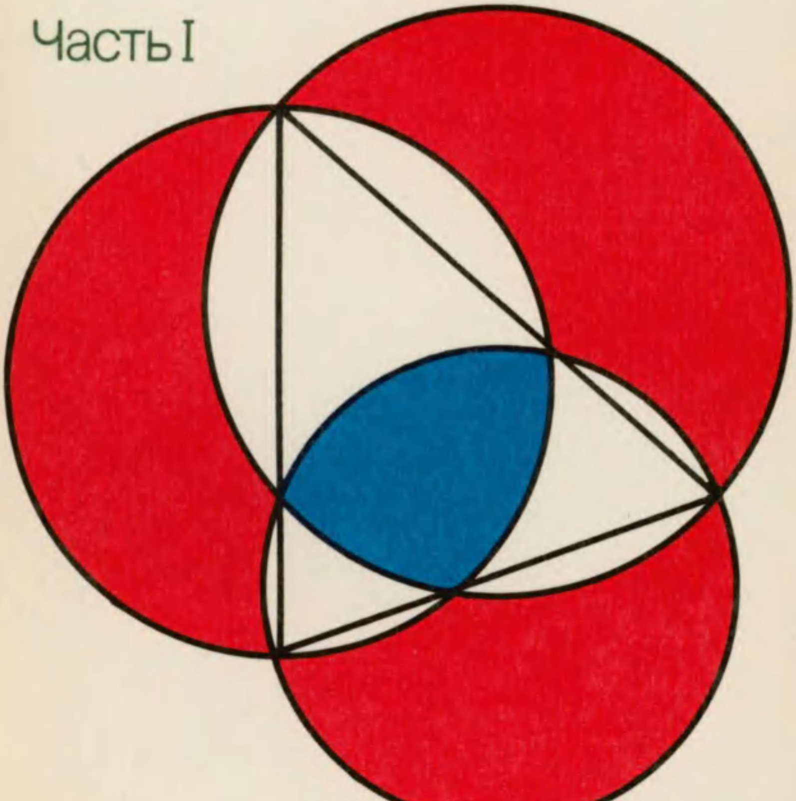
В. В. Прасолов

ЗАДАЧИ по планиметрии

Часть I



В. В. Прасолов I ЗАДАЧИ по ПЛАНИМЕТРИИ

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 15

В. В. ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ЧАСТЬ I

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.151.0
П70
УДК 541.112

Прасолов В. В. **Задачи по планиметрии, ч. I.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— (Б-ка мат. кружка).—272 с.

Содержит около 650 задач, по тематике близких к школьной программе. Все задачи снабжены решениями. Задачи разбиты на циклы, связанные общей идеей решения. В каждом цикле задачи расположены в порядке возрастания трудности, причем первые задачи цикла достаточно просты. Такое разбиение поможет читателю ориентироваться в наборе задач и даст возможность разобраться непосредственно в заинтересовавшей теме, не читая подряд всю книгу.

Для школьников, преподавателей и студентов педагогических институтов.

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук *Н. Б. Васильев;*
кандидат физико-математических наук *Н. П. Долбилин*

П $\frac{1702040000—010}{053(02)\text{-}86}$ 44-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
Указания к пользованию книгой 9

Глава 1. **Подобные треугольники** 11
§ 1. Отрезки, заключенные между параллельными прямыми 12
§ 2. Отношение сторон подобных треугольников 13
§ 3. Отношение площадей подобных треугольников 15
§ 4. Вспомогательные равные треугольники 15
§ 5. Применение свойств вписанного угла для доказательства подобия треугольников 16
§ 6. Треугольник, образованный основаниями высот 17
§ 7. Подобные фигуры 18
Задачи для самостоятельного решения 19
Решения 20

Глава 2. **Вписанный угол** 36
§ 1. Углы, опирающиеся на равные дуги 37
§ 2. Величина угла между двумя хордами 38
§ 3. Угол между касательной и хордой 39
§ 4. Связь величины угла с длиной хорды и длиной дуги 39
§ 5. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, если $\angle BAD + \angle BCD = 180°$ 40
§ 6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны 40
§ 7. Биссектриса угла треугольника делит дугу описанной окружности пополам 41
§ 8. Вписанный угол применяется для доказательства того, что прямые пересекаются в одной точке . . . 41
§ 9. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями 42
§ 10. Три равные пересекающиеся окружности 42
§ 11. Разные задачи 43
Задачи для самостоятельного решения 44
Решения 44

Глава 3. **Окружности** 59
§ 1. Касательные к окружностям 60
§ 2. Произведение длин отрезков хорд (секущих), проходящих через фиксированную точку 61
§ 3. Касающиеся окружности 61
§ 4. Углы между пересекающимися окружностями . . 62

§ 5. Применения теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке 62
§ 6. Площади криволинейных фигур 63
§ 7. Радикальная ось 63
Задачи для самостоятельного решения 65
Решения 66

Глава 4. **Площади** 75
§ 1. Площади треугольников, на которые медианы разбивают треугольник 76
§ 2. Вспомогательные равновеликие треугольники . . . 76
§ 3. Вычисление площадей 76
§ 4. Площадь помогает решить задачу 77
§ 5. Площади образуют арифметическую прогрессию 78
§ 6. Площади треугольников, на которые диагонали разбивают четырехугольник 79
§ 7. Площади треугольников, на которые внутренняя точка разбивает четырехугольник 80
§ 8. Площадь четырехугольника с вершинами на сторонах (диагоналях) четырехугольника 80
§ 9. Прямые и окружности, делящие фигуры на равновеликие части 81
§ 10. Формула для площади четырехугольника 82
§ 11. Разрезания 82
Задачи для самостоятельного решения 83
Решения 83

Глава 5. **Векторы** 99
§ 1. Векторы сторон многоугольников 100
§ 2. Скалярное произведение. Соотношения 100
§ 3. Скалярное произведение. Неравенства 101
§ 4. Скалярное произведение. Разные задачи 102
§ 5. Суммы векторов 102
§ 6. Неравенства 103
§ 7. Метод усреднения 103
§ 8. Векторное произведение 104
Задачи для самостоятельного решения 104
Решения 105

Глава 6. **Параллельный перенос** 118
§ 1. Перенос помогает решить задачу 118
§ 2. Построения 119
§ 3. Геометрические места точек 120
Задачи для самостоятельного решения 120
Решения 120

Глава 7. **Центральная симметрия** 129
§ 1. Симметрия помогает решить задачу 130
§ 2. Свойства симметрии 130
§ 3. Симметрия помогает решить задачу. Построения . 131
Задачи для самостоятельного решения 132
Решения 132

Глава 8. **Осевая симметрия** 138
§ 1. Симметрия помогает решить задачу 139
§ 2. Симметрия помогает решить задачу. Построения . . . 139

§ 3. Построения. Стороны треугольника симметричны относительно биссектрисы 140
§ 4. Композиции симметрий 140
§ 5. Свойства симметрий и осей симметрии 140
§ 6. Задачи, использующие свойства композиций симметрий 141
§ 7. Экстремальные задачи 141
Задачи для самостоятельного решения 142
Решения 142

Глава 9. **Поворот** 151
§ 1. Поворот на 90° 152
§ 2. Поворот на 60° 152
§ 3. Повороты на произвольные углы 153
§ 4. Композиции поворотов на 90° 154
§ 5. Композиции поворотов на 60° 155
§ 6. Композиции поворотов на произвольные углы . . . 155
Задачи для самостоятельного решения 156
Решения 157

Глава 10. **Гомотетия и поворотная гомотетия** 168
§ 1. Гомотетичные многоугольники 169
§ 2. Гомотетичные окружности 170
§ 3. Построения и геометрические места точек 171
§ 4. Композиции гомотетий 171
§ 5. Поворотная гомотетия 172
§ 6. Центр поворотной гомотетии 172
Задачи для самостоятельного решения 173
Решения 173

Глава 11. **Треугольники** 185
§ 1. Вписанные и описанные окружности 186
§ 2. Прямоугольные треугольники 187
§ 3. Правильные треугольники 187
§ 4. Теорема Чевы 188
§ 5. Теорема Менелая 189
§ 6. Целочисленные треугольники 190
§ 7. Разные задачи 191
Задачи для самостоятельного решения 192
Решения 193

Глава 12. **Многоугольники** 210
§ 1. Вписанные и описанные четырехугольники . . . 210
§ 2. Четырехугольники 211
§ 3. Шестиугольники 212
§ 4. Метрические соотношения в правильных многоугольниках 212
§ 5. Правильные многоугольники 213
§ 6. Вписанные и описанные многоугольники 214
§ 7. Произвольные выпуклые многоугольники 214
Задачи для самостоятельного решения 215
Решения 216

Глава 13. **Геометрические места точек** 232
§ 1. ГМТ — прямая 233
§ 2. ГМТ — окружность (дуга окружности) 233

§ 3. Метод ГМТ 233
§ 4. Вспомогательные равные и подобные треугольники 234
§ 5. Вписанный угол 234
§ 6. Гомотетия 235
§ 7. Нахождение ГМТ 235
Задачи для самостоятельного решения 235
Решения 236

Глава 14. **Построения** 244
§ 1. Метод геометрических мест точек 245
§ 2. Вписанный угол 245
§ 3. Подобные треугольники и гомотетия 246
§ 4. Движения 246
§ 5. Окружность Аполлония 246
§ 6. Построение треугольников по различным элементам 247
§ 7. Построение треугольников по различным точкам 247
§ 8. Треугольники 248
§ 9. Четырехугольники 248
§ 10. Построение окружностей 249
§ 11. Необычные построения 249
Задачи для самостоятельного решения 250
Решения 251

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач предназначен для школьников, учителей, руководителей математических кружков, студентов педагогических институтов и всех, кто увлекается решением задач по элементарной геометрии. Он состоит из нестандартных геометрических задач несколько повышенного по сравнению с обычными школьными задачами уровня. В сборник включены в основном задачи, предлагавшиеся в разное время на математических олимпиадах разного ранга, задачи из архивов математических олимпиад и математических кружков.

Ранние этапы работы математических кружков нашли отражение в первых выпусках серии «Библиотека математического кружка». Но за последние два десятилетия появилось много новых интересных задач (например, в журнале «Квант»). Поэтому, на наш взгляд, назрела необходимость по возможности полно собрать в одной книге имеющиеся геометрические задачи, систематизировать их и снабдить решениями.

Сборник выходит в двух частях, каждая из которых содержит около 600 задач. Его можно рассматривать не только как источник задач для внеклассной работы, но и как пособие для самостоятельного изучения геометрии.

Для того чтобы облегчить читателю поиск задач на интересующую тему, принята подробная рубрикация. Задачи распределены по 29 главам, каждая из которых состоит из 5—10 параграфов. За основу классификации приняты методы решения геометрических задач. Внутри каждого параграфа задачи расположены в порядке возрастания трудности.

Каждая глава начинается с краткой сводки теоретических сведений. В рубрики «Вводные задачи» включены простейшие задачи на данную тему.

Руководителям кружков могут понадобиться задачи, решения которых учащиеся должны найти самостоятельно, не прибегая к имеющимся источникам. Поэтому в конце многих глав приводятся задачи для самостоятельного решения.

Автор выражает искреннюю благодарность Н. Б. Васильеву, предоставившему обширный архив геометрических задач, А. Ю. Вайнтробу и С. Ю. Оревкову, сообщившим решения многих задач. Совершенствованию рукописи способствовали предложения и замечания, высказанные академиком А. В. Погореловым, С. Ю. Оревковым, Н. П. Долбилиным и редактором книги А. М. Абрамовым, которому также принадлежит замысел этой книги.

В. В. Прасолов

УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

1. Советы школьнику

Решать задачи из этой книги следует таким образом. Нужно найти какой-нибудь заинтересовавший вас параграф (не главу!) и попробовать решить подряд все задачи, которые будут получаться. Задачи расположены в порядке возрастания трудности, поэтому первые задачи должны получиться, а последние уже вполне можно и не решить. Даже если вы решили задачу, следует заглянуть в «Решения»: там может быть более простое и короткое решение. Решения задач написаны не очень подробно, но вся схема рассуждений приведена; чтобы разобраться в них, нужны определенные усилия.

В начале каждой главы приведено краткое описание содержащихся в ней параграфов. Для того чтобы лучше ориентироваться в книге, следует прочитать эти вводные части к главам. В них приводятся также напоминания основных сведений, которые могут потребоваться при решении задач. Подчеркнем, что это именно напоминания, не претендующие на логическую строгость и полноту.

К названиям параграфов не следует относиться слишком строго. Они достаточно условны и не всегда можно объяснить, почему задача попала именно в этот параграф, а не в другой. Основная цель разбиения на параграфы — помочь ориентироваться в этом большом наборе задач. Без него такая масса задач производила бы несколько угнетающее впечатление. Названия параграфов являются также до некоторой степени подсказками, точнее, намеками, как решать задачу.

2. Советы руководителю кружка

Предлагаемые задачи рекомендуются для факультативных занятий и кружков. Их можно использовать также на учебных занятиях в классах с углубленным изучением математики. Набор задач в книге очень велик и решить их все подряд школьнику почти невозможно. Поэтому книгу нельзя воспринимать как готовый курс планиметрии, и вам придется выбрать некоторую часть задач в соответствии с программой занятий. Разбиение задач на главы и параграфы призвано помочь подобрать нужные задачи. Названия глав и параграфов до некоторой степени помогут вам также составить примерную программу занятий и выделить основные методы решения задач.

«Задачи для самостоятельного решения» можно при необходимости использовать для различных контрольных работ и экзаменов в рамках кружков, факультативов и любой другой внеклассной работы со школьниками.

Глава 1

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

1. Треугольник ABC *подобен* треугольнику $A_1B_1C_1$ (обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

а) $AB:BC:CA = A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$;

б) $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$;

в) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

2. Если параллельные прямые отсекают от угла с вершиной A треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2, то эти треугольники подобны и $AB_1:AB_2 = AC_1:AC_2$ (точки B_1 и B_2 лежат на одной стороне угла, C_1 и C_2 — на другой).

3. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Этот отрезок параллелен третьей стороне и равен половине ее длины.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. Этот отрезок параллелен основаниям и равен полусумме их длин.

4. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т. е. квадрату отношения длин соответствующих сторон. Это следует, например, из формулы $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$.

5. Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ называются *подобными*, если $A_1A_2:A_2A_3:\ldots:A_nA_1 = B_1B_2:B_2B_3:\ldots:B_nB_1$ и углы при вершинах $A_1, \ldots, A_n$ равны соответственно углам при вершинах $B_1, \ldots, B_n$.

Отношение соответственных диагоналей подобных многоугольников равно коэффициенту подобия; для описанных подобных многоугольников отношение радиусов вписанных окружностей также равно коэффициенту подобия.

Вводные задачи

1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $A_1C : B_1C = AC : BC$.

4. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке P. Докажите, что $\triangle ABP \backsim \triangle BDP$.

5. В треугольник ABC вписан квадрат так, что одна сторона квадрата лежит на стороне BC, а две оставшиеся вершины квадрата — на сторонах AB и AC. Найдите сторону квадрата, если известны длины стороны BC и высоты, опущенной на BC.

§ 1. Отрезки, заключенные между параллельными прямыми

1.1. Основания трапеции равны a и b.

а) Найдите длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

б) Найдите длину отрезка, высекаемого боковыми сторонами трапеции на прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям.

1.2. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника — вершины параллелограмма. Для каких четырехугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

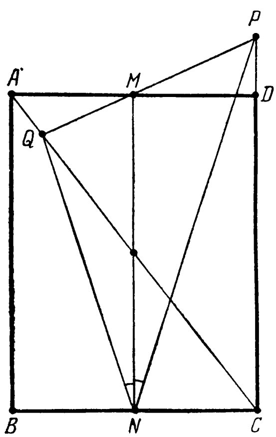


Рис. 1

1.3. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC в отношениях $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1?

1.4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP = \frac{1}{n} AD$; Q — точка пересечения прямых AC и BP. Докажите, что $AQ = \frac{1}{n+1} AC$.

1.5. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

1.6. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной $60°$. На этой дуге взята точка M. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB, перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA.

1.7. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка DC за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Докажите, что $\angle QNM = \angle MNP$ (рис. 1).

1.8. Диаметры AB и CD окружности S взаимно перпендикулярны. Хорда EA пересекает диаметр CD в точке K, хорда EC пересекает диаметр AB в точке L. Докажите, что если $CK : KD = 2 : 1$, то $AL : LB = 3 : 1$.

§ 2. Отношение сторон подобных треугольников

1.9. BE — биссектриса угла B в треугольнике ABC (или биссектриса внешнего угла B), E — точка на стороне AC (или на продолжении стороны AC). Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$.

1.10. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

1.11. H — точка пересечения высот треугольника ABC; A_1, B_1 и C_1 — основания высот AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$.

1.12. Точки M и K лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно; отрезки AK и CM пересекаются в точке P. Известно, что каждый из отрезков AK и CM делится точкой P в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Докажите, что AK и CM — медианы треугольника.

1.13. На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN. Докажите, что треугольник MAN подобен треугольнику ABC.

1.14. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

1.15. Пусть две стороны и два угла одного треугольника равны двум сторонам и двум углам другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

1.16. Пусть B — середина отрезка AC. Точки D и E находятся по одну сторону от прямой AC, причем $\angle ADB=\angle EBC$, $\angle DAB=\angle BCE$. Докажите, что $\angle BDE=\angle ADB$.

1.17. На биссектрисе прямого угла взята точка P. Через нее проводится произвольная прямая, высекающая на сторонах угла отрезки длиной a и b. Докажите, что величина $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ не зависит от этой прямой.

1.18. Пусть r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно, r — радиус вписанной окружности, S и p — площадь и полупериметр треугольника ABC. Докажите, что:

а) $S=(p-a)r_a$;

б) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

1.19. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, на которой взяты точки K и L, делящие полуокружность на равные дуги. Докажите, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

1.20. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и BC выбраны соответственно точки M и K так, что $BK\cdot AB=BO^2$ и $AM\cdot AB=AO^2$. Докажите, что точки M, O и K лежат на одной прямой.

1.21. Длины двух сторон треугольника равны 10 и 15. Докажите, что длина биссектрисы угла между ними не больше 12.

1.22. Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований произвольной трапеции лежат на одной прямой.

1.23. В трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от прямых, на которых лежат боковые стороны. Докажите, что трапеция равнобедренная.

1.24. Прямая l пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F соответственно. Пусть G — точка пересечения прямой l с диагональю AC. Докажите, что $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AG}$.

1.25. Пусть AC — бóльшая из диагоналей параллелограмма $ABCD$. Из точки C на продолжения сторон

AB и AD опущены перпендикуляры CE и CF. Докажите, что $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

1.26. Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причем коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC.

§ 3. Отношение площадей подобных треугольников

1.27. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

1.28. На стороне AC треугольника ABC взята точка E. Через точку E проведена прямая DE параллельно стороне BC и прямая EF параллельно стороне AB (D и E — точки на сторонах). Докажите, что $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

1.29. Через точку, лежащую внутри данного треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разделяют треугольник на шесть частей, три из которых — параллелограммы с площадями S_1', S_2', S_3'. Найдите площадь треугольника.

1.30. На сторонах квадрата $ABCD$ площади S взяты точки K, E, M, H (K на AB и т. д.) так, что $AK = BE = CM = DH = AB/4$. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми AE, BM, CH и DK.

§ 4. Вспомогательные равные треугольники

1.31. Катет BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C разделен точками D и E на три равные части. Докажите, что если $BC = 3\,AC$, то сумма углов AEC, ADC и ABC равна 90°.

1.32. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что угол KLD прямой.

1.33. Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и CDE с заданными на плоскости вершинами прямых углов B и D имеют общую вершину C (при этом повороты от AB к BC и от CD к DE — в одну сторону). Докажите, что положение середины отрезка AE не зависит от выбора точки C.

1.34. а) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL правильный.

б) На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL правильный.

1.35. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что $\angle PBA = \angle PAB = 15^\circ$. Докажите, что CPD — равносторонний треугольник.

1.36. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $CD=CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и L. Докажите, что $KL=LB$.

1.37. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D — середина стороны AB. Докажите, что $DK = DM$.

§ 5. Применение свойств вписанного угла для доказательства подобия треугольников

1.38. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность. Прямая l касается этой полуокружности в точке C. Из точек A и B на прямую l опущены перпендикуляры AM и BN. Пусть D — проекция точки C на AB. Докажите, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

1.39. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и D. AB и CD — касательные к первой и второй окружностям (B и C — точки на окружностях). Докажите, что $\frac{AC}{BD} = \frac{CD^2}{AB^2}$.

1.40. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом при вершине A. На лучах AB и CB отмечены точки H и K соответственно так, что $CH=BC$ и $AK=AB$.

а) Докажите, что $DH=DK$.

б) Докажите, что треугольник DKH подобен треугольнику ABK.

1.41. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка P. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$.

1.42. AB — диаметр окружности S_1, A — центр окружности S_2. Эти окружности пересекаются в точках C и D. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружность S_2 в точке M, лежащей внутри окружности S_1, а окружность S_1 — в точке N. Докажите, что $MN^2=CN\cdot ND$.

1.43. а) Из точки C проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Докажите, что длина перпендикуляра, опущенного из произвольной точки P окружности на прямую AB, равна среднему геометрическому длин перпендикуляров, опущенных из той же точки окружности на прямые AC и BC.

б) Из произвольной точки O вписанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры OA', OB', OC' на стороны треугольника ABC и перпендикуляры OA'', OB'', OC'' на стороны треугольника с вершинами в точках касания. Докажите, что $OA'\cdot OB'\cdot OC'=OA''\times OB''\cdot OC''$.

1.44. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Докажите, что $OK=KB$.

1.45. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB).

а) Отрезок KN пересекает AB в точке Q, отрезок ML пересекает AB в точке P. Докажите, что $PC=QC$.

б) Прямая KM пересекает прямую AB в точке R, прямая NL — в точке S. Докажите, что $RC=SC$.

§ 6. Треугольник, образованный основаниями высот

1.46. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC. Чему равен коэффициент подобия?

1.47. Треугольник ABC остроугольный, и $\angle BAC=\alpha$. На стороне BC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите отношение площадей треугольников ABC и APQ.

1.48. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники ABC и MNC подобны.

1.49. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Докажите, что $\frac{p}{P}=\frac{r}{R}$, где p — периметр треугольника EDF, P — периметр треугольника ABC.

1.50. а) Докажите, что высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC делят углы треугольника $A_1B_1C_1$ пополам.

б) На сторонах AB, BC, CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C=\angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C=\angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B=\angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.

1.51. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle ACC_1=$ $=\angle AA_1B_1$.

1.52. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что если $A_1B_1 \parallel AB$ и $B_1C_1 \parallel BC$, то $A_1C_1 \parallel AC$.

§ 7. Подобные фигуры

1.53. В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1+r_2+r_3=r$.

1.54. Дан треугольник ABC. Постройте две прямые x и y так, чтобы для любой точки M на стороне AC сумма длин отрезков MX_M и MY_M, проведенных из точки M параллельно прямым x и y до пересечения со сторонами AB и BC треугольника, равнялась 1.

1.55. В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC, O — середина отрезка HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

1.56. Докажите, что проекции основания высоты треугольника на стороны, ее заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

1.57. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB, BC, CA построены полуокружности S_1, S_2, S_3

по одну сторону от AC. D — точка на S_3, проекция которой на AC совпадает с точкой B. Общая касательная к S_1 и S_2 касается этих полуокружностей в точках F и E соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3, проведенной через точку D.

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

1.58. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, опустили перпендикуляры MQ и MP на две его противоположные стороны и перпендикуляры MR и MT на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит диагонали прямоугольника $ABCD$.

1.59. К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведены одна внешняя и одна внутренняя касательные. Рассмотрим две прямые, каждая из которых проходит через точки касания, принадлежащие одной из окружностей. Докажите, что точка пересечения этих прямых расположена на прямой, соединяющей центры окружностей.

Задачи для самостоятельного решения

1.60. Основание равнобедренного треугольника составляет четверть его периметра. Из произвольной точки основания проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Во сколько раз периметр треугольника больше периметра отсеченного параллелограмма?

1.61. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой их пересечения.

1.62. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

1.63. Можно ли двумя прямолинейными разрезами, проходящими через две вершины треугольника, разрезать его на такие четыре части, чтобы три треугольника (из числа этих частей) были равновелики?

1.64. Точки A', B' и C' симметричны центру описанной окружности относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ равны.

1.65. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и BC; K, L, M, N — точки пересечения AF и BD, DF и AC, CE и BD, AC и BE соответственно. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

1.66. Угол A треугольника ABC в два раза больше угла B. Докажите, что $BC^2=(AC+AB)\cdot AC$.

1.67. Докажите, что если ортоцентр делит высоты треугольника в одном и том же отношении, то треугольник равносторонний.

1.68. Внутри треугольника ABC дана точка K такая, что прямые, проходящие через K и параллельные сторонам треугольника ABC, дают в пересечении со сторонами треугольника три отрезка одинаковой длины x. Найдите x, если длины сторон треугольника равны a, b, c.

1.69. Пусть O — произвольная точка медианы AA_1 треугольника ABC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке B_1. Через B_1 проведена прямая, параллельная основанию BC и пересекающая сторону AB в точке C_1. Докажите, что точки C, O и C_1 лежат на одной прямой.

1.70. Через точку O, взятую на высоте BH треугольника ABC, проводятся прямые AO и CO, которые пересекают стороны BC и BA соответственно в точках K и M. Докажите, что $\angle KHB=\angle MHB$.

1.71. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма.

Решения

1.1. Пусть $ABCD$ — трапеция, $BC=a$, $AD=b$, где $a<b$.

а) Пусть M и N — середины сторон AB и CD, K и L — точки пересечения MN с диагоналями AC и BD соответственно. Тогда $MK=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$ и $ML=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}b$. Поэтому $KL=ML-MK=$ $=\frac{1}{2}(b-a)$.

б) Прямая, проходящая через точку O пересечения диагоналей, пересекает AB в точке P, CD — в точке Q. $\frac{PO}{BC}=\frac{AP}{AB}$, $\frac{PO}{AD}=$ $=\frac{BP}{AB}=\frac{AB-AP}{AB}$. Складывая эти равенства, получаем $\frac{PO}{BC}+\frac{PO}{AD}=1$, т. е. $PO=\frac{ab}{a+b}$ и $PQ=2PO=\frac{2ab}{a+b}$.

1.2. В четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Поэтому $KL = MN = \frac{1}{2} AC$ и отрезок KL параллелен MN, т. е. $KLMN$ — параллелограмм. Теперь ясно, что $KLMN$ — прямоугольник, если диагонали AC и BD перпендикулярны; ромб, если $AC = BD$; квадрат, если диагонали AC и BD равны по длине и перпендикулярны.

1.3. Обозначим точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 через O. Проведем в треугольнике B_1BC отрезок $A_1A_2 \| BB_1$. Тогда $B_1C : B_1A_2 = (1+p):1$, и поэтому $AO:OA_1 = AB_1 : B_1A_2 = \frac{1}{q} B_1C : B_1A_2 = \frac{1+p}{q} : 1$.

1.4. Первое решение. Треугольник AQP подобен треугольнику CQB, поэтому $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{BC} = \frac{1}{n}$, т. е. $QC = nAQ$. $AC = AQ + QC = (n+1) AQ$.

Второе решение. Разделим стороны AD и BC на n равных частей и соединим их так, как показано на рис. 2. При

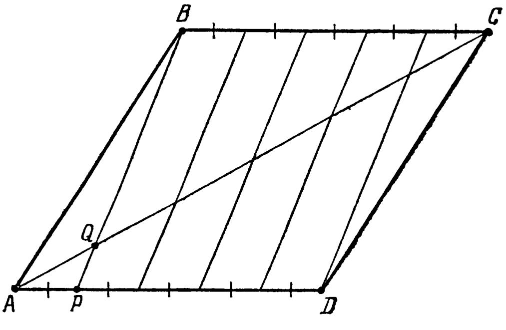


Рис. 2

этом диагональ AC разделится на $n+1$ частей, которые, как легко видеть, равны по длине.

1.5. $ABCD$ — данный четырехугольник, AC — диаметр окружности, описанной около $ABCD$. Опустим перпендикуляры AA_1 и CC_1 на BD (рис. 3). Нам нужно доказать, что $BA_1 = DC_1$. Опустим также перпендикуляр OP из центра O описанной окружности на BD. Ясно, что P — середина отрезка BD. Прямые AA_1, OP, CC_1 параллельны, и $AO = OC$, поэтому $A_1P = PC_1$. Поскольку P — середина BD, $BA_1 = DC_1$.

1.6. Пусть C, D, E, F — середины сторон AO, OB, BM, MA четырехугольника $AOBM$. Поскольку $AB = MO = R$, где R — радиус данной окружности, то, как мы знаем из задачи 1.2, $CDEF$ — ромб. Поэтому прямая CE перпендикулярна прямой DF.

1.7. Проведем через центр O прямоугольника $ABCD$ прямую, параллельную BC. Эта прямая пересекает QN в точке K (рис. 4). Поскольку прямая MO параллельна PC, $\frac{QM}{PM}=\frac{QO}{OC}$, а так как

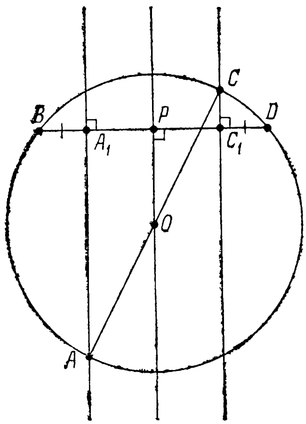


Рис. 3

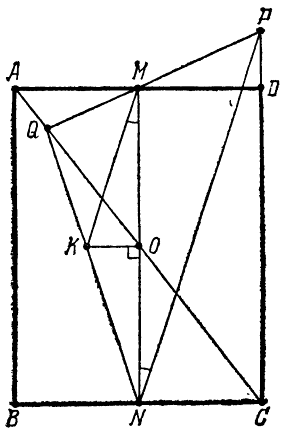


Рис. 4

прямая KO параллельна BC, $\frac{QO}{OC}=\frac{QK}{KN}$. Следовательно, $\frac{QM}{PM}=$ $=\frac{QK}{KN}$, т. е. прямая KM параллельна NP. Поэтому $\angle MNP=$ $=\angle KMO$. С другой стороны, треугольник MKN равнобедренный, т. е. $\angle KMO=\angle QNM$.

1.8. Возьмем на отрезке CD точку K так, чтобы $CK:KD=$ $=2:1$, а на отрезке AB — точку L так, чтобы $AL:LB=3:1$. Пусть E — точка пересечения прямых AK и CL. Поскольку прямая AK пересекает окружность S ровно в двух точках, одна из которых — точка A, нам достаточно доказать, что точка E лежит на окружности S.

Пусть a — длина стороны квадрата $ACBD$. Обозначим проекции точек K, L, E на прямые AD, CB, DB через K', L', E'; точки пересечения прямых AB и CD, AE и BD, CE и BD — через O, M, P; $\alpha=\angle DAM=\angle MEE'$, $\gamma=\angle BCP=\angle PEE'$ (рис. 5). Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{KK'}{AK'}=\frac{DK'}{AK'}=\frac{DK}{KC}=\frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\gamma=\frac{LL'}{L'C}=$ $=\frac{BL'}{L'C}=\frac{BL}{LA}=\frac{1}{3}$. Поэтому $DM=\frac{1}{2}a$ и $BP=\frac{1}{3}a$. Следовательно, $MP=a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a=\frac{1}{6}a$. Поскольку $ME':E'P=$

$= \text{tg}\,\alpha : \text{tg}\,\gamma = 3:2$, имеем $ME' = \frac{3}{5} MP = 0{,}1a$. Ясно, что $E'E = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} ME' = 0{,}2a$. По теореме Пифагора $OE^2 = (OM + E'E)^2 + (ME')^2 = (0{,}5a + 0{,}2a)^2 + (0{,}1a)^2 = 0{,}49a^2 + 0{,}01a^2 = 0{,}5a^2$, т. е. точка E лежит на окружности S.

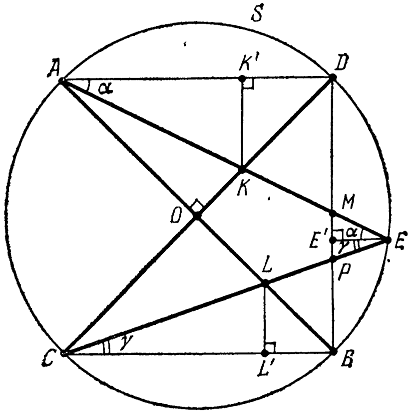


Рис. 5

1.9. Первое решение. Опустим из вершин A и C перпендикуляры AK и CL на прямую BE. Прямоугольные треугольники BLC и BKA подобны, так как $\angle CBL = \angle ABK$. Прямоугольные треугольники CLE и AKE тоже подобны, так как $\angle CEL = \angle KEA$. Из подобия треугольников получаем $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{CL} = \frac{AE}{CE}$.

Второе решение. Если BE — биссектриса внутреннего угла, то $\angle ABE = \angle CBE$ и $\angle BEA = 180° - \angle BEC$. Если BE — биссектриса внешнего угла, то $\angle ABE = 180° - \angle CBE$ и $\angle BEA = \angle BEC$. В обоих случаях $\sin ABE = \sin CBE$ и $\sin BEA = \sin BEC$. Поэтому, применяя теорему синусов к треугольникам ABE и CBE, имеем $\frac{AE}{AB} = \frac{\sin ABE}{\sin BEA} = \frac{\sin CBE}{\sin BEC} = \frac{CE}{CB}$. Следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$.

1.10. Если $AO:DO = CO:BO$, то $\triangle AOD \sim \triangle COB$. Поэтому $\angle OAD = \angle OCB$, т.е. $BC \parallel AD$. Если же $BC \parallel AD$, то $\angle OAD = \angle OCB$ и $\angle ODA = \angle OBC$, поэтому $\triangle AOD \sim \triangle COB$. Следовательно, $AO \cdot BO = CO \cdot DO$.

1.11. Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C имеют общий острый угол C, следовательно, $\angle B_1BC = \angle A_1AC$, т. е. прямоугольные треугольники AB_1H и BA_1H подобны. Из подобия этих треугольников получаем $\frac{BH}{A_1H}=\frac{AH}{B_1H}$, т. е. $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$. Второе равенство получается аналогично.

1.12. Поскольку $\frac{AP}{PK}=\frac{CP}{PM}=2$, треугольник ACP подобен треугольнику KMP. Поэтому $MK=\frac{1}{2}AC$ и прямая MK параллельна AC, т. е. KM — средняя линия треугольника.

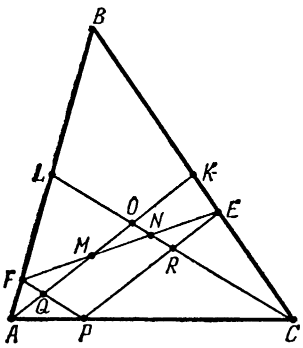


Рис. 6

1.13. Если угол ABC тупой (соответственно острый), то угол MAN тоже тупой (соответственно тоже острый). Кроме того, стороны этих углов взаимно перпендикулярны. Поэтому $\angle ABC = \angle MAN$. Прямоугольные треугольники ABM и ADN имеют равные острые углы ABM и ADN, поэтому $\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{CB}$, т. е. треугольник ABC подобен треугольнику MAN.

1.14. Обозначим точку пересечения медиан через O, точки пересечения медианы AK с прямыми FP и FE — через Q и M, точки пересечения медианы CL с прямыми EP и FE — через R и N соответственно (рис. 6). Ясно, что $\frac{FM}{FE}=\frac{FQ}{FP}=\frac{LO}{LC}=\frac{1}{3}$, т. е. $FM=\frac{1}{3}FE$. Аналогично, $EN=\frac{1}{3}FE$.

1.15. Пусть $a > 1$. Треугольник со сторонами $1, a, a^2$ существует, если $a^2 < a+1$, т. е. $a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Треугольники со сторонами $1, a, a^2$ и a, a^2, a^3, где $1 < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, удовлетворяют требуемому условию и не равны.

1.16. Так как $\triangle ADB \sim \triangle CBE$ и $CB=AB$, то $\frac{DB}{BE}=\frac{AD}{CB}=\frac{AD}{AB}$. Чтобы доказать, что $\triangle DBE \sim \triangle DAB$, остается проверить, что $\angle DBE = \angle DAB$. Ясно, что $\angle DBE = 180° - \angle DBA - \angle CBE = 180° - \angle DBA - \angle ADB = \angle DAB$. Поскольку $\triangle DBE \sim \triangle DAB$, $\angle BDE = \angle ADB$.

1.17. Обозначим вершину угла через C, точки пересечения прямой со сторонами угла — через A и B. Пусть $a=CA$, $b=CB$, Опустим из точки P перпендикуляры PK и PL на стороны AC и BC соответственно. Поскольку треугольник AKP подобен треугольнику PLB, $\frac{AK}{KP}=\frac{PL}{LB}$, т. е. $\frac{a-h}{h}=\frac{h}{b-h}$, где $h=PK=LP$. Из этого равенства получаем $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}$. Ясно, что величина h зависит только от точки P и не зависит от выбора прямой AB.

1.18. а) Пусть O — центр вписанной окружности, O_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Опустим из точек O и O_a перпендикуляры OK и O_aL на прямую AC. Поскольку точки O и O_a лежат на биссектрисе угла A, треугольники AKO и ALO_a подобны. Из равенства длин касательных, проведенных из одной точки, легко получить, что $AL=p$ и $AK=p-a$. Следовательно, $r:r_a=KO:LO_a=AK:AL=(p-a):p$, т. е. $(p-a)\,r_a=pr=S$.

б) Складывая равенства $\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p}$, $\frac{r}{r_b}=\frac{p-b}{p}$ и $\frac{r}{r_c}=\frac{p-c}{p}$, получаем $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=\frac{3p-a-b-c}{p}=1$, т. е. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$.

1.19. Обозначим середину стороны BC через O, а точки пересечения AK и AL со стороной BC — через P и Q. Можно считать, что $BP<BQ$. Поскольку точки K и L делят полуокружность на равные дуги, треугольник LCO равносторонний и $LC\parallel AB$. Поэтому $\triangle ABQ \backsim \triangle LCQ$, т. е. $BQ:QC=AB:LC=2:1$. Следовательно, $BC=BQ+QC=3QC$. Аналогично, $BC=3BP$.

1.20. Поскольку $BK:BO=BO:AB$ и $\angle KBO=\angle ABO$, $\triangle KOB \backsim \triangle OAB$. Поэтому $\angle KOB=\angle OAB$. Аналогично, $\angle AOM=\angle ABO$. Следовательно, $\angle KOM=\angle KOB+\angle BOA+$ $+\angle AOM=\angle OAB+\angle BOA+\angle ABO=180^\circ$, т. е. точки K, O и M лежат на одной прямой.

1.21. Первое решение. Решим задачу в общем случае. Пусть $CB=a$, $AC=b$, CD — биссектриса угла C. Проведем через вершину B прямую, параллельную CD. Эта прямая пересекает прямую AC в точке E. Треугольник ECB равнобедренный, поскольку $\angle CEB=\angle ACD=\angle DCB=\angle CBE$. Поэтому $CE=CB=a$. Из подобия треугольников ACD и AEB получаем $\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{AE}$, т. е. $CD=BE\cdot\frac{AC}{AE}=BE\cdot\frac{b}{a+b}$. Ясно, что $BE<BC+CE=2a$. Поэтому $CD<\frac{2ab}{a+b}$. В нашем случае $CD<\frac{300}{25}=12$.

Второе решение. Ясно, что $\frac{CD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin(C/2)}=\frac{cb}{a+b}\times$ $\times\frac{1}{\sin(C/2)}$ и $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$. Поэтому $CD=\frac{2ab}{a+b}\cos(C/2)<\frac{2ab}{a+b}$.

1.22. Пусть продолжения сторон AB и CD трапеции пересекаются в точке K, а ее диагонали — в точке L (рис. 7). Докажем, что точки E и F, в которых прямая KL пересекает стороны BC и AD, являются их серединами.

Коэффициент подобия треугольников KBE и KAF равен коэффициенту подобия треугольников KEC и KFD, поэтому $AF = pBE$, $FD = pEC$. Коэффициент подобия треугольников ECL и AFL равен коэффициенту подобия треугольников BEL и DFL, поэтому $AF = qEC$ и $FD = qBE$. Перемножая равенства $AF = pBE$ и $FD = qBE$, получаем $AF \cdot FD = pqBE^2$. Перемножая оставшиеся два равенства, получаем $AF \cdot FD = pqEC^2$. Следовательно, $BE = EC$, $AF = pBE = pEC = FD$.

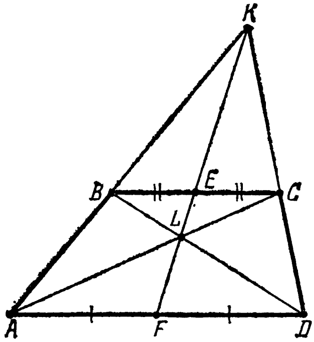


Рис. 7

1.23. Пусть продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке K, а диагонали трапеции пересекаются в точке L. Согласно предыдущей задаче прямая KL проходит через середину отрезка AD, а по условию задачи эта же прямая делит пополам угол AKD. Поэтому треугольник AKD — равнобедренный, а значит, и трапеция $ABCD$ тоже равнобедренная.

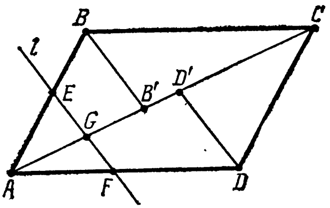


Рис. 8

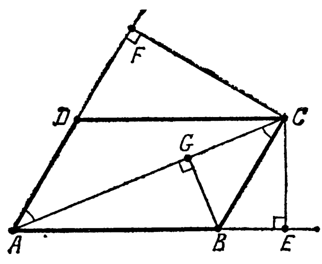


Рис. 9

1.24. Возьмем на диагонали AC точки D' и B' такие, что $BB' \parallel l$ и $DD' \parallel l$ (рис. 8). Тогда $\frac{AB}{AE} = \frac{AB'}{AG}$ и $\frac{AD}{AF} = \frac{AD'}{AG}$. Поскольку стороны треугольников ABB' и CDD' попарно параллельны и $AB = CD$, эти треугольники равны и $AB' = CD'$. Поэтому

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AB'}{AG} + \frac{AD'}{AG} = \frac{CD' + AD'}{AG} = \frac{AC}{AG}.$$

1.25. Опустим из вершины B перпендикуляр BG на AC (рис. 9). Из подобия треугольников ABG и ACE получаем $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AG}$, т. е. $AC\cdot AG=AE\cdot AB$. Прямые AF и CB параллельны, поэтому углы GCB и CAF равны и прямоугольные треугольники CBG и ACF подобны. Из подобия этих треугольников получаем $\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{CG}$, т. е. $AC\cdot CG=AF\cdot BC$. Складывая полученные равенства, находим $AC\cdot(AG+CG)=AE\cdot AB+AF\cdot BC$. Поскольку $AG+CG=AC$, получаем требуемое равенство.

1.26. $\angle AEB+\angle BEC=180°$, поэтому эти углы не могут быть разными углами подобных треугольников ABE и BEC, т. е. они равны и BE — перпендикуляр.

Теперь возможны два варианта: $\angle ABE=\angle CBE$ или $\angle ABE=\angle BCE$. Первый вариант отпадает, так как в этом случае треугольник ABE равен треугольнику BCE. Остается второй вариант. В этом случае $\angle ABC=\angle ABE+\angle CBE=\angle ABE+\angle BAE=90°$. В прямоугольном треугольнике ABC катеты относятся, как $1:\sqrt{3}$, поэтому его углы равны 90°, 60°, 30°.

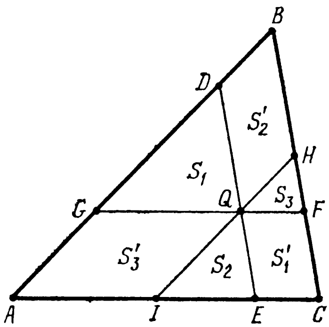


Рис. 10

1.27. Проведем через точку Q, взятую внутри треугольника ABC, прямые DE, FG, HI параллельно BC, CA, AB соответственно так, чтобы точки F, H лежали на стороне BC, точки E, I — на AC, точки D, G — на AB. Введем обозначения: $S=S_{ABC}$, $S_1=S_{GDQ}$, $S_2=S_{IEQ}$, $S_3=S_{HFQ}$ (рис. 10). Тогда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{GQ}{AC}+\frac{IE}{AC}+\frac{FQ}{AC}=\frac{AI+IE+EC}{AC}=1,$$

т. е. $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

1.28. $\frac{\frac{1}{2}S_{BDEF}}{S_{ADE}}=\frac{S_{BDE}}{S_{ADE}}=\frac{DB}{AD}=\frac{EF}{AD}=\sqrt{\frac{S_{EFC}}{S_{ADE}}}$. Поэтому $S_{BDEF}=2\sqrt{S_{ADE}\cdot S_{EFC}}$.

1.29. Будем использовать обозначения задачи 1.27 и введем еще дополнительные обозначения: $S_1'=S_{QFCE}$, $S_2'=S_{QDBH}$, $S_3'=S_{QGAI}$. Согласно предыдущей задаче (см. рис. 10)

$$S_1'=2\sqrt{S_2S_3},\quad S_2'=2\sqrt{S_1S_3},\quad S_3'=2\sqrt{S_1S_2}.$$

Из этих уравнений получаем $S_1=\frac{S_2'S_3'}{2S_1'}$, $S_2=\frac{S_1'S_3'}{2S_2'}$, $S_3=\frac{S_1'S_2'}{2S_3'}$. Но $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$ (см. задачу 1.27). Поэтому

$$S=\left(\sqrt{\frac{S_2'S_3'}{2S_1'}}+\sqrt{\frac{S_1'S_3'}{2S_2'}}+\sqrt{\frac{S_1'S_2'}{2S_3'}}\right)^2.$$

1.30. Обозначим точки пересечения прямых KD и AE, AE и BM, BM и CH, CH и KD через P, Q, R, S соответственно

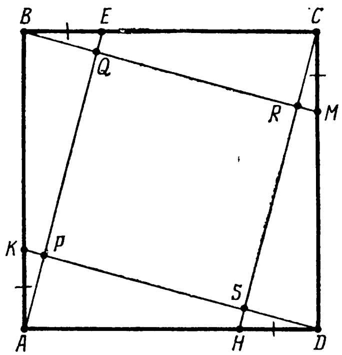


Рис. 11

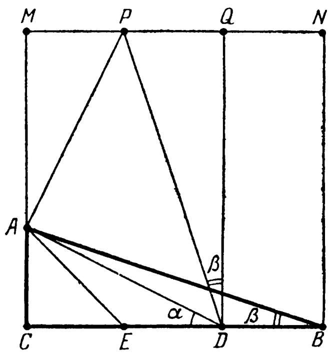


Рис. 12

(рис. 11). Четырехугольник $PQRS$ — квадрат, поскольку он переходит в себя при повороте на 90° относительно центра квадрата $ABCD$.

$$PQ=AQ-AP=AQ-QB.$$

Треугольники AQB и ABE подобны с коэффициентом $\frac{AB}{AE}=\sqrt{\frac{16}{17}}$, поэтому $PQ=AQ-QB=\frac{4}{\sqrt{17}}(AB-BE)=\frac{3}{\sqrt{17}}AB$. $S_{PQRS}=$ $=PQ^2=\frac{9}{17}AB^2=\frac{9}{17}S$.

1.31. Первое решение. Построим на катете BC квадрат $BCMN$; на стороне MN выберем точки P и Q так, чтобы $MP=\frac{1}{3}MN$, $MQ=\frac{2}{3}MN$ (рис. 12). $AM=CD$ и $MP=AC$, поэтому прямоугольные треугольники AMP и DCA равны. Следовательно, $\angle PAD=90°$ и PAD — равнобедренный прямоугольный треугольник. $\angle ABC=\angle PDQ$, так как треугольники ABC и PDQ равны. Поэтому $\angle ABC+\angle ADC=\angle PDQ+\angle ADC=90°-$ $-\angle ADP=45°$. Ясно также, что $\angle AEC=45°$.

Второе решение. Пусть $\angle ADC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$. Нам достаточно проверить, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$. Ясно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=1.$$

Третье решение. $DE=1$, $EA=\sqrt{2}$, $EB=2$, $AD=\sqrt{5}$, $BA=\sqrt{10}$. Поэтому $\frac{DE}{AE}=\frac{EA}{EB}=\frac{AD}{BA}$ и треугольники DEA и AEB подобны. Следовательно, $\angle ABC=\angle EAD$. Кроме того, $\angle AEC=\angle CAE=45°$. Поэтому $\angle ABC+\angle ADC+\angle AEC=(\angle EAD+\angle CAE)+\angle ADC=\angle CAD+\angle ADC=90°$.

1.32. Опустим из точки L перпендикуляры LM на AB и LN на AD. $KM=MB=ND$ и $KL=LB=DL$, поэтому прямоугольные треугольники KML и NDL равны. Следовательно, $\angle DLK=\angle NLM=90°$.

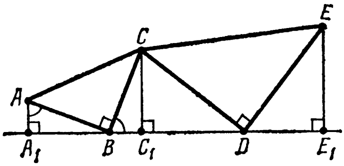


Рис. 13

1.33. Опустим перпендикуляры AA_1, CC_1 и EE_1 на прямую BD (рис. 13). $\angle C_1BC=180°-90°-\angle ABA_1=\angle A_1AB$ и $AB=BC$, поэтому прямоугольные треугольники AA_1B и BC_1C равны. Аналогично получаем равенство треугольников CC_1D и DE_1E. $A_1B=CC_1=DE_1$, поэтому середина O отрезка AE проецируется в середину отрезка BD. С другой стороны, средняя линия трапеции AA_1E_1E равна $\frac{AA_1+EE_1}{2}=\frac{BC_1+C_1D}{2}=\frac{BD}{2}$. Поэтому положение точки O определено однозначно.

1.34. а) Ясно, что $\angle ADL=\angle ADC+\angle CDL=90°+60°=150°$ и $\angle KCL=360°-\angle KCB-\angle BCD-\angle DCL=360°-60°-90°-60°=150°$. Поэтому $\angle ADL=\angle KCL$. Следовательно, треугольники ADL и KCL равны, т. е. $AL=KL$. Ясно также, что $AK=AL$.

б) Ясно, что $\angle ABK=60°+\angle ABC$ и $\angle KCB+\angle BCD+\angle DCL=120°+\angle BCD$. Поскольку $\angle ABC+\angle BCD=180°$, $\angle ABK+(\angle KCB+\angle BCD+\angle DCL)=360°$. Поэтому $\angle ABK=\angle LCK$. Поскольку $AB=CD=CL$ и $BK=KC$, треугольники ABK и LCK равны, т. е. $AK=KL$. Аналогично доказывается, что $AL=KL$.

1.35. Построим на стороне AD квадрата внутренним образом треугольник AQD, равный треугольнику APB (рис. 14). $\angle PAQ=90°-15°-15°=60°$ и $AP=AQ$, поэтому треугольник APQ

равносторонний. $\angle PQD = 360° - 60° - 150° = 150°$, поэтому треугольник PQD равен треугольнику AQD, т. е. $PD = DA = CD$. Аналогично доказывается, что $CP = CD$.

1.36. На продолжении отрезка AC за точку C возьмем точку M так, что $CM = CE$ (рис. 15). Тогда треугольник ACE при повороте с центром C на $90°$ переходит в треугольник BCM. Поэтому прямая MB перпендикулярна прямой AE и, значит, параллельна

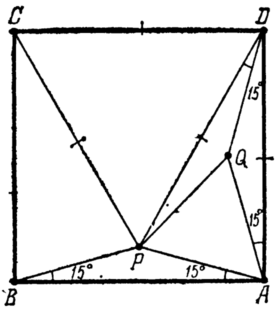


Рис. 14

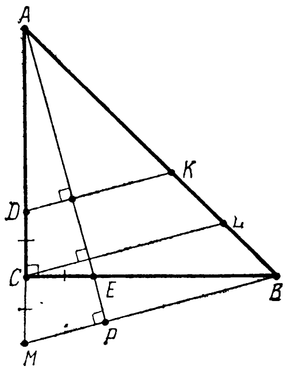


Рис. 15

прямой CL. Поскольку $MC = CE = DC$ и прямые DK, CL и MB параллельны, $KL = LB$.

1.37. Пусть $\alpha = \angle PAC = \angle PBC$. Обозначим середину отрезка AP через E, середину отрезка BP через F (рис. 16).

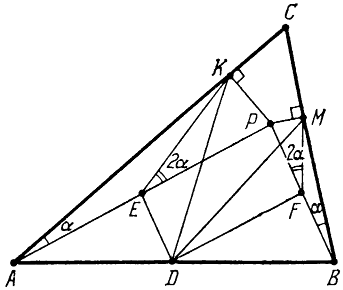


Рис. 16

Поскольку треугольник AKP прямоугольный, $\angle KEP = 2\alpha$ и $KE = EP$. Аналогично, $\angle MFP = 2\alpha$ и $MF = FP$. Поскольку четырехугольник $DEPF$ — параллелограмм, $\angle DEP = \angle PFD$. Следовательно, $\angle KED = \angle MFD$. Поскольку $ED = PF = FM$ и $EK = EP = FD$, треугольники KED и DFM равны. Следовательно, $DK = DM$.

1.38. Пусть O — центр окружности. $\angle MAC = \angle ACO = \angle CAO$, и поэтому треугольник AMC равен треугольнику ADC. Аналогично, треугольник CDB равен треугольнику CNB. Треугольник ACD подобен треугольнику CDB, поэтому $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, т. е. $CD^2 = AD \cdot DB = AM \cdot NB$.

1.39. Угол между касательной AB и хордой AD равен углу ACD, опирающемуся на хорду AD, т. е. $\angle ACD = \angle DAB$. Аналогично, $\angle CDA = \angle ABD$. Поэтому треугольники ACD и DAB подобны, т. е. $\frac{AC}{DA} = \frac{CD}{AB}$ и $\frac{AD}{DB} = \frac{CD}{AB}$. Перемножая полученные равенства, имеем $\frac{AC}{DB} = \frac{CD^2}{AB^2}$.

1.40. $AK = AB = CD$, $AD = BC = CH$ и $\angle KAD = \angle DCH$, поэтому треугольник ADK равен треугольнику CDH и $DK = DH$.

Покажем, что точки A, K, H, C и D лежат на одной окружности. Опишем вокруг треугольника ADC окружность. Проведем в этой окружности хорду CK_1 параллельно AD и хорду AH_1 параллельно DC. Тогда $K_1A = DC$ и $H_1C = AD$. Значит, $K_1 = K$ и $H_1 = H$, т. е. построенная окружность проходит через точки K и H и углы KAH и KDH равны, поскольку они опираются на одну дугу. Кроме того, уже было показано, что KDH — равнобедренный треугольник.

1.41. Первое решение. Отметим на отрезке AP точки M и N так, что $PN = PB$, $PM = PC$. Тогда треугольники CPM и BPN правильные. Треугольник CQP подобен треугольнику BQN, поэтому

$$\frac{CP}{PQ} = \frac{NB}{NQ} = \frac{BP}{BP - PQ}.$$

Отсюда получаем требуемое равенство.

Второе решение. На продолжении отрезка BP за точку P отметим точку D так, что $PD = CP$. Тогда треугольник CDP правильный и прямая CD параллельна прямой QP. Поэтому $\frac{BP}{PQ} = \frac{BD}{DC} = \frac{BP + CP}{CP}$, т. е. $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{CP} + \frac{1}{BP}$.

1.42. Пусть прямые BM и DN пересекают окружность S_2 в точках L и C_1 соответственно. Докажем, что прямая DC_1 симметрична прямой CN относительно прямой BN. Поскольку прямые BN и NA перпендикулярны, достаточно доказать, что $\angle CNB = \angle BND$. Это очевидно, поскольку дуги CB и BD равны. Дуги C_1M и CL равны, поскольку они симметричны относительно диаметра AN. Поэтому $\angle MDC_1 = \angle CML$. Кроме того, $\angle CNM = \angle MND$; следовательно, треугольники MCN и DMN подобны, т. е. $\frac{CN}{MN} = \frac{MN}{DN}$.

1.43. а) Опустим из точки P на окружности перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на прямые BC, CA, AB соответственно. $\angle PBA_1 = \angle PAC_1$ и $\angle PBC_1 = \angle PAB_1$, поэтому прямоугольные треугольники PBA_1 и PAC_1, PAB_1 и PBC_1 подобны, т. е. $PA_1 : PB =$

$=PC_1:PA$, $PB_1:PA=PC_1:PB$. Перемножая эти равенства, получаем $PA_1 \cdot PB_1 = PC_1^2$.

б) Согласно а) $OA''=\sqrt{OB' \cdot OC'}$, $OB''=\sqrt{OA' \cdot OC'}$, $OC''=\sqrt{OA' \cdot OB'}$. Перемножая эти равенства, получаем требуемое.

1.44. Первое решение. $\angle EOK=\angle ECA=\angle OAK$, поэтому треугольник AOK подобен треугольнику OEK и $\frac{OK}{AK}=\frac{EK}{OK}$. С другой стороны, по свойству касательной и секущей $AK \cdot EK = KB^2$. Поэтому $KB=OK$.

Второе решение. Проведем через точку C касательную к окружности, пересекающую прямую OB в точке M. $\angle COM = \angle OCA=\angle OAK$ и $\angle AOK=\angle CMO$, поэтому треугольник AOK подобен треугольнику OMC. Следовательно,

$$\frac{AO}{OK}=\frac{OM}{CM}=\frac{OM}{BM}=2.$$

1.45. а) Опустим из точки Q перпендикуляры QK_1 и QN_1 на KL и NM, из точки P — перпендикуляры PM_1 и PL_1 на NM и KL. Ясно, что $\frac{QC}{PC}=\frac{QK_1}{PL_1}=\frac{QN_1}{PM_1}$, т. е. $\frac{QC^2}{PC^2}=\frac{QK_1 \cdot QN_1}{PL_1 \cdot PM_1}$. Поскольку $\angle KNC=\angle MLC$ и $\angle NKC=\angle LMC$, $\frac{QN_1}{PL_1}=\frac{QN}{PL}$ и $\frac{QK_1}{PM_1}=\frac{QK}{PM}$. Поэтому

$$\frac{QC^2}{PC^2}=\frac{QK \cdot QN}{PL \cdot PM}=\frac{AQ \cdot QB}{PB \cdot AP}=\frac{(AC-QC) \cdot (AC+QC)}{(AC-PC) \cdot (AC+PC)}=\frac{AC^2-QC^2}{AC^2-PC^2}.$$

Отсюда получаем $QC=PC$.

б) Решается совершенно аналогично.

1.46. $A_1C=AC\cos C$, $B_1C=BC\cos C$, угол C у треугольников ABC и A_1B_1C общий, поэтому треугольники ABC и A_1B_1C подобны, причем коэффициент подобия равен $\cos C$.

1.47. Поскольку CP и BQ — высоты треугольника ABC, треугольник AQP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos\alpha$ (см. задачу 1.46), поэтому $S_{ABC}:S_{APQ}=1:\cos^2\alpha$.

1.48. Точки M и N лежат на окружности, построенной на CH как на диаметре. $\angle NMC=\angle NHC$, поскольку они опираются на одну дугу этой окружности. Прямоугольные треугольники CHN и CAH имеют общий угол C, поэтому $\angle CAH=\angle NHC=\angle NMC$. Аналогично, $\angle CBH=\angle MNC$.

1.49. Согласно задаче 1.46 $FE=BC \cdot \cos A$, $FD=AC \cdot \cos B$, $ED=AB \cdot \cos C$, поэтому $p=BC \cdot \cos A+AC \cdot \cos B+AB \cdot \cos C$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, R — ее радиус. Тогда $S_{BOC}=\frac{1}{2}R \cdot BC \cdot \cos A$, $S_{AOC}=\frac{1}{2}R \cdot AC \cdot \cos B$,

$S_{AOB}=\frac{1}{2}R\cdot AB\cdot\cos C$, т. е. $S_{ABC}=\frac{1}{2}R\,(BC\cdot\cos A+AC\cdot\cos B+$ $+AB\cdot\cos C)=\frac{1}{2}Rp$. Поскольку $pR=2S_{ABC}=Pr$, получаем требуемое.

1.50. а) Согласно задаче 1.46 $\angle C_1A_1B=\angle CA_1B_1=\angle A$. Поскольку $AA_1\perp BC$, $\angle C_1A_1A=\angle B_1A_1A$. Аналогично доказывается, что лучи B_1B и C_1C — биссектрисы углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$.

б) Пусть $\alpha=\angle B_1A_1C=\angle BA_1C_1$, $\beta=\angle A_1B_1C=\angle AB_1C_1$ и $\gamma=\angle A_1C_1B=\angle AC_1B_1$. Тогда $\angle A=180°-\beta-\gamma$, $\angle B=180°-$ $-\alpha-\gamma$ и $\angle C=180°-\alpha-\beta$. Поскольку $\angle A+\angle B+\angle C=180°$, $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Поэтому $\alpha=\angle A$, $\beta=\angle B$ и $\gamma=\angle C$.

Из подобия треугольников ABC и AB_1C_1 получаем $\frac{AB}{AB_1}=\frac{AC}{AC_1}$. Поэтому треугольник ABB_1 подобен треугольнику ACC_1, т. е $\angle ABB_1=\angle ACC_1$. Аналогично, $\angle BAA_1=\angle BCC_1$ и $\angle CAA_1=$ $=\angle CBB_1$.

Докажем теперь, что $AA_1\perp BC$. Для этого достаточно доказать, что $\angle CAA_1+\angle ACA_1=90°$. Ясно, что $\angle CAA_1+$ $+\angle ACA_1=\angle CAA_1+\angle ACC_1+\angle BCC_1=\frac{1}{2}(\angle CAA_1+\angle CBB_1)+$ $+\frac{1}{2}(\angle ACC_1+\angle ABB_1)+\frac{1}{2}(\angle BCC_1+\angle BAA_1)=\frac{1}{2}(\angle A+$ $+\angle B+\angle C)=90°$. Аналогично доказывается, что $BB_1\perp AC$ и $CC_1\perp AB$.

1.51. Согласно задаче 1.46 $\angle BAC=\angle B_1A_1C$. Поскольку треугольники AC_1C и AA_1C прямоугольные, $\angle ACC_1=90°-\angle BAC$ и $\angle AA_1B_1=90°-\angle B_1A_1C$. Поэтому $\angle ACC_1=\angle AA_1B_1$.

1.52. Согласно задаче 1.46 $\angle B_1A_1C=\angle BAC$. Поскольку $A_1B_1\parallel AB$, $\angle B_1A_1C=\angle ABC$. Поэтому $\angle BAC=\angle ABC$. Аналогично, из того, что $B_1C_1\parallel BC$, следует равенство $\angle ABC=$ $=\angle BCA$. Поэтому треугольник ABC равносторонний и $A_1C_1\parallel AC$.

1.53. Периметр треугольника, отсекаемого прямой, параллельной стороне BC, равен сумме расстояний от точки A до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC, поэтому сумма периметров маленьких треугольников равна периметру треугольника ABC: $P_1+P_2+P_3=P$. Из подобия треугольников ясно, что $\frac{r_1}{r}=\frac{P_1}{P}$, $\frac{r_2}{r}=\frac{P_2}{P}$, $\frac{r_3}{r}=\frac{P_3}{P}$. Поэтому

$$\frac{r_1}{r}+\frac{r_2}{r}+\frac{r_3}{r}=\frac{P_1}{P}+\frac{P_2}{P}+\frac{P_3}{P}=1,$$

т. е. $r_1+r_2+r_3=r$.

1.54. Пусть $M=A$. Тогда $X_A=A$, поэтому $AY_A=1$. Аналогично, $CX_C=1$. Докажем, что $x=AY_A$ и $y=CX_C$ — искомые прямые. Возьмем на стороне BC точку D так, что $AB \parallel MD$ (рис. 17). Пусть E — точка пересечения прямых CX_C и MD. Тогда $X_M M + Y_M M = X_C E + Y_M M$. Поскольку треугольники ABC и MDC подобны, $CE = Y_M M$. Поэтому $X_M M + Y_M M = X_C E + CE = X_C C = 1$.

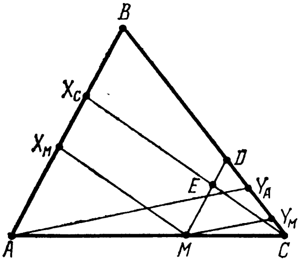


Рис. 17

1.55. Опустим из точки B перпендикуляр BD на сторону AC. $\triangle BDC \sim \triangle AHC \sim \triangle AEH$. Поскольку E — середина стороны CD, а O — середина стороны EH, то $\triangle BCE \sim \triangle AHO$, в частности, $\angle EBC = \angle HAO$. Следовательно, перпендикулярные прямые BC и AH переходят в прямые BE и AO при повороте на один и тот же угол, т. е. $BE \perp AO$.

1.56. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, O — точка их пересечения. Опустим из точки B_1 перпендикуляры B_1K, B_1L, B_1M, B_1N на AB, AA_1, CC_1, BC соответственно. Треугольники KLB_1 и C_1A_1C подобны, поскольку $\frac{KB_1}{C_1C} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{LB_1}{A_1C}$ и $\angle KB_1L = \angle C_1CA_1$, поэтому $KL \parallel C_1A_1$. Аналогично, $MN \parallel C_1A_1$. Треугольники OC_1A_1 и BKN подобны, поэтому $KN \parallel C_1A_1$. Через одну точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой, поэтому точки K, L, M, N лежат на одной прямой.

1.57. а) Пусть O — середина AC, O_1 — середина AB, O_2 — середина BC. Будем считать, что $AB \leqslant BC$. Проведем через точку O_1 прямую O_1K параллельно EF (K — точка на отрезке EO_2). Докажем, что прямоугольные треугольники DBO и O_1KO_2 равны. В самом деле, $O_1O_2 = DO = \frac{1}{2}AC$ и $BO = KO_2 = \frac{1}{2}(BC - AB)$. Из равенства треугольников DBO и O_1KO_2 следует, что $\angle BOD = \angle O_1O_2E$, т. е. прямая DO параллельна EO_2 и касательная, проведенная через точку D, параллельна прямой EF.

б) Поскольку углы между диаметром AC и касательными к окружностям в точках F, D, E равны, $\angle FAB = \angle DAC = \angle EBC$ и $\angle FBA = \angle DCA = \angle ECB$, т. е. F лежит на отрезке AD, E — на отрезке DC. Кроме того, $\angle AFB = \angle BEC = \angle ADC = 90°$, поэтому $FDEB$ — прямоугольник.

1.58. Пусть MQ и MP — перпендикуляры, опущенные на стороны AD и BC, MR и MT — перпендикуляры, опущенные на продолжения сторон AB и CD. Обозначим через M_1 и P_1 вторые точки пересечения прямых RT и QP с окружностью.

Так как $TM_1 = RM = AQ$ и $TM_1 \parallel AQ$, то $AM_1 \parallel TQ$. Аналогично, $AP_1 \parallel RP$. Поскольку $\angle M_1AP_1 = 90°$, то $RP \perp TQ$.

Обозначим точки пересечения прямых TQ и RP, M_1A и RP, P_1A и TQ через E, F, G соответственно (рис. 18). Чтобы доказать, что точка E лежит на прямой AC, достаточно доказать, что прямоугольники $AFEG$ и AM_1CP_1 подобны. Поскольку $\angle ARF = \angle AM_1R = \angle M_1TE = \angle M_1CT$, можно обозначить величины этих углов одной буквой α. $AF = RA \cdot \sin\alpha = M_1A \cdot \sin^2\alpha$, $AG = M_1T \cdot \sin\alpha = M_1C \cdot \sin^2\alpha$, т. е. прямоугольники $AFEG$ и AM_1CP_1 подобны.

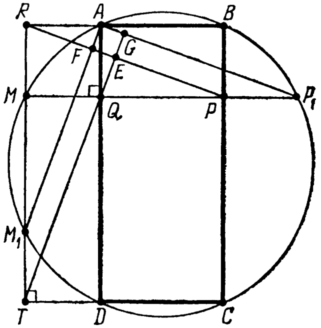


Рис. 18

1.59. Обозначим центры окружностей через O_1 и O_2. Внешняя касательная касается первой окружности в точке K, второй окружности — в точке L, внутренняя касательная касается первой окружности в точке M, второй окружности — в точке N. Пусть прямые KM и LN пересекают прямую O_1O_2 в точках P_1 и P_2 соответственно. Нам надо доказать, что $P_1 = P_2$. Рассмотрим еще точки A, D_1, D_2 пересечения прямых KL и MN, KM и O_1A, LN и O_2A соответственно (рис. 19). $\angle O_1AM + \angle NAO_2 = 90°$, поэтому

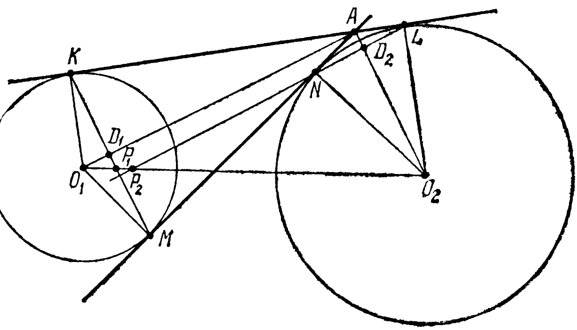


Рис. 19

прямоугольные треугольники O_1MA и ANO_2 подобны, $AO_2 \parallel KM$, $AO_1 \parallel LN$. Из параллельности этих прямых получаем $AD_1 : D_1O_1 = O_2P_1 : P_1O_1$ и $D_2O_2 : AD_2 = O_2P_2 : P_2O_1$. Из подобия четырехугольников AKO_1M и O_2NAL получаем $AD_1 : D_1O_1 = D_2O_2 : AD_2$. Следовательно, $O_2P_1 : P_1O_1 = O_2P_2 : P_2O_1$, т. е. $P_1 = P_2$.

Глава 2

ВПИСАННЫЙ УГОЛ

Основные сведения

1. Угол ABC, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность. Пусть O — центр окружности. Тогда

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC,$$

если точки B и O лежат по одну сторону от AC, и

$$\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOC,$$

если точки B и O лежат по разные стороны от AC. Важнейшим и наиболее часто используемым следствием этого факта является то, что величины углов, опирающихся на равные дуги, равны, а величины углов, опирающихся на равные хорды, либо равны, либо составляют в сумме 180°.

2. Величина угла между хордой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, равна половине угловой величины дуги AB.

3. Угловые величины дуг, заключенных между параллельными хордами, равны.

4. Как уже говорилось, величины углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме 180°. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введем понятие ориентированного угла между прямыми. *Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD* (обозначение: $\angle(AB, CD)$) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB, так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на $n \cdot 180^\circ$, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).

Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:

а) $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$;

б) $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$;

в) точки A, B, C, D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$ (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; точки B и D лежат по разные стороны от AC).

Вводные задачи

1. а) Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Докажите, что величина угла BAC равна полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

б) Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Докажите, что величина угла BAC равна полусумме угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричного ему относительно вершины A.

2. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

3. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, кратны $180°/n$.

4. Центр вписанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB. Найдите углы треугольника ABC.

5. Пусть A_1, B_1, C_1— середины сторон BC, CA, AB правильного треугольника ABC. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C имеют общую точку.

§ 1. Углы, опирающиеся на равные дуги

2.1. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

2.2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO — биссектриса прямого угла C.

2.3. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

2.4. Из произвольной точки M внутри данного угла с вершиной A опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

2.5. n диаметров делят окружность на равные дуги. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M внутри окружности на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

2.6. На окружности даны точки A, B, M и N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

2.7. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle BAC = 90°$) двигается по плоскости таким образом, что вершины B и C скользят по сторонам заданного на плоскости прямого угла P. Докажите, что геометрическим местом точек A является отрезок. Найдите длину этого отрезка.

2.8. $ABCDEF$ — вписанный шестиугольник. Докажите, что если $AB \| DE$ и $BC \| EF$, то $CD \| AF$.

2.9. $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ — вписанный $2n$-угольник. Про все пары его противоположных сторон, кроме одной, известно, что они параллельны.

а) n нечетно. Докажите, что оставшаяся пара сторон также параллельна.

б) n четно. Докажите, что оставшаяся пара сторон равна по длине.

§ 2. Величина угла между двумя хордами

Решить задачи этого параграфа помогает следующий факт. Пусть A, B, C, D — точки на окружности в указанном порядке. Тогда угол между хордами AB и CD равен $\frac{1}{2}|\smile AD - \smile CB|$, угол между хордами AC и BD равен $\frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$. (Для доказательства нужно провести через конец одной из хорд хорду, параллельную другой хорде.)

2.10. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырехугольник.

2.11. По стороне правильного треугольника катится окружность радиуса, равного его высоте. Докажите, что угловая величина дуги, высекаемой на окружности сторонами треугольника, всегда равна 60°.

2.12. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. A_1, B_1, C_1, D_1 — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что прямые A_1C_1 и B_1D_1 перпендикулярны.

2.13. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.

а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

в) В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T_1 и T_2, диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

§ 3. Угол между касательной и хордой

2.14. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B, S_2— в точке C. В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A.

2.15. Две окружности касаются в точке A. К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках C и D. Докажите, что $\angle CAD = 90°$.

2.16. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

§ 4. Связь величины угла с длиной хорды и длиной дуги

2.17. AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

2.18. В окружность вписаны две равнобедренные трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна по длине диагонали другой трапеции.

2.19. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?

§ 5. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, если $\angle BAD+\angle BCD=180°$

2.20. В треугольнике ABC угол B равен 60°, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD=OE$.

2.21. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.

2.22. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные вокруг этих треугольников, имеют одну общую точку.

2.23. Диагонали AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ разделены точками M и N так, что $AM : AC=CN : CE=\lambda$. Найдите λ, если известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

§ 6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны

2.24. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC опущен на гипотенузу AB перпендикуляр MN. Докажите, что $\angle MAN=\angle MCN$.

2.25. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что $\angle BPC=90°$.

2.26. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P. Опустив из нее перпендикуляры PA_1, PB_1 и PC_1 на стороны, получаем треугольник $A_1B_1C_1$. Проделав для него ту же операцию, получаем треугольник $A_2B_2C_2$, а затем — треугольник $A_3B_3C_3$. Докажите, что треугольник $A_3B_3C_3$ подобен треугольнику ABC.

