. что всякая такая сеть обязательно содержит (в указанном смысле) либо конфигурацию задачи 49, либо конфигурацию задачи 50.

51. Если бы такие страны существовали, то, выбрав в каждой из них столицу и соединив столицы соседних стран железными дорогами (иными словами, перейдя к двойственной карте), мы получили бы конфигурацию, невозможность которой доказана в предыдущей задаче. Эту задачу, подобно предыдущим, можно решить и непосредственным подсчетом.

52. Предположим противное. Тогда все числа $n_1, n_2, \ldots$ $\ldots, n_s$ не меньше 6 и

$$6s \leqslant n_1 + n_2 + \ldots + n_s = 2g, \quad 3s \leqslant g. \tag{1}$$

С другой стороны, кратности всех вершин не меньше 3, поэтому (задача 16)

$$3v \leqslant 2g. \tag{2}$$

Складывая неравенства (1) и (2), имеем

$$3(v+s) \leqslant 3g,$$
$$v+s \leqslant g,$$

что невозможно, так как $v+s=g+2$.

53. Доказательство проведем по индукции. Для карт с числом стран, не превосходящим 6, теорема очевидна. Пусть она доказана для карт с n странами; покажем, что она верна и для случая $n+1$ страны.

На основании предыдущей задачи существует страна S с числом границ, меньшим чем 6 (рис. 123, *а*). Представим

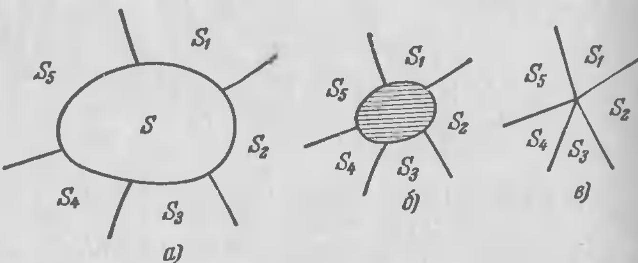


Рис. 123.

себе теперь, что плоскость, на которой нарисована наша карта, сделана из резиновой пленки, и проделаем следующую операцию. Вырежем ножницами страну S и края образовавшейся дыры начнем стягивать (рис. 123, *б*) до тех пор, пока дыра не затянется вовсе (рис. 123, *в*). Получившаяся карта содержит n стран; по предположению, ее можно правильно раскрасить шестью красками. Если мы теперь снова восстановим страну S, то, так как она граничит самое большее с пятью странами, мы можем закрасить ее в цвет, не совпадающий с цветами соседних с нею стран. Теорема, таким образом, доказана.

Доказательство проведено нами лишь для связных карт (мы воспользовались задачей 52). Однако оно немедленно переносится и на несвязные карты. Как это делается, покажем на примере. На рис. 124 изображена несвязная карта с одной разделяющей страной S. Границы ее распадаются на две связные части, нарисованные отдельно на рис. 125 и 126. Карты рис. 125 и 126 связны; по доказанному их можно

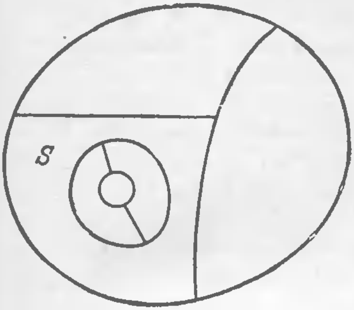


Рис. 124.

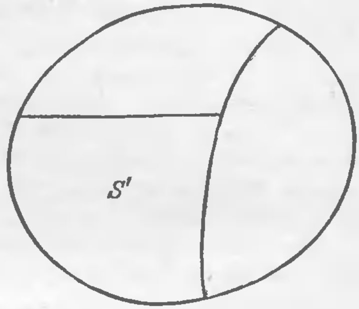


Рис. 125.

правильно раскрасить шестью красками. Устроим так, чтобы при этом S' и S'' получили один и тот же цвет. Тем самым, очевидно, мы получили правильную раскраску и для карты рис. 124.

54. Снова воспользуемся методом индукции. Для карт, число стран которых не превосходит 5, утверждение очевидно. Предположим, что теорема верна для карт, содержащих не более n стран, и докажем ее для случая $n+1$ стран.

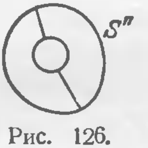


Рис. 126.

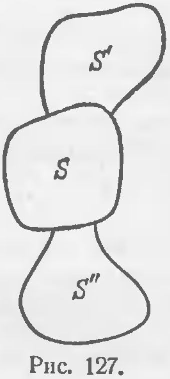


Рис. 127.

В силу задачи 52 существует страна S с числом границ, меньшим, чем 6, т. е. граничащая самое большее с пятью другими странами. Если число соседей S не больше чем 4, то применяем то же рассуждение, что и в предыдущей задаче. Остается рассмотреть случай, когда S имеет ровно пять соседей. Среди этих пяти стран, граничащих с S, существуют две, не граничащие друг с другом (задача 51), например S' и S'' (рис. 127). Сотрем границы между S и S' и между S и S''. Мы получим новую карту, состоящую из $n-1$ стран, в которой на месте прежних стран S, S', S'' будет одна большая страна $\overline{S}$. Раскрасим эту карту правильно пятью красками (по предположению, это возможно). Восстановим теперь уничтоженные границы и вернемся к прежней карте. У S' и S'' оставим ту окраску, которая была у $\overline{S}$ (так как они не граничат друг с другом, то это можно сделать, не нарушая правильности раскраски). Тогда страна S будет окружена пятью странами, две из которых S' и S'' имеют одинаковый цвет, т. е. S граничит со странами лишь четырех различных цветов, и мы можем закрасить ее в пятый цвет, отличный от цветов ее соседей.

55. Наименьшая возможная кратность вершины равна 3. Поэтому из задачи 16 следует, что

$$3v \leqslant 2g.$$

По теореме Эйлера $v = g + 2 - s$, откуда

$$3(g+2-s) \leqslant 2g, \quad 3g+6-3s \leqslant 2g,$$

$$g \leqslant 3s-6,$$

что и требовалось доказать.

56. Покажем, что в связной карте с числом стран, меньшим 12, существует страна с числом границ, меньшим, чем 5. Предположим противное. Тогда в силу задачи 19

$$5s \leqslant 2g. \qquad (1)$$

Так как по предположению кратность каждой вершины не меньше 3, то в силу задачи 16

$$3v \leqslant 2g. \qquad (2)$$

Умножая (1) на 3, а (2) на 5 и складывая, получаем

$$15(v+s) \leqslant 16g.$$

Заменяем $v+s$ через $g+2$:

$$15(g+2) \leqslant 16g, \quad 15g+30 \leqslant 16g, \quad g \geqslant 30.$$

С другой стороны, из задачи 55 следует, что при $s < 12$ выполняется неравенство $g < 3 \cdot 12 - 6 = 30$. Мы приходим к противоречию. Следовательно, среди стран нашей карты существует страна с числом границ, меньшим 5.

Дальше решение проводим по индукции. Если число стран не превосходит 4, то раскраска возможна. Пусть теорема верна для n стран. Докажем ее для случая $n+1$ страны ($n+1<12$).

По доказанному в карте, содержащей $n+1$ стран, существует страна S, число границ которой меньше 5. Если число соседей такой страны равно 1, 2 или 3, то уничтожаем эту страну и проводим те же рассуждения, что и в задаче 53. Если же число ее соседей равно 4, то рассуждаем так. Имеется пять стран — сама страна S и четыре, соседние с ней. Не может быть, чтобы все они попарно граничили между собой (задача 51). С другой стороны, каждая страна из этих пяти, отличная от S, граничит с S. Следовательно, существуют две соседние с S страны, не граничащие друг с другом. После того как установлен этот факт, доказательство идет дальше совершенно так же, как и в задаче 54.

Предоставим читателю самому перенести это доказательство на несвязные карты.

Замечание. В этой задаче проблема четырех красок решается для частного случая, когда число стран не превосходит 11. В настоящее время самым сильным результатом следует считать, повидимому, решение проблемы четырех красок для карт с числом стран, не превышающим 38.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

57. Имеем

$$0=0\cdot 0=0\cdot 1=0\cdot 2=0\cdot 3=0\cdot 4=0\cdot 5=0\cdot 6=0\cdot 7=$$
$$=0\cdot 8=0\cdot 9=2\cdot 5=4\cdot 5=6\cdot 5=8\cdot 5.$$

Произведение числа 0 на любое число, как и в обычной арифметике, всегда равно нулю. Однако в отличие от обычной арифметики произведение может быть равно нулю даже тогда, когда каждый из сомножителей отличен от нуля. Числа 0, 2, 4, 6, 8, 5, которые могут давать нуль при умножении на число, не равное нулю, называются *делителями нуля*.

58. Имеем

$$1=1\cdot 1=3\cdot 7=9\cdot 9.$$

Отметим, что в эти равенства не входит ни одно число, являющееся делителем нуля, и входят все без исключения остальные числа.

59. Для решения задачи достаточно вычислить выражения 6^{811}, 2^{1000} и 3^{999} в 10-арифметике. В 10-арифметике имеет место равенство $6^2=6$. Умножая это равенство последовательно на 6, 6^2, $6^3, \ldots$, получим

$$6^3=6^2,\ 6^4=6^3,\ 6^5=6^4, \ldots$$

Отсюда вытекает, что при любом показателе n $6^n=6$. В частности, $6^{811}=6$. Для вычисления 2^{1000} заметим, что $2^4=6$; следовательно, $2^{1000}=2^{4\cdot 250}=6^{250}=6$. Наконец, из равенства $3^4=1$ выводим $3^{999}=3^{4\cdot 249+3}=(3^4)^{249}\cdot 3^3=3^3=7$.

60. Таблица сложения

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Таблица умножения

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Разложения нуля и единицы имеют вид

$$0 = 0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 2 \cdot 0 = 3 \cdot 0 = 4 \cdot 0 = 5 \cdot 0 = 6 \cdot 0,$$

$$1 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot 4 = 3 \cdot 5 = 6 \cdot 6.$$

Мы замечаем, что в 7-арифметике произведение двух чисел может быть равно нулю только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. В этом 7-арифметика сходна с обычной арифметикой и отлична от 10-арифметики.

Сопоставим выписанную 7-арифметическую таблицу умножения с таблицей умножения в 10-арифметике (стр. 51). Между этими таблицами имеется следующая существенная разница: в каждой строчке 7-арифметической таблицы (кроме строчки, соответствующей нулю) встречаются все числа из 7-арифметики, каждое по одному разу; между тем в 10-арифметической таблице в ряде строчек некоторые числа из 10-арифметики отсутствуют, а другие повторяются несколько раз. Такими строчками с повторениями, кроме строчки 0, являются также строчки 2, 4, 5, 6, 8, т. е. строчки, соответствующие делителям нуля (см. решение задачи 57). Отсутствие в 7-арифметической таблице строчек с повторениями связано с отсутствием в 7-арифметике делителей нуля, отличных от нуля.

61. Вычислим 3^{100} в 7-арифметике:

$$3^2 = 2,\ 3^3 = 6,\ 3^4 = 4,\ 3^5 = 5,\ 3^6 = 1.$$

Следовательно,

$$3^{100} = 3^{6 \cdot 16 + 4} = (3^6)^{16} \cdot 3^4 = 3^4 = 4.$$

62. Приводим таблицы для 2-арифметики и 4-арифметики:

2-арифметика

Таблица сложения

	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблица умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

4-арифметика

Таблица сложения

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Таблица умножения

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Таблицы умножения в 2-арифметике и 3-арифметике принадлежат к тому же типу, что и 7-арифметическая таблица: в них нет строчек с повторениями, кроме строчки 0. Напротив, 4-арифметическая и 9-арифметическая таблицы умножения, подобно 10-арифметической таблице, содержат ненулевые строчки с повторениями.

63. Ответы: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=10$,

$$2^{10}=3^{10}=\ldots=10^{10}=1.$$

64. Ответы: 1; 1; 1; 3.

65. Требуется доказать, что в 1001-арифметике

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+500^3+501^3+\ldots+998^3+999^3+1000^3=0. \quad (1)$$

Но в 1001-арифметике

$$\begin{aligned}
1000&=-1, & 1000^3&=(-1)^3=-1^3,\\
999&=-2, & 999^3&=(-2)^3=-2^3,\\
998&=-3, & 998^3&=(-3)^3=-3^3,\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
501&=-500, & 501^3&=(-500)^3=-500^3.
\end{aligned}$$

Поэтому члены суммы (1), равноотстоящие от концов, взаимно уничтожаются.

66. а) Решается так же, как задача 65.

б) Выражение $1^k+2^k+\ldots+(m-1)^k$ в силу задачи а) равно нулю в m-арифметике. Следовательно, в обычной арифметике оно делится на m.

67. В качестве примера приводим схему умножения на 3 в 7-арифметике (рис. 128), схему умножения на 5 в 10-арифметике (рис. 129) и схему умножения на 3 в 9-арифметике (рис. 130).

Первая из этих схем распадается на циклы, чего нельзя сказать об остальных двух схемах.

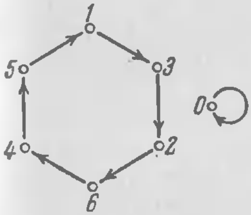


Рис. 128.

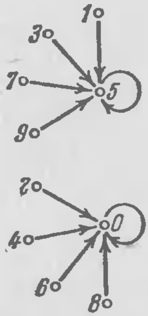


Рис. 129.

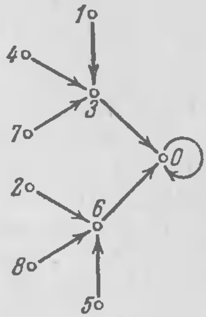


Рис. 130.

68. Для нахождения p-арифметического произведения чисел a и b надо найти их обычное произведение и взять его остаток от деления на p. Поэтому p-арифметическое произведение равно нулю тогда и только тогда, когда обычное произведение делится на p. Но, как известно из обычной арифметики, произведение может делиться на простое число p только в том случае, если один из сомножителей делится на p. Итак, или a или b делится на p; а так как a и b содержатся среди чисел $0, 1, 2, \ldots, p-1$, то или $a=0$ или $b=0$.

Замечание. Нетрудно установить следующий факт: если в m-арифметике из $ab=0$ следует, что либо $a=0$, либо $b=0$, то m — число простое. Отсюда и из задачи 68 вытекает, что p-арифметику мы можем определить как m-арифметику, не содержащую отличных от нуля делителей нуля.

69. а) Если бы к числу x подходило две стрелки, скажем, от чисел y и z, то это означало бы, что $ay=x$ и $az=x$. Вычитая одно из этих равенств из другого, найдем $a(y-z)=0$, но в силу задачи 68 это невозможно, ибо, по предположению, $a \neq 0$ и $y \neq z$.

б) От каждого числа отходит ровно одна стрелка. Поэтому число стрелок на схеме так же, как и число точек схемы, равно p. Каждая стрелка подходит к некоторому числу. Если бы к какому-нибудь числу не подходила ни одна стрелка, то к некоторому другому числу подходили бы две стрелки, что невозможно согласно задаче а).

В пояснение к проведенному рассуждению заметим, что оно вполне аналогично следующему рассуждению: предположим, что классу, состоящему из 30 учеников, роздано 30 тетрадей; если известно, что ни один из учеников не получил более чем одну тетрадь, то отсюда можно заключить, что *каждому* из учеников досталось по тетради.

70. Рассмотрим схему умножения на a. Согласно задаче 69б) к числу b подходит стрелка от некоторого числа x. Но это и значит, что $ax = b$.

71. а) Пусть b — произвольное число из p-арифметики. Покажем, что b принадлежит некоторому циклу. Будем двигаться, отправляясь от b, по нашей схеме, переходя от числа к числу, как указывают стрелки. После нескольких переходов (число переходов может, в частности, равняться 1 и во всяком случае не превышает p) мы впервые попадем в точку, в которой уже побывали ранее. Этой точкой может быть только точка b, ибо в противном случае схема нашего пути имела бы вид, изображенный на рис. 131, т. е. к некоторому числу подходили бы две стрелки, а это невозможно на основании задачи 69а).

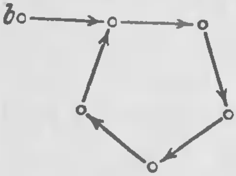


Рис. 131.

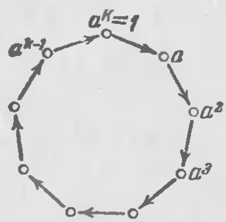


Рис. 132.

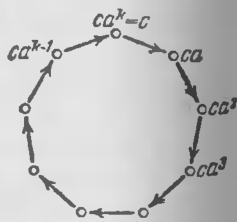


Рис. 133.

б) Рассмотрим цикл, содержащий число 1. Пусть он имеет вид, изображенный на рис. 132. Умножим этот цикл на произвольное число $c \neq 0$. Мы получим новый цикл нашей схемы (рис. 133) и притом имеющий ту же длину, что и единичный цикл. Ясно, что любой цикл C схемы, кроме нулевого, можно получить таким образом: для этого достаточно умножить единичный цикл на некоторое число c, принадлежащее циклу C. Следовательно, все ненулевые циклы имеют равную длину.

Обозначим длину ненулевых циклов через k, а их число через s. Имеем $ks = p - 1$. С другой стороны, $a^k = 1$ (см. рис. 132). Возвышая последнее равенство в степень s, получим $a^{p-1} = 1$.

72. Вытекает из того, что в p-арифметике $a^{p-1} - 1 = 0$ (см. задачу 71).

73. Таблицы обратных величин:

в 7-арифметике

k	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{k}$	1	4	5	2	3	6

в 11-арифметике

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{k}$	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10

в 13-арифметике

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{k}$	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

Предположим, что x само себе обратно, т. е. $x = \frac{1}{x}$. Тогда $x^2 = 1$, откуда $(x-1)(x+1) = 0$. Согласно задаче 68 из последнего равенства вытекает, что либо $x - 1 = 0$, либо $x + 1 = 0$, т. е. или $x = 1$ или $x = -1$.

74. а) В произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (p-1)$ каждое из чисел, кроме 1 и $p-1$, сократится со своим обратным (ср. задачу 73). Поэтому

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (p-1) = 1 \cdot (p-1) = -1.$$

б) Следует из задачи а).

75. Предположим противное. Пусть m — составное (т. е. не простое) число. Тогда m делится на некоторое число d, $1 < d \leqslant m - 1$. В таком случае $(m-1)!$ делится на d и $(m-1)! + 1$, делясь на m, также делится на d. Но тогда и разность их

$$[(m-1)! + 1] - (m-1)! = 1$$

должна делиться на d, что противоречит условию $d > 1$.

76. Нам надо доказать, что сумма

$$S = 0^k + 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k \tag{1}$$

равна 0 или -1.

Рассмотрим сначала случай, когда для всякого числа a $(a \neq 0)$ из p-арифметики $a^k = 1$ [1]). Тогда

$$S = 0^k + 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k = 0 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p-1 \text{ раз}} = $$
$$= p - 1 = -1.$$

Пусть теперь $a^k = 1$ не для всех отличных от нуля чисел a, т. е. существует число $b \neq 0$ такое, что $b^k \neq 1$. Умножим (1) на b^k. Получим

$$Sb^k = [0^k + 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k]\, b^k =$$
$$= (0 \cdot b)^k + (1 \cdot b)^k + (2 \cdot b)^k + \ldots + [(p-1) \cdot b]^k.$$

Среди чисел $0 \cdot b,\ 1 \cdot b,\ 2 \cdot b, \ldots, (p-1) \cdot b$ встретятся все числа p-арифметики (для любого a имеет место $\frac{a}{b} b = a$). Кроме того, каждое число a встретится здесь лишь один раз, ибо если $a = xb$, то $x = \frac{a}{b}$. Поэтому

$$(0 \cdot b)^k + (1 \cdot b)^k + (2 \cdot b)^k + \ldots + [(p-1) \cdot b]^k$$

есть та же сумма (1), только записанная в другом порядке:

$$Sb^k = S,$$

$$S(b^k - 1) = 0.$$

Так как $b^k - 1 \neq 0$, то, поделив на это выражение обе части равенства, имеем

$$S = 0.$$

77. Ниже приводятся схемы возвышения в квадрат: в 7-арифметике (рис. 134), в 12-арифметике (рис. 135) и в 24-арифметике (рис. 136).

