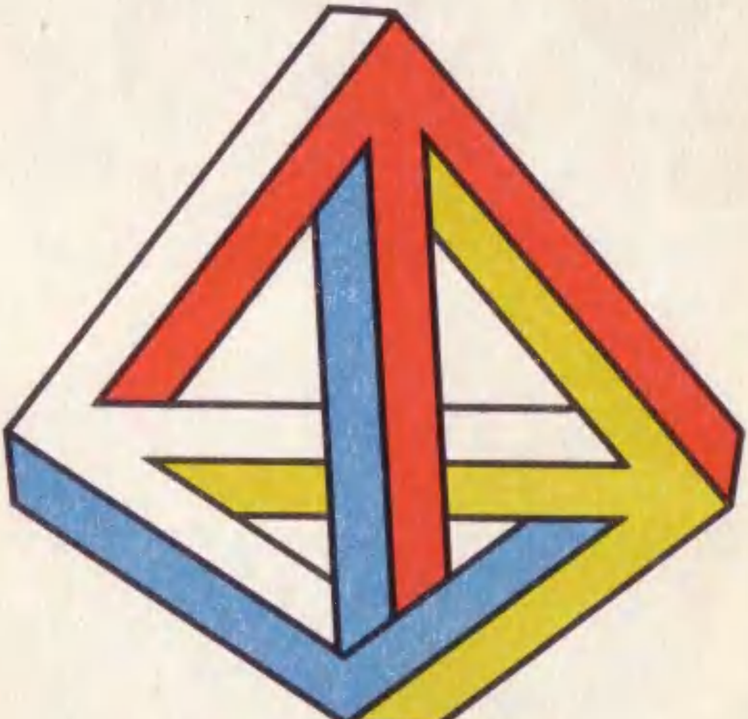
В. В. Прасолов
И. Ф. Шарыгин

ЗАДАЧИ по стереометрии



БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 19

В. В. ПРАСОЛОВ, И. Ф. ШАРЫГИН

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.151.0
П70
УДК 514.113(023)

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— (Б-ка мат. кружка).— 288 с.— ISBN 5-02-013921-1.

Содержит около 560 задач, снабженных подробными решениями, и 60 задач для самостоятельной работы. Большинство задач по своей тематике близки к школьной программе. Задачи разбиты на циклы, связанные общей идеей решения. Внутри каждого цикла задачи расположены в порядке возрастания трудности. Такое разбиение поможет читателю ориентироваться в наборе задач и даст ему возможность разобраться непосредственно в заинтересовавшей его теме, не читая подряд всю книгу.

Для школьников, преподавателей, студентов педагогических институтов.

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук *Н. Б. Васильев*;
кандидат физико-математических наук *Н. П. Долбилин*

П $\frac{1602050000-046}{053(02)-89}$ 38-89

ISBN 5-02-013921-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач предназначен для учащихся старших классов, преподавателей математики, руководителей математических кружков и студентов педагогических институтов. Его можно использовать как источник задач для внеклассной работы и как пособие для самостоятельного изучения геометрии.

Недавно изданная книга И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии. Стереометрия» (М.: Наука, 1984) наряду с задачами письменных конкурсных экзаменов содержит много интересных задач повышенной трудности, как известных, так и оригинальных, авторских, но задачи в ней почти не систематизированы. Дело в том, что усилиями как профессиональных математиков, так и просто любителей математики в области стереометрии был накоплен богатый и интересный материал, и поэтому сначала нужно было собрать теоремы и задачи, изучить и сравнить их различные доказательства, т. е. провести предварительную обработку всего этого материала, а уже потом привести его к более стройному и завершенному виду. В нашей книге мы и постарались справиться со второй задачей. Разумеется, при этом мы опирались на первый этап работы, и все наиболее интересные задачи из указанной книги в нашу книгу вошли (с переработанными решениями); они составляют примерно половину ее.

Книга содержит около 560 задач, снабженных решениями, и около 60 задач для самостоятельного решения. По сравнению с указанной книгой И. Ф. Шарыгина включено несколько новых тем: центр масс, правильные многогранники, инверсия, принцип Дирихле, разрезания, целочисленные решетки и т. д. Для удобства пользования принята подробная рубрикация; задачи разделены на 16 глав, а каждая глава на 5—6 параграфов.

Особый интерес представляет вводная часть — «Знакомство со стереометрией». В ней собраны задачи, не требующие фактически никаких знаний по стереометрии, но для решения которых нужно обладать пространственным воображением.

При решении некоторых задач используются планиметрические факты; мы сочли излишним повторять их известные доказательства. В таких случаях указывается, где эти доказательства можно прочитать. Ссылки даются на две книги, изданные недавно и достаточно большим тиражом: Прасолов В. В. Задачи по планиметрии, чч. I, II.— М.: Наука, 1986 (в ссылках — Прасолов и номер соответствующей задачи) и Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия.— Изд. 2-е.— М.: Наука, 1986 (в ссылках — Шарыгин; римская цифра указывает номер раздела, арабская — номер задачи). См., например, с. 37.

Значительную часть книги составляют задачи повышенной трудности, причем некоторые из них требуют предварительного знакомства с основными понятиями и теоремами стереометрии. Поэтому начинающим изучать стереометрию рекомендуются в первую очередь следующие задачи:

1.1, 1.7, 1.8, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.17, 1.18, 1.19, 1.21, 1.22;
2.1, 2.9, 2.10, 2.11, 2.13, 2.14, 2.18, 2.26;
3.1, 3.2, 3.3, 3.7, 3.10, 3.32;
4.1, 4.2, 4.3, 4.12, 4.41;
5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.11, 5.16;
6.1, 6.2, 6.3, 6.18, 6.19, 6.54;
7.1, 7.12, 7.31, 7.33, 7.34, 7.52;
10.13, 10.22, 10.23, 10.32, 10.35;
11.1, 11.10, 11.17, 11.18;
12.20, 12.21, 12.22, 12.23, 12.25, 12.26;
15.1, 15.2, 15.3, 15.4, 15.5, 15.26.

ЗНАКОМСТВО СО СТЕРЕОМЕТРИЕЙ

1. Сложите 6 спичек так, чтобы образовалось 4 правильных треугольника со стороной, равной длине спички.

2. Предложите практический способ непосредственного измерения диагонали кирпича (без каких-либо вычислений).

3. Можно ли изготовить звезду, изображенную на рис. 1?

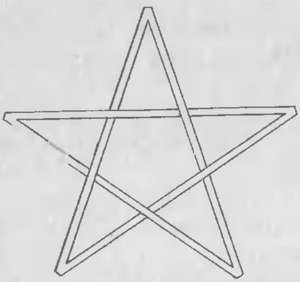


Рис. 1

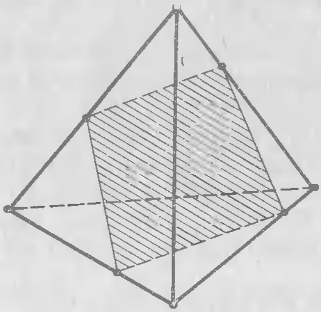


Рис. 2

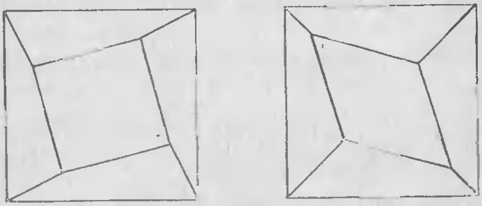
4. Решая задачу, ученик изобразил тетраэдр, в котором проведено сечение (рис. 2). Правилен ли его чертеж?

5. На рис. 3, *а* и *б* изображены проекции двух многогранников, точнее говоря, их вид сверху. (Никаких невидимых ребер нет.) Возможны ли такие многогранники?

6. Какую форму должна иметь пробка, чтобы ею можно было заткнуть отверстия трех видов: треугольное, квадратное и круглое?

7. Можно ли в плоскости прорезать тонкое отверстие, не разбивающее ее на части, сквозь которое можно продеть каркас: а) куба; б) тетраэдра? (Ребра каркаса считаются сколь угодно тонкими.)

8. Можно ли четырьмя свинцовыми шарами закрыть точечный источник света? (Источник считается закрытым, если любой луч, выходящий из него, пересекает хотя бы один из шаров.)



а *б*

Рис. 3

9. Вырежьте из прямоугольного листа бумаги фигуру, изображенную на рис. 4. (Клеем пользоваться нельзя.)

10. Можно ли сложить 6 карандашей так, чтобы любые два из них соприкасались? Тот же вопрос для 7 карандашей.

11. Человек прошел километр на север, затем километр на запад и километр на юг. Мог ли он при этом вернуться в исходное положение?

12. Из 7 одинаковых кубиков склеен «крест» следующим образом: к каждой из 6 граней одного из кубиков приклеено по кубику (склейка происходит по граням). Можно ли такими «крестами» заполнить без просветов все пространство?

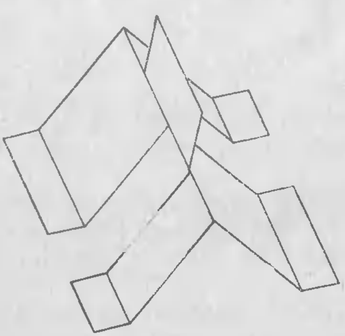


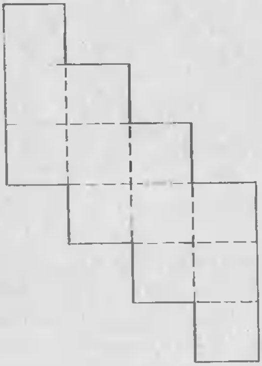
Рис. 4

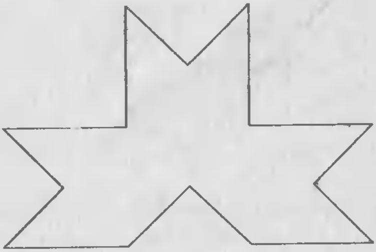
13. а) Вершины M и N куба с ребром a симметричны относительно центра куба. Найдите длину кратчайшего пути, идущего из M в N по поверхности куба.

б) Коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда размером $30\times12\times12$. Точка A находится на грани 12×12, причем она удалена на расстояние 1 от одной стороны этой грани и равноудалена от двух других параллельных сторон. Какова длина кратчайшего пути по поверхности коробки из точки A в точку, симметричную ей относительно центра параллелепипеда?

14. Можно ли единичный кубик завернуть в платок размером 3×3?

15. а) Докажите, что поверхность куба можно разрезать так, что, развернув ее, получим фигуру, изображенную на рис. 5, *а*.





б

Рис. 5

б) Та же задача для фигуры, изображенной на рис. 5, *б*.

16. Докажите, что из прямоугольного листа бумаги можно склеить бесконечно много различных тетраэдров (склейка производится только по краям, без наложений).

17. а) Можно ли соединить 3 резиновых кольца так, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись бы?

б) Тот же вопрос для 10 колец.

Решения

1. Спички нужно сложить в виде правильного тетраэдра.

2. Можно, например, сложить три кирпича так, как показано на рис. 6, и измерить расстояние между отмеченными точками.

3. Нет, такую звезду изготовить нельзя. Обозначим вершины звезды так, как показано на рис. 7. Рассмотрим плоскость

$A_1A_3A_5$. Звено A_5A_2 показывает, что точка A_2 лежит «выше» этой плоскости; звено A_1A_4 показывает, что точка A_4 лежит «ниже» ее. А вот звено A_2A_4 показывает, что, наоборот, A_2 лежит «ниже», а A_4 «выше».

Изображенная звезда представляет собой один из примеров так называемых «невозможных объектов». Подобного рода объекты и конструкции не так уж редки в живописи. Они встречаются уже в работах

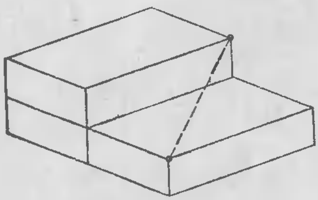


Рис. 6

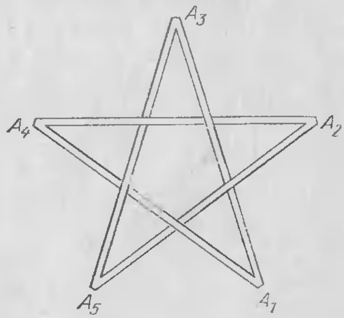


Рис. 7

старых русских мастеров иконописцев. Очень много «невозможных объектов» изобрел известный голландский художник Эшер (1898—1972), творчество которого любят многие математики и физики.

4. Заштрихованный на рис. 2 четырехугольник не может быть плоским. В самом деле, продолжения противоположных сторон сечения, изображенных сплошной линией, пересекают продолжения переднего ребра тетраэдра в двух различных точках. Этого не может быть, так как плоскость и прямая, в ней не лежащая, имеют не более одной общей точки.

5. Изображенные многогранники невозможны. Обозначим на рис. 3, *а* вершины внешнего четырехугольника (квадрата), начиная с правой нижней, против часовой стрелки через A, B, C и D, а вершины внутреннего четырехугольника через A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Рассматривая сечения, параллельные плоскости $ABCD$, убедимся, что B_1 отстоит от плоскости $ABCD$ дальше, чем A_1, C_1 — дальше, чем B_1, D_1 — дальше, чем C_1, A_1 — дальше, чем D_1. Это невозможно.

Введем на рис. 3, *б* такие же обозначения, как и на рис. 3, *а*. Как и в предыдущем случае, легко убедиться, что точки A_1 и C_1 менее удалены от плоскости $ABCD$, чем точки B_1 и D_1. Следовательно, любая точка отрезка A_1C_1 менее удалена от плоскости $ABCD$, чем любая точка отрезка B_1D_1, а значит, эти отрезки не пересекаются. Поэтому точки A_1, B_1, C_1 и D_1 не могут лежать в одной плоскости.

6. Задача имеет бесконечно много решений. Условию задачи удовлетворяет, например, пробка, изображенная на рис. 8, *а* (кусок цилиндра с квадратным сечением обрезан в виде

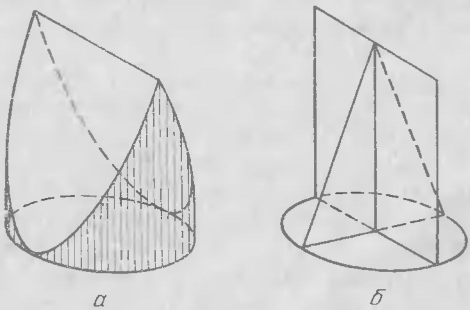


Рис. 8

клина). С другой стороны, формально возможна даже фигура, изображенная на рис. 8, *б* (круг, квадрат и треугольник, расположенные так, как показано на этом рисунке).

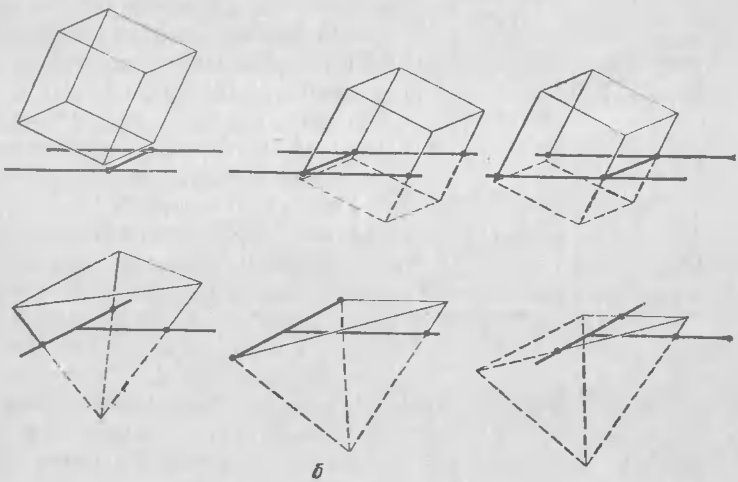


Рис. 9

7. а) Процесс протаскивания каркаса куба сквозь отверстие в виде буквы Н изображен на рис. 9, *а*. Сначала подводим одно ребро куба к перекладине и двигаем куб до тех пор, пока

сквозь перекладину не пройдет второе ребро. Затем сдвигаем куб так, чтобы к перекладине переместилась другая пара «вертикальных» ребер. Дальнейший процесс аналогичен предыдущему.

б) Процесс протаскивания каркаса тетраэдра сквозь отверстие в виде буквы Т изображен на рис. 9, *б*. Расположим тетраэдр так, чтобы одна его грань была параллельна данной плоскости, а его противоположная вершина была обращена к плоскости. Подведем эту вершину к разрезу и начнем проталкивать тетраэдр так, чтобы два его ребра двигались по горизонтальной «перекладине» буквы Т, а одно — по ее вертикальной «стойке». Когда к «перекладине» подойдет ребро грани, параллельной плоскости, повернем слегка тетраэдр вокруг этого ребра. Оставшаяся часть тетраэдра проталкивается сквозь отверстие очевидным образом.

8. Можно. Пусть источник света находится в центре O правильного тетраэдра $ABCD$. Рассмотрим трехгранный угол, образованный лучами OA, OB и OC. Построим шар, пересекающий лучи OA, OB и OC и не содержащий точки O. Такой шар, как легко видеть, существует: можно, например, взять шар, касающийся лучей OA, OB и OC, и слегка его увеличить (или приблизить к O). Этот шар, очевидно, закроет весь трехгранный угол $OABC$. Другим шаром закроем угол $OABD$. Если второй шар пересекается с первым, то, отодвигая его центр по лучу OP, где P — центр второго шара, и соответственно увеличивая его радиус, всегда можно добиться того, чтобы второй шар не пересекался с первым. Затем точно так же построим шар, закрывающий трехгранный угол $OACD$ и не пересекающийся с двумя первыми шарами, и шар, закрывающий трехгранный угол $OBCD$.

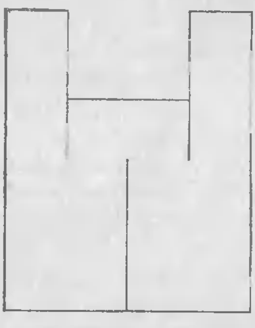


Рис. 10

Если потребовать, чтобы все шары были одинакового радиуса, то наименьшее число шаров, закрывающих источник света, равно 6. Доказательство этого факта достаточно сложно. Попробуйте, однако, самостоятельно найти нужную конструкцию из 6 равных шаров.

9. Требуемая выкройка изображена на рис. 10. Ее нужно взять в руки, держа левой рукой левый край, а правой — правый, и повернуть правый край на 180° на себя. Дальнейшее очевидно.

10. На рис. 11, *а* показано, как сложить три карандаша. Сверху на них можно положить еще три карандаша, сложенных аналогичным образом (рис. 11, *б*); при этом карандаши можно сложить так, чтобы диаметр вписанной окружности треугольника, образованного точками касания трех нижних (и трех верхних) карандашей, был равен диаметру карандаша. Тогда в образовавшийся между ними зазор можно вставить седьмой карандаш.

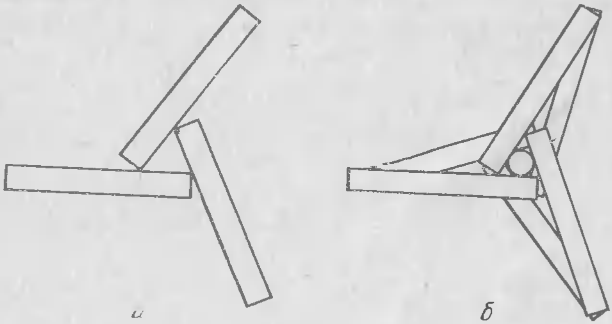


Рис. 11

Если d — диаметр карандаша, l — его длина, то сложить 7 карандашей указанным способом можно, лишь если $d/l \leqslant \lambda$, где λ — некоторое число. Найдите самостоятельно наименьшее такое λ. (Для обычных неочиненных карандашей требуемое соотношение выполняется.)

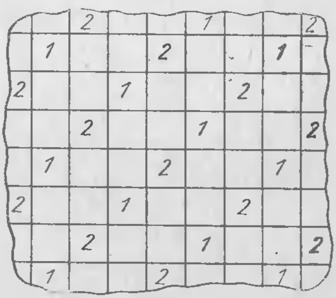


Рис. 12

11. Да, мог. Предположим, что человек вышел из точки A и, пройдя по меридиану 1 км на север, оказался в точке B. Пройдя 1 км по параллели, он может снова оказаться в точке B, если обойдет один или несколько раз вокруг Северного полюса. Для этого длина параллели, на которой лежит точка B, должна быть равна $1/n$ км.

12. Можно. Разобьем пространство на слои толщиной 1, а слои разобьем на единичные кубики. В нечетных слоях поместим центры крестов в клетках, отмеченных цифрой 1, а в четных слоях — в клетках, отмеченных цифрой 2 (см. рис. 12).

13. а) Любой путь, идущий по поверхности куба, можно развернуть на плоскость. На рис. 13, *а* изображены развертки шести кратчайших путей, идущих из M в N; длина каждого из них равна $\sqrt{5}a$.

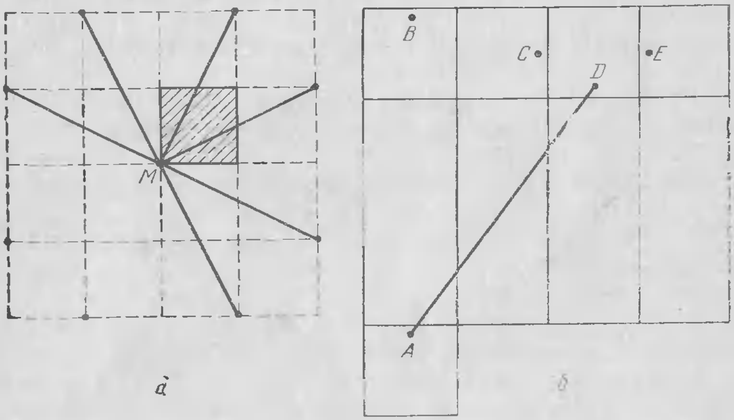


Рис. 13

б) Как и в задаче а), достаточно выбрать наименьший из отрезков AB, AC, AD и AE (рис. 13, *б*). Ясно, что $AB^2 = 42^2 = 1764$, $AC^2 = 37^2+17^2 = 1658$, $AD^2 = 32^2+24^2 = 1600$ и $AE > AD$. Кратчайший путь AD имеет длину 40.

Изобразите самостоятельно этот путь на параллелепипеде.

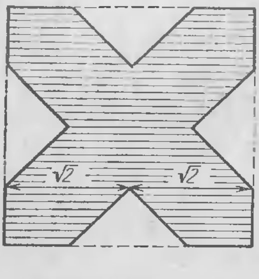


Рис. 14

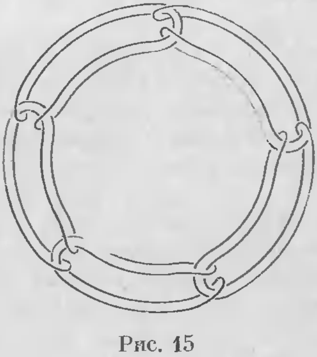


Рис. 15

14. Можно. Из квадрата со стороной $2\sqrt{2}$ можно вырезать фигуру, в которую можно завернуть единичный кубик (на рис. 14 эта фигура заштрихована). Ясно также, что $2\sqrt{2} < 3$.

15. Вырежьте эти фигуры из бумаги. Свернуть из них поверхность куба вы сможете без затруднений (сгибать их нужно по диагоналям квадратиков).

16. Склеим из прямоугольника цилиндр и выделим на его верхнем и нижнем основании два диаметра. Если угол между этими диаметрами не слишком велик, то «сплющив» основания по этим диаметрам, получим тетраэдр. Изменяя угол между диаметрами, будем получать разные тетраэдры

17. Можно. На рис. 15 показано, как сцепить 5 колец. Аналогичным образом можно сцепить любое количество колец.

Глава 1
ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Углы и расстояния между скрещивающимися прямыми

1.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите угол и расстояние между прямыми A_1B и AC_1.

1.2. Дан куб с ребром 1. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися диагоналями двух его соседних граней.

1.3. Пусть K, L и M — середины ребер AD, A_1B_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что треугольник KLM правильный, причем его центр совпадает с центром куба.

1.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, K — середина ребра DD_1. Найдите угол и расстояние между прямыми CK и A_1D.

1.5. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC; M — середина DB, N — середина AB, а точка K делит ребро CD в отношении $CK : KD = 1 : 2$. Докажите, что прямая CN равноудалена от прямых AM и BK.

1.6. Найдите расстояние между двумя скрещивающимися медианами граней правильного тетраэдра с ребром 1. (Исследуйте все возможные варианты расположения медиан.)

§ 2. Углы между прямыми и плоскостями

1.7. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Докажите, что вектор (a, b, c) перпендикулярен этой плоскости.

1.8. Найдите косинус угла между векторами с координатами (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2).

1.9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

а) Найдите угол между плоскостями BB_1D и ABC_1.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

в) Найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью A_1BD.

1.10. В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник ABC со стороной a. На боковых ребрах взяты точки A_1, B_1 и C_1, расстояния от которых до плоскости основания равны $a/2$, a и $3a/2$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

§ 3. Прямые, образующие равные углы с прямыми и плоскостями

1.11. Прямая l образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2, причем она не перпендикулярна плоскости П, содержащей эти прямые. Докажите, что проекция прямой l на плоскость П тоже образует равные углы с прямыми l_1 и l_2.

1.12. Докажите, что прямая l образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми тогда и только тогда, когда она перпендикулярна одной из двух биссектрис углов между этими прямыми.

1.13. Даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2; на l_1 взяты точки O_1 и A_1, на l_2 взяты точки O_2 и A_2, причем O_1O_2 — общий перпендикуляр к прямым l_1 и l_2, а прямая A_1A_2 образует равные углы с прямыми l_1 и l_2. Докажите, что $O_1A_1 = O_2A_2$.

1.14. Точки A_1 и A_2 принадлежат плоскостям Π_1 и Π_2, пересекающимся по прямой l. Докажите, что прямая A_1A_2 образует равные углы с плоскостями Π_1 и Π_2 тогда и только тогда, когда точки A_1 и A_2 равноудалены от прямой l.

1.15. Докажите, что прямая, образующая попарно равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми, лежащими в плоскости П, перпендикулярна плоскости П.

1.16. Даны три прямые, не параллельные одной плоскости. Докажите, что существует прямая, образующая с ними равные углы; более того, через любую точку можно провести ровно четыре такие прямые.

§ 4. Скрещивающиеся прямые

1.17. Даны две скрещивающиеся прямые. Докажите, что существует единственный перпендикулярный им отрезок, концы которого лежат на этих прямых.

1.18. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 и точка O, не принадлежащая ни одной из них. Всегда ли существует прямая, проходящая через точку O и пересекающая обе данные прямые? Может ли таких прямых быть две?

1.19. В пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что существует единственный параллелепипед, три ребра которого лежат на этих прямых.

1.20. На общем перпендикуляре к скрещивающимся прямым p и q взята точка A. По прямой p движется точка M; N — проекция точки M на прямую q. Докажите, что все плоскости AMN имеют общую прямую.

§ 5. Теорема Пифагора в пространстве

1.21. Прямая l образует с тремя попарно перпендикулярными прямыми углы α, β и γ. Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

1.22. Плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые. Докажите, что сумма квадратов площадей трех его прямоугольных граней равна квадрату площади грани ABC.

1.23. Внутри шара радиуса R взята точка A на расстоянии a от его центра. Через точку A проведены три попарно перпендикулярные хорды.

а) Найдите сумму квадратов длин этих хорд.

б) Найдите сумму квадратов длин отрезков хорд, на которые их делит точка A.

1.24. Докажите, что сумма квадратов длин проекций ребер куба на любую плоскость равна $8a^2$, где a — длина ребра куба.

1.25. Докажите, что сумма квадратов длин проекций ребер правильного тетраэдра на любую плоскость равна $4a^2$, где a — длина ребра тетраэдра.

1.26. Дан правильный тетраэдр с ребром a. Докажите, что сумма квадратов длин проекций (на любую плоскость) отрезков, соединяющих его центр с вершинами, равна a^2.

§ 6. Метод координат

1.27. Докажите, что расстояние от точки с координатами (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, равно

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1.28. Даны две точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Найдите геометрическое место таких точек M (ГМТ), что $AM : BM = k$.

1.29. Найдите геометрическое место таких точек X, что $pAX^2 + qBX^2 + rCX^2 = d$, где A, B и C — данные точки, p, q, r и d — данные числа, причем $p + q + r = 0$.

1.30. Оси двух конусов, у которых равны углы между осью и образующей, параллельны. Докажите, что все точки пересечения их поверхностей лежат в одной плоскости.

1.31. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Докажите, что расстояние от любой точки пространства до одной из прямых AA_1, B_1C_1, CD не меньше $a/\sqrt{2}$.

1.32. На трех взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O, даны точки A, B и C, равноудаленные от O. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через O; точки A_1, B_1 и C_1 симметричны A, B и C относительно l. Плоскости, проходящие через точки A_1, B_1 и C_1 перпендикулярно прямым OA, OB и OC соответственно, пересекаются в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

Задачи для самостоятельного решения

1.33. Параллельные прямые l_1 и l_2 расположены в двух плоскостях, пересекающихся по прямой l. Докажите, что $l_1 \parallel l$.

1.34. Три прямые попарно скрещиваются. Докажите, что существует бесконечно много прямых, пересекающих сразу все три эти прямые.

1.35. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости, а прямые AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 попарно пересекаются.

а) Докажите, что точки пересечения указанных прямых лежат на одной прямой.

б) Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

1.36. В пространстве дано несколько прямых, причем любые две из них пересекаются. Докажите, что либо все они лежат в одной плоскости, либо все они проходят через одну точку.

1.37. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD. Докажите, что этот параллелепипед является кубом.

1.38. При каких расположениях двугранного угла и секущей плоскости в сечении получится угол, который биссекторная плоскость двугранного угла пересекает по его биссектрисе?

1.39. Докажите, что сумма углов, которые прямая образует с двумя перпендикулярными плоскостями, не превосходит 90°.

1.40. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей этого ребра. Найдите этот угол.

1.41. Через ребро AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми BC и B_1D. Найдите эти углы.

Решения

1.1. Легко проверить, что треугольник A_1BD равносторонний. Кроме того, точка A равноудалена от его вершин. Поэтому она проецируется в центр этого треугольника. Аналогично точка C_1 проецируется в центр треугольника A_1BD. Следовательно, прямые A_1B и AC_1 перпендикулярны, а расстояние между ними равно расстоянию от центра треугольника A_1BD до его стороны. Так как стороны этого треугольника равны $a\sqrt{2}$, искомое расстояние равно $a/\sqrt{6}$.

1.2. Рассмотрим диагонали AB_1 и BD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Так как $B_1D_1 \parallel BD$, угол между диагоналями AB_1 и BD равен углу AB_1D_1. Но треугольник AB_1D_1 равносторонний, поэтому $\angle AB_1D_1 = 60°$.

Легко проверить, что прямая BD перпендикулярна плоскости ACA_1C_1; поэтому при проекции на эту плоскость она переходит в середину M отрезка AC. Аналогично точка B_1 при этой проекции переходит в середину N отрезка A_1C_1. Таким образом, расстояние между прямыми AB_1 и BD равно расстоянию от точки M до прямой AN. Если катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а его гипотенуза равна c, то расстояние от вершины прямого угла до гипотенузы равно ab/c. В прямоугольном треугольнике AMN катеты равны 1 и $1/\sqrt{2}$, поэтому его гипотенуза равна $\sqrt{3/2}$, а искомое расстояние равно $1/\sqrt{3}$.

1.3. Пусть O — центр куба. Тогда $2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{C_1D}$, $2\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{DA_1}$ и $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Так как треугольник C_1DA_1 правильный, то треугольник KLM тоже правильный, причем O — его центр.

1.4. Вычислим сначала величину угла. Пусть M — середина ребра BB_1. Тогда $A_1M \parallel KC$, поэтому угол между прямыми CK и A_1D равен углу MA_1D. Этот угол можно вычислить по теореме косинусов, так как $A_1D = \sqrt{2}$, $A_1M = \sqrt{5}/2$ и $DM = 3/2$. После несложных вычислений получаем $\cos MA_1D = 1/\sqrt{10}$.

Для вычисления расстояния между прямыми CK и A_1D спроецируем их на плоскость, проходящую через ребра AB и C_1D_1. Прямая A_1D при этом проецируется в середину O отрезка AD_1, а точки C и K — в середину Q отрезка BC_1 и середину P отрезка OD_1. Расстояние между прямыми CK и A_1D равно расстоянию от точки O до прямой PQ. Катеты OP и OQ прямоугольного треугольника OPQ равны $1/\sqrt{8}$ и 1. Поэтому его гипотенуза равна $3/\sqrt{8}$. Искомое расстояние равно произведению длин катетов, деленному на длину гипотенузы, т. е. оно равно 1/3.

1.5. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой CN. Проекцию любой точки X будем обозначать X_1. Расстояние от прямой CN до прямой AM (соответственно BK) равно расстоянию от точки C_1 до прямой A_1M_1 (соответственно B_1K_1). Ясно, что треугольник $A_1D_1B_1$ — равнобедренный, K_1 — точка пересечения его медиан, C_1 — середина A_1B_1, а M_1 — середина B_1D_1. Поэтому прямые A_1M_1 и B_1K_1 содержат медианы равнобедренного треугольника, а значит, точка C_1 равноудалена от них.

1.6. Пусть $ABCD$ — данный правильный тетраэдр, K — середина AB, M — середина AC. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную грани ABC и проходящую через ребро AB. Пусть D_1 — проекция вершины D, M_1 — проекция точки M, т. е. середина отрезка AK. Расстояние между прямыми CK и DM равно расстоянию от точки K до прямой D_1M_1. В прямоугольном треугольнике D_1M_1K катет KM_1 равен 1/4, а катет D_1M_1 равен высоте тетраэдра $ABCD$, т. е. он равен

$\sqrt{2/3}$. Поэтому гипотенуза равна $\sqrt{35/48}$, а значит, искомое расстояние равно $\sqrt{2/35}$.

Если N — середина ребра CD, то для нахождения расстояния между медианами CK и BN можно рассмотреть проекцию на ту же плоскость, что и в предыдущем случае. Пусть N_1 — проекция точки N, т. е. середина отрезка D_1K. В прямоугольном треугольнике BN_1K катет KB равен $1/2$, а катет KN_1 равен $\sqrt{1/6}$. Поэтому гипотенуза равна $\sqrt{5/12}$, а искомое расстояние равно $\sqrt{1/10}$.

1.7. Пусть (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)— точки данной плоскости. Тогда $ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0$, а значит, векторы $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ и (a, b, c) перпендикулярны. Поэтому любая прямая, проходящая через две точки данной плоскости, перпендикулярна вектору (a, b, c).

1.8. Так как $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то искомый косинус угла равен

$$\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

1.9. а) П е р в о е р е ш е н и е. Возьмем в качестве начала координат точку A и направим оси Ox, Oy и Oz по лучам AB, AD и AA_1. Тогда вектор с координатами $(b, a, 0)$ перпендикулярен плоскости BB_1D, а вектор $(0, c, -b)$ перпендикулярен плоскости ABC_1. Поэтому косинус угла между данными плоскостями равен $ac/\sqrt{a^2 + b^2}\cdot\sqrt{b^2 + c^2}$.

В т о р о е р е ш е н и е. Если площадь параллелограмма ABC_1D_1 равна S, а площадь его проекции на плоскость BB_1D равна s, то косинус угла между рассматриваемыми плоскостями равен s/S (см. задачу 2.13). Пусть M и N — проекции точек A и C_1 на плоскость BB_1D. Проекцией параллелограмма ABC_1D_1 на эту плоскость является параллелограмм $MBND_1$. Так как $MB = a^2/\sqrt{a^2 + b^2}$, то $s = a^2c/\sqrt{a^2 + b^2}$. Остается заметить, что $S = a\sqrt{b^2 + c^2}$.

б) Систему координат введем так же, как и в первом решении задачи а). Если плоскость задана уравнением $px + qy + rz = s$, то вектор (p, q, r) перпендикулярен ей. Плоскость AB_1D_1 содержит точки A, B_1 и D_1 с координатами $(0, 0, 0)$, $(a, 0, c)$ и $(0, b, c)$. Эти условия позволяют найти ее уравнение: $bcx + acy - abz = 0$; значит, вектор $(bc, ac, -ab)$ перпендикулярен ей. Учитывая, что точки с координатами $(0, 0, c)$, (a, b, c) и $(0, b, 0)$ принадлежат плоскости A_1C_1D, находим ее уравнение и получаем, что вектор $(bc, -ac, -ab)$ перпендикулярен ей. Поэтому косинус угла между данными плоскостями равен косинусу угла между этими двумя векторами, т. е. он равен $(a^2b^2 + b^2c^2 - a^2c^2)/(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$.

в) Систему координат введем так же, как в первом решении задачи а). Тогда плоскость A_1BD задается уравнением $x/a + y/b + z/c = 1$, а значит, вектор $abc(1/a, 1/b, 1/c) = (bc, ca, ab)$ перпендикулярен этой плоскости. Вектор $\overrightarrow{BD_1}$ имеет координаты $(-a, b, c)$. Поэтому синус угла между прямой BD_1 и плоскостью A_1BD равен косинусу угла между векторами $(-a, b, c)$ и (bc, ca, ab), т. е. он равен $abc/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$.

1.10. Пусть O — точка пересечения прямых AB и A_1B_1, M — точка пересечения прямых AC и A_1C_1. Докажем сначала, что $MO \perp OA$. Возьмем для этого на отрезках BB_1 и CC_1 точки B_2 и C_2 так, что $BB_2 = CC_2 = AA_1$. Ясно, что $MA : AA_1 = AC : C_1C_2 = 1$ и $OA : AA_1 = AB : B_1B_2 = 2$. Поэтому $MA : OA = 1 : 2$. Кроме того, $\angle MAO = 60°$, а значит, $\angle OMA = 90°$. Следовательно, плоскость AMA_1 перпендикулярна прямой MO, по которой пересекаются плоскости ABC и $A_1B_1C_1$. Поэтому угол между этими плоскостями равен углу AMA_1, который равен 45°.

1.11. Доказательство достаточно провести для случая, когда прямая l проходит через точку O пересечения прямых l_1 и l_2. Пусть A — некоторая точка прямой l, отличная от O; P — проекция точки A на плоскость Π; B_1 и B_2 — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые l_1 и l_2. Так как $\angle AOB_1 = \angle AOB_2$, то прямоугольные треугольники AOB_1 и AOB_2 равны, а значит, $OB_1 = OB_2$. По теореме о трех перпендикулярах $PB_1 \perp OB_1$ и $PB_2 \perp OB_2$. Прямоугольные треугольники POB_1 и POB_2 имеют общую гипотенузу и равные катеты OB_1 и OB_2, поэтому они равны, а значит, $\angle POB_1 = \angle POB_2$.

1.12. Пусть Π — плоскость, содержащая данные прямые. Случай, когда $l \perp \Pi$, очевиден. Если же прямая l не перпендикулярна плоскости Π, то l образует равные углы с данными прямыми тогда и только тогда, когда ее проекция на Π является биссектрисой одного из углов между ними (см. задачу 1.11); это означает, что l перпендикулярна второй биссектрисе.

1.13. Проведем через точку O_2 прямую l_1', параллельную l_1. Пусть Π — плоскость, содержащая прямые l_2 и l_1'; A_1' — проекция точки A_1 на плоскость Π. Как следует из задачи 1.11, прямая $A_1'A_2$ образует равные углы с прямыми l_1' и l_2, поэтому треугольник $A_1'O_2A_2$ равнобедренный, а значит, $O_2A_2 = O_2A_1' = O_1A_1$.

Легко проверить, что верно и обратное: если $O_1A_1 = O_2A_2$, то прямая A_1A_2 образует равные углы с прямыми l_1 и l_2.

1.14. Рассмотрим проекцию на плоскость Π, перпендикулярную прямой l. Точки A_1 и A_2 при этой проекции переходят в A_1' и A_2', прямая l — в точку L, а плоскости Π_1 и Π_2 — в прямые p_1 и p_2. Как следует из решения задачи 1.11, прямая A_1A_2 образует равные углы с перпендикулярами к плоскостям Π_1 и Π_2 тогда и только тогда, когда прямая $A_1'A_2'$ образует равные углы с перпендикулярами к прямым p_1 и p_2, т. е. образует равные углы с самими прямыми p_1 и p_2; а это, в свою очередь, означает, что $A_1'L = A_2'L$.

1.15. Если прямая не перпендикулярна плоскости Π и образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми этой плоскости, то ее проекция на плоскость Π параллельна биссектрисе одного из двух углов, образованных этими прямыми (задача 1.12). Можно считать, что все три прямые пересекаются в одной точке. Если прямая l является биссектрисой угла между прямыми l_1 и l_2, то l_1 и l_2 симметричны относительно прямой l, поэтому l не может быть биссектрисой угла между прямыми l_1 и l_3.

1.16. Можно считать, что данные прямые проходят через одну точку. Пусть a_1 и a_2 — биссектрисы углов между первой и второй прямой, b_1 и b_2 — между второй и третьей. Прямая образует равные углы с тремя данными прямыми тогда и только тогда, когда она перпендикулярна прямым a_i и b_j (задача 1.12), т. е. перпендикулярна плоскости, содержащей прямые a_i и b_j. Различных пар (a_i, b_j) ровно 4. Все плоскости, задаваемые этими парами прямых, различны, так как прямая a_i не может лежать в плоскости, содержащей b_1 и b_2.

1.17. Первое решение. Пусть прямая l перпендикулярна данным прямым l_1 и l_2. Проведем через прямую l_1 плоскость, параллельную l. Точка пересечения этой плоскости с прямой l_2 является одним концом искомого отрезка.

Второе решение. Рассмотрим проекцию данных прямых на плоскость, им параллельную. Концами искомого отрезка являются точки, проецирующиеся в точку пересечения проекций данных прямых.

1.18. Пусть прямая l проходит через точку O и пересекает прямые l_1 и l_2. Рассмотрим плоскости Π_1 и Π_2, содержащие точку O и прямые l_1 и l_2 соответственно. Прямая l принадлежит как плоскости Π_1, так и плоскости Π_2. Плоскости Π_1 и Π_2 не параллельны, так как они имеют общую точку O; ясно также, что они не совпадают. Поэтому плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются по прямой. Если эта прямая не параллельна ни прямой l_1, ни прямой

l_2, то она и есть искомая прямая; в противном случае искомой прямой не существует.

1.19. Чтобы получить искомый параллелепипед, нужно через каждую из данных прямых провести две плоскости: плоскость, параллельную одной из оставшихся прямых, и плоскость, параллельную другой из оставшихся прямых.

1.20. Пусть PQ — общий перпендикуляр к прямым p и q, причем точки P и Q лежат на прямых p и q соответственно. Проведем через точки P и Q прямые q' и p', параллельные прямым

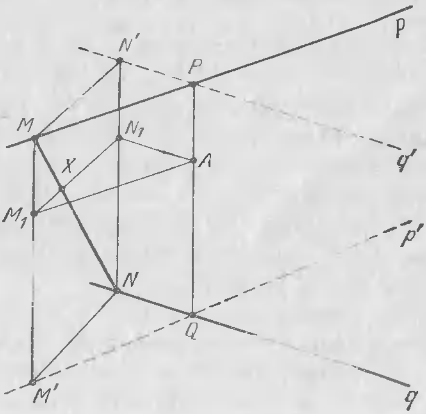


Рис. 16

q и p. Пусть M' и N' — проекции точек M и N на прямые p' и q'; M_1, N_1 и X — точки пересечения плоскости, проходящей через точку A параллельно прямым p и q, со сторонами MM' и NN' параллелограмма $MM'NN'$ и с его диагональю MN (рис. 16). По теореме о трех перпендикулярах $M'N \perp q$, а значит, $\angle M_1N_1A = 90°$. Ясно также, что $M_1X : N_1X = MX : NX = PA : QA$ — величина постоянная. Поэтому точка X принадлежит фиксированной прямой.

1.21. Введем систему координат, направив ее оси параллельно трем данным перпендикулярным прямым. Возьмем на прямой l вектор $\mathbf{v}$ единичной длины. Вектор $\mathbf{v}$ имеет координаты (x, y, z), где $x = \pm\cos\alpha$, $y = \pm\cos\beta$, $z = \pm\cos\gamma$. Поэтому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = x^2 + y^2 + z^2 = |\mathbf{v}|^2 = 1$.

1.22. П е р в о е р е ш е н и е. Пусть α, β и γ — углы между плоскостью ABC и плоскостями DBC, DAC и DAB соответственно. Если площадь грани ABC равна S, то площади граней DBC, DAC и DAB равны $S\cos\alpha$, $S\cos\beta$ и $S\cos\gamma$ (см. задачу 2.13). Остается проверить, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Так как углы α, β и γ равны углам между прямой, перпендикулярной грани ABC, и прямыми DA, DB и DC, то можно воспользоваться результатом задачи 1.21.

Второе решение. Пусть α — угол между плоскостями ABC и DBC; D' — проекция точки D на плоскость ABC. Тогда $S_{DBC} = \cos\alpha S_{ABC}$ и $S_{D'BC} = \cos\alpha S_{DBC}$ (см. задачу 2.13), поэтому $\cos\alpha = S_{DBC}/S_{ABC}$, $S_{D'BC} = S^2_{DBC}/S_{ABC}$. Аналогичные равенства можно получить и для треугольников $D'AB$ и $D'AC$. Складывая их и учитывая, что сумма площадей треугольников $D'BC$, $D'AC$ и $D'AB$ равна площади треугольника ABC, получаем требуемое.

1.23. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны данным хордам, а точка A и центр O шара являются его противоположными вершинами. Пусть a_1, a_2 и a_3 — длины его ребер; ясно, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$.

а) Если хорда удалена на расстояние x от центра шара, то квадрат ее длины равен $4R^2 - 4x^2$. Так как расстояния от данных хорд до точки O равны диагоналям граней параллелепипеда, то искомая сумма квадратов равна $12R^2 - 4\left(a_2^2 + a_3^2\right) - 4\left(a_1^2 + a_3^2\right) - 4\left(a_1^2 + a_2^2\right) = 12R^2 - 8a^2$.

б) Если длина хорды равна d, а точка A находится на расстоянии y от ее середины, то сумма квадратов длин отрезков хорды, на которые она делится точкой A, равна $2y^2 + d^2/2$. Так как расстояния от точки A до середин данных хорд равны a_1, a_2 и a_3, а сумма квадратов длин хорд равна $12R^2 - 8a^2$, то искомая сумма квадратов равна $2a^2 + (6R^2 - 4a^2) = 6R^2 - 2a^2$.

1.24. Пусть α, β и γ — углы между ребрами куба и прямой, перпендикулярной данной плоскости. Тогда длины проекций ребер куба на эту плоскость принимают значения $a\sin\alpha$, $a\sin\beta$ и $a\sin\gamma$, причем каждое значение принимается ровно 4 раза. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (задача 1.21), то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. Поэтому искомая сумма квадратов равна $8a^2$.

1.25. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. В результате получим куб, в который вписан данный тетраэдр, причем ребро куба равно $a/\sqrt{2}$. Проекция каждой грани куба является параллелограммом, диагонали которого равны проекциям ребер тетраэдра. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. Поэтому сумма квадратов длин двух противоположных ребер тетраэдра равна сумме квадратов длин проекций двух пар противоположных ребер куба. Следовательно, сумма квадратов проекций ребер тетраэдра равна сумме квадратов проекций ребер куба, т. е. она равна $4a^2$.

1.26. Как и в предыдущей задаче, будем считать, что вершины тетраэдра AB_1CD_1 расположены в вершинах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; длина ребра этого куба равна $a/\sqrt{2}$. Пусть O — центр тетраэдра. Отрезки OA и OD_1 являются половинами диагоналей параллелограмма ABC_1D_1, поэтому сумма квадратов их проекций равна четверти суммы квадратов проекций сторон этого параллелограмма. Аналогично сумма квадратов проекций отрезков OC и OB_1 равна четверти суммы квадратов проекций сторон параллелограмма A_1B_1CD. Заметим, далее, что сумма квадратов проекций диагоналей параллелограммов AA_1D_1D и BB_1C_1C равна сумме квадратов проекций их сторон. В итоге получаем, что искомая сумма квадратов равна четверти суммы квадратов проекций ребер куба, т. е. равна a^2.

1.27. Пусть (x_1, y_1, z_1)— основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость. Так как вектор (a, b, c) перпендикулярен данной плоскости (задача 1.7), то $x_1 = x_0 + \lambda a$, $y_1 = y_0 + \lambda b$ и $z_1 = z_0 + \lambda c$, причем искомое расстояние равно $|\lambda|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Точка (x_1, y_1, z_1) лежит в данной плоскости, поэтому

$$a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c(z_0 + \lambda c) + d = 0,$$

т. е. $\lambda = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)/(a^2 + b^2 + c^2)$.

1.28. Введем систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$ соответственно. Если точка M имеет координаты (x, y, z), то $\dfrac{AM^2}{BM^2} = \dfrac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$. Уравнение $AM : BM = k$ приводится к виду

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2.$$

Это уравнение является уравнением сферы с центром $\left(-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}a, 0, 0\right)$ и радиусом $\left|\dfrac{2ka}{1-k^2}\right|$.

1.29. Введем систему координат, направив ось Oz перпендикулярно плоскости ABC. Пусть точка X имеет координаты (x, y, z). Тогда, например, $AX^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + z^2$. Поэтому для координат точки X получаем уравнение вида $(p + q + r)(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha x + \beta y + \delta = 0$, т. е. $\alpha x + \beta y + \delta = 0$. Это уравнение задает плоскость, перпендикулярную плоскости ABC (в вырожденных случаях оно задает пустое множество или все пространство).

1.30. Пусть ось конуса параллельна оси Oz; его вершина имеет координаты (a, b, c); α — угол между осью конуса и образующей. Тогда точки поверхности конуса удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2(z-c)^2,$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$. Разность двух уравнений конических поверхностей с одним и тем же углом α является линейным уравнением; все общие точки конических поверхностей лежат в плоскости, заданной этим уравнением.

1.31. Введем систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по лучам AB, AD и AA_1. Прямая AA_1 задается уравнениями $x=0$, $y=0$; прямая CD — уравнениями $y=a$, $z=0$; прямая B_1C_1 — уравнениями $x=a$, $z=a$. Поэтому квадраты расстояний от точки с координатами (x, y, z) до прямых AA_1, CD и B_1C_1 равны x^2+y^2, $(y-a)^2+z^2$ и $(x-a)^2+(z-a)^2$ соответственно. Все эти числа не могут быть одновременно меньше $a^2/2$, так как $x^2+(x-a)^2\geqslant a^2/2$, $y^2+(y-a)^2\geqslant a^2/2$ и $z^2+(z-a)^2\geqslant a^2/2$. Все эти числа равны $a^2/2$ для точки с координатами $(a/2, a/2, a/2)$, т. е. для центра куба.

1.32. Направим оси координат по лучам OA, OB и OC. Пусть прямая l образует с этими осями углы α, β и γ соответственно. Координаты точки M равны координатам проекций точек A_1, B_1 и C_1 на оси Ox, Oy и Oz соответственно, т. е. они равны $a\cos 2\alpha$, $a\cos 2\beta$ и $a\cos 2\gamma$, где $a=|OA|$. Так как $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3=-1$ (см. задачу 1.21) и $-1\leqslant\cos 2\alpha, \cos 2\beta, \cos 2\gamma\leqslant 1$, то искомое ГМТ состоит из точек пересечения куба $|x|, |y|, |z|\leqslant a$ с плоскостью $x+y+z=-a$; эта плоскость проходит через вершины с координатами $(a, -a, -a)$, $(-a, a, -a)$ и $(-a, -a, a)$.

Глава 2

ПРОЕКЦИИ, СЕЧЕНИЯ, РАЗВЕРТКИ

§ 1. Вспомогательные проекции

2.1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M — точка пересечения диагонали AC_1 с плоскостью A_1BD. Докажите, что $AM = AC_1/3$.

2.2. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведен общий перпендикуляр MN к прямым A_1B и B_1C (точка M лежит на прямой A_1B). Найдите отношение $A_1M : MB$.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезках AA_1 и BC_1 взяты точки M и N так, что прямые MN и B_1D пересекаются. Найдите разность отношений $BC_1 : BN$ и $AM : AA_1$.

2.3. Углы между некоторой плоскостью и сторонами правильного треугольника равны α, β и γ. Докажите, что синус одного из этих углов равен сумме синусов двух других углов.

2.4. В основании пирамиды лежит многоугольник с нечетным числом сторон. Можно ли на ее ребрах так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю?

2.5. Плоскость, проходящая через середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$, пересекает ребра AD и BC в точках L и N. Докажите, что $BC : CN = AD : DL$.

2.6. В пространстве даны точки A, A_1, B, B_1, C, C_1, не лежащие в одной плоскости, причем векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ сонаправлены. Плоскости ABC_1, AB_1C и A_1BC пересекаются в точке P, а плоскости A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1 — в точке P_1. Докажите, что $PP_1 \parallel AA_1$.

2.7. Даны плоскость П и точки A и B вне ее. Найдите геометрическое место точек X плоскости П, для которых прямые AX и BX образуют равные углы с плоскостью П.

2.8. Докажите, что сумма длин ребер выпуклого многогранника больше $3d$, где d — наибольшее расстояние между его вершинами.

§ 2. Теорема о трех перпендикулярах

2.9. Прямая l не перпендикулярна плоскости П, l' — ее проекция на плоскость П. Пусть l_1 — некоторая прямая плоскости П. Докажите, что $l \perp l_1$ тогда и только тогда, когда $l' \perp l_1$ (теорема о трех перпендикулярах).

2.10. а) Докажите, что противоположные ребра правильного тетраэдра перпендикулярны.

б) В основании правильной пирамиды с вершиной S лежит многоугольник $A_1 \ldots A_{2n-1}$. Докажите, что ребра SA_1 и A_nA_{n+1} перпендикулярны.

2.11. Докажите, что противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из его высот проходит через точку пересечения высот грани (в этом случае и все остальные его высоты проходят через точки пересечения высот граней).

2.12. Ребро AD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно грани ABC. Докажите, что при проекции на плоскость BCD ортоцентр треугольника ABC переходит в ортоцентр треугольника BCD.

§ 3. Площадь проекции многоугольника

2.13. Площадь многоугольника равна S. Докажите, что площадь его проекции на плоскость П равна $S \cos \varphi$, где φ — угол между плоскостью П и плоскостью многоугольника.

2.14. Вычислите косинус двугранного угла при ребре правильного тетраэдра.

2.15. Двугранный угол при основании правильной n-угольной пирамиды равен α. Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями.

2.16. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен α. Найдите отношение площадей сечений.

2.17. Двугранные углы при ребрах основания треугольной пирамиды равны α, β и γ; площади соответствующих боковых граней равны S_a, S_b и S_c. Докажите, что площадь основания равна

$$S_a \cos \alpha + S_b \cos \beta + S_c \cos \gamma.$$

§ 4. Задачи о проекциях

2.18. Проекции пространственной фигуры на две пересекающиеся плоскости являются прямыми линиями. Обязательно ли эта фигура — прямая линия?

2.19. Проекции тела на две плоскости являются кругами. Докажите, что радиусы этих кругов равны.

2.20. Докажите, что площадь проекции куба с ребром 1 на плоскость равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.

2.21. Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что правильный треугольник можно так спроецировать (ортогонально) на некоторую плоскость, что его проекция будет подобна данному треугольнику.

2.22. Проекции двух выпуклых тел на три координатные плоскости совпадают. Обязательно ли эти тела имеют общую точку?

§ 5. Сечения

2.23. В пространстве даны две параллельные плоскости и две сферы, причем первая сфера касается первой плоскости в точке A, вторая сфера касается второй плоскости в точке B и сферы касаются друг друга в точке C. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

2.24. Около шара описан усеченный конус, основания которого являются большими кругами двух других шаров (см. задачу 4.18). Определите площадь полной поверхности усеченного конуса, если сумма площадей поверхностей трех шаров равна S.

2.25. Два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны, а их длины равны a и b; расстояние между ними равно c. В тетраэдр вписан куб, четыре ребра которого перпендикулярны этим двум ребрам тетраэдра, а на каждой грани тетраэдра лежат ровно две вершины куба. Найдите ребро куба.

2.26. Какие правильные многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью?

2.27. Все сечения некоторого тела плоскостями являются кругами. Докажите, что это тело — шар.

2.28. Через вершину A прямого кругового конуса проведено сечение максимальной площади. Его площадь в два раза больше площади сечения, проходящего через ось конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

2.29. Плоскость делит медианы граней ABC, ACD и ADB тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины A, в отношениях $2:1$, $1:2$ и $4:1$, считая от вершины. Пусть P, Q и R — точки пересечения этой плоскости с прямыми AB, AC и AD. Найдите отношения $AP:PB$, $AQ:QC$ и $AR:RD$.

2.30. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (с вершиной S) на диагонали AD взяты три точки, делящие ее на 4 равные части. Через эти точки проведены сечения, параллельные плоскости SAB. Найдите отношения площадей полученных сечений.

2.31. Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Докажите, что боковые грани этой пирамиды — правильные треугольники.

§ 6. Развертки

2.32. Докажите, что все грани тетраэдра $ABCD$ равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) суммы плоских углов при каких-либо трех вершинах тетраэдра равны 180°;

б) суммы плоских углов при каких-либо двух вершинах равны 180° и, кроме того, равны какие-либо два противоположных ребра;

в) сумма плоских углов при какой-либо вершине равна 180° и, кроме того, в тетраэдре есть две пары равных противоположных ребер.

2.33. Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180°, то каждое ее боковое ребро меньше полупериметра основания.

2.34. Пусть S_A, S_B, S_C и S_D — суммы плоских углов тетраэдра $ABCD$ при вершинах A, B, C и D. Докажите, что если $S_A = S_B$ и $S_C = S_D$, то $\triangle ABC = \triangle BAD$ и $\triangle ACD = \triangle BDC$.

Задачи для самостоятельного решения

2.35. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Пусть P, K и L — середины ребер AA_1, A_1D_1 и B_1C_1; Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

2.36. Число вершин многогранника равно n. Докажите, что у него есть проекция, число вершин которой: а) не меньше 4; б) не больше $n - 1$.

2.37. Проекции прямоугольного треугольника на грани двугранного угла величиной α являются правильными треугольниками со стороной 1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника.

2.38. Докажите, что если боковую поверхность цилиндра пересечь наклонной плоскостью, а затем разрезать вдоль образующей и развернуть на плоскость, то линия сечения будет представлять собой синусоиду.

2.39. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M, причем $DM : CM = 2 : 3$. Вычислите площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

2.40. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна a, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α. Плоскость, параллельная AC и BS, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности.

2.41. Ребро правильного тетраэдра равно a. Плоскость Π проходит через вершину B и середины ребер AC и AD. Шар касается прямых AB, AC, AD и той части плоскости Π, которая заключена внутри тетраэдра. Найдите радиус шара.

2.42. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Пусть M — центр грани ADC, N — середина ребра BC. Найдите радиус шара, вписанного в трехгранный угол A и касающегося прямой MN.

2.43. Двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$ прямой; M — середина ребра CD. Докажите, что площадь треугольника AMB в четыре раза меньше площади параллелограмма, стороны которого равны и параллельны отрезкам AB и CD.

Решения

2.1. Рассмотрим проекцию данного параллелепипеда на плоскость ABC параллельно прямой A_1D (рис. 17). Ясно, что на этом рисунке $AM : MC_1 = AD : BC_1 = 1 : 2$.

2.2. а) П е р в о е р е ш е н и е. Рассмотрим проекцию данного куба на плоскость, перпендикулярную прямой B_1C (рис. 18, a). На этом чертеже прямая B_1C изображается одной точкой, а отрезок MN — перпендикуляром, опущенным из этой точки на прямую A_1B. Ясно также, что на этом чертеже $A_1B_1 : B_1B = \sqrt{2} : 1$. Так как $A_1M : MN = A_1B_1 : B_1B$ и $MN : MB = A_1B_1 : B_1B$, то $A_1M : MB = A_1B_1^2 : B_1B^2 = 2 : 1$.

Второе решение. Рассмотрим проекцию данного куба на плоскость, перпендикулярную прямой AC_1 (рис. 18, *б*). Прямая AC_1 перпендикулярна плоскостям треугольников A_1BD и B_1CD_1, поэтому она перпендикулярна прямым A_1B и B_1C, т. е. отрезок MN ей параллелен. Таким образом, отрезок MN на данном чертеже изображается точкой пересечения отрезков A_1B и B_1C. Следовательно, на этом чертеже $A_1M : MB = A_1C : BB_1 = 2 : 1$.

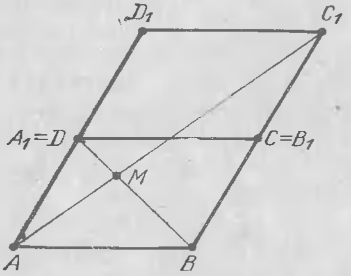


Рис. 17

б) Рассмотрим проекцию куба на плоскость, перпендикулярную диагонали B_1D (рис. 19). На этом рисунке шестиугольник $ABCC_1D_1A_1$ правильный, а прямая MN проходит через его центр; пусть L — точка пересечения прямых MN и AD_1, P — точка пересечения прямой AA_1 и прямой, про-

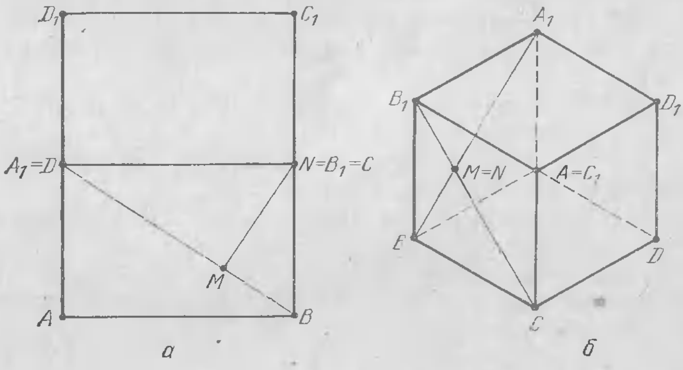


Рис. 18

ходящей через точку D_1 параллельно MN. Легко убедиться, что $\triangle ADM = \triangle A_1D_1P$, а значит, $AM = A_1P$. Поэтому $BC_1 : BN = AD_1 : D_1L = AP : PM = (AA_1 + AM) : AA_1 = 1 + AM : AA_1$, т. е. искомая разность отношений равна 1.

2.3. Пусть A_1, B_1 и C_1 — проекции вершин данного правильного треугольника ABC на прямую, перпендикулярную данной плоскости. Если углы между данной плоскостью и прямыми AB, BC и CA равны γ, α и β, то $A_1B_1 = a \sin \gamma$, $B_1C_1 = a \sin \alpha$ и $C_1A_1 = a \sin \beta$, где a — сторона треугольника ABC. Пусть для определенности точка C_1 лежит на отрезке A_1B_1. Тогда $A_1B_1 = A_1C_1 + C_1B_1$, т. е. $\sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta$.

2.4. Нет, нельзя. Рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную основанию. Проекции всех векторов основания нулевые, а проекция суммы векторов боковых ребер не может быть равна нулю, так как сумма нечетного количества чисел ± 1 нечетна.

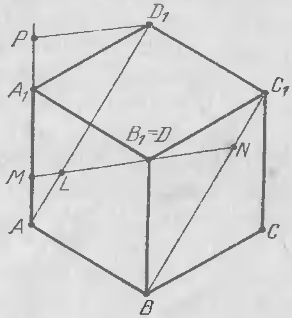


Рис. 19

2.5. Рассмотрим проекцию тетраэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, соединяющей середины ребер AB и CD. Данная плоскость проецируется при этом в прямую LN, проходящую через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ADBC$. Ясно, что для проекций $B'C' : C'N' = A'D' : D'L'$.

2.6. Пусть K — точка пересечения отрезков BC_1 и B_1C. Тогда плоскости ABC_1 и AB_1C пересекаются по прямой AK, а плоскости A_1B_1C и A_1BC_1 — по прямой A_1K. Рассмотрим проекцию на плоскость ABC параллельно AA_1. Как проекция точки P, так и проекция точки P_1 лежит на прямой AK_1, где K_1 — проекция точки K. Аналогичные рассуждения показывают, что проекции точек P и P_1 лежат на прямых BL_1 и CM_1, где L_1 — проекция точки пересечения прямых AC_1 и A_1C, M_1 — проекция точки пересечения прямых AB_1 и A_1B. Поэтому проекции точек P и P_1 совпадают, т. е. $PP_1 \parallel AA_1$.

2.7. Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на плоскость П. Прямые AX и BX образуют равные углы с плоскостью П тогда и только тогда, когда подобны прямоугольные треугольники AA_1X и BB_1X, т. е. $A_1X : B_1X = A_1A : B_1B$. Геометрическим местом точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек A_1 и B_1 той же плоскости постоянно, является окружность Аполлония или прямая (см. Прасолов, 13.7 или Шарыгин, II.9).

2.8. Пусть $d = AB$, где A и B — вершины многогранника. Рассмотрим проекцию многогранника на прямую AB. Если некоторая точка C проецируется не на отрезок AB, а на его продолжение, например, за точку B, то $AC > AB$. Поэтому все точки многогранника проецируются в точки отрезка AB. Так как длина проекции отрезка на прямую не превосходит длины самого отрезка, то достаточно доказать, что в каждую внутреннюю точку отрезка AB проецируются точки по крайней мере трех различных ребер. Проведем через произвольную внутреннюю точку отрезка AB плоскость, перпендикулярную ему. Сечение многогранника этой плоскостью является n-угольником, где $n \geqslant 3$, а значит, плоскость пересекает по крайней мере три различных ребра.

2.9. Пусть O — точка пересечения прямой l и плоскости П (случай, когда прямая l параллельна плоскости П, очевиден); A — произвольная точка прямой l, отличная от точки O; A' — ее проекция на плоскость П. Прямая AA' перпендикулярна любой прямой плоскости П, поэтому $AA' \perp l_1$. Если $l \perp l_1$, то $AO \perp l_1$; следовательно, прямая l_1 перпендикулярна плоскости AOA', а значит, $A'O \perp l_1$. Если $l' \perp l_1$, то рассуждения аналогичны.

2.10. Решим сразу задачу б), частным случаем которой является задача а). Проекцией вершины S на плоскость основания является центр O правильного многоугольника $A_1 \ldots A_{2n-1}$, а проекцией прямой SA_1 на эту плоскость является прямая OA_1. Так как $OA_1 \perp A_nA_{n+1}$, то $SA_1 \perp A_nA_{n+1}$ (см. задачу 2.9).

2.11. Пусть AH — высота тетраэдра $ABCD$. По теореме о трех перпендикулярах $BH \perp CD$ тогда и только тогда, когда $AB \perp CD$.

2.12. Пусть BK и BM — высоты треугольников ABC и DBC соответственно. Так как $BK \perp AC$ и $BK \perp AD$, то прямая BK перпендикулярна плоскости ADC, а значит, $BK \perp DC$. По теореме о трех перпендикулярах проекция прямой BK на плоскость BDC перпендикулярна прямой DC, т. е. она совпадает с прямой BM. Для высот, опущенных из вершины C, доказательство аналогично.

2.13. Утверждение задачи очевидно для треугольника, одна из сторон которого параллельна линии пересечения плоскости П с плоскостью многоугольника. В самом деле, длина этой стороны при проекции не изменяется, а длина высоты, опущенной на нее, при проекции изменяется в $\cos\varphi$ раз.

Докажем теперь, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники указанного вида. Проведем для этого через все вершины многоугольника прямые, параллельные линии пересечения плоскостей. Многоугольник разрежется при этом на треугольники и трапеции. Остается разрезать каждую трапецию по любой из ее диагоналей.

2.14. Пусть φ — двугранный угол при ребре правильного тетраэдра; O — проекция вершины D правильного тетраэдра $ABCD$ на противоположную грань. Тогда $\cos\varphi = S_{ABO} : S_{ABD} = 1/3$.

2.15. Пусть S — площадь боковой грани, h — высота пирамиды, a — сторона основания, φ — искомый угол. Площадь проекции на биссекторную плоскость двугранного угла между соседними боковыми гранями для каждой из этих граней равна $S \cos (\varphi/2)$; с другой стороны, она равна $ah \sin (\pi/n)/2$. Ясно также, что площадь проекции боковой грани на плоскость, проходящую через ее основание перпендикулярно основанию пирамиды, равна $S \sin \alpha$; с другой стороны, она равна $ah/2$. Следовательно, $\cos (\varphi/2) = \sin \alpha \sin (\pi/n)$.

2.16. Проекцией стороны основания на плоскость первого сечения является половина диагонали основания, поэтому площадь проекции второго сечения на плоскость первого сечения равна половине площади первого сечения. С другой стороны, если площадь второго сечения равна S, то площадь его проекции равна $S \cos \alpha$. Поэтому площадь первого сечения равна $2S \cos \alpha$.

2.17. Пусть D' — проекция вершины D пирамиды $ABCD$ на плоскость основания. Тогда $S_{ABC} = \pm S_{BCD'} \pm S_{ACD'} \pm \pm S_{ABD'} = S_a \cos \alpha + S_b \cos \beta + S_c \cos \gamma$. Площадь треугольника BCD' берется со знаком «—», если точки D' и A лежат по разные стороны от прямой BC; для площадей треугольников ACD' и ABD' знак выбирается аналогично.

2.18. Не обязательно. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную двум данным плоскостям. Любая фигура, расположенная в этой плоскости, будет обладать требуемым свойством, если только ее проекции на данные плоскости не ограничены.

2.19. Диаметры указанных кругов равны длине проекции тела на прямую, по которой пересекаются данные плоскости.

2.20. Пусть точки B_1 и D при рассматриваемой проекции переходят во внутренние точки проекции куба (рис. 20). Тогда площадь проекции куба равна удвоенной площади проекции треугольника ACD_1, т. е. она равна $2S \cos \varphi$, где S — площадь треугольника ACD_1, φ — угол между плоскостью проекции и плоскостью ACD_1. Так как сторона треугольника ACD_1 равна $\sqrt{2}$, то $2S = \sqrt{3}$.

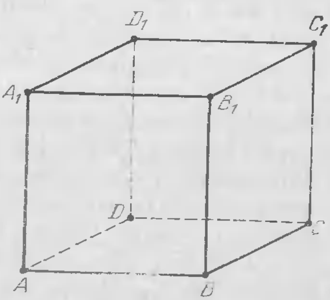


Рис. 20

Проекция куба на прямую l, перпендикулярную плоскости проекции, совпадает с проекцией диагонали B_1D на эту прямую. Так как прямая B_1D перпендикулярна плоскости ACD_1, то угол между прямыми l и B_1D тоже равен φ. Поэтому длина проекции куба на прямую l равна $B_1D \cos\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi$.

2.21. Проведем через вершины A и B прямые, перпендикулярные плоскости ABC, и возьмем на них точки A_1 и B_1. Пусть $AA_1 = x$ и $BB_1 = y$ (если точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны от плоскости ABC, то считаем, что числа x и y имеют разные знаки). Пусть a, b и c — длины сторон данного треугольника. Достаточно проверить, что числа x и y можно подобрать так, чтобы треугольник A_1B_1C был правильным, т. е. выполнялись равенства $x^2 + b^2 = y^2 + a^2$ и $(x - y)^2 + c^2 = y^2 + a^2$. Пусть $a^2 - b^2 = \lambda$ и $a^2 - c^2 = \mu$, т. е. $x^2 - y^2 = \lambda$ и $x^2 - 2xy = \mu$. Из второго равенства получаем $2y = x - \mu/x$. Подставляя это выражение в первое равенство, приходим к уравнению $3u^2 + (2\mu - 4\lambda)u - \mu^2 = 0$, где $u = x^2$. Дискриминант D этого квадратного уравнения неотрицателен, поэтому оно имеет корень x. Если $x \neq 0$, то $2y = x - \mu/x$. Остается заметить, что если $x = 0$ — единственное решение полученного уравнения, т. е. $D = 0$, то $\lambda = \mu = 0$, поэтому $y = 0$ — решение.

2.22. Обязательно. Докажем сначала, что если проекции двух выпуклых плоских фигур на координатные оси совпадают, то эти фигуры имеют общую точку. Для этого достаточно доказать, что если точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA прямоугольника $ABCD$, то точка пересечения диагоналей AC и BD принадлежит четырехугольнику $KLMN$. Диагональ AC не принадлежит треугольникам KBL и NDM, а диагональ BD не принадлежит треугольникам KAN и LCM. Поэтому точка пересечения диагоналей AC и BD не принадлежит ни одному из этих треугольников, а значит, она принадлежит четырехугольнику $KLMN$.

Опорные плоскости, параллельные координатным плоскостям, для рассматриваемых тел совпадают. Возьмем одну из опорных плоскостей. Точки каждого из рассматриваемых тел, лежащие в этой плоскости, образуют выпуклую фигуру, причем проекции этих фигур на координатные оси совпадают. Поэтому в каждой опорной плоскости есть хотя бы одна общая точка рассматриваемых тел.

2.23. Во всяком случае, точки A, B и C лежат в одной плоскости, и поэтому можно рассмотреть сечение плоскостью, содержащей эти точки. Так как плоскость сечения проходит через точку касания сфер (сферы и плоскости), в сечении получаются касающиеся окружности (окружность и прямая). Пусть O_1 и O_2 — центры первой и второй окружностей. Так как $O_1A \parallel O_2B$ и точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, $\angle AO_1C = \angle BO_2C$.

Поэтому $\angle ACO_1 = \angle BCO_2$, т. е. точки A, B и C лежат на одной прямой.

2.24. Осевое сечение данного усеченного конуса является описанной трапецией $ABCD$ с основаниями $AD = 2R$ и $BC = 2r$. Пусть P — точка касания вписанной окружности со стороной AB, O — центр вписанной окружности. В треугольнике ABO сумма углов при вершинах A и B равна 90°, поэтому он прямоугольный. Следовательно, $AP : PO = PO : BP$, т. е. $PO^2 = AP \cdot BP$. Ясно также, что $AP = R$ и $BP = r$. Поэтому радиус PO вписанной в конус сферы равен $\sqrt{Rr}$, а значит, $S = 4\pi(R^2 + Rr + r^2)$.

Выражая объем данного усеченного конуса по формулам, приведенным в решениях задач 3.7 и 3.11, и приравнивая эти выражения, получаем, что площадь его полной поверхности равна $2\pi(R^2 + Rr + r^2) = S/2$ (нужно учесть, что высота усеченного конуса равна удвоенному радиусу сферы, около которой он описан).

2.25. Общий перпендикуляр к данным ребрам делится параллельными им плоскостями граней куба на отрезки длиной y, x и z (x — длина ребра куба; отрезок длиной y прилегает к ребру a). Плоскости граней куба, параллельные данным ребрам, пересекают тетраэдр по двум прямоугольникам. Меньшие стороны этих прямоугольников равны ребру куба x. Так как стороны этих прямоугольников легко вычисляются, получаем $x = by/c$ и $x = az/c$. Следовательно, $c = x + y + z = x + cx/b + cx/a$, т. е. $x = abc/(ab + bc + ca)$.

2.26. Каждая сторона полученного многоугольника принадлежит одной из граней куба, поэтому число его сторон не превосходит 6. Кроме того, стороны, принадлежащие противоположным граням куба, параллельны, так как линии пересечения плоскости с двумя параллельными плоскостями параллельны. Следовательно, сечение куба не может быть правильным пятиугольником, так как у того нет параллельных сторон. Легко проверить, что правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник могут быть сечениями куба.

2.27. Рассмотрим некоторый круг, являющийся сечением данного тела, и проведем через его центр прямую l, перпендикулярную его плоскости. Эта прямая пересекает данное тело по некоторому отрезку AB. Все сечения, проходящие через прямую l, являются кругами с диаметром AB.

2.28. Рассмотрим произвольное сечение, проходящее через вершину A. Это сечение является треугольником ABC, причем его стороны AB и AC являются образующими конуса, т. е. имеют постоянную длину. Поэтому площадь сечения пропорциональна синусу угла BAC. Угол BAC изменяется от 0° до φ, где φ — угол при вершине осевого сечения конуса. Если $\varphi \leqslant \leqslant 90°$, то наибольшую площадь имеет осевое сечение, а если $\varphi > 90°$, то наибольшую площадь имеет сечение с прямым углом при вершине A. Таким образом, из условия задачи следует, что $\sin\varphi = 0{,}5$ и $\varphi > 90°$, т. е. $\varphi = 120°$.

2.29. Решим сначала следующую задачу. Пусть на сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки L и K так, что $AL : LB = m$ и $AK : KC = n$; N — точка пересечения прямой KL и медианы AM. Вычислим отношение $AN : NM$. Рассмотрим для этого точки S и T, в которых прямая KL пересекает прямую BC и прямую, проведенную через точку A параллельно BC. Ясно, что $AT : SB = AL : LB = m$ и $AT : SC = AK : KC = n$. Поэтому $AN : NM = AT : SM = 2AT : (SC + SB) = 2(SC : AT + SB : AT)^{-1} = 2mn/(m + n)$. Заметим, что все рассуждения остаются справедливыми и в случае, когда точки K и L взяты на продолжениях сторон треугольника; в этом случае числа m и n отрицательны.

Предположим теперь, что $AP : PB = p$, $AQ : QC = q$ и $AR : RD = r$. Тогда по условию задачи $2pq/(p + q) = 2$, $2qr/(q + r) = 1/2$ и $2pr/(p + r) = 4$. Решая эту систему уравнений, получаем $p = -4/5$, $q = 4/9$ и $r = 4/7$. Отрицательность числа p означает, что данная плоскость пересекает не ребро AB, а его продолжение.

2.30. Занумеруем данные секущие плоскости так, что первая из них — ближайшая к вершине A, а третья — наиболее удаленная от вершины A. Рассматривая проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой CF, легко получить, что первая плоскость проходит через середину ребра SC и делит ребро SD в отношении $1 : 3$, считая от точки S; вторая плоскость проходит через середину ребра SD, а третья делит его в отношении $3 : 1$. Пусть сторона основания пирамиды равна $4a$, а высота боковой грани равна $4h$. Тогда первое сечение состоит из двух трапеций: одна с высотой $2h$ и основаниями $6a$ и $4a$, а другая с высотой h и основаниями $4a$ и a; второе сечение является трапецией с высотой $2h$ и основаниями $8a$ и $2a$; третье сечение — трапецией с высотой h и основаниями $6a$ и $3a$. Поэтому отношение площадей сечений равно $25 : 20 : 9$.

2.31. Так как у четырехугольной пирамиды пять граней, данное сечение проходит через все грани. Поэтому можно считать, что вершины K, L, M, N и O правильного пятиугольника лежат на ребрах AB, BC, CS, DS и AS соответственно. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную ребру BC (рис. 21). Пусть $B'K' : A'B' = p$. Так как $M'K' \parallel N'O'$, $M'O' \parallel K'L'$, $K'N' \parallel M'L'$, то $B'M' : B'S' = A'O' : A'S' = S'N' : A'S' = p$. Поэтому $S'O' : A'S' = 1 - p$, а значит, $S'N' :$

$: A'S' = (1-p)^2$, так как $M'N' \parallel L'O'$. Итак, $p = S'N' :$ $: A'S' = (1-p)^2$, т. е. $p = (3-\sqrt{5})/2$.

Пусть $SA = 1$ и $\angle ASB = 2\varphi$. Тогда $NO^2 = p^2 + (1-p)^2 - 2p(1-p)\cos 2\varphi$ и $KO^2 = p^2 + 4(1-p)^2 \sin^2\varphi - 4p(1-p)\sin^2\varphi$. Приравнивая эти выражения и учитывая, что $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$, сократим на $1-p$; получим $1 - 3p = 4(1-3p) \times \sin^2\varphi$. Так как в нашем случае $1 - 3p \neq 0$, то $\sin^2\varphi = 1/4$, т. е. $\varphi = 30°$.

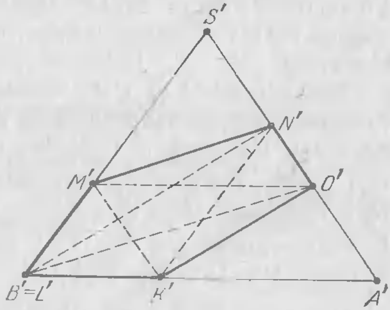


Рис. 21

2.32. а) Пусть суммы плоских углов при вершинах A, B и C равны 180°. Тогда развертка тетраэдра на плоскость ABC является треугольником, причем точки A, B и C — середины его сторон. Следовательно, все грани тетраэдра равны.

Обратно, если тетраэдр равногранный, то при развертке любые две его смежные грани образуют параллелограмм. Следовательно, развертка тетраэдра является треугольником, т. е. суммы плоских углов при вершинах тетраэдра равны 180°.

б) Пусть суммы плоских углов при вершинах A и B равны 180°. Рассмотрим развертку тетраэдра на плоскость грани ABC (рис. 22). Возможны два варианта:

1) Равны ребра AB и CD. Тогда $D_1C + D_2C = 2AB = D_1D_2$, поэтому точка C — середина отрезка D_1D_2.

2) Равны ребра, отличные от AB и CD. Пусть для определенности $AC = BD$. Тогда точка C лежит как на серединном перпендикуляре к отрезку D_1D_2, так и на окружности радиуса BD с центром A. Одна из точек пересечения этих множеств — середина отрезка D_1D_2, а вторая точка пересечения лежит на прямой, проходящей через D_3 параллельно D_1D_2. Вторая точка в нашем случае не годится.