2.27. Докажите, что если проекции точки пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ на стороны соединить последовательно четырьмя отрезками, то получится описанный четырехугольник.

2.28. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M так, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM=\angle CDM$, то $\angle ACD=\angle BCM$.

2.29. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки описанной окружности на стороны треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

2.30. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD=AD+BC$, то точка пересечения биссектрис углов A и B лежит на стороне CD.

2.31. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда проекции их точки пересечения на все четыре стороны лежат на одной окружности (предполагается, что проекции попадают на стороны).

§ 7. Биссектриса угла треугольника делит дугу описанной окружности пополам

2.32. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этой вершины, тогда и только тогда, когда $\angle C=90°$.

2.33. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины C, делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

2.34. Докажите, что в любом треугольнике ABC биссектриса AE лежит между медианой AM и высотой AH.

2.35. Постройте треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной вершины.

§ 8. Вписанный угол применяется для доказательства того, что прямые пересекаются в одной точке

2.36. На сторонах AC и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Докажите, что прямые A_1B, A_2B_2 и AB_1 пересекаются в одной точке.

2.37. На сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, A_1BC и AB_1C. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и образуют углы, равные 60°.

2.38. На сторонах произвольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные треугольники ABC_1, A_1BC и AB_1C так, что $\angle CA_1B=\angle CAB_1=$ $=\angle C_1AB$ и $\angle AB_1C=\angle A_1BC=\angle ABC_1$.

а) Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников ABC_1, AB_1C и A_1BC, пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что в той же точке пересекаются прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

§ 9. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

В этом параграфе $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Мы будем использовать также следующие обозначения: O — центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$, P — точка пересечения диагоналей.

2.39. Из вершин A и B опущены перпендикуляры на сторону CD, пересекающие диагонали в точках K и M соответственно. Докажите, что $AKMB$ — ромб.

2.40. Известен радиус описанной окружности R.
а) Найдите $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$.

б) Найдите сумму квадратов сторон четырехугольника $ABCD$.

2.41. Докажите, что ломаная AOC делит $ABCD$ на две фигуры равной площади.

2.42. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины стороны CD.

2.43. Докажите, что прямая, проведенная из точки P перпендикулярно BC, делит сторону AD пополам.

2.44. Найдите сумму квадратов диагоналей, если известна длина отрезка OP и радиус описанной окружности R.

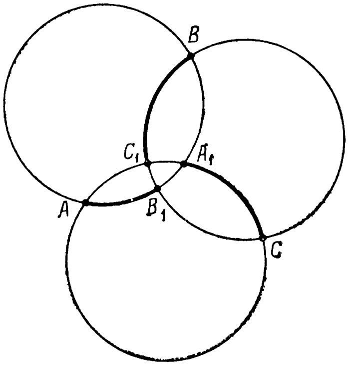


Рис. 20

§ 10. Три равные пересекающиеся окружности

2.45. Три равные окружности имеют общую точку H, а точки их пересечения, отличные от H, образуют остроугольный треугольник ABC. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

2.46. Докажите, что точки пересечения трех окружностей одного радиуса, проходящих через одну точку, лежат на окружности того же радиуса.

2.47. Три окружности одинакового радиуса попарно пересекаются: первая со второй в точках A и A_1, вторая с третьей в точках B и B_1, третья с первой в точках C и и C_1. При этом A, B, C — внешние точки; A_1, B_1, C_1— внутренние точки (рис. 20). Докажите, что сумма угловых величин дуг AB_1, BC_1 и CA_1 равна 180°.

§ 11. Разные задачи

2.48. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Докажите, что $\angle OAH = |\angle C - \angle B|$.

2.49. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, продолжения сторон которого пересекаются в точках E и K. Докажите, что четыре точки пересечения биссектрис углов AED и AKB со сторонами четырехугольника $ABCD$ являются вершинами ромба.

2.50. Точки K и P симметричны основанию H высоты BH треугольника ABC относительно сторон AB и BC. Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC (или их продолжениями) являются основаниями высот треугольника.

2.51. На продолжении диаметра EF данной окружности фиксирована точка C. Точки A и A_1 расположены на окружности по разные стороны от EF так, что $AC \neq A_1C$, но $\angle ACE = \angle A_1CE$. Докажите, что положение точки пересечения прямых EF и AA_1 не зависит от положения точек A и A_1.

2.52. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, причем касательные к S_1 в этих точках являются радиусами S_2. На внутренней дуге S_1 взята точка C и соединена с точками A и B прямыми. Докажите, что вторые точки пересечения этих прямых с S_2 являются концами одного диаметра.

2.53. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон (если эти стороны не параллельны) вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (теорема Паскаля).

2.54. Из центра O окружности опущен перпендикуляр OA на прямую l. На прямой l взяты точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках P и Q, а вторая — в точках M и N. Прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S. Докажите, что $AR = AS$.

Задачи для самостоятельного решения

2.55. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку с концами в основаниях высот треугольника делит противоположную сторону пополам.

2.56. Докажите, что если провести из вершины правильного многоугольника все диагонали, то они разделят угол при этой вершине на равные части.

2.57. В выпуклом четырехугольнике $AB=BC=CD$, M — точка пересечения диагоналей, K — точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K и D лежат на одной окружности.

2.58. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая O_1A пересекает окружность с центром O_2 в точке N. Докажите, что точки O_1, O_2, B и N лежат на одной окружности.

2.59. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямая MN касается окружности S_1 в точке M и окружности S_2 в точке N. Пусть A — та из точек пересечения окружностей, которая более удалена от прямой MN. Докажите, что $\angle O_1AO_2=2\angle MAN$.

2.60. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, причем $AB=BC$. Докажите, что $S_{ABCD}=$ $=\frac{1}{2}(DA+CD)\cdot h_b$, где h_b—высота треугольника ABD, опущенная из вершины B.

2.61. Четырехугольник $ABCD$ вписанный, причем AC — биссектриса угла DAB. Докажите, что $AC\cdot BD=$ $=AD\cdot DC+AB\cdot BC$.

2.62. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CM и высота CH. HD и HE — биссектрисы треугольников AHC и CHB. Докажите, что точки C, D, H, E и M лежат на одной окружности.

2.63. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, O — центр описанной окружности. Докажите, что прямые AO и B_1C_1 перпендикулярны.

2.64. Вне правильного треугольника ABC, но внутри угла BAC взята точка M так, что $\angle CMA=30°$ и $\angle BMA=\alpha$. Чему равен угол ABM?

Решения

2.1. Проведем диаметр AD. $\angle CDA=\angle CBA$, поскольку эти углы опираются на одну дугу. Треугольники CAD и HAB прямоугольные, поэтому $\angle BAH=\angle DAC$.

2.2. $\angle BOA = 90°$, поэтому точки O и C лежат на окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре. Треугольник AOB равнобедренный, следовательно, дуга BO равна дуге OA и $\angle BCO = \angle OCA$, т. е. CO — биссектриса.

2.3. Чтобы нам не пришлось разбирать различные варианты расположения точек, воспользуемся свойствами ориентированных углов. $\angle(AC, CK) = \angle(AM, MK) = \angle(BM, MK) = \angle(BD, DK) = \angle(BD, CK)$, т. е. $AC \parallel BD$.

2.4. Точки P и Q лежат на окружности, построенной на отрезке AM как на диаметре. Поэтому $\angle QMA = \angle QPA$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Треугольники PAK и MAQ прямоугольные, следовательно, $\angle PAK = \angle MAQ$.

2.5. Ясно, что основания перпендикуляров, опущенных из точки M на диаметры, лежат на окружности S, построенной на отрезке OM как на диаметре (O — центр исходной окружности). Точки пересечения данных диаметров с окружностью S, отличные от точки O, делят ее на n дуг. Поскольку на все дуги, не содержащие точку O, опираются углы $180°/n$, угловые величины этих дуг равны $360°/n$. Поэтому угловая величина дуги, на которой лежит точка O, равна $360° - (n-1) \cdot 360°/n = 360°/n$. Следовательно, основания перпендикуляров делят окружность S на n равных дуг, т. е. являются вершинами правильного n-угольника.

2.6. Ясно, что $\angle(AA_1, BB_1) = \angle(AA_1, AB_1) + \angle(AB_1, BB_1) = \angle(MA_1, MB_1) + \angle(AN, BN)$. Так как $MA_1 \perp BN$ и $MB_1 \perp AN$, то $\angle(MA_1, MB_1) = \angle(BN, AN) = -\angle(AN, BN)$. Поэтому $\angle(AA_1, BB_1) = 0°$, т. е. $AA_1 \parallel BB_1$.

2.7. Точки A и P лежат на окружности, построенной на отрезке BC как на диаметре, поэтому $\angle APC = \angle ABC$, т. е. величина угла APC постоянна.

Максимальная длина хорды AP равна диаметру окружности, т. е. гипотенузе BC.

Минимальная длина хорды AP равна наименьшему катету. В самом деле, пусть $AC \leqslant AB$. Тогда $\angle APC = \angle ABC \leqslant \angle BCA \leqslant \angle PCA$. Длина отрезка, по которому движется точка A, равна разности длин гипотенузы и наименьшего из катетов.

2.8. Поскольку $AB \parallel DE$, то $\angle ACE = \angle BFD$. Поскольку $BC \parallel EF$, то $\angle CAE = \angle BDF$. Треугольники ACE и BDF имеют по два равных угла, поэтому третьи углы у них тоже равны. Из равенства этих углов следует равенство дуг AC и DF, т. е. параллельность хорд CD и AF.

2.9. Доказательство проведем индукцией по n. Для четырехугольника утверждение очевидно, для шестиугольника оно было доказано в предыдущей задаче. Допустим, что утверждение доказано для $2(n-1)$-угольника, и докажем его для $2n$-угольника.

Пусть $A_1 \ldots A_{2n}$ — $2n$-угольник, в котором $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}, \ldots$ $\ldots, A_{n-1}A_n \parallel A_{2n-1}A_{2n}$. Рассмотрим $2(n-1)$-угольник $A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_{n-1}A_{n+1} \ldots A_{2n-1}$. По предположению индукции при четном n получаем $A_{n-1}A_{n+1} \parallel A_{2n-1}A_1$, при нечетном n получаем $A_{n-1}A_{n+1} = A_{2n-1}A_1$.

Рассмотрим треугольник $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ и треугольник $A_{2n-1}A_{2n}A_1$. Пусть n четно. Тогда векторы $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ и $\overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_{n+1}}$ и $\overrightarrow{A_{2n-1}A_1}$ параллельны и противоположно направлены, поэтому $\angle A_nA_{n-1}A_{n+1} = \angle A_1A_{2n-1}A_{2n}$ и $A_nA_{n+1} = A_{2n}A_1$ как хорды, отсекающие равные дуги, что и требовалось. Пусть n нечетно. Тогда $A_{n-1}A_{n+1} = A_{2n-1}A_1$, т. е. $A_1A_{n-1} \parallel A_{n+1}A_{2n-1}$. В шестиугольнике $A_{n-1}A_nA_{n+1}A_{2n-1}A_{2n}A_1$ имеем $A_1A_{n-1} \parallel$ $\parallel A_{n+1}A_{2n-1}$ и $A_{n-1}A_n \parallel A_{2n-1}A_{2n}$, поэтому по предыдущей задаче $A_nA_{n+1} \parallel A_{2n}A_1$, что и требовалось.

2.10. $\angle KEC = \frac{1}{2}(\smile MB + \smile AC)$, $\angle KDC = \frac{1}{2}(\smile MB + \smile BC)$. Поскольку $\smile MB = \smile AM$, то $\angle KEC + \angle KDC = \frac{1}{2}(\smile MB + \smile BC +$ $+ \smile CA + \smile AM) = 180°$, т. е. четырехугольник $KECD$ вписанный.

2.11. Обозначим угловую величину дуги, высекаемой сторонами треугольника на окружности, через α. Рассмотрим дугу, высекаемую продолжениями сторон треугольника на окружности и обозначим ее угловую величину через α'. Тогда $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \angle BAC =$ $= 60°$. Но $\alpha = \alpha'$, так как эти дуги симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности параллельно основанию BC треугольника. Поэтому $\alpha = \alpha' = 60°$.

2.12. Обозначим угловые величины дуг AB, BC, CD, DA через α, β, γ, δ соответственно. Ясно, что $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Обозначим точку пересечения прямых A_1C_1 и B_1D_1 через O. $\angle A_1OB_1 =$ $= \frac{1}{2}(\smile A_1B + \smile BB_1 + \smile C_1D + \smile DD_1) = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 90°$.

2.13. а) Докажем, что $AA_1 \perp C_1B_1$. Обозначим точку пересечения этих отрезков через M. $\angle AMB_1 = \frac{1}{2}(\smile AB_1 + \smile A_1B + \smile BC_1) =$ $= \angle ABB_1 + \angle A_1AB + \angle BCC_1 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA) = 90°$.

б) Обозначим точки пересечения отрезков AA_1 и BC, BB_1 и AC через M_1 и M_2 соответственно.

Первое решение. $\angle BM_1A = \frac{1}{2}(\smile BA + \smile A_1C) = \angle BCA +$ $+ \angle A_1C_1C$, $\angle BM_2A = \frac{1}{2}(\smile BA + \smile B_1C) = \angle BCA + \angle B_1C_1C$. Поскольку $\angle BM_1A = \angle BM_2A = 90°$, $\angle A_1C_1C = \angle B_1C_1C$, т. е. CC_1 — биссектриса угла $A_1C_1B_1$.

Второе решение. Прямоугольные треугольники AM_1C и BM_2C подобны, поэтому $\angle B_1BC = \angle A_1AC$, а значит, $\smile B_1C = \smile A_1C$ и $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$, т. е. CC_1 — биссектриса угла $A_1C_1B_1$.

в) Обозначим вершины треугольника T_1 через A, B и C; середины дуг BC, CA, AB через A_1, B_1, C_1. Тогда $T_2 = A_1B_1C_1$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами треугольника T_1, поэтому они пересекаются в одной точке O. Пусть прямые AB и C_1B_1 пересекаются в точке K. Нам достаточно проверить, что $KO \parallel AC$. В треугольнике AB_1O прямая B_1C_1 является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный. Следовательно, треугольник AKO тоже равнобедренный. Прямые KO и AC параллельны, так как $\angle KOA = \angle KAO = \angle OAC$.

2.14. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей. $\angle DCB = \frac{1}{2}\smile AC = \angle APC$ и $\angle DBC = \angle APB$, поэтому $\angle BDC = 180° - \angle DBC - \angle DCB = 180° - \angle APB - \angle APC = 180° - \angle BPC = \angle ABP + \angle ACP$. Но углы ABP и ACP опираются на постоянные дуги, поэтому они постоянны.

2.15. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2; C и D — точки касания общей внешней касательной с окружностями S_1 и S_2 соответственно. Угол между касательной CD и хордой CA в два раза меньше угла CO_1A, опирающегося на дугу CA. Аналогично, $\angle DO_2A = 2\angle ADC$. Поэтому $\angle CDA + \angle DCA = \frac{1}{2}(\angle CO_1A + \angle DO_2A)$. Поскольку $CO_1 \parallel DO_2$, $\angle CO_1A + \angle DO_2A = 180°$, т. е. $\angle CDA + \angle DCA = 90°$. Следовательно, $\angle CAD = 90°$.

2.16. Обозначим точку пересечения луча AB и касательной к окружностям в точке M через C. Поскольку CM и CT — касательные к меньшей окружности, $\angle CMT = \angle CTM$. Ясно, что $\angle TAM + \angle AMT = \angle CTM$, следовательно, $\angle TAM + \angle AMT = \angle CMT$. Угол между касательной CM и хордой MB равен углу, опирающемуся на дугу BM. Поэтому $\angle CMB = \angle BAM = \angle TAM$. Следовательно, $\angle TAM + \angle AMT = \angle CMT = \angle CMB + \angle BMT = \angle TAM + \angle BMT$, т. е. $\angle AMT = \angle BMT$.

2.17. Обозначим центр окружности через O. Точки P и Q лежат на окружности, построенной на радиусе OM как на диаметре, т. е. точки O, P, Q, M лежат на окружности постоянного радиуса $R/2$. При этом либо $\angle POQ = \angle AOD$, либо $\angle POQ = \angle BOD = 180° - \angle AOD$, т. е. длина хорды PQ постоянна.

2.18. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — трапеции с соответственно параллельными сторонами, вписанные в одну окружность. Ясно, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Поэтому хорды AC и A_1C_1 равны, поскольку на них опираются равные углы.

2.19. Рассмотрим два положения подвижной окружности: в первый момент, когда точка K попадает на неподвижную окружность (точку касания окружностей в этот момент мы обозначим через K_1), и в какой-нибудь другой (второй) момент. Пусть O — центр неподвижной окружности, O_1 и O_2 — положения центра подвижной окружности в первый и второй моменты соответственно, K_2 — положение точки K во второй момент, A — точка касания окружностей во второй момент. Поскольку окружность катится без проскальзывания, длина дуги K_1A равна длине дуги K_2A. Так как радиус подвижной окружности в два раза меньше, $\angle K_2O_2A = 2\angle K_1OA$. Точка O лежит на подвижной окружности, поэтому $\angle K_2OA = \frac{1}{2}\angle K_2O_2A = \angle K_1OA$, т. е. точки K_2, K_1 и O лежат на одной прямой (мы считаем, что точки K_2, K_1 и A различны; точка K_2 может совпадать с точкой A, только если $A = K_1$ или A диаметрально противоположна K_1).

Траектория движения — диаметр неподвижной окружности.

2.20. $\angle EOD = \angle AOC = 180° - \angle OAC - \angle OCA = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle B = 120°$. Поэтому $\angle EOD + \angle EBD = 120° + 60° = 180°$, т. е. точки B, E, O, D лежат на одной окружности. Поскольку O является точкой пересечения биссектрис, $\angle EBO = \angle DBO$, т. е. $EO = OD$.

2.21. Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через O_1, центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, через O_2. Пусть M — середина отрезка O_1O_2. Поскольку $\angle O_1BO_2 = \angle O_1CO_2 = 90°$, то $O_1M = BM = O_2M = CM$.

Первое решение. Поскольку точки A, O_1, M лежат на биссектрисе угла A, $\angle BO_1M = \angle BAO_1 + \angle ABO_1 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Аналогично, $\angle CO_1M = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$. Поскольку треугольники O_1MB и O_1MC равнобедренные, $\angle O_1MB = 180° - 2\angle BO_1M = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle O_1MC = 180° - \angle A - \angle C$. Складывая эти равенства, получаем $\angle BMC = \angle O_1MB + \angle O_1MC = 180° - \angle A$. Поэтому точки A, B, M и C лежат на одной окружности.

Второе решение. Поскольку $BM = CM$, точка M лежит на серединном перпендикуляре d к отрезку BC. Рассмотрим сначала случай, когда $AB \neq AC$. Тогда биссектриса AO_1 не является высотой треугольника ABC и пересекается с прямой d только в точке M. Однако обе эти прямые проходят через точку M_1 — середину дуги BC описанной окружности. Следовательно, $M = M_1$. Равнобедренный треугольник ($AB = AC$) «является пределом» некоторой последовательности разносторонних треугольников, поэтому утверждение задачи для него тоже верно.

2.22. Из условия задачи следует, что никакие три прямые не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Пусть прямые AB, AC, BC пересекают четвертую прямую в точках D, E, F соответственно (рис. 21). Обозначим через P точку пересечения описанных окружностей треугольников ABC и CEF, отличную от точки C. Докажем, что точка P принадлежит описанной окружности треугольника BDF. Для этого достаточно проверить, что $\angle(BP, PF)=\angle(BD, DF)$. Ясно, что $\angle(BP, PF)=$ $=\angle(BP, PC)+\angle(PC, PF)=$ $=\angle(BA, AC)+\angle(EC, EF)=$ $=\angle(BD, AC)+\angle(AC, DF)=$ $=\angle(BD, DF)$. Аналогично доказывается, что точка P принадлежит описанной окружности треугольника ADE.

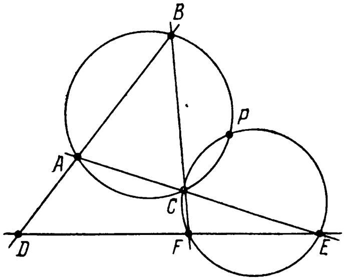


Рис. 21

2.23. Треугольник EDN равен треугольнику CBM, так как $ED=CB$, $EN=CM$ и $\angle DEC=\angle BCA=30^\circ$ (рис. 22). Пусть

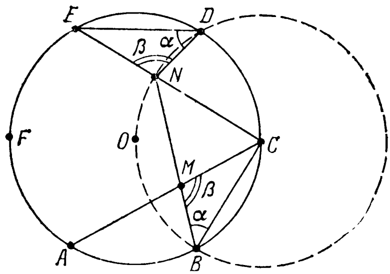


Рис. 22

$\angle MBC=\angle NDE=\alpha$, $\angle BMC=\angle END=\beta$. Ясно, что $\angle DNC=$ $=180^\circ-\beta$. Рассматривая треугольник BNC, получаем $\angle BNC=$ $=90^\circ-\alpha$. Поскольку $\alpha+\beta=180^\circ-30^\circ=150^\circ$, то $\angle DNB=\angle DNC+$ $+\angle CNB=(180^\circ-\beta)+(90^\circ-\alpha)=270^\circ-(\alpha+\beta)=120^\circ$. Поэтому точки B, O, N, D (O — центр шестиугольника) лежат на одной окружности. При этом $CO=CB=CD$, т. е. C — центр этой окружности, следовательно, $\lambda=CN:CE=CB:CA=1:\sqrt{3}$.

2.24. Точки N и C лежат на окружности, построенной на отрезке AM как на диаметре. Углы MAN и MCN опираются на одну дугу MN, поэтому они равны.

2.25. Пусть O — центр вписанной окружности. Точки M и N лежат на окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре. Поэтому $\angle ONM = \angle OAM = \frac{1}{2}\angle A$. Ясно, что $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. Точка P лежит вне отрезка BO, поэтому $\angle POC = 180° - \angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

Возможны два случая: точка P лежит внутри треугольника или вне его. В первом случае $\angle PNC = \angle CNO + \angle ONP = 90° + \frac{1}{2}\angle A = 180° - \angle POC$, во втором $\angle PNC = \angle MNA = \angle ONA - \angle ONM = 90° - \frac{1}{2}\angle A = \angle POC$. В обоих случаях точки O, N, P и C лежат на одной окружности. Поэтому $\angle OPC = \angle ONC = 90°$.

2.26. $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$ (первое, третье и пятое равенства получаются из вписанности соответствующих четырехугольников, остальные равенства очевидны). Аналогично, $\angle B_1AP = \angle C_3A_3P$. Поэтому $\angle B_3A_3C_3 = \angle B_3A_3P + \angle C_3A_3P = \angle C_1AP + \angle B_1AP = \angle BAC$. Аналогично получаются равенства остальных углов треугольников ABC и $A_3B_3C_3$.

2.27. Опустим из точки O пересечения диагоналей перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1, OD_1 на стороны AB, BC, CD, DA соответственно. Точки A_1 и D_1 лежат на окружности, построенной на AO как на диаметре, поэтому $\angle OA_1D_1 = \angle OAD_1 = \angle CAD$. Аналогично, $\angle OA_1B_1 = \angle OBB_1 = \angle DBC$. Поскольку углы CAD и DBC опираются на одну дугу, они равны и $\angle B_1A_1O = \angle OA_1D_1$, т. е. OA_1 — биссектриса угла $B_1A_1D_1$. Аналогично доказывается, что OB_1, OC_1, OD_1 — биссектрисы, т. е. O — центр вписанной окружности четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

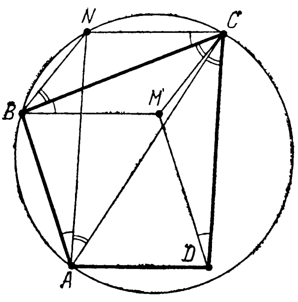


Рис. 23

2.28. Возьмем точку N так, что $BN \parallel MC$ и $NC \parallel BM$ (рис. 23). Тогда $NA \parallel CD$. $\angle NCB = \angle CBM = \angle CDM = \angle NAB$, т. е. точки A, B, N и C лежат на одной окружности. Поэтому $\angle ACD = \angle NAC = \angle NBC = \angle BCM$.

2.29. Пусть точка P лежит на дуге AC. Основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC, AC, AB, обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно. $\angle ABC + \angle APC = 180^\circ$ и $\angle ABC + \angle A_1PC_1 = 180^\circ$, поэтому $\angle APC = \angle A_1PC_1$. Отсюда видно, что $\angle APC_1 = \angle A_1PC$ и одна из точек A_1, C_1 лежит на стороне треугольника, а другая — на продолжении стороны. Точки B_1 и A_1 лежат на окружности, построенной на CP как на диаметре, поэтому $\angle A_1B_1C = \angle A_1PC$. Аналогично, $\angle AB_1C_1 = \angle APC_1$. Поскольку $\angle APC_1 = \angle A_1PC$, то $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$, т. е. точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

2.30. Возьмем на стороне DC точку E так, что $DA = DE$. Тогда $\angle DAE = \angle AED$ и $\angle DAE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADE)$. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, $\angle ADE = 180^\circ - \angle B$, т.е. $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle B$. Так как $BC = CD - AD = CE$, аналогично получаем $\angle CBE = \frac{1}{2}\angle A$. Для определенности будем считать, что $\angle B < \angle A$ (в случае, когда $\angle B = \angle A$, точкой пересечения биссектрис углов A и B является точка E). В этом случае биссектриса BF (F — точка на стороне CD) и отрезок EA являются сторонами выпуклого четырехугольника $BFEA$. $\angle AEF = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B$ и $\angle ABF = \frac{1}{2}\angle B$, поэтому $BFEA$ — вписанный четырехугольник. Следовательно, $\angle EAF = \angle EBF = \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$, т. е. AF — биссектриса.

2.31. Опустим из точки O пересечения диагоналей перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1, OD_1 на стороны AB, BC, CD, DA соответственно. Легко проверить, что условием вписанности четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ является равенство $\angle AD_1A_1 + \angle DD_1C_1 + \angle BB_1A_1 + \angle CB_1C_1 = 180^\circ$, а условием перпендикулярности диагоналей четырехугольника $ABCD$ — равенство $\angle AOA_1 + \angle BOA_1 + \angle COC_1 + \angle DOC_1 = 180^\circ$. Докажем теперь, что обе эти суммы углов равны для любого рассматриваемого четырехугольника. Точки A_1 и D_1 лежат на окружности, построенной на отрезке AO как на диаметре, поэтому $\angle AOA_1 = \angle AD_1A_1$. Аналогично, $\angle BOA_1 = \angle BB_1A_1$, $\angle COC_1 = \angle CB_1C_1$, $\angle DOC_1 = \angle DD_1C_1$.

2.32. Пусть O — центр описанной окружности треугольника, M — середина стороны AB, H — основание высоты CH, D — середина той из дуг, задаваемых точками A и B, на которой не лежит точка C. $OD \parallel CH$, поэтому $\angle DCH = \angle MDC$. Биссектриса делит пополам угол между медианой и высотой тогда и только тогда, когда $\angle MCD = \angle DCH = \angle MDC = \angle ODC = \angle OCD$, т. е. $M = O$ и AB — диаметр окружности.

2.33. Пусть $\alpha = \angle A < \angle B$. Согласно предыдущей задаче $\angle C = 90^\circ$. Медиана CM делит треугольник ABC на два равнобедренных треугольника. $\angle ACM = \angle A = \alpha$, $\angle MCB = 3\alpha$, значит, $\alpha + 3\alpha = 90°$, т. е. $\alpha = 22{,}5°$. Поэтому $\angle A = 22{,}5°$, $\angle B = 67{,}5°$, $\angle C = 90°$.

2.34. Пусть D — точка, в которой прямая AE пересекает описанную окружность. Точка D является серединой дуги BC. Поэтому $MD \parallel AH$, причем точки A и D лежат по разные стороны от прямой MH. Следовательно, точка E лежит на отрезке MH.

2.35. Предположим, что треугольник ABC построен, AH — высота, AD — биссектриса, AM — медиана. По задаче 2.34 точка D лежит между M и H. Точка E пересечения прямой AD и перпендикуляра, проведенного через точку M к стороне BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC. Поэтому центр O описанной окружности треугольника лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AE и перпендикуляра к стороне BC, проведенного через точку M.

Последовательность построений такова: на произвольной прямой (которая в дальнейшем окажется прямой BC) строим точку H, затем последовательно строим точки A, D, M, E, O. Искомые вершины B и C треугольника являются точками пересечения исходной прямой с окружностью с центром O и радиусом OA.

Построение выполнено тогда и только тогда, когда $AH < AD < AM$.

2.36. Если угол C прямой, то решение задачи очевидно: C является точкой пересечения прямых A_1B, A_2B_2, AB_1. Если же

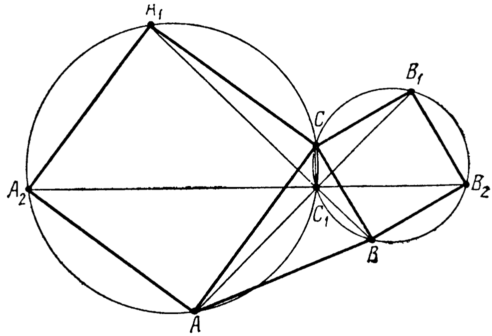


Рис. 24

$\angle C \neq 90°$, то описанные окружности квадратов ACA_1A_2 и BCB_1B_2 имеют кроме C еще одну общую точку C_1 (рис. 24). Тогда $\angle(AC_1, A_2C_1) = \angle(A_2C_1, A_1C_1) = \angle(A_1C_1, C_1C) = \angle(C_1C, C_1B_1) = \angle(C_1B_1, C_1B_2) = \angle(C_1B_2, C_1B) = 45°$ (или же $-45°$; важно лишь то, что все углы имеют один и тот же знак). Поэтому $\angle(AC_1, C_1B_1) = 4 \cdot 45° = 180°$, т. е. прямая AB_1 проходит через точку C_1. Аналогично, A_2B_2 и A_1B проходят через точку C_1.

2.37. См. решение задачи 2.38, являющейся обобщением этой задачи.

2.38. Пусть O — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC_1 и AB_1C, отличная от A (эти окружности касаются в точке A, только если $\angle C_1AB = \angle B_1AC = 180° - \angle BAC$; в этом случае очевидно, что A является точкой пересечения окружностей и прямых, о которых идет речь в условии). Тогда $\angle(BO, OC) = \angle(BO, OA) + \angle(OA, OC) = \angle(BC_1, C_1A) + \angle(B_1A, B_1C) = \angle(BC, CA_1) + \angle(BA_1, BC) = \angle(BA_1, CA_1)$ (мы пользуемся тем, что треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 одинаково ориентированы). Равенство $\angle(BO, OC) = \angle(BA_1, CA_1)$ означает, что описанная окружность треугольника A_1BC также проходит через точку O.

Докажем теперь, что прямая AA_1 проходит через точку O. $\angle(AO, OA_1) = \angle(AO, OC_1) + \angle(OC_1, OB) + \angle(OB, OA_1) = \angle(AB, BC_1) + \angle(AC_1, AB) + \angle(CB, CA_1) = \angle(AC_1, BC_1) + \angle(CB, CA_1) = 0°$. Для прямых BB_1 и CC_1 доказательство аналогично.

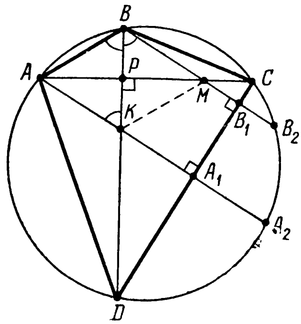


Рис. 25

Напомним, что в задачах 2.39—2.44 $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, O — центр описанной окружности, P — точка пересечения диагоналей.

2.39. Пусть прямые AK и BM пересекают сторону CD в точках A_1 и B_1, а описанную окружность — в точках A_2 и B_2 (рис. 25).

$$90° = \angle APD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile CB) \text{ и } 90° = \angle BB_1C = \frac{1}{2}(\smile DB_2 + \smile CB),$$

поэтому $\smile AD = \smile DB_2$, т. е. $\angle ABD = \angle DBB_2$.

В четырехугольнике $AKMB$ сторона AK параллельна стороне MB, поэтому $\angle AKB = \angle KBM = \angle ABK$, т. е. $BP = PK$. Ясно также, что $AP = PM$, поэтому треугольник ABP равен треугольнику MPK, т. е. $AKMB$ — ромб.

2.40. Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle COD = \beta$. Тогда $\angle ADP = \alpha/2$, $\angle PAD = \beta/2$. Поскольку диагонали взаимно перпендикулярны, $\angle ADP + \angle PAD = 90°$, т. е. $\alpha/2 + \beta/2 = 90°$. $AP^2 + BP^2 = AB^2 = 4R^2 \sin^2(\alpha/2)$ и $CP^2 + DP^2 = CD^2 = 4R^2 \sin^2(\beta/2)$, поэтому $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AB^2 + CD^2 = 4R^2(\sin^2(\alpha/2) + \sin^2(\beta/2)) = 4R^2$. Ясно также, что $BC^2 + AD^2 = BP^2 + CP^2 + DP^2 + AP^2 = 4R^2$, т. е. $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$.

2.41. Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle COD = \beta$. Тогда $\angle ADP = \alpha/2$, $\angle PAD = \beta/2$. Поскольку диагонали взаимно перпендикулярны, то $\angle ADP + \angle PAD = 90°$, т. е. $\alpha + \beta = 180°$.

Пусть радиус описанной окружности равен R. Тогда $S_{AOB}=$ $=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$, $S_{COD}=\frac{1}{2}R^2\sin\beta$. Поскольку $\alpha+\beta=180°$, то $\sin\alpha=\sin\beta$, т. е. $S_{AOB}=S_{COD}$. Аналогично, $S_{BOC}=S_{AOD}$, поэтому $S_{AOB}+S_{BOC}=S_{AOD}+S_{COD}$.

2.42. Первое решение. Пусть M — середина стороны AB, N — середина стороны CD. Как и в предыдущих задачах, получаем, что $\frac{1}{2}\angle AOB+\frac{1}{2}\angle COD=90°$, т. е. прямоугольные треугольники BOM и CON имеют равные углы. Поскольку $BO=CO$, эти треугольники равны и $OM=CN=\frac{1}{2}CD$.

Второе решение. Проведем диаметр AE. $\angle BEA=\angle BCP$ и $\angle ABE=\angle BPC=90°$, поэтому $\angle EAB=\angle CBP$. Углы, опирающиеся на хорды EB и CD, равны, поэтому $EB=CD$. Поскольку $\angle EBA=90°$, расстояние от точки O до AB равно $\frac{1}{2}EB$.

2.43. Пусть перпендикуляр, опущенный из точки P на BC, пересекает BC в точке H и AD в точке M (рис. 26). $\angle BDA=$ $=\angle BCA=\angle BPH=\angle MPD$. Из равенства углов MDP и MPD следует, что MP — медиана прямоугольного треугольника APD. В самом деле, $\angle APM=90°-$ $-\angle MPD=90°-\angle MDP=$ $=\angle PAM$, т. е. $AM=PM=MD$.

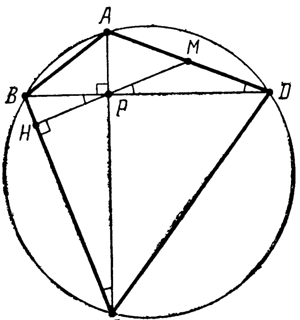


Рис. 26

2.44. Пусть M — середина AC, N — середина BD. $AM^2=AO^2-$ $-OM^2$, $BN^2=BO^2-ON^2$, поэтому $AC^2+BD^2=4(R^2-OM^2)+4(R^2-$ $-ON^2)=8R^2-4(OM^2+ON^2)=$ $=8R^2-4OP^2$, поскольку OM^2+ $+ON^2=OP^2$.

2.45. Углы ABH и ACH опираются на одну и ту же хорду AH. Поскольку радиус окружности, проходящей через точки A, B, H, равен радиусу окружности, проходящей через точки A, C, H, то $\angle ABH=\angle ACH=\alpha$. Аналогично, $\angle BAH=\angle BCH=\beta$, $\angle CAH=$ $=\angle CBH=\gamma$. Сумма углов треугольника ABC равна $2(\alpha+\beta+\gamma)$, поэтому $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

Чтобы доказать, что прямая AH перпендикулярна стороне BC, достаточно доказать, что $\angle BAH+\angle ABC=90°$. Но $\angle BAH=\beta$, $\angle ABC=\angle ABH+\angle HBC=\alpha+\gamma$.

2.46. Введем следующие обозначения: A, B, C — центры окружностей, O — точка их пересечения, R — радиус, A_1, B_1, C_1 — точки попарного пересечения окружностей (с центрами B и C, A и C,

A и B соответственно), A_2, B_2, C_2—середины сторон BC, AC, AB соответственно (рис. 27).

Поскольку $OA=OB=OC=R$, радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. Треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом 1/2, поэтому радиус описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$ равен $R/2$.

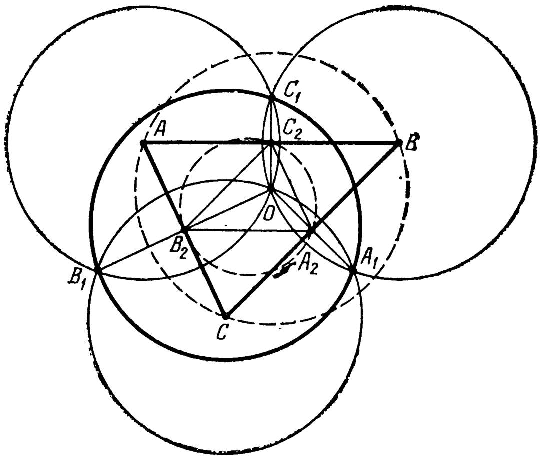


Рис. 27

Точки A_2, B_2, C_2 являются серединами отрезков OA_1, OB_1, OC_1. Поэтому радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$, т. е. равен R, что и требовалось.

2.47. При пересечении двух одинаковых окружностей получаются одинаковые дуги, поэтому угловые величины дуг AA_1, BB_1, CC_1 не зависят от того, на какой из окружностей рассматриваются эти дуги. Следовательно, $\smile AB_1+\smile BC_1+\smile CA_1=\smile AA_1+\smile BB_1+\smile CC_1-\smile A_1B_1-\smile B_1C_1-\smile C_1A_1=\smile AC_1+\smile CB_1+\smile BA_1$.

$\angle BAC=\angle BAA_1+\angle A_1AC=\frac{1}{2}(\smile BA_1+\smile CA_1)$, $\angle ABC=\frac{1}{2}(\smile AB_1+\smile CB_1)$, $\angle ACB=\frac{1}{2}(\smile BC_1+\smile AC_1)$. Поскольку сумма углов треугольника ABC равна 180°, $\smile BA_1+\smile CA_1+\smile AB_1+\smile CB_1+\smile BC_1+\smile AC_1=360°$, т. е. $\smile AB_1+\smile BC_1+\smile CA_1=180°$.

2.48. Обозначим точки пересечения прямых AO и AH с описанной окружностью через M и N соответственно. Будем считать, что $\angle C>\angle B$. Рассмотрим два случая: угол C острый и угол C тупой.

В первом случае $\angle CAN=90^\circ-\angle C$, $\angle BAM=180^\circ-\angle ABM-$ $-\angle BMA=90^\circ-\angle C$. Поэтому $\angle OAH=\angle A-2(90^\circ-\angle C)=$ $=\angle C-\angle B$.

Во втором случае $\angle CAN=\angle C-90^\circ$, $\angle BAM=180^\circ-\angle ABM-$ $-\angle BMA=\angle C-90^\circ$. Поэтому $\angle OAH=\angle A+2(\angle C-90^\circ)=$ $=\angle C-\angle B$.

2.49. Будем считать, что A — наиболее удаленная от точек K и E вершина, C — наименее удаленная от них вершина, D лежит на KA, B лежит на EA. Точки пересечения биссектрис углов AED и AKB со сторонами AB, BC, CD и DA обозначим через

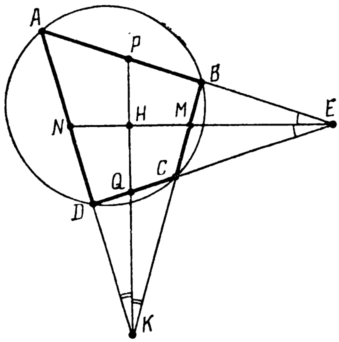


Рис. 28

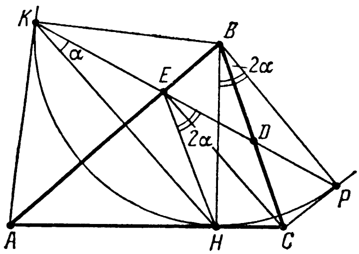


Рис. 29

P, M, Q и N соответственно; точку пересечения этих биссектрис обозначим через H (рис. 28). Легко проверить, что $\angle KHE=$ $=180^\circ-\angle BCE-\angle HED-\angle HKB$. Далее,

$$\angle BCE=\angle DAB=\frac{1}{2}(\smile BC+\smile CD),$$

$$\angle HED=\frac{1}{2}\angle AED=\frac{1}{4}(\smile AD-\smile BC),$$

$$\angle HKB=\frac{1}{2}\angle AKB=\frac{1}{4}(\smile AB-\smile CD).$$

Поэтому $\angle KHE=180^\circ-\frac{1}{4}(\smile AB+\smile BC+\smile CD+\smile DA)=90^\circ$,

т. е. биссектрисы углов AED и AKB перпендикулярны. KH является биссектрисой и высотой треугольника MKN, поэтому $MH=HN$. Аналогично, $PH=HQ$. Поэтому $PMQN$ — ромб.

2.50. Пусть прямая KP пересекает сторону AB в точке E, а сторону BC — в точке D (рис. 29). Точки K, H и P лежат на окружности с центром в точке B. В этой окружности угол HKP и центральный угол HBP опираются на одну дугу, поэтому $\angle HBP=2\angle HKP$. Ясно также, что $\angle HEP=\angle EKH+\angle EHK=$ $=2\angle HKP$.

Рассмотрим окружность, описанную вокруг треугольника BHC. BC — ее диаметр, поэтому точка P лежит на этой окружности. Точка E тоже лежит на этой окружности, поскольку $\angle HEP = \angle HBP$. Поэтому $\angle CEB = \angle CHB = 90^\circ$ и CE — высота.

2.51. Обозначим точку пересечения EF и AA_1 через B. Будем для определенности считать, что точка E лежит между C и F. Рассмотрим точку A_2, симметричную точке A_1 относительно диаметра EF. Ясно, что точки C, A, A_2 лежат на одной прямой. Поскольку дуги A_2F и A_1F симметричны, $\angle A_2AF = \angle A_1AF$. Поскольку $\angle EAF = 90^\circ$, то $\angle EAB = 90^\circ - \angle A_1AF$, следовательно, $\angle CAE = 180^\circ - 2\angle A_1AF - \angle EAB = \angle EAB$. Прямые AE и AF являются биссектрисами внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC. Поэтому $\frac{EC}{EB} = \frac{AC}{AB} = \frac{FC}{FB} = \frac{FC}{FE-EB}$. Отсюда $EB = \frac{EC \cdot FE}{EC+FC}$. Полученное выражение для EB не зависит от точки A.

2.52. Обозначим центр окружности S_1 через P, центр окружности S_2 — через O. Пусть прямая AC пересекает S_2 в точке K, а прямая BC — в точке L. Обозначим величину угла APC через α, величину угла BPC — через β. Поскольку $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$, $\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Далее, $\angle LOB = 180^\circ - 2\angle LBO = 2\angle CBP = 180^\circ - \beta$. Аналогично, $\angle KOA = 180^\circ - \alpha$. Поэтому $\angle LOK = \angle LOB + \angle KOA - \angle AOB = 180^\circ$, т. е. KL — диаметр.

2.53. Будем доказывать, что если A, B, C, D, E, F — точки на окружности, расположенные в произвольном порядке, причем прямые AB и DE пересекаются в точке G, BC и EF — в точке H, CD и FA — в точке K, то точки G, H и K лежат на одной прямой.

Докажем сначала, что $\angle(AB, DE) + \angle(CD, FA) + \angle(EF, BC) = 0^\circ$. В самом деле,

$$\angle(AB, DE) = \angle(AB, BE) + \angle(BE, DE) = \angle(AC, CE) + \angle(BF, FD),$$
$$\angle(CD, FA) = \angle(CD, DA) + \angle(DA, FA) = \angle(CE, EA) + \angle(DB, BF),$$
$$\angle(EF, BC) = \angle(EF, FC) + \angle(FC, BC) = \angle(EA, AC) + \angle(FD, DB).$$

Сумма первых трех членов правых частей, так же как и сумма вторых трех членов, равна 0°.

Пусть Z — точка пересечения описанных окружностей треугольников BDG и DFK (рис. 30). Докажем, что точки B, F, Z и H лежат на одной окружности. Для этого нужно проверить, что $\angle(BZ, ZF) = \angle(BH, HF)$. Ясно, что $\angle(BZ, ZF) = \angle(BZ, ZD) + \angle(DZ, ZF)$, а $\angle(BZ, ZD) = \angle(BG, GD) = \angle(AB, DE)$, $\angle(DZ, ZF) = \angle(DK, KF) = \angle(CD, FA)$ и, как только что было доказано, $\angle(AB, DE) + \angle(CD, FA) = -\angle(EF, BC) = \angle(BC, EF) = \angle(BH, HF)$.

Докажем теперь, что точки H, Z и G лежат на одной прямой. Для этого достаточно проверить, что $\angle(GZ, ZB) = \angle(HZ, ZB)$.

Ясно, что $\angle(GZ, ZB) = \angle(GD, DB) = \angle(ED, DB)$, $\angle(HZ, ZB) = \angle(HF, FB) = \angle(ED, DB)$. Аналогично доказывается, что

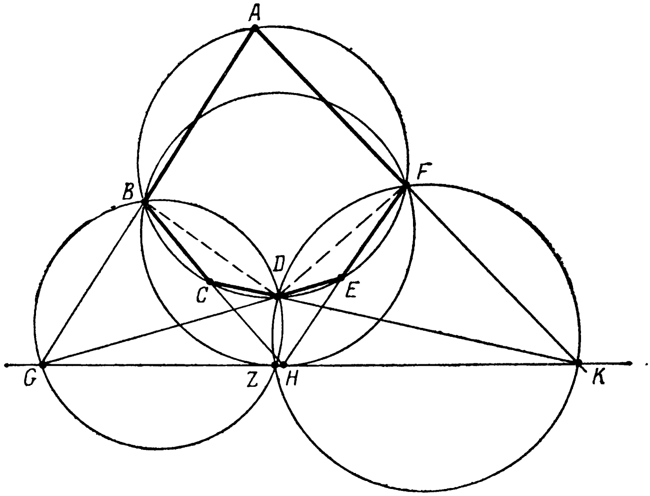


Рис. 30

точки K, Z и G лежат на одной прямой: $\angle(DZ, ZG) = \angle(DB, BG) = \angle(DB, BA)$ и $\angle(DZ, ZK) = \angle(DF, FK) = \angle(DB, BA)$.

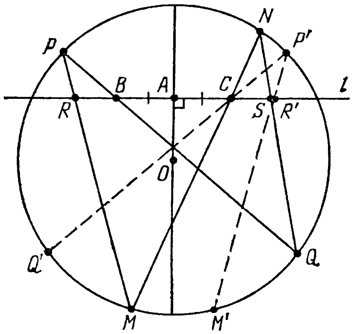


Рис. 31

Мы получили, что точки H и K лежат на прямой GZ, поэтому точки G, H и K лежат на одной прямой,

2.54. При решении этой задачи мы воспользуемся свойствами ориентированного угла между прямыми.

Рассмотрим точки M', P', Q' и R', симметричные точкам M, P, Q и R относительно прямой OA (рис. 31). Поскольку точка C симметрична точке B относительно OA, прямая $P'Q'$ проходит через точку C. Легко проверяются следующие равенства: $\angle(CS, NS) = \angle(Q'Q, NQ) = \angle(Q'P', NP') = \angle(CP', NP')$ и $\angle(CR', P'R') = \angle(MM', P'M') = \angle(MN, P'N) = \angle(CN, P'N)$. Из этих равенств мы получаем, что точки C, N, P', S и R' лежат на одной окружности. Но поскольку точки S, R' и C лежат на одной прямой, $S = R'$, что и требовалось.

Глава 3

ОКРУЖНОСТИ

Основные сведения

1. Прямая, имеющая ровно одну общую точку с окружностью, называется *касательной к окружности*.

Через любую точку A, лежащую вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности; пусть B и C — точки касания, O — центр окружности. Тогда:

а) $AB = AC$;

б) $\angle BAO = \angle CAO$;

в) $OB \perp AB$.

(Иногда касательной мы будем называть не прямую AB, а отрезок AB. Например, свойство а) можно сформулировать так: «касательные, проведенные из одной точки, равны».)

2. Пусть прямые l_1 и l_2, проходящие через точку A, пересекают окружность в точках B_1, C_1 и B_2, C_2 соответственно. Тогда $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$. В самом деле, $\triangle AB_1C_2 \backsim \triangle AB_2C_1$ по трем углам (советуем читателям самостоятельно доказать это, используя свойства вписанных углов и рассматривая два случая: A лежит вне окружности и A лежит внутри окружности).

Если прямая l_2 касается окружности, т. е. $B_2 = C_2$, то $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2^2$. Доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае, только теперь нужно воспользоваться свойствами угла между касательной и хордой.

3. Прямая, соединяющая центры касающихся окружностей, проходит через их точку касания.

4. *Величиной угла между двумя пересекающимися окружностями* называется величина угла между касательными к ним, проведенными через точку пересечения. При этом безразлично, какую из двух точек пересечения окружностей мы выберем.

Угол между касающимися окружностями равен 0°.

Понятие величины угла между окружностями используется только при решении задач § 4.

5. При решении задач § 5 используется одно свойство, не имеющее прямого отношения к окружностям: высоты треугольника пересекаются в одной точке. Доказательства этого факта можно найти в решениях задач 5.8, 10.1, 11.26 и 13.12, а можно пока принять его на веру.

6. Уже в середине пятого века до нашей эры Гиппократ из Хиоса (не путайте его со знаменитым врачом Гиппократом из Кос, жившим несколько позже) и пифагорейцы начали решать задачу квадратуры круга. Она формулируется следующим образом: построить с помощью циркуля и линейки квадрат, имеющий ту же площадь, что и данный круг. В 1882 году немецкий математик Линдеманн доказал, что число π трансцендентно, т. е. не является

корнем многочлена с целыми коэффициентами. Из этого, в частности, следует, что задача квадратуры круга неразрешима.

По-видимому, многим давала надежду на возможность квадратуры круга задача 3.15 (задача о «луночках Гиппократа»): площадь фигуры, образованной дугами окружностей, равна площади треугольника. Решив эту задачу, постарайтесь понять, почему в данном случае подобные надежды не имели оснований.

Вводные задачи

1. Докажите, что из точки A, лежащей вне окружности, можно провести ровно две касательные к окружности, причем длины этих касательных (т. е. расстояния от A до точек касания) равны.

2. а) Через точку A проведены две прямые. Первая прямая пересекает окружность в точках B_1 и C_1, вторая — в точках B_2 и C_2. Докажите, что $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$. (Точка A может лежать как внутри окружности, так и вне ее.)

б) Через точку A, расположенную вне окружности, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Докажите, что квадрат касательной, проведенной из точки A к окружности, равен $AB \cdot AC$.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, но не на отрезке AB. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

4. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом (т. е. ни одна из них не лежит внутри другой). Найдите длину общей касательной к этим окружностям.

5. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы.

а) Докажите, что радиус вписанной окружности этого треугольника равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

б) Докажите, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

§ 1. Касательные к окружностям

3.1. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B — точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая отрезки PA и PB в точках X и Y. Докажите, что величина угла XOY не зависит от выбора третьей касательной.

3.2. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол.

а) К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная. Обозначим точки пересечения этой касательной со сторонами угла через A_1 и A_2, а точки касания — через B_1 и B_2. Докажите, что $A_1B_1=A_2B_2$.

б) Через две точки касания окружностей со сторонами угла, лежащие на разных сторонах этого угла и на разных окружностях, проведена прямая. Докажите, что эта прямая высекает на окружностях хорды равной длины.

§ 2. Произведение длин отрезков хорд (секущих), проходящих через фиксированную точку

3.3. Через точку P, лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведена хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

3.4. Дана окружность S и точки P, K вне ее. Проведем через точку P секущую PAB (A, B — точки на окружности) и построим окружность, проходящую через точки K, A, B. Докажите, что все такие окружности проходят, кроме K, еще через одну общую точку, не зависящую от выбора секущей PAB.

3.5. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD, M — такая точка на диагонали AC, что четырехугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

§ 3. Касающиеся окружности

3.6. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке A_1 и S_2 в точке A_2. Докажите, что прямая O_1A_1 параллельна прямой O_2A_2.

3.7. Три окружности S_1, S_2 и S_3 попарно касаются друг друга в трех различных точках. Докажите, что прямые, соединяющие точку касания S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами ее диаметра.

3.8. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R

с центром O (рис. 32). Найдите периметр треугольника OO_1O_2.

3.9. Три окружности с центрами A, B, C, касающиеся друг друга и прямой l, расположены так, как

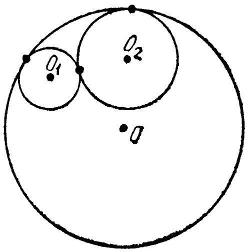


Рис. 32

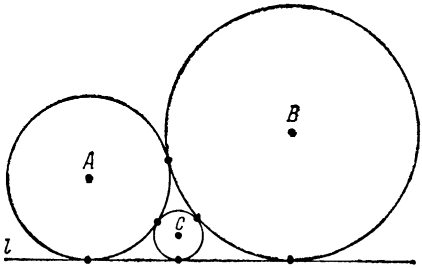


Рис. 33

показано на рис. 33. Обозначим радиусы окружностей с центрами A, B, C через a, b, c соответственно. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$.

§ 4. Углы между пересекающимися окружностями

3.10. Две окружности имеют радиусы R_1 и R_2, а расстояние между их центрами равно d. Докажите, что эти окружности ортогональны тогда и только тогда, когда $d^2 = R_1^2 + R_2^2$.

3.11. Точки A, B, C, D — вершины выпуклого четырехугольника. S_A — окружность, проходящая через точки B, C, D; S_B — через A, C, D; S_C — через A, B, D; S_D — через A, B, C. Докажите, что окружности S_A и S_C пересекаются в точке B под тем же углом, что и окружности S_B и S_D в точке A.

§ 5. Применения теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке

3.12. AB — диаметр окружности, C и D — произвольные точки на окружности. Пусть P, Q — точки пересечения прямых AC и BD, AD и BC соответственно. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.

3.13. Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D — точки касания). Докажите, что прямая, соединяющая P с точкой пересечения прямых AC и BD, перпендикулярна AB.

3.14. Дан диаметр AB окружности и точка C. С помощью одной линейки (без циркуля) опустите перпендикуляр из точки C на AB, если

а) точка C не лежит на окружности;

б) точка C лежит на окружности.

§ 6. Площади криволинейных фигур

3.15. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построены полуокружности, расположенные так, как показано на рис. 34. Докажите, что сумма площадей образовавшихся «луночек» равна площади данного треугольника.

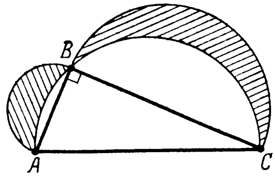


Рис. 34

3.16. На трех отрезках OA, OB, OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC) как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O, равна половине площади (обычного) треугольника ABC.

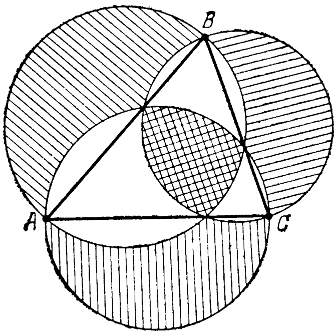


Рис. 35

3.17. На сторонах произвольного остроугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. При этом образуется три «внешних» криволинейных треугольника и один «внутренний» (рис. 35). Докажите, что если из суммы площадей «внешних» треугольников вычесть площадь «внутреннего» треугольника, то получится удвоенная площадь исходного треугольника ABC.

§ 7. Радикальная ось

На плоскости даны окружность S и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B.

3.18. Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

Эта величина, взятая со знаком «плюс» для точки P вне окружности и со знаком «минус» для точки P внутри окружности, называется *степенью точки P относительно окружности S*.

3.19. Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности S, ее степень относительно S равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.

3.20. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2, является прямая.

Эта прямая называется *радикальной осью окружностей S_1 и S_2*.

3.21. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

3.22. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

Эта точка называется *радикальным центром трех окружностей*.

3.23. а) На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

б) На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 проходят через точку пересечения высот треугольника ABC.

3.24. На стороне BC треугольника ABC взята точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

3.25. На плоскости даны две непересекающиеся окружности. Проведем к ним одну общую внешнюю касательную и одну внутреннюю. Точки касания с первой окружностью обозначим через A и B, со второй — через C и D. Докажите, что точка пересечения прямых AB и CD принадлежит прямой, соединяющей центры окружностей.

3.26. а) Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько точек. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержалась ровно одна из данных точек.

б) Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся окружностей различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержалась ровно одна из данных окружностей.

3.27. Докажите, что диагонали AD, BE, CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке.

Задачи для самостоятельного решения

3.28. Качалка, имеющая форму сектора круга радиуса R, качается на горизонтальном столе. По какой траектории движется ее вершина?

3.29. Окружности S_1, S_2, S_3 с центрами O_1, O_2, O_3 пересекаются в точке C. Кроме того, S_1 и S_2 пересекаются еще в точке D, S_1 и S_3— в точке A, S_2 и S_3— в точке B. Точки O_1 и O_2 принадлежат окружности S_3. Докажите, что точки A, D и O_2 лежат на одной прямой.

3.30. Даны четыре окружности, причем первая касается второй в точке A, вторая третьей — в точке B, третья четвертой — в точке C, четвертая первой — в точке D. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

3.31. Из точки A, лежащей вне окружности радиуса R, проведены к ней две касательные AB и AC, где B и C—точки касания. Пусть $BC=a$. Докажите, что $4R^2=r^2+r_a^2+\frac{a^2}{2}$, где r и r_a—радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC.

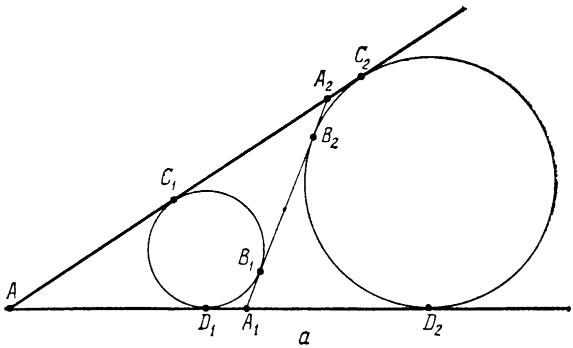
3.32. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает бо́льшую в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB:BC:CD=2:4:3$.

3.33. Центры трех окружностей радиуса R, где $1<R<2$, образуют правильный треугольник со стороной 2. Чему равно расстояние между точками пересечения этих окружностей, лежащими вне треугольника?

Решения

3.1. Пусть прямая XY касается данной окружности в точке Z. Соответственные стороны треугольников XOA и XOZ равны, поэтому $\angle XOA = \angle XOZ$. Аналогично, $\angle ZOY = \angle BOY$. Следовательно, $\angle XOY = \angle XOZ + \angle ZOY = \frac{1}{2}(\angle AOZ + \angle ZOB) = \frac{1}{2}\angle AOB$.

3.2. а) Обозначим вершину угла через A, а точки касания окружностей со сторонами угла — через C_1, C_2, D_1, D_2 (рис. 36, *а*).



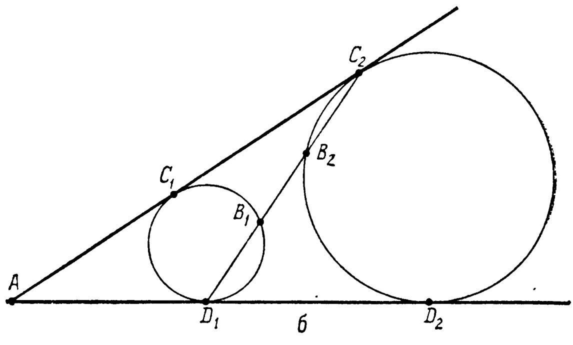


Рис. 36

Касательные, проведенные из одной точки, равны, поэтому $A_2C_1 = A_2B_2 + B_2B_1$, $A_1D_2 = A_1B_1 + B_1B_2$ и $AC_1 + C_1A_2 + A_2C_2 = AD_1 + D_1A_1 + A_1D_2$. Подставляя первое и второе равенства в третье и учитывая, что $A_2C_2 = A_2B_2$, $A_1D_1 = A_1B_1$ и $AD_1 = AC_1$, получаем $A_1B_1 = A_2B_2$.

б) Обозначим вершину угла через A, точки касания окружностей со сторонами угла — через C_1, C_2, D_1, D_2; точки пересечения секущей C_2D_1 с окружностями — через B_1 и B_2 (рис. 36, *б*).

Произведение длины секущей на длину ее внешней части равно квадрату касательной, поэтому $C_2B_1 \cdot C_2D_1 = C_2C_1^2$ и $D_1B_2 \cdot D_1C_2 = D_1D_2^2$. Поскольку $C_1C_2 = D_1D_2$, то $C_2B_1 = D_1B_2$. Следовательно, $C_2B_2 = D_1B_1$.

3.3. Пусть P — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Четырехугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда треугольник APB подобен треугольнику DPC, т. е. $PA \cdot PC = PB \cdot PD$. Так как четырехугольники $ALBN$ и $AMBK$ вписанные, $PL \cdot PN = PA \cdot PB = PM \cdot PK$. Поэтому четырехугольник $KLMN$ вписанный.

3.4. Обозначим через X вторую точку пересечения прямой PK с окружностью, проходящей через точки K, A, B, а через PQ — касательную к S. Поскольку $PQ^2 = PA \cdot PB = PK \cdot PX$, точка X лежит на прямой PK и $PX = \frac{PQ^2}{PK}$, т. е. X зависит только от P, K, Q и не зависит от выбора секущей PAB.

3.5. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Тогда $MO \cdot OC = BO \cdot OD$. Поскольку $OC = OA$ и $BO = OD$, $MO \cdot OA = BO^2$ и $MO \cdot OA = DO^2$. Эти равенства означают, что OB касается описанной окружности треугольника ABM и OD касается описанной окружности треугольника ADM.

3.6. Точки O_1, A и O_2 лежат на одной прямой, поэтому $\angle A_2AO_2 = \angle A_1AO_1$. Треугольники AO_2A_2 и AO_1A_1 равнобедренные, поэтому $\angle A_2AO_2 = \angle AA_2O_2$ и $\angle A_1AO_1 = \angle AA_1O_1$. Следовательно, $\angle AA_2O_2 = \angle AA_1O_1$, т. е. $O_1A_1 \parallel O_2A_2$.

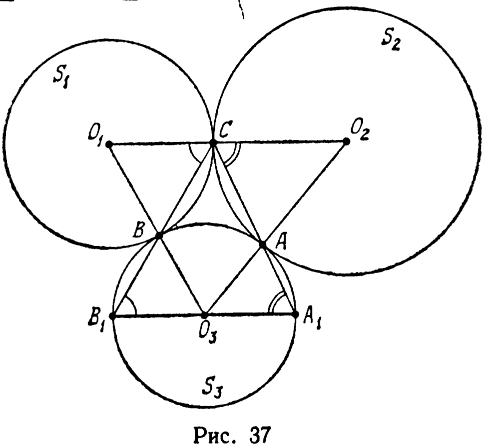


Рис. 37

3.7. Обозначим центры окружностей S_1, S_2, S_3 через O_1, O_2, O_3; точки касания окружностей S_2 и S_3, S_1 и S_3, S_1 и S_2 — через A, B, C; точки пересечения прямых CA и CB с окружностью S_3 — через A_1 и B_1 (рис. 37).

Согласно предыдущей задаче $B_1O_3 \parallel CO_1$ и $A_1O_3 \parallel CO_2$. Поскольку точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой, точки A_1, O_3 и B_1 тоже лежат на одной прямой, т. е. A_1B_1 — диаметр окружности S_3.

3.8. Обозначим точки касания окружностей с центрами O и O_1, O и O_2, O_1 и O_2 через A_1, A_2, B соответственно. Точка касания двух окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры. Поэтому $O_1O_2 = O_1B + BO_2 = O_1A_1 + O_2A_2$ и $OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = (OO_1 + O_1A_1) + (OO_2 + O_2A_2) = OA_1 + OA_2 = 2R$.

3.9. Обозначим проекции точек A, B, C на прямую l через A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть C_2 — проекция точки C на прямую AA_1. Применяя теорему Пифагора к треугольнику ACC_2, получаем $CC_2^2 = AC^2 - AC_2^2$, т. е. $A_1C_1^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 = 4ac$. Аналогично, $B_1C_1^2 = 4bc$ и $A_1B_1^2 = 4ab$. Поскольку $A_1C_1 + C_1B_1 = A_1B_1$, имеем $\sqrt{ac} + \sqrt{bc} = \sqrt{ab}$, т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

3.10. Обозначим центры окружностей через O_1 и O_2, точку их пересечения — через A. Поскольку радиусы O_1A и O_2A перпендикулярны касательным к окружностям, проведенным через точку A, угол между этими касательными равен углу между радиусами O_1A и O_2A. Поэтому окружности ортогональны тогда и только тогда, когда $\angle O_1AO_2 = 90°$, т. е. $O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2$.

3.11. Обозначим углы между окружностями так, как показано на рис. 38 (одинаковые обозначения использованы для четырех равных углов, которые образуются при пересечении двух окружностей).

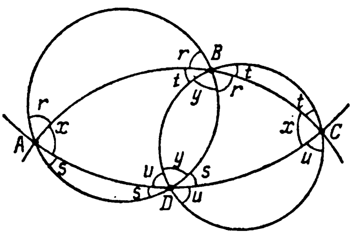


Рис. 38

Рассматривая величины углов, образованных окружностями, проходящими через точки A, C, B, D соответственно, получаем $x + s + r = 180°$, $x + t + u = 180°$, $y + r + t = 180°$ и $y + u + s = 180°$. Вычитая из суммы двух первых равенств два последних равенства, получаем $x = y$, что и требовалось.

Для учета различных расположений точек A, B, C, D достаточно считать, что величины x, y, r, s, t, u могут принимать отрицательные значения.

3.12. Прямые BC и AD являются высотами треугольника APB, поэтому прямая PQ, проходящая через точку Q их пересечения, перпендикулярна прямой AB.

3.13. Обозначим точки пересечения прямых AC и BD, BC и AD через K и K_1 соответственно. Согласно предыдущей задаче

$KK_1 \perp AB$, поэтому нам достаточно доказать, что точка пересечения касательных в точках C и D лежит на прямой KK_1.

Докажем, что касательная в точке C проходит через середину отрезка KK_1. Пусть M — точка пересечения касательной в точке C и отрезка KK_1. Стороны углов ABC и CKK_1 соответственно перпендикулярны, поэтому они равны. Аналогично, $\angle CAB = \angle CK_1K$. Ясно также, что $\angle KCM = \angle ABC$ (по свойству угла между касательной и хордой), поэтому треугольник CMK равнобедренный. Аналогично, треугольник CMK_1 равнобедренный и $KM = CM = K_1M$, т. е. M — середина отрезка KK_1.

Аналогично доказывается, что касательная в точке D проходит через середину отрезка KK_1, т. е. касательные в точках C и D пересекаются в точке, являющейся серединой отрезка KK_1.

3.14. а) Прямая AC пересекает окружность в точках A и A_1, прямая BC — в точках B и B_1. Если $A = A_1$ (или $B = B_1$), то прямая AC (BC) — искомый перпендикуляр. Если же это не так, то AB_1 и BA_1 являются высотами треугольника ABC и искомая прямая — это прямая, проходящая через точку пересечения прямых AB_1 и BA_1.

б) Возьмем точку C_1, не лежащую на окружности, и опустим из нее перпендикуляр на AB. Пусть он пересекается с окружностью в точках D и E. Построим точку P пересечения прямых DC и AB, а затем точку F пересечения прямой PE с окружностью. При симметрии относительно AB точка C переходит в точку F. Поэтому CF — искомый перпендикуляр.

3.15. Обозначим длины катетов через a и b, длину гипотенузы — через c. Чтобы найти сумму площадей «луночек», нужно от площади фигуры, состоящей из треугольника и полукругов, диаметры которых — катеты, отнять площадь полукруга, диаметр которого — гипотенуза. Поэтому сумма площадей «луночек» равна

$$\frac{\pi}{8} a^2 + \frac{\pi}{8} b^2 + S_{ABC} - \frac{\pi}{8} c^2 = S_{ABC},$$

поскольку $a^2 + b^2 = c^2$.

3.16. Обозначим точки пересечения окружностей, построенных на отрезках OB и OC, OA и OC, OA и OB, через A_1, B_1, C_1 соответственно (рис. 39). $\angle OA_1B = \angle OA_1C = 90°$, поэтому точки B, A_1 и C лежат на одной прямой, а поскольку окружности имеют одинаковые радиусы, $BA_1 = A_1C$. Точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC, поэтому $BA_1 = C_1B_1$ и $BC_1 = A_1B_1$. Поскольку круги имеют одинаковый радиус, то равные хорды BA_1 и C_1B_1 отсекают от кругов части равной площади, а равные хорды C_1B и B_1A_1 также отсекают от кругов части равной площади. Поэтому площадь криволинейного треугольника $A_1B_1C_1$

равна площади параллелограмма $A_1B_1C_1B$, т. е. равна половине площади треугольника ABC.

3.17. Проведем высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC. Окружность, построенная на стороне AB как на диаметре, проходит через точки A_1 и B_1. Проведем прямые A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1

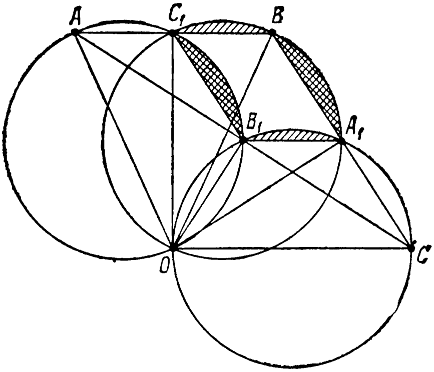


Рис. 39

и обозначим их точки пересечения с окружностями, как показано на рис. 40. $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$ (см. задачу 1.50), поэтому четырехугольник AB_1A_1B симметричен четырехугольнику AB_2A_2B относительно прямой AB. Следовательно, площади сегментов, отсекаемых хордами AB_1 и AB_2, B_1A_1 и B_2A_2, BA_1 и BA_2, попарно равны. Переместим сегменты AB_2 и BA_2 «внешнего» криволинейного треугольника ABC_1 на место сегментов AB_1 и BA_1. Аналогичную операцию проделаем для криволинейных треугольников AB_1C и A_1BC. Теперь, учитывая равенство сегментов A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_3C_3, A_1C_1 и A_3C_2, получаем, что разность суммы площадей внешних криволинейных треугольников и площади внутреннего криволинейного треугольника равна разности суммы площадей четырехугольников AB_2A_2B, AC_2A_3C, CB_3C_3B и площади треугольника $A_1B_1C_1$. Ясно, что в сумму площадей четырехугольников площадь каждого из треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C входит дважды, а площадь треугольника $A_1B_1C_1$ входит трижды. Поэтому

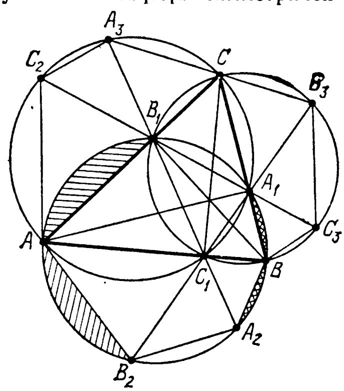


Рис. 40

после вычитания площади треугольника $A_1B_1C_1$ остается удвоенная площадь треугольника ABC.

3.18. Проведем через точку P другую прямую, пересекающую окружность в точках A_1 и B_1. Тогда $\triangle PAA_1 \backsim \triangle PB_1B$, поэтому $PA:PA_1=PB_1:PB$.

3.19. Проведем через точку P касательную PC. $\triangle PAC \backsim \triangle PCB$, поэтому $PA:PC=PC:PB$.

3.20. Проведя прямую через точку P и центр O окружности S, получаем, что степень точки P относительно окружности S равна d^2-R^2, где $d=PO$, R — радиус окружности.

Поместим начало координат в центр окружности S_1, а ось Ox проведем через центр окружности S_2. Тогда центр окружности S_1 имеет координаты $(0, 0)$, а центр окружности S_2 — координаты $(a, 0)$. Пусть радиусы окружностей S_1, S_2 равны R_1, R_2 соответственно.

Точка с координатами (x, y) имеет степень $x^2+y^2-R_1^2$ относительно окружности S_1 и степень $(x-a)^2+y^2-R_2^2$ относительно окружности S_2. Для множества точек, степени которых относительно S_1 и S_2 равны, получаем уравнение $x^2+y^2-R_1^2=$ $=(x-a)^2+y^2-R_2^2$, т. е. $x=\frac{1}{2a}(a^2+R_1^2-R_2^2)$. Это уравнение задает прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей S_1 и S_2.

3.21. Степени точки пересечения окружностей относительно каждой из них равны нулю, поэтому она лежит на радикальной оси. Если точек пересечения две, то они однозначно задают радикальную ось.

3.22. Так как центры окружностей не лежат на одной прямой, радикальная ось первой и второй окружностей пересекается с радикальной осью второй и третьей окружностей. Степени точки пересечения относительно всех трех окружностей равны, поэтому она лежит на радикальной оси первой и третьей окружностей.

3.23. а) Согласно задаче 3.21 прямые, содержащие хорды, являются радикальными осями. Согласно задаче 3.22 радикальные оси пересекаются в одной точке, если центры окружностей не лежат на одной прямой. В противном случае они перпендикулярны этой прямой.