---

[1]) Легко видеть, что этот случай имеет место, когда k делится на $p-1$. Можно доказать, что других возможностей нет, т. е. если $a^k = 1$ для всех a, то k делится на $p-1$ (см. задачу 90).

78. Предположим, что уравнению

$$x^2 = a \qquad (1)$$

удовлетворяет некоторое число b из p-арифметики, т. е. имеет место тождество

$$b^2 = a. \qquad (2)$$

Вычитая равенство (2) из уравнения (1), находим

$$x^2 - b^2 = 0,$$

откуда

$$(x - b)(x + b) = 0.$$

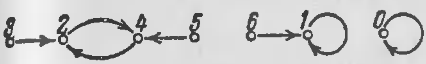


Рис. 134.

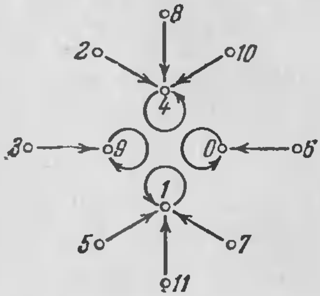


Рис. 135.

Если произведение двух чисел p-арифметики равно нулю, то один из сомножителей равен нулю (задача 68). Поэтому или $x - b = 0$, или $x + b = 0$, т. е. или $x = b$, или $x = -b$.

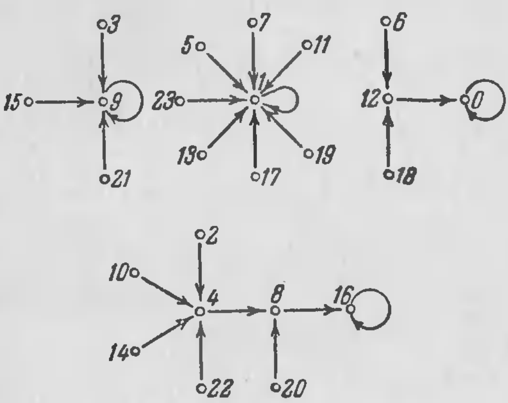


Рис. 136.

Докажем, что при $a \neq 0$ найденные два решения различны. Действительно, из равенства $b = -b$ следует $b + b = 0$. Если только рассматриваемая p-арифметика не является

2-арифметикой, то отсюда вытекает, что $b=0$, следовательно, также $a=0$.

79. Рассмотрим схему возведения в квадрат в p-арифметике и те числа, из которых извлекается квадратный корень, т. е., иными словами, те точки, к которым подходит хотя бы одна стрелка. Пусть k — число таких точек. Тогда в силу задачи 78 к одной из них, именно к точке 0, подходит одна стрелка, а к остальным $(k-1)$ точке — по две стрелки. Число всех стрелок на схеме, таким образом, будет

$$2(k-1)+1.$$

С другой стороны, от каждой точки отходит ровно одна стрелка; но точек на схеме p, следовательно, и стрелок p. Поэтому

$$2(k-1)+1=p, \quad k=\frac{p+1}{2}.$$

80. а) Пусть $p=4k+1$. Согласно задаче 74

$$1\cdot 2\ldots(p-1)=-1.$$

Перепишем это равенство так:

$$-1=1\cdot 2\ldots(p-1)=\left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]\left[\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\ldots(p-2)(p-1)\right]=\left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]\times$$
$$\times\left[\left(p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p-\frac{p-3}{2}\right)\ldots(p-2)(p-1)\right]=$$
$$=\left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]\left[(-1)(-2)\ldots\left(-\frac{p-3}{2}\right)\left(-\frac{p-1}{2}\right)\right]=$$
$$=\left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]^2(-1)^{\frac{p-1}{2}}=$$
$$=\left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]^2(-1)^{2k}=\left[1\cdot 2\ldots\frac{p-3}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\right]^2,$$

т. е. из -1 извлекается квадратный корень.

Обратно, пусть дано, что $\sqrt{-1}$ извлекается, т. е.

$$x^2=-1.$$

Возведем это равенство в степень $\frac{p-1}{2}$:

$$x^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)}=(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Но согласно задаче 71

$$x^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)}=x^{p-1}=1.$$

Отсюда

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1 \quad \text{и} \quad \frac{p-1}{2}=2k, \ p=4k+1.$$

Таким образом, нельзя извлечь квадратный корень из -1, если $p=4k+3$.

б) Пусть a^2+1 делится на p. В p-арифметике это запишется в виде $b^2+1=0$ (b — остаток от деления a на p), т. е. $\sqrt{-1}$ извлекается в p-арифметике; отсюда согласно предыдущей задаче $p=4k+1$. С другой стороны, если $p=4k+1$, то в p-арифметике $\sqrt{-1}$ извлекается, т. е. существует a такое, что $a^2=-1$, $a^2+1=0$. В обычной арифметике это означает, что a^2+1 делится на p.

81. Формула выводится в точности так же, как и в обычной алгебре.

Пользуемся тождеством

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

В силу этого тождества уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

эквивалентно равенству

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$$

или

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{2}$$

Из последнего равенства видно, что если уравнение (1) имеет решения, то должен извлекаться корень квадратный из $b^2 - 4ac$. Равенство (2) можно переписать в этом случае в виде

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

откуда

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (3)$$

Итак, уравнение (1) не имеет решений, если $\sqrt{b^2 - 4ac}$ не извлекается, и имеет два решения, вычисляемые по формуле (3), если $\sqrt{b^2 - 4ac}$ извлекается. Эти решения различны, если $b^2 - 4ac \neq 0$, и совпадают, если $b^2 - 4ac = 0$. В случае 2-арифметики формула (3) теряет смысл, ибо она содержит деление на два.

82. Вычисляем для каждого из данных уравнений дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Имеем для первого уравнения $D = 3$, для второго $D = 0$, для третьего $D = 2$. Пользуясь, например, схемой задачи 77 (рис. 134), устанавливаем, что в 7-арифметике $\sqrt{3}$ не извлекается, а $\sqrt{2}$ извлекается и имеет значения 3 и 4. Следовательно, первое уравнение не имеет решений, второе имеет единственное решение, третье имеет два решения. Находим эти решения по формуле (5) задачи 81: для второго уравнения $x = 2$, для третьего $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$.

83. Если α и β — корни уравнения $x^2 + cx + d = 0$, то, как и в обычной алгебре,

$$x^2 + cx + d = (x - \alpha)(x - \beta).$$

(Для того чтобы в этом убедиться, достаточно выразить α и β через c и d с помощью формул для решений квадратного уравнения и раскрыть скобки.) Поэтому число приведенных уравнений, имеющих два различных корня, равно числу способов, которыми можно выбрать два различных числа α и β из совокупности всех p чисел p-арифметики, т. е. равно $\frac{p(p-1)}{2}$. Если уравнение $x^2 + cx + d = 0$ имеет только один корень α, то

$$x^2 + cx + d = (x - \alpha)^2.$$

Число таких уравнений равно p. Все остальные уравнения, число которых равно $p^2 - \frac{p(p-1)}{2} - p = \frac{p(p-1)}{2}$, не имеют решений.

84. Ниже приводятся схемы возвышения в куб в 7-арифметике (рис. 137), в 11-арифметике (рис. 138), в 13-арифметике (рис. 139) и в 17-арифметике (рис. 140).

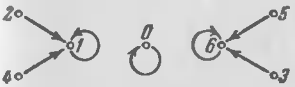


Рис. 137.

Рис. 138.

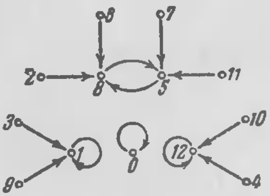


Рис. 139.

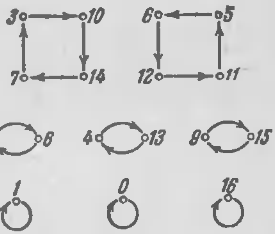


Рис. 140.

85. а) Пусть

$$b^3 = 1. \tag{1}$$

В силу задачи 71

$$b^{p-1} = 1. \tag{2}$$

Поскольку $p = 3k + 2$, то $p - 1 = 3k + 1$, и равенство (2) принимает вид

$$b^{3k+1} = 1. \tag{3}$$

Возвышая равенство (1) в степень k, найдем

$$b^{3k} = 1 \tag{4}$$

и, поделив (3) на (4), получим

$$b = 1. \tag{5}$$

Итак, из (1) следует (5), что и требовалось доказать.

б) Пусть $x^3 = a$ и $y^3 = a$. Разделив первое из этих равенств на второе, получим $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = 1$, откуда согласно задаче а) $\frac{x}{y} = 1$, т. е. $x = y$.

в) Составим таблицу

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, p-1,$$
$$0^3,\ 1^3,\ 2^3,\ 3^3, \ldots, (p-1)^3,$$

выписывая в верхней строчке все p чисел из p-арифметики и подписывая под каждым из них его куб. На основании доказанного в задаче б) нижняя строчка состоит из p *различных* чисел, следовательно, в ней содержатся *все* числа из p-арифметики. Но это и значит, что из любого числа p-арифметики извлекается кубический корень.

86. Из равенства $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ следует, что или

$$x - 1 = 0$$

или

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$x_1 = 1,$$

из второго

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}. \tag{1}$$

В 103-арифметике $-3 = 100$ и $\sqrt{-3} = \pm 10$. Подставляя эти значения $\sqrt{-3}$ в формулу (1), получаем

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 56, \quad x_3 = 46.$$

87. Всякое значение корня кубического из единицы удовлетворяет уравнению $x^3 - 1 = 0$, и, стало быть, если оно не равно единице, то удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 + x + 1 = 0$. В зависимости от того, извлекается или не извлекается в p-арифметике $\sqrt{-3}$, последнее уравнение либо имеет два различных корня, вычисляемых по формуле (1) решения задачи 86, либо не имеет корней в p-арифметике.

Исключениями являются случаи 2- и 3-арифметики. В 2-арифметике теряет смысл формула (1), в 3-арифметике $-3=0$, уравнение $x^2+x+1=0$ имеет только один корень и этот корень равен 1.

88. Пусть $p>3$ и пусть существует целое число a такое, что a^2+3 делится на p. Если остаток от деления a на p равен b, то в смысле p-арифметики

$$b^2+3=0$$

или

$$b^2=-3.$$

Значит, в p-арифметике извлекается $\sqrt{-3}$. На основании задачи 87 заключаем отсюда, что $\sqrt[3]{1}$ имеет три различных значения. В силу задачи 85 p не может иметь вида $3k+2$ и, стало быть, имеет вид $3k+1$.

89. Уравнение 1-й степени $ax+b=0$ имеет только один корень $x=-\frac{b}{a}$.

Пусть наша теорема доказана для многочленов n-й степени. Докажем, что она верна для многочленов $(n+1)$-й степени. Предположим противное. Пусть многочлен $(n+1)$-й степени

$$a_0x^{n+1}+a_1x^n+\ldots+a_nx+a_{n+1} \quad (a_0\neq 0) \qquad (1)$$

имеет по крайней мере $n+2$ корня $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}$. Образуем многочлен

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}). \qquad (2)$$

У этого многочлена коэффициент при x^{n+1} равен a_0, поэтому у разности

$$a_0x^{n+1}+a_1x^n+\ldots+a_{n+1}-\\ -a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}) \qquad (3)$$

член с x^{n+1} отсутствует вовсе и многочлен (3) является многочленом n-й степени. Но он имеет своими корнями $n+1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Так как, по предположению, теорема доказана для многочленов n-й степени, то все коэффициенты многочлена (3) равны нулю. Но они суть разности соответствующих коэффициентов многочленов (1) и (2); поэтому все коэффициенты многочлена (1) равны коэффициентам многочлена (2), т. е. многочлены (1) и (2) совпадают. Но тогда (2) должен обращаться в нуль при $x=x_{n+2}$:

$$a_0(x_{n+2}-x_1)(x_{n+2}-x_2)\ldots(x_{n+2}-x_{n+1})=0,$$

что невозможно, так как

$$a_0\neq 0,\ x_{n+2}-x_1\neq 0,\ \ldots,\ x_{n+2}-x_{n+1}\neq 0.$$

Теорема верна для $n=1$, по доказанному она верна и для степени $1+1=2$, для степени $2+1=3$ и т. д. для всех вообще степеней.

Приведенное доказательство одинаково пригодно как для обычной арифметики, так и для p-арифметики.

90. Пусть остаток от деления k на $p-1$ есть r:

$$k=q(p-1)+r,\quad r<p-1.$$

Тогда для всех x

$$x^{p-1}=1,$$

$$x^{q(p-1)}=1, \tag{1}$$

$$x^k=x^{q(p-1)+r}=1, \tag{2}$$

откуда, поделив (2) на (1), получим для любого x

$$x^r=1.$$

Если $r>0$, то у многочлена x^r-1 не все коэффициенты нули. В то же время число его корней $p-1>r$ ($x=1, 2, \ldots$ $\ldots, p-1$), что противоречит утверждению задачи 89.

91. Имеем

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2=a^{p-1}=1$$

(задача 71), поэтому $a^{\frac{p-1}{2}}=\pm 1$. Если $\sqrt{a}$ извлекается, т. е. существует b такое, что $b^2=a$, то $a^{\frac{p-1}{2}}=b^{p-1}=1$. Итак, если $\sqrt{a}$ извлекается, то a есть корень уравнения

$$x^{\frac{p-1}{2}}=1. \tag{1}$$

У этого уравнения не более $\frac{p-1}{2}$ корней (задача 89). С другой стороны, отличных от нуля чисел, из которых извлекается квадратный корень, ровно $\frac{p-1}{2}$ (задача 79) и все они удовлетворяют уравнению (1). Поэтому уравнению (1) удовлетворяют *только* те числа, из которых извлекается квадратный корень. Для остальных чисел остается только одна возможность $a^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

92. Доказательство этой теоремы содержится в решении задачи 89. Для полноты изложения мы повторим здесь наши рассуждения. Многочлен

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n -$$
$$- a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

является многочленом $(n-1)$-й степени, имеющим n корней, поэтому все его коэффициенты — нули и коэффициенты многочленов $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и $a_0(x - x_1) \times (x - x_2)\ldots(x - x_n)$ совпадают.

93. Многочлен $x^{p-1} - 1$ имеет $p-1$ корней: $1, 2, 3, \ldots, p-1$. В силу задачи 92

$$x^{p-1} - 1 = (x-1)(x-2)\ldots[x-(p-1)].$$

Полагая в этом тождестве $x = 0$, имеем

$$-1 = (-1)(-2)\ldots[-(p-1)] =$$
$$= (-1)^{p-1}\,1\cdot 2\ldots(p-1) = 1\cdot 2\ldots(p-1).$$

94. а)
$$\begin{array}{r|l} -\,37233 & 189 \\ \underline{1323} & \overline{197} \\ -\,3591 & \\ \underline{1701} & \\ -\,189 & \\ \underline{189} & \\ 0 & \end{array}$$

$37233 : 189 = 197$

15 Зак. 3398. Е. Дынкин и В. Успенский

б) Сокращаем делимое и делитель на 8:

$36408 : 328 = 4551 : 41$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,4551 & 41 \\
\underline{41} & \overline{111} \\
-\,451 & \\
\underline{41} & \\
-\,41 & \\
\underline{41} & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad 36408 : 328 = 111
$$

в) Сокращаем делимое и делитель на 2:

$851 : 74 = 425{,}5 : 37$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,425{,}5 & 37 \\
\underline{18{,}5} & \overline{11{,}5} \\
-\,407 & \\
\underline{37} & \\
-\,37 & \\
\underline{37} & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad 851 : 74 = 11{,}5
$$

95. $1:3 = (6)\,7$, $1:7 = (285714)\,3$, $1:9 = (8)\,9$ (период заключен в скобки).

96. а) Обозначим через x_n n-е число таблицы. Мы имеем $x_1 = 5$, $x_2 = 5^2$, $x_3 = x_2^2 = 5^{2^2}, \ldots, x_n = 5^{2^{n-1}}$. Разложим разность $x_{n+1} - x_n$ на множители:

$$x_{n+1} - x_n = 5^{2^n} - 5^{2^{n-1}} = 5^{2^{n-1}}\left(5^{2^{n-1}} - 1\right) =$$
$$= 5^{2^{n-1}}\left(5^{2^{n-2}} + 1\right)\left(5^{2^{n-3}} + 1\right)\left(5^{2^{n-4}} + 1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(5^2 + 1\right)(5 + 1)(5 - 1).$$

Все множители, кроме первого, являются четными числами и так как их n, то произведение делится на 2^n. С другой стороны, первый множитель делится на 5^n, ибо $2^{n-1} \geqslant n$ при $n \geqslant 1$. Итак, $x_{n+1} - x_n$ делится на 10^n или, что то же самое, у чисел x_{n+1} и x_n совпадают последние n цифр.

Сотрем теперь ту часть таблицы, которая расположена выше главной диагонали, обведенной рамкой. В силу доказанного в оставшейся части таблицы каждый столбец состоит из одинаковых цифр. Отсюда видно, что последние n цифр числа x_n совпадают с последними n цифрами диагонального числа $d = \ldots 90625$, или, иными словами, $d - x_n = a_n 10^n$, где a_n — некоторые бесконечнозначные числа. Из последнего равенства выводим

$$d = x_n + a_n 10^n,$$
$$d^2 = x_n^2 + 2x_n a_n 10^n + a_n^2 10^{2n}.$$

Используя равенства $x_n^2 = x_{n+1}$ и $d = x_{n+1} + a_{n+1} 10^{n+1}$, находим

$$d^2 - d = (x_n^2 + 2x_n a_n 10^n + a_n^2 10^{2n}) - (x_{n+1} + a_{n+1} 10^{n+1}) =$$
$$= 10^n (2x_n a_n + a_n^2 10^n - a_{n+1} 10).$$

Следовательно, у чисел d^2 и d совпадают последние n цифр. Поскольку n — совершенно произвольное натуральное число, то у d^2 и d совпадают все цифры, т. е. $d^2 = d$.

б) Докажем теперь, что $e^2 = e$. В самом деле,

$$e^2 = (1-d)^2 = 1 - 2d + d^2 = 1 - 2d + d = 1 - d = e.$$

в) Наконец,

$$de = d(1-d) = d - d^2 = 0.$$

Таким образом, в арифметике бесконечнозначных чисел перемножение двух чисел, отличных от нуля, может давать нуль. Эта особенность отличает арифметику бесконечнозначных чисел от обычной арифметики и роднит ее с 10-арифметикой.

97. Допустим противное и рассмотрим произведение xde. Из равенства $xd = 1$ следует $xde = 1 \cdot e = e$. Из равенства $de = 0$ следует $xde = x \cdot 0 = 0$. Мы пришли к противоречию, ибо $e \neq 0$.