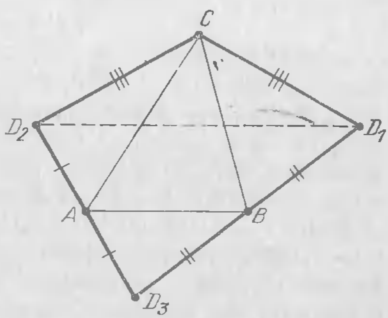


Рис. 22

в) Пусть сумма плоских углов при вершине A равна $180°$, $AB = CD$ и $AD = BC$. Рассмотрим развертку тетраэдра на плоскость ABC и воспользуемся для образов вершины D обозначениями рис. 22. Противоположные стороны четырехугольника $ABCD_2$ равны, поэтому он параллелограмм. Следовательно, отрезки CB и AD_3 параллельны и равны, а значит, четырехугольник $ACBD_3$ — параллелограмм. Поэтому развертка тетраэдра является треугольником, причем A, B и C — середины его сторон.

2.33. Пусть $SA_1 \ldots A_n$ — данная пирамида. Разрежем ее боковую поверхность по ребру SA_1 и развернем на плоскость (рис. 23). По условию точка S лежит внутри многоугольника $A_1 \ldots A_n A_1'$. Пусть B — точка пересечения продолжения отрезка A_1S за точку S со стороной этого многоугольника. Если a и b — длины ломаных $A_1A_2 \ldots B$ и $B \ldots A_nA_1'$, то $A_1S + SB < a$ и $A_1'S < SB + b$. Поэтому $2A_1S < a + b$.

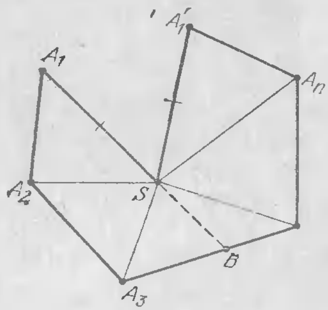


Рис. 23

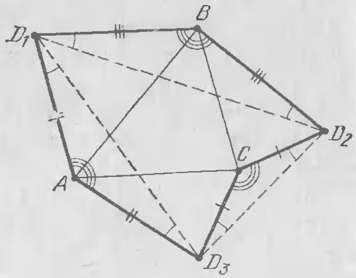


Рис. 24

2.34. Так как сумма углов каждой грани тетраэдра равна $180°$, то $S_A + S_B + S_C + S_D = 4 \cdot 180°$. Пусть для определенности $S_A \leqslant S_C$. Тогда $360° - S_C = S_A \leqslant 180°$. Рассмотрим развертку данного тетраэдра на плоскость ABC (рис. 24). Так как $\angle AD_3C = \angle D_1D_3D_2$ и $AD_3 : D_3C = D_1D_3 : D_3D_2$, то $\triangle ACD_3 \backsim \backsim \triangle D_1D_2D_3$, причем коэффициент подобия равен отношению боковой стороны к основанию в равнобедренном треугольнике с углом S_A при вершине. Следовательно, $AC = D_1B$. Аналогично $CB = AD_1$. Поэтому $\triangle ABC = \triangle BAD_1 = \triangle BAD$. Аналогично доказывается, что $\triangle ACD = \triangle BDC$.

Глава 3

ОБЪЕМ

§ 1. Формулы для объема тетраэдра и пирамиды

3.1. Три прямые пересекаются в точке A. На каждой из них взято по две точки: B и B', C и C', D и D'. Докажите, что $V_{ABCD} : V_{AB'C'D'} = (AB \cdot AC \cdot AD) : (AB' \times \times AC' \cdot AD')$.

3.2. Докажите, что объем тетраэдра $ABCD$ равен

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \beta \sin \gamma \sin D/6,$$

где β и γ — плоские углы при вершине A, противолежащие ребрам AB и AC, а D — двугранный угол при ребре AD.

3.3. Площади двух граней тетраэдра равны S_1 и S_2, a — длина их общего ребра, α — двугранный угол между ними. Докажите, что объем V тетраэдра равен $2S_1S_2 \sin \alpha/3a$.

3.4. Докажите, что объем тетраэдра $ABCD$ равен $dAB \cdot CD \sin \varphi/6$, где d — расстояние между прямыми AB и CD, φ — угол между ними.

3.5. Точка K принадлежит основанию пирамиды с вершиной O. Докажите, что объем пирамиды равен $S \cdot KO/3$, где S — площадь проекции основания на плоскость, перпендикулярную KO.

3.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 равна d. Докажите, что существует треугольник, длины сторон которого равны расстояниям от вершин A_1, B и D до этой диагонали, причем объем параллелепипеда равен $2dS$, где S — площадь этого треугольника.

§ 2. Формулы для объема многогранников и круглых тел

3.7. Докажите, что объем многогранника, описанного около сферы радиуса R, равен $SR/3$, где S — площадь поверхности многогранника.

3.8. Докажите, что отношение объемов сферы и описанного около нее усеченного конуса равно отношению площадей их полных поверхностей.

3.9. Шар радиуса R касается одного основания усеченного конуса и касается его боковой поверхности по окружности, являющейся окружностью другого основания конуса. Найдите объем тела, состоящего из конуса и шара, если площадь полной поверхности этого тела равна S.

3.10. а) Радиус прямого кругового цилиндра и его высота равны R. Рассмотрим шар радиуса R с центром в центре O нижнего основания цилиндра и конус с вершиной O, основанием которого служит верхнее основание цилиндра. Докажите, что объем конуса равен объему части цилиндра, лежащей вне шара. Для доказательства воспользуйтесь равенством площадей сечений, параллельных основаниям (Архимед).

б) Считая известными формулы для объема цилиндра и конуса, получите формулу для объема шара.

3.11. Найдите объем V усеченного конуса с высотой h и радиусами оснований R и r.

3.12. Дана плоская выпуклая фигура периметра $2p$ и площади S. Рассмотрим тело, состоящее из точек, удаленных от этой фигуры на расстояние не больше d. Найдите объем этого тела.

3.13. Объем выпуклого многогранника равен V, площадь поверхности — S; длина i-го ребра равна l_i, двугранный угол при этом ребре равен φ_i. Рассмотрим тело, состоящее из точек, удаленных от многогранника на расстояние не больше d. Найдите объем и площадь поверхности этого тела.

3.14. Все вершины выпуклого многогранника расположены в двух параллельных плоскостях. Докажите, что его объем равен $h(S_1 + S_2 + 4S)/6$, где S_1 и S_2 — площади граней, лежащих в данных плоскостях, S — площадь сечения многогранника плоскостью, равноудаленной от данных, h — расстояние между данными плоскостями.

§ 3. Свойства объема

3.15. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Противоположные ребра тетраэдра перемещаются по этим прямым, причем их длины остаются постоянными. Докажите, что объем тетраэдра при этом не изменяется.

3.16. В пространстве даны три параллельные прямые a, b и c. Ребро тетраэдра перемещается по прямой a, причем длина его остается постоянной, а две оставшиеся вершины перемещаются по прямым b и c. Докажите, что объем тетраэдра при этом не изменяется.

3.17. Докажите, что плоскость, пересекающая лишь боковую поверхность цилиндра, делит его объем в таком же отношении, в каком она делит ось цилиндра.

3.18. Докажите, что плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, делит его на две части равного объема.

3.19. Параллельные прямые a, b, c и d пересекают одну плоскость в точках A, B, C и D, а другую плоскость — в точках A', B', C' и D'. Докажите, что объемы тетраэдров $A'BCD$ и $AB'C'D'$ равны.

3.20. В плоскостях граней тетраэдра $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны. Найдите отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

§ 4. Вычисление объема

3.21. Плоскости ABC_1 и A_1B_1C делят треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на четыре части. Найдите отношение объемов этих частей.

3.22. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V. Найдите объем общей части тетраэдров AB_1CD_1 и A_1BC_1D.

3.23. В каком отношении делит объем тетраэдра плоскость, параллельная двум его скрещивающимся ребрам и делящая одно из других ребер в отношении 2 : 1?

3.24. На трех параллельных прямых взяты сонаправленные векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Докажите, что объем выпуклого многогранника $ABCA_1B_1C_1$ равен $S(AA_1 + BB_1 + CC_1)/3$, где S — площадь треугольника, получающегося при пересечении этих прямых плоскостью, им перпендикулярной.

3.25. Пусть M — точка пересечения медиан тетраэдра $ABCD$ (см. с. 244). Докажите, что существует четырехугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам, соединяющим M с вершинами тетраэдра. Вычислите объем тетраэдра, задаваемого этим пространственным четырехугольником, если объем тетраэдра $ABCD$ равен V.

3.26. Через высоту правильного треугольника со стороной a проведена плоскость, перпендикулярная плоскости треугольника, и в этой плоскости взята прямая l, параллельная высоте треугольника. Найдите объем тела, полученного при вращении треугольника вокруг прямой l.

3.27. Прямые AC и BD, угол между которыми равен α ($\alpha < 90°$), касаются шара радиуса R в диаметрально противоположных точках A и B. Прямая CD тоже касается шара, причем угол между AB и CD равен φ ($\varphi < 90°$). Найдите объем тетраэдра $ABCD$.

3.28. Точка O лежит на отрезке, соединяющем вершину треугольной пирамиды объема V с точкой пересечения медиан основания. Найдите объем общей части данной пирамиды и пирамиды, симметричной ей относительно точки O, если точка O делит указанный отрезок в отношении: а) 1 : 1; б) 3 : 1; в) 2 : 1; г) 4 : 1 (считая от вершины).

3.29. Стороны пространственного четырехугольника $KLMN$ перпендикулярны граням тетраэдра $ABCD$, а их длины равны площадям соответствующих граней. Найдите объем тетраэдра $KLMN$, если объем тетраэдра $ABCD$ равен V.

3.30. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a; высота основания призмы тоже равна a. Через точку A проведены плоскости, перпендикулярные прямым AB_1 и AC_1, а через точку A_1 — плоскости, перпендикулярные A_1B и A_1C. Найдите объем фигуры, ограниченной этими четырьмя плоскостями и плоскостью B_1BCC_1.

3.31. Тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ расположены так, что все вершины каждого из них лежат в соответствующих плоскостях граней другого тетраэдра (A лежит в плоскости $B_1C_1D_1$ и т. д.). Кроме того, A_1 совпадает с точкой пересечения медиан треугольника BCD, а прямые BD_1, CB_1 и DC_1 делят пополам отрезки AC, AD и AB соответственно. Найдите объем общей части тетраэдров, если объем тетраэдра $ABCD$ равен V.

§ 5. Вспомогательный объем

3.32. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла при ребре тетраэдра делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

3.33. В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q и образуют между собой угол α. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро AB и центр вписанного в тетраэдр шара.

3.34. Докажите, что если x_1, x_2, x_3, x_4 — расстояния от произвольной точки внутри тетраэдра до его граней, а h_1, h_2, h_3, h_4 — соответствующие высоты тетраэдра, то

$$\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}=1.$$

3.35. На грани ABC тетраэдра $ABCD$ взята точка O и через нее проведены отрезки OA_1, OB_1 и OC_1, параллельные ребрам DA, DB и DC, до пересечения с гранями тетраэдра. Докажите, что

$$\frac{OA_1}{DA}+\frac{OB_1}{DB}+\frac{OC_1}{DC}=1.$$

3.36. Пусть r — радиус вписанной сферы тетраэдра; r_a, r_b, r_c и r_d — радиусы сфер, каждая из которых касается одной грани и продолжений трех других. Докажите, что

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_d}=\frac{2}{r}.$$

3.37. Дана выпуклая четырехугольная пирамида $MABCD$ с вершиной M. Плоскость пересекает ребра MA, MB, MC и MD в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что

$$S_{BCD}\frac{MA}{MA_1}+S_{ABD}\frac{MC}{MC_1}=S_{ABC}\frac{MD}{MD_1}+S_{ACD}\frac{MB}{MB_1}.$$

3.38. Боковые грани треугольной пирамиды равновелики и образуют с основанием углы α, β и γ. Найдите отношение радиуса шара, вписанного в эту пирамиду, к радиусу шара, касающегося основания пирамиды и продолжений боковых сторон.

Задачи для самостоятельного решения

3.39. Две противоположные вершины куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные его вершины лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

3.40. Внутри призмы объема V взята точка O. Найдите сумму объемов пирамид с вершиной O, основаниями которых служат боковые грани призмы.

3.41. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через одну вершину куба и центры двух граней, не содержащих этой вершины?

3.42. Отрезок EF не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Докажите, что объем тетраэдра $EFAD$ равен сумме или разности объемов тетраэдров $EFAB$ и $EFAC$.

3.43. Боковые грани n-угольной пирамиды являются боковыми гранями правильных четырехугольных пирамид. Вершины оснований четырехугольных пирамид, отличные от вершин n-угольной пирамиды, попарно сливаются. Найдите отношение объемов пирамид.

3.44. Двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$ прямой; M — середина ребра CD. Докажите, что площадь треугольника AMB в два раза меньше площади параллелограмма, диагонали которого равны и параллельны ребрам AB и CD.

3.45. Грани ABD, BCD и CAD тетраэдра $ABCD$ служат нижними основаниями трех призм; плоскости их верхних оснований пересекаются в точке P. Докажите, что сумма объемов этих трех призм равна объему призмы, основанием которой служит грань ABC, а боковые ребра равны и параллельны отрезку PD.

3.46. Правильный тетраэдр объема V повернут на угол α $(0 < \alpha < \pi)$ вокруг прямой, соединяющей середины его скрещивающихся ребер. Найдите объем общей части исходного тетраэдра и повернутого.

3.47. Куб с ребром a повернут на угол α вокруг диагонали. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

3.48. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Углы между противоположными боковыми гранями прямые; двугранный угол при ребре SA равен α. Найдите объем пирамиды.

Решения

3.1. Пусть h и h' — длины перпендикуляров, опущенных из точек D и D' на плоскость ABC; S и S' — площади треугольников ABC и $AB'C'$. Ясно, что $h : h' = AD : AD'$ и $S : S' = (AB \cdot AC) : (AB' \cdot AC')$. Остается заметить, что $V_{ABCD} : V_{AB'C'D'} = hS : h'S'$.

3.2. Высота треугольника ABD, проведенная из вершины B, равна $AB \sin \gamma$, поэтому высота тетраэдра, опущенная на плоскость ACD, равна $AB \sin \gamma \sin D$. Ясно также, что площадь треугольника ACD равна $AC \cdot AD \sin \beta/2$.

3.3. Пусть h_1 и h_2—высоты данных граней, опущенные на их общую сторону. Тогда $V = (h_1 \sin \alpha) S_2/3 = ah_1h_2 \sin \alpha/6$. Остается заметить, что $h_1 = 2S_1/a$, $h_2 = 2S_2/a$.

3.4. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. Плоскости граней исходного тетраэдра отсекают от параллелепипеда 4 тетраэдра, объем каждого из которых составляет 1/6 объема параллелепипеда. Поэтому объем тетраэдра составляет 1/3 объема параллелепипеда. А объем параллелепипеда легко выражается через данные в условии величины: его грань является параллелограммом с диагоналями длиной AB и CD и углом φ между ними, а высота, опущенная на эту грань, равна d.

3.5. Угол α между прямой KO и высотой h пирамиды равен углу между плоскостью основания и плоскостью, перпендикулярной KO. Поэтому $h = KO \cos \alpha$ и $S = S' \cos \alpha$, где S' — площадь основания (см. задачу 2.13). Следовательно, $S \cdot KO = S'h$.

3.6. Рассмотрим проекцию данного параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную прямой AC_1 (рис. 25). В дальнейшем ходе решения используются обозначения рис. 25.

На этом рисунке длины отрезков AA_1, AB и AD равны расстояниям от вершин A_1, B и D параллелепипеда до диагонали AC_1, а стороны треугольника AA_1B_1 равны этим отрезкам. Так как площадь этого треугольника равна S, то площадь треугольника A_1DB равна $3S$. Если M — точка пересечения плоскости A_1DB с диагональю AC_1, то $AM = d/3$ (задача 2.1), а значит, согласно задаче 3.5 объем тетраэдра AA_1DB равен $dS/3$. Ясно также, что объем этого тетраэдра составляет 1/6 часть объема параллелепипеда.

3.7. Соединим центр сферы с вершинами многогранника и разобьем его тем самым на пирамиды. Высоты этих пирамид равны радиусу сферы, а их основаниями являются грани многогранника. Поэтому сумма объемов этих пирамид равна

$SR/3$, где S — сумма площадей их оснований, т. е. площадь поверхности многогранника.

3.8. И конус, и саму сферу можно рассматривать как некоторый предел многогранников, описанных около данной сферы. Остается заметить, что для каждого из этих многогранников справедлива формула $V = SR/3$, где V — объем, S — площадь поверхности многогранника, R — радиус данной сферы (задача 3.7).

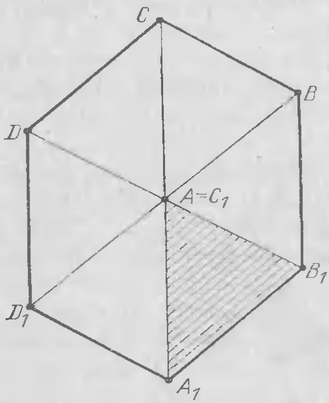


Рис. 25

3.9. Точно такие же рассуждения, как и в задаче 3.8, показывают, что объем этого тела равен $SR/3$.

3.10. а) Рассмотрим произвольное сечение, параллельное основаниям. Пусть MP — радиус сечения конуса, MC — радиус сечения шара, MB — радиус сечения цилиндра. Требуется проверить, что $\pi MP^2 = \pi MB^2 - \pi MC^2$, т. е. $MB^2 = MP^2 + MC^2$. Для доказательства этого равенства достаточно заметить, что $MB = OC$, $MP = MO$, а треугольник COM прямоугольный.

б) Объемы рассматриваемых в задаче а) цилиндра и конуса равны πR^3 и $\pi R^3/3$. Объем шара радиуса R в два раза больше разности объемов цилиндра и конуса, поэтому он равен $4\pi R^3/3$.

3.11. Данный конус получается отсечением конуса с высотой x и основанием радиуса r от конуса с высотой $x + h$ и основанием радиуса R. Поэтому $V = \pi(R^2(x + h) - r^2x)/3$. Так как $x : r = (x + h) : R$, то $x = rh/(R - r)$ и $x + h = Rh/(R - r)$. Следовательно, $V = \pi(r^2 + rR + R^2)h/3$.

3.12. Предположим сначала, что данная плоская фигура является выпуклым n-угольником. Тогда рассматриваемое тело состоит из призмы объемом $2dS$, n полуцилиндров с суммарным объемом πpd^2 и n тел, из которых можно составить шар объемом $4\pi d^3/3$. Опишем подробнее последние n тел. Рассмотрим шар радиуса d и разрежем его полукругами (с центрами в центре шара), получающимися параллельными переносами оснований полуцилиндров. Это и есть разбиение шара на n тел.

Итак, если фигура является выпуклым многоугольником, то объем тела равен $2dS + \pi pd^2 + 4\pi d^3/3$. Эта формула остается справедливой и для произвольной выпуклой фигуры.

3.13. Как и в предыдущей задаче, разобьем полученное тело на исходный многогранник, призмы, соответствующие граням, части цилиндров, соответствующие ребрам, и части шара радиуса d, соответствующие вершинам. Теперь легко проверить, что объем полученного тела равен $V+Sd+\frac{1}{2}d^2\sum_i(\pi-\varphi_i)\,l_i+$ $+\frac{4}{3}\pi d^3$, а площадь его поверхности равна $S+d\sum_i(\pi-\varphi_i)\times$ $\times\, l_i+4\pi d^2$.

3.14. Первое решение. Пусть O — внутренняя точка многогранника, равноудаленная от данных плоскостей. Поверхность многогранника, заключенную между данными плоскостями, можно разбить на треугольники с вершинами в вершинах многогранника. Следовательно, многогранник разбивается на две пирамиды с вершиной O, основаниями которых служат грани с площадями S_1 и S_2, и несколько треугольных пирамид с вершиной O, основаниями которых служат указанные треугольники. Объемы первых двух пирамид равны $hS_1/6$ и $hS_2/6$. Объем i-й треугольной пирамиды равен $2hs_i/3$, где s_i — площадь сечения этой пирамиды плоскостью, равноудаленной от данных; в самом деле, объем пирамиды в 4 раза больше объема тетраэдра, который отсекает от нее указанная плоскость, а объем тетраэдра равен $hs_i/6$. Ясно также, что $s_1+\ldots+s_n=S$.

Второе решение. Пусть $S(t)$ — площадь сечения многогранника плоскостью, удаленной на расстояние t от первой плоскости. Докажем, что $S(t)$ — квадратичная функция (при $0\leqslant t\leqslant h$), т. е. $S(t)=at^2+bt+c$. Рассмотрим для этого такую проекцию многогранника вдоль некоторой прямой на первую плоскость, что проекции верхней и нижней граней не пересекаются (рис. 26). Площади обеих заштрихованных частей являются квадратичными функциями t, поэтому $S(t)$ — площадь незаштрихованной части — тоже квадратичная функция.

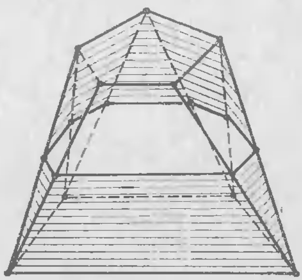


Рис. 26

Для любой квадратичной функции $S(t)$, где t изменяется от 0 до h, можно подобрать достаточно простой многогранник с точно такой же функцией $S(t)$: если $a>0$, то можно взять усеченную пирамиду, а если $a<0$, то можно взять часть тетраэдра, заключенную между двумя плоскостями, параллельными двум его скрещивающимся ребрам. Объемы многогранников с равными функциями $S(t)$ равны (принцип Кавальери). Легко проверить, что любой из новых простых многогранников можно разбить на тетраэдры, вершины которых лежат в данных плоскостях. Для них требуемая формула легко проверяется (в случае, когда две вершины тетраэдра лежат в одной плоскости и две в другой, следует воспользоваться формулой из задачи 3.4).

3.15. Объем такого тетраэдра равен $abd \sin\varphi/6$, где a и b — длины ребер, d — расстояние между скрещивающимися прямыми, φ — угол между ними (задача 3.4).

3.16. При проекции на плоскость, перпендикулярную данным прямым, прямые a, b и c переходят в точки A, B и C. Пусть s — площадь треугольника ABC; KS — ребро тетраэдра, перемещающееся по прямой a. Согласно задаче 3.5 объем рассматриваемого тетраэдра равен $sKS/3$.

3.17. Пусть плоскость П пересекает ось цилиндра в точке O. Проведем через точку O плоскость П′, параллельную основаниям цилиндра. Эти две плоскости делят цилиндр на 4 части, причем 2 части, заключенные между плоскостями, имеют равный объем. Следовательно, объемы тех частей, на которые цилиндр делится плоскостью П, равны объемам тех частей, на которые он делится плоскостью П′. Ясно также, что отношение объемов цилиндров с равными основаниями равно отношению их высот.

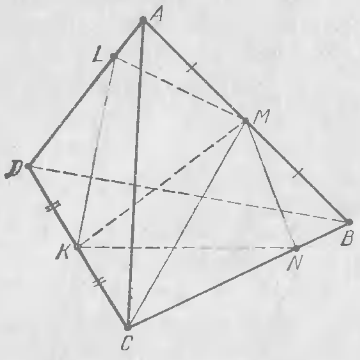


Рис. 27

3.18. Пусть M и K — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Пусть для определенности плоскость, проходящая через M и K, пересекает ребра AD и BC в точках L и N (рис. 27). Плоскость DMC делит тетраэдр на две части равного объема, поэтому достаточно проверить, что равны объемы тетраэдров $DKLM$ и $CKNM$. Объем тетраэдра $CKBM$ равен 1/4 объема тетраэдра $ABCD$, а отношение объемов тетраэдров $CKBM$ и $CKNM$ равно $BC : CN$. Аналогично отношение 1/4 объема тетраэдра $ABCD$ к объему тетраэдра $DKLM$ равно $AD : DL$. Остается заметить, что $BC : CN = AD : DL$ (задача 2.5).

3.19. Согласно задаче 3.16 $V_{A'ABC} = V_{AA'B'C'}$. Записывая аналогичные равенства для объемов тетраэдров $A'ADC$ и $A'ABD$ и выражая $V_{A'BCD}$ и $V_{AB'C'D'}$ через эти объемы, получаем требуемое.

3.20. Пусть A_2 — точка пересечения прямой AA_1 и плоскости $B_1C_1D_1$. Докажем, что $A_1A_2 = 3A_1A$. Тогда $V_{ABCD} : V_{A_2BCD} = 1 : 3$; воспользовавшись результатом задачи 3.19, окончательно получим $V_{ABCD} : V_{A_1B_1C_1D_1} = V_{ABCD} : V_{A_2BCD} = 1 : 3$.

Среди коллинеарных векторов $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ найдутся два сонаправленных; предположим для определенности, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ сонаправлены. Пусть M — точка пересечения прямых BC_1 и CB_1. Прямые BC_1 и CB_1 принадлежат плоскостям ADB и ADC соответственно, поэтому точка M принадлежит прямой AD. Проведем через параллельные прямые AA_1 и DD_1 плоскость; она проходит через точку M и пересекает отрезки BC и B_1C_1 в некоторых точках L и K (рис. 28). Легко проверить, что M — середина отрезка KL, точка A принадлежит прямым DM и D_1L, точка A_1 — прямой DL, точка A_2 — прямой D_1K. Поэтому $\overrightarrow{A_1A} : \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{LM} : \overrightarrow{LK} = 1 : 2$, а значит, $A_1A_2 = 3AA_1$.

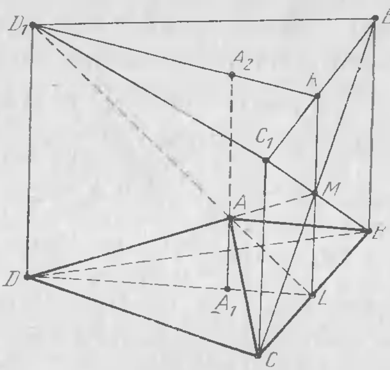


Рис. 28

3.21. Пусть P и Q — середины отрезков AC_1 и BC_1, т. е. PQ — прямая пересечения данных плоскостей. Отношение объемов тетраэдров C_1PQC и C_1ABC равно $(C_1P : C_1A)(C_1Q : C_1B) = 1 : 4$ (см. задачу 3.1). Ясно также, что объем тетраэдра C_1ABC составляет 1/3 объема призмы. Пользуясь этим, легко проверить, что искомое отношение объемов равно $1 : 3 : 3 : 5$.

3.22. Общая часть указанных тетраэдров является выпуклым многогранником с вершинами в центрах граней параллелепипеда. Плоскость, равноудаленная от двух противоположных граней параллелепипеда, рассекает этот многогранник на две четырехугольные пирамиды, объем каждой из которых равен $V/12$.

3.23. Сечение тетраэдра данной плоскостью является параллелограммом. Каждую из двух полученных частей тетраэдра можно разрезать на пирамиду, основанием которой служит этот параллелограмм, и тетраэдр. Объемы этих пирамид и тетраэдров можно выразить через длины a и b скрещивающихся ребер, расстояние d и угол φ между ними (для тетраэдров следует воспользоваться формулой задачи 3.4). Тем самым находятся объемы полученных частей; они равны $10v/81$ и $7v/162$, где $v = abd \sin \varphi$, а их отношение равно 20/7.

3.24. Отложим на продолжении ребра BB_1 за точку B_1 отрезок B_1B_2, равный ребру AA_1. Пусть K — середина отрезка A_1B_1, т. е. точка пересечения отрезков A_1B_1 и AB_2. Так как объемы тетраэдров A_1KC_1A и $B_1KC_1B_2$ равны, то равны объемы многогранников $ABCA_1B_1C_1$ и $ABCB_2C_1$. Аналогичные рассуждения показывают, что объем многогранника $ABCB_2C_1$ равен объему пирамиды $ABCC_3$, где $CC_3 = AA_1 + BB_1 + CC_1$. Остается воспользоваться формулой задачи 3.5.

3.25. Достроим пирамиду $MABC$ до параллелепипеда (рис. 29). Пусть MK — его диагональ. Так как $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ (см. задачу 14.3, а), то $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{MD}$. Поэтому четырехугольник $MCLK$ искомый. Объемы тетраэдров $MCKL$ и $MABC$ равны, так как каждый из них составляет 1/6 объема рассматриваемого параллелепипеда. Ясно также, что объем тетраэдра $MABC$ равен $V/4$.

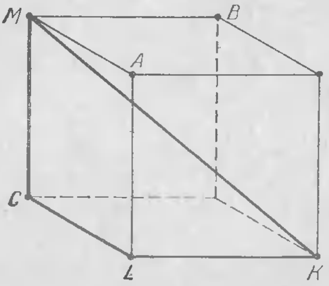


Рис. 29

З а м е ч а н и е. Из решения задачи 7.15 следует, что набор векторов сторон требуемого пространственного четырехугольника определен однозначно. Поэтому существует 6 различных таких четырехугольников, причем объемы всех задаваемых ими тетраэдров равны (см. задачу 8.26).

3.26. Заметим сначала, что при вращении (в плоскости) отрезка длиной $2d$ относительно точки, лежащей на серединном перпендикуляре к этому отрезку и удаленной от отрезка на расстояние x, получается кольцо с внутренним радиусом x и внешним радиусом $\sqrt{x^2 + d^2}$; площадь этого кольца равна πd^2, т. е. она не зависит от x. Следовательно, сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, представляет собой кольцо, площадь которого не зависит от положения прямой l. А значит, достаточно рассмотреть случай, когда осью вращения является высота треугольника. В этом случае объем тела вращения — конуса — равен $\pi a^3\sqrt{3}/24$.

3.27. Пусть $AC = x$, $BD = y$; D_1 — проекция D на плоскость, касающуюся шара в точке A. В треугольнике CAD_1 угол A равен α или $180° - \alpha$, поэтому $x^2 + y^2 \mp 2xy\cos\alpha = CD_1^2 = 4R^2\operatorname{tg}^2\varphi$. Ясно также, что $x + y = CD = 2R/\cos\varphi$. Следовательно, либо $xy = R^2/\cos^2(\alpha/2)$, либо $xy = R^2/\sin^2(\alpha/2)$. Учитывая, что $(x+y)^2 \geqslant 4xy$, получаем, что первое решение возможно при $\varphi \geqslant \alpha/2$, а второе — при $\varphi \geqslant (\pi - \alpha)/2$. Так как объем V тетраэдра $ABCD$ равен $xyR\sin\alpha/3$, окончательный ответ таков: если $\alpha \leqslant 2\varphi < \pi - \alpha$, то $V = 2R^3\operatorname{tg}(\alpha/2)/3$, а если $\pi - \alpha \leqslant 2\varphi < \pi$, то V может иметь значения $2R^3\operatorname{tg}(\alpha/2)/3$ и $2R^3\operatorname{ctg}(\alpha/2)/3$.

3.28. На рисунках 30, *а—г* изображены общие части пирамид во всех четырех случаях.

а) Общая часть — параллелепипед (рис. 30, *а*). Он получается из исходной пирамиды отсечением трех пирамид, подобных ей с коэффициентом 2/3; при этом три пирамиды, подобные исходной с коэффициентом 1/3, являются общими для пар отсекаемых пирамид. Поэтому объем пирамиды равен $V(1 - 3(2/3)^3 + 3(1/3)^3) = 2V/9$.

б) Общая часть — «октаэдр» (рис. 30, *б*). Объем этого многогранника равен $V(1 - 4(1/2)^3) = V/2$.

в) Общая часть изображена на рис. 30, *в*. Для вычисления ее объема нужно из объема исходной пирамиды вычесть объем пирамиды, подобной ей с коэффициентом 1/3 (на рисунке эта пирамида вверху), затем вычесть объем трех пирамид, подобных исходной с коэффициентом 5/9, и прибавить объем трех пирамид, подобных исходной с коэффициентом 1/9. Поэтому объем общей части равен $V(1 - (1/3)^3 - 3(5/9)^3 + 3(1/9)^3) = 110V/243$.

г) Общая часть изображена на рис. 30, *г*. Ее объем равен $V(1 - (3/5)^3 - 3(7/15)^3 + 3(1/15)^3) = 12V/25$.

3.29. Существование такого пространственного четырехугольника $KLMN$ для любого тетраэдра $ABCD$ следует из утверждения задачи 7.19; таких четырехугольников несколько, но объемы всех задаваемых ими тетраэдров равны (задача 8.26).

Воспользовавшись формулой задачи 3.2, легко доказать, что $V^3 = (abc/6)^3p^2q$, где a, b и c — длины ребер, выходящих из вершины A; p — произведение синусов плоских углов при вершине A, q — произведение синусов двугранных углов трехгранного угла при вершине A. Опустим из произвольной точки O, лежащей внутри тетраэдра $ABCD$, перпендикуляры на грани, выходящие из вершины A, и отложим на них отрезки OP, OQ и OR, равные площадям этих граней. Из решения задачи 8.26 следует, что объем W тетраэдра $OPQR$ равен объему тетраэдра $KLMN$. Плоские (соответственно двугранные) углы трехгранного угла $OPQR$ дополняют до 180° двугранные (соответственно

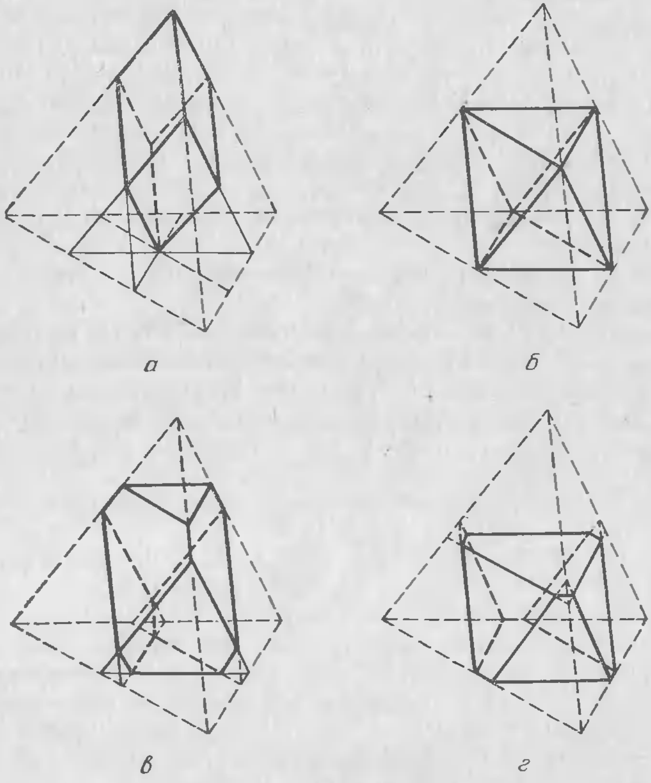


Рис. 30

плоские) углы трехгранного угла $ABCD$ (см. задачу 5.1). Следовательно, $W^3 = (S_1S_2S_3/6)^3q^2p$, где S_1, S_2, S_3 — площади граней, выходящих из вершины A. Так как $S_1S_2S_3 = (abc)^2p/8$, то $W^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^3(abc)^6p^4q^2 = \left(\frac{3}{4}V^2\right)^3$, т. е. $W = \frac{3}{4}V^2$.

3.30. Пусть M и N — середины ребер B_1C_1 и BC. Рассматриваемые пары плоскостей симметричны относительно плоскости AA_1MN. Возьмем на луче MN точку K так, что $MK = 2MN$.

Так как AA_1MN — квадрат, то $KA \perp AM$, а значит, прямая AK перпендикулярна плоскости AB_1C_1, т. е. AK — прямая пересечения рассматриваемых плоскостей, проходящих через точку A. Аналогично строим прямую A_1L пересечения плоскостей, проходящих через точку A_1. Так как B_1N — проекция прямой AB_1 на плоскость BCC_1, то плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно AB_1, пересекает плоскость BCC_1 по прямой, перпендикулярной прямой B_1N. Проводя аналогичные рассуждения для других рассматриваемых плоскостей и учитывая, что треугольники BMC и B_1NC_1 правильные, получаем, что рассматриваемые плоскости высекают на плоскости BCC_1B_1 ромб, состоящий из двух правильных треугольников со стороной $KL = 3a$. Площадь этого ромба равна $9a^2\sqrt{3}/2$. Искомая фигура является четырехугольной пирамидой, основанием которой служит этот ромб, а вершиной — точка S пересечения прямых AK и A_1L. Так как расстояние от точки S до прямой KL равно $3a/2$, объем этой пирамиды равен $9a^3\sqrt{3}/4$.

3.31. Пусть K, L и M — середины отрезков AB, AC и AD. Докажем сначала, что K — середина отрезка DC_1. Точка B лежит в плоскости $A_1C_1D_1$, поэтому точка C_1 лежит в плоскости A_1LB. Достроим тетраэдр $ABCD$ до треугольной призмы, добавив вершины S и T, где $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{DC}$. Плоскость A_1LB проходит через середины сторон CD и AT параллелограмма $CDAT$, поэтому она содержит прямую BS. Следовательно, S — точка пересечения прямой DK с плоскостью A_1LB, т. е. $S = C_1$. Аналогично доказывается, что L и M — середины отрезков BD_1 и CB_1. Итак, тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ ограничен плоскостью $B_1C_1D_1$, проходящей через точку A параллельно грани BCD, и плоскостями A_1LB, A_1MC и A_1KD.

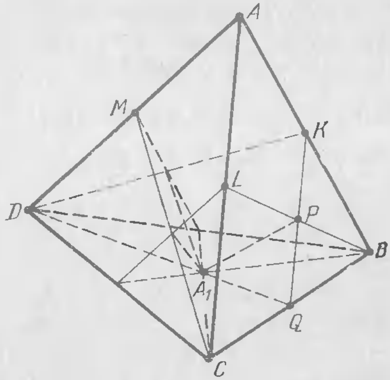


Рис. 31

Пусть Q — середина BC, P — точка пересечения BL и KQ (рис. 31). Плоскость A_1KD отсекает от тетраэдра $ABCD$ тетраэдр $DKBQ$, объем которого равен $V/4$; плоскости A_1LB и A_1MC отсекают тетраэдры такого же объема. При этом, например, для тетраэдров, отсекаемых плоскостями A_1KD и A_1LB, общим является тетраэдр A_1BPQ, объем которого равен $V/24$. Следовательно, объем общей части тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равен $V(1 - 3/4 + 3/24) = 3V/8$.

3.32. Отношение отрезков ребра равно отношению высот, опущенных из его концов на биссекторную плоскость, а последнее отношение равно отношению объемов тетраэдров, на которые плоскость разделила данный тетраэдр. А так как высоты, опущенные из любой точки биссекторной плоскости на грани двугранного угла, равны, то отношение объемов этих тетраэдров равно отношению площадей граней, заключающих данный двугранный угол.

3.33. Пусть $a = AB$, x — площадь искомого сечения. Воспользовавшись для объема тетраэдра $ABCD$ и его частей формулой задачи 3.3, получим

$$\frac{2}{3}\,\frac{px\sin(\alpha/2)}{a} + \frac{2}{3}\,\frac{qx\sin(\alpha/2)}{a} = \frac{2}{3}\,\frac{pq\sin\alpha}{a},$$

Следовательно, $x = \dfrac{2pq\cos(\alpha/2)}{p+q}$.

3.34. Разрежем тетраэдр на 4 треугольные пирамиды, основаниями которых служат грани тетраэдра, а вершиной служит данная точка. Указанная сумма отношений является суммой отношений объемов этих пирамид к объему тетраэдра. Эта сумма равна 1, так как сумма объемов пирамид равна объему тетраэдра.

3.35. Параллельные отрезки AD и OA_1 образуют с плоскостью BCD равные углы, поэтому отношение длин высот, опущенных на эту плоскость из точек O и A, равно отношению длин этих отрезков. Следовательно, $\dfrac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{OA_1}{DA}$. Записав такие же равенства для отрезков OB_1 и OC_1 и сложив их, получим

$$\frac{OA_1}{DA} + \frac{OB_1}{DB} + \frac{OC_1}{DC} = \frac{V_{OBCD} + V_{OACD} + V_{OABD}}{V_{ABCD}} = 1.$$

3.36. Пусть S_a, S_b, S_c и S_d — площади граней BCD, ACD, ABD и ABC; V — объем тетраэдра; O — центр сферы, касающейся грани BCD и продолжений трех других граней. Тогда $3V = r_a(-S_a + S_b + S_c + S_d)$, а значит, $1/r_a = (-S_a + S_b + S_c + S_d)/3V$. Записав аналогичные равенства для остальных радиусов вневписанных сфер и сложив их, получим

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} = \frac{2(S_a + S_b + S_c + S_d)}{3V} = \frac{2}{r}.$$

3.37. Пирамиду $MA_1B_1C_1D_1$ можно разрезать на два тетраэдра как плоскостью MA_1C_1, так и плоскостью MB_1D_1, поэтому

$$V_{MB_1C_1D_1}+V_{MA_1B_1D_1}=V_{MA_1B_1C_1}+V_{MA_1C_1D_1}. \qquad (1)$$

Воспользовавшись формулой задачи 3.1, получим

$$V_{MB_1C_1D_1}=\frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{CM}\cdot\frac{MD_1}{MD}V_{MBCD}=$$

$$=\frac{1}{3}h\left(\frac{MA_1}{MA}\cdot\frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{MC}\cdot\frac{MD_1}{MD}\right)\frac{MA}{MA_1}S_{BCD},$$

где h — высота пирамиды $MABCD$. Подставляя в (1) аналогичные выражения для объемов всех тетраэдров, после сокращения получаем требуемое.

3.38. Пусть r и r' — радиусы вписанного и вневписанного шаров, S — площадь боковой грани, s — площадь основания, V — объем пирамиды. Тогда $V=(3S+s)r/3$. Аналогично доказывается, что $V=(3S-s)r'/3$. Кроме того, $s=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)S$ (см. задачу 2.13). Следовательно,

$$\frac{r}{r'}=\frac{3S-s}{3S+s}=\frac{3-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma}{3+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}.$$

Глава 4

СФЕРЫ

§ 1. Длина общей касательной

4.1. Плоскость касается двух касающихся шаров радиуса R и r в точках A и B. Докажите, что $AB = 2\sqrt{Rr}$.

4.2. Три шара попарно касаются; плоскость касается этих шаров в точках A, B и C. Найдите радиусы шаров, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

4.3. Два шара одного радиуса и два другого расположены так, что каждый шар касается трех других и данной плоскости. Найдите отношение радиусов шаров.

4.4. Радиусы двух непересекающихся шаров равны R и r; расстояние между их центрами равно a. В каких пределах может изменяться длина общей касательной к этим шарам?

4.5. Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной 2α. Пусть A — точка касания первой сферы с первой гранью, B — точка касания второй сферы со второй гранью. В каком отношении делится отрезок AB точками пересечения с этими сферами?

§ 2. Касательные к сферам

4.6. Из произвольной точки пространства опущены перпендикуляры на плоскости граней данного куба. Полученные отрезки являются диагоналями шести других кубов. Рассмотрим шесть сфер, каждая из которых касается всех ребер соответствующего куба. Докажите, что все эти сферы имеют общую касательную прямую.

4.7. Сфера с диаметром CE касается плоскости ABC в точке C; AD — касательная к этой сфере. Докажите, что если точка B лежит на прямой DE, то $AC = AB$.

4.8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость, проходящая через вершину A и касающаяся вписанной в куб сферы, пересекает ребра A_1B_1 и A_1D_1 в точках K и N.

Найдите величину угла между плоскостями AC_1K и AC_1N.

4.9. Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL, причем $\angle KLM = \angle LKN = 60°$, $KL = 1$ и $LM = KN = 6$. Плоскости KLM и KLN перпендикулярны. Найдите радиус шара, касающегося отрезков LM и KN в их серединах.

4.10. Из точек A и B проведены всевозможные касательные к данной сфере. Докажите, что все точки их пересечения, отличные от A и B, лежат в двух плоскостях.

4.11. Центры трех сфер, радиусы которых равны 3, 4 и 6, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 11. Сколько существует плоскостей, касающихся одновременно всех этих сфер?

§ 3. Две пересекающиеся окружности лежат на одной сфере

4.12. а) Две окружности, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в двух различных точках A и B. Докажите, что существует единственная сфера, содержащая эти окружности.

б) Две окружности, не лежащие в одной плоскости, касаются прямой l в точке P. Докажите, что существует единственная сфера, содержащая эти окружности.

4.13. Дана усеченная треугольная пирамида. Докажите, что если две ее боковые грани — вписанные четырехугольники, то третья боковая грань — тоже вписанный четырехугольник.

4.14. Все грани выпуклого многогранника являются вписанными многоугольниками, а все углы трехгранные. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

4.15. Три сферы имеют общую хорду. Через точку этой хорды проведены три хорды, принадлежащие различным сферам. Докажите, что концы этих трех хорд лежат на одной сфере или в одной плоскости.

4.16. В пространстве расположено несколько окружностей, причем любые две из них имеют пару общих точек. Докажите, что либо все эти окружности имеют две общие точки, либо все они принадлежат одной сфере (или одной плоскости).

4.17. Три окружности в пространстве попарно касаются друг друга (т. е. они имеют общие точки и общие касательные в этих точках), причем все три точки касания различны. Докажите, что эти окружности принадлежат либо одной сфере, либо одной плоскости.

§ 4. Разные задачи

4.18. Три точки A, B и C сферы радиуса R попарно соединены (меньшими) дугами больших кругов. Через середины дуг AB и AC проведен еще один большой круг, пересекающий продолжение дуги BC в точке K. Найдите длину дуги CK, если длина дуги BC равна l ($l < \pi R$). (Большим кругом называется сечение сферы плоскостью, проходящей через центр.)

4.19. Хорда AB сферы радиуса 1 имеет длину 1 и расположена под углом 60° к диаметру CD этой сферы. Известно, что $AC = \sqrt{2}$ и $AC < BC$. Найдите длину отрезка BD.

4.20. Дана сфера, окружность на ней и точка P, не принадлежащая сфере. Докажите, что вторые точки пересечения сферы с прямыми, соединяющими точку P с точками окружности, лежат на одной окружности.

4.21. На сфере радиуса 2 расположены три попарно касающиеся окружности радиуса 1. Найдите радиус наименьшей окружности, расположенной на данной сфере и касающейся всех трех данных окружностей.

4.22. Введем систему координат с началом O в центре земного шара, осями Ox и Oy, проходящими через точки экватора с долготой 0° и 90° соответственно, и осью Oz, проходящей через северный полюс. Какие координаты имеет точка земной поверхности с широтой φ и долготой ψ? (Землю рассматривать как шар радиуса R; в южном полушарии широту считать отрицательной.)

4.23. Рассмотрим все точки поверхности земного шара, географическая широта которых равна их долготе. Найдите геометрическое место проекций этих точек на плоскость экватора.

§ 5. Площадь сферической полоски и объем шарового сегмента

4.24. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно h, пересекают сферу радиуса R. Докажите, что площадь поверхности части сферы, заключенной между ними, равна $2\pi Rh$.

4.25. Пусть A — вершина шарового сегмента, B — точка окружности его основания. Докажите, что площадь поверхности этого сегмента равна площади круга радиуса AB.

4.26. Пусть h — высота шарового сектора (рис. 32), R — радиус шара. Докажите, что объем этого шарового сектора равен $2\pi R^2 h/3$.

4.27. Пусть h — высота шарового сегмента (рис. 33), R — радиус шара. Докажите, что объем шарового сегмента равен $\pi h^2(3R - h)/3$.

4.28. Докажите, что объем тела, полученного при вращении сегмента круга относительно не пересекающего его диаметра, равен $\pi a^2 h/6$, где a — длина хорды этого сегмента, h — длина проекции этой хорды на диаметр.

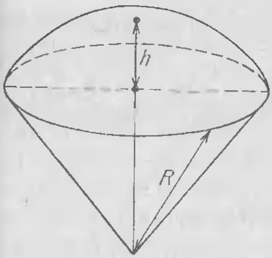


Рис. 32

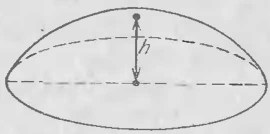


Рис. 33

4.29. Золотое колечко имеет форму тела, ограниченного поверхностью шара и цилиндра (рис. 34). Сколько золота нужно добавить, чтобы увеличить диаметр d в k раз, а высоту h оставить прежней?

4.30. Центр сферы S_1 принадлежит сфере S_2, причем эти сферы пересекаются. Докажите, что площадь части поверхности S_2, находящейся внутри S_1, равна 1/4 площади поверхности S_1.

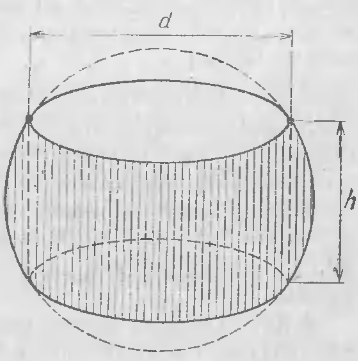


Рис. 34

4.31. Центр сферы α принадлежит сфере β. Площадь части поверхности сферы β, лежащей внутри α, равна 1/5 площади поверхности α. Найдите отношение радиусов этих сфер.

4.32. Некоторый 20-гранник описан около сферы радиуса 10. Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.

4.33. Найдите площади частей, на которые плоскости граней куба с ребром a разбивают описанную около него сферу.

4.34. Шар радиуса R касается ребер правильного четырехгранного угла (см. с. 174), все плоские углы которого равны $60°$. Поверхность шара, находящаяся внутри угла, состоит из двух криволинейных четырехугольников. Найдите их площади.

4.35. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Сфера касается трех его ребер, выходящих из одной вершины, в их концах. Найдите площадь части поверхности сферы, расположенной внутри тетраэдра.

4.36. На сфере радиуса 2 расположены три попарно касающиеся окружности радиуса $\sqrt{2}$. Часть поверхности сферы, расположенная вне окружностей, представляет собой два криволинейных треугольника. Найдите площади этих треугольников.

§ 6. Радикальная плоскость

Пусть прямая l, проходящая через точку O, пересекает сферу S в точках A и B. Легко проверить, что произведение длин отрезков OA и OB зависит лишь от O и S, но не зависит от выбора прямой l (для точек, лежащих вне сферы, оно равно квадрату касательной, проведенной из точки O). Эта величина, взятая со знаком «плюс» для точек, лежащих вне S, и со знаком «минус» для точек, лежащих внутри S, называется *степенью* точки O относительно сферы S. Легко проверить, что она равна $d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки O до центра сферы, R — радиус сферы.

4.37. В пространстве даны две неконцентрические сферы. Докажите, что геометрическое место точек, степени которых относительно этих сфер равны, является плоскостью (*радикальная плоскость* двух сфер).

4.38. К двум сферам проведены общие касательные AB и CD. Докажите, что длины проекций отрезков AC и BD на прямую, проходящую через центры сфер, равны.

4.39. Найдите геометрическое место середин общих касательных к двум данным непересекающимся сферам.

4.40. Внутри выпуклого многогранника расположено несколько непересекающихся шаров различных радиусов. Докажите, что этот многогранник можно разрезать на меньшие выпуклые многогранники, каждый из которых содержит ровно один из данных шаров.

§ 7. Сферическая геометрия и телесные углы

4.41. На сфере даны две пересекающиеся окружности S_1 и S_2. Рассмотрим конус (или цилиндр), касающийся данной сферы по окружности S_1. Докажите, что окружности S_1 и S_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда плоскость окружности S_2 проходит через вершину этого конуса (или параллельна оси цилиндра).

4.42. Найдите площадь криволинейного треугольника, образованного при пересечении сферы радиуса R с трехгранным углом, двугранные углы которого равны α, β и γ, а вершина совпадает с центром сферы.

4.43. Пусть A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC сферического треугольника ABC. Докажите, что площадь сферического треугольника A_1B_1C меньше половины площади сферического треугольника ABC.

4.44. Выпуклый n-гранный угол высекает на сфере радиуса R с центром в вершине угла сферический n-угольник. Докажите, что его площадь равна $R^2(\sigma - (n-2)\pi)$, где σ — сумма двугранных углов.

4.45. На сфере фиксированы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C сферических треугольников ABC, в которых величина $\angle A + \angle B - \angle C$ постоянна.

4.46. На сфере фиксированы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C сферических треугольников ABC данной площади.

4.47. На сфере расположены три дуги больших кругов в 300° каждая. Докажите, что хотя бы две из них имеют общую точку.

4.48. На сфере дано несколько дуг больших кругов, причем сумма их угловых величин меньше π. Докажите, что существует плоскость, проходящая через центр сферы и не пересекающая ни одной из этих дуг.

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в вершине многогранного угла (или на ребре двугранного угла). Площадь части ее поверхности, заключенной внутри этого угла, называется величиной *телесного угла* этого многогранного (двугранного) угла.

4.49. а) Докажите, что телесный угол двугранного угла равен 2α, где α — величина двугранного угла в радианах.

б) Докажите, что телесный угол многогранного угла равен $\sigma - (n-2)\pi$, где σ — сумма его двугранных углов.

4.50. Вычислите величину телесного угла конуса с углом 2α при вершине.

4.51. Докажите, что разность между суммой телесных углов двугранных углов тетраэдра и суммой телесных углов его трехгранных углов равна 4π.

4.52. Докажите, что разность между суммой телесных углов двугранных углов при ребрах многогранника и суммой телесных углов многогранных углов при его вершинах равна $2\pi(\Gamma - 2)$, где Γ — число граней многогранника.

Задачи для самостоятельного решения

4.53. Через точку D проведены три прямые, пересекающие сферу в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику со сторонами $AB \cdot CD$, $BC \cdot AD$ и $AC \cdot BD$.

4.54. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, перпендикулярной радиусу описанной сферы, идущему в вершину D. Докажите, что вершины A, B, C и точки пересечения плоскости с ребрами DA, DB, DC лежат на одной сфере.

4.55. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину A проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Пусть M и N — точки пересечения этой плоскости с прямыми A_1B и A_1D. Докажите, что прямая MN касается вписанного в куб шара.

4.56. Шар радиуса R касается всех боковых граней пирамиды в серединах сторон ее оснований. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найдите объем пирамиды.

4.57. На сфере расположены окружности S_0, S_1, ..., S_n, причем S_1 касается S_n и S_2, S_2 касается S_1 и S_3, ..., S_n касается S_{n-1} и S_1, а S_0 касается всех окружностей. Кроме того, радиусы всех этих окружностей равны. При каких n это возможно?

4.58. Пусть K — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка L лежит на ребре BC, причем отрезок KL касается вписанного в куб шара. В каком отношении отрезок KL делится точкой касания?

4.59. Плоскости основания конуса и его боковой поверхности изнутри касаются n попарно касающихся шаров радиуса R; n шаров радиуса $2R$ аналогичным образом касаются боковой поверхности с внешней стороны. Найдите объем конуса.

4.60. Плоскость пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M и N; P — произвольная точка пространства. Прямые PK, PL, PM и PN вторично пересекают окружности, описанные около треугольников PAB, PBC, PCD и PDA в точках K_1, L_1, M_1 и N_1. Докажите, что точки P, K_1, L_1, M_1 и N_1 принадлежат одной сфере.

Решения

4.1. Докажем сначала, что длина общей касательной к двум касающимся окружностям радиусов R и r равна $2\sqrt{Rr}$. Рассмотрим для этого прямоугольный треугольник, концы гипотенузы которого — центры окружностей, а один из катетов параллелен общей касательной. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, получим $x^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2$, где x — длина общей касательной. Отсюда $x = 2\sqrt{Rr}$.

Рассматривая теперь сечение, проходящее через центры данных шаров и точки A и B, легко проверить, что эта формула справедлива и в нашем случае.

4.2. Пусть x, y и z — радиусы шаров. Согласно задаче 4.1 $a = 2\sqrt{xy}$, $b = 2\sqrt{yz}$ и $c = 2\sqrt{xz}$. Поэтому $ac/b = 2x$, т. е. $x = ac/2b$. Аналогично $y = ab/2c$ и $z = bc/2a$.

4.3. Пусть A и C — точки касания с плоскостью шаров радиуса R; B и D — точки касания с плоскостью шаров радиуса r. Согласно задаче 4.1 $AB = BC = CD = AD = 2\sqrt{Rr}$, поэтому $ABCD$ — ромб; его диагонали равны $2R$ и $2r$. Следовательно, $R^2 + r^2 = 4Rr$, т. е. $R = (2 \pm \sqrt{3})r$. Таким образом, отношение большего радиуса к меньшему равно $2 + \sqrt{3}$.

4.4. Пусть MN — общая касательная, A и B — центры шаров. Радиусы AM и BN перпендикулярны касательной MN. Пусть C — проекция точки A на плоскость, проходящую через точку N перпендикулярно MN (рис. 35). Так как $NB = r$ и $NC = R$, то BC может изменяться от $R + r$ до $|R - r|$. Поэтому величина $MN^2 = AC^2 = AB^2 - BC^2$ может изменяться от $a^2 - (R + r)^2$ до $a^2 - (R - r)^2$.

Для пересекающихся шаров верхний предел длины MN остается таким же, а нижний равен 0.

4.5. Пусть a и b — радиусы сфер, A_1 и B_1 — другие точки их касания с гранями угла. Стороны трапеции AA_1BB_1 легко вычисляются: $AB_1 = A_1B = 2\sqrt{ab}$ (задача 4.1), $AA_1 =$

$= 2a \cos \alpha$ и $BB_1 = 2b \cos \alpha$. Квадрат высоты этой трапеции равен $4ab - (b - a)^2 \cos^2 \alpha$, а квадрат диагонали равен $4ab - (b - a)^2 \cos^2 \alpha + (a + b)^2 \cos^2 \alpha = 4ab(1 + \cos^2 \alpha)$. Если сфера, проходящая через точки A и A_1, пересекает отрезок AB в точке K, то $BK = BA_1^2/BA, = 2\sqrt{ab}/\sqrt{1 + \cos^2 \alpha} = AB/(1 + \cos^2 \alpha)$ и $AK = AB \cos^2 \alpha/(1 + \cos^2 \alpha)$. Аналогично находятся длины отрезков, на которые делится AB точкой пересечения со второй сферой. В итоге получаем, что отрезок AB разделен в отношении $\cos^2 \alpha : \sin^2 \alpha : \cos^2 \alpha$.

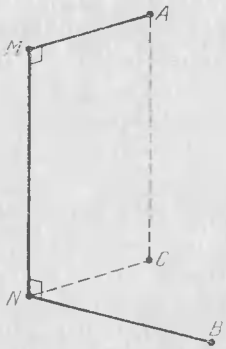


Рис. 35

4.6. Рассмотрим сначала данный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Конус с осью AC_1 и образующей AB касается сферы, касающейся всех ребер данного куба. Поэтому конус с осью AB и образующей AC_1 касается сферы, касающейся всех ребер куба с диагональю AB. Эти рассуждения показывают, что любая из четырех прямых, проходящих через данную точку параллельно какой-либо диагонали данного куба, касается всех полученных шаров.

4.7. Так как AC и AD — касательные к данной сфере, они равны. Поэтому точка A принадлежит плоскости, проходящей через середину отрезка CD перпендикулярно ему. Так как $\angle CDB = 90°$, то эта плоскость пересекает плоскость ABC по прямой, проходящей через середину отрезка BC перпендикулярно ему.

4.8. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение. Пусть две плоскости, пересекающиеся по прямой AX, касаются сферы с центром O в точках F и G. Тогда AOX — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями AOF и AOG. В самом деле, точки F и G симметричны относительно плоскости AOX.

Пусть плоскость AKN касается вписанной в куб сферы в точке P, а прямая AP пересекает NK в точке M. Применяя доказанное выше утверждение к касательным плоскостям, проходящим через прямую NA, получаем, что AC_1N — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями AC_1D_1 и AC_1M. Аналогично AC_1K — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями AC_1M и AC_1B_1. Следовательно, угол между плоскостями AC_1N и AC_1K вдвое меньше двугранного угла, образованного полуплоскостями AC_1D_1 и AC_1B_1. Рассматривая проекцию на плоскость, перпендикулярную AC_1, получаем, что двугранный угол, образованный полуплоскостями AC_1D_1 и AC_1B_1, равен 120°.

4.9. Пусть O_1 и O_2 — проекции центра O данного шара на плоскости KLM и KLN; P и S — середины отрезков LM и KN. Так как $OP = OS$ и $PK = SL$, то $OK = OL$. Поэтому проекцией точек O_1 и O_2 на прямую KL является точка Q — середина отрезка KL. Так как плоскости KLM и KLN перпендикулярны, то $OO_1 = O_2Q = QO_1$; поэтому квадрат радиуса искомой сферы равен $PO_1^2 + OO_1^2 = PO_1^2 + QO_1^2$. Применяя теорему косинусов к треугольнику KLM, получаем $KM^2 = 31$. По теореме синусов $31 = (2R \sin 60°)^2 = 3R^2$. Следовательно, $PO_1^2 + QO_1^2 = (R^2 - PL^2) + (R^2 - QL^2) = 62/3 - 9 - 1/4 = 137/12$.

4.10. Пусть O — центр данной сферы, r — ее радиус; a и b — длины касательных, проведенных из точек A и B; M — точка пересечения касательных, проведенных из A и B; x — длина касательной, проведенной из M. Тогда $AM^2 = (a \pm x)^2$, $BM^2 = (b \pm x)^2$ и $OM^2 = r^2 + x^2$. Подберем числа α, β и γ так, чтобы выражение $\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma OM^2$ не зависело от x, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 0$ и $\pm 2\alpha a \pm 2\beta b = 0$. Получаем, что точка M удовлетворяет соотношению $bAM^2 + aBM^2 - (a + b)OM^2 = d_1$ или соотношению $bAM^2 - aBM^2 + (a - b)OM^2 = d_2$. Каждое из этих соотношений определяет плоскость (см. задачу 1.29).

4.11. Рассмотрим плоскость, касающуюся всех трех данных сфер, и проведем через центр сферы радиуса 3 плоскость, ей параллельную. Полученная плоскость касается сфер радиуса 4 ± 3 и 6 ± 3, концентрических со сферами радиуса 4 и 6. В случае, когда знаки при числе 3 одинаковы, касание внешнее, а когда они разные, касание внутреннее. Ясно также, что для каждой плоскости, касающейся всех сфер, плоскость, симметричная ей относительно плоскости, проходящей через центры сфер, тоже касается всех сфер.

Для того чтобы выяснить, существует ли плоскость, проходящая через данную точку и касающаяся двух данных сфер, можно воспользоваться результатом задачи 12.11. Во всех случаях, кроме внутреннего касания со сферами радиуса 1 и 9, касательные плоскости существуют (см. рис. 36). Докажем, что не существует плоскости, касающейся внутренне сфер радиуса 1 и 9 с центрами B и C и проходящей через точку A. Пусть α — угол между прямой AB и касательной из A к сфере с центром B, β — угол между прямой AC и касательной из A к сфере с центром C. Достаточно проверить, что $\alpha + \beta > 60°$, т. е. $\cos(\alpha + \beta) < 1/2$. Так как $\sin\alpha = 1/11$ и $\sin\beta = 9/11$, то $\cos\alpha = \sqrt{120}/11$, $\cos\beta = \sqrt{40}/11$. Поэтому $\cos(\alpha + \beta) =$

$= (40\sqrt{3} - 9)/121$. Итак, неравенство $\cos(\alpha + \beta) < 1/2$ эквивалентно неравенству $80\sqrt{3} < 139$; последнее неравенство проверяется возведением в квадрат.

В итоге получаем, что всего имеется 3 пары касательных плоскостей.

4.12. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей: в задаче а) M — середина отрезка AB, в задаче б) $M = P$. Рассмотрим плоскость MO_1O_2. Центром искомой сферы является точка пересечения перпендикуляров, восставленных в этой плоскости из точек O_1 и O_2 к прямым MO_1 и MO_2.

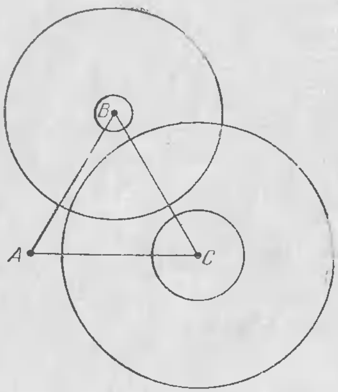


Рис. 36

4.13. Описанные окружности двух боковых граней имеют две общие точки — общие вершины этих граней. Поэтому существует сфера, содержащая обе эти окружности. Описанной окружностью третьей грани является сечение этой сферы плоскостью грани.

4.14. Рассмотрим какую-нибудь вершину многогранника и еще три вершины — концы выходящих из нее ребер. Через эти 4 точки можно провести сферу. Такие сферы можно построить для каждой вершины многогранника, и поэтому достаточно доказать, что для соседних вершин эти сферы совпадают.

Пусть P и Q — соседние вершины. Рассмотрим описанные окружности двух граней с общим ребром PQ. И точка P, и концы выходящих из нее трех ребер принадлежат хотя бы одной из этих окружностей. То же самое верно и для точки Q. Остается заметить, что через две окружности, имеющие две общие точки и не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу.

4.15. Произведение длин отрезков, на которые каждая из трех хорд делится точкой их пересечения, равно произведению длин отрезков, на которые точкой пересечения делится общая хорда, а значит, все эти произведения равны. Если отрезки AB и CD пересекаются в точке O и $AO \cdot OB = CO \cdot OD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Следовательно, концы первой и второй хорды, а также концы второй и третьей хорды лежат на одной окружности. Вторая хорда принадлежит обеим этим окружностям, а значит, эти окружности принадлежат одной сфере.

4.16. Если все окружности проходят через некоторые две точки, то все доказано. Поэтому можно считать, что есть три окружности, причем третья окружность не проходит хотя бы через одну из точек пересечения первых двух окружностей. Докажем, что тогда эти три окружности принадлежат одной сфере (или плоскости). Согласно задаче 4.12, а первые две окружности принадлежат одной сфере (или плоскости). Третья окружность пересекает первую окружность в двух точках. Эти две точки не могут совпасть с двумя точками пересечения третьей окружности со второй, так как иначе все три окружности проходили бы через две точки. Поэтому третья окружность имеет по крайней мере три общие точки со сферой, заданной первыми двумя окружностями. Следовательно, третья окружность принадлежит этой сфере.

Возьмем теперь какую-нибудь четвертую окружность. Ее точки пересечения с первой окружностью могут, конечно, совпасть с ее точками пересечения со второй окружностью, но тогда они уже не могут совпасть с ее точками пересечения с третьей окружностью. Поэтому четвертая окружность имеет по крайней мере три общие точки со сферой, заданной первыми двумя окружностями, а значит, принадлежит ей.

4.17. Пусть сфера (или плоскость) α содержит первую и вторую окружности, сфера (или плоскость) β — вторую и третью. Предположим, что α и β не совпадают. Тогда их линией пересечения является вторая окружность. Кроме того, общая точка первой и третьей окружностей тоже принадлежит линии пересечения α и β, т. е. второй окружности, а значит, все три окружности имеют общую точку. Получено противоречие.

4.18. Плоскость, проходящая через центр сферы и середины дуг AB и AC, проходит также и через середины хорд AB и AC, поэтому она параллельна хорде BC. Следовательно, большой круг, проходящий через B и C, и большой круг, проходящий через середины дуг AB и AC, пересекаются в таких двух точках K и K_1, что диаметр KK_1 параллелен BC. Поэтому длина дуги CK равна $(\pi R \pm l)/2$.

4.19. Пусть O — центр сферы. Возьмем точку E так, что $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$. Так как $\angle OCE = 60^\circ$ и $CE = 1 = OC$, то $OE = 1$. Точка O равноудалена от всех вершин параллелограмма $ABEC$, поэтому $ABEC$ — прямоугольник и проекция O_1 точки O на плоскость этого прямоугольника совпадает с его центром, т. е. с серединой отрезка BC. Отрезок OO_1 является средней линией треугольника CBD, поэтому $BD = 2OO_1 = 2\sqrt{OC^2 - BC^2/4} = 2\sqrt{1 - (AB^2 + AC^2)/4} = 1$.

4.20. Пусть A и B — две точки данной окружности, A_1 и B_1 — вторые точки пересечения прямых PA и PB со сферой; l — касательная к описанной окружности треугольника PAB в точке P. Тогда $\angle(l, AP) = \angle(BP, AB) = \angle(A_1B_1, AP)$, т. е. $A_1B_1 \| l$. Пусть плоскость П проходит через точку A_1 параллельно плоскости, касающейся в точке P сферы, которая проходит через данную окружность и точку P. Все искомые точки лежат в плоскости П.

4.21. Пусть O — центр сферы; O_1, O_2 и O_3 — центры данных окружностей; O_4 — центр искомой окружности. Рассматривая сечение сферы плоскостью OO_1O_2, легко доказать, что OO_1O_2 — правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}$. Прямая OO_4 проходит через центр треугольника $O_1O_2O_3$ перпендикулярно его плоскости, а значит, расстояния от вершин этого треугольника до прямой OO_4 равны 1. Пусть K — точка касания окружностей с центрами O_1 и O_4; L — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на OO_4; N — основание перпендикуляра, опущенного из K на O_1L. Так как $\triangle O_1KN \sim \triangle OO_1L$, то $O_1N = OL \cdot O_1K/OO_1 = \sqrt{2/3}$, а значит, искомый радиус O_4K равен $LN = 1 - \sqrt{2/3}$.

4.22. Пусть $P = (x, y, z)$ — данная точка земной поверхности, P' — ее проекция на плоскость экватора. Тогда $z = R \sin \varphi$ и $OP' = R \cos \varphi$. Следовательно, $x = OP' \cos \psi = R \cos \varphi \cos \psi$ и $y = R \cos \varphi \sin \psi$. Итак, $P = (R \cos \varphi \cos \psi, R \cos \varphi \sin \psi, R \sin \varphi)$.

4.23. Введем такую же систему координат, как и в задаче 4.22. Если широта и долгота точки P равны φ, то $P = (R \cos^2\varphi, R \cos \varphi \sin \varphi, R \sin \varphi)$. Проекция этой точки на плоскость экватора имеет координаты $x = R \cos^2 \varphi$ и $y = R \cos \varphi \sin \varphi$. Легко проверить, что $(x - R/2)^2 + y^2 = R^2/4$, т. е. искомое множество — окружность радиуса $R/2$ с центром $(R/2, 0)$.

4.24. Рассмотрим сначала усеченный конус, боковая поверхность которого касается шара радиуса R с центром O, причем точки касания делят образующие конуса пополам, и докажем, что площадь его боковой поверхности равна $2\pi Rh$, где h — высота этого конуса. Пусть AB — образующая усеченного конуса; C — середина отрезка AB; L — основание перпендикуляра, опущенного из C на ось конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна $2\pi CL \cdot AB$ (эту формулу можно получить предельным переходом, воспользовавшись тем, что площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту), а так как угол между прямой AB и осью конуса равен углу между CO и CL, то $AB : CO = h : CL$, т. е. $CL \cdot AB = CO \cdot h = Rh$.

Утверждение задачи доказывается теперь предельным переходом: заменим рассматриваемую часть поверхности сферы фигурой, состоящей из боковых поверхностей нескольких усеченных конусов; когда высоты этих конусов стремятся к нулю, площадь поверхности этой фигуры стремится к площади рассматриваемой части сферы.

4.25. Пусть M — центр основания шарового сегмента, h — высота сегмента, O — центр шара, R — радиус шара. Тогда $AM = h$, $MO = R - h$ и $BM \perp AO$. Следовательно, $AB^2 - AM^2 = BM^2 = BO^2 - OM^2$, т. е. $AB^2 = h^2 + R^2 - (R - h)^2 = 2Rh$. Остается воспользоваться результатом задачи 4.24.

4.26. Объем шарового сектора равен $SR/3$, где S — площадь сферической части поверхности сектора. Согласно задаче 4.24 $S = 2\pi Rh$.

4.27. Шаровой сегмент вместе с соответствующим конусом с вершиной в центре шара составляют шаровой сектор. Объем шарового сектора равен $2\pi R^2h/3$ (задача 4.26). Высота конуса равна $R - h$, а квадрат радиуса его основания равен $R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$, поэтому его объем равен $\pi(R - h)(2Rh - h^2)/3$. Вычитая из объема шарового сектора объем конуса, получаем требуемое.

4.28. Пусть AB — хорда данного сегмента, O — центр круга, x — расстояние от O до AB, R — радиус круга. Объем тела, полученного при вращении сектора AOB вокруг диаметра, равен $RS/3$, где S — площадь поверхности, полученной при вращении дуги AB. Согласно задаче 4.24 $S = 2\pi Rh$. Из решения той же задачи следует, что объем тела, полученного при вращении треугольника AOB, равен $2\pi x^2h/3$ (для доказательства следует заметить, что часть поверхности этого тела, полученная при вращении отрезка AB, касается сферы радиуса x).

Итак, искомый объем равен $2\pi R^2h/3 - 2\pi x^2h/3 = 2\pi(x^2 + a^2/4)h/3 - 2\pi x^2h/3 = \pi a^2h/6$.

4.29. Согласно задаче 4.28 объем колечка равен $\pi h^3/6$, т. е. он не зависит от d.

4.30. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер S_1 и S_2, R_1 и R_2 — их радиусы. Пусть, далее, A — точка пересечения сфер, AH — высота треугольника O_1AO_2. Внутри S_1 находится сегмент сферы S_2 с высотой O_1H. Так как $O_1O_2 = AO_2 = R_2$ и $O_1A = R_1$, то $2O_1H : R_1 = R_1 : R_2$, т. е. $O_1H = R_1^2/2R_2$. Согласно задаче 4.24 площадь поверхности рассматриваемого сегмента равна $2\pi R_2 \cdot R_1^2/2R_2 = \pi R_1^2$.

4.31. Если бы сферы α и β пересекались, то площадь поверхности части сферы β, расположенной внутри α, составляла бы 1/4 поверхности α (задача 4.30). Следовательно, сфера β содержится внутри α, а значит, отношение их радиусов равно $\sqrt{5}$.

4.32. Рассмотрим описанный около сферы радиуса 10 многогранник, расстояние между любыми двумя точками поверхности которого не превосходит 21, и докажем, что число его граней больше 20. Заметим для начала, что этот многогранник расположен внутри сферы радиуса 11, центр которой совпадает с центром O вписанной сферы. В самом деле, если для некоторой точки A поверхности многогранника $OA > 11$, то пусть B — вторая точка пересечения поверхности многогранника с прямой OA. Тогда $AB = AO + OB > 11+10 = 21$, чего не может быть.

Каждая плоскость грани отсекает от сферы радиуса 11 «шапочку» площадью $2\pi R(R - r)$, где $R = 11$ и $r = 10$ (см. задачу 4.24). Такие «шапочки» покрывают всю сферу, поэтому $n \cdot 2\pi R(R - r) \geqslant 4\pi R^2$, где n — число граней. Следовательно, $n \geqslant 2R/(R - r) = 22 > 20$.

4.33. Плоскости граней куба разбивают описанную сферу на 12 «двуугольников» (соответствующих ребрам куба) и 6 криволинейных четырехугольников (соответствующих граням куба). Пусть x — площадь «двуугольника», y — площадь «четырехугольника». Так как радиус описанной сферы равен $a\sqrt{3}/2$, то плоскость грани куба отсекает от нее сегмент высотой $a(\sqrt{3} - 1)/2$; площадь поверхности этого сегмента равна $\pi a^2(3 - \sqrt{3})/2$. Этот сегмент состоит из четырех «двуугольников» и одного «четырехугольника», т. е. $4x + y = \pi a^2(3 - \sqrt{3})/2$. Ясно также, что $12x + 6y = 4\pi R^2 = 3\pi a^2$. Решая эту систему уравнений, получаем $x = \pi a^2(2 - \sqrt{3})/4$ и $y = \pi a^2(\sqrt{3} - 1)/2$.

4.34. Рассмотрим правильный октаэдр с ребром $2R$. Радиус шара, касающегося всех его ребер, равен R. Грани октаэдра разбивают шар на 8 сферических сегментов (соответствующих граням) и 6 криволинейных четырехугольников (соответствующих вершинам). Пусть x — площадь сегмента, y — площадь «четырехугольника». Искомые площади равны y и $5y + 4x$. Вычислим сначала x. Так как расстояние от центра октаэдра до вершины равно $\sqrt{2}\,R$, а расстояние от центра его грани до вершины равно $2R/\sqrt{3}$, то расстояние от центра октаэдра до его грани равно $R\sqrt{2/3}$. Следовательно, высота рассматриваемого сферического сегмента равна $(1 - \sqrt{2/3})R$, а значит, $x =$

$= 2\pi R^2(1 - \sqrt{2/3})$. Ясно также, что $8x + 6y = 4\pi R^2$. Поэтому $y = \frac{2\pi R^2}{3}\cdot\left(4\sqrt{\frac{2}{3}} - 3\right)$ и $5y + 4x = \pi R^2\left(\frac{16}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\right)$.

4.35. Рассмотрим правильный тетраэдр с ребром 2. Поверхность сферы, касающейся всех его ребер, разбивается его поверхностью на 4 равных криволинейных треугольника, площадь каждого из которых и есть искомая величина, и 4 равных сегмента. Пусть x — расстояние от центра грани до вершины, y — расстояние от центра тетраэдра до грани, z — расстояние от центра грани до ребра этой грани. Легко проверить, что $x = 2/\sqrt{3}$ и $z = 1/\sqrt{3}$. Далее, $y = h/4$, где $h = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{8/3}$ — высота тетраэдра, т. е. $y = 1/\sqrt{6}$. Радиус r сферы равен $\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{1/6 + 1/3} = 1/\sqrt{2}$. Высота каждого из четырех сегментов равна $r - y = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{6}$. Следовательно, искомая площадь равна

$$\frac{1}{4}\left(4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\cdot 2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right).$$

4.36. Рассмотрим куб с ребром $2\sqrt{2}$. Сфера радиуса 2 с центром в центре куба касается всех его ребер, а ее пересечения с гранями являются окружностями радиуса $\sqrt{2}$. Поверхность сферы разбивается поверхностью куба на 6 сегментов и 8 криволинейных треугольников. Пусть x — площадь сегмента, y — площадь криволинейного треугольника. Тогда искомые площади равны y и $16\pi - y - 3x$ (16π — площадь поверхности сферы радиуса 2). Так как высота каждого сегмента равна $2 - \sqrt{2}$, то $x = 4\pi(2 - \sqrt{2})$, а значит, $y = (16\pi - 6x)/8 = \pi(3\sqrt{2} - 4)$ и $16\pi - y - 3x = \pi(9\sqrt{2} - 4)$.

4.37. Введем систему координат с началом в центре первой сферы и осью Ox, проходящей через центр второй сферы. Пусть расстояние между центрами сфер равно a; радиусы первой и второй сфер равны R и r. Тогда степени точки (x, y, z) относительно первой и второй сфер равны $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ и $(x - a)^2 + y^2 + z^2 - r^2$. Поэтому искомое ГМТ задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2 - r^2$, т. е. $x = (a^2 + R^2 - r^2)/2a$. Это уравнение задает плоскость, перпендикулярную прямой, соединяющей центры сфер.

4.38. Пусть M — середина отрезка AB; l — прямая, проходящая через центры данных сфер; P — точка пересечения прямой l и радикальной плоскости данных сфер. Так как касательные MA и MB, проведенные из точки M к данным сферам, равны, то M принадлежит радикальной плоскости этих сфер. Поэтому проекцией точки M на прямую l является точка P, т. е. проекции точек A и B на прямую l симметричны относительно точки P. Следовательно, при симметрии относительно точки P проекция отрезка AC на прямую l переходит в проекцию отрезка BD.

4.39. Середины общих касательных к двум сферам лежат в их радикальной плоскости. Пусть O_1 и O_2 — центры данных сфер, M — середина общей касательной, N — точка пересечения радикальной плоскости с прямой O_1O_2. Рассмотрим сечение данных сфер плоскостью, проходящей через точки O_1 и O_2, и проведем к полученным в сечении окружностям внешнюю и внутреннюю касательные (рис. 37). Пусть P и Q — середины

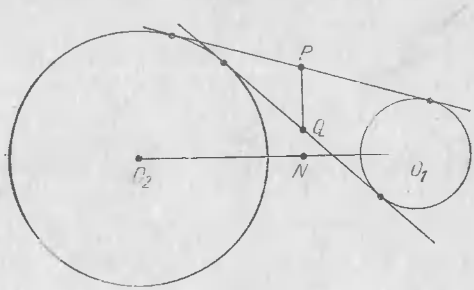


Рис. 37

этих касательных. Докажем, что $NQ \leqslant NM \leqslant NP$. В самом деле, $NM^2 = O_1M^2 - O_1N^2 = x^2/4 + R_1^2 - O_1N^2$, где x — длина касательной, а величина x наибольшее и наименьшее значение принимает в случае внутреннего и внешнего касания (см. решение задачи 4.4). Итак, искомым ГМТ является кольцо, расположенное в радикальной плоскости, с внешним радиусом NP и внутренним NQ.

4.40. Пусть $S_1, \ldots, S_n$ — поверхности данных шаров. Для каждой сферы S_i рассмотрим фигуру M_i, состоящую из точек, степень которых относительно S_i не больше степеней относительно всех остальных данных сфер. Докажем, что фигура M_i выпуклая. В самом деле, пусть M_{ij} — фигура, состоящая из точек, степень которых относительно S_i не больше степени относительно S_j; фигура M_{ij} является полупространством, состоящим из точек, лежащих по ту же сторону от радикальной плоскости сфер S_i и S_j, что и сфера S_i. Фигура M_i является пересечением выпуклых фигур M_{ij}, поэтому она выпукла. Кроме того, она содержит сферу S_i, так как каждая фигура M_{ij} содержит сферу S_i. Для любой точки пространства какая-то из ее степеней относительно $S_1, \ldots, S_n$ является наименьшей, поэтому фигуры M_i покрывают все пространство. Рассматривая части этих фигур, лежащие внутри исходного многогранника получаем требуемое разбиение.