б) Обозначим окружности, построенные на отрезках AA_1, BB_1, CC_1, через S_A, S_B, S_C соответственно. Построим на отрезке AB как на диаметре окружность S. Общей хордой окружностей S и S_A является высота AH_a, общей хордой окружностей S и S_B является высота BH_b. Согласно а) общая хорда окружностей S_A и S_B проходит через точку пересечения общих хорд окружностей S и S_A, S и S_B, т. е. проходит через точку O пересечения высот.

Аналогично доказывается, что и общие хорды окружностей S_A и S_C, S_B и S_C проходят через точку O.

3.24. Обозначим через B' и C' точки пересечения прямых $A'M$ и $A'N$ с прямой, проведенной через точку A параллельно прямой BC (рис. 41). Поскольку треугольники $A'BM$ и $A'NC$ равнобедренные, треугольники ABC и $A'B'C'$ равны. Поскольку $AM \cdot BM = A'M \cdot B'M$, степени точки M относительно окружностей S и S', описанных около треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно, равны. Это верно и для точки N, поэтому прямая MN является радикальной осью окружностей S и S'. Окружности S и S' имеют одинаковые радиусы, поэтому их радикальная ось является осью симметрии S и S'. Точка A', лежащая на окружности S', при симметрии относительно прямой MN переходит в точку, лежащую на окружности S.

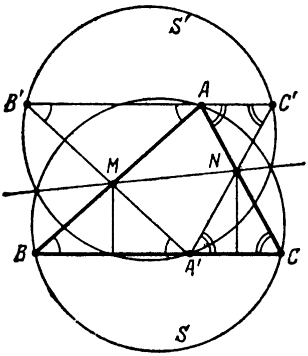


Рис. 41

3.25. Будем считать, что точки A и C лежат на одной касательной, B и D — на другой. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD через K, точку пересечения прямых AC и BD — через E, центры первой и второй окружностей — через O_1 и O_2 соответственно (рис. 42).

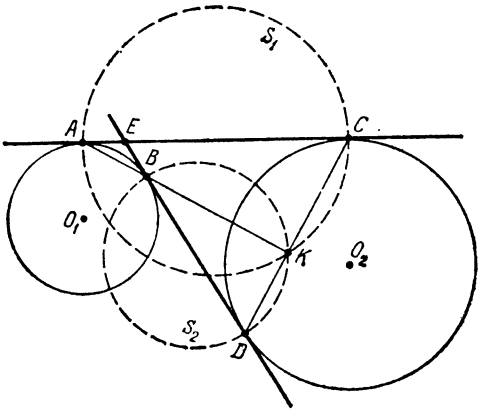


Рис. 42

$$AB \perp O_1E, \quad O_1E \perp O_2E, \quad O_2E \perp CD.$$

Поэтому $AB \perp CD$, т. е. K является точкой пересечения окружностей S_1 и S_2, построенных на отрезках AC и BD как на диаметрах. Мы получили, что точка K лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_2. Покажем теперь, что прямая O_1O_2 является радикальной осью окружностей S_1 и S_2. Радиусы O_1A и O_1B являются касательными к окружностям S_1 и S_2, поэтому точка O_1 лежит на радикальной оси. Аналогично, точка O_2 лежит на радикальной оси.

3.26. а) Обозначим данные точки через $A_1, \ldots, A_n$. Для каждой точки A_i рассмотрим множество M_i, состоящее из тех точек X, для которых A_i — ближайшая из точек $A_1, \ldots, A_n$, т. е. $A_iX \leqslant A_jX$, $j=1, \ldots, n$. Тогда M_i — выпуклое множество. В самом деле, пусть M_{ij} — множество точек X, для которых $A_iX \leqslant A_jX$, т. е. полуплоскость. Множество M_i является пересечением выпуклых множеств M_{ij}, поэтому оно само выпуклое. Кроме того, поскольку каждое из множеств M_{ij} содержит точку A_i, M_i содержит точку A_i. Поскольку для каждой точки плоскости какая-то из точек $A_1, \ldots, A_n$ является ближайшей, множества M_i покрывают всю плоскость. Рассматривая те части множеств M_i, которые лежат внутри исходного многоугольника, получаем требуемое разбиение.

б) Воспользовавшись доказанными свойствами радикальных осей, мы можем почти дословно повторить рассуждения, приведенные в а).

Обозначим данные окружности через $S_1, \ldots, S_n$. Для каждой окружности S_i рассмотрим множество M_i, состоящее из тех точек X, для которых степень относительно S_i не больше степеней относительно $S_1, \ldots, S_n$. Тогда M_i — выпуклое множество. В самом деле, пусть M_{ij} — множество точек X, для которых степень относительно S_i не больше степени относительно S_j. M_{ij} является полуплоскостью, состоящей из точек, лежащих по одну сторону с окружностью S_i от радикальной оси окружностей S_i и S_j. Множество M_i является пересечением выпуклых множеств M_{ij}, поэтому оно само выпуклое. Кроме того, поскольку каждое из множеств M_{ij} содержит окружность S_i, M_i содержит S_i. Поскольку для каждой точки плоскости какая-то из степеней относительно $S_1, \ldots, S_n$ является наименьшей, множества M_i покрывают всю плоскость. Рассматривая те части множеств M_i, которые лежат внутри исходного многоугольника, получаем требуемое разбиение.

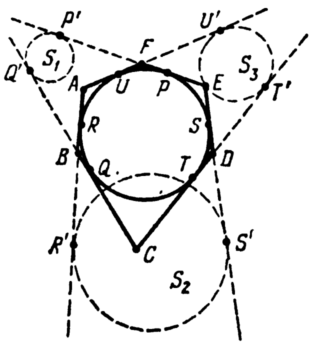


Рис. 43

3.27. Пусть выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ касается окружности в точках R, Q, T, S, P, U (точка R лежит на AB, Q — на BC и т. д.).

Выберем произвольное число $a > 0$ и построим на прямых BC и EF точки Q' и P' так, что $QQ' = PP' = a$, а векторы $\overrightarrow{QQ'}$ и $\overrightarrow{PP'}$ сонаправлены с векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{EF}$. Аналогично строим точки R', S', T', U' (рис. 43, $RR' = SS' = TT' = UU' = a$). Построим окружность S_1, касающуюся прямых BC и EF в точках P' и Q'. Аналогично построим окружности S_2 и S_3.

Докажем, что точки B и E лежат на радикальной оси окружностей S_1 и S_2. $BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR'$ (если $QQ' < BQ$, то $BQ' = BQ - QQ' = BR - RR' = BR'$) и $EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'$. Аналогично доказывается, что прямые FC и AD являются радикальными осями окружностей S_1 и S_3, S_2 и S_3 соответственно. Поскольку радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке, прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Глава 4

ПЛОЩАДИ

Основные сведения

1. Площадь S треугольника ABC можно вычислять по следующим формулам:

а) $S=\frac{1}{2}ah_a$, где $a=BC$, h_a — длина высоты, опущенной на BC;

б) $S=\frac{1}{2}bc\sin A$;

в) $S=pr$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. В самом деле, если O — центр вписанной окружности, то

$$S=S_{ABO}+S_{AOC}+S_{OBC}=\frac{1}{2}(c+b+a)r=pr.$$

2. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то сумма их площадей равна площади исходного многоугольника.

3. Фигуры, имеющие равную площадь, иногда называются *равновеликими*.

Вводные задачи

1. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, а φ — угол между ними.

2. Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AE, ED, BF, FC, если известно, что площадь $ABCD$ равна S.

3. Многоугольник описан около окружности радиуса r. Докажите, что его площадь равна pr, где p — полупериметр многоугольника.

4. Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX}+S_{CDX}=S_{BCX}+S_{ADX}$.

5. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон CD, DA, AB, BC квадрата $ABCD$, площадь которого равна S. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

§ 1. Площади треугольников, на которые медианы разбивают треугольник

4.1. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

4.2. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что площади треугольников ABP, BCP и ACP равны. Докажите, что P — точка пересечения медиан треугольника.

§ 2. Вспомогательные равновеликие треугольники

4.3. Внутри данного треугольника ABC найдите точку O такую, что площади треугольников BOL, COM и AON (точки L, M и N лежат на сторонах AB, BC и CA, причем $OL \parallel BC$, $OM \parallel AC$ и $ON \parallel AB$) равны (рис. 44).

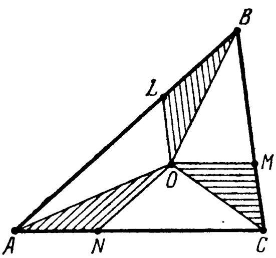


Рис. 44

4.4. Через точку E, взятую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные сторонам и разбивающие его на четыре параллелограмма. Докажите, что точка E лежит на диагонали AC тогда и только тогда, когда параллелограммы, прилегающие к вершинам B и D, равновелики.

4.5. На продолжениях сторон DA, AB, BC, CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $\overrightarrow{DA_1}=2\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB_1}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1}=2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD_1}=2\overrightarrow{CD}$. Найдите площадь получившегося четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна S.

4.6. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Диагонали AD, BE и CF являются диаметрами этой окружности. Докажите, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна удвоенной площади треугольника ACE.

§ 3. Вычисление площадей

4.7. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите площадь трапеции, если известно, что длина одной из ее диагоналей равна 5.

4.8. В прямоугольник $ABCD$ вписаны два различных прямоугольника, имеющих общую вершину K на стороне AB. Докажите, что сумма их площадей равна площади прямоугольника $ABCD$.

4.9. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4.10. В треугольнике ABC точка E — середина стороны BC, точка D лежит на стороне AC, $AC=1$, $\angle BAC=60°$, $\angle ABC=100°$, $\angle ACB=20°$ и $\angle DEC=80°$ (рис. 45). Чему равна сумма площади треугольника ABC и удвоенной площади треугольника CDE?

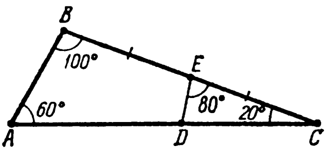


Рис. 45

4.11. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки E, F и G так, что $AE:EB=BF:FC=CG:GA=k<1$. Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми AF, BG и CE, к площади треугольника ABC.

4.12. Вокруг треугольника $B_1B_2B_3$ описан треугольник $A_1A_2A_3$, вокруг $A_1A_2A_3$ описан треугольник $C_1C_2C_3$ так, что его стороны параллельны соответственным сторонам $B_1B_2B_3$. Найдите площадь треугольника $A_1A_2A_3$, если известны площади треугольников $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$.

§ 4. Площадь помогает решить задачу

4.13. На сторонах BC, CA и AB треугольника взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P.

а) Докажите, что $\frac{S_{ABP}}{S_{BCP}}=\frac{AB_1}{B_1C}$.

б) Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad \text{(теорема Чевы).}$$

4.14. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности равен трети одной из высот треугольника.

4.15. Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой произвольно внутри правильного треугольника, до его сторон постоянна (и равна высоте треугольника).

4.16. Дан правильный треугольник ABC и точка O внутри него. M, P и K — проекции точки O на высоты AD, BE и CF соответственно. Докажите, что величина $AM+BP+CK$ не зависит от выбора точки O.

4.17. Докажите, что в выпуклом многоугольнике, все углы которого равны, сумма длин перпендикуляров, опущенных из любой внутренней точки O на стороны многоугольника или на их продолжения, не зависит от выбора точки O.

4.18. Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r, разрезан на треугольники (произвольным образом). Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.

4.19. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3 и т. д. так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1, \ldots, A_nB_nC_nD_n$, то прямые $A_1C_1, \ldots$ $\ldots, A_nC_n$ пересекутся в одной точке O. Докажите, что $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot\ldots\cdot A_nB_n=A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot\ldots\cdot A_nD_n$.

4.20. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки M, H, K, P соответственно так, что $MK\|AD$, $HP\|AB$. Докажите, что прямые BP, MD и OC пересекаются в одной точке (O — точка пересечения прямых HP и MK).

4.21. Докажите, что если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

4.22. Внутри треугольника ABC взята точка O. Обозначим расстояния от точки O до сторон BC, CA, AB треугольника через d_a, d_b, d_c, а расстояния от точки O до вершин A, B, C — через R_a, R_b, R_c.

а) Докажите, что $aR_a\geqslant cd_c+bd_b$.

б) Докажите, что $R_a+R_b+R_c\geqslant 2(d_a+d_b+d_c)$.

§ 5. Площади образуют арифметическую прогрессию

4.23. а) Противоположные стороны AB и CD произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ разделены на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены (рис. 46, a). Докажите, что площадь среднего (заштрихованного) четырехугольника в пять раз меньше площади исходного.

б) Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены (рис. 46, *б*). Докажите, что площадь среднего (заштрихованного) четырехугольника в 25 раз меньше площади исходного.

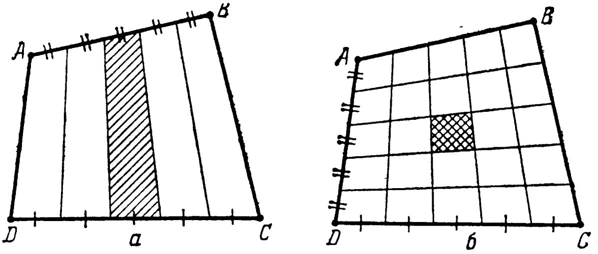


Рис. 46

4.24. Середины M и N сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ соединены с концами противолежащих сторон (M— с C и D, N — с A и B). Докажите, что площадь четырехугольника, ограниченного проведенными отрезками, равна сумме площадей треугольников, прилегающих к сторонам AD и BC.

§ 6. Площади треугольников, на которые диагонали разбивают четырехугольник

4.25. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник $ABCD$ на четыре треугольника. Докажите, что если $BC \| AD$, то треугольники, прилегающие к сторонам AB и CD, равновелики. Верно ли обратное?

4.26. а) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известны площади треугольников ABP, BCP, CDP. Найдите площадь треугольника ADP.

б) Диагонали выпуклого четырехугольника площади 1 делятся точкой пересечения в отношениях $2:3$ и $4:5$. Найдите площади четырех треугольников, на которые диагонали разбивают четырехугольник.

в) Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел представляет собой точный квадрат.

4.27. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке P, причем сумма площадей треугольников ABP и CDP равна сумме площадей треугольников BCP и ADP. Докажите, что точка P является серединой одной из диагоналей.

4.28. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника. Суммы квадратов площадей треугольников, прилегающих к противоположным сторонам четырехугольника, равны между собой. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей делится точкой пересечения пополам.

§ 7. Площади треугольников, на которые внутренняя точка разбивает четырехугольник

4.29. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ имеется точка O такая, что площади треугольников OAB, OBC, OCD и ODA равны. Докажите, что одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам.

4.30. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ существуют три внутренние точки P_1, P_2, P_3, не лежащие на одной прямой и обладающие тем свойством, что сумма площадей треугольников ABP_i и CDP_i равна сумме площадей треугольников BCP_i и ADP_i для каждого $i=1, 2, 3$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

§ 8. Площадь четырехугольника с вершинами на сторонах (диагоналях) четырехугольника

4.31. Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$.

4.32. Дан выпуклый четырехугольник площади S. Внутри него выбирается точка и отражается симметрично относительно середин всех сторон. Получаются четыре вершины нового четырехугольника. Найдите его площадь.

4.33. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

4.34. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ взяты точки: P и Q — середины диагоналей AC и BD, M и N — середины сторон AB и CD, S — точка пересечения диагоналей. Докажите, что площадь четырехугольника $PMQN$ равна абсолютной величине полуразности площадей треугольников ASB и CSD.

4.35. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и K — середины диагоналей AC и BD соответственно,

H — точка пересечения продолжений сторон AD и BC. Докажите, что

$$S_{EKH}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

4.36. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна стороне параллелограмма.

4.37. Точки K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, точки L и N расположены на сторонах BC и AD так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое больше площади прямоугольника $KLMN$.

§ 9. Прямые и окружности, делящие фигуры на равновеликие части

4.38. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найдите длину MN, если $BC=a$ и $AD=b$.

4.39. Докажите, что диагональ выпуклого четырехугольника делит его площадь пополам тогда и только тогда, когда она делит пополам другую диагональ.

4.40. Каждая из трех прямых делит площадь фигуры пополам. Докажите, что часть фигуры, заключенная внутри треугольника, образованного этими прямыми, имеет площадь, не превосходящую 1/4 площади всей фигуры.

4.41. Прямая l делит площадь выпуклого многоугольника пополам. Докажите, что эта прямая делит проекцию данного многоугольника на прямую, перпендикулярную l, в отношении, не превосходящем $1+\sqrt{2}$.

4.42. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

4.43. а) Докажите, что любая прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр вписанной окружности.

б) Докажите аналогичное утверждение для любого описанного многоугольника.

4.44. Точки A и B, лежащие на окружности S_1, соединены дугой окружности S_2, делящей площадь круга, ограниченного S_1, на две равные части. Докажите, что дуга S_2, соединяющая A и B, по длине больше диаметра S_1.

§ 10. Формула для площади четырехугольника

4.45. а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ вычисляется по формуле

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right),$$

где p — полупериметр, a, b, c, d — длины сторон.

б) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ вписанный, то

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

в) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ вписанный и описанный одновременно, то $S^2=abcd$.

§ 11. Разрезания

4.46. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

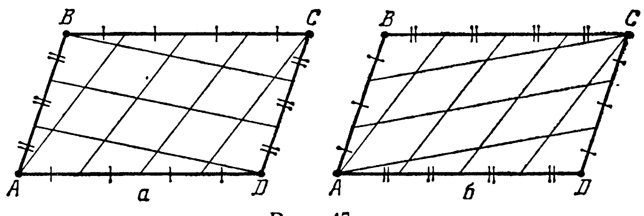


Рис. 47

4.47. Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$ площади 1 разбиты на n равных частей, AD и BC — на m равных частей.

а) Точки деления соединены так, как показано на рис. 47, *а*.

б) Точки деления соединены так, как показано на рис. 47, *б*.

Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

Задачи для самостоятельного решения

4.48. Стороны вписанного четырехугольника $ABCD$ удовлетворяют соотношению $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. Докажите, что площади треугольников ABC и ADC равны.

4.49. Медианы треугольника имеют длины 9, 12, 15. Чему равна его площадь?

4.50. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, радиус вписанной окружности равен r. Чему равно отношение площади вписанного круга к площади треугольника?

4.51. Докажите, что все выпуклые четырехугольники, имеющие общие середины сторон, равновелики.

4.52. Докажите, что если два треугольника, получающихся при продолжении сторон выпуклого четырехугольника до их пересечения, равновелики, то одна из диагоналей делит другую пополам.

4.53. Площадь треугольника равна S, периметр равен P. Прямые, на которых расположены его стороны, отодвигаются (во внешнюю сторону) на расстояние h. Найдите площадь и периметр треугольника, образованного тремя полученными прямыми.

4.54. Найдите площадь общей части четырех кругов радиуса 1, центры которых образуют квадрат со стороной 1.

4.55. Точки M и N являются серединами боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Докажите, что если удвоенная площадь трапеции равна $AN \cdot NB + CM \cdot MD$, то $AB = CD = BC + AD$.

4.56. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K. Известно, что площадь треугольника MBK равна площади четырехугольника $AMKC$. Докажите, что

$$\frac{AM + MK + KC}{MB + BK} > \frac{1}{3}.$$

Решения

4.1. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC, O — точка их пересечения.

В треугольниках OBA_1 и OCA_1 стороны BA_1 и CA_1 равны; высоты, опущенные из вершины O на эти стороны, тоже равны, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OCA_1}$. Аналогично, $S_{OAB_1} = S_{OCB_1}$ и $S_{OAC_1} = S_{OBC_1}$.

В треугольнике AOC_1 сторона AO в два раза больше стороны A_1O треугольника A_1OB, а высота, опущенная на сторону AO, в два раза меньше высоты, опущенной на сторону A_1O. Поэтому $S_{AOC_1}=S_{A_1OB}$. Аналогично, $S_{AOC_1}=S_{B_1OC}$.

4.2. Треугольники ABP и ACP имеют общую сторону AP и равновелики, поэтому перпендикуляры BM и CN, опущенные из точек B и C на прямую AP, равны. Поэтому прямоугольные треугольники BMK и CNK, где K — точка пересечения прямых AP и BC, равны, т. е. прямая AP проходит через середину стороны BC. Аналогичные рассуждения для прямых BP и CP показывают, что P — точка пересечения медиан треугольника.

4.3. Обозначим точку пересечения прямой LO со стороной AC через L_1. Поскольку $S_{LOB}=S_{MOC}$ и $\triangle MOC=\triangle L_1OC$, то $S_{LOB}=S_{L_1OC}$. Высоты треугольников LOB и L_1OC равны, поэтому $LO=L_1O$, т. е. точка O лежит на медиане, проведенной из вершины A. Аналогично доказывается, что точка O лежит на медианах, проведенных из вершин B и C, т. е. O — точка пересечения медиан треугольника. Проведенные рассуждения показывают также, что точка пересечения медиан треугольника обладает требуемым свойством.

4.4. Обозначим точки пересечения проведенных прямых со сторонами параллелограмма через P, Q, M, L: точка P лежит на стороне AB, Q — на стороне CD, M — на стороне BC, L — на стороне AD. Допустим сначала, что точка E лежит на диагонали AC. Тогда треугольники ABC и ADC, EMC и EQC, APE и ALE равны, поэтому

$$S_{PEMB}=S_{ABC}-S_{EMC}-S_{APE}=S_{ADC}-S_{EQC}-S_{ALE}=S_{ELDQ}.$$

Пусть теперь точка E не лежит на диагонали AC. Для определенности будем считать, что точка E лежит внутри треугольника ADC. Рассмотрим точку E' пересечения прямой ML и диагонали AC. Проведем через точку E' прямую $P'Q'$, параллельную PQ (рис. 48). Как только что было доказано, $S_{P'E'MB}=S_{E'LDQ'}$. Ясно, что $S_{PEMB}>S_{P'E'MB}$ и $S_{E'LDQ'}>S_{ELDQ}$, поэтому $S_{PEMB}>S_{ELDQ}$.

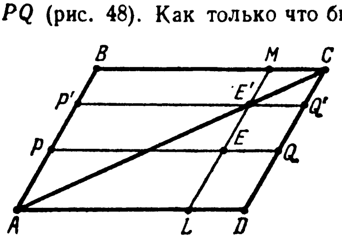


Рис. 48

4.5. Поскольку $AB=BB_1$, то $S_{BB_1C}=S_{BAC}$. А так как $BC=CC_1$, то $S_{B_1C_1C}=S_{BB_1C}=S_{BAC}$ и $S_{BB_1C_1}=2S_{BAC}$. Аналогично, $S_{DD_1A_1}=2S_{ACD}$, поэтому $S_{BB_1C_1}+S_{DD_1A_1}=2S_{ABC}+2S_{ACD}=2S_{ABCD}$. Аналогично, $S_{AA_1B_1}+S_{CC_1D_1}=2S_{ABCD}$. Поэтому $S_{A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}+S_{AA_1B_1}+S_{BB_1C_1}+S_{CC_1D_1}+S_{DD_1A_1}=5S_{ABCD}$.

4.6. Пусть O — центр описанной окружности. Поскольку AD, BE и CF — диаметры, то $S_{ABO}=S_{DEO}=S_{AEO}$, $S_{BCO}=S_{EFO}=S_{CEO}$, $S_{CDO}=S_{AFO}=S_{ACO}$. Ясно также, что $S_{ABCDEF}=S_{ABO}+S_{DEO}+S_{BCO}+S_{EFO}+S_{CDO}+S_{AFO}$ и $S_{ACE}=S_{AEO}+S_{CEO}+S_{ACO}$. Следовательно, $S_{ABCDEF}=2S_{ACE}$.

4.7. Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ перпендикулярны, высота CF равна 4 и $AC=5$. Поскольку треугольник ACF прямоугольный, $AC=5$ и $CF=4$, то $AF=3$. Пусть прямая, проведенная через точку C параллельно BD, пересекает прямую AD в точке E. Прямоугольные треугольники AEC и ACF имеют общий острый угол, поэтому они подобны и $\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AF}$, т. е. $AE=\frac{25}{3}$. Следовательно, $S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}CF=\frac{AD+DE}{2}CF=\frac{AE\cdot CF}{2}=\frac{50}{3}$.

4.8. Если один из параллелограммов вписан в другой, то центры этих параллелограммов совпадают (см. задачу 7.3). Поэтому все три рассматриваемых прямоугольника имеют общий центр O, т. е. вершины вписанных прямоугольников лежат на окружности радиуса OK с центром O. Обозначим вершины вписанных прямоугольников, лежащие на стороне BC, через M и N, а проекцию точки O на хорду MN — через O_1 (рис. 49). Поскольку $O_1B=O_1C$ и $O_1M=O_1N$, имеем $BM=NC$. Следовательно, $S_{KBM}+S_{KBN}=\frac{1}{2}KB\cdot(BM+BN)=\frac{1}{2}KB\cdot BC$ и $S_{LCN}+S_{LCM}=\frac{1}{2}LC\cdot(CN+CM)=\frac{1}{2}LC\cdot BC$. Поэтому $S_{KML}+S_{KNL}=2S_{KBCL}-S_{KBM}-S_{KBN}-S_{LCN}-S_{LCM}=2S_{KBCL}-\frac{1}{2}(KB+LC)\cdot BC=S_{KBLC}$. Поскольку KL делит площадь каждого из трех прямоугольников пополам, из равенства $S_{KML}+S_{KNL}=S_{KBCL}$ следует требуемое.

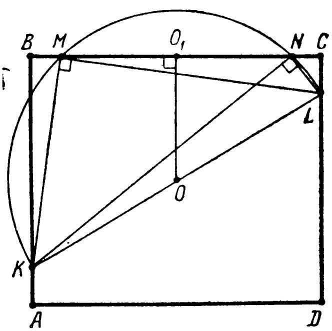


Рис. 49

4.9. Поскольку $S_{ABE}=S_{ABC}$, точки E и C равноудалены от AB и $EC\|AB$. Аналогично доказывается, что и остальные диагонали параллельны соответствующим сторонам. Пусть P — точка пересечения BD и EC. Если $S_{BPC}=x$, то $S_{ABCDE}=S_{ABE}+S_{EPB}+S_{EDC}+S_{BPC}=3+x$ ($S_{EPB}=S_{ABE}=1$, так как $ABPE$ — параллелограмм). Остается найти x. $S_{BPC}:S_{DPC}=BP:DP=S_{EPB}:S_{EPD}$, т. е. $x:(1-x)=1:x$. Отсюда $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $S_{ABCDE}=\frac{\sqrt{5}+5}{2}$.

4.10. Опустим из точки C перпендикуляр l на прямую AB. Пусть A', B', E' — точки, симметричные точкам A, B, E относительно прямой l. Тогда треугольник $AA'C$ равносторонний, причем $\angle ACB=\angle BCB'=\angle B'CA'=20°$. Треугольники $EE'C$ и DEC являются равнобедренными треугольниками с углом при вершине 20°, имеющими общую боковую сторону EC. Поэтому эти треугольники равны. Следовательно, $S_{ABC}+2S_{EDC}=S_{ABC}+2S_{EE'C}$.

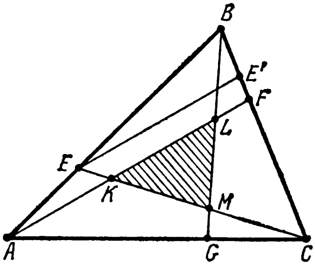


Рис. 50

Поскольку E — середина стороны BC, $2S_{EE'C}=S_{BE'C}=\frac{1}{2}S_{BB'C}$.

Поэтому $S_{ABC}+2S_{EDC}=S_{ABC}+\frac{1}{2}S_{BB'C}=\frac{1}{2}S_{AA'C}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

4.11. Обозначим точки пересечения прямых AF и CE, BG и AF, CE и BG через K, L и M соответственно (рис. 50). Тогда

$$S_{KLM}=S_{ABC}-S_{AKC}-S_{BLA}-S_{CMB}.$$

Вычислим площадь треугольника AKC. Для этого найдем отношение $EK:KC$. Проведем прямую $EE'\|AF$. $\frac{EK}{KC}=\frac{E'F}{FC}$ и $\frac{BF}{E'F}=\frac{AB}{AE}=\frac{k+1}{k}$, поэтому $\frac{EK}{KC}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{BF}{FC}=\frac{k^2}{k+1}$. $S_{AKC}=$ $=\frac{KC}{EC}\cdot S_{AEC}=\frac{KC}{EC}\cdot\frac{EA}{BA}\cdot S_{ABC}=\frac{k+1}{k^2+k+1}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot S_{ABC}=$ $=\frac{k}{k^2+k+1}\cdot S_{ABC}$. Аналогично, $S_{BLA}=S_{CMB}=\frac{k}{k^2+k+1}\times$ $\times S_{ABC}$. Поэтому $\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}}=1-\frac{3k}{k^2+k+1}=\frac{(1-k)^2}{1+k+k^2}=\frac{(1-k)^3}{1-k^3}$.

4.12. Будем считать, что точки B_1, B_2, B_3 лежат на сторонах A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, а точки A_1, A_2, A_3 — на сторонах C_2C_3, C_3C_1, C_1C_2 соответственно.

Поскольку треугольники $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$ гомотетичны, прямые B_1C_1, B_2C_2 и B_3C_3 пересекаются в одной точке O.

$S_{A_3B_2OB_1}=S_{C_2B_1O}$ и $\frac{S_{C_2B_1O}}{S_{B_1OB_2}}=\frac{C_2O}{B_2O}=\frac{C_1O}{B_1O}=\frac{S_{C_1OC_2}}{S_{C_2B_1O}}$, поэтому $S^2_{A_3B_2OB_1}=S_{B_1OB_2}\cdot S_{C_1OC_2}=k^2S^2_{B_1OB_2}$, где k — коэффициент подобия треугольников B_1OB_2 и C_1OC_2, т. е. $S_{A_3B_2OB_1}=kS_{B_1OB_2}$. Аналогично, $S_{A_1B_2OB_3}=kS_{B_2OB_3}$ и $S_{A_2B_1OB_3}=kS_{B_1OB_3}$. Складывая эти равенства, получаем $S_{A_1A_2A_3}=kS_{B_1B_2B_3}=\sqrt{S_{B_1B_2B_3}S_{C_1C_2C_3}}$.

4.13. а) Опустим перпендикуляры AA_2 и CC_2 на прямую BP. Треугольники ABP и BCP имеют общую сторону BP, поэтому $S_{ABP}:S_{BCP}=AA_2:CC_2$. Из подобия треугольников AA_2B_1 и CC_2B_1 получаем $AA_2:CC_2=AB_1:B_1C$.

б) Согласно а) $\frac{S_{ABP}}{S_{BCP}}=\frac{AB_1}{B_1C}$, $\frac{S_{ACP}}{S_{ABP}}=\frac{CA_1}{A_1B}$ и $\frac{S_{BCP}}{S_{ACP}}=\frac{BC_1}{C_1A}$. Остается перемножить эти равенства.

4.14. Пусть длины сторон треугольника ABC равны a, b, c, причем $a\leqslant b\leqslant c$. Тогда $b=\frac{a+c}{2}$. С одной стороны, $S_{ABC}=$ $=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{3}{2}rb$, где r — радиус вписанной окружности. С другой стороны, $S_{ABC}=\frac{1}{2}h_b\cdot b$. Поэтому $r=\frac{1}{3}h_b$.

4.15. Из точки O внутри правильного треугольника ABC опустим перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно. Пусть a — длина стороны треугольника ABC, h — длина высоты. Ясно, что $S_{ABC}=S_{BCO}+S_{ACO}+S_{ABO}$. Отсюда получаем $\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a\cdot OA_1+\frac{1}{2}a\cdot OB_1+\frac{1}{2}a\cdot OC_1$, т. е. $h=OA_1+$ $+OB_1+OC_1$.

4.16. Опустим из точки O перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно. Ясно, что $AD=AM+OA_1$, $BE=BP+OB_1$, $CF=CK+OC_1$. Складывая эти равенства, получаем

$$AD+BE+CF=AM+BP+CK+ \\ +OA_1+OB_1+OC_1.$$

Пусть длина высоты треугольника ABC равна h. Тогда $AD+$ $+BE+CF=3h$ и, согласно предыдущей задаче, $OA_1+OB_1+OC_1=h$. Поэтому $AM+BP+CK=2h$.

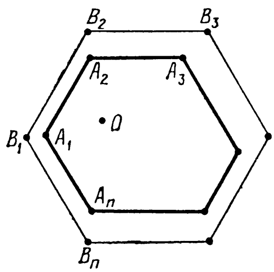


Рис. 51

4.17. Поскольку все углы многоугольника $A_1\ldots A_n$ равны, его можно поместить в некотором правильном многоугольнике $B_1\ldots B_n$ так, чтобы соответственные стороны этих двух многоугольников были параллельны (рис. 51).

Расстояние от точки O до прямой B_iB_{i+1} равно сумме расстояния от точки O до прямой A_iA_{i+1} и расстояния между прямыми A_iA_{i+1} и B_iB_{i+1}. Поскольку расстояние между этими прямыми от точки O не зависит, нам достаточно доказать, что сумма расстояний от O до сторон правильного многоугольника $B_1\ldots B_n$

не зависит от O. $S_{B_1\ldots B_n}=S_{B_1B_2O}+\ldots+S_{B_{n-1}B_nO}+S_{B_nB_1O}=$
$=\frac{1}{2}b(h_1+\ldots+h_{n-1}+h_n)$, где b — длина стороны правильного многоугольника $B_1\ldots B_n$, а h_i — расстояние от точки O до стороны B_iB_{i+1}. Из этого равенства видно, что сумма $h_1+\ldots+h_n$ постоянна.

4.18. Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — радиусы вписанных окружностей полученных треугольников, $P_1, \ldots, P_n$ — их периметры, а $S_1, \ldots, S_n$ — площади. Площадь и периметр исходного многоугольника обозначим через S и P соответственно.

Ясно, что $P_i < P$ (см. задачу 5.27). Поэтому

$$r_1+\ldots+r_n=2\frac{S_1}{P_1}+\ldots+2\frac{S_n}{P_n}>2\frac{S_1}{P}+\ldots+2\frac{S_n}{P}=2\frac{S}{P}=r.$$

4.19. $$\frac{A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot\ldots\cdot A_nB_n}{A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot\ldots\cdot A_nD_n}=\frac{A_1B_1}{A_2D_2}\cdot\frac{A_2B_2}{A_3D_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nB_n}{A_1D_1}=$$
$$=\frac{S_{A_1B_1O}}{S_{A_2D_2O}}\cdot\ldots\cdot\frac{S_{A_nB_nO}}{S_{A_1D_1O}}=\frac{S_{A_1B_1O}}{S_{A_1D_1O}}\cdot\ldots\cdot\frac{S_{A_nB_nO}}{S_{A_nD_nO}}.$$

$S_{A_1B_1O}=S_{A_1D_1O}$, поскольку сторона A_1O у этих треугольников общая, а высоты, опущенные из точек B_1 и D_1 на эту сторону, равны (точка O лежит на диагонали A_1C_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$). Аналогично, $\frac{S_{A_2B_2O}}{S_{A_2D_2O}}=\ldots=\frac{S_{A_nB_nO}}{S_{A_nD_nO}}=1$. Поэтому $\frac{A_1B_1\cdot\ldots\cdot A_nB_n}{A_1D_1\cdot\ldots\cdot A_nD_n}=1$.

4.20. Через точку E пересечения прямых OC и BP проведем прямые H_1P_1 и K_1M_1 параллельно прямым HP и KM. Точки

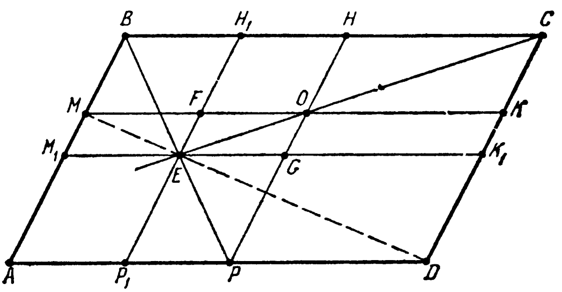


Рис. 52

пересечения прямых KM и H_1P_1, K_1M_1 и HP обозначим через F и G соответственно (рис. 52). Воспользуемся теперь результатом задачи 4.4.

Точка O лежит на диагонали CE параллелограмма CH_1EK_1, поэтому $S_{FOHH_1}=S_{KK_1GO}$, т. е. $S_{H_1HGE}=S_{KK_1EF}$. Точка E лежит на диагонали BP параллелограмма $APHB$, поэтому $S_{M_1BP_1A} = S_{H_1HGB} = S_{KK_1EF}$. Следовательно, точка E лежит на диагонали MD параллелограмма $ADKM$.

4.21. Пусть E и F — точки пересечения продолжений сторон данного четырехугольника. Обозначим вершины четырехугольника так, что E — точка пересечения продолжений сторон AB и CD за

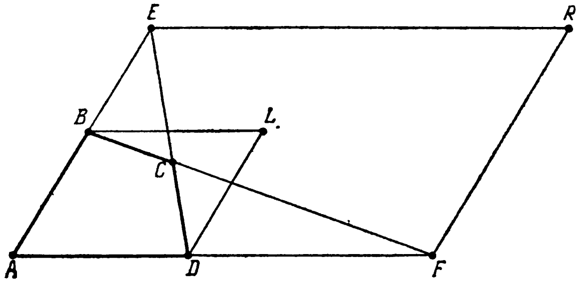


Рис. 53

точки B и C, F — точка пересечения лучей BC и AD. Достроим треугольникн AEF и ABD до параллелограммов $AERF$ и $ABLD$ (рнс. 53).

При гомотетии с центром A и коэффициентом 2 середина диагонали BD, середина диагонали AC и середина отрезка EF переходят в точки L, C и R соответственно. Поэтому нам достаточно доказать, что точки L, C и R лежат на одной прямой. Именно этот факт был доказан в предыдущей задаче.

4.22. а) Опустим из точек B и C перпендикуляры BK и CL на прямую OA. Пусть $a_1 = BK$, $a_2 = CL$. Ясно, что $a_1 + a_2 \leqslant a$. Поэтому $\frac{1}{2} aR_a \geqslant \frac{1}{2} a_1 R_a + \frac{1}{2} a_2 R_a = S_{ACO} + S_{ABO} = \frac{1}{2} bd_b + \frac{1}{2} cd_c$.

Заметим, что при доказательстве мы использовали только то, что точка O лежит внутри угла BAC, а не внутри треугольника ABC.

б) Применяя неравенство из а) к точке, симметричной точке O относительно биссектрисы угла A (это правомерно ввиду замечания в а)), получаем неравенство $aR_a \geqslant c \cdot d_b + b \cdot d_c$, т. е. $R_a \geqslant \frac{c}{a} d_b + \frac{b}{a} d_c$. Аналогично, $R_b \geqslant \frac{c}{b} d_a + \frac{a}{b} d_c$ и $R_c \geqslant \frac{a}{c} d_b + \frac{b}{c} d_a$. Складывая эти неравенства, получаем $R_a + R_b + R_c \geqslant \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) d_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$, поскольку $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.

4.23. а) Решим более общую задачу: будем считать, что стороны разделены на $2n+1$ равных частей. Обозначим последовательно точки деления $A_0=A$, A_1, ..., $A_{2n+1}=B$, $C_0=D$, C_1, ..., $C_{2n+1}=C$ (рис. 54). В треугольниках $C_0A_0A_1$, $C_1A_1A_2$, ..., $C_{2n}A_{2n}A_{2n+1}$ стороны A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{2n}A_{2n+1}$ равны; длины высот, опущенных на эти стороны, образуют арифметическую

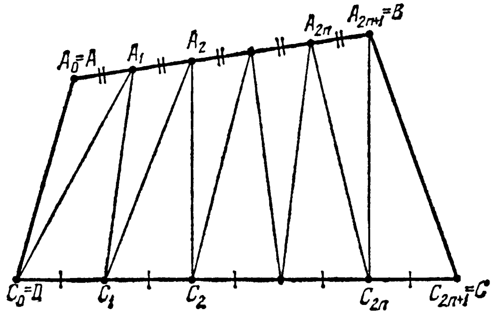


Рис. 54

прогрессию. Поэтому и площади этих треугольников образуют арифметическую прогрессию. Следовательно, $S_{C_nA_nA_{n+1}}=$ $=\frac{1}{2n+1}(S_{C_0A_0A_1}+\ldots+S_{C_{2n}A_{2n}A_{2n+1}})$. Аналогично, $S_{A_{n+1}C_nC_{n+1}}=$ $=\frac{1}{2n+1}(S_{A_1C_0C_1}+\ldots+S_{A_{2n+1}C_{2n}C_{2n+1}})$. Складывая эти равенства, получаем, что площадь среднего четырехугольника в $2n+1$ раз меньше площади всего четырехугольника.

б) Мы опять решим более общую задачу — докажем, что если стороны AB и CD разбиты на m, а BC и AD — на n равных частей (m и n нечетны), то площадь центрального четырехугольника в mn раз меньше площади четырехугольника $ABCD$.

Докажем сначала, что каждый из отрезков, соединяющих противоположные стороны четырехугольника, разбит другими отрезками на равные части. Для этого достаточно доказать, что если точки K, L, M, N, лежащие на сторонах AB, DC, AD, BC соответственно, таковы, что $\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DL}=\alpha\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AM}=\beta\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}=\beta\overrightarrow{BC}$, то точка пересечения P отрезков KL и MN делит их в тех же отношениях, т. е. $\overrightarrow{MP}=\alpha\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KP}=\beta\overrightarrow{KL}$. Возьмем на отрезках MN и KL точки R и S такие, что $\overrightarrow{MR}=\alpha\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KS}=\beta\overrightarrow{KL}$. Тогда $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MR}=\beta\overrightarrow{AD}+\alpha\overrightarrow{MN}=\beta\overrightarrow{AD}+\alpha(\overrightarrow{MA}+$ $+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})=\beta\overrightarrow{AD}-\alpha\beta\overrightarrow{AD}+\alpha\overrightarrow{AB}+\alpha\beta\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KS}=\alpha\overrightarrow{AB}+$

$+\beta\overrightarrow{KL}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL})=\alpha\overrightarrow{AB}-\alpha\beta\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD}+\alpha\beta\overrightarrow{DC}$. Так как $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}$, получаем $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KS}$. Следовательно, $R=S=P$.

Рассмотрим четырехугольники, на которые $ABCD$ разбит отрезками, соединяющими точки на сторонах AB и CD. Из решения, приведенного в а), видно, что площадь среднего из этих четырехугольников в m раз меньше площади $ABCD$, а из только что доказанного утверждения видно, что его стороны делятся отрезками, соединяющими точки на BC и AD, на n равных частей. Еще раз применяя к этому четырехугольнику утверждение а), получаем, что площадь заштрихованного среднего четырехугольника в mn раз меньше площади $ABCD$.

4.24. Расстояние от точки N до прямой AB равно полусумме расстояний от точек C и D до этой прямой. Поэтому $S_{ABN}=$ $=S_{BMC}+S_{AMD}$. Аналогично, $S_{CDM}=S_{BNC}+S_{AND}$. Складывая эти равенства, получаем (рис. 55): $(S_1+S_4+S_5)+(S_3+S_4+S_7)=$ $=(S_1+S_2)+(S_5+S_6)+(S_2+S_3)+$ $+(S_6+S_7)$, т. е. $S_4=S_2+S_6$.

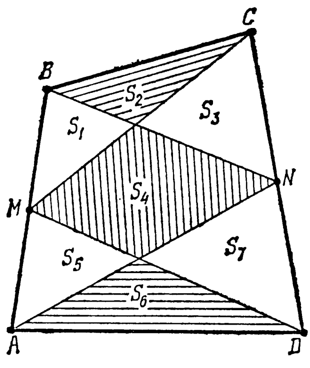


Рис. 55

4.25. Пусть P — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$.

Равенство $S_{ABP}=S_{CDP}$ эквивалентно равенству $S_{ABP}+S_{APD}=$ $=S_{CDP}+S_{APD}$, или $S_{ABD}=S_{ACD}$. В свою очередь, равенство площадей треугольников ABD и ACD эквивалентно тому, что высоты, опущенные из точек B и C на сторону AD, равны по длине, т. е. $BC \parallel AD$. Таким образом, треугольники, прилегающие к боковым сторонам трапеции, равновелики. Проведенные рассуждения показывают также, что если треугольники ABP и CDP равновелики, то $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

4.26. а) $S_{ADP}:S_{ABP}=DP:BP=S_{CDP}:S_{BCP}$, т. е.

$$S_{ADP}=\frac{S_{ABP}\cdot S_{CDP}}{S_{BCP}}.$$

б) Воспользуемся формулой $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$. Поскольку $\sin A=\sin(180°-A)$, площади треугольников, на которые диагонали разбивают четырехугольник, относятся, как произведения отрезков диагоналей, заключающих эти треугольники, т. е. как $(2\cdot 4):(2\cdot 5):(3\cdot 4):(3\cdot 5)$. Сумма этих произведений равна 45, поэтому площади треугольников равны $8/45$, $10/45=2/9$, $12/45=4/15$, $15/45=1/3$.

в) Согласно а) $S_{ADP}\cdot S_{CBP}=S_{ABP}\cdot S_{CDP}$. Поэтому $S_{ABP}\times \times S_{CBP}\cdot S_{CDP}\cdot S_{ADP}=(S_{ADP}\cdot S_{CBP})^2$.

4.27. Ясно, что $S_{ABP}=\frac{1}{2}AP\cdot BP\sin APB$, $S_{BCP}=\frac{1}{2}BP\times \times CP\sin BPC$, $S_{CDP}=\frac{1}{2}CP\cdot DP\sin CPD$ и $S_{ADP}=\frac{1}{2}AP\cdot DP\sin APD$. Поскольку $\sin APB=\sin BPC=\sin CPD=\sin APD$, равенство сумм площадей перепишется в виде

$$AP\cdot BP+CP\cdot DP=BP\cdot CP+AP\cdot DP,$$

т. е. $(AP-CP)(BP-DP)=0$.

4.28. Обозначим точку пересечения диагоналей через P. По условию $S^2_{APB}+S^2_{CPD}=S^2_{BPC}+S^2_{APD}$, а по задаче 4.26 а) $S_{APB}\cdot S_{CPD}=S_{BPC}\cdot S_{APD}$. Поэтому $S^2_{APB}\pm 2S_{APB}\cdot S_{CPD}+S^2_{CPD}=$ $=S^2_{BPC}\pm 2S_{BPC}\cdot S_{APD}+S^2_{APD}$. Следовательно, $S_{APB}+S_{CPD}=$ $=S_{BPC}+S_{APD}$ и либо $S_{APB}-S_{CPD}=S_{BPC}-S_{APD}$, либо $S_{APB}-S_{CPD}=S_{APD}-S_{BPC}$, т. е. либо $S_{APB}=S_{BPC}$, либо $S_{APB}=S_{APD}$. Пусть, например, $S_{APB}=S_{BPC}$. Высоты треугольников APB и BPC, опущенные из вершины B, совпадают, поэтому $AP=PC$. Аналогично, если $S_{APB}=S_{APD}$, то $BP=PD$.

4.29. Обозначим середины диагоналей AC и BD через E и F соответственно. Равенство площадей треугольников OAB и OBC эквивалентно тому, что точка O лежит на прямой BE. Аналогичные рассуждения показывают, что точка O является точкой пересечения прямых AF, BE, CF и DE.

Докажем, что либо прямые AF и CF, либо прямые BE и DE совпадают. Допустим, что прямые AF и CF не совпадают. Тогда F — их единственная общая точка, поэтому $F=O$. Прямые BE и DE проходят через точку $O=F$. Поскольку точка F лежит на прямой BD, прямые BE и DE совпадают с BD.

Можно считать, что прямые BE и DE совпадают, т. е. точки B, E и D лежат на одной прямой. Это означает, что диагональ BD проходит через середину E диагонали AC.

4.30. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом. Для определенности будем считать, что прямые AB и CD пересекаются в точке O. Найдем геометрическое место точек P, лежащих внутри четырехугольника $ABCD$ и обладающих тем свойством, что $S_{ABP}+S_{CDP}=S_{BCP}+S_{ADP}$, т. е. $S_{ABP}+S_{CDP}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. На стороне OA треугольника AOD отложим отрезок OK, равный отрезку AB, на стороне OD — отрезок OL, равный отрезку CD. Тогда $S_{ABP}=S_{KOP}$ и $S_{CDP}=S_{POL}$, поэтому $S_{OKPL}=S_{ABP}+S_{CDP}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Поскольку треугольник OKL фиксирован, площадь треугольника PKL постоянна и все точки P лежат на прямой, параллельной KL. В частности, точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, что противоречит условию.

4.31. Пусть P, M, K и H — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. $S_{APH}=\frac{1}{4}S_{ABD}$ и $S_{CMK}=\frac{1}{4}S_{CBD}$, поэтому $S_{APH}+S_{CMK}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Аналогично, $S_{BPM}+S_{DHK}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Следовательно, $S_{PMKH}=S_{ABCD}-(S_{APH}+S_{BPM}+S_{CMK}+S_{DKH})=$ $=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

4.32. Пусть E, F, G, H — середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, O — точка внутри $ABCD$. Обозначим точки, симметричные O относительно точек E, F, G, H, через E_1, F_1, G_1, H_1 соответственно. Поскольку EF — средняя линия треугольника E_1OF_1, $S_{E_1OF_1}=4S_{EOF}$. Аналогично, $S_{F_1OG_1}=4S_{FOG}$, $S_{G_1OH_1}=4S_{GOH}$ и $S_{H_1OE_1}=4S_{HOE}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1}=4S_{EFGH}$. Согласно задаче 4.31 $S_{ABCD}=2S_{EFGH}$. Поэтому $S_{E_1F_1G_1H_1}=$ $=2S_{ABCD}=2S$.

4.33. Пусть E, F, G, H — середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Поскольку диагонали AC и BD равны, то согласно задаче 1.2 четырехугольник $EFGH$ — ромб. Площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей. Согласно задаче 4.31 $S_{ABCD}=2S_{EFGH}=EG\cdot FH$.

4.34. Предположим для определенности, что $S_{ASB}\geqslant S_{CSD}$. Тогда $S_{ABD}\geqslant S_{ACD}$, поэтому расстояние от точки C до прямой AD не больше расстояния от точки B до этой прямой. Отрезки PN и MQ являются средними линиями треугольников ACD и ABD, поэтому, учитывая предыдущее замечание, получаем, что прямая PN расположена в полосе между прямыми MQ и AD. Аналогично, прямая QN расположена в полосе между прямыми MP и BC. Поэтому

$$S_{PMQN}=S_{ABCD}-(S_{APND}+S_{AMP})-(S_{BMQ}+S_{BCNQ})=$$
$$=S_{ABCD}-\left(\frac{3}{4}S_{ACD}+\frac{1}{4}S_{ABC}\right)-\left(\frac{1}{4}S_{ABD}+\frac{3}{4}S_{BCD}\right)=$$
$$=S_{ABCD}-\left(\frac{1}{2}S_{ACD}+\frac{1}{4}S_{ABCD}\right)-\left(\frac{1}{4}S_{ABCD}+\frac{1}{2}S_{BCD}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}S_{ASB}-\frac{1}{2}S_{CSD}.$$

4.35. Для определенности будем считать, что $S_{ABD}>S_{ACD}$ (в случае $S_{ABD}=S_{ACD}$ стороны BC и AD параллельны). Тогда точка B расположена дальше от прямой AD, чем точка C, поэтому точка H лежит на лучах BC и AD (рис. 56).

Пусть P и Q — середины сторон CD и AB, S — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. По предыдущей задаче $S_{PEQK}=\frac{1}{2}S_{ABS}-\frac{1}{2}S_{CDS}$, поэтому $S_{PEK}=\frac{1}{4}S_{ABS}-\frac{1}{4}S_{CDS}$.

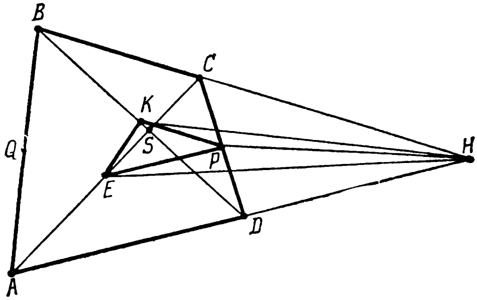


Рис. 56

Поскольку прямые AD и EP параллельны, а точка H лежит на прямой AD, $S_{HEP}=S_{DEP}=\frac{1}{4}S_{ACD}$. Аналогично, $S_{HKP}=$ $=\frac{1}{4}S_{BCD}$. Итак,

$$S_{EKH}=S_{EKP}+S_{HEP}+S_{HKP}=$$
$$=\frac{1}{4}S_{ABS}-\frac{1}{4}S_{CDS}+\frac{1}{4}S_{ACD}+\frac{1}{4}S_{BCD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

4.36. На сторонах AB, BC, CD и AD взяты точки K, L, M и N соответственно.

Первое решение. S_{KLMN} находим, вычитая из площади четырехугольника $ABCD$ сумму площадей треугольников AKN, BKL, CLM, DMN. Введем обозначения $\alpha=\angle BAD$, $a=AD$, $b=AB$. Тогда $S_{ABCD}=ab\sin\alpha$, $S_{AKN}=\frac{1}{2}AN\cdot AK\sin\alpha$, $S_{BLK}=\frac{1}{2}BL(b-AK)\sin\alpha$, $S_{CLM}=\frac{1}{2}(a-BL)(b-MD)\sin\alpha$, $S_{DNM}=\frac{1}{2}(a-AN)MD\sin\alpha$. Поэтому $S_{KLMN}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha\times$ $\times\left(1-\frac{(AN-BL)(AK-MD)}{ab}\right)$. Поскольку $S_{KLMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=$ $=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, то либо $AN=BL$, либо $AK=MD$. Если $AN=BL$, то $LN\parallel AB$; если $AK=MD$, то $KM\parallel AD$.

Второе решение. Предположим, что диагональ KM не параллельна стороне AD. Фиксируем точки K, M, N и будем двигать точку L по стороне BC. При этом сумма площадей треугольников BKL и CLM изменяется строго монотонно. Кроме того, если $LN \parallel AB$, то сумма площадей треугольников BKL и CLM именно такова, что выполняется равенство $S_{AKN}+S_{BKL}+$ $+S_{CLM}+S_{DMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, т. е. $S_{KLMN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

4.37. Пусть L_1 и N_1 — середины сторон BC и AD соответственно. Тогда KL_1MN_1 — параллелограмм и его площадь равна половине площади четырехугольника $ABCD$ (см. задачу 4.31). Поэтому нам достаточно доказать, что площади параллелограммов $KLMN$ и KL_1MN_1 равны. Если эти параллелограммы совпадают, то доказывать больше ничего не нужно, а если они не совпадают, то, так как середина отрезка KM является их центром симметрии, $LL_1 \parallel NN_1$ и $BC \parallel AD$. В этом случае средняя линия KM трапеции (или параллелограмма) $ABCD$ параллельна основаниям BC и AD, и поэтому высоты треугольников KLM и KL_1M, опущенные на сторону KM, равны, т. е. равны площади параллелограммов $KLMN$ и KL_1MN_1.

4.38. Пусть $MN=x$. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD через E. Ясно, что треугольники EBC, EMN и EAD подобны. Поэтому $S_{EBC}:S_{EMN}:S_{EAD}=a^2:x^2:b^2$. Поскольку $S_{EMN}-$ $-S_{EBC}=S_{MBCN}=S_{MADN}=S_{EAD}-S_{EMN}$, то $x^2-a^2=b^2-x^2$ т. е. $x^2=\frac{a^2+b^2}{2}$.

4.39. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Опустим из точек B и D перпендикуляры BB_1 и DD_1 на диагональ AC. Диагональ AC делит площадь четырехугольника пополам тогда и только тогда, когда $BB_1=DD_1$, т. е. $BO=DO$.

4.40. Обозначим площади частей фигуры, на которые ее делят прямые, так, как показано на рис. 57. Площадь всей фигуры обозначим через S.

Поскольку $S_3+(S_2+S_7)=\frac{1}{2}S=S_1+S_6+(S_2+S_7)$, то $S_3=$ $=S_1+S_6$. Складывая это равенство с равенством $\frac{1}{2}S=S_1+S_2+$ $+S_3+S_4$, получаем $\frac{1}{2}S=2S_1+S_2+S_4+S_6\geqslant 2S_1$, т. е. $S_1\leqslant\frac{1}{4}S$.

4.41. Обозначим проекцию прямой l через B, крайние точки проекции многоугольника — через A и C. Пусть C_1 — точка многоугольника, проецирующаяся в точку C; прямая l пересекает многоугольник в точках K и L, а K_1 и L_1 — точки прямых C_1K и C_1L, проецирующиеся в точку A (рис. 58).

Одна из частей, на которые прямая l делит многоугольник, содержится в трапеции K_1KLL_1, другая часть содержит треугольник C_1KL. Поэтому $S_{K_1KLL_1} \geqslant S_{C_1KL}$, т. е. $\frac{1}{2} AB \cdot (KL + K_1L_1) \geqslant \geqslant \frac{1}{2} BC \cdot KL$. Поскольку $K_1L_1 = KL \frac{AB+BC}{BC}$, имеем $AB\left(2+\frac{AB}{BC}\right) \geqslant BC$. Решая это квадратное неравенство, получаем

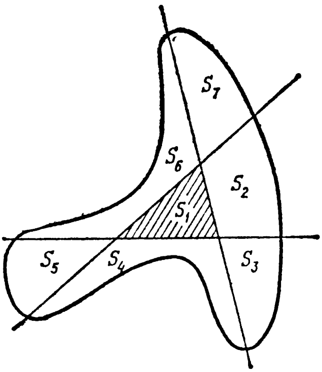


Рис. 57

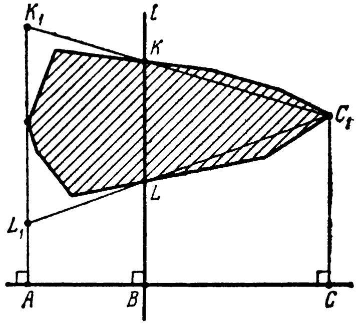


Рис. 58

$\frac{BC}{AB} \leqslant 1+\sqrt{2}$. Аналогично, $\frac{AB}{BC} \leqslant 1+\sqrt{2}$ (нужно провести те же рассуждения, поменяв местами A и C).

4.42. Обозначим площадь многоугольника через S. Пусть l — произвольная прямая. Введем систему координат, для которой прямая l является осью Ox. Пусть $S(a)$ — площадь той части многоугольника, которая лежит ниже прямой $y=a$. При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ $S(a)$ непрерывно меняется от 0 до S, поэтому $S(a)=\frac{1}{2} S$ для некоторого a, т. е. прямая $y=a$ делит площадь многоугольника пополам. Аналогично, существует прямая, перпендикулярная прямой l и делящая площадь многоугольника пополам. Эти две прямые разбивают многоугольник на части, площади которых равны S_1, S_2, S_3 и S_4 (рис. 59). Поскольку $S_1+S_2 = S_3+S_4$ и $S_1+S_4=S_2+S_3$, то $S_1=S_3=A$ и $S_2=S_4=B$. При повороте прямой l на 90° A заменится на B, а B — на A. Поскольку A и B изменяются при повороте l непрерывно, то для некоторого положения прямой $A=B$, т. е. площади всех четырех фигур равны.

4.43. а) Пусть прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через O, радиус вписанной окружности — через r. Тогда

$S_{ABQOP}=\frac{1}{2}r(AP+AB+BQ)$ и $S_{OQCP}=\frac{1}{2}r(QC+CP)$. Поскольку прямая PQ делит периметр пополам, $AP+AB+BQ=$ $=QC+CP$, поэтому $S_{ABQOP}=S_{OQCP}$. Кроме того, $S_{ABQP}=$ $=S_{QCP}$ по условию. Поэтому $S_{OQP}=0$, т. е. прямая QP проходит через точку O.

б) Доказательство проводится совершенно аналогично.

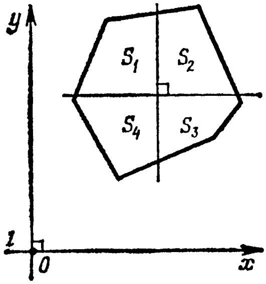


Рис. 59

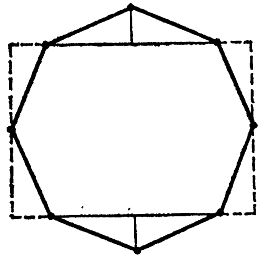


Рис. 60

4.44. Рассматривая образ окружности S_2 при симметрии относительно центра окружности S_1 и учитывая равенство площадей, можно доказать, что диаметр AA_1 окружности S_1 пересекает S_2 в некоторой точке K, отличной от A, причем $AK > A_1K$. Окружность радиуса KA_1 с центром K касается окружности S_1 в точке A_1, поэтому $BK > A_1K$, т. е. $BK+KA > A_1A$. Ясно также, что сумма длин отрезков BK и KA меньше длины дуги S_2, соединяющей точки A и B.

4.45. а) Пусть $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $S_{ABCD}=S$. Ясно, что $S=S_{ABC}+S_{ADC}=\frac{1}{2}(ab\sin B+cd\sin D)$ и a^2+b^2- $-2ab\cos B=AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D$. Поэтому

$$16S^2=4a^2b^2-4a^2b^2\cos^2 B+8abcd\sin B\sin D+4c^2d^2-4c^2d^2\cos^2 D,$$
$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+8abcd\cos B\cos D=4a^2b^2\cos^2 B+4c^2d^2\cos^2 D.$$

Подставляя второе равенство в первое, получаем

$$16S^2=4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-$$
$$-8abcd(1+\cos B\cos D-\sin B\sin D).$$

Ясно, что $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$ и $1+\cos B\cos D-\sin B\sin D=2\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)$.

б) Если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle B+\angle D=$ $=180°$, и поэтому $\cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)=0$.

в) Если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то $a+c=b+d$, поэтому $p=a+c=b+d$ и $p-a=c$, $p-b=d$, $p-c=a$, $p-d=b$.

4.46. Отрежем от правильного восьмиугольника треугольники и переставим их так, как показано на рис. 60. В результате получим прямоугольник, стороны которого равны наибольшей и наименьшей диагоналям восьмиугольника.

4.47. а) Отрежем от параллелограмма две части (рис. 61, *а*) и переставим их так, как показано на рис. 61, *б*. При этом получается фигура, состоящая из $mn+1$ маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна $\frac{1}{mn+1}$.

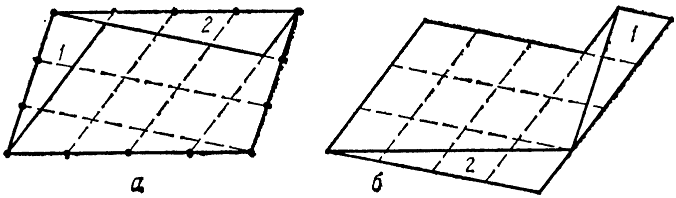


Рис. 61

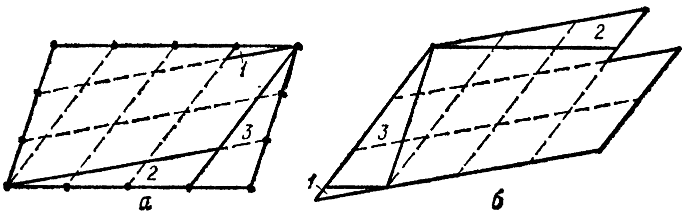


Рис. 62

б) Отрежем от параллелограмма три части (рис. 62, *а*) и переставим их так, как показано на рис. 62, *б*. При этом получается фигура, состоящая из $mn-1$ маленьких параллелограммов. Поэтому площадь маленького параллелограмма равна $\frac{1}{mn-1}$.

Глава 5

ВЕКТОРЫ

Основные сведения

1. Приведем список обозначений, которыми будем пользоваться:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{a}$ — векторы;

б) AB и $|\boldsymbol{a}|$ — их длины;

в) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a})$ — скалярные произведения векторов;

г) (x, y) — вектор с координатами x, y;

д) нулевой вектор будем обозначать $\overrightarrow{0}$ или $\mathbf{0}$.

2. *Ориентированным углом между ненулевыми векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ (обозначение: $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$) будем называть угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\boldsymbol{a}$, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\boldsymbol{b}$. Углы, отличающиеся на 360°, считаются равными. Легко проверить следующие свойства ориентированных углов между векторами:

а) $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;

б) $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$;

в) $\angle(-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 180^\circ$.

3. *Скалярным произведением векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ называется число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$ (если один из этих векторов нулевой, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$). Легко проверить следующие свойства скалярного произведения:

а) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;

б) $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqslant |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$;

в) $(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$;

г) если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

4. Многие векторные неравенства доказываются с помощью следующего факта.

Пусть имеется два набора векторов, причем известно, что сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Тогда сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора (см. задачу 5.26). Тем самым задача на плоскости сводится к задаче на прямой, которая обычно бывает значительно проще.

Вводные задачи

1. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

2. Докажите, что $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$.

3. Докажите, что если векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ перпендикулярны, то $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$.

4. Пусть $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ и $OA = OB = OC$. Докажите, что ABC — правильный треугольник.

5. Пусть M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

§ 1. Векторы сторон многоугольников

5.1. $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2\ldots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

5.2. Дано n попарно не сонаправленных векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ $(n \geqslant 3)$, сумма которых равна нулю. Докажите, что существует выпуклый n-угольник, для которого набор векторов сторон совпадает с набором $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Сколько имеется различных таких многоугольников?

5.3. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, K — середина CD. Докажите, что середины отрезков AK, CE, BK и DE являются вершинами параллелограмма.

5.4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона BC параллельна диагонали AD, $CD \| BE$, $DE \| AC$ и $AE \| BD$. Докажите, что $AB \| CE$.

§ 2. Скалярное произведение. Соотношения

5.5. Диагонали некоторого четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что диагонали любого другого четырехугольника, соответствующие стороны которого имеют те же длины, перпендикулярны.

5.6. Правильный многоугольник $A_1 \ldots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O; X — произвольная точка. Докажите, что $A_1X^2 + \ldots + A_nX^2 = n(R^2 + d^2)$, где $d = OX$.

5.7. Точка M лежит на окружности, описанной около правильного треугольника ABC. Докажите, что сумма $MA^4+MB^4+MC^4$ не зависит от положения точки M.

5.8. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

5.9. а) Пусть O — произвольная точка внутри правильного треугольника ABC, d_a, d_b и d_c — расстояния от точки O до сторон BC, AC и AB соответственно. Докажите, что $d_a\overrightarrow{OA}+d_b\overrightarrow{OB}+d_c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

б) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

в) Пусть O — произвольная точка внутри треугольника ABC. Докажите, что

$$S_{BOC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{AOC}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{AOB}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

5.10. Докажите, что для точек P, лежащих на вписанной в треугольник ABC окружности, сумма $aPA^2+bPB^2+cPC^2$ постоянна.

5.11. В выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от вершины до сторон одна и та же для всех вершин. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом.

§ 3. Скалярное произведение. Неравенства

5.12. Докажите, что из пяти векторов всегда можно выбрать два так, чтобы длина их суммы не превосходила длину суммы оставшихся трех векторов.

5.13. 10 векторов таковы, что длина суммы любых 9 из них меньше длины суммы всех 10 векторов. Докажите, что существует ось, проекция на которую каждого из 10 векторов положительна.

5.14. Ученику нужно скопировать выпуклый многоугольник, помещающийся в круге радиуса 1. Сначала ученик отложил первую сторону, из ее конца — вторую, из конца второй — третью и т. д. Закончив построение, он обнаружил, что многоугольник не замкнулся, а первая и последняя нарисованные им вершины удалены на расстояние d одна от другой. Известно, что углы ученик откладывал точно, а относительная погрешность при откладывании длины каждой стороны не превосходила p. Докажите, что $d\leqslant 4p$.

§ 4. Скалярное произведение. Разные задачи

5.15. Найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного треугольника была бы наименьшей.

5.16. Точки A, B, C и D таковы, что для любой точки M скалярные произведения $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ и $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})$ не равны друг другу. Докажите, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$. Верно ли обратное утверждение?

5.17. Дано 8 вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

5.18. Докажите, что в выпуклом k-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.

§ 5. Суммы векторов

5.19. O—центр правильного многоугольника $A_1\dots A_n$, X—произвольная точка плоскости.

а) Докажите, что $\overrightarrow{OA_1}+\dots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

б) Докажите, что $\overrightarrow{XA_1}+\dots+\overrightarrow{XA_n}=n\cdot\overrightarrow{XO}$.

5.20. Точка A находится внутри правильного 1985-угольника, а точка B—вне его. Обозначим через $\boldsymbol{a}$ вектор, равный сумме векторов, идущих из A в вершины 1985-угольника, а через $\boldsymbol{b}$—аналогичный вектор для B. Может ли оказаться, что $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$?

5.21. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

5.22. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O.

а) Докажите, что если $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, то AA_1, BB_1, CC_1—медианы треугольника.

б) Докажите, что если $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\vec{0}$, то AA_1, BB_1, CC_1—медианы треугольника.

в) Докажите, что если $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, то AA_1, BB_1, CC_1—медианы треугольника.

§ 6. Неравенства

5.23. На окружности радиуса 1 с центром O дано $2n+1$ точек $P_1, \ldots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $|\overrightarrow{OP}_1+\ldots+\overrightarrow{OP}_{2n+1}|\geqslant 1$.

5.24. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — векторы, длины которых не превосходят 1. Докажите, что в сумме $\boldsymbol{c}=\pm\boldsymbol{a}_1\pm\pm\boldsymbol{a}_2\pm\ldots\pm\boldsymbol{a}_n$ можно выбрать знаки таким образом, чтобы $|\boldsymbol{c}|\leqslant\sqrt{2}$.

5.25. Периметр пятиугольника равен 1. Будем последовательно строить пятиугольники с вершинами в серединах сторон предыдущих пятиугольников. Докажите, что сумма периметров всех этих пятиугольников не превосходит 8.

§ 7. Метод усреднения

5.26. Имеется два набора векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, причем сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора.

5.27. Докажите, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего многоугольника не превосходит периметра внешнего.

5.28. Сумма длин нескольких векторов на плоскости равна L. Докажите, что из этих векторов можно выбрать некоторое число векторов (может быть, только один) так, что длина их суммы будет не меньше L/π.

5.29. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

5.30. На плоскости даны четыре вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, сумма которых равна нулю. Докажите, что $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|$.

5.31. Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ выбрана точка O так, что $\overrightarrow{OA}_1+\ldots+\overrightarrow{OA}_n=\vec{0}$. Докажите, что периметр многоугольника не меньше $4d/n$, где $d=OA_1+OA_2+\ldots+OA_n$.

5.32. Длина проекции замкнутой выпуклой кривой на любую прямую равна 1. Докажите, что ее длина равна π.

§ 8. Векторное произведение

Векторное произведение определяется для векторов в трехмерном пространстве. *Векторным произведением двух векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, длина которого равна площади параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а направлен он перпендикулярно к $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем так, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют правую тройку, т. е. имеют такую же ориентацию, как большой ($\boldsymbol{a}$), указательный ($\boldsymbol{b}$) и средний ($\boldsymbol{c}$) пальцы правой руки.

Мы будем рассматривать векторы, лежащие в одной плоскости П, поэтому несколько видоизменим определение. Поскольку $\boldsymbol{c} \perp$ П, а П фиксирована, то вектор $\boldsymbol{c}$ параллелен фиксированной прямой, т. е. его можно считать числом. *Векторным произведением векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ будем называть число $c = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Обозначение: $c = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Число c равно площади параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, с учетом знака.

5.33. Докажите, что

а) $[\lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}] = \lambda\mu[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$;

б) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$.

5.34. Пусть $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$. Докажите, что $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = x_1y_2 - x_2y_1$.

5.35. Три бегуна A, B, C бегут по параллельным дорожкам с постоянными скоростями. В начальный момент площадь треугольника ABC равна 2, через 5 с равна 3. Чему может быть равна S_{ABC} еще через 5 с?

5.36. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

5.37. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ площади треугольников ABC, BCD, CDE, DEA, EAB равны a, b, c, d, e соответственно. Обозначим площадь пятиугольника через S. Докажите, что

$$S^2 - S(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ea) = 0$$

(теорема Мёбиуса).

Задачи для самостоятельного решения

5.38. Докажите, что

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2\cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

5.39. MN — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, P — середина MN, O — произвольная точка. Докажите, что $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OP}$.

5.40. Точки A, B, C движутся равномерно с одинаковыми угловыми скоростями по трем окружностям в одну и ту же сторону. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC при этом движется также по окружности.

5.41. A, B, C, D, E — произвольные точки на плоскости. Существует ли такая точка O, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$? Найдите все такие точки.

5.42. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, P и Q — середины его диагоналей. Докажите, что $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2$.

5.43. Дан треугольник ABC. На его сторонах AC и AB берутся точки H и K соответственно так, что $AH=\frac{1}{p+1}AC$, $AK=\frac{1}{p}AB$. Докажите, что при любом p прямая KH проходит через одну и ту же точку.

5.44. На плоскости даны пять точек A, B, C, D, E. Середины отрезков AB и CD, BC и DE соединены, середины получившихся отрезков — тоже. Докажите, что последний отрезок параллелен отрезку AE и его длина равна $\frac{1}{4}AE$.

Решения

5.1. Ясно, что $\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3})=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{M_3M_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_3A_5}$ и $\overrightarrow{M_5M_6}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_5A_1}$. Поэтому $\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_3M_4}+\overrightarrow{M_5M_6}=\overrightarrow{0}$.

5.2. Рассмотрим замкнутую ломаную $A_1A_2\ldots A_n$, и пусть $\boldsymbol{b}_1=\overrightarrow{A_1A_2}$, $\boldsymbol{b}_2=\overrightarrow{A_2A_3}$, $\ldots$, $\boldsymbol{b}_n=\overrightarrow{A_nA_1}$ — векторы последовательных ее звеньев. Отложим все эти векторы от одной точки.

Покажем, что ломаная $A_1\ldots A_n$ является выпуклым многоугольником тогда и только тогда, когда поворот от вектора $\boldsymbol{b}_i$ к вектору $\boldsymbol{b}_{i+1}$ происходит всегда в одну и ту же сторону и внутри угла, образованного векторами $\boldsymbol{b}_i$ и $\boldsymbol{b}_{i+1}$, не содержится других векторов $\boldsymbol{b}_j$.