98. Число x, равное своему квадрату, должно быть целым. В самом деле, если x содержит k десятичных знаков после запятой, причем последний из них не нуль, то x^2 имеет после запятой $2k$ десятичных знаков и снова последний из них отличен от нуля. Поэтому, если $x^2 = x$, то $2k = k$, т. е. $k = 0$. Далее, число x, равное своему квадрату, должно оканчиваться на одну из цифр 0, 1, 5 или 6:

в противном случае числа x и x^2 оканчивались бы на разные цифры. Пусть

$$x^2 = x \quad \text{и} \quad y = 1 - x.$$

Тогда $y^2 = y$. Действительно,

$$y^2 = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x = 1 - x = y.$$

При этом если x оканчивается цифрами 0 или 5, то y оканчивается цифрами 1 или 6, и обратно. Поэтому достаточно найти все числа, равные своему квадрату и оканчивающиеся цифрами 0 или 5. Пусть a и b — два различных числа, оканчивающихся оба нулем или цифрой 5. Тогда сумма $a+b$ оканчивается нулем. Мы имеем

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

и поэтому разность $a^2 - b^2$ имеет на конце большее число нулей, чем разность $a - b$. Следовательно, $a^2 - b^2 \neq a - b$ и, значит, либо $a^2 \neq a$, либо $b^2 \neq b$. Тем самым доказано, что среди чисел, равных своему квадрату, существует не более одного числа, оканчивающегося цифрой нуль, и не более одного, оканчивающегося цифрой 5. Мы знаем, что такими числами являются 0 и $d = \ldots 90625$.

99. Пусть $a = \ldots a_3a_2a_1$. Последняя цифра произведения определяется произведением последних цифр сомножителей, поэтому последняя цифра числа a^{p-1} есть a_1^{p-1} (в p-арифметическом смысле). Но в p-арифметике $a_1^{p-1} = 1$ (задача 71). Следовательно, последняя цифра числа $a^{p-1} - 1$ есть 0.

100. Докажем это по индукции. Случай $k = 1$ разобран в предыдущей задаче. Пусть теорема доказана для $k = l$. Докажем ее для $k = l + 1$. Обозначив $a^{p^{l-1}(p-1)}$ через y, имеем

$$x^{p^l(p-1)} - 1 = y^p - 1^p = (y-1)(y^{p-1} + y^{p-2} + \ldots + y + 1).$$

Поскольку $y - 1$, по предположению индукции, оканчивается l нулями, достаточно показать, что $y^{p-1} + y^{p-2} + \ldots$ $\ldots + 1$ оканчивается цифрой 0. Последняя цифра y

есть 1; поэтому у всех чисел $y^2, y^3, \ldots, y^{p-1}$ последняя цифра тоже единица. Отсюда следует, что у числа

$$y^{p-1}+y^{p-2}+\ldots+y+1=\\ =\underbrace{\ldots 1+\ldots 1+\ldots+\ldots 1+\ldots 1}_{p \text{ раз}}$$

последняя цифра 0.

Замечание. Применяя результат этой задачи к конечнозначным числам, мы получаем следующую теорему из обычной арифметики: если целое число a не делится на простое число p, то $a^{p^{k-1}(p-1)}-1$ делится на p^k. Обобщением этой теоремы является следующая.

Теорема Эйлера. *Если a взаимно просто с m, то $a^{\varphi(m)}-1$ делится на m.*

Здесь $\varphi(m)$ — число чисел, меньших m и взаимно простых с m. Например, $\varphi(10)=4$ (среди чисел, меньших 10, взаимно просты с 10 числа 1, 3, 7, 9). Предоставляем читателю проверить, что

$$\varphi(p)=p-1, \quad \varphi(p^k)=p^{k-1}(p-1).$$

Теорема Эйлера справедлива не только для конечнозначных, но и для бесконечнозначных чисел.

101. Общий вид n-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_0q^n$. Поэтому

$$b_{n+p^{k-1}(p-1)}=b_0q^{n+p^{k-1}(p-1)}=b_nq^{p^{k-1}(p-1)}.$$

Но из задачи 100 следует, что последние k цифр числа $q^{p^{k-1}(p-1)}$ суть $000\ldots001$. Отсюда у b_n и $b_nq^{p^{k-1}(p-1)}=b_{n+p^{k-1}(p-1)}$ последние k цифр совпадают.

102. Решается совершенно так же, как и задача 78 с заменой выражения «p-арифметика» выражением «арифметика p-адических чисел».

103. Решается так же, как и задача 81 с заменой выражения «p-арифметика» выражением «арифметика p-адических чисел».

104. Если число имеет k значащих цифр после запятой, то его квадрат имеет после запятой $2k$ значащих цифр.

105. Пусть a оканчивается цифрой a_1 и пусть последняя цифра числа $b=\sqrt{a}$ есть b_1. Тогда $b_1^2=a_1$ в p-арифметике.

106. В самом деле,

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}201\\201\end{array}\\ \hline 201\\ 000\;\\ 1102\;\;\\ \hline 111101 \end{array}$$

Последние три цифры у чисел 111101 и ... 112101 совпадают.

107. Обозначим буквой u'_n выражение $a_{n-1}u_0 + a_nu_1$. Последовательность $u'_0, u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$ является рядом Фибоначчи. В самом деле,

$$u'_{n-2} + u'_{n-1} = (a_{n-3}u_0 + a_{n-2}u_1) + (a_{n-2}u_0 + a_{n-1}u_1) =$$
$$= (a_{n-3} + a_{n-2})\, u_0 + (a_{n-2} + a_{n-1})\, u_1 = a_{n-1}u_0 + a_nu_1 = u'_n.$$

Заметим далее, что

$$u'_0 = a_{-1}u_0 + a_0u_1 = u_0, \quad u'_1 = a_0u_0 + a_1u_1 = u_1$$

и, следовательно, у последовательностей $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ и $u'_0, u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$ совпадают первые два члена. Поскольку каждая из этих последовательностей является рядом Фибоначчи, они совпадают целиком, т. е. при любом n

$$u_n = u'_n = a_{n-1}u_0 + a_nu_1.$$

108. Достаточно применить формулу задачи 107 к ряду Фибоначчи

$$a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+(n-1)}, \ldots,$$

в котором $u_n = a_{m+(n-1)}$.

109. Если в формуле, выведенной в предыдущей задаче, положить $m = n$, то получится

$$a_{2n-1} = a^2_{n-1} + a^2_n.$$

110. Положим

$$u_{n-1}u_{n+1} - u^2_n = d_n.$$

Имеем

$$d_{n+1}=u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2=u_n(u_n+u_{n+1})-u_{n+1}^2=$$
$$=u_n^2+u_nu_{n+1}-u_{n+1}^2=u_n^2-u_{n+1}(-u_n+u_{n+1})=$$
$$=u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=-d_n.$$

Отсюда вытекает, что

$$d_n=-d_{n-1}=(-1)^2d_{n-2}=(-1)^3d_{n-3}=\ldots$$
$$\ldots=(-1)^{n-1}d_1=(-1)^{n-1}(u_0u_2-u_1^2). \qquad (1)$$

Поскольку $a_0a_2-a_1^2=-1$, то $a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2=(-1)^n$.

111. Заметим, что

$$u_{n-1}u_{n+2}-u_nu_{n+1}=u_{n-1}u_n+u_{n-1}u_{n+1}-u_nu_{n+1}=$$
$$=u_{n-1}u_{n+1}-u_n(u_{n+1}-u_{n-1})=u_{n-1}u_{n+1}-u_n^2=$$
$$=(-1)^{n-1}(u_0u_2-u_1^2), \qquad (1)$$

откуда

$$|u_{n-1}u_{n+2}-u_nu_{n+1}|=|u_0u_2-u_1^2|.$$

Для ряда Φ^0

$$a_{n-1}a_{n+2}-a_na_{n+1}=(-1)^{n-1}(a_0a_2-a_1^2)=$$
$$=(-1)^{n-1}(0\cdot 1-1)=(-1)^n.$$

112. Последние цифры ряда Фибоначчи Φ^0 сами образуют ряд Фибоначчи в смысле 10-арифметики (ряд Φ^0_{10}).

Выпишем члены этого ряда:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7,
0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9,
0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3,
0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1,
0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Замечаем, что $c_{60}=0$, $c_{61}=1$. Следовательно, если отбросить в ряде начальные 60 членов ($c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{59}$), то останется ряд Фибоначчи, начинающийся числами 0, 1, т. е. снова ряд Φ^0_{10}. Значит, $c_{62}=c_2$, $c_{63}=c_3$, $\ldots$, $c_{60+k}=c_k$, $\ldots$, т. е. ряд Φ^0_{10} является периодическим и длина периода равна 60.

113. Пусть $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ — какой-нибудь m-арифметический ряд Фибоначчи. Мы докажем, что для некоторого r имеют место равенства $v_r = v_0$, $v_{r+1} = v_1$, после чего периодичность ряда $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ устанавливается совершенно аналогично тому, как в предыдущей задаче доказывалась периодичность ряда Φ_{10}^0 (причем длина периода равна r).

В m-арифметике всего m элементов. Из них можно составить только m^2 различных пар. Поэтому среди m^2+1 пар (v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), $\ldots$, (v_{m^2}, v_{m^2+1}) непременно встретятся две одинаковые. Пусть это будут k-я и l-я пары ($k < l \leqslant m^2+1$), т. е. пусть

$$v_k = v_l, \tag{1}$$

$$v_{k-1} = v_{l-1}. \tag{2}$$

Вычтем равенство (2) из равенства (1). Мы получим

$$v_{k-2} = v_{l-2}. \tag{3}$$

Вычитая (3) из (2), найдем

$$v_{k-3} = v_{l-3}.$$

Повторяя подобные вычитания, мы придем, наконец, к равенствам

$$v_1 = v_{l-k+1},$$
$$v_0 = v_{l-k}.$$

Если положить в этих равенствах $l-k=r$, то мы получим

$$v_1 = v_{r+1},$$
$$v_0 = v_r.$$

Так как $l \leqslant m^2+1$, а $k \geqslant 1$, то $r \leqslant m^2$.

114. Остатки от деления чисел ряда Φ^0 на m образуют m-арифметический ряд Фибоначчи. Согласно задаче 113 этот ряд периодический. Следовательно, число 0, являющееся его первым членом, повторяется в нем бесконечное число раз.

115. Приводим в качестве примера ряд $\breve{\Phi}_{11}^0$ (рис. 141).

116. Обозначим элемент ряда, равный нулю, буквой v_0 и занумеруем остальные члены, как показано на рис. 142.

Убедимся, что выполняются равенства

$$\begin{aligned}
v_0 + v_0 \quad &= 0,\\
v_1 - v_{-1} &= 0,\\
v_2 + v_{-2} &= 0,\\
v_3 - v_{-3} &= 0,\\
v_4 + v_{-4} &= 0,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

Первое из этих равенств очевидно, второе следует из того, что

$$v_1 = v_{-1} + v_0 = v_{-1} + 0 = v_{-1}.$$

Складывая эти первые два равенства и принимая во внимание, что

$$v_0 + v_1 = v_2, \quad v_0 - v_{-1} = v_{-2},$$

получим третье равенство. Складывая второе и третье, полу-

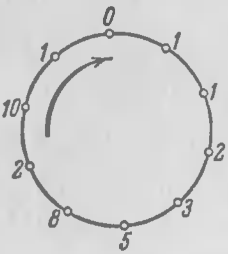


Рис. 141.

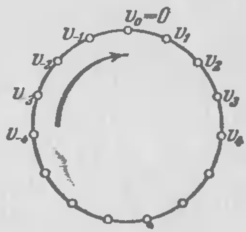


Рис. 142.

чим четвертое и т. д. Доказанные равенства можно объединить следующей общей формулой:

$$v_n + (-1)^n v_{-n} = 0.$$

117. Число $y = 0$ находится на одинаковом расстоянии от x и z. Поэтому на основании задачи 116 либо $x + z = 0$, либо $x - z = 0$. Так как $x = 0$, то в обоих случаях $z = 0$,

118. Нули разбивают круговой ряд $\breve{\Phi}_m$ на несколько дуг. Выберем среди этих дуг наименьшую (если таких несколько, то возьмем любую из них) и обозначим через x и y элементы ряда (равные нулю), стоящие на ее концах.

Выберем элемент z таким образом, чтобы дуга $\overset{\smile}{yz}$ была равна дуге $\overset{\smile}{xy}$. Тогда (см. задачу 117) $z=0$. Далее, откладываем в направлении по часовой стрелке дуги $\overset{\smile}{zu}$, $\overset{\smile}{uv}$ и т. д., каждая из которых равна $\overset{\smile}{xy}$. Ясно, что $u=v=\ldots$ $\ldots=0$. Обойдя один раз всю окружность, мы неизбежно попадем либо внутрь дуги $\overset{\smile}{xy}$, либо на ее конец x. Однако внутри дуги $\overset{\smile}{xy}$ нулей не содержится. Поэтому мы можем попасть только на конец x. Таким образом, нули x, y, z, u, v, ... разделили круговой ряд на равные части. Поскольку расстояние между двумя нулями не может оказаться меньшим, чем дуга $\overset{\smile}{xy}$, то никаких других нулей, кроме построенных нами x, y, z, u, v, ..., ряд Φ_m не имеет.

119. Ряд Φ_m^0 является рядом остатков от деления чисел ряда Φ^0 на m, вследствие чего нулям ряда Φ_m^0 соответствуют в ряде Φ^0 числа, делящиеся на m, и обратно. Ряду Φ_m^0 отвечает круговой ряд $\breve{\Phi}_m^0$, представляющий его период. Поэтому утверждение задачи следует из задачи 118.

120. Если круговой ряд $\breve{\Phi}_m$ содержит нуль и состоит из нечетного числа членов, то в нем найдется пара соседних элементов x, y, расположенных на одинаковых расстояниях от нуля (рис. 143). Согласно задаче 116 либо

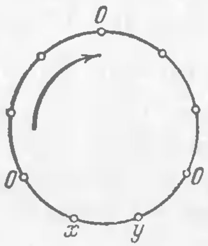


Рис. 143.

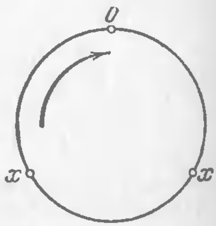


Рис. 144.

$x+y=0$, либо $x-y=0$ и, значит, один из элементов ряда, примыкающих к паре x, y, равен нулю. В силу задачи 117 равен нулю и второй элемент, примыкающий к этой паре. Отсюда следует, что $x=y$, и поскольку искомый ряд является рядом без повторений, то он имеет вид, изображенный на рис. 144.

121. Предположим, что круговой ряд содержит по меньшей мере три различных нуля. Выделим три каких-нибудь последовательных нуля и занумеруем их 0_1, 0_2, 0_3 в порядке следования по часовой стрелке. Элементы ряда, предшествующие 0_1, 0_2, 0_3, обозначим, соответственно, через u_1, u_2, u_3, а элементы, непосредственно следующие за 0_1, 0_2, 0_3, обозначим через v_1, v_2, v_3 (рис. 145). Очевидно, что $u_1=v_1$, $u_2=v_2$, $u_3=v_3$. Поскольку элементы u_1 и v_3 находятся на одинаковых расстояниях от элемента 0_2, то в силу задачи 116 имеет место $u_1+v_3=0$ или $u_1-v_3=0$. Из равенства $u_1=v_3$ следовали бы равенства $u_1=v_1=u_3=v_3$, что невозможно, ибо рассматриваемый ряд не содержит повторений. Следовательно, имеют место равенство $u_1=-v_3$ и вытекающее из него равенство

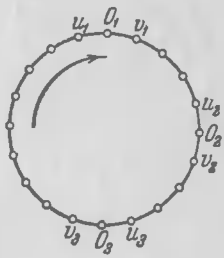


Рис. 145.

$$u_3=-u_1. \tag{1}$$

Докажем теперь, что если круговой ряд $\breve{\Phi}_m$ содержит ровно три нуля, то он является рядом с повторениями. Действительно, в рассматриваемом случае нули разбивают ряд на три равные дуги, и, подобно тому как было выведено равенство

$$u_3=-u_1,$$

можно вывести также равенства

$$u_1=-u_2,\quad u_2=-u_3.$$

Из этих трех равенств вытекает, что $u_1=u_2=u_3$, и значит, рассматриваемый ряд является рядом с повторениями.

Предположим теперь, что ряд содержит пять различных нулей, и докажем, что и в этом случае он непременно содержит повторения. Занумеруем пять каких-нибудь последовательных нулей в порядке их следования: 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5, а предшествующие им элементы — буквами u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 (рис. 146).

Применяя формулу (1) к различным тройкам последовательных нулей, выделяемым из 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5, получим равенства

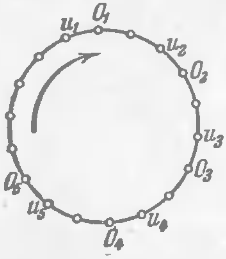


Рис. 146.

$$u_3 = -u_1, \quad u_4 = -u_2, \quad u_5 = -u_3,$$

откуда $u_5 = u_1$, и следовательно, ряд содержит повторения.

122. а) Геометрическая прогрессия с начальным членом b и знаменателем q имеет вид

$$\left.\begin{array}{c} b,\ bq,\ bq^2,\ bq^3,\ \ldots,\ bq^{n-1}, \\ bq^n,\ bq^{n+1},\ \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Для того чтобы эта последовательность являлась рядом Фибоначчи, необходимо и достаточно, чтобы для всех n выполнялось соотношение

$$bq^{n-1} + bq^n = bq^{n+1}.$$

Это соотношение по сокращении на bq^{n-1} приводится к виду

$$1 + q = q^2 \quad \text{или} \quad q^2 - q - 1 = 0. \qquad (2)$$

Решаем полученное квадратное уравнение относительно q:

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,{}^{1)}. \qquad (3)$$

В 11-арифметике $\sqrt{5} = \pm 4$. Следовательно,

$$q_1 = \frac{1+4}{2} = 8; \quad q_2 = \frac{1-4}{2} = 4.$$

Подставляя найденные значения q в формулу (1), получим два семейства геометрических прогрессий, являющихся в то же время рядами Фибоначчи:

1) b, $8b$, $9b$, $6b$, $4b$, $10b$, $3b$, $2b$, $5b$, $7b$, b, ...

2) b, $4b$, $5b$, $9b$, $3b$, b, $4b$, $5b$, $9b$, $3b$, b, ...

---

[1]) См. формулу (3) в решении задачи 81; напомним, что она не имеет смысла в 2-арифметике.

б) В 7-арифметике $\sqrt{5}$ не извлекается, поэтому уравнение (3) не имеет решений. Следовательно, в 7-арифметике не существует геометрических прогрессий, которые являлись бы в то же время рядами Фибоначчи.

123. В предыдущей задаче были найдены все 11-арифметические последовательности, являющиеся одновременно геометрическими прогрессиями и рядами Фибоначчи. Было установлено, что все такие последовательности распадаются на два семейства. Возьмем теперь из первого семейства последовательность с начальным членом x и из второго семейства последовательность с начальным членом y и сложим их почленно. Мы получим последовательность

$$x+y,\ 8x+4y,\ 9x+5y,\ 6x+9y,\ 4x+3y,\ 10x+y,$$
$$3x+4y,\ 2x+5y,\ 5x+9y,\ 7x+3y,\ x+y, \ldots, \qquad (1)$$

которая, как легко видеть, снова является рядом Фибоначчи. Подберем теперь x и y так, чтобы первый член этой последовательности был равен нулю, а второй единице. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=0, \\ 8x+4y=1, \end{cases}$$

находим

$$x= \quad \frac{1}{4}=3,$$
$$y= \ -3=8.$$

Таким образом, искомое разложение ряда Фибоначчи дается формулами

$$c_0=0=3+8, \quad c_1=1=3\cdot 8+8\cdot 4,$$
$$c_2=1=3\cdot 8^2+8\cdot 4^2, \ldots, \quad c_n=3\cdot 8^n+8\cdot 4^n, \ldots$$

124. Повторяем в общем виде те рассуждения, которые уже проводились для частного случая при решении задач 122—123. Знаменатель q геометрической прогрессии, являющийся рядом Фибоначчи, должен удовлетворять квадратному уравнению $q^2-q-1=0$ (см. формулу (2) в решении задачи 122).