4.41. Пусть A — точка пересечения данных окружностей, O — вершина рассматриваемого конуса (или OA — образующая цилиндра). Так как прямая OA перпендикулярна касательной к окружности S_1 в точке A, то окружности S_1 и S_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда OA — касательная к окружности S_2.

4.42. Рассмотрим сначала сферический «двуугольник» — часть сферы, заключенную внутри двугранного угла величиной α, ребро которого проходит через центр сферы. Площадь такой фигуры пропорциональна α, а при $\alpha = \pi$ она равна $2\pi R^2$; следовательно, она равна $2\alpha R^2$.

Каждой паре плоскостей граней данного трехгранного угла соответствуют два «двуугольника». Эти «двуугольники» покрывают данный криволинейный треугольник и треугольник, симметричный ему относительно центра сферы, в 3 слоя, а остальную часть сферы в один слой. Следовательно, сумма их площадей равна площади поверхности сферы, увеличенной на $4S$, где S — площадь искомого треугольника. Поэтому $S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

4.43. Рассмотрим множество концов дуг с началом в точке C, делящихся пополам большим кругом, проходящим через точки A_1 и B_1. Это множество является окружностью, проходящей через точки A и B и точку C', симметричную точке C относительно радиуса, делящего пополам дугу A_1B_1. Часть этой окружности, состоящая из концов дуг, пересекающих сторону A_1B_1 криволинейного треугольника A_1B_1C, лежит внутри криволинейного треугольника ABC. В частности, внутри треугольника ABC лежит точка C', а значит, $S_{ABC} > S_{A_1B_1C} + S_{A_1B_1C'}$ (имеются в виду площади криволинейных треугольников). Остается заметить, что $S_{A_1B_1C} = S_{A_1B_1C'}$, так как эти треугольники равны.

4.44. Разрежем n-гранный угол на $n-2$ трехгранных углов, проведя плоскости через одно его ребро и несмежные с ним ребра. Записав для каждого из этих трехгранных углов формулу из задачи 4.42 и сложив их, получим требуемое.

4.45. Пусть M и N — точки пересечения сферы с прямой, проходящей через центр описанной окружности S треугольника ABC перпендикулярно его плоскости. Пусть $\alpha = \angle MBC = \angle MCB$, $\beta = \angle MAC = \angle MCA$ и $\gamma = \angle MAB = \angle MBA$ (имеются в виду углы на сфере). Этим величинам можно так приписать знаки, что будут выполняться равенства $\beta + \gamma = \angle A$, $\alpha + \gamma = \angle B$ и $\alpha + \beta = \angle C$; следовательно, $2\gamma = \angle A +$

$+\angle B-\angle C$. Каждый из углов A, B и C определен с точностью до 2π, поэтому угол γ определен с точностью до π. Равенство $\gamma=\angle MAB=\angle MBA$ определяет две точки M, симметричные относительно плоскости OAB, где O — центр сферы; если вместо γ взять $\gamma+\pi$, то вместо M получится точка N, т. е. окружность S не изменится. Искомому ГМТ принадлежат не все точки окружности, а лишь одна из дуг, определяемых точками A и B (какая именно — видно из знака числа $\angle A+\angle B-\angle C$). Итак, искомое ГМТ состоит из двух дуг окружностей, симметричных относительно плоскости OAB.

4.46. Площадь сферического треугольника ABC определяется величиной $\angle A+\angle B+\angle C$ (см. задачу 4.42). Пусть точки A' и B' диаметрально противоположны точкам A и B. Углы сферических треугольников ABC и $A'B'C'$ связаны следующим образом: $\angle A'=\pi-\angle A$ (см. рис. 38), $\angle B'=\pi-\angle B$, а углы при вершине C у них равны. Поэтому величина $\angle A'+\angle B'-\angle C=2\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)$ постоянна. Искомое ГМТ состоит из двух дуг окружностей, проходящих через точки A' и B' (см. задачу 4.45).

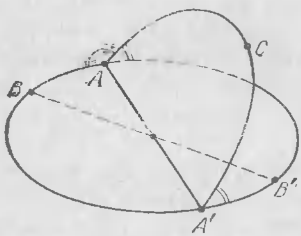


Рис. 38

4.47. Предположим, что данные дуги a, b и c не пересекаются. Пусть C_a и C_b — точки пересечения больших кругов, содержащих дуги a и b. Так как дуга a больше 180°, то она содержит одну из этих точек, например C_a. Тогда дуга b содержит точку C_b. Рассмотрим также точки A_b и A_c, B_a и B_c пересечения других пар больших кругов (A_b принадлежит дуге b, A_c — дуге c, B_a — дуге a, B_c — дуге c). Точки B_c и C_b лежат в плоскости дуги a, но самой дуге a они не принадлежат. Поэтому $\angle B_cOC_b<60°$ (O — центр сферы). Аналогично $\angle A_cOC_a<60°$ и $\angle A_bOB_a<60°$. Следовательно, $\angle A_cOB_c=\angle A_bOB_a<60°$ и $\angle A_cOC_b=180°-\angle A_cOC_a>120°$, т. е. $\angle A_cOB_c+\angle B_cOC_b<\angle A_cOC_b$. Получено противоречие.

4.48. Пусть O — центр сферы. Каждой плоскости, проходящей через O, можно сопоставить пару точек сферы — точки пересечения со сферой перпендикуляра к этой плоскости, проходящего через точку O. Легко проверить, что при этом сопоставлении плоскостям, проходящим через точку A, соответствуют точки большого круга, перпендикулярного прямой OA. Поэтому плоскостям, пересекающим дугу AB, соответствуют точки части сферы, заключенной между двумя плоскостями, проходящими через точку O перпендикулярно прямым OA и OB соответственно (рис. 39). Площадь этой фигуры равна $(\alpha/\pi)S$, где α — угловая величина дуги AB, а S — площадь сферы. Таким образом, если сумма угловых величин дуг меньше π, то площадь фигуры, состоящей из точек сферы, соответствующих плоскостям, пересекающим эти дуги, меньше S.

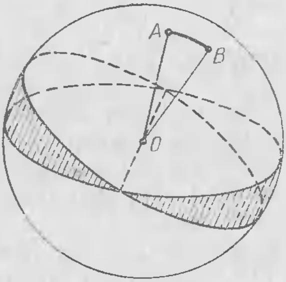


Рис. 39

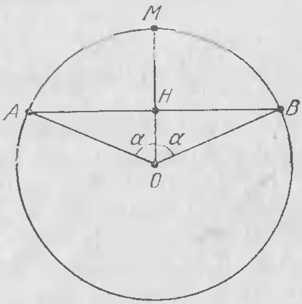


Рис. 40

4.49. а) Телесный угол пропорционален величине двугранного угла, а телесный угол двугранного угла величиной π равен 2π.

б) См. задачу 4.44.

4.50. Пусть O — вершина конуса, OH — его высота. Построим сферу радиуса 1 с центром O и рассмотрим ее сечение плоскостью, проходящей через прямую OH. Пусть A и B — точки конуса, лежащие на сфере; M — точка пересечения луча OH со сферой (рис. 40). Тогда $HM = OM - OH = 1 - \cos\alpha$. Телесный угол конуса равен площади сферического сегмента, отсекаемого основанием конуса. Согласно задаче 4.24 эта площадь равна $2\pi Rh = 2\pi(1 - \cos\alpha)$.

4.51. Телесный угол трехгранного угла равен сумме его двугранных углов минус π (см. задачу 4.42), поэтому сумма телесных углов трехгранных углов тетраэдра равна удвоенной сумме его двугранных углов минус 4π. А удвоенная сумма двугранных углов тетраэдра равна сумме их телесных углов.

4.52. Телесный угол при i-й вершине многогранника равен $\sigma_i - (n_i - 2)\pi$, где σ_i — сумма двугранных углов при ребрах, выходящих из нее, а n_i — число этих ребер (см. задачу 4.44). Так как каждое ребро выходит ровно из двух вершин, то $\sum n_i = 2\text{Р}$, где Р — число ребер. Поэтому сумма телесных углов многогранных углов равна $2\sigma - 2(\text{Р} - \text{В})\pi$, где σ — сумма двугранных углов, В — число вершин. Остается заметить, что $\text{Р} - \text{В} = \text{Г} - 2$ (задача 8.14).

Глава 5

ТРЕХГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ. ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ ДЛЯ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ

§ 1. Полярный трехгранный угол

5.1. Дан трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ и противолежащими им двугранными углами A, B и C. Докажите, что существует трехгранный угол с плоскими углами $\pi-A$, $\pi-B$ и $\pi-C$ и двугранными углами $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$ и $\pi-\gamma$.

5.2. Докажите, что если двугранные углы трехгранного угла прямые, то его плоские углы тоже прямые.

5.3. Докажите, что трехгранные углы равны, если равны их соответственные двугранные углы.

§ 2. Неравенства с трехгранными углами

5.4. Докажите, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла.

5.5. Докажите, что сумма плоских углов трехгранного угла меньше 2π, а сумма его двугранных углов больше π.

5.6. Луч SC' лежит внутри трехгранного угла $SABC$ с вершиной S. Докажите, что сумма плоских углов трехгранного угла $SABC$, больше суммы плоских углов трехгранного угла $SABC'$.

§ 3. Теоремы синусов и косинусов для трехгранных углов

5.7. Пусть α, β и γ — плоские углы трехгранного угла, A, B и C — противолежащие им двугранные углы. Докажите, что $\sin\alpha : \sin A = \sin\beta : \sin B = \sin\gamma : \sin C$ (теорема синусов для трехгранного угла).

5.8. Пусть α, β и γ — плоские углы трехгранного угла, A, B и C — противолежащие им двугранные углы.

а) Докажите, что $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cdot\cos A$ (первая теорема косинусов для трехгранного угла).

б) Докажите, что $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cdot \cos \alpha$ (вторая теорема косинусов для трехгранного угла).

5.9. Плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ; противолежащие им ребра образуют с плоскостями граней углы a, b и c. Докажите, что $\sin \alpha \sin a = \sin \beta \sin b = \sin \gamma \sin c$.

5.10. а) Докажите, что если все плоские углы трехгранного угла тупые, то и все его двугранные углы тоже тупые.

б) Докажите, что если все двугранные углы трехгранного угла острые, то и все его плоские углы тоже острые.

§ 4. Разные задачи

5.11. Докажите, что в произвольном трехгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

5.12. Докажите, что попарные углы между биссектрисами плоских углов трехгранного угла либо одновременно острые, либо одновременно тупые, либо одновременно прямые.

5.13. а) В трехгранный угол $SABC$ вписана сфера, касающаяся граней SBC, SCA и SAB в точках A_1, B_1 и C_1. Выразите величину угла ASB_1 через плоские углы данного трехгранного угла.

б) Вписанная и вневписанная сферы тетраэдра $ABCD$ касаются грани ABC в точках P и P' соответственно. Докажите, что прямые AP и AP' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

5.14. Плоские углы трехгранного угла не прямые. Через его ребра проведены плоскости, перпендикулярные противолежащим граням. Докажите, что эти плоскости пересекаются по одной прямой.

5.15. а) Плоские углы трехгранного угла не прямые. В плоскостях его граней проведены прямые, перпендикулярные противолежащим ребрам. Докажите, что все три полученные прямые параллельны одной плоскости.

б) Два трехгранных угла с общей вершиной S расположены так, что ребра второго угла лежат в плоскостях соответствующих граней первого и перпендикулярны его противоположным ребрам. Найдите плоские углы первого трехгранного угла.

§ 5. Многогранные углы

5.16. а) Докажите, что у любого выпуклого четырехгранного угла существует сечение, являющееся параллелограммом, причем все такие сечения параллельны.

б) Докажите, что у выпуклого четырехгранного угла с равными плоскими углами существует сечение, являющееся ромбом.

5.17. Докажите, что в многогранном угле любой плоский угол меньше суммы всех остальных плоских углов.

5.18. Один из двух выпуклых многогранных углов с общей вершиной лежит внутри другого. Докажите, что сумма плоских углов внутреннего многогранного угла меньше суммы плоских углов внешнего.

5.19. а) Докажите, что сумма двугранных углов выпуклого n-гранного угла больше $(n-2)\pi$.

б) Докажите, что сумма плоских углов выпуклого n-гранного угла меньше 2π.

5.20. Сумма плоских углов некоторого выпуклого n-гранного угла равна сумме его двугранных углов. Докажите, что $n=3$.

5.21. В выпуклый четырехгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы его противоположных плоских углов равны.

5.22. Докажите, что выпуклый четырехгранный угол можно вписать в конус тогда и только тогда, когда суммы его противоположных двугранных углов равны.

§ 6. Теоремы Чевы и Менелая для трехгранных углов

Прежде чем перейти к теоремам Чевы и Менелая для трехгранных углов, следует доказать (и сформулировать) теоремы Чевы и Менелая для треугольников. Чтобы сформулировать эти теоремы, потребуется понятие отношения ориентированных отрезков, лежащих на одной прямой.

Определение. Пусть точки A, B, C и D лежат на одной прямой. *Отношением ориентированных отрезков* AB и CD называется число $\overline{AB}/\overline{CD}$, абсолютная величина которого равна AB/CD, и при этом оно положительно, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, и отрицательно, если эти векторы имеют противоположные направления.

5.23. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки C_1, A_1 и B_1, а) Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1 \quad \text{(теорема Менелая).}$$

б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 попарно непараллельны, то они пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-1 \quad \text{(теорема Чевы).}$$

Пусть лучи l, m и n с общим началом лежат в одной плоскости. Выберем в этой плоскости положительное направление вращения. В этом параграфе будем обозначать через $\sin(l, m)/\sin(n, m)$ отношение синусов углов, на которые нужно повернуть в положительном направлении лучи l и n, чтобы они совпали с лучом m. Ясно, что эта величина не зависит от выбора в плоскости положительного направления вращения, так как при изменении этого выбора меняют знак и числитель, и знаменатель.

Пусть полуплоскости α, β и γ имеют общую границу. Выберем одно из двух направлений вращения вокруг этой прямой в качестве положительного. В этом параграфе будем обозначать через $\sin(\alpha, \beta)/\sin(\gamma, \beta)$ отношение синусов углов, на которые нужно повернуть в положительном направлении полуплоскости α и γ, чтобы они совпали с полуплоскостью β. Ясно, что эта величина не зависит от выбора положительного направления вращения.

5.24. Дан трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b и c. Лучи α, β и γ с началом в точке S расположены в плоскостях граней, противолежащих ребрам a, b и c соответственно.

а) Докажите, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(a, \gamma)}{\sin(b, \gamma)}\cdot\frac{\sin(b, \alpha)}{\sin(c, \alpha)}\cdot\frac{\sin(c, \beta)}{\sin(a, \beta)}=1$$

(первая теорема Менелая).

б) Докажите, что плоскости, проходящие через пары лучей a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(a, \gamma)}{\sin(b, \gamma)}\cdot\frac{\sin(b, \alpha)}{\sin(c, \alpha)}\cdot\frac{\sin(c, \beta)}{\sin(a, \beta)}=-1$$

(первая теорема Чевы).

5.25. Дан трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b, c. Лучи α, β и γ с началом в точке S расположены в плоскостях граней, противолежащих ребрам a, b и c соответственно. Будем обозначать через lm плоскость, содержащую лучи l и m.

а) Докажите, что

$$\frac{\sin(ab,\ a\alpha)}{\sin(ac,\ a\alpha)}\cdot\frac{\sin(bc,\ b\beta)}{\sin(ba,\ b\beta)}\cdot\frac{\sin(ca,\ c\gamma)}{\sin(cb,\ c\gamma)}=$$
$$=\frac{\sin(b,\ \alpha)}{\sin(c,\ \alpha)}\cdot\frac{\sin(c,\ \beta)}{\sin(a,\ \beta)}\cdot\frac{\sin(a,\ \gamma)}{\sin(b.\ \gamma)}.$$

б) Докажите, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(ab,\ a\alpha)}{\sin(ac,\ a\alpha)}\cdot\frac{\sin(bc,\ b\beta)}{\sin(ba,\ b\beta)}\cdot\frac{\sin(ca,\ c\gamma)}{\sin(cb,\ c\gamma)}=1$$

(вторая теорема Менелая).

в) Докажите, что плоскости, проходящие через пары лучей a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin(ab,\ a\alpha)}{\sin(ac,\ a\alpha)}\cdot\frac{\sin(bc,\ b\beta)}{\sin(ba,\ b\beta)}\cdot\frac{\sin(ca,\ c\gamma)}{\sin(cb,\ c\gamma)}=-1$$

(вторая теорема Чевы).

5.26. В трехгранный угол $SABC$ вписана сфера, касающаяся граней SBC, SCA и SAB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что плоскости SAA_1, SBB_1 и SCC_1 пересекаются по одной прямой.

5.27. Дан трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b и c. Лучи α, β и γ расположены в плоскостях граней, противолежащих ребрам a, b и c, а лучи α', β' и γ' симметричны этим лучам относительно биссектрис соответствующих граней.

а) Докажите, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда лучи α', β' и γ' лежат в одной плоскости.

б) Докажите, что плоскости, проходящие через пары лучей a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда плоскости, проходящие через пары лучей a и α', b и β', c и γ', пересекаются по одной прямой.

5.28. Дан трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b и c. Прямые α, β и γ расположены в плоскостях граней, противолежащих ребрам a, b и c. Пусть α' — прямая, по которой плоскость, симметричная плоскости

$a\alpha$ относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре a, пересекает плоскость грани bc; прямые β' и γ' определяются аналогично.

а) Докажите, что прямые α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда прямые α', β' и γ' лежат в одной плоскости.

б) Докажите, что плоскости, проходящие через пары прямых a и α, b и β, c и γ, пересекаются по одной прямой тогда и только тогда, когда плоскости, проходящие через пары прямых a и α', b и β', c и γ', пересекаются по одной прямой.

5.29. Дан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ и некоторая точка P. Для каждого ребра A_iA_j рассмотрим плоскость, симметричную плоскости PA_iA_j относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре A_iA_j. Докажите, что либо все эти 6 плоскостей пересекаются в одной точке, либо все они параллельны одной прямой.

5.30. Дан трехгранный угол $SABC$, причем $\angle ASB = \angle ASC = 90°$. Плоскости π_b и π_c проходят через ребра SB и SC, а плоскости π_b' и π_c' симметричны им относительно биссекторных плоскостей двугранных углов при этих ребрах. Докажите, что проекции на плоскость BSC прямых пересечения плоскостей π_b и π_c, π_b' и π_c' симметричны относительно биссектрисы угла BSC.

5.31. Пусть точка Монжа тетраэдра $ABCD$ (см. задачу 7.32) лежит в плоскости грани ABC. Докажите, что тогда через точку D проходят плоскости, в которых лежат:

а) точки пересечения высот граней DAB, DBC и DAC;

б) центры описанных окружностей граней DAB, DBC и DAC.

Задачи для самостоятельного решения

5.32. В трехгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром O. Докажите, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна прямой OS.

5.33. Дан трехгранный угол $SABC$ с вершиной S; A, B и C — двугранные углы при ребрах SA, SB и SC; α, β и γ — противолежащие им плоские углы.

а) Биссекторная плоскость двугранного угла при ребре SA пересекает грань SBC по лучу SA_1. Докажите, что $\sin A_1SB : \sin A_1SC = \sin ASB : \sin ASC$.

б) Плоскость, проходящая через ребро SA перпендикулярно грани SBC, пересекает эту грань по лучу SA_1. Докажите, что $\sin A_1SB : \sin A_1SC = (\sin \beta \cos C) : (\sin \gamma \cos B)$. (Предполагается, что все плоские углы данного трехгранного угла острые; разберите самостоятельно случай, когда среди плоских углов трехгранного угла есть тупые углы.)

5.34. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — единичные векторы, направленные вдоль ребер трехгранного угла $SABC$.

а) Докажите, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и биссектрисы противолежащих им граней, пересекаются по одной прямой, причем эта прямая задается вектором $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

б) Докажите, что биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой, причем эта прямая задается вектором $\mathbf{a} \sin \alpha + \mathbf{b} \sin \beta + \mathbf{c} \sin \gamma$.

в) Докажите, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла перпендикулярно его противолежащим граням, пересекаются по одной прямой, причем эта прямая задается вектором $\mathbf{a} \sin \alpha \cos B \times \cos C + \mathbf{b} \sin \beta \cos A \cos C + \mathbf{c} \sin \gamma \cos A \cos B$.

г) Докажите, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней перпендикулярно плоскостям этих граней, пересекаются по одной прямой, причем эта прямая задается вектором $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ (определение векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ см. на с. 133).

5.35. В выпуклом четырехгранном угле суммы противоположных плоских углов равны. Докажите, что в него можно вписать сферу.

5.36. Проекции SA', SB' и SC' ребер SA, SB и SC трехгранного угла на противоположные грани служат ребрами нового трехгранного угла. Докажите, что его биссекторными плоскостями являются SAA', SBB' и SCC'.

Решения

5.1. Возьмем внутри данного трехгранного угла с вершиной S произвольную точку S' и опустим из нее перпендикуляры $S'A'$, $S'B'$ и $S'C'$ на грани SBC, SAC и SAB соответственно.

Ясно, что плоские углы трехгранного угла $S'A'B'C'$ дополняют до π двугранные углы трехгранного угла $SABC$. Для завершения доказательства остается заметить, что ребра SA, SB и SC перпендикулярны граням $S'B'C'$, $S'A'C'$ и $S'A'B'$ соответственно.

Замечание. Угол $S'A'B'C'$ называется *дополнительным* или *полярным* к углу $SABC$.

5.2. Рассмотрим трехгранный угол, полярный к данному (см. задачу 5.1). Его плоские углы прямые, поэтому его двугранные углы тоже прямые. Следовательно, плоские углы исходного трехгранного угла тоже прямые.

5.3. Полярные углы к данным трехгранным углам имеют равные плоские углы, а значит, они равны.

5.4. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$ с вершиной S. Неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ очевидно, если $\angle ASC \leqslant \angle ASB$. Поэтому будем считать, что $\angle ASC > \angle ASB$. Тогда внутри грани ASC можно так выбрать точку B', что $\angle ASB' = \angle ASB$ и $SB' = SB$, т. е. $\triangle ASB = \triangle ASB'$. Можно считать, что точка C лежит в плоскости ABB'. Так как $AB' + B'C = AC < AB + BC = A'B + BC$, то $B'C < BC$. Следовательно, $\angle B'SC < \angle BSC$. Остается заметить, что $\angle B'SC = \angle ASC - \angle ASB$.

5.5. Первое решение. Отложим на ребрах трехгранного угла от вершины S равные отрезки SA, SB и SC. Пусть O — проекция точки S на плоскость ABC. Равнобедренные треугольники ASB и AOB имеют общее основание AB и $AS > AO$. Следовательно, $\angle ASB < \angle AOB$. Записывая аналогичные неравенства для двух других углов и складывая их, получаем $\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA < \angle AOB + \angle BOC + \angle COA \leqslant 2\pi$ (последнее неравенство становится строгим, только если точка O лежит вне треугольника ABC).

Для доказательства второй части достаточно применить уже доказанное неравенство к углу, полярному к данному (см. задачу 5.1). В самом деле, если α, β и γ — двугранные углы данного трехгранного угла, то $(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

Второе решение. Пусть точка A' лежит на продолжении ребра SA за вершину S. Согласно задаче 5.4 $\angle A'SB + \angle A'SC > \angle BSC$, т. е. $(\pi - \angle ASB) + (\pi - \angle ASC) > \angle BSC$, а значит, $2\pi > \angle ASB + \angle BSC + \angle CSA$.

Доказательство второй части проводится точно так же, как и в первом решении.

5.6. Пусть K — точка пересечения грани SCB с прямой AC'. Согласно задаче 5.4 $\angle C'SK + \angle KSB > \angle C'SB$ и $\angle CSA + \angle CSK > \angle ASK = \angle ASC' + \angle C'SK$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $\angle CSK + \angle KSB = \angle CSB$, получаем требуемое.

5.7. Возьмем на ребре SA трехгранного угла $SABC$ произвольную точку M. Пусть M' — проекция точки M на плоскость SBC, P и Q — проекции точки M на прямые SB и SC. По теореме о трех перпендикулярах $M'P \perp SB$ и $M'Q \perp SC$. Если $SM = a$, то $MQ = a \sin\beta$ и $MM' = MQ \sin C = a \sin\beta \sin C$. Аналогично $MM' = MP \sin B = a \sin\gamma \sin B$. Следовательно, $\sin\beta : \sin B = \sin\gamma : \sin C$. Второе равенство доказывается аналогично.

5.8. а) П е р в о е р е ш е н и е. Возьмем на ребре SA точку M и восставим из нее в плоскостях SAB и SAC перпендикуляры PM и QM к ребру SA (точки P и Q лежат на прямых SB и SC). Выражая по теореме косинусов длину стороны PQ в треугольниках PQM и PQS и приравнивая эти выражения, после сокращения получаем требуемое равенство.

В т о р о е р е ш е н и е. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — единичные векторы, направленные по ребрам SA, SB и SC. Вектор $\mathbf{b}$, лежащий в плоскости SAB, можно представить в виде $\mathbf{b} = \mathbf{a}\cos\gamma + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \perp \mathbf{a}$ и $|\mathbf{u}| = \sin\gamma$. Аналогично $\mathbf{c} = \mathbf{a}\cos\beta + \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$ и $|\mathbf{v}| = \sin\beta$. Ясно также, что угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ равен A. С одной стороны, скалярное произведение векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно $\cos\alpha$; с другой стороны, произведение равно $(\mathbf{a}\cos\gamma + \mathbf{u}, \mathbf{a}\cos\beta + \mathbf{v}) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$.

б) Для доказательства достаточно применить первую теорему косинусов к углу, полярному к данному трехгранному углу (см. задачу 5.1).

5.9. Проведем три плоскости, параллельные граням трехгранного угла, удаленные от них на расстояние 1 и пересекающие ребра. Вместе с плоскостями граней они образуют параллелепипед, причем все его высоты равны 1, а значит, площади всех его граней равны. Заметим теперь, что длины ребер этого параллелепипеда равны $1/\sin a$, $1/\sin b$ и $1/\sin c$. Следовательно, площади его граней равны $\sin\alpha/\sin b \sin c$, $\sin\beta/\sin a \sin c$ и $\sin\gamma/\sin a \sin b$. Приравнивая эти выражения, получаем требуемое.

5.10. а) Согласно первой теореме косинусов для трехгранного угла (задача 5.8,а) $\sin\beta\sin\gamma\cos A = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma$. По условию $\cos\alpha < 0$ и $\cos\beta\cos\gamma > 0$, поэтому $\cos A < 0$.

б) Для доказательства достаточно воспользоваться второй теоремой косинусов (задача 5.8,б).

5.11. П е р в о е р е ш е н и е. Отложим на ребрах трехгранного угла от вершины S равные отрезки SA, SB и SC. Биссектрисы углов ASB и BSC проходят через середины отрезков

AB и BC, а биссектриса угла, смежного с углом CSA, параллельна CA.

Второе решение. Отложим на ребрах трехгранного угла от вершины S равные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Биссектрисы углов ASB и BSC параллельны векторам $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, а биссектриса угла, смежного с углом CSA, параллельна вектору $\mathbf{c}-\mathbf{a}$. Остается заметить, что $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

5.12. Отложим на ребрах трехгранного угла от его вершины векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ единичной длины. Векторы $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ задают биссектрисы плоских углов. Остается проверить, что все попарные скалярные произведения этих векторов имеют один и тот же знак. Легко убедиться, что скалярное произведение любой пары этих векторов равно

$$1+(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{b}, \mathbf{c})+(\mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

5.13. а) Пусть α, β и γ — плоские углы трехгранного угла $SABC$; $x=\angle ASB_1=\angle ASC_1$, $y=\angle BSA_1=\angle BSC_1$ и $z=\angle CSA_1=\angle CSB_1$. Тогда $x+y=\angle ASC_1+\angle BSC_1=\angle ASB=\gamma$, $y+z=\alpha$, $z+x=\beta$. Поэтому $x=(\beta+\gamma-\alpha)/2$.

б) Пусть точка D' лежит на продолжении ребра AD за точку A. Тогда вневписанная сфера тетраэдра, касающаяся грани ABC, вписана в трехгранный угол $ABCD'$ с вершиной A. Из решения задачи а) следует, что $\angle BAP=(\angle BAC+\angle BAD-\angle CAD)/2$ и $\angle CAP'=(\angle BAC+\angle CAD'-\angle BAD')/2$. А так как $\angle BAD'=180^\circ-\angle BAD$ и $\angle CAD'=180^\circ-\angle CAD$, то $\angle BAP=\angle CAP'$; значит, прямые AP и AP' симметричны относительно биссектрисы угла BAC.

5.14. Выберем точки A, B и C на ребрах трехгранного угла с вершиной S так, что $SA\perp ABC$ (плоскость, проходящая через точку A одного ребра перпендикулярно ему, пересекает два других ребра, так как плоские углы не прямые). Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Достаточно проверить, что SAA_1, SBB_1 и SCC_1 являются плоскостями, о которых говорится в условии задачи. Так как $BC\perp AS$ и $BC\perp AA_1$, то $BC\perp SAA_1$, а значит, плоскости SBC и SAA_1 перпендикулярны. Так как $BB_1\perp SA$ и $BB_1\perp AC$, то $BB_1\perp SAC$, а значит, плоскости SBB_1 и SAC перпендикулярны. Аналогично доказывается, что плоскости SCC_1 и SBC перпендикулярны.

5.15. а) Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — векторы, направленные по ребрам SA, SB и SC трехгранного угла. Прямая, лежащая в плоскости SBC и перпендикулярная ребру SA, параллельна вектору $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b}$. Аналогично две другие прямые параллельны векторам $(\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{c}$ и $(\mathbf{c}, \mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{c}, \mathbf{b})\mathbf{a}$. Так как сумма этих трех векторов равна нулю, они параллельны одной плоскости.

б) Направим по ребрам первого трехгранного угла $SABC$ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Пусть $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha$, $(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \beta$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \gamma$. Если ребро второго угла, лежащее в плоскости SAB, параллельно вектору $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, то $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, т. е. $\lambda\beta + \mu\alpha = 0$. Легко проверить, что если хотя бы одно из чисел α и β отлично от нуля, то это ребро параллельно вектору $\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$ (случай, когда одно из чисел равно нулю, нужно разобрать отдельно). Следовательно, если не более одного из чисел α, β и γ равно нулю, то ребра второго двугранного угла параллельны векторам $\gamma\mathbf{c} - \beta\mathbf{b}$, $\alpha\mathbf{a} - \gamma\mathbf{c}$ и $\beta\mathbf{b} - \alpha\mathbf{a}$, а так как сумма этих векторов равна нулю, то ребра должны лежать в одной плоскости. Если же, например, $\alpha \neq 0$ и $\beta = \gamma = 0$, то два ребра должны быть параллельны вектору $\mathbf{a}$. Остается единственная возможность: все числа α, β и γ равны нулю, т. е. плоские углы первого трехгранного угла прямые.

5.16. а) Пусть A, B, C и D — точки на ребрах выпуклого четырехгранного угла с вершиной S. Прямые AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда они параллельны прямой l_1, по которой пересекаются плоскости SAB и SCD. Прямые BC и AD параллельны тогда и только тогда, когда они параллельны прямой l_2, по которой пересекаются плоскости SCB и SAD. Следовательно, сечение является параллелограммом тогда и только тогда, когда оно параллельно прямым l_1 и l_2.

З а м е ч а н и е. Для невыпуклого четырехгранного угла сечение плоскостью, параллельной прямым l_1 и l_2, не будет ограниченной фигурой.

б) Точки A и C на ребрах четырехгранного угла можно выбрать так, что $SA = SC$. Пусть P — точка пересечения отрезка AC с плоскостью SBD. Точки B и D можно выбрать так, что $SB = SD$ и отрезок BD проходит через точку P. Так как плоские углы данного четырехгранного угла равны, то равны треугольники SAB, SAD, SCB и SCD. Поэтому четырехугольник $ABCD$ — ромб.

5.17. Рассмотрим многогранный угол $OA_1 \ldots A_n$ с вершиной O. Как следует из результата задачи 5.4, $\angle A_1OA_2 < \angle A_2OA_3 + \angle A_1OA_3$, $\angle A_1OA_3 < \angle A_3OA_4 + \angle A_1OA_4$, ..., $\angle A_1OA_{n-1} < \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$. Следовательно, $\angle A_1OA_2 < \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + \ldots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$.

5.18. Пусть многогранный угол $OA_1 \ldots A_n$ лежит внутри многогранного угла $OB_1 \ldots B_m$. Можно считать, что $A_1, .., A_n$, $B_1, .., B_m$ — точки пересечения их ребер со сферой радиуса 1. Тогда величины плоских углов данных многогранных углов равны длинам соответствующих дуг этой сферы. Итак, вместо многогранных углов будем рассматривать «сферические многоугольники» $A_1 \ldots, A_n$ и $B_1 \ldots B_m$. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — точки пересечения «лучей» $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ со сторонами сферического многоугольника $B_1 \ldots B_m$ (рис. 41). Согласно задаче 5.17 $\smile A_iA_{i+1} + \smile A_{i+1}P_i = \smile A_iP_i < \smile A_iP_{i-1} + l(P_{i-1}, P_i)$, где $l(P_{i-1}, P_i)$— длина части «периметра» многоугольника $B_1 \ldots B_m$, заключенной внутри «угла» $P_{i-1}A_iP_i$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

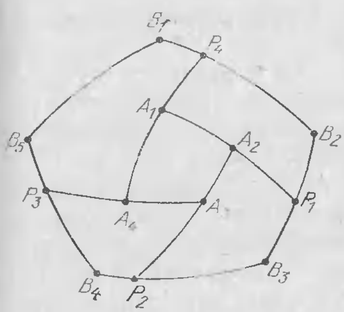


Рис. 41

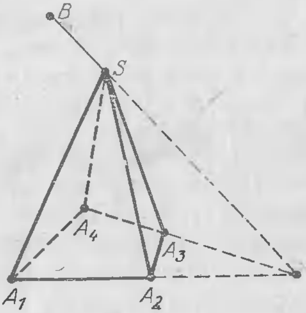


Рис. 42

5.19. а) Разрежем n-гранный угол $SA_1 \ldots A_n$ с вершиной S на $n-2$ трехгранных углов плоскостями SA_1A_3, $SA_1A_4, \ldots$ $\ldots, SA_1A_{n-1}$. Сумма двугранных углов n-гранного угла равна сумме двугранных углов этих трехгранных углов, а сумма двугранных углов любого трехгранного угла больше π (задача 5.5).

б) Докажем это утверждение индукцией по n. Для $n = 3$ оно верно (см. задачу 5.5). Предположим, что оно верно для любого выпуклого $(n-1)$-гранного угла, и докажем, что тогда оно верно для выпуклого n-гранного угла $SA_1 \ldots A_n$ с вершиной S. Плоскости SA_1A_2 и $SA_{n-1}A_n$ имеют общую точку S, поэтому они пересекаются по некоторой прямой l, причем эта прямая не лежит в плоскости SA_1A_n. Возьмем на прямой l точку B так, чтобы она и многогранный угол $SA_1 \ldots A_n$ лежали по разные стороны от плоскости SA_1A_n (рис. 42). Рассмотрим $(n-1)$-гранный угол $SBA_2A_3 \ldots A_{n-1}$. По предположению индукции сумма его плоских углов меньше 2π, а так как $\angle BSA_1 + \angle BSA_n >$ $> \angle A_1SA_n$ (задача 5.4), то сумма плоских углов n-гранного угла $SA_1A_2 \ldots A_n$ меньше суммы плоских углов $(n-1)$-гранного угла $SBA_2A_3 \ldots A_{n-1}$.

5.20. Сумма плоских углов произвольного выпуклого многогранного угла меньше 2π (см. задачу 5.19,б), а сумма двугранных углов выпуклого n-гранного угла больше $(n-2)\pi$ (см. задачу 5.19, а). Поэтому $(n-2)\pi < 2\pi$, т. е. $n < 4$.

5.21. Пусть сфера касается граней четырехгранного угла $SABCD$ в точках K, L, M и N (K принадлежит грани SAB, L — грани SBC и т. д.). Тогда $\angle ASK = \angle ASN$, $\angle BSK = \angle BSL$, $\angle CSL = \angle CSM$, $\angle DSM = \angle DSN$. Поэтому

$$\angle ASD + \angle BSC = \angle ASN + \angle DSN + \angle BSL + \angle CSL =$$
$$= \angle ASK + \angle DSM + \angle BSK + \angle CSM = \angle ASB + \angle CSD.$$

5.22. Пусть ребра четырехгранного угла $SABCD$ с вершиной S являются образующими конуса с осью SO. В трехгранном угле, образованном лучами SO, SA и SB, двугранные углы при ребрах SA и SB равны. Рассматривая три других таких угла, получаем равенство сумм противоположных двугранных углов четырехгранного угла $SABCD$.

Предположим теперь, что суммы противоположных двугранных углов равны. Рассмотрим конус с образующими SB, SA и SC. Допустим, что SD не является его образующей. Пусть SD_1 — прямая пересечения конуса с плоскостью ASD. В четырехгранных углах $SABCD$ и $SABCD_1$ суммы противоположных двугранных углов равны. Из этого следует, что двугранные углы трехгранного угла $SCDD_1$ удовлетворяют соотношению $\angle D + \angle D_1 - 180° = \angle C$. Рассмотрим трехгранный угол, полярный к $SCDD_1$ (см. задачу 5.1). В этом угле сумма двух плоских углов равна третьему, что невозможно (см. задачу 5.4).

5.23. а) Пусть при проекции на прямую, перпендикулярную прямой A_1B_1, точки A, B и C переходят в A', B' и C', точка C_1 — в Q, а две точки A_1 и B_1 переходят в одну точку P. Так как $\overline{A_1B} : \overline{A_1C} = \overline{PB'} : \overline{PC'}$, $\overline{B_1C} : \overline{B_1A} = \overline{PC'} : \overline{PA'}$ и $\overline{C_1A} : \overline{C_1B} = \overline{QA'} : \overline{QB'}$, то $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PC'}} \cdot \dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PA'}} \cdot \dfrac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}} = \dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}} \cdot \dfrac{\overline{QA'}}{\overline{QB'}} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{a+x}{b+x}$, где $|x| = PQ$.

Равенство $\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{a+x}{b+x} = 1$ эквивалентно тому, что $x = 0$ (нужно учесть, что $a \neq b$, так как $A' \neq B'$). А равенство $x = 0$ означает, что $P = Q$, т. е. точка C_1 лежит на прямой A_1B_1.

б) Докажем сначала, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку O, то выполняется указанное соотношение. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Так как точка C_1 лежит на прямой AB, то $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + x(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-x)\mathbf{a} + x\mathbf{b}$. С другой стороны, точка C_1 лежит на прямой OC, следовательно, $\overrightarrow{OC_1} + \gamma\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, т. е. $(1-x)\mathbf{a} +$

$+ x\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0$. Аналогичные рассуждения для точек A_1 и B_1 показывают, что $(1-y)\mathbf{b} + y\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a} = 0$ и $(1-z)\mathbf{c} + z\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0$. Так как векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ попарно неколлинеарны, то любые тройки ненулевых чисел (p, q, r), для которых $p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c} = 0$, пропорциональны. Сравнение первого и третьего из полученных равенств показывают, что $\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{z}{\beta}$, а второго и третьего — $\dfrac{1-y}{y} = \dfrac{\beta}{1-z}$. Следовательно, $\dfrac{1-x}{x} \cdot \dfrac{1-y}{y} \times \dfrac{1-z}{z} = 1$. Остается заметить, что

$$\frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1A}} = -\frac{1-x}{x}, \quad \frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}} = -\frac{1-y}{y}, \quad \frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}} = -\frac{1-z}{z}$$

Предположим теперь, что выполняется указанное соотношение, и докажем, что тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть C_1^* — точка пересечения прямой AB с прямой, проходящей через точку C и точку пересечения прямых AA_1 и BB_1. Для точки C_1^* выполняется такое же соотношение, как и для точки C_1. Поэтому $\overline{C_1^*A} : \overline{C_1^*B} = \overline{C_1A} : \overline{C_1B}$. Следовательно, $C_1^* = C_1$, т. е. прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Можно проверить также, что если выполняется указанное соотношение и две из прямых AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны, то третья прямая им параллельна.

5.24. а) Возьмем на ребрах a, b и c трехгранного угла произвольные точки A, B и C. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, в которых лучи α, β и γ (или их продолжения) пересекают прямые BC, CA и AB. Применяя теорему синусов к треугольникам SA_1B и SA_1C, получаем $\dfrac{A_1B}{\sin BSA_1} = \dfrac{BS}{\sin BA_1S}$ и $\dfrac{A_1C}{\sin CSA_1} = \dfrac{CS}{\sin CA_1S}$. Учитывая, что $\sin BA_1S = \sin CA_1S$, получаем $\dfrac{\sin BSA_1}{\sin CSA_1} = \dfrac{A_1B}{A_1C} \cdot \dfrac{CS}{BS}$. Как легко убедиться, это означает, что $\dfrac{\sin(b, \alpha)}{\sin(c, \alpha)} = \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \dfrac{CS}{BS}$ (нужно лишь проверить совпадение знаков этих величин). Аналогично $\dfrac{\sin(a, \gamma)}{\sin(b, \gamma)} = \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} \cdot \dfrac{BS}{AS}$ и $\dfrac{\sin(c, \beta)}{\sin(a, \beta)} = \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \dfrac{AS}{CS}$. Остается применить теорему Менелая к треугольнику ABC и заметить, что лучи α, β и γ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

В приведенном выше решении есть небольшая неточность: не учитывается, что прямые, на которых лежат лучи α, β и γ, могут быть параллельны прямым BC, CA и AB. Чтобы этого не случилось, точки A, B и C нужно выбирать не произвольно. Пусть A — произвольная точка на ребре a, а P и Q — такие точки на ребрах b и c, что $AP \parallel \gamma$ и $AQ \parallel \beta$. Возьмем на ребре точку B, отличную от P, и пусть R — такая точка на ребре c, что $BR \parallel \alpha$. Остается взять на ребре c точку C, отличную от Q и R. Теперь уже всегда существуют точки A_1, B_1 и C_1, в которых лучи α, β и γ (или их продолжения) пересекают прямые BC, CA и AB.

б) Решение почти дословно повторяет решение предыдущей задачи; нужно лишь к треугольнику ABC применить не теорему Менелая, а теорему Чевы.

5.25. а) Как видно из решения задачи 5.24,а, на ребрах a, b и c можно так выбрать точки A, B и C, что лучи α, β и γ не параллельны прямым BC, CA и AB и пересекают их в точках A_1, B_1 и C_1. Обозначим для краткости двугранные углы между плоскостями ab и $a\alpha$, ac и $a\alpha$ через U, V, а углы между лучами b и α, c и α — через u, v; будем также обозначать площадь треугольника XYZ через (XYZ). Вычислим объем тетраэдра $SABA_1$ двумя способами. С одной стороны,

$$V_{SABA_1} = (SA_1B)\cdot h_a/3 = SA_1\cdot SB\cdot h_a \sin u/6,$$

где h_a — высота, опущенная из вершины A на грань SBC. С другой стороны,

$$V_{SABA_1} = \frac{2}{3}\,\frac{(SAB)\cdot(SAA_1)\sin U}{SA} \quad \text{(см. задачу 3.3).}$$

Поэтому $SA_1\cdot SB\cdot h_a \sin u/6 = 2(SAB)\cdot(SAA_1)\sin U/3SA$. Аналогично $SA_1\cdot SC\cdot h_a \sin v/6 = 2(SAC)\cdot(SAA_1)\sin V/3SA$. Деля одно из этих равенств на другое, получаем

$$\frac{SB}{SC}\cdot\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{(SAB)}{(SAC)}\cdot\frac{\sin U}{\sin V}.$$

Это равенство означает, что

$$\frac{SB}{SC}\cdot\frac{\sin(b,\alpha)}{\sin(c,\alpha)} = \frac{(SAB)}{(SAC)}\cdot\frac{\sin(ab, a\alpha)}{\sin(ac, a\alpha)}$$

(нужно лишь проверить совпадение знаков этих выражений). Проводя аналогичные рассуждения для точек B_1 и C_1 и перемножая полученные равенства, после сокращения приходим к требуемому равенству.

б) Для решения этой задачи нужно воспользоваться результатами задач 5.24,а и 5.25,а.

в) Для решения этой задачи нужно воспользоваться результатами задач 5.24,б и 5.25,а.

5.26. Пусть a, b и c — ребра SA, SB и SC; α, β и γ — лучи SA_1, SB_1 и SC_1. Так как $\angle ASB_1 = \angle ASC_1$, то $|\sin(a, \beta)| = |\sin(a, \gamma)|$. Аналогично $|\sin(b, \alpha)| = |\sin(b, \gamma)|$ и $|\sin(c, \alpha)| = |\sin(c, \beta)|$. Поэтому

$$\left|\frac{\sin(a, \gamma)}{\sin(b, \gamma)} \cdot \frac{\sin(b, \alpha)}{\sin(c, \alpha)} \cdot \frac{\sin(c, \beta)}{\sin(a, \beta)}\right| = 1.$$

Ясно также, что каждый из трех этих сомножителей отрицателен, а значит, их произведение равно -1. Остается воспользоваться первой теоремой Чевы (задача 5.24,б).

5.27. Легко проверить, что $\sin(a, \gamma) = -\sin(b, \gamma')$ и $\sin(b, \gamma) = -\sin(a, \gamma')$, $\sin(b, \alpha) = -\sin(c, \alpha')$ и $\sin(c, \alpha) = -\sin(b, \alpha')$, $\sin(c, \beta) = -\sin(a, \beta')$ и $\sin(a, \beta) = -\sin(c, \beta')$. Поэтому

$$\frac{\sin(a, \gamma')}{\sin(b, \gamma')} \cdot \frac{\sin(b, \alpha')}{\sin(c, \alpha')} \cdot \frac{\sin(c, \beta')}{\sin(a, \beta')} = \left(\frac{\sin(a, \gamma)}{\sin(b, \gamma)} \cdot \frac{\sin(b, \alpha)}{\sin(c, \alpha)} \cdot \frac{\sin(c, \beta)}{\sin(a, \beta)}\right)^{-1}.$$

Для решения задач а) и б) достаточно воспользоваться этим равенством и первыми теоремами Менелая и Чевы (задачи 5.24,а и 5.24,б).

5.28. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через ребро a перпендикулярно ему, и будем обозначать точки пересечения данных прямых и ребер с этой плоскостью теми же буквами, что и их самих. Возможны два случая:

1. Лучи $a\alpha$ и $a\alpha'$ симметричны относительно биссектрисы угла bac (рис. 43,*а*).

2. Лучи $a\alpha$ и $a\alpha'$ симметричны относительно прямой, перпендикулярной биссектрисе угла bac (рис. 43,*б*).

В первом случае угол поворота от луча $a\alpha$ к лучу ab равен углу поворота от луча ac к лучу $a\alpha'$ и угол поворота от луча $a\alpha$ к лучу ac равен углу поворота от луча ab к лучу $a\alpha$; во втором случае эти углы не равны, а отличаются на 180°. Переходя к углам между полуплоскостями, в первом случае получаем $\sin(ab, a\alpha) = -\sin(ac, a\alpha')$ и $\sin(ac, a\alpha) = -\sin(ab, a\alpha')$, а во втором случае $\sin(ab, a\alpha) = \sin(ac, a\alpha')$ и $\sin(ac, a\alpha) = \sin(ab, a\alpha')$. В обоих случаях $\sin(ab, a\alpha)/\sin(ac, a\alpha) = \sin(ac, a\alpha')/\sin(ab, a\alpha')$. Проводя аналогичные рассуждения для ребер b и c и перемножая все такие равенства, получаем

$$\frac{\sin(ab,\ a\alpha)}{\sin(ac,\ a\alpha)}\cdot\frac{\sin(bc,\ b\beta)}{\sin(ba,\ b\beta)}\cdot\frac{\sin(ca,\ c\gamma)}{\sin(cb,\ c\gamma)}=$$

$$=\left(\frac{\sin(ab,\ a\alpha')}{\sin(ac,\ a\alpha')}\cdot\frac{\sin(bc,\ b\beta')}{\sin(ba,\ b\beta')}\cdot\frac{\sin(ca,\ c\gamma')}{\sin(cb,\ c\gamma')}\right)^{-1}.$$

Для решения задач а) и б) достаточно воспользоваться этим равенством и вторыми теоремами Менелая и Чевы (задачи 5.25,б и 5.25,в).

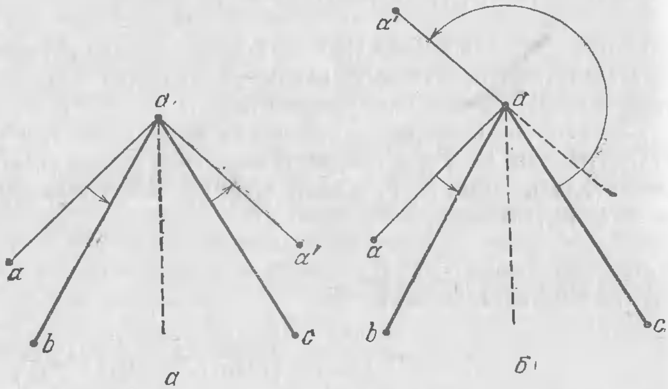


Рис. 43

5.29. Обозначим через π_{ij} плоскость, симметричную плоскости PA_iA_j относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре A_iA_j. Как следует из задачи 5.28,б, плоскость π_{il} проходит через прямую, по которой пересекаются плоскости π_{ij} и π_{ik}. Рассмотрим три плоскости π_{12}, π_{23} и π_{31}. Возможны два случая.

1. Эти плоскости имеют некоторую общую точку P^*. Тогда плоскости $\pi_{1\bar{4}}$, $\pi_{2\bar{4}}$ и $\pi_{3\bar{4}}$ проходят через прямые A_1P^*, A_2P^* и A_3P^* соответственно, т. е. все 6 плоскостей π_{ij} проходят через точку P^*.

2. Плоскости $\pi_{\bar{1}2}$ и $\pi_{\bar{1}3}$, $\pi_{2\bar{1}}$ и $\pi_{2\bar{3}}$, $\pi_{\bar{3}\bar{1}}$ и π_{32} пересекаются по прямым $l_{\bar{1}}$, l_2, $l_{\bar{3}}$, причем эти прямые параллельны. Тогда плоскости $\pi_{\bar{1}\bar{4}}$, $\pi_{2\bar{4}}$ и $\pi_{3\bar{4}}$ проходят через прямые $l_{\bar{1}}$, l_2 и $l_{\bar{3}}$ соответственно, т. е. все 6 плоскостей π_{ij} параллельны одной прямой.

5.30. Проекция на плоскость BSC любой прямой l, проходящей через точку S, совпадает с прямой, по которой плоскость, проведенная через ребро SA и прямую l, пересекает плоскость BSC. Поэтому достаточно доказать, что плоскости, проведенные через ребро SA и прямые пересечения плоскостей π_b и π_c, π_b' и π_c', симметричны относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре SA. Это следует из результата задачи 5.25,в.

5.31. а) При решении этой задачи будем использовать то, что проекция D_1 точки D на плоскость ABC лежит на описанной окружности треугольника ABC (задача 7.32,б). Проведем в треугольниках DAB, DBC и DAC высоты DC_1, DA_1 и DB_1. Требуется доказать, что лучи DA_1, DB_1 и DC_1 лежат в одной плоскости, т. е. точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Так как прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC, то $DD_1 \perp A_1C$. Кроме того, $DA_1 \perp A_1C$. Поэтому прямая A_1C перпендикулярна плоскости DD_1A_1, в частности, $D_1A_1 \perp A_1C$. Следовательно, A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных на прямые BC, CA и AB из точки D_1, лежащей на описанной окружности треугольника ABC (для точек B_1 и C_1 доказательство проводится точно так же, как и для точки A_1). Можно доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (см. Прасолов, 2.29).

б) Если AA_1 — высота треугольника ABC, а O — центр его описанной окружности, то лучи AA_1 и AO симметричны относительно биссектрисы угла BAC. В самом деле, легко проверить, что $\angle BAO = \angle CAA_1 = |90° - \angle C|$ (нужно рассмотреть два случая: угол C — тупой и угол C — острый). Поскольку, как было доказано в предыдущей задаче, прямые, соединяющие вершину D с точками пересечения высот граней DAB, DBC и DAC, лежат в одной плоскости, то в одной плоскости лежат и прямые, соединяющие вершину D с центрами описанных окружностей граней DAB, DBC и DAC (см. задачу 5.27,а).

Глава 6

ТЕТРАЭДР, ПИРАМИДА И ПРИЗМА

§ 1. Свойства тетраэдра

6.1. В любом ли тетраэдре высоты пересекаются в одной точке?

6.2. а) Через вершину A тетраэдра $ABCD$ проведены 3 плоскости, перпендикулярные противоположным ребрам. Докажите, что все эти плоскости пересекаются по одной прямой.

б) Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная противоположной грани и содержащая центр ее описанной окружности. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.

6.3. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий его вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани. Выразите длину медианы тетраэдра через длины его ребер.

6.4. Докажите, что центр вписанной в тетраэдр сферы лежит внутри тетраэдра, образованного точками касания.

6.5. Пусть S_1 и S_2 — площади граней тетраэдра, прилегающих к ребру a; α — двугранный угол при этом ребре; b — ребро, противоположное a; φ — угол между ребрами b и a. Докажите, что

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = (ab\sin\varphi)^2/4.$$

6.6. Докажите, что произведение длин двух противоположных ребер тетраэдра, деленное на произведение синусов двугранных углов при этих ребрах, одно и то же для всех трех пар противоположных ребер тетраэдра (теорема синусов для тетраэдра).

6.7. а) Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади граней тетраэдра; P_1, P_2 и P_3 — площади граней параллелепипеда, грани которого проходят через ребра тетраэдра параллельно его противоположным ребрам. Докажите, что

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2=P_1^2+P_2^2+P_3^2.$$

б) Пусть h_1, h_2, h_3 и h_4 — высоты тетраэдра, d_1, d_2 и d_3 — расстояния между его противоположными ребрами. Докажите, что

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}.$$

6.8. Пусть S_i, R_i и l_i $(i=1, 2, 3, 4)$— площади граней, радиусы описанных около этих граней кругов и расстояния от центров этих кругов до противоположных вершин тетраэдра. Докажите, что $18V^2=\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2-R_i^2\right)$, где V — объем тетраэдра.

6.9. Докажите, что для любого тетраэдра существует треугольник, длины сторон которого равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра, причем площадь S этого треугольника равна $6VR$, где V — объем тетраэдра, R — радиус его описанной сферы (формула Крелле).

6.10. Пусть a и b — длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, α и β — двугранные углы при этих ребрах. Докажите, что величина $a^2+b^2+2ab\operatorname{ctg}\alpha\times\operatorname{ctg}\beta$ не зависит от выбора пары скрещивающихся ребер (теорема Бретшнейдера).

6.11. Докажите, что для любого тетраэдра существует не менее 5 и не более 8 сфер, каждая из которых касается всех плоскостей его граней.

§ 2. Тетраэдры, обладающие специальными свойствами

6.12. В треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S боковые ребра равны, а сумма двугранных углов при ребрах SA и SC равна 180°. Выразите длину бокового ребра через стороны a и c треугольника ABC.

6.13. Сумма длин одной пары скрещивающихся ребер тетраэдра равна сумме длин другой пары. Докажите, что сумма двугранных углов при первой паре ребер равна сумме двугранных углов при второй паре.

6.14. Все грани тетраэдра — подобные между собой прямоугольные треугольники. Найдите отношение наибольшего ребра к наименьшему.

6.15. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Вершины пространственного четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ лежат на соответственных гранях тетраэдра (A_1 — на грани, противолежащей A, и т. д.), а его стороны перпендикулярны граням тетраэдра: $A_1B_1 \perp BCD$, $B_1C_1 \perp CDA$, $C_1D_1 \perp DAB$ и $D_1A_1 \perp ABC$. Вычислите длины сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

6.16. Сфера касается ребер AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках L, M, N и K, являющихся вершинами квадрата. Докажите, что если эта сфера касается ребра AC, то она касается и ребра BD.

6.17. Пусть M — центр масс тетраэдра $ABCD$, O — центр его описанной сферы.

а) Докажите, что прямые DM и OM перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AB^2 + BC^2 + CA^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2$.

б) Докажите, что если точки D и M и точки пересечения медиан граней, сходящихся в вершине D, лежат на одной сфере, то $DM \perp OM$.

§ 3. Прямоугольный тетраэдр

6.18. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D прямые. Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$ и $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что $\cos\varphi = \sin\alpha \sin\beta$.

6.19. Все плоские углы при одной вершине тетраэдра прямые. Докажите, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных ребер, равны.

6.20. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D прямые. Пусть h — высота тетраэдра, опущенная из вершины D; a, b и c — длины ребер, выходящих из вершины D. Докажите, что

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

6.21. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине A прямые и $AB = AC + AD$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине B равна 90°.

6.22. Три двугранных угла тетраэдра прямые. Докажите, что у этого тетраэдра есть три плоских прямых угла.

6.23. В тетраэдре три двугранных угла прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер, равен a, а другой b, причем $b > a$. Найдите длину наибольшего ребра тетраэдра.

6.24. Три двугранных угла тетраэдра, не принадлежащие одной вершине, равны 90°, а все остальные двугранные углы равны между собой. Найдите эти углы.

§ 4. Равногранный тетраэдр

Определение. Тетраэдр называется *равногранным*, если все его грани равны, т. е. его противоположные ребра попарно равны.

6.25. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) сумма плоских углов при какой-либо вершине равна 180° и, кроме того, в тетраэдре есть две пары равных противоположных ребер;

б) центры вписанной и описанной сфер совпадают;

в) радиусы описанных окружностей граней равны;

г) центр масс и центр описанной сферы совпадают.

6.26. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB и DC равны; равны также двугранные углы при ребрах BC и AD. Докажите, что $AB = DC$ и $BC = AD$.

6.27. Прямая, проходящая через центр масс тетраэдра и центр его описанной сферы, пересекает ребра AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

6.28. Прямая, проходящая через центр масс тетраэдра и центр его вписанной сферы, пересекает ребра AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AD = BC$.

6.29. Докажите, что если $\angle BAC = \angle ABD = \angle ACD = \angle BDC$, то тетраэдр $ABCD$ равногранный.

6.30. Дан тетраэдр $ABCD$; O_a, O_b, O_c и O_d — центры вневписанных сфер, касающихся его граней BCD, ACD, ABD и ABC. Докажите, что если трехгранные углы O_aBCD, O_bACD, O_cABD и O_dABC — прямые, то все грани данного тетраэдра равны.

Замечание. Есть еще и другие условия, определяющие равногранные тетраэдры; см., например, задачи 2.32, 6.48 и 14.22.

6.31. Ребра равногранного тетраэдра равны a, b и c. Вычислите его объем V и радиус R описанной сферы.

6.32. Докажите, что для равногранного тетраэдра

а) радиус вписанного шара вдвое меньше радиуса шара, касающегося одной грани тетраэдра и продолжений трех других граней;

б) центры четырех вневписанных шаров являются вершинами тетраэдра, равного исходному.

6.33. В равногранном тетраэдре $ABCD$ опущена высота AH; H_1 — точка пересечения высот грани BCD; h_1 и h_2 — длины отрезков, на которые одна из высот грани BCD делится точкой H_1.

а) Докажите, что точки H и H_1 симметричны относительно центра описанной окружности треугольника BCD.

б) Докажите, что $AH^2 = 4h_1h_2$.

6.34. Докажите, что в равногранном тетраэдре основания высот, середины высот и точки пересечения высот граней принадлежат одной сфере (сфера 12 точек).

6.35. а) Докажите, что сумма косинусов двугранных углов равногранного тетраэдра равна 2.

б) Сумма плоских углов трехгранного угла равна 180°. Найдите сумму косинусов его двугранных углов.

§ 5. Ортоцентрический тетраэдр

Определение. Тетраэдр называется *ортоцентрическим*, если все его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

6.36. а) Докажите, что если $AD \perp BC$, то высоты, опущенные из вершин B и C (а также высоты, опущенные из вершин A и D), пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на общем перпендикуляре к AD и BC.

б) Докажите, что если высоты, опущенные из вершин B и C, пересекаются в одной точке, то $AD \perp BC$ (а значит, в одной точке пересекаются высоты, опущенные из вершин A и D).

в) Докажите, что тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда две пары его противоположных ребер перпендикулярны (в этом случае третья пара противоположных ребер тоже перпендикулярна).

6.37. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры к парам противоположных ребер пересекаются в одной точке.

6.38. Пусть K, L, M и N — середины ребер AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$.

а) Докажите, что $AC \perp BD$ тогда и только тогда, когда $KM = LN$.

б) Докажите, что тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, равны.

6.39. а) Докажите, что если $BC \perp AD$, то высоты, опущенные из вершин A и D на прямую BC, попадают в одну точку.

б) Докажите, что если высоты, опущенные из вершин A и D на прямую BC, попадают в одну точку, то $BC \perp AD$ (а значит, в одну точку попадают высоты, опущенные из вершин B и C на прямую AD).

6.40. Докажите, что тетраэдр ортоцентрический тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

а) суммы квадратов противоположных ребер равны;

б) произведения косинусов противоположных двугранных углов равны;

в) углы между противоположными ребрами равны.

Замечание. Есть еще и другие условия, определяющие ортоцентрические тетраэдры; см., например, задачи 2.11 и 7.1.

6.41. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре:

а) все плоские углы при одной вершине одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые;

б) одна из граней — остроугольный треугольник.

6.42. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре выполняется соотношение $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$, где O — центр описанной сферы, H — точка пересечения высот, R — радиус описанной сферы, d — расстояние между серединами противоположных ребер.

6.43. а) Докажите, что окружности 9 точек треугольников ABC и DBC принадлежат одной сфере тогда и только тогда, когда $BC \perp AD$.

б) Докажите, что для ортоцентрического тетраэдра окружности 9 точек всех граней принадлежат одной сфере (сфера 24 точек).

в) Докажите, что если $AD \perp BC$, то сфера, содержащая окружности 9 точек треугольников ABC и DBC, и сфера, содержащая окружности 9 точек треугольников ABD и CBD, пересекаются по окружности, лежащей в плоскости, которая делит пополам общий перпендикуляр к BC и AD и ему перпендикулярна.

Замечание. Определение окружности 9 точек см. Прасолов, 10.2 или Шарыгин, II.160.

6.44. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центры масс граней, точки пересечения высот граней, а также точки, делящие отрезки, соединяющие точку пересечения высот с вершинами, в отношении 2 : 1, считая от вершины, лежат на одной сфере (сфера 12 точек).

6.45. а) Пусть H — точка пересечения высот ортоцентрического тетраэдра, M' — центр масс какой-либо грани, N — точка пересечения луча HM' с описанной сферой тетраэдра. Докажите, что $HM' : M'N = 1 : 2$.

б) Пусть M — центр масс ортоцентрического тетраэдра, H' — точка пересечения высот какой-либо грани, N — точка пересечения луча $H'M$ с описанной сферой тетраэдра. Докажите, что $H'M : MN = 1 : 3$.

6.46. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре точка Монжа (см. задачу 7.32,а) совпадает с точкой пересечения высот.

§ 6. Достраивание тетраэдра

Проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру, тетраэдр можно достроить до параллелепипеда (рис. 44).

6.47. Три отрезка, не лежащих в одной плоскости, пересекаются в точке O, делящей каждый из них пополам. Докажите, что существуют ровно два тетраэдра, в которых эти отрезки соединяют середины противоположных ребер.

6.48. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) при достраивании тетраэдра получается прямоугольный параллелепипед;

б) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, перпендикулярны;

в) площади всех граней равны;

г) центр масс и центр вписанной сферы совпадают.

6.49. Докажите, что в равногранном тетраэдре все плоские углы острые.

6.50. Докажите, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов расстояний между серединами его противоположных ребер.

6.51. Пусть a и a_1, b и b_1, c и c_1 — длины пар противоположных ребер тетраэдра; α, β, γ — соответственные углы между ними (α, β, $\gamma \leqslant 90°$). Докажите, что одно из трех чисел $aa_1 \cos \alpha$, $bb_1 \cos \beta$ и $cc_1 \cos \gamma$ — сумма двух других.

6.52. Прямая l проходит через середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$; плоскость П, содержащая l, пересекает ребра BC и AD в точках M и N. Докажите, что прямая l делит отрезок MN пополам.

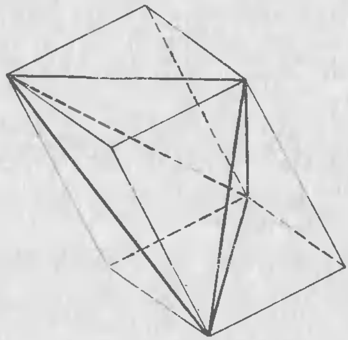


Рис. 44

6.53. Докажите, что прямые, соединяющие середину высоты правильного тетраэдра с вершинами грани, на которую эта высота опущена, попарно перпендикулярны.

§ 7. Пирамида и призма

6.54. Плоскости боковых граней треугольной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Докажите, что проекция вершины на плоскость основания является центром вписанной или вневписанной окружности основания.

6.55. В треугольной пирамиде двугранные углы при ребрах основания равны α. Найдите ее объем, если длины ребер основания равны a, b и c.

6.56. На основании треугольной пирамиды $SABC$ взята точка M и через нее проведены прямые, параллельные ребрам SA, SB и SC и пересекающие боковые грани в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что

$$\frac{MA_1}{SA} + \frac{MB_1}{SB} + \frac{MC_1}{SC} = 1.$$

6.57. Вершина S треугольной пирамиды $SABC$ совпадает с вершиной конуса, а точки A, B и C лежат на окружности его основания. Двугранные углы при ребрах SA, SB и SC равны α, β и γ. Найдите угол между плоскостью SBC и плоскостью, касающейся поверхности конуса по образующей SC.

6.58. Сонаправленные векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ перпендикулярны плоскости ABC, а их длины равны соответствующим высотам треугольника ABC, радиус вписанной окружности которого равен r.

а) Докажите, что расстояние от точки M пересечения плоскостей A_1BC, AB_1C и ABC_1 до плоскости ABC равно r.

б) Докажите, что расстояние от точки N пересечения плоскостей A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1 до плоскости ABC равно $2r$.

* * *

6.59. В правильную усеченную четырехугольную пирамиду с высотой боковой грани a можно вписать шар. Найдите площадь ее боковой поверхности.

6.60. Через точку M основания правильной пирамиды проведен перпендикуляр, пересекающий плоскости боковых граней в точках M_1, ..., M_n. Докажите, что сумма длин отрезков MM_1, ..., MM_n одна и та же для всех точек M основания пирамиды.

6.61. Шар вписан в n-угольную пирамиду. Боковые грани пирамиды поворачиваются вокруг ребер основания и кладутся в плоскость основания так, что они лежат по одну сторону от соответствующих ребер вместе с основанием. Докажите, что вершины этих граней, отличные от вершин основания, лежат на одной окружности.

6.62. Из вершин основания вписанной пирамиды в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости. (Плоские углы при вершине пирамиды не прямые.)

6.63. В основании пирамиды с вершиной S лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что ее боковые ребра образуют равные углы с некоторым лучом SO, лежащим внутри четырехгранного угла $SABCD$, тогда и только тогда, когда $SA + SC = SB + SD$.

6.64. Основаниями усеченной четырехугольной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что любая прямая, пересекающая три из четырех прямых AB_1, BC_1, CD_1 и DA_1, пересекает и четвертую прямую или параллельна ей.

* * *

6.65. Найдите площадь полной поверхности призмы, описанной около сферы, если площадь ее основания равна S.

6.66. На боковых ребрах BB_1 и CC_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки P и P_1 так, что $BP : PB_1 = C_1P_1 : P_1C = 1 : 2$.

а) Докажите, что двугранные углы при ребрах AP_1 и A_1P тетраэдра AA_1PP_1 — прямые.

б) Докажите, что сумма двугранных углов при ребрах AP, PP_1 и P_1A_1 тетраэдра AA_1PP_1 равна $180°$.

Задачи для самостоятельного решения

6.67. В призму (не обязательно прямую) вписан шар.

а) Докажите, что высота призмы равна диаметру шара.

б) Докажите, что точки касания шара с боковыми гранями лежат в одной плоскости, причем эта плоскость перпендикулярна боковым ребрам призмы.

6.68. Сфера касается боковых граней пирамиды в центрах описанных около них окружностей; плоские углы при вершине этой пирамиды равны. Докажите, что пирамида правильная.

6.69. Сфера касается трех сторон основания треугольной пирамиды в их серединах и пересекает боковые ребра тоже в их серединах. Докажите, что пирамида правильная.

6.70. Сумма длин противоположных ребер тетраэдра $ABCD$ одна и та же для любой пары противоположных ребер. Докажите, что вписанные окружности любых двух граней тетраэдра касаются общего ребра этих граней в одной точке.

6.71. Докажите, что если двугранные углы тетраэдра равны, то этот тетраэдр правильный.

6.72. В треугольной пирамиде $SABC$ угол BSC прямой и $\angle ASC = \angle ASB = 60°$. Вершины A и S и середины ребер SB, SC, AB и AC лежат на одной сфере. Докажите, что ребро SA является диаметром этой сферы.

6.73. В правильной шестиугольной пирамиде центр описанной сферы лежит на поверхности вписанной. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной сфер.

6.74. В правильной четырехугольной пирамиде центр описанной сферы лежит на поверхности вписанной. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

6.75. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник. Известно, что пирамиды $ABCC_1$, ABB_1C_1 и $AA_1B_1C_1$ равны. Найдите двугранные углы при ребрах основания призмы.

Решения

6.1. Нет, не в любом. Рассмотрим треугольник ABC, в котором угол A не прямой, и восставим к плоскости треугольника перпендикуляр AD. В тетраэдре $ABCD$ высоты, проведенные из вершин C и D, не пересекаются.

6.2. а) Перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость BCD, принадлежит всем трем данным плоскостям.

б) Легко проверить, что все указанные плоскости проходят через центр описанной сферы тетраэдра.

6.3. Пусть $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$ и $AB = c_1$. Вычислим длину m медианы DM. Пусть N — середина ребра BC, $DN = p$ и $AN = q$. Тогда $DM^2 + MN^2 - 2DM \cdot MN \cos DMN = DN^2$ и $DM^2 + AM^2 - 2DM \cdot AM \cos DMA = AD^2$, а значит,

$$m^2 + \frac{q^2}{9} - \frac{2mq\cos\varphi}{3} = p^2 \quad \text{и} \quad m^2 + \frac{4q^2}{9} + \frac{4mq\cos\varphi}{3} = a^2.$$

Домножая первое равенство на 2 и складывая его со вторым равенством, получаем $3m^2 = a^2 + 2p^2 - 2q^2/3$. А так как $p^2 = (2b^2 + 2c^2 - a_1^2)/4$ и $q^2 = (2b_1^2 + 2c_1^2 - a_1^2)/4$, то $9m^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2$.

6.4. Достаточно доказать, что если сфера вписана в трехгранный угол, то плоскость, проходящая через точки касания, разделяет вершину S трехгранного угла и центр O вписанной сферы. Плоскость, проходящая через точки касания, совпадает с плоскостью, проходящей через окружность, по которой конус с вершиной S касается данной сферы. Ясно, что эта плоскость разделяет точки S и O; для доказательства можно рассмотреть любое сечение, проходящее через точки S и O.

6.5. Проекция тетраэдра на плоскость, перпендикулярную ребру a, является треугольником со сторонами $2S_1/a$, $2S_2/a$ и $b \sin\varphi$; угол между первыми двумя сторонами равен α. Записав теорему косинусов для этого треугольника, получаем требуемое.

6.6. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Пусть $AB = a$, $CD = b$; α и β — двугранные углы при ребрах AB и CD; S_1 и S_2 — площади граней ABC и ABD, S_3 и S_4 — площади граней CDA и CDB; V — объем тетраэдра. Согласно задаче 3.3 $V = 2S_1 S_2 \sin \alpha/3a$ и $V = 2S_3S_4 \sin \beta/3b$. Следовательно, $ab : \sin \alpha \sin \beta = 4S_1S_2S_3S_4 : 9V^2$.

6.7. а) Пусть α, β и γ — двугранные углы при ребрах грани с площадью S_1. Тогда $S_1 = S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \beta + S_4 \cos \gamma$ (см. задачу 2.13). Кроме того, согласно задаче 6.5

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = P_1^2,$$

$$S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3 \cos \beta = P_2^2,$$

$$S_1^2 + S_4^2 - 2S_1S_4 \cos \gamma = P_3^2.$$

Следовательно, $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 3S_1^2 - 2S_1(S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \beta + S_4 \cos \gamma) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$.

б) Поделив обе части полученного в задаче а) равенства на $9V^2$, где V — объем тетраэдра, приходим к требуемому.

6.8. Доказательство проведем сначала в случае, когда центр описанного шара находится внутри тетраэдра. Прежде всего докажем, что $l_i^2 - R_i^2 = 2h_id_i$, где d_i — расстояние от центра описанного шара до i-й грани, h_i — высота тетраэдра, опущенная на эту грань. Для определенности будем считать, что номер i соответствует грани ABC. Пусть O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$, O_1 — проекция O на грань ABC, DH — высота, H_1 — проекция O на DH. Тогда $O_1H^2 = DO_1^2 - DH^2 = l_i^2 - h_i^2$ и $OH_1^2 = DO^2 - DH_1^2 = R^2 - (h_i - d_i)^2 = R^2 - d_i^2 + 2h_id_i - h_i^2$, где R — радиус описанной сферы тетраэдра. Так как $O_1H = OH_1$, то $l_i^2 - R^2 + d_i^2 = 2h_id_i$. Остается заметить, что $R_i^2 = AO_1^2 = AO^2 - OO_1^2 = R^2 - d_i^2$.

Завершают доказательство следующие преобразования:

$$\sum S_i^2 \left(l_i^2 - R_i^2\right) = \sum 2S_i^2h_id_i = \sum 2S_i^2h_i^2 \,(d_i/h_i) = 18V^2 \sum (d_i/h_i).$$

Согласно задаче 8.1,б $\sum (d_i/h_i) = 1$.

В случае, когда центр описанного шара находится вне тетраэдра, рассуждения почти не изменяются: нужно только одну из величин d_i считать отрицательной.

6.9. Пусть длины ребер AD, BD и CD равны a, b и c; длины ребер BC, CA и AB равны a', b' и c'. Проведем через вершину D плоскость П, касающуюся описанной около тетраэдра сферы. Рассмотрим тетраэдр A_1BC_1D, образованный плоскостями П, BCD, ABD и плоскостью, проходящей через вершину B параллельно плоскости ACD, и тетраэдр AB_2C_2D, образованный плоскостями П, ABD, ACD и плоскостью, проходящей через вершину A параллельно плоскости BCD (рис. 45).

Так как DC_1 — касательная к описанной окружности треугольника DBC, то $\angle BDC_1 = \angle BCD$. Кроме того, $BC_1 \parallel CD$, поэтому $\angle C_1BD = \angle BDC$. Следовательно, $\triangle DC_1B \sim \triangle CBD$, а значит, $DC_1 : DB = CB : CD$, т. е. $DC_1 = a'b/c$. Аналогично $DA_1 = c'b/a$, $DC_2 = b'a/c$ и $DB_2 = c'a/b$. А так как $\triangle A_1C_1D \sim \sim \triangle DC_2B_2$, то $A_1C_1 : A_1D = DC_2 : DB_2$, т. е. $A_1C_1 = b'b^2/ac$.

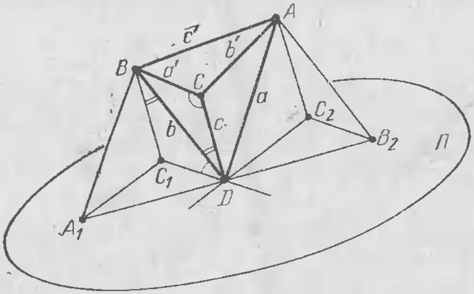


Рис. 45

Итак, длины сторон треугольника A_1C_1D, домноженные на ac/b, равны $a'a$, $b'b$ и $c'c$, а значит,

$$S_{A_1C_1D} = \frac{b^2}{a^2c^2}S.$$

Вычислим теперь объем тетраэдра A_1BC_1D. Рассмотрим для этого диаметр DM описанной сферы исходного тетраэдра и перпендикуляр BK, опущенный на плоскость A_1C_1D. Ясно, что $BK \perp DK$ и $DM \perp DK$. Опустим из середины O отрезка DM перпендикуляр OL на отрезок DB. Так как $\triangle BDK \sim \triangle DOL$, то $BK : BD = DL : DO$, т. е. $BK = b^2/2R$. Поэтому

$$V_{A_1BC_1D} = \frac{1}{3}BK \cdot S_{A_1C_1D} = \frac{b^4}{6Ra^2c^2}S.$$

Отношение объемов тетраэдров A_1BC_1D и $ABCD$ равно произведению отношения площадей граней BC_1D и BCD и отношения длин высот, опущенных на эти грани; последнее отношение равно $S_{A_1BD} : S_{ABD}$. Так как $\triangle DC_1B \sim \triangle CBD$, то $S_{BC_1D} : S_{BCD} = (DB : CD)^2 = b^2 : c^2$. Аналогично $S_{A_1BD} : S_{ABD} = = b^2 : a^2$. Следовательно,

$$V = \frac{a^2c^2}{b^4}V_{A_1BC_1D} = \frac{a^2c^2}{b^4}\,\frac{b^4}{6Ra^2c^2}S = \frac{S}{6R}.$$

6.10. Пусть S_1 и S_2 — площади граней с общим ребром a, S_3 и S_4 — площади граней с общим ребром b. Пусть, далее, a, m и n — длины ребер грани с площадью S_1; α, γ и δ — величины двугранных углов при этих ребрах, h_1 — длина высоты, опущенной на эту грань; H — основание этой высоты; V — объем тетраэдра. Соединяя точку H с вершинами грани S_1, получаем три треугольника. Выражая площадь грани S_1 через площади этих треугольников, получаем

$$ah_1 \operatorname{ctg} \alpha + mh_1 \operatorname{ctg} \gamma + nh_1 \operatorname{ctg} \delta = 2S_1$$

(так как углы α, γ и δ изменяются от $0°$ до $180°$, эта формула остается справедливой и в том случае, когда точка H лежит вне грани). Учитывая, что $h_1 = 3V/S_1$, получаем

$$a \operatorname{ctg} \alpha + m \operatorname{ctg} \gamma + n \operatorname{ctg} \delta = 2S_1^2/3V.$$

Сложив такие равенства для граней S_1 и S_2 и вычтя из них равенства для остальных граней, получим

$$a \operatorname{ctg} \alpha - b \operatorname{ctg} \beta = \left(S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2\right)/3V.$$

Возведем это равенство в квадрат, заменим $\operatorname{ctg}^2\alpha$ и $\operatorname{ctg}^2\beta$ на $1/\sin^2\alpha - 1$ и $1/\sin^2\beta - 1$ и воспользуемся равенствами $a^2/\sin^2\alpha = 4S_1^2S_2^2/9V^2$ и $b^2/\sin^2\beta = 4S_3^2S_4^2/9V^2$ (см. задачу 3.3). В итоге получим

$$a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = (2Q - T)/9V^2,$$

где Q — сумма квадратов попарных произведений площадей граней, T — сумма четвертых степеней площадей граней.

6.11. Пусть V — объем тетраэдра; S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади его граней. Если расстояние от точки O до i-й грани равно h_i, то $\left(\sum \varepsilon_i h_i S_i\right)/3 = V$, где $\varepsilon_i = +1$, если точка O и тетраэдр лежат по одну сторону от i-й грани, и $\varepsilon_i = -1$ в противном случае. Следовательно, если r — радиус шара, касающегося всех плоскостей граней тетраэдра, то $\left(\sum \varepsilon_i S_i\right) r/3 = V$, т. е. $\sum \varepsilon_i S_i > 0$. Обратно, если для данного набора $\varepsilon_i = \pm 1$ величина $\sum \varepsilon_i S_i$ положительна, то существует соответствующий шар. В самом деле, рассмотрим точку, для которой $h_1 = h_2 = h_3 = r$, где $r = 3V/\sum \varepsilon_i S_i$ (иными словами, мы рассматриваем точку пересечения трех плоскостей). Для этой точки h_4 также равно r.

Для любого тетраэдра существует вписанный шар ($\varepsilon_i = 1$ при всех i). Кроме того, так как площадь любой грани меньше суммы площадей остальных граней (задача 10.22), то существует 4 вневписанных шара, каждый из которых касается одной грани и продолжений трех других граней (одно из чисел ε_i равно -1).

Ясно также, что если для некоторого набора $\varepsilon_i = \pm 1$ величина $\sum \varepsilon_i S_i$ положительна, то для набора с противоположными знаками она отрицательна. Так как всего наборов $2^4 = 16$, то шаров не более 8. Ровно 8 их будет в том случае, когда сумма площадей любых двух граней не равна сумме площадей двух других граней.