Предположим, что поворот от вектора $\boldsymbol{b}_i$ к вектору $\boldsymbol{b}_{i+1}$ всегда происходит в одну и ту же сторону и между векторами $\boldsymbol{b}_i$ и $\boldsymbol{b}_{i+1}$ нет других векторов $\boldsymbol{b}_j$. Для определенности будем считать, что этот поворот происходит против часовой стрелки. Существует такой номер k, что векторы $\boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ лежат по одну сторону от прямой, проведенной через вектор $\boldsymbol{b}_1$, а векторы $\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ —

по другую. Введем систему координат так, чтобы ось Ox была направлена по вектору $\boldsymbol{b}_1$. Проекции точек $A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{k+1}$ (т. е. проекции концов суммы векторов $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\ldots+\boldsymbol{b}_i$) на ось Oy монотонно возрастают, поскольку проекции векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ на ось Oy неотрицательны. Аналогично, проекции точек $A_{k+2}, \ldots$ $\ldots, A_n, A_1$ на ось Oy монотонно убывают. Поскольку есть ровно два интервала монотонности, то все точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ расположены по одну сторону от прямой A_1A_2, т. е. ломаная $A_1 \ldots A_n$ расположена по одну сторону от любого из своих звеньев и, значит, является выпуклым многоугольником.

В обратную сторону доказательство очевидно.

Для решения задачи нам нужно отложить векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ от одной точки и занумеровать их либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки. Мы получаем два выпуклых многоугольника, один из которых центрально симметричен другому.

5.3. Обозначим середины отрезков AK, CE, BK и DE через Y, Y_1, X_1 и X соответственно. $\overrightarrow{EX}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})$ и $\overrightarrow{EY}=\overrightarrow{EA}+$ $+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK})$, поэтому $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{EY}-\overrightarrow{EX}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DK})=$ $=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})$. Аналогично, $\overrightarrow{EY_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})$ и $\overrightarrow{EX_1}=\overrightarrow{EB}+$ $+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK})$, поэтому

$$\overrightarrow{X_1Y_1}=\overrightarrow{EY_1}-\overrightarrow{EX_1}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CK})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}).$$

Поскольку $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X_1Y_1}$, XYY_1X_1 — параллелограмм.

5.4. Обозначим точки пересечения AD и BE, AC и BE через F и G соответственно. Стороны треугольников AFE и BCD соответственно параллельны, поэтому эти треугольники подобны и $\frac{AF}{FE}=\frac{BC}{CD}$. Следовательно, $\frac{AF+BC}{EF+CD}=\frac{BC}{CD}$. Учитывая, что $BC=$ $=FD$ и $CD=FB$, получаем $\frac{BC}{AD}=\frac{CD}{BE}$. Аналогично, $\frac{AE}{BD}=\frac{DE}{AC}$. Из подобия треугольников BED и EGA получаем $\frac{EG}{BE}=\frac{AE}{DB}$, а так как $EG=CD$, то $\frac{CD}{BE}=\frac{AE}{BD}$.

Из полученных равенств имеем $\frac{BC}{AD}=\frac{CD}{BE}=\frac{AE}{BD}=\frac{DE}{AC}=\lambda$. Ясно, что $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}+$ $+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{EA}=\lambda\overrightarrow{DB}$. Следовательно, $\vec{0}=\lambda(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{AB}=-\lambda\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{EC}$. Поэтому $AB \parallel EC$.

5.5. Пусть $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$, $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{DA}$. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$, т. е. $\boldsymbol{b}^2+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})=0$. Ясно, что $-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, поэтому $|\boldsymbol{d}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+$ $+2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$. Перпендикулярность диагоналей эквивалентна равенству $|\boldsymbol{b}|^2+\frac{1}{2}(|\boldsymbol{d}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{c}|^2)=0$ или $|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{d}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$. Это — условие только на длины сторон четырехугольника.

5.6. Пусть O — центр правильного n-угольника $A_1 \ldots A_n$. Тогда $\overrightarrow{A_1O}+\ldots+\overrightarrow{A_nO}=\vec{0}$, поскольку вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{A_1O}+\ldots+\overrightarrow{A_nO}$ переходит в себя при повороте на угол $2\pi/n$. $A_iX^2=$ $=(\overrightarrow{A_iO}+\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{A_iO}+\overrightarrow{OX})=A_iO^2+OX^2+2(\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX})=R^2+d^2+$ $+2(\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX})$. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} A_iX^2=nR^2+nd^2+2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX}\right)=$ $=nR^2+nd^2$, поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iO}=\vec{0}$.

5.7. $MA^2=MO^2+OA^2+2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA})=2[R^2+(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA})]$. Поэтому $MA^4+MB^4+MC^4=12R^4+8R^2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+$ $+4(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA})^2+4(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB})^2+4(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OC})^2$. Ясно, что $\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Рассмотрим точки A_1, B_1, C_1, являющиеся проекциями точки M на прямые OA, OB, OC соответственно. Тогда $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OA})=$ $=\pm MO\cdot OA_1=\pm R\cdot OA_1$. Согласно задаче 2.5 точки A_1, B_1, C_1 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность с диаметром MO. Поэтому, согласно предыдущей задаче, $OA_1^2+OB_1^2+OC_1^2=\frac{3}{4}R^2+\frac{3}{4}R^2=\frac{3}{2}R^2$, значит, MA^4+ $+MB^4+MC^4=12R^4+6R^4=18R^4$.

5.8. Докажем, что $AH \perp BC$. $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, поэтому $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC})=OC^2-OB^2=0$, так как O — центр описанной окружности. Аналогично доказывается, что $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$.

З а м е ч а н и е. Поскольку существование точки H, заданной равенством $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, очевидно, приведенное решение можно рассматривать как одно из доказательств теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

5.9. Эта задача является довольно типичным примером того, как обобщение задачи делает ее решение более простым. Задачи а) и б) являются частными случаями задачи в), но решить взятую отдельно задачу а) или б) труднее, чем задачу в).

Мы приведем сразу решение задачи в). Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$; $\alpha=\angle BOC$, $\beta=\angle AOC$, $\gamma=\angle AOB$; $a=|\boldsymbol{a}|$, $b=|\boldsymbol{b}|$, $c=|\boldsymbol{c}|$.

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{x}=2(S_{BOC}\overrightarrow{OA}+S_{AOC}\overrightarrow{OB}+S_{AOB}\overrightarrow{OC})=$ $=bc\sin\alpha\cdot\boldsymbol{a}+ac\sin\beta\cdot\boldsymbol{b}+ab\sin\gamma\cdot\boldsymbol{c}$. Чтобы проверить, что $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, нам достаточно доказать, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})=0$. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})=$ $=a^2bc(\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)=a^2bc(\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma))=0$, так как $\alpha+\beta+\gamma=360°$. Аналогично доказывается, что $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})=0$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})=0$.

5.10. Пусть O — центр вписанной окружности. Тогда $PA^2=$ $=PO^2+2(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{OA})+OA^2$. Поскольку величины PO и OA постоянны, нам достаточно проверить, что постоянно число

$$2a(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{OA})+2b(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{OB})+2c(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{OC})=$$
$$=(2\overrightarrow{PO}, a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}).$$

В задаче 5.9 б) было доказано, что $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

5.11. Пусть l — произвольная прямая, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный прямой l. Если точки A и B лежат в той же полуплоскости, заданной прямой l, что и вектор $\boldsymbol{n}$, то $\rho(B, l)-\rho(A, l)=(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{n})$, где $\rho(X, l)$ — расстояние от точки X до прямой l.

Пусть $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, $\boldsymbol{n}_4$ — единичные векторы, перпендикулярные последовательным сторонам четырехугольника $ABCD$ и направленные внутрь. Обозначим сумму расстояний от точки X до сторон четырехугольника $ABCD$ через $\Sigma(X)$. Тогда $0=\Sigma(B)-\Sigma(A)=$ $=(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4)$. Аналогично, $(\overrightarrow{BC}, \boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4)=0$. Поскольку точки A, B, C не лежат на одной прямой, $\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2+$ $+\boldsymbol{n}_3+\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{0}$. Поэтому $\boldsymbol{n}_1^2+\boldsymbol{n}_2^2+2(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)=\boldsymbol{n}_3^2+\boldsymbol{n}_4^2+2(\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4)$, т. е. $\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)=\angle(\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4)$, поскольку $|\boldsymbol{n}_i|=1$. Аналогично, $\angle(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)=\angle(\boldsymbol{n}_4, \boldsymbol{n}_1)$. Но $\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)+\angle(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)+\angle(\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4)+$ $+\angle(\boldsymbol{n}_4, \boldsymbol{n}_1)=360°$, поэтому $\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)+\angle(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)=\angle(\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4)+$ $+\angle(\boldsymbol{n}_4, \boldsymbol{n}_1)=180°$. Следовательно, $\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_3)=\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)+$ $+\angle(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)=180°$. Аналогично, $\angle(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_4)=180°$, т. е. противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ параллельны.

5.12. Рассмотрим пять векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ и предположим, что длина суммы любых двух из них больше длины суммы трех оставшихся. Поскольку

$$|a_1+a_2|>|a_3+a_4+a_5|,$$

$$|a_1|^2+2(a_1, a_2)+|a_2|^2>$$
$$>|a_3|^2+|a_4|^2+|a_5|^2+2(a_3, a_4)+2(a_4, a_5)+2(a_3, a_5).$$

Складывая такие неравенства для всех десяти пар векторов, получаем $4(|a_1|^2+\ldots)+2((a_1, a_2)+\ldots)>6(|a_1|^2+\ldots)+$ $+6((a_1, a_2)+\ldots)$, т. е. $|a_1+a_2+a_3+a_4+a_5|^2<0$. Мы пришли к противоречию.

5.13. Обозначим данные векторы через $e_1, \ldots, e_{10}$. Пусть $\overrightarrow{AB}=e_1+\ldots+e_{10}$. Докажем, что луч AB задает искомую ось. Ясно, что $|\overrightarrow{AB}-e_i|^2=AB^2-2(\overrightarrow{AB}, e_i)+|e_i|^2$, т. е. $(\overrightarrow{AB}, e_i)=$ $=\frac{1}{2}(AB^2+|e_i|^2-|\overrightarrow{AB}-e_i|^2)$. По условию $AB>|\overrightarrow{AB}-e_i|$, поэтому $(\overrightarrow{AB}, e_i)>0$, т. е. проекция вектора e_i на луч AB положительна.

5.14. Обозначим векторы последовательных сторон исходного многоугольника через $e_1, \ldots, e_n$, а векторы сторон «копии» — через $f_1, \ldots, f_n$. Тогда $f_i=(1+p_i)e_i$, где $|p_i|\leqslant p$. Пусть

$$f=\sum_{i=1}^{n} f_i=\sum_{i=1}^{n}(1+p_i)e_i=\sum_{i=1}^{n} p_ie_i.$$ Ясно, что $d=|f|$.

Разобьем векторы $e_1, \ldots, e_n$ на две группы: первая группа состоит из векторов, имеющих положительную проекцию на вектор f, вторая группа состоит из векторов, имеющих неположительную проекцию на вектор f. Поскольку многоугольник выпуклый, можно считать, что первая группа состоит из векторов $e_1, \ldots, e_k$, а вторая группа состоит из векторов $e_{k+1}, \ldots, e_n$. $d^2=(f, f)=(f, p_1e_1+\ldots+p_ke_k)+(f, p_{k+1}e_{k+1}+\ldots+p_ne_n)\leqslant$ $\leqslant|p(f, e_1+\ldots+e_k)|+|p(f, e_{k+1}+\ldots+e_n)|=|2p(f, e_1+\ldots$ $\ldots+e_k)|$. Поскольку $e_1+\ldots+e_k$ является диагональю многоугольника, лежащего внутри круга радиуса 1, $|e_1+\ldots+e_k|\leqslant 2$. Таким образом, $d^2\leqslant 2p\cdot 2|f|$, т. е. $d\leqslant 4p$.

5.15. Обозначим точку пересечения медиан треугольника через O. Тогда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (см. задачу 5.21).

Пусть X — любая другая точка. Тогда

$$XA^2+XB^2+XC^2=|\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OC}|^2=$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2+3XO^2+2(\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=$$
$$=OA^2+OB^2+OC^2+3XO^2\geqslant OA^2+OB^2+OC^2.$$

Поэтому O — искомая точка.

5.16. Рассмотрим две точки M_1 и M_2. Тогда $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) = (\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2B}) = M_1M_2^2 + (\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2B}) + (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2A}+\overrightarrow{M_2B})$. Аналогично, $(\overrightarrow{M_1C}, \overrightarrow{M_1D}) = M_1M_2^2 + (\overrightarrow{M_2C}, \overrightarrow{M_2D}) + (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2C}+\overrightarrow{M_2D})$. Поэтому $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) - (\overrightarrow{M_1C}, \overrightarrow{M_1D}) = (\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2B}) - (\overrightarrow{M_2C}, \overrightarrow{M_2D}) + (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC})$. Если $\overrightarrow{DB} \neq \overrightarrow{AC}$, то $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC})$ принимает все действительные значения, когда M_1 пробегает всю плоскость. Поэтому в этом случае $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) - (\overrightarrow{M_1C}, \overrightarrow{M_1D}) = 0$ для некоторой точки M_1. Если же $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \neq (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})$ для всех точек M, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

Обратное утверждение неверно. Если $ACBD$ — прямоугольник, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, но $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0 = (\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AB})$.

5.17. Рассмотрим на плоскости четыре вектора (a, b), (c, d), (e, f), (g, h). Один из углов между этими векторами не превосходит $360°/4 = 90°$. Если же угол между векторами не превосходит $90°$, то их скалярное произведение неотрицательно.

Данные шесть чисел являются скалярными произведениями всех пар наших четырех векторов, поэтому одно из них неотрицательно.

5.18. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k$ — единичные внешние нормали к сторонам, а $M_1, \ldots, M_k$ — произвольные точки на этих сторонах. Для любой точки X, лежащей внутри многоугольника, расстояние до i-й стороны равно $(\overrightarrow{XM_i}, \boldsymbol{n}_i)$. Поэтому суммы расстояний от внутренних точек A и B до сторон многоугольника равны тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{AM_i}, \boldsymbol{n}_i) = \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{BM_i}, \boldsymbol{n}_i) = \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{BA}, \boldsymbol{n}_i) + \sum_{i=1}^{k} (\overrightarrow{AM_i}, \boldsymbol{n}_i)$, т. е. $\left(\overrightarrow{BA}, \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{n}_i\right) = 0$. Следовательно, сумма расстояний от любой внутренней точки многоугольника до сторон постоянна тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{n}_i = 0$.

5.19. а) Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$. При повороте вокруг точки O на $360°/n$ точка A_i переходит в точку A_{i+1} $(A_{n+1} = A_1)$. Поэтому при этом повороте вектор $\boldsymbol{a}$ переходит в себя, т. е. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

б) Ясно, что $\overrightarrow{XA_1} + \ldots + \overrightarrow{XA_n} = (\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_1}) + \ldots + (\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_n}) = n\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$. В а) было доказано, что $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

5.20. Согласно предыдущей задаче $a=1985\cdot\overrightarrow{AO}$, $b=1985\cdot\overrightarrow{BO}$, где O — центр многоугольника. Ясно, что AO может быть больше BO, например, если точка A расположена очень близко к вершине многоугольника, а точка B — очень близко к середине стороны.

5.21. $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ и $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$. Складывая эти равенства, получаем $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. Заметим также, что если O — точка пересечения медиан, то $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Поэтому $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=\vec{0}$.

5.22. а) Предположим, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Тогда сумма проекций этих векторов вдоль прямой AO на прямую BC равна $\vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C}=\vec{0}$. Поэтому A_1 — середина BC. Аналогично, B_1 и C_1 — середины AC и AB.

б) Предположим, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\vec{0}$. Тогда сумма проекций этих векторов на прямую, перпендикулярную AO, равна $\vec{0}$. Поэтому высоты треугольников AOC_1 и AOB_1, опущенные на сторону AO, равны, т. е. $S_{AOC_1}=S_{AOB_1}=S_1$. Аналогично, $S_{BOC_1}=S_{BOA_1}=S_2$ и $S_{COA_1}=S_{COB_1}=S_3$. Ясно, что

$$\frac{S_1+S_2}{S_1+S_3}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{S_{A_1OB}}{S_{A_1OC}}=\frac{S_2}{S_3}.$$

Поэтому $S_2=S_3$. Аналогично, $S_1=S_2=S_3$. Следовательно, $BA_1:CA_1=S_2:S_3=1$, т. е. A_1 — середина BC. Аналогично, B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно.

в) Предположим, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. Тогда $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})=\vec{0}$. Пусть $\frac{AB_1}{AC}=p$, $\frac{BC_1}{BA}=q$, $\frac{CA_1}{BC}=r$. Ясно, что $\vec{0}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CA_1}=p\overrightarrow{AC}+q\overrightarrow{BA}+r\overrightarrow{CB}$ и $p(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})=\vec{0}$. Поэтому $p\overrightarrow{BA}+p\overrightarrow{CB}=q\overrightarrow{BA}+r\overrightarrow{CB}$. Следовательно, $p=q=r$. Остается воспользоваться задачей 4.13.

5.23. Докажем это утверждение по индукции. Для $n=0$ утверждение, очевидно, верно. Допустим, что утверждение доказано для $2n+1$ векторов. Рассмотрим в системе из $2n+3$ векторов два крайних вектора (т. е. два вектора, угол между которыми максимален). Для определенности будем считать, что это — векторы $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_{2n+3}}$. По предположению индукции длина вектора

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP}_{2n+2}$ не меньше 1. Вектор $\overrightarrow{OR}$ лежит внутри угла P_1OP_{2n+3}, поэтому он образует острый угол с вектором $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP}_{2n+3}$. Следовательно, $|\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OR}|\geqslant OR\geqslant 1$.

5.24. Докажем сначала, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы, длины которых не превосходят 1, то хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c}$ имеет длину, не превосходящую 1. В самом деле, два из векторов $\pm\boldsymbol{a}$, $\pm\boldsymbol{b}$, $\pm\boldsymbol{c}$ образуют угол, не превосходящий 60°, поэтому разность этих двух векторов имеет длину, не превосходящую 1 (если в треугольнике $AB\leqslant 1$, $BC\leqslant 1$ и $\angle ABC\leqslant 60°$, то AC — не наибольшая сторона и $AC\leqslant 1$).

Таким образом мы можем спуститься до двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ или векторами $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}$ не превосходит 90°, поэтому либо $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}$, либо $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}$.

5.25. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — середины сторон AB, BC, CD, DE, EA; A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 — середины сторон A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1A_1.

Достроим треугольник DBC до параллелограмма $DBCK$ (рис. 63). Поскольку $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{B_1C_1}$, треугольник

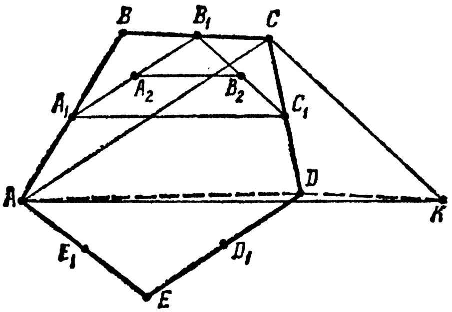


Рис. 63

$A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ACK с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому $A_1C_1=\frac{1}{2}AK\leqslant\frac{1}{2}(AD+DK)=\frac{1}{2}(2D_1E_1+BC)$ и $A_2B_2=\frac{1}{2}A_1C_1\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{4}(2D_1E_1+BC)$. Аналогично, $B_2C_2\leqslant\frac{1}{4}(2E_1A_1+CD)$, $C_2D_2\leqslant\frac{1}{4}(2A_1B_1+DE)$, $D_2E_2\leqslant\frac{1}{4}(2B_1C_1+EA)$, и, наконец, $E_2A_2\leqslant\frac{1}{4}(2C_1D_1+AB)$. Складывая все эти неравенства, получаем $P_2\leqslant\frac{1}{4}(2P_1+P_0)$, где P_i — периметр пятиугольника, построенного на i-м шаге. Поскольку $P_1 \leqslant P_0$, $P_2 \leqslant \frac{3}{4} P_0$. Следовательно, $P_{2k+1} \leqslant \leqslant P_{2k} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot P_0$, т. е. $P_0+P_1+P_2+\ldots \leqslant \left(1+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+ + \left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots\right) P_0 = 8P_0$.

5.26. Введем систему координат Oxy. Пусть l_φ — прямая, проходящая через точку O и образующая угол φ $(0 < \varphi < \pi)$ с осью Ox, т. е. если точка A лежит на l_φ и вторая координата точки A положительна, то $\angle AOX = \varphi$; $l_0 = l_\pi = Ox$.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ образует угол α с осью Ox (угол отсчитывается против часовой стрелки от оси Ox к вектору $\boldsymbol{a}$), то длина проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую l_φ равна $|\boldsymbol{a}|\cdot|\cos(\varphi-\alpha)|$. Интеграл $\int\limits_0^\pi |\boldsymbol{a}|\cdot|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\varphi = 2|\boldsymbol{a}|$ не зависит от α.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ образуют с осью Ox углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Тогда, по условию, $|\boldsymbol{a}_1|\cdot|\cos(\varphi-\alpha_1)| + \ldots + |\boldsymbol{a}_n|\cdot|\cos(\varphi-\alpha_n)| \leqslant |\boldsymbol{b}_1|\cdot|\cos(\varphi-\beta_1)| + \ldots + |\boldsymbol{b}_m| \times \times |\cos(\varphi-\beta_m)|$ для любого угла φ. Интегрируя эти неравенства по φ от 0 до π, получаем $|\boldsymbol{a}_1|+\ldots+|\boldsymbol{a}_n| \leqslant |\boldsymbol{b}_1|+\ldots+|\boldsymbol{b}_m|$.

Замечание. Величина $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется средним значением функции f на отрезке $[a, b]$. Равенство

$$\int\limits_0^\pi |\boldsymbol{a}|\cdot|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\varphi = 2|\boldsymbol{a}|$$

означает, что среднее значение длины проекции вектора $\boldsymbol{a}$ равно $\frac{2}{\pi}|\boldsymbol{a}|$. (Этим не совсем точным выражением мы и будем пользоваться в дальнейшем. Совсем правильно сказать было бы так: среднее значение функции $f(\varphi)$, равной длине проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую l_φ, на отрезке $[0, \pi]$ равно $\frac{2}{\pi}|\boldsymbol{a}|$.)

5.27. Сумма длин проекций сторон выпуклого многоугольника на любую прямую равна удвоенной длине проекции многоугольника на эту прямую. Поэтому сумма длин проекций векторов сторон на любую прямую для внутреннего многоугольника не больше, чем для внешнего. Следовательно, согласно задаче 5.26 сумма длин векторов сторон, т. е. периметр, у внутреннего многоугольника не больше, чем у внешнего.

5.28. Если сумма длин векторов равна L, то, согласно замечанию к задаче 5.26, среднее значение суммы длин проекций этих векторов равно $2L/\pi$.

Функция f на отрезке $[a, b]$ не может быть всюду меньше своего среднего значения c, поскольку иначе $c=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx < \frac{(b-a)c}{b-a}=c$. Поэтому найдется такая прямая l, что сумма длин проекций исходных векторов на нее не меньше $2L/\pi$.

Зададим на прямой l направление. Тогда либо сумма длин положительных проекций на это направление, либо сумма длин отрицательных проекций на это направление не меньше $2L/\pi$. Поэтому либо длина суммы векторов, дающих положительные проекции на выбранное направление, либо длина суммы векторов, дающих отрицательные проекции на выбранное направление, не меньше L/π.

5.29. Обозначим проекцию многоугольника на прямую l через AB. Ясно, что точки A и B являются проекциями некоторых вершин A_1 и B_1 многоугольника. Поэтому $A_1B_1 \geqslant AB$, т. е. длина проекции многоугольника не больше A_1B_1, а $A_1B_1 < d$ по условию. Поскольку сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2AB$, она не превосходит $2d$.

Среднее значение суммы длин проекций сторон равно $\frac{2}{\pi}P$, где P — периметр (см. задачу 5.26). Среднее значение не превосходит максимального, следовательно, $\frac{2}{\pi}P < 2d$, т. е. $P < \pi d$.

5.30. Согласно задаче 5.26 неравенство $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}| \geqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|$ достаточно доказать для проекций векторов на прямую, т. е. можно считать, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — векторы, параллельные одной прямой, т. е. просто числа, причем $a+b+c+d=0$. Будем считать, что $d \geqslant 0$, поскольку иначе мы можем просто изменить знаки у всех чисел.

Можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Нам нужно разобрать три случая: 1) a, b, $c \leqslant 0$, 2) $a \leqslant 0$ и b, $c \geqslant 0$, 3) a, $b \leqslant 0$, $c \geqslant 0$. В этих случаях нам нужно проверить следующие неравенства:

1) $|a|+|b|+|c|+|d| \geqslant |d|-|a|+|d|-|b|+|d|-|c|$;

2) $|a|+|b|+|c|+|d| \geqslant |a|-|d|+|b|+|d|+|c|+|d|$.

Эти неравенства очевидны, поскольку $|d| \leqslant |a|+|b|+|c|$.

3) $|a|+|b|+|c|+|d| \geqslant ||a|-|d||+||b|-|d||+|c|+|d|$, т. е. $|a|+|b| \geqslant ||a|-|d||+||b|-|d||$. Разбирая слу-

чаи $|d|\leqslant|b|$, $|b|\leqslant|d|\leqslant|a|$, $|a|\leqslant|d|$, получаем требуемое неравенство (в последнем случае нужно учесть, что $|d|=|a|+|b|-|c|\leqslant|a|+|b|$).

5.31. Согласно задаче 5.26 неравенство достаточно доказать для проекций векторов на любую прямую. Пусть проекции векторов $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ на прямую l равны (с учетом знака) $a_1, \ldots, a_n$. Разобьем числа $a_1, \ldots, a_n$ на две группы: $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_k\geqslant 0$ и $y_1'\leqslant y_2'\leqslant\ldots\leqslant y_{n-k}'\leqslant 0$. Пусть $y_i=-y_i'$. Тогда $x_1+\ldots+x_k=y_1+\ldots+y_{n-k}=a$.

Периметру в проекции соответствует число $2(x_1+y_1)$. Сумме длин векторов $\overrightarrow{OA_i}$ в проекции соответствует число $x_1+\ldots+x_k+y_1+\ldots+y_{n-k}=2a$. При замене x_i на $\overline{x}_i=\frac{1}{k}(x_1+\ldots+x_k)$ и y_i на $\overline{y}_i=\frac{1}{n-k}(y_i+\ldots+y_{n-k})$ величина $x_1+\ldots+x_k+y_1'+\ldots+y_{n-k}$ не изменяется, а величина x_1+y_1 может только уменьшиться. Поэтому

$$\frac{2(x_1+y_1)}{x_1+\ldots+y_{n-k}}\geqslant\frac{2(\overline{x}_1+\overline{y}_1)}{\overline{x}_1+\ldots+\overline{y}_{n-k}}=\frac{2\left(\frac{a}{k}+\frac{a}{n-k}\right)}{a+a}=\frac{n}{k(n-k)}.$$

Если n четно, то $\frac{n}{k(n-k)}\geqslant\frac{n}{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}=\frac{4}{n}$. Если n нечетно, то $\frac{n}{k(n-k)}\geqslant\frac{n}{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}=\frac{4n}{n^2-1}$. Поэтому $P\geqslant\frac{4}{n}d$ при четном n, $P\geqslant\frac{4n}{n^2-1}d\geqslant\frac{4}{n}d$ при нечетном n.

Обе эти оценки неулучшаемы. Для доказательства нужно рассмотреть многоугольники, вершины которых разбиты на две группы, содержащие $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}$ точек при n четном, $\frac{n-1}{2}$ и $\frac{n+1}{2}$ точек при n нечетном, причем попарные расстояния между вершинами одной группы малы, а расстояния между вершинами разных групп велики.

5.32. Длина кривой — предел периметров вписанных в нее многоугольников. Рассмотрим вписанный многоугольник с периметром P и длиной проекции на прямую l, равной d_l. Пусть $1-\varepsilon<d_l<1$ для всех прямых l. Многоугольник можно подобрать так, чтобы ε было сколь угодно мало. Поскольку многоугольник выпуклый, то сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2d_l$.

Среднее значение величины $2d_l$ равно $\frac{2}{\pi}P$ (см. задачу 5.26), поэтому $2-2\varepsilon < \frac{2}{\pi}P < 2$, т. е. $\pi-\pi\varepsilon < P < \pi$. Устремляя ε к нулю, получаем, что длина кривой равна π.

5.33. а) Пусть сначала λ, $\mu > 0$. Тогда $[\lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}] = |\lambda\boldsymbol{a}| \times |\mu\boldsymbol{b}| \sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda\mu[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. При рассмотрении других случаев нужно учесть, что если $\lambda > 0$, $\mu < 0$ или $\lambda < 0$, $\mu > 0$, то $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \angle(\lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b}) + 180°$, т. е. $\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\sin\angle(\lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b})$, а если $\lambda < 0$, $\mu < 0$, то $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \angle(\lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b})$.

б) Будем считать, что все рассматриваемые векторы имеют общее начало: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OD}$. Введем систему координат, направив ось Oy по лучу OA. Пусть $A = (0, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $D = (x_2+x_3, y_2+y_3)$. Тогда $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = x_2y_1$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = x_3y_1$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}] = (x_2+x_3)y_1 = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$.

5.34. Обозначим единичные векторы, направленные по осям Ox и Oy, через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Тогда $[x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}, x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}] = x_1x_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] + x_1y_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] + y_1x_2[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] + y_1y_2[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}]$. Ясно, что $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = -[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] = 1$ и $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}] = 0$, т. е. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = x_1y_2 - x_2y_1$.

5.35. Пусть $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — положения бегунов в момент t. Тогда

$$\overrightarrow{A(t)B(t)} = \overrightarrow{A(0)B(0)} + (\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A)t, \quad \overrightarrow{A(t)C(t)} = \overrightarrow{A(0)C(0)} + (\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_A)t,$$

где $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$ — скорости бегунов.

$$S_{ABC}(t) = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{A(t)B(t)}, \overrightarrow{A(t)C(t)}]\right| = \frac{1}{2}\left|[\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A)t, \boldsymbol{c}+(\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_A)t]\right|,$$

где $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{A(0)B(0)}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{A(0)C(0)}$. Поскольку $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B \parallel \boldsymbol{v}_C$, $[\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_A] = 0$. Следовательно, $S_{ABC}(t) = |x + yt|$. Решая систему $|x| = 2$, $|x+5y| = 3$, получаем два решения: $S_{ABC}(t) = \left|2 + \frac{1}{5}t\right|$ или $S_{ABC}(t) = |2-t|$. Поэтому при $t = 10$ с имеем $S_{ABC} = 4$ или $S_{ABC} = 8$.

5.36. Пусть $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — положения пешеходов в момент t; $\boldsymbol{x}(t) = \overrightarrow{A(t)B(t)}$, $\boldsymbol{y}(t) = \overrightarrow{A(t)C(t)}$. Тогда $\boldsymbol{x}(t) = t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}(t) = t\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$. Пешеходы находятся на одной прямой тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}(t) \parallel \boldsymbol{y}(t)$, т. е. $[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)] = 0$. Ясно, что $[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)] = t^2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + t([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}]$ — квадратный трехчлен. В начальный момент $[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)] \neq 0$. Квадратный трехчлен, не равный тождественно нулю, имеет не более двух корней.

5.37. Пусть $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$. Тогда $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}]=x_2[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ и $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2]=x_1[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$. Поэтому

$$\boldsymbol{x}=\frac{[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2]}{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}\boldsymbol{e}_1+\frac{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}]}{[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]}\boldsymbol{e}_2.$$

Следовательно,

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2]\cdot[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y}]+[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}]\cdot[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{y}]+[\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1]\cdot[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]=0 \qquad (1)$$

для любых векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ на плоскости. Положим $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{y}=\overrightarrow{AE}$. Тогда $S=a+[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2]+d=c+[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2]+a=d+[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1]+b$, т. е. $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2]=S-a-d$, $[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2]=S-c-a$, $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1]=S-d-b$. Подставляя эти равенства в (1), получаем $-(S-a-d)e+(S-c-a)(S-d-b)-ad=0$, т. е.

$$S^2-S(a+b+c+d+e)+(ab+bc+cd+de+ea)=0.$$

Глава 6

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Основные сведения

1. *Параллельным переносом* называется преобразование плоскости, при котором точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

2. Композиция (т. е. последовательное выполнение) двух параллельных переносов является параллельным переносом.

3. Во всех задачах этой главы перенос является методом решения, т. е. вспомогательным средством.

Вводные задачи

1. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

2. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, на другой — точка B, причем $\angle AKB=90°$. Докажите, что $AB=2R$.

3. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Докажите, что $MN^2+AB^2=4R^2$.

4. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

§ 1. Перенос помогает решить задачу

6.1. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из деревни A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

6.2. Дан треугольник ABC. Точка M, расположенная внутри треугольника, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем параллельно

AB до пересечения с BC, затем параллельно AC до пересечения с AB и т. д. Докажите, что через некоторое число шагов траектория движения точки замкнется.

6.3. а) Докажите, что если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

б) Докажите, что если сумма длин двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равна половине его периметра, то четырехугольник — параллелограмм.

6.4. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, M — точка пересечения биссектрис углов A и B, N — точка пересечения биссектрис углов C и D. Докажите, что

$$2MN = |AB + CD - BC - AD|.$$

6.5. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известно, что $KH = a$, $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

6.6. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит: а) 0,34; б) 0,287.

§ 2. Построения

6.7. Даны две окружности S_1, S_2 и прямая l. Проведите прямую l_1, параллельную прямой l, так, чтобы:

а) расстояние между точками пересечения l_1 с окружностями S_1 и S_2 имело заданную величину a;

б) S_1 и S_2 высекали на l_1 равные хорды;

в) S_1 и S_2 высекали на l_1 хорды, сумма (или разность) длин которых имела заданную величину a.

6.8. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности. Постройте точку X на окружности так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, имеющий данную длину a.

6.9. Даны две окружности S_1, S_2 и точка A. Проведите через точку A прямую l так, чтобы S_1 и S_2 высекали на ней равные хорды.

6.10. а) Даны две окружности S_1 и S_2, пересекающиеся в точках A и B. Проведите через точку A прямую l

так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный внутри окружностей S_1 и S_2, имел данную длину.

б) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, равный данному треугольнику PQR.

6.11. Постройте четырехугольник по углам и диагоналям.

§ 3. Геометрические места точек

6.12. Найдите геометрическое место точек: а) сумма; б) разность расстояний от которых до двух данных прямых имеет данную величину.

6.13. Угол, изготовленный из прозрачного материала, двигают так, что две непересекающиеся окружности касаются его сторон внутренним образом. Докажите, что на нем можно отметить точку, которая описывает дугу окружности.

Задачи для самостоятельного решения

6.14. Даны две пары параллельных прямых и точка P. Проведите через точку P прямую так, чтобы обе пары параллельных прямых отсекали на ней равные отрезки.

6.15. Постройте параллелограмм по сторонам и углу между диагоналями.

6.16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны.

а) Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины сторон AC и BD.

б) Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, соединяющей середины диагоналей AC и BD.

6.17. Среди всех четырехугольников с данными длинами диагоналей и величиной угла между ними найдите четырехугольник наименьшего периметра.

Решения

6.1. Пусть A' — образ точки A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Тогда $A'N = AM$, поэтому длина пути $AMNB$ равна $A'N+NB+MN$. Поскольку длина отрезка MN постоянна, нам нужно найти точку N, для которой сумма $A'N+NB$ минимальна. Ясно, что $A'N+NB$ минимальна, когда точка N лежит на отрезке $A'B$, т. е. точка N является точкой пересечения берега, ближайшего к точке B, и отрезка $A'B$.

6.2. Обозначим последовательные точки траектории на сторонах треугольника через $A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3, A_4, B_4, B_5, C_5, C_6, \ldots$ (рис. 64). Поскольку $A_1B_1 \parallel AB_2$, $B_1B_2 \parallel CA_1$ и $B_1C \parallel B_2C_2$, треугольник AB_2C_2 получается из треугольника A_1B_1C параллельным переносом. Аналогично, треугольник A_3BC_3 получен параллельным переносом из треугольника AB_2C_2, а треугольник A_4B_4C — из треугольника A_3BC_3. Но треугольник A_1B_1C тоже получен из треугольника A_3BC_3 параллельным переносом. Поэтому $A_1 = A_4$, т. е. после семи шагов траектория замкнется (возможно, что она замкнется и раньше).

6.3. а) Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, причем $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Рассмотрим точку K, являющуюся образом точки D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 65). Поскольку F — середина диагонали

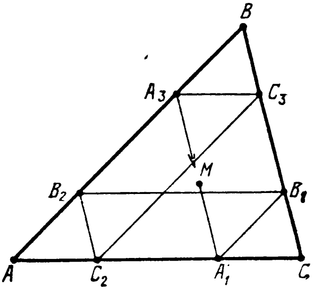


Рис. 64

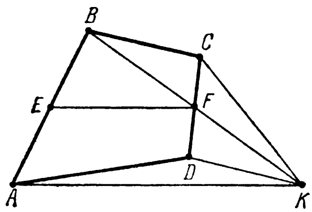


Рис. 65

CD параллелограмма $BCKD$, F также является серединой диагонали BK. Поэтому EF — средняя линия треугольника AKB и $AK = 2EF = AD + DK$. Но $AK < AD + DK$, если только точка D не лежит на отрезке AK, т. е. если стороны AD и BC не параллельны.

б) Пусть E, F, G, H — середины сторон AB, CD, BC, AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Как и в а), получаем, что $EF \leqslant \frac{1}{2}(AD + BC)$ и $GH \leqslant \frac{1}{2}(AB + CD)$, причем первое неравенство достигается, только если $AD \parallel BC$, а второе — если $AB \parallel CD$. Если же четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом, то хотя бы одно из неравенств строгое и

$$EF + GH < \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$$

6.4. Построим окружность S, касающуюся стороны AB и лучей BC, AD, и перенесем треугольник CDN параллельно (по направлению оснований BC и AD) так, чтобы точка N' совпала с точкой M, т. е. сторона $C'D'$ касалась окружности S (рис. 66).

Для трапеции $ABC'D'$ равенство $2MN' = |AB + C'D' - BC' - AD'|$ очевидно, поскольку $N' = M$ и трапеция $ABC'D'$ описанная. При переходе от трапеции $ABC'D'$ к трапеции $ABCD$ к левой части этого равенства добавляется $2N'N$, а к правой добавляется $CC' + DD' = 2NN'$, поэтому равенство сохраняется.

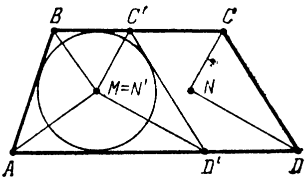


Рис. 66

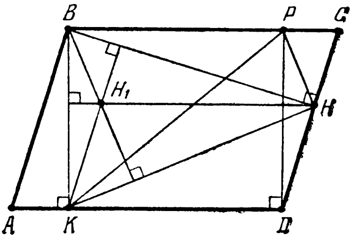


Рис. 67

6.5. Обозначим точку пересечения высот треугольника BKH через H_1. Поскольку $HH_1 \perp BK$ и $KH_1 \perp BH$, $HH_1 \parallel AD$ и $KH_1 \parallel DC$, т. е. H_1HDK — параллелограмм. Поэтому при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{H_1H}$ точка K переходит в точку D, а точка B переходит в некоторую точку P (рис. 67). Поскольку $PD \parallel BK$, то $BPDK$ — прямоугольник и $PK = BD = b$. Поскольку $BH_1 \perp KH$, $PH \perp KH$. Ясно также, что $PH = BH_1$.

В прямоугольном треугольнике PKH известны гипотенуза $KP = b$ и катет $KH = a$, поэтому $BH_1 = PH = \sqrt{b^2 - a^2}$.

6.6. а) Фигуру, лежащую внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1, обозначим через F, ее площадь — через S. Рассмотрим два вектора $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_2}$, где точка A_1 лежит на стороне AD и $AA_1 = 0{,}001$, а точка A_2 лежит внутри угла BAD, $\angle A_2AA_1 = 60°$ и $AA_2 = 0{,}001$ (рис. 68).

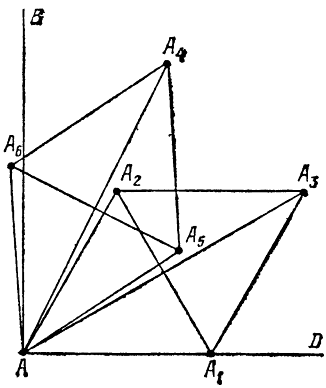


Рис. 68

Обозначим образы F при параллельных переносах на векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_2}$ через F_1 и F_2. Фигуры F, F_1, F_2 не имеют общих точек и лежат внутри квадрата со стороной 1,001. Поэтому $3S < 1{,}001^2$, т. е. $S < 0{,}335 < 0{,}34$.

б) Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AA_3}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2}$. Повернем вектор $\overrightarrow{AA_3}$ вокруг точки A (против часовой стрелки на острый угол) так, чтобы точка A_3 перешла в точку A_4, для которой $A_3A_4=0{,}001$. Рассмотрим также векторы $\overrightarrow{AA_5}$ и $\overrightarrow{AA_6}$ длины 0,001, образующие с вектором $\overrightarrow{AA_4}$ углы $30°$ и лежащие по разные стороны от него (рис. 68).

Обозначим образ фигуры F при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_i}$ через F_i. Для определенности будем считать, что $S(F_4\cap F)\leqslant S(F_3\cap F)$. Тогда $S(F_4\cap F)\leqslant\frac{1}{2}S$, поэтому $S(F_4\cup F)\geqslant\geqslant\frac{3}{2}S$. Фигуры F_5 и F_6 не пересекаются ни друг с другом, ни с фигурами F и F_4, поэтому $S(F\cup F_4\cup F_5\cup F_6)\geqslant\frac{7}{2}S$. (Если бы оказалось, что $S(F_3\cap F)\leqslant S(F_4\cap F)$, то вместо фигур F_5 и F_6 надо было бы рассматривать фигуры F_1 и F_2.) Поскольку длины векторов $\overrightarrow{AA_i}$ не превосходят $0{,}001\sqrt{3}$, все рассматриваемые фигуры лежат внутри квадрата со стороной $1+0{,}002\sqrt{3}$. Поэтому $\frac{7}{2}S\leqslant(1+0{,}002\sqrt{3})^2$ и $S<0{,}287$.

Примечание. $S(A\cup B)$ — площадь объединения фигур A и B, $S(A\cap B)$ — площадь их пересечения.

6.7. а) Рассмотрим на прямой l точки A и B, для которых $AB=a$. Если C и D — точки пересечения окружностей S_1 и S_2 с прямой, параллельной прямой l, то $CD=a$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{CD}=\pm\overrightarrow{AB}$. Из этого вытекает построение: делаем переносы окружности S_1 на векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и находим точки пересечения образов окружности S_1 с окружностью S_2; искомая прямая проходит через одну из них.

б) Обозначим проекции центров окружностей S_1 и S_2 на прямую l через O_1 и O_2. Образ окружности S_2 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_2O_1}$ обозначим через S_2'. Центры окружностей S_1 и S_2' лежат на прямой, перпендикулярной прямой l. Искомая прямая — это прямая, проходящая через точки пересечения окружностей S_1 и S_2'.

в) Пусть O_1 и O_2 — проекции центров окружностей S_1 и S_2 на прямую l. Рассмотрим на прямой l точку O_2', для которой $O_1O_2'=a/2$ (таких точек две; мы выбираем любую из них). Пусть S_2' — образ окружности S_2 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_2O_2'}$. Обозначим точки пересечения прямой l_1, параллельной прямой l, с окружностями S_1 и S_2' через X' и Y', а проекции этих точек на прямую l — через X и Y (рис. 69).

Сумма длин хорд, высекаемых прямой l_1 на окружностях S_1 и S_2, равна $2(O_1X+O_2'Y)$. Равенство $2(O_1X+O_2'Y)=a=2O_1O_2'$ выполняется, если $X=Y$ и эта точка лежит внутри отрезка O_1O_2'.

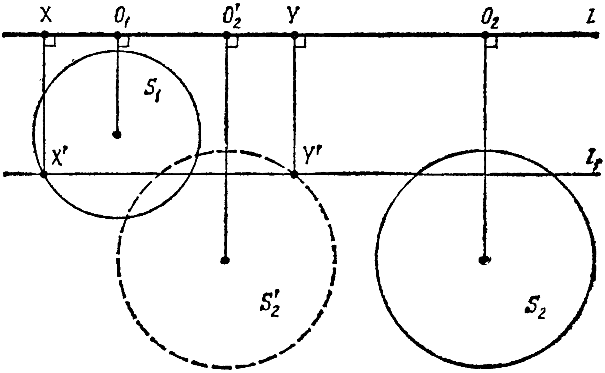


Рис. 69

Ясно, что если $X=Y$, то эта точка — проекция точки пересечения окружностей S_1 и S_2'.

Разность длин хорд, высекаемых прямой l на окружностях S_1 и S_2, равна $\pm 2(O_1X-O_2'Y)$. Равенство $\pm 2(O_1X-O_2'Y)=2O_1O_2'$ выполняется, если $X=Y$ и эта точка лежит вне отрезка O_1O_2'.

Из этого вытекает построение: искомые прямые проходят через точки пересечения окружностей S_1 и S_2'. Сумма длин хорд равна a для точек пересечения, лежащих внутри полосы, задаваемой перпендикулярами к прямой l, проходящими через точки O_1 и O_2', разность длин хорд равна a для точек пересечения, лежащих вне этой полосы.

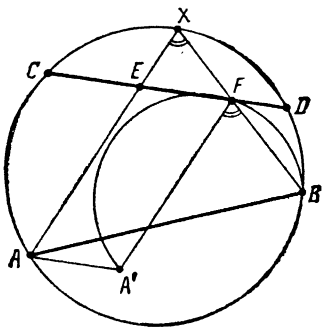


Рис. 70

6.8. Предположим, что точка X построена. Перенесем точку A на вектор $\overrightarrow{EF}$, т. е. построим точку A', для которой $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AA'}$. Это построение мы можем сделать, поскольку вектор $\overrightarrow{EF}$ нам известен: его длина равна a и он параллелен CD.

Поскольку $AX \parallel A'F$, $\angle A'FB = \angle AXB$, поэтому угол $A'FB$ известен. Таким образом, точка F лежит на пересечении двух фигур: отрезка CD и дуги окружности, из которой отрезок $A'B$ виден под углом AXB (рис. 70).

6.9. Предположим, что прямая l построена. Перенесем S_1 параллельно l так, чтобы центр O_1' образа S_1' окружности S_1 и центр O_2 окружности S_2 лежали на прямой, перпендикулярной прямой l. Окружности S_1' и S_2 пересекаются в точках M и N, причем прямая l проходит через точки M и N.

Проведем касательные AQ и AP к окружностям S_1' и S_2 соответственно. Поскольку $AQ^2 = AM \cdot AN = AP^2$, длина AQ равна AP и нам известна (мы можем построить касательную AP и измерить ее длину), $O_1'A$ мы можем найти: $O_1'A^2 = AQ^2 + R^2$, где R — радиус окружности S_1. Кроме того, $\angle O_2O_1'O_1 = 90°$. Таким образом, точка O_1' является пересечением окружности радиуса AO_1' с центром в точке A и окружности, построенной на отрезке O_1O_2 как на диаметре. Зная точку O_1', строим точки M и N, задающие прямую l.

6.10. а) Проведем через точку A прямую PQ (P лежит на окружности S_1, Q — на окружности S_2). Опустим из центров O_1

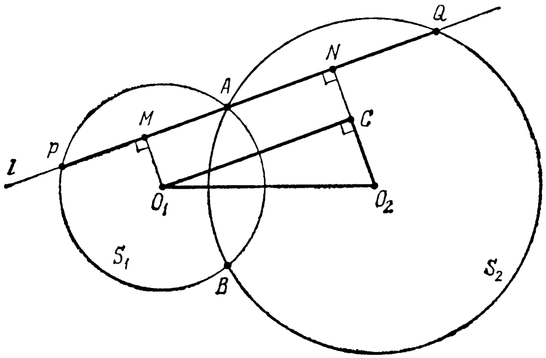


Рис. 71

и O_2 окружностей S_1 и S_2 перпендикуляры O_1M и O_2N на прямую PQ. Перенесем отрезок MN параллельно на вектор $\overrightarrow{MO_1}$. Пусть C — образ точки N при этом переносе (рис. 71).

Треугольник O_1CO_2 прямоугольный, поэтому $\angle O_1CO_2 = \angle MNO_2$, $O_1C = MN = \frac{1}{2}PQ$; следовательно, чтобы построить прямую PQ, для которой $PQ = a$, нам нужно построить треугольник O_1CO_2 с заданной гипотенузой O_1O_2 и катетом $O_1C = \frac{1}{2}a$.

Затем нужно провести через точку A прямую, параллельную O_1C.

б) Ясно, что достаточно решить обратную задачу: описать вокруг данного треугольника PQR треугольник, равный данному треугольнику ABC.

Предположим, что мы построили треугольник ABC, стороны которого проходят через данные точки P, Q, R. Построим дуги окружностей, из которых отрезки RP и QP видны под углами A и B соответственно. Ясно, что точки A и B лежат на этих дугах, причем длина отрезка AB известна.

Согласно а) мы можем построить прямую AP, проходящую через точку P, отрезок которой, заключенный внутри окружностей S_1 и S_2, имеет данную длину. Проводя прямые AR и BQ, получаем треугольник ABC, равный данному треугольнику, поскольку у этих треугольников по построению равны сторона и прилегающие к ней углы.

6.11. Предположим, что мы построили искомый четырехугольник $ABCD$. Пусть D_1 и D_2—образы точки D при переносах на

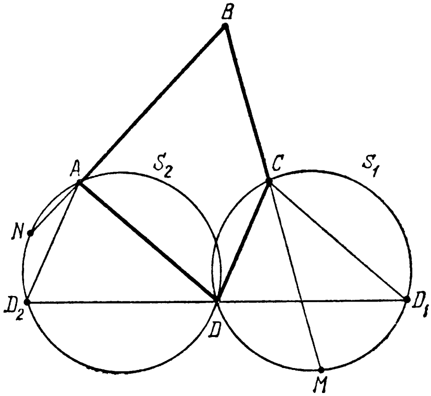


Рис. 72

векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно. Опишем вокруг треугольников DCD_1 и DAD_2 окружности S_1 и S_2. Обозначим точки пересечения прямых BC и BA с окружностями S_1 и S_2 через M и N (рис. 72). Ясно, что $\angle DCD_1 = \angle DAD_2 = \angle D$, $\angle DCM = 180° - \angle C$ и $\angle DAN = 180° - \angle A$.

Из этого вытекает следующее построение. На произвольной прямой l берем точку D и строим на l точки D_1 и D_2 так, чтобы $DD_1 = DD_2 = AC$. Фиксируем одну из полуплоскостей П, заданных прямой l, и будем считать, что точка B лежит в этой полуплоскости. Построим окружность S_1, из точек которой (лежащих в

П) отрезок DD_1 виден под углом D. Аналогично строим окружность S_2. Построим точку M на S_1 так, чтобы из всех точек части окружности S_1, лежащей в П, отрезок DM был виден под углом $180° - \angle C$. Аналогично строим точку N. Отрезок MN виден из точки B под углом B, т. е. B является точкой пересечения окружности с центром D радиуса DB и дуги окружности, из которой отрезок MN виден под углом B (и она лежит в полуплоскости П). Точки C и A являются точками пересечения прямых BM и BN с окружностями S_1 и S_2.

Докажем, что мы построили искомый четырехугольник. По построению четырехугольник $ABCD$ имеет заданную диагональ BD и заданные величины углов DAB, ABC, BCD. Поэтому угол ADC имеет заданную величину, и, следовательно, $\angle ADC = \angle DCD_1$, т. е. ACD_1D — параллелограмм. Поэтому $AC = DD_1$, т. е. AC имеет заданную длину.

6.12. а) На прямой l_1 имеются две точки A и C, расстояния от которых до прямой l_2 равны a. На прямой l_2 тоже имеются

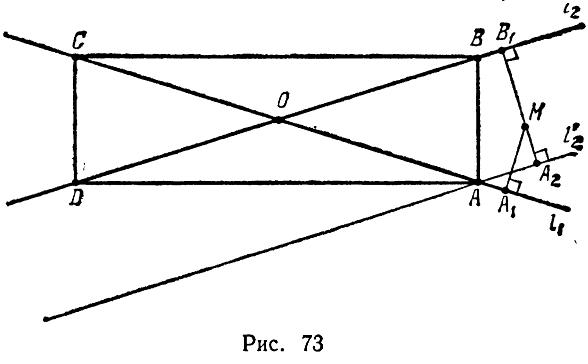


Рис. 73

две точки B и D, расстояния от которых до l_1 равны a. При этом $ABCD$ — прямоугольник. Для определенности будем считать, что точка M, принадлежащая искомому геометрическому месту точек, лежит внутри угла AOB, где O — точка пересечения прямых l_1 и l_2 (рис. 73). Проведем через точку A прямую l_2', параллельную прямой l_2. Опустим из точки M перпендикуляры MA_1, MA_2, MB_1 на прямые l_1, l_2', l_2 соответственно. Точка M лежит внутри полосы, заданной прямыми l_2 и l_2', поскольку иначе расстояние от прямой l_2 до точки M больше a. Поскольку $B_1M + MA_2 = a$, то $B_1M + A_1M = a$ тогда и только тогда, когда $A_1M = A_2M$, т. е. точка M равноудалена от прямых l_1 и l_2' и поэтому лежит на отрезке AB. Аналогичные рассуждения для точек, лежащих внутри углов BOC, COD и DOA, показывают, что искомым геометрическим местом точек является граница четырехугольника $ABCD$.

б) Построим точки A, B, C, D, M, A_1, A_2, B_1 и прямую l_2', как и в а).

Точка M на этот раз может лежать как внутри полосы, заданной прямыми l_2 и l_2', так и вне нее. При разборе этих двух вариантов будем считать, что $A_1M \leqslant B_1M$.

Пусть точка M лежит внутри полосы. Тогда $B_1M + A_2M = a$ и $B_1M - A_1M = a$, т. е. $A_2M + A_1M = 0$. Поэтому $M = A$.

Пусть точка M лежит вне полосы. Тогда $B_1M - A_2M = a$ и $B_1M - A_1M = a$, т. е. $A_2M = A_1M$. Поэтому точка M лежит на продолжении отрезка DA за точку A.

При разборе случая $A_1M \geqslant B_1M$ удобнее вместо прямой l_2'' рассмотреть прямую, проходящую через точку B параллельно прямой l_1. Тогда все рассуждения повторяются дословно. Аналогичные рассуждения для остальных углов показывают, что искомым геометрическим местом точек является множество точек, лежащих на продолжениях сторон прямоугольника $ABCD$.

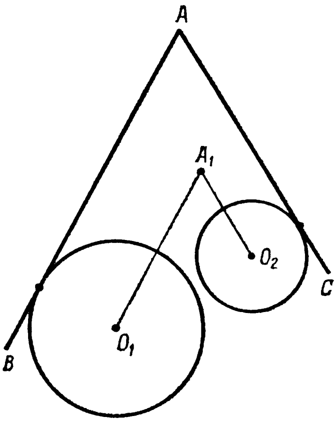


Рис. 74

6.13. Пусть сторона AB угла BAC касается окружности радиуса r_1 с центром O_1, сторона AC касается окружности радиуса r_2 с центром O_2.

Перенесем прямую AB параллельно внутрь угла BAC на расстояние r_1, прямую AC — на расстояние r_2. Пусть A_1 — точка пересечения перенесенных прямых (рис. 74). Тогда $\angle O_1A_1O_2 = \angle BAC$.

Постоянный угол $O_1A_1O_2$ опирается на неподвижный отрезок O_1O_2, поэтому точка A_1 описывает дугу окружности.

Глава 7

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Основные сведения

1. *Симметрией относительно точки* A называется преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что A — середина отрезка XX'. Другие названия этого преобразования — *центральная симметрия с центром* A или просто *симметрия с центром* A.

Заметим, что симметрия с центром A представляет собой частный случай двух других преобразований — она является поворотом на $180°$ с центром A, а также гомотетией с центром A и с коэффициентом -1.

2. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно точки A, то A называется *центром симметрии этой фигуры.*

3. В главе используются следующие обозначения для преобразований:

S_A — симметрия с центром A;

$T_{\boldsymbol{a}}$ — перенос на вектор $\boldsymbol{a}$.

4. Композицию симметрий относительно точек A и B мы будем обозначать через $S_B \circ S_A$; при этом сначала выполняется симметрия относительно точки A, а затем — относительно точки B. (Кажущаяся неестественность такой последовательности операций оправдывается тождеством

$$(S_B \circ S_A)(X) = S_B(S_A(X)).)$$

Композиции любых отображений обладают свойством ассоциативности: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$. Поэтому порядок, в каком берется композиция, несуществен, и можно просто писать $F \circ G \circ H$.

5. Композиции двух центральных симметрий или симметрии и переноса вычисляются по следующим формулам (см. задачу 7.7):

а) $S_B \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$;

б) $T_{\boldsymbol{a}} \circ S_A = S_B$ и $S_B \circ T_{\boldsymbol{a}} = S_A$, где $\boldsymbol{a} = 2\overrightarrow{AB}$.

Вводные задачи

1. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

2. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

3. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что этот шестиугольник имеет центр симметрии.

4. Даны параллелограмм $ABCD$ и некоторая точка M. Через точки A, B, C, D проводятся прямые, параллельные прямым MC, MD, MA, MB соответственно. Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, симметричной точке M относительно точки пересечения диагоналей параллелограмма.

5. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, проведенными параллельно сторонам, равны.

§ 1. Симметрия помогает решить задачу

7.1. Докажите, что если в треугольнике медиана и биссектриса совпадают, то треугольник равнобедренный.

7.2. Двое игроков поочередно выкладывают на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый игрок всегда может выиграть.

7.3. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $A_1B_1C_1D_1$— параллелограмм. Докажите, что центры этих двух параллелограммов совпадают.

7.4. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведенные через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведенные через A_2, B_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

7.5. В треугольнике ABC проведены медианы AF и CE. Докажите, что если $\angle BAF = \angle BCE = 30°$, то треугольник ABC правильный.

7.6. Даны выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка O внутри него. Докажите, что через точку O нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

§ 2. Свойства симметрии

7.7. а) Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

б) Докажите, что композиция параллельного переноса и центральной симметрии (в обоих порядках) является центральной симметрией.

7.8. Пусть точка A_1 симметрична некоторой точке A плоскости относительно заданной точки O_1; точка A_2 симметрична A_1 относительно другой точки O_2; A_3 симметрична A_2 относительно O_3; A_4 симметрична A_3 относительно O_1; A_5 симметрична A_4 относительно O_2; A_6 симметрична A_5 относительно O_3. Докажите, что A_6 совпадает с A.

7.9. а) Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

б) Докажите, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

в) Пусть M — конечное множество точек на плоскости. Точку O назовем «почти центром симметрии» множества M, если из M можно выбросить одну точку так, чтобы точка O была центром симметрии оставшегося множества (в обычном смысле). Сколько «почти центров симметрии» может иметь M?

7.10. Найдите все точки внутри остроугольного треугольника такие, что точки, симметричные им относительно середин сторон треугольника, лежат на описанной около него окружности.

§ 3. Симметрия помогает решить задачу. Построения

7.11. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

7.12. Через данную точку A проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения ее с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.

7.13. Даны угол ABC и точка D внутри него. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке D.

7.14. Даны угол и внутри него точки A и B. Постройте параллелограмм, для которого точки A и B — противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

7.15. Даны четыре попарно непараллельные прямые и точка O, не лежащая на этих прямых. Постройте параллелограмм с центром O и вершинами, лежащими на данных прямых,— по одной на каждой.

7.16. Даны непересекающиеся хорды AB и CD окружности и точка J на хорде CD. Постройте на окружности точку X так, чтобы хорды AX и BX высекали на хорде CD отрезок EF, делящийся точкой J пополам.

7.17. Через общую точку A окружностей S_1 и S_2 проведите прямую l так, чтобы разность длин хорд, высекаемых на l окружностями S_1 и S_2, имела заданную величину a.

7.18. Даны $m=2n+1$ точек — середины сторон m-угольника. Постройте его вершины.

Задачи для самостоятельного решения

7.19. Постройте треугольник по медианам m_a, m_b и углу C.

7.20. а) Дана точка внутри параллелограмма, не лежащая на отрезках, соединяющих середины противоположных сторон. Сколько существует отрезков с концами на сторонах параллелограмма, делящихся этой точкой пополам?

б) Дана точка, лежащая внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Сколько существует отрезков с концами на сторонах данного треугольника, делящихся этой точкой пополам?

7.21. а) Найдите множество вершин выпуклых четырехугольников, середины сторон которых являются вершинами данного квадрата.

б) На плоскости даны три точки. Найдите множество вершин выпуклых четырехугольников, середины трех сторон каждого из которых лежат в данных точках.

7.22. На прямой даны точки A, B, C, D, расположенные в указанном порядке, причем $AB=CD$. Докажите, что для любой точки P на плоскости $AP+DP\geqslant BP+CP$.

Решения

7.1. Пусть в треугольнике ABC медиана BD является бессектрисой. Рассмотрим точку B_1, симметричную B относительно точки D. Поскольку точка D является серединой отрезка AC, четырехугольник $ABCB_1$ является параллелограммом. Поскольку $\angle ABB_1=\angle B_1BC=\angle AB_1B$, треугольник B_1AB равнобедренный и $AB=AB_1=BC$.

7.2. Первый игрок кладет пятак в центр стола, а затем кладет пятаки симметрично пятакам второго игрока относительно центра стола.

При такой стратегии первый игрок всегда имеет возможность сделать очередной ход. Поскольку игра не может длиться дольше

S/s ходов, где S — площадь стола, s — площадь пятака, игра кончается за конечное время и первый игрок выигрывает.

7.3. Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии. Пусть O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$. При симметрии с центром O точки A_1 и B_1 переходят в некоторые точки A_2 и B_2, причем A_2 и B_2 лежат на сторонах CD и AD и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_2A_2}$. Поэтому треугольники B_2A_2D и D_1C_1D имеют соответственно параллельные стороны и $B_2A_2 = D_1C_1$. Следовательно, $B_2 = D_1$ и $A_2 = C_1$. Из этого видно, что точка O является центром симметрии параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$.

7.4. Пусть перпендикуляры к сторонам, проведенные через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке M. Обозначим центр окружности через O.

Перпендикуляр к стороне BC, проведенный через точку A_1, симметричен относительно точки O перпендикуляру к стороне BC, проведенному через точку A_2. Поэтому перпендикуляры к сторонам, проведенные через точки A_2, B_2 и C_2, пересекаются в точке, симметричной M относительно точки O.

7.5. Так как $\angle EAF = \angle ECF = 30°$, точки A, E, F, C лежат на одной окружности S, причем если O — ее центр, то $\angle EOF = 60°$. Точка B симметрична A относительно точки E, поэтому она лежит на окружности S_1, симметричной окружности S относительно точки E. Аналогично, точка B лежит на окружности S_2, симметричной окружности S относительно точки F. Поскольку треугольник EOF правильный, центры окружностей S, S_1 и S_2 образуют правильный треугольник со стороной $2R$, где R — радиус этих окружностей. Поэтому окружности S_1 и S_2 имеют единственную общую точку B, причем треугольник BEF правильный. Следовательно, треугольник ABC тоже правильный.

7.6. Рассмотрим многоугольник, симметричный исходному относительно точки O. Поскольку стороны многоугольника попарно непараллельны, контуры этих многоугольников не могут иметь общих отрезков, а могут иметь только общие точки. Поскольку многоугольники выпуклые, на каждой стороне лежит не более двух точек пересечения; поэтому имеется не более $2n$ точек пересечения контуров (точнее, n пар симметричных относительно O точек).

Пусть l_1 и l_2 — прямые, проходящие через точку O и делящие площадь исходного многоугольника пополам. Докажем, что внутри каждой из четырех частей, на которые эти прямые делят плоскость, имеется точка пересечения контуров. Предположим, что в одной из частей между прямыми l_1 и l_2 нет таких точек. Обозначим точки пересечения прямых l_1 и l_2 со сторонами многоугольника так, как это показано на рис. 75. Пусть точки A', B', C',

D' симметричны относительно точки O точкам A, B, C, D соответственно. Для определенности будем считать, что точка A лежит ближе к точке O, чем точка C'. Поскольку AB и $C'D'$ не пересекаются, точка B лежит ближе к точке O, чем точка D'. Поэтому $S_{ABO} < S_{C'D'O} = S_{CDO}$ (через ABO обозначена выпуклая фигура, ограниченная отрезками AO и BO и частью границы n-угольника, заключенной между точками A и B).

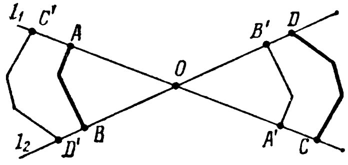


Рис. 75

С другой стороны, $S_{ABO} = S_{CDO}$, поскольку прямые l_1 и l_2 делят площадь многоугольника пополам. Получено противоречие. Поэтому между каждой парой прямых, делящих площадь пополам, лежит пара симметричных точек пересечения контуров, т. е. таких прямых не больше n.

7.7. а) Пусть точка A при центральной симметрии относительно точки O_1 переходит в точку A_1, точка A_1 переходит при центральной симметрии относительно точки O_2 в точку A_2. Тогда O_1O_2 — средняя линия треугольника AA_1A_2, поэтому $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

б) Пусть O_2 — образ O_1 при переносе на вектор $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$. Согласно а) $S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{\boldsymbol{a}}$. Умножая это равенство на S_{O_1} справа или на S_{O_2} слева и учитывая, что $S_X \circ S_X$ — тождественное преобразование, получаем $S_{O_1} = S_{O_2} \circ T_{\boldsymbol{a}}$ и $S_{O_2} = T_{\boldsymbol{a}} \circ S_{O_1}$.

7.8. Согласно предыдущей задаче $S_B \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$. Поэтому $S_{O_3} \circ S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_3} \circ S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{2(\overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2})} = T_{\vec{0}}$ — тождественное преобразование.

7.9. а) Предположим, что ограниченная фигура имеет два центра симметрии O_1 и O_2. Введем систему координат с осью абсцисс, направленной по лучу O_1O_2. Поскольку $S_{O_2} \circ S_{O_1} = T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$, фигура переходит в себя при переносе на вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$. Однако ограниченная фигура не может обладать этим свойством, так как образ точки с максимальной абсциссой не принадлежит фигуре.

б) Пусть $O_3 = S_{O_2}(O_1)$. Легко проверить, что $S_{O_3} = S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$. Поэтому если O_1 и O_2 — центры симметрии фигуры, то и O_3 — центр симметрии фигуры, причем $O_3 \neq O_1$, $O_3 \neq O_2$.

в) Покажем, что конечное множество может иметь только 0, 1, 2 или 3 «почти центров симметрии». Соответствующие примеры приведены на рис. 76. Остается доказать, что конечное множество не может иметь больше трех «почти центров симметрии».

Почти центров симметрии конечное число, поскольку они являются серединами отрезков, соединяющих точки из множества. Поэтому мы можем выбрать прямую, проекции почти центров симметрии на которую не сливаются. Следовательно, доказательство достаточно провести для точек, лежащих на одной прямой.

Пусть на прямой задано n точек с координатами $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Если мы выбрасываем точку x_1, то центром

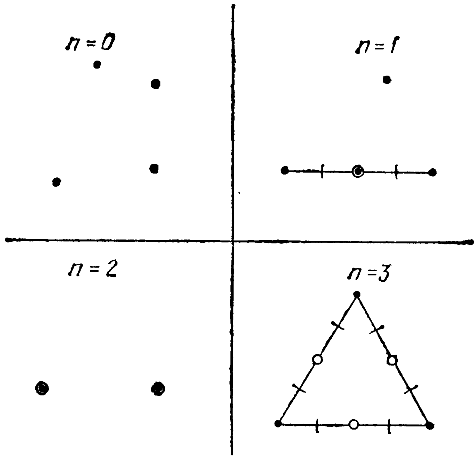


Рис. 76

симметрии оставшегося множества может быть только точка $\frac{x_2+x_n}{2}$; если выбрасываем x_n — то только точка $\frac{x_1+x_{n-1}}{2}$; если же выбрасываем любую другую точку — то только точка $\frac{x_1+x_n}{2}$. Поэтому почти центров симметрии не больше трех.

7.10. Пусть X — внутренняя точка треугольника ABC. Точка, симметричная точке X относительно середины стороны AB треугольника ABC, лежит на описанной окружности тогда и только тогда, когда точка X лежит на дуге, симметричной дуге AB (имеется в виду та из дуг, задаваемых точками A и B, на которой не лежит точка C) относительно середины стороны AB, т. е. $\angle AXB = 180° - \angle ACB$.

Точка, обладающая требуемым свойством, лежит на пересечении трех дуг окружностей, симметричных дугам AB, BC, AC относительно середин соответствующих сторон. Докажем, что такая точка существует и единственна. Дуги, симметричные дугам AB и AC, имеют две общие точки: точку A и некоторую точку H. При этом $\angle BHC = 360° - \angle BHA - \angle AHC = 360° - (180° - \angle ABC) -$

$-(180°-\angle ACB)=180°-\angle BAC$, поэтому точка H лежит на дуге, симметричной дуге BC, т. е. является искомой точкой. Поскольку $\angle BAC \neq 180°-\angle BAC$, точка A не обладает требуемым свойством.

Замечание. Легко убедиться, что точка пересечения высот обладает требуемым свойством, т. е. H является точкой пересечения высот.

7.11. Рассмотрим окружность S_1', симметричную окружности S_1 относительно точки A. Искомая прямая проходит через точки пересечения S_1' и S_2.

7.12. Пусть l'—образ прямой l при симметрии относительно точки A. Искомая прямая проходит через точку A и точку пересечения прямой l' с окружностью S.

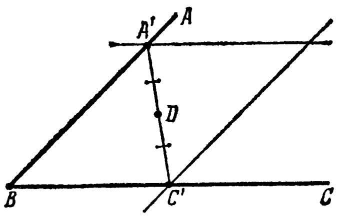


Рис. 77

7.13. Построим точки A' и C' пересечения прямых, симметричных прямым BC и AB относительно точки D, с прямыми AB и BC (рис. 77).

Ясно, что точка D является серединой построенного отрезка $A'C'$, поскольку точки A' и C' симметричны относительно D.

7.14. Пусть O—середина отрезка AB. Нам надо построить точки C и D, лежащие на сторонах угла, для которых точка O является серединой отрезка CD. Это построение описано в решении предыдущей задачи.

7.15. Предварительно разобьем прямые на пары. Это можно сделать тремя способами.

Пусть противоположные вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной паре прямых, вершины B и D—на другой. Рассматривая угол, образованный первой парой прямых, строим точки A и C, как это описано в решении задачи 7.13. Аналогично строим точки B и D.

7.16. Предположим, что точка X построена. Обозначим образы точек A, B и X при симметрии относительно точки J через A', B' и X' соответственно (рис. 78).

Поскольку $\angle A'FB=180°-\angle AXB$, угол $A'FB$ нам известен. Поэтому точка F является точкой пересечения отрезка CD с дугой окружности, из которой отрезок BA' виден под углом $180°-\angle AXB$. Точка X является точкой пересечения прямой BF с данной окружностью.

7.17. Предположим, что мы построили прямую l. Рассмотрим окружность S_1', симметричную окружности S_1 относительно точки

A. Обозначим центры окружностей S_1, S_1' и S_2 через O_1, O_1' и O_2 соответственно (рис. 79).

Проведем через точки O_1' и O_2 прямые l_1' и l_2, перпендикулярные прямой l. Расстояние между прямыми l_1' и l_2 равно половине разности длин хорд, высекаемых прямой l на окружностях S_1 и S_2. Поэтому для построения прямой l нам нужно построить окружность радиуса $a/2$ с центром в точке O_1' — прямая l_2 будет касательной к этой окружности.

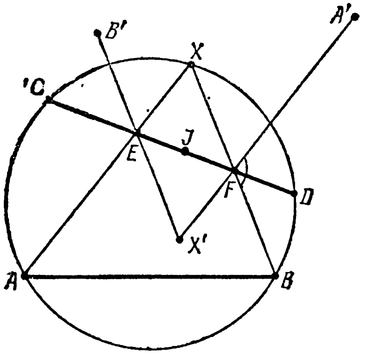


Рис. 78

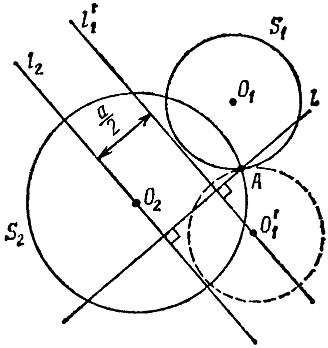


Рис. 79

Построив прямую l_2, опускаем на нее перпендикуляр из точки A и получаем прямую l.

7.18. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — середины сторон $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ $\ldots, A_mA_1$ многоугольника $A_1A_2 \ldots A_m$. $S_{B_1}(A_1) = A_2$, $S_{B_2}(A_2) =$ $= A_3, \ldots, S_{B_m}(A_m) = A_1$. Поэтому $S_{B_m} \circ \ldots \circ S_{B_1}(A_1) = A_1$, т. е. точка A_1 является неподвижной точкой композиции симметрий $S_{B_m} \circ S_{B_{m-1}} \circ \ldots \circ S_{B_1}$. Из задачи 7.7 следует, что композиция нечетного числа центральных симметрий является центральной симметрией, т. е. имеет единственную неподвижную точку. Эту точку можно построить как середину отрезка, соединяющего точку X и точку $S_{B_m} \circ S_{B_{m-1}} \circ \ldots \circ S_{B_1}(X)$, где X — произвольная точка плоскости.

Глава 8

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Основные сведения

1. *Симметрией относительно прямой* l (обозначение: S_l) называется преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX'.

Это преобразование называется также *осевой симметрией*, а l — *осью симметрии*.

2. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно прямой l, то l называется *осью симметрии этой фигуры.*

3. Композиция двух осевых симметрий является параллельным переносом, если их оси параллельны, а если они не параллельны, то она является поворотом (см. задачу 8.14).

Осевые симметрии являются как бы кирпичиками, из которых построены все другие движения плоскости: можно доказать, что любое движение является композицией не более трех осевых симметрий. Поэтому композиции осевых симметрий дают гораздо более мощный метод решения задач, чем композиции центральных симметрий. Кроме того, поворот иногда бывает удобно разложить в композицию двух осевых симметрий, причем за одну из осей можно взять любую прямую, проходящую через центр поворота.