а) Если $\sqrt{5}$ не извлекается, то уравнение (2) не имеет решений, и это показывает невозможность построения интересующей нас прогрессии.

б) Если $\sqrt{5}$ извлекается, то уравнение (2) дает два значения для q и каждому из этих значений соответствует семейство геометрических прогрессий, являющихся рядами Фибоначчи:

$$1)\ b,\ bq_1,\quad bq_1^2,\quad bq_1^3, \ldots,\quad bq_1^n, \ldots,$$

$$2)\ b,\ bq_2,\quad bq_2^2,\quad bq_2^3, \ldots,\quad bq_2^n, \ldots$$

Последовательность

$$x+y,\ xq_1+yq_2,\ xq_1^2+yq_2^2,\ xq_1^3+yq_2^3, \ldots,\ xq_1^n+yq_2^n, \ldots \quad (1)$$

снова является рядом Фибоначчи. Для того чтобы произвольный ряд Фибоначчи

$$v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n, \ldots \quad (2)$$

представить в виде (1), достаточно подобрать x и y так, чтобы у рядов (1) и (2) совпадали два начальных члена. Последнее сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x+y = v_0, \\ xq_1+yq_2 = v_1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$x = \frac{v_1 - v_0 q_2}{q_1 - q_2}, \quad y = \frac{v_0 q_1 - v_1}{q_1 - q_2}\ ^{1)}. \quad (3)$$

Итак, разложение произвольного ряда Фибоначчи в сумму двух геометрических прогрессий дается формулой

$$v_n = xq_1^n + yq_2^n, \quad (4)$$

где q_1 и q_2 — корни уравнения $q^2 - q - 1 = 0$, а x и y вычисляются по формулам (3).

---

[1]) Формулы (3) теряют смысл, если $q_1 = q_2$. Для того чтобы имел место этот особый случай, необходимо, чтобы обращался в нуль дискриминант уравнения $q^2 - q - 1 = 0$. Но этот дискриминант равен 5 и может обратиться в нуль только в случае 5-арифметики, между тем случай 5-арифметики был заранее исключен нами из рассмотрения.

125. Согласно задаче 71 в p-арифметике $a^{p-1}=1$ для любого $a\neq 0$. В частности, $q_1^{p-1}=1$ и $q_2^{p-1}=1$ и из формулы (4) решения задачи 124 следует

$$v_{p-1}=xq_1^{p-1}+yq_2^{p-1}=x+y=v_0,$$

$$v_p=xq_1^p+yq_2^p=xq_1+yq_2=v_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_{k+p-1}=xq_1^{k+p-1}+yq_2^{k+p-1}=xq_1^k+yq_2^k=v_k.$$

126. Выберем какой-нибудь элемент кругового ряда Фибоначчи в качестве отправного пункта и будем двигаться по часовой стрелке, проходя неограниченное число раз окружность, по которой выписан наш ряд. Будем выписывать в строчку элементы нашего ряда в том порядке, в каком они проходятся нами. Мы получим бесконечную периодическую последовательность $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$, являющуюся рядом Фибоначчи Φ_p. Согласно предыдущей задаче $v_{p-1}=v_0$, $v_p=v_1$. Поскольку исходный круговой ряд является рядом без повторений, в нем не может встретиться дважды одна и та же пара соседних элементов. Поэтому равные пары (v_0, v_1) и (v_{p-1}, v_p) отвечают одной и той же паре кругового ряда. Следовательно, состоящий из $(p-1)$-го элемента отрезок $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{p-2}$ ряда Φ_p отвечает пробегу по круговому ряду, состоящему из целого числа оборотов. Отсюда вытекает, что число элементов кругового ряда является делителем числа $p-1$.

127. В качестве примера приводим первые 15 членов ряда Φ_{11}^0 и ряда отношений для Φ_{11}^0.

Ряд Φ_{11}^0	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...
Ряд отношений для Φ_{11}^0	∞, 1, 2, 7, 9, 6, 3, 5, 10, 0, ∞, 1, 2, 7, 9, ...

128. а) Числа ряда Фибоначчи связаны соотношением

$$v_n=v_{n-1}+v_{n-2}.$$

Разделим это соотношение на v_{n-1}:

$$\frac{v_n}{v_{n-1}}=1+\frac{v_{n-2}}{v_{n-1}}.$$

Заменяя $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ на t_n и $\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}$ на t_{n-1}, получим формулу

$$t_n=1+\frac{1}{t_{n-1}}. \tag{1}$$

В ряде $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ встречается не более чем $p+1$ различных элементов: p чисел из p-арифметики и символ ∞. Поэтому среди элементов этого ряда непременно имеются равные. Из всех пар равных элементов выберем пару элементов, стоящих в рассматриваемом ряде всего ближе друг к другу. Пусть это будут элементы t_k и t_{r+k}. Тогда любые r элементов ряда $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, идущих подряд, попарно различны между собой. Для того чтобы полностью решить задачу, остается показать, что для любого значения n имеет место равенство

$$t_n=t_{r+n}.$$

Нам уже известно, что это равенство выполняется при $n=k$:

$$t_k=t_{r+k}. \tag{2}$$

Докажем теперь равенства

$$t_{k+1}=t_{r+k+1}, \tag{3}$$
$$t_{k+2}=t_{r+k+2}, \tag{4}$$
$$t_{k+3}=t_{r+k+3}, \tag{5}$$
$$\cdots\cdots$$

Воспользуемся для этой цели формулой (1). В силу этой формулы

$$t_{k+1}=1+\frac{1}{t_k}, \qquad t_{r+k+1}=1+\frac{1}{t_{r+k}},$$

и, стало быть, равенство (3) вытекает из равенства (2). Точно так же выводятся (4) из (3), (5) из (4) и т. д. Остается убедиться в справедливости равенств

$$t_{k-1}=t_{r+k-1}, \tag{6}$$

$$t_{k-2}=t_{r+k-2}, \tag{7}$$

$$\cdots\cdots$$

$$t_1=t_{r+1}. \tag{8}$$

Разрешим относительно t_{n-1} соотношение (1):

$$t_{n-1}=\frac{1}{t_n-1}.$$

С помощью полученной формулы последовательно выводим (6) из (2), (7) из (6) и т. д. совершенно аналогично тому, как с помощью формулы (1) выводились равенства (3), (4), (5), ...

б) Построим ряд отношений для ряда Φ_p^0. Ряд Φ_p^0 начинается элементами 0 и 1. Поэтому его ряд отношений начинается элементом ∞. Согласно задаче а) символ ∞ повторяется в ряде отношений бесконечное множество раз и притом через равные промежутки. Как легко видеть, элементам ряда отношений, равным ∞, соответствуют элементы ряда Φ_p^0, равные нулю, а этим последним отвечают элементы ряда Φ^0, кратные p.

129. Прежде всего сделаем два замечания:

1) Если ряды отношений

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ \ldots \tag{1}$$

и

$$t_1',\ t_2',\ \ldots,\ t_n',\ \ldots \tag{1'}$$

имеют одинаковые начальные члены, то они совпадают, т. е. при любом n $t_n=t_n'$. Это следует из формулы, выведенной в задаче 128 а).

2) Если в произвольном ряде отношений $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ldots$ отбросить конечное число начальных членов, то получится ряд $t_m,\ t_{m+1},\ t_{m+2},\ \ldots,\ t_n,\ \ldots,$ состоящий из тех же элементов, что и первоначальный ряд. Действительно, согласно задаче 128 а) всякий элемент, входящий в ряд $t_1,\ t_2,\ \ldots$ $\ldots,\ t_n,\ \ldots,$ повторяется в этом ряде бесконечное число раз и, следовательно, непременно встречается в ряде $t_m,\ t_{m+1},$ $t_{m+2},\ \ldots,\ t_n,\ \ldots$ Обратное очевидно.

Предположим теперь, что нам заданы два произвольных ряда отношений (1) и (1′) и при этом известно, что некоторый элемент t_m ряда (1) равен некоторому элементу t'_n ряда (1′). Рассмотрим ряды

$$t_m,\ t_{m+1},\ t_{m+2},\ \ldots \tag{2}$$

и

$$t'_n,\ t'_{n+1},\ t'_{n+2},\ \ldots \tag{2'}$$

Ряды (2) и (2′) имеют равные начальные члены и в силу замечания 1) совпадают. Вместе с тем в силу замечания 2) ряд (2) состоит из тех же элементов, что и ряд (1), а ряд (2′) состоит из тех же элементов, что и ряд (1′). Следовательно, ряды (1) и (1′) составлены из одинаковых элементов.

130. Формула задачи 107 может быть переписана для p-арифметических рядов в виде

$$v_n = c_{n-1}v_0 + c_n v_1$$

(см. замечание на стр. 82). Используя эту формулу, выводим

$$t_{r+1} = \frac{v_{r+1}}{v_r} = \frac{c_r v_0 + c_{r+1}v_1}{c_{r-1}v_0 + c_r v_1}.$$

Заменим c_{r+1} равной ему суммой $c_{r-1} + c_r$ и разделим числитель и знаменатель преобразованной дроби на $v_0 c_{r-1}$:

$$t_{r+1} = \frac{\frac{c_r}{c_{r-1}} + \left(1 + \frac{c_r}{c_{r-1}}\right)\frac{v_1}{v_0}}{1 + \frac{c_r}{c_{r-1}}\frac{v_1}{v_0}}.$$

Если принять во внимание, что $\frac{c_r}{c_{r-1}} = \bar{t}_r$ и $\frac{v_1}{v_0} = t_1$, то получится интересующая нас формула

$$t_{r+1} = \frac{\bar{t}_r + (1 + \bar{t}_r)\,t_1}{1 + \bar{t}_r t_1}. \tag{1}$$

Из равенства (1) вытекает, что:

1) если $\bar{t}_r = 0$, то $t_{r+1} = t_1$;

2) если $t_{r+1} = t_1$, то $\bar{t}_r(t_1^2 - t_1 - 1) = 0$ и, значит, либо $\bar{t}_r = 0$, либо $t_1^2 - t_1 - 1 = 0$.

Пусть теперь r обозначает длину периода ряда $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{t}_n, \ldots$ и пусть t_1 не является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Мы имеем $\bar{t}_{r+1} = \bar{t}_1 = \infty$ и из формулы $\bar{t}_{r+1} = 1 + \frac{1}{\bar{t}_r}$ (см. задачу 128) вытекает, что $\bar{t}_r = 0$. Согласно той же задаче 128 элементы $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_r$ попарно различны и, в частности, элементы $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{r-1}$ отличны от $\bar{t}_r = 0$. В силу 1) из равенства $\bar{t}_r = 0$ следует равенство $t_{r+1} = t_1$. При этом все элементы $t_2, t_3, \ldots, t_r$ отличны от t_1, ибо из равенства $t_1 = t_{s+1} (s < r)$ следовало бы (в силу 2)) равенство $\bar{t}_s = 0$, которое в действительности не имеет места. Тем самым установлено, что длина периода ряда $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, так же как и длина периода ряда $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n, \ldots$, равна r.

131. а) Рассмотрим сначала случай, когда $\sqrt{5}$ не извлекается в p-арифметике. В такой арифметике уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ не имеет ни одного решения, и согласно задаче 130 все ряды отношений, построенные для любых p-арифметических рядов Фибоначчи, имеют периоды одинаковой длины r. Элементы, составляющие период ряда отношений, попарно различны (в силу задачи 128 а)). Поэтому в каждый ряд отношений входит ровно r различных элементов. Обозначим буквой R_1 ряд отношений, соответствующий ряду Фибоначчи Φ_p^0, начинающемуся числами 0, 1. Первым элементом ряда R_1 является символ ∞. Общее число элементов, которые могут встретиться в ряде отношений, равно $p+1$ (символ ∞ и p чисел из p-арифметики). Если все эти элементы вошли в ряд R_1, то $r = p+1$, и доказательство закончено. Если это не так, то возьмем какое-нибудь число a, не входящее в ряд R_1. Рассмотрим ряд Фибоначчи $1, a, \ldots$ Его ряд отношений (мы назовем его рядом R_2) начинается элементом a. В силу задачи 129 ряды R_1 и R_2 не имеют общих элементов. Если некоторые числа из p-арифметики не вошли ни в один из этих рядов, то мы берем какое-нибудь из них b и строим ряд Фибоначчи $1, b, \ldots$ Его ряд отношений (мы обозначаем этот ряд через R_3) начинается элементом b и, следовательно, не имеет общих элементов ни с R_1, ни с R_2. Если рядами R_1, R_2, R_3 еще не исчерпаны все элементы $0,\ 1, \ldots,\ p-1,\ \infty$, то мы строим четвертый ряд R_4 и т. д. до тех пор, пока не построим систему рядов $R_1,\ R_2, \ldots,\ R_k$, исчерпывающую вèсь запас возможных элементов. Никакие два из построенных рядов не имеют общих элементов. Каждый из них содержит ровно r различных элементов. Отсюда вытекает, что $p+1=kr$, и этим доказательство заканчивается.

Остается рассмотреть второй случай, когда в p-арифметике $\sqrt{5}$ извлекается. В такой арифметике уравнение $x^2-x-1=0$ имеет два решения $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Если $p \neq 5$, то эти решения различны. Из соотношения $\alpha^2-\alpha-1=0$ следует

$$\alpha^2=\alpha+1.$$

Разделив это равенство на α, получим

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}. \tag{1}$$

Вспомним теперь формулу задачи 128 а), позволяющую последовательно вычислять члены ряда отношений, и сопоставим ее с формулой (1). Мы видим, что ряд отношений, начинающийся элементом α, имеет вид

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha, \ldots \tag{2}$$

Точно так же ряд отношений, начинающийся элементом β, имеет вид

$$\beta,\ \beta,\ \beta, \ldots \tag{3}$$

Согласно задаче 130 все остальные ряды отношений имеют периоды одинаковой длины r. Повторяя рассуждения, которые уже однажды проводились, мы строим систему рядов отношений $R_1,\ R_2, \ldots, R_k$, отличных от рядов (2) и (3), попарно не имеющих общих элементов и исчерпывающих в совокупности весь запас элементов $0,\ 1, \ldots,\ p-1$ и ∞ (без α и β). Отсюда вытекает равенство $(p+1)-2=kr$ или $p-1=kr$, т. е. r является делителем $p-1$.

б) Остатки от деления на p членов данного ряда образуют p-арифметический ряд Фибоначчи

$$c_0=0,\ c_1=1,\ c_2=1, \ldots \tag{4}$$

Построим для ряда (4) его ряд отношений

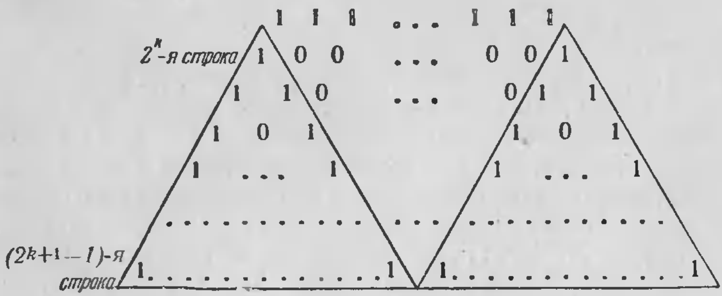
$$\overline{t}_1=\frac{c_1}{c_0}=\infty, \ldots, \overline{t}_n=\frac{c_n}{c_{n-1}}. \qquad (5)$$

Допустим сначала, что $\sqrt{5}$ не извлекается в p-арифметике. Тогда в силу задачи а) длина периода ряда (5) является делителем $p+1$. Поэтому $\overline{t}_{p+2}=\overline{t}_{1+(p+1)}=\overline{t}_1=\infty$, откуда $\frac{c_{p+2}}{c_{p+1}}=\infty$ и, значит, $c_{p+1}=0$. Это означает, что a_{p+1} делится на p. Случай, когда в p-арифметике $\sqrt{5}$ извлекается, рассматривается аналогично.

132. Часть 2-арифметического треугольника, состоящая из его первых девяти строк (считая и нулевую), имеет вид

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 0 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\\
1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\\
1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1
\end{array}$$

Здесь в строках 2-й, 4-й, 8-й, и только в них, все члены (кроме крайних) нули. Пусть наше утверждение выполнено вплоть до 2^k-й строки (в таком случае (2^k-1)-я строка состоит сплошь из единиц). Покажем, что оно будет выполнено и дальше, т. е. что первой следующей строкой, в которой все члены, за исключением крайних, будут нули, является строка с номером 2^{k+1}



Все доказательство содержится в приведенной схеме. Рекомендуем читателю внимательно рассмотреть ее, прежде чем обратиться к приводимому ниже подробному доказательству.

Два крайних члена 2^k-й строки порождают каждый по новому 2-арифметическому треугольнику Паскаля, совершенно такому же, как и наш основной треугольник (новые треугольники получаются из основного параллельным переносом). Эти новые треугольники (на схеме они обведены) продолжаются вниз до тех пор, пока, наконец, их основания не сомкнутся. Это произойдет на некоторой строке с номером 2^k+h, состоящей из двух половин: h-х строк двух новых треугольников.

В (2^k+h)-й строке треугольника Паскаля 2^k+h+1 членов. В каждой из h-х строк новых треугольников по $h+1$ члену. Поэтому

$$2^k+h+1=2(h+1), \quad h=2^k-1.$$

Итак, смыкаются (2^k-1)-е строки новых треугольников. Но (2^k-1)-я строка нового треугольника совпадает с (2^k-1)-й строкой основного треугольника, которая в силу нашего индуктивного предположения состоит из одних единиц. Строка с номером

$$2^k+2^k-1=2^{k+1}-1$$

первоначального треугольника состоит также поэтому из одних единиц. Следовательно, следующая 2^{k+1}-я строка состоит из одних нулей (кроме крайних членов).

Вместе с тем до того, как новые треугольники сомкнутся, т. е. до 2^{k+1}-й строки, внутри любой строки первоначального треугольника будет находиться 1 (например, крайний член соответствующей строки одного из новых треугольников).

133. Треугольники Δ_n^0, $\Delta_n^1, \ldots, \Delta_n^k, \ldots, \Delta_n^n$ заполняют n-ю *полосу*. Для первых полос наше утверждение проверяется непосредственно. Пусть оно верно вплоть до n-й полосы, покажем, что оно будет выполняться и дальше.

Доказательство основывается на следующей л е м м е: пусть в треугольнике Паскаля выделены две группы чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и $b_1, b_2, \ldots, b_r$, каждая из которых занимает без пропусков часть некоторой строки. Тогда, если эти группы отличаются друг от друга лишь множителем, т. е. $b_1 = ca_1$, $b_2 = ca_2, \ldots, b_r = ca_r$, то и треугольники $a_1 a_r a$ и $b_1 b_r b$ (рис. 147), порожденные ими, отличаются друг от друга тем же множителем. Лемма эта совершенно очевидна и вытекает непосредственно из процесса образования треугольника Паскаля.

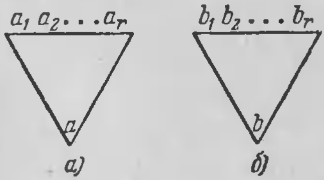


Рис. 147.