6.12. Возьмем на луче AS точку A_1 так, что $AA_1 = 2AS$. В пирамиде SA_1BC двугранные углы при ребрах SA_1 и SC равны и $SA_1 = SC$, поэтому $A_1B = CB = a$. Треугольник ABA_1 прямоугольный, так как его медиана BS равна половине стороны AA_1. Следовательно,

$$AA_1^2 = A_1B^2 + AB^2 = a^2 + c^2, \text{ т. е } AS = \sqrt{a^2 + c^2}/2.$$

6.13. Если в тетраэдре $ABCD$ сумма длин ребер AB и CD равна сумме длин ребер BC и AD, то существует сфера, касающаяся этих четырех ребер во внутренних точках (см. задачу 8.30). Пусть O — центр этой сферы. Заметим теперь, что если из точки X проведены касательные XP и XQ к сфере с центром O, то точки P и Q симметричны относительно плоскости, проходящей через прямую XO и середину отрезка PQ, а значит, плоскости POX и QOX образуют с плоскостью XPQ равные углы.

Проведем 4 плоскости, проходящие через точку O и рассматриваемые ребра тетраэдра. Они разбивают каждый из рассматриваемых двугранных углов на 2 двугранных угла. Выше было показано, что полученные двугранные углы, прилегающие к одной грани тетраэдра, равны. Как в одну, так и в другую рассматриваемую сумму двугранных углов входит по одному полученному углу для каждой грани тетраэдра.

6.14. Пусть a —длина наибольшего ребра тетраэдра. В обоих гранях, прилегающих к этому ребру, оно является гипотенузой. Эти грани равны, так как подобные прямоугольные треугольники с общей гипотенузой равны; пусть m и n — длины катетов этих прямоугольных треугольников, b — длина шестого ребра тетраэдра. Возможны два варианта:

1) Ребра длиной m выходят из одного конца ребра a, ребра длиной n — из другого. В треугольнике со сторонами m, m и b прямым может быть только угол, противолежащий b; кроме того, в треугольнике со сторонами a, m и n катеты тоже должны быть равны, т. е. $m = n$. В итоге получаем, что все грани тетраэдра равны.

2) Из каждого конца ребра a выходит одно ребро длиной m и одно ребро длиной n. При этом, если $a = b$, тетраэдр тоже будет равногранный.

Заметим теперь, что в равногранном тетраэдре не может быть прямых плоских углов (задача 6.49). Следовательно, в действительности возможен только второй вариант, причем $b < a$. Пусть для определенности $m \geqslant n$. Так как треугольники со сторонами a, m, n и m, n, b подобны, причем наименьшей стороной второго треугольника не может быть сторона n, то $a : m = m : n = n : b = \lambda > 1$. Учитывая, что $a^2 = m^2 + n^2$, получаем $\lambda^4 = \lambda^2 + 1$, т. е. $\lambda = \sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$.

6.15. Опустим перпендикуляры A_1K и B_1K на CD, B_1L и C_1L на AD, C_1M и D_1M на AB, D_1N и A_1N на BC. Отношения

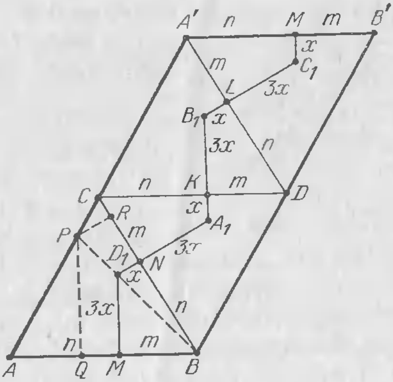


Рис. 46

длин этих перпендикуляров равны косинусу двугранного угла при ребре правильного тетраэдра, т. е. они равны 1/3 (см. задачу 2.14). Так как стороны четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны граням правильного тетраэдра, их длины равны (см. задачу 8.25). Следовательно, $A_1K = B_1L = C_1M = D_1N = x$ и $B_1K = C_1L = D_1M = A_1N = 3x$. Рассмотрим развертку тетраэдра (рис. 46). Ребра тетраэдра разделены точками K, L, M и N на отрезки длиной m и n. Так как $x^2 + n^2 = D_1B^2 = 9x^2 + m^2$, то $8x^2 = n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = a(n-m)$. Пусть луч BD_1 пересекает сторону AC в точке P; Q и R — проекции точки P на стороны AB и BC. Так как $PR : PQ = 1 : 3$, то $CP : PA = 1 : 3$. Поэтому $\frac{BR}{CB} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ и $\frac{BQ}{AB} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Следовательно, $n : m = BR : BQ = 7 : 5$, а значит, $x = a/4\sqrt{3}$. Длины сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ равны $2\sqrt{2}\,x = a/\sqrt{6}$.

6.16. По условию $KLMN$ — квадрат. Проведем через точки K, L, M и N плоскости, касающиеся сферы. Так как все эти плоскости одинаково наклонены к плоскости $KLMN$, то они пересекаются в одной точке S, расположенной на прямой OO_1, где O — центр сферы, а O_1 — центр квадрата. Эти плоскости пересекают плоскость квадрата $KLMN$ по квадрату $TUVW$, серединами сторон которого являются точки K, L, M и N (рис. 47). В четырехгранном угле $STUVW$ с вершиной S все плоские углы равны, а точки K, L, M и N лежат на биссектрисах его плоских углов, причем $SK = SL = SM = SN$. Следовательно, $SA = SC$ и $SD = SB$, а значит, $AK = AL = CM = CN$ и $BL = BM = DN = DK$. По условию AC тоже касается шара, поэтому $AC = AK + CN = 2AK$. А так как SK — биссектриса угла DSA, то $DK : KA = DS : SA = DB : AC$. Из равенства $AC = 2AK$ следует теперь, что $DB = 2DK$. Пусть P — середина отрезка DB; тогда P лежит на прямой SO. Треугольники DOK и DOP равны, так как $DK = DP$ и $\angle DKO = 90^\circ = \angle DPO$. Поэтому $OP = OK = R$, где R — радиус сферы, а значит, DB тоже касается сферы.

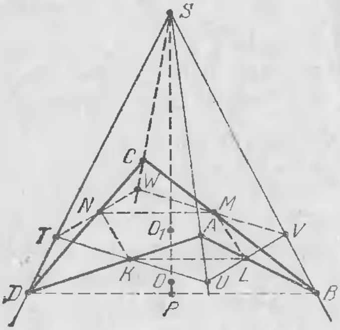


Рис. 47

6.17. а) Пусть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a_1$, $DB = b_1$ и $DC = c_1$. Пусть, далее, G — точка пересечения медиан треугольника ABC, N — точка пересечения прямой DM с описанной сферой, K — точка пересечения прямой AG с описанной окружностью треугольника ABC. Докажем сначала, что $AG \cdot GK = (a^2 + b^2 + c^2)/9$. В самом деле, $AG \cdot GK = R^2 - O_1G^2$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC, O_1 — ее центр. Но $O_1G^2 = R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$ (см. Шарыгин, II.193,б). Далее, $DG \cdot GN = AG \cdot GK = (a^2 + b^2 + c^2)/9$, а значит, $GN = (a^2 + b^2 + c^2)/9m$, где

$$m = DG = \sqrt{3\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right) - a^2 - b^2 - c^2}\Big/3 \qquad (1)$$

(см. задачу 6.3). Поэтому $DN = DG + GN = m + (a^2 + b^2 + c^2)/9m = \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)/3m$.

Перпендикулярность прямых DM и OM эквивалентна равенству $DN = 2DM$, т. е. $\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)/3m = 3m/2$. Выражая m по формуле (1), получаем требуемое.

б) Воспользуемся обозначениями задачи а) и ее результатом. Пусть $x = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$ и $y = a^2 + b^2 + c^2$. Требуется проверить, что $x = y$. Пусть, далее, A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения медиан треугольников DBC, DAC и DAB. При гомотетии с центром D и коэффициентом 3/2 точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ переходит в точку пересечения медиан треугольника ABC. Поэтому M — точка пересечения продолжения медианы DX тетраэдра $A_1B_1C_1D$ с описанной сферой этого тетраэдра, а значит, для вычисления длины отрезка DM можно воспользоваться формулой для DN, полученной в задаче а):

$$DM = \left(DA_1^2 + DB_1^2 + DC_1^2\right)/3DX.$$

Ясно, что $DX = 2m/3$; выражая DA_1, DB_1 и DC_1 через медианы, а медианы через стороны, получаем $DA_1^2 + DB_1^2 + DC_1^2 = (4x - y)/9$. Следовательно, $DM = (4x - y)/18m$. С другой стороны, $DM = 3m/4$, поэтому $2(4x - y) = 27m^2$. Согласно формуле (1) $9m^2 = 3x - y$, а значит, $2(4x - y) = 3(3x - y)$, т. е. $x = y$.

6.18. Пусть $CD = a$. Тогда $AC = a/\sin\alpha$, $BC = a/\sin\beta$ и $AB = a\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}$. Учитывая, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos\varphi$, получаем требуемое.

6.19. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед ребра AB, AD и AA_1 которого являются ребрами данного тетраэдра. Отрезок, соединяющий середины ребер AB и A_1D, является средней линией треугольника ABD_1 (параллельной BD_1); следовательно, его длина равна $d/2$, где d — длина диагонали параллелепипеда.

6.20. Так как $S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{BCD}^2 + S_{ACD}^2$ (см. задачу 1.22), то $S_{ABC} = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}/2$. Следовательно, объем тетраэдра равен $h\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}/6$. С другой стороны, он равен $abc/6$. Приравнивая эти выражения, получаем требуемое.

6.21. Возьмем на лучах AC и AD точки P и R так, что $AP = AR = AB$, и рассмотрим квадрат $APQR$. Ясно, что $\triangle ABC = \triangle RQD$ и $\triangle ABD = \triangle PQC$, а значит, $\triangle BCD = \triangle QDC$. Таким образом, сумма плоских углов при вершине B равна $\angle PQC + \angle CQD + \angle DQR = \angle PQR = 90°$.

6.22. Для каждого ребра тетраэдра существует лишь одно несмежное с ним ребро, поэтому среди любых трех ребер найдутся два смежных. Заметим теперь, что прямыми не могут быть три двугранных угла при ребрах одной грани. Следовательно, возможны два варианта расположения трех ребер, двугранные углы при которых прямые: 1) эти ребра выходят из одной вершины; 2) два ребра выходят из концов одного ребра.

В первом случае достаточно воспользоваться результатом задачи 5.2.

Рассмотрим второй случай: двугранные углы при ребрах AB, BC и CD прямые. Тогда тетраэдр $ABCD$ выглядит следующим образом: в треугольниках ABC и BCD углы ACB и CBD прямые и угол между плоскостями этих треугольников тоже прямой. В этом случае углы ACB, ACD, ABD и CBD прямые.

6.23. Согласно решению задачи 6.22 возможны два варианта.

1) Все плоские углы при одной вершине тетраэдра прямые. Но в этом случае длины всех отрезков, соединяющих середины противоположных ребер, равны (задача 6.19).

2) Двугранные углы при ребрах AB, BC и CD прямые. В этом случае ребра AC и BD перпендикулярны граням CBD и ABC соответственно. Пусть $AC = 2x$, $BC = 2y$ и $BD = 2z$. Тогда длина отрезка, соединяющего середины ребер AB и CD, и отрезка, соединяющего середины ребер BC и AD, равна $\sqrt{x^2 + z^2}$, а длина отрезка, соединяющего середины ребер AC и BD, равна $\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$. Поэтому $x^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + 4y^2 + z^2 = b^2$. Наибольшим ребром тетраэдра $ABCD$ является ребро AD; квадрат его длины равен $4(x^2 + y^2 + z^2) = b^2 + 3a^2$.

6.24. Как следует из решения задачи 6.22, можно считать, что вершинами данного тетраэдра являются вершины A, B, D и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть α — искомый угол; $AB = a$, $AD = b$ и $DD_1 = c$. Тогда $a = b \operatorname{tg} \alpha$ и $c = b \operatorname{tg} \alpha$. Косинус угла между плоскостями BB_1D и ABC_1 равен

$$ac/\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{b^2 + c^2} = \operatorname{tg}^2\alpha/(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \sin^2\alpha$$

(см. задачу 1.9,а). Следовательно, $\cos \alpha = \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, т. е. $\cos \alpha = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Так как $1 + \sqrt{5} > 2$, окончательно получаем $\alpha = \arccos((\sqrt{5} - 1)/2)$.

6.25. а) Пусть $AB = CD$, $AC = BD$ и сумма плоских углов при вершине A равна 180°. Докажем, что $AD = BC$. Для этого достаточно проверить, что $\angle ACD = \angle BAC$. Но как сумма углов треугольника ACD, так и сумма плоских углов при вершине A равны 180°; кроме того, $\angle DAB = \angle ADC$, так как $\triangle DAB = \triangle ADC$.

б) Пусть O_1 и O_2 — точки касания вписанной сферы с гранями ABC и BCD. Тогда $\triangle O_1BC = \triangle O_2BC$. Из условия задачи следует, что O_1 и O_2 — центры описанных окружностей указанных граней. Поэтому $\angle BAC = \angle BO_1C/2 = \angle BO_2C/2 = \angle BDC$. Аналогичные рассуждения показывают, что каждый из плоских углов при вершине D равен соответствующему углу треугольника ABC, а значит, их сумма равна $180°$. Это утверждение справедливо для всех вершин тетраэдра. Остается воспользоваться результатом задачи 2.32,а.

в) Углы ADB и ACB опираются на равные хорды в равных окружностях, поэтому они равны или составляют в сумме $180°$. Предположим сначала, что для каждой пары углов граней тетраэдра, опирающихся на одно ребро, имеет место равенство углов. Тогда, например, сумма плоских углов при вершине D равна сумме углов треугольника ABC, т. е. равна $180°$. Сумма плоских углов при любой вершине тетраэдра равна $180°$, поэтому он равногранный (см. задачу 2.32,а).

Докажем теперь, что случай, когда углы ADB и ACB не равны, невозможен. Предположим, что $\angle ADB + \angle ACB = 180°$ и $\angle ADB \neq \angle ACB$. Пусть для определенности угол ADB тупой. Поверхность тетраэдра $ABCD$ можно так «развернуть» на плоскость ABC, что образы D_a, D_b и D_c точки D попадут на описанную окружность треугольника ABC; при этом направление поворота боковой грани вокруг ребра основания выбирается в соответствии с тем, равны ли углы, опирающиеся на это ребро, или же они составляют в сумме $180°$. В процессе разворачивания точка D движется по окружностям, плоскости которых перпендикулярны прямым AB, BC и CA. Эти окружности лежат в разных плоскостях, поэтому любые две из них имеют не более двух общих точек. Но две общих точки есть у каждой пары этих окружностей: точка D и точка, симметричная ей относительно плоскости ABC. Следовательно, точки D_a, D_b и D_c попарно различны. Кроме того, $AD_b = AD_c$, $BD_a = BD_c$ и $CD_a = CD_b$. Развертка выглядит следующим образом: в окружность вписан треугольник AD_cB с тупым углом D_c; из точек A и B проведены хорды AD_b и BD_a, равные AD_c и BD_c соответственно; C — середина одной из двух дуг, заданных точками D_a и D_b. Одна из середин этих двух дуг симметрична точке D_c относительно прямой, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему; эта точка нам не подходит. Искомая развертка изображена на рис. 48. Углы при вершинах D_a, D_b и D_c шестиугольника $AD_cBD_aCD_b$ дополняют до $180°$ углы треугольника ABC, поэтому их сумма равна $360°$. Но эти углы равны плоским углам при вершине D тетраэдра $ABCD$, поэтому их сумма меньше $360°$. Получено противоречие.

г) Пусть K и L — середины ребер AB и CD, O — центр масс тетраэдра, т. е. середина отрезка KL. Так как O — центр описанной сферы тетраэдра, то треугольники AOB и COD равнобедренные, с равными боковыми сторонами и равными медианами OK и OL. Поэтому $\triangle AOB = \triangle COD$, а значит, $AB =$

$= CD$. Аналогично доказывается равенство других пар противоположных ребер.

6.26. Трехгранные углы при вершинах A и C имеют равные двугранные углы, поэтому они равны (задача 5.3). Следовательно, равны их плоские углы, а значит, $\triangle ABC = \triangle CDA$.

6.27. Центр масс тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины ребер AB и CD. Следовательно, на этой прямой лежит центр описанной сферы тетраэдра, а значит, указанная прямая перпендикулярна ребрам AB и CD. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на плоскость, проходящую через прямую AB параллельно CD. Так как $AC'BD'$ — параллелограмм, то $AC = BD$ и $AD = BC$.

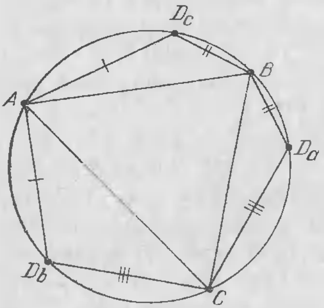


Рис. 48

6.28. Пусть K и L — середины ребер AB и CD. Центр масс тетраэдра лежит на прямой KL, поэтому центр вписанной сферы также лежит на прямой KL. Следовательно, при проекции на плоскость, перпендикулярную CD, отрезок KL переходит в биссектрису треугольника, являющегося проекцией грани ABC. Ясно также, что проекция точки K является серединой проекции отрезка AB. Поэтому проекции отрезков KL и AB перпендикулярны, а значит, плоскость KDC перпендикулярна плоскости П, проходящей через ребро AB параллельно CD. Аналогично плоскость LAB перпендикулярна П. Следовательно, прямая KL перпендикулярна П. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на плоскость П. Так как $AC'BD'$ — параллелограмм, то $AC = BD$ и $AD = BC$.

6.29. Пусть S — середина ребра BC; K, L, M и N — середины ребер AB, AC, DC и DB. Тогда $SKLMN$ — четырехгранный угол с равными плоскими углами, а его сечение $KLMN$ — параллелограмм. С одной стороны, четырехгранный угол с равными плоскими углами имеет сечение — ромб (задача 5.16,б); с другой стороны, любые два сечения четырехгранного угла, являющиеся параллелограммами, параллельны (задача 5.16,а). Поэтому $KLMN$ — ромб; кроме того, из решения задачи 5.16,б следует, что $SK = SM$ и $SL = SN$. Это означает, что $AB = DC$ и $AC = DB$. Следовательно, $\triangle BAC = \triangle ABD$ и $BC = AD$.

6.30. Точка касания вневписанной сферы с гранью ABC совпадает с проекцией H точки O_d (центра сферы) на плоскость

ABC. Так как трехгранный угол O_dABC прямой, то H — точка пересечения высот треугольника ABC (см. задачу 2.11).

Пусть O — точка касания вписанной сферы с гранью ABC. Из результата задачи 5.13,б следует, что прямые, соединяющие точки O и H с вершинами треугольника ABC, симметричны относительно его биссектрис. Нетрудно доказать, что это означает, что O — центр описанной окружности треугольника ABC (доказательство достаточно провести для остроугольного треугольника, так как точка H принадлежит грани). Таким образом, точка касания вписанной сферы с гранью ABC совпадает с центром описанной окружности этой грани; для остальных граней доказательство этого проводится аналогично. Остается воспользоваться результатом задачи 6.25,б.

6.31. Достроим данный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда (см. задачу 6.48,а); пусть x, y и z — ребра этого параллелепипеда. Тогда $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$ и z^2+ $+x^2=c^2$. Так как $R=d/2$, где d — диагональ параллелепипеда, а $d^2=x^2+y^2+z^2$, то $R^2=(x^2+y^2+z^2)/4=(a^2+$ $+b^2+c^2)/8$.

Складывая равенства $x^2+y^2=a^2$ и $z^2+x^2=c^2$ и вычитая из них равенство $y^2+z^2=b^2$, получаем $x^2=(a^2+c^2-b^2)/2$. Аналогично находим y^2 и z^2. Так как объем тетраэдра в три раза меньше объема параллелепипеда (см. решение задачи 3.4), то

$$V^2=(xyz)^2/9=(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)/72.$$

6.32. Достроим данный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда (см. задачу 6.48, а). Точка пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов тетраэдра (т. е. центр вписанного шара) совпадает с центром O параллелепипеда. Рассматривая проекции на плоскости, перпендикулярные ребрам тетраэдра, легко проверить, что грани тетраэдра удалены от вершин параллелепипеда, отличных от вершин тетраэдра, вдвое больше, чем от точки O. Следовательно, эти вершины являются центрами вневписанных шаров. Этим доказаны оба утверждения.

6.33. Достроим данный тетраэдр до прямоугольного параллелепипеда. Пусть AA_1 — его диагональ, O — его центр. Точка H_1 является проекцией точки A_1 на грань BCD (см. задачу 2.11), а центр O_1 описанной окружности треугольника BCD — проекцией точки O. Так как O — середина отрезка AA_1, точки H и H_1 симметричны относительно O_1.

Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость, перпендикулярную BD (рис. 49; в дальнейшем решении используются обозначения этого рисунка, а не обозначения в пространстве). Высота CC' треугольника BCD параллельна плоскости проекции, поэтому длины отрезков BH_1 и CH_1 равны h_1 и h_2; длины отрезков AH и A_1H_1 при проецировании не изменились. Так как $AH : A_1H_1 = AC : A_1B = 2$ и $A_1H_1 : BH_1 = CH_1 : A_1H_1$, то $AH^2 = 4H_1A_1^2 = 4h_1h_2$.

6.34. Воспользуемся решением предыдущей задачи и обозначениями рис. 49; на этом рисунке P — середина высоты AH. Легко проверить, что $OH = OH_1 = OP = \sqrt{r^2 + a^2}$, где r — расстояние от точки O до грани, a — расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот грани.

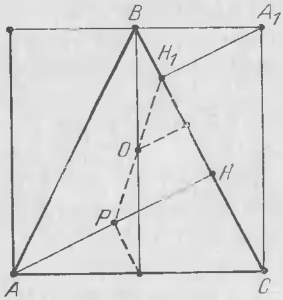


Рис. 49

6.35. а) Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$ — единичные векторы, перпендикулярные граням и направленные во внешнюю сторону. Так как площади всех граней равны, то $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 = 0$ (см. задачу 7.19). Следовательно, $0 = |\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4|^2 = 4 + 2\sum(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Остается заметить, что скалярное произведение $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ равно $-\cos\varphi_{ij}$, где φ_{ij} — двугранный угол между гранями с номерами i и j.

б) Возьмем на одном ребре данного трехгранного угла с вершиной S произвольную точку A и проведем из нее отрезки AB и AC до пересечения с другими ребрами так, что $\angle SAB = \angle ASC$ и $\angle SAC = \angle ASB$. Тогда $\triangle SCA = \triangle ABS$. Так как сумма углов треугольника ACS равна сумме плоских углов при вершине S, то $\angle SCA = \angle CSB$. Следовательно, $\triangle SCA = \triangle CSB$, а значит, тетраэдр $ABCS$ равногранный. Согласно задаче а) сумма косинусов двугранных углов при ребрах этого тетраэдра равна 2, а эта сумма в два раза больше суммы косинусов двугранных углов данного трехгранного угла.

6.36. а) Пусть $AD \perp BC$. Тогда существует плоскость П, проходящая через BC и перпендикулярная AD. Высота, опущенная из вершины B, перпендикулярна AD, поэтому она лежит в плоскости П. Аналогично высота, опущенная из вершины C, лежит в плоскости П. Следовательно, эти высоты пересекаются в одной точке. Эта точка принадлежит также плоскости П′, проходящей через AD и перпендикулярной BC. Остается заметить, что плоскости П и П′ пересекаются по общему перпендикуляру к AD и BC.

б) Пусть высоты BB' и CC' пересекаются в одной точке. Каждая из высот BB' и CC' перпендикулярна AD. Поэтому плоскость, содержащая эти высоты, перпендикулярна AD, а значит, $BC \perp AD$.

в) Пусть две пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны. Тогда третья пара противоположных ребер тоже перпендикулярна (задача 7.1).

Следовательно, высоты тетраэдра попарно пересекаются. Если несколько прямых попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости или проходят через одну точку. В одной плоскости высоты тетраэдра лежать не могут, так как иначе в одной плоскости лежали бы и его вершины; поэтому они пересекаются в одной точке.

6.37. Из решения задачи 6.36,а следует, что точка пересечения высот принадлежит каждому общему перпендикуляру к противоположным парам ребер.

6.38. а) Четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, стороны которого параллельны AC и BD. Его диагонали KM и LN равны тогда и только тогда, когда он прямоугольник, т. е. $AC \perp BD$.

Отметим также, что плоскость $KLMN$ перпендикулярна общему перпендикуляру к AC и BD и делит его пополам.

б) Следует из результатов задач 6.38, а и 6.36, в.

6.39. а) Так как $BC \perp AD$, то существует плоскость П, проходящая через прямую AD и перпендикулярная BC; пусть U — точка пересечения прямой BC с плоскостью П. Тогда AU и DU — перпендикуляры, опущенные из точек A и D на прямую BC.

б) Пусть AU и DU — высоты треугольников ABC и DBC. Тогда прямая BC перпендикулярна плоскости ADU, а значит, $BC \perp AD$.

6.40. а) Следует из задачи 7.2.

б) Воспользовавшись результатами задач 6.6 и 6.10, получаем, что произведения косинусов противоположных двугранных углов равны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов противоположных ребер.

в) Достаточно проверить, что если все углы между противоположными ребрами равны α, то $\alpha = 90°$. Предположим, что $\alpha \neq 90°$, т. е. $\cos\alpha \neq 0$. Пусть a, b и c — произведения длин пар противоположных ребер. Одно из чисел $a\cos\alpha$, $b\cos\alpha$ и $c\cos\alpha$ равно сумме двух других (задача 6.51). Так как $\cos\alpha \neq 0$, то одно из чисел a, b и c равно сумме двух других. С другой стороны, существует треугольник, длины сторон которого равны a, b и c (задача 6.9). Получено противоречие.

6.41. а) Если $ABCD$ — ортоцентрический тетраэдр, то $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ (см. задачу 6.40, а). Поэтому $AB^2 +$

$+ AC^2 - BC^2 = AD^2 + AC^2 - CD^2$, т. е. косинусы углов BAC и DAC имеют один знак.

б) Так как в треугольнике не может быть двух не острых углов, то, учитывая результат задачи а), получаем, что если $\angle BAC \geqslant 90°$, то треугольник BCD остроугольный.

6.42. Пусть K и L — середины ребер AB и CD. Точка H лежит в плоскости, проходящей через CD перпендикулярно AB, а точка O — в плоскости, проходящей через K перпендикулярно AB. Эти плоскости симметричны относительно центра масс M тетраэдра — середины отрезка KL. Рассматривая такие плоскости для всех ребер, получаем, что точки H и O симметричны относительно M, а значит, $KHLO$ — параллелограмм. Квадраты его сторон равны $R^2 - AB^2/4$ и $R^2 - CD^2/4$, поэтому $OH^2 = 2(R^2 - AB^2/4) + 2(R^2 - CD^2/4) - d^2 = 4R^2 - (AB^2 + CD^2)/2 - d^2$. Рассматривая сечение, проходящее через точку M параллельно AB и CD, получаем, что $AB^2 + CD^2 = 4d^2$.

6.43. а) Окружности 9 точек треугольников ABC и DBC принадлежат одной сфере тогда и только тогда, когда основания высот, опущенных из вершин A и D на прямую BC, совпадают. Остается воспользоваться результатом задачи 6.39, б.

б) Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаются в одной точке, делящей их пополам,— центре масс; кроме того, для ортоцентрического тетраэдра их длины равны (задача 6.38, б). Следовательно, все окружности 9 точек граней тетраэдра принадлежат сфере с диаметром, равным длине отрезка, соединяющего середины противоположных ребер, и центром в центре масс тетраэдра.

в) Обе эти сферы проходят через середины ребер AB, BD, DC и CA, а эти точки лежат в указанной плоскости.

6.44. Пусть O, M и H — центр описанной сферы, центр масс и точка пересечения высот ортоцентрического тетраэдра. Из решения задачи 6.42 следует, что M — середина отрезка OH. Центры масс граней тетраэдра являются вершинами тетраэдра, гомотетичного данному с центром гомотетии M и коэффициентом $-1/3$. При этой гомотетии точка O переходит в точку O_1, лежащую на отрезке MH, причем $MO_1 = MO/3$. Следовательно, $HO_1 = HO/3$, т. е. точка O переходит в O_1 при гомотетии с центром H и коэффициентом $1/3$. При этой гомотетии вершины тетраэдра переходят в указанные точки на высотах тетраэдра. Итак, 8 из 12 данных точек лежат на сфере радиуса $R/3$ с центром O_1 (R — радиус описанной сферы тетраэдра). Остается доказать, что на той же сфере лежат точки пересечения высот граней. Пусть O', H' и M' — центр описанной окружности, точка пересечения высот и центр масс какой-либо грани (рис. 50). Точка M' делит отрезок $O'H'$ в отношении $O'M' : M'H' = 1 : 2$

(см. Прасолов, 10.1 или Шарыгин, II.147). Теперь легко вычислить, что проекция точки O_1 на плоскость этой грани совпадает с серединой отрезка $M'H'$, а значит, точка O_1 равноудалена от M' и H'.

6.45. а) Из решения задачи 6.44 следует, что при гомотетии с центром H и коэффициентом 3 точка M' переходит в точку описанной сферы тетраэдра.

б) Из решения задачи 6.44 следует, что при гомотетии с центром M и коэффициентом -3 точка H' переходит в точку описанной сферы тетраэдра.

6.46. Так как $AB \perp CD$, то существует плоскость, проходящая через AB и перпендикулярная CD. В этой плоскости лежит как точка пересечения высот, опущенных из вершин A и B, так и точка Монжа. Если провести такие плоскости через все ребра, то они будут иметь единственную общую точку.

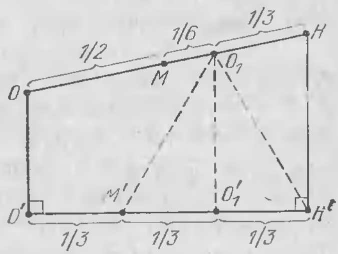


Рис. 50

6.47. Рассмотрим тетраэдр, в котором данные отрезки соединяют середины противоположных ребер, и достроим его до параллелепипеда. Ребра этого параллелепипеда параллельны данным отрезкам, а его грани проходят через их концы. Следовательно, этот параллелепипед однозначно определяется данными отрезками, а до одного и того же параллелепипеда достраиваются ровно два тетраэдра.

6.48. а) Диагоналями противоположных граней полученного параллелепипеда являются два противоположных ребра тетраэдра. Эти грани будут прямоугольниками тогда и только тогда, когда противоположные ребра равны.

Результат этой задачи используется при решении задач б — г.

б) Достаточно заметить, что данные отрезки параллельны ребрам параллелепипеда.

в) Пусть площади всех граней тетраэдра равны. Достроим тетраэдр AB_1CD_1 до параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой AC. Так как высоты треугольников ACB_1 и ACD_1 равны, то проекцией треугольника AB_1D_1 является равнобедренный треугольник, причем точка A_1 проецируется в середину его основания. Следовательно, ребро AA_1 перпендикулярно грани $ABCD$. Аналогичные рассуждения показывают, что параллелепипед прямоугольный.

г) Воспользуемся обозначениями задачи в) и снова рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную AC. Если центр вписанной сферы совпадает с центром масс, то плоскость ACA_1C_1 проходит через центр вписанной сферы, т. е. является биссекторной плоскостью двугранного угла при ребре AC. Следовательно, при проекции отрезок AA_1 переходит в биссектрису и медиану проекции треугольника AB_1D_1, а значит, ребро AA_1 перпендикулярно грани $ABCD$.

6.49. Достроим равногранный тетраэдр до параллелепипеда. Получим прямоугольный параллелепипед (задача 6.48, а). Если его ребра равны a, b и c, то квадраты сторон грани тетраэдра равны $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$ и $c^2 + a^2$. Так как сумма квадратов любых двух сторон больше квадрата третьей стороны, грань является остроугольным треугольником.

6.50. Достроим тетраэдр до параллелепипеда. Расстояния между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра равны длинам ребер этого параллелепипеда. Остается воспользоваться тем, что если a и b — длины сторон параллелограмма, а d_1 и d_2 — длины его диагоналей, то $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

6.51. Достроим тетраэдр до параллелепипеда. Тогда a и a_1 — диагонали двух противоположных граней параллелепипеда. Пусть m и n — стороны этих граней, причем $m \geqslant n$. По теореме косинусов $4m^2 = a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos\alpha$ и $4n^2 = a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos\alpha$, поэтому $aa_1 \cos\alpha = m^2 - n^2$. Записав такие равенства для чисел $bb_1 \cos\beta$ и $cc_1 \cos\gamma$, получим требуемое.

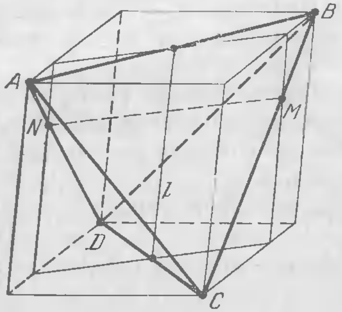


Рис. 51

6.52. Достроим тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда (рис. 51). Сечение этого параллелепипеда плоскостью П является параллелограммом; точки M и N лежат на его сторонах, а прямая l проходит через середины двух других его сторон.

6.53. Пусть AB_1CD_1 — тетраэдр, вписанный в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; H — точка пересечения диагонали AC_1 с плоскостью B_1CD_1; M — середина отрезка AH, являющегося высотой тетраэдра. Так как $C_1H : HA = 1 : 2$ (задача 2.1), то точка M симметрична C_1 относительно плоскости B_1CD_1.

6.54. Если α — угол между плоскостями боковых граней и плоскостью основания, h — высота пирамиды, то расстояние от проекции вершины на плоскость основания до любой прямой, содержащей ребро основания, равно $h \operatorname{ctg} \alpha$.

Заметим также, что если равны двугранные углы при ребрах основания, а не просто углы между плоскостями, то проекция вершины является центром именно вписанной окружности.

6.55. Пусть h — высота пирамиды, V — ее объем, S — площадь основания. Согласно задаче 6.54 $h = r \operatorname{tg} \alpha$, где r — радиус вписанной окружности основания. Следовательно, $V = Sh/3 = Sr \operatorname{tg} \alpha/3 = S^2 \operatorname{tg} \alpha/3p = (p-a)(p-b)(p-c) \operatorname{tg} \alpha/3$, где $p = (a+b+c)/2$.

6.56. Пусть прямая AM пересекает BC в точке P. Тогда $MA_1 : SA = MP : AP = S_{MBC} : S_{ABC}$. Аналогично $MB_1 : SB = S_{AMC} : S_{ABC}$ и $MC_1 : SC = S_{ABM} : S_{ABC}$. Складывая эти равенства и учитывая, что $S_{MBC} + S_{AMC} + S_{ABM} = S_{ABC}$, получаем требуемое.

6.57. Пусть O — центр основания конуса. В трехгранных углах $SBOC$, $SCOA$ и $SAOB$ двугранные углы при ребрах SB и SC, SC и SA, SA и SB равны. Обозначим эти углы через x, y и z. Тогда $\alpha = y + z$, $\beta = z + x$ и $\gamma = x + y$. Так как плоскость SCO перпендикулярна плоскости, касающейся поверхности конуса по образующей SC, то искомый угол равен

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi + \alpha - \beta - \gamma}{2}.$$

6.58. а) Опустим из точки M перпендикуляр MO на плоскость ABC. Так как расстояние от точки A_1 до плоскости ABC равно расстоянию от точки A до прямой BC, угол между плоскостями ABC и A_1BC равен $45°$. Поэтому расстояние от точки O до прямой BC равно длине отрезка MO. Аналогично расстояния от точки O до прямых CA и AB равны длине отрезка MO, а значит, O — центр вписанной окружности треугольника ABC и $MO = r$.

б) Пусть P — точка пересечения прямых B_1C и BC_1. Тогда плоскости AB_1C и ABC_1 пересекаются по прямой AP, а плоскости A_1BC_1 и A_1B_1C — по прямой A_1P. Аналогичные рассуждения показывают, что проекция точки N на плоскость ABC совпадает с проекцией точки M, т. е. она является центром O вписанной окружности треугольника ABC.

Первое решение. Пусть h_a, h_b и h_c — высоты треугольника ABC; Q — проекция точки P на плоскость ABC. Рассматривая трапецию BB_1C_1C, получаем $PQ = h_bh_c/(h_b + h_c)$. Так как $AO : OQ = AB : BQ = (b+c) : a$, то $NO =$
$$= \frac{aAA_1 + (b+c)\,PQ}{a+b+c} = \frac{ah_a(h_b+h_c) + (b+c)\,h_bh_c}{(a+b+c)(h_b+h_c)} = \frac{4S}{a+b+c} =$$
$= 2r$.

Второе решение. Пусть K — точка пересечения прямой NO с плоскостью $A_1B_1C_1$. Из решения задачи 3.20 следует, что $MO = KO/3$ и $NK = KO/3$, поэтому $NO = 2MO = 2r$.

6.59. Пусть p и q — длины сторон оснований пирамиды. Тогда площадь боковой грани равна $a(p+q)/2$. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр вписанного шара перпендикулярно одной из сторон основания. Это сечение является описанной трапецией с боковой стороной a и основаниями p и q. Следовательно, $p+q=2a$. Поэтому площадь боковой поверхности пирамиды равна $4a^2$.

6.60. Пусть N_i — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ребро основания (или его продолжение), причем точка M_i лежит в плоскости грани, проходящей через это ребро. Тогда $MM_i = N_iM \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между основанием и боковой гранью пирамиды. Поэтому нужно доказать, что сумма длин отрезков N_iM не зависит от точки M. Разрежем основание пирамиды на треугольники отрезками, соединяющими точку M с вершинами. Сумма площадей этих треугольников равна $\frac{a}{2}N_1M + \ldots + \frac{a}{2}N_nM$, где a — длина ребра основания пирамиды. С другой стороны, сумма площадей этих треугольников всегда равна площади основания.

6.61. Если сфера касается сторон двугранного угла, то при совмещении этих сторон точки касания совпадают. Поэтому все точки касания боковых граней с вписанной сферой при повороте вокруг ребер попадают в одну точку — точку касания сферы с плоскостью основания пирамиды. Расстояния от этой точки до вершин граней (после поворота) равны расстояниям от точек касания сферы с боковыми гранями до вершины пирамиды. Остается заметить, что длины всех касательных к сфере, проведенных из вершины пирамиды, равны.

6.62. Докажем, что все указанные прямые параллельны плоскости, касающейся описанной сферы пирамиды в ее вершине. Для этого достаточно проверить, что если AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC, то прямая A_1B_1 параллельна прямой, касающейся описанной окружности треугольника в точке C. Так как $A_1C : B_1C = AC\cos C : BC\cos C = AC : BC$, то $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$. Поэтому $\angle CA_1B_1 = \angle A$. Ясно также, что угол между касательной к описанной окружности в точке C и хордой BC равен $\angle A$.

6.63. Предположим сначала, что боковые ребра пирамиды образуют равные углы с указанным лучом SO. Пусть плоскость, перпендикулярная лучу SO, пересекает боковые ребра пирамиды в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Так как $SA_1 = SB_1 = SC_1 = SD_1$, а площади треугольников BCD, ADB, ABC и ACD равны, то, воспользовавшись результатом задачи 3.37, получим требуемое.

Предположим теперь, что $SA + SC = SB + SD$. Отложим на боковых ребрах пирамиды равные отрезки SA_1, SB_1, SC_1 и SD_1. Воспользовавшись результатом задачи 3.37, легко получить, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости П. Пусть S_1 — описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$, O — ее центр, т. е. проекция вершины S на плоскость П. Точка D_1 лежит в плоскости П, а расстояние от нее до вершины S равно расстоянию от точек окружности S_1 до вершины S. Поэтому точка D_1 лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. луч SO — искомый.

6.64. Пусть прямая l пересекает прямую AB_1 в точке K. Утверждение задачи эквивалентно тому, что плоскости KBC_1, KCD_1 и KDA_1 имеют общую прямую, т. е. имеют общую точку, отличную от K. Проведем через точку K плоскость, параллельную основаниям пирамиды. Пусть L, M и N — точки пересечения этой плоскости с прямыми BC_1, CD_1 и DA_1 (рис. 52, *а*); $A_0B_0C_0D_0$ — параллелограмм, по которому эта плоскость пересекает данную пирамиду или продолжения ее ребер. Точки K, L, M и N делят стороны параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$ в одном и том же отношении, т. е. $KLMN$ — параллелограмм. Плоскости KBC_1, KCD_1 и KDA_1 пересекают плоскость $ABCD$ по прямым, проходящим через точки B, C и D параллельно прямым KL, KM и KN. Остается доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

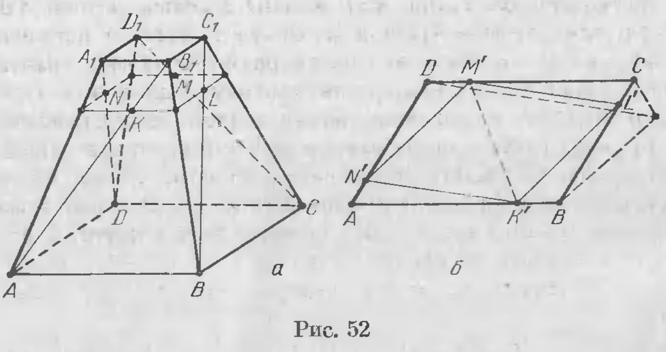


Рис. 52

Возьмем на сторонах параллелограмма $ABCD$ точки K', L', M' и N', делящие стороны этого параллелограмма в том же отношении, в каком точки K, L, M и N делят стороны параллелограмма $A_0B_0C_0D_0$. Требуется доказать, что прямые, проходящие через точки B, C и D параллельно прямым $K'L'$, $K'M'$ и $L'M'$, пересекаются в одной точке (рис. 52, *б*). Заметим, что прямые, проходящие через вершины K', L' и M' треугольника $K'L'M'$ параллельно прямым BC, BD и CD, пересекаются в точке M симметричной точке M' относительно середины отрезка CD. Следовательно, прямые, проходящие через точки B, C и D параллельно прямым $K'L'$, $K'M'$ и $L'M'$, тоже пересекаются в одной точке (см. Прасолов, 11.48 или Шарыгин, II.56).

Замечание. Так как линейным преобразованием параллелограмм $ABCD$ можно перевести в квадрат, требуемое утверждение достаточно доказать для квадрата. Если $ABCD$ — квадрат, то $K'L'M'N'$ — тоже квадрат. Легко проверить, что прямые, проходящие через точки B, C и D параллельно прямым $K'L'$, $K'M'$ и $K'N'$ соответственно, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности квадрата $ABCD$.

6.65. Если p — полупериметр основания призмы, r — радиус сферы, то площадь основания равна pr, а площадь боковой поверхности равна $4pr$. Следовательно, площадь полной поверхности призмы равна $6S$.

6.66. а) Пусть M и N — середины ребер PP_1 и AA_1. Ясно, что тетраэдр AA_1PP_1 симметричен относительно прямой MN. Пусть, далее, P' — проекция точки P на плоскость грани ACC_1A_1. Точка P' лежит на проекции $B'B_1'$ отрезка BB_1 на эту плоскость и делит ее в отношении $B'P' : P'B_1' = 1 : 2$, поэтому P' — середина отрезка AP_1. Следовательно, плоскости APP_1 и AA_1P_1 перпендикулярны. Аналогично плоскости A_1PP_1 и AA_1P перпендикулярны.

б) Так как PP_1N — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре PP_1 тетраэдра AA_1PP_1, то достаточно проверить, что сумма двугранных углов при ребрах PP_1 и AP тетраэдра APP_1N равна 90°. Плоскость PP_1N перпендикулярна грани BCC_1B_1, поэтому нужно проверить, что угол между плоскостями PP_1A и BCC_1B_1 равен углу между плоскостями PP_1A и ABB_1A_1. Равенство этих углов следует из того, что при симметрии относительно прямой PP' плоскость PP_1A переходит в себя, а указанные плоскости граней переходят друг в друга.

Глава 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВЕКТОРЫ

§ 1. Скалярное произведение. Соотношения

7.1. а) Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Докажите, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

б) Докажите, что если в тетраэдре две пары противоположных ребер перпендикулярны, то третья пара противоположных ребер тоже перпендикулярна.

7.2. Докажите, что суммы квадратов двух противоположных пар ребер тетраэдра равны тогда и только тогда, когда третья пара противоположных ребер перпендикулярна.

7.3. Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскости A_1BD. Докажите, что этот параллелепипед является кубом.

7.4. В правильной усеченной пирамиде K — середина стороны AB верхнего основания, L — середина некоторой стороны CD нижнего основания. Докажите, что длины проекций отрезков AB и CD на прямую KL равны.

7.5. Дан трехгранный угол с вершиной S и точка N. Сфера, проходящая через точки S и N, пересекает ребра трехгранного угла в точках A, B и C. Докажите, что центры масс треугольников ABC принадлежат одной плоскости.

7.6. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки выпуклого многогранника до плоскостей его граней не зависит от положения точки тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей к граням равна нулю.

7.7. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центр масс является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной сферы.

§ 2. Скалярное произведение. Неравенства

7.8. Докажите, что в пространстве нельзя выбрать более 4 векторов, все углы между которыми тупые.

7.9. Докажите, что в пространстве нельзя выбрать более 6 векторов, все углы между которыми не острые.

7.10. Докажите, что сумма косинусов двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2.

7.11. Внутри выпуклого многогранника $A_1 \dots A_n$ взята точка A, а внутри выпуклого многогранника $B_1 \dots B_n$ — точка B. Докажите, что если $\angle A_iAA_j \leqslant \leqslant \angle B_iBB_j$ для всех i, j, то на самом деле все эти нестрогие неравенства являются равенствами.

§ 3. Линейные зависимости векторов

7.12. Точки O, A, B и C не лежат в одной плоскости. Докажите, что точка X лежит в плоскости ABC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$, где $p + q + r = 1$. Кроме того, если точка X принадлежит треугольнику ABC, то $p : q : r = S_{BXC} : S_{CXA} : S_{AXB}$.

7.13. На ребрах AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L и M так, что $AB = \alpha AK$, $AC = \beta AL$ и $AD = \gamma AM$.

а) Докажите, что если $\gamma = \alpha + \beta + 1$, то все плоскости KLM содержат фиксированную точку.

б) Докажите, что если $\beta = \alpha + 1$ и $\gamma = \beta + 1$, то все плоскости KLM содержат фиксированную прямую.

7.14. Два правильных пятиугольника $OABCD$ и $OA_1B_1C_1D_1$ с общей вершиной O не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны одной плоскости.

7.15. а) Внутри тетраэдра $ABCD$ взята точка O. Докажите, что если $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \delta\overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то все числа α, β, γ и δ одного знака.

б) Из точки O, лежащей внутри тетраэдра, опущены перпендикуляры $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ на его грани. Докажите, что если $\alpha\overrightarrow{OA_1} + \beta\overrightarrow{OB_1} + \gamma\overrightarrow{OC_1} + \delta\overrightarrow{OD_1} = \vec{0}$, то все числа α, β, γ и δ одного знака.

7.16. Точка O лежит внутри многогранника $A_1 \ldots$ $\ldots A_n$. Докажите, что существуют такие положительные (а значит, все ненулевые) числа $x_1, \ldots, x_n$, что $x_1\overrightarrow{OA}_1 + \ldots + x_n\overrightarrow{OA}_n = \overrightarrow{0}$.

§ 4. Разные задачи

7.17. Пусть **a**, **b**, **c** и **d** — единичные векторы, направленные из центра правильного тетраэдра в его вершины, **u** — произвольный вектор. Докажите, что $(\mathbf{a}, \mathbf{u})\mathbf{a} + (\mathbf{b}, \mathbf{u})\mathbf{b} + (\mathbf{c}, \mathbf{u})\mathbf{c} + (\mathbf{d}, \mathbf{u})\mathbf{d} = 4\mathbf{u}/3$.

7.18. Из точки M, лежащей внутри правильного тетраэдра, опущены перпендикуляры MA_i ($i = 1, 2, 3, 4$) на его грани. Докажите, что $\overrightarrow{MA}_1 + \overrightarrow{MA}_2 + \overrightarrow{MA}_3 + \overrightarrow{MA}_4 = 4\overrightarrow{MO}/3$, где O — центр тетраэдра.

7.19. Из точки O, лежащей внутри выпуклого многогранника, проведены лучи, пересекающие плоскости граней и перпендикулярные им. На этих лучах от точки O отложены векторы, длины которых равны площадям соответствующих граней. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

7.20. Даны три взаимно перпендикулярные прямые, расстояние между любыми двумя из которых равно a. Найдите объем параллелепипеда, диагональ которого лежит на одной прямой, а диагонали двух соседних граней — на двух других прямых.

7.21. Пусть **a**, **b** и **c** — произвольные векторы. Докажите, что $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| \geqslant$ $\geqslant |\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{b} + \mathbf{c}| + |\mathbf{c} + \mathbf{a}|$.

§ 5. Векторное произведение

Векторным произведением двух векторов **a** и **b** называется вектор **c**, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на векторы **a** и **b**, а направлен он перпендикулярно к **a** и **b**, причем так, что векторы **a**, **b** и **c** образуют правую тройку, т. е. имеют такую же ориентацию, как большой (**a**), указательный (**b**) и средний (**c**) пальцы правой руки. Обозначение: $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; другое обозначение: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

7.22. Докажите, что

а) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$;

б) $[\lambda\mathbf{a}, \mu\mathbf{b}] = \lambda\mu[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$;

в) $[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$,

7.23. Векторы **a** и **b** имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3). Докажите, что вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ имеет координаты $(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$.

7.24. Докажите, что

а) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

б) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{d})$.

7.25. а) Докажите, что $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = 0$ (тождество Якоби).

б) Пусть точка O лежит внутри треугольника ABC и $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Докажите, что тождество Якоби для векторов **a**, **b** и **c** эквивалентно равенству

$$\mathbf{a}S_{BOC} + \mathbf{b}S_{COA} + \mathbf{c}S_{OAB} = 0.$$

7.26. Углы при вершинах пространственного шестиугольника прямые, причем у него нет параллельных сторон. Докажите, что общие перпендикуляры к парам противоположных сторон шестиугольника перпендикулярны одной прямой.

7.27. Докажите с помощью векторного произведения утверждение задачи 7.19 для тетраэдра $ABCD$.

7.28. а) Докажите, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехгранного угла $SABC$ перпендикулярно плоскостям этих граней, пересекаются по одной прямой, причем эта прямая задается вектором $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, где **a**, **b** и **c** — единичные векторы, направленные вдоль ребер SA, SB и SC.

б) На ребрах трехгранного угла с вершиной O взяты точки A_1, A_2 и A_3 так, что $OA_1 = OA_2 = OA_3$. Докажите, что биссекторные плоскости его двугранных углов пересекаются по прямой, задающейся вектором $\overrightarrow{OA}_1 \sin\alpha_1 + \overrightarrow{OA}_2 \sin\alpha_2 + \overrightarrow{OA}_3 \sin\alpha_3$, где α_i — величина плоского угла, противолежащего ребру OA_i.

7.29. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что сумма квадратов площадей трех его попарно непараллельных граней равна сумме квадратов площадей граней тетраэдра A_1BC_1D.

Число $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$ называется *смешанным произведением* векторов **a**, **b** и **c**. Легко проверить, что абсолютная величина этого числа равна объему параллелепипеда, натянутого на векторы **a**, **b** и **c**, причем это число положительно, если **a**, **b** и **c** — правая тройка векторов.

7.30. Докажите, что векторы с координатами (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3) параллельны одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 = a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1.$$

Для тех, кто знаком с понятием произведения матриц, поясним связь между векторным произведением и коммутатором двух матриц. Каждому вектору $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ в трехмерном пространстве можно сопоставить кососимметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сопоставлены матрицы A и B. Рассмотрим матрицу $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор матриц A и B. Несложные вычисления показывают, что вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ сопоставлена матрица $[A, B]$.

§ 6. Симметрия

Симметрией относительно точки A называется преобразование пространства, переводящее точку X в такую точку X', что A — середина отрезка XX'. Другие названия этого преобразования — *центральная симметрия с центром* A или просто *симметрия с центром* A.

7.31. Дан тетраэдр и точка N. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная отрезку, соединяющему точку N с серединой противоположного ребра. Докажите, что все шесть этих плоскостей пересекаются в одной точке.

7.32. а) Через середину каждого ребра тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная противоположному ребру. Докажите, что все шесть этих плоскостей пересекаются в одной точке (точка Монжа).

б) Докажите, что если точка Монжа лежит в плоскости какой-либо грани тетраэдра, то основание высоты, опущенной на эту грань, находится на ее описанной окружности.

Симметрией относительно плоскости Π называется преобразование пространства, переводящее точку X в такую точку X', что плоскость Π проходит через середину отрезка XX' перпендикулярно ему.

7.33. Три равных правильных пятиугольника расположены в пространстве так, что они имеют общую вершину и каждые два из них имеют общее ребро. Докажите, что выделенные на рис. 53 отрезки являются ребрами прямого трехгранного угла.

7.34. Даны две пересекающиеся плоскости и касающаяся их сфера. Рассматриваются все сферы, касающиеся этих плоскостей и данной сферы. Найдите геометрическое место точек касания сфер.

7.35. Пусть O — центр цилиндра (т. е. середина его оси), AB — диаметр одного основания, C — точка окружности другого основания. Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла $OABC$ с вершиной O равна 2π.

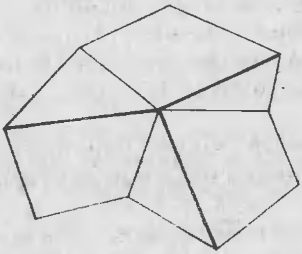


Рис. 53

7.36. В выпуклой 5-гранной пирамиде $SABCDE$ равны боковые ребра и двугранные углы при боковых ребрах. Докажите, что эта пирамида правильная.

7.37. Какое наибольшее число плоскостей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трех попарно непараллельных прямых?

Симметрией относительно прямой l называется преобразование пространства, переводящее точку X в такую точку X', что прямая l проходит через середину отрезка XX' перпендикулярно ему. Это преобразование называется также *осевой симметрией*, а l — *осью симметрии*.

7.38. Докажите, что при симметрии относительно прямой, заданной вектором $\mathbf{b}$, вектор $\mathbf{a}$ переходит в вектор

$$2\mathbf{b}\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{(\mathbf{b},\ \mathbf{b})} - \mathbf{a}.$$

7.39. Перпендикулярные прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке. Докажите, что композиция симметрий относительно этих прямых является симметрией относительно прямой, перпендикулярной им обеим.

7.40. Докажите, что никакое тело в пространстве не может иметь ненулевое четное число осей симметрии.

§ 7. Гомотетия

Гомотетией называется преобразование пространства, переводящее точку X в точку X', обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точка O называется *центром гомотетии*, а число k — *коэффициентом гомотетии*.

7.41. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной сфер тетраэдра. Докажите, что $R \geqslant 3r$.

7.42. В плоскости боковой грани правильной четырехугольной пирамиды взята произвольная фигура Φ. Пусть Φ_1 — проекция Φ на основание пирамиды, а Φ_2 — проекция Φ_1 на боковую грань, смежную с исходной. Докажите, что фигуры Φ и Φ_2 подобны.

7.43. Докажите, что внутри любого выпуклого многогранника M можно разместить два многогранника, подобных ему с коэффициентом $1/2$, так, чтобы они не пересекались.

7.44. Докажите, что выпуклый многогранник нельзя покрыть тремя многогранниками, гомотетичными ему с коэффициентом k, где $0 < k < 1$.

7.45. На плоскости дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек D пространства, что отрезок OM, где O — центр описанной сферы тетраэдра $ABCD$, M — центр масс этого тетраэдра, перпендикулярен плоскости ADM.

§ 8. Поворот. Композиции преобразований

Мы не будем давать строгого определения поворота относительно прямой l. Для решения задач достаточно иметь следующее представление о повороте: *поворот относительно прямой* l (или *относительно оси* l) на угол φ — это преобразование пространства, переводящее каждую плоскость Π, перпендикулярную прямой l, в себя, причем в плоскости Π это преобразование является поворотом с центром O на угол φ, где O — точка пересечения Π и l. Иными словами, при повороте на угол φ относительно прямой l точка X переходит в такую точку X', что:

а) перпендикуляры, опущенные из точек X и X' на прямую l, имеют общее основание O;

б) $OX = OX'$;

в) угол поворота от вектора $\overrightarrow{OX}$ к вектору $\overrightarrow{OX'}$ равен φ.

7.46. Пусть A_i' и A_i'' — проекции вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ на плоскости Π' и Π''. Докажите, что одну из этих плоскостей можно так переместить в пространстве, что 4 прямые $A_i'A_i''$ станут параллельны.

О п р е д е л е н и е. *Композицией* преобразований F и G называется преобразование $G \circ F$, переводящее точку X в точку $G(F(X))$.

7.47. Докажите, что композиция симметрий относительно двух плоскостей, пересекающихся по прямой l, является поворотом относительно прямой l, причем угол этого поворота в два раза больше угла поворота относительно прямой l, переводящего первую плоскость во вторую.

7.48. Докажите, что композиция симметрии относительно точки O и поворота относительно прямой l, проходящей через O, является также и композицией некоторого поворота относительно прямой l и симметрии относительно плоскости П, проходящей через точку O перпендикулярно l.

Определение. *Движением* называется такое преобразование, переводящее каждую точку пространства в точку пространства, что если A' и B' — образы точек A и B, то $AB = A'B'$, т. е. движение — это преобразование пространства, сохраняющее расстояния.

Движение, оставляющее неподвижными четыре точки пространства, не лежащие в одной плоскости, оставляет неподвижными и все остальные точки пространства. Поэтому любое движение задается образами четырех точек, не лежащих в одной плоскости.

7.49. а) Докажите, что любое движение пространства является композицией не более чем четырех симметрий относительно плоскостей.

б) Докажите, что любое движение пространства, имеющее неподвижную точку O, является композицией не более чем трех симметрий относительно плоскостей.

Определение. Движение, являющееся композицией четного числа симметрий относительно плоскостей, называется движением *первого рода* или движением, *сохраняющим ориентацию* пространства. Движение, являющееся композицией нечетного числа симметрий относительно плоскостей, называется движением *второго рода* или движением, *изменяющим ориентацию* пространства.

Мы не будем доказывать, что композицию четного числа симметрий относительно плоскостей нельзя представить в виде композиции нечетного числа симметрий относительно плоскостей.

7.50. а) Докажите, что любое движение первого рода, имеющее неподвижную точку, является поворотом относительно некоторой оси.

б) Докажите, что любое движение второго рода, имеющее неподвижную точку, является композицией поворота относительно некоторой оси (возможно, на нулевой угол) и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной этой оси.

7.51. Шар, лежащий в углу прямоугольной коробки, перекатывается вдоль стенки коробки в другой угол, причем боковой стенки всегда касается одна и та же точка шара. Из второго угла шар перекатывается в третий, затем в четвертый и наконец возвращается в исходный угол. При этом некоторая точка X поверхности шара переходит в точку X_1. После такого же перекатывания точка X_1 переходит в X_2, а X_2 в X_3. Докажите, что точки X, X_1, X_2 и X_3 лежат в одной плоскости.

§ 9. Отражение лучей света

7.52. Луч света входит в прямой трехгранный угол и отражается ото всех трех граней по одному разу. Докажите, что при этом он просто изменит направление.

7.53. Луч света падает на плоское зеркало под углом α. Зеркало повернули на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится при этом отраженный луч?

7.54. Плоскость П проходит через вершину конуса перпендикулярно его оси; точка A лежит в плоскости П. Пусть M — такая точка конуса, что луч света, идущий из A в M, зеркально отразившись от поверхности конуса, станет параллелен плоскости П. Найдите геометрическое место проекций точек M на плоскость П.

Задачи для самостоятельного решения

7.55. Точка X находится на расстоянии d от центра правильного тетраэдра. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки X до вершин тетраэдра равна $4(R^2 + d^2)$, где R — радиус описанной сферы тетраэдра.

7.56. На ребрах DA, DB и DC тетраэдра $ABCD$ взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $DA_1 = \alpha DA$, $DB_1 = \beta DB$ и $DC_1 = \gamma DC$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ делит отрезок DD', где D' — точка пересечения медиан грани ABC?

7.57. Пусть M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Докажите, что середины отрезков AN, CM, BN и DM являются вершинами параллелограмма.

7.58. Пусть O — центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра, H — его ортоцентр. Докажите,

что
$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

7.59. Точка X лежит внутри правильного тетраэдра $ABCD$ с центром O. Докажите, что среди углов, под которыми видны ребра тетраэдра из точки X, найдется угол, величина которого не меньше угла AOB, и угол, величина которого не больше угла AOB.

Решения

7.1. а) Пусть $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{CD}$. Тогда $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})=(\mathbf{a}, \mathbf{c})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})=(\mathbf{a}+\mathbf{b}, -\mathbf{b}-\mathbf{c})=-(\mathbf{a}, \mathbf{b})-(\mathbf{b}, \mathbf{b})-(\mathbf{b}, \mathbf{c})-(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ и $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{b})=(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{b}, \mathbf{b})+(\mathbf{c}, \mathbf{b})$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

б) Очевидно следует из задачи а).

7.2. Пусть $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$ и $\mathbf{c}=\overrightarrow{CD}$. Равенство $AC^2+BD^2=BC^2+AD^2$ означает, что $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2$, т. е. $(\mathbf{a}, \mathbf{c})=0$.

7.3. Пусть $\mathbf{a}=\overrightarrow{AA_1}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c}=\overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{AC_1}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, и поэтому вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ по условию. Учитывая, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{b}, \mathbf{c})=(\mathbf{c}, \mathbf{a})=0$, получаем $0=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}-\mathbf{b})=a^2-b^2$. Аналогично $b^2=c^2$ и $c^2=a^2$. Поэтому длины всех ребер данного прямоугольного параллелепипеда равны, т. е. он — куб.

7.4. Если вектор $\mathbf{x}$ лежит в плоскости верхнего или нижнего основания, то будем обозначать через $R\mathbf{x}$ вектор, полученный из $\mathbf{x}$ поворотом на 90° (в этой плоскости) в положительном направлении. Пусть O_1 и O_2 — центры верхнего и нижнего оснований; $\overrightarrow{O_1K}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{O_2L}=\mathbf{b}$. Тогда $\overrightarrow{AB}=kR\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{CD}=kR\mathbf{b}$. Требуется проверить, что $|(\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{AB})|=|(\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{CD})|$, т. е. $|(\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{c}, kR\mathbf{a})|=|(\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{c}, kR\mathbf{b})|$, где $\mathbf{c}=\overrightarrow{O_1O_2}$. Учитывая, что скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю, получаем $(\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{c}, kR\mathbf{a})=k(\mathbf{b}, R\mathbf{a})$ и $(\mathbf{b}-\mathbf{a}+\mathbf{c}, kR\mathbf{b})=-k(\mathbf{a}, R\mathbf{b})$. Так как при повороте обоих векторов на 90° их скалярное произведение не изменяется и $R(R\mathbf{a})=-\mathbf{a}$, то $(\mathbf{b}, R\mathbf{a})=(R\mathbf{b}, -\mathbf{a})=-(\mathbf{a}, R\mathbf{b})$.

7.5. Пусть O — центр сферы; M — центр масс треугольника ABC; $\mathbf{u}=\overrightarrow{SO}$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — единичные векторы, направленные по ребрам трехгранного угла. Тогда $3\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 2((\mathbf{u}, \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{u}, \mathbf{b})\mathbf{b} + (\mathbf{u}, \mathbf{c})\mathbf{c})$. Центр O сферы принадлежит плоскости, проходящей через середину отрезка SN перпендикулярно ему. Поэтому $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + \mu\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ — некоторые фиксированные векторы. Следовательно, $3\overrightarrow{SM} = 2(\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_3)$, где $\varepsilon_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{e}_i, \mathbf{b})\mathbf{b} + (\mathbf{e}_i, \mathbf{c})\mathbf{c}$.

7.6. Пусть $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ — единичные внешние нормали к граням; $M_1, \ldots, M_k$ — произвольные точки этих граней. Сумма расстояний от внутренней точки X многогранника до всех граней равна

$$\sum(\overrightarrow{XM_i}, \mathbf{n}_i) = \sum(\overrightarrow{XO}, \mathbf{n}_i) + \sum(\overrightarrow{OM_i}, \mathbf{n}_i),$$

где O — некоторая фиксированная внутренняя точка многогранника. Эта сумма не зависит от X, только если $\sum(\overrightarrow{XO}, \mathbf{n}_i) = 0$, т. е. $\sum \mathbf{n}_i = 0$.

7.7. Пусть O — центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра, H — его ортоцентр, M — центр масс. Ясно, что $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/4$. Поэтому достаточно проверить, что $\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/2$. Будем доказывать, что если $\overrightarrow{OX} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/2$, то X — ортоцентр. Докажем, например, что $AX \perp CD$. Ясно, что $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX} = (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})/2$. Поэтому $2(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AX}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Оба слагаемых равны нулю: первое — вследствие того, что $CD \perp AB$, а второе — вследствие того, что $OC = OD$. Аналогично доказывается, что $AX \perp BC$, т. е. прямая AX перпендикулярна грани BCD. Для прямых BX, CX и DX доказательство аналогично.

7.8. Первое решение. Пусть в пространстве расположено несколько лучей с общим началом O, образующих попарно тупые углы. Введем систему координат, направив ось Ox вдоль первого луча, а в качестве координатной плоскости Oxy выбрав плоскость, содержащую первые два луча. Каждый луч задается некоторым вектором $\mathbf{e}$, причем вместо $\mathbf{e}$ можно взять $\lambda\mathbf{e}$, где $\lambda > 0$. Первый луч задается вектором $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, а луч с номером k — вектором $\mathbf{e}_k = (x_k, y_k, z_k)$. При $k > 1$ скалярное произведение векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_k$ отрицательно, поэтому $x_k < 0$. Можно считать, что $x_k = -1$. Далее, при $k > 2$ скалярное произведение векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_k$ отрицательно. Учитывая, что $z_2 = 0$ согласно выбору координатной плоскости Oxy, получаем $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_k) = 1 + y_2y_k < 0$. Следовательно, все числа y_k имеют один и тот же знак (противоположный знаку числа y_2). Теперь воспользуемся тем, что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 1 + y_i y_j + z_i z_j < 0$ при $i, j \geqslant 3$ и $i \neq j$. Ясно, что $y_i y_j > 0$, поэтому $z_i z_j < 0$. Так как не существует трех чисел разных знаков, могут существовать лишь два вектора, отличных от первых двух векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Второе решение. Докажем сначала, что если $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{e}_k = \lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n$, причем все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ положительны и $1 \leqslant k < n$, то углы между векторами $\mathbf{e}_i$ не все тупые. В самом деле, квадрат длины вектора $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{e}_k$ равен $(\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{e}_k, \lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n)$, а если все углы между векторами $\mathbf{e}_i$ тупые, то это скалярное произведение является суммой отрицательных чисел.

Предположим теперь, что в пространстве существуют векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$, все углы между которыми тупые. Ясно, что эти векторы не могут быть параллельны одной плоскости; пусть, например, векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ не параллельны одной плоскости. Тогда $\mathbf{e}_4 = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_5 = \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + \mu_3\mathbf{e}_3$. Вычтем из первого равенства второе и преобразуем полученное равенство так, чтобы и в правой и в левой его части стояли векторы с положительными коэффициентами; при этом в левой части будет вектор $\mathbf{e}_4$, а в правой вектор $\mathbf{e}_5$. Получено противоречие.

7.9. Предположим, что углы между векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_7$ не острые. Направим ось Ox по вектору $\mathbf{e}_1$. В плоскости, перпендикулярной $\mathbf{e}_1$, не может быть более четырех векторов, углы между которыми не острые; вместе с вектором $-\mathbf{e}_1$ получится всего лишь 6 векторов. Поэтому выбрать вектор $\mathbf{e}_2$ и направить ось Oy можно так, что $\mathbf{e}_2 = (x_2, y_2, 0)$, где $x_2 \neq 0$ (а значит, $x_2 < 0$) и $y_2 > 0$. Пусть $\mathbf{e}_k = (x_k, y_k, z_k)$ при $k = 3, \ldots, 7$. Тогда $x_k \leqslant 0$ и $x_k x_2 + y_k y_2 \leqslant 0$. Поэтому $x_k x_2 \geqslant 0$, а значит, $y_k y_2 \leqslant 0$, т. е. $y_k \leqslant 0$. Так как $(\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_r) \leqslant 0$ при $3 \leqslant s, r \leqslant 7$ и $x_r x_s \geqslant 0$, $y_r y_s \geqslant 0$, то $z_s z_r \leqslant 0$. Но среди 5 чисел $z_3, \ldots, z_7$ нулевых не более двух, поэтому среди трех оставшихся чисел обязательно найдутся два числа одного знака. Получено противоречие.

7.10. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$ — единичные векторы, перпендикулярные граням и направленные во внешнюю сторону; $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$; s — указанная сумма косинусов. Так как $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -\cos\varphi_{ij}$, где φ_{ij} — угол между гранями с номерами i и j, то $|\mathbf{n}|^2 = 4 - 2s$. Неравенство $s \leqslant 2$ теперь очевидно. Остается проверить, что $s > 0$, т. е. $|\mathbf{n}| \leqslant 2$.

Существуют такие ненулевые числа α, β, γ и δ, что $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 + \delta\mathbf{e}_4 = 0$. Пусть для определенности δ — наибольшее по абсолютной величине среди этих чисел. Поделив данное равенство на δ, можно считать, что $\delta = 1$; тогда числа α, β и γ положительны (см. задачу 7.15, б) и не превосходят 1. Так как $\mathbf{n} = \mathbf{n} - \alpha\mathbf{e}_1 - \beta\mathbf{e}_2 - \gamma\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 = (1-\alpha)\mathbf{e}_1 + (1-\beta)\mathbf{e}_2 +$

$+(1-\gamma)\mathbf{e}_3$, то $|\mathbf{n}| \leqslant 1-\alpha+1-\beta+1-\gamma = 3-(\alpha+\beta+\gamma)$. Остается заметить, что $1 = |\mathbf{e}_4| = |\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3| \leqslant \alpha+\beta+\gamma$, причем равенства быть не может, так как данные векторы неколлинеарны.

7.11. Пусть векторы $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_i$ сонаправлены с лучами AA_i и BB_i и имеют единичную длину. Согласно задаче 7.16 существуют такие положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, что $x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n=0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{b}=x_1\mathbf{b}_1+\ldots+x_n\mathbf{b}_n$. Так как $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \leqslant (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ по условию, то $|\mathbf{b}|^2 = \sum x_i^2 + 2\sum\limits_{i<j} x_ix_j(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \leqslant \sum x_i^2 + 2\sum\limits_{i<j} x_ix_j(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = |x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n|^2 = 0$. Причем, если хотя бы одно неравенство $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \leqslant (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ строгое, то получим строгое неравенство $|\mathbf{b}|^2 < 0$, чего не может быть.

7.12. Точка X лежит в плоскости ABC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$, т. е. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\mu(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$.

Пусть точка X принадлежит треугольнику ABC. Докажем, например, что $\lambda = S_{CXA} : S_{ABC}$. Равенство $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ означает, что отношение высот, опущенных из точек X и B на прямую AC, равно λ, а отношение этих высот равно $S_{CXA} : S_{ABC}$.

7.13. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AD}$. Пусть, далее, X — произвольная точка и $\overrightarrow{AX} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$. Точка X принадлежит плоскости KLM, если $\overrightarrow{AX} = p\overrightarrow{AK}+q\overrightarrow{AL}+r\overrightarrow{AM} = \frac{p}{\alpha}\mathbf{a}+\frac{q}{\beta}\mathbf{b}+\frac{r}{\gamma}\mathbf{c}$, где $p+q+r=1$ (см. задачу 7.12), т. е. $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=1$.

а) Числа λ, μ и ν требуется подобрать так, чтобы для любых α и β выполнялось равенство $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu(\alpha+\beta+1)=1$, т. е. $\lambda+\nu=0$, $\mu+\nu=0$ и $\nu=1$.

б) Точка X принадлежит всем рассматриваемым плоскостям, если $\lambda(\beta-1)+\mu\beta+\nu(\beta+1) = 1$ для всех β, т. е. $\lambda+\mu+\nu=0$ и $\nu-\lambda=1$. Такие точки X заполняют прямую.

7.14. Пусть $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$. Тогда, так как правильные пятиугольники подобны, $\overrightarrow{OC_1} = \lambda\overrightarrow{OA_1}+\mu\overrightarrow{OB_1}$, а значит, $\overrightarrow{CC_1} = \lambda\overrightarrow{AA_1}+\mu\overrightarrow{BB_1}$, т. е. прямая CC_1 параллельна плоскости П, содержащей $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. Аналогично доказывается, что прямая DD_1 параллельна плоскости П.

7.15. а) Перенесем в равенстве $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}+\delta\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$ все слагаемые с отрицательными числами в правую часть. Если p, q и r — положительные числа, то конец вектора $p\overrightarrow{OP}+q\overrightarrow{OQ}$ лежит внутри угла POQ, а конец вектора $p\overrightarrow{OP}+$ $+q\overrightarrow{OQ}+r\overrightarrow{OR}$ — внутри трехгранного угла $OPQR$ с вершиной O. Остается заметить, что, например, ребро CD лежит вне угла AOB, а вершина D — вне трехгранного угла $OABC$.

б) Так как точка O лежит внутри тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$, можно воспользоваться решением задачи а).

7.16. Пусть продолжение луча OA_i за точку O пересекает многогранник в точке M; P — одна из вершин грани, содержащей точку M; QR — сторона этой грани, пересекающаяся с продолжением луча MP за точку M. Тогда $\overrightarrow{OM}=p\overrightarrow{OP}+q\overrightarrow{OQ}+$ $+r\overrightarrow{OR}$, где $p, q, r\geqslant 0$. Так как векторы $\overrightarrow{OA_i}$ и $\overrightarrow{OM}$ противоположно направлены, то $\overrightarrow{OA_i}+\alpha\overrightarrow{OP}+\beta\overrightarrow{OQ}+\gamma\overrightarrow{OR}=\vec{0}$, где $\alpha, \beta, \gamma\geqslant 0$, P, Q, R — некоторые вершины многогранника. Записав такие равенства для всех i от 1 до n и сложив их, получим требуемое.

7.17. П е р в о е р е ш е н и е. Любой вектор $\mathbf{u}$ можно представить в виде $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$; поэтому доказательство достаточно провести лишь для векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Так как центр правильного тетраэдра делит его медиану в отношении $1:3$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{a}, \mathbf{c})=(\mathbf{a}, \mathbf{d})=-1/3$. Учитывая, что $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+$ $+\mathbf{d}=0$, получаем $(\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{a}+(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{b}+(\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{c}+(\mathbf{a}, \mathbf{d})\mathbf{d}=$ $=\mathbf{a}-(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})/3=\mathbf{a}+\mathbf{a}/3=4\mathbf{a}/3$. Для векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ доказательство проводится аналогично.

В т о р о е р е ш е н и е. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ясно, что AB_1CD_1 — правильный тетраэдр. Введем прямоугольную систему координат с началом в центре куба и осями, параллельными ребрам куба. Тогда $\sqrt{3}\,\mathbf{a}=(1, 1, 1)$, $\sqrt{3}\,\mathbf{b}=$ $=(-1, -1, 1)$, $\sqrt{3}\,\mathbf{c}=(-1, 1, -1)$ и $\sqrt{3}\,\mathbf{d}=(1, -1, -1)$. Пусть $\mathbf{u}=(x, y, z)$. Несложные, но несколько громоздкие вычисления приводят теперь к требуемому результату.

7.18. Опустим из точки O перпендикуляры OB_i на грани тетраэдра. Пусть $\mathbf{a}_i$ — единичный вектор, сонаправленный с $\overrightarrow{OB_i}$. Тогда $(\overrightarrow{OM}, \mathbf{a}_i)\,\mathbf{a}_i+\overrightarrow{MA_i}=\overrightarrow{OB_i}$. Так как тетраэдр $B_1B_2B_3B_4$ правильный, сумма векторов $\overrightarrow{OB_i}$ равна нулю. Следовательно, $\sum\overrightarrow{MA_i}=\sum(\overrightarrow{MO}, \mathbf{a}_i)\,\mathbf{a}_i=4\overrightarrow{MO}/3$ (см. задачу 7.17).

7.19. П е р в о е р е ш е н и е. Докажем, что сумма проекций всех данных векторов на любую прямую l равна нулю. Рассмотрим для этого проекцию многогранника на плоскость, перпендикулярную прямой l. Проекция многогранника покрыта проекциями его граней в два слоя, так как грани можно разбить на два типа: «видимые сверху» и «видимые снизу» (грани, проецирующиеся в отрезки, можно не учитывать). Приписав площадям проекций граней одного типа знак «плюс», а граней другого типа знак «минус», получим, что сумма площадей проекций граней с учетом знака равна нулю. Заметим теперь, что площадь проекции грани равна длине проекции соответствующего вектора на прямую l (см. задачу 2.13), причем для граней разного типа проекции векторов противоположно направлены. Следовательно, сумма проекций векторов на прямую l тоже равна нулю.

Второе решение. Пусть X — точка внутри многогранника, h_i — расстояние от нее до плоскости i-й грани. Разрежем многогранник на пирамиды с вершиной X, основаниями которых служат его грани. Объем V многогранника равен сумме объемов этих пирамид, т. е. $3V = \sum h_i S_i$, где S_i — площадь i-й грани.

Пусть, далее, $\mathbf{n}_i$ — единичный вектор внешней нормали к i-й грани, M_i — произвольная точка этой грани. Тогда $h_i = (\overrightarrow{XM}_i, \mathbf{n}_i)$, поэтому $3V = \sum h_i S_i = \sum (\overrightarrow{XM}_i, S_i\mathbf{n}_i) = \sum (\overrightarrow{XO}, S_i\mathbf{n}_i) + \sum (\overrightarrow{OM}_i, S_i\mathbf{n}_i) = (\overrightarrow{XO}, \sum S_i\mathbf{n}_i) + 3V$ (здесь O — некоторая фиксированная точка многогранника). Следовательно, $\sum S_i\mathbf{n}_i = 0$.

7.20. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть на данных прямых лежат диагонали граней с общим ребром BC, причем AC — одна из этих диагоналей. Тогда BC_1 — вторая такая диагональ, а B_1D — диагональ параллелепипеда, лежащая на третьей данной прямой. Введем прямоугольную систему координат так, что прямая AC совпадает с осью Ox, прямая BC_1 параллельна оси Oy и проходит через точку $(0, 0, a)$, прямая B_1D параллельна оси Oz и проходит через точку $(a, a, 0)$. Тогда точки A и C имеют координаты $(x_1, 0, 0)$ и $(x_2, 0, 0)$, точки B и C_1 — $(0, y_1, a)$ и $(0, y_2, a)$, точки D и B_1 — (a, a, z_1) и (a, a, z_2). Так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то $a - x_1 = x_2 = -a$, $a = -y_1 = y_2 - a$ и $z_1 = -a = a - z_2$, откуда $x_1 = 2a$, $x_2 = -a$, $y_1 = -a$, $y_2 = -2a$, $z_1 = -a$ и $z_2 = 2a$. Тем самым найдены координаты вершин A, B, C, D, B_1 и C_1.

Простые вычисления показывают, что $AC = 3a$, $AB = a\sqrt{6}$ и $BC = a\sqrt{3}$, т. е. треугольник ABC — прямоугольный, а значит, площадь грани $ABCD$ равна $AB \cdot BC = 3a^2\sqrt{2}$. Плоскость грани $ABCD$ задается уравнением $y + z = 0$. Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $px + qy + rz = 0$ равно $|px_0 + qy_0 + rz_0| / \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ (задача 1.27), поэтому расстояние от точки B_1 до грани $ABCD$ равно $3a/\sqrt{2}$. Следовательно, объем параллелепипеда равен $9a^3$.

7.21. Фиксируем $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ и $c = |\mathbf{c}|$. Пусть x, y, z — косинусы углов между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$. Разность между левой и правой частями требуемого неравенства равна $a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(abx + bcy + acz)} - \sqrt{a^2 + b^2 + 2abx} - \sqrt{b^2 + c^2 + 2bcy} - \sqrt{c^2 + a^2 + 2acz} = f(x, y, z)$. Числа x, y и z связаны некоторыми неравенствами, но нам будет проще доказать, что $f(x, y, z) \geqslant 0$ для всех x, y, z, не превосходящих по модулю 1.

Функция $\quad \varphi(t) = \sqrt{p + t} - \sqrt{q + t} = \dfrac{p - q}{\sqrt{p + t} + \sqrt{q + t}}$

монотонна по t. Следовательно, при фиксированных y и z функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения, когда $x = \pm 1$. Фиксируем затем $x = \pm 1$ и z; в этом случае функция f достигает наименьшего значения, когда $y = \pm 1$. Наконец, фиксировав $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$, получаем, что функция f достигает наименьшего значения, когда числа x, y, z равны ± 1. В этом случае векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны и неравенство легко проверяется.

7.22. Утверждения а) и б) легко следуют из определения.

в) Первое решение. Введем систему координат $Oxyz$, направив ось Ox вдоль вектора $\mathbf{a}$. Можно проверить, что векторным произведением векторов $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$ и $\mathbf{u} = (x, y, z)$ является вектор $(0, -az, ay)$. В самом деле, этот вектор перпендикулярен обоим векторам, а его длина равна произведению длины вектора $\mathbf{a}$ на длину высоты, опущенной на вектор $\mathbf{a}$ из конца вектора $\mathbf{u}$; согласованность ориентаций следует проверить для различных вариантов знаков чисел y и z.