Вводные задачи

1. Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.

2. Две окружности имеют общий центр O. Третья окружность пересекает их в точках A, B, C, D. Докажите, что если прямая AB проходит через точку O, то и прямая CD проходит через точку O.

3. Четырехугольник имеет ось симметрии. Докажите, что этот четырехугольник либо является равнобедренной трапецией, либо симметричен относительно диагонали.

4. Ось симметрии многоугольника пересекает его стороны в точках A и B. Докажите, что точка A является либо вершиной многоугольника, либо серединой стороны, перпендикулярной оси симметрии.

5. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

§ 1. Симметрия помогает решить задачу

8.1. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка $M \neq C$. Докажите, что $MA+MB > CA+CB$.

8.2. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45°. Докажите, что сумма CM^2+DM^2 не зависит от выбора точки M.

8.3. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \| B_1B_2$.

8.4. а) Докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон:

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD).$$

б) Докажите, что равенство в а) достигается только для вписанного четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны.

8.5. Докажите, что в любом треугольнике ABC высота h_a не больше $\sqrt{p(p-a)}$, где p — полупериметр.

§ 2. Симметрия помогает решить задачу. Построения

8.6. Постройте четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины его сторон.

8.7. Постройте четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность, зная длины двух соседних сторон AB и AD и углы при вершинах B и D.

8.8. Постройте треугольник ABC по стороне c, высоте h_c и разности углов A и B.

8.9. Даны острый угол MON и точки A и B внутри него. Найдите на стороне OM точку X так, чтобы треугольник XYZ, где Y и Z — точки пересечения прямых XA и XB с ON, был равнобедренным: $XY=XZ$.

8.10. Даны прямая MN и две точки A и B по одну сторону от нее. Постройте на прямой MN точку X так, чтобы $\angle AXM = 2\angle BXN$.

§ 3. Построения. Стороны треугольника симметричны относительно биссектрисы

8.11. Постройте треугольник ABC, если даны точки A, B и прямая, на которой лежит биссектриса угла C.

8.12. Даны три прямые l_1, l_2, l_3, пересекающиеся в одной точке, и точка A на прямой l_1. Постройте треугольник ABC так, чтобы точка A была его вершиной, а биссектрисы треугольника лежали на прямых l_1, l_2, l_3.

8.13. Постройте треугольник по данным серединам двух сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

§ 4. Композиции симметрий

8.14. а) Прямые l_1 и l_2 параллельны. Докажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = T_{2\boldsymbol{a}}$, где $T_{\boldsymbol{a}}$ — параллельный перенос, переводящий l_1 в l_2, причем $\boldsymbol{a} \perp l_1$.

б) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{l_2} \circ S_{l_1} = R_O^{2\alpha}$, где R_O^{α} — поворот, переводящий l_1 в l_2.

8.15. На плоскости даны три прямые a, b, c. Пусть $T = S_a \circ S_b \circ S_c$. Докажите, что $T \circ T$ — параллельный перенос (или тождественное отображение).

8.16. Пусть $l_3 = S_{l_1}(l_2)$. Докажите, что $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

§ 5. Свойства симметрий и осей симметрии

8.17. Точка A расположена на расстоянии 50 см от центра круга радиуса 1 см. Разрешается отразить точку симметрично относительно любой прямой, пересекающей круг. Докажите, что а) за 25 отражений точку A можно «загнать» внутрь данного круга; б) за 24 отражения этого сделать нельзя.

8.18. Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор, перпендикулярный прямой l. Докажите, что $S_l(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \cdot \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$.

8.19. На окружности с центром O даны точки $A_1, \ldots, A_n$, делящие ее на равные дуги, и точка X. Докажите, что точки, симметричные X относительно прямых $OA_1, \ldots, OA_n$, образуют правильный многоугольник.

8.20. Докажите, что если плоская фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.

8.21. Докажите, что если многоугольник имеет несколько (больше двух) осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

8.22. Докажите, что если плоский многоугольник имеет четное число осей симметрии, то он имеет центр симметрии.

§ 6. Задачи, использующие свойства композиций симметрий

8.23. Впишите в данную окружность n-угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.

8.24. Через центр O окружности проведены n прямых. Постройте описанный около окружности n-угольник, вершины которого лежат на этих прямых.

8.25. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках T_a, T_b, T_c. Пусть K_a, K_b, K_c — образы этих точек при симметрии относительно биссектрис углов A, B, C соответственно.

а) Докажите, что прямая K_aK_b параллельна прямой AB.

б) Обозначим середины сторон треугольника через M_a, M_b и M_c. Докажите, что если треугольник ABC не равнобедренный, то прямые M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c пересекаются в одной точке.

8.26. Две прямые пересекаются под углом γ. Блоха прыгает с одной прямой на другую; длина каждого прыжка равна 1 м, и блоха не прыгает обратно, если только это возможно. Докажите, что последовательность прыжков периодична тогда и только тогда, когда γ/π — рациональное число.

§ 7. Экстремальные задачи

8.27. Даны прямая l и две точки A, B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l точку X так, чтобы длина ломаной AXB была минимальна.

8.28. В данный остроугольный треугольник впишите треугольник наименьшего периметра.

8.29. Найдите кривую наименьшей длины, делящую равносторонний треугольник на две фигуры равной площади.

Задачи для самостоятельного решения

8.30. Может ли ограниченная фигура иметь один центр симметрии и ровно одну ось симметрии?

8.31. Дан невыпуклый четырехугольник периметра P. Докажите, что найдется выпуклый четырехугольник того же периметра, но большей площади.

8.32. Постройте точку P внутри треугольника ABC, для которой $KA=EB=HC$, где K, E, H — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны AB, BC, CA соответственно.

8.33. На плоскости задана ограниченная фигура Φ, обладающая следующими свойствами: для любой прямой l

1) пересечение l с Φ либо пусто, либо точка, либо отрезок;

2) существует ось симметрии фигуры Φ, параллельная l.

Докажите, что Φ есть круг или точка.

8.34. Вершины выпуклого четырехугольника лежат на различных сторонах квадрата. Докажите, что периметр этого четырехугольника не меньше $2\sqrt{2}a$, где a — сторона квадрата.

Решения

8.1. Обозначим образы точек A и B при симметрии относительно прямой CM через A' и B'. Тогда $AM+MB=A'M+MB>$ $> A'B=A'C+CB=AC+CB$.

8.2. Обозначим точки, симметричные точкам C и D относительно прямой AB, через C' и D' соответственно. $\angle C'MD=90°$, поэтому $CM^2+MD^2=C'M^2+MD^2=C'D^2$. Поскольку $\angle C'CD=$ $=45°$, хорда $C'D$ имеет постоянную длину.

8.3. Проведем диаметр окружности S, являющийся осью симметрии окружностей S_1 и S_2. Пусть точки C' и B_2' симметричны точкам C и B_2 относительно этого диаметра (рис. 80).

Окружности S_1 и S гомотетичны с центром гомотетии в точке A_1, причем при этой гомотетии прямая B_1B_2' переходит в прямую CC', поэтому эти прямые параллельны. Ясно также, что $B_2B_2' \parallel CC'$. Поэтому точки B_1, B_2' и B_2 лежат на одной прямой, причем эта прямая параллельна прямой CC'.

8.4. а) Пусть D' — точка, симметричная точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC (рис. 81). Тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABCD'} = S_{BAD'} + S_{BCD'} \leqslant \frac{1}{2} AB \cdot AD' + \frac{1}{2} BC \cdot CD' =$$
$= \frac{1}{2} (AB \cdot CD + BC \cdot AD)$, что и требовалось.

б) Из предыдущего видно, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $\angle D'AB = \angle D'CB = 90°$.

Предположим, что это равенство выполнено. Тогда четырехугольник $ABCD'$ вписанный, поэтому $ABCD$ тоже вписанный.

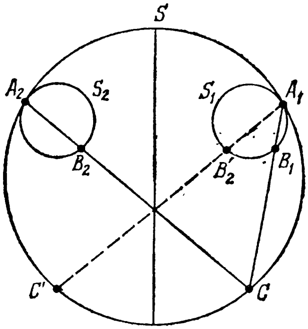


Рис. 80

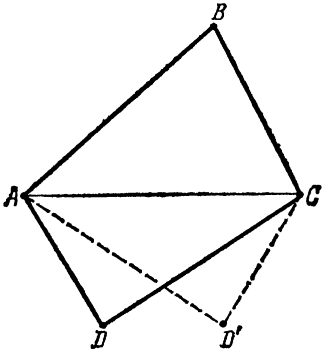


Рис. 81

Отрезок BD' является диаметром описанной окружности, поэтому $\angle BDD' = 90°$. Так как $AC \parallel DD'$, то $AC \perp BD$.

Обратно, если $ABCD$ — вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, то при симметрии точки D относительно серединного перпендикуляра к диагонали AC получаем точку D', для которой $\angle D'DB = 90°$, т. е. $D'B$ — диаметр описанной окружности. Поэтому $\angle D'AB = \angle D'CB = 90°$.

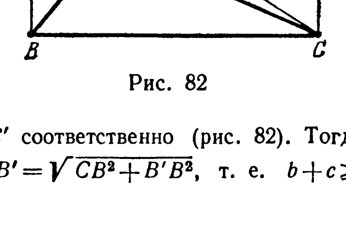


Рис. 82

8.5. Проведем через точку A прямую l, параллельную стороне BC. Обозначим образы точек B и C при симметрии относительно прямой l через B' и C' соответственно (рис. 82). Тогда $b + c = CA + AB = CA + AB' \geqslant CB' = \sqrt{CB^2 + B'B^2}$, т. е. $b + c \geqslant \sqrt{a^2 + (2h_a)^2}$. Отсюда

$$h_a^2 \leqslant \frac{1}{4} ((b+c)^2 - a^2) = p(p-a).$$

8.6. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Пусть для определенности $AD > AB$. Обозначим через B' точку, симметричную точке B относительно диагонали AC. Точка B' лежит на стороне AD, причем $B'D = AD - AB$.

В треугольнике $B'CD$ нам известны длины всех сторон: $B'D = AD - AB$, $B'C = BC$. Построив треугольник $B'CD$, на продолжении стороны $B'D$ за точку B' построим точку A. Дальнейшее построение очевидно.

8.7. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Для определенности будем считать, что $AD > AB$.

Пусть O — центр вписанной окружности; точка D' симметрична D относительно прямой AO; A' — точка пересечения прямых AO и DC, C' — точка пересечения прямых BC и $A'D'$ (рис. 83).

В треугольнике $BC'D'$ нам известны сторона BD' и прилегающие к ней углы $\angle D'BC' = 180° - \angle B$, $\angle BD'C' = \angle D$. Построим треугольник $BC'D'$ по этим элементам. Поскольку

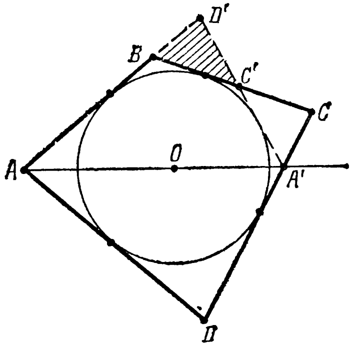


Рис. 83

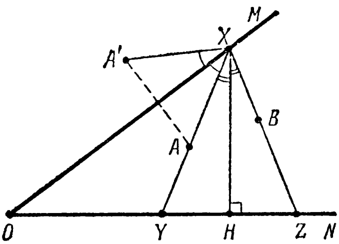


Рис. 84

$AD' = AD$, мы можем построить точку A. Затем строим точку O, являющуюся точкой пересечения биссектрис углов ABC' и $BD'C'$. Зная положение точки O, мы можем построить точку D и вписанную окружность. Точка C является точкой пересечения прямой BC' и касательной к окружности, проведенной из точки D.

8.8. Предположим, что треугольник ABC построен. Обозначим через C' точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, через B' — точку, симметричную B относительно прямой CC'. Для определенности будем считать, что $AC < BC$. Тогда $\angle ACB' = \angle ACC' + \angle C'CB = 180° - \angle A + \angle C'CB = 180° - (\angle A - \angle B)$, т. е. угол ACB' нам известен.

Треугольник ABB' мы можем построить, поскольку $AB = c$, $BB' = 2h$ и $\angle ABB' = 90°$. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BB' и дуги окружности, из которой отрезок AB' виден под углом $180°-(\angle A-\angle B)$.

8.9. Пусть проекция точки A на прямую ON лежит ближе к точке O, чем проекция точки B. Предположим, что мы построили равнобедренный треугольник XYZ. Рассмотрим точку A', симметричную точке A относительно прямой OM. Опустим из точки X перпендикуляр XH на прямую ON (рис. 84). Поскольку $\angle A'XB = \angle A'XO+\angle OXA+\angle YXH + \angle HXZ=2\angle OXY+2\angle YXH = 2\angle OXH=180°-2\angle MON$, угол $A'XB$ известен. Точка X является точкой пересечения прямой OM и дуги, из которой отрезок $A'B$ виден под углом $180°-2\angle MON$. При этом проекция точки X на прямую ON должна лежать между проекциями точек A и B.

Обратно, если $\angle A'XB=180°-2\angle MON$ и проекция точки X на прямую ON лежит между проекциями точек A и B, то треугольник XYZ равнобедренный.

8.10. Предположим, что точка X построена. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно прямой MN.

П е р в о е р е ш е н и е. Проведем окружность с центром в точке B', касающуюся прямой MN. Тогда прямая AX является

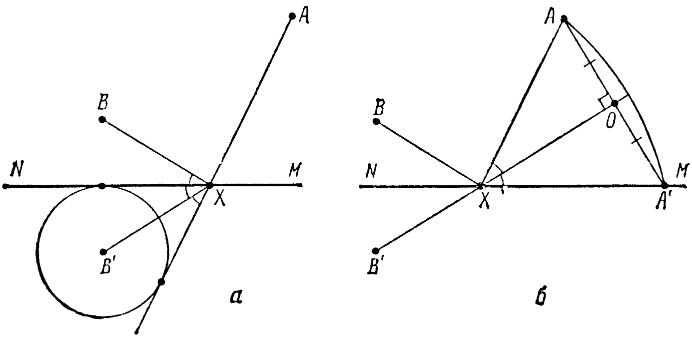


Рис. 85

касательной к этой окружности (см. рис. 85, *а*; не любая касательная годится).

В т о р о е р е ш е н и е. Пусть окружность радиуса AB' с центром в точке B' пересекает прямую MN в точке A'. Тогда прямая $B'X$ является биссектрисой угла $AB'A'$.

Построение: пусть O — середина отрезка AA'; точка X является точкой пересечения прямой $B'O$ и прямой MN (рис. 85, *б*).

8.11. Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно биссектрисы угла C. Тогда точка C является точкой пересечения прямой $A'B$ и прямой, на которой лежит биссектриса угла C.

8.12. Пусть A_2 и A_3 — точки, симметричные точке A относительно прямых l_2 и l_3. Тогда точки A_2 и A_3 лежат на прямой BC. Поэтому точки B и C являются точками пересечения прямой A_2A_3 с прямыми l_2 и l_3.

8.13. Предположим, что треугольник ABC построен, причем N — середина AC, M — середина BC и биссектриса угла A лежит на данной прямой l.

Построим точку N', симметричную точке N относительно прямой l. Прямая BA проходит через точку N' и параллельна прямой MN (рис. 86). Таким образом мы находим вершину A и прямую BA. Проведя прямую AN, получаем прямую AC. Остается построить отрезок, концы которого лежат на сторонах угла BAC и точка M является его серединой (см. решение задачи 7.13).

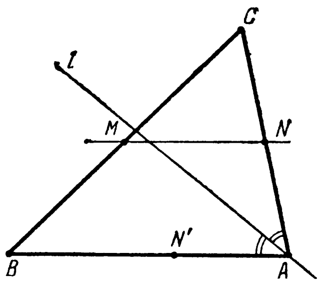


Рис. 86

8.14. Пусть X — произвольная точка, $X_1 = S_{l_1}(X)$ и $X_2 = S_{l_2}(X_1)$.

а) Выберем на прямой l_1 произвольную точку O и рассмотрим систему координат с началом O и осью абсцисс, направленной по прямой l_1. Прямая l_2 задается в этой системе координат уравнением $y = a$. Обозначим ординаты точек X, X_1, X_2 через y, y_1, y_2 соответственно. Ясно, что $y_1 = -y$ и $y_2 = (a - y_1) + a = y + 2a$. Поскольку точки X, X_1, X_2 имеют одинаковые абсциссы, $X_2 = T_{2a}(X)$, где T_a — перенос, переводящий l_1 в l_2, причем $a \perp l_1$.

б) Рассмотрим систему координат с началом O и осью абсцисс, направленной по прямой l_1. Пусть угол поворота от прямой l_1 к l_2 в этой системе координат равен α, углы поворотов от оси абсцисс до лучей OX, OX_1, OX_2 равны φ, φ_1, φ_2 соответственно. Ясно, что $\varphi_1 = -\varphi$ и $\varphi_2 = (\alpha - \varphi_1) + \alpha = \varphi + 2\alpha$. Так как $OX = OX_1 = OX_2$, то $X_2 = R_O^{2\alpha}(X)$, где R_O^{α} — поворот, переводящий l_1 в l_2.

8.15. Представим $T \circ T$ в виде композиции трех преобразований:

$$T \circ T = (S_a \circ S_b \circ S_c) \circ (S_a \circ S_b \circ S_c) = (S_a \circ S_b) \circ (S_c \circ S_a) \circ (S_b \circ S_c).$$

При этом $S_a \circ S_b$ — поворот на угол $2\angle(b, a)$, $S_c \circ S_a$ — поворот на $2\angle(a, c)$, $S_b \circ S_c$ — поворот на $2\angle(c, b)$. Сумма углов поворотов равна $2(\angle(b, a) + \angle(a, c) + \angle(c, b))$. Величина угла между прямыми определена с точностью до 180°, поэтому удвоенный угол между прямыми определен с точностью до 360°, т. е.

как и обычный угол. Поэтому $2(\angle(b, a)+\angle(a, c)+\angle(c, b))=$ $=2\angle(b, b)=0°$. Композиция поворотов на углы, в сумме составляющие 0°, является параллельным переносом (см. задачу 9.25).

8.16. Если точки X и Y симметричны относительно прямой l_3, то точки $S_{l_1}(X)$ и $S_{l_1}(Y)$ симметричны относительно прямой l_2, т. е. $S_{l_1}(X)=S_{l_2}\circ S_{l_1}(Y)$. Поэтому $S_{l_1}\circ S_{l_3}=S_{l_2}\circ S_{l_1}$ и $S_{l_3}=$ $=S_{l_1}\circ S_{l_2}\circ S_{l_1}$.

8.17. Обозначим центр данного круга через O, круг радиуса R с центром O — через D_R. Докажем, что множеством образов точек D_R при симметриях относительно прямых, проходящих через D_1, является круг D_{R+2}. В самом деле, образы точки O при указанных симметриях заполняют круг D_2, а круги радиуса R с центрами в D_2 заполняют круг D_{R+2}. Поэтому за n отражений из точек D_1 мы можем получить любую точку из D_{2n+1} и только эти точки. Остается заметить, что точку A мы можем «загнать» внутрь D_R за n отражений тогда и только тогда, когда за n отражений мы можем перевести некоторую точку из D_R в A.

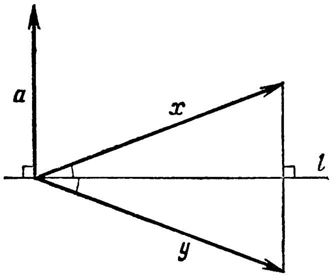


Рис. 87

8.18. Пусть $\boldsymbol{y}=S_l(\boldsymbol{x})$. Тогда $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}$ и $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\perp\boldsymbol{a}$ (рис. 87). Поэтому $0=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})=(2\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})+\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$,

т. е. $\lambda=-2\dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$. Отсюда $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}-2\dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$.

8.19. Обозначим симметрии относительно прямых $OA_1, \ldots, OA_n$ через $S_1, \ldots, S_n$. Пусть $X_k=S_k(X)$ при $k=1, \ldots, n$. Нам нужно доказать, что при некотором повороте относительно точки O система точек $X_1, \ldots, X_n$ переходит в себя. Ясно, что $S_{k+1}\circ S_k(X_k)=S_{k+1}\circ S_k\circ S_k(X)=X_{k+1}$. Преобразования $S_{k+1}\circ S_k$ являются поворотами относительно точки O на угол $4\pi/n$ (см. задачу 8.14б)).

Замечание. При четном n получается $n/2$-угольник.

8.20. Пусть прямые l_1 и l_2 являются осями симметрии плоской фигуры. Это означает, что если точка X принадлежит фигуре, то точки $S_{l_1}(X)$ и $S_{l_2}(X)$ принадлежат фигуре. Рассмотрим прямую $l_3=S_{l_1}(l_2)$. Согласно задаче 8.16 $S_{l_3}(X)=S_{l_1}\circ S_{l_2}\circ S_{l_1}(X)$, поэтому l_3 также является осью симметрии фигуры.

Если у фигуры ровно две оси симметрии, то $l_3=l_1$ или $l_3=l_2$. Ясно, что $l_3\neq l_1$. Поэтому $l_3=l_2$, т. е. прямая l_2 перпендикулярна прямой l_1.

8.21. Предположим, что многоугольник имеет три оси симметрии, которые не пересекаются в одной точке, т. е. эти оси образуют треугольник.

Пусть X — точка многоугольника, наиболее удаленная от некоторой внутренней точки M этого треугольника. Точки X и M лежат по одну сторону от одной из рассматриваемых осей симметрии l. Если X' — точка, симметричная X относительно прямой l, то $MX' > MX$ и точка X' более удалена от точки M, чем точка X. Получено противоречие, поэтому все оси симметрии многоугольника пересекаются в одной точке.

8.22. Все оси симметрии проходят через одну точку O (задача 8.21). Если l_1 и l_2 — оси симметрии, то $l_3 = S_{l_2}(l_1)$ — тоже ось симметрии (см. задачу 8.16). Выберем одну из осей симметрии l нашего многоугольника. Остальные оси разбиваются на пары прямых, симметричных относительно l. Если прямая l_1, перпендикулярная l и проходящая через точку O, не является осью симметрии, то число осей симметрии нечетно. Поэтому прямая l_1 является осью симметрии. Ясно, что $S_{l_1} \circ S_l = R_O^{180°}$ — центральная симметрия, т. е. O — центр симметрии.

8.23. Предположим, что многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ построен. Проведем через центр окружности O серединные перпендикуляры $l_1, l_2, \ldots, l_n$ к хордам $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ соответственно. Прямые $l_1, \ldots, l_n$ нам известны, поскольку они проходят через точку O и перпендикулярны данным прямым. $A_2 = S_{l_1}(A_1)$, $A_3 = S_{l_2}(A_2), \ldots, A_1 = S_{l_n}(A_n)$, т. е. точка A_1 является неподвижной точкой композиции симметрий $S_{l_n} \circ S_{l_{n-1}} \circ \ldots \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$. При нечетном n на окружности имеется ровно две неподвижные точки, при четном n либо неподвижных точек нет, либо все точки неподвижны.

8.24. Предположим, что мы построили искомый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Рассмотрим многоугольник $B_1 \ldots B_n$, образованный точками касания описанного многоугольника с окружностью. Ясно, что стороны многоугольника $B_1 \ldots B_n$ перпендикулярны данным прямым, т. е. имеют заданные направления. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, построим многоугольник $B_1 \ldots B_n$. Проводя касательные к окружности в точках $B_1, \ldots, B_n$, получаем многоугольник $A_1 \ldots A_n$.

8.25. а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим прямую OA через a, прямую OB — через b. Тогда $S_a \circ S_b(T_c) = S_a(T_a) = K_a$ и $S_b \circ S_a(T_c) = S_b(T_b) = K_b$, поэтому точки K_a и K_b получаются из точки T_c поворотом с центром O на углы, в сумме дающие 360°, т. е. $\angle K_bOT_c = \angle K_aOT_c$. Из этого следует, что $K_aK_b \parallel AB$.

б) Из а) вытекает, что треугольники $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ имеют соответственно параллельные стороны, поэтому эти треугольники гомотетичны и прямые K_aM_a, K_bM_b, K_cM_c пересекаются в одной точке.

8.26. Для каждого вектора прыжка блохи имеется ровно два положения блохи, для которых прыжок задается этим вектором. Поэтому последовательность прыжков периодична тогда и только тогда, когда имеется лишь конечное число различных векторов прыжков.

Пусть $\boldsymbol{a}_1$ — вектор прыжка блохи с прямой l_2 на прямую l_1, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, ... — векторы последующих прыжков блохи. Тогда $\boldsymbol{a}_2=S_{l_2}(\boldsymbol{a}_1)$, $\boldsymbol{a}_3=S_{l_1}(\boldsymbol{a}_2)$, $\boldsymbol{a}_4=S_{l_2}(\boldsymbol{a}_3)$, ... Поскольку композиция $S_{l_1}\circ S_{l_2}$ является поворотом на угол 2γ (или на угол $2\pi-2\gamma$), векторы $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{a}_7$, ... получаются из вектора $\boldsymbol{a}_1$ поворотами на 2γ, 4γ, 6γ, ... (или $2(\pi-\gamma)$, $4(\pi-\gamma)$, $6(\pi-\gamma)$, ...). Поэтому набор $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5$, ... содержит конечное число различных векторов тогда и только тогда, когда γ/π является рациональным числом. Набор $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_6$, ... рассматривается аналогично.

8.27. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой l. Пусть X — точка на прямой l. Тогда $AX+XB=$ $=A'X+XB\geqslant A'B$, причем равенство достигается, только если точка X лежит на отрезке $A'B$. Поэтому искомая точка является точкой пересечения прямой l и отрезка $A'B$.

8.28. Пусть на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки P, Q, R соответственно. При симметрии треугольника ABC относительно стороны BC получается треугольник

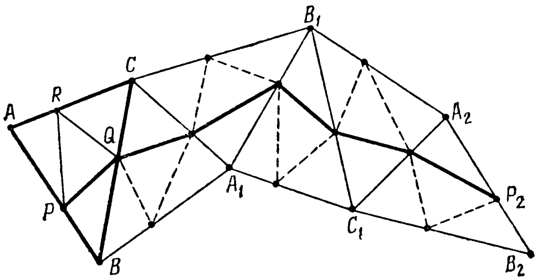


Рис. 88

A_1BC. Рассмотрим далее симметрии относительно сторон CA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_2 и A_2B_2 (рис. 88). Композиция этих симметрий является композицией поворотов относительно точек C, B_1 и A_2 на углы $2\angle C$, $2\angle B$ и $2\angle C$ соответственно. Поскольку в сумме эти углы дают 360°, композиция этих поворотов является параллельным переносом.

Длина выделенной на рисунке ломаной равна удвоенному периметру треугольника PQR, поэтому периметр треугольника PQR не меньше половины длины отрезка PP_2. Ясно также, что длина отрезка PP_2 не зависит от положения точки P на стороне AB, поскольку A_2B_2 получается из AB параллельным переносом. Если $\angle APR = \angle BPQ$, $\angle PQB = \angle RQC$ и $\angle ARP = \angle CRQ$ (т. е. P, Q, R — основания высот треугольника ABC), то ломаная превращается в отрезок PP_2 и периметр треугольника минимален.

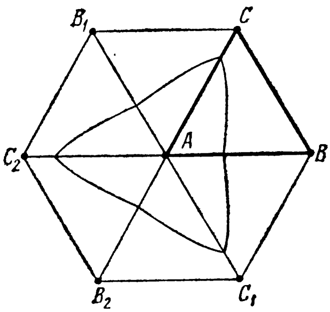


Рис. 89

Обратно, если ломаная превращается в отрезок PP_2, то должно выполняться указанное выше равенство углов, т. е. P, Q, R — основания высот треугольника.

8.29. При решении задачи нам придется воспользоваться фактом, который будет доказан во второй части: из всех замкнутых кривых, ограничивающих фигуры площади S, наименьшую длину имеет окружность; при этом ее длина равна $2\sqrt{\pi S}$.

Рассмотрим кривую, делящую площадь равностороннего треугольника площади S пополам. Возможны два случая: либо кривая отделяет одну из вершин треугольника (для определенности вершину A) от противоположной стороны, либо кривая замкнута. Во втором случае ее длина не меньше $\sqrt{2\pi S}$.

Рассмотрим первый случай. Образы кривой при последовательных симметриях относительно прямых AC, AB_1, AC_2, AB_2 и AC_1 (рис. 89) образуют замкнутую кривую, ограничивающую фигуру площади $3S$. Поэтому искомой кривой является дуга окружности радиуса $\sqrt{3S/\pi}$ с центром в точке A. Ее длина равна $\sqrt{\pi S/3} < \sqrt{2\pi S}$.

Глава 9

ПОВОРОТ

Основные сведения

1. Мы не будем давать строгого определения поворота. Для решения задач достаточно иметь следующее представление о повороте: *поворот с центром* O (или *относительно точки* O) на угол φ — это преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X', обладающую свойствами:

а) $OX' = OX$;

б) угол поворота от вектора $\overrightarrow{OX}$ к вектору $\overrightarrow{OX'}$ равен φ.

2. В главе используются следующие обозначения для преобразований и их композиций:

$T_{\boldsymbol{a}}$ — перенос на вектор $\boldsymbol{a}$;

S_O — симметрия относительно точки O;

S_l — симметрия относительно прямой l;

R_O^{φ} — поворот с центром O на угол φ;

$F \circ G$ — композиция преобразований F и G, причем $(F \circ G)(X) = F(G(X))$.

3. Задачи, решаемые с помощью поворотов, можно разделить на два больших класса: задачи, не использующие свойств композиции поворотов, и задачи, использующие эти свойства.

Для решения задач, использующих свойства композиции поворотов, нужно твердо усвоить результат задачи 9.25: $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha} = R_C^{\gamma}$, где $\gamma = \alpha + \beta$ и $\angle BAC = \alpha/2$, $\angle ABC = \beta/2$.

Вводные задачи

1. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

2. Докажите, что выпуклый n-угольник является правильным тогда и только тогда, когда он переходит в себя при повороте на угол $360°/n$ относительно некоторой точки.

3. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на $60°$ (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C.

4. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника образуют правильный многоугольник.

5. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

§ 1. Поворот на 90°

9.1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

9.2. Даны четыре точки на одной прямой. Постройте квадрат, продолжения сторон которого пересекают эту прямую в данных точках.

9.3. Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B. Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

9.4. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P, из A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

9.5. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

9.6. Вокруг квадрата описан параллелограмм. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют квадрат.

§ 2. Поворот на 60°

9.7. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE. M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

9.8. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых l_1, l_2 и l_3.

9.9. Рассмотрим всевозможные равносторонние треугольники PKM, вершина P которых фиксирована, а вершина K лежит в данном квадрате. Найдите геометрическое место вершин M.

9.10. Вокруг правильного треугольника ABC описана окружность. На дуге AB взята точка M. Докажите, что $MC=MA+MB$.

9.11. ABC — правильный треугольник. Найдите геометрическое место точек M, лежащих внутри треугольника, для которых $MA^2=MB^2+MC^2$.

9.12. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, K — середина диагонали BD, M — середина стороны EF. Докажите, что треугольник AMK правильный.

9.13. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

9.14. Внутри остроугольного треугольника ABC с длинами сторон a, b, c взята точка O, из которой все стороны видны под углом 120°. При этом $AO=u$, $BO=v$, $CO=w$. PQR — равносторонний треугольник, внутри которого имеется точка E, обладающая тем свойством, что $PE=a$, $QE=b$, $RE=c$. Докажите, что длина стороны треугольника PQR равна $u+v+w$.

9.15. Правильные треугольники ABC, CDE, EHK (вершины обходятся в направлении против часовой стрелки) расположены на плоскости так, что $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$. Докажите, что треугольник BHD тоже правильный.

9.16. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Докажите, что:

а) $AA_1=BB_1=CC_1$;

б) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O;

в) для остроугольного треугольника ABC точка O лежит внутри треугольника и $OA_1=OB+OC$.

9.17. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники A_1BC, AB_1C, ABC_1. Восстановите треугольник ABC, зная вершины A_1, B_1, C_1 этих треугольников.

9.18. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R, причем $AB=CD=EF=R$. Докажите, что середины сторон BC, DE, FA образуют правильный треугольник.

§ 3. Повороты на произвольные углы

9.19. Поворот с центром O переводит прямую l_1 в прямую l_2, а точку A_1, лежащую на прямой l_1,— в точку A_2. Докажите, что точка пересечения прямых l_1

и l_2 лежит на описанной окружности треугольника A_1OA_2.

9.20. На плоскости лежат две одинаковые буквы Г. Концы коротких палочек этих букв обозначим через A и A'. Длинные палочки разбиты на n равных частей точками $A_1, \ldots, A_{n-1}$; $A'_1, \ldots, A'_{n-1}$ (точки деления нумеруются от концов длинных палочек). Прямые AA_i и $A'A'_i$ пересекаются в точке X_i. Докажите, что точки $X_1, \ldots, X_{n-1}$ образуют выпуклый многоугольник.

9.21. По двум прямым, пересекающимся в точке P, равномерно с одинаковой скоростью движутся точки: по одной прямой — точка A, по другой — точка B. Через точку P они проходят не одновременно. Докажите, что в любой момент времени окружность, описанная вокруг треугольника ABP, проходит через некоторую фиксированную точку, отличную от P.

9.22. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC поворотом на угол α ($\alpha<180°$) вокруг центра его описанной окружности. Докажите, что точки пересечения сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 (или их продолжений) являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC.

б) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ получен из четырехугольника $ABCD$ поворотом на угол α ($\alpha<180°$). Докажите, что точки пересечения соответствующих сторон являются вершинами параллелограмма.

9.23. Докажите, что три прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через точку пересечения высот треугольника, относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

9.24. По арене цирка, являющейся кругом радиуса 10 м, бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов его поворотов не меньше 2998 радиан.

§ 4. Композиции поворотов на 90°

9.25. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360°, является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота?

Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360°.

9.26. Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и CDE с заданными на плоскости вершинами прямых углов B и D имеют общую вершину C (при этом повороты от AB к BC и от CD к DE — в одну сторону). Докажите, что положение середины отрезка AE не зависит от выбора точки C.

9.27. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны по длине и перпендикулярны.

9.28. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

9.29. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами P, Q, R. На сторонах треугольника PQR внутренним образом построены квадраты. Докажите, что их центры являются серединами сторон треугольника ABC.

9.30. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABO_1, BCO_2, CDO_3, DAO_4. Докажите, что если $O_1=O_3$, то $O_2=O_4$.

§ 5. Композиции поворотов на 60°

9.31. На сторонах произвольного треугольника построены внешним образом равносторонние треугольники. Докажите, что их центры образуют равносторонний треугольник.

9.32. На сторонах треугольника ABC построены правильные треугольники $A'BC$, $B'AC$ во внешнюю сторону, $C'AB$ — во внутреннюю. M — центр треугольника $C'AB$. Докажите, что $A'B'M$ — равнобедренный треугольник, причем $\angle A'MB'=120°$.

9.33. На сторонах центрально симметричного шестиугольника как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Докажите, что середины отрезков, соединяющих их вершины, образуют правильный шестиугольник.

§ 6. Композиции поворотов на произвольные углы

9.34. Постройте n-угольник, если известны n точек, являющихся вершинами равнобедренных треугольников, построенных на сторонах этого n-угольника и имеющих при вершинах углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

9.35. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равнобедренные треугольники $A'BC$, $AB'C$, ABC'. Точки A', B', C' являются вершинами этих равнобедренных треугольников, углы при этих вершинах равны α, β, γ соответственно, причем $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$. Докажите, что углы треугольника $A'B'C'$ равны $\alpha/2$, $\beta/2$, $\gamma/2$.

9.36. AKL и AMN — подобные равнобедренные треугольники с вершиной A и углом при вершине α. Пусть GNK и $G'LM$ — подобные равнобедренные треугольники с углом при вершине $\pi-\alpha$. Докажите, что $G=G'$. (Треугольники надо считать ориентированными.)

Задачи для самостоятельного решения

9.37. На плоскости проведена окружность радиуса 1 с центром O. Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки O могут лежать две другие его вершины?

9.38. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ABM, CDP во внешнюю сторону, а BCN, ADK — во внутреннюю. Докажите, что $MN=AC$.

9.39. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами M, N, P, Q. Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $MNPQ$ образуют квадрат.

9.40. Внутри правильного треугольника ABC лежит точка O. Известно, что $\angle AOB=113°$, $\angle BOC=123°$. Найдите углы треугольника, стороны которого равны отрезкам OA, OB, OC.

9.41. На плоскости проведено n прямых ($n>2$), причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Известно, что можно повернуть плоскость вокруг некоторой точки O на некоторый угол α ($\alpha<180°$) так, что каждая из проведенных прямых совместится с какой-нибудь другой проведенной прямой. Укажите все n, для которых это возможно.

9.42. По кругу расположены 10 шестеренок различных размеров. Первая шестеренка сцеплена со второй, вторая с третьей и т. д. Десятая сцеплена с первой. Всегда ли такая система может вращаться? Может ли вращаться такая же система, состоящая из 11 шестеренок?

9.43. На необитаемом острове пират зарыл клад, руководствуясь следующими построениями. Пусть A и B —

два камня, C_1, C_2, C_3 — три пальмы. Точку P_1 пират строил так: от A дошел до C_1, затем свернул налево на $90°$ и прошел еще столько же (т. е. AC_1), там он отметил точку A_1. Потом он от B дошел до C_1, свернул на $90°$ направо и прошел расстояние BC_1. Там он отметил точку B_1. Точку пересечения прямых AB_1 и BA_1 он обозначил через P_1. Аналогичным образом пират построил точки P_2, P_3 и зарыл клад в центре окружности, проведенной через P_1, P_2, P_3. Когда пират вернулся на остров, пальм не было. Но он все же нашел клад. Как?

Решения

9.1. Повернем квадрат $ABCD$ относительно точки A на $90°$ так, чтобы точка B перешла в точку D (рис. 90). При этом повороте точка M переходит в точку M', а точка K — в точку K'. Ясно, что $\angle BMA = \angle DM'A$. Так как $\angle MAK = \angle MAB = \angle M'AD$, то $\angle MAD = \angle M'AK$. Поэтому $\angle M'AK = \angle MAD = \angle BMA = \angle DM'A$, т. е. треугольник AKM' равнобедренный. Отсюда $AK = KM' = KD + DM' = KD + BM$.

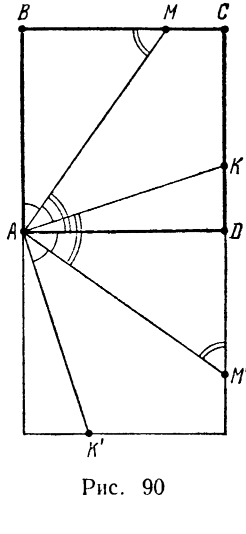


Рис. 90

9.2. Предположим, что мы построили квадрат $PQRS$ так, что продолжения сторон PQ, RS, PS и QR проходят через данные точки A, B, C и D соответственно. Опустим перпендикуляры BX и CY на прямые PQ и QR соответственно. Точки X и Y лежат на окружностях S_1 и S_2, построенных на отрезках AB и CD как на диаметрах (рис. 91).

Пусть S_2' — образ окружности S_2 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CB}$, Y' — образ точки Y при этом переносе. Поскольку $BX = BY'$ и $\angle XBY' = 90°$, точка Y' является точкой пересечения окружности S_2' и окружности S_2'', являющейся образом окружности S_1 при повороте на $90°$ относительно точки B. Дальнейшее построение очевидно.

9.3. Совершим поворот на $90°$ относительно точки B, переводящий вершину K в вершину N, а вершину C — в A. При этом точка A переходит в некоторую точку A', точка E — в E'. Так как точки E' и B являются серединами сторон $A'N$ и $A'C$ треугольника $A'NC$, $BE' \parallel NC$. Но $\angle EBE' = 90°$, поэтому $BE \perp NC$.

9.4. При повороте относительно центра квадрата на $90°$, переводящем точку A_1 в точку A_2, перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2, A_3, A_4, переходят в прямые A_2P, A_3P, A_4P, A_1P

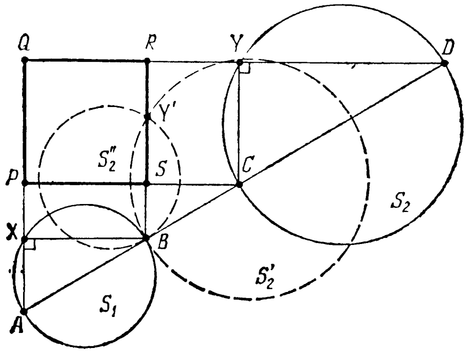


Рис. 91

соответственно. Поэтому точкой их пересечения является образ точки P при обратном повороте.

9.5. Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BM}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$; $R\boldsymbol{a}$ и $R\boldsymbol{b}$ — векторы, полученные из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поворотом на $90°$ против часовой стрелки, т. е. $R\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BA}$, $R\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BQ}$; O_1, O_2, O_3,

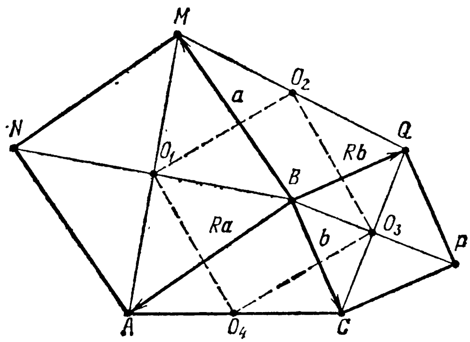


Рис. 92

O_4 — середины отрезков AM, MQ, QC, CA соответственно (рис. 92). Тогда $\overrightarrow{BO_1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+R\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{BO_2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+R\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{BO_3}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+R\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{BO_4}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+R\boldsymbol{a})$. Поэтому $\overrightarrow{O_1O_2}=\frac{1}{2}(R\boldsymbol{b}-R\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{O_2O_3}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,

$\overrightarrow{O_3O_4}=\frac{1}{2}(Ra-Rb)$, $\overrightarrow{O_4O_1}=\frac{1}{2}(a-b)$. Следовательно, $\overrightarrow{O_1O_2}=$ $=-\overrightarrow{O_3O_4}$, $\overrightarrow{O_2O_3}=-\overrightarrow{O_4O_1}$ и $\overrightarrow{O_1O_2}=R\overrightarrow{O_2O_3}$, т. е. $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

9.6. Вокруг квадрата $ABCD$ описан параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (точка A лежит на стороне A_1B_1, B — на стороне B_1C_1 и т. д.). Опустим из вершин A_1, B_1, C_1, D_1 перпендикуляры l_1, l_2, l_3, l_4 на стороны квадрата. Чтобы доказать, что эти прямые образуют квадрат, нам достаточно проверить, что при повороте на 90° относительно центра O квадрата $ABCD$ прямые l_1, l_2, l_3, l_4 переходят друг в друга. При повороте относительно точки O на 90° точки A_1, B_1, C_1, D_1 переходят в точки A_2, B_2, C_2, D_2 (рис. 93).

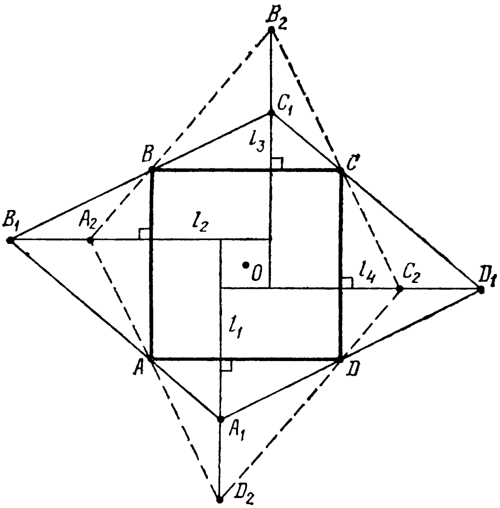


Рис. 93

Поскольку $AA_2 \perp B_1B$ и $BA_2 \perp B_1A$, $B_1A_2 \perp AB$ (высоты треугольника ABB_1 пересекаются в одной точке; см. решение задачи 10.1). Это означает, что прямая l_1 переходит при повороте на 90° относительно точки O в прямую l_2. Для остальных прямых доказательство аналогично.

9.7. Рассмотрим поворот на 60° относительно точки C, переводящий точку E в D. При этом точка B переходит в A, т. е. отрезок BE переходит в отрезок AD. Поэтому середина P отрезка BE переходит в середину M отрезка AD, т. е. треугольник CPM равносторонний.

9.8. Предположим, что мы построили треугольник ABC так, что его вершины A, B, C лежат на прямых l_1, l_2, l_3 соответственно. При повороте на 60° относительно точки A точка B переходит в точку C. Поэтому точка C является точкой пересечения прямой l_3 и образа прямой l_2 при повороте на $60°$ (в обе стороны) относительно точки A.

9.9. Точка M получается из точки K поворотом на $60°$ относительно точки P. Поэтому искомое геометрическое место точек является объединением двух квадратов, получающихся из данного квадрата поворотами на $\pm 60°$ относительно точки P.

9.10. Пусть M' — образ точки M при повороте на $60°$ относительно точки B, переводящем точку A в точку C. Угол AMB опирается на дугу величиной $240°$, поэтому $\angle CM'B = \angle AMB = 120°$. Треугольник $MM'B$ равносторонний, поэтому $\angle BM'M = 60°$. Поскольку $\angle CM'B + \angle BM'M = 180°$, точка M' лежит на отрезке MC. Поэтому $MC = MM' + M'C = MB + MA$.

9.11. Рассмотрим поворот относительно точки A на $60°$, переводящий вершину B в вершину C. При этом повороте точка M переходит в некоторую точку M', а точка C — в точку D. Равенство $MA^2 = MB^2 + MC^2$ эквивалентно равенству $M'M^2 = M'C^2 + MC^2$, т. е. тому, что $\angle MCM' = 90°$. Это равенство в свою очередь эквивалентно тому, что $\angle MCB + \angle MBC = \angle MCB + \angle M'CD = 120° - 90° = 30°$, т. е. $\angle BMC = 150°$. Искомым геометрическим местом точек является лежащая внутри треугольника дуга окружности, из которой отрезок BC виден под углом $150°$.

9.12. Обозначим центр шестиугольника через O. Рассмотрим поворот с центром A на $60°$, переводящий точку B в точку O. При этом повороте отрезок OC переходит в отрезок FE. Точка K является серединой диагонали BD параллелограмма $BCDO$, поэтому она является серединой диагонали CO. Следовательно, точка K при рассматриваемом повороте переходит в точку M, т. е. треугольник AMK правильный.

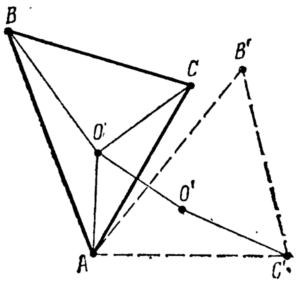


Рис. 94

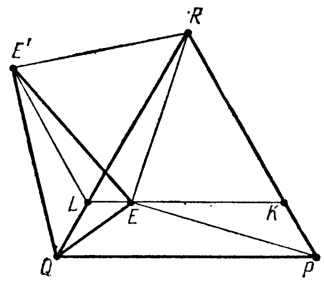


Рис. 95

9.13 Пусть O — точка внутри треугольника ABC. При повороте на $60°$ относительно точки A точки B, C, O переходят в некоторые точки B', C', O' (рис. 94). Так как $AO = OO'$ и $OC = O'C'$, то $BO + AO + CO = BO + OO' + O'C$. Длина ломаной $BOO'C$ минимальна тогда, когда эта ломаная является отрезком, т. е. $\angle AOB = \angle AO'C' = \angle AOC = 120°$. Искомой точкой является точка пересечения дуг окружностей, из которых отрезки AB, BC и AC видны под углом 120°. Для остроугольного треугольника эта точка лежит внутри треугольника.

9.14. Пусть E' — образ точки E при повороте на 60° относительно точки R, переводящем точку P в Q. Тогда $QE' = PE = a$, $QE = b$ и $EE' = RE = c$, т. е. треугольник $EE'Q$ равен треугольнику ABC.

Пусть прямая, проведенная через точку E параллельно QP, пересекает сторону PR в точке K, сторону QR — в точке L (рис. 95). Отрезок KE переходит в LE', значит, $\angle QLE = \angle ELE' = \angle E'LQ = 120°$ и точка L треугольника $EE'Q$ соответствует точке O треугольника ABC, поэтому $LE = u$, $LE' = v$, $LQ = w$. Следовательно,

$$RQ = RL + LQ = KL + w = LE + EK + w = u + v + w.$$

9.15. При повороте относительно точки C на 60° против часовой стрелки точка A переходит в точку B, точка D — в точку E. Поэтому при повороте на 60° против часовой стрелки вектор $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD}$ переходит в вектор $\overrightarrow{BE}$.

Поскольку при повороте относительно точки H на 60° против часовой стрелки точка K переходит в точку E и вектор $\overrightarrow{DK}$ переходит в вектор $\overrightarrow{BE}$, точка D при этом повороте переходит в точку B, т. е. треугольник BHD равносторонний.

9.16. При повороте на 60° относительно точки C точка A переходит в точку B_1, точка A_1 — в точку B. Поэтому $AA_1 = BB_1$. Аналогично, $AA_1 = CC_1$. Кроме того, угол между прямыми AA_1 и BB_1 равен 60°.

Пусть O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Отложим на луче OB_1 отрезок OO_1 так, что $OO_1 = AO$. При повороте на 60° относительно точки A точки B_1, O_1, B переходят в точки C, O, C_1 соответственно. Поэтому точки C, O, C_1 лежат на одной прямой и $B_1O_1 = CO$.

Из точки O все стороны треугольника ABC видны под углом 120°, поэтому для остроугольного треугольника эта точка лежит внутри треугольника. Тогда точка O_1 лежит на отрезке OB_1 и $OB_1 = OO_1 + O_1B_1 = AO + CO$. Аналогично, $OA_1 = BO + CO$, $OC_1 = AO + BO$. Этим завершается решение всех трех задач.

9.17. Согласно предыдущей задаче прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O, причем $\angle A_1OB_1 = \angle B_1OC_1 = \angle C_1OA_1 = 120°$, $OA_1 = OB + OC$, $OB_1 = OA + OC$, $OC_1 = OA + OB$. Из последних трех равенств получаем $OA = \frac{1}{2}(OB_1 + OC_1 - OA_1)$.

Отсюда вытекает следующее построение. Сначала мы строим точку O, из которой стороны треугольника $A_1B_1C_1$ видны под углом 120°. Затем на луче A_1O откладываем точку A так, чтобы $OA = \frac{1}{2}(OB_1+OC_1-OA_1)$ и точка O лежала между точками A и A_1. Аналогично строим вершины B и C.

9.18. Пусть P, Q, R — середины сторон BC, DE, FA; O — центр описанной окружности. Предположим, что треугольник PQR правильный. Докажем, что тогда середины сторон BC, DE', $F'A$ шестиугольника $ABCDE'F'$, в котором вершины E' и F' получены из точек E и F поворотом на некоторый угол относительно точки O, тоже образуют правильный треугольник. Этим будет все доказано, поскольку для правильного шестиугольника середины сторон BC, DE, FA образуют правильный треугольник, а любой из рассматриваемых нами шестиугольников может быть получен из правильного поворотами треугольников OCD и OEF.

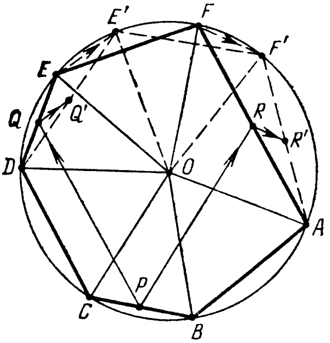


Рис. 96

Пусть Q' и R' — середины сторон DE' и AF' (рис. 96). При повороте на 60° вектор $\overrightarrow{EE'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{FF'}$. Поскольку $\overrightarrow{QQ'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EE'}$ и $\overrightarrow{RR'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FF'}$, вектор $\overrightarrow{QQ'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{RR'}$ при этом повороте. По предположению треугольник PQR правильный, т. е. вектор $\overrightarrow{PQ}$ переходит в вектор $\overrightarrow{PR}$ при повороте на 60°. Поэтому вектор $\overrightarrow{PQ'}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QQ'}$ переходит в вектор $\overrightarrow{PR'} = \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RR'}$ при повороте на 60°, т. е. $\triangle PQ'R'$ правильный.

9.19. При решении мы воспользуемся свойствами ориентированного угла между прямыми (см. главу 2). Обозначим точку пересечения прямых через P. Тогда

$$\angle(OA_1, A_1P)=\angle(OA_1, l_1)=\angle(OA_2, l_2)=\angle(OA_2, A_2P).$$

Поэтому точки O, A_1, A_2, P лежат на одной окружности.

9.20. Одинаковые буквы Г можно совместить поворотом с некоторым центром O (если они совмещаются параллельным переносом, то $AA_i \parallel A'A_i'$). Согласно задаче 9.19 точка X_i лежит на описанной окружности треугольника $A'OA$. Ясно, что точки, лежащие на одной окружности, образуют выпуклый многоугольник.

9.21. Пусть O — центр поворота R, переводящего отрезок $A(t_1)A(t_2)$ в отрезок $B(t_1)B(t_2)$, где t_1, t_2 — некоторые моменты времени. Тогда этот поворот R переводит $A(t)$ в $B(t)$ в любой момент времени t. Поэтому, согласно задаче 9.19, точка O лежит на описанной окружности треугольника APB.

9.22. Пусть A, B — точки окружности с центром O, A_1 и B_1 — образы этих точек при повороте на угол α относительно центра O; P и P_1 — середины отрезков AB и A_1B_1, M — точка пересечения прямых AB и A_1B_1. Прямоугольные треугольники POM и P_1OM имеют общую гипотенузу и равные катеты $PO=P_1O$, поэтому эти треугольники равны и $\angle MOP=\angle MOP_1=\alpha/2$. Точка M получается из точки P поворотом на угол $\alpha/2$ и последующей гомотетией с коэффициентом $\dfrac{1}{\cos(\alpha/2)}$ и центром O.

а) Точки пересечения прямых AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 являются вершинами треугольника, гомотетичного с коэффициентом $\dfrac{1}{\cos(\alpha/2)}$ треугольнику, образованному серединами сторон треугольника ABC. Ясно, что треугольник, образованный серединами сторон треугольника ABC, подобен треугольнику ABC.

б) Точки пересечения соответствующих сторон четырехугольника образуют четырехугольник, гомотетичный с коэффициентом $\dfrac{1}{\cos(\alpha/2)}$ четырехугольнику, образованному серединами сторон четырехугольника $ABCD$. Середины сторон четырехугольника $ABCD$ являются вершинами параллелограмма (задача 1.2).

9.23. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, H_1, H_2 и H_3 — точки, симметричные точке H относительно сторон BC, AC и AB. Точки H_1, H_2 и H_3 лежат на описанной окружности треугольника ABC (задача 11.2). Пусть l — прямая, проходящая через точку H. Прямая, симметричная прямой l относительно стороны BC (соответственно AC, AB), пересекает описанную окружность в точке H_1 (соответственно H_2, H_3) и в некоторой точке P_1 (соответственно P_2, P_3).

Рассмотрим какую-нибудь другую прямую l', проходящую через H. Пусть φ — угол между l и l'. Построим для прямой l' точки P_1', P_2', P_3' тем же способом, каким были построены для прямой l точки P_1, P_2, P_3. Тогда $\angle P_iH_iP_i'=\varphi$, т. е. величина дуги P_iP_i' равна 2φ (поворот от P_i к P_i' противоположен по направлению повороту от l к l'). Поэтому точки P_1', P_2', P_3' являются образами точек P_1, P_2, P_3 при некотором повороте.

Ясно, что если в качестве l' выбрать высоту треугольника, опущенную из вершины A, то $P_1'=P_2'=P_3'=A$, а значит, и $P_1=P_2=P_3$.

9.24. Предположим, что лев бежал по ломаной $A_1A_2 \dots A_n$. Распрямим траекторию движения льва следующим образом. Повернем относительно точки A_2 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_3 попала на луч A_1A_2. Затем повернем относительно точки A_3 арену цирка и дальнейшую траекторию так, чтобы точка A_4 попала на луч A_1A_2, и т. д. Центр O арены

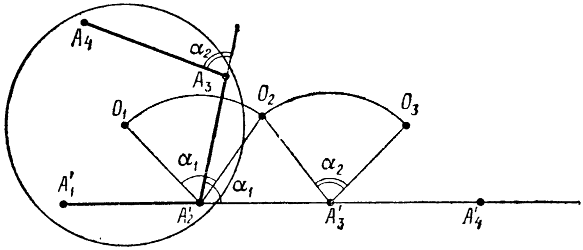


Рис. 97

цирка переходит при этом последовательно в точки $O_1 = O, O_2, \dots$ $\dots, O_{n-1}$; точки $A_1, \dots, A_n$ переходят в точки $A_1', \dots, A_n'$, лежащие на одной прямой (рис. 97).

Пусть α_{i-1} — угол поворота льва в точке A_i'. Тогда $\angle O_{i-1}A_i'O_i = \alpha_{i-1}$ и $A_i'O_{i-1} = A_i'O_i \leqslant 10$, поэтому $O_iO_{i-1} \leqslant 10\alpha_{i-1}$. Следовательно, $30\,000 = A_1'A_n' \leqslant A_1'O_1 + O_1O_2 + \dots + O_{n-2}O_{n-1} +$ $+ O_{n-1}A_n' \leqslant 10 + 10(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2}) + 10$, т. е. $\alpha_1 + \dots$ $\dots + \alpha_{n-2} \geqslant 2998$.

9.25. Рассмотрим композицию поворотов $R_{O_2}^{\varphi_2} \circ R_{O_1}^{\varphi_1}$. Если $O_1 = O_2$, то оба утверждения задачи очевидны, поэтому будем считать, что $O_1 \neq O_2$. Пусть $l = O_1O_2$, l_1 — прямая, проходящая через точку O_1, причем угол поворота от прямой l_1 к прямой l равен $\frac{1}{2}\varphi_1$, l_2 — прямая, проходящая через точку O_2, причем угол поворота от прямой l к прямой l_2 равен $\frac{1}{2}\varphi_2$. Тогда $R_{O_2}^{\varphi_2} \circ R_{O_1}^{\varphi_1} = S_{l_2} \circ S_l \circ S_l \circ S_{l_1} =$ $= S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 = k\pi$, т. е. $\varphi_1 + \varphi_2 = 2k\pi$.

Если $l_1 \parallel l_2$, то $S_{l_1} \circ S_{l_2} = T_{2a}$, где a — вектор, соответствующий параллельному переносу, переводящему прямую l_1 в прямую l_2.

Если прямые l_1 и l_2 не параллельны и O — точка их пересечения, то $S_{l_2} \circ S_{l_1}$ является поворотом на угол $\varphi_1 + \varphi_2$ относительно точки O.

9.26. Пусть R_1 — поворот с центром B, переводящий точку A в точку C, R_2 — поворот с центром D, переводящий точку C в точку E. Тогда $R_2 \circ R_1(A) = E$, причем $R_2 \circ R_1$ — поворот на 180°. Поэтому центром поворота $R_2 \circ R_1$ является середина отрезка AE. С другой стороны, центром композиции поворотов $R_2 \circ R_1$ является вершина прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой BD, т. е. фиксированная точка.

9.27. Пусть P, Q, R, S — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно. Построим на отрезках QR и SP внутренним образом равнобедренные прямоугольные треугольники с вершинами O_1 и O_2 соответственно. $D = R_R^{90^\circ} \circ R_Q^{90^\circ}(B) = R_{O_1}^{180^\circ}(B)$ и $B = R_P^{90^\circ} \circ R_S^{90^\circ}(D) = R_{O_2}^{180^\circ}(D)$, т. е. $O_1 = O_2$ — середина отрезка BD.

При повороте на 90° относительно точки $O = O_1 = O_2$, переводящем точку Q в точку R, точка S переходит в точку P. Поэтому при этом повороте отрезок QS переходит в отрезок RP, т. е. эти отрезки равны и взаимно перпендикулярны.

9.28. Пусть P, Q, R, S — центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$. Согласно предыдущей задаче диагонали четырехугольника $PQRS$ равны и взаимно перпендикулярны. Кроме того, центр симметрии параллелограмма $ABCD$ является центром симметрии четырехугольника $PQRS$, т. е. $PQRS$ — параллелограмм. Параллелограмм с равными и взаимно перпендикулярными диагоналями является квадратом.

9.29. Обозначим центры квадратов, построенных внешним образом на сторонах AB, BC, CA, через P, Q, R соответственно. Рассмотрим поворот на 90° с центром R, переводящий точку C в A. При повороте на 90° в том же направлении с центром P точка A переходит в B. Композиция этих двух поворотов является поворотом на 180°, поэтому центр этого поворота — середина отрезка BC. С другой стороны, центр этого поворота является вершиной равнобедренного прямоугольного треугольника с основанием PR, т. е. является центром квадрата, построенного на PQ. Этот квадрат построен на стороне треугольника PQR именно внутренним образом.

9.30. Если $O_1 = O_3$, то $R_D^{90^\circ} \circ R_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ} \circ R_A^{90^\circ} = R_{O_3}^{180^\circ} \circ R_{O_1}^{180^\circ} = E$. Поэтому $E = R_A^{90^\circ} \circ E \circ R_A^{-90^\circ} = R_A^{90^\circ} \circ R_D^{90^\circ} \circ R_C^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ} = R_{O_4}^{180^\circ} \circ R_{O_2}^{180^\circ}$, т. е. $O_4 = O_2$. (E — тождественное преобразование.)

9.31. Пусть A_1, B_1, C_1 — центры правильных треугольников, построенных внешним образом на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. $R_{C_1}^{120^\circ} \circ R_{B_1}^{120^\circ} = R_O^{240^\circ}$, где O — вершина треугольника с основанием B_1C_1, причем $\angle OB_1C_1 = \angle OC_1B_1 = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$, т. е. точки O, B_1, C_1 образуют правильный треугольник. Так как $120°+120°+120°=360°$, то $R_{C_1}^{120°}\circ R_{B_1}^{120°}\circ R_{A_1}^{120°}$ является параллельным переносом. Но $R_{C_1}^{120°}\circ R_{B_1}^{120°}\circ R_{A_1}^{120°}(B)=B$, поэтому $R_{C_1}^{120°}\circ R_{B_1}^{120°}\circ R_{A_1}^{120°}=E$, т. е. $R_{C_1}^{120°}\circ R_{B_1}^{120°}=R_{A_1}^{-120°}=R_{A_1}^{240°}$. Следовательно, $A_1=O$.

9.32. Композиция поворота на $60°$ относительно точки A', переводящего точку B в точку C, поворота на $60°$ относительно точки B', переводящего точку C в точку A, и поворота на $120°$ относительно точки M, переводящего точку A в точку B, имеет неподвижную точку B. Поскольку первые два поворота производятся в направлении, противоположном направлению последнего поворота, композиция этих поворотов является параллельным переносом, имеющим неподвижную точку, т. е. является тождественным преобразованием: $R_M^{-120°}\circ R_{B'}^{60°}\circ R_{A'}^{60°}=E$. Поэтому $R_{B'}^{60°}\circ R_{A'}^{60°}=R_M^{120°}$, т. е. точка M является центром поворота $R_{B'}^{60°}\circ R_{A'}^{60°}$. Следовательно, $\angle MA'B'=\angle MB'A'=30°$, т. е. $A'B'M$ — равнобедренный треугольник, причем $\angle A'MB'=120°$.

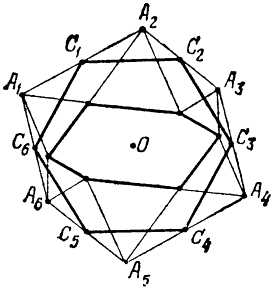


Рис. 98

9.33. Обозначим вершины правильных треугольников через $A_1, \ldots, A_6$, середины отрезков $A_1A_2, \ldots, A_6A_1$ — через $C_1, \ldots, C_6$, центр симметрии шестиугольника — через O (рис. 98).

Докажем, что $C_1C_2=C_2C_3$ и $\angle C_1C_2C_3=120°$. Ясно, что $R_{A_3}^{60°}\circ R_{A_2}^{60°}\circ R_{A_1}^{60°}=R_O^{180°}=R_{A_4}^{60°}\circ R_{A_3}^{60°}\circ R_{A_2}^{60°}$. Пусть $R_{A_3}^{60°}\circ R_{A_2}^{60°}=$ $=R_P^{120°}$. Тогда $\angle PA_2A_3=\angle PA_3A_2=30°$, т. е. $R_P^{120°}(A_3)=A_2$. Так как $R_P^{120°}\circ R_{A_1}^{60°}=R_O^{180°}$, $\angle OA_1P=30°$ и $\angle OPA_1=60°$. Поэтому $PO\perp A_4A_1$ и $\angle OPA_4=60°$, т. е. $R_P^{120°}(A_1)=A_4$. Мы получили, что $R_P^{120°}(\overrightarrow{A_1A_3})=\overrightarrow{A_4A_2}$. Но $\overrightarrow{C_1C_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{C_2C_3}=$ $=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_4}$, следовательно, $C_1C_2=C_2C_3$ и $\angle C_1C_2C_3=120°$.

Аналогично доказывается, что все стороны шестиугольника $C_1\ldots C_6$ равны и все его углы равны $120°$, т. е. этот шестиугольник правильный.

9.34. Обозначим данные точки через $M_1, \ldots, M_n$. Предположим, что мы построили многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ так, что треугольники $A_1M_1A_2$, $A_2M_2A_3$, ..., $A_nM_nA_1$ равнобедренные, причем $\angle A_iM_iA_{i+1}=\alpha_i$ и стороны многоугольника являются основаниями этих равнобедренных треугольников. Ясно, что $R_{M_n}^{\alpha_n}\circ\ldots$ $\ldots\circ R_{M_1}^{\alpha_1}(A_1)=A_1$. Если $\alpha_1+\ldots+\alpha_n\neq k\cdot 360°$, то точка A_1 является центром поворота $R_{M_n}^{\alpha_n}\circ\ldots\circ R_{M_1}^{\alpha_1}$. Центр композиции поворотов мы можем построить. Построение остальных вершин многоугольника производится очевидным образом. Если $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=$ $=k\cdot 360°$, то задача неопределенная: либо любая точка A_1 задает многоугольник, обладающий требуемым свойством, либо задача не имеет решений.

9.35. $R_{C'}^{\gamma}\circ R_{B'}^{\beta}\circ R_{A'}^{\alpha}(B)=R_{C'}^{\gamma}\circ R_{B'}^{\beta}(C)=R_{C'}^{\gamma}(A)=B$, т. е. B — неподвижная точка композиции поворотов $R_{C'}^{\gamma}\circ R_{B'}^{\beta}\circ R_{A'}^{\alpha}$. Поскольку $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, эта композиция является параллельным переносом, имеющим неподвижную точку, т. е. тождественным преобразованием. Поэтому $R_{C'}^{-\gamma}=R_{B'}^{\beta}\circ R_{A'}^{\alpha}$, т. е. точка C' является центром поворота $R_{B'}^{\beta}\circ R_{A'}^{\alpha}$. Следовательно, $\angle C'A'B'=\frac{\alpha}{2}$ и $\angle C'B'A'=\frac{\beta}{2}$. Тогда $\angle A'C'B'=\pi-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{2}$.

9.36. $R_{G'}^{\pi-\alpha}\circ R_A^{\alpha}(N)=L$ и $R_G^{\pi-\alpha}\circ R_A^{\alpha}(L)=N$. Поэтому преобразования $R_{G'}^{\pi-\alpha}\circ R_A^{\alpha}$ и $R_G^{\pi-\alpha}\circ R_A^{\alpha}$ являются центральными симметриями относительно середины отрезка LN, т. е. $R_{G'}^{\pi-\alpha}\circ R_A^{\alpha}=$ $R_G^{\pi-\alpha}\circ R_A^{\alpha}$. Следовательно, $R_{G'}^{\pi-\alpha}=R_G^{\pi-\alpha}$ и $G'=G$.

Глава 10

ГОМОТЕТИЯ И ПОВОРОТНАЯ ГОМОТЕТИЯ

Основные сведения

1. *Гомотетией* называется преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X', обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'}=k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точка O называется *центром гомотетии*, а число k — *коэффициентом гомотетии*.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k.

2. Две фигуры называются *гомотетичными*, если одна из них переходит в другую при некоторой гомотетии.

3. *Поворотной гомотетией* называется композиция гомотетии и поворота, имеющих общий центр. Порядок, в каком берется композиция, безразличен, поскольку $R_O^\varphi \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\varphi$.

Коэффициент поворотной гомотетии можно считать положительным, так как $R_O^{180^\circ} \circ H_O^k = H_O^{-k}$.

4. Композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией с коэффициентом k_1k_2, причем ее центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий (см. задачу 10.24).

5. Центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок CD, является точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и BDP, где P — точка пересечения прямых AB и CD (см. задачу 10.29).

Вводные задачи

1. Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.

2. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B, параллельны.

3. Две окружности касаются в точке K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D. Докажите, что $AB \| CD$.

4. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

5. На плоскости даны точки A, B и прямая l. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC, если точка C движется по прямой l?

§ 1. Гомотетичные многоугольники

10.1. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, причем эта точка H лежит на одной прямой с точкой пересечения медиан M и центром описанной окружности треугольника O (точнее, M лежит на отрезке OH и делит его в отношении $OM : MH = 1 : 2$).

10.2. Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).

10.3. Окружность S касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K, а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина отрезка PK является центром вписанной в треугольник ABC окружности.

10.4. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

10.5. Докажите, что в любом треугольнике $R \geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей), причем равенство достигается только для равностороннего треугольника.

10.6. В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины лежат на боковых сторонах треугольника. Докажите, что сторона квадрата меньше $2r$, но больше $\sqrt{2}r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

10.7. Докажите, что каждый выпуклый многоугольник Φ содержит два непересекающихся многоугольника Φ_1 и Φ_2, подобных Φ с коэффициентом 1/2.

10.8. Выпуклый четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения высот двух других треугольников.

§ 2. Гомотетичные окружности

10.9. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC.

10.10. В окружности проведена хорда AB, стягивающая дугу величиной 120°. Можно ли провести через середину этой хорды другую хорду, делящуюся точкой пересечения хорд в отношении 1 : 4?

10.11. Две окружности касаются в точке P. Через точку P проведены две секущие, пересекающие первую окружность в точках A_1 и B_1, вторую окружность — в точках A_2 и B_2. Докажите, что треугольник PA_1B_1 подобен треугольнику PA_2B_2.

10.12. Внутри окружности S даны две точки A и B. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки A, B и целиком лежащая внутри окружности S.

10.13. На отрезке между центрами двух касающихся внешним образом окружностей как на диаметре построена окружность. Докажите, что все три окружности касаются одной прямой.

10.14. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM — ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK=DC$.

б) В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF=KH$.

10.15. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, CDA, BCD, DAB лежат на одной окружности.

10.16. Окружности α, β, γ имеют одинаковые радиусы и касаются сторон углов A, B, C треугольника ABC соответственно. Окружность δ касается внешним образом всех трех окружностей α, β, γ. Докажите, что центр окружности δ лежит на прямой, проходящей через центр описанной и центр вписанной окружностей треугольника ABC.

10.17. Дан треугольник ABC. Построены четыре окружности равного радиуса ρ так, что одна из них касается трех других, а каждая из этих трех касается двух сторон треугольника. Найдите ρ, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника равны r и R соответственно.

§ 3. Построения и геометрические места точек

10.18. Дан угол ABC и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

10.19. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

10.20. Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, чтобы:

а) $AX=XY=YC$;

б) $BX=XY=YC$.

10.21. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок MN (M — на стороне AB, N — на BC), параллельный основанию AC и равный сумме отрезков AM и CN.

10.22. Прямоугольный треугольник ABC изменяется таким образом, что вершина A прямого угла треугольника не изменяет своего положения, а вершины B и C скользят по фиксированным окружностям S_1 и S_2, касающимся внешним образом в точке A. Найдите геометрическое место оснований D высот AD треугольников ABC.

§ 4. Композиции гомотетий

10.23. Преобразование f обладает следующим свойством: если A' и B' — образы точек A и B, то $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$, где k — постоянное число.

а) Докажите, что если $k=1$, то преобразование f является параллельным переносом.

б) Докажите, что если $k\neq 1$, то преобразование f является гомотетией.

10.24. Докажите, что композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1, k_2, где $k_1k_2\neq 1$, является гомотетией с коэффициентом k_1k_2, причем ее центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий.

Исследуйте случай $k_1k_2=1$.

10.25. S_1, S_2 и S_3 — три окружности различных радиусов. К этим окружностям проведены общие внешние касательные: AD и AE — к S_1 и S_2, BF и BG — к S_2 и S_3, CK и CH — к S_1 и S_3. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

§ 5. Поворотная гомотетия

10.26. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные треугольники ABC_1, AB_1C, A_1BC так, что $\angle C_1AB=\angle A_1BC=\angle B_1CA$ и $\angle AC_1B=$ $=\angle BA_1C=\angle CB_1A$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

10.27. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $BP=BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что $\angle DHQ=90°$.

10.28. На стороне AB треугольника ABC задана точка P. Впишите в треугольник ABC треугольник PXY, подобный заданному треугольнику LMN.

§ 6. Центр поворотной гомотетии

10.29. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B — в B_1, причем ее центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P.

10.30. Постройте центр O поворотной гомотетии с данным коэффициентом $k\neq1$, переводящей прямую l_1 в прямую l_2, а точку A_1, лежащую на l_1,— в точку A_2.

10.31. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.

10.32. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные вокруг этих треугольников, имеют одну общую точку.

10.33. Имеется два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные 4 прямые пересекаются в одной точке.

10.34. Постройте четырехугольник $ABCD$ по $\angle B+ +\angle D$, $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$, $d=DA$.

Задачи для самостоятельного решения

10.35. Впишите в данный треугольник ABC треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника KLM.

10.36. На плоскости даны точки A и E. Постройте ромб $ABCD$ с заданной высотой, для которого E — середина стороны BC.

10.37. Дан четырехугольник. Впишите в него ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника.

10.38. Дан острый угол AOB и внутри него точка C. Найдите на стороне OB точку M, равноудаленную от стороны OA и от точки C.