Рассмотрим треугольник Δ_n^k (рис. 148). Так как, по предположению, наша теорема верна для n-й полосы, то $\Delta_n^k = P_n^k \cdot \Delta_0^0$ и, в частности, последняя строка этого треугольника получается из последней строки треугольника Δ_0^0 умножением на P_n^k. В силу леммы треугольник DEF отличается от треугольника ABC тем же множителем; но ABC состоит из одних нулей, поэтому и DEF также состоит из одних нулей.

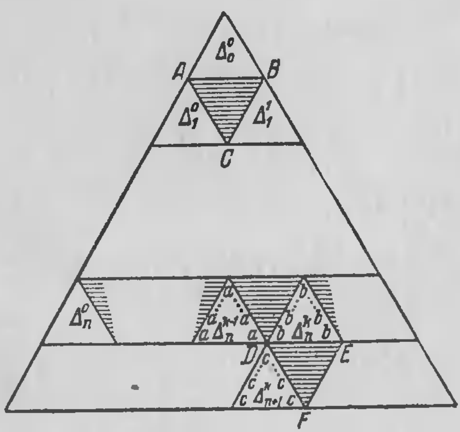


Рис. 148.

Далее, из рис. 148 видно, что если треугольники Δ_n^{k-1} и Δ_n^k порождаются соответственно числами a и b, а треугольник Δ_{n+1}^k — числом c, то $c = a + b$, поэтому и $\Delta_{n+1}^k = \Delta_n^{k-1} + \Delta_n^k$. Кроме того, так как, по предположению,

$a = P_n^{k-1} \cdot 1 = P_n^{k-1}$, $b = P_n^k \cdot 1 = P_n^k$, то

$$c = P_n^{k-1} + P_n^k = P_{n+1}^k \quad \text{и} \quad \Delta_{n+1}^k = P_{n+1}^k \Delta_0^0.$$

Задача, таким образом, решена полностью.

134. На основании предыдущей задачи строка с номером s^2 — первая строка s-й полосы — содержит верхние вершины треугольников $\Delta_s^0, \Delta_s^1, \ldots, \Delta_s^s$; все остальные члены этой строки — нули. Но $\Delta_s^k = P_s^k \Delta_0^0$, поэтому вершинами треугольников Δ_s^k являются числа $P_s^0, P_s^1, \ldots, P_s^{s-1}, P_s^s$. По условию $P_s^1 = P_s^2 = \ldots = P_s^{s-1} = 0$.

Точно так же, зная, что все внутренние члены строки с номером s^2 суть нули, мы можем доказать наше утверждение для строки с номером s^3 и т. д.

135. Проведем доказательство методом индукции:

$$\text{для } n = 0 \quad (1+x)^0 = 1 = C_0^0,$$

$$\text{для } n = 1 \quad (1+x)^1 = 1 + x = C_1^0 + C_1^1 x,$$

$$\text{для } n = 2 \quad (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = C_2^0 + C_2^1 x + C_2^2 x^2.$$

Пусть эта формула доказана до некоторого n. Докажем, что она верна для $n+1$. Имеем

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) =$$
$$= (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n)(1+x) =$$
$$= C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n +$$
$$+ C_n^0 x + C_n^1 x^2 + \ldots + C_n^{n-2} x^{n-1} + C_n^{n-1} x^n + C_n^n x^{n+1} =$$
$$= C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+1}^n x^n + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$$
$$(C_n^0 = C_n^n = 1 = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1}).$$

Мы знаем, что если в верном (в обычной арифметике) равенстве заменить все числа на их остатки от деления на m, то получится равенство, верное в m-арифметике. Так как P_n^k есть остаток от деления на m числа C_n^k, то из справедливости в обычной арифметике равенства

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

следует справедливость m-арифметического равенства

$$(1+x)^n = P_n^0 + P_n^1 x + P_n^2 x^2 + \ldots + P_n^n x^n.$$

136. На основании предыдущей задачи

$$(1+x)^p = 1 + P_p^1 x + P_p^2 x^2 + \ldots + P_p^{p-1} x^{p-1} + x^p.$$

С другой стороны, из задачи 71 следует, что в p-арифметике для любого x $x^p = x$, $(1+x)^p = 1 + x = 1 + x^p$. Поэтому

$$(1+x)^p - (1+x^p) = 0 = P_p^1 x + P_p^2 x^2 + \ldots + P_p^{p-1} x^{p-1}$$

для всех x. Многочлен $(p-1)$-й степени $P_p^1 x + P_p^2 x^2 + \ldots$ $\ldots + P_p^{p-1} x^{p-1}$ имеет p корней ($x = 0, 1, \ldots, p-1$); в силу задачи 89 все его коэффициенты равны нулю, т. е.

$$P_p^1 = P_p^2 = \ldots = P_p^{p-1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

137. Схема функции $\dfrac{4x+1}{2x+3}$ изображена на рис. 149. Она состоит из двух неподвижных точек и трех циклов.

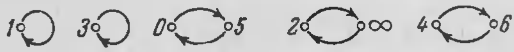


Рис. 149.

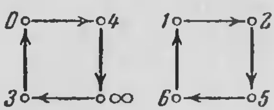


Рис. 150.

Схема функции $\dfrac{2x+1}{3x+2}$ (рис. 150) состоит из двух циклов и не имеет неподвижных точек.

Схема функций $\frac{3x-1}{x+1}$ (рис. 151) состоит из одной неподвижной точки и из одного цикла.

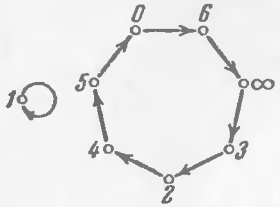


Рис. 151.

138. Схема для функции $f_{-1}(x)$ получается из схемы $f(x)$ заменой направлений всех стрелок на обратные. Поэтому утверждение задачи непосредственно вытекает из того, что в схеме любой дробно-линейной функции, в том числе $f_{-1}(x)$, от каждой точки отходит одна и только одна стрелка.

139. Решение этой задачи дословно повторяет решение задачи 71 а).

140. Пусть $n \neq \infty$ — неподвижная точка для дробно-линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$. Покажем, что тогда число n удовлетворяет уравнению

$$cx^2+(d-a)x-b=0. \qquad (1)$$

В самом деле,

$$\frac{an+b}{cn+d}=n, \quad an+b=cn^2+dn,$$

$$cn^2+(d-a)n-b=0.$$

Допустим, что $c \neq 0$. Тогда $f(\infty)=\frac{a}{c} \neq \infty$ и ∞ не является неподвижной точкой. Поэтому все неподвижные точки удовлетворяют уравнению (1). Но квадратное уравнение (1) при $c \neq 0$ может иметь не более двух корней (задача 81). В нашем же случае оно имеет по крайней мере три корня. Следовательно, случай $c \neq 0$ невозможен.

Итак, $c=0$. Точка ∞ является неподвижной: $f(\infty)= =\frac{a}{0}=\infty$. Остальные неподвижные точки (их по крайней мере две) должны удовлетворять уравнению (1), которое запишется в виде

$$(d-a)x-b=0. \qquad (2)$$

Но уравнение (2) при $d-a\neq 0$ имеет только один корень $x=\frac{b}{d-a}$. Поэтому $d-a=0$. Отсюда $b=0$, и наша функция имеет вид $\frac{ax}{a}=x$, т. е. оставляет на месте все точки.

141. Имеем

$$f(g(x))=\frac{\frac{4x+3}{6x+3}+5}{5\frac{4x+3}{6x+3}+1}=\frac{6x+4}{5x+4},$$

$$g(f(x))=\frac{4\frac{x+5}{5x+1}+3}{6\frac{x+5}{5x+1}+3}=\frac{5x+2}{5}=x+6.$$

142. Искомая функция $f(x)=\frac{x}{2}$. Найти ее можно следующим способом. Запишем $f(x)$ в общем виде

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

и подставим вместо x последовательно 0, 1, 4. Решая относительно a, b, c, d уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d}=0, \\ \dfrac{a\cdot 1+b}{c\cdot 1+d}=4, \\ \dfrac{a\cdot 4+b}{c\cdot 4+d}=2, \end{cases}$$

мы получим, что $b=d=0$, $c=2a$ и, следовательно, искомая функция имеет вид $f(x)=\frac{ax}{2ax}=\frac{x}{2}$.

143. Будем искать такую функцию. Она имеет вид

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Пусть никакая из точек x_1, x_2, x_3 не равна ∞. По условию

$$f(x_1)=0,\ f(x_3)=\infty,\quad \text{т. е.}\quad ax_1+b=0,\ cx_3+d=0.$$

Отсюда

$$b=-ax_1,\ d=-cx_3;\ ax+b=ax-ax_1=a(x-x_1),$$
$$cx+d=cx-cx_3=c(x-x_3).$$

Таким образом,

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(x-x_1)}{c(x-x_3)}.$$

Кроме того, $f(x_2)=1$:

$$\frac{a(x_2-x_1)}{c(x_2-x_3)}=1,\qquad \frac{a}{c}=\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1},$$

откуда

$$f(x)=\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x-x_3}=\frac{(x_2-x_3)x-x_1(x_2-x_3)}{(x_2-x_1)x-x_3(x_2-x_1)}.$$

В случае, если одна из точек x_1, x_2, x_3 есть ∞, искомая функция, как легко убедиться простой проверкой, будет иметь вид

$$\text{при}\quad x_1=\infty\quad f(x)=\frac{x_2-x_3}{x-x_3},$$

$$\text{при}\quad x_2=\infty\quad f(x)=\frac{x-x_1}{x-x_3},$$

$$\text{при}\quad x_3=\infty\quad f(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

144. В силу задачи 143 существует функция $f(x)$ такая, что $f(y_1)=0$, $f(y_2)=1$, $f(y_3)=\infty$. Дробно-линейная функция $f_{-1}(x)$ отвечает нашим требованиям

$$f_{-1}(0)=y_1,\quad f_{-1}(1)=y_2,\quad f_{-1}(\infty)=y_3.$$

145. Пусть $f(x)$ переводит x_1, x_2, x_3 в 0, 1, ∞, а $\varphi(x)$ переводит 0, 1, ∞ в y_1, y_2, y_3 (такие дробно-линейные функции существуют на основании задач 143 и 144). Образуем функцию $\varphi(f(x))$. Легко видеть, что эта функция переводит x_1, x_2, x_3 соответственно в y_1, y_2, y_3.

Пусть две дробно-линейные функции $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям

$$g(x_1)=y_1, \quad g(x_2)=y_2, \quad g(x_3)=y_3;$$
$$h(x_1)=y_1, \quad h(x_2)=y_2, \quad h(x_3)=y_3.$$

Наша цель — показать, что $h(x)$ и $g(x)$ совпадают. Имеем

$$g_{-1}(y_1)=x_1, \qquad g_{-1}(y_2)=x_2, \qquad g_{-1}(y_3)=x_3;$$
$$g_{-1}(h(x_1))=x_1, \; g_{-1}(h(x_2))=x_2, \; g_{-1}(h(x_3))=x_3.$$

Функция $g_{-1}(h(x))$ оставляет на месте три точки; в силу задачи 140 она оставляет на месте все точки, т. е. равенство $g_{-1}(h(n))=n$ справедливо для любого n. Но если $g_{-1}(x)$ переводит $m=h(n)$ в n, то $g(x)$ переводит n в $m=h(n)$, т. е. $g(n)=h(n)$ для всех n, что и требовалось доказать.

146. Фиксируем какую-нибудь тройку различных точек, например 0, 1, ∞. Каждая дробно-линейная функция переводит эту тройку точек в некоторую другую тройку различных точек y_1, y_2, y_3. Обратно, для каждой тройки различных точек y_1, y_2, y_3 можно подобрать и притом единственную дробно-линейную функцию, переводящую в эту тройку 0, 1, ∞. Поэтому различных p-арифметических дробно-линейных функций столько же, сколько троек различных точек в нашей p-арифметике, расширенной символом ∞ (тройки, отличающиеся порядком, следует считать различными). За y_1 мы можем принять любую из $p+1$ точек 0, 1, ..., $p-1$, ∞, за y_2 — любую из p оставшихся и, наконец, в качестве y_3 мы можем взять любую из $p-1$ еще не выбранных точек. Всего, таким образом, будет $(p+1)p(p-1)$ комбинаций, т. е. различных троек точек. Столько же будет и p-арифметических дробно-линейных функций.

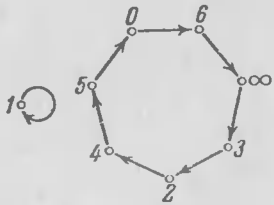


Рис. 152.

147. На рис. 152 дана схема функции $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$.

Схемы функций $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ построены соответственно на рис. 153, 154, 155.

148. При применении функции $f_k(x)$ точка x_0 делает k шагов по своему циклу и так как k делится на s, обходит его целое число раз, т. е. возвращается на свое место: $f_k(x_0)=x_0$.

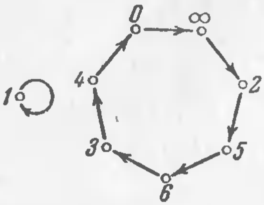


Рис. 153.

Обратно, если, сделав k шагов, точка очутилась на прежнем месте, то это значит, что она целое число раз обошла свой цикл, т. е. k делится на s.

149. Пусть n — неподвижная точка для $f_k(x)$, не являющаяся неподвижной точкой для $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, т. е. $f_k(n)=n$, $f(n)\neq n$. Если $f_k(n)=n$, то все точки того цикла $f(x)$, к которому принадлежит n, неподвижны для $f_k(x)$. Это сразу

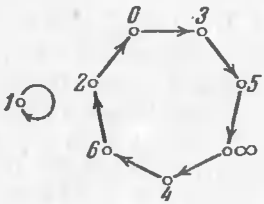


Рис. 154.

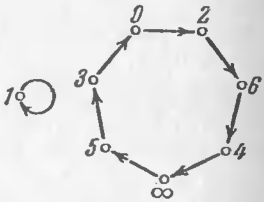


Рис. 155.

вытекает из задачи 148. Отсюда в силу задачи 140 следует, что если длина этого цикла больше двух, то $f_k(x)$ оставляет на месте все точки. Совершенно аналогично исчерпывается случай, когда длина указанного цикла равна 2, но у функции $f(x)$ имеется хотя бы одна неподвижная точка.

Остается рассмотреть случай, когда $f(x)$ имеет цикл длины 2 и не имеет неподвижных точек. Вычислим функцию $f_2(x)$:

$$f_2(x)=\frac{(a^2+bc)\,x+ab+bd}{(ac+cd)\,x+bc+d^2}.$$

Точки нашего цикла неподвижны для $f_2(x)$. По крайней мере одна из них не равна ∞; эта точка удовлетворяет уравнению (см. решение задачи 140)

$$(ac+cd)x^2+(bc+d^2-a^2-bc)x-(ab+bd)=0,$$

$$c(a+d)x^2+(d-a)(d+a)x-b(a+d)=0,$$

$$[cx^2+(d-a)x-b](a+d)=0. \quad (1)$$

Если $a+d\neq 0$, то $cx^2+(d-a)x-b=0$, но это означает (см. решение задачи 140), что x является неподвижной точкой для $f(x)$ в противоречие нашему предположению, что $f(x)$ не имеет неподвижных точек. Поэтому $a+d=0$. Но тогда все числа удовлетворяют уравнению (1), т. е. все точки неподвижны для $f_2(x)$: $f_2(x_0)=x_0$ при любом x_0. В силу задачи 148 все циклы имеют длину 2 (ведь циклов длины 1, т. е. неподвижных точек, нет).

В частности, неподвижная точка функции $f_k(x)$ также принадлежит циклу длины 2 и, согласно задаче 148, k четно. Поскольку длина любого цикла делит k, имеем: $f_k(n)=n$ для произвольного n, что и требовалось доказать.

150. Отбросим неподвижные точки и среди оставшихся циклов рассмотрим цикл наименьшей длины r. Точки этого цикла являются неподвижными для функции $f_r(x)$. Поэтому в силу задачи 149 $f_r(x)$ оставляет неподвижными все точки.

Возьмем теперь любой цикл, отличный от неподвижной точки; пусть длина его равна s. Функция $f_r(x)$ оставляет на месте каждую его точку, следовательно (задача 148), r делится на s. Так как $r\leqslant s$, то $r=s$. Итак, длина любого цикла есть r.

151. Если отбросить тот мало интересный случай, когда все точки $f(x)$ неподвижны (в этом случае $x_{p+1}=x_p=x_{p-1}=x_0$), то у функции $f(x)$ могут быть или ни одной, или одна, или две неподвижные точки (задача 140). Остальные точки распределены по циклам равной длины (задача 150); длина каждого цикла является соответственно делителем числа $p+1$, p или $p-1$. В первом случае $x_{p+1}=x_0$, во втором $x_p=x_0$, в третьем $x_{p-1}=x_0$ (задача 148). Какой из этих вариантов имеет место, зависит от числа неподвижных точек. Если $c\neq 0$, то ∞ не является неподвижной точкой и число неподвижных точек совпадает с числом корней уравнения задачи 140:

$$cx^2+(d-a)x-b=0.$$

На основании задачи 81 это квадратное уравнение не имеет ни одного корня, если корень из его дискриминанта $(a-d)^2+4bc$ не извлекается, один корень, если его дискриминант равен нулю, и два корня, если его дискриминант не равен нулю, но квадратный корень из него извлекается. Случай $c=0$ предоставляем разобрать читателю самостоятельно.

Замечание. Последовательность отношений для ряда Фибоначчи (см. стр. 86) $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ является частным случаем общей последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ Здесь $t_n=1+\frac{1}{t_{n-1}}$, $f(t)=1+\frac{1}{t}=\frac{t+1}{t}$, $a=b=c=1$, $d=0$. Уравнение неподвижных точек

$$x^2-x-1=0.$$

Его дискриминант равен 5. Мы видим, что результаты задач 130 и 131 а) являются частным случаем общего результата для произвольной дробно-линейной функции.

152. $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$,

$$f_2(x)=\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}=\frac{-x-3}{x-1},$$

$$f_3(x)=\frac{\frac{-x-3}{x-1}-3}{\frac{-x-3}{x-1}+1}=x.$$

Функция $f_3(x)$ оставляет на месте все точки. В силу задачи 148 число 3 делится на длину любого цикла функции $f(x)$. Поэтому длина цикла может быть или 1, или 3. В то же время $f(x)$ не оставляет на месте всех точек: например, $f(\infty)=1$. Не все циклы поэтому имеют длину 1, т. е. существует цикл длины 3.

153. а) Рассмотрим p-арифметическую функцию

$$f(x)=\frac{x-3}{x+1}.$$

Здесь $(a-d)^2+4bc=(1-1)^2+4(-3)\cdot 1=4(-3)$. Пусть $\sqrt{-3}$ извлекается. Тогда и

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc}=\sqrt{4(-3)}=2\sqrt{-3}$$

извлекается. В силу задачи 151 $f_{p-1}(x_0)=x_0$ для всякого x_0, в том числе и для x_0, принадлежащего циклу длины 3 (такой цикл существует, как мы видели в задаче 152).

Поэтому (задача 148) $p-1$ делится на 3, $p-1=3k$, $p=3k+1$.

Пусть $\sqrt{-3}$ не извлекается. Тогда

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc}=2\sqrt{-3}$$

не извлекается и $f_{p+1}(x_0)=x_0$ для всякого x_0. Отсюда

$$p+1=3l, \quad p=3l-1\neq 3k+1.$$

б) Пусть p — простой делитель числа a^2+3 и пусть b — остаток от деления a на p. Тогда в p-арифметике $b^2+3=0$, $b^2=-3$, т. е. $\sqrt{-3}$ извлекается. Отсюда заключаем, что $p=3k+1$.

Пусть теперь $p=3k+1$. Тогда $\sqrt{-3}$ извлекается в p-арифметике, т. е. можно подобрать такое число a, что $a^2+3=0$ в p-арифметике. В обыкновенной арифметике это значит, что a^2+3 делится на p.

154. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; $\quad f_2(x)=\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\dfrac{x-1}{x+1}+1}=-\dfrac{1}{x}$;

$$f_3(x)=\frac{-\dfrac{1}{x}-1}{-\dfrac{1}{x}+1}=\frac{-x-1}{x-1}; \quad f_4(x)=\frac{\dfrac{-x-1}{x-1}-1}{\dfrac{-x-1}{x-1}+1}=x.$$

Функция $f_4(x)$ оставляет на месте все точки. В силу задачи 148 длины циклов $f(x)$ суть делители числа 4, т. е.

циклы могут иметь длину 1, 2 или 4. Не все циклы имеют длину 1, ибо не все точки неподвижны для $f(x)$:

$$f(0)=-1.$$

Если бы все циклы имели длину 1 или 2, то $f_2(x)$ оставляла бы на месте все точки. Но это не так:

$$f_2(0)=\infty.$$

Поэтому существует цикл длины 4.

155. а) Рассмотрим p-арифметическую функцию

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}.$$

Здесь $(a-d)^2+4bc=(1-1)^2+4(-1)\cdot 1=4(-1)$. Пусть $\sqrt{-1}$ извлекается. Тогда

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc}=\sqrt{4(-1)}=2\sqrt{-1}$$

извлекается. В силу задачи 151 $f_{p-1}(x_0)=x_0$ для всякого x_0, в том числе и для x_0, принадлежащего циклу длины 4 (такой цикл существует, как мы видели в задаче 154). Поэтому (задача 148) $p-1$ делится на 4, $p-1=4k$, $p=4k+1$.

Пусть $\sqrt{-1}$ не извлекается, тогда

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc}=2\sqrt{-1}$$

не извлекается и $f_{p+1}(x_0)=x_0$ для всякого x_0. Отсюда

$$p+1=4l,\quad p=4l-1\neq 4k+1.$$

б) Решение этой задачи есть дословное повторение решения задачи 80б).

156. Геометрическая прогрессия

$$b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots,\ bq^n,\ \ldots$$

является одновременно рядом Фибоначчи тогда и только тогда, когда ее знаменатель q удовлетворяет уравнению $q^2-q-1=0$ (см. решение задачи 122). Решая это квадратное уравнение (см. решение задачи 103), получаем

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Решение существует в том и только в том случае, если $\sqrt{5}$ извлекается в p-адической арифметике. Применим теорему, сформулированную на стр. 79. Из этой теоремы вытекает, что если p отлично от 2 и 5, то условие, чтобы $\sqrt{5}$[1]) извлекался в арифметике p-адических чисел, равносильно условию, чтобы $\sqrt{5}$ извлекался в p-арифметике. Если $\sqrt{5}$ извлекается, мы получаем два семейства p-адических рядов Фибоначчи, являющихся одновременно и геометрическими прогрессиями:

$$b,\quad bq_1,\quad bq_1^2,\ \ldots,\ bq_1^n,\ \ldots,$$

$$b,\quad bq_2,\quad bq_2^2,\ \ldots,\ bq_2^n,\ \ldots$$

157. Решение следует из задачи 156 (ср. с задачей 124).

158. Согласно предыдущей задаче ряд Фибоначчи u_0, u_1, u_2, $\ldots$, u_n, $\ldots$ можно представить в виде суммы двух геометрических прогрессий; поэтому решение следует из задачи 101.

159. Запишем ряд 0, 1, 1, 2, 3, ... в p-ичной системе счисления. На основании решения предыдущей задачи члены a_0 и $a_{p^{k-1}(p-1)}$ имеют одни и те же k последних цифр. Но у a_0 все цифры — нули ($a_0 = \ldots 000$). Следовательно, у $a_{p^{k-1}(p-1)}$ последние k цифр — нули. Это и означает, что $a_{p^{k-1}(p-1)}$ делится на p^k.

160. Проверим эту формулу для первых строк треугольника

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

$$C_1^0 = \frac{1!}{0!\,1!} = 1 \qquad C_1^1 = \frac{1!}{1!\,0!} = 1$$

$$C_2^0 = \frac{2!}{0!\,2!} = 1 \qquad C_2^1 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2 \qquad C_2^2 = \frac{2!}{2!\,0!} = 1.$$

Предположим теперь, что наша формула верна для n-й строки, и покажем, что она верна в таком случае и для $(n+1)$-й.

[1]) Быть может, лучше было бы писать $\sqrt{\ldots 005}$, чтобы не смешивать с $\sqrt{5}$, где 5 — элемент p-арифметики.

Выпишем n-ю и $(n+1)$-ю строки:

$$\begin{array}{ccccccccc} & C_n^0 & C_n^1 & \ldots & C_n^{k-1} & C_n^k & \ldots & C_n^n & \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \ldots & C_{n+1}^{k-1} & C_{n+1}^k & C_{n+1}^{k+1} & \ldots & C_{n+1}^{n+1} \end{array}$$

Воспользуемся соотношением

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k.$$

Так как, по предположению,

$$C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,[n-(k-1)]!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

то

$$C_{n+1}^k = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,[(n+1)-k]!}.$$

Наша формула верна для 0-й, 1-й, 2-й строк, следовательно, по доказанному она будет верна и для $2+1=3$-й строки, для $3+1=4$-й строки и т. д., т. е. верна для всех вообще строк. (Из доказанной формулы следует, между прочим, что $n!$ при любом $k<n$ делится на произведение $k!\,(n-k)!$.)

161. Имеем

$$C_{p-k-1}^k = \frac{(p-k-1)!}{k!\,(p-2k-1)!} =$$

$$= \frac{(p-k-1)\,(p-k-2)\ldots(p-2k)\,(p-2k-1)\ldots 1}{k!\,(p-2k-1)\,(p-2k-2)\ldots 1} =$$

$$= \frac{(p-k-1)\,(p-k-2)\ldots(p-2k)}{k!} =$$

$$= \frac{[p-(k+1)]\,[p-(k+2)]\ldots[p-2k]}{k!}.$$

Так как $k \leqslant \frac{p-1}{2} < p$, то $k!$ не делится на p, т. е. $k!$ не равно нулю в p-арифметике, и мы получаем p-арифметическое равенство

$$P_{p-k-1}^{k} = \frac{[-(k+1)][-(k+2)]\ldots[-2k]}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)\ldots 2k}{k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!\,k!} = (-1)^k P_{2k}^{k}.$$

162. $P_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$. Заметим, что

$$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n =$$
$$= 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\ldots(2\cdot n) =$$
$$= 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot 2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n =$$
$$= 2^n\cdot n!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1).$$

Поэтому

$$P_{2n}^{n} = 2^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}.$$

В то же время

$$1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1) = (-1)^n(-1)(-3)\ldots[-(2n-1)] =$$
$$= (-1)^n(p-1)(p-3)\ldots[p-(2n-1)] =$$
$$= (-1)^n 2^n \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-3}{2}\right)\ldots\left(\frac{p-2n+1}{2}\right) =$$
$$= (-1)^n 2^n \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{p-1}{2}-n+1\right) =$$
$$= (-1)^n 2^n \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{\left(\frac{p-1}{2}-n\right)!},$$

откуда

$$P_{2n}^{n} = (-1)^n 4^n \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{n!\left(\frac{p-1}{2}-n\right)!} = (-4)^n P_{\frac{p-1}{2}}^{n}.$$

163. В силу задачи 162

$$S=1+2q+\ldots+P_{2n}^{n}q^{n}+\ldots+P_{p-1}^{\frac{p-1}{2}}q^{\frac{p-1}{2}}=$$

$$=1-4P_{\frac{p-1}{2}}^{1}q+\ldots+(-4)^{n}P_{\frac{p-1}{2}}^{n}q^{n}+\ldots$$

$$\ldots+(-4)^{\frac{p-1}{2}}P_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}q^{\frac{p-1}{2}}=1+P_{\frac{p-1}{2}}^{1}(-4q)+\ldots$$

$$\ldots+P_{\frac{p-1}{2}}^{n}(-4q)^{n}+\ldots+P_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}(-4q)^{\frac{p-1}{2}}=(1-4q)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Если $q\neq\frac{1}{4}$, то $1-4q\neq0$ и $S^{2}=(1-4q)^{p-1}=1$ (задача 71), откуда $S=\pm1$. Если же $q=\frac{1}{4}$, то $1-4q=0$, $S=0$.

164. Из рис. 58 на стр. 104 видно, что $b_{n-1}+b_{n}=b_{n+1}$. Таким образом, числа b_n образуют какой-то ряд Фибоначчи. Но $b_1=1$, $b_2=1$, т. е. начальные члены у рядов Фибоначчи

$$\begin{matrix} a_1=1, & a_2=1, & a_3=2, \ldots, \\ b_1, & b_2, & b_3, \ldots, \end{matrix}$$

совпадают, следовательно, эти ряды совпадают целиком: $b_n=a_n$.

165. Мы знаем, что a_p есть сумма чисел, стоящих на p-й диагонали. Переходя к p-арифметике, имеем

$$c_p=P_{p-1}^{0}+P_{p-2}^{1}+\ldots+P_{p-1-k}^{k}+\ldots+P_{p-1-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}=$$

$$=P_{p-1}^{0}+P_{p-2}^{1}+\ldots+P_{p-1-k}^{k}+\ldots+P_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}$$

(здесь сумма обрывается: $P_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}$ — последнее число $\frac{p-1}{2}$-й строки). Но $P_{p-1-k}^{k}=(-1)^{k}P_{2k}^{k}$ (задача 161). Поэтому

$$c_p=P_{0}^{0}-P_{2}^{1}+\ldots+(-1)^{k}P_{2k}^{k}+\ldots+(-1)^{\frac{p-1}{2}}P_{p-1}^{\frac{p-1}{2}}.$$

Применяя формулу, выведенную при решении задачи 163, и учитывая, что в данном случае $q = -1$, получим $c_p = [1 - 4(-1)]^{\frac{p-1}{2}} = 5^{\frac{p-1}{2}}$.

166. Доказательство ведем по индукции. Для $n = 2$ все очевидно.

$$\begin{array}{ccc} d_0 & & d_1 \\ & d_0^{(1)} & \end{array}$$

$$d_0^{(1)} = d_0 + d_1 = C_1^0 d_0 + C_1^1 d_1.$$

Пусть наша теорема доказана для n чисел. Докажем ее для $n+1$ чисел. Рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
d_0 & & d_1 & & d_2 & & \ldots & & d_{n-2} & & d_{n-1} & & d_n \\
& d_0^{(1)} & & d_1^{(1)} & & & & & & d_{n-2}^{(1)} & & d_{n-1}^{(1)} & \\
& & d_0^{(2)} & & & & & & & & d_{n-2}^{(2)} & & \\
& & & & d_0^{(n-1)} & & & & d_1^{(n-1)} & & & & \\
& & & & & & d_0^{(n)} & & & & & &
\end{array}$$

По нашему индуктивному предположению

$$\begin{aligned} d_0^{(n-1)} &= C_{n-1}^0 d_0 + C_{n-1}^1 d_1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} d_{n-1}, \\ d_1^{(n-1)} &= \qquad\qquad C_{n-1}^0 d_1 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} d_{n-1} + C_{n-1}^{n-1} d_n; \end{aligned}$$

складывая эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} d_0^{(n)} &= d_0^{(n-1)} + d_1^{(n-1)} = \\ &= C_n^0 d_0 + C_n^1 d_1 + \ldots + C_n^{n-1} d_{n-1} + C_n^n d_n. \end{aligned}$$

167. Докажем, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$. Применим к таблице

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & & \ldots & & C_n^n \\
& C_{n+1}^1 & & C_{n+1}^2 & & \ldots & & C_{n+1}^n & \\
& & \ddots & & & & ⋰ & & \\
& & & & C_{2n}^n & & & &
\end{array}$$

результат задачи 166. Здесь

$$d_0 = C_n^0,\ d_1 = C_n^1,\ \ldots,\ d_n = C_n^n,\ d_0^{(n)} = C_{2n}^n.$$

Поэтому

$$C_{2n}^n = C_n^0 C_n^0 + C_n^1 C_n^1 + \ldots + C_n^n C_n^n = \\ = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

168. Напишем таблицу

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
v_k & & v_{k+1} & & v_{k+2} & & v_{k+3} & \ldots & v_{k+p-2} & & v_{k+p-1} & & v_{k+p} \\
& v_{k+2} & & v_{k+3} & & v_{k+4} & & \ldots & & v_{k+p} & & v_{k+p+1} & \\
& & v_{k+4} & & v_{k+5} & & & \ldots & & & v_{k+p+2} & & \\
& & & \ddots & & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\
& & & & & & v_{k+2p} & & & & & &
\end{array}$$

В ней под каждой парой соседних чисел стоит их сумма.

Применим результат задачи 167. Здесь

$$d_0 = v_k,\ d_1 = v_{k+1},\ \ldots,\ d_p = v_{k+p};\ d_0^{(p)} = v_{k+2p}.$$

В p-арифметике

$$v_{k+2p} = P_p^0 v_k + P_p^1 v_{k+1} + \ldots + P_p^p v_{k+p}.$$

Но $P_p^0 = P_p^p = 1$, $P_p^1 = P_p^2 = \ldots = P_p^{p-1} = 0$ (задача 136). Поэтому

$$v_{k+2p} = v_k + v_{k+p}.$$

169. Члены p-арифметического ряда Фибоначчи, номера которых делятся на p, образуют последовательность v_0, v_p, v_{2p}, ..., v_{np}, ... Полагая в формуле задачи 168 $k = (n-1)p$, получаем

$$v_{(n-1)p} + v_{np} = v_{(n+1)p}.$$

170. Нам нужно перемножить m скобок:

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{m \text{ раз}}.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов при a^m, очевидно, будет стоять коэффициент 1. Чтобы получить $a^{m-1}b$, надо в одной из скобок взять b, а в каждой из остальных скобок — a и перемножить все эти числа. Поэтому $a^{m-1}b$ войдет с коэффициентом m. Все же остальные члены будут содержать b в степени, не меньшей 2.

171. Для $l=1$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для $l=s$; докажем, что оно верно и для $l=s+1$. В задаче 108 полагаем $n=k$, $m=ks$. Имеем

$$a_{k(s+1)-1}=a_{k+ks-1}=a_{k-1}a_{ks-1}+a_k a_{ks}.$$

Так как a_k делится на d и $a_0=0$ делится на d, то в силу задачи 119 и a_{ks} делится на d. Поэтому произведение $a_k a_{ks}$ делится на d^2 и

$$a_{k(s+1)-1}=a_{k-1}a_{ks-1}+xd^2, \tag{1}$$

где x — целое число. По предположению,

$$a_{ks-1}=a_{k-1}^s+yd^2. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$a_{k(s+1)-1}=a_{k-1}a_{k-1}^s+d^2(ya_{k-1}+x)=a_{k-1}^{s+1}+zd^2,$$

т. е. $a_{k(s+1)-1}-a_{k-1}^{s+1}$ делится на d^2. Точно так же доказывается, что на d^2 делится $a_{kl+1}-a_{k+1}^l$.

172. По условию $a_k=xm^n$, где x — целое число. Отсюда

$$a_{k+1}=a_{k-1}+a_k=a_{k-1}+xm^n,\quad a_{k+1}^m=(a_{k-1}+xm^n)^m.$$

В силу задачи 170

$$\begin{aligned}(a_{k-1}+xm^n)^m&=a_{k-1}^m+ma_{k-1}^{m-1}xm^n+x^2m^{2n}S=\\&=a_{k-1}^m+m^{n+1}(a_{k-1}^{m-1}x+x^2m^{n-1}S).\end{aligned}$$

Поэтому $a_{k+1}^m-a_{k-1}^m$ делится на m^{n+1}.

173. В силу задачи 171 (полагая $d=m^n$)

$$a_{km+1}=a_{k+1}^m+xm^{2n},$$
$$a_{km-1}=a_{k-1}^m+ym^{2n}.$$

Согласно предыдущей задаче разность $a_{k+1}^m - a_{k-1}^m$ делится на m^{n+1}, следовательно, и разность $a_{km+1} - a_{km-1} = a_{km}$ делится на m^{n+1}.

174. Решение следует из предыдущей задачи. Если a_k делится на m, то a_{km} делится на m^2, но тогда a_{km^2} делится на m^3 и т. д., $a_{km^{n-1}}$ делится на m^n. В силу задачи 119, если $a_{km^{n-1}}$ делится на m^n, то и все члены $a_{km^{n-1}l}$ делятся на m^n.

175. Предположим, что $b \neq d$. Тогда

$$a - c = (d - b)\sqrt{5}, \quad \sqrt{5} = \frac{a-c}{d-b},$$

т. е. $\sqrt{5}$ равен некоторому рациональному числу, чего не может быть. Поэтому $b = d$, но тогда и $a = c$.

176. Имеем

$$(a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = ac + bc\sqrt{5} + ad\sqrt{5} + 5bd =$$
$$= (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}.$$

Второе утверждение задачи непосредственно вытекает из полученной формулы.

177. Пользуясь решением задачи 176, пишем

$$m + n\sqrt{5} = (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}.$$

В силу задачи 175 $m = ac + 5bd$, $n = ad + bc$. Поэтому

$$m - n\sqrt{5} = (ac + 5bd) - (ad + bc)\sqrt{5} =$$
$$= [ac + 5(-b)(-d)] + [a(-d) + (-b)c]\sqrt{5} =$$
$$= (a - b\sqrt{5})(c - d\sqrt{5}).$$

178. а) Если $a^2 - 5b^2 = 1$, то и $a^2 - 5(-b)^2 = 1$, т. е.

$$a + (-b)\sqrt{5} = a - b\sqrt{5}$$

— решение уравнения (1).

б) $$\frac{1}{a + b\sqrt{5}} = \frac{a - b\sqrt{5}}{(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5})} =$$
$$= \frac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2} = \frac{a - b\sqrt{5}}{1} = a - b\sqrt{5}.$$

179. а) Так как по условию

$$m+n\sqrt{5}=(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}),$$

то в силу задачи 177

$$m-n\sqrt{5}=(a-b\sqrt{5})(c-d\sqrt{5}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}m^2-5n^2&=(m+n\sqrt{5})(m-n\sqrt{5})=\\&=(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})=\\&=(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})=\\&=(a^2-5b^2)(c^2-5d^2)=1\cdot 1=1.\end{aligned}$$

б) $\dfrac{a+b\sqrt{5}}{c+d\sqrt{5}}=(a+b\sqrt{5})\dfrac{1}{c+d\sqrt{5}}=(a+b\sqrt{5})(c-d\sqrt{5}).$

На основании задачи 178а) $c-d\sqrt{5}$ — решение уравнения (1). Произведение $(a+b\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})$ представимо в виде $p+q\sqrt{5}$ (задача 176) и есть решение уравнения (1) (задача 179а)).

180. $9^2-5\cdot 4^2=1$ и, следовательно, $9+4\sqrt{5}$ — решение уравнения (1). В силу задачи 179а)

$$p_2+q_2\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})=(9+4\sqrt{5})^2$$

— также решение уравнения (1). Точно так же решениями будут

$$p_3+q_3\sqrt{5}=(p_2+q_2\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})=(9+4\sqrt{5})^3$$

и вообще

$$p_n+q_n\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^n$$

при любом натуральном n. Все эти решения различны, так как при $m\neq n$

$$(9+4\sqrt{5})^m\neq(9+4\sqrt{5})^n.$$

181. Не может быть, чтобы $a\geqslant c$ и $b\geqslant d$, так как тогда было бы

$$a+b\sqrt{5}\geqslant c+d\sqrt{5}.$$

Поэтому выполняется хотя бы одно из двух неравенств: $a < c$ или $b < d$. Покажем, что из выполнения одного из этих неравенств следует выполнение другого. Пусть $a < c$. Тогда $a^2 < c^2$ и

$$b^2 = \frac{a^2-1}{5} < \frac{c^2-1}{5} = d^2,$$

откуда (так как $b \geqslant 0$ и $d \geqslant 0$) $b < d$. Точно так же, если $b < d$, то

$$a^2 = 5b^2 + 1 < 5d^2 + 1 = c^2$$

и $a < c$.

182. а) Предположим, что $a < 0$. Тогда хотя бы одно из чисел $a + b\sqrt{5}$ и $a - b\sqrt{5}$ непременно отрицательно (хотя бы потому, что сумма их равна $2a$, т. е. отрицательна). В то же время их произведение $(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 = 1$ положительно. Поэтому они оба отрицательны в противоречии с тем, что $a + b\sqrt{5} > 0$.

б) Как только что показано, $a \geqslant 0$. Предположим, что $b \leqslant 0$. Тогда $-b \geqslant 0 \geqslant b$ и $a - b\sqrt{5} \geqslant a + b\sqrt{5} > 1$. Отсюда следует, что $1 = a^2 - 5b^2 = (a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) > 1 \cdot 1 = 1$, и мы приходим к противоречию.

183. Пусть такое решение существует. Из задачи 182 следует, что должно быть $a \geqslant 0$, $b > 0$. Поэтому в силу задачи 181 $a < 9$, $b < 4$. Итак, для b возможны только следующие значения: $b = 1, 2, 3$. Простой проверкой убеждаемся, что ни одно из чисел $1 + 5b^2$, где $b = 1, 2, 3$, не является полным квадратом; следовательно, число $a + \sqrt{5}b$, где $b = 1, 2, 3$, не может быть решением уравнения (1).

184. При $n = 0$ $(9 + 4\sqrt{5})^0 = 1 = 1 + 0\sqrt{5}$, при $n = 1$ $(9 + 4\sqrt{5})^1 = 9 + 4\sqrt{5}$, причем $1 + 0\sqrt{5}$ и $9 + 4\sqrt{5}$ суть решения уравнения (1). При $n \geqslant 2$ формула $(9 + 4\sqrt{5})^n$ дает произведение решений уравнения (1), т. е. снова решение $p + q\sqrt{5}$, причем $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ (задача 176).

Покажем теперь, что наша формула дает все целые решения $p + q\sqrt{5}$, у которых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Предположим противное. Пусть $p + q\sqrt{5}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, есть решение, не совпадающее ни с одним из членов последовательности

$$(9+4\sqrt{5})^0,\quad (9+4\sqrt{5})^1,\quad (9+4\sqrt{5})^2,\ \ldots,\ (9+4\sqrt{5})^n.$$

Не может быть, чтобы $p+q\sqrt{5}<(9+4\sqrt{5})^0=1+0\sqrt{5}$ (тогда в силу задачи 181 должно было бы быть $q<0$). Так как члены нашей последовательности неограниченно возрастают, то $p+q\sqrt{5}$ лежит между какими-то двумя ее членами, т. е. существует такой показатель $n\geqslant 0$, что

$$(9+4\sqrt{5})^n<p+q\sqrt{5}<(9+4\sqrt{5})^{n+1}.$$

Разделим это неравенство на $(9+4\sqrt{5})^n$:

$$1<\frac{p+q\sqrt{5}}{(9+4\sqrt{5})^n}<9+4\sqrt{5}.$$

Но $\dfrac{p+q\sqrt{5}}{(9+4\sqrt{5})^n}$ как частное от деления двух решений уравнения (1) есть снова решение уравнения (1). Таким образом, мы нашли решение уравнения (1), заключенное между 1 и $9+4\sqrt{5}$, что противоречит задаче 183.

185. Очевидно, что если $a+b\sqrt{5}$ — решение уравнения (1), то

$$a-b\sqrt{5},\quad -a+b\sqrt{5},\quad -a-b\sqrt{5}$$

— тоже решения уравнения (1). Из этих четырех чисел одно в силу задачи 184 представимо в виде $(9+4\sqrt{5})^n$. Тогда остальные три представимы в виде

$$(9+4\sqrt{5})^{-n}=\frac{1}{(9+4\sqrt{5})^n},\quad -(9+4\sqrt{5})^n,$$

$$-(9+4\sqrt{5})^{-n}.$$

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ (ЦЕПИ МАРКОВА)

186. Возможных исходов 7, из них благоприятствующих 3. Искомая условная вероятность равна поэтому $\frac{3}{7}$.

187. Вероятность того, что шесть очков не выпадет при однократном бросании равна $\frac{5}{6}$. Вероятность невыпадения шести очков при шести бросаниях равна по формуле (6) на стр. 126

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15\,625}{46\,656}\approx 0{,}34.$$

188. Обозначим искомую вероятность через x. Тогда вероятность отсутствия попадания при n выстрелах равна $1-x$, при одном выстреле она равна $1-p$ (свойство 3). Как и в предыдущей задаче, по формуле (6)

$$1-x=(1-p)^n,$$

откуда

$$x=1-(1-p)^n.$$

189. Обозначим:

вероятность события A: «выиграл начинающий» — через x,
вероятность события B: «выиграл второй игрок» — через y,
вероятность события C: «игра никогда не кончится» — через z.

События A, B, C попарно несовместны и образуют полную систему, поэтому

$$x+y+z=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)=1. \qquad (1)$$

Вероятность выигрыша второго игрока равна вероятности того, что в первый раз выпадет решетка (эта вероятность равна $^1/_2$), умноженной на вероятность выигрыша второго игрока при этом условии (свойство 6). Но тогда второй игрок становится начинающим, следовательно, эта условная вероятность равна x. Итак,

$$y = \frac{1}{2} x. \tag{2}$$

Вероятность выигрыша первого игрока находится по формуле полных вероятностей. Рассмотрим события:

D: «при первом бросании выпал герб»,

F: «при первом бросании выпала решетка».

События D и F несовместны и образуют полную систему; в силу свойства 7

$$x = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(A/D) + \mathrm{P}(F)\,\mathrm{P}(A/F).$$

Очевидно, $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(F) = {}^1/_2$, $\mathrm{P}(A/D) = 1$. Для вычисления $\mathrm{P}(A/F)$ заметим, что если при первом бросании выпала решетка и второй игрок становится начинающим, то первый игрок оказывается в положении второго и вероятность его выигрыша есть y. Поэтому

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} y. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), находим $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. Из соотношения (1) получаем $z = 0$.

То обстоятельство, что вероятность неограниченного продолжения игры без результата равна нулю, можно получить и непосредственным подсчетом (так же, как это было сделано для вероятности невыпадения шести очков при бросании игральной кости).

190. а) Обозначим через $p_{11}^{(n)}$ вероятность, выйдя из A, оказаться через n шагов в A и через $p_{12}^{(n)}$ вероятность, выйдя из A, оказаться через n шагов в B. Если частица выходит из точки A, то событие, состоящее в том, что через $n-1$ шагов она окажется в A, и событие, состоящее в том, что через $n-1$ шагов она окажется в B, образуют полную систему несовместных событий, поэтому, применяя свойство 7, имеем

$$p_{11}^{(n)} = p_{11}^{(n-1)} p_{11} + p_{12}^{(n-1)} p_{21}.$$

В то же время $p_{11}^{(n-1)}+p_{12}^{(n-1)}=1$ (свойство 3), откуда

$$p_{11}^{(n)}=p_{11}^{(n-1)}p_{11}+(1-p_{11}^{(n-1)})\,p_{21}=$$
$$=p_{11}^{(n-1)}p_{11}+p_{21}-p_{11}^{(n-1)}p_{21}=p_{21}+(p_{11}-p_{21})\,p_{11}^{(n-1)}.$$

Полагая $p_{11}-p_{21}=q$, имеем

$$p_{11}^{(n)}=p_{21}+qp_{11}^{(n-1)}=p_{21}+q\,(p_{21}+qp_{11}^{(n-2)})=$$
$$=p_{21}+qp_{21}+q^2p_{11}^{(n-2)}=p_{21}+qp_{21}+q^2\,(p_{21}+qp_{11}^{(n-3)})=$$
$$=p_{21}+qp_{21}+q^2p_{21}+q^3p_{11}^{(n-3)}=$$
$$=p_{21}+qp_{21}+q^2p_{21}+\ldots+q^{n-2}p_{21}+q^{n-1}p_{11}^{[n-(n-1)]}.$$

Но

$$p_{11}^{[n-(n-1)]}=p_{11}^{(1)}=p_{11},$$

откуда

$$p_{11}^{(n)}=p_{21}(1+q+q^2+\ldots+q^{n-2})+q^{n-1}p_{11}$$

или, суммируя по формуле геометрической прогрессии[1]),

$$p_{11}^{(n)}=p_{21}\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q}+q^{n-1}p_{11}=\frac{p_{21}}{1-q}+q^{n-1}\left(p_{11}-\frac{p_{21}}{1-q}\right).$$

Замечая, что $p_{11}+p_{12}=1$ (свойство 3), получаем

$$1-q=1-p_{11}+p_{21}=p_{12}+p_{21},$$

$$p_{11}^{(n)}=\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}+q^{n-1}\left(p_{11}-\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}\right)=$$
$$=\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}+q^{n-1}\,\frac{p_{12}p_{11}+p_{21}p_{11}-p_{21}}{p_{12}+p_{21}}=$$
$$=\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}+q^{n-1}\,\frac{p_{12}p_{11}-p_{21}\,(1-p_{11})}{p_{12}+p_{21}}=$$
$$=\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}+(p_{11}-p_{21})^{n-1}\,\frac{p_{12}p_{11}-p_{21}p_{12}}{p_{12}+p_{21}}=$$
$$=\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}+\frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}\,(p_{11}-p_{21})^n.$$

б) Чтобы вычислить вероятность $p_{21}^{(n)}$, выйдя из точки B, попасть через n шагов в A, вычислим сначала $p_{12}^{(n)}$. Эту

---

[1]) А. П. Киселев, Алгебра, ч. 2, изд. 23-е, Учпедгиз, М., 1946, стр. 75.

вероятность найдем по формуле

$$p_{12}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)} = 1 - \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} - \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}(p_{11}-p_{21})^n =$$

$$= \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} - \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}(p_{11}-p_{21})^n.$$

Вероятность $p_{21}^{(n)}$ получается из вероятности $p_{12}^{(n)}$, если мы поменяем местами обозначения точек A и B и, соответственно, заменим всюду в индексах 1 на 2 и 2 на 1. Поэтому

$$p_{21}^{(n)} = \frac{p_{21}}{p_{21}+p_{12}} - \frac{p_{21}}{p_{21}+p_{12}}(p_{22}-p_{12})^n.$$

Замечание. Вероятности $p_{11}^{(n)}$ и $p_{21}^{(n)}$ различаются на величину

$$p_{11}^{(n)} - p_{21}^{(n)} = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}(p_{11}-p_{21})^n + \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}(p_{22}-p_{12})^n. \quad (1)$$

За исключением вырожденных случаев

$$p_{11}=1, \quad p_{12}=0, \quad p_{21}=0, \quad p_{22}=1;$$
$$p_{11}=0, \quad p_{12}=1, \quad p_{21}=1, \quad p_{22}=0;$$

всегда

$$-1 < p_{11} - p_{21} < 1,$$
$$-1 < p_{22} - p_{12} < 1.$$

Поэтому с возрастанием n каждое из слагаемых правой части равенства (1) неограниченно уменьшается (по абсолютной величине) как член бесконечно убывающей геометрической прогрессии[1]). Следовательно, и разность $p_{11}^{(n)} - p_{21}^{(n)}$ все больше и больше приближается к нулю. Иными словами, вероятность оказаться через n шагов в точке A с увеличением n все меньше и меньше зависит от того, из какой точки мы вышли вначале.

191. Будем изображать число шаров в левой урне с помощью фишки, помещенной на числовой оси. В начальный

---

[1]) А. П. Киселев, Алгебра, ч. 2, изд. 23-е, Учпедгиз, М., 1946, стр. 78.

момент времени фишка находится в точке a (рис. 156). Через каждую единицу времени она с вероятностью $\frac{1}{2}$ передвигается вправо (шар переложили из правой урны в левую, число шаров левой урны увеличилось на единицу) и с вероятностью $\frac{1}{2}$ влево (шар переложили из левой урны в правую,

Рис. 156.

число шаров в левой урне уменьшилось на единицу), до тех пор пока она впервые не попадает в одну из точек 0 или $a+b$. Приход фишки в точку 0 означает, что опустела левая урна, приход ее в точку $a+b$ — что опустела правая урна. Обозначим вероятность прихода фишки в 0 при условии, что она вышла из точки k, через p_k (нам нужно найти p_a). Очевидно, $p_0=1$, $p_{a+b}=0$.

Пусть фишка находится в точке k.

Рассмотрим два события:

A: «фишка перешла за один ход в $k+1$»,

B: «фишка перешла за один ход в $k-1$».

По условию $\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B)=1/2$. При наступлении события A вероятность прихода фишки в 0 есть p_{k+1}, при наступлении B вероятность прихода фишки в 0 есть p_{k-1}. По формуле полной вероятности имеем

$$p_k=\frac{1}{2}p_{k+1}+\frac{1}{2}p_{k-1}$$

или после преобразования

$$2p_k=p_{k+1}+p_{k-1}, \quad p_{k+1}-p_k=p_k-p_{k-1}.$$

Обозначая постоянную разность $p_{k+1}-p_k$ через d, напишем

$$p_k-p_{k-1}=d,$$

$$p_{k-1}-p_{k-2}=d,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_2-p_1=d,$$

$$p_1-p_0=d.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$p_k - p_0 = kd,$$
$$p_k - 1 = kd,$$
$$p_k = 1 + kd$$

или, полагая $k = a + b$,

$$0 = p_{a+b} = 1 + (a+b)\,d, \quad d = -\frac{1}{a+b},$$
$$p_k = 1 - \frac{k}{a+b} = \frac{a+b-k}{a+b}.$$

Интересующая нас вероятность равна

$$p_a = \frac{b}{a+b}.$$

Вероятность того, что опустеет правая урна, равна, очевидно,

$$p_b = \frac{a}{a+b}.$$

Вероятность того, что опыт закончится, т. е. что одна из урн опустеет, равна в силу свойства 2

$$\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1.$$

Вероятность того, что опыт никогда не кончится, равна $1 - 1 = 0$ (свойство 3).

Замечание. Эта задача известна в истории математики как «задача о разорении игрока». Классическая формулировка этой задачи такова:

Играют два игрока. Вероятность выигрыша каждой партии для каждого из них равна $\frac{1}{2}$. Первый игрок имеет a рублей, второй игрок b рублей. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не останется без денег. Какова вероятность разорения для каждого из игроков?

В задаче 191 игроки заменены урнами, а деньги — шарами.

192. У каждой вершины куба запишем вероятность того, что гусеница, вышедшая из этой вершины, приклеится в точке A (рис. 157). У вершин *1* и *5* будут записаны одинаковые вероятности x, так как эти вершины одинаково расположены относительно точек A и B. Точно так же равные вероятности y будут записаны у вершин *2* и *4*. Вероятности приклеиться в A, выйдя из вершин *0* и *3*, обозначим соответственно z и u.

Предположим, что гусеница находится в вершине *1* (см. рис. 63), и рассмотрим полную систему попарно-несовместных событий:

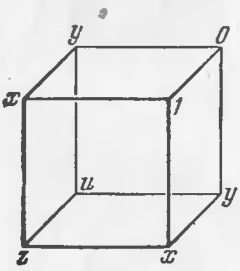


Рис. 157.

C_1: «гусеница пошла по пути *1A*», $$P(C_1)=\frac{1}{3},$$

C_2: «гусеница пошла по пути *12*», $$P(C_2)=\frac{1}{3},$$

C_3: «гусеница пошла по пути *10*», $$P(C_3)=\frac{1}{3}.$$

Вероятность приклеиться в A при условии C_1 равна 1, при условии C_2 равна y, при условии C_3 равна z. Поэтому (свойство 7)

$$x=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z. \tag{1}$$

Аналогично выводятся еще три соотношения:

$$y=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}u, \tag{2}$$

$$z=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}u, \tag{3}$$

$$u=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}u. \tag{4}$$

Решая совместно уравнения (1), (2), (3), (4), находим

$$x=\frac{9}{14},\quad y=\frac{5}{14},\quad z=\frac{4}{7},\quad u=\frac{3}{7}.$$

Вероятности приклеиться в точке B находятся из следующих соображений. Очевидно, что вероятность z', выйдя из вершины *0*, приклеиться в B равна вероятности приклеиться в A, выйдя из вершины 3. Таким образом, $z' = u = \frac{3}{7}$. Теми же рассуждениями получаем

$$x' = y = \frac{5}{14}, \quad y' = x = \frac{9}{14}, \quad u' = z = \frac{4}{7}.$$

Замечание. Заметим, что

$$x + x' = y + y' = z + z' = u + u' = 1.$$

Но $z + z'$ есть в силу свойства 2 вероятность, выйдя из вершины 0, приклеиться где-нибудь, а $1 - (z + z')$ — вероятность, выйдя из этой же вершины, нигде не приклеиться (свойство 3).

Итак, вероятность того, что гусеница, вышедшая из вершины 0, нигде не приклеится, равна нулю. Легко видеть, что то же справедливо, если и любую другую вершину принять за исходную.

С похожим результатом мы встретились при решении задачи 191, где было установлено, что вероятность того, что фишка никогда не попадет ни в 0, ни в $a+b$, равна нулю. Равна нулю и вероятность того, что никогда не кончится игра из задачи 189. Наконец, легко убедиться, что для схемы задачи 190 вероятность того, что частица никогда не попадет, скажем, в точку B, также равна нулю (если только $p_{12} > 0$).

Все эти факты являются весьма частными случаями общей теоремы о случайных блужданиях, которую мы докажем в следующем параграфе.

193. Рассмотрим события:

A: «через n шагов частица находится в точке k»,
B_1: «через $n-1$ шагов частица находится в точке $k-1$»,
B_2: «через $n-1$ шагов частица находится в точке $k+1$»,
B_3: «через $n-1$ шагов частица не находится ни в точке $k-1$, ни в точке $k+1$».

В силу свойства 7

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}(A/B_1) + \mathbf{P}(B_2)\,\mathbf{P}(A/B_2) + \mathbf{P}(B_3)\,\mathbf{P}(A/B_3)$$

имеем

$$\mathrm{P}(A)=Z_n^k,\quad \mathrm{P}(B_1)=Z_{n-1}^{k-1},\qquad \mathrm{P}(B_2)=Z_{n-1}^{k+1},$$

$$\mathrm{P}(A/B_1)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A/B_2)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A/B_3)=0,$$

откуда

$$Z_n^k=\frac{Z_{n-1}^{k-1}+Z_{n-1}^{k+1}}{2}.$$

194. Действительно, элементы строки треугольника вероятностей суть вероятности событий, которые попарно несовместны и образуют полную систему.