Теперь требуемое равенство легко проверить, выражая координаты входящих в него векторных произведений через координаты векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Второе решение. Рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$, где $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}$. Так как $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, то указанное равенство означает, что сумма трех векторов внешних (или внутренних) нормалей к боковым граням призмы, длины которых равны площадям соответствующих граней, равна нулю. Пусть $A'B'C'$ — сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. После поворота векторов нормалей на $90°$ в плоскости $A'B'C'$ они переходят в векторы $d\overrightarrow{A'B'}$, $d\overrightarrow{B'C'}$ и $d\overrightarrow{C'A'}$, где d — длина бокового ребра призмы. Ясно, что сумма этих векторов равна нулю.

7.23. Пусть $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ — единичные векторы, направленные вдоль осей координат. Для решения задачи можно воспользоваться результатами задач 7.22, а — в, предварительно заметив, что $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1$ и $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2$.

7.24. Оба равенства можно доказать несложными, но несколько громоздкими вычислениями, воспользовавшись результатом задачи 7.23.

7.25. а) Согласно задаче 7.24,а $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ и $[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$. Складывая эти равенства, получаем требуемое.

б) Векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярны плоскости ABC и сонаправлены, а их длины равны $2S_{BOC}$, $2S_{COA}$ и $2S_{AOB}$. Поэтому векторы $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, $[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]]$ и $[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]$ после поворота на 90° в плоскости ABC переходят в векторы $2\mathbf{a}S_{BOC}$, $2\mathbf{b}S_{COA}$ и $2\mathbf{c}S_{AOB}$.

7.26. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — векторы, задающие три несмежные стороны шестиугольника; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{c}_1$ — векторы противоположных сторон. Так как вектор $\mathbf{a}_1$ перпендикулярен векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то $\mathbf{a}_1 = \lambda[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Следовательно, общий перпендикуляр к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_1$ задается вектором $\mathbf{n}_a = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$. Из тождества Якоби следует, что $\mathbf{n}_a + \mathbf{n}_b + \mathbf{n}_c = 0$, т. е. эти векторы перпендикулярны одной прямой.

7.27. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{DB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{DC}$. Утверждение задачи эквивалентно равенству $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{c}] = 0$.

7.28. а) Докажем, например, что вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ лежит в плоскости Π, проходящей через биссектрису грани SAB перпендикулярно этой грани. Плоскость Π перпендикулярна вектору $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, поэтому она содержит вектор $[\mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]$. Кроме того, плоскость Π содержит вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, поэтому она содержит вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a} - \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

б) Пусть $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1}\sin\alpha_1 + \overrightarrow{OA_2}\sin\alpha_2 + \overrightarrow{OA_3}\sin\alpha_3$. Докажем, например, что плоскость OA_2A делит пополам угол между гранями OA_2A_1 и OA_2A_3. Для этого достаточно проверить, что перпендикуляр к плоскости OA_2A является биссектрисой угла между перпендикулярами к плоскостям OA_2A_1 и OA_2A_3. Перпендикуляры к этим трем плоскостям задаются соответственно векторами $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}\sin\alpha_1 + \overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}\sin\alpha_3$, $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}$. Как легко видеть, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, то вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ задает биссектрису угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поэтому остается доказать, что длины векторов $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}\sin\alpha_1$

и $\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}\sin\alpha_3$ равны. Но $|\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_1}| = \sin A_1OA_2 = \sin\alpha_3$ и $|\overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3}| = \sin\alpha_1$, что и завершает доказательство. Для плоскостей OA_1A и OA_3A доказательство аналогично.

7.29. Пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1B}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC_1}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{C_1D}$. Тогда удвоенные площади граней тетраэдра A_1BC_1D равны длинам векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ и $[\mathbf{d}, \mathbf{a}]$, где $\mathbf{d} = -(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, а удвоенные площади граней параллелепипеда равны длинам векторов $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{d}]$ и $[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}]$. Пусть $\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\mathbf{y} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{z} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$. Тогда учетверенные суммы квадратов площадей граней тетраэдра и параллелепипеда равны $|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 + |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^2$ и $|\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}|^2$ соответственно. Легко проверить, что каждая из этих сумм равна $2(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{z}|^2 - (\mathbf{y}, \mathbf{z}) - (\mathbf{x}, \mathbf{z}))$.

7.30. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю Воспользовавшись формулой задачи 7.23, получаем, что смешанное произведение данных векторов равно

$$(a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3.$$

7.31. Пусть M — центр масс тетраэдра, A — середина ребра, через которое проходит плоскость П, B — середина противоположного ребра, N' — точка, симметричная N относительно точки M. Так как точка M является серединой отрезка AB (см. задачу 14.3), то $AN' \| BN$, а значит, точка N' принадлежит плоскости П. Следовательно, все шесть плоскостей проходят через точку N'.

7.32. а) Пусть A — середина ребра a, B — середина противоположного ему ребра b. Пусть, далее, M — центр масс тетраэдра, O — центр его описанной сферы, O' — точка, симметричная O относительно точки M. Так как точка M является серединой отрезка AB (задача 14.3), то $O'A \| OB$. Но отрезок OB перпендикулярен ребру b, поэтому $O'A \perp b$, а значит, точка O' принадлежит плоскости, проходящей через середину ребра a перпендикулярно ребру b. Следовательно, все шесть плоскостей проходят через точку O'.

б) Пусть точка Монжа O' лежит в плоскости грани ABC. Проведем через вершину D плоскость П, параллельную этой грани. Так как центр O описанной сферы тетраэдра симметричен точке O' относительно его центра масс M, а точка M делит медиану тетраэдра, проведенную из вершины D, в отношении $3:1$ (задача 14.3), то точка O равноудалена от плоскостей П и ABC. Остается заметить, что если центр сферы равноудален от двух параллельных секущих плоскостей, то проекция окружности сечения на вторую секущую плоскость совпадает со второй окружностью сечения.

7.33. Докажем, что $\angle ABC = 90^\circ$ (рис. 54). Рассмотрим для этого пунктирные отрезки $A'B'$ и $B'C$. Ясно, что при симметрии относительно плоскости, проходящей через середину отрезка BB' и перпендикулярной ему, отрезок AB переходит в $A'B'$, а BC — в $B'C$. Поэтому достаточно доказать, что $\angle A'B'C = 90^\circ$. Кроме того, $B'C \| BF$, т. е. нужно доказать, что $A'B' \perp BF$. При симметрии относительно биссекторной плоскости двугранного угла, образованного пятиугольниками с общим ребром BF, точка A' переходит в B'. Поэтому отрезок $A'B'$ перпендикулярен этой плоскости, в частности, $A'B' \perp BF$.

Для остальных углов между рассматриваемыми отрезками доказательство проводится аналогично.

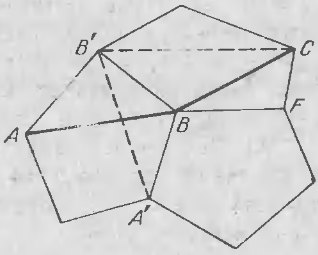


Рис. 54

7.34. Предположим сначала, что и данная сфера, и сфера, касающаяся ее, расположены в одном и том же двугранном угле между данными плоскостями. Тогда обе сферы симметричны относительно биссекторной плоскости этого двугранного угла, а значит, точка их касания лежит в этой плоскости. Если же данная сфера и сфера, касающаяся ее, расположены в разных двугранных углах, то их общей точкой может быть лишь одна из двух точек касания данной сферы с данными плоскостями. Таким образом, искомое ГМТ состоит из окружности, по которой данную сферу пересекает биссекторная плоскость, и двух точек касания данной сферы с данными плоскостями (легко проверить, что все эти точки действительно принадлежат искомому ГМТ).

7.35. Пусть α, β и γ — двугранные углы при ребрах OA, OB и OC. Рассмотрим точку C', симметричную C относительно O. В трехгранном угле $OABC'$ двугранные углы при ребрах OA, OB и OC' равны $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ и γ. Плоскость OMC', где M — середина отрезка AB, разбивает двугранный угол при ребре OC' на два двугранных угла. Так как трехгранные углы $OAMC'$ и $OBMC'$ симметричны относительно плоскостей OMP и OMQ, где P и Q — середины отрезков AC' и BC', то указанные двугранные углы при ребре OC' равны $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$. Следовательно, $\gamma = (\pi - \alpha) + (\pi - \beta)$, что и требовалось.

7.36. Пусть O — проекция вершины S на плоскость основания пирамиды. Так как вершины основания пирамиды равноудалены от точки S, то они равноудалены и от точки O, а значит, они лежат на одной окружности с центром O. Докажем теперь, что $BC = AE$. Пусть M — середина стороны AB. Так как $MO \perp AB$ и $SO \perp AB$, то отрезок AB перпендикулярен плоскости SMO, а значит, при симметрии относительно плоскости SMO отрезок SA переходит в отрезок SB. Двугранные углы при ребрах SA и SB равны, поэтому плоскость SAE при этой симметрии переходит в плоскость SBC. А так как окружность, на которой лежат вершины основания пирамиды, при рассматриваемой симметрии переходит в себя, то точка E переходит в точку C.

Аналогично доказывается, что $BC = ED = AB = DC$.

7.37. Пусть Π — плоскость симметрии фигуры, состоящей из трех попарно непараллельных прямых. Возможны лишь два варианта: 1) относительно Π симметрична каждая данная прямая; 2) одна прямая симметрична относительно Π, а две другие прямые симметричны друг другу.

В первом случае либо одна прямая перпендикулярна Π, а две другие принадлежат Π, либо все три прямые принадлежат Π. Таким образом, плоскость Π задается некоторой парой данных прямых. Следовательно, плоскостей симметрии этого типа не более 3.

Во втором случае плоскость Π проходит через биссектрису угла между двумя данными прямыми перпендикулярно плоскости, содержащей эти прямые. Для каждой пары прямых существуют ровно 2 такие плоскости, поэтому число плоскостей симметрии этого типа не более 6.

Итак, всего плоскостей симметрии не более 9. Кроме того, фигура, состоящая из трех попарно перпендикулярных прямых, проходящих через одну точку, имеет как раз 9 плоскостей симметрии.

7.38. Пусть $\mathbf{a}'$ — образ вектора $\mathbf{a}$ при рассматриваемой симметрии; $\mathbf{u}$ — проекция вектора $\mathbf{a}$ на данную прямую. Тогда $\mathbf{a}' + \mathbf{a} = 2\mathbf{u}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{b}\dfrac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{(\mathbf{b},\ \mathbf{b})}$.

7.39. Введем в пространстве систему координат, взяв прямые l_1 и l, в качестве осей Ox и Oy. При симметрии относительно прямой Ox точка $(x,\ y,\ z)$ переходит в точку $(x,\ -y,\ -z)$, а при симметрии относительно прямой Oy полученная точка переходит в точку $(-x,\ -y,\ z)$.

7.40. Фиксируем какую-нибудь ось симметрии l. Докажем, что остальные оси симметрии разбиваются на пары. Заметим сначала, что при симметрии относительно прямой l ось симметрии переходит в ось симметрии. Если ось симметрии l' не пересекает l или пересекает не под прямым углом, то парой к l' будет ось, симметричная ей относительно l. А если ось l' пересекает l под прямым углом, то парой к l' будет прямая, перпендикулярная l и l' и проходящая через точку их пересечения. В самом деле, из задачи 7.39 следует, что эта прямая является осью симметрии.

7.41. Пусть M — центр масс тетраэдра. При гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/3$ вершины тетраэдра переходят в центры масс его граней, а значит, описанная сфера тетраэдра переходит в сферу радиуса $R/3$, пересекающую все грани тетраэдра (или касающуюся их). Для доказательства того, что радиус этой сферы не меньше r, достаточно провести плоскости, параллельные граням тетраэдра и касающиеся частей этой сферы, лежащих вне тетраэдра. В самом деле, тогда эта сфера окажется вписанной в тетраэдр, подобный исходному и не меньший его.

7.42. Пусть SAB — исходная грань пирамиды $SABCD$, SAD — вторая грань. Повернем плоскости этих граней относительно прямых AB и AD так, чтобы они совпали с плоскостью основания (поворот производится в сторону меньшего угла). Рассмотрим систему координат с началом в точке A и осями Ox и Oy, направленными по лучам AB и AD. Первая проекция задает преобразование, при котором точка (x, y) переходит в (x, ky), где $k = \cos\alpha$ (α — угол между основанием и боковой гранью); при второй проекции точка (x, y) переходит в (kx, y). Следовательно, композиция этих преобразований переводит точку (x, y) и (kx, ky).

7.43. Пусть A и B — наиболее удаленные друг от друга точки многогранника. Тогда образы многогранника M при гомотетиях с центрами A и B и коэффициентом $1/2$ задают искомое расположение. В самом деле, эти многогранники не пересекаются, так как они расположены по разные стороны от плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Кроме того, они лежат внутри M, так как M — выпуклый многогранник.

7.44. Рассмотрим выпуклый многогранник M и любые три многогранника M_1, M_2 и M_3, гомотетичных ему с коэффициентом k. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры соответствующих гомотетий. Ясно, что если A — точка многогранника M, наиболее удаленная от плоскости, содержащей точки O_1, O_2 и O_3, то A не принадлежит ни одному из многогранников M_1, M_2 и M_3. Это следует из того, что при гомотетии с коэффициентом k и центром O, лежащим в плоскости П, наибольшее расстояние от многогранника до плоскости П изменяется в k раз.

7.45. Пусть N — центр масс треугольника ABC. При гомотетии с центром N и коэффициентом $1/4$ точка D переходит в M. Докажем, что точка M лежит в плоскости П, проходящей через центр O_1 описанной окружности треугольника ABC перпендикулярно его медиане AK. В самом деле, $OM \perp AK$ по условию и $OO_1 \perp AK$. Итак, точка D лежит в плоскости Π', полученной из плоскости Π гомотетией с центром N и коэффициентом 4. Обратно, если точка D лежит в этой плоскости, то $OM \perp AK$.

Пусть, далее, K и L — середины ребер BC и AD. Тогда M — середина отрезка KL. Медиана OM треугольника KOL является высотой, только если $KO = OL$. А так как $OA = OB$, то высоты OK и OL равнобедренных треугольников BOC и AOD равны тогда и только тогда, когда $BC = AD$, т. е. точка D лежит на сфере радиуса BC с центром A. Искомым ГМТ является пересечение этой сферы с плоскостью Π'.

7.46. Можно считать, что плоскости Π' и Π'' не параллельны, так как иначе утверждение очевидно. Пусть l — прямая пересечения этих плоскостей, A_i^* — точка пересечения прямой l с плоскостью $A_iA_i'A_i''$. Плоскость $A_iA_i'A_i''$ перпендикулярна прямой l, поэтому $l \perp A_i'A_i^*$ и $l \perp A_i''A_i^*$. Следовательно, если плоскость Π' повернуть вокруг прямой l так, чтобы она совпала с плоскостью Π'', то прямые $A_i'A_i''$ будут перпендикулярны прямой l.

7.47. Рассмотрим сечение плоскостью, перпендикулярной прямой l. Требуемое утверждение следует теперь из соответствующего планиметрического утверждения о композиции двух осевых симметрий (см. Прасолов, 8.14, б).

7.48. Пусть A — некоторая точка, B — ее образ при симметрии относительно точки O, C — образ точки B при повороте на угол φ относительно прямой l, D — образ точки C при симметрии относительно плоскости Π. Тогда точка D является образом точки A при повороте на угол $180° + \varphi$ относительно прямой l.

7.49. а) Пусть T — некоторое преобразование, переводящее точку A в точку B, отличную от A; S — симметрия относительно плоскости Π, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Тогда $S \circ T(A) = S(B) = A$, т. е. A—неподвижная точка преобразования $S \circ T$. Кроме того, если $T(X) = X$ для некоторой точки X, то $AX = T(A)T(X) = BX$. Следовательно, точка X принадлежит плоскости Π, а значит, $S(X) = X$. Таким образом, точка A и все неподвижные точки преобразования T являются неподвижными точками преобразования $S \circ T$.

Возьмем 4 точки пространства, не лежащие в одной плоскости, и рассмотрим их образы при данном преобразовании P. Можно подобрать k ($k \leqslant 4$) таких преобразований $S_1, \ldots, S_k$ — симметрий относительно плоскостей, что преобразование $S_1 \circ \ldots$

... $\circ S_k \circ P$ оставляет неподвижными выбранные 4 точки, т. е. это преобразование оставляет неподвижными все точки пространства. Следовательно, $P = S_k \circ \ldots \circ S_1$; для доказательства этого утверждения можно воспользоваться тем, что если $S \circ F = G$, где S — симметрия относительно плоскости, то $S \circ C = S \circ S \circ F = F$, так как $S \circ S$ — тождественное преобразование.

б) Для преобразования, оставляющего точку O неподвижной, в качестве одной из 4 точек, образы которых задают это преобразование, можно взять точку O. Во всем остальном доказательство аналогично решению задачи а).

7.50. а) Согласно задаче 7.49,б любое движение первого рода, имеющее неподвижную точку, является композицией двух симметрий относительно плоскостей, т. е. поворотом относительно прямой, по которой пересекаются эти плоскости (см. задачу 7.47).

б) Пусть T — данное движение второго рода, I — симметрия относительно неподвижной точки O этого преобразования. Так как I можно представить в виде композиции трех симметрий относительно трех попарно перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку O, то I — преобразование второго рода. Поэтому $P = T \circ I$ — преобразование первого рода, причем O — неподвижная точка этого преобразования. Следовательно, P — поворот относительно некоторой оси l, проходящей через точку O. Поэтому преобразование $T = T \circ I \circ I = P \circ I$ является композицией поворота относительно некоторой прямой l и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной l (см. задачу 7.48).

7.51. После перекатывания любая точка A поверхности шара переходит в точку $T(A)$, где T — движение первого рода, имеющее неподвижную точку — центр шара. Согласно задаче 7.50,а преобразование T является поворотом относительно некоторой оси l. Следовательно, точки X_1, X_2 и X_3 лежат в плоскости, проходящей через точку X перпендикулярно прямой l.

7.52. Свяжем с данным трехгранным углом прямоугольную систему координат $Oxyz$. Луч света, двигающийся в направлении вектора (x, y, z), после отражения от плоскости Oxy будет двигаться в направлении вектора $(x, y, -z)$. Таким образом, отразившись ото всех трех граней, он будет двигаться в направлении вектора $(-x, -y, -z)$.

7.53. Пусть B — точка падения луча на зеркало; A — точка луча, отличная от B; K и L — проекции A на зеркало в исходном и повернутом положении, A_1 и A_2 — точки, симметричные A относительно этих положений зеркала. Искомый угол равен углу A_1BA_2. Если $AB = a$, то $A_1B = A_2B = a$ и $AK = a \sin \alpha$. Так как $\angle KAL = \beta$, то $A_1A_2 = 2KL = 2AK \sin \beta =$

$= 2a \sin\alpha \sin\beta$. Следовательно, если φ — искомый угол, то $\sin(\varphi/2) = \sin\alpha\sin\beta$.

7.54. Введем систему координат с началом O в вершине конуса и осью Ox, проходящей через точку A (рис. 55). Пусть $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, тогда $\overrightarrow{AM} = (x - a, y, z)$, где $a = AO$. Если α — угол между осью конуса Oz и его образующей, то $x^2 + y^2 = k^2z^2$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{PM}$, перпендикулярный поверхности конуса, с началом P на оси конуса. Этот вектор имеет координаты (x, y, t), причем $0 = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{PM}) = x^2 + y^2 + tz = k^2z^2 + tz$, т. е. $t = -k^2z$.

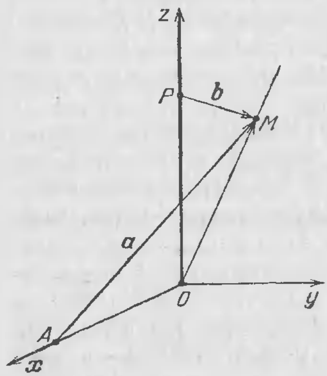


Рис. 55

При симметрии относительно прямой PM вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AM}$ переходит в вектор $2\mathbf{b}\dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} - \mathbf{a}$, где $\mathbf{b} = \overrightarrow{PM}$ (см. задачу 7.38).

Третья координата этого вектора равна

$$-2k^2z\frac{x^2 - ax + y^2 - k^2z^2}{x^2 + y^2 + k^4z^2} - z = \frac{2ak^2xz}{(x^2 + y^2)(1 + k^2)} - z;$$

она должна быть равна нулю. Поэтому искомое ГМТ задается уравнением $x^2 + y^2 - 2ak^2x/(1 + k^2) = 0$; оно представляет собой окружность радиуса $ak^2/(1 + k^2) = a\sin^2 a$, проходящую через вершину конуса.

Глава 8

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. Разные задачи

8.1. а) Площади всех граней выпуклого многогранника равны. Докажите, что сумма расстояний от его внутренней точки до плоскостей граней не зависит от положения точки.

б) Высоты тетраэдра равны h_1, h_2, h_3 и h_4; d_1, d_2, d_3 и d_4 — расстояния от произвольной его внутренней точки до соответствующих граней. Докажите, что

$$\sum (d_i/h_i) = 1.$$

8.2. а) Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь ровно 7 ребер.

б) Докажите, что выпуклый многогранник может иметь любое число ребер, большее 5 и отличное от 7.

8.3. Плоскость, пересекающая описанный многогранник, делит его на две части объемом V_1 и V_2; его поверхность она делит на две части площадью S_1 и S_2. Докажите, что $V_1 : S_1 = V_2 : S_2$ тогда и только тогда, когда плоскость проходит через центр вписанной сферы.

8.4. В выпуклом многограннике из каждой вершины выходит четное число ребер. Докажите, что любое сечение его плоскостью, не содержащей вершин, является многоугольником с четным числом сторон.

8.5. Докажите, что если любая вершина выпуклого многогранника соединена ребрами со всеми остальными вершинами, то этот многогранник — тетраэдр.

8.6. Какое наибольшее число сторон может иметь проекция выпуклого многогранника с n гранями?

8.7. Каждая грань выпуклого многогранника имеет центр симметрии.

а) Докажите, что его можно разрезать на параллелепипеды.

б) Докажите, что он сам имеет центр симметрии.

8.8. Докажите, что если все грани выпуклого многогранника — параллелограммы, то их число является произведением двух последовательных натуральных чисел.

§ 2. Признаки невписанности и неописанности многогранников

8.9. Некоторые грани выпуклого многогранника окрашены в черный цвет, остальные — в белый, причем никакие две черные грани не имеют общего ребра. Докажите, что если площадь черных граней больше площади белых, то в этот многогранник нельзя вписать сферу.

Может ли для описанного многогранника площадь черных граней равняться площади белых?

8.10. Некоторые грани выпуклого многогранника окрашены в черный цвет, а остальные — в белый, причем никакие две черные грани не имеют общего ребра. Докажите, что если черных граней больше половины, то в этот многогранник нельзя вписать сферу.

8.11. Некоторые вершины выпуклого многогранника окрашены в черный цвет, а остальные — в белый, причем хотя бы один конец каждого ребра белый. Докажите, что если черных вершин больше половины, то этот многогранник нельзя вписать в сферу.

8.12. Все вершины куба отсечены плоскостями, причем каждая плоскость отсекает тетраэдр. Докажите, что в полученный многогранник нельзя вписать сферу.

8.13. Через все ребра октаэдра проведены плоскости; при этом образовался многогранник с четырехугольными гранями: каждому ребру октаэдра соответствует одна грань. Докажите, что полученный многогранник нельзя вписать в сферу.

§ 3. Формула Эйлера

Во всем этом параграфе В — число вершин, Р — число ребер, Г — число граней выпуклого многогранника.

8.14. Докажите, что $В - Р + Г = 2$ (формула Эйлера).

8.15. а) Докажите, что сумма углов всех граней выпуклого многогранника равна удвоенной сумме углов плоского многоугольника с тем же числом вершин.

б) Рассмотрим для каждой вершины выпуклого многогранника разность между 2π и суммой плоских углов, сходящихся в этой вершине. Докажите, что сумма всех этих величин равна 4π.

8.16. Пусть $Г_k$ — число k-угольных граней произвольного многогранника, $В_k$ — число его вершин, в которых сходится k ребер. Докажите, что $2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 \ldots = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$

8.17. а) Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется либо треугольная грань, либо трехгранный угол.

б) Докажите, что для любого выпуклого многогранника сумма числа треугольных граней и числа трехгранных углов не меньше 8.

8.18. Докажите, что в любом выпуклом многограннике найдется грань, у которой менее шести сторон.

8.19. Докажите, что для любого выпуклого многогранника $3Г \geqslant 6 + Р$ и $3В \geqslant 6 + Р$.

8.20. Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 сторон, а все многогранные углы — трехгранные. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

§ 4. Обходы многогранников

8.21. Планета имеет форму выпуклого многогранника, причем в его вершинах расположены города, а каждое ребро является дорогой. Две дороги закрыты на ремонт. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам.

8.22. На каждом ребре выпуклого многогранника указано направление; при этом в любую вершину хотя бы одно ребро входит и хотя бы одно из нее выходит. Докажите, что существуют две грани, которые можно обойти, двигаясь в соответствии с введенной ориентацией ребер.

8.23. Система дорог, проходящих по ребрам выпук-

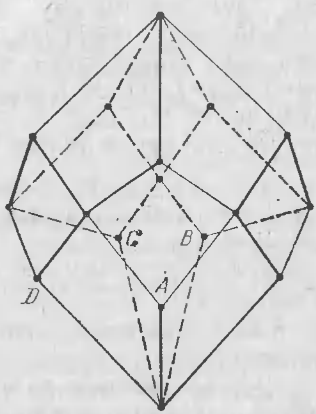


Рис. 56

лого многогранника, изображенного на рис. 56, соединяет все его вершины и не разбивает его на две части. Докажите, что эта система дорог имеет не менее 4 тупиков. (Для системы дорог, изображенной на рис. 56, вершины A, B, C и D тупиковые.)

§ 5. Пространственные многоугольники

8.24. Плоскость пересекает стороны пространственного многоугольника $A_1 \ldots A_n$ (или их продолжения) в точках $B_1, \ldots, B_n$; точка B_i лежит на прямой A_iA_{i+1}. Докажите, что $\frac{A_1B_1}{A_2B_1} \cdot \frac{A_2B_2}{A_3B_2} \cdot \ldots \cdot \frac{A_nB_n}{A_1B_n} = 1$, причем на сторонах многоугольника (а не на их продолжениях) лежит четное число точек B_i.

8.25. Даны четыре прямые, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Докажите, что существует пространственный четырехугольник, стороны которого параллельны этим прямым, причем отношение сторон, параллельных соответствующим прямым, для всех таких четырехугольников одно и то же.

8.26. а) Сколько существует попарно не равных пространственных четырехугольников с одним и тем же набором векторов сторон?

б) Докажите, что объемы всех тетраэдров, задаваемых этими пространственными четырехугольниками, равны.

8.27. В пространстве даны точки A, B, C и D, причем $AB = BC = CD$ и $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \alpha$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

8.28. Пусть B_1, $B_2, \ldots, B_5$ — середины сторон A_3A_4, $A_4A_5, \ldots, A_2A_3$ пространственного пятиугольника $A_1 \ldots A_5$; $\overrightarrow{A_iP_i} = (1 + 1/\sqrt{5})\overrightarrow{A_iB_i}$ и $\overrightarrow{A_iQ_i} = (1 - 1/\sqrt{5})\overrightarrow{A_iB_i}$. Докажите, что как точки P_i, так и точки Q_i лежат в одной плоскости.

8.29. Докажите, что пятиугольник, все стороны и углы которого равны, является плоским.

* * *

8.30. В пространственном четырехугольнике $ABCD$ суммы противоположных сторон равны. Докажите, что существует сфера, касающаяся всех его сторон и диагонали AC.

8.31. Сфера касается всех сторон пространственного четырехугольника. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

8.32. На сторонах AB, BC, CD и DA пространственного четырехугольника $ABCD$ (или на их продолжениях) взяты точки K, L, M и N, причем $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ и $DM = DN$. Докажите, что существует сфера, касающаяся прямых AB, BC, CD и DA.

8.33. Пусть a, b, c и d — длины сторон AB, BC, CD и DA пространственного четырехугольника $ABCD$.

а) Докажите, что если не выполняется ни одно из трех соотношений $a + b = c + d$, $a + c = b + d$ и $a + d = b + c$, то существует ровно 8 различных сфер, касающихся прямых AB, BC, CD и DA.

б) Докажите, что если выполняется хотя бы одно из указанных соотношений, то существует бесконечно много различных сфер, касающихся прямых AB, BC, CD и DA.

Решения

8.1. а) Пусть V — объем многогранника, S — площадь его грани, h_i — расстояние от точки X, лежащей внутри многогранника, до i-й грани. Разрезая многогранник на пирамиды с вершиной X, основаниями которых служат его грани, получаем $V = Sh_1/3 + \ldots + Sh_n/3$. Следовательно, $h_1 + \ldots + h_n = 3V/S$.

б) Пусть V — объем тетраэдра. Так как $h_i = 3V/S_i$, где S_i — площадь i-й грани, то $\sum (d_i/h_i) = \left(\sum d_iS_i\right)/3V$. Остается заметить, что $d_iS_i/3 = V_i$, где V_i — объем пирамиды с вершиной в выбранной точке тетраэдра, основанием которой служит i-я грань, и $\sum V_i = V$.

8.2. а) Предположим, что многогранник имеет только треугольные грани, причем их количество равно Г. Тогда число ребер многогранника равно 3Г/2, т. е. оно делится на 3. Если же у многогранника есть грань с числом сторон более трех, то число его ребер не менее 8.

б) Пусть $n \geqslant 3$. Тогда $2n$ ребер имеет n-угольная пирамида, а $2n + 3$ ребер имеет многогранник, который получится, если от n-угольной пирамиды отсечь треугольную пирамиду плоскостью, проходящей вблизи от одной из вершин основания.

8.3. Предположим для определенности, что центр O вписанной сферы принадлежит части многогранника с объемом V_1.

Рассмотрим пирамиду с вершиной O, основанием которой служит сечение многогранника данной плоскостью. Пусть V — объем этой пирамиды. Тогда $V_1 - V = rS_1/3$ и $V_2 + V = rS_2/3$, где r — радиус вписанной сферы (см. задачу 3.7). Поэтому $S_1 : S_2 = V_1 : V_2$ тогда и только тогда, когда $(V_1 - V) : (V_2 + V) = S_1 : S_2 = V_1 : V_2$, а значит, $V = 0$, т. е. точка O принадлежит секущей плоскости.

8.4. Прямых, соединяющих вершины многогранника, конечное число, поэтому данную плоскость можно слегка пошевелить так, чтобы в процессе шевеления она не пересекла ни одной вершины и в новом положении она не была бы параллельна ни одной прямой, соединяющей вершины многогранника. Будем сдвигать эту плоскость параллельно до тех пор, пока она не выйдет за пределы многогранника. Число вершин сечения будет изменяться, только когда плоскость будет проходить через вершины многогранника, причем она каждый раз будет проходить лишь через одну вершину. Если по одну сторону от этой плоскости лежит m ребер, выходящих из вершины, а по другую n ребер, то число сторон сечения при переходе через вершину изменяется на $n - m = (n + m) - 2m = 2k - 2m$, т. е. на четное число. Так как после выхода плоскости за пределы многогранника число сторон сечения равно нулю, то число сторон исходного сечения четно.

8.5. Если любая вершина многогранника соединена ребрами со всеми остальными вершинами, то все грани треугольные.

Рассмотрим две грани ABC и ABD с общим ребром AB. Предположим, что многогранник не тетраэдр. Тогда у него есть еще вершина E, отличная от вершин рассматриваемых граней. Так как точки C и D лежат по разные стороны от плоскости ABE, треугольник ABE не является гранью данного многогранника. Если провести разрезы по ребрам AB, BE и EA, то поверхность многогранника распадается на две части (для невыпуклого многогранника это было бы неверно), причем точки C и D лежат в разных частях. Поэтому точки C и D не могут быть соединены ребром, так как иначе разрез пересекал бы его, но ребра выпуклого многогранника не могут пересекаться по внутренним точкам.

8.6. Ответ: $2n - 4$. Докажем сначала, что проекция выпуклого многогранника с n гранями может иметь $2n - 4$ сторон. Отрежем от правильного тетраэдра $ABCD$ ребро CD призматической поверхностью, боковые ребра которой параллельны CD (рис. 57). Проекция полученного многогранника с n гранями на плоскость, параллельную прямым AB и CD, имеет $2n - 4$ сторон.

Докажем теперь, что проекция M выпуклого многогранника с n гранями не может иметь более $2n - 4$ сторон. Число сторон проекции на плоскость, перпендикулярную грани, не может быть больше числа сторон всех других проекций. В самом деле, при такой проекции данная грань переходит в сторону многоугольника; если же плоскость проекции слегка пошевелить, то эта сторона сохранится или распадется на несколько сторон, а число остальных сторон не изменится. Поэтому будем рассматривать проекции на плоскости, не перпендикулярные граням. В этом случае ребра, проецирующиеся в границу многоугольника M, разбивают многогранник на две части:

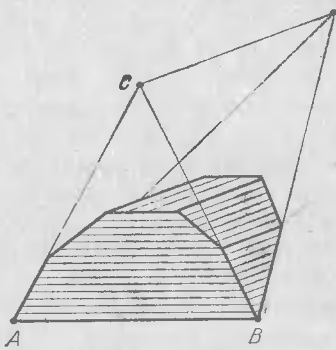


Рис. 57

«верхнюю» и «нижнюю». Пусть p_1 и p_2, q_1 и q_2, r_1 и r_2 — число вершин, ребер и граней в верхней и нижней частях (вершины и ребра границы не учитываются); m — число вершин многоугольника M, m_1 (соответственно m_2) — число вершин M, из которых выходит хотя бы одно ребро верхней (соответственно нижней) части. Так как из каждой вершины M выходит по крайней мере одно ребро верхней или нижней части, то $m \leqslant m_1 + m_2$. Оценим теперь число m_1. Из каждой вершины верхней части выходит не менее трех ребер, поэтому число концов ребер верхней части не менее $3p_1 + m_1$. С другой стороны, число концов этих ребер равно $2q_1$; поэтому $3p_1 + m_1 \leqslant 2q_1$. Докажем теперь, что $p_1 - q_1 + r_1 = 1$. Проекции ребер верхней части разбивают многоугольник M на несколько многоугольников. Сумма углов этих многоугольников равна $\pi(m - 2) + 2\pi p_1$. С другой стороны, она равна $\sum\limits_i \pi(q_{1i} - 2)$, где q_{1i} — число сторон i-го многоугольника разбиения; последняя сумма равна $\pi(m + 2q_1) - 2r_1$. Приравнивая оба выражения для суммы углов многоугольников, получаем требуемое. Так как $q_1 = p_1 + r_1 - 1$ и $m_1 + 3p_1 \leqslant 2q_1$, то $m_1 \leqslant 2r_1 - 2 - p_1 \leqslant 2r_1 - 2$. Аналогично $m_2 \leqslant 2r_2 - 2$. Следовательно, $m \leqslant m_1 + m_2 \leqslant 2(r_1 + r_2) - 4 = 2n - 4$.

8.7. а) Возьмем произвольную грань данного многогранника и ее ребро r_1. Так как грань центрально симметрична, то она содержит ребро r_2, равное и параллельное r_1. Грань, прилегающая к ребру r_2, тоже имеет ребро r_3, равное и параллельное r_1, и т. д. В итоге получаем «поясок» граней, заданный ребром

r_1 (он обязательно замкнется на ребре r_1). Если из поверхности многогранника вырезать этот «поясок», то останутся две «шапочки» $Ш_1$ и $Ш_2$. Сдвинем «шапочку» $Ш_1$ внутрь многогранника на вектор, заданный ребром r_1, и разрежем многогранник по полученной при этом поверхности $T(Ш_1)$. Часть многогранника, заключенную между $Ш_1$ и $T(Ш_1)$, можно разрезать на призмы, а разрезая их основания на параллелограммы (см. Прасолов, ч. II, 24.18), получим разбиение на параллелепипеды. Грани многогранника, заключенного между $T(Ш_1)$ и $Ш_2$, центрально симметричны, а число его ребер меньше, чем у исходного многогранника, на число ребер «пояска», параллельных r_1. Следовательно, за конечное число подобных операций многогранник можно разрезать на параллелепипеды.

б) Как и в задаче а), рассмотрим «поясок» и «шапочки», заданные ребром r грани Г. Проекция многогранника на плоскость, перпендикулярную ребру r, является выпуклым многогранником, сторонами которого служат проекции граней, входящих в «поясок». Проекции граней одной «шапочки» задают разбиение этого многоугольника на центрально симметричные многоугольники. Следовательно, этот многоугольник центрально симметричен (см. Прасолов, ч. II, 24.19), а значит, для грани Г найдется грань Г′, проекция которой параллельна проекции Г, т. е. эти грани параллельны; ясно также, что выпуклый многогранник может иметь лишь одну грань, параллельную Г. Грани Г и Г′ входят в один «поясок», поэтому Г′ тоже имеет ребро, равное и параллельное ребру r. Проводя аналогичные рассуждения для всех «поясков», заданных ребрами грани Г, получаем, что грани Г и Г′ имеют соответственно равные и параллельные ребра. Так как эти грани выпуклы, они равны. Середина отрезка, соединяющего центры их симметрий, является их центром симметрии.

Итак, для любой грани найдется центрально симметричная ей грань. Остается доказать, что все центры симметрии пар граней совпадают. Это достаточно доказать для двух граней, имеющих общее ребро. Рассматривая «поясок», заданный этим ребром, получим, что параллельные им грани также имеют общее ребро, причем оба центра симметрии пар граней совпадают с центром симметрии пары общих ребер граней.

8.8. Воспользуемся решением задачи 8.7. Каждый «поясок» разбивает поверхность многогранника на две «шапочки». Так как многогранник центрально симметричен, обе «шапочки» содержат равное число граней. Поэтому другой «поясок» не может целиком лежать в одной «шапочке», т. е. любые два «пояска» пересекаются, причем ровно по двум граням (параллельным ребрам, задающим «пояски»).

Пусть k — число различных «поясков». Тогда каждый «поясок» пересекается с $k-1$ другими «поясками», т. е. он содержит $2(k-1)$ граней. Так как любая грань является параллелограммом, она входит ровно в два «пояска». Поэтому число граней равно $2(k-1)k/2=(k-1)k$.

8.9. Докажем, что если никакие две черные грани описанного многогранника не имеют общего ребра, то площадь черных граней не превосходит площади белых. При доказательстве будем использовать то, что если две грани многогранника касаются сферы в точках O_1 и O_2, а AB — их общее ребро, то $\triangle ABO_1=\triangle ABO_2$. Разобьем грани на треугольники, соединив каждую точку касания многогранника и сферы со всеми вершинами соответствующей грани. Из предыдущего замечания и условия следует, что каждому черному треугольнику можно сопоставить белый треугольник с такой же площадью. Поэтому сумма площадей черных треугольников не меньше суммы площадей белых треугольников.

Описанный многогранник — правильный октаэдр — можно окрасить так, чтобы площадь черных граней равнялась площади белых и никакие две черные грани не имели общего ребра.

8.10. Докажем, что если в многогранник вписана сфера и никакие две черные грани не имеют общего ребра, то черных граней не больше, чем белых. При доказательстве будем использовать то, что если O_1 и O_2 — точки касания со сферой граней с общим ребром AB, то $\triangle ABO_1=\triangle ABO_2$, а значит, $\angle AO_1B=\angle AO_2B$. Рассмотрим все углы, под которыми из точек касания сферы с гранями видны ребра соответствующей грани. Из предыдущего замечания и условия следует, что каждому такому углу черной грани можно сопоставить равный ему угол белой грани. Поэтому сумма черных углов не больше суммы белых углов. С другой стороны, сумма таких углов для одной грани равна 2π. Следовательно, сумма черных углов равна $2\pi n$, где n — число черных граней, а сумма белых углов равна $2\pi m$, где m — число белых граней. Таким образом, $n\leqslant m$.

8.11. Докажем, что если многогранник вписан в сферу и никакие две черные вершины не соединены ребром, то черных вершин не больше, чем белых.

Пусть плоскости, касающиеся в точках P и Q сферы с центром O, пересекаются по прямой AB. Тогда любые две плоскости, проходящие через отрезок PQ, высекают на плоскости ABP такой же угол, как и на плоскости ABQ. В самом деле, эти углы симметричны относительно плоскости ABO. Рассмотрим теперь для каждой вершины нашего многогранника углы, которые высекаются на касательной плоскости двугранными углами между сходящимися в этой вершине гранями. Из предыдущего замечания и условия следует, что каждому углу при черной вершине можно сопоставить равный ему угол при белой вершине. Поэтому сумма черных углов не больше суммы белых. С другой стороны, сумма таких углов для одной вершины равна $\pi(n-2)$, где n — число граней многогранного угла с этой вершиной (для доказательства этого удобно рассмотреть сечение многогранного угла плоскостью, параллельной касательной плоскости). Видно также, что если вместо этих углов рассматривать углы, дополняющие их до $180°$ (т. е. внешние углы многоугольника сечения), то их сумма для любой вершины будет равна 2π. Как и раньше, сумма черных таких углов не больше суммы белых. С другой стороны, сумма черных углов равна $2\pi n$, где n — число черных вершин, а сумма белых углов равна $2\pi m$, где m — число белых вершин. Следовательно, $2\pi n \leqslant 2\pi m$, т. е. $n \leqslant m$.

8.12. Окрасим грани исходного куба в белый цвет, а остальные грани полученного многогранника — в черный. Белых граней 6, черных граней 8, причем никакие две черные грани не имеют общего ребра. Следовательно, в этот многогранник нельзя вписать сферу (см. задачу 8.10).

8.13. Окрасим 6 вершин исходного октаэдра в белый цвет, а 8 новых вершин — в черный. Тогда один конец каждого ребра полученного многогранника белый, а другой черный. Следовательно, этот многогранник нельзя вписать в сферу (см. задачу 8.11).

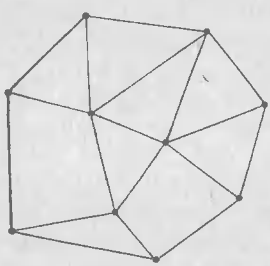


Рис. 58

8.14. Первое решение. Пусть M — проекция многогранника на плоскость, не перпендикулярную ни одной его грани; при такой проекции все грани проецируются в многоугольники. Ребра, проецирующиеся в стороны границы M, разбивают многогранник на две части. Рассмотрим проекцию одной из этих частей (рис. 58). Пусть $n_1, \ldots, n_k$ — числа ребер граней этой части, $В_1$ — число внутренних вершин этой части, $В'$ — число вершин границы M. Сумма углов многоугольников, на которые разбит многоугольник M, равна, с одной стороны, $\sum \pi(n_i-2)$, а с другой стороны, $\pi(В'-2)+2\pi В_1$. Следовательно, $\sum n_i - 2k = В' - 2 + 2В_1$, где k — число граней первой части. Записывая такое же равенство для второй части многогранника и складывая оба эти равенства, получаем требуемое.

Второе решение. Рассмотрим сферу радиуса 1 с центром O, лежащим внутри многогранника. Углы вида AOB, где AB — ребро многогранника, разбивают поверхность сферы на сферические многоугольники. Пусть n_i — число сторон i-го сферического многоугольника, σ_i — сумма его углов, S_i — площадь. Согласно задаче 4.44 $S_i = \sigma_i - \pi(n_i - 2)$. Сложив все такие равенства для $i = 1, \ldots, Г$, получим $4\pi = 2\pi В - 2\pi Р + 2\pi Г$.

8.15. Пусть $\sum$ — сумма всех углов граней выпуклого многогранника. В задаче а) требуется доказать, что $\sum = 2(В - 2)\pi$, а в задаче б) требуется доказать, что $2В\pi - \sum = 4\pi$. Поэтому обе задачи эквивалентны.

Если грань содержит k ребер, то сумма ее углов равна $(k - 2)\pi$. При суммировании по всем граням каждое ребро учитывается дважды, так как оно принадлежит ровно двум граням. Следовательно, $\sum = (2Р - 2Г)\pi$. Поэтому $2В\pi - \sum = 2\pi(В - Р + Г) = 4\pi$.

8.16. Каждому ребру можно сопоставить две вершины, соединенные им. При этом вершина, в которой сходится k ребер, встречается k раз. Поэтому $2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots$ С другой стороны, каждому ребру можно сопоставить две грани, прилегающие к нему. При этом k-угольная грань встречается k раз. Поэтому $2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$

8.17. а) Предположим, что некоторый выпуклый многогранник не имеет ни треугольных граней, ни трехгранных углов. Тогда $В_3 = Г_3 = 0$, а значит, $2Р = 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots \geqslant 4Г$ и $2Р = 4В_4 + 5В_5 + \ldots \geqslant 4В$ (см. задачу 8.16). Следовательно, $4В - 4Р + 4Г \leqslant 0$. С другой стороны, $В - Р + Г = 2$. Получено противоречие.

б) Согласно формуле Эйлера $4В + 4Г = 4Р + 8$. Подставим в эту формулу следующие выражения для входящих в нее величин: $4В = 4В_3 + 4В_4 + 4В_5 + \ldots$, $4Г = 4Г_3 + 4Г_4 + 4Г_5 + \ldots$ и $4Р = 2Р + 2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots + 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + \ldots$ После сокращения получаем $В_3 + Г_3 = 8 + В_5 + 2В_6 + 3В_7 + \ldots + Г_5 + 2Г_6 + 3Г_7 \ldots \geqslant 8$.

8.18. Предположим, что любая грань некоторого выпуклого многогранника имеет не менее шести сторон. Тогда $Г_3 = Г_4 = Г_5 = 0$, и поэтому $2Р = 6Г_6 + 7Г_7 + \ldots \geqslant 6Г$ (см. задачу 8.16), т. е. $Р \geqslant 3Г$. Кроме того, для любого многогранника $2Р = 3В_3 + 4В_4 + \ldots \geqslant 3В$. Складывая неравенства $Р \geqslant 3Г$ и $2Р \geqslant 3В$, получаем $Р \geqslant Г + В$. С другой стороны, $Р = Г + В - 2$. Получено противоречие.

Замечание. Аналогичным образом можно доказать, что в любом выпуклом многограннике найдется вершина, из которой выходит менее шести ребер.

8.19. Для любого многогранника $2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + \ldots \geqslant 3В$. С другой стороны, $В = Р - Г + 2$. Поэтому $2Р \geqslant 3(Р - Г + 2)$, т. е. $3Г \geqslant 6 + Р$. Неравенство $3В \geqslant 6 + Р$ доказывается аналогично.

8.20. Пусть a, b и c — количества граней, имеющих 5, 6 и 7 сторон соответственно. Тогда $Р = (5a + 6b + 7c)/2$, $Г = a + b + c$ и, так как по условию из каждой вершины выходят три ребра, $В = (5a + 6b + 7c)/3$. Умножив все эти выражения на 6 и подставив в формулу $6(В + Г - Р) = 12$, получим требуемое.

8.21. Пусть A и B — данные города. Докажем сначала, что из A в B можно было проехать до закрытия на ремонт двух дорог. Рассмотрим для этого проекцию многогранника на некоторую прямую, не перпендикулярную ни одному из его ребер (при такой проекции вершины многогранника не сливаются). Пусть A' и B' — проекции точек A и B, а M' и N' — крайние точки проекции многогранника (в точки M' и N' проецируются вершины M и N). Если идти из вершины A так, что в проекции движение будет происходить по направлению от M' к N', то в конце концов обязательно попадем в вершину N. Аналогично из вершины B можно пройти в N. Таким образом, можно проехать из A в B (через N).

Если полученный путь из A в B проходит через закрытую дорогу, то есть еще два объезда по граням, для которых это ребро является общим. Вторая закрытая дорога не может находиться сразу на двух этих объездах.

8.22. Выйдем из некоторой вершины многогранника и будем идти по ребрам в указанном на них направлении до тех пор, пока не попадем в вершину, в которой уже побывали ранее. Путь от первого прохождения через эту вершину до второго образует «петлю», разбивающую многогранник на две части. Рассмотрим одну из них и найдем на ней грань с требуемым свойством. Границу каждой из двух частей можно обойти, двигаясь в соответствии с введенной ориентацией. Если рассматриваемая фигура сама является гранью, то все уже доказано. Поэтому будем считать, что она не является гранью, т. е. на границе имеется вершина, из которой выходит (соответственно входит) ребро, не лежащее на границе фигуры. Пройдем по этому ребру и будем идти дальше по ребрам в указанном направлении (соответственно в направлении, противоположном указанному) до тех пор, пока снова не выйдем на границу или получим петлю. Путь разбивает фигуру на две части; границу одной из них можно обойти в соответствии с ориентацией (рис. 59). С этой частью проделаем то же самое и т. д. После нескольких таких операций останется одна грань, обладающая требуемым свойством. Для другой из полученных на самом первом шаге частей аналогично можно найти вторую нужную грань.

8.23. Раскрасим вершины многогранника в 2 цвета так, как показано на рис. 60. Тогда любое ребро соединяет 2 вершины разного цвета. Для данной системы дорог назовем степенью вершины многогранника число дорог, проходящих через эту вершину. Если система дорог не имеет вершин степени более 2, то разность между числом черных и белых вершин не превосходит 1. Если есть лишь одна вершина

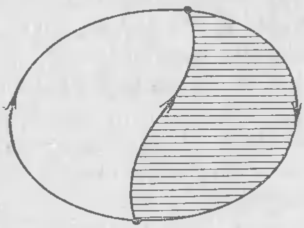


Рис. 59

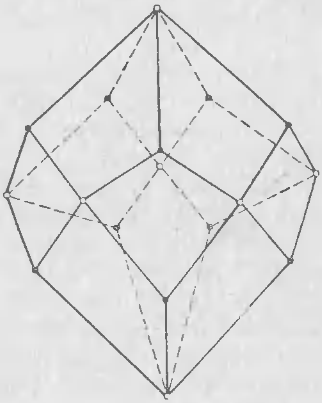


Рис. 60

степени 3, а остальные вершины имеют степень не более 2, то разность между числом черных и белых вершин не превосходит 2. В нашем случае разность между числом черных и белых вершин равна 10—7 = 3. Поэтому найдется вершина степени не менее 4 или 2 вершины степени 3. В обоих случаях число тупиков не менее 4.

8.24. Рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную данной плоскости. Все точки B_i проецируются при этом в одну точку B, а точки $A_1, \ldots, A_n$ — в $C_1, \ldots, C_n$. Так как отношения отрезков, лежащих на одной прямой, при проецировании сохраняются, то

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1}\cdot\frac{A_2B_2}{A_3B_2}\cdots\frac{A_nB_n}{A_1B_n}=\frac{C_1B}{C_2B}\cdot\frac{C_2B}{C_3B}\cdots\frac{C_nB}{C_1B}=1.$$

Данная плоскость разбивает пространство на две части. Идя из вершины A_i в A_{i+1}, мы переходим из одной части пространства в другую, только если точка B_i лежит на стороне A_iA_{i+1}. Так как, совершив обход многоугольника, мы вернемся в исходную часть пространства, то число точек B_i, лежащих на сторонах многоугольника, четно.

8.25. Пусть a, b, c и d — векторы, параллельные данным прямым. Так как любые три вектора в пространстве, не лежащие в одной плоскости, образуют базис, то существуют такие ненулевые числа α, β и γ, что $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$. Векторы $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ являются сторонами искомого четырехугольника Пусть теперь $\alpha_1\mathbf{a}$, $\beta_1\mathbf{b}$, $\gamma_1\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — векторы сторон другого такого четырехугольника. Тогда $\alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} + \gamma_1\mathbf{c} + \mathbf{d} = 0 = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \mathbf{d}$, т. е. $(\alpha_1 - \alpha)\mathbf{a} + (\beta_1 - \beta)\mathbf{b} + (\gamma_1 - \gamma)\mathbf{c} = 0$. Так как векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не лежат в одной плоскости, то $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ и $\gamma = \gamma_1$.

8.26. а) Фиксируем один из векторов сторон. За ним может следовать любой из трех оставшихся векторов, а за ним — любой из двух оставшихся. Поэтому всего различных четырехугольников ровно 6.

б) Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — данные векторы сторон. Рассмотрим параллелепипед, задаваемый векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (рис. 61); его диагональю служит вектор $\mathbf{d}$. Несложный перебор показывает, что все 6 различных четырехугольников содержатся среди четырехугольников, сторонами которых являются ребра этого параллелепипеда и его диагональ d (фиксировать при переборе удобно вектор $\mathbf{d}$). Объем каждого соответствующего тетраэдра составляет 1/6 часть объема параллелепипеда.

8.27. В треугольниках ABC и CDA равны стороны AB и CD и углы B и D, а сторона AC у них общая. Если $\triangle ABC = \triangle CDA$, то $AC \perp BD$. Рассмотрим теперь случай, когда эти треугольники не равны. Возьмем на луче BA точку P так, что $\triangle CBP = \triangle CDA$, т. е. $CP = CA$ (рис. 62). Она может не совпасть с точкой A, только если $\angle ABC < \angle APC = \angle BAC$, т. е. $\alpha < 60°$. В этом случае $\angle ACD = \angle PCB = (90° - \alpha/2) - \alpha = 90° - 3\alpha/2$. Следовательно, $\angle ACD + \angle DCB = (90° - 3\alpha/2) + \alpha = 90° - \alpha/2 = \angle ACB$. Поэтому точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, причем точка D лежит внутри угла ACB. Так как $\triangle ABC = \triangle DCB$ и эти треугольники равнобедренные, то угол между прямыми AC и BD равен α.

Итак, если $\alpha \geqslant 60°$, то $AC \perp BD$, а если $\alpha < 60°$, то либо $AC \perp BD$, либо угол между прямыми AC и BD равен α.

8.28. Пусть $\overrightarrow{A_iX_i} = \lambda\overrightarrow{A_iB_i}$. Достаточно проверить, что при $\lambda = 1 \pm 1/\sqrt{5}$ стороны пятиугольника $X_1 \ldots X_5$ параллельны противоположным диагоналям. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ — векторы сторон $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_5A_1}$. Тогда $\overrightarrow{A_1X_1} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}/2)$, $\overrightarrow{A_1X_2} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}/2)$, $\overrightarrow{A_1X_3} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{e}/2)$, $\overrightarrow{A_1X_4} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \lambda(\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{a}/2)$ и $\overrightarrow{A_1X_5} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \lambda(\mathbf{e} + \mathbf{a} + \mathbf{b}/2)$. Поэтому $\overrightarrow{X_1X_3} = \overrightarrow{A_1X_3}\,\overrightarrow{A_1X_1} = (1 - \lambda)\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{d} + (\lambda/2)(\mathbf{c} + \mathbf{e}) =$

$= (1 - 3\lambda/2)\mathbf{a} + (1 - 3\lambda/2)\mathbf{b} + (\lambda/2)\mathbf{d}$, $\overrightarrow{X_4X_5} = \overrightarrow{A_1X_5} - \overrightarrow{A_1X_4} = (\lambda/2)\mathbf{a} + (\lambda/2)\mathbf{b} + (1 - \lambda)\mathbf{d}$. Значит, $X_1X_3 \| X_4X_5$ тогда и только тогда, когда $(2 - 3\lambda)/\lambda = \lambda/(2 - 2\lambda)$, т. е. $5\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$. Это уравнение имеет корни $1 \pm 1/\sqrt{5}$.

8.29. Первое решение. Предположим, что данный пятиугольник $A_1 \dots A_5$ не плоский. Выпуклая оболочка его

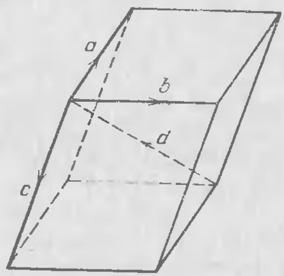


Рис. 61

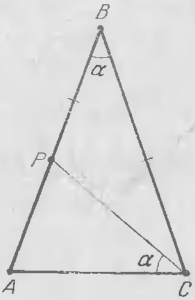


Рис. 62

вершин либо является четырехугольной пирамидой, либо состоит из двух тетраэдров с общей гранью. В обоих случаях можно считать, что вершины A_1 и A_4 лежат по одну сторону от плоскости $A_2A_3A_5$ (см. рис. 63). Из условия задачи следует, что диагонали данного пятиугольника равны, поэтому равны тетраэдры $A_4A_2A_3A_5$ и $A_1A_3A_2A_5$. А так как точки A_1 и A_4 лежат

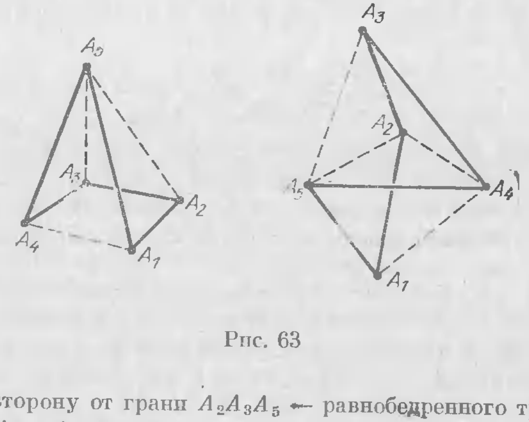


Рис. 63

по одну сторону от грани $A_2A_3A_5$ — равнобедренного треугольника, то A_1 и A_4 симметричны относительно плоскости, проходящей через середину отрезка A_2A_3 перпендикулярно ему. Следовательно, точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат в одной плоскости.

Рассматривая теперь равные (плоские) тетраэдры $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_5A_4A_3$, приходим к противоречию.

Второе решение. Тетраэдры $A_1A_2A_3A_4$ и $A_2A_1A_5A_4$ равны, так как равны их соответствующие ребра. Эти тетраэдры симметричны либо относительно плоскости, проходящей через середину отрезка A_1A_2 перпендикулярно ему, либо относительно прямой A_4M, где M — середина отрезка A_1A_2. В первом случае диагональ A_3A_5 параллельна A_1A_2, поэтому 4 вершины пятиугольника лежат в одной плоскости. Если есть две диагонали с таким свойством, то пятиугольник плоский. Если же есть 4 диагонали со вторым свойством, то две из них выходят из одной вершины, например A_3. Пусть M и K — середины сторон A_1A_2 и A_4A_5, L и N — середины диагоналей A_1A_3 и A_3A_5. Так как отрезок A_3A_5 симметричен относительно прямой A_4M, его середина N принадлежит этой прямой. Поэтому точки A_4, M, N, A_3 и A_5 лежат в одной плоскости; в той же плоскости лежит и середина K отрезка A_4A_5. Аналогично в одной плоскости лежат точки A_2, K, L, A_3, A_1 и M. Следовательно, все вершины пятиугольника лежат в плоскости A_3KM.

8.30. Пусть вписанные окружности S_1 и S_2 треугольников ABC и ADC касаются стороны AC в точках P_1 и P_2 соответственно. Тогда $AP_1 = (AB + AC - BC)/2$ и $AP_2 = (AD + AC - CD)/2$. Так как $AB - BC = AD - CD$ по условию, то $AP_1 = AP_2$, т. е. точки P_1 и P_2 совпадают. Следовательно, окружности S_1 и S_2 принадлежат одной сфере (см. задачу 4.12).

8.31. Пусть сфера касается сторон AB, BC, CD и DA пространственного четырехугольника $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Тогда $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ и $DM = DN$. Поэтому

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN}{AN} = 1.$$

Рассмотрим теперь точку N', в которой плоскость KLM пересекает прямую DA. Воспользовавшись результатом задачи 8.24, получим, что $DN : AN = DN' : AN'$ и точка N' лежит на отрезке AD. Следовательно, $N = N'$, т. е. точка N лежит в плоскости KLM.

8.32. Так как $AN = AK$, то в плоскости DAB существует окружность S_1, касающаяся прямых AD и AB в точках N и K. Аналогично в плоскости ABC существует окружность S_2, касающаяся прямых AB и BC в точках K и L. Докажем, что сфера, содержащая окружности S_1 и S_2,— искомая. Эта сфера касается прямых AD, AB и BC в точках N, K и L (в частности, точки B, C и D лежат вне этой сферы). Остается проверить, что эта сфера касается прямой CD в точке M.

Пусть S_3 — сечение данной сферы плоскостью BCD, DN' — касательная к S_3. Так как $DC = \pm DM \pm MC$, а $DM = DN = DN'$ и $MC = CL$, то длина отрезка DC равна сумме или разности длин касательных, проведенных из точек C и D к окружности S_3. Это означает, что прямая CD касается окружности S_3. В самом деле, пусть $a = d^2 - R^2$, где d — расстояние от центра окружности S_3 до прямой CD и R — радиус S_3; P — основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности S_3 на прямую CD; $x = CP$ и $y = DP$. Тогда длины касательных CL и DN' равны $\sqrt{x^2 + a}$ и $\sqrt{y^2 + a}$. Пусть $|\sqrt{x^2 + a} \pm \sqrt{y^2 + a}| = |x \pm y| \neq 0$. Докажем, что тогда $a = 0$. Возведя обе части в квадрат, получим $\sqrt{(x^2 + a)(y^2 + a)} = \pm xy \pm a$. Еще раз возведя в квадрат, получим $a(x^2 + y^2) = \pm 2axy$. Если $a \neq 0$, то $(x \pm y)^2 = 0$, т. е. $x = \pm y$. Равенство $2|\sqrt{x^2 + a}| = 2|x|$ выполняется, только если $a = 0$.

8.33. а) Введем на прямых AB, BC, CD и DA координаты, взяв в качестве начал координат точки A, B, C и D соответственно, а в качестве положительных направлений — направления лучей AB, BC, CD и DA. В соответствии с результатом задачи 8.32 будем искать на прямых AB, BC, CD и DA такие точки K, L, M и N, что $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ и $DM = DN$, т. е. $\overrightarrow{AK} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{AN} = \alpha\mathbf{x}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{y}$, $\overrightarrow{BK} = \beta\mathbf{y}$, $\overrightarrow{CM} = \mathbf{z}$, $\overrightarrow{CL} = \gamma\mathbf{z}$, $\overrightarrow{DN} = \mathbf{u}$ и $\overrightarrow{DM} = \delta\mathbf{u}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \pm 1$. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}$, то $a = x - \beta y$. Аналогично $b = y - \gamma z$, $c = z - \delta u$ и $d = u - \alpha x$. Следовательно, $u = d + \alpha x$, $z = c + \delta d + \delta\alpha x$, $y = b + \gamma c + \gamma\delta d + \gamma\delta\alpha x$ и $x = a + \beta b + \beta\gamma c + \beta\gamma\delta d + \beta\gamma\delta\alpha x$. Из последнего соотношения получаем $(1 - \alpha\beta\gamma\delta)x = a + \beta b + \beta\gamma c + \beta\gamma\delta d$. Итак, если $1 - \alpha\beta\gamma\delta = 0$, то выполняется соотношение вида $a \pm b \pm c \pm d = 0$; ясно также, что соотношение $a - b - c - d = 0$ выполняться не может. Следовательно, в нашем случае $\alpha\beta\gamma\delta \neq 1$, а значит, $\alpha\beta\gamma\delta = -1$. Числа α, β, $\gamma = \pm 1$ можно задавать произвольно, а число δ определяется этими числами. Всего существует 8 различных наборов чисел α, β, γ, δ, причем для каждого набора существует единственное решение x, y, z, u. Кроме того, все числа x, y, z, u отличны от нуля, поэтому все 8 решений различны.

б) Первое решение. Разберем, например, случай, когда $a + c = b + d$, т. е. $a - b + c - d = 0$. В этом случае следует положить $\beta = -1$, $\beta\gamma = 1$, $\beta\gamma\delta = -1$ и $\alpha\beta\gamma\delta = 1$, т. е. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = -1$. Рассматриваемая в решении задачи а) система уравнений для x, y, z, u имеет бесконечно много решений: $u = d - x$, $z = c - d + x$ и $y = b - c + d - x = a - x$, где число x произвольно.

Остальные случаи разбираются аналогично: если $a + b = c + d$, то $\alpha = \gamma = -1$ и $\beta = \delta = 1$, а если $a + d = b + c$, то $\alpha = \gamma = 1$ и $\beta = \delta = -1$.

Второе решение. В каждом из трех случаев, когда выполняются указанные соотношения, можно построить четырехугольную пирамиду с вершиной B, боковые ребра которой равны и параллельны сторонам данного четырехугольника, основанием является параллелограмм, а суммы длин противоположных ребер равны (см. рис. 64). Поэтому существует луч, с которым

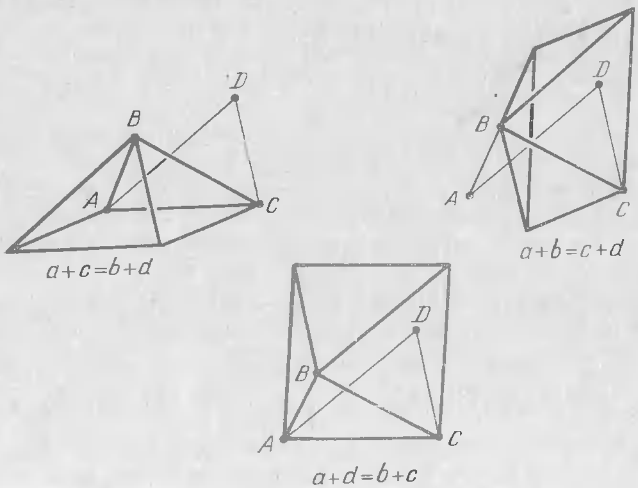


Рис. 64

ребра пирамиды — а значит, и стороны четырехугольника — образуют равные углы (задача 6.63). Пусть плоскость П, перпендикулярная этому лучу, пересекает прямые AB, BC, CD и DA в точках P, Q, R и S, а соответственные боковые ребра пирамиды — в точках P', Q', R' и S'. Так как точки P', Q', R' и S' лежат на одной окружности, а прямые PQ и $P'Q'$, QR и $Q'R'$ и т. д. параллельны, то $\angle(PQ, PS) = \angle(P'Q', P'S') = \angle(R'Q', R'S') = \angle(RQ, RS)$, т. е. точки P, Q, R и S лежат на одной окружности (см. Прасолов, I, с. 36); пусть O — центр этой окружности. Так как прямые AP и AS образуют с плоскостью П равные углы, то $AP = AS$. Следовательно, соответственные стороны треугольников APO и ASO равны, а значит, равны расстояния от точки O до прямых AB и AD. Аналогично доказывается, что точка O равноудалена от всех прямых AB, BC, CD и DA, т. е. сфера с центром O, радиус которой равен расстоянию от точки O

до этих прямых, искомая. Перемещая плоскость Π параллельно, получаем бесконечное множество сфер.

З а м е ч а н и е. Для каждой вершины пространственного четырехугольника $ABCD$ можно рассмотреть две биссекторные плоскости, проходящие через биссектрисы его внешнего и внутреннего угла перпендикулярно им. Ясно, что O — точка пересечения биссекторных плоскостей. По одной прямой пересекаются следующие четверки биссекторных плоскостей: в случае $a + c = b + d$ все 4 внутренние; в случае $a + b = c + d$ — внутренние при вершинах A и C и внешние при вершинах B и D; в случае $a + d = b + c$ — внутренние при вершинах B и D и внешние при вершинах A и C.

Глава 9

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

§ 1. Основные свойства правильных многогранников

Выпуклый многогранный угол называется правильным, если все его плоские углы равны и все двугранные углы тоже равны.

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани и многогранные углы правильные, а кроме того, все грани равны и многогранные углы тоже равны. С точки зрения логики, это определение неудачно — в нем сказано много лишнего. Достаточно было бы потребовать, чтобы грани и многогранные углы были правильными; их равенство уже следовало бы из этого. Но такие детали — не для первого знакомства с правильными многогранниками. (Разбору различных эквивалентных определений правильных многогранников посвящен § 5.)

Имеется всего лишь пять различных правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр; последние три многогранника изображены на рис. 65. Этот рисунок, впрочем, мало о чем говорит — он не может заменить ни

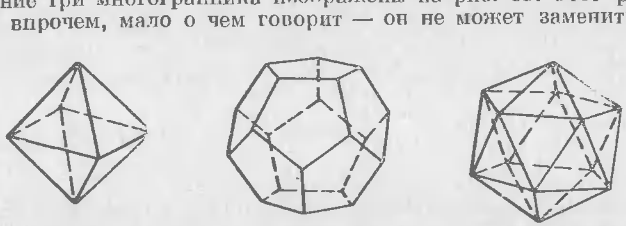


Рис. 65

доказательства того, что других правильных многогранников нет, ни даже доказательства того, что такие правильные многогранники, какие нарисованы, действительно существуют. Все это нужно доказывать.

В одной из дошедших до нашего времени античных книг говорится, что октаэдр и икосаэдр открыл ученик Платона Теэтет (410—368 г. до н. э.), а куб, тетраэдр и додекаэдр были известны пифагорейцам задолго до него. Многие историки математики сомневались в правдивости этих слов; особенное недоверие вызывало то, что октаэдр был открыт позже додекаэдра. Действительно, египетские пирамиды построены в глубокой древности, а соединив мысленно две пирамиды, легко получить октаэдр.

Но более внимательное исследование заставляет поверить словам античной книги. Эти слова вряд ли можно истолковать иначе, чем так: Теэтет выделил класс правильных многогранников, т. е. с какой-то степенью строгости дал их определение, обнаружив тем самым их общее свойство, и доказал, что существует всего лишь 5 различных правильных многогранников. Куб, тетраэдр и додекаэдр привлекали внимание геометров и до Теэтета, но лишь просто как интересные геометрические объекты, а не как правильные многогранники. Интерес к кубу, тетраэдру и додекаэдру подтверждает древнегреческая терминология: у этих многогранников были специальные названия.

Не удивительно, что куб и тетраэдр всегда интересовали геометров; додекаэдр требует пояснений. В природе встречаются кристаллы пирита, близкие по форме к додекаэдру. Сохранился также додекаэдр, непонятно для каких целей изготовленный этрусскими ремесленниками в 500 г. до н. э. Форма додекаэдра несравненно привлекательней и таинственней формы октаэдра. Пифагорейцев додекаэдр должен был заинтриговать еще и потому, что их символом была правильная пятиконечная звезда, естественно вписывающаяся в грани додекаэдра.

При изучении правильных многогранников наибольшие трудности также вызывают именно октаэдр и икосаэдр. Скрепив три правильных треугольника, три квадрата или три правильных пятиугольника и продолжив такое конструирование, в конце концов придем к правильному тетраэдру, кубу или додекаэдру; при этом на каждом шаге получается жесткая конструкция. А для октаэдра и икосаэдра приходится скреплять соответственно четыре и пять треугольников, т. е. начальная конструкция нежесткая.

9.1. Докажите, что не существует никаких других правильных многогранников, кроме перечисленных выше.

9.2. Докажите, что существует додекаэдр — правильный многогранник с пятиугольными гранями и трехгранными углами при вершинах.

9.3. Докажите, что все углы между не параллельными гранями додекаэдра равны.

9.4. Докажите, что существует икосаэдр — правильный многогранник с треугольными гранями и пятигранными углами при вершинах.

9.5. Докажите, что для любого правильного многогранника существует:

а) сфера, проходящая через все его вершины (описанная сфера);

б) сфера, касающаяся всех его граней (вписанная сфера).

9.6. Докажите, что центр описанной сферы правильного многогранника является его центром масс (т. е. центром масс системы точек с единичными массами, расположенными в его вершинах).

Центр описанной сферы правильного многогранника, совпадающий с центром вписанной сферы и с центром масс, называется *центром* правильного многогранника.

§ 2. Взаимосвязи между правильными многогранниками

9.7. а) Докажите, что можно выбрать 4 вершины куба так, что они будут вершинами правильного тетраэдра. Сколькими способами можно это сделать?

б) Докажите, что можно выбрать 4 плоскости граней октаэдра так, что они будут плоскостями граней правильного тетраэдра. Сколькими способами можно это сделать?

9.8. Докажите, что на ребрах куба можно выбрать 6 точек так, что они будут вершинами октаэдра.

9.9. а) Докажите, что можно выбрать 8 вершин додекаэдра так, что они будут вершинами куба. Сколькими способами можно это сделать?

б) Докажите, что можно выбрать 4 вершины додекаэдра так, что они будут вершинами правильного тетраэдра.

9.10. а) Докажите, что можно выбрать 8 плоскостей граней икосаэдра так, что они будут плоскостями граней октаэдра. Сколькими способами можно это сделать?

б) Докажите, что можно выбрать 4 плоскости граней икосаэдра так, что они будут плоскостями граней правильного тетраэдра.

* * *

9.11. Рассмотрим выпуклый многогранник, вершинами которого являются центры граней некоторого правильного многогранника. Докажите, что этот многогранник тоже является правильным. (Он называется многогранником, *двойственным* исходному.)

9.12. а) Докажите, что тетраэдру двойствен тетраэдр.

б) Докажите, что куб и октаэдр двойственны друг другу.

в) Докажите, что додекаэдр и икосаэдр двойственны друг другу.

9.13. Докажите, что если равны радиусы вписанных сфер двух двойственных друг другу правильных многогранников, то: а) равны радиусы их описанных сфер; б) равны радиусы описанных окружностей их граней.

9.14. Грань додекаэдра и грань икосаэдра лежат в одной плоскости и, кроме того, их противоположные грани тоже лежат в одной плоскости. Докажите, что все остальные вершины додекаэдра и икосаэдра расположены в двух плоскостях, параллельных этим граням.

§ 3. Проекции и сечения правильных многогранников

9.15. Докажите, что проекции додекаэдра и икосаэдра на плоскости, параллельные их граням, являются правильными многоугольниками.

9.16. Докажите, что проекция додекаэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через его центр и середину ребра, является шестиугольником (а не десятиугольником).

9.17. а) Докажите, что проекция икосаэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через его центр и вершину, является правильным 10-угольником.

б) Докажите, что проекция додекаэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через его центр и вершину, является неправильным 12-угольником.

* * *

9.18. Существует ли сечение куба, являющееся правильным шестиугольником?

9.19. Существует ли сечение октаэдра, являющееся правильным шестиугольником?

9.20. Существует ли сечение додекаэдра, являющееся правильным шестиугольником?

9.21. Две грани ABC и ABD икосаэдра имеют общее ребро AB. Через вершину D проводится плоскость, параллельная плоскости ABC. Верно ли, что сечение икосаэдра этой плоскостью является правильным шестиугольником?

§ 4. Самосовмещения правильных многогранников

9.22. Какие правильные многогранники имеют центр симметрии?

9.23. Выпуклый многогранник симметричен относительно некоторой плоскости. Докажите, что она либо проходит через середину его ребра, либо является плоскостью симметрии одного из многогранных углов при вершине.

9.24. а) Докажите, что для любого правильного многогранника плоскости, проходящие через середины его ребер перпендикулярно им, являются плоскостями симметрии.

б) У каких правильных многогранников есть еще и другие плоскости симметрии?

9.25. Найдите число плоскостей симметрии каждого из правильных многогранников.

9.26. Докажите, что любая ось вращения правильного многогранника проходит через его центр и либо вершину, либо середину ребра, либо центр грани.

9.27. а) Сколько осей симметрии имеет каждый из правильных многогранников?

б) Сколько других осей вращения имеет каждый из них?

9.28. Сколько самосовмещений (т. е. движений, переводящих многогранник в себя) имеется для каждого из правильных многогранников?

§ 5. Различные определения правильных многогранников

9.29. Докажите, что если все грани выпуклого многогранника — равные правильные многоугольники, а все его двугранные углы равны, то этот многогранник правильный.

9.30. Докажите, что если все многогранные углы выпуклого многогранника правильные, а все грани — правильные многоугольники, тот этот многогранник правильный.

9.31. Докажите, что если все грани выпуклого многогранника — правильные многоугольники, а концы ребер, выходящих из каждой вершины, образуют правильный многоугольник, то этот многогранник правильный.

* * *

9.32. Обязательно ли является правильным выпуклый многогранник, у которого равны все грани и все многогранные углы?

9.33. Обязательно ли является правильным выпуклый многогранник, у которого равны: а) все ребра и все двугранные углы; б) все ребра и все многогранные углы?

Решения

9.1. Рассмотрим произвольный правильный многогранник. Пусть все его грани — правильные n-угольники, а все многогранные углы содержат по m граней. Каждое ребро соединяет две вершины, а из каждой вершины выходит m ребер. Поэтому $2Р = mВ$. Аналогично каждое ребро принадлежит двум граням, а каждой грани принадлежит n ребер. Поэтому $2Р = nГ$. Подставив эти выражения в формулу Эйлера $В - Р + Г = 2$ (см. задачу 8.14), получим $\frac{2}{m}Р - Р + \frac{2}{n}Р = 2$, т. е. $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{Р} > \frac{1}{2}$. Следовательно, либо $n < 4$, либо $m < 4$. Таким образом, одно из чисел m и n равно 3; обозначим другое число через x. Теперь нужно найти все целочисленные решения уравнения $\frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{Р}$. Ясно, что $x = 6\frac{Р}{Р+6} < 6$, т. е. $x = 3, 4, 5$. Следовательно, имеется лишь 5 различных пар чисел (m, n):

1. (3, 3); соответствующий многогранник — тетраэдр, у него 6 ребер, 4 грани и 4 вершины;

2. (3, 4); соответствующий многогранник — куб, у него 12 ребер, 6 граней и 8 вершин;

3. (4, 3); соответствующий многогранник — октаэдр, у него 12 ребер, 8 граней и 6 вершин;

4. (3, 5); соответствующий многогранник — додекаэдр, у него 30 ребер, 12 граней и 20 вершин;

5. (5, 3); соответствующий многогранник — икосаэдр, у него 30 ребер, 20 граней и 12 вершин.

Число ребер, граней и вершин здесь вычислялось по формулам $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{Р}$, $Г = \frac{2}{n}Р$ и $В = \frac{2}{m}Р$.

З а м е ч а н и е. Многогранники каждого описанного выше типа определены однозначно с точностью до подобия. В самом деле, преобразованием подобия можно совместить пару граней двух многогранников одного типа так, чтобы многогранники лежали по одну сторону от плоскости совмещенных граней. Если многогранные углы равны, то многогранники, как легко убедиться, совпадут. Равенство многогранных углов очевидно в случае трехгранных углов, т. е. для тетраэдра, куба и додекаэдра. А для октаэдра и икосаэдра можно совместить двойственные им многогранники, поэтому равны и исходные многогранники (см. задачи 9.5, 9.11 и 9.12).

9.2. Доказательство будет основано на свойствах фигуры, состоящей из трех одинаковых правильных пятиугольников с общей вершиной, каждые два из которых имеют общее ребро. В решении задачи 7.33 доказано, что выделенные на рис. 53 отрезки образуют прямой трехгранный угол, т. е. рассматриваемую фигуру можно так приложить к кубу, что эти отрезки совпадут с его ребрами, выходящими из одной вершины (рис. 66). Докажем, что полученную фигуру можно достроить до додекаэдра с помощью симметрий относительно плоскостей, параллельных граням куба и проходящих через его центр.

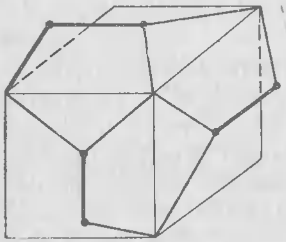
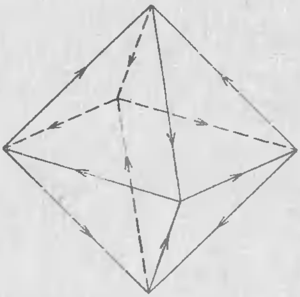


Рис. 66

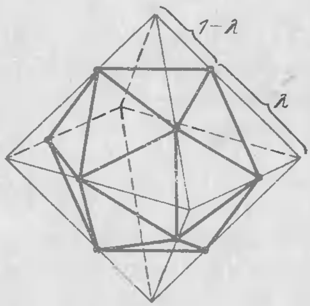
Стороны пятиугольника, параллельные ребрам куба, симметричны относительно указанных плоскостей. Кроме того, расстояния от каждой из этих сторон до той грани куба, с которой она соединена тремя отрезками, равны (они равны $\sqrt{a^2 - b^2}$, где a — длина отрезка, соединяющего вершину правильного пятиугольника с серединой соседней стороны, b — половина диагонали грани куба). Следовательно, с помощью указанных симметрий рассматриваемую фигуру действительно можно достроить до некоторого многогранника. Остается доказать, что этот многогранник правильный, т. е. двугранные углы при ребрах p_i, выходящих из вершин куба, равны двугранным углам при ребрах q_j, параллельных граням куба. Рассмотрим для этого симметрию относительно плоскости, проходящей через середину ребра p_i перпендикулярно ему. При этой симметрии ребро q_j, выходящее из второго конца ребра p_i и параллельное грани куба, переходит в ребро p_k, выходящее из вершины куба.

9.3. Для смежных граней это утверждение очевидно. Если Γ_1 и Γ_2 — несмежные грани додекаэдра, то грань, параллельная Γ_1, будет смежной с Γ_2.

9.4. Икосаэдр будем строить, располагая его вершины на ребрах октаэдра. Расставим на ребрах октаэдра стрелки так, как это показано на рис. 67, *а*. Теперь поделим все ребра в одном и том же отношении $\lambda : (1 - \lambda)$, учитывая при этом их ориентацию. Полученные точки являются вершинами выпуклого многогранника с треугольными гранями и пятигранными углами при вершинах (рис. 67, *б*). Поэтому достаточно подобрать λ так, чтобы этот многогранник был правильным. У него есть два типа ребер — принадлежащие граням октаэдра и не принадлежащие им. Квадрат длины любого ребра, принадлежащего грани октаэдра, равен $\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 - 2\lambda(1 - \lambda)\cos 60^\circ = 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$, а квадрат длины любого ребра, не принадлежащего грани октаэдра, равен $2(1 - \lambda)^2 = 2 - 4\lambda + 2\lambda^2$ (при доказательстве последнего равенства нужно учесть, что угол между несоседними ребрами октаэдра, выходящими из одной вершины, равен 90°).