10.39. На полуокружности с диаметром AB дана точка X. Построим на луче XA точку Y так, чтобы $XY= =XB$. Какое множество пробегают точки Y, когда X пробегает все внутренние точки полуокружности?

10.40. Дан остроугольный треугольник ABC. O — точка пересечения его высот, ω — окружность с центром O, лежащая внутри этого треугольника. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, описанный около окружности ω и вписанный в треугольник ABC.

10.41. Даны три прямые a, b, c и три точки A, B, C, расположенные соответственно на прямых a, b, c. Постройте точки X, Y, Z на прямых a, b, c соответственно так, чтобы $BY : AX=2$, $CZ : AX=3$ и точки X, Y, Z лежали на одной прямой.

Решения

10.1. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан. При гомотетии с коэффициентом -2 и центром M точка A_1 переходит в точку A, поэтому серединный перпендикуляр к стороне BC переходит в перпендикуляр, опущенный из точки A на сторону BC. Поскольку серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в центре O описанной окружности, то и высоты треугольника пересекаются в одной точке H, являющейся образом точки O при гомотетии с коэффициентом —2 относительно точки M. Ясно, что точка M лежит на отрезке OH и делит его в отношении $OM:MH = 1:2$.

10.2. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон, A_2, B_2, C_2 — основания высот, A_3, B_3, C_3 — середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот H с вершинами, M — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности треугольника ABC (рис. 99).

При гомотетии с центром H и коэффициентом 1/2 точки A, B, C переходят в A_3, B_3, C_3, а точка O, являющаяся точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$,— в точку O_1, причем $OM:MO_1 = 2:1$, т. е. O_1 — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Мы видим, что описанная окружность треугольника ABC при этой гомотетии переходит и в описанную окружность треугольника $A_3B_3C_3$, и в описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. точки A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности. Ясно также, что точка H является точкой пересечения высот треугольника $A_3B_3C_3$ и точки A_2, B_2, C_2 симметричны H относительно его сторон. Поэтому точки A_2, B_2, C_2 лежат на описанной окружности треугольника $A_3B_3C_3$ (см. задачу 11.2).

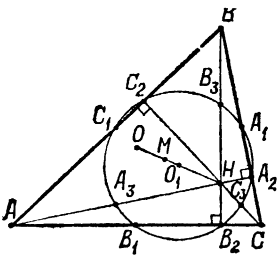


Рис. 99

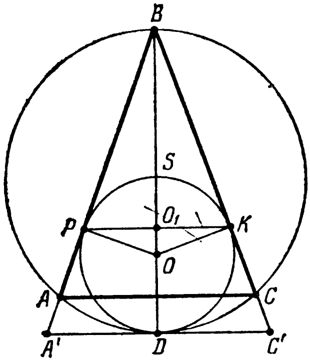


Рис. 100

10.3. Рассмотрим гомотетию H_B^k с центром в точке B, переводящую отрезок AC в отрезок $A'C'$, касающийся описанной окружности треугольника ABC. Обозначим середины отрезков PK и $A'C'$ через O_1 и D, центр окружности S — через O (рис. 100).

Окружность S является вписанной окружностью треугольника $A'BC'$, поэтому нам достаточно доказать, что при гомотетии H_B^k точка O_1 переходит в точку O. Для этого достаточно проверить, что $BO_1:BO = BA:BA'$. Это равенство следует из того, что PO_1 и DA являются высотами подобных прямоугольных треугольников BPO и BDA'.

10.4. Пусть коэффициент подобия многоугольников $k < 1$. Сдвигая стороны исходного многоугольника во внутреннюю сторону последовательно на $k, k^2, k^3, \ldots$, получаем стягивающуюся систему вложенных выпуклых многоугольников, подобных исходному с коэффициентами $k, k^2, k^3, \ldots$ Единственная общая точка этих многоугольников является центром вписанной окружности исходного многоугольника $\left(\text{ее радиус равен } k+k^2+\ldots=\frac{k}{1-k}\right)$.

10.5. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-1/2$ описанная окружность S треугольника ABC переходит в описанную окружность S_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Поскольку окружность S_1 пересекает все стороны треугольника ABC, мы можем построить треугольник $A'B'C'$ со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC, для которого S_1 будет вписанной окружностью, причем треугольник $A'B'C'$ содержит треугольник ABC (рис. 101). Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ через r и r', радиусы окружностей S и S_1 — через R и R_1. Ясно, что $r \leqslant r' = R_1 = \frac{1}{2}R$. Равенство достигается тогда, когда треугольник $A'B'C'$ совпадает с треугольником ABC, т. е. окружность S_1 является вписанной окружностью треугольника ABC. В этом случае $AB_1 = AC_1$, как касательные, проведенные к окружности из одной точки. Поэтому $AB = 2AC_1 = 2AB_1 = AC$. Аналогично, $AB = BC$.

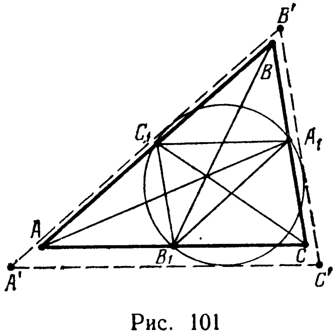


Рис. 101

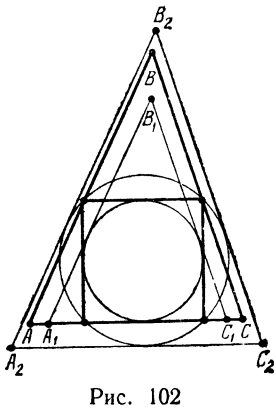


Рис. 102

10.6. Построим вписанную и описанную окружности квадрата и проведем к этим окружностям касательные, параллельные сторонам треугольника ABC, как это показано на рис. 102. При этом образуются треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, подобные треугольнику ABC.

Пусть r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Ясно, что $r_1 < r < r_2$. Ясно также, что $r_1 = \frac{1}{2}a$ и $r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a$, где a — сторона квадрата. Поэтому $\frac{1}{2}a = r_1 < r$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}a = r_2 > r$, т. е. $a < 2r$ и $a > \sqrt{2}r$.

10.7. Пусть A, B — пара наиболее удаленных друг от друга точек многоугольника Φ. Тогда $\Phi_1 = H_A^{1/2}(\Phi)$ и $\Phi_2 = H_B^{1/2}(\Phi)$ — искомые фигуры. В самом деле, Φ_1 и Φ_2 не пересекаются, так как лежат по разные стороны от серединного перпендикуляра к отрезку AB. Кроме того, Φ_i содержится в Φ, так как Φ — выпуклый многоугольник.

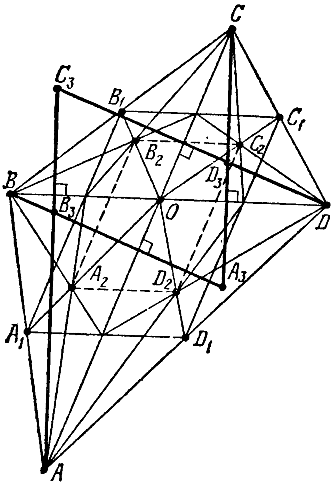


Рис. 103

10.8. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$; O — точка пересечения диагоналей AC и BD; A_2, B_2, C_2, D_2 — точки пересечения медиан треугольников ABO, BCO, CDO, ADO; A_3, B_3, C_3, D_3 — точки пересечения высот треугольников BCO, ABO, ADO, CDO (рис. 103).

Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом, причем $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Ясно, что $\overrightarrow{OA_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OD_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OD_1}$, поэтому параллелограмм $A_2B_2C_2D_2$ гомотетичен параллелограмму $A_1B_1C_1D_1$. Для решения задачи нам достаточно доказать, что при повороте на 90° параллелограмм $A_3B_3C_3D_3$ переходит в параллелограмм, гомотетичный параллелограмму $A_1B_1C_1D_1$.

Поскольку $A_3B_3 \perp A_1B_1$ и $B_3C_3 \perp B_1C_1$, при повороте на 90° параллелограмм $A_3B_3C_3D_3$ переходит в параллелограмм, стороны которого параллельны сторонам параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$. Нам остается проверить, что $A_1B_1 : A_3B_3 = B_1C_1 : B_3C_3$, т. е. $AC : A_3B_3 = BD : B_3C_3$. Расстояние между прямыми A_3D_3 и B_3C_3 равно $AC \cos\alpha$, где α — угол между диагоналями AC и BD. Поэтому

$A_3B_3 = AC\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Аналогично, $B_3C_3 = BD\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Следовательно, $\frac{AC}{A_3B_3} = \frac{BD}{B_3C_3} = \operatorname{tg}\alpha$.

10.9. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — середина отрезка AB. Ясно, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, поэтому точки M заполняют окружность, получающуюся из исходной окружности гомотетией с коэффициентом $1/3$ относительно точки O.

10.10. Предположим, что хорда CD делится точкой O в отношении $CO:OD = 1:4$. Тогда при гомотетии с коэффициентом $-1/4$ и центром O точка D переходит в C.

Пусть MN — диаметр, проходящий через точку O, причем $MO = \frac{1}{2}R$, $NO = \frac{3}{2}R$, где R — радиус исходной окружности. При гомотетии относительно точки O с коэффициентом $-1/4$ точки M, N переходят в некоторые точки M', N', причем $M'O = \frac{1}{8}R$, $N'O = \frac{3}{8}R$. Поскольку $\frac{3}{8}R < \frac{1}{2}R$, т. е. $N'O < MO$, исходная окружность не пересекается со своим образом при гомотетии относительно точки O с коэффициентом $-1/4$. Поэтому хорда CD не может делиться точкой O в отношении $1:4$.

10.11. Точка касания двух окружностей является центром гомотетии, переводящей одну окружность в другую. При этой гомотетии треугольник PA_1B_1 переходит в треугольник PA_2B_2, поэтому эти треугольники подобны.

10.12. Пусть точки A и B лежат на хорде CD, причем A лежит между точками C и B.

Докажем, что существует гомотетия, переводящая точки C и D в точки A и B соответственно. В самом деле, центр X этой гомотетии лежит на прямой CD и задается уравнением $\frac{CA}{AX} = \frac{BD}{AB-AX}$. Отсюда $AX = \frac{CA\cdot AB}{CA+BD}$. Поскольку $AX < AB$, точка X лежит на отрезке AB.

При гомотетии с центром X, переводящей точки C и D в точки A и B соответственно, окружность S переходит в окружность, проходящую через точки A, B и целиком лежащую внутри окружности S.

10.13. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2, касающихся внешним образом в точке A, l — их общая внешняя касательная, O — середина отрезка O_1O_2. Опустим из точек O_1, O, O_2 перпендикуляры O_1M_1, OM, O_2M_2 на прямую l (рис. 104).

Окружность с центром O касается прямой l, если ее радиус равен OM. Поэтому нам надо показать, что $\frac{1}{2} O_1O_2 = OM$. Ясно, что $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = O_1M_1 + O_2M_2 = 2OM$. Последнее равенство следует из того, что OM — средняя линия трапеции $O_1M_1M_2O_2$.

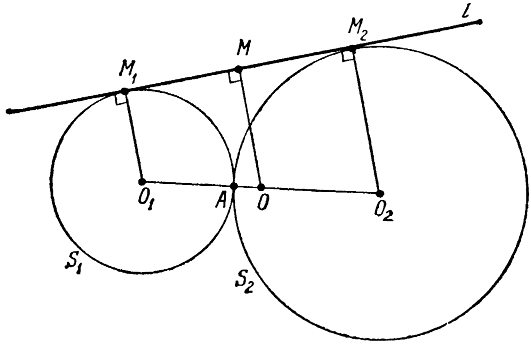


Рис. 104

10.14. а) При гомотетии с центром B, переводящей вписанную окружность во вневписанную окружность, касающуюся стороны AC, точка M переходит в некоторую точку M'. Точка M' является концом диаметра, перпендикулярного прямой AC, поэтому M' является точкой касания вневписанной окружности со стороной AC, а значит, и точкой пересечения прямой BM со стороной AC, поэтому $K = M'$ и точка K является точкой касания вневписанной окружности со стороной AC. Теперь легко вычислить, что $AK = \frac{a+b-c}{2} = CD$, где a, b, c — длины сторон треугольника ABC.

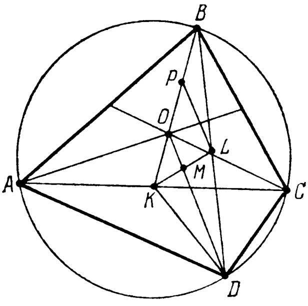


Рис. 105

б) Рассмотрим гомотетию с центром M, переводящую прямую EH в прямую, касающуюся данной окружности. При этой гомотетии точки E, F, K, H переходят в точки E', F', K', H' соответственно. Согласно а) $E'F' = K'H'$, поэтому $EF = KH$.

10.15. Пусть K и L — середины диагоналей AC и BD, M — середина отрезка KL. Докажем, что точки пересечения медиан треугольников ABC, CDA, BCD, DAB образуют четырехугольник, гомотетичный четырехугольнику $ABCD$ относительно точки M с коэффициентом $-1/3$.

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC, P — середина отрезка BO (рис. 105). PL — средняя линия треугольника OBD, поэтому прямая PL параллельна прямой OD. Поскольку $PO=OK$, прямая OD проходит через середину M отрезка KL. $OM:PL=1:2$ и $PL:OD=1:2$, поэтому $OM:OD=1:4$ и $OM:MD=$ $=1:3$.

10.16. Пусть O_α, O_β, O_γ, O_δ — центры окружностей α, β, γ, δ; O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Треугольник $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ является гомотетичным образом треугольника ABC, причем центром гомотетии является точка O_1. При этой гомотетии точка O_2 переходит в центр описанной окружности треугольника $O_\alpha O_\beta O_\gamma$, совпадающий с точкой O_δ. Поэтому точки O_1, O_2, O_δ лежат на одной прямой.

10.17. Пусть A_1, B_1, C_1 — центры данных окружностей, касающихся сторон треугольника, O — центр окружности, касающейся этих окружностей, O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, поэтому они пересекаются в точке O_1. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ является гомотетичным образом треугольника ABC с центром гомотетии O_1, причем коэффициент гомотетии равен отношению расстояний от точки O_1 до сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. равен $\frac{r-\rho}{r}$. При этой гомотетии описанная окружность треугольника ABC переходит в описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$. Поскольку $OA_1=OB_1=$ $=OC_1=2\rho$, радиус описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ равен 2ρ. Следовательно, $\left(\frac{r-\rho}{r}\right)R=2\rho$, т. е. $\rho=\frac{rR}{2r+R}$.

10.18. Возьмем на биссектрисе угла ABC произвольную точку O и построим окружность S с центром O, касающуюся сторон угла. Прямая BM пересекает окружность S в точках M_1 и M_2. Задача имеет два решения: при гомотетии с центром B, переводящей M_1 в M, и при гомотетии с центром B, переводящей M_2 в M, окружность S переходит в окружности, проходящие через точку M и касающиеся сторон угла.

10.19. Ясно, что обе окружности касаются одной из сторон треугольника. Покажем, как построить окружности, касающиеся стороны AB.

Возьмем прямую c', параллельную прямой AB. Построим две окружности S_1' и S_2' одинакового радиуса, касающиеся друг друга и прямой c'. Построим касательные a' и b' к этим окружностям, параллельные прямым BC и AC соответственно. Треугольник

$A'B'C'$, образованный прямыми a', b', c', имеет стороны, соответственно параллельные сторонам треугольника ABC, т. е. существует гомотетия, переводящая треугольник $A'B'C'$ в треугольник ABC. Искомые окружности являются образами окружностей S_1' и S_2' при этой гомотетии.

10.20. а) Отложим на сторонах AB и CB треугольника ABC отрезки AX_1 и CY_1 равной (произвольной) длины a. Проведем через точку Y_1 прямую l, параллельную стороне AC. Пусть Y_2 — точка пересечения прямой l и окружности радиуса a с центром в точке X_1, лежащая внутри треугольника. Тогда искомая точка Y является точкой пересечения прямой AY_2 со стороной BC, X — точка на луче AB, для которой $AX=CY$.

б) Возьмем на стороне AB произвольную точку $X_1 \neq B$. Окружность радиуса BX_1 с центром в точке X_1 пересекает луч BC в точках B и Y_1. На прямой BC построим точку C_1 так, чтобы $Y_1C_1=BX_1$ и точка Y_1 лежала между B и C_1. При гомотетии с центром B, переводящей точку C_1 в C, точки X_1 и Y_1 переходят в искомые точки X и Y.

10.21. Первое решение. Возьмем на отрезке AB произвольную точку M_1 и проведем через нее прямую l, параллельную стороне AC. Пусть N_1 — точка пересечения прямых l и BC. На луче M_1N_1 построим точку O так, чтобы $M_1O=M_1A$. На продолжении отрезка M_1O за точку O построим точку N_2 так, чтобы $ON_2=N_1C$. Искомая точка N является точкой пересечения прямых AN_2 и BC. Точка M строится теперь очевидным образом.

Второе решение. При движении отрезка MN, параллельного стороне AC, по направлению к вершине B его длина монотонно убывает, а длины отрезков AM и CN монотонно возрастают. Поэтому задача имеет не более одного решения. Покажем, что отрезок MN, проходящий через точку O пересечения биссектрис треугольника ABC, является искомым. В самом деле, $\angle MOA = \angle OAC = \angle MAO$, поэтому $AM=MO$. Аналогично, $CN=NO$. Следовательно,

$$MN=MO+ON=AM+NC.$$

10.22. Проведем к окружностям S_1 и S_2 общие внешние касательные l_1 и l_2. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке K. Точка K является центром гомотетии H, переводящей окружность S_1 в окружность S_2. Пусть $A_1=H(A)$. Точки A и K лежат на прямой, соединяющей центры окружностей, поэтому AA_1 — диаметр окружности S_2, т. е. $\angle ACA_1=90°$ и $A_1C \parallel AB$. Следовательно, отрезок AB при гомотетии H переходит в A_1C, поэтому прямая BC проходит через точку K и $\angle ADK=90°$. Точка D лежит на окружности S, построенной на отрезке AK как на диаметре. Ясно также, что точка D лежит внутри угла, образованного прямыми l_1 и l_2.

Таким образом, геометрическим местом точек D является дуга окружности, высекаемая прямыми l_1 и l_2 на окружности S.

10.23. Из условия задачи следует, что отображение f взаимно однозначно.

а) Пусть точка A переходит при отображении f в точку A', а B — в точку B'. Тогда $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}$, т. е. преобразование f является параллельным переносом.

б) Рассмотрим три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Пусть A', B', C' — их образы. Прямые AB, BC, CA не могут совпасть с прямыми $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ соответственно, так как в этом случае $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$. Пусть $AB\neq A'B'$. Прямые AA' и BB' не параллельны, поскольку иначе четырехугольник $ABB'A'$ был бы параллелограммом и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. Пусть O — точка пересечения прямых AA' и BB'. Треугольники AOB и $A'OB'$ подобны с коэффициентом подобия k, поэтому $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$, т. е. точка O является неподвижной точкой преобразования f. Следовательно, $\overrightarrow{Of(X)}=\overrightarrow{f(O)f(X)}=k\overrightarrow{OX}$ для любой точки X, а это означает, что преобразование f является гомотетией с коэффициентом k и центром O.

10.24. Пусть $H=H_2\circ H_1$, где H_1, H_2 — гомотетии с центрами O_1, O_2 и коэффициентами k_1, k_2. Введем обозначения $A'=H_1(A)$, $B'=H_1(B)$, $A''=H_2(A')$, $B''=H_2(B')$. Тогда $\overrightarrow{A'B'}=k_1\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A''B''}=k_2\overrightarrow{A'B'}$, т. е. $\overrightarrow{A''B''}=k_1k_2\overrightarrow{AB}$. Из этого с помощью предыдущей задачи получаем, что преобразование H при $k_1k_2\neq 1$ является гомотетией, а при $k_1k_2=1$ — параллельным переносом. Ясно, что коэффициент гомотетии равен k_1k_2.

Нам остается проверить, что неподвижная точка преобразования H лежит на прямой, соединяющей центры гомотетий H_1 и H_2. Поскольку $\overrightarrow{O_1A'}=k_1\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2A''}=k_2\overrightarrow{O_2A'}$, то $\overrightarrow{O_2A''}=k_2(\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1A'})=k_2(\overrightarrow{O_2O_1}+k_1\overrightarrow{O_1A})=k_2\overrightarrow{O_2O_1}+k_1k_2\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2A}$. Для неподвижной точки X получаем уравнение $\overrightarrow{O_2X}=(k_1k_2-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2X}$, т. е. $\overrightarrow{O_2X}=\dfrac{k_1k_2-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$. Ясно, что точка X лежит на прямой O_1O_2.

10.25. Точка A является центром гомотетии, переводящей S_1 в S_2, точка B — центром гомотетии, переводящей S_2 в S_3. Композиция этих гомотетий переводит S_1 в S_3, причем ее центр лежит на прямой AB. С другой стороны, ясно, что центром гомотетии, переводящей окружность S_1 в окружность S_3, является точка C.

В самом деле, точке пересечения внешних касательных соответствует гомотетия с положительным коэффициентом, а композиция гомотетий с положительными коэффициентами является гомотетией с положительным коэффициентом.

10.26. Пусть $\varphi=\angle C_1AB=\angle A_1BC=\angle B_1CA$ и $k=AC_1:AB=$ $=BA_1:BC=CB_1:CA$. Тогда векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$ получаются из векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ поворотом на угол φ и гомотетией с коэффициентом k. Обозначим это преобразование через P.

Пусть M и M_1 — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Тогда $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ и $\overrightarrow{AM_1}=$ $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB_1})=\frac{1}{3}(P(\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}+P(\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AC}+P(\overrightarrow{CA}))=$ $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, поскольку $P(\overrightarrow{AB})+P(\overrightarrow{BC})+P(\overrightarrow{CA})=P(\overrightarrow{AB}+$ $+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$. Мы видим, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM_1}$, поэтому $M=M_1$.

10.27. Первое решение. Рассмотрим преобразование, переводящее треугольник BHC в треугольник PHB, т. е. композицию поворота на 90° относительно точки H и гомотетии с коэффициентом $BP:CB$ и центром H. Поскольку при этом преобразовании вершины квадрата переходят в вершины квадрата, а точки C и B переходят в точки B и P, то точка D переходит в точку Q, т. е. $\angle DHQ=90^\circ$.

Второе решение. Докажем, что треугольник HBQ подобен треугольнику HCD. В самом деле, $\angle HBQ=\angle HCD$ и $HB:HC=PB:BC=BQ:CD$. Поэтому $\angle CHD=\angle BHQ$ и $\angle DHQ=$ $=\angle CHD+\angle CHQ=\angle BHQ+\angle QHC=\angle BHC=90^\circ$.

10.28. Предположим, что мы построили треугольник PXY, причем точки X и Y лежат на сторонах AC и CB соответственно. Нам известно преобразование, переводящее точку X в точку Y, а именно — поворотная гомотетия с центром P, углом поворота $\varphi=\angle XPY=\angle MLN$ и коэффициентом гомотетии $k=PY:PX=$ $=LN:LM$. Искомая точка Y является точкой пересечения отрезка BC и образа отрезка AC при этом преобразовании.

10.29. Пусть поворотная гомотетия с центром O переводит отрезок AB в отрезок A_1B_1. Если $P=O$, то $\triangle AA_1P \backsim \triangle BB_1P$ и единственной общей точкой описанных окружностей этих треугольников является точка P. Пусть теперь $P\neq O$. Из очевидного равенства $\angle(OA, AP)=\angle(OA_1, A_1P)$ следует, что точки O, A, A_1, P лежат на одной окружности. Аналогично, точки O, B, B_1, P лежат на одной окружности. Мы видим, что если описанные окружности треугольников AA_1P и BB_1P имеют единственную общую точку P, то только эта точка и может быть центром поворотной гомотетии, переводящей AB в A_1B_1, а если описанные окружности этих треугольников имеют две общие точки, то центром такой поворотной гомотетии может быть только вторая точка пересечения окружностей.

Нам остается доказать, что эти точки и в самом деле всегда являются центрами искомых поворотных гомотетий. В первом случае это очевидно. Пусть теперь описанные окружности треугольников AA_1P и BB_1P пересекаются в точке $O \neq P$. Тогда $\angle(OA, AB) = \angle(OA_1, A_1B)$ и $\angle(OB, AB) = \angle(OB_1, A_1B_1)$. Поэтому треугольник, образованный прямыми OA, AB, OB, подобен треугольнику, образованному прямыми OA_1, A_1B_1, OB_1. Это и означает, что существует поворотная гомотетия с центром O, переводящая AB в A_1B_1.

10.30. Пусть P — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Согласно задаче 10.29 точка O лежит на описанной окружности S_1 треугольника A_1A_2P. С другой стороны, $OA_2:OA_1 = k$. Геометрическим местом точек X, для которых $XA_2:XA_1 = k$, является окружность S_2 (задача 13.7). Точка O является точкой пересечения окружностей S_1 и S_2. Таких точек имеется две, причем любая из них является центром искомой поворотной гомотетии.

10.31. Пусть O — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1. Тогда $\triangle ABO \sim \triangle A_1B_1O$, т. е. $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ и $AO:BO = A_1O:B_1O$. Следовательно, $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ и $\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O}$, т. е. $\triangle AA_1O \sim \triangle BB_1O$. Поэтому точка O является центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.

10.32. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке C, а прямые BD и AE — в точке F.

Центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок ED, является точка пересечения описанных окружностей треугольников AEC и BDC, отличная от точки C (см. задачу 10.29), а центром поворотной гомотетии, переводящей AE в BD, — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABF и EDF. Согласно задаче 10.31 центры этих поворотных гомотетий совпадают, т. е. все четыре описанные окружности имеют одну общую точку.

10.33. Решим задачу в несколько более общем виде. На окружности S взята точка O, H — поворотная гомотетия с центром O. Докажем, что все прямые XX', где X — точка на S и $X' = H(X)$, пересекаются в одной точке.

Пусть P — точка пересечения прямых X_1X_1' и X_2X_2'. Согласно задаче 10.29 точки O, P, X_1, X_2 лежат на одной окружности и точки O, P, X_1', X_2' тоже лежат на одной окружности. Следовательно, P — точка пересечения окружностей S и $H(S)$, т. е. все прямые XX' проходят через точку пересечения окружностей S и $H(S)$, отличную от точки O.

10.34. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром A, переводящую точку B в точку D. Пусть C' — образ точки C при этой гомотетии. Тогда $\angle CDC' = \angle B + \angle D$ и $DC' = BC \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{bd}{a}$.

Мы можем построить треугольник CDC' по CD, DC' и $\angle CDC'$. Точка A является точкой пересечения окружности радиуса d с центром D и геометрического места точек X, для которых $C'X:CX = d:a$ (это геометрическое место точек является окружностью; см. задачу 13.7). Дальнейшее построение очевидно.

Глава 11
ТРЕУГОЛЬНИКИ

Основные сведения

1. *Вписанной окружностью треугольника* называется окружность, касающаяся всех его сторон. Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис.

Вневписанной окружностью треугольника ABC называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Для каждого треугольника имеется ровно три вневписанные окружности. Центром вневписанной окружности, касающейся стороны AB, является точка пересечения биссектрисы угла C и биссектрис внешних углов A и B.

Описанной окружностью треугольника называется окружность, проходящая через его вершины. Центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. Для элементов треугольника ABC часто используются следующие обозначения:

a, b, c — длины сторон BC, CA, AB;

α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C;

R — радиус описанной окружности;

r — радиус вписанной окружности;

h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных из вершин A, B, C.

3. Если AD — биссектриса угла A треугольника ABC (или биссектриса внешнего угла A), то $BD:CD=AB:AC$ (см. задачу 1.9).

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы (см. задачу 11.8).

4. Для доказательства того, что некоторые прямые пересекаются в одной точке, часто используется теорема Чевы (задача 11.22).

Для доказательства того, что точки пересечения некоторых прямых лежат на одной прямой, часто используется теорема Менелая (задача 11.33).

Вводные задачи

1. а) Докажите, что если в треугольнике медиана совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

б) Докажите, что если в треугольнике биссектриса совпадает с высотой, то этот треугольник равнобедренный.

2. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. На высоте AH треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $AB^2-AC^2=MB^2-MC^2$.

4. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC взяты точки P, Q, R так, что $AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2:1$. Докажите, что стороны треугольника PQR перпендикулярны сторонам треугольника ABC.

5. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что $AB_1=AC_1$, $BA_1=BC_1$ и $CA_1=CB_1$. Докажите, что вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1.

§ 1. Вписанные и описанные окружности

11.1. Пусть O_A, O_B, O_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Докажите, что точки A, B, C — основания высот треугольника $O_AO_BO_C$.

11.2. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника ABC относительно его сторон, лежат на описанной окружности треугольника.

11.3. Из точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX, PY, PZ на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что $\frac{BC}{PX}=\frac{AC}{PY}+\frac{AB}{PZ}$.

11.4. а) Из центра O описанной окружности остроугольного треугольника ABC опущены перпендикуляры OA', OB', OC' на стороны BC, CA, AB соответственно. Докажите, что $OA'+OB'+OC'=R+r$.

б) Докажите, что если угол A тупой, то $OB'+OC'-OA'=R+r$.

11.5. Через точку P, лежащую на основании BC равнобедренного треугольника ABC, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Q и R — точки пересечения этих прямых с боковыми сторонами AB и AC. Докажите, что точка P', симметричная точке P относительно прямой QR, лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

11.6. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, O — центр вписанной окружности, AH — высота, E — точка пересечения прямой OM и прямой AH. Докажите, что длина отрезка AE равна r.

11.7. Продолжения биссектрис треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. M—точка пересечения биссектрис. Докажите, что:

а) $\frac{MA_1 \cdot MC_1}{MB} = R$; б) $\frac{MA \cdot MC}{MB_1} = 2r$.

§ 2. Прямоугольные треугольники

11.8. Пусть M—середина стороны AB треугольника ABC. Докажите, что $CM = \frac{1}{2} AB$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90°$.

11.9. ABC—равнобедренный треугольник с основанием AC и острым углом при вершине B, CD—биссектриса угла C. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе CD. Эта прямая пересекает продолжение основания AC в точке E. Докажите, что $AD = \frac{1}{2} EC$.

11.10. Сумма углов при основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности длин оснований.

11.11. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C, а в треугольнике ACK — биссектриса CE. Докажите, что $CB = BE$.

11.12. CD и CF — высота и биссектриса прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, DK и DL — биссектрисы треугольников BDC и ADC. Докажите, что точки C, L, F, K являются вершинами квадрата.

11.13. Дан треугольник ABC, причем $\angle C = 2\angle A$ и $AC = 2BC$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

§ 3. Правильные треугольники

11.14. Из некоторой точки M внутри правильного треугольника ABC опускаются перпендикуляры MH, MK, MP на его стороны AB, BC, CA соответственно.

а) Докажите, что $AH^2 + BK^2 + CP^2 = HB^2 + KC^2 + PA^2$.

б) Докажите, что $AH + BK + CP = HB + KC + PA$.

11.15. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle AOC = 90°$.

11.16. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

11.17. Докажите, что если точка пересечения высот остроугольного треугольника делит высоты в одном и том же отношении, то треугольник правильный.

11.18. В треугольник ABC вписаны три квадрата: у одного две вершины лежат на стороне AC, у другого — на BC, у третьего — на AB. Докажите, что если все три квадрата равны, то треугольник ABC правильный.

11.19. Докажите, что если $a+h_a=b+h_b=c+h_c$, то треугольник ABC правильный.

11.20. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то треугольник ABC правильный.

11.21. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, длины высот — целые числа. Докажите, что треугольник правильный.

§ 4. Теорема Чевы

11.22. На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ (теорема Чевы).

11.23. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

11.24. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

11.25. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

11.26. Докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

11.27. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB}\cdot\frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}.$$

11.28. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, причем прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые

AA_2, BB_2 и CC_2, симметричные этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке.

11.29. Через точки A и D, лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке S. На дуге AD взяты точки B и C. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, AB и CD — в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через точку S.

11.30. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты. A_1, B_1, C_1 — середины противоположных сторон квадратов, построенных на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

11.31. а) На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin ABB_1 \sin CAA_1}{\sin BAA_1 \sin CBB_1}.$$

б) Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки M и N так, что $\angle CAM = \angle ABN$ и $\angle CBM = \angle BAN$. Докажите, что точки C, M и N лежат на одной прямой.

11.32. Треугольник $A'B'C'$ вписан в треугольник ABC: вершины A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB соответственно. Докажите, что если прямые, проведенные через вершины треугольника $A'B'C'$ перпендикулярно к соответствующим сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке, то и прямые, проведенные через вершины треугольника ABC перпендикулярно к соответствующим сторонам треугольника $A'B'C'$, пересекаются в одной точке.

§ 5. Теорема Менелая

Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — коллинеарные векторы. Обозначим через $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ величину $\pm\dfrac{AB}{CD}$, где знак «+» берется в том случае, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, а знак «—» — в том случае, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ направлены в разные стороны.

11.33. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} = 1 \qquad \text{(теорема Менелая).}$$

11.34. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC; A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

11.35. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CK из вершины прямого угла C, а в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. D — середина отрезка AC, F — точка пересечения прямых DE и CK. Докажите, что $BF \| CE$.

11.36. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.

11.37. Через точку K проходят четыре прямые. Две другие прямые пересекают эти прямые в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} : \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}}$.

11.38. На одной прямой взяты точки E, C, A, на другой — точки B, F, D; обозначим точки пересечения прямых AB и ED, CD и AF, EF и BC через L, M, N соответственно. Докажите, что точки L, M, N лежат на одной прямой.

11.39. Докажите, что точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника $ABCDEF$ лежат на одной прямой (теорема Паскаля).

§ 6. Целочисленные треугольники

11.40. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа.

а) Найдите длины сторон этого треугольника, если известно, что одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис.

б) Докажите, что если этот треугольник остроугольный, то высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит ее на отрезки, разность длин которых равна четырем.

11.41. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а стороны — целые числа. Докажите, что эти стороны равны 3, 4, 5.

§ 7. Разные задачи

11.42. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проведены две прямые, которые параллельны прямым AB и AC и пересекают BC в точках D и E. Докажите, что периметр треугольника ODE равен отрезку BC.

11.43. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и построены точки A_1, B_1, C_1, симметричные O относительно середин сторон BC, CA, AB. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

11.44. Существует ли треугольник, у которого на одной прямой лежат середины: а) биссектрис; б) высот?

11.45. Для всякого ли треугольника можно составить еще треугольник из его: а) медиан; б) биссектрис; в) высот?

11.46. Прямая делит площадь треугольника в отношении $S_1 : S_2$, а его периметр — в отношении $P_1 : P_2$ соответственно. Докажите, что $S_1 : S_2 = P_1 : P_2$ тогда

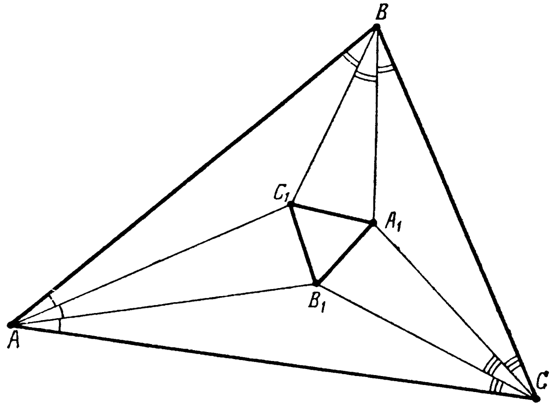


Рис. 106

и только тогда, когда прямая проходит через центр вписанной окружности.

11.47. Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

11.48 (теорема Максвелла). Внутри произвольного треугольника ABC берется произвольная точка P и соединяется с вершинами треугольника. Докажите, что если построить треугольник со сторонами, параллельными этим отрезкам, и через его вершины провести прямые, параллельные сторонам треугольника ABC, то они пересекутся в одной точке.

11.49 (теорема Морлея). В треугольнике ABC проведены трисектрисы (лучи, делящие углы на три равные части). Ближайшие к стороне BC трисектрисы углов B и C пересекаются в точке A_1; аналогично определяем точки B_1 и C_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний (рис. 106).

Задачи для самостоятельного решения

11.50. Докажите, что проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного первой стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

11.51. Докажите, что радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен его полупериметру.

11.52. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На стороне AB взята точка D, а на продолжении стороны BC — точка E так, что $AD=CE$. Докажите, что середина отрезка DE лежит на стороне AC.

11.53. Дан треугольник ABC и в нем биссектриса AD; O, O_1, O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC, ABD, ACD соответственно. Докажите, что треугольник OO_1O_2 равнобедренный.

11.54. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M так, что $AK=AC$ и $BM=BC$. Найдите угол MCK.

11.55. Найдите все треугольники, у которых углы составляют арифметическую прогрессию, а стороны: а) арифметическую, б) геометрическую.

11.56. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Вписанные окружности треугольников ABM и BCM касаются BM в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PQ=\frac{1}{2}|AB-BC|$.

11.57. Треугольник, составленный из а) медиан, б) высот треугольника ABC, подобен треугольнику ABC. Каким соотношением связаны длины сторон треугольника ABC?

11.58. На плоскости проведены прямые a, b, c, d. Никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Известно, что прямая a

параллельна одной из медиан треугольника, образованного прямыми b, c, d. Докажите, что прямая b параллельна медиане треугольника, образованного прямыми a, c, d.

11.59. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC выбраны точки C_1, B_1, A_1 так, что точки A_2, B_2, C_2 пересечения BB_1 с CC_1, AA_1 с CC_1 и AA_1 с BB_1 оказались на вписанной в исходный треугольник окружности. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ тоже правильные.

Решения

11.1. CO_A и CO_B—биссектрисы внешних углов при вершине C. Поэтому C лежит на прямой O_AO_B и $\angle O_ACB = \angle O_BCA$. Поскольку CO_C—биссектриса угла BCA, $\angle BCO_C = \angle ACO_C$. Складывая эти равенства, получаем $\angle O_ACO_C = \angle O_CCO_B$, т. е. O_CC—высота треугольника $O_AO_BO_C$. Аналогично доказывается, что O_AA и O_BB — высоты этого треугольника.

11.2. Пусть A_1, B_1, C_1—точки, симметричные точке H относительно сторон BC, CA, AB соответственно.

Для того чтобы не рассматривать отдельно остроугольные и тупоугольные треугольники, воспользуемся свойствами ориентированного угла между прямыми (см. главу 2). Так как $AB \perp CH$ и $BC \perp AH$, то $\angle(AB, BC) = \angle(CH, HA)$, а так как треугольник AC_1H равнобедренный, то $\angle(CH, HA) = \angle(AC_1, C_1C)$. Следовательно, $\angle(AB, BC) = \angle(AC_1, C_1C)$, т. е. точка C_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точки A_1 и B_1 лежат на этой окружности.

11.3. Обозначим радиус описанной окружности треугольника ABC через R. Эта окружность является также описанной окружностью треугольников ABP, APC и PBC. Ясно, что $\angle ABP = 180° - \angle ACP = \alpha$, $\angle BAP = \angle BCP = \beta$ и $\angle CAP = \angle CBP = \gamma$. Поэтому $PX = PB \sin\gamma = 2R \sin\beta \sin\gamma$, $PY = 2R \sin\alpha \sin\gamma$ и $PZ = 2R \sin\alpha \sin\beta$. Ясно также, что $BC = 2R \sin\angle BAC = 2R \sin(\beta+\gamma)$, $AC = 2R\sin(\alpha-\gamma)$, $AB = 2R\sin(\alpha+\beta)$. Нам остается проверить равенство $\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, что делается простым вычислением.

11.4. а) Введем обозначения $\alpha = OA'$, $\beta = OB'$, $\gamma = OC'$. Так как $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB} = \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta + c\gamma)$, то $r = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}$. Поэтому нам надо проверить, что

$$R = \frac{b+c}{a+b+c}\alpha + \frac{a+c}{a+b+c}\beta + \frac{a+b}{a+b+c}\gamma.$$

Ясно, что $(b+c)\alpha+(a+c)\beta+(a+b)\gamma=2R^2(\cos A(\sin B+\sin C)+$ $+\cos B(\sin A+\sin C)+\cos C(\sin A+\sin B))=2R^2(\sin(B+C)+$ $+\sin(A+C)+\sin(A+B))=2R^2(\sin A+\sin B+\sin C)=R(a+b+c)$, что и требовалось.

б) Доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае. Основные изменения таковы: $S_{ABC}=-S_{BOC}+S_{AOC}+S_{AOB}$, т. е. $r=\dfrac{-a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}$, и $-(b+c)\alpha+(a+c)\beta+(a+b)\gamma=$ $=2R^2(\cos A(\sin B+\sin C)+\cos B(\sin A+\sin C)+\cos C(\sin A+\sin B))$.

11.5. Первое решение. Пусть для определенности $PC<$ $<PB$. Так как точки P и A, P и P' равноудалены от прямой QR, то $AP'\|QR$. Ясно также, что $AQ=PR=P'R$, т. е. $QAP'R$ — равнобедренная трапеция и $\angle QAP'=$ $=\angle RP'A$. Из равнобедренности треугольников ABC и CRP' получаем $\angle BCA=\angle ABC$ и $\angle RCP'=\angle RP'C$. Складывая полученные равенства, имеем $\angle QAP'+\angle BCA+\angle RCP'=$ $=\angle RP'A+\angle ABC+\angle RP'C$, т. е. $\angle BAP'+\angle BCP'=\angle ABC+$ $+\angle AP'C$ (рис. 107). Поэтому точка P' лежит на описанной окружности треугольника ABC.

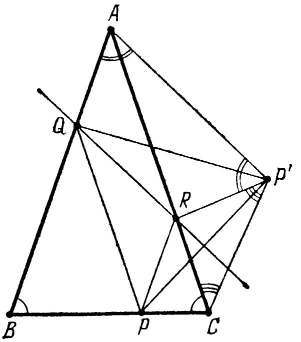


Рис. 107

Второе решение. Так как точки P и A, P и P' равноудалены от прямой QR, то $AP'\|QR$, т. е. $\angle AP'P=90°$. Нам остается проверить, что $\angle ABC+\angle PP'C=90°$. Поскольку точки P, P' и C лежат на окружности с центром R,

$$\angle PP'C=\frac{1}{2}\angle PRC=\frac{1}{2}\angle BAC=90°-\angle ABC.$$

11.6. Пусть P — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Легко вычислить, что $MC=\dfrac{a}{2}$, $PC=\dfrac{a+b-c}{2}$ и $HC=$ $=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Из подобия треугольников OMP и EMH получаем

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{MC-HC}{MC-PC}=\frac{a-2HC}{c-b}=\frac{a^2-a^2-b^2+c^2}{a(c-b)}=\frac{b+c}{a}.$$

Кроме того, $AH\cdot a=2S=r(a+b+c)$, т. е. $\dfrac{AH}{r}=\dfrac{a+b+c}{a}$. Ясно, что $OP=r$, поэтому

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=1,\quad \text{т. е.}\quad AE=r,$$

11.7. Так как $\frac{MA_1}{MB}=\frac{MB_1}{MA}$, то $\frac{MA_1\cdot MC_1}{MB}=\frac{MB_1\cdot MC_1}{MA}$. Аналогично,

$$\frac{MA_1\cdot MC_1}{MB}=\frac{MB_1\cdot MC_1}{MA}=\frac{MA_1\cdot MB_1}{MC},\quad \frac{MA\cdot MB}{MC_1}=$$
$$=\frac{MA\cdot MC}{MB_1}=\frac{MB\cdot MC}{MA_1}.$$

Поэтому нам достаточно доказать, что $R^3=\frac{(MA_1\cdot MB_1\cdot MC_1)^2}{MA\cdot MB\cdot MC}$ и $8r^3=\frac{(MA\cdot MB\cdot MC)^2}{MA_1\cdot MB_1\cdot MC_1}$.

Пусть $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$, $\angle C=2\gamma$. По теореме синусов $\frac{MA}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\pi-\alpha-\gamma)}$. Так как $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$, то $\sin(\pi-\alpha-\gamma)=$ $=\cos\beta$, поэтому $MA=b\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}$. Аналогично, $MB=c\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}$ и $MC=$ $=a\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$.

Так как $\angle MAB_1=\alpha+\beta=\angle AMB_1$, то $AB_1=MB_1$. Поэтому $\frac{MB_1}{AB}=\frac{AB_1}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin 2\gamma}$, т. е. $MB_1=c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin 2\gamma}$. Аналогично, $MC_1=$ $=a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin 2\alpha}$ и $MA_1=b\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}$. Тогда $MA\cdot MB\cdot MC=abc\times$ $\times\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$ и $MA_1\cdot MB_1\cdot MC_1=abc\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\sin 2\gamma}$. Поскольку $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin 2\alpha}$ и $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, нам остается проверить равенства $R^3=\frac{abc}{8\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\sin 2\gamma}$ и $8r^3=\frac{8\,abc\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$. Первое равенство следует из того, что $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Второе равенство следует из того, что $r=MA\cdot\sin\alpha=b\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\cos\beta}=a\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\cos\alpha}=c\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\gamma}$.

11.8. Предположим сначала, что $CM=\frac{1}{2}AB$. Тогда $AM=MC$ и $CM=MB$, поэтому $\angle CAM=\angle ACM$ и $\angle CBM=\angle BCM$, т. е. $\angle A+\angle B=\angle C$. Так как $\angle A+\angle B+\angle C=180°$, то $\angle C=90°$.

Предположим теперь, что $\angle C=90°$. Тогда точка C лежит на окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре. Точка M является центром этой окружности, поэтому $CM=AM=\frac{1}{2}AB$.

11.9. Обозначим через F точку пересечения прямой ED и прямой BC, через K — точку пересечения прямой, проведенной через точку D параллельно BC, с прямой AC (рис. 108).

В треугольнике ECF отрезок CD является биссектрисой и высотой, поэтому $ED=DF$. Так как $EK:KC=ED:DF=1$, то DK — медиана прямоугольного треугольника EDC. Согласно задаче 11.8 $DK=\frac{1}{2}EC$. Треугольник ADK подобен треугольнику ABC, поэтому $AD=DK=\frac{1}{2}EC$.

11.10. Пусть сумма углов при основании AD трапеции $ABCD$ равна 90°. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD через O. Тогда точка O лежит на прямой, проходящей через середины оснований. Проведем через точку C прямую CK, параллельную этой прямой, и прямую CE, параллельную прямой AB (точки K и E лежат на основании AD). Тогда CK — медиана прямоугольного треугольника ECD, поэтому $CK=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}(AD-BC)$ (см. задачу 11.8).

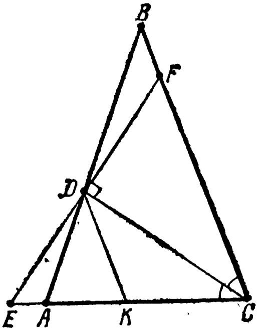


Рис. 108

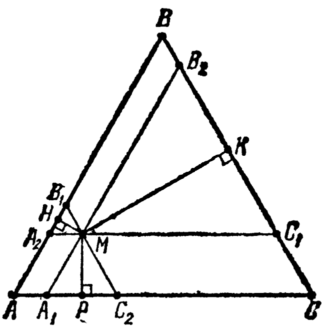


Рис. 109

11.11. Рассмотрим биссектрису BN треугольника EBC. Острые углы EBC и KCA имеют соответственно перпендикулярные стороны, поэтому $CE \perp BN$, т. е. в треугольнике EBC биссектриса BN является высотой. Следовательно, $CB=BE$.

11.12. Отрезки CF и DK являются биссектрисами подобных треугольников ACB и CDB, поэтому $AB:FB=CB:KB$. Следовательно, $FK \| AC$. Аналогично доказывается, что $LF \| CB$. Поэтому $CLFK$ — прямоугольник, у которого диагональ CF является биссектрисой угла LCK, т. е. квадрат.

11.13. Возьмем на продолжении отрезка CB за точку B точку C_1 так, чтобы $\angle C_1AB=\angle CAB$. Тогда $\angle C_1AC=\angle C_1CA$, т. е. $C_1A=C_1C$. Пусть $CB=a$, $BC_1=x$. Тогда $C_1A=C_1C=a+x$. Отрезок AB

является биссектрисой треугольника C_1AC, поэтому $\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{AC}{BC}$, т. е. $\frac{a+x}{x}=2$. Следовательно, $x=a$, т. е. AB является биссектрисой и медианой треугольника C_1AC. Поэтому AB является и высотой этого треугольника, т. е. $\angle ABC=90°$.

11.14. а) По теореме Пифагора $AH^2+BK^2+CP^2=(AM^2-MH^2)+(BM^2-MK^2)+(CM^2-MP^2)$, а $HB^2+KC^2+PA^2=(BM^2-MH^2)+(CM^2-MK^2)+(AM^2-MP^2)$. Ясно, что эти выражения равны.

б) Проведем через точку M прямые A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2, параллельные сторонам AB, BC, CA (рис. 109). Отрезки MH, MK, MP являются медианами треугольников B_1MA_2, C_1MB_2, A_1MC_2 и $AA_1=BB_2$, $BB_1=CC_2$, $CC_1=AA_2$. Поэтому

$$AH+BK+CP=AA_2+A_2H+BB_2+B_2K+CC_2+C_2P=$$
$$=HB_1+B_1B+KC_1+C_1C+PA_1+A_1A=HB+KC+PA.$$

З а м е ч а н и е. Соотношения из а) и б) на длины отрезков AH, BK, CP, HB, KC, PA эквивалентны.

11.15. Возьмем на стороне BC точку F так, чтобы $BF:FC=2:1$. Пусть P и Q — точки пересечения AF с отрезками BD и CE соответственно. Ясно, что треугольник OPQ правильный. Поэтому нам достаточно доказать, что $\angle AOP=30°$, а для этого достаточно доказать, что $AP=PO$.

Проведем через точку D прямые $DE_1 \| CE$ и $DF_1 \| AF$ (E_1 и F_1 — точки на сторонах AB и BC, рис. 110). Тогда $AE_1:E_1E=AD:DC=1:2$ и $AE:EB=2:1$, поэтому $E_1E:EB=4:3$, т. е. $DO:OB=4:3$. Аналогично, $BP:PD=BF:FF_1=6:1$. Следовательно, $DP:PO:OB=FQ:QP:PA=1:3:3$, т. е. $AP=PO$.

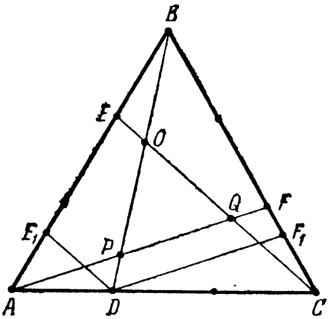


Рис. 110

11.16. Пусть A и B, C и D, E и F — точки пересечения окружности со сторонами PQ, QR, RP треугольника PQR. Рассмотрим медиану PS. Она соединяет середины параллельных хорд FA и DC и поэтому перпендикулярна им. Следовательно, PS является высотой треугольника PQR, а значит, $PQ=PR$. Аналогично, $PQ=QR$.

11.17. Обозначим точку пересечения высот AD, BE, CF через H. Пусть $k=\frac{HD}{AD}=\frac{HE}{BE}=\frac{HF}{CF}$. Тогда $S_{ABH}=S_{BCH}=S_{CAH}=kS_{ABC}$ и $S_{ABB}=\frac{1}{1-k}S_{ABH}=\frac{1}{1-k}S_{BCH}=S_{BCB}$, следовательно, $AE=EC$, т. е. BE — медиана. Аналогично доказывается, что и остальные высоты треугольника являются медианами, т. е. треугольник правильный.

11.18. Обозначим сторону квадрата, две вершины которого лежат на стороне BC, через x. Из подобия треугольников ABC и APQ, где P и Q — вершины квадрата, лежащие на AB и AC, получаем $\frac{x}{a}=\frac{h_a-x}{h_a}$, т. е. $x=\frac{a\cdot h_a}{a+h_a}=\frac{2S}{a+h_a}$. Аналогичные рассуждения для других квадратов показывают, что $a+h_a=b+h_b=c+h_c$. Из задачи 11.19 следует, что треугольник ABC правильный.

11.19. Пусть $k=a+h_a=b+h_b=c+h_c$. Тогда $k=a+\frac{2S}{a}=b+\frac{2S}{b}=c+\frac{2S}{c}$, где S — площадь треугольника ABC. Квадратное уравнение $k=x+\frac{2S}{x}$ имеет два корня x_1 и x_2, причем $x_1x_2=2S$. Длины сторон треугольника являются корнями этого уравнения, поэтому они не могут быть все различными. Пусть для определенности $a=b$. Если $c\neq a$, то $ac=2S$, т. е. $a=b=2S/c=h_c$, чего не может быть.

11.20. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания со сторонами BC, CA, AB соответственно. Ясно, что $\angle C_1A_1B=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)$ и $\angle CA_1B_1=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle C)$, поэтому $\angle C_1A_1B_1=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$. Аналогично, $\angle A_1B_1C_1=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$ и $\angle A_1C_1B_1=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$.

Можно считать, что $\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$. Тогда $\angle A_1\leqslant\angle B_1\leqslant C_1$. Следовательно, $\angle A=\angle C_1=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$ и $\angle C=\angle A_1=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$, т. е. $\angle A=\angle B$ и $\angle C=\angle B$. Поэтому $\angle A=\angle B=\angle C$ и треугольник ABC правильный.

11.21. В любом треугольнике высота больше диаметра вписанной окружности. Поэтому длины высот — целые числа, бóльшие двух, т. е. все они не меньше 3. Пусть S — площадь треугольника, a — наибольшая его сторона, h — соответствующая высота.

Предположим, что треугольник неправильный. Тогда его периметр P меньше $3a$. Поэтому $3a>P=Pr=2S=ha$, т. е. $h<3$. Получили противоречие.

11.22. Предположим, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Тогда $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1P}}{S_{BC_1P}}=\frac{S_{AC_1C}}{S_{BC_1C}}$, поэтому $\frac{AC_1}{C_1B}=$

$=\frac{S_{AC_1C}-S_{AC_1P}}{S_{BC_1C}-S_{BC_1P}}=\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}$. Аналогично, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}$ и $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}$, поэтому $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}\cdot\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}\cdot\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}=1$.

Предположим теперь, что $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. Проведем через точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 прямую CC_1' (точка C_1' лежит на отрезке AB). Тогда, согласно предыдущему,

$$\frac{AC_1'}{C_1'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A},$$

т. е. $\frac{AC_1'}{C_1'B}=\frac{AC_1}{C_1B}$. На отрезке AB имеется единственная точка X, для которой $\frac{AX}{XB}=\lambda$, поскольку из этого уравнения получаем $AX=\frac{\lambda}{1+\lambda}AB$. Поэтому $C_1=C_1'$, т. е. прямая CC_1 проходит через точку пересечения прямых AA_1 и BB_1.

11.23. Обозначим медианы треугольника ABC через AA_1, BB_1 и CC_1. Нам достаточно доказать, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Это очевидно: $AC_1=C_1B$, $BA_1=A_1C$, $CB_1=B_1A$.

11.24. Обозначим биссектрисы треугольника ABC через AA_1, BB_1 и CC_1. Ясно, что $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{b}{a}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{c}{b}$ и $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{a}{c}$. Поэтому $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

11.25. Ясно, что $AC_1=B_1A$, $BA_1=C_1B$, $CB_1=A_1C$. Поэтому $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

11.26. Обозначим высоты остроугольного треугольника ABC через AA_1, BB_1, CC_1. Пусть $CB_1=x$; тогда $AB_1=b-x$ и

$$c^2-(b-x)^2=BB_1^2=a^2-x^2.$$

Отсюда $CB_1=x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$. Аналогично, $B_1A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}$, $AC_1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$, $C_1B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$, $BA_1=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$ и $A_1C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2a}$. Поэтому $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

11.27. Применяя теорему синусов к треугольникам ACC_1 и BCC_1, получаем $\frac{AC_1}{C_1C}=\frac{\sin ACC_1}{\sin A}$ и $\frac{CC_1}{C_1B}=\frac{\sin B}{\sin C_1CB}$, т. е.

$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}$. Аналогично, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}$ и $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}$. Для завершения доказательства остается перемножить эти равенства.

11.28. Можно считать, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на сторонах треугольника ABC. Согласно задаче 11.27 $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=$ $=\frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB}\cdot\frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC}\cdot\frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA}$. Поскольку прямые AA_2, BB_2 и CC_2 симметричны прямым AA_1, BB_1 и CC_1 относительно биссектрис, $\angle ACC_2=\angle C_1CB$, $\angle C_2CB=\angle ACC_1$ и т. д., поэтому

$$\frac{\sin ACC_2}{\sin C_2CB}\cdot\frac{\sin BAA_2}{\sin A_2AC}\cdot\frac{\sin CBB_2}{\sin B_2BA}=$$
$$=\frac{\sin C_1CB}{\sin ACC_1}\cdot\frac{\sin A_1AC}{\sin BAA_1}\cdot\frac{\sin B_1BA}{\sin CBB_1}=\frac{C_1B}{AC_1}\cdot\frac{A_1C}{BA_1}\cdot\frac{B_1A}{CB_1}=1.$$

Следовательно, $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1$, т. е. прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

11.29. Согласно задачам 11.27 и 11.22

$$\frac{\sin ASP}{\sin PSD}\cdot\frac{\sin DAP}{\sin PAS}\cdot\frac{\sin SDP}{\sin PDA}=1=\frac{\sin ASQ}{\sin QSD}\cdot\frac{\sin DAQ}{\sin QAS}\cdot\frac{\sin SDQ}{\sin QDA}.$$

Но $\angle DAP=\angle SDQ$, $\angle SDP=\angle DAQ$, $\angle PAS=\angle QDA$ и $\angle PDA=$ $=\angle QAS$. Поэтому $\frac{\sin ASP}{\sin PSD}=\frac{\sin ASQ}{\sin QSD}$. Из этого следует, что точки S, P и Q лежат на одной прямой, поскольку функция $\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin x}$ монотонна по x: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin x}\right)=-\frac{\sin\alpha}{\sin^2 x}$.

11.30. Обозначим точки пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1 со сторонами BC, CA, AB через A_2, B_2, C_2 соответственно.

Отношение $BA_2:A_2C$ равно отношению высот, опущенных из точек B и C на сторону AA_1, т. е. равно отношению $S_{ABA_1}:S_{ACA_1}$. Далее,

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}}=\frac{AB\cdot BA_1\cdot\sin ABA_1}{AC\cdot CA_1\cdot\sin ACA_1}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin(\angle B+\varphi)}{\sin(\angle C+\varphi)},$$

где $\varphi=\angle CBA_1=\angle BCA_1=\operatorname{arctg} 2$. Аналогично,

$$\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{\sin(\angle C+\varphi)}{\sin(\angle A+\varphi)}\quad\text{и}\quad\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin(\angle A+\varphi)}{\sin(\angle B+\varphi)}.$$

Перемножая эти равенства, получаем $\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$. По теореме Чевы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

11.31. а) По теореме Чевы $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}$. По теореме синусов

$$CA_1=CA\frac{\sin CAA_1}{\sin AA_1B},\quad A_1B=AB\frac{\sin BAA_1}{\sin AA_1B},$$

$$AB_1=AB\frac{\sin ABB_1}{\sin AB_1B},\quad B_1C=BC\frac{\sin CBB_1}{\sin AB_1B}.$$

Подставляя эти четыре равенства в предыдущее равенство и учитывая, что $AC=BC$, получаем требуемое утверждение.

б) Обозначим точки пересечения прямых CM и CN с основанием AB через M_1 и N_1. Нам нужно доказать, что $M_1=N_1$. Из а) следует, что $\frac{AM_1}{M_1B}=\frac{AN_1}{N_1B}$, т. е. $M_1=N_1$.

11.32. Пусть прямые, проходящие через вершины треугольника $A'B'C'$ перпендикулярно к соответствующим сторонам треугольника ABC, пересекаются в точке O. Поскольку точки O, B', A, C' лежат на окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре, $\angle OB'C'=\angle OAC'$. Опустим из точки A перпендикуляр AA_1 на прямую $B'C'$. Так как $\angle OB'A=90°$, то $\angle A_1AB'=\angle OB'C'=$ $=\angle OAC'$, т. е. прямая AA_1 симметрична прямой AO относительно биссектрисы угла A. Аналогичные рассуждения для остальных углов показывают, что перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, опущенные из вершин треугольника ABC на стороны треугольника $A'B'C'$, симметричны прямым AO, BO, CO относительно биссектрис треугольника ABC. Согласно задаче 11.28 прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

11.33. Первое решение. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой l. Проведем через точку B прямую BB_2, параллельную прямой l (точка B_2 лежит на прямой AC). Тогда $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}=\frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{CB_1}}$ и $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_2B_1}}$. Перемножая эти равенства, получаем $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{CB_1}}\cdot\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_2B_1}}$. Поскольку точки A, C, B_1 и B_2 лежат на одной прямой, $\frac{\overline{B_2B_1}}{\overline{CB_1}}\cdot\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_2B_1}}=\frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}}$; поэтому $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=1$.

Предположим теперь, что $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=1$. Пусть прямая B_1A_1 пересекает прямую AB в точке C_1'. Нам достаточно доказать, что $C_1'=C_1$. Согласно предыдущему $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1'}}{\overline{BC_1'}}=$

$=1=\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}$, поэтому $\overline{AC_1}/\overline{BC_1}=\overline{AC_1'}/\overline{BC_1'}$. Докажем, что уравнение $\overline{AX}/\overline{BX}=\lambda$ имеет не более одного решения, если $A\neq B$. Введем на прямой AB координаты: за начало координат возьмем точку A и будем считать положительным направлением направление вектора $\overrightarrow{AB}$. Пусть точка X имеет координату x. Тогда $\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}=\frac{x}{x-a}$, где $a=AB$. Уравнение $\overline{AX}/\overline{BX}=\lambda$ перепишется в виде $\frac{x}{x-a}=\lambda$, т. е. $x=\frac{\lambda a}{\lambda-1}$.

Второе решение. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой l. Одна из сторон треугольника ABC (для определенности AB) не лежит на l. Пусть H_A и H_B — гомотетии с центрами в точках A_1 и B_1 и коэффициентами $\overline{A_1B}/\overline{A_1C}$ и $\overline{B_1C}/\overline{B_1A}$. Тогда по задаче 10.24 $H_A\circ H_B$ — гомотетия с коэффициентом $k=\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}$ и центром O, лежащим на прямой l. Но $H_A\circ H_B(A)=H_A(C)=B$, следовательно, точка O лежит на прямой AB, а так как $AB\neq l$, то $O=C_1$ и $\frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1A}}=k$, т. е. $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1$.

Предположим теперь, что $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1$. Пусть H_A, H_B, H_C — гомотетии с центрами A_1, B_1, C_1 и коэффициентами $k_A=\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$, $k_B=\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}$, $k_C=\frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1A}}$. Пусть O — центр гомотетии $H=H_A\circ H_B$. По условию $k_Ak_B=k_C$, т. е. гомотетии H и H_C имеют один и тот же коэффициент k. Кроме того, $H(A)=$ $=H_A(H_B(A))=H_A(C)=B=H_C(A)$, т. е. $(k-1)\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=$ $=\overrightarrow{C_1B}-\overrightarrow{C_1A}=(k-1)\overrightarrow{C_1A}$. Следовательно, точка C_1 совпадает с точкой O и, согласно задаче 10.24, лежит на прямой A_1B_1.

11.34. Ясно, что $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}=-\frac{BP\cos PBC}{CP\cos PCB}$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}=-\frac{CP\cos PCA}{AP\cos PAC}$ и $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=-\frac{AP\cos PAB}{PB\cos PBA}$. Перемножая эти равенства и учитывая, что $\angle PAC=\angle PBC$, $\angle PAB=\angle PCB$ и $\angle PCA+\angle PBA=180°$, получаем $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=1$. Из теоремы Менелая следует, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

11.35. Проведем биссектрису BH треугольника EBC. Так как $\angle EBC = \angle ACK$, то $\angle HBC + \angle HCB = \angle ACE + \angle ECB = 90°$, т. е. $BH \perp CE$. Следовательно, треугольник EBC равнобедренный и высоты CK и EP равны. Применяя теорему Менелая к треугольнику ACK и тройке точек D, E, F, получаем $\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EK} \cdot \frac{KF}{FC} = 1$. Следовательно, $\frac{KF}{FC} = \frac{EK}{AE} = \frac{CK}{AC} = \frac{EP}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{BK}{BE}$. Из равенства $\frac{KF}{FC} = \frac{BK}{BE}$ следует, что $\frac{KF}{KC} = \frac{BK}{KE}$, т. е. $\triangle FKB \backsim \triangle CKE$ и $FB \parallel CE$.

11.36. Пусть A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых BC и B_1C_1, AC и A_1C_1, AB и A_1B_1. Применим теорему Менелая к следующим треугольникам и точкам на их сторонах: OAB и (A_1, B_1, C_2), OBC и (B_1, C_1, A_2), OAC и (A_1, C_1, B_2). Тогда

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA_1}} \cdot \frac{\overline{OB_1}}{\overline{BB_1}} \cdot \frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} = 1, \quad \frac{\overline{OC_1}}{\overline{CC_1}} \cdot \frac{\overline{BB_1}}{\overline{OB_1}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1,$$
$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC_1}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем $\frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}} \cdot \frac{\overline{AB_2}}{\overline{CB_2}} \cdot \frac{\overline{CA_2}}{\overline{BA_2}} = 1$. Из теоремы Менелая следует, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

11.37. Пусть L — точка пересечения прямой, на которой лежат точки A, B, C, D, и прямой, на которой лежат точки A_1, B_1, C_1, D_1. Применим теорему Менелая к следующим треугольникам и точкам на их сторонах: AA_1L и (D_1, D, K), BB_1L и (C_1, C, K), B_1BL и (D_1, D, K), AA_1L и (C_1, C, K). Тогда

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{LD}} \cdot \frac{\overline{LD_1}}{\overline{A_1D_1}} \cdot \frac{\overline{A_1K}}{\overline{AK}} = 1, \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{LC_1}}{\overline{B_1C_1}} \cdot \frac{\overline{B_1K}}{\overline{BK}} = 1,$$
$$\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{LD}} \cdot \frac{\overline{LD_1}}{\overline{B_1D_1}} \cdot \frac{\overline{B_1K}}{\overline{BK}}\right)^{-1} = 1, \quad \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{LC_1}}{\overline{A_1C_1}} \cdot \frac{\overline{A_1K}}{\overline{AK}}\right)^{-1} = 1.$$

Перемножая эти равенства, получаем требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е. Выражение $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ (точки A, B, C, D лежат на одной прямой) называется двойным отношением точек A, B; C, D.

11.38. Обозначим точки пересечения прямых EF и CD, EF и AB, AB и CD через U, V, W соответственно. Применим теорему Менелая для треугольника UVW к пяти тройкам точек (L, D, E),

(A, M, F), (B, C, N), (A, C, E), (B, D, F). Тогда

$$\frac{\overline{UE}}{\overline{VE}}\cdot\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}}\cdot\frac{\overline{WD}}{\overline{UD}}=1,\quad \frac{\overline{VA}}{\overline{WA}}\cdot\frac{\overline{UF}}{\overline{VF}}\cdot\frac{\overline{WM}}{\overline{UM}}=1,$$

$$\frac{\overline{UN}}{\overline{VN}}\cdot\frac{\overline{WC}}{\overline{UC}}\cdot\frac{\overline{VB}}{\overline{WB}}=1,\quad \frac{\overline{WA}}{\overline{VA}}\cdot\frac{\overline{UC}}{\overline{WC}}\cdot\frac{\overline{VE}}{\overline{UE}}=1,$$

$$\frac{\overline{WB}}{\overline{VB}}\cdot\frac{\overline{UD}}{\overline{WD}}\cdot\frac{\overline{VF}}{\overline{UF}}=1.$$

Перемножая эти равенства, получаем $\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}}\cdot\frac{\overline{WM}}{\overline{UM}}\cdot\frac{\overline{UN}}{\overline{VN}}=1$. Поэтому точки L, M, N лежат на одной прямой.

11.39. Обозначим точки пересечения прямых AB и DE, CD и FA, BC и EF, CD и EF, AB и EF, AB и CD через L, M, N,

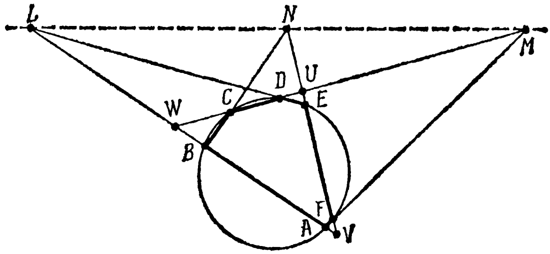


Рис. 111

U, V, W соответственно (рис. 111). Нам нужно доказать, что точки L, M, N лежат на одной прямой.

Применяя теорему Менелая для треугольника UVW к тройкам точек (L, D, E), (A, M, F), (B, C, N), получаем

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}}\cdot\frac{\overline{WD}}{\overline{UD}}\cdot\frac{\overline{UE}}{\overline{VE}}=1,\quad \frac{\overline{WM}}{\overline{UM}}\cdot\frac{\overline{UF}}{\overline{VF}}\cdot\frac{\overline{VA}}{\overline{WA}}=1,$$

$$\frac{\overline{UN}}{\overline{VN}}\cdot\frac{\overline{VB}}{\overline{WB}}\cdot\frac{\overline{WC}}{\overline{UC}}=1.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}}\cdot\frac{\overline{WM}}{\overline{UM}}\cdot\frac{\overline{UN}}{\overline{VN}}=\frac{\overline{UD}}{\overline{WD}}\cdot\frac{\overline{VE}}{\overline{UE}}\cdot\frac{\overline{VF}}{\overline{UF}}\cdot\frac{\overline{WA}}{\overline{VA}}\cdot\frac{\overline{WB}}{\overline{VB}}\cdot\frac{\overline{UC}}{\overline{WC}}.$$

Ясно также, что

$$\frac{UD\cdot UC}{UF\cdot UE}=\frac{VE\cdot VF}{VA\cdot VB}=\frac{WA\cdot WB}{WC\cdot WD}=1.$$

Отсюда следует $\left|\frac{\overline{UD}}{\overline{WD}}\cdot\frac{\overline{VE}}{\overline{UE}}\cdot\frac{\overline{VF}}{\overline{UF}}\cdot\frac{\overline{WA}}{\overline{VA}}\cdot\frac{\overline{WB}}{\overline{VB}}\cdot\frac{\overline{UC}}{\overline{WC}}\right|=1$, а поскольку знак каждого из шести сомножителей отрицателен,

$$\frac{\overline{UD}}{\overline{WD}}\cdot\frac{\overline{VE}}{\overline{UE}}\cdot\frac{\overline{VF}}{\overline{UF}}\cdot\frac{\overline{WA}}{\overline{VA}}\cdot\frac{\overline{WB}}{\overline{VB}}\cdot\frac{\overline{UC}}{\overline{WC}}=1.$$

Поэтому $\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}}\cdot\frac{\overline{WM}}{\overline{UM}}\cdot\frac{\overline{UN}}{\overline{VN}}=1$, т. е. точки L, M, N лежат на одной прямой.

11.40. а) Пусть BM — медиана, AK — биссектриса треугольника ABC и $BM \perp AK$. Прямая AK является биссектрисой и высотой треугольника ABM, поэтому $AM=AB$, т. е. $AC=2AM=2AB$. Следовательно, $AB=2$, $BC=3$, $AC=4$.

б) Пусть $AB=n-1$, $AC=n$, $BC=n+1$, BH — высота, BM — медиана. Обозначим длину BH через h, длину MH — через x. Нам нужно доказать, что $x=2$. По теореме Пифагора $(n\pm 1)^2=h^2+\left(\frac{n}{2}\pm x\right)^2$, т. е. $n^2+2n+1=h^2+\frac{n^2}{4}+nx+x^2$ и $n^2-2n+1=h^2+\frac{n^2}{4}-nx+x^2$. Вычитая из первого равенства второе, получаем $4n=2nx$, т. е. $x=2$.

11.41. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CA через C_1, A_1, B_1 соответственно. Тогда $AB_1=AC_1=x$, $BA_1=BC_1=y$, $CA_1=CB_1=z$. Простые вычисления показывают, что $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{a-b+c}{2}$, $z=\frac{a+b-c}{2}$, поэтому числа x, y, z либо все целые, либо все полуцелые. Поскольку радиус вписанной окружности r равен 1,

$$x=r\operatorname{ctg}(A/2)=\operatorname{ctg}(A/2),\quad y=\operatorname{ctg}(B/2),\quad z=\operatorname{ctg}(C/2).$$

Так как $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$,

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}(A/2)+\operatorname{tg}(B/2)}{1-\operatorname{tg}(A/2)\operatorname{tg}(B/2)}.$$

Отсюда получаем уравнение $z=\frac{x+y}{xy-1}$. Из него видно, что если x и y полуцелые, то z не может быть полуцелым. Поэтому нам нужно решить это уравнение в целых положительных числах. Ясно, что $\frac{x+y}{xy-1}=z\geqslant 1$, т. е. $(x-1)(y-1)\leqslant 2$. Находя все целочисленные положительные решения этого неравенства и проверяя, будет ли число $\frac{x+y}{xy-1}$ целым, получаем единственное (с точностью до перестановки) решение: $x=1$, $y=2$, $z=3$. Следовательно, $a=5$, $b=4$, $c=3$.

11.42. Треугольник OEC равнобедренный, поскольку $\angle EOC=\angle OCA=\angle OCE$. Поэтому $OE=EC$. Аналогично, $OD=BD$.

Следовательно,

$$OD+DE+OE=BD+DE+EC=BC.$$

11.43. Ясно, что $\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{OA}$, поэтому $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{BA}$. Аналогично, $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{AC}$, т. е. $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. Мы доказали также, что ABA_1B_1 — параллелограмм, поэтому отрезки AA_1 и BB_1 делятся точкой пересечения пополам. Аналогично, отрезки AA_1 и CC_1 делятся точкой пересечения пополам, т. е. BB_1 и CC_1 проходят через середину отрезка AA_1.

11.44. а) Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB. Середина биссектрисы угла A лежит на отрезке B_1C_1, причем не является концом этого отрезка. Аналогичные рассуждения показывают, что середины биссектрис углов A, B, C лежат на разных сторонах треугольника $A_1B_1C_1$ и поэтому не могут лежать на одной прямой.

б) Если ABC — прямоугольный треугольник, то середины его высот лежат на средней линии, параллельной гипотенузе.

11.45. а) Обозначим медианы треугольника ABC через AA_1, BB_1, CC_1. Поскольку $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\vec{0}$, из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 всегда можно составить треугольник.

б) и в) Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC=1$ и биссектрисой $AA_1=100$. Проведем биссектрисы BB_1 и CC_1. Ясно, что $BB_1=CC_1<\sqrt{2}\,BC=\sqrt{2}$. Поэтому $AA_1>BB_1+CC_1$, т. е. из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 нельзя составить треугольник.

Если же AA', BB', CC' — высоты рассмотренного нами треугольника, то $BB'+CC'<BB_1+CC_1<AA_1=AA'$. Поэтому и из отрезков AA', BB', CC' нельзя составить треугольник.

11.46. Прямая не пересекает одну из сторон треугольника, для определенности — сторону BC. Пусть M и N — точки пересечения прямой со сторонами AB и AC соответственно. Рассмотрим точку O пересечения отрезка MN и биссектрисы угла A. Точка O равноудалена от сторон AB и AC. Обозначим расстояния от точки O до сторон AB, AC и BC через r_1, r_1 и r_2 соответственно. Тогда

$$\frac{S_{BMNC}}{S_{AMN}}=\frac{\frac{1}{2}r_1MB+\frac{1}{2}r_2BC+\frac{1}{2}r_1CN}{\frac{1}{2}r_1MA+\frac{1}{2}r_1AN}=$$

$$=\frac{MB+BC+CN}{MA+AN}+\frac{(r_2-r_1)BC}{r_1(MA+AN)}.$$

Поэтому $S_1:S_2=P_1:P_2$ тогда и только тогда, когда $\frac{(r_2-r_1)BC}{r_1(MA+AN)}=0$, т. е. $r_1=r_2$. В этом случае точка O равноудалена от всех сторон треугольника, т. е. O — центр вписанной окружности.

11.47. Первое решение. Пусть в треугольнике ABC биссектрисы BM и CN равны. Предположим, что $\angle B \neq \angle C$. Пусть для определенности $\angle B < \angle C$. Обозначим через M_1 точку пересечения прямой BM с описанной окружностью треугольника BCN (рис. 112). Так как $\smile CM_1=\angle B<\angle C=\smile BN$, то $\smile CM_1N < \smile BNM_1$, причем $\smile BNM_1=\angle B+\angle C<180°$. Из двух дуг, меньших 180°, наибольшую дугу стягивает наибольшая хорда, поэтому $CN < BM_1$. Ясно также, что $\angle BMC = 180°-\frac{1}{2}\angle B-\angle C < 180°-\frac{1}{2}\angle B-\left(\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle B\right) = \angle BM_1C$, поэтому точка M лежит вне описанной окружности треугольника BCN, т. е. $BM_1 < BM$. Следовательно, $CN < BM_1 < BM$. Получено противоречие с равенством биссектрис.

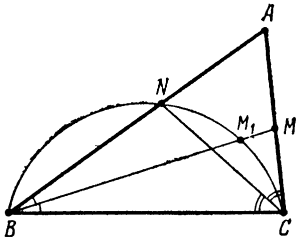


Рис. 112

Второе решение. Докажем сначала, что биссектриса AD угла A треугольника ABC равна $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. В самом деле, применяя теорему синусов к треугольникам ADC и ABC, получаем $\frac{AD}{\sin C}=\frac{CD}{\sin\frac{A}{2}}$ и $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}$. Перемножая эти равенства и учитывая, что $CD=\frac{ab}{b+c}$, получаем требуемое равенство. Аналогично доказывается, что биссектриса угла B равна $\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$.

Предположим, что биссектрисы углов A и B равны, но $a>b$. Тогда $\cos\frac{A}{2}<\cos\frac{B}{2}$ и $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$, т. е. $\frac{bc}{b+c}<\frac{ac}{a+c}$. Перемножая полученные неравенства, приходим к противоречию с равенством биссектрис.

11.48. Ясно, что вместо треугольника со сторонами, параллельными отрезками AP, BP и CP, можно рассматривать какой-нибудь треугольник со сторонами, перпендикулярными этим отрезкам, а через его вершины проводить прямые, не параллельные, а перпендикулярные сторонам треугольника ABC. В качестве такого треугольника можно взять треугольник $O_1O_2O_3$ с вершинами в центрах окружностей, описанных вокруг треугольников ABP, BCP, CAP. Тогда прямые, проходящие через вершины треугольника $O_1O_2O_3$ и перпендикулярные сторонам треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC и поэтому пересекаются в одной точке (рис. 113).

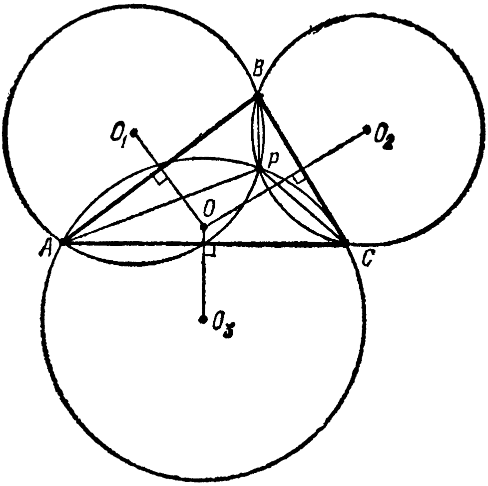


Рис. 113

11.49. Пусть у исходного треугольника были углы $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$. Возьмем равносторонний треугольник $A_2B_2C_2$. Построим на его сторонах как на основаниях равнобедренные

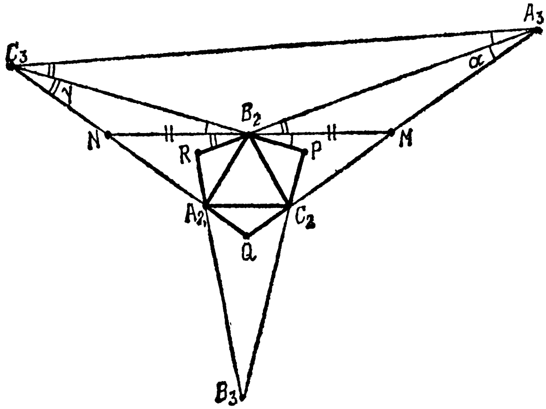


Рис. 114

треугольники A_2B_2R, B_2C_2P, C_2A_2Q с углами при основаниях $60° - \gamma$, $60° - \alpha$, $60° - \beta$ соответственно. Продолжим боковые стороны этих треугольников за точки A_2, B_2, C_2 и обозначим точку пересечения продолжений сторон RB_2 и QC_2 через A_3, точку пересечения продолжений сторон PC_2 и RA_2 — через B_3, точку пересечения продолжений сторон QA_2 и PB_2 — через C_3. Проведем через B_2 прямую, параллельную A_2C_2, и обозначим через M и N точки ее пересечения с прямыми QA_3 и QC_3 (рис. 114). B_2Q — высота треугольника QMN, который подобен равнобедренному треугольнику QA_2C_2. Поэтому B_2 — середина отрезка NM. Вычислим углы треугольников B_2C_3N и B_2A_3M: $\angle C_3B_2N = \angle PB_2M = \angle C_2B_2M - \angle C_2B_2P = \alpha$; $\angle B_2NC_3 = 180° - \angle C_2A_2Q = 120° + \beta$, значит, $\angle B_2C_3N = 180° - \alpha - (120° + \beta) = \gamma$. Аналогично, $\angle A_3B_2M = \gamma$, $\angle B_2A_3M = \alpha$. Следовательно, треугольники B_2C_3N и A_3B_2M подобны. Значит, $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : B_2M$, а так как $B_2M = B_2N$ и $\angle C_3B_2A_3 = \angle C_3NB_2$, то $C_3B_2 : B_2A_3 = C_3N : B_2N$, т. е. треугольники $C_3B_2A_3$ и C_3NB_2 подобны, следовательно, $\angle B_2C_3A_3 = \gamma$. Аналогично, $\angle A_2C_3B_3 = \gamma$, а значит, $\angle A_3C_3B_3 = 3\gamma = \angle C$ и C_3B_2, C_3A_2 — трисектрисы угла C_3 треугольника $A_3B_3C_3$. Аналогичные рассуждения для вершин A_3 и B_3 показывают, что треугольники ABC и $A_3B_3C_3$ подобны, а точки пересечений трисектрис треугольника $A_3B_3C_3$ образуют правильный треугольник $A_2B_2C_2$.

Глава 12
МНОГОУГОЛЬНИКИ

Основные свойства

1. Выпуклый многоугольник называется *описанным*, если все его стороны касаются некоторой окружности. Выпуклый четырехугольник является описанным тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$.

Выпуклый многоугольник называется *вписанным*, если все его вершины лежат на одной окружности. Выпуклый четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ABC+\angle CDA=\angle DAB+\angle BCD$.

2. Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если все его стороны равны и все углы также равны.

Выпуклый n-угольник является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на угол $2\pi/n$ с центром в некоторой точке O он переходит в себя. Точка O называется *центром правильного многоугольника*.

Вводные задачи

1. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда $\angle ABC+\angle CDA=180°$.

2. Докажите, что в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$.

3. а) Докажите, что оси симметрии правильного многоугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что правильный $2n$-угольник имеет центр симметрии.

4. а) Докажите, что сумма углов при вершинах выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.

б) Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что количество этих треугольников равно $n-2$.

§ 1. Вписанные и описанные четырехугольники

12.1. Докажите, что если центр вписанной в четырехугольник окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей, то этот четырехугольник — ромб.

12.2. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Докажите: $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

12.3. Докажите, что если существуют окружность, касающаяся всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, и окружность, касающаяся продолжений всех его сторон, то диагонали такого четырехугольника взаимно перпендикулярны.

12.4. Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

12.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (теорема Птолемея).

12.6. Биссектрисы углов выпуклого четырехугольника $ABCD$ образуют выпуклый четырехугольник P. Докажите, что четырехугольник P вписанный.

12.7. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырехугольника с окружностью.

§ 2. Четырехугольники

12.8. M и N — середины диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, причем $M \neq N$. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M_1 и N_1 соответственно. Докажите: если $MM_1 = NN_1$, то $AD \| BC$.

12.9. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажите, что если окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются AC в одной точке, то и окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются BD в одной точке.

12.10. Диагонали описанной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC и COD равны r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно. Докажите, что $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$.

12.11. Докажите, что два четырехугольника подобны тогда и только тогда, когда у них равны четыре соответственных угла и соответственные углы между диагоналями.

12.12. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны, но не параллельны.

а) Докажите, что прямая, проведенная через середины сторон BC и AD, образует с прямыми AB и CD равные острые углы.

б) Докажите, что прямая, проведенная через середины диагоналей AC и BD, образует со сторонами AB и CD равные острые углы.

12.13. Из вершин выпуклого четырехугольника опущены перпендикуляры на диагонали. Докажите, что четырехугольник, образованный основаниями перпендикуляров, подобен исходному четырехугольнику.

12.14. О выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, равны между собой. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

12.15. Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то центр этой окружности лежит на одной прямой с серединами диагоналей.

§ 3. Шестиугольники

12.16. Докажите, что если в выпуклом шестиугольнике каждая из трех диагоналей, соединяющих противоположные вершины, делит площадь пополам, то эти диагонали пересекаются в одной точке.

12.17. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны.

а) Докажите, что площадь треугольника ACE составляет не менее половины площади шестиугольника.

б) Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

12.18. Все углы выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны. Докажите, что $|BC-EF|=|DE-AB|=|AF-CD|$.

Обратно, если шесть отрезков удовлетворяют этим условиям, то из них можно составить шестиугольник с равными углами.

12.19. В равностороннем выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ сумма углов при вершинах A, C, E равна сумме углов при вершинах B, D, F. Докажите, что углы при противоположных вершинах равны.

§ 4. Метрические соотношения в правильных многоугольниках

12.20. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник $A_1 \ldots A_n$. Точка X находится на расстоянии d от центра окружности. Найдите сумму квадратов расстояний от точки X до всех вершин n-угольника, если:

а) n четно и $d=R$, т. е. точка X лежит на окружности;

б) n и d любые.

12.21. Найдите сумму квадратов длин всех сторон и диагоналей правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

12.22. Найдите сумму квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, до произвольной прямой, проходящей через центр многоугольника.

12.23. В окружность радиуса R вписан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Докажите, что $A_1A_2 \cdot A_1A_3 = \sqrt{5}R^2$.

12.24. Правильный десятиугольник $A_1A_2 \ldots A_{10}$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

12.25. Докажите, что в правильном 18-угольнике диагонали A_1A_{12}, A_2A_{14} и A_9A_{18} пересекаются в одной точке.

§ 5. Правильные многоугольники

12.26. Существует ли правильный многоугольник, длина одной диагонали которого равна сумме длин двух других диагоналей?

12.27. Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем стянута так, чтобы узел стал плоским (рис. 115). Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

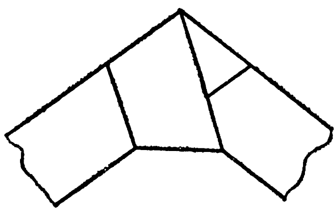


Рис. 115

12.28. Докажите, что если многоугольник $A_1 \ldots A_n$ с нечетным числом сторон вписан в окружность и все его углы равны, то он является правильным.

12.29. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ построены внутренним образом правильные треугольники ABK, BCL, CDM, DAN. Докажите, что середины сторон этих треугольников (не являющихся сторонами квадрата) и середины отрезков KL, LM, MN, NK образуют правильный двенадцатиугольник.

12.30. Докажите, что можно расставить в вершинах правильного n-угольника действительные числа $x_1, \ldots$

..., x_n, все отличные от нуля, так, чтобы для любого правильного k-угольника, все вершины которого являются вершинами исходного n-угольника, сумма чисел, стоящих в его вершинах, равнялась нулю.

12.31. В правильном n-угольнике ($n \geqslant 3$) отмечены середины всех сторон и диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной окружности?

12.32. Вершины правильного n-угольника окрашены в несколько цветов так, что точки любого одного цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдется два равных.

§ 6. Вписанные и описанные многоугольники

12.33. Докажите, что если из произвольной точки окружности, описанной вокруг $2n$-угольника, опустить перпендикуляры на его стороны (или продолжения сторон), то произведение длин перпендикуляров, опущенных на «четные» стороны, будет равно произведению длин перпендикуляров, опущенных на «нечетные» стороны.

12.34. В $2n$-угольнике (n нечетно) $A_1 \ldots A_{2n}$, описанном около окружности с центром O, диагонали A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, ..., $A_{n-1}A_{2n-1}$ проходят через точку O. Докажите, что и диагональ A_nA_{2n} проходит через точку O.

12.35. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены три квадрата. Какими должны быть углы треугольника, чтобы шесть вершин этих квадратов, отличных от вершин треугольника, лежали на одной окружности?

12.36. Вписанный многоугольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов всех вписанных в эти треугольники окружностей не зависит от разбиения.

12.37. Некоторые стороны выпуклого многоугольника красные, остальные — синие. Сумма длин красных сторон меньше половины периметра и нет ни одной пары соседних синих сторон. Докажите, что в этот многоугольник нельзя вписать окружность.

§ 7. Произвольные выпуклые многоугольники

12.38. В равностороннем (неправильном) пятиугольнике $ABCDE$ угол ABC вдвое больше угла DBE. Найдите величину угла ABC.

12.39. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

12.40. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали?

12.41. Для каких n существует выпуклый n-угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

12.42. Может ли выпуклый неправильный пятиугольник иметь ровно 4 стороны одинаковой длины и ровно 4 диагонали одинаковой длины?

Может ли в таком пятиугольнике пятая сторона иметь общую точку с пятой диагональю?

12.43. Точка O, лежащая внутри выпуклого многоугольника, образует с каждыми двумя его вершинами равнобедренный треугольник. Докажите, что точка O равноудалена от вершин этого многоугольника.

Задачи для самостоятельного решения

12.44. Точка P лежит внутри прямоугольника $ABCD$. Докажите, что $PA^2+PC^2=PD^2+PB^2$.

12.45. AC — наибольшая сторона треугольника ABC. На AC выбираются точки A_1 и C_1 так, что $AC_1=AB$ и $CA_1=CB$. Затем на стороне AB берется точка A_2 так, что $AA_1=AA_2$, а на стороне CB — точка C_2 так, что $CC_1=CC_2$. Докажите, что точки A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

12.46. Угол между любыми двумя диагоналями выпуклого 180-угольника измеряется целым числом градусов. Докажите, что многоугольник правильный.

12.47. В окружность вписан выпуклый 7-угольник. Известно, что какие-то три его угла равны 120°. Докажите, что какие-то две его стороны имеют одинаковую длину.

12.48. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. A_1 — центр описанной окружности треугольника BCD; B_1, C_1, D_1 определяются аналогично.

а) Докажите, что либо A_1, B_1, C_1, D_1 совпадают, либо все они различны. Во втором случае докажите, что A_1 и C_1 лежат по разные стороны от прямой B_1D_1.

б) Обозначим через A_2 центр описанной окружности треугольника $B_1C_1D_1$; B_2, C_2, D_2 определяются аналогично. Докажите, что четырехугольники $ABCD$ и $A_2B_2C_2D_2$ подобны.

Решения

12.1. Пусть O — центр вписанной окружности и точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Тогда $\angle ACB=\angle ACD$ и $\angle BAC=\angle CAD$. Поэтому треугольники ABC и ADC равны, поскольку сторона AC у них общая. Следовательно, $AB=DA$. Аналогично, $AB=BC=CD=DA$.

12.2. Ясно, что $\angle OAD=\angle OAB$, $\angle OBC=\angle OBA$, $\angle OCB=\angle OCD$, $\angle ODA=\angle ODC$. Складывая эти равенства, получаем

$$\angle OAD+\angle ODA+\angle OBC+\angle OCB=\angle OAB+\angle OBA+\angle OCD+\angle ODC.$$

Так как $\angle OAD+\angle ODA=180°-\angle AOD$, $\angle OBC+\angle OCB=180°-\angle BOC$, $\angle OAB+\angle OBA=180°-\angle AOB$, $\angle OCD+\angle ODC=180°-\angle COD$, то $\angle AOD+\angle BOC=\angle AOB+\angle COD$. А так как $\angle AOD+\angle BOC+\angle AOB+\angle COD=360°$, то $\angle AOB+\angle COD=180°$.

12.3. Обозначим вписанную окружность четырехугольника $ABCD$ через S_1, а окружность, касающуюся продолжений сторон четырехугольника, — через S_2. К двум окружностям можно провести не больше четырех общих касательных: две внешние и две внутренние. Поэтому окружности S_1 и S_2 однозначно задают выпуклый четырехугольник $ABCD$, причем прямая l, соединяющая центры окружностей S_1 и S_2, является осью симметрии этого многоугольника. Прямая l содержит диагональ четырехугольника $ABCD$. Ясно, что если диагональ четырехугольника является осью симметрии, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

12.4. Пусть O — центр данной окружности, R — ее радиус, a — длина хорд, высекаемых окружностью на сторонах четырехугольника. Тогда расстояния от точки O до сторон четырехугольника равны $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$, т. е. она равноудалена от сторон четырехугольника и является центром вписанной окружности.

12.5. Возьмем на диагонали BD точку M так, чтобы $\angle MCD=\angle BCA$. Тогда треугольник ABC подобен треугольнику DMC, поскольку углы BAC и BDC опираются на одну дугу. Поэтому $\frac{CD}{MD}=\frac{CA}{AB}$, т. е. $AB\cdot CD=AC\cdot MD$. Поскольку $\angle MCD=\angle BCA$, то $\angle BCM=\angle ACD$. Треугольник BCM подобен треугольнику ACD, так как углы CBD и CAD опираются на одну дугу. Поэтому $\frac{BC}{BM}=\frac{AC}{AD}$, т. е. $BC\cdot AD=AC\cdot BM$. Складывая полученные равенства, имеем

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot MD+AC\cdot BM=AC\cdot BD.$$

12.6. Пусть M — точка пересечения биссектрис углов A и B, N — точка пересечения биссектрис углов C и D. Если треугольники AMB и CND пересекаются, то углы AMB и CND являются противоположными внутренними углами четырехугольника P (рис. 116, *а*). Если треугольники AMB и CND не пересекаются, то углы AMB и CND являются противоположными внешними углами четырехугольника P (рис. 116, *б*) или углами, вертикальными к внутренним углам четырехугольника P (рис. 116, *в*). Во

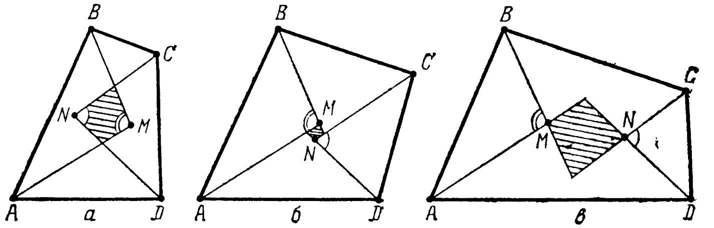


Рис. 116

всех случаях нам нужно доказать, что $\angle AMB + \angle CND = 180°$. Ясно, что

$$\angle AMB + \angle CND = 180° - \angle ABM - \angle BAM + 180° - \angle CDN - \\ - \angle DCN = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle A + 180° - \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C.$$

Так как $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle AMB + \angle CND = 180°$.

12.7. Пусть стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ касаются вписанной окружности в точках E, F, G, H соответственно (рис. 117).

Покажем сначала, что прямые FH, EG и AC пересекаются в одной точке. Обозначим точки, в которых прямые FH и EG пересекают прямую AC, через M и M' соответственно. Поскольку $\angle AHM = \angle BFM$ как углы между касательными и хордой HF, $\sin AHM = \sin CFM$. Поэтому $\frac{AM \cdot MH}{FM \cdot MC} = \frac{S_{AMH}}{S_{FMC}} = \frac{AH \cdot MH}{FC \cdot FM}$, т. е. $\frac{AM}{MC} = \frac{AH}{FC}$. Аналогично, $\frac{AM'}{M'C} = \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{FC} = \frac{AM}{MC}$, поэтому $M = M'$, т. е. прямые FH, EG и AC пересекаются в одной точке.

Аналогичные рассуждения показывают, что прямые FH, EG и BD пересекаются в одной точке, поэтому прямые AC, BD, FH и EG пересекаются в одной точке, что и требовалось.

12.8. Предположим, что прямые AD и BC не параллельны. Пусть M_2, K, N_2 — середины сторон AB, BC, CD соответственно. Если $MN \parallel BC$, то $BC \parallel AD$, так как $AM = MC$ и $BN = ND$. Поэтому мы будем считать, что прямые MN и BC не параллельны, т. е. $M_1 \neq M_2$ и $N_1 \neq N_2$. Ясно, что $\overrightarrow{M_2M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NN_2}$ и

$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{NN_1}$. Поэтому $M_1M_2 \parallel N_1N_2$. Следовательно, $KM \parallel AB \parallel \parallel CD \parallel KN$, т. е. $M = N$. Приходим к противоречию.

12.9. Докажем, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются AC в одной точке тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$. Обозначим точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB, BC, CA через A_1, B_1, N соответственно; точки касания вписанной окружности треугольника ACD со сторонами CD, DA, AC — через C_1, D_1, M

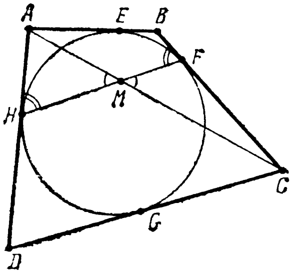


Рис. 117

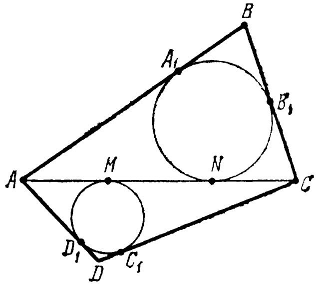


Рис. 118

соответственно. Для определенности можно считать, что точка M лежит между точками A и N (рис. 118). Тогда

$$
\begin{aligned}
AB + CD &= AA_1 + A_1B + CC_1 + C_1D = \\
&= (AM + MN) + BB_1 + (CN + MN) + DD_1 = \\
&= AD_1 + DD_1 + BB_1 + B_1C + 2MN = BC + AD + 2MN.
\end{aligned}
$$

Окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются AC в одной точке тогда и только тогда, когда $MN = 0$, т. е. $AB + CD = BC + AD$.

Аналогичные рассуждения показывают, что окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются BD в одной точке тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$. Поэтому, если окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются AC в одной точке, то $AB + CD = BC + AD$. Следовательно, окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются в одной точке.

12.10. Обозначим длины отрезков AO и DO через x и y, длины сторон AB, BC, CD, DA — через a, b, c, d.

Треугольники BOC и AOD подобны с некоторым коэффициентом k, поэтому $CO = kx$, $BO = ky$. Следовательно,

$$
2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right) = \frac{d + x + y}{S_{AOD}} + \frac{kd + kx + ky}{k^2 S_{AOD}},
$$

$$
2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}\right) = \frac{a + x + ky}{kS_{AOD}} + \frac{c + kx + y}{kS_{AOD}},
$$

так как $S_{BOC}=k^2S_{AOD}$, $S_{AOB}=S_{COD}=kS_{AOD}$. Поскольку $\frac{x+y}{S_{AOD}}+\frac{x+y}{kS_{AOD}}=\frac{x+ky}{kS_{AOD}}+\frac{kx+y}{kS_{AOD}}$, нам остается проверить равенство $kd+d=a+c$. Это равенство следует из того, что трапеция является описанной, так как $kd=b$.

12.11. Преобразованием подобия мы можем совместить одну пару соответственных сторон четырехугольников, поэтому нам достаточно рассмотреть четырехугольники $ABCD$ и ABC_1D_1, у которых точки C_1 и D_1 лежат на лучах BC, AD и $CD \parallel C_1D_1$. Обозначим точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и ABC_1D_1 через O и O_1 соответственно.

Предположим, что точки C и D лежат ближе к точкам B и A, чем точки C_1 и D_1. Докажем, что тогда $\angle AOB > \angle AO_1B$. В самом деле, $\angle C_1AB > \angle CAB$ и $\angle D_1BA > \angle DBA$, поэтому $\angle AO_1B = 180° - \angle C_1AB - \angle D_1BA < 180° - \angle CAB - \angle DBA = \angle AOB$. Получено противоречие, поэтому $C_1=C$, $D_1=D$. Мы доказали, что если у четырехугольников равны соответственные углы при вершинах и соответственные углы между диагоналями, то четырехугольники подобны. Обратное утверждение очевидно.

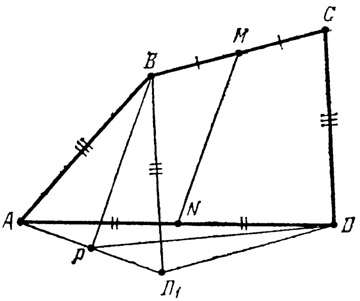


Рис. 119

З а м е ч а н и е. Необходимо требовать равенство именно соответственных углов между диагоналями, поскольку можно добиться того, чтобы $\angle AOB + \angle AO_1B = 180°$ и $\angle AOB \neq \angle AO_1B$. Тогда четырехугольники $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют четыре равных соответственных угла и равные углы между диагоналями, но эти четырехугольники не подобны.

12.12. а) Обозначим середины сторон BC и AD через M и N соответственно. Пусть D_1 — образ точки D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CB}$, т. е. $BCDD_1$ — параллелограмм (рис. 119). Пусть P — середина отрезка AD_1. Поскольку $AB=CD=D_1B$, отрезок BP — биссектриса равнобедренного треугольника ABD_1. Поэтому нам достаточно доказать, что $BP \parallel MN$.

Докажем, что $BMNP$ — параллелограмм. В самом деле, поскольку $AN=ND$ и $AP=PD_1$, $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1D}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$.

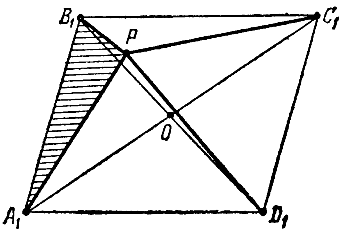
б) П е р в о е р е ш е н и е. Пусть M, N, P, Q — середины отрезков BC, AD, AC, BD соответственно. Так как $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=$

$=\overrightarrow{NQ}$ и $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{PN}$, то $PMQN$ — параллелограмм, причем $PM:MQ=AB:CD=1$, т. е. $PMQN$ — ромб и прямые PQ и MN перпендикулярны. Согласно а) прямая MN образует со сторонами AB и CD равные острые углы, поэтому прямая PQ также образует со сторонами AB и CD равные острые углы.

Второе решение. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD, P и Q — середины отрезков AC и BD. Обозначим проекции точек A, B, C, D, P, Q на биссектрису угла AOD через A_1, B_1, C_1, D_1, P_1, Q_1 соответственно. Ясно, что $OP_1=\frac{OC_1+OA_1}{2}$ и $OQ_1=\frac{OD_1+OB_1}{2}$. Так как $AB=CD$, то $A_1B_1=C_1D_1$. Поэтому $OA_1-OB_1=OD_1-OC_1$, т. е. $OA_1+OC_1=OD_1+OB_1$. Следовательно, $P_1=Q_1$, т. е. точки P и Q лежат на прямой, перпендикулярной биссектрисе угла AOD. Эта прямая образует равные острые углы с прямыми AB и CD.

12.13. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha=\angle AOB<90°$. Опустим перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на диагонали четырехугольника $ABCD$. Ясно, что $OA_1=OA\cos\alpha$, $OB_1=OB\cos\alpha$, $OC_1=OC\cos\alpha$, $OD_1=OD\cos\alpha$ и при симметрии относительно биссектрисы угла AOB четырехугольник $ABCD$ переходит в четырехугольник, гомотетичный четырехугольнику $A_1B_1C_1D_1$ с коэффициентом $1/\cos\alpha$.

12.14. Докажем сначала, что если треугольник ABC лежит внутри треугольника $A'B'C'$, то $r_{ABC}<r_{A'B'C'}$. В самом деле,



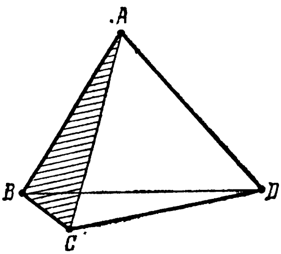


Рис. 120

окружность S, вписанная в треугольник ABC, лежит внутри треугольника $A'B'C'$. Проведя к этой окружности касательные, параллельные сторонам треугольника $A'B'C'$, мы можем получить треугольник $A''B''C''$, подобный треугольнику $A'B'C'$, для которого S является вписанной окружностью. Поэтому $r_{ABC}=r_{A''B''C''}<r_{A'B'C'}$.

Отложим от некоторой точки P векторы $\overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{PC_1} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PD_1} = \overrightarrow{AD}$. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{D_1C_1}$, т. е. $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм, причем отрезки PA_1, PB_1, PC_1, PD_1 делят его на четыре треугольника, равных треугольникам ABC, BCD, CDA, DAB (рис. 120). Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Докажем, что $P = O$. В самом деле, если $P \neq O$, то можно для определенности считать, что P лежит внутри треугольника A_1B_1O. Тогда $r_{ABC} < r_{A_1B_1P} < r_{A_1B_1O} = r_{C_1D_1O} < r_{C_1D_1P} = r_{DAC}$, что противоречит условию.

Поскольку $p = S/r$, а площади и радиусы вписанных окружностей треугольников PA_1B_1, PB_1C_1, PC_1D_1, PD_1A_1 равны, то равны и их периметры. Поэтому $A_1B_1C_1D_1$ — ромб, а $ABCD$ — прямоугольник.

12.15. Поскольку для параллелограмма утверждение задачи очевидно, будем считать, что четырехугольник $ABCD$ — не параллелограмм; для определенности AB и CD пересекаются в точке K.

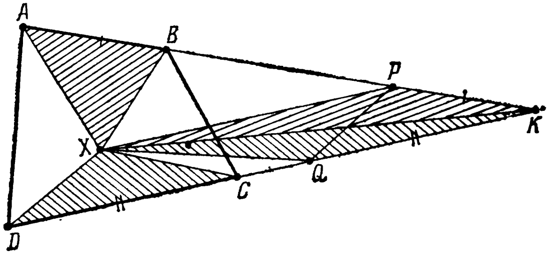


Рис. 121

Пусть O — центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$, M, N — середины диагоналей AC и BD. Ясно, что

$$S_{ANB} + S_{CND} = S_{AMB} + S_{CMD} = S_{AOB} + S_{COD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Поэтому нам достаточно доказать, что геометрическим местом точек X, лежащих внутри четырехугольника $ABCD$, для которых сумма площадей $S_{AXB} + S_{CXD}$ равна половине площади $ABCD$, является отрезок. Отложим на лучах KB и KC отрезки $KP = AB$ и $KQ = CD$ (рис. 121). Тогда $S_{AXB} = S_{KXP}$ и $S_{CXD} = S_{KXQ}$, т. е. $S_{AXB} + S_{CXD} = S_{KXP} + S_{KXQ}$. Поэтому площадь треугольника PXQ постоянна, т. е. точка X заметает отрезок, параллельный отрезку PQ.

12.16. Предположим, что диагонали шестиугольника образуют треугольник PQR. Обозначим вершины шестиугольника следующим образом: вершина A лежит на луче QP, B — на RP, C — на RQ, D — на PQ, E — на PR, F — на QR (рис. 122).

Поскольку прямые AD и BE делят площадь шестиугольника пополам, $S_{APEF}+S_{PED}=S_{PDCB}+S_{ABP}$ и $S_{APEF}+S_{ABP}=$ $=S_{PDCB}+S_{PED}$. Поэтому $S_{ABP}=S_{PED}$, т. е.

$$AP\cdot BP=EP\cdot DP=(ER+RP)\cdot(DQ+QP)>ER\cdot DQ.$$

Аналогично, $CQ\cdot DQ>AP\cdot FR$ и $FR\cdot ER>BP\cdot CQ$. Перемножая эти неравенства, получаем

$$AP\cdot BP\cdot CQ\cdot DQ\cdot FR\cdot ER>ER\cdot DQ\cdot AP\cdot FR\cdot BP\cdot CQ,$$

чего не может быть. Поэтому диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

12.17. Проведем через точки A, C, E прямые l_1, l_2, l_3, параллельные прямым BC, DE, FA соответственно. Обозначим точки

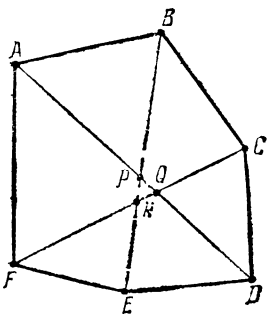


Рис. 122

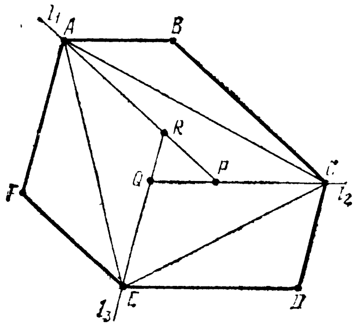


Рис. 123.

пересечения прямых l_1 и l_2, l_2 и l_3, l_3 и l_1 через P, Q, R соответственно (рис. 123). Ясно, что

$$S_{ACE}=\frac{1}{2}(S_{ABCDEF}-S_{PQR})+S_{PQR}=$$

$$=\frac{1}{2}(S_{ABCDEF}+S_{PQR})\geqslant\frac{1}{2}S_{ABCDEF}.$$

Аналогично, $S_{BDF}=\frac{1}{2}(S_{ABCDEF}+S_{P'Q'R'})$. Ясно, что

$$PQ=|AB-DE|,\quad QR=|CD-AF|;\quad PR=|EF-BC|,$$

поэтому треугольники PQR и $P'Q'R'$ равны. Следовательно, $S_{ACE}=S_{BDF}$.

12.18. Проведем через точки A, C, E прямые l_1, l_2, l_3, параллельные прямым BC, DE, FA соответственно. Обозначим точки пересечения прямых l_1 и l_2, l_2 и l_3, l_3 и l_1 через P, Q, R соответственно. Треугольник PQR правильный. Ясно, что

$$PQ=|AB-DE|,\quad QR=|CD-AF|,\quad RP=|EF-BC|.$$

Поэтому $|AB-DE|=|CD-AF|=|EF-BC|$, что и требовалось.

Обратно, пусть даны шесть отрезков AB', BC', CD', DE', EF', FA', удовлетворяющих условию $|BC'-EF'|=|DE'-AB'|=$ $=|FA'-CD'|=a$. Построим равносторонний треугольник PQR со стороной a и отложим на лучах QP, RQ, PR отрезки QL, RM, PN, равные наибольшим из пар отрезков AB' и DE', CD' и AF', EF' и BC' соответственно. Достраивая треугольники NPL, MQL и NRM до параллелограммов, получаем искомый шестиугольник.

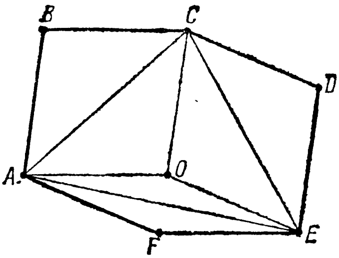


Рис. 124

12.19. Первое решение. Если в выпуклом шестиугольнике сумма углов при вершинах A, C, E равна сумме углов при вершинах B, D, F, то

$$\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F=360^\circ.$$

По теореме синусов

$$\sin FBD:\sin BDF:\sin DFB=DF:FB:BD.$$

Так как шестиугольник равносторонний, $DF=2FE\sin\left(\frac{1}{2}FED\right)$, $FB=2AF\sin\left(\frac{1}{2}FAB\right)$, $BD=2BC\sin\left(\frac{1}{2}BCD\right)$, т. е.

$$DF:FB:BD=\sin\left(\frac{1}{2}FED\right):\sin\left(\frac{1}{2}FAB\right):\sin\left(\frac{1}{2}BCD\right)=$$
$$=A'C':C'E':E'A',$$

где $E'A'C'$ — некий треугольник с углами $\frac{1}{2}\angle FED$, $\frac{1}{2}\angle BAF$, $\frac{1}{2}\angle BCD$ соответственно. Следовательно, $\triangle BDF \backsim \triangle E'A'C'$, т. е. $\angle FBD=\frac{1}{2}\angle FED$, $\angle BDF=\frac{1}{2}\angle BAF$, $\angle DFB=\frac{1}{2}\angle BCD$.

Поскольку $\angle BDC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BCD)$, $\angle FDE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle FED)$ и $\angle BDF=\frac{1}{2}\angle FAB$, то $\angle EDC=\angle BDF+\angle BDC+\angle FDE=$ $=\frac{1}{2}\angle FAB+\frac{1}{2}(360^\circ-\angle BCD-\angle FED)=\angle FAB$. Аналогично, $\angle BCD=\angle AFE$ и $\angle ABC=\angle FED$, что и требовалось.

Второе решение. Отрежем от шестиугольника $ABCDEF$ треугольники ABC, CDE и EFA. Поскольку $\angle ABC+\angle CDE+$ $+\angle EFA=360^\circ$, приложив сторону FE треугольника AFE к стороне DE треугольника CDE, мы сможем приложить стороны BC и BA треугольника ABC к сторонам DC и FA треугольников CDE и AEF. Полученный треугольник мы можем совместить с треугольником ACE, образованным вершинами исходного шестиугольника (рис. 124). Пусть O — общая точка переложенных треугольников ABC, CDE, EFA. Тогда четырехугольники $ABCO$, $CDEO$, $EFAO$ являются ромбами, поэтому $AB \parallel DE, BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Теперь видно, что углы при противоположных вершинах равны.

12.20. а) Пусть $n=2m$. Поскольку A_k и A_{k+m} — диаметрально противоположные точки окружности, треугольник A_kXA_{k+m} прямоугольный. Поэтому

$$A_kX^2+A_{k+m}X^2=A_kA_{k+m}^2=4R^2.$$

Число таких пар равно m, поэтому искомая сумма равна $4mR^2 = 2nR^2$.

б) Обозначим центр окружности через O. Тогда

$$XA_k^2=|\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OA_k}|^2=XO^2+2(\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{OA_k})+OA_k^2=d^2+R^2+2(\overrightarrow{XO},\overrightarrow{OA_k}).$$

Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} XA_k^2=n(d^2+R^2)+2\left(\overrightarrow{XO}, \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k}\right)=n(d^2+R^2)$, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{OA_k}=\vec{0}$ (задача 5.19а)).

12.21. Обозначим через S_k сумму квадратов расстояний от вершины A_k до всех остальных вершин. Тогда

$$S_k=A_kA_1^2+A_kA_2^2+\ldots+A_kA_n^2=A_kO^2+2(\overrightarrow{A_kO}, \overrightarrow{OA_1})+ +A_1O^2+\ldots+A_kO^2+2(\overrightarrow{A_kO}, \overrightarrow{OA_n})+A_nO^2=2nR^2,$$

поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$. Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k=2n^2R^2$. Поскольку квадрат каждой из сторон и диагоналей дважды входит в эту сумму, искомая сумма равна n^2R^2.

12.22. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром O. Прямая l, проходящая через точку O, пересекает окружность в точках X и Y. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — точки, симметричные точке X относительно прямых $OA_1, \ldots, OA_n$. Тогда длина отрезка XX_k равна удвоенному расстоянию от точки A_k до прямой l. Согласно задаче 8.19 точки $X_1, \ldots, X_n$ являются вершинами правильного многоугольника. Поэтому согласно задаче 12.20 $\sum\limits_{k=1}^{n} XX_k^2=2nR^2$, т. е. искомая сумма равна $\frac{n}{2}R^2$.

12.23. Ясно, что $A_1A_2=2R\sin 36^\circ=4R\cos 18^\circ\cdot\sin 18^\circ$, $A_1A_3=2R\sin 72^\circ=2R\cos 18^\circ$. Поэтому

$$A_1A_2\cdot A_1A_3=8R^2\sin 18^\circ\cdot\cos^2 18^\circ.$$

Покажем, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углами $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = \angle C = 72^\circ$. Пусть $AC = 1$, $BC = x$. Проведем биссектрису BD треугольника ABC. Тогда треугольник BCD подобен треугольнику ABC и $\angle ABD = \angle BAD$. Поэтому $AD = BD = BC = x$ и $DC = x^2$, т. е. $1 = AC = AD + DC = x + x^2$. Отсюда (отрицательный корень мы отбросим) $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. $\sin 18^\circ = \sin \frac{A}{2} = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Поэтому $\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{8}$ и $A_1A_2 \cdot A_1A_3 = \sqrt{5} R^2$.

12.24. Проведем диаметры A_5A_{10}, A_2A_7 и хорды A_1A_4, A_4A_5. Пусть P — точка пересечения прямых A_1A_4 и A_2A_7, O — точка пересечения диаметров A_5A_{10} и A_2A_7, т. е. центр описанной окружности. Ясно, что $A_4A_5 \| A_2A_7$ и $A_1A_4 \| A_5A_{10}$, т. е. A_4A_5OP — параллелограмм. Поскольку треугольник A_2A_1P равнобедренный $\left(\text{в нем } \angle A_1 = \frac{1}{2} \smile A_2A_4 = 36^\circ,\ \angle A_2 = \frac{1}{2} \smile A_7A_1 = 72^\circ\right)$, $A_1P = A_1A_2$. Поэтому $A_1A_4 - A_1A_2 = A_1A_4 - A_1P = A_4P = A_5O = R$.

12.25. Обозначим точки, в которых диагонали A_1A_{12} и A_2A_{14} пересекают диаметр A_9A_{18}, через D и D' соответственно. Нам нужно доказать, что $D = D'$. Обозначим центр описанной окружности через O. Ясно, что $\angle OA_1D = 20^\circ$ и $\angle A_1DA_{18} = 40^\circ$. Поэтому $OD = R \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}$. Ясно также, что $\angle OA_2D' = 30^\circ$ и $\angle A_2D'A_{18} = 70^\circ$. Поэтому $OD' = R \frac{\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}$. Так как $\sin 20^\circ \sin 70^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ = \sin 30^\circ \sin 40^\circ$, то $OD = OD'$. Ясно, что обе диагонали A_2A_{14} и A_1A_{12} пересекают именно отрезок OA_{18}, а не отрезок OA_9. Поэтому $D = D'$, что и требовалось.

12.26. Рассмотрим правильный 12-угольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$, вписанный в окружность радиуса R. Ясно, что $A_1A_7 = 2R$, $A_1A_3 = A_1A_{11} = R$. Поэтому $A_1A_7 = A_1A_3 + A_1A_{11}$.

12.27. Обозначим вершины пятиугольника так, как показано на рис. 125.

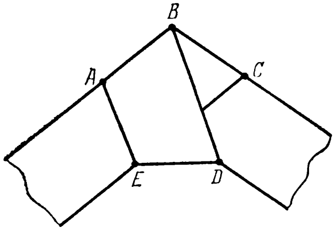


Рис. 125

Если в треугольнике две высоты равны, то равны и стороны, на которые опущены эти высоты. Рассматривая треугольники EAB, ABC, BCD, получаем $EA = AB$, $AB = BC$, $BC = CD$. Поэтому трапеции $EABC$ и $ABCD$ равнобедренные, т. е. $\angle A = \angle B = \angle BCD$. Рассматривая треугольники ABD и BCE, получаем $AD = BD$ и $BE = CE$. Поскольку треугольники EAB, ABC, BCD равны, $BE = AC = BD$. Поэтому $AD = BE$ и $BD = CE$, т. е. трапеции $DEAB$ и $BCDE$ равнобедренные. Следовательно, $ED = AB = BC = CD = AE$ и $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$, т. е. $ABCDE$ — правильный пятиугольник.

12.28. Обозначим центр описанной окружности через O. Поскольку $\frac{1}{2} \angle A_kOA_{k+2} + \angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = 180°$, величина угла A_kOA_{k+2} равна $360° - 2\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$, т. е. постоянна. Поэтому при повороте на этот угол относительно точки O точка A_k переходит в точку A_{k+2}. Следовательно, $A_1A_2 = A_3A_4 = \ldots = A_{n-2}A_{n-1} = A_nA_1$ и $A_2A_3 = A_4A_5 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_1A_2$. Все углы и все стороны многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равны, поэтому он правильный.

12.29. Пусть O — центр квадрата. Введем систему координат, направив оси по лучам OK и ON. Будем считать, что длина стороны квадрата равна двум. Обозначим середины отрезков BK, CM, NK через P_1, P_2, P_3 соответственно. Нам достаточно доказать, что $OP_1 = OP_2 = OP_3$ и $P_1P_2 = P_2P_3$, поскольку остальные равенства доказываются аналогично. Точки P_1, P_2, P_3 имеют следующие координаты: $P_1 = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. Поэтому $OP_1 = OP_2 = OP_3 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ и $P_1P_2 = P_2P_3 = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

12.30. Проведем через центр правильного многоугольника $A_1\ldots A_n$ прямую l, не проходящую через его вершины. Пусть x_i равно проекции вектора $\overrightarrow{OA_i}$ на прямую, перпендикулярную прямой l. Тогда все x_i отличны от нуля и сумма чисел x_i, стоящих в вершинах правильного k-угольника, равна нулю, поскольку равна нулю соответствующая сумма векторов $\overrightarrow{OA_i}$ (см. задачу 5.19а)).

12.31. Пусть сначала $n = 2m$. Диагонали и стороны правильного $2m$-угольника имеют m различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат либо на $m - 1$ концентрических окружностях (по n точек на каждой), либо в общем центре этих окружностей. Поскольку различные окружности имеют не более двух общих точек, окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более $1 + 2(m-1) = 2m - 1 = n - 1$ отмеченных точек.

Пусть теперь $n = 2m + 1$. Диагонали и стороны правильного $(2m+1)$-угольника имеют m различных длин. Поэтому отмеченные точки лежат на m концентрических окружностях по n точек на каждой. Окружность, не принадлежащая этому семейству концентрических окружностей, содержит не более $2m=n-1$ отмеченных точек.

В обоих случаях наибольшее число отмеченных точек, лежащих на одной окружности, равно n.

12.32. Обозначим центр многоугольника через O, вершины — через $A_1, \ldots, A_n$. Предположим, что среди одноцветных многоугольников нет равных, т. е. они имеют $m=m_1<m_2<m_3<\ldots<m_k$ сторон соответственно. Рассмотрим преобразование f, определенное на множестве вершин n-угольника и переводящее вершину A_k в вершину A_{mk} : $f(A_k)=A_{mk}$ (считаем, что $A_{p+qn}=A_p$). При этом преобразовании вершины правильного m-угольника переходят в одну точку B, поэтому сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$, где A_i — вершины m-угольника, равна $m\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$.

Поскольку $\angle A_{mi}OA_{mj}=m\angle A_iOA_j$, вершины любого правильного многоугольника с числом сторон больше m переходят при рассматриваемом преобразовании в вершины правильного многоугольника. Поэтому и сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$ по всем вершинам n-угольника и аналогичные суммы по вершинам m_2-, m_3-, $\ldots, m_k$-угольников равны нулю. Получено противоречие с тем, что сумма векторов $\overrightarrow{Of(A_i)}$ по вершинам m-угольника не равна нулю. Поэтому среди одноцветных многоугольников найдется два равных.

12.33. Обозначим вершины многоугольника через $A_1, \ldots, A_n$, основания перпендикуляров, опущенных из точки A окружности на прямые $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, — через $B_1, \ldots, B_n$ соответственно. Пусть $\angle A_{k-1}A_kA=\beta_k$, $\angle AA_kA_{k+1}=\alpha_k$. Тогда

$$AB_k:AB_{k-1}=AA_k\sin\alpha_k:AA_k\sin\beta_k=\sin\alpha_k:\sin\beta_k.$$

Аналогично, $AB_{k-2}:AB_{k-1}=\sin\beta_{k-1}:\sin\alpha_{k-1}$, поэтому

$$\frac{AB_{k-2}\cdot AB_k}{AB_{k-1}^2}=\frac{\sin\alpha_k\sin\beta_{k-1}}{\sin\alpha_{k-1}\sin\beta_k}.$$

Если точка A лежит на одной из дуг $\smile A_{k-1}A_k$ или $\smile A_kA_{k+1}$, то $\alpha_{k-1}=\beta_{k+1}$, а если не лежит, то $\alpha_{k-1}+\beta_{k+1}=\pi$. В обоих случаях $\sin\alpha_{k-1}=\sin\beta_{k+1}$. Перемножая равенства

$$\frac{AB_1\cdot AB_3}{AB_2^2}=\frac{\sin\alpha_3\sin\beta_2}{\sin\alpha_2\sin\beta_3}, \ \ldots, \ \frac{AB_{2n-1}\cdot AB_1}{AB_{2n}^2}=\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_{2n}}{\sin\alpha_{2n}\sin\beta_1},$$

получаем требуемое равенство.

12.34. Пусть OH_i — высота треугольника OA_iA_{i+1}. Тогда $\angle H_{i-1}OA_i=\angle H_iOA_i=\varphi_i$. Из условия задачи следует, что $\varphi_1+\varphi_2=\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}$, $\varphi_{n+2}+\varphi_{n+3}=\varphi_2+\varphi_3$, $\varphi_3+\varphi_4=\varphi_{n+3}+\varphi_{n+4}, \ldots$

$\ldots, \varphi_{n-2}+\varphi_{n-1}=\varphi_{2n-2}+\varphi_{2n-1}$ (при записи последнего равенства мы учли, что n нечетно) и $\varphi_{n-1}+2\varphi_n+\varphi_{n+1}=\varphi_{2n-1}+$ $+2\varphi_{2n}+\varphi_1$. Складывая все эти равенства, получаем $\varphi_{n-1}+\varphi_n=$ $=\varphi_{2n-1}+\varphi_{2n}$, что и требовалось.

12.35. Предположим, что на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABB_1A_1, BCC_2B_2, ACC_3A_3 и вершины A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3 лежат на одной окружности S. Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3 проходят через центр окружности S. Ясно, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, B_2C_2, A_3C_3 совпадают с серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ABC, поэтому центр окружности S совпадает с центром описанной окружности треугольника.

Обозначим центр описанной окружности треугольника ABC через O. Расстояние от точки O до прямой B_2C_2 равно $R\cos A+$ $+2R\sin A$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Поэтому

$$OB_2^2=(R\sin A)^2+(R\cos A+2R\sin A)^2=$$
$$=R^2(3+2(\sin 2A-\cos 2A))=R^2\left(3-2\sqrt{2}\cos(45^\circ+2A)\right).$$

Ясно, что для того чтобы треугольник обладал требуемым свойством, необходимо и достаточно, чтобы $OB_2^2=OC_3^2=OA_1^2$, т. е. $\cos(45^\circ+2A)=\cos(45^\circ+2B)=\cos(45^\circ+2C)$. Это равенство выполняется при $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$. Если же $\angle A\neq\angle B$, то $(45^\circ+2\angle A)+(45^\circ+2\angle B)=360^\circ$, т. е. $\angle A+\angle B=135^\circ$. Тогда $\angle C=45^\circ$ и $\angle A=\angle C=45^\circ$, $\angle B=90^\circ$ (или $\angle B=45^\circ$, $\angle A=$ $=90^\circ$). Мы видим, что треугольник должен быть либо равносторонним, либо равнобедренным прямоугольным.

12.36. Пусть ABC — треугольник, вписанный в окружность S. Обозначим расстояния от центра O окружности до сторон BC, CA, AB через a, b, c соответственно. Тогда $R+r=a+b+c$, если точка O лежит внутри треугольника ABC, и $R+r=-a+b+c$, если точки O и A лежат по разные стороны от прямой BC (см. задачу 11.4).

Каждая из диагоналей разбиения принадлежит двум треугольникам разбиения. Для одного из этих треугольников точка O и оставшаяся вершина лежат по одну сторону от диагонали, для другого — по разные стороны. Разбиение n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники состоит из $n-2$ треугольников. Поэтому сумма $(n-2)R+r_1+\ldots+r_{n-2}$ равна сумме расстояний от точки O до сторон n-угольника (расстояния до сторон берутся с соответствующими знаками). Из этого видно, что сумма $r_1+\ldots+r_{n-2}$ не зависит от разбиения.

12.37. Пусть BC — синяя сторона, AB и CD — соседние с BC стороны. По условию стороны AB и CD красные.

Предположим, что многоугольник описанный; P, Q, R — точки касания сторон AB, BC, CD с вписанной окружностью. Ясно, что $BP=BQ$, $CR=CQ$ и отрезки BP, CR граничат только с одним синим отрезком. Поэтому сумма длин красных сторон не меньше суммы длин синих сторон. Получено противоречие с тем, что сумма длин красных сторон меньше половины периметра. Поэтому в многоугольник нельзя вписать окружность.

12.38. Поскольку треугольники BAE и BCD равнобедренные, то $\angle ABE=\angle AEB=x$ и $\angle CBD=\angle BDC=y$. Поэтому

$$\angle AED+\angle CDE=x+\angle BED+y+\angle BDE=$$
$$=x+y+180^\circ-\angle DBE.$$

По условию $2\angle DBE=\angle ABC=x+y+\angle DBE$, т. е. $x+y=$ $=\angle DBE$. Следовательно, $\angle AED+\angle CDE=180^\circ$, т. е. $AE \parallel CD$. В четырехугольнике $ACDE$ стороны AE и CD параллельны и $AE=ED=DC$, поэтому он ромб и $AC=ED$. Значит, треугольник ABC равносторонний и $\angle ABC=60^\circ$.

12.39. Пусть n-угольник имеет k острых углов. Тогда сумма его углов меньше $k\cdot 90^\circ+(n-k)\cdot 180^\circ$. С другой стороны, сумма

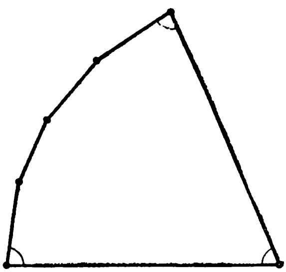


Рис. 126

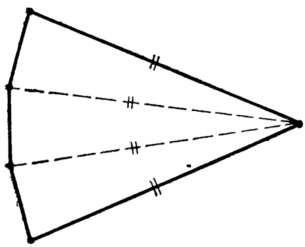


Рис. 127

углов n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$. Поэтому $(n-2)\cdot 180^\circ <$ $< k\cdot 90^\circ+(n-k)\cdot 180^\circ$, т. е. $k<4$. Поскольку k — целое число, $k \leqslant 3$.

Для любого $n>3$ существует n-угольник с тремя острыми углами (рис. 126).

12.40. Предположим, что несмежные стороны AB и CD равны по длине наибольшей диагонали. Тогда $AB+CD \geqslant AC+BD$. Но в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей всегда больше суммы длин пары противоположных сторон, т. е. $AB+CD<AC+$ $+BD$. Получено противоречие, поэтому стороны, равные по длине наибольшей диагонали, должны быть смежными, т. е. таких сторон не больше двух.

Пример многоугольника с двумя сторонами, равными по длине наибольшей диагонали, приведен на рис. 127. Ясно, что такой n-угольник существует при любом $n>3$.

12.41. Докажем, что $n \leqslant 5$. Пусть $AB=1$, а C—вершина, не соседняя ни с A, ни с B. Тогда $|AC-BC| < AB=1$. Поэтому $AC=BC$, т. е. точка C лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Таким образом, кроме вершин A, B, C многоугольник может иметь еще только две вершины.

Пример пятиугольника, обладающего требуемым свойством, приведен на рис. 128. Поясним, как он устроен. $ACDE$—прямоугольник, $AC=ED=1$ и $\angle CAD=60°$. Точка B задается условием $EB=DB=3$.

Примером четырехугольника, обладающего требуемым свойством, является прямоугольник $ACDE$ на том же рисунке.

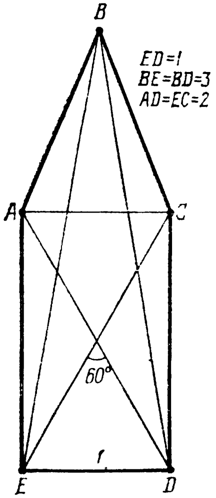


Рис. 128

12.42. Пример пятиугольника, удовлетворяющего условию задачи, приведен на

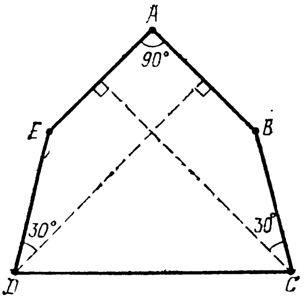


Рис. 129

рис. 129. Поясним, как он устроен. Возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник EAB, проведем серединные перпендикуляры к сторонам EA, AB и на них построим точки C и D так, чтобы $ED=BC=AB$ (т. е. прямые BC и ED образуют с соответствующими серединными перпендикулярами углы в 30°). Ясно, что $DE=BC=AB=EA < EB < DC$ и $DB=DA=CA=$ $=CE > EB$.

Докажем теперь, что пятая сторона и пятая диагональ не могут иметь общей точки. Предположим, что пятая сторона AB имеет общую точку A с пятой диагональю. Тогда пятая диагональ—это AC или AD. Разберем эти два случая.

В первом случае $\triangle AED=\triangle CDE$, поэтому при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку ED точка A переходит в точку C. Точка B при этой симметрии остается на месте, так как $BE=BD$. Поэтому отрезок AB переходит в CB, т. е. $AB=CB$. Пришли к противоречию.

Во втором случае $\triangle ACE = \triangle EBD$, поэтому при симметрии относительно биссектрисы угла AED отрезок AB переходит в DC, т. е. $AB = CD$. Пришли к противоречию.

12.43. Рассмотрим две соседние вершины A_1 и A_2. Если $\angle A_1OA_2 \geqslant 90^\circ$, то $OA_1 = OA_2$, поскольку к основанию равнобедренного треугольника не может прилегать прямой или тупой угол.

Пусть теперь $\angle A_1OA_2 < 90^\circ$. Проведем через точку O прямые l_1 и l_2, перпендикулярные прямым OA_1 и OA_2. Обозначим области, на которые эти прямые разбивают плоскость, так, как показано на рис. 130. Если в области *3* есть вершина A_k, то $A_1O = A_kO = A_2O$, поскольку $\angle A_1OA_k \geqslant 90^\circ$ и $\angle A_2OA_k \geqslant 90^\circ$. Если же в области *3* нет вершин многоугольника, то в области *1* есть вершина A_p и в области *2* есть вершина A_q. (Если бы в одной из областей *1*, *2* не было вершин многоугольника, то точка O оказалась бы вне многоугольника.) Поскольку $\angle A_1OA_q \geqslant 90^\circ$, $\angle A_2OA_p \geqslant 90^\circ$ и $\angle A_pOA_q \geqslant 90^\circ$, то $A_1O = A_qO = A_pO = A_2O$.

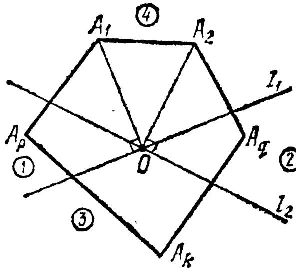


Рис. 130

Остается заметить, что если расстояния от точки O до любой пары соседних вершин многоугольника равны, то равны и все расстояния от точки O до вершин многоугольника.

Глава 13

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Основные сведения

1. *Геометрическое место точек* (сокращенно ГМТ), обладающих некоторым свойством,— это фигура, состоящая из всех точек, для которых выполнено это свойство.

2. Решение задачи на поиск ГМТ должно содержать:

а) доказательство того, что точки, обладающие требуемым свойством, принадлежат фигуре Ф, являющейся ответом задачи;

б) доказательство того, что все точки фигуры Ф обладают требуемым свойством.

3. ГМТ, обладающих двумя свойствами, является пересечением (т. е. общей частью) двух фигур: ГМТ, обладающих первым свойством, и ГМТ, обладающих вторым свойством.

4. Три важнейших ГМТ:

а) ГМТ, равноудаленных от двух данных точек A и B, является серединным перпендикуляром к отрезку AB;

б) ГМТ, удаленных на расстояние R от данной точки O, является окружностью радиуса R с центром O;

в) ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, является объединением двух дуг окружностей, симметричных относительно прямой AB (точки A и B не принадлежат ГМТ).

Вводные задачи

1. а) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых.

б) Найдите ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

2. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

3. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X, удовлетворяющих неравенствам $AX \leqslant BX \leqslant CX$.

4. Найдите геометрическое место таких точек X, что касательные, проведенные из X к данной окружности, имеют данную длину.

5. На окружности фиксирована точка A. Найдите ГМТ X, делящих хорды с концом A в отношении $1:2$, считая от точки A.

§ 1. ГМТ — прямая

13.1. На плоскости даны точки A и B. Найдите ГМТ M, для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна.

13.2. Два колеса радиусов r_1 и r_2 катаются по прямой l. Найдите множество точек пересечения M их общих внутренних касательных.

13.3. Даны две непересекающиеся окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой. Докажите, что ГМТ M, для которых касательные, проведенные из точки M к этим окружностям, равны по длине, является прямой.

§ 2. ГМТ — окружность (дуга окружности)

13.4. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла ABC. По какой траектории движется середина этого отрезка?

13.5. Даны две точки A и B. Две окружности касаются прямой AB, одна — в точке A, другая — в точке B, и касаются друг друга в точке M. Найдите ГМТ M.

13.6. На плоскости даны две точки A и B. Найдите ГМТ M, для которых сумма квадратов длин отрезков AM и BM постоянна.

13.7. На плоскости даны две точки A и B. Найдите ГМТ M, для которых $AM : BM = k$.

13.8. На плоскости даны два непересекающихся круга. Обязательно ли найдется точка M плоскости, лежащая вне этих кругов, удовлетворяющая такому условию: каждая прямая, проходящая через точку M, пересекает хотя бы один из этих кругов?

Найдите ГМТ M, удовлетворяющих такому условию.

§ 3. Метод ГМТ

13.9. Две точки P и Q движутся с одинаковой постоянной скоростью v по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что на плоскости существует неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

13.10. Точки A, B и C таковы, что для любой четвертой точки M либо $MA \leqslant MB$, либо $MA \leqslant MC$. Докажите, что точка A лежит на отрезке BC.

13.11. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке O. Докажите, что отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырехугольника, делят его площадь на равные части.

13.12. а) Докажите, что для того чтобы перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA, AB треугольника ABC, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1B^2+C_1A^2+B_1C^2=B_1A^2+A_1C^2+C_1B^2.$$

б) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

§ 4. Вспомогательные равные и подобные треугольники

13.13. Дана полуокружность с центром O. Из каждой точки X, лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проводится касающийся полуокружности луч и на нем откладывается отрезок XM, равный отрезку XO. Найдите ГМТ M, полученных таким образом.

13.14. На сторонах AB и BC треугольника ABC откладываются равные отрезки AD и CE произвольной длины. Найдите геометрическое место середин отрезков DE.

13.15. A и B — фиксированные точки на плоскости. Найдите ГМТ C, обладающих следующим свойством: высота h_b треугольника ABC равна b.

13.16. Даны окружность и точка P внутри нее. Через каждую точку Q окружности проводим касательную. Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на прямую PQ, и касательная пересекаются в точке M. Найдите ГМТ M.

§ 5. Вписанный угол

13.17. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольников ABC.

13.18. A и B — фиксированные точки окружности, M — переменная точка той же окружности. На каждой ломаной, состоящей из двух отрезков AM и BM, отметим середину K. Найдите множество точек K (задача Архимеда).

13.19. На плоскости даны четыре точки. Найдите множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

§ 6. Гомотетия

13.20. На окружности фиксированы точки A и B. Точка C перемещается по этой окружности. Найдите множество точек пересечения медиан треугольников ABC.

13.21. Дан треугольник ABC. Найдите множество центров прямоугольников $PQRS$, вершины Q и P которых лежат на стороне AC, вершины R и S — на сторонах AB и BC соответственно.

13.22. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках P и Q. Какую линию описывает середина отрезка PQ, когда секущая вращается вокруг точки A?

§ 7. Нахождение ГМТ

13.23. Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Найдите ГМТ M, для которых $AM \geqslant OM$, $BM \geqslant OM$, $CM \geqslant OM$, $DM \geqslant OM$.

13.24. O — центр правильного треугольника ABC. Найдите ГМТ M, удовлетворяющих следующему условию: каждая прямая, проведенная через точку M, пересекает либо отрезок AB, либо отрезок CO.

13.25. Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем B между A и C. Найдите ГМТ M таких, что радиусы описанных окружностей треугольников AMB и CMB равны.

13.26. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите ГМТ M, лежащих внутри четырехугольника $ABCD$, для которых сумма площадей треугольников AMB и CMD постоянна.

Задачи для самостоятельного решения

13.27. На сторонах AB и BC треугольника ABC берутся точки D и E. Найдите геометрическое место середин отрезков DE.

13.28. Две окружности касаются данной прямой в двух данных точках A, B и касаются друг друга. Пусть

C и D — точки касания этих окружностей с другой внешней касательной. Найдите геометрическое место середин отрезков CD.

13.29. Докажите, что если биссектриса одного из углов треугольника имеет внутри треугольника общую точку с перпендикуляром, восставленным из середины противоположной стороны, то треугольник равнобедренный.

13.30. Дан треугольник ABC. Найдите множество всех таких точек M этого треугольника, для которых выполнено условие $AM \geqslant BM \geqslant CM$. Когда полученное множество есть а) пятиугольник; б) треугольник?

13.31. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место середин сторон квадратов, вписанных в данный квадрат.

13.32. Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите ГМТ M таких, что треугольники AMB и BCM равнобедренные.

13.33. Найдите геометрическое место середин отрезков длины $2/\sqrt{3}$, концы которых лежат на сторонах единичного квадрата.

13.34. Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных в треугольники, две вершины которых лежат на данной окружности, а третья — на данном ее диаметре.

Решения

13.1. Введем систему координат, выбрав точку A в качестве начала координат и направив ось OX по лучу AB. Пусть точка M имеет координаты (x, y). Тогда $AM^2 = x^2 + y^2$ и $BM^2 = (x-a)^2 + y^2$, где $a = AB$. Поэтому $AM^2 - BM^2 = 2ax - a^2$. Множество точек M, для которых $AM^2 - BM^2 = k$, состоит из точек $\left(\dfrac{a^2+k}{2a},\ y\right)$, где y произвольно. Таким образом, это множество является прямой, перпендикулярной отрезку AB.

13.2. Пусть O_1 и O_2 — центры колес радиусов r_1 и r_2 соответственно. Если M — точка пересечения внутренних касательных, то $O_1M : O_2M = r_1 : r_2$. Из этого условия легко получить, что расстояние от точки M до прямой l равно $\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$. Поэтому все точки пересечения общих внутренних касательных лежат на прямой, параллельной прямой l и отстоящей от нее на расстояние $\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$.

13.3. Введем систему координат на плоскости так, чтобы центр первой окружности имел координаты $(-a, 0)$, центр второй окружности — координаты $(a, 0)$. Пусть r — радиус первой окружности, R — радиус второй окружности.

Если из точки M проведена касательная ML к окружности с центром O (L — точка касания), то $ML^2 = MO^2 - OL^2$. Поэтому касательные, проведенные из точки M с координатами (x, y) к данным окружностям, равны по длине тогда и только тогда, когда из точки M можно провести касательные и $(x+a)^2+y^2-r^2 = (x-a)^2+y^2-R^2$, т. е. $x=\frac{r^2-R^2}{4a}$, y любое.

Нам остается проверить, что точка (x, y) при $x=\frac{r^2-R^2}{4a}$ лежит вне окружностей, т. е. $R \leqslant a-x=a+\frac{R^2-r^2}{4a}$ и $r \leqslant a+x=a+\frac{r^2-R^2}{4a}$. Поскольку данные окружности не пересекаются, $2a > R+r$, поэтому $r < 2a-R$. Следовательно, $R^2-r^2 \geqslant R^2-(2a-R)^2 = 4Ra-4a^2$, т. е. $R \leqslant a+\frac{R^2-r^2}{4a}$. Аналогично, $r \leqslant a+\frac{r^2-R^2}{4a}$. Таким образом, искомое множество — прямая, перпендикулярная прямой, соединяющей центры окружностей.

13.4. Пусть M и N — концы отрезка, O — его середина. Точка B лежит на окружности, построенной на отрезке MN как на диаметре. Поэтому $OB = \frac{1}{2}MN$, т. е. точка O лежит на окружности радиуса $\frac{1}{2}MN$ с центром в точке B. Траекторией точки O является часть этой окружности, заключенная внутри угла ABC.

13.5. Проведем через точку M общую касательную к окружностям. Пусть O — точка пересечения этой касательной с прямой AB. Тогда $AO = MO = BO$, т. е. O — середина отрезка AB. Точка M лежит на окружности с центром O и радиусом $\frac{1}{2}AB$. Множеством точек M является окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, из которой выброшены точки A и B.

13.6. Пусть O — середина отрезка AB. Тогда $AM^2+BM^2 = |\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}|^2+|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}|^2 = AO^2+BO^2+2OM^2+2(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}AB^2+2OM^2$, т. к. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$. Поэтому ГМТ M, для которых $AM^2+BM^2=c$, совпадает с ГМТ M, для которых $OM^2 = \frac{1}{2}c-\frac{1}{4}AB^2$, т. е. с окружностью радиуса $\sqrt{\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}AB^2}$ с центром O.

13.7. При $k=1$ мы получаем серединный перпендикуляр к отрезку AB. В дальнейшем будем считать, что $k\neq 1$.

Первое решение. Введем систему координат на плоскости так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a,\ 0)$ и $(a,\ 0)$ соответственно. Если точка M имеет координаты $(x,\ y)$, то $\frac{AM^2}{BM^2}=\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$. Уравнение $\frac{AM^2}{BM^2}=k^2$ приводится к виду

$$\left(x+\frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2+y^2=\left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2.$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром $\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2}a,\ 0\right)$ и радиусом $\frac{2ka}{|1-k^2|}$.

Второе решение. Построим точку P на отрезке AB, для которой $AP:BP=k$, и точку Q на прямой AB вне отрезка AB, для которой $AQ:BQ=k$.

Пусть M — точка вне прямой AB, для которой $AM:BM=k$. Поскольку $AM:BM=AP:BP$ и $AM:BM=AQ:BQ$, то MP и

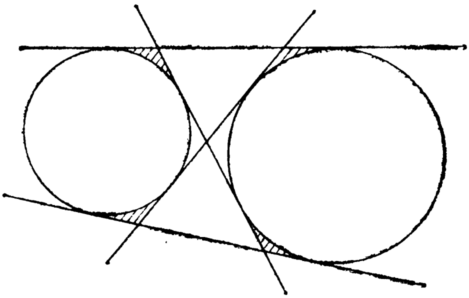


Рис. 131

MQ — биссектрисы внутреннего и внешнего угла M треугольника AMB. Поэтому $\angle PMQ=90^\circ$, т. е. точка M лежит на окружности, построенной на отрезке PQ как на диаметре.

Обратно, пусть точка M лежит на окружности, построенной на отрезке PQ как на диаметре (точка M отлична от точек P и Q). Проведем через точку B прямую l, параллельную прямой AM. Пусть C и D — точки пересечения прямой l с прямыми PM и QM соответственно. Из подобия треугольников APM и BPC получаем $AM:CB=AP:BP=k$. Из подобия треугольников BQD и AQM получаем $AM:BD=AQ:BQ=k$. Поэтому $CB=BD$, т. е. MB — медиана прямоугольного треугольника CMD. Следовательно, $BM=CB=BD$. Поэтому $AM:BM=AM:CB=k$.

13.8. Проведем общие касательные к данным кругам (рис. 131). Легко проверить, что точки, принадлежащие заштрихованным областям (но не их границам), удовлетворяют требуемому условию, а точки, не лежащие в этих областях, не удовлетворяют этому условию.

13.9. Точка P проходит через точку O в момент t_1, точка Q — в момент t_2. Тогда в момент $\frac{t_1+t_2}{2}$ точки P и Q находятся от точки O на одинаковом расстоянии, равном $\frac{|t_1-t_2|}{2}v$. Проведем в этот момент перпендикуляры к прямым в точках P и Q. Легко проверить, что точка пересечения этих прямых является искомой точкой.

13.10. Найдем ГМТ M, для которых $MA > MB$ и $MA > MC$. Проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам AB и AC. $MA > MB$ для точек, лежащих внутри полуплоскости, заданной прямой l_1 и не содержащей точку A. Поэтому искомым ГМТ является пересечение полуплоскостей (без границ), заданных прямыми l_1, l_2 и не содержащих точку A. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то это ГМТ всегда непусто. Если A, B, C лежат на одной прямой, но A не лежит на отрезке BC, то это ГМТ тоже непусто. Если же A лежит на отрезке BC, то это ГМТ пусто, т. е. для любой точки M либо $MA \leqslant MB$, либо $MA \leqslant MC$.

13.11. Обозначим середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ через M и N соответственно. Ясно, что $S_{AMB} = S_{BMC}$ и $S_{AMD} = S_{DMC}$, т. е. $S_{DABM} = S_{BCDM}$. Поскольку при перемещении точки M параллельно BD площади четырехугольников $DABM$ и $BCDM$ не изменяются, $S_{DABO} = S_{BCDO}$. Аналогичные рассуждения для точки N показывают, что $S_{ABCO} = S_{CDAO}$.

Мы получили систему уравнений

$$S_{ADO}+S_{ABO}=S_{BCO}+S_{CDO}, \quad S_{ABO}+S_{BCO}=S_{CDO}+S_{ADO}.$$

Отсюда $S_{ADO}=S_{BCO}=S_1$ и $S_{ABO}=S_{CDO}=S_2$. Из этого видно, что площадь каждой из четырех частей, на которые отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырехугольника, разбивают его, равна $\frac{1}{2}(S_1+S_2)$.

13.12. а) Пусть перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB, пересекаются в точке M. Поскольку точки B_1 и M лежат на одном перпендикуляре к прямой AC, $B_1A^2-B_1C^2=MA^2-MC^2$. Аналогично, $C_1B^2-C_1A^2=MB^2-MA^2$ и $A_1C^2-A_1B^2=MC^2-MB^2$. Складывая эти равенства, получаем $A_1B^2+C_1A^2+B_1C^2=B_1A^2+A_1C^2+C_1B^2$.

Обратно, пусть $A_1B^2+C_1A^2+B_1C^2=B_1A^2+A_1C^2+C_1B^2$. Обозначим точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точек A_1 и B_1 на прямые BC и AC, через M. Проведем через точку M прямую l, перпендикулярную прямой AB. Если C_1'—точка на прямой l, то, согласно предыдущему, $A_1B^2+C_1'A^2+B_1C^2=B_1A^2+$ $+A_1C^2+C_1'B^2$. Поэтому $C_1'A^2-C_1'B^2=C_1A^2-C_1B^2$. Согласно задаче 13.1 ГМТ X, для которых $XA^2-XB^2=k$, является прямой, перпендикулярной отрезку AB. Поэтому перпендикуляр, опущенный из точки C_1 на прямую AB, проходит через точку M, что и требовалось.

б) Положим $A_1=A$, $B_1=B$, $C_1=C$. Из очевидного равенства $AB^2+CA^2+BC^2=BA^2+AC^2+CB^2$ получаем, что высоты, опущенные из точек A, B, C на стороны BC, CA, AB, пересекаются в одной точке.

13.13. Пусть K — точка касания прямой MX и данной полуокружности, а P — проекция точки M на диаметр. В прямоугольных треугольниках MPX и OKX равны гипотенузы ($MX=OX$) и $\angle PXM=\angle OXK$. Поэтому эти треугольники равны и, в частности, $MP=KO=R$, где R — радиус данной полуокружности. Следовательно, точка M лежит на прямой l, параллельной диаметру полуокружности и касающейся полуокружности. Пусть AB — отрезок прямой l, проекцией которого является диаметр полуокружности. Из точки прямой l, лежащей вне отрезка AB, нельзя провести касательную к данной полуокружности, поскольку касательная, проведенная к окружности, будет касаться другой полуокружности.

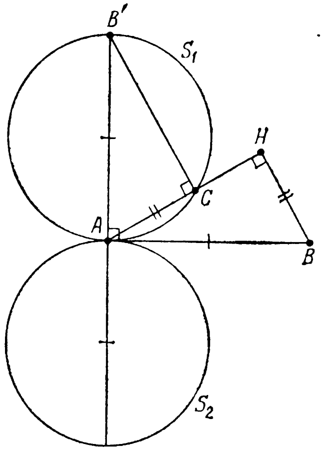


Рис. 132

Искомым ГМТ является отрезок AB, из которого выброшены точки A, B и его середина.

13.14. Пусть M_1 и M — середины отрезков DE и AC соответственно. Достроим треугольник DEC до параллелограмма $DECF$. Пусть M_2 — середина отрезка AF. Тогда $\overrightarrow{MM_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}=$ $=\overrightarrow{M_1D}$, т. е. $MM_1 \parallel DM_2$. Так как $AD=DF$, то DM_2 является биссектрисой угла ADF. Искомым ГМТ является отрезок, проведенный через середину стороны AC параллельно биссектрисе угла B.

13.15. Пусть H — основание высоты h_b треугольника ABC и $h_b=b$. Обозначим через B' точку пересечения перпендикуляра к прямой AB, проведенного через точку A, и перпендикуляра к прямой AH, проведенного через точку C. Прямоугольные треугольники $AB'C$ и BAH равны, поскольку $\angle AB'C = \angle BAH$ и $AC = BH$. Поэтому $AB' = AB$, т. е. точка C лежит на окружности, построенной на AB' как на диаметре.

Построим на отрезке AB как на диаметре окружность S и пусть S_1, S_2 — образы этой окружности при поворотах с центром A на $\pm 90°$ (рис. 132). Мы доказали, что точка $C \neq A$ принадлежит объединению окружностей S_1 и S_2. Обратно, пусть точка $C \neq A$ принадлежит окружности S_1 или S_2, AB' — диаметр соответствующей окружности. Тогда $\angle AB'C = \angle HAB$ и $AB' = AB$, поэтому $AC = HB$.

13.16. Пусть O — центр окружности, N — точка пересечения прямых OM и QP. Опустим из точки M перпендикуляр MS на прямую OP. Из подобия треугольников ONQ и OQM, OPN и OMS получаем $\frac{ON}{OQ} = \frac{OQ}{OM}$ и $\frac{OP}{ON} = \frac{OM}{OS}$. Перемножая эти равенства, получаем $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{OS}$. Поэтому $OS = \frac{OQ^2}{OP}$ является постоянной величиной. А поскольку точка S лежит на прямой OP, ее положение не зависит от выбора точки Q. Искомым ГМТ является прямая, перпендикулярная прямой OP и проходящая через точку S.

13.17. а) Пусть O — точка пересечения высот AA_1 и BB_1. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром CO, так как $\angle CB_1O = \angle CA_1O = 90°$. Следовательно, $\angle AOB = 180° - \angle C$. Поэтому искомое ГМТ — окружность, симметричная данной относительно прямой AB (точки A и B следует исключить).

б) Если O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то
$$\angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle OBA = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B = 90° + \frac{1}{2}\angle C.$$
Поскольку на каждой из двух дуг, на которые отрезок AB разбивает окружность, угол C постоянен, искомым ГМТ являются две дуги окружностей, из которых отрезок AB виден под углом $90° + \frac{1}{2}\angle C$ (точки A и B исключаются).

13.18. Пусть C — середина дуги AMB. Опустим из точки C перпендикуляры CP и CQ на AM и BM. Будем для определенности считать, что $AM > BM$. Докажем, что тогда P — середина ломаной AMB. Так как $\angle QMC = \angle PMC$, то $\triangle QMC = \triangle PMC$, а так как $BC = AC$ и $\angle QBC = \angle PAC$, то $\triangle QBC = \triangle PAC$ (все четыре треугольника прямоугольные). Поэтому $AP = BQ = BM + MQ = BM + MP$, что и требовалось.

Искомым ГМТ является объединение четырех дуг окружностей, из которых отрезки, соединяющие точки A и B с серединами двух дуг, заданных точками A и B, видны под углом $90°$ (рис. 133).

13.19. Предположим, что точки A и C лежат на противоположных сторонах прямоугольника. Пусть M и N — середины отрезков AC и BD соответственно. Проведем через точку M прямую l_1, параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки A и C, а через точку N — прямую l_2, параллельную сторонам прямоугольника, на которых лежат точки B и D. Пусть O — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Ясно, что точка O лежит на окружности S, построенной на отрезке MN как на диаметре. С другой стороны, точка O является центром прямоугольника. Ясно, что прямоугольник можно построить для любой точки O, лежащей на окружности S.

Остается заметить, что на противоположных сторонах прямоугольника могут лежать также точки A и B, A и D. Поэтому искомым ГМТ является объединение трех окружностей.

13.20. Пусть O — середина отрезка AB, M — точка пересечения медиан треугольника ABC. При гомотетии с центром O и коэффициентом $1/3$ точка C переходит в точку M. Поэтому точки пересечения медиан треугольников ABC лежат на окружности S,

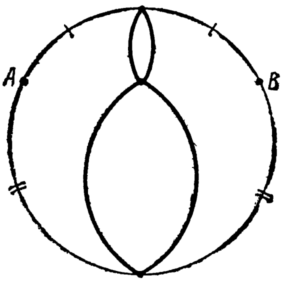


Рис. 133

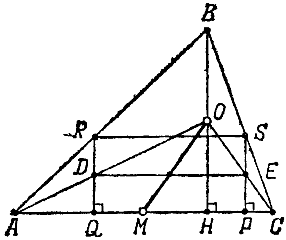


Рис. 134

являющейся образом исходной окружности при гомотетии с центром O и коэффициентом $1/3$. Для получения искомого ГМТ из окружности S нужно выбросить образы точек A и B.

13.21. Пусть O — середина высоты BH, M — середина отрезка AC; D и E — середины сторон RQ и PS соответственно (рис. 134).

Точки D и E лежат на прямых AO и CO соответственно. Середина отрезка DE является центром прямоугольника $PQRS$. Ясно, что она лежит на отрезке OM. Искомым ГМТ является отрезок OM, за исключением его концов.

13.22. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (точка P лежит на окружности с центром O_1), O — середина отрезка O_1O_2; P', Q' и O' — проекции точек O_1, O_2 и O на прямую PQ. При вращении прямой PQ точка O' пробегает окружность S, построенную на отрезке AO как на диаметре. Ясно, что при гомотетии с центром A и коэффициентом 2 отрезок $P'Q'$ переходит в отрезок PQ, т. е. точка O' переходит в середину отрезка PQ. Поэтому искомым ГМТ является образ окружности S при этой гомотетии.

13.23. Проведем серединный перпендикуляр l к отрезку AO. Ясно, что $AM \geqslant OM$ тогда и только тогда, когда точка M лежит по ту же сторону от прямой l, что и точка O (или лежит на прямой l). Поэтому искомым ГМТ является ромб, образованный серединными перпендикулярами к отрезкам OA, OB, OC, OD.

13.24. Пусть A_1 и B_1 — середины сторон CB и AC соответственно. Искомым ГМТ является внутренность четырехугольника OA_1CB_1.

13.25. Пусть M — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой AC. Обозначим центры описанных окружностей треугольников ABM и CBM через O_A и O_C, середины отрезков BM,

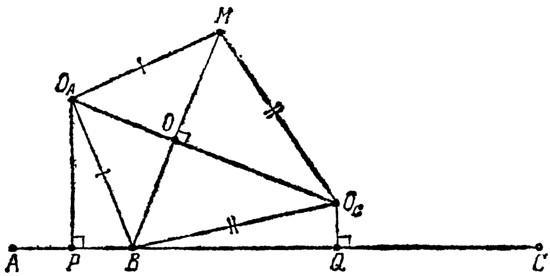


Рис. 135

BA, BC — через O, P, Q (рис. 135). Тогда точки O_A, O_C и O лежат на одной прямой, а P и Q — проекции точек O_A и O_C на прямую AC. Радиусы описанных окружностей треугольников ABM и CBM равны тогда и только тогда, когда BO_AMO_C — ромб, т. е. O — середина отрезка O_AO_C. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что проекция точки O на AC совпадает с серединой отрезка PQ, т. е. точка M лежит на прямой, полученной гомотетией с коэффициентом 2 и центром B из серединного перпендикуляра к отрезку PQ (точку, лежащую на прямой AC, следует выкинуть).

13.26. Ясно, что если $AB \parallel CD$, то искомым ГМТ является отрезок, параллельный этим прямым.

Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD. Отложим на лучах OA и OC отрезки $OP = AB$ и $OQ = CD$ соответственно. Ясно, что $S_{AMB} = S_{PMO}$ и $S_{CMD} = S_{QMO}$. Поэтому $S_{AMB} + S_{CMD} = S_{PMO} + S_{QMO} = \pm S_{PMQ} + S_{POQ}$. Следовательно, $\pm S_{PMQ} = (S_{AMB} + S_{CMD}) - S_{POQ}$ является постоянной величиной. Искомым ГМТ является отрезок, параллельный отрезку PQ.

Глава 14
ПОСТРОЕНИЯ

Основные сведения

1. Задачи на построение решаются по определенной стандартной схеме. Сначала проводим анализ, т. е. предполагаем, что искомая фигура построена, и, исследуя ее свойства, находим, как ее можно задать с помощью исходных данных. На основании этих рассуждений описываем последовательность построений. Затем нужно доказать, что указанная последовательность построений приводит к требуемому результату, а также выяснить, в каких случаях сколько имеется решений.

При написании решений я несколько отклонился от этой схемы. Дело в том, что в подавляющем большинстве случаев после анализа доказательство уже совершенно очевидно. В подобных случаях доказательство не приводится, но следует помнить, что его нужно провести самостоятельно. Если же доказательство не совсем очевидно, то указывается, как преодолеть возникающие трудности.

В решениях не приводится также исследование числа решений задач на построение.

2. Часть задач на построение, решения которых используют геометрические преобразования, распределены по соответствующим главам.

3. Многие задачи на построение решаются следующим образом. Сначала находим два ГМТ, каждому из которых принадлежит искомая точка. Затем строим эти ГМТ, и искомая точка принадлежит их пересечению (при этом, конечно, не любая точка пересечения является искомой).

4. Если A и B — фиксированные точки, то ГМТ X, для которых $AX:BX=k\neq 1$, является окружностью, которая называется окружностью Аполлония (см. задачу 13.7). Это ГМТ иногда используется при решении задач на построение.

Вводные задачи

1. Постройте треугольник ABC по стороне a, высоте h_a и углу A.

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

3. Постройте окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

4. Постройте прямую, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

5. Даны отрезки, длины которых равны a, b, c. Постройте отрезок длины: а) ab/c; б) $\sqrt{ab}$.

6. Постройте ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом.

§ 1. Метод геометрических мест точек

14.1. Постройте треугольник по a, h_a и радиусу описанной окружности R.

14.2. Постройте точку M внутри данного треугольника ABC так, чтобы $S_{ABM}:S_{BCM}:S_{ACM}=1:2:3$.

14.3. Проведите через данную точку P, лежащую внутри данной окружности, хорду так, чтобы разность длин отрезков, на которые P делит хорду, имела данную величину a.

14.4. Постройте окружность данного радиуса r, касающуюся данных непересекающихся прямой и окружности.

14.5. Даны точка A и окружность S. Проведите через точку A прямую так, чтобы хорда, высекаемая окружностью S на этой прямой, имела данную длину d.

14.6. Постройте треугольник ABC по острому углу A, радиусу описанной окружности R и $\sqrt{b^2+c^2}$.

14.7. Дан четырехугольник $ABCD$. Впишите в него параллелограмм с заданными направлениями сторон.

§ 2. Вписанный угол

14.8. Постройте треугольник по a, m_c и углу A.

14.9. Даны окружность и две точки A и B внутри нее. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

14.10. Продолжения сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N, а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q. Постройте прямоугольник $ABCD$, если даны точки M, N, P, Q и длина a стороны AB.

14.11. Постройте треугольник ABC по высоте CH, биссектрисе CD и медиане CM.

14.12. Постройте треугольник ABC по стороне a, углу A и радиусу вписанной окружности r.

14.13. Постройте точку N внутри треугольника ABC, для которой $\angle NBC=\angle NCA=\angle NAB$.

14.14. Дан диаметр AB окружности и точка C на нем. Постройте на этой окружности точки X и Y, симметричные относительно прямой AB, так, чтобы прямые AX и YC были перпендикулярны.

§ 3. Подобные треугольники и гомотетия

14.15. Постройте треугольник по двум углам A, B и периметру P.

14.16. Постройте треугольник по длинам трех его медиан.

14.17. Постройте треугольник по длинам трех высот h_a, h_b, h_c.

14.18. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC квадрат $KLMN$ так, чтобы вершины K и N лежали на сторонах AB и AC, а вершины L и M — на стороне BC.

14.19. Даны две параллельные прямые и отрезок AB на одной из них. Разделите, пользуясь только линейкой, отрезок AB: а) на две равные части; б) на n равных частей.

14.20. Постройте треугольник ABC по h_a, $b-c$ и r.

§ 4. Движения

14.21. Постройте треугольник ABC по: а) c, $a-b$ $(a>b)$ и углу C; б) c, $a+b$ и углу C.

14.22. Постройте треугольник ABC по a, b и $\angle A-\angle B$ $(\angle A>\angle B)$.

14.23. Дан угол ABC и прямая l. Постройте прямую, параллельную прямой l, на которой стороны угла ABC высекают отрезок данной длины a.

14.24. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и длинам сторон $AB=a$ и $CD=b$.

14.25. Дан треугольник ABC. Постройте прямую, делящую пополам его площадь и периметр.

§ 5. Окружность Аполлония

14.26. Постройте треугольник по a, h_a и b/c.

14.27. Постройте треугольник ABC, если известны длина биссектрисы CD и длины отрезков AD и BD, на которые она делит сторону AB.

14.28. На прямой даны четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Постройте точку M, из которой отрезки AB, BC, CD видны под равными углами.

14.29. На плоскости даны два отрезка AB и $A'B'$. Постройте точку O так, чтобы треугольники AOB и $A'OB'$ были подобны (одинаковые буквы обозначают соответственные вершины подобных треугольников).

§ 6. Построение треугольников по различным элементам

14.30. Постройте треугольник ABC по c, m_a и m_b.
14.31. Постройте треугольник ABC по a, b и h_a.
14.32. Постройте треугольник ABC по h_b, h_c и m_a.
14.33. Постройте треугольник ABC по $\angle A$, h_b и h_c.
14.34. Постройте треугольник ABC по a, h_b и m_b.
14.35. Постройте треугольник ABC по h_a, m_a и h_b.
14.36. Постройте треугольник ABC по a, b и m_c.
14.37. Постройте треугольник по h_a, m_a и $\angle A$.
14.38. Постройте треугольник ABC по a, b и биссектрисе l_c.
14.39. Постройте треугольник ABC по $\angle A$, h_a и полупериметру p.
14.40. Постройте треугольник ABC по R, r и углу A.

§ 7. Построение треугольников по различным точкам

14.41. Постройте треугольник ABC, если даны: прямая l, на которой лежит сторона AB, и точки A_1, B_1 — основания высот, опущенных на стороны BC и AC.

14.42. Постройте равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис (т. е. точки их пересечения со сторонами).

14.43. а) Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', в которых биссектрисы его углов пересекают описанную около треугольника окружность (оба треугольника остроугольные).

б) Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', в которых высоты треугольника пересекают описанную около треугольника окружность (оба треугольника остроугольные).

14.44. Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', симметричные центру описанной окружности этого треугольника относительно сторон BC, CA, AB.

14.45. Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', симметричные точке пересечения высот треугольника относительно сторон BC, CA, AB (оба треугольника остроугольные).

14.46. Постройте треугольник ABC, зная три точки P, Q, R, в которых высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины C, пересекают описанную окружность.

14.47. Постройте треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1, C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC (оба треугольника остроугольные).

14.48. Постройте треугольник ABC по центру описанной окружности O, точке пересечения медиан M и основанию H высоты CH.

§ 8. Треугольники

14.49. Постройте на сторонах AB и BC треугольника ABC точки M и N соответственно так, чтобы отрезок MN был параллелен стороне AC и $MN=AM+CN$.

14.50. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, чтобы $AX=BY$ и $XY \| AC$.

14.51. Постройте треугольник по сторонам a и b, если известно, что угол против одной из них в три раза больше угла против другой.

14.52. Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник $PRQS$ (вершины R и Q лежат на сторонах AB и BC, P и S — на стороне AC) так, чтобы его диагональ имела данную длину.

14.53. Проведите через данную точку M прямую так, чтобы она отсекала от данного угла с вершиной A треугольник ABC данного периметра $2p$.

14.54. Дан треугольник ABC, причем $AB<BC$. Постройте на стороне AC точку D так, чтобы периметр треугольника ABD был равен длине стороны BC.

14.55. Постройте треугольник ABC по радиусу описанной окружности и биссектрисе угла A, если известно, что разность углов B и C равна $90°$.

§ 9. Четырехугольники

14.56. Постройте ромб, две стороны которого лежат на двух данных параллельных прямых, а две другие проходят через две данные точки.

14.57. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам и углу между сторонами AB и CD.

14.58. Через вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

14.59. Даны середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Постройте этот четырехугольник.

14.60. На доске была начерчена трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и проведены перпендикуляр OK из точки O пересечения диагоналей на основание AD и средняя линия EF. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам OK и EF?

14.61. Постройте выпуклый четырехугольник, если даны длины всех его сторон и одной средней линии (средней линией четырехугольника называется отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

14.62. а) Постройте квадрат, зная по одной точке на каждой его стороне.

б) Постройте прямоугольник с данным отношением сторон, зная по одной точке на каждой из его сторон.

§ 10. Построение окружностей

14.63. Внутри угла даны две точки A и B. Постройте окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

14.64. Дана окружность S, точка A на ней и прямая l. Постройте окружность, касающуюся данной окружности в точке A и данной прямой.

14.65. Даны две точки A, B и прямая l. Постройте окружность, проходящую через точки A, B и касающуюся прямой l.

14.66. На плоскости даны три точки A, B и C. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

14.67. Постройте окружность, касательные к которой, проведенные из трех данных точек A, B, C, имели бы длины a, b, c соответственно.

§ 11. Необычные построения

14.68. С помощью циркуля и линейки разделите угол $19°$ на 19 равных частей.

14.69. С помощью циркуля и линейки разделите угол $7°$ на 7 равных частей.

14.70. На клочке бумаги нарисованы две прямые, образующие угол, вершина которого лежит вне этого клочка. С помощью циркуля и линейки проведите ту часть биссектрисы угла, которая лежит на клочке бумаги.

14.71. На плоскости даны две точки, расстояние между которыми больше 1 м. С помощью циркуля, имеющего раствор не более 10 см, и линейки длиной 20 см постройте отрезок, соединяющий данные точки.

Задачи для самостоятельного решения

14.72. Постройте ромб по высоте и диагонали.

14.73. Постройте прямую, касающуюся двух данных окружностей (разберите все возможные случаи).

14.74. На плоскости даны точки A, B, C. Проведите через точку A прямую, равноудаленную от точек B и C. (Исследуйте все возможные случаи.)

14.75. Постройте параллелограмм, две смежные вершины которого даны, а две другие лежат на данной окружности.

14.76. а) Постройте равносторонний треугольник, высоты которого пересекаются в данной точке, а две вершины лежат на данной окружности.

б) Постройте квадрат, две вершины которого лежат на данной окружности, а диагонали пересекаются в данной точке.

14.77. Постройте ромб по периметру и сумме диагоналей.

14.78. Постройте прямоугольный треугольник по радиусам вписанной и описанной окружностей.

14.79. Дан треугольник ABC. Постройте точку X так, чтобы для четырехугольника $ABCX$ существовали вписанная и описанная окружности.

14.80. Постройте треугольник ABC, если даны точки A и B и прямая, на которой лежит биссектриса угла C.

14.81. Постройте треугольник по точке пересечения медиан и серединам двух его средних линий.

14.82. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC, зная, что биссектриса AC, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке.

14.83. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершине A, середине M стороны BC и середине H стороны CD.

14.84. Дан угол POQ и точка M внутри него. Дано также положительное число m. Постройте трапецию $ABCD$ ($AB \| CD$), обладающую следующими свойствами:

1) A и D лежат на луче OP, B и C — на луче OQ;
2) M — точка пересечения диагоналей AC и BD;
3) $AB=m$.

14.85. Постройте треугольник, если известны отрезки, на которые высота делит его основание, и медиана, проведенная к боковой стороне.

14.86. Старинный за́мок был обнесен треугольной стеной. Каждая сторона была поделена на три равные части и в этих точках (а также в вершинах) были построены башни. Всего вдоль стены было построено 9 башен A, E, F, B, K, L, C, M, N. Со временем все башни, кроме башен E, K, M, разрушились. Как по оставшимся башням определить, где находились башни A, B, C? (Башни A, B, C стоят в вершинах.)

Решения

14.1. Построим отрезок BC длины a. Центр O описанной окружности треугольника ABC является точкой пересечения двух окружностей радиуса R с центрами в точках B и C. Выберем одну из этих точек пересечения и построим описанную окружность S треугольника ABC. Точка A является точкой пересечения окружности S и прямой, параллельной прямой BC и отстоящей от нее на расстояние h_a (таких прямых две).

14.2. Построим точки A_1 и B_1 на сторонах BC и AC соответственно так, чтобы $BA_1:A_1C=1:3$ и $AB_1:B_1C=1:2$. Пусть точка X лежит внутри треугольника ABC. Ясно, что $S_{ABX}:S_{BCX}=1:2$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на отрезке BB_1; $S_{ABX}:S_{ACX}=1:3$ тогда и только тогда, когда точка X лежит на отрезке AA_1. Поэтому искомая точка M является точкой пересечения отрезков AA_1 и BB_1.

14.3. Пусть AB — хорда, проходящая через точку P, M — середина хорды AB. Ясно, что $|AP-BP|=2PM$. Поскольку $\angle PMO=90°$, точка M лежит на окружности, построенной на отрезке OP как на диаметре.

Построим на отрезке OP как на диаметре окружность S. Затем построим хорду PM окружности S так, чтобы $PM=a/2$ (таких хорд две). Искомая хорда задается прямой PM.

14.4. Пусть R — радиус данной окружности, O — ее центр. Центр искомой окружности лежит на окружности S радиуса $R+r$ с центром O. С другой стороны, ее центр лежит на прямой l, параллельной данной прямой и удаленной от нее на расстояние r (таких прямых две). Ясно, что любая точка пересечения окружности S и прямой l может служить центром искомой окружности.

14.5. Обозначим радиус окружности S через R, ее центр — через O. Пусть окружность S высекает на прямой l, проходящей через точку A, хорду PQ; M — середина хорды PQ. Тогда $OM^2 = OQ^2 - MQ^2 = R^2 - \frac{1}{4}d^2$, т. е. искомая прямая является касательной к окружности радиуса $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}d^2}$ с центром в точке O, проходящей через точку A.

14.6. Построим треугольник BOC, у которого $OB = OC = R$ и $\angle BOC = 2\angle A$. Согласно задаче 13.6 ГМТ X, для которых $BX^2 + CX^2 = b^2 + c^2$, является окружностью S с центром в середине BC и радиусом $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{1}{4}BC^2}$. Кроме того, ГМТ X таких, что $\angle BXC = \angle A$, — это окружность S' радиуса R с центром O. Поэтому искомая точка A является точкой пересечения окружностей S и S'.

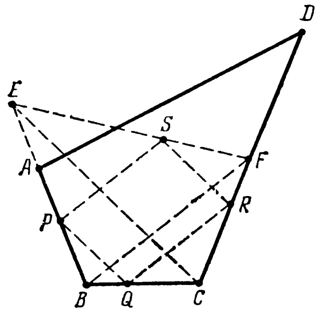


Рис. 136

14.7. Возьмем на прямых AB и CD точки E и F так, чтобы прямые BF и CE имели заданные направления. Рассмотрим всевозможные параллелограммы $PQRS$ с заданными направлениями сторон, вершины P и R которых лежат на лучах BA и CD, а вершина Q — на стороне BC (рис. 136). Докажем, что геометрическим местом вершин S является отрезок EF. В самом деле, $\frac{SR}{EC} = \frac{PQ}{EC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{FR}{RC}$, т. е. точка S лежит на отрезке EF. Обратно, если точка S' лежит на отрезке EF, то проведем $S'P' \parallel BF$, $P'Q' \parallel EC$ и $Q'R' \parallel BF$ (P', Q', R' — точки на прямых AB, BC, CD). Тогда $\frac{S'P'}{BF} = \frac{P'E}{BE} = \frac{Q'C}{BC} = \frac{Q'R'}{BF}$, т. е. $S'P' = Q'R'$ и $P'Q'R'S'$ — параллелограмм.

Из этого вытекает следующее построение. Строим сначала точки E и F. Вершина S является точкой пересечения отрезков AD и EF. Дальнейшее построение очевидно.

14.8. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть A_1 и C_1 — середины сторон CB и AB. Поскольку $C_1A_1 \parallel AC$, то $\angle A_1C_1B = \angle A$. Из этого вытекает следующее построение. Построим сначала отрезок CB длины a и его середину A_1. Точка C_1 является точкой пересечения окружности радиуса m_c с центром C и дуг окружностей, из которых отрезок A_1B виден под углом

$\angle A$. Построив точку C_1, отложим на луче BC_1 отрезок $BA = 2BC_1$. Тогда A — искомая вершина треугольника.

14.9. Предположим, что мы построили искомый треугольник и C — вершина его прямого угла. Поскольку $\angle ACB = 90°$, точка C лежит на окружности S, построенной на отрезке AB как на диаметре. Поэтому C является точкой пересечения окружности S и данной окружности. Построив точку C и проведя прямые CA и CB, найдем оставшиеся вершины искомого треугольника.

14.10. Предположим, что мы построили прямоугольник $ABCD$. Опустим из точки P перпендикуляр PR на прямую BC. Точку R мы можем построить, поскольку она лежит на окружности, построенной на отрезке PQ как на диаметре, и $PR = AB = a$. Построив точку R, строим прямые BC, AD и опускаем перпендикуляры из точек M и N на эти прямые.

14.11. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть O — центр описанной окружности S треугольника ABC, E — середина дуги AB окружности S, точнее говоря, той из дуг, на которой не лежит точка C (рис. 137).

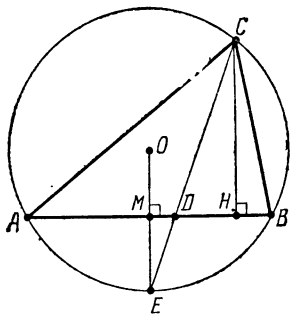


Рис. 137

Мы можем построить прямоугольные треугольники CMH, CDH по гипотенузам CM, CD и катету CH. Учитывая, что точка D лежит между точками M и H, построим точки C, M, D и H на плоскости. Поскольку CD — биссектриса угла ACB, точка E является точкой пересечения прямой CD и перпендикуляра к прямой MH, проведенного через точку M. O является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку CE и прямой ME. Построив точку O, строим окружность S, описанную вокруг треугольника ABC. Ее центр — точка O, а радиус равен OE. Точки A и B являются точками пересечения прямой MH и окружности S.

14.12. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. O является точкой пересечения дуги окружности, из которой отрезок BC виден под углом $90° + \frac{1}{2}\angle A$, и прямой, параллельной отрезку BC и отстоящей от него на расстояние r. Построив отрезок BC длины a и точку O, мы можем построить вписанную окружность треугольника ABC. Прямые AB и AC являются касательными к этой окружности, проведенными из точек B и C.

Докажем, что построенный нами треугольник ABC является искомым. Ясно, что $BC=a$ и радиус вписанной окружности треугольника ABC равен r. Так как $90°+\frac{1}{2}\angle A=\angle BOC=$ $=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$, то $\angle BAC=\angle A$.

14.13. Предположим, что мы построили точку N внутри треугольника ABC, для которой $\angle NBC=\angle NCA=\angle NAB=x$. Тогда $\angle ANC=180°-\angle NAC-\angle NCA=180°-(\angle A-\angle NAB)-\angle NCA=$ $=180°-\angle A$. Аналогично, $\angle BNA=180°-\angle B$. Из этого вытекает следующее построение. Построим дугу X, из которой отрезок AC виден под углом $180°-\angle A$ (таких дуг две, но одна из них не имеет общих внутренних точек с треугольником ABC; эту дугу мы не будем рассматривать), и дугу Y, из которой отрезок AB виден под углом $180°-\angle B$. Тогда N — точка пересечения X и Y, отличная от точки A.

Докажем, что построенная нами точка N искомая. Сначала докажем, что точка N всегда существует и лежит внутри треугольника ABC (дуги X и Y, вообще говоря, выходят за пределы треугольника). Существование точки N следует из того, что дуга X касается стороны AB в точке A. Поскольку дуга X касается стороны AB в точке A, точка N лежит внутри угла BAC. Поскольку дуга Y касается стороны BC в точке B, точка N лежит внутри угла ABC. Поэтому N лежит внутри треугольника ABC. Так как точка N лежит внутри треугольника ABC и $\angle A+\angle B+$ $+\angle C=180°$, то $\angle CNB=360°-\angle ANC-\angle BNA=180°-\angle C$. Так как $180°=\angle NAB+\angle BNA+\angle NBA=\angle NAB+(180°-\angle B)+$ $+(\angle B-\angle NBC)$, то $\angle NAB=\angle NBC$. Аналогично, $\angle NBC=$ $=\angle NCA$, т. е. N — искомая точка.

14.14. Предположим, что мы построили точки X и Y, обладающие требуемыми свойствами. Обозначим точку пересечения прямых AX и YC через M, а точку пересечения прямых AB и XY — через K. Прямоугольные треугольники AXK и YXM имеют общий острый угол X, поэтому $\angle XAK=\angle XYM$. Углы XAB и XYB опираются на одну дугу, поэтому $\angle XAB=\angle XYB$. Следовательно, $\angle XYM=\angle XYB$. Поскольку $XY\perp AB$, то K — середина отрезка CB.

Обратно, если K — середина отрезка CB, то $\angle MYX=\angle BYX=$ $=\angle XAB$. Треугольники AXK и YXM имеют общий угол X и $\angle XAK=\angle XYM$, поэтому $\angle YMX=\angle AKX=90°$.

Из этого вытекает следующее построение. Через середину K отрезка CB проводим прямую l, перпендикулярную прямой AB.

Точки X и Y являются точками пересечения прямой l с данной окружностью.

14.15. Построим сначала произвольный треугольник с углами A и B. Затем найдем его периметр P_1. Искомый треугольник подобен построенному нами треугольнику с коэффициентом P/P_1.

14.16. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть AA_1, BB_1, CC_1—его медианы, M—точка их пересечения, M'—точка, симметричная точке M относительно точки A_1. Тогда $MM'=\frac{2}{3}m_a$, $MC=\frac{2}{3}m_c$ и $M'C=\frac{2}{3}m_b$. Поэтому мы можем построить треугольник $MM'C$. Точка A симметрична M' относительно точки M, точка B симметрична C относительно середины отрезка MM'.

14.17. Ясно, что $BC:AC:AB=\frac{S}{h_a}:\frac{S}{h_b}:\frac{S}{h_c}=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$. Возьмем произвольный отрезок $B'C'$ и построим треугольник $A'B'C'$ так, чтобы $B'C':A'C'=h_b:h_a$ и $B'C':A'B'=h_c:h_a$. Пусть h'_a—высота треугольника $A'B'C'$, опущенная из вершины A'. Искомый треугольник подобен треугольнику $A'B'C'$ с коэффициентом h_a/h'_a.

14.18. Возьмем на стороне AB произвольную точку K', опустим из нее перпендикуляр $K'L'$ на сторону BC, а затем построим квадрат $K'L'M'N'$, лежащий внутри угла ABC. Пусть прямая BN' пересекает сторону AC в точке N. Ясно, что искомый квадрат является образом квадрата $K'L'M'N'$ при гомотетии с центром B и коэффициентом $BN:BN'$.

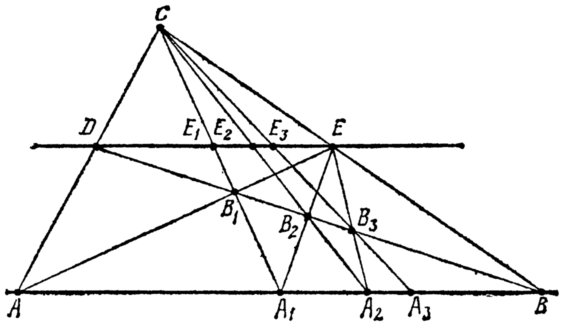


Рис. 138.

14.19. Возьмем на второй прямой отрезок $DE < AB$. Пусть C—точка пересечения прямых AD и BE. Будем последовательно строить следующие точки: B_{n+1}—точку пересечения прямых A_nE и BD $(A_0=A)$, A_{n+1}—точку пересечения прямых CB_{n+1} и AB (рис. 138). Докажем, что $A_nB=\frac{1}{n+1}AB$.

Доказательство проведем по индукции. Ясно, что $A_0B=AB$. Обозначим точку пересечения прямой CA_n и прямой DE через E_n. Пусть $DE:AB=k$, $AB=a$, $A_nB=a_n$ и $A_{n+1}B=x$. Ясно, что $EE_{n+1}:A_nA_{n+1}=DE_{n+1}:BA_{n+1}$, т. е. $\frac{kx}{a_n-x}=\frac{ka-kx}{x}$. Отсюда $x=$ $=\frac{a_n}{a_n+a}a$. Если $a_n=\frac{a}{n+1}$, то $x=\frac{a}{n+2}$.

14.20. Предположим, что мы построили искомый треугольник ABC. Пусть Q—точка касания вписанной окружности со стороной BC, PQ—диаметр этой окружности, R—точка касания вневписанной окружности со стороной BC. Ясно, что $BR=\frac{a+b+c}{2}-$ $-c=\frac{a+b-c}{2}$ и $BQ=\frac{a+c-b}{2}$. Поэтому $RQ=|BR-BQ|=|b-$ $-c|$. Вписанная окружность треугольника ABC и вневписанная окружность, касающаяся стороны BC, гомотетичны с центром гомотетии A. Поэтому точка A лежит на прямой PR (рис. 139).

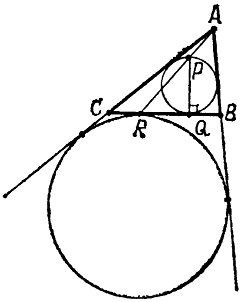


Рис. 139

Из этого вытекает следующее построение. Строим прямоугольный треугольник PQR по известным катетам $PQ=2r$ и $RQ=|b-c|$. Затем проводим две прямые, параллельные прямой RQ и удаленные от нее на расстояние h_a. Вершина A является точкой пересечения одной из этих прямых с лучом RP. Поскольку нам известна длина диаметра PQ вписанной окружности, мы можем ее построить. Точки пересечения касательных к этой окружности, проведенных из точки A, с прямой RQ являются вершинами B и C треугольника.

14.21. а) Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть C'—точка, симметричная точке A относительно биссектрисы угла C. Тогда $\angle BC'A=180°-\angle AC'C=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle C)=$ $=90°+\frac{1}{2}\angle C$ и $BC'=a-b$.

В треугольнике ABC' нам известны $AB=c$, $BC'=a-b$ и $\angle C'=90°+\frac{1}{2}\angle C$. Поскольку $\angle C'>90°$, треугольник ABC' строится по этим элементам однозначно. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AC' и прямой BC'.

б) Решение аналогично решению задачи а). В качестве C' нужно взять точку, симметричную точке A относительно биссектрисы внешнего угла C треугольника ABC. Поскольку $\angle AC'B = \frac{1}{2}\angle C < 90°$, задача может иметь два решения.

14.22. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB. В треугольнике ACC' известны $AC = b$, $AC' = a$ и $\angle CAC' = \angle A - \angle B$. Поэтому мы можем его построить. Точка B симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку CC'.

14.23. Имеются два вектора $\pm\boldsymbol{a}$, параллельных прямой l и имеющих заданную длину a. Рассмотрим образы луча BC при параллельных переносах на эти векторы. Точка их пересечения с лучом BA лежит на искомой прямой (если они не пересекаются, то задача решений не имеет).

14.24. Предположим, что мы построили четырехугольник $ABCD$. Обозначим образ точки D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CB}$ через D_1. В треугольнике ABD_1 нам известны AB, BD_1 и $\angle ABD_1$. Из этого вытекает следующее построение. Строим произвольно луч BC', затем проводим лучи BD_1' и BA' так, что $\angle D_1'BC' = 180° - \angle C$, $\angle A'BC' = \angle B$ и эти углы откладываются от луча BC' в одной полуплоскости. На лучах BA' и BD_1' отложим отрезки $BA = a$ и $BD_1 = b$ соответственно. Проведем луч AD' так, что $\angle BAD' = \angle A$ и лучи BC', AD' лежат по одну сторону от прямой AB. Вершина D является точкой пересечения луча AD' и луча, проведенного из точки D_1 параллельно лучу BC'. Вершина C является точкой пересечения луча BC' и луча, проведенного из точки D параллельно лучу D_1B.

14.25. Согласно задаче 4.43 а) прямая, делящая пополам площадь и периметр треугольника, проходит через центр его вписанной окружности. Ясно также, что если прямая проходит через центр вписанной окружности треугольника и делит его периметр пополам, то она делит пополам и его площадь. Поэтому нам нужно провести прямую, проходящую через центр вписанной окружности треугольника и делящую его периметр пополам.

Предположим, что мы построили точки M и N на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что прямая MN проходит через центр O вписанной окружности и делит периметр треугольника пополам. Построим на луче AC точку D так, что $AD = p$, где p — полупериметр треугольника ABC. Тогда $AM = ND$. Пусть Q — центр поворота R, переводящего отрезок AM в отрезок DN (точку A — в точку D, точку M — в точку N). Поскольку нам известен угол между прямыми AM и CN, мы можем построить точку Q: точка Q является вершиной равнобедренного треугольника AQD, причем $\angle AQD = 180° - \angle A$ и точки B, Q лежат по одну сторону от прямой AD. При повороте R отрезок OM переходит в отрезок $O'N$. Точку O' мы можем построить. Ясно, что $\angle ONO'$ равен $\angle A$, поскольку угол между прямыми OM и $O'N$ равен $\angle A$. Поэтому точка N является точкой пересечения прямой AC и дуги окружности, из которой отрезок OO' виден под углом $180° - \angle A$. Построив точку N, проводим прямую ON и находим точку M.

Легко проверить, что если построенные нами точки M и N лежат на сторонах AB и AC, то MN — искомая прямая. Основной момент в доказательстве — доказательство того, что при повороте относительно точки Q на $\angle A$ точка M переходит в точку N. Для доказательства этого факта надо воспользоваться тем, что $\angle ONO' = \angle A$, т. е. при этом повороте прямая OM переходит в прямую $O'N$.

14.26. Построим сначала отрезок BC длины a. Затем построим ГМТ X, для которых $CX:BX = b:c$ (окружность при $b:c \neq 1$ и прямая при $b:c = 1$, см. задачу 13.7). В качестве вершины A можно взять любую из точек пересечения этого ГМТ с прямой, удаленной от прямой BC на расстояние h_a.

14.27. По длинам отрезков AD и BD мы можем построить отрезок AB и точку D на этом отрезке. Точка C является точкой пересечения окружности радиуса CD с центром D и ГМТ X, для которых $AX:BX = AD:BD$.

14.28. Пусть X — точка, не лежащая на прямой AB. Ясно, что $\angle AXB = \angle BXC$ тогда и только тогда, когда $AX:CX = AB:CB$. Поэтому точка M является точкой пересечения ГМТ X, для которых $AX:CX = AB:CB$, и ГМТ Y, для которых $BY:DY = BC:DC$ (эти ГМТ могут не пересекаться).

14.29. Нам нужно построить точку O, для которой $AO:A'O = AB:A'B'$ и $BO:B'O = AB:A'B'$. Точка O является точкой пересечения ГМТ X, для которых $AX:A'X = AB:A'B'$, и ГМТ Y, для которых $BY:B'Y = AB:A'B'$.

14.30. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 и BB_1. Тогда $AM = \frac{2}{3}m_a$ и $BM = \frac{2}{3}m_b$. Треугольник ABM мы можем построить по длинам сторон $AB = c$, AM и BM. Затем на лучах AM и BM откладываем отрезки $AA_1 = m_a$ и $BB_1 = m_b$. Вершина C является точкой пересечения прямых AB_1 и A_1B.

14.31. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть H — основание высоты, опущенной из вершины A. Мы можем построить прямоугольный треугольник ACH по гипотенузе $AC = b$ и катету $AH = h_a$. Затем на прямой CH строим точку B: $CB = a$.

14.32. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Опустим из середины A_1 стороны BC перпендикуляры A_1B' и A_1C'

на прямые AC и AB соответственно. Ясно, что $AA_1=m_a$, $A_1B'=$ $=\frac{1}{2}h_b$, $A_1C'=\frac{1}{2}h_c$. Из этого вытекает следующее построение. Строим отрезок AA_1 длины m_a. Затем строим прямоугольные треугольники AA_1B' и AA_1C' по известным катетам и гипотенузе так, чтобы они лежали по разные стороны от прямой AA_1. Нам остается построить точки B и C на сторонах AC' и AB' угла $C'AB'$ так, чтобы отрезок BC делился точкой A_1 пополам. Для этого отложим на луче AA_1 отрезок $AD=2AA_1$, а затем проведем через точку D прямые, параллельные сторонам угла $C'AB'$. Точки пересечения этих прямых со стронами угла $C'AB'$ являются вершинами искомого треугольника (рис. 140).

14.33. Построим угол $B'AC'$, равный $\angle A$. Точка B строится как пересечение луча AB' и прямой, параллельной лучу AC' и удаленной от него на расстояние h_b. Аналогично строится точка C.

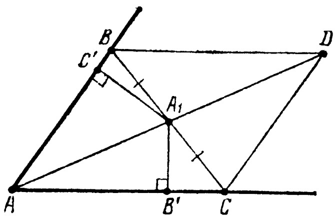


Рис. 140

14.34. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Опустим из точки B высоту BH и проведем медиану BB_1. В прямоугольных треугольниках CBH и B_1BH нам известны катет BH и гипотенузы CB, B_1B. Поэтому мы можем их построить. Затем на луче CB_1 откладываем отрезок $CA=2CB_1$. Задача имеет два решения, так как треугольники CBH и B_1BH можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой BH.

14.35. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть M — середина отрезка BC. Опустим из точки A высоту AH, а из точки M — перпендикуляр MD на сторону AC. Ясно, что $MD=\frac{1}{2}h_b$. Поэтому мы можем построить треугольники AMD и AMH. Вершина C является точкой пересечения прямых AD и MH. На луче CM откладываем отрезок $CB=2CM$. Задача имеет два решения, так как треугольники AMD и AMH можно строить либо по одну, либо по разные стороны от прямой AM.

14.36. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. В треугольнике CC_1B_1 нам известны все стороны: $CC_1=m_c$, $C_1B_1=\frac{1}{2}a$ и $CB_1=\frac{1}{2}b$. Поэтому мы можем его построить. Точка A симметрична C относительно точки B_1, а точка B симметрична A относительно точки C_1.

14.37. Предположим, что мы построили треугольник ABC, AM — его медиана, AH — высота. Пусть точка A' симметрична A относительно точки M.

Построим отрезок $AA' = 2m_a$. Пусть M — его середина. Мы можем построить прямоугольный треугольник AMH с гипотенузой AM и катетом $AH = h_a$ (двумя способами). Точка C лежит на дуге окружности, из которой отрезок AA' виден под углом $180° - \angle A$, поскольку $\angle ACA' = 180° - \angle CAB$. Поэтому точка C является точкой пересечения этой дуги и прямой MH. Точка B симметрична C относительно точки M.

14.38. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть CD — биссектриса угла C треугольника ABC. Проведем прямую MD, параллельную стороне BC (точка M лежит на стороне AC). Треугольник CMD равнобедренный, так как $\angle MCD = \angle DCB = \angle MDC$. Поскольку $\frac{MC}{AM} = \frac{DB}{AD} = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{b}$ и $AM + MC = b$, $MC = \frac{ab}{a+b}$. Строим равнобедренный треугольник CMD по основанию $CD = l_c$ и боковым сторонам $MD = MC = \frac{ab}{a+b}$. Затем на луче CM откладываем отрезок $CA = b$, а на луче, симметричном лучу CM относительно прямой CD, откладываем отрезок $CB = a$.

14.39. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть S_1 — вневписанная окружность, касающаяся стороны BC. Обозначим точки касания окружности S_1 с продолжениями сторон AB и AC через K и L, а точку касания S_1 со стороной BC — через M. Поскольку $AK = AL$, $AL = AC + CM$, $AK = AB + BM$, имеем $AK = AL = p$. Пусть S_2 — окружность радиуса h_a с центром A. Прямая BC является общей внутренней касательной к окружностям S_1 и S_2.

Из этого вытекает следующее построение. Строим угол KAL, равный по величине углу A, так, чтобы $KA = LA = p$. Строим окружность S_1, касающуюся сторон угла KAL в точках K и L, и окружность S_2 радиуса h_a с центром в точке A. Затем проводим общую внутреннюю касательную к окружностям S_1 и S_2. Точки пересечения этой касательной со сторонами угла KAL являются вершинами B и C искомого треугольника.

14.40. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Ясно, что $BC = 2R \sin A$. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. Из этого вытекает следующее построение. Строим отрезок BC длины $2R \sin A$. Затем строим точку O, являющуюся точкой пересечения дуги, из которой отрезок

BC виден под углом $90°+\frac{1}{2}\angle A$, и прямой, параллельной прямой BC и удаленной от нее на расстояние r. Вершина A искомого треугольника является точкой пересечения касательных к окружности с центром O и радиусом r, проведенных из точек B и C (имеются в виду касательные, отличные от прямой BC).

Для доказательства того, что построен искомый треугольник, нужно только заметить, что $\angle A=2\angle BOC-180°$.

14.41. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности S, построенной на отрезке AB как на диаметре. Центр O этой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде A_1B_1. Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим точку O, являющуюся точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1 и прямой l. Затем строим окружность радиуса $OA_1=OB_1$ с центром O. Вершины A и B являются точками пересечения окружности S с прямой l. Вершина C является точкой пересечения прямой AB_1 и прямой BA_1.

14.42. Предположим, что мы построили равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$, причем A_1, B_1, C_1 — основания его биссектрис. Тогда $\angle A_1C_1C=\angle C_1CA=\angle C_1CA_1$, т. е. треугольник CA_1C_1 равнобедренный и $A_1C=A_1C_1$.

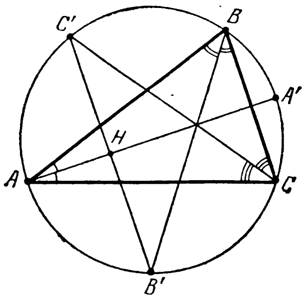


Рис. 141

Из этого вытекает следующее построение. Через точку B_1 проводим прямую l, параллельную A_1C_1. На прямой l строим точку C так, чтобы $CA_1=C_1A_1$ и $\angle C_1A_1C>90°$. Точка A симметрична точке C относительно точки B_1, а вершина B является точкой пересечения прямых AC_1 и A_1C.

14.43. а) Первое решение. Ясно, что $\smile BA'=\smile A'C=\alpha$, $\smile CB'=\smile B'A=\beta$ и $\smile AC'=\smile C'B=\gamma$. Следовательно, $\alpha+\beta=\smile A'B'$, $\beta+\gamma=\smile B'C'$ и $\gamma+\alpha=\smile C'A'$. Поэтому имеем $\alpha=\frac{1}{2}(\smile A'B'+\smile C'A'-\smile B'C')$, $\beta=\frac{1}{2}(\smile A'B'+\smile B'C'-\smile C'A')$, $\gamma=\frac{1}{2}(\smile B'C'+\smile C'A'-\smile A'B')$. Для построения треугольника ABC остается отложить найденные дуги $\smile C'A$, $\smile A'B$, $\smile B'C$ на описанной окружности треугольника ABC.

Второе решение. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Обозначим точку пересечения прямых AA' и $B'C'$

через H (рис. 141). Так как $\angle HAB' + \angle HB'A = \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B\right) + \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ$, то $\angle AHB' = 90^\circ$, т. е. $AA' \perp B'C'$. Аналогичные рассуждения показывают, что $BB' \perp A'C'$ и $CC' \perp A'B'$. Из этого вытекает следующее построение. Строим прямые, на которых лежат высоты треугольника $A'B'C'$. Точки пересечения этих прямых с описанной окружностью треугольника $A'B'C'$ являются вершинами искомого треугольника ABC.

Докажем, что построенный треугольник ABC является искомым, т. е. лучи AA', BB' и CC' являются биссектрисами углов треугольника ABC. Так как $A'C' \perp BB'$, то $\smile C'AB' + \smile A'B = 180^\circ$, а так как $B'A' \perp CC'$, то $\smile C'AB' + \smile A'C = 180^\circ$. Следовательно, $\smile A'B = \smile A'C$, т. е. AA' — биссектриса угла BAC. Аналогично доказывается, что BB' и CC' — биссектрисы углов ABC и ACB.

б) Пусть точки A, B, C лежат на описанной окружности треугольника $A'B'C'$. В а) доказано, что прямые AA', BB', CC' являются биссектрисами углов треугольника $A'B'C'$ тогда и только тогда, когда эти прямые являются высотами треугольника ABC. Из этого вытекает следующее построение. Вершины A, B, C являются точками пересечения биссектрис углов треугольника $A'B'C'$ с описанной окружностью треугольника $A'B'C'$.

14.44. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Обозначим середины сторон BC, CA, AB треугольника через A_1, B_1, C_1 соответственно. Поскольку $BC \parallel B_1C_1 \parallel B'C'$ и $OA_1 \perp BC$, $OA' \perp B'C'$. Аналогично получаем, что $OB' \perp A'C'$ и $OC' \perp A'B'$, т. е. O — точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Построив точку O, проводим серединные перпендикуляры к отрезкам OA', OB', OC'. Эти прямые образуют треугольник ABC.

14.45. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Обозначим точку пересечения высот треугольника ABC через O, а основания высот, опущенных на стороны BC, CA, AB,— через A_1, B_1, C_1 соответственно. Согласно задаче 1.50 а) прямые AA_1, BB_1, CC_1 являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$. Но треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'B'C'$ гомотетичны с центром O. Поэтому прямые $A'A$, $B'B$, $C'C$ являются биссектрисами углов треугольника $A'B'C'$.

Из этого вытекает следующее построение. Точка O является точкой пересечения биссектрис углов треугольника $A'B'C'$. Стороны треугольника ABC лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам OA', OB', OC'.

Для доказательства того, что мы построили искомый треугольник, нужно воспользоваться результатом задачи 1.50 б): если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то тогда точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.

14.46. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть O — центр описанной окружности, M — середина стороны AB, H — основание высоты, опущенной из точки C (рис. 142). Точка Q является серединой дуги AB, поэтому $OQ \perp AB$. Из этого вытекает следующее построение. Сначала по трем данным точкам строим описанную окружность S треугольника PQR. Точка C является точкой пересечения прямой, проведенной через точку P параллельно OQ, и окружности S. Точка M является точкой пересечения прямой OQ и прямой RC. Прямая AB проходит через точку M и перпендикулярна OQ.

14.47. Предположим, что мы построили треугольник ABC, причем A_1, B_1, C_1 — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA, AB соответственно. Прямые B_1A_1 и CC_1 являются биссектрисами смежных углов, поэтому эти прямые перпендикулярны. Аналогично, $B_1B \perp A_1C_1$ и $A_1A \perp B_1C_1$. Из этого

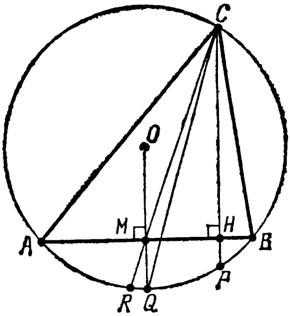


Рис. 142

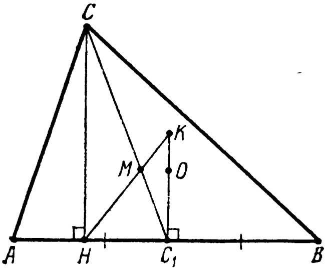


Рис. 143

вытекает следующее построение. В треугольнике $A_1B_1C_1$ проводим высоты. Основания этих высот являются вершинами искомого треугольника.

Для доказательства того, что мы построили искомый треугольник, нужно воспользоваться результатом задачи 1.50 а).

14.48. Первое решение. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть C_1 — середина стороны AB, K — точка пересечения прямых C_1O и HM (рис. 143). Поскольку $OC_1 \perp AB$, то $OC_1 \parallel CH$, т. е. треугольники CHM и C_1KM подобны с коэффициентом $C_1M/MC = 1/2$.

Из этого вытекает следующее построение. На луче HM строим точку O_1 так, чтобы $HO_1:HM = 3:2$. Затем из точки H опускаем перпендикуляр HC_1 на прямую OO_1. Точка C гомотетична точке C_1 относительно точки M с коэффициентом -2. Точки A и B являются точками пересечения прямой HC_1 и окружности радиуса OC с центром O.

Второе решение. Пусть H_1 — точка пересечения высот треугольника ABC. Согласно задаче 10.1 $OM:MH_1=1:2$ и точка M лежит на отрезке OH_1. Поэтому мы можем построить точку H_1. Затем проводим прямую H_1H и восставляем к этой прямой в точке H перпендикуляр l. Опустив из точки O перпендикуляр на прямую l, получаем точку C_1 (середину отрезка AB). На луче C_1M строим точку C так, что $CC_1:MC_1=3:1$. Точки A и B являются точками пересечения прямой l с окружностью радиуса CO с центром O.

14.49. Предположим, что мы построили точки M и N. Пусть K — точка отрезка MN, для которой $MK=AM$. Тогда $NK=CN$, поскольку $MN=AM+CN$. Треугольники AMK и KCN равнобедренные. Следовательно, $\angle MAK=\angle MKA=\angle KAC$ и $\angle NKC = \angle KCN = \angle KCA$. Поэтому K является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. Из этого вытекает следующее построение. Строим точку пересечения биссектрис треугольника ABC и проводим через нее прямую l, параллельную стороне AC. Точки M и N являются точками пересечения прямой l со сторонами AB и BC.

14.50. Предположим, что мы построили точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX=BY$ и $XY \parallel AC$. Проведем $YY_1 \parallel AB$ и $Y_1C_1 \parallel BC$ (точки Y_1 и C_1 лежат на сторонах AC и AB). Тогда $Y_1Y=AX=BY$, т. е. BYY_1C_1 — ромб и BY_1 — биссектриса угла B.

Из этого вытекает следующее построение. Проводим биссектрису BY_1, затем проводим прямую Y_1Y, параллельную стороне AB (Y лежит на BC). Точка X теперь строится очевидным образом.

14.51. Пусть для определенности $a<b$. Предположим, что треугольник ABC построен. Возьмем на стороне AC точку D так, чтобы $\angle ABD=\angle BAC$. Тогда $\angle BDC=2\angle BAC$ и $\angle CBD = 3\angle BAC-\angle BAC=2\angle BAC$, т. е. $CD=CB=a$. В треугольнике BCD нам известны все стороны: $CD=CB=a$ и $DB=AD = b-a$. Построив треугольник BCD, проводим луч BA, не пересекающий сторону CD, так, чтобы $\angle DBA=\frac{1}{2}\angle DBC$. Искомая вершина A является точкой пересечения прямой CD и этого луча.

14.52. Пусть точка B' лежит на прямой l, проходящей через точку B параллельно AC. Стороны треугольников ABC и $AB'C$ высекают на прямой, параллельной стороне AC, равные отрезки. Поэтому прямоугольники $P'R'Q'S'$ и $PRQS$, вписанные в треугольники ABC и $AB'C$ соответственно, равны, если точки R, Q, R', Q' лежат на одной прямой.

Возьмем точку B' на прямой l так, чтобы $\angle B'AC=90°$. В треугольник $AB'C$ прямоугольник $P'R'Q'S'$ с данной диагональю $P'Q'$ вписывается очевидным образом ($P'=A$). Проведя прямую $R'Q'$, находим вершины R и Q искомого прямоугольника (рис. 144).

14.53. Предположим, что мы построили треугольник ABC. Пусть K и L — точки, в которых вневписанная окружность, касаю-

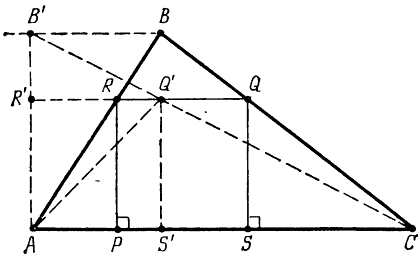


Рис. 144

щаяся стороны BC, касается продолжений сторон AB и AC соответственно. Поскольку $AK=AL=p$, мы можем построить эту вневписанную окружность; остается провести к построенной окружности касательную через данную точку M.

14.54. Построим точку K на стороне AC так, чтобы $AK=$ $=BC-AB$. Пусть точка D лежит на отрезке AC. Равенство $AD+$ $+BD+AB=BC$ эквивалентно равенству $AD+BD=AK$. Для точки D, лежащей на отрезке AK, последнее равенство перепишется в виде $AD+BD=AD+DK$, а для точки D, не лежащей на отрезке AK, — в виде $AD+BD=AD-DK$. В первом случае $BD=$ $=DK$, а второй случай невозможен. Поэтому точка D является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BK и отрезка AC.

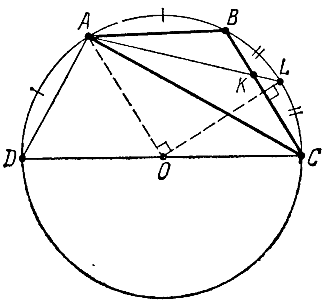


Рис. 145

14.55. Предположим, что треугольник ABC построен. Проведем диаметр CD описанной окружности. Пусть O — центр описанной окружности, L — точка пересечения продолжения биссектрисы AK с описанной окружностью (рис. 145). Так как $\angle ABC-$ $-\angle ACB=90°$, то $\angle ADB=\angle ACB$; поэтому $\smile DA=\smile AB$. Ясно также, что $\smile BL=\smile LC$. Следовательно, $\angle AOL=90°$.

Из этого вытекает следующее построение. Строим окружность S с центром O и данным радиусом, На окружности S выбираем произвольную точку A. Строим точку L на окружности S так, чтобы $\angle AOL = 90°$. На отрезке AL строим отрезок AK, равный данной биссектрисе. Через точку K проводим прямую l, перпендикулярную OL. Точки пересечения прямой l с окружностью S являются вершинами B и C искомого треугольника ABC.

14.56. Пусть расстояние между данными параллельными прямыми равно a. Нам нужно провести через точки A и B параллельные прямые так, чтобы расстояние между ними было равно a. Для этого построим окружность на отрезке AB как на диаметре и найдем точки C_1 и C_2 пересечения этой окружности с окружностью радиуса a с центром A. Сторона искомого ромба лежит на прямой AC_1 (второе решение — на прямой AC_2). Затем через точку B проводим прямую, параллельную AC_1 (соответственно AC_2).

14.57. Предположим, что мы построили четырехугольник $ABCD$. Обозначим середины сторон AB, BC, CD, DA через P, Q, R, S соответственно; середины диагоналей AC и BD — через K и L. В треугольнике KSL нам известны $KS = \frac{1}{2}CD$, $LS = \frac{1}{2}AB$ и угол KSL, равный углу между сторонами AB и CD. Построив треугольник KSL, мы можем построить треугольник KRL, поскольку известны длины всех его сторон. После этого достраиваем треугольники KSL и KRL до параллелограммов $KSLQ$ и $KRLP$. Вершины A, B, C, D являются вершинами параллелограммов $PLSA$, $QKPB$, $RLQC$, $SKRD$ (рис. 146).

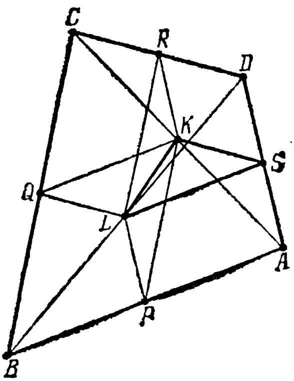


Рис. 146

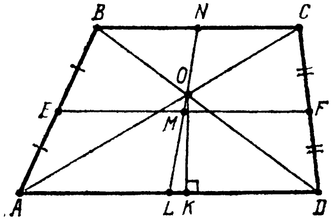


Рис. 147

14.58. Опустим из вершин B и D перпендикуляры BB_1 и DD_1 на диагональ AC. Пусть для определенности $DD_1 > BB_1$. Построим отрезок длины $a = DD_1 - BB_1$ и проведем прямую, параллельную прямой AC, удаленную от AC на расстояние a и пересекающую сторону CD в некоторой точке E. Ясно, что $S_{AED} = \frac{ED}{CD} S_{ACD} =$

$= \frac{BB_1}{DD_1} S_{ACD} = S_{ABC}$. Поэтому медиана треугольника AEC лежит на искомой прямой.

14.59. Пусть P, Q, R — середины равных сторон AB, BC, CD четырехугольника $ABCD$. Проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам PQ и QR. Поскольку $AB = BC = CD$, точки B и C лежат на прямых l_1 и l_2 и $BQ = QC$.

Из этого вытекает следующее построение. Проводим серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам PQ и QR. Затем через точку Q проводим отрезок с концами на прямых l_1 и l_2 так, чтобы Q была его серединой (см. задачу 7.13).

14.60. Обозначим середины оснований AD и BC через L и N; середину отрезка EF — через M (рис. 147). Точки L, O, N лежат на одной прямой (задача 1.22). Ясно, что точка M также лежит на этой прямой. Из этого вытекает следующее построение. Проведем через точку K прямую l, перпендикулярную прямой OK. Основание AD лежит на прямой l. Точка L является точкой пересечения прямой l и прямой OM. Точка N симметрична точке L относительно точки M. Через точку O проведем прямые, параллельные прямым EN и FN. Точки пересечения этих прямых с прямой l являются вершинами A и D трапеции. Вершины B и C симметричны вершинам A и D относительно точек E и F соответственно.

14.61. Предположим, что мы построили четырехугольник $ABCD$ с данными длинами сторон и данной средней линией KP (K и P — середины сторон AB и CD). Пусть A_1 и B_1 — точки, симметричные точкам A и B относительно точки P. Треугольник A_1BC мы можем построить, так как в нем известны стороны BC, $CA_1 = AD$ и $BA_1 = 2KP$. Достроим треугольник A_1BC до параллелограмма A_1EBC. Теперь мы можем построить точку D, так как нам известны CD и $ED = BA$. Воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{A_1C}$, построим точку A.

14.62. а) Предположим, что мы построили квадрат $PQRS$ так, что данные точки A, B, C, D лежат на его сторонах PQ, QR, RS, SP соответственно. Построим на отрезках AB и CD как на диаметрах окружности S_1 и S_2 соответственно. Обозначим точки пересечения диагонали QS с этими окружностями через M и N соответственно. Так как $\angle AQM = \angle BQM = 45°$, то M — середина дуги AB (имеется в виду та дуга, на которой не лежит точка Q). Аналогично, N — середина дуги CD.

Из этого вытекает следующее построение. На отрезках AB и CD как на диаметрах строим окружности S_1 и S_2 соответственно. Затем строим середину M дуги AB, лежащей по одну сторону от прямой AB с отрезком DC, и середину N дуги DC, лежащей по одну сторону от прямой DC с отрезком AB. Вершины Q и S являются точками пересечения прямой MN с окружностями S_1

и S_2, а вершины P, R — точками пересечения прямых AQ и DS, BQ и CS соответственно.

б) Предположим, что мы построили прямоугольник $PQRS$ так, что данные точки A, B, C, D лежат на сторонах PQ, QR, RS, SP соответственно и $PQ:QR=a$, где a — данное отношение сторон. Пусть F — точка пересечения прямой, проведенной через точку D перпендикулярно к прямой AC, и прямой QR. Тогда $DF:AC=a$.

Из этого вытекает следующее построение. Из точки D проводим луч, пересекающий отрезок AC под прямым углом, и на этом луче строим точку F так, что $DF=a\cdot AC$. Сторона QR лежит на прямой BF. Дальнейшее построение очевидно.

14.63. Окружность высекает на сторонах угла равные отрезки тогда и только тогда, когда ее центр лежит на биссектрисе угла. Поэтому центром искомой окружности является точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и биссектрисы данного угла.

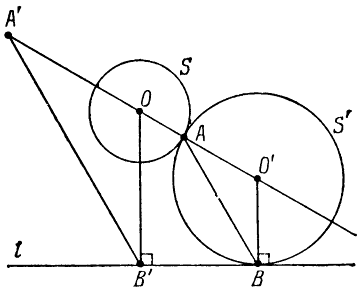


Рис. 148

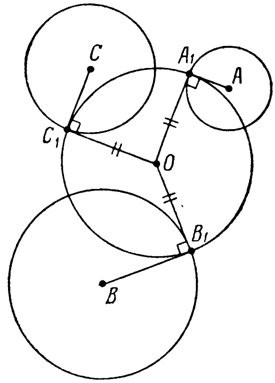


Рис. 149

14.64. Предположим, что мы построили окружность S', касающуюся данной окружности S в точке A и данной прямой в некоторой точке B. Пусть O и O' — центры окружностей S и S' соответственно (рис. 148). Ясно, что точки O, O' и A лежат на одной прямой и $O'B=O'A$. Поэтому нам нужно построить точку O' на прямой OA так, чтобы $O'A=O'B$, где B — основание перпендикуляра, опущенного из точки O' на прямую l. Для этого опустим перпендикуляр OB' на прямую l. Затем отложим на прямой AO отрезок OA' длины OB'. Через точку A проведем прямую AB, параллельную $A'B'$ (точка B лежит на прямой l). Точка O' является точкой пересечения прямой OA и перпендикуляра к прямой l, проведенного через точку B.

14.65. Пусть l_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AB, C — точка пересечения прямых l_1 и l, а l' — прямая, симметричная l относительно прямой l_1. Наша задача сводится к тому, чтобы построить окружность, проходящую через точку A и касающуюся прямых l и l' (см. задачу 10.18).

14.66. Предположим, что мы построили окружности S_1, S_2 и S_3, попарно касающиеся в данных точках: S_1 и S_2 касаются в точке C, S_1 и S_3 — в точке B, S_2 и S_3 — в точке A. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3. Тогда точки A, B, C лежат на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$, причем $O_1B = O_1C$, $O_2C = O_2A$ и $O_3A = O_3B$. Поэтому точки A, B, C являются точками касания вписанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ со сторонами.

Из этого вытекает следующее построение. Строим описанную окружность треугольника ABC и проводим к ней касательные в точках A, B и C. Точки пересечения этих касательных являются центрами искомых окружностей.

14.67. Предположим, что мы построили окружность S, касательные AA_1, BB_1, CC_1 к которой имеют длины a, b, c соответственно (A_1, B_1, C_1 — точки касания). Построим окружности S_a, S_b, S_c с центрами A, B, C и радиусами a, b, c соответственно (рис. 149). Если O — центр окружности S, то отрезки OA_1, OB_1, OC_1 являются и радиусами окружности S, и касательными к окружностям S_a, S_b, S_c. Поэтому точка O является радикальным центром окружностей S_a, S_b и S_c (см. § 7 главы 3).

Из этого вытекает следующее построение. Сначала мы строим окружности S_a, S_b, S_c. Затем строим их радикальный центр O. Искомая окружность является окружностью с центром O и радиусом, равным по длине касательной, проведенной из точки O к окружности S_a.

14.68. Ясно, что если у нас есть угол величиной α, то мы можем построить углы величиной 2α, 3α, ... Поскольку $19 \cdot 19° = 361°$, мы можем построить угол величиной $361°$, совпадающий с углом величиной $1°$.

14.69. Если дан угол $7°$, то мы можем построить угол величиной $8 \cdot 7° = 56°$. Ясно также, что можно построить угол $60°$. Поэтому мы можем построить угол величиной $60° - 56° = 4°$. Нам остается поделить угол $4°$ на 4 равные части, т. е. поделить его пополам и полученные части тоже поделить пополам.

14.70. Последовательность построений такова. Выбираем на клочке бумаги произвольную точку O и производим гомотетию с центром O и достаточно малым коэффициентом k, чтобы образ точки пересечения данных прямых при этой гомотетии оказался на клочке бумаги. Тогда мы можем построить биссектрису угла между образами прямых. Затем произведем гомотетию с прежним центром и коэффициентом $1/k$ и получаем искомый отрезок биссектрисы (точнее, производим гомотетию для пары точек построенной биссектрисы, образы которых лежат на клочке бумаги).

14.71. Изложим схему решения вкратце, не вдаваясь в очевидные подробности. Ясно, что мы можем построить на доске решетку квадратов с не очень большой стороной, например, со стороной 1 см (рис. 150). Данные точки попадут в какие-то два квадрата этой решетки. Мы можем найти координаты этих точек в квадра-

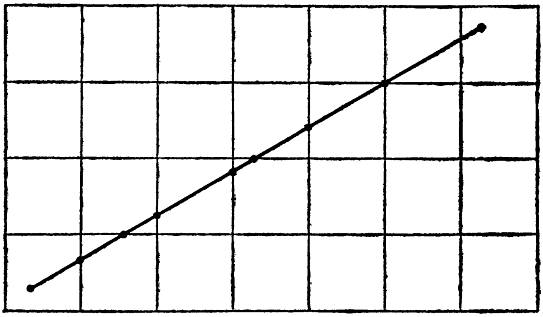


Рис. 150

тах. Затем строим еще более мелкую решетку квадратов, уменьшаем в соответствующее число раз координаты точек и строим картинку, подобную исходной. На этой уменьшенной картинке мы можем непосредственно соединить данные точки. Затем находим координаты точек пересечения полученного отрезка с квадратами решетки. Увеличивая эти координаты в нужное число раз, находим точки пересечения искомого отрезка с решеткой квадратов и строим его.

Виктор Васильевич Прасолов

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Часть 1

Серия «Библиотека математического кружка»,
выпуск 15

Редакторы ***А. М. Абрамов, В. В. Донченко***

Художественный редактор ***Т. Н. Кольченко***

Технический редактор ***И. Ш. Аксельрод***

Корректоры *Т. Г. Егорова, Е. В. Сидоркина*

ИБ № 12872

Сдано в набор 16.04.85. Подписано к печати 21.11.85. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3 Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ.л.14,28.Усл. кр.-отт. 14,7. Уч.-изд. л.15,92. Тираж 130 000 экз. Заказ № 1247. Цена 60 коп

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054, Москва М-54, Валовая, 28

60 коп.

ЗАДАЧИ по ПЛАНИМЕТРИИ

Часть I

ЗАДАЧИ по ПЛАНИМЕТРИИ I В. В. Прасолов