195. Для доказательства выпишем одно под другим три произведения (ср. формулы (5), (6) и (7) на стр. 139):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\cdot\frac{2a-3}{2a-2}\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a}{2a+1}\times$$
$$\times\frac{2a+1}{2a+2}\cdots\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\frac{2k-1}{2k},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\cdot\frac{2a-3}{2a-2}\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a+1}{2a+2}\times$$
$$\times\frac{2a+1}{2a+2}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-1}{2k},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\cdot\frac{2a-3}{2a-2}\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a}{2a+1}\cdot\frac{2a+1}{2a+2}\times$$
$$\times\frac{2a+2}{2a+3}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k}{2k+1}.$$

Легко видеть, что второе произведение не меньше первого, а третье больше второго. Но второе произведение равно w_{2k}^2, первое и третье после сокращений примут соответственно вид

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\right)^2\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a}{2a+1}\cdot\frac{2a+1}{2a+2}\cdots\frac{2k-1}{2k}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\right)^2\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a-1}{2k},$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\right)^2\cdot\frac{2a-1}{2a}\cdot\frac{2a}{2a+1}\cdot\frac{2a+1}{2a+2}\cdot\frac{2a+2}{2a+3}\cdots\frac{2k}{2k+1}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\right)^2\frac{2a-1}{2k+1},$$

откуда

$$(2a-1)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\right)^2\frac{2a-1}{2a}\frac{1}{2k}\leqslant$$
$$\leqslant w_{2k}^2<(2a-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2a-3}{2a-2}\right)^2\cdot\frac{1}{2k}.$$

Извлекая квадратный корень, получаем требуемое неравенство.

196. Имеем при $k\geqslant 150$ (неравенство (16) на стр. 141)

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}15k}}\leqslant w_{2k}<\frac{1}{\sqrt{3{,}14k}},$$

откуда

$$\frac{1}{1{,}7749\sqrt{k}}<w_{2k}<\frac{1}{1{,}7719\sqrt{k}},$$
$$\frac{0{,}5633}{\sqrt{k}}<w_{2k}<\frac{0{,}5644}{\sqrt{k}}.$$

В нашем случае $k=\frac{10\,000}{2}=5000$, поэтому

$$70{,}710<\sqrt{k}<70{,}711;\quad 0{,}01414<\frac{1}{\sqrt{k}}<0{,}01415.$$

Окончательно получаем

$$0{,}5633\cdot 0{,}01414<w_{2k}<0{,}5644\cdot 0{,}01415,$$
$$0{,}007966<w_{2k}<0{,}007987.$$

Значение w_{2k} с двумя значащими цифрами поэтому равно

$$w_{2k}=0{,}0079\ldots$$

197. Пусть $n=2k$. Все члены n-й строки меньше центрального члена, а центральный член удовлетворяет неравенству

$$w_n=w_{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Пусть теперь $n=2k-1$. В строке с нечетным номером нет центрального члена, наибольшими по величине являются равные друг другу члены Z_n^{-1} и Z_n^1. Но

$$Z_n^1 = \frac{Z_n^{-1} + Z_n^1}{2} = Z_{n+1}^0.$$

Как только что показано, $Z_{n+1}^0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Следовательно, $Z_n^1 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$; остальные члены n-й строки и подавно меньше $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

198. Так как s-й от середины член $2k$-й строки есть Z_{2k}^{2s}, то неравенство (19) на стр. 143 можно переписать и так:

$$\left(\frac{k+1-s}{k+1}\right)^s \leqslant \frac{Z_{2k}^{2s}}{w_{2k}} \leqslant \left(\frac{k}{k+s}\right)^s$$

или

$$w_{2k}\left(\frac{k+1-s}{k+1}\right)^s \leqslant Z_{2k}^{2s} \leqslant w_{2k}\left(\frac{k}{k+s}\right)^s.$$

При $k \geqslant 60$ (см. неравенство (15) на стр. 141)

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}18k}} \leqslant w_{2k} < \frac{1}{\sqrt{3{,}10k}}.$$

Поэтому при $k \geqslant 60$

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}18k}}\left(\frac{k+1-s}{k+1}\right)^s \leqslant Z_{2k}^{2s} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3{,}10k}}\left(\frac{k}{k+s}\right)^s.$$

Для оценки Z_{120}^{20} надо положить $s = 10$, $k = 60$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3{,}18 \cdot 60}}\left(\frac{51}{61}\right)^{10} \leqslant Z_{120}^{20} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3{,}1 \cdot 60}}\left(\frac{60}{70}\right)^{10},$$

откуда

$$0{,}012 < Z_{120}^{20} < 0{,}016.$$

199. Раскроем скобки в произведении

$$(1+p)^r = \underbrace{(1+p)(1+p)\ldots(1+p)}_{r \text{ раз}}.$$

Среди членов разложения встретится число 1, которое получится, если взять по 1 в каждой скобке. Далее, если взять в первой скобке p, а во всех остальных по 1, то после перемножения получим p; если взять во второй скобке p, а в остальных по 1, то после перемножения тоже получим p и т. д., следовательно, p войдет в разложение с коэффициентом r. Кроме того, будут и другие положительные члены, поэтому

$$(1+p)^r \geqslant 1+rp.$$

200. Практически достоверную границу отклонения за n шагов можно принять равной $\frac{2}{\sqrt[3]{0{,}05}}\sqrt{n}$, или $5{,}429\sqrt{n}$. В частности, при $n=1000$ практически достоверная граница отклонения есть 171,7. Наибольшее четное число, не превосходящее 171,7, есть 170; поэтому с практической достоверностью можно утверждать, что фишка за 1000 ходов отклонилась от начального положения не более чем на 170 делений.

Чтобы получить практически достоверную границу для приведенной скорости, надо границу отклонения поделить на число шагов. Получим, что с практической достоверностью приведенная скорость фишки за 1000 шагов будет не больше 0,17.

201. Положим

$$\varepsilon=\left(\frac{2}{\alpha\sqrt{n}}\right)^3.$$

С вероятностью ошибки, меньшей чем ε, можно утверждать, что приведенная скорость фишки за n шагов будет меньше, чем $\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}\,\sqrt{n}}$. Но

$$\frac{2}{\sqrt[3]{\varepsilon}\,\sqrt{n}}=\frac{2}{\frac{2}{\alpha\sqrt{n}}\sqrt{n}}=\alpha.$$

202. С вероятностью ошибки, меньшей 0,001, можно утверждать, что приведенная скорость фишки за n шагов будет меньше чем $\frac{2}{\sqrt[3]{0{,}001}\,\sqrt{n}}$.

Возьмем такое n, чтобы было

$$\frac{2}{\sqrt[3]{0{,}001}\,\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01,$$

откуда $n \geqslant 4 \cdot 10^6$.

Итак, с вероятностью ошибки, меньшей 0,001, можно утверждать, что приведенная скорость за $4 \cdot 10^6$ шагов будет меньше чем

$$\frac{2}{\sqrt[3]{0{,}001}\,\sqrt{4 \cdot 10^6}} = 0{,}01.$$

203. Нужно, чтобы с вероятностью ошибки, меньшей 0,01, можно было утверждать, что частота выпадения решетки отличается от 0,5 меньше чем на 0,1. Для этого мы можем взять любое число бросаний, превосходящее

$$N = \frac{1}{(0{,}1)^2\,\sqrt[3]{0{,}01}} = 464{,}17.$$

Итак, достаточно произвести 465 бросаний.

204. Если частица побывала в m за n шагов, то она попала туда впервые либо через один шаг, либо через два шага, ..., либо, наконец, через n шагов. Интересующая нас вероятность выразится по формуле (5) § 1 суммой $b_1 + b_2 + \ldots$ $\ldots + b_n$, где b_k — вероятность впервые попасть в m через k шагов. Достаточно поэтому показать, что от экрана не зависят вероятности b_k.

Докажем теперь, что b_k не зависит от того, какой экран стоит в точке m. Рассмотрим все пути из k шагов, которые начинаются в исходной точке, кончаются в точке m и ни разу (кроме конца) не проходят через m. Обозначим эти пути $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Вероятность того, что частица сделает первые k шагов по пути A_i, обозначим a_i. Событие «частица через k шагов впервые попала в m» равносильно тому, что она пошла либо по пути A_1, либо по пути $A_2, \ldots$, либо по пути A_s. Отсюда

$$b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_s.$$

Но каждый из путей $A_1, A_2, \ldots, A_s$ не проходит через m, поэтому вероятности $a_1, a_2, \ldots, a_s$ (а вместе с ними и b_k)

не зависят от того, стоит ли в точке m экран и если стоит, то какой.

Замечание. Приведенное рассуждение носит совершенно общий характер и применимо к любой схеме случайного блуждания. Следовательно, и сформулированное в задаче утверждение верно для любой схемы.

205. Из соотношений (1), (2) и (3) на стр. 156 выводим

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-2} + \frac{1}{4} b_{n-2} = \frac{3}{4} b_{n-2},$$

$$b_{2k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k b_0, \quad b_{2k+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^k b_1.$$

Но $b_0 = 1$ (в начальный момент частица находится в 1) и $b_1 = 0$ (через один шаг частица не находится в 1). Поэтому

$$b_{2k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad b_{2k+1} = 0. \tag{1}$$

Из равенств (4) и (3) на стр. 156 получаем

$$d_n = d_{n-1} + \frac{1}{4} b_{n-2}.$$

Далее, принимая во внимание соотношения (1), имеем

$$d_{2k+1} = d_{2k} + \frac{1}{4} b_{2k-1} = d_{2k},$$

$$d_{2k} = d_{2k-1} + \frac{1}{4} b_{2k-2} = d_{2k-2} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} =$$

$$= d_{2k-4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} =$$

$$= d_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

Так как $d_0 = 0$, то (применяя формулу для суммирования геометрической прогрессии) окончательно получим

$$d_{2k} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{3}{4} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right] = \frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1-\frac{3}{4}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

206. а) См. рис. 158. б) См. рис. 159. в) См. рис. 160.

207. а) Из E_1 как первая, так и вторая частицы могут за какое-то число z шагов пройти [1]) в E_k. Изобразив

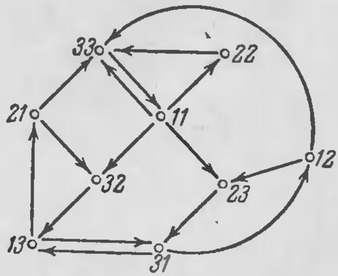


Рис. 158.

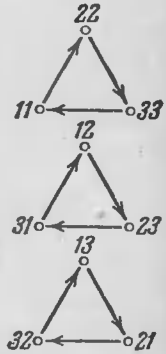


Рис. 159.

этот путь обеих частиц передвижением фишки по K^2, мы получим, что она на E_{11} пришла через z шагов в E_{kk}.

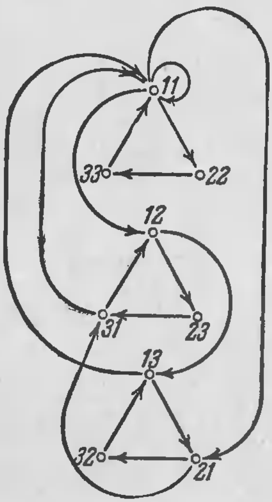


Рис. 160.

б) Достаточно доказать, что из любого состояния E_{ik} цепи L можно пройти в E_{11} (тогда из него можно пройти и в любое состояние E_{jl} цепи L путем E_{ik} — E_{11} — E_{jl}). Итак, покажем, что из состояния E_{ik}, принадлежащего к L, можно пройти в E_{11}. Пусть из E_{11} можно пройти в E_{ik}, сделав s шагов. В таком случае за s шагов первая частица может пройти из E_1 в E_i, а вторая — из E_1 в E_k (рис. 161). Пусть из E_i в E_1

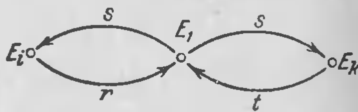


Рис. 161.

можно пройти за r шагов и из E_k в E_1 — за t шагов (цепь

[1]) Слова «могут пройти» означают «могут пройти по направлению стрелок».

K связна!). Тогда (см. рис. 161) первая частица может пройти из E_i в E_1 за $r+s+t$ шагов (путем $E_i - E_1 - E_k - E_1$), а вторая — из E_k в E_1 за $t+s+r$ шагов (путем $E_k - E_1 - E_i - E_1$), т. е. первая частица из E_i в E_1 и вторая из E_k в E_1 могут пройти за одно и то же число $z=s+r+t$ шагов. Изобразив этот путь обеих частиц передвижением фишки по K^2, получим, что за z шагов фишка может из E_{ik} притти в E_{11}.

208. Так как все точки совершенно равноправны, то x есть вообще вероятность того, что частица, вышедшая из точки $n-1$, когда-нибудь побывает в n. Точно так же вероятность того, что частица, вышедшая из $n+1$, побывает в n, равна y.

Предположим, что частица выходит из точки 0 и рассмотрим события:

A: «частица когда-нибудь вернется в точку 0»,

B_1: «частица перейдет первым шагом в точку 1»,

B_2: «частица перейдет первым шагом в точку -1».

По формуле полной вероятности (свойство 7 § 1)

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}(A/B_1)+\mathbf{P}(B_2)\,\mathbf{P}(A/B_2).$$

Если выполнено условие B_1, то это значит, что частица после одного шага находится в точке 1. Чтобы при этом условии произошло событие A, надо, чтобы частица, выйдя из 1, когда-нибудь попала в 0. Вероятность этого равна y. Итак, $\mathbf{P}(A/B_1)=y$. Аналогично, $\mathbf{P}(A/B_2)=x$. Далее, $\mathbf{P}(A)=z$, $\mathbf{P}(B_1)=\mathbf{P}(B_2)=\frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в формулу (1), получаем

$$z=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x. \tag{2}$$

Далее, очевидно, что $x=y$, откуда $z=x$.

Для вычисления x рассмотрим событие C: «частица, вышедшая из 0, когда-нибудь попадет в 1». В силу свойства 7

$$x=\mathbf{P}(C)=\mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}(C/B_1)+\mathbf{P}(B_2)\,\mathbf{P}(C/B_2). \tag{3}$$

Имеем $\mathbf{P}(B_1)=\mathbf{P}(B_2)=\frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(C/B_1)=1$. Далее $\mathbf{P}(C/B_2)$ есть вероятность того, что частица из -1 когда-нибудь попадет в 1. Вычислим эту вероятность. Итак, частица находится в -1. Требуется найти вероятность события D: «частица когда-нибудь побывает в 1». Введем событие F: «частица когда-нибудь побывает в 0». Очевидно, $FD = D$ (действительно, наступление D равносильно совместному наступлению обоих событий F и D). Поэтому в силу свойства 6

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(FD) = \mathbf{P}(F)\,\mathbf{P}(D/F).$$

Но $\mathbf{P}(F) = x$, $\mathbf{P}(D/F) = x$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(D) = x^2. \tag{4}$$

Окончательно из формул (3), (4) выводим

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2, \tag{5}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$(x-1)^2 = 0,$$

откуда $x = 1$. Следовательно, $y = z = 1$.

209. Нужно показать, что с вероятностью 1 частица побывает в точке n (для определенности будем считать, что $n > 0$). Для $n = 1$ это доказано в предыдущей задаче. Пусть утверждение доказано для точки n; докажем его для точки $n+1$.

Рассмотрим событие A_{n+1}: «частица когда-нибудь побывает в $n+1$». Очевидно, $A_{n+1} = A_n A_{n+1}$; в силу свойства 6

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n)\,\mathbf{P}(A_{n+1}/A_1).$$

Но $\mathbf{P}(A_{n+1}/A_n) = x = 1$. Кроме того, по предположению, $\mathbf{P}(A_n) = 1$. Поэтому $\mathbf{P}(A_{n+1}) = 1$.

Вероятность побывать в данной точке 2, 3 и вообще n раз находится так же, как в замечании 1 на стр. 162; она равна 1.

210. Прежде всего заметим, что $p + p + r = 1$ (см. подстрочное примечание на стр. 164). Пусть x, y, z означают вероятности тех же событий, что и в задаче 208. Предоставляем читателю самому вывести соотношения

$$z = r + px + py, \tag{1}$$

$$x = p + rx + px^2. \tag{2}$$

(Они выводятся совершенно так же, как (2) и (5) в решении задачи 208. Надо только, кроме событий B_1 и B_2, рассмотреть событие B_3: «частица за первую единицу времени остается в точке 0».) Очевидно, $x=y$, откуда

$$z=r+2px.$$

Преобразуем (2):

$$x=p+(1-2p)x+px^2,$$
$$0=p-2px+px^2.$$

Так как $p\neq 0$, то

$$1-2x+x^2=0,$$

откуда $x=1$ и $z=r+2p=1$.

Так же как в задаче 209, убеждаемся, что с вероятностью 1 частица побывает в любой точке.

211. Теми же рассуждениями, что и при решении задач 208 и 210, находим (здесь, вообще говоря, $x\neq y$)

$$z=py+qx, \tag{1}$$
$$x=p+qx^2, \tag{2}$$
$$y=q+py^2. \tag{3}$$

Решая уравнение (2), имеем

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4pq}}{2q}=\frac{1\pm\sqrt{1-4p(1-p)}}{2q}=$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{(1-2p)^2}}{2q}=\frac{1\pm(1-2p)}{2q}.$$

Уравнение (2) имеет два корня:

$$x_1=\frac{1+1-2p}{2q}=\frac{2-2p}{2q}=\frac{1-p}{q}+\frac{q}{q}=1,$$
$$x_2=\frac{1-1+2p}{2q}=\frac{2p}{2q}=\frac{p}{q}.$$

Так как $\frac{p}{q}>1$, а $x\leqslant 1$ (как всякая вероятность), то $x\neq x_2$. Следовательно, $x=x_1=1$.

Решая уравнение (3), получаем

$$y_1=1,\quad y_2=\frac{q}{p}.$$

Как указано в условии задачи, $y\neq 1$, следовательно, $y=\frac{q}{p}$. Отсюда $z=py+qx=2q$.

212. Докажем, что при $k \geqslant 2^m$ выполняется неравенство $S_k > \frac{m}{2}$. Действительно,

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^m} = 1 + T_1 + T_2 + \ldots + T_m,$$

где

$$T_p = \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ \text{слагаемых}}.$$

Очевидно,

$$T_p \geqslant \underbrace{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ \text{слагаемых}} = \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$S_k \geqslant S_{2^m} \geqslant 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{m\ \text{раз}} = 1 + \frac{m}{2}.$$

213. Рассмотрим прямые N_1N_1, $N_{-1}N_{-1}$, N_2N_2, $N_{-2}N_{-2}$, параллельные прямой NN (см. рис. 84). Пусть путник находится в некоторой точке на прямой N_kN_k. С вероятностью $\frac{1}{4}$ путник делает шаг вниз и с вероятностью $\frac{1}{4}$ шаг вверх, т. е. с вероятностью $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ остается на прямой N_kN_k. С вероятностью $\frac{1}{4}$ путник делает шаг вправо и переходит на прямую $N_{k+1}N_{k+1}$, с вероятностью $\frac{1}{4}$ — шаг влево, переходя на прямую $N_{k-1}N_{k-1}$. Считая каждую из прямых N_kN_k за одно состояние, мы придем к случаю, уже разобранному нами в задаче 210. Здесь точке соответствует прямая N_kN_k, $p = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{2}$. По доказанному путник с вероятностью 1 побывает на любой прямой, в том числе и на NN.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
66	6 св.	$7459\overset{7}{\smile}$	$7459\overset{9}{\smile}$	Тип.
69	8 »	$\ldots\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{00000}$	$\ldots\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{00000}$	»
123	9 сн.	$P(O)=0$	$\mathrm{P}(O)=0$	Корр.
132	1 »	вершин	вершины	Авт.
137	Рис. 69	$\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}$	»
156	12 сн.	за 1 в 0	из 1 в 0	Ред.
176	1 »	E	E_0	Корр.
228	4 »	$x^{p^l(p-1)}$	$a^{p^l(p-1)}$	Авт.
284	6 св.	на E_{11}	из E_{11}	Ред.

Зак. 3398.

Библиотека
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
кружка

Е. Б. ДЫНКИН и В. А. УСПЕНСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БЕСЕДЫ