а



б

Рис. 67

Таким образом, если $3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 2 - 4\lambda + 2\lambda^2$, т. е. $\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (отрицательный корень мы отбросили), то все грани полученного многогранника являются правильными треугольниками. Остается доказать, что равны все двугранные углы при его ребрах. Это легко следует из того, что (для любого λ) вершины полученного многогранника равноудалены от центра октаэдра, т. е. лежат на одной сфере.

9.5. Проведем через центры всех граней перпендикуляры к ним. Легко убедиться, что для двух соседних граней такие перпендикуляры пересекаются в одной точке, причем она удалена от каждой грани на расстояние $a \operatorname{ctg} \varphi$, где a — расстояние от центра грани до ее сторон, а φ — половина двугранного угла между гранями многогранника. Для этого нужно рассмотреть сечение, проходящее через центры двух соседних граней и середину их общего ребра (рис. 68). Таким образом, на каждом нашем перпендикуляре можно отметить точку, причем для соседних граней эти точки совпадают. Следовательно, все эти перпендикуляры имеют общую точку O.

Ясно, что расстояние от точки O до каждой вершины многогранника равно $a/\cos \varphi$, а до каждой грани—$a \operatorname{ctg} \varphi$, т. е. точка

O является как центром описанной, так и центром вписанной сферы.

9.6. Нужно доказать, что сумма векторов, соединяющих центр описанной сферы правильного многогранника с его вершинами, равна нулю. Обозначим эту сумму векторов через x. При любом повороте, совмещающем многогранник с самим собой, центр описанной сферы остается на месте, и поэтому вектор x переходит в себя. Но ненулевой вектор может переходить в себя лишь при повороте вокруг оси, праллельной ему. Остается заметить, что у любого правильного многогранника есть несколько осей, повороты вокруг которых переводят его в самого себя.

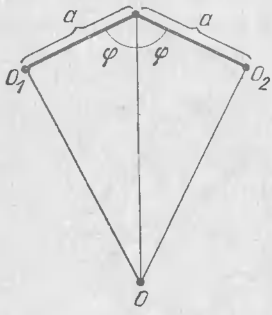


Рис. 68

9.7. а) Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то AB_1CD_1 и A_1BC_1D — правильные тетраэдры.

б) Легко проверить, что середины ребер правильного тетраэдра являются вершинами октаэдра. Из этого видно, что можно выбрать 4 грани октаэдра так, чтобы они были плоскостями граней правильного тетраэдра, причем сделать это можно двумя способами.

9.8. Пусть ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $4a$. Возьмем на ребрах, выходящих из вершины A, точки, удаленные от нее на расстояние $3a$. Аналогично возьмем 3 точки на ребрах, выходящих из вершины C_1. Используя равенство $3^2 + 3^2 = 1 + 4^2 + 1$, легко проверить, что длины всех ребер многогранника с вершинами в выбранных точках равны $3\sqrt{2}\,a$.

9.9. а) Из решения задачи 9.2 видно, что существует куб, вершины которого находятся в вершинах додекаэдра. При этом на каждой грани додекаэдра расположено одно ребро куба. Ясно также, что выбор в качестве ребра куба любой из пяти диагоналей некоторой грани додекаэдра однозначно задает весь куб. Поэтому имеется 5 различных кубов с вершинами в вершинах додекаэдра.

б) Расположив куб так, что его вершины находятся в вершинах додекаэдра, можно затем расположить правильный тетраэдр так, что его вершины находятся в вершинах этого куба.

9.10. а) Из решения задачи 9.4 видно, что можно выбрать 8 граней икосаэдра так, что они будут гранями октаэдра. При этом из каждой вершины икосаэдра выходит ровно одно ребро, не лежащее в плоскости грани октаэдра. Ясно также, что выбор любого из пяти ребер, выходящих из некоторой вершины икосаэдра, в качестве ребра, не принадлежащего плоскости грани октаэдра, однозначно задает октаэдр. Поэтому имеется 5 различных октаэдров, плоскости граней которых проходят через грани икосаэдра.

б) Выбрав 8 плоскостей граней икосаэдра так, что они являются плоскостями граней октаэдра, из них можно выбрать 4 плоскости так, что они являются плоскостями граней правильного тетраэдра.

9.11. При повороте относительно прямой, соединяющей вершину исходного многогранника с его центром, переводящем многогранник в себя, центры граней, прилегающих к этой вершине, переходят в себя, т. е. они являются вершинами правильного многогранника. Аналогично, рассматривая поворот относительно прямой, соединяющей центр грани исходного многогранника с его центром, получаем, что многогранные углы двойственного многогранника правильные. Так как движением можно совместить любые два многогранных угла исходного многогранника, все грани двойственного многогранника равны. А так как можно совместить любые две грани исходного многогранника, равны все многогранные углы двойственного многогранника.

9.12. Для доказательства достаточно заметить, что если у исходного многогранника m-гранные углы при вершинах и n-угольные грани, то у двойственного ему многогранника будут n-гранные углы при вершинах и m-угольные грани.

З а м е ч а н и е. Решения задач 9.2 и 9.4 фактически являются двумя разными решениями одной и той же задачи. В самом деле, если существует додекаэдр, то существует двойственный ему многогранник — икосаэдр (и наоборот).

9.13. а) Пусть O — центр исходного многогранника, A — одна из его вершин, B — центр одной из граней с вершиной A. Рассмотрим грань двойственного многогранника, образованного центрами граней исходного многогранника, прилегающего к вершине A. Пусть C — центр этой грани, т. е. точка пересечения этой грани с прямой OA. Ясно, что $AB \perp OB$ и $BC \perp OA$. Поэтому $OC : OB = OB : OA$, т. е. $r_2 : R_2 = r_1 : R_1$, где r_1 и R_1 (соответственно r_2 и R_2) — радиусы вписанной и описанной сфер исходного многогранника (соответственно двойственного ему многогранника).

б) Если плоскость удалена на расстояние r от центра сферы радиуса R, то она высекает на ней окружность радиуса $\sqrt{R^2 - r^2}$. Поэтому радиус описанных окружностей граней многогранника, вписанного в сферу радиуса R и описанного около сферы радиуса r, равен $\sqrt{R^2 - r^2}$. В частности, если у двух многогранников R и r равны, то равны и радиусы описанных окружностей их граней.

9.14. Если додекаэдр и икосаэдр вписаны в одну сферу, то радиусы их вписанных сфер равны (задача 9.13,а), т. е. равны расстояния между их противоположными гранями. Будем называть «центром сферической грани» додекаэдра (или икосаэдра) точку пересечения описанной сферы с прямой, проходящей через его центр и центр одной из граней. Фиксируем один из центров сферических граней додекаэдра и рассмотрим расстояния от него до вершин; среди этих расстояний ровно 4 различных. Для решения задачи достаточно доказать, что этот набор из четырех различных расстояний совпадает с таким же набором для икосаэдра.

Легко проверить, что центры сферических граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра, а центры сферических граней полученного икосаэдра являются вершинами исходного додекаэдра. Поэтому любое расстояние между центром сферической грани и вершиной додекаэдра является расстоянием между вершиной и центром сферической грани икосаэдра.

9.15. Для доказательства достаточно заметить, что эти многогранники переходят в себя при повороте, совмещающем проекцию верхней грани с проекцией нижней грани. Таким образом, проекция додекаэдра является 10-угольником, переходящим в себя при повороте на 36° (рис. 69, *а*), а проекция икосаэдра является шестиугольником, переходящим в себя при повороте на 60° (рис. 69, *б*).

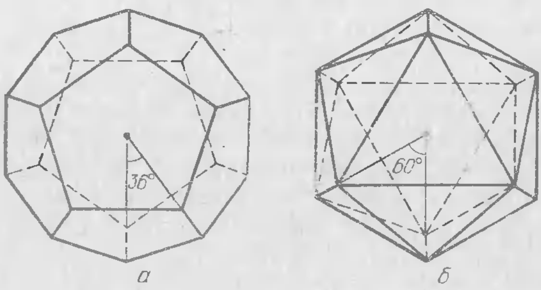


Рис. 69

9.16. Рассмотрим куб, вершины которого расположены в вершинах додекаэдра (см. задачу 9.2). В нашей задаче речь идет о проекции на плоскость, параллельную грани этого куба. Теперь легко убедиться, что проекцией додекаэдра действительно является шестиугольник (рис. 70).

9.17. а) Рассматриваемая проекция икосаэдра переходит в себя при повороте на 36° (при этом проекции верхних граней переходят в проекции нижних граней). Следовательно, она является правильным 10-угольником (рис. 71, *а*).

б) Рассматриваемая проекция додекаэдра является 12-угольником, переходящим в себя при повороте на 60° (рис. 71, *б*). Половина его сторон является проекциями ребер, параллельных плоскости проекции, а другая половина сторон — проекциями ребер, не параллельных плоскости проекции. Следовательно, этот 12-угольник неправильный.

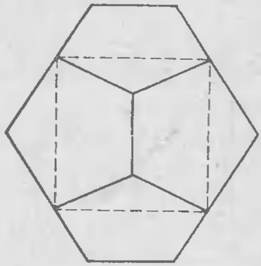
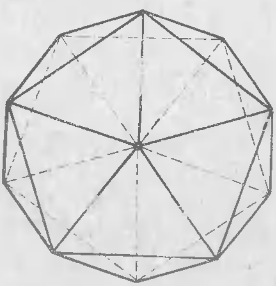


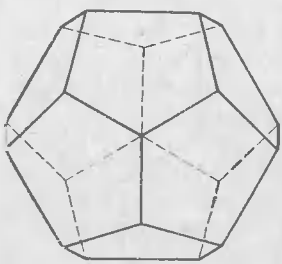
Рис. 70

9.18. Существует. Середины указанных на рис. 72 ребер куба являются вершинами правильного шестиугольника. Это следует из того, что стороны этого шестиугольника параллельны сторонам правильного треугольника PQR, а их длины вдвое меньше длин сторон этого треугольника.

9.19. Существует. Проведем плоскость, параллельную двум противоположным граням октаэдра и равноудаленную от них. Легко проверить, что сечение этой плоскостью будет правильным шестиугольником (на рис. 73 изображена проекция на секущую плоскость).



а



б

Рис. 71

9.20. Существует. Возьмем три пятиугольные грани с общей вершиной A и рассмотрим сечение плоскостью, пересекающей эти грани и параллельной плоскости, в которой лежат три попарно общие вершины рассматриваемых граней (рис. 74). Это сечение является шестиугольником с попарно параллельными противоположными сторонами. При повороте на 120°

относительно оси, проходящей через вершину A и перпендикулярной секущей плоскости, додекаэдр и секущая плоскость переходят в себя. Поэтому сечение является выпуклым шестиугольником с углами 120°, длины сторон которого, чередуясь, принимают два значения. Для того чтобы этот шестиугольник

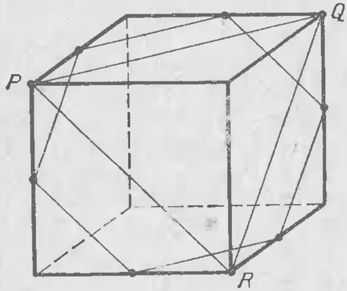


Рис. 72

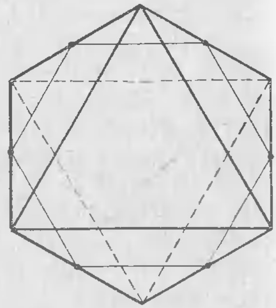


Рис. 73

был правильный, достаточно, чтобы эти два значения были равны. Когда секущая плоскость движется от одного своего крайнего положения до другого, удаляясь от вершины A, первое из этих значений возрастает от 0 до d, а второе убывает от d до a, где a — длина ребра додекаэдра, d — длина диагонали грани ($d > a$). Поэтому в некоторый момент эти значения равны, т. е. сечение является правильным шестиугольником.

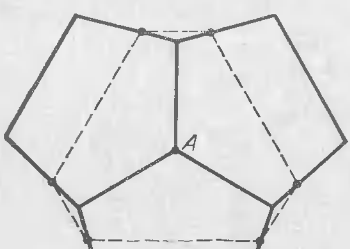


Рис. 74

9.21. Нет, не верно. Рассмотрим проекцию икосаэдра на плоскость ABC. Она является правильным шестиугольником (см. задачу 9.15 и рис. к ней). Поэтому рассматриваемое сечение было бы правильным шестиугольником, лишь если бы все 6 вершин, соединенных ребрами с точками A, B и C (и отличных от A, B и C), лежали в одной плоскости. Но, как легко убедиться, это неверно (иначе получилось бы, что все вершины икосаэдра расположены на трех параллельных плоскостях).

9.22. Легко проверить, что все правильные многогранники, кроме тетраэдра, имеют центр симметрии.

9.23. Плоскость симметрии разрезает многогранник на две части, поэтому она пересекает хотя бы одно ребро. Рассмотрим два случая.

1. Плоскость симметрии проходит через вершину многогранника. Тогда она является плоскостью симметрии многогранного угла при этой вершине.

2. Плоскость симметрии проходит через неконцевую точку ребра. Тогда это ребро переходит в себя при симметрии относительно этой плоскости, т. е. плоскость проходит через середину ребра перпендикулярно ему.

9.24. а) Для тетраэдра, куба и октаэдра утверждение задачи очевидно. Для додекаэдра и икосаэдра нужно воспользоваться решениями задач 9.2 и 9.4 соответственно. Для додекаэдра при этом удобно рассмотреть плоскость, проходящую через середину ребра, параллельного грани куба, а для икосаэдра — плоскость, проходящую через середину ребра, не лежащего в плоскости грани октаэдра.

б) Нужно выяснить, для каких многогранных углов правильных многогранников существуют плоскости симметрии, не проходящие через середины ребер. Любая плоскость симметрии многогранных углов тетраэдра, додекаэдра и икосаэдра проходит через середины ребер. У куба и октаэдра есть плоскости симметрии многогранных углов, не проходящие через середины ребер. Эти плоскости проходят через пары противоположных ребер.

9.25. Сначала рассмотрим плоскости симметрии, проходящие через середины ребер перпендикулярно им. Нужно выяснить, через сколько середин сразу проходит такая плоскость. Легко проверить, что для тетраэдра каждая плоскость проходит через середину одного ребра, для октаэдра, додекаэдра и икосаэдра — через середины двух ребер, а для куба — через середины четырех ребер. Поэтому число таких плоскостей для тетраэдра равно 4, для куба — $12/4 = 3$, для октаэдра — $12/2 = 6$, для додекаэдра и икосаэдра — $30/2 = 15$.

У куба и октаэдра есть еще и другие плоскости симметрии, проходящие через пары противоположных ребер, причем для куба такая плоскость проходит через 2 ребра, а для октаэдра — через 4. Поэтому число таких плоскостей для куба равно $12/2 = 6$, а для октаэдра — $12/4 = 3$. Всего у куба и октаэдра по 9 плоскостей симметрии.

9.26. Ось вращения пересекает поверхность многогранника в двух точках. Рассмотрим одну из них. Возможны три варианта.

1. Точка является вершиной многогранника.

2. Точка принадлежит ребру многогранника, но не является вершиной. Тогда это ребро переходит в себя при некотором повороте относительно нее. Следовательно, эта точка является серединой ребра, причем угол поворота равен 180°.

3. Точка принадлежит грани многогранника, но не принадлежит ребру. Тогда эта грань переходит в себя при некотором повороте относительно нее. Следовательно, эта точка является центром грани.

9.27. а) Для каждого правильного многогранника прямые, проходящие через середины противоположных ребер, являются их осями симметрии. В тетраэдре таких осей 3, в кубе и октаэдре — 6, в додекаэдре и икосаэдре — 15. Кроме того, в кубе осями симметрии являются прямые, проходящие через центры граней, а в октаэдре — прямые, проходящие через вершины; таких осей у них по 3.

б) Прямая называется осью вращения n-го порядка (для данной фигуры), если при повороте на угол $\frac{2\pi}{n}$ фигура переходит в себя.

Прямые, проходящие через вершины и центры граней тетраэдра, являются осями третьего порядка; этих осей 4.

Прямые, проходящие через пары вершин куба, являются осями третьего порядка; этих осей 4. Прямые, проходящие через пары центров граней куба, являются осями четвертого порядка; этих осей 3.

Прямые, проходящие через пары центров граней октаэдра, являются осями третьего порядка; этих осей 4. Прямые, проходящие через пары вершин октаэдра, являются осями четвертого порядка; этих осей 3.

Прямые, проходящие через пары вершин додекаэдра, являются осями третьего порядка; этих осей 10. Прямые, проходящие через пары центров граней додекаэдра, являются осями пятого порядка; этих осей 6.

Прямые, проходящие через пары центров граней икосаэдра, являются осями третьего порядка; этих осей 10. Прямые, проходящие через пары вершин икосаэдра, являются осями пятого порядка; этих осей 6.

9.28. Любую грань правильного многогранника можно перевести движением в любую другую. Если грани многогранника n-угольные, то имеется ровно $2n$ самосовмещений, сохраняющих одну из граней: n поворотов и n симметрий относительно плоскостей. Поэтому число самосовмещений (включая тождественное преобразование) равно $2n\Gamma$.

Число самосовмещений тетраэдра равно 24, куба и октаэдра — 48, додекаэдра и икосаэдра — 120.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно показать, что число самосовмещений правильного многогранника равно удвоенному произведению числа его вершин на число граней его многогранных углов.

9.29. Нужно доказать, что равны все многогранные углы нашего многогранника. Но его двугранные углы равны по условию, а плоские углы являются углами равных многоугольников.

9.30. Нужно доказать, что все грани равны и многогранные углы тоже равны. Докажем сначала равенство граней. Рассмотрим все грани, сходящиеся в некоторой вершине. Многогранный угол при этой вершине правильный, поэтому равны все его плоские углы, а значит, равны углы рассматриваемых правильных многоугольников. Кроме того, все стороны правильных многоугольников, имеющих общую сторону, равны. Следовательно, все рассматриваемые многоугольники равны, а значит, равны и все грани многогранника.

Докажем теперь равенство многогранных углов. Рассмотрим все многогранные углы при вершинах одной из граней. Одним из плоских углов каждого из них является угол этой грани, поэтому все плоские углы рассматриваемых многогранных углов равны. Кроме того, многогранные углы, вершинами которых являются концы одного ребра, имеют общий двугранный угол, поэтому равны все их двугранные углы. Следовательно, все рассматриваемые многогранные углы равны, а значит, равны и все многогранные углы нашего многогранника.

9.31. Нужно доказать, что все многогранные углы нашего многогранника правильные. Рассмотрим концы всех ребер, выходящих из некоторой вершины. Как следует из условия задачи, многогранник с вершинами в этих точках и точке A является пирамидой, основание которой — правильный многоугольник, причем все ребра пирамиды равны. Поэтому точка A принадлежит пересечению плоскостей, проходящих через середины сторон основания перпендикулярно им, т. е. она лежит на перпендикуляре к основанию, проходящему через его центр. Следовательно, пирамида правильная, а значит, многогранный угол при ее вершине правильный.

9.32. Нет, не обязательно. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отличный от куба. В тетраэдре AB_1CD_1 все грани и все трехгранные углы равны, но он не является правильным.

9.33. Нет, не обязательно. Рассмотрим выпуклый многогранник, вершинами которого являются середины ребер куба. Легко проверить, что у этого многогранника равны все ребра, все двугранные углы и все многогранные углы.

Глава 10

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Длины, периметры

10.1. Пусть a, b и c — длины сторон параллелепипеда, d — одна из его диагоналей. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant d^2/3$.

10.2. Дан куб с ребром 1. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до всех его вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

10.3. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине A равны 60°. Докажите, что $AB + AC + AD \leqslant BC+CD+DB$.

10.4. Из точек A_1, A_2 и A_3, лежащих на прямой a, опущены перпендикуляры A_iB_i на прямую b. Докажите, что если точка A_2 лежит между A_1 и A_3, то длина отрезка A_2B_2 заключена между длинами отрезков A_1B_1 и A_3B_3.

10.5. Внутри выпуклого многогранника находится отрезок. Докажите, что его длина не превосходит длины наибольшего отрезка с концами в вершинах многогранника.

10.6. Пусть P — проекция точки M на плоскость, содержащую точки A, B и C. Докажите, что если из отрезков PA, PB и PC можно составить треугольник, то из отрезков MA, MB и MC тоже можно составить треугольник.

10.7. Внутри выпуклого многогранника взяты точки P и Q. Докажите, что одна из вершин многогранника менее удалена от Q, чем от P.

10.8. Точка O расположена внутри тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин отрезков OA, OB, OC и OD не превосходит суммы длин ребер тетраэдра.

10.9. Внутри куба с ребром 1 расположено несколько отрезков, причем любая плоскость, параллельная одной из граней куба, пересекает не более одного отрезка. Докажите, что сумма длин этих отрезков не превосходит 3.

10.10. Замкнутая ломаная проходит по поверхности куба с ребром 1 и имеет общие точки со всеми его гранями. Докажите, что ее длина не меньше $3\sqrt{2}$.

10.11. Тетраэдр, вписанный в сферу радиуса R, содержит ее центр. Докажите, что сумма длин его ребер больше $6R$.

10.12. Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что периметр этого четырехугольника заключен между $2a$ и $3a$, где a — длина ребра тетраэдра.

§ 2. Углы

10.13. Докажите, что сумма углов пространственного четырехугольника не превосходит $360°$.

10.14. Докажите, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше $180°$.

10.15. Точка O лежит на основании треугольной пирамиды $SABC$. Докажите, что сумма углов между лучом SO и боковыми ребрами меньше суммы плоских углов при вершине S и больше половины этой суммы.

10.16. а) Докажите, что сумма углов между ребрами трехгранного угла и плоскостями противолежащих им граней не превосходит суммы его плоских углов.

б) Докажите, что если двугранные углы трехгранного угла острые, то сумма углов между его ребрами и плоскостями противолежащих им граней не меньше полусуммы его плоских углов.

10.17. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

10.18. Все плоские углы выпуклого четырехгранного угла равны $60°$. Докажите, что углы между его противоположными ребрами не могут быть одновременно острыми или одновременно тупыми.

10.19. Докажите, что сумма углов, под которыми видны ребра тетраэдра из произвольной точки, лежащей внутри его, больше 3π.

10.20. а) Докажите, что сумма двугранных углов при четырех ребрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ меньше 2π.

б) Докажите, что сумма двугранных углов тетраэдра заключена между 2π и 3π.

10.21. Пространство полностью покрыто конечным набором прямых круговых конусов (бесконечных в одну сторону) с углами раствора $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Докажите, что $\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2 \geqslant 16$.

§ 3. Площади

10.22. Докажите, что площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трех остальных его граней.

10.23. Один выпуклый многогранник лежит внутри другого. Докажите, что площадь поверхности внешнего многогранника больше площади поверхности внутреннего.

10.24. Докажите, что для любого тетраэдра найдутся две такие плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на них не меньше $\sqrt{2}$.

10.25. а) Докажите, что площадь любого треугольного сечения тетраэдра не превосходит площади одной из его граней.

б) Докажите, что площадь любого четырехугольного сечения тетраэдра не превосходит площади одной из его граней.

10.26. Плоскость, касающаяся вписанной в куб сферы, отсекает от него треугольную пирамиду. Докажите, что площадь поверхности этой пирамиды не превосходит площади грани куба.

§ 4. Объемы

10.27. На каждом ребре тетраэдра отмечено по одной точке. Рассмотрим четыре тетраэдра, одна из вершин каждого из которых является вершиной исходного тетраэдра, а остальные его вершины — отмеченные точки, лежащие на ребрах, выходящих из этой вершины. Докажите, что объем одного из них не превосходит одной восьмой объема исходного тетраэдра.

10.28. Длины пяти ребер тетраэдра не превосходят 1. Докажите, что его объем не превосходит 1/8.

10.29. Объем выпуклого многогранника равен V, а площадь поверхности S.

а) Докажите, что если внутри его расположена сфера радиуса r, то $V/S \geqslant r/3$.

б) Докажите, что внутри его можно расположить сферу радиуса V/S.

в) Один выпуклый многогранник расположен внутри другого. Пусть V_1 и S_1 — объем и площадь поверхности внешнего многогранника, V_2 и S_2 — внутреннего. Докажите, что $3V_1/S_1 \geqslant V_2/S_2$.

10.30. Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую грань куба совпадает с этой гранью. Докажите, что объем многогранника не меньше 1/3 объема куба.

10.31. Площади проекций тела на координатные плоскости равны S_1, S_2 и S_3. Докажите, что его объем не превосходит $\sqrt{S_1S_2S_3}$.

§ 5. Разные задачи

10.32. Докажите, что радиус вписанной окружности любой грани тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы.

10.33. На основании треугольной пирамиды $OABC$ с вершиной O взята точка M. Докажите, что

$$OM \cdot S_{ABC} \leqslant OA \cdot S_{MBC} + OB \cdot S_{MAC} + OC \cdot S_{MAB}.$$

10.34. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной сфер правильной четырехугольной пирамиды. Докажите, что $R/r \geqslant 1 + \sqrt{2}$.

10.35. Можно ли в кубе вырезать отверстие, сквозь которое пройдет куб того же размера?

10.36. Сечения M_1 и M_2 выпуклого центрально симметричного многогранника параллельны, причем M_1 проходит через центр симметрии.

а) Верно ли, что площадь M_1 не меньше площади M_2?

б) Верно ли, что радиус наименьшей окружности, содержащей M_1, не меньше радиуса наименьшей окружности, содержащей M_2?

10.37. Внутри сферы радиуса R находится выпуклый многогранник. Длина его i-го ребра равна l_i, двугранный угол при этом ребре равен φ_i. Докажите, что

$$\sum l_i (\pi - \varphi_i) \leqslant 8\pi R.$$

Задачи для самостоятельного решения

10.38. Треугольник $A'B'C'$ — проекция треугольника ABC. Докажите, что высоты треугольника $A'B'C'$ не превосходят соответствующих высот треугольника ABC.

10.39. Шар вписан в усеченный конус. Докажите, что площадь поверхности шара меньше площади боковой поверхности конуса.

10.40. Наибольший из периметров граней тетраэдра равен d, а сумма длин его ребер равна D. Докажите, что $3d < 2D \leqslant 4d$.

10.41. Внутри тетраэдра $ABCD$ взята точка E. Докажите, что хотя бы один из отрезков AE, BE и CE меньше соответствующего отрезка AD, BD и CD.

10.42. Можно ли внутри правильного тетраэдра с ребром 1 разместить 5 точек так, чтобы попарные расстояния между ними были не меньше 1?

10.43. Трехгранный угол имеет плоские углы α, β и γ. Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \leqslant 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

10.44. В основании пирамиды $ABCDE$ лежит параллелограмм $ABCD$. Ни одна из боковых граней не является тупоугольным треугольником. На ребре DC существует такая точка M, что прямая EM перпендикулярна BC. Кроме того, диагональ основания AC и боковые ребра ED и EB связаны соотношениями: $AC \geqslant 5EB/4 \geqslant 5ED/3$. Через вершину B и середину одного из боковых ребер проведено сечение, представляющее собой равнобедренную трапецию. Найдите отношение площади сечения и площади основания пирамиды.

Решения

10.1. Так как $d \leqslant a + b + c$, то $d^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

10.2. Если PQ — диагональ куба с ребром 1, а X — произвольная точка, то $PX + QX \geqslant PQ = \sqrt{3}$. Так как у куба 4 диагонали, сумма расстояний от точки X до всех вершин куба не меньше $4\sqrt{3}$.

10.3. Докажем сначала, что если $\angle BAC = 60°$, то $AB + AC \leqslant 2BC$. Рассмотрим для этого точки B' и C', симметричные точкам B и C относительно биссектрисы угла A. Так как в любом выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин пары противоположных сторон, то $BC + B'C' \geqslant CC' + BB'$ (равенство достигается, если $AB = AC$). Остается заметить, что $B'C' = BC$, $CC' = AC$ и $BB' = AB$. Аналогично доказываются неравенства $AC + AD \leqslant 2CD$ и $AD + AB \leqslant 2DB$. Складывая все эти неравенства, получаем требуемое.

10.4. Проведем через прямую b плоскость П, параллельную a. Пусть C_i — проекция точки A_i на плоскость П. По теореме о трех перпендикулярах $C_iB_i \perp b$, поэтому длина отрезка B_2C_2 заключена между B_1C_1 и B_3C_3; длины всех трех отрезков A_iC_i равны.

10.5. При доказательстве мы несколько раз будем использовать следующее планиметрическое утверждение: «Если точка X лежит на стороне BC треугольника ABC, то либо $AB \geqslant AX$, либо $AC \geqslant AX$». (В самом деле, один из углов BXA или CXA не меньше 90°; если $\angle BXA \geqslant 90°$, то $AB \geqslant AX$, а если $\angle CAX \geqslant 90°$, то $AC \geqslant AX$.)

Продолжим данный отрезок до пересечения с гранями многогранника в некоторых точках P и Q; при этом его длина может только увеличиться. Пусть MN — произвольный отрезок с концами на ребрах многогранника, проходящий через точку P. Тогда либо $MQ \geqslant PQ$, либо $NQ \geqslant PQ$. Пусть для определенности $MQ \geqslant PQ$. Точка M лежит на некотором ребре AB и либо $AQ \geqslant MQ$, либо $BQ \geqslant MQ$. Мы заменили отрезок PQ на больший отрезок, один из концов которого лежит в вершине многогранника. Проведя теперь точно такие же рассуждения для конца Q полученного отрезка, мы заменим отрезок PQ на больший отрезок с концами в вершинах многогранника.

10.6. Пусть $a = PA$, $b = PB$ и $c = PC$. Можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$; тогда по условию $c < a + b$. Пусть, далее, $h = PM$. Требуется доказать, что $\sqrt{c^2 + h^2} < \sqrt{a^2 + h^2} + \sqrt{b^2 + h^2}$, т. е.

$$c\sqrt{1 + \left(\frac{h}{c}\right)^2} < a\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} + b\sqrt{1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2}.$$

Остается заметить, что

$$c\sqrt{1 + \left(\frac{h}{c}\right)^2} < (a + b)\sqrt{1 + \left(\frac{h}{c}\right)^2} \leqslant a\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2} + b\sqrt{1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2}.$$

10.7. Рассмотрим плоскость П, проходящую через середину отрезка PQ перпендикулярно ему. Предположим, что все вершины многогранника удалены от точки Q не менее, чем от точки

P. Тогда все вершины многогранника лежат по ту же сторону от плоскости П, что и точка P. Следовательно, точка Q лежит вне многогранника, что противоречит условию.

10.8. Пусть M и N — точки пересечения плоскостей AOB и COD с ребрами CD и AB соответственно (рис. 75). Так как треугольник AOB лежит внутри треугольника AMB, то $AO + BO \leqslant \leqslant AM + BM$. Аналогично $CO + + DO \leqslant CN + DN$. Поэтому достаточно доказать, что сумма длин отрезков AM, BM, CN и DN не превосходит суммы длин ребер тетраэдра $ABCD$.

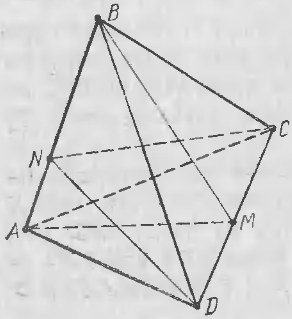


Рис. 75

Докажем сначала, что если X — точка на стороне $A'B'$ треугольника $A'B'C'$, то длина отрезка $C'X$ не превосходит половины периметра треугольника $A'B'C'$. В самом деле, $C'X \leqslant C'B' + B'X$ и $C'X \leqslant C'A + A'X$. Поэтому $2C'X \leqslant \leqslant A'B' + B'C' + C'A'$. Таким образом, $2AM \leqslant AC + CD + + DA$, $2BM \leqslant BC + CD + DB$, $2CN \leqslant BA + AC + CB$ и $2DN \leqslant BA + AD + DB$. Складывая все эти неравенства, получаем требуемое.

10.9. Занумеруем отрезки и рассмотрим отрезок с номером i. Пусть l_i — его длина, а x_i, y_i, z_i — длины проекций на ребра куба. Легко проверить, что $l_i \leqslant x_i + y_i + z_i$. С другой стороны, если любая плоскость, параллельная грани куба, пересекает не более одного отрезка, то проекции этих отрезков на каждое ребро куба не имеют общих точек. Поэтому $\sum x_i \leqslant 1$, $\sum y_i \leqslant 1$ и $\sum z_i \leqslant 1$, а значит, $\sum l_i \leqslant 3$.

10.10. Рассмотрим проекции на 3 непараллельных ребра куба. Проекция данной ломаной на любое ребро содержит оба конца ребра, поэтому она совпадает с самим ребром. Следовательно, сумма длин проекций звеньев ломаной на любое ребро не менее 2, а сумма длин проекций звеньев ломаной на все три ребра не менее 6.

Одна из трех длин проекций любого звена ломаной на ребра куба нулевая; пусть две другие длины проекций равны a и b. Так как $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$, то сумма длин звеньев ломаной не меньше суммы длин проекций звеньев ломаной на три ребра куба, деленной на $\sqrt{2}$, а значит, она не меньше $6/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

10.11. Пусть $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ и $\mathbf{v}_4$ — векторы, идущие из центра сферы в вершины тетраэдра. Так как центр сферы лежит внутри тетраэдра, то существуют такие положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, что $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 = 0$ (см. задачу 7.16). Можно считать, что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_4 = 1$. Докажем, что тогда $\lambda_i \leqslant 1/2$. Пусть, например, $\lambda_1 > 1/2$. Тогда $R/2 < |\lambda_1\mathbf{v}_1| = |\lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4| \leqslant (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)R = (1 - \lambda_1)R < R/2$. Получено противоречие, поэтому $\lambda_i \leqslant 1/2$. Следовательно, $|\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_4| = |(1 - 2\lambda_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (1 - 2\lambda_4)\mathbf{v}_4| \leqslant ((1 - 2\lambda_1) + \ldots + (1-2\lambda_4))R = 2R$. Так как $\sum|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 = (4R)^2 - |\sum \mathbf{v}_i|^2$ (см. решение задачи 14.15), а $|\sum \mathbf{v}_i| \leqslant 2R$, то $\sum|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 \geqslant (16 - 4)R^2 = 12R^2$. А так как $2R > |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|$, то $2R\sum|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| > \sum|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2 \geqslant 12R^2$.

10.12. Рассмотрим все сечения тетраэдра плоскостями, параллельными данному сечению. Те из них, которые являются четырехугольниками, при проецировании на прямую, перпендикулярную плоскостям сечений, попадают во внутренние точки некоторого отрезка PQ, причем точкам P и Q соответствуют сечения плоскостями, проходящими через вершины тетраэдра (рис. 76, *а*). Длина стороны сечения, принадлежащей фиксированной грани тетраэдра, является линейной функцией на отрезке

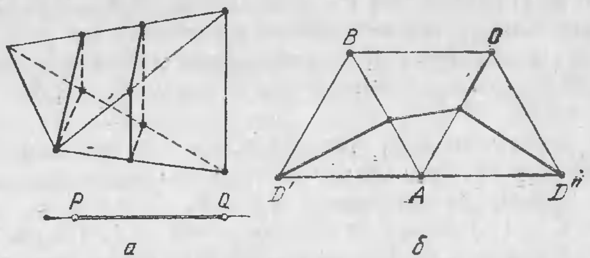


Рис. 76

PQ. Поэтому периметр сечения, как сумма линейных функций, является линейной функцией на отрезке PQ. Значение линейной функции в произвольной точке отрезка PQ заключено между ее значениями в точках P и Q. Поэтому достаточно проверить, что периметр сечения правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через его вершину, заключен между $2a$ и $3a$ (кроме случая, когда сечение состоит из единственной точки; но такое сечение не может соответствовать точкам P и Q). Если сечение является ребром тетраэдра, то для него значение рассматриваемой линейной функции равно $2a$.

Так как длина любого отрезка с концами на сторонах правильного треугольника не превосходит длины его стороны, периметр треугольного сечения тетраэдра не превосходит $3a$.

Если плоскость сечения проходит через вершину D тетраэдра $ABCD$ и пересекает ребра AB и AC, то развернем грани ABD и ACD на плоскость ABC (рис. 76, *б*). Стороны сечения соединяют точки D' и D'', поэтому сумма их длин не меньше $D'D'' = 2a$.

10.13. Если вершины пространственного четырехугольника $ABCD$ не лежат в одной плоскости, то $\angle ABC < \angle ABD + \angle DBC$ и $\angle ADC < \angle ADB + \angle BDC$ (см. задачу 5.4). Складывая эти неравенства и затем прибавляя к обеим частям углы BAD и BCD, получаем требуемое, так как суммы углов треугольников ABD и DBC равны 180°.

10.14. Предположим, что указанным свойством обладают вершины A и B тетраэдра $ABCD$. Тогда $\angle CAB + \angle DAB > 180°$ и $\angle CBA + \angle DBA > 180°$. С другой стороны, $\angle CAB + \angle CBA = 180° - \angle ACB < 180°$ и $\angle DBA + \angle DAB < 180°$. Получено противоречие.

10.15. Согласно задаче 5.4 $\angle ASB < \angle ASO + \angle BSO$. А так как луч SO лежит внутри трехгранного угла $SABC$, то $\angle ASO + \angle BSO < \angle ASC + \angle BSC$ (см. задачу 5.6). Записывая еще две пары таких неравенств и складывая их, получаем требуемое.

10.16. а) Пусть α, β и γ — углы между ребрами SA, SB и SC и плоскостями противолежащих им граней. Так как угол между прямой l и плоскостью П не превосходит угла между прямой l и любой прямой плоскости П, то $\alpha \leqslant \angle ASB$, $\beta \leqslant \angle BSC$ и $\gamma \leqslant \angle CSA$.

б) Двугранные углы трехгранного угла $SABC$ острые, поэтому проекция SA_1 луча SA на плоскость SBC лежит внутри угла BSC. Поэтому из неравенств $\angle ASB \leqslant \angle BSA_1 + \angle ASA_1$ и $\angle ASC \leqslant \angle ASA_1 + \angle CSA_1$ следует, что $\angle ASB + \angle ASC - \angle BSC \leqslant 2\angle ASA_1$. Записав аналогичные неравенства для ребер SB и SC и сложив их, получим требуемое.

10.17. Пусть O — центр прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Высота OH равнобедренного треугольника AOC параллельна ребру AA_1, поэтому $\angle AOC = 2\alpha$, где α — угол между ребром AA_1 и диагональю AC_1. Аналогичные рассуждения показывают, что плоские углы трехгранного угла $OACD_1$ равны 2α, 2β и 2γ. Следовательно, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 2\pi$.

10.18. Пусть S — вершина данного угла. Из решения задачи 5.16,б следует, что его можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится ромб $ABCD$, причем $SA = SC$ и $SB = SD$, а проекция вершины S на плоскость сечения совпадает с точкой O пересечения диагоналей ромба. Угол ASC будет острым, если $AO < SO$, и тупым, если $AO > SO$. Так как $\angle ASB = 60°$, то $AB^2 = AS^2 + BS^2 - AS \cdot BS$. Выразив по теореме Пифагора AB, AS и BS через AO, BO и SO, после сокращения и возведения в квадрат получим $(1+a^2)(1+b^2)=4$, где $a=AO/SO$ и $b=$ $=BO/SO$. Следовательно, как неравенства $a>1$ и $b>1$, так и неравенства $a<1$ и $b<1$ не могут выполняться одновременно.

10.19. Пусть O — точка внутри тетраэдра $ABCD$; α, β и γ — углы, под которыми видны из нее ребра AD, BD и CD; a, b и c — углы, под которыми видны ребра BC, CA и AB; P — точка пересечения прямой DO с гранью ABC. Так как луч OP лежит внутри трехгранного угла $OABC$, то $\angle AOP+\angle BOP<$ $<\angle AOC+\angle BOC$ (см. задачу 5.6), т. е. $\pi-\alpha+\pi-\beta<$ $<b+a$, а значит, $\alpha+\beta+a+b>2\pi$. Аналогично $\beta+$ $+\gamma+b+c>2\pi$ и $\alpha+\gamma+a+c>2\pi$. Складывая эти неравенства, получаем требуемое.

10.20. а) Применим утверждение задачи 7.19 к тетраэдру $ABCD$. Пусть **a**, **b**, **c** и **d** — векторы, соответствующие граням BCD, ACD, ABD и ABC. Сумма этих векторов равна нулю, поэтому существует пространственный четырехугольник, векторами последовательных сторон которого являются **a**, **b**, **c** и **d**. Угол между сторонами **a** и **b** этого четырехугольника равен двугранному углу при ребре CD (см. рис. 77). Аналогичные рассуждения показывают, что рассматриваемая сумма двугранных углов равна сумме плоских углов полученного четырехугольника, которая меньше 2π (задача 10.13).

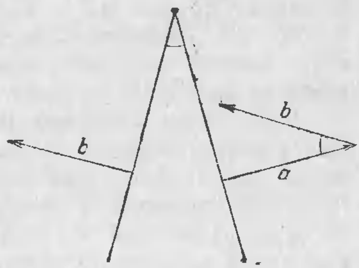


Рис. 77

б) Запишем полученное в задаче а) неравенство для каждой пары противоположных ребер тетраэдра и сложим эти три неравенства. Каждый двугранный угол тетраэдра входит в два таких неравенства, поэтому удвоенная сумма двугранных углов тетраэдра меньше 6π.

Сумма двугранных углов любого трехгранного угла больше π (задача 5.5). Запишем такое неравенство для каждой из четырех вершин тетраэдра и сложим эти неравенства. Каждый двугранный угол тетраэдра входит в два таких неравенства (соответствующих концам ребра), поэтому удвоенная сумма двугранных углов тетраэдра больше 4π.

10.21. Вершины всех конусов можно заключить в шар радиуса r. Рассмотрим сферу радиуса R с тем же центром O. Если R/r стремится к бесконечности, то доля поверхности этой сферы, заключенной внутри данных конусов, стремится к доли ее поверхности, заключенной внутри конусов с теми же углами раствора, вершинами в точке O и осями, параллельными осям данных конусов. Так как телесный угол конуса с углом раствора φ равен $4\pi \sin^2(\varphi/4)$ (задача 4.50), то $4\pi(\sin^2(\varphi_1/4) + \ldots$ $\ldots + \sin^2(\varphi_n/4)) \geqslant 4\pi$. Остается заметить, что $x \geqslant \sin x$.

10.22. Проекции на плоскость грани тетраэдра трех остальных его граней полностью покрывают эту грань. Ясно также, что площадь проекции треугольника на плоскость, ему не параллельную, меньше площади самого треугольника (см. задачу 2.13).

10.23. Построим внешним образом на гранях внутреннего многогранника как на основаниях прямоугольные призмы, ребра которых достаточно велики: все они должны пересекать поверхность внешнего многогранника. Эти призмы высекают на поверхности внешнего многогранника попарно непересекающиеся фигуры, площадь каждой из которых не меньше площади основания призмы, т. е. грани внутреннего многогранника. В самом деле, проекция каждой такой фигуры на плоскость основания призмы совпадает с самим основанием, а при проецировании площадь фигуры может только уменьшиться.

10.24. Пусть плоскость П параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра. Докажем, что требуемые две плоскости можно найти даже среди плоскостей, перпендикулярных П. Проекцией тетраэдра на любую такую плоскость является трапеция (или треугольник) с постоянной высотой, равной расстоянию между выбранными скрещивающимися ребрами тетраэдра. Средняя линия этой трапеции является проекцией параллелограмма с вершинами в серединах четырех ребер тетраэдра. Таким образом, остается проверить, что для любого параллелограмма найдутся две такие прямые (в той же плоскости), что отношение длин проекций параллелограмма на них не меньше $\sqrt{2}$. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, причем $a \leqslant b$; d — длина его наибольшей диагонали. Длина проекции параллелограмма на прямую, перпендикулярную стороне b, не превосходит a; длина проекции на прямую, параллельную диагонали d, равна d. Ясно также, что $d^2 \geqslant a^2 + b^2 \geqslant 2a^2$.

10.25. а) Если треугольное сечение не проходит через вершину тетраэдра, то существует параллельное ему треугольное сечение, проходящее через вершину; площадь последнего сечения больше. Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда сечение проходит через вершину или ребро тетраэдра.

Пусть точка M лежит на ребре CD тетраэдра $ABCD$. Длина высоты, опущенной из точки M на прямую AB, заключена между длинами высот, опущенных на эту прямую из точек C и D (задача 10.4). Поэтому $S_{ABM} \leqslant S_{ABC}$ или $S_{ABM} \leqslant S_{ABD}$.

Пусть точки M и N лежат на ребрах CD и CB тетраэдра

$ABCD$. К сечению AMN тетраэдра $AMBC$ можно применить только что доказанное утверждение. Поэтому $S_{AMN} \leqslant S_{ACM} \leqslant$ $\leqslant S_{ACD}$ или $S_{AMN} \leqslant S_{ABM}$.

б) Пусть плоскость пересекает ребра AB, CD, BD и AC тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой MN (рис. 78, *а*). Так как $K'L' = KL \sin \varphi$, где φ — угол между прямыми KL и MN, то площадь сечения тетраэдра равна $K'L' \times$ $\times MN/2$. Поэтому достаточно доказать, что $K'L' \leqslant A'C'$ или $K'L' \leqslant B'D'$.

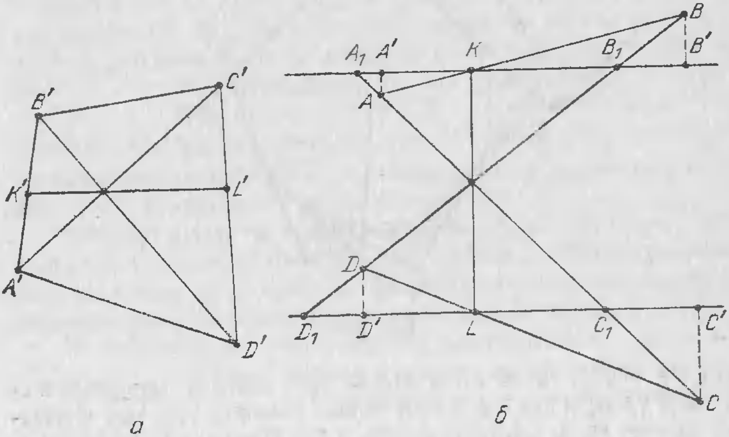


Рис. 78

Остается доказать следующее планиметрическое утверждение: «Длина отрезка KL, проходящего через точку пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, не превосходит длины одной из его диагоналей (концы отрезка лежат на сторонах четырехугольника)». Проведем через концы отрезка KL прямые, ему перпендикулярные, и рассмотрим проекции на них вершин четырехугольника, а также точки пересечения с ними прямых AC и BD (рис. 78, *б*). Пусть для определенности точка A лежит внутри полосы, заданной этими прямыми, а точка B вне ее. Тогда можно считать, что D лежит внутри полосы, так как иначе $BD > KL$ и доказательство завершено. Так как

$$\frac{AA'}{BB'} \leqslant \frac{A_1K}{B_1K} = \frac{C_1L}{D_1L} \leqslant \frac{CC'}{DD'},$$

то либо $AA' \leqslant CC'$ (и тогда $AC > KL$), либо $BB' \geqslant DD'$ (и тогда $BD > KL$).

10.26. Пусть данная плоскость пересекает ребра AB, AD и AA' в точках K, L и M; P, Q и R — центры граней $ABB'A'$, $ABCD$ и $ADD'A'$; O — точка касания плоскости со сферой. Плоскости KOM и KPM касаются сферы в точках O и P, поэтому $\triangle KOM = \triangle KPM$, а значит, $\angle KOM = \angle KPM$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\angle KPM + \angle MRL + \angle LQK = \angle KOM + \angle MOL + \angle LOK = 360°$. Ясно также,

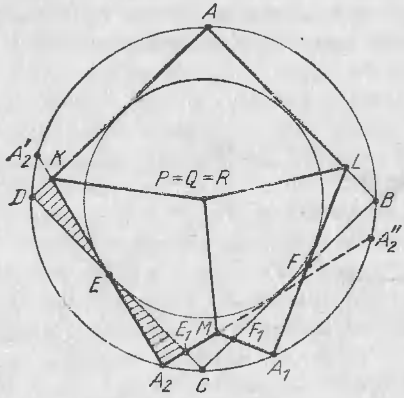


Рис. 79

что $KP = KQ$, $LQ = LR$ и $MR = MP$, поэтому четырехугольники $AKPM$, $AMRL$ и $ALQK$ можно сложить так, как показано на рис. 79. В шестиугольнике ALA_1MA_2K углы при вершинах A, A_1 и A_2 прямые, поэтому $\angle K + \angle L + \angle M = 4\pi - 1{,}5\pi = 2{,}5\pi$, а так как углы K, L и M больше $\pi/2$, то два из них, например, K и L, меньше π. Тогда точка A_2 лежит на дуге DC, A_1 — на дуге CB, а значит, точка M лежит внутри квадрата $ABCD$.

При симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку DA_2 обе окружности переходят в себя, поэтому касательные прямые DA и DC переходят в A_2A_2'' и A_2A_2', а значит, $\triangle DKE = \triangle A_2E_1E$. Аналогично $\triangle BLF = \triangle A_1F_1F$. Следовательно, площадь шестиугольника ALA_1MA_2K, равная площади поверхности данной пирамиды, меньше площади квадрата $ABCD$.

10.27. Если два тетраэдра имеют общий трехгранный угол, то отношение их объемов равно произведению отношений длин ребер, лежащих на ребрах этого трехгранного угла (см. задачу 3.1). Поэтому произведение отношений объемов рассматриваемых четырех тетраэдров к объему исходного равно произведению чисел вида $A_iB_{ij} : A_iA_j$, где A_i и A_j — вершины тетраэдра, B_{ij} —

отмеченная точка на ребре A_iA_j. Каждому ребру A_iA_j соответствует пара таких чисел $A_iB_{ij} : A_iA_j$ и $A_iB_{ij} : A_iA_j$. Если $A_iA_j = a$ и $A_iB_{ij} = x$, то $A_jB_{ij} = a - x$. Поэтому произведение пары чисел, соответствующих ребру A_iA_j, равно $\frac{x(a-x)}{a^2} \leqslant \frac{1}{4}$.

Так как у тетраэдра 6 ребер, рассматриваемое произведение четырех отношений объемов тетраэдров не превосходит $1/4^6 = 1/8^4$. Поэтому одно из отношений объемов не превосходит 1/8.

10.28. Пусть длины всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра CD, не превосходит 1. Если h_1 и h_2 — высоты, опущенные из вершин C и D на прямую AB, и $a = AB$, то объем V тетраэдра $ABCD$ равен $ah_1h_2 \sin\varphi/6$, где φ — двугранный угол при ребре AB. В треугольнике со сторонами a, b и c квадрат высоты, опущенной на a, равен $(b^2 - x^2 + c^2 - (a - x)^2)/2 \leqslant \leqslant (b^2 + c^2 - a^2/2)/2$. В нашем случае $h^2 \leqslant 1 - a^2/4$, поэтому $V \leqslant a(1 - a^2/4)/6$, причем $0 < a \leqslant 1$. Вычисляя производную функции $a(1 - a^2/4)$, получаем, что она монотонно возрастает на интервале от 0 до $\sqrt{4/3}$, а значит, и на интервале от 0 до 1. При $a = 1$ величина $a(1 - a^2/4)/6$ равна 1/8.

10.29. а) Пусть O — центр данной сферы. Разобьем данный многогранник на пирамиды с вершиной O, основаниями которых служат его грани. Высоты этих пирамид не меньше r, поэтому сумма их объемов не меньше $Sr/3$, а значит, $V \geqslant Sr/3$.

б) Построим на гранях данного многогранника как на основаниях внутренним образом прямоугольные призмы высотой $h = V/S$. Эти призмы могут пересекаться и вылезать за пределы многогранника, а сумма их объемов равна $hS = V$, поэтому останется точка многогранника, ими не покрытая. Сфера радиуса V/S с центром в этой точке не пересекает граней данного многогранника.

в) Согласно задаче б) во внутренний многогранник можно поместить сферу радиуса $r = V_2/S_2$. А так как эта сфера лежит внутри внешнего многогранника, то согласно задаче а) $V_1/S_1 \geqslant \geqslant r/3$.

10.30. На каждом ребре куба есть точка многогранника, так как иначе его проекция вдоль этого ребра не совпадала бы с гранью. Возьмем на каждом ребре куба по одной точке многогранника и рассмотрим новый выпуклый многогранник с вершинами в этих точках. Так как он содержится в исходном многограннике, достаточно доказать, что его объем не меньше 1/3 объема куба.

Можно считать, что длина ребра куба равна 1, Рассматриваемый многогранник получается путем отрезания тетраэдров от трехгранных углов при вершинах куба. Докажем, что сумма объемов двух тетраэдров для вершин, принадлежащих одному ребру куба, не превосходит 1/6. Эта сумма равна $\frac{1}{3} S_1 h_1 + \frac{1}{3} S_2 h_2$, где h_1 и h_2 — высоты, опущенные на противоположные грани куба из вершины многогранника, лежащей на данном ребре куба, а S_1 и S_2 — площади соответствующих граней тетраэдров. Остается заметить, что $S_1 \leqslant 1/2$, $S_2 \leqslant 1/2$ и $h_1 + h_2 = 1$.

Четыре параллельных ребра куба задают разбиение его вершин на 4 пары. Поэтому объем всех отрезанных тетраэдров не превосходит $4/6 = 2/3$, т. е. объем оставшейся части не меньше 1/3.

Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, то многогранниками, для которых достигается равенство, являются тетраэдры AB_1CD_1 и A_1BC_1D.

10.31. Проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям и удаленные от них на расстояние $n\varepsilon$, где n пробегает целые числа, ε — некоторое фиксированное число. Они разбивают пространство на кубики с ребром ε. Доказательство достаточно провести для тел, состоящих из этих кубиков. В самом деле, если ε устремить к нулю, то объем и площади проекций тела, состоящего из лежащих внутри исходного тела кубиков, будут стремиться к объему и площадям проекций исходного тела.

Докажем сначала, что если тело разрезано на две части плоскостью, параллельной плоскости координат, причем для обеих частей справедливо указанное неравенство, то оно справедливо и для всего тела. Пусть V — объем всего тела, S_1, S_2 и S_3 — площади его проекций на координатные плоскости; объем и площади для первой и второй его частей будем обозначать одним и соответственно двумя штрихами. Нужно доказать, что из неравенств $V' \leqslant \sqrt{S_1'S_2'S_3'}$ и $V'' \leqslant \sqrt{S_1''S_2''S_3''}$ следует неравенство $V = V' + V'' \leqslant \sqrt{S_1S_2S_3}$. Так как $S_3' \leqslant S_3$ и $S_3'' \leqslant S_3$, достаточно проверить неравенство $\sqrt{S_1'S_2'} + \sqrt{S_1''S_2''} \leqslant \sqrt{S_1S_2}$. Можно считать, что S_3 — площадь проекции на плоскость, разрезающую тело. Тогда $S_1 = S_1' + S_1''$ и $S_2 = S_2' + S_2''$. Остается проверить неравенство $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}$. Для его доказательства нужно обе части возвести в квадрат и воспользоваться неравенством $\sqrt{(ad)(bc)} \leqslant \frac{1}{2}(ad + bc)$.

Доказательство требуемого неравенства будем проводить индукцией по высоте тела, т. е. по числу слоев кубиков, из которых оно состоит. Предыдущим рассуждением фактически доказан шаг индукции. Но пока еще не доказана база индукции — не разобран случай тела, состоящего из одного слоя кубиков. В этом случае доказательство снова проведем по индукции с помощью доказанного выше утверждения: будем разрезать тело на прямоугольные параллелепипеды размером $\varepsilon\times\varepsilon\times n\varepsilon$. Справедливость требуемого неравенства для одного такого параллелепипеда, т. е. база индукции, легко проверяется.

10.32. Рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью, параллельной грани ABC и проходящей через центр его вписанной сферы. Это сечение является треугольником $A_1B_1C_1$, подобным треугольнику ABC, причем коэффициент подобия меньше 1. Треугольник $A_1B_1C_1$ содержит окружность радиуса r, где r — радиус вписанной сферы тетраэдра. Проводя к этой окружности касательные, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, получим еще меньший треугольник, описанный около окружности радиуса r.

10.33. Согласно задаче 7.12 $\overrightarrow{OM} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$, где $p = S_{MBC} : S_{ABC}$, $q = S_{MAC} : S_{ABC}$ и $r = S_{MAB} : S_{ABC}$. Остается заметить, что $OM \leqslant pOA + qOB + rOC$.

10.34. Пусть $2a$ — сторона основания пирамиды, h — ее высота. Тогда r — радиус вписанной окружности равнобедренного треугольника с высотой h и основанием $2a$; R — радиус описанной окружности равнобедренного треугольника с высотой h и основанием $2\sqrt{2}a$. Поэтому $r(a + \sqrt{a^2 + h^2}) = ah$, т. е. $rh = a(\sqrt{a^2 + h^2} - a)$. Если b — боковая сторона равнобедренного треугольника, то $2R : b = b : h$, т. е. $2Rh = b^2 = 2a^2 + h^2$. Следовательно, $k = R/r = (2a^2 + h^2)/2a(\sqrt{a^2 + h^2} - a)$, т. е. $(2a^2k + 2a^2 + h^2)^2 = 4a^2k^2(a^2 + h^2)$. Пусть $x = h^2/a^2$. Тогда $x^2 + 4x(1 + k - k^2) + 4 + 8k = 0$. Дискриминант этого квадратного уравнения относительно x равен $16k^2(k^2 - 2k - 1)$. Так как $k > 0$ и это квадратное уравнение имеет корни, то $k \geqslant 1 + \sqrt{2}$.

10.35. Можно. Проекцией куба с ребром a на плоскость, перпендикулярную диагонали, является правильный шестиугольник со стороной $b = a\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Впишем в полученный шестиугольник квадрат так, как показано на рис. 80. Легко проверить, что сторона этого квадрата равна $2\sqrt{3}b/(1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}a/(1 + \sqrt{3}) > a$, а значит, он содержит внутри себя квадрат K со стороной a. Вырезав часть куба, проецирующуюся в K, получим требуемый вырез.

10.36. а) Да, верно. Пусть O — центр симметрии данного многогранника; M_2' — многоугольник, симметричный M_2 относительно точки O. Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник P, содержащий M_2 и M_2'. Докажем, что площадь части сечения M_1, лежащей внутри P, не меньше площади M_2. Пусть A — внутренняя точка некоторой грани N многогранника P, отличной от M_2 и M_2', а точка B симметрична A относительно O. Плоскость, параллельная N, пересекает грани M_2 и M_2', только если она пересекает отрезок AB; при этом она пересекает и M_1. Пусть плоскость, проходящая через точку отрезка AB параллельно грани N, пересекает грани M_2 и M_2' по отрезкам длиной l и l', а часть грани M_1, лежащую внутри P,— по отрезку длиной m. Тогда $m \geqslant (l + l')/2$, так как многогранник P — выпуклый. Следовательно, площадь M_1 не меньше полусуммы площадей M_2 и M_2', т. е. площади M_2.

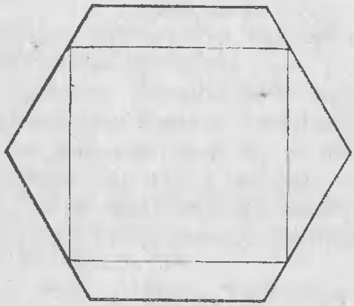


Рис. 80

б) Нет, не верно. Рассмотрим правильный октаэдр с ребром a. Радиус описанной окружности грани равен $a/\sqrt{3}$. Сечение, параллельное грани и проходящее через центр октаэдра, является правильным шестиугольником со стороной $a/2$; радиус его описанной окружности равен $a/2$. Ясно, что $a/\sqrt{3} > a/2$.

10.37. Рассмотрим тело, состоящее из точек, удаленных от данного многогранника на расстояние не больше d. Площадь поверхности этого тела равна $S + d\sum l_i(\pi - \varphi_i) + 4\pi d^2$, где S — площадь поверхности многогранника (задача 3.13). Так как это тело заключено внутри сферы радиуса $d + R$, то площадь его поверхности не превосходит $4\pi(d + R)^2$ (это утверждение получается предельным переходом из утверждения задачи 10.23). Следовательно, $S + d\sum l_i(\pi - \varphi_i) \leqslant 8\pi dR + 4\pi R^2$. Устремляя d к бесконечности, получим требуемое.

Глава 11

ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

§ 1. Отрезок с концами на скрещивающихся прямых

11.1. Концы отрезка AB перемещаются по данным прямым a и b. Докажите, что его длина будет наименьшей, когда он перпендикулярен обеим прямым.

11.2. Найдите наименьшую площадь сечения куба с ребром a плоскостью, проходящей через его диагональ.

11.3. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Точки M и N лежат на прямых BC_1 и CA_1, причем прямая MN параллельна плоскости AA_1B. Чему равна наименьшая длина такого отрезка MN?

11.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Концы отрезка, пересекающего ребро C_1D_1, лежат на прямых AA_1 и BC. Какую наименьшую длину может иметь этот отрезок?

11.5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Концы отрезка, образующего угол $60°$ с плоскостью грани $ABCD$, лежат на прямых AB_1 и BC_1. Какую наименьшую длину может иметь этот отрезок?

§ 2. Площадь и объем

11.6. Чему равно наименьшее значение отношения объемов конуса и цилиндра, описанных около одной сферы?

11.7. Площадь поверхности сферического сегмента равна S (имеется в виду сферическая часть его поверхности). Каков наибольший возможный объем такого сегмента?

11.8. Докажите, что среди всех правильных n-угольных пирамид с фиксированной площадью полной поверхности наибольший объем имеет пирамида, у которой двугранный угол при ребре основания равен двугранному углу при ребре правильного тетраэдра.

11.9. Через точку M, лежащую внутри данного трехгранного угла с прямыми плоскими углами, проводятся всевозможные плоскости. Докажите, что объем тетраэдра, отсекаемого такой плоскостью от трехгранного угла, будет наименьшим, когда M — точка пересечения медиан треугольника, являющегося сечением трехгранного угла этой плоскостью.

* * *

11.10. Чему равна наибольшая площадь проекции правильного тетраэдра с ребром a на плоскость?

11.11. Чему равна наибольшая площадь проекции прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b и c на плоскость?

11.12. На плоскости лежит куб с ребром a. Источник света расположен на расстоянии b от плоскости, причем $b > a$. Найдите наименьшее значение площади тени, отбрасываемой кубом на плоскость.

§ 3. Расстояния

11.13. а) Рассмотрим для каждой внутренней точки правильного тетраэдра сумму расстояний от нее до его вершин. Докажите, что эта сумма будет наименьшей для центра тетраэдра.

б) Два противоположных ребра тетраэдра равны b и c, а остальные ребра равны a. Чему равно наименьшее значение суммы расстояний от произвольной точки пространства до вершин этого тетраэдра?

11.14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. На лучах A_1A, A_1B_1 и A_1D_1 взяты соответственно точки E, F и G так, что $A_1E = A_1F = A_1G = b$. Пусть M — точка окружности S_1, вписанной в квадрат $ABCD$, а N — точка окружности S_2, проходящей через E, F и G. Чему равно наименьшее значение длины отрезка MN?

11.15. В усеченном конусе угол между осью и образующей равен 30°. Докажите, что кратчайший путь по поверхности конуса, соединяющий точку границы одного основания с диаметрально противоположной точкой границы другого основания, имеет длину $2R$, где R — радиус большего основания.

11.16. Длины трех попарно перпендикулярных отрезков OA, OB и OC равны a, b и c, причем $a \leqslant b \leqslant$

$\leqslant c$. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать сумма расстояний от точек A, B и C до прямой l, проходящей через точку O?

§ 4. Разные задачи

11.17. Прямая l лежит в плоскости одной грани данного двугранного угла. Докажите, что угол между прямой l и плоскостью другой грани наибольший, когда l перпендикулярна ребру данного двугранного угла.

11.18. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в два раза меньше стороны основания. Найдите наибольшее значение угла A_1MC_1, где M — точка ребра AB.

11.19. Три одинаковые цилиндрические поверхности радиуса R со взаимно перпендикулярными осями попарно касаются друг друга.

а) Чему равен радиус наименьшего шара, касающегося этих цилиндров?

б) Чему равен радиус наибольшего цилиндра, касающегося трех данных, ось которого проходит внутри треугольника с вершинами в точках касания трех данных цилиндров?

11.20. Может ли правильный тетраэдр с ребром 1 пройти через круглое отверстие радиуса: а) 0,45; б) 0,44? (Толщиной отверстия можно пренебречь.)

Задачи для самостоятельного решения

11.21. Какой наибольший объем может иметь четырехугольная пирамида, в основании которой лежит прямоугольник, одна сторона которого равна a, если боковые ребра пирамиды равны b?

11.22. Каков наибольший объем тетраэдра $ABCD$, все вершины которого лежат на сфере радиуса 1, а ребра AB, BC, CD и DA видны из центра сферы под углом $60°$?

11.23. Два конуса имеют общее основание и расположены по разные стороны от него. Радиус основания равен r, высота одного конуса h, другого H ($h \leqslant H$). Найдите наибольшее расстояние между двумя образующими этих конусов.

11.24. Точка N лежит на диагонали боковой грани куба с ребром a, а точка M — на окружности, расположенной в плоскости нижней грани куба и имеющей центр в центре этой грани. Найдите наименьшее значение длины отрезка MN.

11.25. Дан правильный тетраэдр с ребром a. Найдите радиус шара с центром в центре тетраэдра, для которого суммарный объем части тетраэдра, расположенной вне шара, и части шара, расположенной вне тетраэдра, достигает наименьшего значения.

11.26. Диагональ куба с ребром 1 лежит на ребре двугранного угла величиной α ($\alpha < 180°$). В каких пределах может изменяться объем части куба, заключенной внутри угла?

11.27. Две вершины тетраэдра расположены на поверхности сферы радиуса $\sqrt{10}$, а две другие вершины — на поверхности сферы радиуса 2, концентрической с первой. Какой наибольший объем может иметь такой тетраэдр?

11.28. Плоские углы одного трехгранного угла равны 60°, другого — 90°; расстояние между их вершинами равно a, причем вершина каждого из них равноудалена от граней другого. Найдите наименьший объем их общей части — шестигранника.

Решения

11.1. Проведем через прямую b плоскость П, параллельную a. Пусть A' — проекция точки A на плоскость П. Тогда $AB^2 = A'B^2 + A'A^2 = A'B^2 + h^2$, где h — расстояние между прямой a и плоскостью П. Точка A' совпадает с B, если $AB \perp$ П.

11.2. Пусть плоскость проходит через диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и пересекает его ребра BB_1 и DD_1 в точках P и Q соответственно. Площадь параллелограмма APC_1Q равна произведению длины отрезка AC_1 на расстояние от точки P до прямой AC_1. Расстояние от точки P до прямой AC_1 минимально, когда P лежит на общем перпендикуляре к прямым AC_1 и BB_1; этим общим перпендикуляром является прямая, проходящая через середины ребер BB_1 и DD_1. Итак, площадь сечения будет наименьшей, когда P и Q — середины ребер BB_1 и DD_1. Это сечение является ромбом с диагоналями $AC_1 = a\sqrt{3}$ и $PQ = a\sqrt{2}$; его площадь равна $a^2\sqrt{6}/2$.

11.3. Если M' и N' — проекции точек M и N на плоскость ABC, то $M'N' \| AB$. Пусть $CM' = x$. Тогда $M'N' = x$, а длина проекции отрезка MN на прямую CC_1 равна $|a - 2x|$. Следовательно,

$$MN^2 = x^2 + (a - 2x)^2 = 5x^2 - 4ax + a^2.$$

Наименьшая длина отрезка MN равна $a/\sqrt{5}$.

11.4. Пусть точки M и N лежат на прямых AA_1 и BC соответственно и отрезок MN пересекает ребро C_1D_1 в точке L. Тогда точки M и N лежат на лучах AA_1 и BC, причем $x = AM > a$ и $y = BN > a$. Рассматривая проекции на плоскости AA_1B и ABC, получаем соответственно $C_1L : LD_1 = a : (x - a)$ и $C_1L : LD_1 = (y - a) : a$. Поэтому $(x - a)(y - a) = a^2$, т. е. $xy = (x + y)a$, а значит, $(xy)^2 = (x + y)^2a^2 \geqslant 4xya^2$, т. е. $xy \geqslant 4a^2$. Следовательно, $MN^2 = x^2 + y^2 + a^2 = (x + y)^2 - 2xy + a^2 = (xy)^2/a^2 - 2xy + a^2 = (xy - a^2)^2/a^2 \geqslant 9a^2$. Наименьшее значение длины отрезка MN равно $3a$; оно достигается, когда $AM = BN = 2a$.

11.5. Введем систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по лучам BC, BA и BB_1 соответственно. Пусть точка M прямой BC_1 имеет координаты $(x, 0, x)$, а точка N прямой B_1A имеет координаты $(0, y, a - y)$. Тогда квадрат длины отрезка MN равен $x^2 + y^2 + (a - x - y)^2$, а квадрат длины его проекции M_1N_1 на плоскость грани $ABCD$ равен $x^2 + y^2$. Так как угол между прямыми MN и M_1N_1 равен 60°, то $MN = 2M_1N_1$, т. е. $(a - x - y)^2 = 3(x^2 + y^2)$.

Пусть $u^2 = x^2 + y^2$ и $v = x + y$. Тогда $MN = 2M_1N_1 = 2u$. Кроме того, $(a - v)^2 = 3u^2$ по условию и $2u^2 \geqslant v^2$. Следовательно, $(a - v)^2 \geqslant 3v^2/2$, а значит, $v \leqslant a(\sqrt{6} - 2)$. Поэтому $u^2 = (a - v)^2/3 \geqslant a^2(3 - \sqrt{6})^2/3 = a^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, т. е. $MN \geqslant 2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Равенство достигается, когда $x = y = a(\sqrt{6} - 2)/2$.

11.6. Пусть r — радиус данной сферы. Если осевое сечение конуса является равнобедренным треугольником с высотой h и основанием $2a$, то $ah = S = r(a + \sqrt{h^2 + a^2})$. Следовательно, $a^2(h - r)^2 = r^2(h^2 + a^2)$, т. е. $a^2 = r^2h^2/(h - 2r)$. Поэтому объем конуса равен $\pi r^2h^2/3(h - 2r)$. Так как

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{h^2}{h - 2r}\right) = -\frac{4rh - h^2}{(h - 2r)^2},$$

то объем конуса минимален при $h = 4r$. В этом случае отношение объемов конуса и цилиндра равно 4/3.

11.7. Пусть V — объем сферического сегмента, R — радиус сферы. Так как $S = 2\pi Rh$ (задача 4.24) и $V = \pi h^2(3R - h)/3$ (задача 4.27), то $V = Sh/2 - \pi h^3/3$. Поэтому производная V по h равна $S/2 - \pi h^2$. Наибольшим объем будет при $h = \sqrt{S/2\pi}$; он равен $S\sqrt{S/18\pi}$.

11.8. Пусть h — высота правильной пирамиды, r — радиус вписанной окружности ее основания. Тогда объем и площадь полной поверхности пирамиды равны

$$\frac{n}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}(r^2h) \quad \text{и} \quad n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\left(r^2+r\sqrt{h^2+r^2}\right)$$

соответственно. Итак, фиксирована величина $r^2 + r\sqrt{h^2+r^2} = a$ и нужно выяснить, когда максимальна величина r^2h (уже видно, что ответ не зависит от n). Так как $h^2 + r^2 = (a/r - r)^2 = (a/r)^2 - 2a + r^2$, то $(r^2h)^2 = a^2r^2 - 2ar^4$. Производная этой функции по r равна $2a^2r - 8ar^3$. Поэтому объем пирамиды максимален, если $r^2 = a/4$, а значит, $h^2 = 2a$. Следовательно, если φ — двугранный угол при ребре основания этой пирамиды, то $\operatorname{tg}^2\varphi = 8$, т. е. $\cos\varphi = 1/3$.

11.9. Введем систему координат, направив ее оси по ребрам данного трехгранного угла. Пусть точка M имеет координаты (α, β, γ); плоскость пересекает ребра трехгранного угла в точках, удаленных от его вершины на расстояния a, b и c. Тогда эта плоскость задается уравнением $x/a + y/b + z/c = 1$. Так как она проходит через точку M, то $\alpha/a + \beta/b + \gamma/c = 1$. Объем отсеченного тетраэдра равен $abc/6$. Произведение abc будет наименьшим, когда величина $\alpha\beta\gamma/abc$ будет наибольшей, т. е. когда $\alpha/a = \beta/b = \gamma/c = 1/3$.

11.10. Проекция тетраэдра может быть треугольником или четырехугольником. В первом случае она является проекцией одной из граней, поэтому ее площадь не превосходит $\sqrt{3}a^2/4$. Во втором случае диагонали четырехугольника являются проекциями ребер тетраэдра, поэтому площадь тени, равная половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, не превосходит $a^2/2$; равенство достигается, когда пара противоположных ребер тетраэдра параллельна данной плоскости. Остается заметить, что $\sqrt{3}a^2/4 < a^2/2$.

11.11. Площадь проекции параллелепипеда вдвое больше площади проекции одного из треугольников с вершинами в концах трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной точки; например, если проекцией параллелепипеда является шестиугольник, то в качестве такой вершины нужно взять вершину, проекция которой лежит внутри шестиугольника. Для прямоугольного параллелепипеда все такие треугольники равны. Поэтому площадь проекции параллелепипеда будет наибольшей, когда один из этих треугольников параллелен плоскости проекции. Она будет равна $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ (см. задачу 1.22).

11.12. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной a; точка X удалена от прямой AB на расстояние b, причем $b > a$; C' и D' —

точки пересечения продолжений отрезков XC и XD за точки C и D с прямой AB. Так как $\triangle C'D'X \sim \triangle CDX$, то $x : b = a : (b - a)$, где $x = C'D'$. Поэтому $x = ab/(b - a)$. Эти рассуждения показывают, что тень, отбрасываемая верхней гранью куба, всегда представляет собой квадрат со стороной $ab/(b - a)$. Следовательно, площадь тени, отбрасываемой кубом, будет наименьшей, когда эта тень совпадает с тенью, отбрасываемой одной лишь верхней гранью, т. е. когда источник света расположен над верхней гранью. При этом площадь тени равна $(ab/(a - b))^2$; нижняя грань куба считается входящей в тень.

11.13. а) Проведем через вершины правильного тетраэдра $ABCD$ плоскости, параллельные противоположным граням. Эти плоскости также образуют правильный тетраэдр. Поэтому сумма расстояний от них до внутренней точки X тетраэдра $ABCD$ постоянна (задача 8.1, а). Расстояние от точки X до такой плоскости не превосходит расстояния от точки X до соответствующей вершины тетраэдра, причем сумма расстояний от точки X до вершин тетраэдра равна сумме расстояний от точки X до этих плоскостей, только если X — центр тетраэдра.

б) Пусть в тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD равны b и c, а остальные ребра равны a. Если M и N — середины ребер AB и CD, то прямая MN является осью симметрии тетраэдра $ABCD$. Пусть X — произвольная точка пространства; точка Y симметрична ей относительно прямой MN; K — середина отрезка XY (она лежит на прямой MN). Тогда $XA + XB = XA + YA \geqslant 2KA = KA + KB$. Аналогично $XC + XD \geqslant KC + KD$. Поэтому достаточно выяснить, чему равно наименьшее значение суммы расстояний до вершин тетраэдра для точек прямой MN. Для точек этой прямой сумма расстояний до вершин тетраэдра $ABCD$ не изменится, если отрезок AB повернуть относительно нее так, чтобы он стал параллелен CD. При этом получим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями b и c и высотой $MN = \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)/4}$. Для любого выпуклого четырехугольника сумма расстояний до вершин достигает наименьшего значения в точке пересечения диагоналей; при этом она равна сумме длин диагоналей. Легко проверить, что сумма длин диагоналей полученной трапеции $ABCD$ равна $\sqrt{4a^2 + 2bc}$.

11.14. Пусть O — центр куба. Рассмотрим две сферы с центром O, содержащие соответственно окружности S_1 и S_2. Пусть R_1 и R_2 — радиусы этих сфер. Расстояние между точками окружностей S_1 и S_2 не может быть меньше $|R_1 - R_2|$. Если два конуса с общей вершиной O, проходящие соответственно через S_1 и S_2, пересекаются (т. е. имеют общую образующую), то расстояние между S_1 и S_2 равно $|R_1 - R_2|$. Если же эти конусы не пересекаются, то расстояние между S_1 и S_2 равно наименьшему из расстояний между их точками, лежащими в плоскости, проходящей через точку O и центры окружностей, т. е. в плоскости AA_1CC_1. Пусть KL — диаметр окружности S_1, лежащий в указаной плоскости; P — точка пересечения прямых OK и AA_1 (рис. 81).

Введем систему координат, направив оси Ox и Oy по лучам A_1C_1 и A_1A. Точки E, O и K имеют координаты $(0,\ b)$, $(a/\sqrt{2},\ a/2)$ и $(a(\sqrt{2}-1)/2,\ a)$ соответственно, поэтому $R_2 = OE = \sqrt{b^2 - ab + 3a^2/4}$ и $EK = \sqrt{4b^2 - 8ab + (7 - 2\sqrt{2})a^2}/2$. Ясно также, что $R_1 = a/\sqrt{2}$.

Конусы пересекаются, если $b = A_1E \geqslant A_1P = a(\sqrt{2} + 1)/2$. В этом случае наименьшее значение MN равно $R_2 - R_1$. Если же $b < a(\sqrt{2} + 1)/2$, то конусы не пересекаются и наименьшее значение MN равно EK.

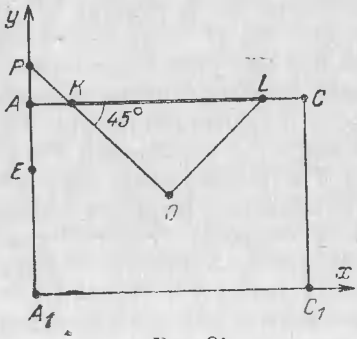


Рис. 81

11.15. Докажем, что кратчайший путь, идущий из точки A границы большего основания в диаметрально противоположную точку C другого основания, состоит из образующей AB и диаметра BC; длина этого пути равна $2R$. Пусть r — радиус меньшего основания, O — его центр. Рассмотрим путь, идущий из A в некоторую точку M меньшего основания. Так как развертка боковой поверхности конуса с углом α между осью и образующей представляет

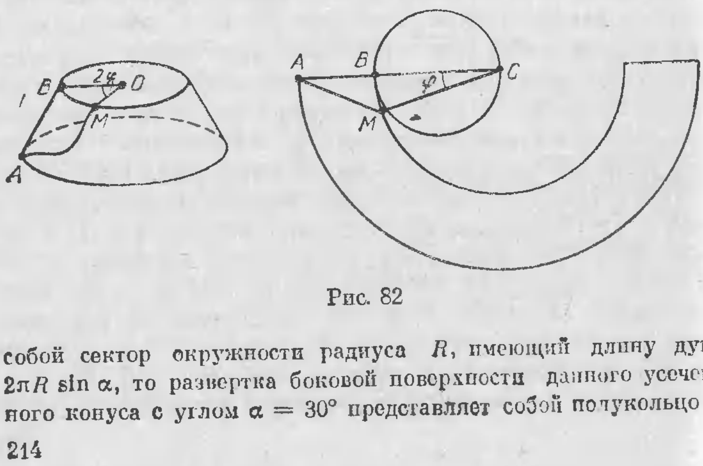


Рис. 82

собой сектор окружности радиуса R, имеющий длину дуги $2\pi R \sin \alpha$, то развертка боковой поверхности данного усеченного конуса с углом $\alpha = 30°$ представляет собой полукольцо с внешним радиусом $2R$ и внутренним радиусом $2r$. Кроме того, если $\angle BOM = 2\varphi$, то на развертке $\angle BCM = \varphi$ (см. рис. 82). Длина любого пути из A в M не меньше длины отрезка AM на развертке конуса. Следовательно, длина пути из A в C не меньше $AM + CM$, где $AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2AM \times \times CM \cos ACM = 4R^2 + 4r^2 - 8Rr \cos\varphi$ (на развертке) и $CM = = 2r \cos\varphi$ (на поверхности конуса). Остается проверить, что

$$\sqrt{4R^2 + 4r^2 - 8rR\cos\varphi} + 2r\cos\varphi \geqslant 2R.$$

Так как $2R - 2r\cos\varphi > 0$, то, перенося $2r\cos\varphi$ в правую часть и возводя обе части нового неравенства в квадрат, легко получаем требуемое.

11.16. Пусть углы между прямой l и прямыми OA, OB и OC равны α, β и γ. Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (задача 1.21), а значит, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + + \sin^2\gamma = 2$. Сумма расстояний от точек A, B и C до прямой l равна $a\sin\alpha + + b\sin\beta + c\sin\gamma$. Пусть $x = = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$, $z = \sin\gamma$. В задаче требуется найти наибольшее и наименьшее значение величины $ax + by + cz$ при следующих условиях: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Эти условия выделяют на поверхности сферы $x^2 + + y^2 + z^2 = 2$ криволинейный треугольник (рис. 83).

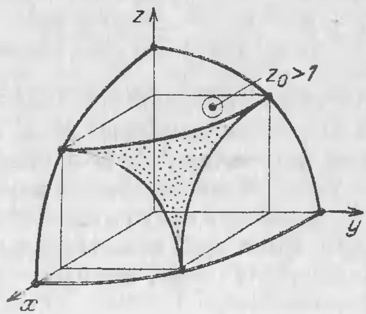


Рис. 83

Пусть плоскость $ax + by + cz = p_0$ касается поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ в точке M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0), причем $x_0, y_0, z_0 \geqslant 0$. Тогда $x_0 = \lambda a$, $y_0 = \lambda b$, $z_0 = \lambda c$ и $\lambda^2(a^2 + + b^2 + c^2) = 2$, а $p_0 = \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$. Если $z_0 \leqslant 1$ (т. е. $c^2 \leqslant a^2 + b^2$), то M_0 принадлежит выделенному криволинейному треугольнику, а значит, в этом случае p_0 — искомое наибольшее значение функции $ax + by + cz$. Пусть теперь $z_0 > 1$, т. е. $c^2 > a^2 + b^2$. Плоскость $ax + by + + cz = p$, где $p < p_0$, пересекает рассматриваемую сферу по окружности. Нас интересуют те значения p, при которых эта окружность пересекается с выделенным криволинейным треугольником. Наибольшее из таких p соответствует значению $z_0' = 1$. Нахождение x_0' и y_0' сводится к задаче: при каких x и y достигает наибольшего значения выражение $ax + by$, если $x^2 + + y^2 = 1$. Легко проверить, что $x_0' = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ и $y_0' =$

$=b/\sqrt{a^2+b^2}$, т. е. в этом случае искомое наибольшее значение p равно $\sqrt{a^2+b^2}+c$.

Докажем теперь, что наименьшее значение выражения $ax+$ $+by+cz$ на выделенном треугольнике достигается в вершине $x_1=y_1=1$, $z_1=0$. В самом деле, так как $0\leqslant x, y, z\leqslant 1$, то $x+y+z\geqslant x^2+y^2+z^2=2$, а значит, $y+z-1\geqslant 1-x$. Обе части этого неравенства неотрицательны, поэтому $b(y+$ $+z-1)\geqslant a(1-x)$. Следовательно, $ax+by+cz\geqslant ax+$ $+by+bz\geqslant a+b$.

11.17. Пусть A — точка пересечения прямой l с ребром двугранного угла. Отложим на прямой l отрезок AB длиной 1. Пусть B' — проекция точки B на плоскость другой грани, O — проекция точки B на ребро двугранного угла. Тогда $\sin BAB'=BB'=OB\sin BOB'=\sin BAO\sin BOB'$. Так как $\sin BOB'$ — синус данного двугранного угла, то $\sin BAB'$ максимален, когда $\angle BAO=90°$.

11.18. Пусть $AA_1=1$, $AM=x$. Введем систему координат, оси которой параллельны ребрам призмы. Векторы $\overrightarrow{MA_1}$ и $\overrightarrow{MC_1}$ имеют координаты $(0, 1, -x)$ и $(2, 1, 2-x)$; их скалярное произведение равно $1-2x+x^2=(1-x)^2\geqslant 0$. Поэтому $\angle A_1MC_1\leqslant 90°$; при $x=1$ этот угол равен $90°$.

11.19. Существует параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребра AA_1, DC и B_1C_1 которого лежат на осях данных цилиндров (задача 1.19); ясно, что этот параллелепипед является кубом с ребром $2R$.

а) Центр этого куба удален от всех ребер на расстояние $\sqrt{2}R$, а любая другая точка удалена на расстояние больше $\sqrt{2}R$ хотя бы от одной из прямых AA_1, DC, B_1C_1 (задача 1.31). Поэтому радиус наименьшего шара, касающегося всех трех цилиндров, равен $(\sqrt{2}-1)R$.

б) Пусть K, L и M — середины ребер AD, A_1B_1 и CC_1, т. е. точки попарного касания данных цилиндров. Тогда треугольник KLM — правильный, причем его центр O совпадает с центром куба (задача 1.3). Пусть K', L' и M' — середины ребер B_1C_1, DC и AA_1; эти точки симметричны точкам K, L и M относительно O. Докажем, что прямая l, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости KLM, удалена от прямых B_1C_1, DC и AA_1 на расстояние $\sqrt{2}R$. В самом деле, $K'O\perp l$ и $K'O\perp B_1C_1$, поэтому расстояние между прямыми l и B_1C_1 равно $K'O=\sqrt{2}R$; для остальных прямых доказательство аналогично. Следовательно, радиус цилиндра с осью l, касающегося трех данных цилиндров, равен $(\sqrt{2}-1)R$. Остается проверить, что расстояние от любой прямой l', пересекающей треугольник KLM, до одной из точек K', L', M' не превосходит $\sqrt{2}R$. Пусть, например, точка X пересечения прямой l' с плоскостью KLM лежит внутри треугольника KOL. Тогда $M'X \leqslant \sqrt{2}R$.

11.20. В процессе прохождения тетраэдра сквозь отверстие обязательно будет момент, когда вершина B находится по одну сторону от плоскости отверстия, вершина A — в плоскости отверстия, а вершины C и D — по другую сторону от плоскости отверстия (или в плоскости отверстия). Пусть в этот момент плоскость отверстия пересекает ребра BC и BD в точках M и N; окружность отверстия содержит треугольник AMN. Выясним теперь, при каком положении точек M и N радиус наименьшей окружности, содержащей треугольник AMN, будет наименьшим.

Предположим сначала, что треугольник AMN — остроугольный. Тогда наименьшей окружностью, его содержащей, является его описанная окружность (см. Прасолов, II, 15.127). Если сфера, экватором которой является описанная окружность треугольника AMN, не касается, например, ребра BC, то внутри этой сферы на ребре BC можно взять вблизи точки M такую точку M', что треугольник $AM'N$ остроугольный и радиус его описанной окружности меньше радиуса описанной окружности треугольника AMN. Поэтому в том положении, когда радиус описанной окружности треугольника AMN минимален, рассматриваемая сфера касается ребер BC и BD, а значит, $BM = BN = x$. Треугольник AMN — равнобедренный, и в нем $MN = x$, $AM = AN = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Пусть K — середина MN, L — проекция B на плоскость AMN. Так как центр сферы лежит в этой плоскости, а прямые BM и BN касаются данной сферы, то LN и LM — касательные к описанной окружности треугольника AMN. Если $\angle MAN = \alpha$, то $LK = MK \operatorname{tg} \alpha = x^2\sqrt{3x^2 - 4x + 4}/2(x^2 - 2x + 2)$. В треугольнике AKB угол $AKB = \beta$ тупой и $\cos \beta = (3x - 2)/\sqrt{3(3x^2 - 4x + 4)}$. Поэтому $LK = -KB \cos \beta = x(2 - 3x)/2\sqrt{3x^2 - 4x + 4}$. Приравнивая два выражения для LK, получим для x уравнение

$$3x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0. \qquad (1)$$

Радиус R описанной окружности треугольника AMN равен $(x^2 - x + 1)/\sqrt{3x^2 - 4x + 4}$. Приближенные вычисления корня уравнения дают значения $x \approx 0{,}3913$, $R \approx 0{,}4478$ (с ошибкой, не превосходящей 0,00005).

Предположим теперь, что треугольник AMN — не остроугольный. Пусть $BM = x$, $BN = y$. Тогда $AM^2 = 1 - x + x^2$,

$AN^2 = 1 - y + y^2$ и $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$. Угол MAN — острый, так как $AM^2 + AN^2 > MN^2$. Пусть для определенности угол ANM — не острый, т. е. $1 - x + x^2 \geqslant (x^2 + y^2 - xy) + (1 - y + y^2)$. Тогда $0 \leqslant x \leqslant y(1 - 2y)/(1 - y)$, поэтому $y \leqslant 0,5$, а значит, $x \leqslant 2y(1 - 2y) \leqslant 1/4$. На отрезке $[0, 1/2]$ квадратный трехчлен $1 - x + x^2$ убывает, поэтому $AM^2 \geqslant 1 - 1/4 + 1/16 = 13/16 > (0,9)^2$, т. е. в случае тупоугольного треугольника AMN радиус наименьшей окружности, его содержащей, больше, чем в случае остроугольного.

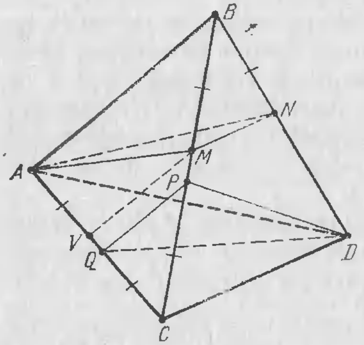


Рис. 84

Докажем, что в отверстие найденного радиуса R тетраэдр может пройти. Отложим на ребрах тетраэдра отрезки длины x, где x — корень уравнения (1), так, как показано на рис. 84, и проделаем следующую последовательность движений:

а) расположим тетраэдр так, чтобы окружность отверстия была описанной окружностью треугольника AMN, и будем поворачивать тетраэдр вокруг прямой MN до тех пор, пока точка V не попадет в плоскость отверстия;

б) сдвинем тетраэдр так, чтобы плоскость VMN оставалась параллельной своему исходному положению, а точки P и Q попали на границу отверстия;

в) будем поворачивать тетраэдр вокруг прямой PQ до тех пор, пока вершина D не попадет в плоскость отверстия.

Докажем, что все эти операции осуществимы. При повороте тетраэдра вокруг прямой MN плоскость отверстия пересекает его по трапеции, диагональ которой уменьшается от NA до NV, а острый угол при большем основании возрастает до 90°. Следовательно, радиус описанной около трапеции окружности уменьшается. Поэтому операция а) и аналогичная ей операция в) осуществимы.

Возьмем на ребре BC точку T. Сечение тетраэдра $ABCD$, параллельное VMN и проходящее через точку T, является прямоугольником с диагональю $\sqrt{t^2 + (1 - t)^2} = \sqrt{2(t - 0,5)^2 + 0,5^2}$, где $t = BT$. Из этого следует осуществимость операции б).

О т в е т: через отверстие радиуса 0,45 тетраэдр пройти может, а через отверстие радиуса 0,44 не может.

Глава 12

ПОСТРОЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

§ 1. Скрещивающиеся прямые

12.1. Найдите геометрическое место середин отрезков, параллельных данной плоскости и концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых.

12.2. Найдите геометрическое место середин отрезков данной длины d, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся перпендикулярных прямых.

12.3. Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников, параллельных данной плоскости и вершины которых лежат на данных прямых.

12.4. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые и точка A на одной из них. Через данные прямые проведены две перпендикулярные плоскости, образующие прямой двугранный угол. Найдите геометрическое место проекций точки A на ребра таких углов.

12.5. Даны прямая l и точка A. Через точку A проводится прямая l', скрещивающаяся с l. Пусть MN — общий перпендикуляр к этим двум прямым (точка M лежит на l'). Найдите ГМТ M.

12.6. Попарно скрещивающиеся прямые l_1, l_2 и l_3 перпендикулярны одной прямой и пересекают ее в точках A_1, A_2 и A_3 соответственно. Пусть M и N — такие точки прямых l_1 и l_2, что прямые MN и l_3 пересекаются. Найдите геометрическое место середин отрезков MN.

12.7. Даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Концы отрезков A_1A_2, параллельных данной плоскости, лежат на этих прямых. Докажите, что все сферы с диаметрами A_1A_2 имеют общую окружность.

12.8. Точки A и B двигаются по двум скрещивающимся прямым с постоянными, но неравными скоростями; отношение их скоростей равно k. Пусть M и

N — такие точки прямой AB, что $AM : BM = AN : BN = k$ (точка M лежит на отрезке AB). Докажите, что точки M и N двигаются по двум перпендикулярным прямым.

§ 2. Сфера и трехгранный угол

12.9. Прямые l_1 и l_2 касаются сферы. Отрезок MN с концами на этих прямых касается сферы в точке X. Найдите ГМТ X.

12.10. Точки A и B лежат по одну сторону от плоскости П, причем прямая AB не параллельна П. Найдите геометрическое место центров сфер, проходящих через данные точки и касающихся данной плоскости.

12.11. Центры двух сфер разного радиуса лежат в плоскости П. Найдите геометрическое место точек X этой плоскости, через которые можно провести плоскость, касающуюся сфер: а) внутренним образом; б) внешним образом. (Внутреннее касание — сферы лежат по разные стороны от плоскости, внешнее — по одну сторону.)

* * *

12.12. Две плоскости, параллельные данной плоскости П, пересекают ребра трехгранного угла в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 (одинаковыми буквами обозначены точки, лежащие на одном ребре). Найдите геометрическое место точек пересечения плоскостей ABC_1, AB_1C и A_1BC.

12.13. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до плоскостей граней данного трехгранного угла постоянна.

12.14. Окружность радиуса R касается граней данного трехгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найдите геометрическое место всех возможных положений ее центра.

§ 3. Разные ГМТ

12.15. На плоскости дан остроугольный треугольник ABC. Найдите геометрическое место проекций на эту плоскость всех точек X, для которых треугольники ABX, BCX и CAX остроугольные.

12.16. В тетраэдре $ABCD$ высота DP наименьшая. Докажите, что точка P принадлежит треугольнику, стороны которого проходят через вершины треугольника ABC параллельно его противоположным сторонам.

12.17. Дан куб. Вершины выпуклого многогранника лежат на его ребрах, причем на каждом ребре лежит ровно одна вершина. Найдите множество точек, принадлежащих всем таким многогранникам.

12.18. Дан плоский четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек M, что боковую поверхность пирамиды $MABCD$ можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится: а) прямоугольник; б) ромб.

12.19. Ломаная длины a выходит из начала координат, причем любая плоскость, параллельная координатной плоскости, пересекает ломаную не более чем в одной точке. Найдите геометрическое место концов таких ломаных.

§ 4. Построения на изображениях

12.20. Дано изображение проекции на некоторую плоскость куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отмеченными точками P, Q, R на ребрах AA_1, BC, B_1C_1 (рис. 85). Постройте на этом изображении сечение куба плоскостью PQR.

12.21. Дано изображение проекции на некоторую плоскость куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отмеченными точками P, Q, R на ребрах AA_1, BC и C_1D_1. Постройте на этом изображении сечение куба плоскостью PQR.

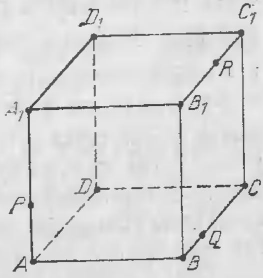


Рис. 85

12.22. а) Дано изображение проекции на некоторую плоскость трехгранного угла $Oabc$, на гранях Obc и Oac которого отмечены точки A и B. Постройте на этом изображении точку пересечения прямой AB с плоскостью Oab.

б) Дано изображение проекции на некоторую плоскость трехгранного угла с тремя отмеченными на его гранях точками. Постройте на этом изображении сечение трехгранного угла плоскостью, проходящей через отмеченные точки.

12.23. Дано изображение проекции на некоторую плоскость трехгранной призмы с параллельными ребрами a, b и c, на боковых гранях которой отмечены точки A, B и C. Постройте на этом изображении сечение призмы плоскостью ABC.

12.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — выпуклый шестигранник с четырехугольными гранями. Дано изображение проекций на некоторую плоскость трех его граней, сходящихся в вершине B (и тем самым — семи его вершин). Постройте изображение восьмой его вершины D_1.

§ 5. Построения, связанные с пространственными фигурами

12.25. На плоскости дано шесть отрезков, равных ребрам тетраэдра $ABCD$. Постройте отрезок, равный высоте h_a этого тетраэдра.

12.26. На плоскости нарисованы три угла, равных плоским углам α, β и γ трехгранного угла. Постройте на той же плоскости угол, равный двугранному углу, противолежащему плоскому углу α.

12.27. Дан шар. С помощью циркуля и линейки постройте на плоскости отрезок, равный радиусу этого шара.

Решения

12.1. Пусть данные прямые l_1 и l_2 пересекают данную плоскость П в точках P и Q (если $l_1 \| П$ или $l_2 \| П$, то искомых отрезков нет). Проведем через середину M отрезка PQ прямые l'_1 и l'_2, параллельные прямым l_1 и l_2 соответственно. Пусть некоторая плоскость, параллельная плоскости П, пересекает прямые l_1 и l_2 в точках A_1 и A_2, а прямые l'_1 и l'_2 — в точках M_1 и M_2. Тогда A_1A_2 — искомый отрезок, причем его середина совпадает с серединой отрезка M_1M_2, так как $M_1A_1M_2A_2$ — параллелограмм. Середины отрезков M_1M_2 лежат на одной прямой, так как все эти отрезки параллельны друг другу.

12.2. Середина любого отрезка с концами на двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, параллельной им и равноудаленной от них. Пусть расстояние между данными прямыми равно a. Тогда длина проекции на рассматриваемую «серединную» плоскость отрезка длиной d с концами на данных прямых равна $\sqrt{d^2 - a^2}$. Поэтому искомое ГМТ состоит из середин отрезков длиной $\sqrt{d^2 - a^2}$ с концами на проекциях данных прямых «на серединную» плоскость (рис. 86). Легко проверить, что $OC = AB/2$, т. е. искомое ГМТ является окружностью с центром O и радиусом $\sqrt{d^2 - a^2}/2$.

12.3. Геометрическим местом середин сторон AB указанных треугольников является прямая l (см. задачу 12.1). Искомое ГМТ состоит из точек, делящих в отношении 1 : 2 отрезки, параллельные данной плоскости и концы которых лежат на прямой l и на третьей данной прямой. Слегка изменив решение задачи 12.1, можно доказать, что это ГМТ тоже является прямой.

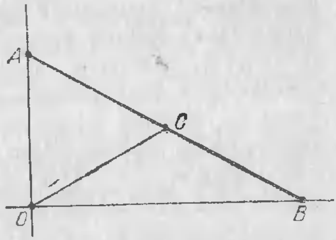


Рис. 86

12.4. Пусть π_1 и π_2 — перпендикулярные плоскости, проходящие через прямые l_1 и l_2; l — прямая их пересечения; X — проекция на прямую l точки A, лежащей на прямой l_1. Проведем через точку A плоскость П, перпендикулярную прямой l_2. Так как $П \perp l_2$, то $П \perp \pi_2$. Поэтому прямая AX лежит в плоскости П. А значит, если B — точка пересечения П и l_2, то $\angle BXA = 90°$, т. е. точка X лежит на окружности с диаметром AB, построенной в плоскости П.

12.5. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную прямой l. Пусть M' и N' — проекции точек M и N на эту плоскость. Так как $MN \perp l$, то $M'N' \| MN$. Прямая MN перпендикулярна плоскости AMM', так как $NM \perp MM'$ и $NM \perp AM$; поэтому $NM \perp AM'$, а значит, точка M' лежит на окружности с диаметром $N'A$. Следовательно, искомое ГМТ — цилиндр, диаметрально противоположными образующими которого являются прямая l и прямая t, проходящая через точку A параллельно l; прямые l и t следует исключить.

12.6. При проекции на плоскость, перпендикулярную l_3, прямая l_3 переходит в точку A_3, а проекция $M'N'$ прямой MN проходит через эту точку; кроме того, проекции прямых l_1 и l_2 параллельны. Поэтому $\overrightarrow{A_1M'} : \overrightarrow{A_2N'} = \overrightarrow{A_1A_3} : \overrightarrow{A_2A_3} = \lambda$ — постоянное число, а значит, $\overrightarrow{A_1M} = t\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{A_2N} = t\mathbf{b}$. Пусть O и X — середины отрезков A_1A_2 и MN. Тогда $2\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2N} = t(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, т. е. все точки X лежат на одной прямой.

12.7. Пусть B_1B_2 — общий перпендикуляр к данным прямым (точки A_1 и B_1 лежат на одной данной прямой). Так как $A_2B_1 \perp A_1B_1$, точка B_1 принадлежит сфере с диаметром A_1A_2. Аналогично точка B_2 принадлежит этой сфере. Геометрическим местом середин отрезков A_1A_2, т. е. центров рассматриваемых сфер, является некоторая прямая l (задача 12.1). Любая точка этой прямой равноудалена от B_1 и B_2, поэтому $l \perp B_1B_2$. Пусть M — середина отрезка B_1B_2; O — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l. Окружность радиуса OB_1 с центром O, проходящая через точки B_1 и B_2, будет искомой.

12.8. Пусть A_1 и B_1 — положения точек A и B в другой момент времени; П — плоскость, параллельная данным скрещивающимся прямым. Рассмотрим проекцию на плоскость П параллельно прямой A_1B_1. Пусть A', B', M' и N' — проекции точек A, B, M и N; C' — проекция прямой A_1B_1. Точки M и N двигаются в фиксированных плоскостях, параллельных плоскости П, поэтому достаточно проверить, что точки M' и N' двигаются по двум перпендикулярным прямым. Так как $A'M' : M'B' = k = A'C' : C'B'$, то $C'M'$ — биссектриса угла $A'C'B'$. Аналогично $C'N'$ — биссектриса угла, смежного с углом $A'C'B'$. Биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны.

12.9. Пусть прямая l_1, содержащая точку M, касается сферы в точке A, а прямая l_2 — в точке B. Проведем через прямую l_1 плоскость, параллельную l_2, и рассмотрим проекцию на эту плоскость параллельно прямой AB. Пусть N' и X' — образы точек N и X при этой проекции. Так как $AM = MX$ и $BN = NX$, то $AM : AN' = AM : BN = XM : XN = X'M : X'N'$, а значит, AX' — биссектриса угла MAN'. Поэтому точка X лежит в плоскости, проходящей через прямую AB и образующей равные углы с прямыми l_1 и l_2 (таких плоскостей две). Искомое ГМТ состоит из двух окружностей, по которым эти плоскости пересекают данную сферу; точки A и B при этом следует исключить.

12.10. Пусть C — точка пересечения прямой AB с данной плоскостью, M — точка касания одной из искомых сфер с плоскостью П. Так как $CM^2 = CA \cdot CB$, точка M лежит на окружности радиуса $\sqrt{CA \cdot CB}$ с центром C. Следовательно, центр O сферы принадлежит боковой поверхности прямого цилиндра, основанием которого служит эта окружность. Кроме того, центр сферы принадлежит плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему.

Предположим теперь, что точка O равноудалена от A и B и расстояние от точки C до проекции M точки O на плоскость П равно $\sqrt{CA \cdot CB}$. Пусть CM_1 — касательная к сфере радиуса OA с центром O. Тогда $CM = CM_1$, поэтому $OM^2 = CO^2 - CM^2 = CO^2 - CM_1^2 = OM_1^2$, т. е. точка M принадлежит рассматриваемой сфере. А так как $OM \perp$ П, то M — точка касания этой сферы с плоскостью П.

Итак, искомое ГМТ является пересечением боковой поверхности цилиндра с плоскостью.

12.11. а) Пусть данные сферы пересекают плоскость П по окружностям S_1 и S_2. Общие внутренние касательные к этим окружностям разбивают плоскость на 4 части. Рассмотрим прямой круговой конус, осевым сечением которого являются те части, которые содержат S_1 и S_2. Плоскости, касающиеся данных сфер внутренним образом, касаются этого конуса. Любая такая плоскость пересекает плоскость П по прямой, лежащей вне осевого сечения конуса. Искомое ГМТ состоит из точек, лежащих вне осевого сечения конуса (граница осевого сечения входит в ГМТ).

б) Решается аналогично задаче а). Проводятся общие внешние касательные и рассматривается осевое сечение, состоящее из части плоскости, содержащей обе окружности, и части, ей симметричной.

12.12. Пересечением плоскостей ABC_1 и AB_1C является прямая AM, где M — точка пересечения диагоналей BC_1 и B_1C трапеции BCC_1B_1. Точка M лежит на прямой l, проходящей через середины отрезков BC и B_1C_1 и вершину данного трехгранного угла (см. Прасолов, 1.22). Прямая l однозначно определяется плоскостью П; поэтому однозначно определена плоскость Π_a, содержащая прямую l и точку A. Точка пересечения прямой AM с плоскостью A_1BC принадлежит плоскости Π_a, так как этой плоскости принадлежит вся прямая AM. Аналогично Π_a построим плоскость Π_b; пусть m — прямая пересечения этих плоскостей (плоскость Π_c тоже проходит через прямую m). Искомое ГМТ состоит из точек этой прямой, лежащих внутри данного трехгранного угла.

12.13. На ребрах данного трехгранного угла с вершиной O выберем точки A, B и C, расстояния от которых до плоскостей граней равны данному числу a. Площадь S каждого из треугольников OAB, OBC и OCA равна $3V/a$, где V — объем тетраэдра $OABC$. Пусть точка X лежит внутри трехгранного угла $OABC$, причем расстояния от нее до плоскостей его граней равны a_1, a_2 и a_3. Тогда сумма объемов пирамид с вершиной X и основаниями OAB, OBC и OCA равна $S(a_1 + a_2 + a_3)/3$. Поэтому $V = S(a_1 + a_2 + a_3)/3 \pm v$, где v — объем тетраэдра $XABC$. Так как $V = Sa/3$, то $a_1 + a_2 + a_3 = a$ тогда и только тогда, когда $v = 0$, т. е. X лежит в плоскости ABC.

Пусть точки A', B' и C' симметричны A, B и C относительно точки O. Так как любая точка лежит внутри одного из 8 трехгранных углов, образованных плоскостями граней данного трехгранного угла, то искомым ГМТ является поверхность выпуклого многогранника $ABCA'B'C'$.

12.14. Введем прямоугольную систему координат, направив ее оси по ребрам данного трехгранного угла. Пусть O_1 — центр окружности; П — плоскость окружности; α, β и γ — углы между плоскостью П и координатными плоскостями. Так как расстояние от точки O_1 до прямой пересечения плоскостей П и Oyz равно R, а угол между этими плоскостями равен α, то расстояние от точки O_1 до плоскости Oyz равно $R \sin \alpha$. Аналогичные рассуждения показывают, что точка O_1 имеет координаты $(R \sin \alpha,\ R \sin \beta,\ R \sin \gamma)$. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (задача 1.21), то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$, а значит, $OO_1 = \sqrt{2}R$. Кроме того, расстояние от точки O_1 до любой грани трехгранного угла не больше R. Искомое ГМТ является частью сферы радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в начале координат, ограниченной плоскостями $x = R$, $y = R$ и $z = R$.

12.15. Если углы XAB и XBA острые, то точка X лежит между плоскостями, проведенными через точки A и B перпендикулярно прямой AB (для точек X, не лежащих па отрезке AB, верно и обратное). Поэтому искомое ГМТ лежит внутри (но не па сторонах) выпуклого шестиугольника, стороны которого проходят через вершины треугольника ABC перпендикулярно его сторонам (рис. 87). Если расстояние от точки X до плоскости ABC больше, чем наибольшая сторона треугольника ABC, то углы AXB, AXC и BXC острые. Поэтому искомое ГМТ — внутренность указанного шестиугольника.

12.16. Достаточно проверить, что точка P удалена от каждой стороны треугольника ABC не более, чем его противоположная вершина. Докажем это утверждение, например, для стороны BC. Рассмотрим для этого проекцию па плоскость, перпендикулярную прямой BC; точки B и C при этой проекции переходят в одну точку M (рис. 88). Пусть $A'Q'$ — проекция соответствующей высоты тетраэдра. Так как $D'P \leqslant A'Q'$ по условию, то $D'M \leqslant A'M$. Ясно также, что $PM \leqslant D'M$.

12.17. Каждый рассматриваемый многогранник получается из данного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ путем отсечения тетраэдров от каждой из его вершин. Тетраэдр, отсекаемый от вершины A, содержится в тетраэдре AA_1BD. Таким образом, если от куба отсечь тетраэдры, каждый из которых задан тремя ребрами куба, выходящими из одной точки, то оставшаяся часть куба содержится в любом из рассматриваемых многогранников. Легко проверить, что оставшаяся часть является октаэдром с вершинами в центрах граней куба. Если же точка не принадлежит этому октаэдру, то нетрудно указать многогранник, которому она не принадлежит; в качестве такого многогранника можно взять тетраэдр AB_1CD_1 или тетраэдр A_1BC_1D.

12.18. Пусть P и Q — точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Тогда MP и MQ — прямые пересечения плоскостей противоположных граней пирамиды $MABCD$. Сечение пары плоскостей, пересекающихся по прямой l, представляет собой две параллельные прямые, только если плоскость сечения параллельна l. Поэтому сечение пирамиды $MABCD$ является параллелограммом, только если плоскость сечения параллельна плоскости MPQ; при этом стороны параллелограмма параллельны MP и MQ.

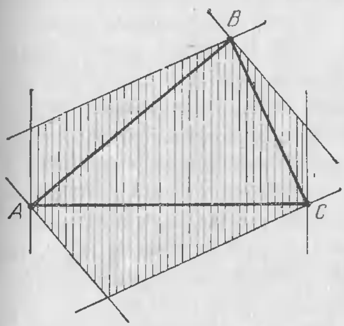


Рис. 87

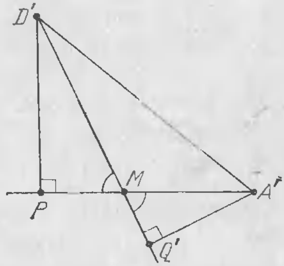


Рис. 88

а) В сечении может получиться прямоугольник, только если $\angle PMQ = 90°$, т. е. точка M лежит на сфере с диаметром PQ; точки этой сферы, лежащие в плоскости данного четырехугольника, следует исключить.

б) Пусть K и L — точки пересечения продолжений диагоналей AC и BD с прямой PQ. Так как диагонали параллелограмма, получающегося в сечении пирамиды $MABCD$, параллельны прямым MK и ML, то он будет ромбом, только если $\angle KML = 90°$, т. е. точка M лежит на сфере с диаметром KL; точки этой сферы, лежащие в плоскости данного четырехугольника, следует исключить.

12.19. Пусть (x, y, z) — координаты конца ломаной, (x_i, y_i, z_i) — координаты вектора i-го звена ломаной. Из условия задачи следует, что числа x_i, y_i и z_i ненулевые и имеют тот же знак, что и числа x, y и z соответственно. Поэтому $|x|+|y|+|z| = \sum(|x_i|+|y_i|+|z_i|)$ и $|x_i|+|y_i|+|z_i| > l_i$, где l_i — длина i-го звена ломаной. Следовательно, $|x|+|y|+|z| > \sum l_i = a$. Кроме того, длина вектора (x, y, z) не превосходит длины ломаной, т. е. она не превосходит a.

Докажем теперь, что все точки шара радиуса a с центром в начале координат, лежащие вне октаэдра, задаваемого уравнением $|x|+|y|+|z| \leqslant a$, кроме точек координатных плоскостей, принадлежат искомому ГМТ. Пусть $M = (x, y, z)$ — точка грани указанного октаэдра. Тогда ломаная с вершинами $(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$, $(x, y, 0)$ и (x, y, z) имеет длину a. «Растягивая» эту ломаную, т. е. перемещая ее конец по лучу OM, заметем все точки луча OM, лежащие между сферой и октаэдром (исключая точку грани октаэдра).

12.20. В процессе построения можно использовать то, что прямые, по которым некоторая плоскость пересекает пару параллельных плоскостей, параллельны. Ход построения виден из рис. 89. Сначала через точку P проводим прямую, параллельную прямой RQ, и находим ее точки пересечения с прямыми AD и A_1D_1. Эти точки соединяем с точками Q и R и получаем сечения граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. На сечении одной из двух оставшихся граней уже построены две точки, и остается только соединить их.

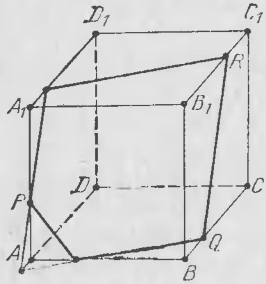


Рис. 89

12.21. В этом случае для построения уже не достаточно соображений, использованных в предыдущей задаче. Построим поэтому сначала точку M пересечения прямой PR и плоскости грани $ABCD$ следующим образом. Проекцией точки P на плоскость грани $ABCD$ является точка A, а проекцию R' точки R на эту плоскость легко построить (RC_1CR' — параллелограмм). M является точкой пересечения прямых PR и AR'. Соединив

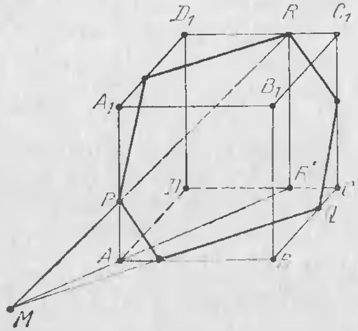


Рис. 90

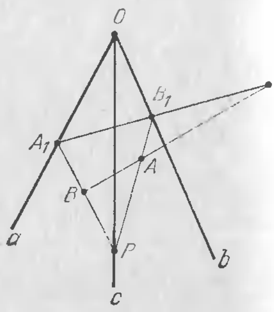


Рис. 91

точки M и Q, получим сечение грани $ABCD$. Дальнейшее построение проводится таким же способом, как и в предыдущей задаче (рис. 90).

12.22. а) Пусть P — произвольная точка ребра c. Плоскость PAB пересекает ребра a и b в тех же точках, в каких их пересекают прямые PB и PA соответственно. Обозначим эти точки A_1 и B_1. Тогда искомая точка является точкой пересечения прямых A_1B_1 и AB (рис. 91).

б) Пусть на гранях Obc, Oac и Oab отмечены точки A, B и C. Воспользовавшись задачей а), можно построить точку пересечения прямой AB с плоскостью Oab. Теперь на плоскости Oab известны две точки плоскости ABC: только что построенная точка и точка C. Соединив их, получим искомое сечение плоскости Oab. Дальнейшее построение очевидно.

12.23. Пусть точки A, B и C лежат на гранях, противолежащих прямым a, b и c. Построим точку X пересечения прямой AB с гранью, в которой лежит точка C. Выберем для этого на прямой c произвольную точку P и построим сечение призмы плоскостью PAB, т. е. найдем точки A_1 и B_1, в которых прямые PA и PB пересекают ребра b и a соответственно. Ясно, что X является точкой пересечения прямых AB и A_1B_1. Соединив точки X и C, получим искомое сечение грани, противолежащей ребру c. Дальнейшее построение очевидно.

12.24. Построим сначала прямую пересечения плоскостей граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Этой прямой принадлежит точка P

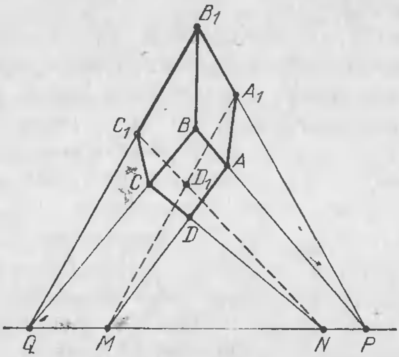


Рис. 92

пересечения прямых AB и A_1B_1 и точка Q пересечения прямых BC и B_1C_1. Пусть M — точка пересечения прямых DA и PQ. Тогда M — точка пересечения грани ADD_1A_1 с прямой PQ, т. е. точка D_1 лежит на прямой MA_1. Аналогично, если N — точка пересечения прямых CD и PQ, то точка D_1 лежит на прямой C_1N (рис. 92).

12.25. Опустим из вершины A тетраэдра $ABCD$ перпендикуляр AA_1 на плоскость BCD и перпендикуляры AB', AC' и AD' на прямые CD, BD и BC. По теореме о трех перпендикулярах $A_1B' \perp CD$, $A_1C' \perp BD$ и $A_1D' \perp BC$.

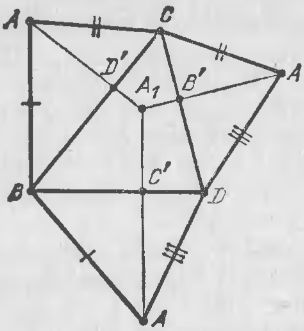


Рис. 93

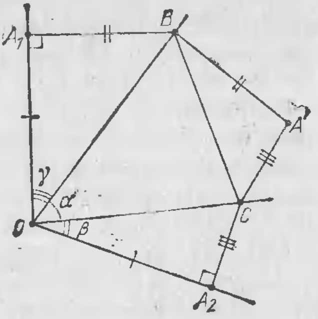


Рис. 94

Из этого вытекает следующее построение. Построим развертку тетраэдра $ABCD$ и опустим из вершины A высоты во всех гранях, ее содержащих (рис. 93). Точка A_1 является точкой пересечения продолжений этих высот, а искомый отрезок является катетом прямоугольного треугольника с гипотенузой AB' и катетом A_1B'.

12.26. Рассмотрим трехгранный угол с плоскими углами α, β и γ. Пусть O — его вершина. На ребре, противолежащем углу α, возьмем точку A и проведем через нее в плоскостях граней перпендикуляры AB и AC к ребру OA. Это построение можно выполнить на данной плоскости для развертки трехгранного угла (рис. 94). Построим теперь треугольник $BA'C$ со сторонами $BA' = BA_1$ и $CA' = CA_2$. Угол $BA'C$ является искомым.

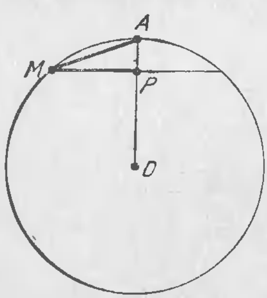


Рис. 95

12.27. Построим с помощью циркуля на данном шаре окружность с некоторым центром A и возьмем на ней три произвольные точки. С помощью циркуля легко построить на плоскости треугольник, равный треугольнику с вершинами в этих точках. Затем построим описанную окружность этого треугольника и тем самым найдем ее радиус.

Рассмотрим сечение данного шара, проходящее через его центр O, точку A и некоторую точку M построенной на шаре окружности. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на отрезок OA (рис. 95). Длины отрезков AM и MP известны, поэтому можно построить отрезок AO.

Глава 13

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 1. Принцип крайнего

13.1. Докажите, что в любом тетраэдре найдется ребро, образующее острые углы с ребрами, выходящими из его концов.

13.2. Докажите, что в любом тетраэдре найдется трехгранный угол, все плоские углы которого острые.

13.3. Докажите, что в любом тетраэдре найдутся три ребра, выходящих из одной вершины, из которых можно составить треугольник.

13.4. В основании пирамиды $A_1 \ldots A_nS$ лежит правильный n-угольник $A_1 \ldots A_n$. Докажите, что если $\angle SA_1A_2 = \angle SA_2A_3 = \ldots = \angle SA_nA_1$, то пирамида правильная.

13.5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите все точки грани ABC, равноудаленные от прямых AB_1, BC_1 и CA_1.

13.6. На каждой из $2k+1$ планет сидит астроном, наблюдающий ближайшую планету (все расстояния между планетами различны). Докажите, что найдется планета, которую никто не наблюдает.

13.7. В пространстве имеется несколько планет — шаров с единичными радиусами. Отметим на каждой планете множество всех точек, из которых не видна ни одна другая планета. Докажите, что сумма площадей отмеченных частей равна площади поверхности одной планеты.

13.8. Докажите, что куб нельзя разрезать на несколько попарно различных кубиков.

§ 2. Принцип Дирихле

13.9. Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с равным числом сторон.

13.10. Внутри шара радиуса 3 расположено несколько шаров, сумма радиусов которых равна 25 (эти шары могут пересекаться). Докажите, что для любой плоскости найдется плоскость, параллельная ей и пересекающая по крайней мере 9 внутренних шаров.

13.11. Дан выпуклый многогранник P_1 с девятью вершинами A_1, A_2, ..., A_9. Пусть P_2, P_3, ..., P_9 — многогранники, полученные из него параллельными переносами на векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\overrightarrow{A_1A_9}$ соответственно. Докажите, что по крайней мере два из 9 многогранников P_1, P_2, ..., P_9 имеют общую внутреннюю точку.

13.12. Прожектор, освещающий прямой трехгранный угол (октант), расположен в центре куба. Можно ли повернуть его так, чтобы он не освещал ни одной вершины куба?

13.13. Дан правильный тетраэдр с ребрами единичной длины. Докажите следующие утверждения:

а) на поверхности тетраэдра можно выбрать 4 точки так, чтобы расстояние от любой точки поверхности до одной из этих четырех точек не превосходило 0,5;

б) на поверхности тетраэдра нельзя выбрать трех точек, обладающих этим свойством.

§ 3. Выход в пространство

При решении планиметрических задач иногда оказывает существенную помощь то соображение, что плоскость расположена в пространстве, а значит, можно использовать вспомогательные элементы, находящиеся вне исходной плоскости. Такой метод решения планиметрических задач называется *выходом в пространство*.

13.14. По четырем прямолинейным дорогам, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, идут 4 пешехода с постоянными скоростями. Известно, что первый пешеход встретился со вторым, третьим и четвертым, а второй — с третьим и четвертым. Докажите, что тогда третий пешеход встретился с четвертым.

13.15. Три прямые пересекаются в точке O. На первой из них взяты точки A_1 и A_2, на второй — B_1 и B_2, на третьей — C_1 и C_2. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2 лежат на одной прямой (предполагается, что эти прямые пересекаются, т. е. не параллельны).

13.16. Три окружности попарно пересекаются и расположены так, как показано на рис. 96. Докажите, что общие хорды пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

13.17. Общие внешние касательные к трем окружностям на плоскости пересекаются в точках A, B и C. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

13.18. Какое наименьшее число полосок шириной 1 требуется для того, чтобы покрыть круг диаметра d?

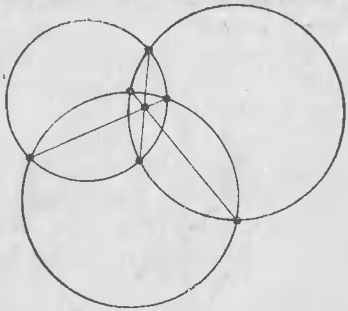
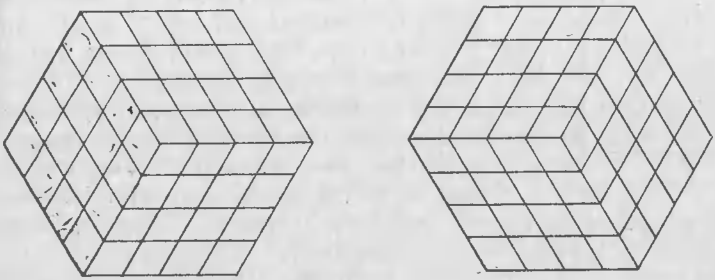


Рис. 96

13.19. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и N так, что $CM + CN = AB$. Прямые AM и AN делят диагональ BD на три отрезка. Докажите, что из этих отрезков всегда можно составить треугольник, причем один угол этого треугольника равен $60°$.

13.20. На продолжениях диагоналей правильного шестиугольника выбраны точки K, L и M так, что стороны шестиугольника пересекаются со сторонами треугольника KLM в шести точках, являющихся вершинами некоторого другого шестиугольника H. Продолжим те стороны шестиугольника H, которые не лежат на сторонах треугольника KLM. Пусть P, Q, R —



а б

Рис. 97

точки их попарных пересечений. Докажите, что точки P, Q и R лежат на продолжениях диагоналей исходного шестиугольника.

13.21. Рассмотрим такую фигуру, как на рис. 97,*а*, но сложенную из $3n^2$ ромбиков. Разрешается производить перестановки ромбиков, показанные на рис. 98. За какое наименьшее число таких операций можно получить фигуру, изображенную на рис. 97,*б*?

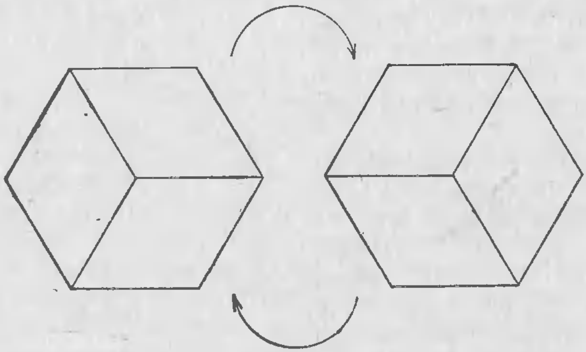


Рис. 98

13.22. Правильный шестиугольник разрезан на равновеликие параллелограммы. Докажите, что их число делится на 3.

13.23. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, причем его стороны AB, BC, CD и DA касаются ее в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что прямые KL, MN и AC либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

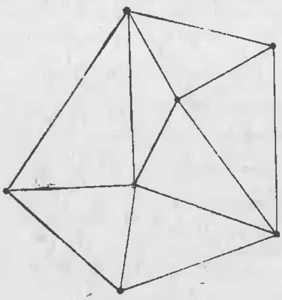


Рис. 99

13.24. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные вершины описанного шестиугольника, пересекаются в одной точке. (Теорема Брианшона.)

13.25. На плоскости дана конечная система точек. Ее *триангуляцией* называется такой набор непересекающихся отрезков с концами в этих точках, что любой другой отрезок с концами в данных точках пересекает хотя бы один из них (рис. 99). Докажите, что существует такая триангуляция, что ни одна из описанных окружностей получившихся треугольников не содержит внутри других точек, причем если никакие четыре данные точки не лежат на одной окружности, то такая триангуляция единственна.

* * *

13.26. На плоскости даны три луча с общим началом, и внутри каждого из углов, образованных этими лучами, отмечено по точке. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на данных лучах, а стороны проходили через данные точки.

13.27. На плоскости даны три параллельные прямые и три точки. Постройте треугольник, стороны (или продолжения сторон) которого проходят через данные точки, а вершины лежат на данных прямых.

Решения

13.1. Если AB — наибольшая сторона треугольника ABC, то $\angle C \geqslant \angle A$ и $\angle C \geqslant \angle B$; поэтому оба угла A и B должны быть острыми. Таким образом, к наибольшему ребру тетраэдра прилегают лишь острые углы.

13.2. Сумма углов каждой грани равна π, а граней у тетраэдра четыре. Поэтому сумма всех плоских углов тетраэдра равна 4π. А так как вершин у тетраэдра тоже четыре, то найдется вершина, сумма плоских углов при которой не больше π. Поэтому все плоские углы при этой вершине острые, так как любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов (задача 5.4).

13.3. Пусть AB — наибольшее ребро тетраэдра $ABCD$. Так как $(AC + AD - AB) + (BC + BD - BA) = (AD + BD - AB) + (AC + BC - AB) > 0$, то $AC + AD - AB > 0$ или $BC + BD - BA > 0$. В первом случае треугольник можно составить из ребер, выходящих из вершины A, а во втором — из ребер, выходящих из вершины B.

13.4. Построим на плоскости угол BAC, равный α, где $\alpha = \angle SA_1A_2 = \ldots = \angle SA_nA_1$. Будем считать, что длина отрезка AB равна стороне правильного многоугольника, лежащего в основании пирамиды. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ на луче AC можно так построить точку S_i, что $\triangle AS_iB = \triangle A_iSA_{i+1}$. Предположим, что не все точки S_i совпадают. Пусть S_k — ближайшая к B точка, S_l — наиболее удаленная от нее. Так как $S_kS_l > |S_kB - S_lB|$, то $|S_kA - S_lA| > |S_kB - S_lB|$, т. е. $|S_{k-1}B - S_{l-1}B| > |S_kB - S_lB|$. Но в правой части этого неравенства стоит разность между наибольшим и наименьшим числом, а в левой — разность двух чисел, заключенных между ними. Получено противоречие. Поэтому все точки S_i совпадают, а значит, точка S равноудалена от вершин основания $A_1 \ldots A_n$.

13.5. Пусть O — точка грани ABC, равноудаленная от указанных прямых. Можно считать, что A — наиболее удаленная от точки O вершина основания ABC. Рассмотрим треугольники AOB_1 и BOC_1. Стороны AB_1 и BC_1 этих треугольников равны, причем это — наибольшие стороны (см. задачу 10.5), т. е. основания высот, опущенных на эти стороны, лежат на самих сторонах. А так как эти высоты равны, то из неравенства $AO \geqslant BO$ следует неравенство $OB_1 \leqslant OC_1$. В прямоугольных треугольниках BB_1O и CC_1O катеты BB_1 и CC_1 равны, поэтому $BO \leqslant CO$.

Итак, из неравенства $AO \geqslant BO$ следует неравенство $BO \leqslant \leqslant CO$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем: $CO \geqslant \geqslant AO$ и $AO \leqslant BO$. Следовательно, $AO = BO = CO$, т. е. O — центр правильного треугольника ABC.

13.6. Рассмотрим пару планет A и B, расстояние между которыми наименьшее. Тогда их астрономы наблюдают планеты друг друга: астроном планеты A наблюдает планету B, а астроном планеты B наблюдает планету A. Возможны следующие два случая.

1. Хотя бы одну из планет A и B наблюдает еще какой-нибудь астроном. Тогда на $2k - 1$ планет остается $2k - 2$ наблюдателя. Поэтому найдется планета, которую никто не наблюдает.

2. Никакой из оставшихся астрономов не наблюдает ни планеты A, ни планеты B. Тогда можно выбросить эту пару планет и рассматривать такую же систему с меньшим числом планет (число планет при этом уменьшается на 2). В конце концов либо встретится первая ситуация, либо останется одна планета, которую никто не наблюдает.

13.7. Рассмотрим сначала случай двух планет. Каждая из них делится экватором, перпендикулярным соединяющему их центры отрезку, на два полушария, причем из одного полушария вторая планета видна, а из другого — нет. Заметим, что, вообще говоря, в условии задачи следовало бы уточнить, как считать — видна ли другая планета из точек этих экваторов или нет? Но так как площадь экваторов равна нулю, это не имеет никакого значения. В дальнейшем точки экваторов рассматривать не будем.

Пусть $O_1, \ldots, O_n$ — центры данных планет. Достаточно доказать, что для любого вектора **a** длиной 1 на планете с некоторым номером i найдется точка X, для которой $\overrightarrow{O_iX} = \mathbf{a}$ и из которой не видна ни одна другая планета, причем такая точка единственна.

Докажем сначала единственность точки X. Предположим, что $\overrightarrow{O_iX} = \overrightarrow{O_jY}$ и из точек X и Y не видно никаких других планет. Но из рассмотренного выше случая двух планет следует, что если из точки X не видна планета с номером j, то из точки Y планета с номером i будет видна. Получено противоречие.

Докажем теперь существование точки X. Введем систему координат, направив ось Ox в направлении вектора **a**. Тогда та точка данных планет, для которой координата x имеет наибольшее значение, является искомой.

13.8. Предположим, что куб разрезан на несколько попарно различных кубиков. Тогда каждая из его граней разрезана на квадратики. Выберем наименьший из всех квадратиков разбиения граней. Нетрудно убедиться, что наименьший из квадратиков разбиения квадрата не может прилегать к его границе. Поэтому кубик, основание которого — выбранный наименьший квадратик, лежит внутри «колодца», образованного прилегающими к его боковым граням кубиками. Таким образом, его грань, противолежащая основанию, должна быть заставлена еще меньшими кубиками. Выбираем среди них наименьший и повторяем для него те же самые рассуждения. Действуя таким образом, в конце концов мы дойдем до противоположной грани, и на ней окажется квадратик разбиения, меньший, чем тот, с которого мы начинали. Но мы начинали с наименьшего из всех квадратиков разбиения граней куба. Получено противоречие.

13.9. Пусть число граней многогранника равно n. Тогда каждая его грань может иметь от трех до $n - 1$ сторон, т. е. число сторон каждой из n граней может принимать одно из $n - 3$ значений. Следовательно, найдутся две грани с равным числом сторон.

13.10. Рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную данной плоскости. Исходный шар проецируется при этом в отрезок длиной 3, а внутренние шары — в отрезки, сумма длин которых равна 25. Предположим, что требуемой плоскости не существует, т. е. любая плоскость, параллельная данной, пересекает не более 8 внутренних шаров. Тогда любая точка отрезка длиной 3 принадлежит не более чем 8 отрезкам — проекциям внутренних шаров. Следовательно, сумма длин этих отрезков не превосходит 24. Получено противоречие.

13.11. Рассмотрим многогранник P, являющийся образом многогранника P_1 при гомотетии с центром A_1 и коэффициентом 2. Докажем, что все 9 многогранников лежат внутри его. Пусть $A_1, A_2^*, \ldots, A_9^*$ — вершины многогранника P. Докажем, например, что многогранник P_2 лежит внутри P. Для этого достаточно заметить, что при параллельном переносе на вектор

$\overrightarrow{A_1A_2}$ точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$ переходят в точки $A_2, A_2^*, A_3', \ldots$ $\ldots, A_9'$, где A_i' — середина отрезка $A_2^*A_i^*$.

Сумма объемов многогранников $P_1, P_2, \ldots, P_9$, лежащих внутри многогранника P, равна $9V$, где V — объем многогранника P_1, а объем многогранника P равен $8V$. Следовательно, указанные 9 многогранников не могут не иметь общих внутренних точек.

13.12. Докажем сначала, что прожектор можно повернуть так, чтобы он освещал соседние вершины A и B куба. Если $\angle AOB < 90°$, то из центра O куба можно осветить отрезок AB. Для этого нужно поместить отрезок AB в одной из граней освещаемого прожектором угла, а затем слегка пошевелить прожектор. Остается проверить, что $\angle AOB < 90°$. Это следует из того, что $AO^2 + BO^2 = \frac{3}{4}AB^2 + \frac{3}{4}AB^2 > AB^2$.

Повернем прожектор так, чтобы он освещал две вершины куба. Плоскости граней освещаемого прожектором угла разбивают пространство на 8 октантов. Так как в одном из них лежат две из восьми вершин куба, найдется октант, не содержащий ни одной вершины. Этот октант задает требуемое положение прожектора.

З а м е ч а н и е: Мы не рассматриваем того случая, когда одна из плоскостей граней октантов содержит вершину куба. От этого случая можно избавиться, слегка пошевелив прожектор.

13.13. а) Легко проверить, что середины ребер AB, BC, CD, DA обладают требуемым свойством. В самом деле, на двух ребрах каждой из граней лежат выбранные точки. Рассмотрим теперь, например, грань ABC. Пусть B_1 — середина ребра AC. Тогда треугольники ABB_1 и CBB_1 покрыты кругами радиуса 0,5 с центрами в серединах сторон AB и CB соответственно.

б) Возьмем на поверхности тетраэдра три точки и рассмотрим часть поверхности тетраэдра, покрытую шарами радиуса 0,5 с центрами в этих точках. Будем говорить, что некоторый угол грани покрыт, если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ покрыты все точки грани, удаленные от вершины данного угла меньше чем на ε. Достаточно доказать, что в случае трех точек всегда найдется непокрытый угол грани.

Если шар радиуса 0,5 с центром O покрывает две точки A и B, расстояние между которыми равно 1, то O — середина отрезка AB. Таким образом, если шар радиуса 0,5 покрывает две вершины тетраэдра, то его центр — середина ребра, соединяющего эти вершины. Из рис. 100 видно, что в этом случае шар покрывает 4 угла граней. При этом для непокрытых углов остаются непокрытыми их биссектрисы, и поэтому не может случиться так, что каждый шар в отдельности не покрывает угла, а все они вместе покрывают его. Ясно также, что если шар покрывает всего лишь одну вершину тетраэдра, то он покрывает лишь три угла.

Всего в тетраэдре имеется 12 углов граней. Таким образом, три шара радиуса 0,5 могут их покрыть, только если центры шаров — середины ребер тетраэдра, причем даже середины несмежных ребер, так как шары с центрами в серединах смежных ребер имеют

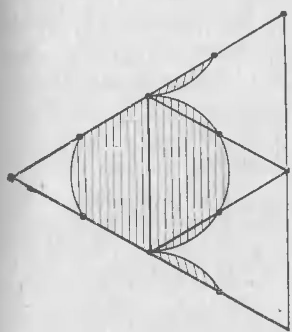


Рис. 100

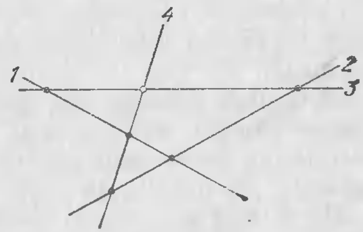


Рис. 101

общий покрытый ими угол. Ясно, что в тетраэдре нельзя выбрать три несмежных ребра.

13.14. Введем наряду с координатами в плоскости, в которой движутся пешеходы, еще и третью ось координат — ось времени. Рассмотрим графики движения пешеходов. Ясно, что пешеходы встречаются, когда их графики движения пересекаются. Из условия задачи следует, что графики третьего и четвертого пешеходов лежат в плоскости, заданной графиками двух первых пешеходов (рис. 101). Поэтому графики третьего и четвертого пешеходов пересекаются.

13.15. Возьмем в пространстве точки C_1' и C_2' так, что они проецируются в точки C_1 и C_2, причем сами они не лежат в исходной плоскости. Тогда точки пересечения прямых A_1C_1' и A_2C_2', B_1C_1' и B_2C_2' проецируются в точки пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2, B_1C_1 и B_2C_2. Поэтому указанные в условии задачи точки лежат на проекции прямой пересечения плоскостей $A_1B_1C_1'$ и $A_2B_2C_2'$, где прямая $C_1'C_2'$ содержит точку O.

13.16. Построим сферы, для которых наши окружности являются экваторами. Тогда общие хорды пар этих окружностей — проекции окружностей, по которым пересекаются построенные сферы. Поэтому достаточно доказать, что сферы имеют общую точку. Рассмотрим для этого окружность, по которой пересекаются две из наших сфер. Один конец диаметра этой окружности, лежащего в исходной плоскости, находится вне третьей сферы, а другой — внутри ее. Поэтому окружность пересекает сферу, т. е. три сферы имеют общую точку.

13.17. Рассмотрим для каждой нашей окружности конус, основанием которого является данная окружность, а высота его равна ее радиусу. Будем считать, что все эти конусы расположены по одну сторону от исходной плоскости. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, а O_1', O_2', O_3' — вершины конусов. Тогда точка пересечения общих внешних касательных к окружностям с номерами i и j совпадает с точкой пересечения прямой $O_i'O_j'$ с исходной плоскостью. Таким образом, точки A, B и C лежат на прямой пересечения плоскости $O_1'O_2'O_3'$ с исходной плоскостью.

13.18. При решении этой задачи воспользуемся тем, что площадь полоски, высекаемой на сфере диаметра d двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно h, равняется πdh (см. задачу 4.24).

Пусть круг диаметра d покрыт k полосками шириной 1. Рассмотрим сферу, для которой этот круг служит экватором. Проведя через границы полосок плоскости, перпендикулярные экватору, получим на сфере сферические полоски, причем площадь каждой из них равна πd (точнее говоря, не превосходит πd, так как одна граница исходной полоски может не пересекать круга). Сферические полоски тоже покрывают всю сферу, поэтому их площадь не меньше площади сферы, т. е. $k\pi d \geqslant \pi d^2$ и $k \geqslant d$. Ясно, что если $k \geqslant d$, то k полосками можно покрыть круг диаметра d.

13.19. Достроим квадрат $ABCD$ до куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Из условия задачи следует, что $CM = DN$ и $BM = CN$. Возьмем на ребре BB_1 точку K так, что $BK = DN$. Пусть отрезки AM и AN пересекают диагональ BD в точках P и Q, а R — точка пересечения отрезков AK и BA_1. Докажем, что стороны треугольника PBR равны соответствующим отрезкам диагонали BD. Ясно, что $BR = DQ$. Докажем теперь, что $PR = PQ$. Так как $BK = CM$ и $BM = CN$, то $KM = MN$, а значит, $\triangle AKM = \triangle ANM$. Кроме того, $KR = NQ$, поэтому $RP = PQ$. Остается заметить, что $\angle RBP = \angle A_1BD = 60^\circ$, так как треугольник A_1BD — равносторонний.

13.20. Обозначим исходный шестиугольник через $ABCC_1D_1A_1$ и будем считать, что он является проекцией куба $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ на плоскость, перпендикулярную диагонали $D'B_1'$. Пусть K', L', M' — точки прямых $B_1'C_1'$, $B_1'B'$ и $B_1'A_1'$, проецирующиеся в точки K, L и M (рис. 102). Тогда H — это сечение куба плоскостью $K'L'M'$, в частности, стороны треугольника PQR лежат на проекциях прямых, по которым плоскость $K'L'M'$ пересекается с плоскостями нижних граней куба (мы считаем, что точка B_1' расположена выше точки D'). Следовательно, точки P, Q, R являются проекциями точек пересечения продолжений нижних ребер куба $(D'A', D'C', D'D_1')$ с плоскостью $K'L'M'$, а значит, они лежат на продолжениях диагоналей исходного шестиугольника.

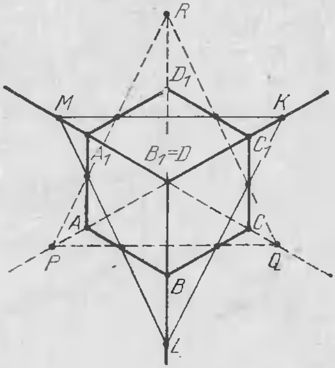


Рис. 102

13.21. Рассмотрим проекцию куба, сложенного из n^3 кубиков, на плоскость, перпендикулярную его диагонали. Тогда рис. 97, *а* можно рассматривать как проекцию всего этого куба, а рис. 97, *б* — как проекцию лишь задних граней куба. Допустимая операция — это вставление или убирание кубика, причем вставлять кубик можно только так, что три его грани соприкасаются с уже имеющимися гранями. Ясно, что n^3 кубиков меньше чем за n^3 операций вынуть нельзя, а за n^3 операций их вынуть можно.

13.22. Правильный шестиугольник, разрезанный на параллелограммы, можно представить как проекцию куба, из которого вырезано несколько прямоугольных параллелепипедов (рис. 103). Тогда проекции прямоугольников, параллельных граням куба, покрывают грани одним слоем. Таким образом, в исходном шестиугольнике сумма площадей параллелограммов каждого из трех видов (параллелограммы одного вида имеют параллельные стороны) равна одной трети площади шестиугольника. Так как параллелограммы равновелики, число параллелограммов каждого вида одно и то же. Поэтому их общее число делится на 3.

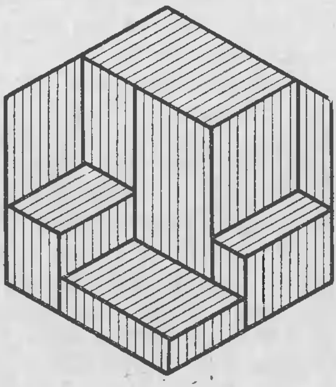


Рис. 103

13.23. Проведем через вершины четырехугольника $ABCD$ перпендикуляры к плоскости, в которой он расположен. Отложим на них отрезки AA', BB', CC' и DD', равные касательным, проведенным к окружности из соответствующих вершин четырехугольника, причем так, что точки A' и C' лежат по одну сторону от исходной плоскости, а B' и D' — по другую (рис. 104). Так как $AA' \parallel BB'$ и $\angle AKA' = 45° = \angle BKB'$, точка K лежит на отрезке $A'B'$. Аналогично точка L лежит на отрезке $B'C'$, а значит, прямая KL лежит в плоскости $A'B'C'$. Аналогично прямая MN лежит в плоскости $A'D'C'$.

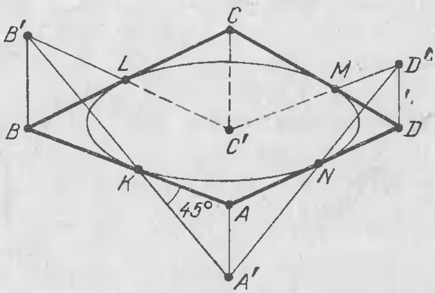


Рис. 104

Если прямая $A'C'$ параллельна исходной плоскости, то прямые AC, KL и MN параллельны прямой $A'C'$. Пусть теперь прямая $A'C'$ пересекает исходную плоскость в точке P, т. е. P — точка пересечения плоскостей $A'B'C'$, $A'D'C'$ и исходной плоскости. Тогда прямые KL, AC и MN проходят через точку P.

13.24. Проведем через вершины шестиугольника $ABCDEF$ перпендикуляры к плоскости, в которой он лежит, и отложим на них отрезки AA', . . ., FF', равные касательным, проведенным к окружности из соответствующих вершин, причем отложим так, что точки A', C' и E' лежат по одну сторону от исходной плоскости, а B', D' и F' — по другую (рис. 105). Докажем, что прямые $A'B'$ и $E'D'$ лежат в одной плоскости. Если $AB \parallel ED$, то $A'B' \parallel E'D'$. Если же прямые AB и ED пересекаются в некоторой точке P, то отложим на перпендикуляре к исходной плоскости, проведенном через точку P, отрезки PP' и PP'', равные касательной к окружности, проведенной из точки P. Пусть Q — точка касания окружности со стороной AB. Тогда отрезки $P'Q$, $P''Q$, $A'Q$ и $B'Q$ образуют с прямой AB углы в 45° и лежат в плоскости, перпендикулярной исходной плоскости и проходящей через прямую AB. Поэтому прямая $A'B'$ проходит либо через точку P', либо через точку P''. Нетрудно убедиться, что через ту же точку проходит и прямая $E'D'$. Таким образом, прямые $A'B'$ и $E'D'$ пересекаются, а значит, прямые $A'D'$ и $B'E'$ тоже пересекаются. Аналогично доказывается, что прямые

$A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ попарно пересекаются. Но так как эти прямые не лежат в одной плоскости, они должны пересекаться в одной точке. Прямые AD, BE и CF проходят через проекцию этой точки на исходную плоскость.

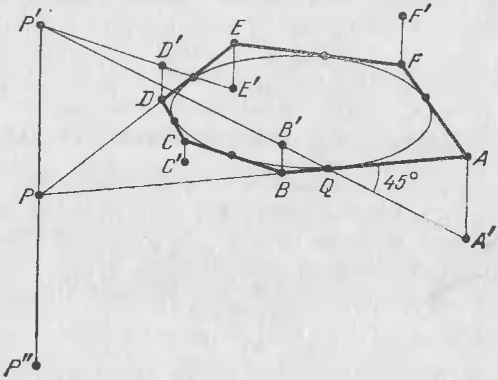


Рис. 105

13.25. Возьмем произвольную сферу, касающуюся данной плоскости, и рассмотрим стереографическую проекцию плоскости на сферу. На сфере получается конечная система точек, и они являются вершинами некоторого выпуклого многогранника. Для получения требуемой триангуляции нужно соединить те исходные точки, образы которых на сфере соединены ребрами получившегося выпуклого многогранника. Единственность триангуляции эквивалентна тому, что все грани многогранника являются треугольниками, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что никакие четыре данные точки не лежат на одной окружности.

13.26. Данные лучи и точки можно представить как изображение проекции трехгранного угла с тремя отмеченными на его гранях точками. В задаче требуется построить сечение этого угла плоскостью, проходящей через данные точки. Соответствующее построение описано в решении задачи 12.22, б.

13.27. Данные прямые можно представить как проекции прямых, на которых лежат ребра трехгранной призмы, а данные точки — как проекции точек, лежащих на ее гранях (или продолжениях граней). В задаче требуется построить сечение призмы плоскостью, проходящей через данные точки. Соответствующее построение описано в решении задачи 12.23.

Глава 14

ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Центр масс и его основные свойства

Пусть в пространстве задана система точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор пар (X_i, m_i), где X_i — точка пространства, а m_i — некоторое число, причем $m_1 + \ldots + m_n \neq 0$. *Центром масс* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ называется точка O, для которой выполняется равенство $m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{0}$.

14.1. а) Докажите, что центр масс системы точек существует и единствен.

б) Докажите, что если X — произвольная точка плоскости, а O — центр масс точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$, то $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_n}(m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots$
$\ldots + m_n\overrightarrow{XX_n})$.

14.2. Докажите, что центр масс системы точек $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ с массами $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ совпадает с центром масс двух точек — центра масс первой системы X с массой $a_1 + \ldots + a_n$ и центра масс Y второй системы с массой $b_1 + \ldots + b_m$.

14.3. а) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней, пересекаются в одной точке, причем каждый из них делится этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершины (эти отрезки называются *медианами* тетраэдра).

б) Докажите, что в той же точке пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, причем каждый из них делится этой точкой пополам.

14.4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость A_1DB пересекает диагональ AC_1 в точке M. Докажите, что $AM : AC_1 = 1 : 3$.

14.5. Дан треугольник ABC и прямая l; A_1, B_1 и C_1 — произвольные точки прямой l. Найдите геометрическое место центров масс треугольников с вершинами в серединах отрезков AA_1, BB_1 и CC_1.

14.6. На ребрах AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M и N так, что $AK : KB = DM : MC = p$ и $BL : LC = AN : ND = q$. Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются в одной точке O, причем $KO : OM = q$ и $NO : OL = p$.

14.7. На продолжениях высот тетраэдра $ABCD$ за вершины отложены отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, длины которых обратно пропорциональны высотам. Докажите, что центры масс тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают.

14.8. Две плоскости пересекают боковые ребра правильной n-угольной призмы в точках $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ соответственно, причем эти плоскости не имеют общих точек внутри призмы. Пусть M и N — центры масс многоугольников $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_n$.

а) Докажите, что сумма длин отрезков $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ равна nMN.

б) Докажите, что объем части призмы, заключенной между этими плоскостями, равен sMN, где s — площадь основания призмы.

§ 2. Момент инерции

Величина $I_M = m_1MX_1^2 + \ldots + m_nMX_n^2$ называется *моментом инерции* относительно точки M системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$.

14.9. Пусть O — центр масс системы точек, суммарная масса которой равна m. Докажите, что моменты инерции этой системы относительно точки O и произвольной точки X связаны соотношением $I_X = I_O + mXO^2$.

14.10. а) Докажите, что момент инерции относительно центра масс системы точек с единичными массами равен $\frac{1}{n}\sum\limits_{i<j} a_{ij}^2$, где n — число точек, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j.

б) Докажите, что момент инерции относительно центра масс системы точек с массами $m_1, \ldots, m_n$, равен $\frac{1}{m}\sum\limits_{i<j} m_im_ja_{ij}^2$, где $m = m_1 + \ldots + m_n$, a_{ij} — расстояние между точками с номерами i и j.

14.11. Докажите, что сумма квадратов длин медиан тетраэдра равна 4/9 суммы квадратов длин его ребер.

14.12. В вершины тетраэдра помещены единичные массы. Докажите, что момент инерции этой системы относительно центра масс равен сумме квадратов расстояний между серединами противоположных ребер тетраэдра.

14.13. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек X пространства, что $XA^2 + XB^2 = XC^2$.

14.14. Два треугольника — правильный со стороной a и равнобедренный прямоугольный с катетами, равными b,— расположены в пространстве так, что их центры масс совпадают. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин одного из них до всех вершин другого.

14.15. Внутри сферы радиуса R расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не превосходит n^2R^2.

14.16. Точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на одной сфере, а M — их центр масс. Прямые $MA_1, \ldots, MA_n$ пересекают эту сферу в точках $B_1, \ldots, B_n$ (отличных от $A_1, \ldots \ldots, A_n$). Докажите, что $MA_1 + \ldots + MA_n \leqslant \leqslant MB_1 + \ldots + MB_n$.

§ 3. Барицентрические координаты

Пусть в пространстве задан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Если точка X является центром масс вершин этого тетраэдра с массами m_1, m_2, m_3 и m_4, то числа (m_1, m_2, m_3, m_4) называются *барицентрическими координатами* точки X относительно тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$.

14.17. Пусть в пространстве задан тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$.

а) Докажите, что любая точка X имеет некоторые барицентрические координаты относительно него.

б) Докажите, что при условии $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1$ барицентрические координаты точки X определены однозначно.

14.18. В системе барицентрических координат, связанных с тетраэдром $A_1A_2A_3A_4$, найдите уравнение: а) прямой A_1A_2; б) плоскости $A_1A_2A_3$; в) плоскости, проходящей через A_3A_4 параллельно A_1A_2.

14.19. Докажите, что если точка с барицентрическими координатами (x_i) и (y_i) принадлежит некоторой прямой, то той же прямой принадлежит точка с координатами $(x_i + y_i)$.

14.20. Пусть S_a, S_b, S_c и S_d — площади граней BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что в системе барицентрических координат, связанных с тетраэдром $ABCD$:

а) центр вписанной сферы имеет координаты (S_a, S_b, S_c, S_d);

б) центр вневписанной сферы, касающейся грани ABC, имеет координаты $(S_a, S_b, S_c, -S_d)$.

14.21. Найдите уравнение описанной сферы тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ в барицентрических координатах, связанных с ним.

14.22. а) Докажите, что если центры I_1, I_2, I_3 и I_4 вневписанных сфер, касающихся граней тетраэдра, расположены на его описанной сфере, то этот тетраэдр равногранный.

б) Докажите, что верно и обратное: для равногранного тетраэдра точки I_1, I_2, I_3 и I_4 лежат на описанной сфере.

Решения

14.1. Пусть X и O — произвольные точки плоскости. Тогда $m_1\overrightarrow{OX}_1 + \ldots + m_n\overrightarrow{OX}_n = (m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OX} + m_1\overrightarrow{XX}_1 + \ldots + m_n\overrightarrow{XX}_n$, поэтому точка O является центром масс данной системы точек тогда и только тогда, когда $(m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OX} + m_1\overrightarrow{XX}_1 + \ldots + m_n\overrightarrow{XX}_n = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{XO} = \dfrac{1}{m_1 + \ldots + m_n} \times (m_1\overrightarrow{XX}_1 + \ldots + m_n\overrightarrow{XX}_n)$. Из этого рассуждения вытекают решения обеих задач.

14.2. Пусть Z — произвольная точка, $a = a_1 + \ldots + a_n$, $b = b_1 + \ldots + b_m$. Тогда $\overrightarrow{ZX} = \dfrac{1}{a}(a_1\overrightarrow{ZX}_1 + \ldots + a_n\overrightarrow{ZX}_n)$ и $\overrightarrow{ZY} = \dfrac{1}{b}(b_1\overrightarrow{ZY}_1 + \ldots + b_m\overrightarrow{ZY}_m)$. Если O — центр масс точки X с массой a и точки Y с массой b, то $\overrightarrow{ZO} = \dfrac{1}{a+b}(a\overrightarrow{ZX} + b\overrightarrow{ZY}) = \dfrac{1}{a+b}(a_1\overrightarrow{ZX}_1 + \ldots + a_n\overrightarrow{ZX}_n + b_1\overrightarrow{ZY}_1 + \ldots + b_m\overrightarrow{ZY}_m)$, т. е. O — центр масс системы точек $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ с массами $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$.

14.3. Поместим в вершины тетраэдра единичные массы. Центр масс этих точек расположен на отрезке, соединяющем вершину тетраэдра с центром масс вершин противоположной грани, причем делит этот отрезок в отношении $3:1$, считая от вершины.

Таким образом, все медианы тетраэдра проходят через его центр масс.

Центр масс вершин тетраэдра расположен также на отрезке, соединяющем центры масс противоположных ребер (т. е. их середины), причем он делит этот отрезок пополам.

14.4. Поместим в точки A_1, B и D единичные массы. Пусть O — центр масс этой системы. Тогда

$$3\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1},$$

т. е. точка O лежит на диагонали AC_1. С другой стороны, центр масс точек A_1, B и D лежит в плоскости A_1BD, поэтому $O = M$, а значит, $3\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC_1}$.

14.5. Поместим в точки A, B, C, A_1, B_1 и C_1 единичные массы. С одной стороны, центр масс этой системы совпадает с центром масс треугольника с вершинами в серединах отрезков AA_1, BB_1 и CC_1. С другой стороны, он совпадает с серединой отрезка, соединяющего центр масс X точек A_1, B_1 и C_1 с центром масс M треугольника ABC. Точка M фиксирована, а точка X перемещается по прямой l. Поэтому середина отрезка MX лежит на прямой, гомотетичной прямой l с центром M и коэффициентом 0,5.

14.6. Поместим в точки A, B, C и D массы 1, p, pq и q соответственно и рассмотрим центр масс P этой системы точек. Так как K — центр масс точек A и B, M — центр масс точек C и D, то точка P лежит на отрезке KM, причем $KP : PM = (pq + q) : (1 + p) = q$. Аналогично точка P лежит на отрезке LN, причем $NP : PL = p$.

14.7. Пусть M — центр масс тетраэдра $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}) = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1}$. Векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ перпендикулярны граням тетраэдра, а их длины пропорциональны площадям граней (это следует из того, что площади граней тетраэдра обратно пропорциональны длинам высот, опущенных на них). Следовательно, сумма этих векторов равна нулю (см. задачу 7.19), а значит, M — центр масс тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$.

14.8. а) Так как $\overrightarrow{MA_1} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{MB_1} + \ldots + \overrightarrow{MB_n} = \vec{0}$, то, складывая равенства $\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iN} = \overrightarrow{MN}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, получаем $\overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n} = n\overrightarrow{MN}$. Следовательно, отрезок MN параллелен ребрам призмы и $A_1B_1 + \ldots + A_nB_n = nMN$.

Заметим также, что взяв вместо многоугольника $B_1 \dots B_n$ одно из оснований призмы, получим, что прямая MN проходит через центры оснований призмы.

б) Разобьем основание призмы на треугольники, соединив ее центр с вершинами; площади этих треугольников равны. Рассмотрев треугольные призмы, основаниями которых служат полученные треугольники, данную часть призмы можно разрезать на многогранники с треугольными основаниями и параллельными боковыми ребрами. Согласно задаче 3.24 объемы этих многогранников равны $s(A_1B_1 + A_2B_2 + MN)/3n, \dots, s(A_nB_n + A_1B_1 + MN)/3n$. Поэтому объем всей части призмы, заключенной между данными плоскостями, равен $s(2(A_1B_1 + \dots + A_nB_n) + nMN)/3n$. Остается заметить, что $A_1B_1 + \dots + A_nB_n = nMN$.

14.9. Занумеруем точки данной системы. Пусть $\mathbf{x}_i$ — вектор с началом в точке O и концом в точке с номером i, причем этой точке приписана масса m_i. Тогда $\sum m_i\mathbf{x}_i = 0$. Пусть, далее, $\mathbf{a} = \overrightarrow{XO}$. Тогда $I_O = \sum m_i x_i^2$, $I_X = \sum m_i (\mathbf{x}_i + a)^2 = \sum m_i x_i^2 + 2\left(\sum m_i\mathbf{x}_i, \mathbf{a}\right) + \sum m_i a^2 = I_O + ma^2$.

14.10. а) Пусть $\mathbf{x}_i$ — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i. Тогда $\sum\limits_{i,j}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = \sum\limits_{i,j}\left(x_i^2 + x_j^2\right) - 2\sum\limits_{i,j}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, где суммирование ведется по всем возможным парам номеров точек. Ясно, что $\sum\limits_{i,j}\left(x_i^2 + x_j^2\right) = 2n\sum\limits_i x_i^2 = 2nI_O$ и $\sum\limits_{i,j}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum\limits_i\left(\mathbf{x}_i, \sum\limits_j \mathbf{x}_j\right) = 0$. Поэтому $2nI_O = \sum\limits_{i,j}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = 2\sum\limits_{i<j} a_{ij}^2$.

б) Пусть $\mathbf{x}_i$ — вектор с началом в центре масс O и концом в точке с номером i. Тогда $\sum\limits_{i,j} m_im_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = \sum\limits_{i,j} m_im_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) - 2\sum\limits_{i,j} m_im_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Ясно, что $\sum\limits_{i,j} m_im_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) = \sum\limits_i m_i \times \sum\limits_j\left(m_jx_i^2 + m_jx_j^2\right) = \sum\limits_i m_i\left(mx_i^2 + I_O\right) = 2mI_O$ и $\sum\limits_{i,j} m_im_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sum m_i\left(\mathbf{x}_i, \sum\limits_j m_j\mathbf{x}_j\right) = 0$. Поэтому $2mI_O = \sum\limits_{i,j} m_im_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = 2\sum\limits_{i<j} m_im_ja_{ij}^2$.

14.11. Поместим в вершины тетраэдра единичные массы. Так как их центр масс — точка пересечения медиан тетраэдра — делит каждую медиану в отношении $3:1$, то момент инерции тетраэдра относительно центра масс равен $(3/4m_a)^2 + \dots + (3/4m_d)^2 = 9/16\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\right)$. С другой стороны, согласно задаче 14.10, а он равен сумме квадратов длин ребер тетраэдра, деленной на 4.

14.12. Центр масс O тетраэдра $ABCD$ является точкой пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, причем точка O делит каждый из этих отрезков пополам (задача 14.3, б). Если K — середина ребра AB, то $AO^2 + BO^2 = 2OK^2 + AB^2/2$. Запишем такие равенства для всех ребер тетраэдра и сложим их. Так как из каждой вершины выходят 3 ребра, в левой части получится $3I_O$. Если L — середина ребра CD, то $2OK^2 + 2OL^2 = KL^2$. Кроме того, как следует из задачи 14.10, а, сумма квадратов длин ребер тетраэдра равна $4I_O$. Поэтому в правой части равенства получится $d + 2I_O$, где d — сумма квадратов расстояний между серединами противоположных ребер тетраэдра. После сокращения получаем требуемое.

14.13. Поместим в вершины A и B массы $+1$, а в вершину C — массу -1. Центр масс M этой системы точек является вершиной параллелограмма $ACBM$. По условию $I_X = XA^2 + XB^2 - XC^2 = 0$, а так как $I_X = (1 + 1 - 1)MX^2 + I_M$ (задача 14.9), то $MX^2 = -I_M = a^2 + b^2 - c^2$, где a, b и c — длины сторон треугольника ABC (задача 14.10, б). Итак, если $\angle C < 90°$, то искомое ГМТ — сфера радиуса $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ с центром M.

14.14. Если M — центр масс треугольника ABC, то $I_M = (AB^2 + BC^2 + AC^2)/3$ (см. задачу 14.10, а), поэтому для любой точки X имеем равенство $XA^2 + XB^2 + XC^2 = I_X = 3XM^2 + I_M = 3XM^2 + (AB^2 + BC^2 + AC^2)/3$. Если ABC — данный прямоугольный треугольник, $A_1B_1C_1$ — данный правильный треугольник, а M — их общий центр масс, то $A_1A^2 + A_1B^2 + A_1C^2 = 3A_1M^2 + 4b^2/3 = a^2 + 4b^2/3$. Записав аналогичные равенства для точек B_1 и C_1 и сложив их, получим, что искомая сумма квадратов равна $3a^2 + 4b^2$.

14.15. Поместим в данные точки единичные массы. Как следует из результата задачи 14.10, а, сумма квадратов попарных расстояний между этими точками равна nI, где I — момент инерции системы точек относительно центра масс. Рассмотрим теперь момент инерции системы относительно центра O сферы. С одной стороны, $I \leqslant I_O$ (см. задачу 14.9). С другой стороны, так как расстояние от точки O до любой из данных точек не превосходит R, то $I_O \leqslant nR^2$. Поэтому $nI \leqslant n^2R^2$, причем равенство достигается, только если $I = I_O$ (т. е. центр масс совпадает с центром сферы) и $I_O = nR^2$ (т. е. все точки расположены на поверхности данной сферы).

14.16. Пусть O — центр данной сферы. Если хорда AB проходит через точку M, то $AM \cdot BM = R^2 - d^2$, где $d = MO$. Обоначим через I_X момент инерции системы точек $A_1, \ldots, A_n$ относительно точки X. Тогда $I_O = I_M + nd^2$ (см. задачу 14.9). С другой стороны, так как $OA_i = R$, то $I_O = nR^2$. Поэтому $A_iM \cdot B_iM = R^2 - d^2 = \frac{1}{n}\left(A_1M^2 + \ldots + A_nM^2\right)$. Таким образом, если ввести обозначение $a_i = A_iM$, то требуемое неравенство перепишется в виде $a_1 + \ldots + a_n \leqslant \frac{1}{n}\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots \right.$ $\left. \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$. Для доказательства этого неравенства следует воспользоваться неравенством $x + y \leqslant \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ (последнее неравенство получается из неравенства $xy \leqslant x^2 - xy + y^2$ умножением обеих частей на $\frac{x+y}{xy}$).

14.17. Введем следующие обозначения: $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{A_4A_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{A_4A_2}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{A_4A_3}$ и $\mathbf{x} = \overrightarrow{XA_4}$. Точка X является центром масс вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ с массами m_1, m_2, m_3 и m_4 тогда и только тогда, когда $m_1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1) + m_2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) + m_3(\mathbf{x} + \mathbf{e}_3) + m_4\mathbf{x} = 0$, т. е. $m\mathbf{x} = -(m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3)$, где $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. Будем считать, что $m = 1$. Любой вектор $\mathbf{x}$ можно представить в виде $\mathbf{x} = -m_1\mathbf{e}_1 - m_2\mathbf{e}_2 - m_3\mathbf{e}_3$, причем числа m_1, m_2 и m_3 определены однозначно. Число m_4 находится по формуле $m_4 = 1 - m_1 - m_2 - m_3$.

14.18. Точка с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3, x_4): а) лежит на прямой A_1A_2, если $x_3 = x_4 = 0$; б) лежит в плоскости $A_1A_2A_3$, если $x_4 = 0$.

в) Воспользуемся обозначениями задачи 14.17. Точка X лежит в указанной плоскости, если $\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \mu\mathbf{e}_3$, т. е. $x_1 = -x_2$.

14.19. Точка с барицентрическими координатами $(x_i + y_i)$ является центром масс точек с координатами (x_i) и (y_i). Ясно также, что центр масс двух точек лежит на прямой, проходящей через них.

14.20. а) Центр вписанной сферы является точкой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов тетраэдра. Пусть M — точка пересечения ребра AB с биссекторной плоскостью двугранного угла при ребре CD. Тогда $AM : MB = S_b : S_a$ (задача 3.32), поэтому точка M имеет барицентрические координаты $(S_a, S_b, 0, 0)$. Биссекторная плоскость двугранного угла при ребре CD проходит через точку с координатами $(S_a, S_b, 0, 0)$ и через прямую CD, точки которой имеют координаты $(0, 0, x, y)$. Следовательно, эта плоскость состоит из точек с координатами (S_a, S_b, x, y) (см. задачу 14.19). Таким образом, точка (S_a, S_b, S_c, S_d) принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла при ребре CD. Аналогично доказывается, что она принадлежит и остальным биссекторным плоскостям.

б) Центр вневписанной сферы, касающейся грани ABC, является точкой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ребрах AD, BD, CD и биссекторных плоскостей внешних двугранных углов при ребрах AB, BC, CA. Пусть M — точка пересечения продолжения ребра CD с биссекторной плоскостью внешнего угла при ребре AB (если эта биссекторная плоскость параллельна ребру CD, то следует воспользоваться результатом задачи 14.18, в). Такие же рассуждения, как и при решении задачи 3.32, показывают, что $CM : MD = S_d : S_c$. Дальнейший ход решения такой же, как и в предыдущей задаче.

14.21. Пусть X — произвольная точка, O — центр описанной сферы данного тетраэдра, $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OA_i}$ и $\mathbf{a} = \overrightarrow{XO}$. Если точка X имеет барицентрические координаты (x_1, x_2, x_3, x_4), то $\sum x_i (\mathbf{a} + \mathbf{e}_i) = \sum x_i \overrightarrow{XA_i} = 0$, так как X — центр масс точек $A_1, \ldots, A_4$ с массами $x_1, \ldots, x_4$. Поэтому $\left(\sum x_i\right)\mathbf{a} = -\sum x_i\mathbf{e}_i$. Точка X принадлежит описанной сфере тетраэдра тогда и только тогда, когда $|\mathbf{a}| = XO = R$, где R — радиус этой сферы. Таким образом, описанная сфера тетраэдра задается в барицентрических координатах уравнением $R^2\left(\sum x_i\right)^2 = \left(\sum x_i\mathbf{e}_i\right)^2$, т. е. $R^2 \sum x_i^2 + 2R^2 \sum\limits_{i<j} x_ix_j = R^2 \sum x_i^2 + 2\sum\limits_{i<j} x_ix_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, так как $|\mathbf{e}_i| = R$. Это уравнение переписывается в виде $\sum\limits_{i<j} x_ix_j\left(R^2 - (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\right) = 0$. Заметим теперь, что $2\left(R^2 - (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\right) = a_{ij}^2$, где a_{ij} — длина ребра A_iA_j. В самом деле, $a_{ij}^2 = |\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j|^2 = |\mathbf{e}_i|^2 + |\mathbf{e}_j|^2 - 2(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 2\left(R^2 - (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\right)$. В итоге получаем, что описанная сфера тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ задается в барицентрических координатах уравнением $\sum\limits_{i<j} x_ix_ja_{ij} = 0$, где a_{ij} — длина ребра A_iA_j.

14.22. а) Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади граней $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$. Точки I_1, I_2, I_3 и I_4 имеют барицентрические координаты $(-S_1, S_2, S_3, S_4)$ $(S_1, -S_2, S_3, S_4)$, $(S_1, S_2, -S_3, S_4)$ и $(S_1, S_2, S_3, -S_4)$ (задача 14.20, б), а описанная сфера тетраэдра задается в барицентрических координатах уравнением $\sum\limits_{i<j} a_{ij}^2x_ix_j = 0$, где a_{ij} — длина ребра A_iA_j (задача 14.21).

Запишем условия принадлежности точек I_1 и I_2 описанной сфере (обозначая для простоты $a_{ij}^2S_iS_j$ через y_{ij}): $y_{12} + y_{13} + y_{14} = y_{23} + y_{34} + y_{24}$ и $y_{12} + y_{23} + y_{24} = y_{13} + y_{34} + y_{14}$. Складывая эти равенства, получаем $y_{12} = y_{34}$. Аналогично, складывая такие равенства для точек I_i и I_j, получаем $y_{ij} = y_{kl}$, где набор чисел $\{i, j, k, l\}$ совпадает с $\{1, 2, 3, 4\}$.

Перемножая равенства $y_{13} = y_{23}$ и $y_{14} = y_{24}$, получаем $y_{13}y_{14} = y_{23}y_{24}$, т. е. $S_1S_3a_{13}^2S_1S_4a_{14}^2 = S_2S_3a_{23}^2S_2S_4a_{24}^2$. Так как все числа S_i и a_{ij} положительны, то $S_1a_{13}a_{14} = S_2a_{23}a_{24}$, т. е. $\frac{a_{23}a_{24}}{S_1} = \frac{a_{13}a_{14}}{S_2}$. Домножив обе части равенства на a_{34}, получим $\frac{a_{23}a_{24}a_{34}}{S_1} = \frac{a_{13}a_{14}a_{34}}{S_2}$. В каждой части этого равенства стоит отношение произведения длин сторон треугольника к его площади. Легко проверить, что такое отношение равно учетверенному радиусу описанной окружности треугольника. В самом деле, $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{abc}{4R}$. Таким образом, радиусы описанных окружностей граней $A_2A_3A_4$ и $A_1A_3A_4$ равны. Аналогично доказывается, что радиусы всех граней тетраэдра равны. Остается воспользоваться результатом задачи 6.25,в.

б) Воспользуемся обозначениями предыдущей задачи. Для равногранного тетраэдра $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Поэтому условие принадлежности точки I_1 описанной сфере тетраэдра запишется в виде $a_{12} + a_{13} + a_{14} = a_{23} + a_{34} + a_{24}$. Это равенство следует из того, что $a_{12} = a_{34}$, $a_{13} = a_{24}$ и $a_{14} = a_{23}$. Принадлежность точек I_2, I_3 и I_4 описанной сфере проверяется аналогично.

З а м е ч а н и е. Утверждение задачи б) доказано другим способом в решении задачи 6.32.

Глава 15

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Примеры и контрпримеры

15.1. а) Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две несмежные грани перпендикулярны плоскости основания?

б) Существует ли шестиугольная пирамида, у которой три (смежные или нет) боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

15.2. Вершина E тетраэдра $ABCE$ расположена внутри тетраэдра $ABCD$. Обязательно ли сумма длин ребер внешнего тетраэдра больше суммы длин ребер внутреннего?

15.3. Существует ли тетраэдр, все грани которого — тупоугольные треугольники?

15.4. Существует ли такой тетраэдр, что основания всех его высот лежат вне соответствующих граней?

15.5. В пирамиде $SABC$ ребро SC перпендикулярно основанию. Могут ли углы ASB и ACB быть равны?

15.6. Любой ли трехгранный угол можно так пересечь плоскостью, что в сечении получится правильный треугольник?

15.7. Найдите плоские углы при вершинах трехгранного угла, если известно, что любое его сечение является остроугольным треугольником.

15.8. Можно ли расположить в пространстве 6 попарно не параллельных прямых так, что все попарные углы между ними будут равны?

15.9. Обязательно ли является кубом многогранник, все грани которого — равные между собой квадраты?

15.10. Все ребра многогранника равны и касаются одной сферы. Обязательно ли его вершины принадлежат одной сфере?

15.11. Может ли конечное множество точек в пространстве, не лежащих в одной плоскости, обладать следующим свойством: для любых двух точек A и B

из этого множества найдутся еще две такие точки C и D из него, что $AB \| CD$ и эти прямые не совпадают?

15.12. Можно ли так расположить 8 непересекающихся тетраэдров, чтобы любые два из них соприкасались по участку поверхности с ненулевой площадью?

§ 2. Целочисленные решетки

Множество точек пространства, все три координаты которых — целые числа, называется *целочисленной решеткой*, а сами эти точки — *узлами* целочисленной решетки. Плоскости, параллельные координатным плоскостям и проходящие через узлы целочисленной решетки, разбивают пространство на кубики с ребром 1.

15.13. Девять вершин выпуклого многогранника лежат в узлах целочисленной решетки. Докажите, что внутри его или на его поверхности есть еще один узел целочисленной решетки.

15.14. а) При каких n существует правильный n-угольник с вершинами в узлах (пространственной) целочисленной решетки?

б) Какие правильные многогранники можно расположить так, чтобы их вершины являлись узлами целочисленной решетки?

15.15. Можно ли провести конечное число плоскостей в пространстве так, чтобы каждый кубик целочисленной решетки пересекала хотя бы одна из этих плоскостей?

15.16. Докажите, что наименьшая площадь S параллелограмма с вершинами в целочисленных точках плоскости $ax + by + cz = 0$, где a, b и c — целые числа, равна наименьшей длине l вектора с целочисленными координатами, перпендикулярного этой плоскости.

15.17. Вершины A_1, B, C_1 и D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в узлах целочисленной решетки. Докажите, что остальные его вершины тоже лежат в узлах целочисленной решетки.

15.18. а) Дан параллелепипед (не обязательно прямоугольный) с вершинами в узлах целочисленной решетки, причем внутри его расположено a узлов решетки, внутри граней — b узлов, внутри ребер — c узлов. Докажите, что его объем равен $1 + a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$.

б) Докажите, что объем тетраэдра, целочисленными точками которого являются лишь его вершины, может быть сколь угодно велик.

§ 3. Разрезания. Разбиения. Раскраски

15.19. а) Разрежьте тетраэдр с ребром $2a$ на тетраэдры и октаэдры с ребром a.

б) Разрежьте октаэдр с ребром $2a$ на тетраэдры и октаэдры с ребром a.

15.20. Докажите, что пространство можно заполнить правильными тетраэдрами и октаэдрами (без промежутков).

15.21. Разрежьте куб на три равные пирамиды.

15.22. На какое наименьшее число тетраэдров можно разрезать куб?

15.23. Докажите, что любой тетраэдр можно так разрезать плоскостью на две части, что из них можно вновь сложить такой же тетраэдр, приложив их друг к другу иным способом.

15.24. Докажите, что любой многогранник можно разрезать на выпуклые многогранники.

15.25. а) Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разрезать на тетраэдры.

б) Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разрезать на тетраэдры, вершины которых расположены в вершинах многогранника.

* * *

15.26. На сколько частей разбивают пространство плоскости граней а) куба; б) тетраэдра?

15.27. На какое наибольшее число частей могут разделить сферу n окружностей?

15.28. В пространстве дано n плоскостей, причем любые три из них имеют ровно одну общую точку и никакие четыре не проходят через одну точку. Докажите, что они разбивают пространство на $(n^3 + 5n + 6)/6$ частей.

15.29. В пространстве дано n $(n \geqslant 5)$ плоскостей, причем любые три из них имеют ровно одну общую точку и никакие четыре не проходят через одну точку. Докажите, что среди частей, на которые эти плоскости разбивают пространство, имеется не менее $(2n - 3)/4$ тетраэдров.

* * *

15.30. Камень имеет форму правильного тетраэдра. Его перекатывают по плоскости, переворачивая через ребро. После нескольких таких переворачиваний камень вернулся на исходное место. Могут ли при этом его грани поменяться местами?

15.31. Прямоугольный параллелепипед размером $2l \times 2m \times 2n$ разрезан на кубики со стороной 1, и каждый из этих кубиков окрашен в один из 8 цветов, причем любые два кубика, имеющие хотя бы одну общую вершину, окрашены в разные цвета. Докажите, что все угловые кубики окрашены в разные цвета.

§ 4. Задачи-одиночки

15.32. Плоскость пересекает нижнее основание цилиндра по диаметру, а с верхним основанием имеет единственную общую точку. Докажите, что площадь отсеченной части боковой поверхности цилиндра равна площади его осевого сечения.

15.33. Внутри выпуклого многогранника объемом V дано $3(2^n - 1)$ точек. Докажите, что в нем содержится многогранник объемом $V/2^n$, во внутренней части которого нет ни одной из данных точек.

15.34. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько имеется различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

Решения

15.1. Да, такие пирамиды существуют. В качестве их оснований можно взять, например, четырехугольник и невыпуклый шестиугольник, изображенные на рис. 106; вершины этих пирамид лежат на перпендикулярах, восставленных из точек P и Q соответственно.

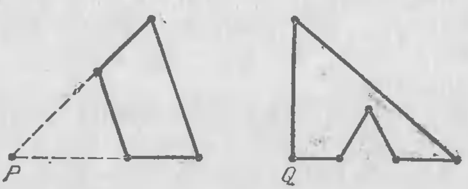


Рис. 106

15.2. Нет, не обязательно. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, основание AC которого много меньше боковой стороны. Вершину D поместим вблизи середины стороны AC, а вершину E — внутри тетраэдра $ABCD$ и вблизи вершины B. Периметр внешнего тетраэдра можно сделать сколь угодно близким к $3a$, где a — длина боковой стороны треугольника ABC, а периметр внутреннего — к $4a$.

15.3. Да, существует. Пусть в треугольнике ABC угол C тупой, точка D лежит на высоте, опущенной из вершины C. Слегка приподняв точку D над плоскостью ABC, получим требуемый тетраэдр.

15.4. Да, существует. Этим свойством обладает тетраэдр, у которого два противоположных двугранных угла тупые. Для построения такого тетраэдра можно, например, взять две диагонали квадрата и чуть-чуть приподнять одну над другой.

З а м е ч а н и е. Основание наименьшей высоты любого тетраэдра попадает внутрь треугольника, стороны которого проходят через вершины противолежащей грани параллельно ее ребрам (см. задачу 12.16).

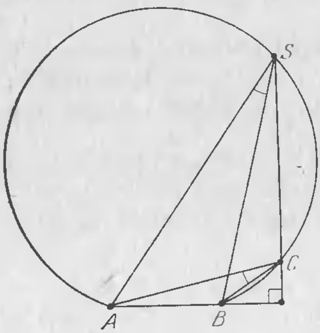


Рис. 107

15.5. Да, могут. Пусть точки C и S лежат на одной дуге окружности, проходящей через A и B, причем $SC \perp AB$ и точка C ближе к прямой AB, чем точка S (рис. 107). Тогда треугольник ABS можно так повернуть вокруг оси AB, что отрезок SC станет перпендикулярен плоскости ABC.

15.6. Нет, не любой. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$, у которого $\angle BSC < 60°$ и ребро AS перпендикулярно грани SBC. Предположим, что его сечение ABC является правильным треугольником. В прямоугольных треугольниках ABS и ACS равны гипотенузы, поэтому $SB = SC$. В равнобедренном треугольнике SBC угол при вершине S наименьший, поэтому $BC < SB$. Ясно также, что $SB < AB$, а значит, $BC < AB$. Получено противоречие.

15.7. Докажем сначала, что любое сечение трехгранного угла с прямыми плоскими углами является остроугольным треугольником. Пусть секущая плоскость отсекает от ребер отрезки длиной a, b и c. Тогда квадраты длин сторон сечения равны $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$ и $a^2 + c^2$. Сумма квадратов любых двух сторон больше квадрата третьей, поэтому треугольник остроугольный.

Докажем теперь, что если не все плоские углы трехгранного угла прямые, то у него есть сечение — тупоугольный треугольник. Если в трехгранном угле есть тупой плоский угол, то отложим на его сторонах равные отрезки SA и SB; если точка C на третьем ребре взята достаточно близко к вершине S, то треугольник ABC тупоугольный. Если же в трехгранном угле есть острый плоский угол, то на его сторонах можно так выбрать точки A и B, что угол SAB тупой; если точка C на третьем ребре взята достаточно близко к вершине S, то треугольник ABC — тупоугольный.

15.8. Да, можно. Проведем прямые, соединяющие центр икосаэдра с его вершинами (см. задачу 9.4). Легко проверитъ, что любые две такие прямые проходят через две точки, являющиеся концами одного ребра.

15.9. Нет, не обязательно. Возьмем куб и приложим к каждой из его граней по такому же кубу. У полученного (невыпуклого) многогранника все грани являются равными между собой квадратами.

15.10. Нет, не обязательно. Построим внешним образом на гранях куба как основаниях правильные четырехугольные пирамиды с двугранными углами при основании, равными 45°. В результате получим 12-гранник, имеющий 14 вершин, причем 8 из них — вершины куба, а 6 — вершины построенных пирамид; ребра куба являются диагоналями его граней, а поэтому его ребрами не являются.

Все ребра этого многогранника равны, и они равноудалены от центра куба. Одной сфере его вершины принадлежать не могут, так как вершины куба удалены от центра на расстояние $a\sqrt{3}/2$, где a — ребро куба, а остальные вершины удалены от центра куба на расстояние a.

15.11. Да, может. Легко проверить, что вершины правильного шестиугольника обладают требуемым свойством. Рассмотрим теперь два правильных шестиугольника с общим центром O, лежащие в разных плоскостях. Если A и B — вершины разных шестиугольников, то в качестве C и D можно взять точки, симметричные A и B относительно точки O.

15.12. Можно. На рис. 108 сплошной линией изображены 4 треугольника (один лежит внутри трех других). Рассмотрим 4 треугольные пирамиды с общей вершиной, основаниями которых служат эти треугольники. Аналогично строятся еще 4 треугольные пирамиды с общей вершиной (лежащей по другую сторону от плоскости рисунка), основаниями которых служат треугольники, изображенные пунктиром. Полученные 8 тетраэдров обладают требуемым свойством.

15.13. Каждая из трех координат узла целочисленной решетки может быть либо четной, либо нечетной; всего получается $2^3 = 8$ различных вариантов. Поэтому среди девяти вершин многогранника найдутся две вершины с координатами одной четности. Середина отрезка, соединяющего эти вершины, имеет целочисленные координаты.

15.14. а) Докажем сначала, что при $n = 3, 4, 6$ существует правильный n-угольник с вершинами в узлах целочисленной решетки. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершины которого имеют координаты $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Тогда середины ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A являются вершинами правильного шестиугольника и все они имеют целочисленные координаты (рис. 109); середины ребер AB, CC_1 и D_1A_1 являются вершинами правильного треугольника; ясно также, что $ABCD$ — квадрат с целочисленными вершинами.

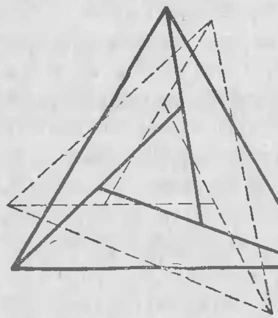


Рис. 108

Докажем теперь, что при $n \neq 3, 4, 6$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах целочисленной решетки. Предположим, что такой n-угольник существует при некотором $n \neq 3, 4, 6$. Среди всех n-угольников с вершинами в узлах решетки можно выбрать тот, у которого длина стороны наименьшая. Чтобы доказать это, нужно проверить, что длина стороны такого n-угольника может принимать лишь конечное число значений, меньших данного. Остается заметить, что длина любого отрезка с концами в узлах решетки равна $\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, где n_1, n_2 и n_3 — целые числа.

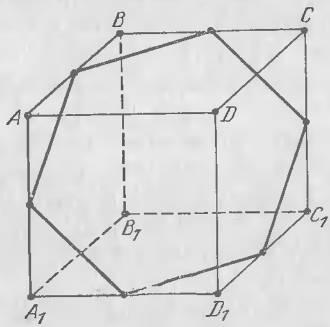


Рис. 109

Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — выбранный n-угольник с наименьшей длиной стороны. Рассмотрим правильный n-угольник $B_1 \ldots B_n$, где точка B_i получается из точки A_i переносом на вектор $\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$, т. е. $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$. Так как при переносе на вектор с целочисленными координатами узел решетки переходит в узел решетки, B_i является узлом решетки. Для того чтобы получить противоречие, остается доказать, что длина стороны многоугольника $B_1 \dots B_n$ строго меньше длины стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$ (и не равна нулю). Доказательство этого достаточно очевидно; нужно только разобрать отдельно два случая: $n = 5$ и $n \geqslant 7$.

б) Докажем сначала, что куб, правильный тетраэдр и октаэдр можно расположить требуемым образом. Рассмотрим для этого куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершины которого имеют координаты $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Тогда AB_1CD_1 — требуемый тетраэдр, а середины граней рассматриваемого куба являются вершинами требуемого октаэдра.

Докажем теперь, что додекаэдр и икосаэдр нельзя расположить требуемым образом. Как следует из предыдущей задачи, не существует правильного пятиугольника с вершинами в узлах решетки. Остается проверить, что и у додекаэдра, и у икосаэдра найдется набор вершин, задающих правильный пятиугольник. Для додекаэдра это вершины одной из граней, а для икосаэдра это вершины, являющиеся концами выходящих из одной вершины ребер.

15.15. Нельзя. Пусть в пространстве задано n плоскостей. Если кубик решетки пересекается с некоторой плоскостью, то он целиком лежит внутри полосы шириной $2\sqrt{3}$, состоящей из всех точек, удаленных от данной плоскости не более чем на $\sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ — наибольшее расстояние между точками кубика). Рассмотрим шар радиуса R. Если все кубики решетки, имеющие общие точки с этим шаром, пересекаются с данными плоскостями, то полосы шириной $2\sqrt{3}$, определяемые данными плоскостями, заполняют весь шар. Объем части каждой такой полосы, лежащей внутри шара, не превосходит $2\sqrt{3}\pi R^2$. Так как объем шара не превосходит суммы объемов полос, то $4\pi R^3/3 \leqslant \leqslant 2\sqrt{3}n\pi R^2$, т. е. $R \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}n$. Следовательно, если $R > \frac{3\sqrt{3}}{2}n$, то n плоскостей не могут пересекать всех кубиков решетки, имеющих общие точки с шаром радиуса R.

15.16. Можно считать, что числа a, b и c в совокупности взаимно просты, т. е. наибольшее число, на которое все они делятся, равно 1. Вектор, перпендикулярный этой плоскости, имеет координаты $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$; эти координаты целые, только если λ целое, поэтому l — длина вектора (a, b, c). Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — векторы соседних сторон параллелограмма с вершинами в целочисленных точках данной плоскости, то их векторное произведение (см. с. 133) является вектором с целочисленными координатами, перпендикулярным данной плоскости, причем длина этого вектора равна площади рассматриваемого параллелограмма. Следовательно, $S \geqslant l$.

Докажем теперь, что $S \leqslant l$. Для этого достаточно указать целочисленные векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, лежащие в данной плоскости, векторное произведение которых имеет координаты (a, b, c). Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b; $a' = a/d$ и $b' = b/d$. В качестве $\mathbf{u}$ возьмем вектор $(-b', a', 0)$. Если $\mathbf{v} = (x, y, z)$, то $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (a'z, b'z, -a'x - b'y)$. Поэтому в качестве z нужно взять d, а числа x и y подобрать так, чтобы выполнялось равенство $ax + by + cz = 0$, т. е. $-a'x - b'y = c$.

Остается доказать, что если числа p и q взаимно просты, то существуют такие целые числа x и y, что $px + qy = 1$; тогда $px' + qy' = c$ для $x' = cx$ и $y' = cy$. Можно считать, что $p > q > 0$. Будем последовательно производить деления с остатком: $p = qn_0 + r_1$, $q = r_1n_1 + r_2$, $r_1 = r_2n_2 + r_3, \ldots, r_{k-1} = r_kn_k + r_{k+1}$, $r_k = n_{k+1}r_{k+1}$. Так как числа p и q взаимно просты, то q и r_1 взаимно просты, а значит, r_1 и r_2 взаимно просты и т. д. Поэтому r_k и r_{k+1} взаимно просты, т. е. $r_{k+1} = 1$. Подставим в формулу $r_{k-1} = r_kn_k + 1$ значение r_k, полученное из предыдущей формулы $r_{k-2} = r_{k-1}n_{k-1} + r_k$; затем подставим значение r_{k-1}, полученное из формулы $r_{k-3} = r_{k-2}n_{k-2} + r_{k-1}$, и т. д. На каждом шаге получаются соотношения вида $xr_i + yr_{i-1} = 1$, поэтому в конце получится требуемое соотношение.

15.17. Пусть (x_i, y_i, z_i) — координаты i-й вершины правильного тетраэдра A_1BC_1D. Его центр, совпадающий с центром куба, имеет координаты $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$ и т. д. Точка, симметричная (x_1, y_1, z_1) относительно центра куба, имеет координаты $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2 - x_1 = (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2$ и т. д. Четность числа $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ совпадает с четностью числа $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Итак, нужно доказать, что числа $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и т. д.— четные. Будем считать, что начало координат находится в четвертой вершине тетраэдра, т. е. $x_4 = y_4 = z_4 = 0$.

Пусть u, v, w — целые числа. Легко проверить, что если число $u^2 + v^2 + w^2$ делится на 4, то все числа u, v и w — четные. Поэтому достаточно проверить, что число $u^2 + v^2 + w^2$, где $u = x_1 + x_2 + x_3$, $v = y_1 + y_2 + y_3$ и $w = z_1 + z_2 + z_3$, — четное. Пусть a — ребро куба. Так как $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2a^2$ и $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = (\sqrt{2}a)^2 \cos 60^\circ = a^2$, то $u^2 + v^2 + w^2 = 6a^2 + 6a^2 = 12a^2$. Число a^2 целое, потому что оно является суммой квадратов трех целочисленных координат.

15.18. а) Можно считать, что одна из вершин данного параллелепипеда находится в начале координат. Рассмотрим куб K_1, абсолютные величины координат точек которого не превосходят некоторого целого числа n. Разобьем пространство на параллелепипеды, равные данному, проведя плоскости, параллельные его граням. Соседние параллелепипеды получаются друг из друга переносом на целочисленный вектор, поэтому все эти параллелепипеды имеют целочисленные вершины. Пусть N — число наших параллелепипедов, имеющих общие точки с кубом K_1. Все они расположены внутри куба K_2, абсолютные величины координат точек которого не превосходят $n+d$, где d — наибольшее расстояние между вершинами данного параллелепипеда.

Обозначим объем данного параллелепипеда через V. Так как рассматриваемые N параллелепипедов содержат куб K_1 и содержатся в кубе K_2, то $(2n)^3 \leqslant NV \leqslant (2n+2d)^3$, т. е.

$$\left(\frac{1}{2n+2d}\right)^3 \leqslant \frac{1}{NV} \leqslant \left(\frac{1}{2n}\right)^3. \qquad (1)$$

Для каждого из рассматриваемых N параллелепипедов напишем рядом с его целочисленными точками следующие числа: рядом с внутренней точкой — число 1, рядом с точкой грани — число 1/2, рядом с точкой ребра — число 1/4, а рядом с вершиной — число 1/8 (в итоге рядом с точками, принадлежащими нескольким параллелепипедам, будет написано несколько чисел). Легко проверить, что сумма чисел, стоящих рядом с каждой целочисленной точкой куба K_1, равна 1 (нужно учесть, что каждая точка грани принадлежит двум параллелепипедам, точка ребра — четырем, а вершина — восьми); для целочисленных точек внутри куба K_2 такая сумма не превосходит 1, а для точек вне K_2 таких чисел нет. Поэтому сумма всех рассматриваемых чисел заключена между количествами целочисленных точек кубов K_1 и K_2. С другой стороны, она равна $N(1+a+b/2+c/4)$. Поэтому

$$(2n+1)^3 \leqslant N(1+a+b/2+c/4) \leqslant (2n+2d+1)^3. \qquad (2)$$

Перемножая неравенства (1) и (2), получаем, что для любого натурального n справедливы неравенства

$$\left(\frac{2n+1}{2n+2d}\right)^3 \leqslant \frac{1+a+b/2+c/4}{V} \leqslant \left(\frac{2n+2d+1}{2n}\right)^3.$$

Так как при n, стремящемся к бесконечности, и верхняя и нижняя оценки стремятся к 1, то $1+a+b/2+c/4=V$.

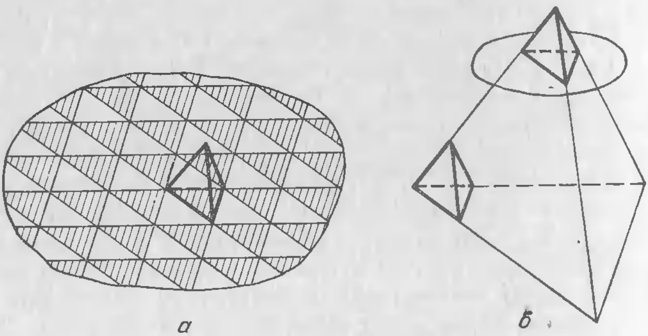
б) Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с целочисленными вершинами, ребра которого параллельны осям координат и их длины равны 1, 1 и n. Целочисленными точками тетраэдра A_1BC_1D являются лишь его вершины, а его объем равен $n/3$.

15.19. а) Середины ребер тетраэдра с ребром $2a$ являются вершинами октаэдра с ребром a. Если из тетраэдра вырезать этот октаэдр, то останутся 4 тетраэдра с ребром a.

б) Если от октаэдра с ребром $2a$ отрезать 6 октаэдров с ребром a, одна из вершин каждого из которых является вершиной исходного октаэдра, то останется 8 тетраэдров, основаниями которых являются треугольники, образованные серединами ребер граней.

15.20. Возьмем правильный тетраэдр с ребром a и проведем плоскости его граней, а также все параллельные им плоскости, удаленные от них на расстояния nh, где h — высота тетраэдра. Докажем, что эти плоскости разбивают пространство на тетраэдры и октаэдры с ребром a.

Каждая плоскость грани исходного тетраэдра разрезана на правильные треугольники с ребром a, причем треугольники эти двух типов: треугольники одного типа можно совместить переносом с гранью исходного тетраэдра, а треугольники другого типа нельзя (рис. 110, *а*). Докажем, что и любая рассматриваемая



а *б*

Рис. 110

плоскость разрезана остальными плоскостями на правильные треугольники. Для этого достаточно заметить, что если эта плоскость удалена от плоскости грани исходного тетраэдра на расстояние nh, то существует правильный тетраэдр с ребром $(n+1)a$, при одной из вершин которого расположен исходный тетраэдр, а наша плоскость является плоскостью грани тетраэдра при другой вершине (рис. 110, *б*). Рассматриваемая система плоскостей переходит в себя при переносе, переводящем вершину одного из этих тетраэдров в вершину другого. Так как любая грань каждого многогранника, на которые разбито пространство, является одним из треугольников, на которые разрезаны плоскости, то еще одним параллельным переносом можно либо совместить ее с гранью исходного тетраэдра, либо совместить пару их ребер (имеется в виду, что тетраэдр и многогранник имеют общую плоскость грани и расположены по одну сторону от нее).

В первом случае многогранник является правильным тетраэдром, а во втором — правильным октаэдром (см. решение задачи 15.19,а).

15.21. В качестве общей вершины этих пирамид возьмем одну вершину куба, а в качестве оснований — три несмежные с ней грани куба.

15.22. Если из куба $ABCDA'B'C'D'$ вырезать тетраэдр $A'BC'D$, то оставшаяся часть куба распадается на 4 тетраэдра, т. е. куб можно разрезать на 5 тетраэдров.

Докажем, что на меньшее число тетраэдров куб разрезать нельзя. Грань $ABCD$ не может быть гранью тетраэдра, на которые разбит куб, поэтому к ней прилегает по крайней мере два тетраэдра. Рассмотрим все тетраэдры, прилегающие к грани $ABCD$. Их высоты, опущенные на эту грань, не превосходят a, где a — ребро куба, а сумма площадей их граней, лежащих на $ABCD$, равна a^2. Поэтому сумма их объемов не превосходит $a^3/3$. Так как грани одного тетраэдра не могут располагаться на противоположных гранях куба, к граням $ABCD$ и $A'B'C'D'$ прилегает по крайней мере 4 тетраэдра, причем сумма их объемов не превосходит $2a^3/3 < a^3$. Следовательно, есть еще один тетраэдр разбиения.

15.23. Сумма углов каждой из четырех граней тетраэдра равна 180°, поэтому сумма всех плоских углов тетраэдра равна $4 \cdot 180°$. Следовательно, сумма плоских углов при одной из четырех вершин тетраэдра не превосходит 180°, а значит, сумма двух плоских углов при ней меньше 180°. Пусть для определенности сумма двух плоских углов при вершине A тетраэдра $ABCD$ меньше 180°. Возьмем на ребре AC точку L и построим в плоскости ABC угол ALK, равный углу CAD. Так как $\angle KAL + \angle KLA = \angle BAC + \angle CAD < 180°$, то лучи LK и AB пересекаются, и поэтому можно считать, что точка K лежит на луче AB. Аналогично строим на луче AD точку M так, что $\angle ALM = \angle BAC$. Если точка L достаточно близка к вершине A, то точки K и M лежат на ребрах AB и AD. Покажем, что плоскость KLM разрезает тетраэдр требуемым образом. В самом деле, $\triangle KAL = \triangle MLA$, поэтому существует движение пространства, переводящее $\triangle KAL$ в $\triangle MLA$. При этом преобразовании тетраэдр $AKLM$ переходит в себя.

15.24. Проведем все плоскости, содержащие грани данного многогранника. Все части, на которые они разбивают пространство, выпуклые. Поэтому они задают требуемое разбиение.

15.25. а) Возьмем внутри многогранника произвольную точку P и разрежем его грани на треугольники. Треугольные пирамиды с вершиной P, основаниями которых являются эти треугольники, дают искомое разбиение.

б) Докажем утверждение индукцией по числу вершин n. Для $n = 4$ оно очевидно. Предположим, что оно верно для любого выпуклого многогранника с n вершинами, и докажем, что тогда оно верно и для многогранника с $n + 1$ вершинами. Выделим одну из вершин этого многогранника и отрежем от него выпуклую оболочку остальных n вершин, т. е. наименьший выпуклый многогранник, содержащий их. По предположению индукции эту выпуклую оболочку — выпуклый многогранник с n вершинами — можно разрезать требуемым образом. Оставшаяся часть является многогранником (возможно, невыпуклым) с одной выделенной вершиной A, а все остальные вершины соединены с ней ребрами. Разрежем на треугольники его грани, не содержащие вершину A. Треугольные пирамиды с вершиной A, основаниями которых являются эти треугольники, дают искомое разбиение.

15.26. Плоскости граней обоих многогранников пересекаются только по прямым, содержащим их ребра. Поэтому каждая из частей, на которые разбито пространство, имеет общие точки с многогранником. Более того, каждой вершине, каждому ребру и каждой грани можно сопоставить ровно одну прилегающую к ней часть, причем этим будут исчерпаны все части, кроме самого многогранника. Таким образом, требуемое число равно $1 + \text{В} + \text{Г} + \text{Р}$. Для куба оно равно $1+8+6+12 = 27$, а для тетраэдра $1+4+4+6 = 15$.

15.27. Обозначим требуемое число через S_n. Ясно, что $S_1 = 2$. Выразим теперь S_{n+1} через S_n. Рассмотрим набор из $n + 1$ окружностей на сфере и выделим среди них одну окружность. Пусть остальные окружности делят сферу на s_n частей ($s_n \leqslant S_n$), а число частей, на которые они делят выделенную окружность, равно k. Так как k равно числу точек пересечения выделенной окружности с остальными n окружностями, а любые две окружности имеют не более двух точек пересечения, то $k \leqslant 2n$. Каждая из частей, на которые разделена выделенная окружность, делит на две части не более чем одну из ранее полученных частей сферы. Поэтому рассматриваемые $n + 1$ окружностей делят сферу на не более чем $s_n + k \leqslant S_n + 2n$ частей, причем равенство достигается, когда любые две окружности имеют две общие точки и никакие три окружности не проходят через одну точку. Следовательно, $S_{n+1} = S_n + 2n$, а значит, $S_n = S_{n-1} + 2(n-1) = S_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = \ldots$ $\ldots = S_1 + 2 + 4 + \ldots + 2(n-1) = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2$.

15.28. Докажем сначала, что n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, разбивают плоскость на $(n^2 + n + 2)/2$ частей. Доказательство проведем индукцией по n. Для $n = 0$ утверждение очевидно.

Предположим, что оно доказано для n прямых, и докажем его для $n+1$ прямых. Выделим среди них одну прямую. Остальные прямые делят ее на $n+1$ частей. Каждая из них делит на две части какую-либо из тех частей, на которые делят плоскость n прямых. Поэтому после проведения одной прямой число частей увеличилось на $n+1$. Остается заметить, что $\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}=$
$=\frac{n^2+n+2}{2}+n+1$.

Для плоскостей доказательство проводится почти так же, как и для прямых. Нужно лишь воспользоваться тем, что n плоскостей пересекают выделенную плоскость по n прямым, т. е. они разбивают ее на $(n^2+n+1)/2$ частей. Для $n=0$ утверждение очевидно; равенство

$$\frac{(n+1)^3+5(n+1)+6}{6}=\frac{n^3+5n+6}{6}+\frac{n^2+n+2}{2}$$

проверяется простыми вычислениями.

15.29. Рассмотрим все точки пересечения данных плоскостей. Докажем, что среди данных плоскостей имеется не более трех, не разделяющих эти точки. В самом деле, предположим, что есть 4 такие плоскости. Никакая плоскость не может пересекать всех ребер тетраэдра $ABCD$, заданного этими плоскостями; поэтому пятая данная плоскость (она есть, так как $n \geqslant 5$) пересекает, например, не ребро AB, а его продолжение в некоторой точке F. Пусть для определенности точка B лежит между A и F. Тогда плоскость BDC разделяет точки A и F, чего не может быть.

Таким образом, имеется $n-3$ плоскости, по обе стороны от которых лежат рассматриваемые точки. Заметим теперь, что если среди всех рассматриваемых точек, лежащих по одну сторону от некоторой из данных плоскостей, взять ближайшую, то три плоскости, проходящие через эту точку, задают вместе с нашей плоскостью один из требуемых тетраэдров. В самом деле, если бы этот тетраэдр пересекала какая-либо данная плоскость, то нашлась бы более близкая к нашей плоскости точка пересечения. Следовательно, имеется $n-3$ плоскости, к каждой из которой прилегает по крайней мере 2 тетраэдра, а к трем оставшимся плоскостям прилегает хотя бы по одному тетраэдру. Так как каждый тетраэдр прилегает ровно к четырем плоскостям, всего тетраэдров не менее $\frac{2(n-3)+3}{4}=\frac{2n-3}{4}$.

15.30. Нет, не могут. Разобьем плоскость на треугольники, равные грани тетраэдра, и занумеруем их так, как показано на рис. 111. Вырежем треугольник, состоящий из четырех таких треугольников, и свернем из него тетраэдр. Легко проверить, что если этот тетраэдр перевернуть через ребро, а затем вновь развернуть на плоскость, разрезав по боковым ребрам, то номера треугольников развертки совпадут с номерами треугольников на плоскости. Следовательно, после любого числа переворачиваний тетраэдра номера треугольников его развертки совпадут с номерами треугольников на плоскости.

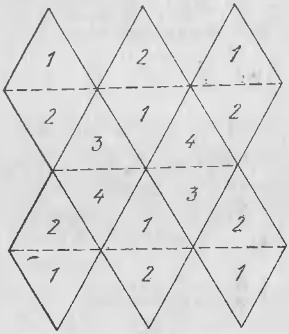


Рис. 111

15.31. Вырежем из данного параллелепипеда полоску толщиной в два кубика и склеим оставшиеся части. Докажем, что раскраска нового параллелепипеда обладает прежним свойством, т. е. соседние кубики окрашены в разные цвета. Это нужно проверить лишь для кубиков, прилегающих к плоскости разреза. Рассмотрим четыре кубика с общим ребром, прилегающих к плоскости разреза и расположенных по одну сторону от нее. Пусть они окрашены в цвета 1—4; будем двигаться в исходном параллелепипеде от этих кубиков ко второй плоскости разреза. Прилегающие к ним кубики первого вырезанного слоя должны быть окрашены в другие цвета, т. е. в цвета 5—8. Далее, прилегающие к этой новой четверке кубов кубики окрашены не в цвета 5—8, т. е. в цвета 1—4, а к ним, в свою очередь, прилегают кубики, окрашенные не в цвета 1—4, т. е. в цвета 5—8. Таким образом, к рассматриваемой четверке кубиков в новом параллелепипеде прилегают кубики других цветов. Рассмотрев для кубика, прилегающего к разрезу, все 4 такие четверки, получим требуемое.

Из любого прямоугольного параллелепипеда размером $2l\times 2m\times 2n$ с помощью описанной выше операции можно получить куб размером $2\times 2\times 2$, причем у него будут те же самые угловые кубики. Так как любые два кубика куба размером $2\times 2\times 2$ имеют хотя бы одну общую точку, все они окрашены в разные цвета.

15.32. Пусть O — центр нижнего основания цилиндра; AB — диаметр, по которому плоскость пересекает основание; α — угол между основанием и секущей плоскостью; r — радиус цилиндра. Рассмотрим произвольную образующую XY цилиндра, имеющую общую точку Z с секущей плоскостью (точка X лежит на нижнем основании). Если $\angle AOX = \varphi$, то расстояние от точки X до прямой AB равно $r\sin\varphi$. Поэтому $XZ = r\sin\varphi\operatorname{tg}\alpha$. Ясно также, что $r\operatorname{tg}\alpha = h$, где h — высота цилиндра.

Развернем поверхность цилиндра на плоскость, касающуюся его в точке A. Введем на этой плоскости систему координат, выбрав в качестве начала точку A, а ось Oy направив вверх, параллельно оси цилиндра. Точка X переходит при развертке в точку $(r\varphi, 0)$, а точка Z — в точку $(r\varphi, h\sin\varphi)$. Таким образом, развертка поверхности сечения ограничена осью Ox и графиком функции $y = h\sin(x/r)$ (рис. 112). Ее площадь равна

$$\int_0^{\pi r} h\sin(x/r)\,dx = (-hr\cos(x/r))\Big|_0^{\pi r} = 2hr.$$

Остается заметить, что площадь осевого сечения цилиндра тоже равна $2hr$.

15.33. Докажем сначала, что через любые две точки, лежащие внутри некоторого многогранника, можно провести плоскость, разбивающую его на две части с равными объемами. В самом деле, если некоторая плоскость разбивает его на части, отношение объемов которых равно x, то при поворачивании этой плоскости на $180°$ вокруг данной прямой отношение объемов непрерывно изменяется от x до $1/x$. Поэтому в некоторый момент оно равно 1.

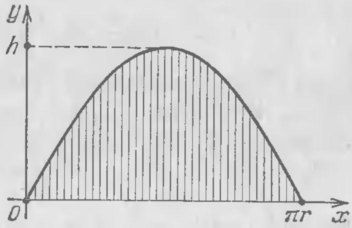


Рис. 112

Докажем требуемое утверждение индукцией по n. При $n = 1$ проведем через две из трех данных точек плоскость, разбивающую многогранник на части с равными объемами. Та часть, внутренности которой не принадлежит третья из данных точек, является искомым многогранником. Индукционный шаг доказывается таким же способом. Через две из $3(2^n - 1)$ данных точек проводим плоскость, разбивающую многогранник на части с равными объемами. Внутри одной из этих частей лежит не более $(3(2^n - 1) - 2)/2 = 3\cdot 2^{n-1} - 2{,}5$ точек. Так как число точек целое, оно не превосходит $3(2^{n-1} - 1)$. Остается применить к полученному многограннику предположение индукции.

15.34. Рассмотрим параллелепипед, для которого данные точки служат вершинами, и отметим его ребра, соединяющие данные точки. Пусть n — наибольшее число отмеченных ребер этого параллелепипеда, выходящих из одной вершины; число n может изменяться от 0 до 3. Несложный перебор показывает, что возможны лишь варианты, изображенные на рис. 113. Вычислим число параллелепипедов для каждого из этих вариантов. Первой может быть любая из четырех точек, второй — любая из трех оставшихся и т. д., т. е. 4 точки можно занумеровать 24 различными способами. После нумерации данных точек параллелепипед в каждом случае восстанавливается однозначно, поэтому нужно выяснить, какие нумерации приводят к одному и тому же параллелепипеду.

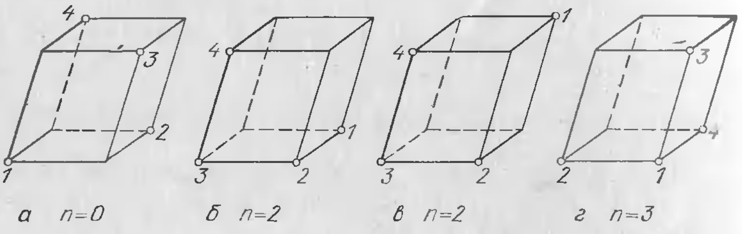


Рис. 113

а) Параллелепипед в случае а) не зависит от нумерации.

б) Нумерации 1, 2, 3, 4 и 4, 3, 2, 1 приводят к одному и тому же параллелепипеду, т. е. всего имеется 12 различных параллелепипедов.

в) Нумерации 1, 2, 3, 4 и 1, 4, 3, 2 приводят к одному и тому же параллелепипеду, т. е. всего имеется 12 различных параллелепипедов.

г) Параллелепипед зависит только от выбора первой точки, т. е. всего имеется 4 различных параллелепипеда.

В итоге получаем, что всего имеется $1+12+12+4=29$ различных параллелепипедов.

Глава 16

ИНВЕРСИЯ И СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Пусть в пространстве дана сфера S с центром O и радиусом R. *Инверсией* относительно сферы S называется преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A^*, лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O. Инверсию относительно S будем также называть инверсией с центром O и степенью R^2.

Всюду в этой главе образ точки A при инверсии обозначается через A^*.

§ 1. Свойства инверсии

16.1. а) Докажите, что при инверсии с центром O плоскость, проходящая через точку O, переходит в себя.

б) Докажите, что при инверсии с центром O плоскость, не содержащая точки O, переходит в сферу, проходящую через точку O.

в) Докажите, что при инверсии с центром O сфера, содержащая точку O, переходит в плоскость, не содержащую точки O.

16.2. Докажите, что при инверсии с центром O сфера, не содержащая точки O, переходит в сферу.

16.3. Докажите, что при инверсии прямая или окружность переходит в прямую или окружность.

Углом между двумя пересекающимися сферами (сферой и плоскостью) называется угол между касательными плоскостями к сферам, проведенными через любую из точек пересечения сфер.

Углом между двумя пересекающимися окружностями в пространстве (окружностью и прямой) называется угол между касательными прямыми к окружностям, проведенными через любую из точек пересечения окружностей.

16.4. а) Докажите, что при инверсии сохраняется угол между пересекающимися сферами (плоскостями).

б) Докажите, что при инверсии сохраняется угол между пересекающимися окружностями (прямыми).

16.5. Пусть O — центр инверсии, R^2 — ее степень. Докажите, что тогда $A^*B^* = \dfrac{AB\cdot R^2}{OA\cdot OB}$.

16.6. а) Дана сфера и точка O, лежащая вне ее. Докажите, что существует инверсия с центром O, переводящая данную сферу в себя.

б) Дана сфера и точка O, лежащая внутри ее. Докажите, что существует инверсия с центром O, переводящая данную сферу в сферу, симметричную ей относительно точки O.

16.7. Пусть инверсия с центром O переводит сферу S в сферу S^*. Докажите, что O — центр гомотетии, переводящей S в S^*.

§ 2. Сделаем инверсию

16.8. Докажите, что угол между описанными окружностями двух граней тетраэдра равен углу между описанными окружностями двух других его граней.

16.9. Даны сфера, окружность S на ней и некоторая точка P, лежащая вне сферы. Через точку P и каждую точку окружности S проводится прямая. Докажите, что вторые точки пересечения этих прямых со сферой лежат на некоторой окружности.

16.10. Пусть C — центр окружности, по которой конус с вершиной X касается данной сферы. Какое геометрическое место пробегают точки C, когда X пробегает плоскость Π, не имеющую со сферой общих точек?

16.11. Докажите, что для произвольного тетраэдра существует треугольник, длины сторон которого равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра.

Докажите также, что площадь этого треугольника равна $6VR$, где V — объем тетраэдра, а R — радиус его описанной сферы. (Формула Крелле.)

16.12. Дан выпуклый шестигранник, все грани которого — четырехугольники. Известно, что из восьми его вершин семь лежит на одной сфере. Докажите, что и восьмая вершина лежит на той же сфере.

§ 3. Наборы касающихся сфер

16.13. Четыре сферы попарно касаются друг друга в 6 различных точках. Докажите, что эти 6 точек лежат на одной сфере.

16.14. Даны четыре сферы S_1, S_2, S_3 и S_4, причем сферы S_1 и S_2 касаются в точке A_1; S_2 и S_3 — в точке

A_2; S_3 и S_4 — в точке A_3; S_4 и S_1 — в точке A_4. Докажите, что точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности (или на одной прямой).

16.15. Дано n сфер, каждая из которых касается всех остальных, причем никакие три сферы не касаются в одной точке. Докажите, что $n \leqslant 5$.

16.16. Даны три попарно касающиеся сферы Σ_1, Σ_2, Σ_3 и набор сфер $S_1, S_2, \ldots, S_n$, причем каждая сфера S_i касается всех трех сфер Σ_1, Σ_2, Σ_3, а также сфер S_{i-1} и S_{i+1} (имеется в виду, что $S_0 = S_n$ и $S_{n+1} = S_1$). Докажите, что если все точки касания сфер попарно различны и $n > 2$, то $n = 6$.

16.17. Четыре сферы попарно касаются в различных точках и их центры лежат в одной плоскости П. Сфера S касается всех этих сфер. Докажите, что отношение ее радиуса к расстоянию от ее центра до плоскости П равно $1 : \sqrt{3}$.

16.18. Три попарно касающихся шара касаются плоскости в трех точках, лежащих на окружности радиуса R. Докажите, что существуют два шара, касающиеся трех данных шаров и плоскости, причем если r и ρ $(\rho > r)$ — радиусы этих шаров, то $\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{R}$.

§ 4. Стереографическая проекция

Пусть плоскость П касается сферы S в точке A и AB — диаметр сферы. *Стереографической проекцией* называется отображение сферы S с выколотой точкой B на плоскость П, при котором точке X, принадлежащей сфере, сопоставляется точка Y, в которой луч BX пересекает плоскость П.

З а м е ч а н и е. Иногда дается другое определение стереографической проекции: вместо плоскости П берется плоскость П$'$, проходящая через центр O сферы S параллельно П. Ясно, что если Y' — точка пересечения луча BX с плоскостью П$'$, то $2\overrightarrow{OY'} = \overrightarrow{AY}$, так что разница между этими двумя определениями не существенна.

16.19. а) Докажите, что стереографическая проекция совпадает с ограничением на сферу некоторой инверсии в пространстве.

б) Докажите, что при стереографической проекции окружность на сфере, проходящая через точку B, переходит в прямую, а окружность, не проходящая через точку B, переходит в окружность.

в) Докажите, что при стереографической проекции сохраняются углы между окружностями.

16.20. В пространстве даны окружность S и точка B. Пусть A — проекция точки B на плоскость, содержащую окружность S. Для каждой точки D окружности S рассмотрим точку M — проекцию точки A на прямую DB. Докажите, что все точки M лежат на одной окружности.

16.21. Дана пирамида $SABCD$, причем ее основание — выпуклый четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, а плоскость основания перпендикулярна прямой SO, где O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки O на боковые грани пирамиды, лежат на одной окружности.

16.22. Сфера S с диаметром AB касается плоскости Π в точке A. Докажите, что при стереографической проекции симметрия относительно плоскости, параллельной Π и проходящей через центр сферы S, переходит в инверсию с центром A и степенью AB^2. Точнее говоря, если точки X_1 и X_2 симметричны относительно указанной плоскости, а Y_1 и Y_2 — образы точек X_1 и X_2 при стереографической проекции, то Y_1 — образ точки Y_2 при указанной инверсии.

Решения

16.1. Пусть R^2 — степень рассматриваемой инверсии.

а) Рассмотрим луч с началом в точке O и введем на нем координаты. Тогда точка с координатой x переходит при инверсии в точку с координатой R^2/x. Поэтому луч с началом в точке O переходит при инверсии в себя. Следовательно, плоскость, проходящая через точку O, переходит в себя.

б) Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на данную плоскость, а X — любая другая точка этой плоскости. Достаточно доказать, что $\angle OX^*A^* = 90°$ (в самом деле, это означает, что образ любой точки рассматриваемой плоскости лежит на сфере с диаметром OA^*). Ясно, что $OA^* : OX^* = = \left(\frac{R^2}{OA}\right) : \left(\frac{R^2}{OX}\right) = OX : OA$, т. е. $\triangle OX^*A^* \sim \triangle OAX$. Поэтому $\angle OX^*A^* = \angle OAX = 90°$. Для полноты доказательства следует заметить, что любая точка Y сферы с диаметром OA^*, отличная от точки O, является образом точки данной плоскости — точки пересечения луча OY с данной плоскостью.

в) Можно провести такие же рассуждения, как в предыдущей задаче, а можно и более или менее прямо ею воспользоваться, так как $(X^*)^* = X$.

16.2. Пусть A и B — точки, в которых данную сферу S пересекает прямая, проходящая через точку O и центр S, а X — произвольная точка S. Достаточно доказать, что $\angle A^*X^*B^* = 90°$. Из равенств $OA\cdot OA^* = OX\cdot OX^*$ и $OB\cdot OB^* = OX\cdot OX^*$ вытекает, что $\triangle OAX \backsim \triangle OX^*A^*$ и $\triangle OBX \backsim \triangle OX^*B^*$, а из этого получаем следующие соотношения между ориентированными углами (определение и свойства ориентированных углов см. Прасолов, I, с. 36): $\angle(A^*X^*, OA^*) = \angle(OX, XA)$ и $\angle(OB^*, X^*B^*) = \angle(XB, OX)$. Поэтому

$$\angle(A^*X^*, \quad X^*B^*) = \angle(A^*X^*, \quad OA^*) + \angle(OB^*, \quad X^*B^*) =$$
$$= \angle(OX, XA) + \angle(XB, OX) = \angle(XB, \ XA) = 90°.$$

16.3. Легко проверить, что любую прямую можно представить в виде пересечения двух плоскостей, а любую окружность — в виде пересечения сферы и плоскости. В задачах 16.1 и 16.2 было показано, что при инверсии плоскость или сфера переходит в плоскость или сферу. Поэтому при инверсии прямая или окружность переходит в фигуру, являющуюся пересечением либо двух плоскостей, либо сферы и плоскости, либо двух сфер. Остается заметить, что пересечением сферы и плоскости (а также пересечением двух сфер) является окружность.

16.4. а) Докажем сначала, что касающиеся сферы переходят при инверсии либо в касающиеся сферы (сферу и плоскость), либо в пару параллельных плоскостей. Это легко следует из того, что касающиеся сферы — это сферы, имеющие единственную общую точку (и того, что при инверсии сфера переходит в сферу или плоскость). Поэтому угол между образами сфер равен углу между образами касательных плоскостей, проведенных через точку пересечения.

Таким образом, остается провести доказательство для двух пересекающихся плоскостей Π_1 и Π_2. При инверсии с центром O плоскость Π_i переходит в сферу, проходящую через точку O, причем касательная плоскость к ней в этой точке параллельна плоскости Π_i. Из этого следует, что угол между образами плоскостей Π_1 и Π_2 равен углу между плоскостями Π_1 и Π_2.

б) Для начала нужно сформулировать определение касания окружностей в сохраняющемся при инверсии виде. Сделать это несложно: две окружности в пространстве касаются тогда и только тогда, когда они принадлежат одной сфере (или плоскости) и имеют единственную общую точку. Теперь уже легко доказать, что касающиеся окружности переходят при инверсии в касающиеся окружности (окружность и прямую) или пару параллельных прямых. Дальнейшее доказательство проводится точно так же, как и в задаче а).

16.5. Ясно, что $OA \cdot OA^* = R^2 = OB \cdot OB^*$. Поэтому $OA : OB^* = OB : OA^*$, т. е. $\triangle OAB \sim \triangle OB^*A^*$. Следовательно,

$$\frac{A^*B^*}{AB} = \frac{OB^*}{OA} = \frac{OB^*}{OA} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

16.6. Пусть X и Y — точки пересечения данной сферы с прямой, проходящей через точку O. Рассмотрим инверсию с центром O и коэффициентом R^2. Легко проверить, что в обеих задачах фактически требуется подобрать коэффициент R^2 так, чтобы для любой прямой, проходящей через точку O, выполнялось равенство $OX \cdot OY = R^2$. Остается заметить, что величина $OX \cdot OY$ не зависит от выбора прямой.

16.7. Пусть A_1 — точка сферы S, а A_2 — вторая точка пересечения прямой OA_1 со сферой S (если OA_1 — касательная к S, то $A_2 = A_1$). Легко проверить, что величина $d = OA_1 \cdot OA_2$ одна и та же для всех прямых, пересекающих сферу S. Если R^2 — степень инверсии, то $OA_1^* = \frac{R^2}{OA_1} = \frac{R^2}{d} OA_2$. Таким образом, если точка O лежит внутри сферы S, то A_1^* — образ точки A_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $-R^2/d$, а если точка O лежит вне сферы S, то A_1^* — образ точки A_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом R^2/d.

16.8. Рассмотрим инверсию с центром в вершине D тетраэдра $ABCD$. Описанные окружности граней DAB, DAC и DBC при этом перейдут в прямые A^*B^*, A^*C^* и B^*C^*, а описанная окружность грани ABC — в описанную окружность S треугольника $A^*B^*C^*$. Так как при инверсии углы между окружностями (или прямыми) сохраняются (см. задачу 16.4, б), нужно доказать, что угол между прямой A^*B^* и окружностью S равен углу между прямыми A^*C^* и B^*C^* (рис. 114). Это непосредственно следует из того, что угол между касательной к окружности в точке A^* и хордой A^*B^* равен вписанному углу $A^*C^*B^*$.

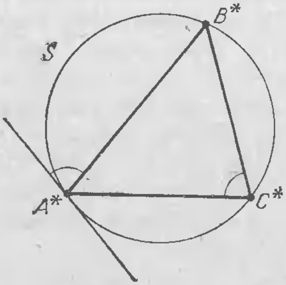


Рис. 114

16.9. Пусть X и Y — точки пересечения сферы с прямой, проходящей через точку P. Нетрудно убедиться, что величина $PX \cdot PY$ не зависит от выбора прямой; обозначим ее через R^2. Рассмотрим инверсию с центром P и степенью R^2. Тогда $X^* =$

$= Y$. Таким образом, множество вторых точек пересечения со сферой прямых, соединяющих P и точки окружности S, является образом S при рассматриваемой инверсии. Остается заметить, что образ окружности при инверсии является окружностью.

16.10. Пусть O — центр данной сферы, XA — некоторая касательная к сфере. Так как AC — высота прямоугольного треугольника OAX, то $\triangle ACO \sim \triangle XAO$. Поэтому $AO : CO = XO : AO$, т. е. $CO \cdot XO = AO^2$. Таким образом, точка C является образом точки X при инверсии с центром O и степенью $AO^2 = R^2$, где R — радиус данной сферы. Образом плоскости П при этой инверсии является сфера диаметра R^2/OP, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость П; эта сфера проходит через точку O, а ее центр лежит на отрезке OP.

16.11. Пусть дан тетраэдр $ABCD$. Рассмотрим инверсию с центром D и степенью r^2. Тогда $A^*B^* = \frac{ABr^2}{DA \cdot DB}$, $B^*C^* = \frac{BCr^2}{BD \cdot DC}$ и $A^*C^* = \frac{ACr^2}{DA \cdot DC}$. Следовательно, если взять $r^2 = DA \cdot DB \cdot DC$, то $A^*B^*C^*$ — искомый треугольник.

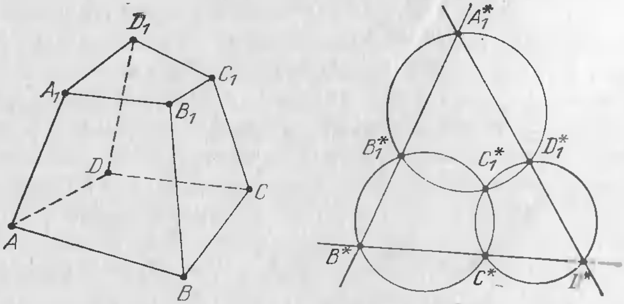
Для вычисления площади треугольника $A^*B^*C^*$ найдем объем тетраэдра $A^*B^*C^*D$ и его высоту, проведенную из вершины D. Описанная сфера тетраэдра $ABCD$ переходит при инверсии в плоскость $A^*B^*C^*$. Поэтому расстояние от этой плоскости до точки D равно $r^2/2R$. Далее, отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A^*B^*C^*D$ равно произведению отношений длин ребер, выходящих из точки D. Следовательно,

$$V_{A^*B^*C^*D} = V\frac{DA^*}{DA}\frac{DB^*}{DB}\frac{DC^*}{DC} = V\left(\frac{r}{DA}\right)^2\left(\frac{r}{DB}\right)^2\left(\frac{r}{DC}\right)^2 = Vr^2.$$

Пусть S — площадь треугольника $A^*B^*C^*$. Воспользовавшись формулой $V_{A^*B^*C^*D} = \frac{1}{3}h_dS$, получим $Vr^2 = \frac{1}{3}\frac{r^2}{2R}S$, т. е. $S = 6VR$.

16.12. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный шестигранник, причем лишь про вершину C_1 не известно, что она лежит на данной сфере (рис. 115, *а*). Рассмотрим инверсию с центром A. При этой инверсии данная сфера переходит в плоскость, а описанные окружности граней $ABCD$, ABB_1A_1 и AA_1D_1D — в прямые (рис. 115, *б*). Точка C_1 является точкой пересечения плоскостей $A_1B_1D_1$, CD_1D и BB_1C, поэтому ее образ C_1^* является точкой пересечения образов этих плоскостей, т. е. описанных сфер тетраэдров $AA_1^*B_1^*D_1^*$, $AC^*D_1^*D^*$ и $AB^*B_1^*C^*$ (имеется в виду точка, отличная от A). Следовательно, чтобы доказать, что точка C_1 принадлежит данной сфере, достаточно доказать, что описанные окружности треугольников $A_1^*B_1^*D_1^*$, $C^*D_1^*D^*$ и $B^*B_1^*C^*$ имеют общую точку (см. Прасолов, II, 28.6,а).

16.13. Достаточно проверить, что при инверсии с центром в точке касания двух сфер остальные 5 точек касания переходят в точки, лежащие в одной плоскости. При этой инверсии две



а б

Рис. 115

сферы переходят в пару параллельных плоскостей, а две другие сферы — в пару сфер, касающихся их и друг друга. Точки касания этих двух сфер с плоскостями являются вершинами квадрата, а точка касания самих сфер — точкой пересечения его диагоналей.

16.14. Рассмотрим инверсию с центром A_1. При этом сферы S_1 и S_2 переходят в параллельные плоскости S_1^* и S_2^*. Нужно доказать, что точки A_2^*, A_3^* и A_4^* лежат на одной прямой (A_2^* — точка касания плоскости S_2^* и сферы S_3^*, A_3^*—точка касания сфер S_3^* и S_4^*, A_4^* — точка касания плоскости S_1^* и сферы S_4^*). Рассмотрим сечение плоскостью, содержащей параллельные отрезки $A_2^*O_3$ и $A_4^*O_4$, где O_3 и O_4 — центры сфер S_3^* и S_4^* (рис. 116). Точка A_3^* лежит на отрезке O_3O_4, поэтому она лежит в плоскости сечения. Углы при вершинах O_3 и O_4 равнобедренных треугольников $A_2^*O_3A_3^*$ и $A_3^*O_4A_4^*$ равны, так как $A_2^*O_3 \parallel A_4^*O_4$. Следовательно, $\angle O_4A_3^*A_4^* = \angle O_3A_3^*A_2^*$, а значит, точки A_2^*, A_3^* и A_4^* лежат на одной прямой.

16.15. Рассмотрим инверсию с центром в одной из точек касания сфер. Эти сферы переходят в пару параллельных плоскостей, а остальные $n-2$ сферы — в сферы, касающиеся обеих этих плоскостей. Ясно, что диаметр любой сферы, касающейся двух параллельных плоскостей, равен расстоянию между плоскостями. Рассмотрим теперь сечение плоскостью, равноудаленной от двух наших параллельных плоскостей. В сечении имеем систему из $n-2$ попарно касающихся равных окружностей. На плоскости нельзя расположить больше трех равных окружностей так, чтобы они попарно касались. Поэтому $n-2 \leqslant 3$, т. е. $n \leqslant 5$.

16.16. Рассмотрим инверсию с центром в точке касания сфер Σ_1 и Σ_2. При этом они переходят в пару параллельных плоскостей, а образы всех остальных сфер касаются этих плоскостей, и поэтому их радиусы равны. Таким образом, в сечении плоскостью, равноудаленной от этих параллельных плоскостей, получается то, что изображено на рис. 117.

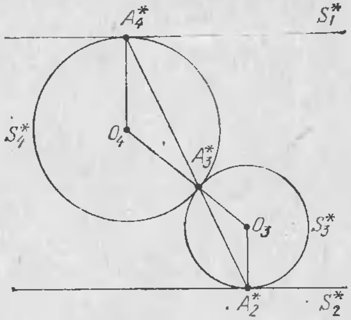


Рис. 116

16.17. Рассмотрим инверсию с центром в точке касания некоторых двух сфер. При этой инверсии плоскость П переходит в себя, так как точка касания двух сфер лежит на прямой, соединяющей их центры; касающиеся в центре инверсии сферы переходят в пару параллельных плоскостей, перпендикулярных плоскости П, а остальные две сферы — в сферы с центрами в плоскости П, поскольку они как были симметричны относительно нее, так и останутся. И образы этих сфер, и образ сферы S касаются пары параллельных плоскостей, поэтому их радиусы равны.

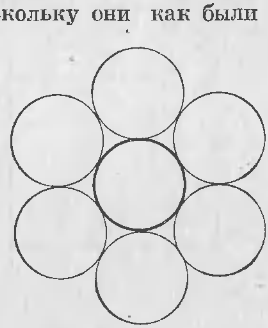


Рис. 117

Рассмотрим (для образов при инверсии) сечение плоскостью, равноудаленной от пары наших параллельных плоскостей. Пусть A и B (лежащие в плоскости П) — центры образов сфер, C — центр третьей сферы, а CD — высота равностороннего треугольника ABC. Если R — радиус сферы S^*, то $CD = \sqrt{3}AC/2 = \sqrt{3}R$. Поэтому для сферы S^* отношение радиуса к расстоянию от центра до плоскости П равно $1 : \sqrt{3}$. Остается заметить, что при инверсии с центром, принадлежащим плоскости П, отношение радиуса сферы к расстоянию от ее центра до плоскости П одно и то же и для сферы S, и для сферы S^* (см. задачу 16.7).

16.18. Рассмотрим инверсию степени $(2R)^2$ с центром O в одной из точек касания сфер с плоскостью; эта инверсия переводит окружность, проходящую через точки касания сфер с плоскостью, в прямую AB, удаленную от точки O на расстояние $2R$ (A и B — образы точек касания). Существование двух сфер, касающихся двух параллельных плоскостей (исходной плоскости и образа одной сферы) и образов двух других сфер, очевидно. Пусть P и Q — центры этих шаров, P' и Q' — проекции точек P и O на плоскость OAB. Тогда $P'AB$ и $Q'AB$ — равносторонние треугольники со стороной $2a$, где a — радиус сфер, т. е. половина расстояния между плоскостями (рис. 118). Поэтому

$$r = \frac{a \cdot 4R^2}{PO^2 - a^2} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{a \cdot 4R^2}{QO^2 - a^2}$$

(задача 16.5), значит,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{PO^2 - QO^2}{4aR^2} = \frac{P'O^2 - Q'O^2}{4aR^2} = \frac{(P'O')^2 - (Q'O')^2}{4aR^2} =$$
$$= ((2R + \sqrt{3}\,a)^2 - (2R - \sqrt{3}\,a)^2)/4aR^2 = 2\sqrt{3}/R$$

(здесь O' — проекция точки O на прямую $P'Q'$).

16.19. Пусть плоскость П касается в точке A сферы S с диаметром AB. Пусть, далее, X — точка сферы S, а Y — точка пересечения луча BX с плоскостью П. Тогда $\triangle AXB \sim \triangle YAB$ и поэтому $AB : XB = YB : AB$, т. е. $XB \times YB = AB^2$. Следовательно, точка Y является образом точки X при инверсии с центром B и степенью AB^2.

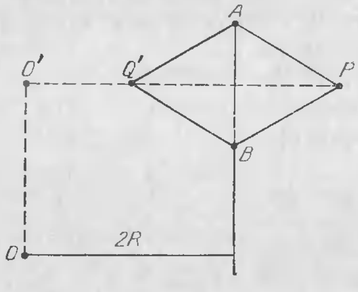


Рис. 118

Задачи б) и в) являются следствиями только что доказанного утверждения и соответствующих свойств инверсии.

16.20. Так как $\angle AMB = 90°$, точка M принадлежит сфере с диаметром AB. Поэтому точка D является образом точки M при стереографической проекции сферы с диаметром AB на плоскость, содержащую окружность S. Следовательно, все точки M лежат на одной окружности — образе окружности S при инверсии с центром B и степенью AB^2 (см. задачу 16.19,а).

16.21. Опустим из точки O перпендикуляр OA' на грань SAB. Пусть A_1 — точка пересечения прямых AB и SA'. Так как $AB \perp OS$ и $AB \perp OA'$, плоскость SOA' перпендикулярна прямой AB

и поэтому $OA_1 \perp AB$, т. е. A_1 — проекция точки O на сторону AB. Ясно также, что A_1 — образ точки A' при стереографической проекции сферы с диаметром SO на плоскость основания. Таким образом, нужно доказать, что проекции точки O на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности (см. Прасолов, 2.31 или Шарыгин, II, 247).

16.22. Так как точки X_1 и X_2 симметричны относительно плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину, то $\angle ABX_1 = \angle BAX_2$. Поэтому прямоугольные треугольники ABY_1 и AY_2B подобны. Следовательно, $AB : AY_1 = AY_2 : AB$, т. е. $AY_1 \cdot AY_2 = AB^2$.

Приложение

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Боковые грани правильной n-угольной пирамиды являются боковыми гранями правильных четырехугольных пирамид. Вершины оснований четырехугольных пирамид, отличные от вершин n-угольной пирамиды, образуют правильный $2n$-угольник. При каких n это возможно? Найти двугранный угол при основании правильной n-угольной пирамиды.

2. Пусть K и M — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. На лучах DK и AM взяты точки L и P так, что $\frac{DL}{DK} = \frac{AP}{AM}$ и отрезок LP пересекает ребро BC. В каком отношении ребро BC делится точкой пересечения с отрезком LP?

3. Обязательно ли сумма площадей двух граней тетраэдра больше площади третьей грани?

4. Оси n цилиндров радиуса r расположены в одной плоскости. Углы между соседними осями равны соответственно $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, ..., $2\alpha_n$. Найти объем общей части данных цилиндров.

5. Существует ли тетраэдр, площади трех граней которого равны 5, 6 и 7, а радиус вписанного шара равен 1?

6. Найти объем наибольшего правильного октаэдра, вписанного в куб с ребром a.

7. Дан тетраэдр $ABCD$. На его ребрах AB и CD взяты точки K и M так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{DM}{MC} \neq 1$. Через точки K и M проведена плоскость, делящая тетраэдр на два многоугольника равных объемов. В каком отношении эта плоскость делит ребро BC?

8. Доказать, что пересечение трех прямых круговых цилиндров радиуса 1, оси которых попарно перпендикулярны, содержится в некотором шаре радиуса $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

9. Доказать, что если в пространственном четырехугольнике равны противоположные стороны, то у него равны также и противоположные углы.

10. Пусть $A'B'C'$ — ортогональная проекция треугольника ABC. Доказать, что треугольник $A'B'C'$ можно покрыть треугольником ABC.

11. Противоположные стороны пространственного шестиугольника параллельны. Доказать, что эти стороны попарно равны.

12. Чему равна площадь наименьшей грани тетраэдра, ребра которого равны 6, 7, 8, 9, 10 и 11, а объем равен 48?

13. В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Доказать, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45°.

14. Доказать, что у любого многогранника существует проекция, являющаяся многоугольником, число вершин которого не меньше 4. Доказать также, что у него существует проекция, являющаяся многоугольником с числом вершин не более $n - 1$, где n — число вершин многогранника.

15. В пространстве задано конечное число точек, причем объем любого тетраэдра с вершинами в этих точках не превышает 1. Доказать, что все эти точки можно поместить в тетраэдр объема 8.

16. На сфере задан конечный набор красных и синих больших кругов. Доказать, что существует точка, через которую проходит 2 или более кругов одного цвета и ни одного круга другого цвета.

17. Доказать, что если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит четное число ребер, то в любом сечении его плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин, получится многоугольник с четным числом сторон.

18. В любом ли многограннике найдется не менее трех пар граней с одинаковым числом сторон?

19. В основании пирамиды лежит параллелограмм. Доказать, что если противоположные плоские углы при вершине пирамиды равны, то равны и противоположные боковые ребра.

20. На ребрах многогранника расставлены знаки «+» и «—». Доказать, что найдется вершина, при

обходе вокруг которой число перемен знака будет меньше 4.

21. Доказать, что любое выпуклое тело объема V можно поместить в прямоугольный параллелепипед объема $6V$.

22. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Возьмем точки M и K на прямых AC_1 и BC соответственно так, что $\angle AKM = 90°$. Чему равно наименьшее значение AM?

23. Дан ромб с острым углом α. Сколько существует различных параллелепипедов, все грани которых равны этому ромбу? Найти отношение объемов наибольшего такого параллелепипеда и наименьшего.

24. На плоскости даны 6 отрезков, равных ребрам некоторого тетраэдра (указано, какие ребра являются соседними). Построить отрезки, равные расстоянию между противоположными ребрами тетраэдра, радиусу вписанного шара, радиусу описанного шара.

25. Доказать, что для любого n существует сфера, внутри которой лежит ровно n точек с целочисленными координатами.

26. Многогранник M' является образом выпуклого многогранника M при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Доказать, что существует параллельный перенос, переводящий многогранник M' внутрь M. Доказать, что если коэффициент гомотетии $k < -\frac{1}{3}$, то это утверждение становится неверным.

27. Можно ли составить куб с ребром k из черных и белых единичных кубиков так, чтобы у любого кубика ровно два из его соседей имели тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.)

28. Пусть R — радиус шара, описанного около тетраэдра $ABCD$. Доказать, что имеет место неравенство

$$CD^2 + BC^2 + BD^2 < 4R^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2.$$

29. Доказать, что периметр любого сечения тетраэдра не превосходит наибольшего из периметров его граней.

30. На сфере проведено n больших кругов, разбивающих ее на части. Доказать, что эти части можно раскрасить в два цвета таким образом, что любые две

соседние части будут окрашены в разные цвета. При этом для нечетного n диаметрально противоположные части будут разного цвета, а для четного n — одного цвета.

31. Существует ли выпуклый многогранник, имеющий 1988 вершин и такой, что ни из какой точки пространства, расположенной вне многогранника, все его вершины увидеть нельзя, а любые 1987 вершин увидеть можно. (Многогранник предполагается непрозрачным.)

32. Пусть r — радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$. Доказать, что имеет место неравенство

$$r < \frac{AB \cdot CD}{2(AB + CD)}.$$

33. В пространстве дан шар и две точки A и B, расположенные вне его. Рассматриваются всевозможные тетраэдры $ABMK$, описанные около данного шара. Доказать, что сумма углов пространственного четырехугольника $AMBK$, т. е. выражение $\angle AMB + \angle MBK + \angle BKA + \angle KAM$, постоянна.

34. Пусть натуральные числа В, Р и Г удовлетворяют следующим соотношениям: $В - Р + Г = 2$, $4 \leqslant В \leqslant 2Р/3$ и $4 \leqslant Г \leqslant 2Р/3$. Доказать, что существует выпуклый многогранник, имеющий В вершин, Р ребер и Г граней.

35. Доказать, что в правильном тетраэдре можно проделать отверстие, через которое пройдет такой же тетраэдр.

36. Конус с вершиной P касается сферы по окружности S. Стереографическая проекция из точки A переводит окружность S в окружность S'. Доказать, что прямая AP проходит через центр S'.

37. В пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые l_1, l_2 и l_3. Рассмотрим множество M, состоящее из прямых, каждая из которых образует равные углы с прямыми l_1, l_2 и l_3 и равноудалена от этих прямых.

а) Какое наибольшее число прямых может содержаться во множестве M?

б) Какие значения может принимать m, где m — число прямых, содержащихся во множестве M?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч. 2. Стереометрия.— М.: Учпедгиз, 1958.
2. Берже М. Геометрия: В 2 ч.— М.: Мир, 1984.
3. Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения.— М.: Мир, 1986.
4. Вебер Г., Вельштейн И. Энциклопедия элементарной математики.— Одесса: Матезис, 1914.— Т. 2. Кн. 2—3.
5. Делоне Б. Н., Житомирский О. К. Задачник по геометрии.— М.: Физматгиз, 1959.
6. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.— М.: Наука, 1981.
7. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х т.— М.: Наука, 1987.— Т. 2: Геометрия.
8. Кокстер Х. С. М. Введение в геометрию.— М.: Наука, 1966.
9. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия.— М.: Наука, 1984.
10. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия).— М.: Гостехиздат, 1954.
11. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.— М.: Наука, 1970.

Научно-популярное издание

Прасолов Виктор Васильевич
Шарыгин Игорь Федорович

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Серия
«Библиотека математического кружка»
выпуск 19

Заведующий редакций *Н. А. Угарова*

Редактор *А. П. Веселов*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *Л. В. Лихачева*

Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 32736

Сдано в набор 07.06.88. Подписано к печати 06.02.89. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,54. Уч.-изд. л. 16,91. Тираж 163 000 экз. Заказ № 248. Цена 75 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства
«Наука»
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Вып. 1. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.

Вып. 2. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия).

Вып. 3. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия).

Вып. 4. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры.

Вып. 5. Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

Вып. 6. Дынкин Е. Б., Успенский В. А. Математические беседы.

Вып. 7. Яглом И. М. Геометрические преобразования — I. Движения и преобразования подобия.

Вып. 8. Яглом И. М. Геометрические преобразования — II. Линейные и круговые преобразования.

Вып. 9. Балк М. Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести.

Вып. 10. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры.

Вып. 11. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.

Вып. 12. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.

Вып. 13. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.

Вып. 14. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией.

Вып. 15. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1.

Вып. 16. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2.

Вып. 17. Зарубежные математические олимпиады/Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др./Под ред. И. Н. Сергеева.

Вып. 18. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад.

Вып. 19. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии.