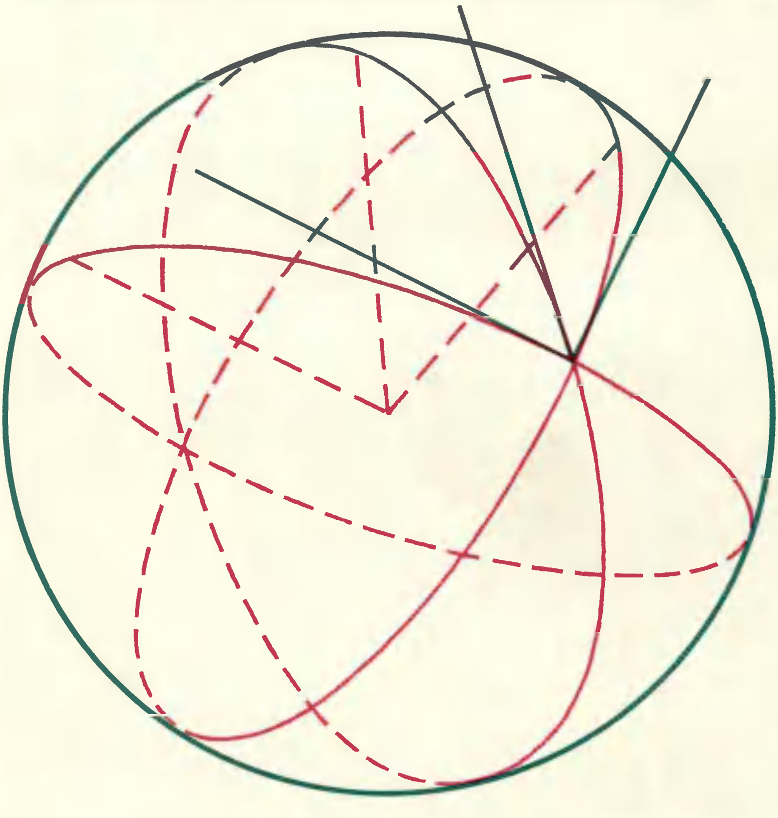
ЗАРУБЕЖНЫЕ математические ОЛИМПИАДЫ



БИБЛИОТЕЧКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 17

ЗАРУБЕЖНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Под редакцией И. Н. СЕРГЕЕВА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.1
З-35
УДК 51 (023)

КОЛЛЕКТИВ АВТОРОВ:

С. В. КОНЯГИН, Г. А. ТОНОЯН, И. Ф. ШАРЫГИН,
И. А. КОПЫЛОВ, М. Б. СЕВРЮК, М. Л. СИТНИКОВ,
О. А. БАЙБОРОДИН, В. П. БУРИЧЕНКО, Г. В. ГОЛОВИН,
Д. О. ОРЛОВ, Л. Б. ПАРНОВСКИЙ, Т. А. СОКОВА,
И. В. СТЕЦЕНКО, В. В. ТИТЕНКО, С. А. ФИЛИППОВ

Зарубежные математические олимпиады./Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др.; Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — (Б-ка мат. кружка). — 416 с.

Книгу можно рассматривать как продолжение серии «Задачи и олимпиады», начатой издательством «Мир» в 1975 г.

В сборнике представлены наиболее интересные задачи национальных олимпиад 19 стран и ряда международных соревнований. Они разбиты на 7 глав по тематическому признаку. Все задачи (а их более 500) снабжены решениями.

Для учащихся старших классов, учителей, проводящих различные математические конкурсы, а также для всех любителей математики.

Рецензенты:
кандидат педагогических наук *А. М. Абрамов*,
доктор физико-математических наук *Ю. В. Нестеренко*

З $\frac{1702010000-151}{053(02)-87}$ 40-87

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В целях популяризации математики среди учащихся средних учебных заведений во многих странах регулярно проводятся математические олимпиады школьников. Олимпиады в целом доказали свою эффективность в пропаганде математических знаний среди молодежи. Кроме того, проведение международных олимпиад является одной из форм сотрудничества ученых разных стран. Поэтому олимпиадное движение в настоящее время получило очень большое развитие во всем мире.

С каждым годом растет число стран, которые проводят национальные олимпиады, а с 1959 г. проводятся и международные математические олимпиады. Количество участвующих в них стран увеличилось с 5—7 на первых олимпиадах до 30 и более в настоящее время. За последнее десятилетие получили распространение различные региональные международные математические соревнования школьников. Математические олимпиады проводятся и различными учебными заведениями, а также некоторыми математическими журналами.

В нашей стране сложились богатые традиции как в проведении школьных олимпиад разного уровня, так и в обеспечении их соответствующей литературой. Представители СССР, как правило, успешно выступают на международных математических олимпиадах.

В связи с быстрым накоплением опыта проведения национальных олимпиад и постоянным ростом числа стран, участвующих в международных олимпиадах, все более актуальной становится задача широкого ознакомления интересующихся математикой советских школьников с лучшими достижениями олимпиадного движения за рубежом. В 1976 г. был выпущен сборник венгерских математических олимпиад [1] [1]), в 1978 г.— польских математических олимпиад [2]. Задачи некоторых национальных олимпиад

---

[1]) Здесь и далее указаны ссылки на литературу из приложения Д.

(10 стран) и небольшая часть материалов жюри международных математических олимпиад опубликованы в 1976 г. в сборнике международных математических олимпиад [3].

Зарубежным математическим соревнованиям школьников посвящена и настоящая книга, в которую вошли наиболее интересные (по мнению авторов) или наиболее типичные задачи различных олимпиад. Книга отличается большим числом представленных задач. В ней использованы задачи национальных олимпиад 19 стран, а также материалы жюри международных математических олимпиад 1976—1977, 1979, 1981—1983 гг., задачи международных соревнований в Люксембурге и Финляндии, олимпиады стран Балканского полуострова (так называемой Балканиады) 1984 г., традиционных олимпиад «Австрия—Польша». Очень широко представлены материалы олимпиад Болгарии, Великобритании, Румынии, США, ЧССР и Югославии. Включены задачи венгерских и польских олимпиад последних лет, не вошедшие в сборники [1] и [2]. Большинство представленных в книге задач относится к последним турам соответствующих национальных олимпиад. Некоторые из задач сначала предлагались на олимпиадах нашей страны и только после этого были использованы в зарубежных математических соревнованиях.

Сборник адресован прежде всего интересующимся математикой старшеклассникам, и его основной целью является повышение математической культуры школьников. Большинство задач в книге не слишком сложны, но в совокупности они представляют почти все основные идеи, встречавшиеся в олимпиадной практике. Поэтому авторы надеются, что школьник, не имеющий достаточного опыта участия в олимпиадах, ознакомится со сборником с большой пользой для себя. Более подготовленный читатель испытает значительное удовольствие при решении более сложных задач (нескольких последних задач каждого параграфа, отмеченных звездочками), а также получит довольно полное представление об олимпиадном движении за рубежом. Особый интерес могут вызвать задачи из тех разделов математики, которые недостаточно полно представлены или вовсе отсутствуют в программе общеобразовательных школ нашей страны.

Материал книги может быть использован для занятий математических кружков или специализированных физико-математических школ.

Все задачи снабжены решениями; некоторые из них представляют собой перевод на русский язык решений, опубликованных организаторами соответствующих олимпиад, а другие (особенно решения геометрических задач) написаны авторами заново. Однако, книга рассчитана прежде всего на активного читателя. Лучший способ глубоко разобраться в той или иной математической идее — это решить задачу, в которой используется эта идея, или по крайней мере прочесть ее решенне только после достаточно настойчивых попыток справиться с задачей самостоятельно. При этом читателю придется восстанавливать недостающие детали в тех решениях, которые написаны недостаточно подробно.

Внутри каждого параграфа авторы старались по мере возможности располагать задачи так, чтобы близкие по своей тематике задачи находились рядом. Поэтому при решении какой-либо задачи желательно обращать внимание и на ее окружение, где часто в несколько иной ситуации представлена та же идея.

При отборе задач авторы стремились в значительно большей степени помочь читателю овладеть часто встречающимися приемами решения нестандартных задач и выработать у него необходимую дисциплину мышления, нежели сообщить новые математические факты. Тем не менее в ряде задач используются сведения, несколько выходящие за рамки школьной программы. Эти сведения собраны в приложении Г.

Для работы над настоящим сборником весной 1984 г. на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова был создан специальный студенческий научный отряд «Олимпия» в составе 13 человек. Командиром этого отряда был ассистент механико-математического факультета МГУ С. В. Конягин, комиссаром — аспирант И. А. Копылов. В отряд входили аспиранты механико-математического факультета М. Б. Севрюк и М. Л. Ситников, студенты О. А. Байбородин, В. П. Буриченко, Г. В. Головин, Д. О. Орлов, Л. Б. Парновский, Т. А. Сокова, И. В. Стеценко и В. В. Титенко. Летом 1984 г. в отряде работал также десятиклассник из школы № 14 г. Белорецка (Башкирская АССР) С. А. Филиппов. Кроме бойцов отряда «Олимпия», авторами сборника являются заведущий кафедрой Ереванского государственного университета Г. А. Тонян и старший научный сотрудник НИИ СиМО[1]) АПН СССР И. Ф. Шарыгин.

---

[1]) Содержания и методов обучения.

Почетным бойцом отряда «Олимпия» состоял выдающийся советский математик академик А. Н. Колмогоров, уделяющий большое внимание работе со школьниками.

Летом 1984 г. отряд «Олимпия» работал в здании ФМШ № 18 при МГУ, и авторы искренне признательны И. Т. Тропину, который в то время являлся директором этого интерната. Авторы выражают сердечную благодарность старшему научному сотруднику механико-математического факультета МГУ, заместителю главного редактора журнала «Квант» Ю. П. Соловьеву за большое участие в организации отряда и постоянный интерес к работе над книгой.

Тексты задач национальных и других зарубежных олимпиад (на языках соответствующих стран) авторам предоставили старший научный сотрудник НИИ СиМО А. М. Абрамов, член редколлегии журнала «Квант» Н. Б. Васильев, доцент механико-математического факультета МГУ Е. А. Морозова, член редколлегии журнала «Математика в школе» И. С. Петраков, младший научный сотрудник ВНИИ геофизики В. В. Прасолов, югославский математик Д. Реповш, доцент МФТИ, член редколлегии журнала «Квант» А. П. Савин, старший научный сотрудник Института математики АН НРБ И. Табов, доцент МГПИ А. А. Фомин. Аспирант механико-математического факультета МГУ И. В. Мустяца оказал помощь «Олимпии» в переводе задач с румынского языка, а студенты Н. Н. Осипов и Т. Фиммель (ГДР) — с французского и немецкого.

Ценные замечания, способствовавшие улучшению рукописи, были внесены редактором книги А. Ф. Лапко и рецензентами А. М. Абрамовым и доцентом механико-математического факультета МГУ Ю. В. Нестеренко. Всем названным товарищам авторы выражают большую признательность.

Авторы глубоко благодарны титульному редактору сборника ассистенту механико-математического факультета МГУ И. Н. Сергееву за огромную работу по совершенствованию рукописи.

СТРУКТУРА КНИГИ

Сборник состоит из трех частей.

В первой части приведены условия задач. Она состоит из семи глав, а каждая глава — из нескольких параграфов. Разбиение на главы и параграфы проводилось по тематическому принципу. Оно достаточно условно, поскольку некоторые задачи с равным успехом могли быть помещены в несколько параграфов книги.

В начале каждого параграфа даются ссылки на те из сведений (помещенных в приложении Г), которые использованы в условиях и решениях задач данного параграфа.

После номера каждой задачи указано, в каких известных авторам зарубежных олимпиадах она предлагалась. Номера более трудных задач отмечены звездочками. Большинство задач книги предлагались на национальных олимпиадах, ссылки на которые состоят из названия страны, проводившей олимпиаду, и года ее проведения. «Пекин» означает ссылку на Пекинскую олимпиаду, а «Нью-Йорк» — на издававшийся в Нью-Йорке журнал для учащихся двухлетних колледжей. Задачи международных соревнований обозначаются следующим образом: «Австрия — ПНР» — совместные соревнования школьников Австрии и Польши, «Балканиада» — соревнования учащихся Балканских стран, «ММС» — международные математические соревнования 1980 г. Наконец, ссылка на материалы жюри международных математических олимпиад начинается словом «Жюри», далее указана страна, предложившая задачу, и год ее обсуждения. К сожалению, авторам неизвестно, какие страны предлагали задачи на международную олимпиаду 1981 г.

Во второй части приводятся решения задач первой части книги. Третья часть содержит различные приложения.

Условия некоторых помещенных в книге задач отличаются от оригинальных. Эти изменения, за которые авторы несут полную ответственность, отражены в приложении А.

В приложении Б даны краткие сведения о зарубежных математических соревнованиях школьников, а также условия задач тех олимпиад 1985—1986 г., которые оказались в распоряжении авторов. Решения этих задач не приводятся, читателям предлагается решить их самостоятельно. В приложении В указаны основные книги и журналы, использованные авторами при составлении настоящего сборника. В приложении Г перечислены основные понятия и факты, необходимые для правильного восприятия материала первой и второй частей.

Для более серьезного изучения соответствующих разделов математики читателю предложена литература, приведенная в приложении Д. Наконец, приложение Е содержит список используемых в книге обозначений.

ЗАДАЧИ

Глава 1
АРИФМЕТИКА

§ 1. Делимость. Простые и составные числа

(см. Приложение Г: определения 11—16, 19; теоремы 1, 4, 9—12, 14, 18, 19, 21, 23, 25)

1.1. (Англия, 68). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — целые числа, а $b_1, b_2, \ldots, b_7$ — те же самые числа, взятые в другом порядке. Доказать, что число

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_7-b_7)$$

является четным.

1.2. (Нью-Йорк, 76). Пусть $a, a_0, a_1, \ldots, a_n$ — произвольные целые числа. Верно ли, что целое число

$$\sum_{k=0}^{n}(a^2+1)^{3k}a_k$$

делится на a^2+a+1 (или на a^2-a+1) тогда и только тогда, когда число

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

делится на a^2+a+1 (или соответственно на a^2-a+1)?

1.3. (ЧССР, 52; Англия, 65). В бесконечной «треугольной» таблице

$$\begin{array}{c}
a_{1,0}\\
a_{2,-1}\ a_{2,0}\ a_{2,1}\\
a_{3,-2}\ a_{3,-1}\ a_{3,0}\ a_{3,1}\ a_{3,2}\\
a_{4,-3}\ a_{4,-2}\ a_{4,-1}\ a_{4,0}\ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$a_{1,0}=1$, а каждое число $a_{n,k}$, стоящее в n-й строке ($n\in\mathbf{N}$, $n>1$) на k-м месте ($k\in\mathbf{Z}$, $|k|<n$), равно сумме

$a_{n-1,\,k-1}+a_{n-1,\,k}+a_{n-1,\,k+1}$ трех чисел предыдущей строки (если какое-либо из этих чисел отсутствует в таблице, то в сумме оно заменяется нулем). Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, содержится хотя бы одно четное число.

1.4. (ЧССР, 71). Доказать, что для любого простого числа $p>2$ числитель m дроби

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1} \qquad (m,\ n\in\mathbf{N})$$

делится на p.

1.5. (Нью-Йорк, 75). Доказать, что для каждого целого значения $n>1$ число n^n-n^2+n-1 делится на $(n-1)^2$.

1.6. (НРБ, 65). Доказать, что только одна тройка натуральных чисел, больших единицы, обладает тем свойством, что произведение любых двух из этих чисел, увеличенное на 1, делится на третье.

1.7. (Англия, 76). Доказать, что при любом значении $n\in\mathbf{Z}^+$ число $19\cdot 8^n+17$ является составным.

1.8. (Канада, 83). Доказать, что для любого простого числа p существует бесконечно много чисел вида 2^n-n (где $n\in\mathbf{N}$), делящихся на p.

1.9. (ЧССР, 73). Доказать, что существует бесконечно много значений $n\in\mathbf{N}$, для которых любое число вида m^4+n $(m\in\mathbf{N})$ является составным.

1.10. (ЧССР, 79). Найти все натуральные числа $n>2$, не превосходящие числа 10 000 000 и обладающие следующим свойством: любое число m, взаимно простое с n и удовлетворяющее неравенствам $1<m<n$, является простым.

1.11. (ФРГ, 77). Пусть $a>1$ — натуральное число. Найти все числа, являющиеся делителями хотя бы одного из чисел

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}a^k, \qquad n\in\mathbf{N}.$$

1.12. (Нью-Йорк, 74). Для заданной пары натуральных чисел $m<n$ определить, любое ли множество из n последовательных целых чисел содержит два различных числа, произведение которых делится на mn.

1.13. (Нью-Йорк, 76). Пусть $f(n)\in\mathbf{N}$ — наименьшее число, для которого сумма $\sum\limits_{k=1}^{f(n)}k$ делится на n. Доказать, что равенство $f(n)=2n-1$ справедливо для чисел вида $n=2^m$ $(m\in\mathbf{Z}^+)$ и только для них.

1.14. (Жюри, ФРГ, 79; НРБ, 81). Доказать, что если число $1+2^n+4^n$ при некотором значении $n \in \mathbf{N}$ является простым, то $n=3^k$, где $k \in \mathbf{Z}^+$.

1.15. (СРР, 78). Пусть числа $m, n \in \mathbf{N}$ таковы, что для любого значения $k \in \mathbf{N}$ наибольшие общие делители пары чисел $11k-1$, m и пары чисел $11k-1$, n совпадают. Доказать, что для некоторого значения $l \in \mathbf{Z}$ справедливо равенство $m=11^l n$.

1.16. (Нью-Йорк, 75). Пусть наибольший общий делитель чисел $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ равен 1. Верно ли, что любой простой делитель числа $ad-bc$ является делителем чисел a и c тогда и только тогда, когда при каждом значении $n \in \mathbf{Z}$ числа $an+b$ и $cn+d$ взаимно просты?

1.17*. (США, 82). Доказать, что существует такое число $k \in \mathbf{N}$, что при любом значении $n \in \mathbf{N}$ число $k \cdot 2^n+1$ является составным.

1.18*. (СРР, 78). Доказать, что для любого значения $a \in \mathbf{N}$, большего 2, существует бесконечно много чисел $n \in \mathbf{N}$ таких, что число a^n-1 делится на n. Верно ли аналогичное утверждение для $a=2$?

1.19. (Жюри, Бельгия, 83). Доказать, что существует бесконечно много чисел $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих для всех значений $k=1, 2, \ldots, n-1$ неравенствам

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k},$$

где через $\sigma(n)$ обозначена сумма всех делителей числа n.

1.20*. (ВНР, 82). Для заданного натурального числа $k>1$ через $Q(n)$, $n \in \mathbf{N}$, обозначено наименьшее общее кратное чисел $n, n+1, \ldots, n+k$. Доказать, что существует бесконечно много значений $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих неравенству $Q(n) > Q(n+1)$.

1.21*. (Австрия, 73). Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ справедливы неравенства

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{k} - \frac{2n}{3} < \frac{2}{3},$$

где через $g(k)$ обозначен наибольший нечетный делитель числа k.

1.22*. (Жюри, СФРЮ, 79). Пусть через $h(n)$ обозначен наибольший простой делитель числа $n \in \mathbf{N}$ $(n \geqslant 2)$. Является ли бесконечным множество значений n, удовлетворяющих условию

$$h(n) < h(n+1) < h(n+2)?$$

1.23*. (Жюри, СФРЮ, 79). Пусть через $w(n)$ обозначено количество простых делителей натурального числа $n > 1$. Доказать, что для бесконечного множества значений n выполняются неравенства

$$w(n) < w(n+1) < w(n+2).$$

§ 2. Уравнения в целых и рациональных числах

(см. Приложение Г: определения 11, 12, 14—16; теоремы 2, 4, 5, 8, 10, 12, 16, 18, 21—23, 25, 60, 61)

2.1. (Нью-Йорк, 77). Решить уравнение $2^x + 1 = y^2$ в натуральных числах.

2.2. (Англия, 72). Доказать, что для любых значений $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $a \neq b$, уравнение

$$(x + ay + c)(x + by + d) = 2$$

в целых числах имеет не более четырех решений. Определить, при каких значениях a, b, c, d имеется ровно четыре различных решения.

2.3. (ГДР, 73). Решить уравнение

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$$

в целых числах.

2.4. (СРР, 81). Решить уравнение

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$$

в целых числах.

2.5. (СФРЮ, 74). Решить уравнение

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

в целых числах.

2.6. (ГДР, 74). Решить уравнение

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3$$

в целых числах.

2.7. (США, 79). Решить уравнение

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 1599$$

в целых числах.

2.8. (ГДР, 70; СРР, 80). Доказать, что для любых нечетных значений $a, b, c \in \mathbf{Z}$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в рациональных числах не имеет решений.

2.9. (Англия, 70). Решить уравнение

$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$$

в рациональных числах.

2.10. (Бразилия, 83). Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1983}$$

в натуральных числах имеет лишь конечное множество решений.

2.11. (СФРЮ, 81). Доказать, что для любых значений $a, b \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющих неравенствам $5a \geqslant 7b \geqslant 0$, система

$$\begin{cases} x+2y+3z+7u=a, \\ \qquad y+2z+5u=b \end{cases}$$

в целых неотрицательных числах имеет решение.

2.12. (ГДР, 77). Сколько существует пар значений $p, q \in \mathbf{N}$, не превосходящих 100, для которых уравнение

$$x^5+px+q=0$$

в рациональных числах имеет решения?

2.13. (ЧССР, 76). Решить уравнение $x^2+y^2=3z^2$ в целых числах.

2.14. (ВНР, 83). Доказать, что уравнение

$$x^3+3y^3+9z^3-9xyz=0$$

в рациональных числах имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

2.15. (США, 76). Решить уравнение

$$x^2+y^2+z^2=x^2y^2$$

в целых числах.

2.16. (Англия, 70). Для каждого значения $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $a_n \in \mathbf{Z}^+$ количество решений уравнения

$$n^2+x^2=y^2$$

в натуральных числах, больших n.

а) Доказать, что для любого числа M неравенство $a_n > M$ справедливо хотя бы при одном значении $n \in \mathbf{N}$.

б) Верно ли, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$?

2.17. (ВНР, 77). Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ уравнение

$$x^4+4^x=p$$

в целых числах не имеет решений.

2.18. (ГДР, 80). Доказать, что уравнение

$$(2x)^{2x}-1=y^{z+1}$$

в натуральных числах не имеет решений.

2.19. (ГДР, 81). Доказать, что для любого значения $n\in\mathbf{N}$ уравнение

$$x_1^2+\ldots+x_n^2=y^2$$

в натуральных числах имеет решение.

2.20. (Жюри, СРР, 77). Пусть заданы числа $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\in\mathbf{N}$, причем для каждого значения $i=1, \ldots, n$ числа a_i и a_{n+1} взаимно просты. Доказать, что уравнение

$$x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\ldots+x_n^{a_n}=x_{n+1}^{a_{n+1}}$$

в натуральных числах имеет бесконечно много решений.

2.21. (Жюри, Франция, 79). Доказать, что для любых взаимно простых чисел $a, b\in\mathbf{N}$ и любого натурального значения $c\geqslant(a-1)(b-1)$ уравнение $c=ax+by$ в целых неотрицательных числах имеет решение.

2.22. (ВНР, 78). Доказать, что для любых значений $a, b\in\mathbf{Q}$ уравнение $ax^2+by^2=1$ в рациональных числах либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

2.23. (Жюри, СРР, 79). Доказать, что для любых взаимно простых чисел $a, b\in\mathbf{Z}$ уравнение $ax^2+by^2=z^3$ в целых числах имеет бесконечно много решений, удовлетворяющих условию $(x, y)=1$.

2.24. (Англия, 80). Доказать, что ни при каком значении $n\in\mathbf{N}$, большем 1, уравнение $x^n+y^n=z^n$ в натуральных числах не имеет решений, удовлетворяющих условиям $x\leqslant n$, $y\leqslant n$.

2.25*. (Австрия, 72). Доказать, что при любом значении $n\in\mathbf{N}$, большем 2, уравнение

$$x^n+(x+1)^n=(x+2)^n$$

в натуральных числах не имеет решений.

2.26*. (Нью-Йорк, 81). Решить уравнение

$$x^{x+y}=(x+y)^y$$

в положительных рациональных числах.

2.27*. (ВНР, 80; НРБ, 81). Доказать, что если число $n\in\mathbf{N}$ нечетное, то уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{n}$$

в натуральных числах имеет решение тогда и только тогда, когда

$$n=m(4k-1) \quad \text{при} \quad m,\ k\in \mathbf{N}.$$

2.28*. (Жюри, Канада, 82). Доказать, что множество всех значений $n\in\mathbf{N}$, для которых уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{n}$$

в натуральных числах не имеет решений, не может быть представлено в виде объединения конечного множества арифметических прогрессий (как конечных, так и бесконечных).

2.29*. (НРБ, 79). Доказать, что уравнение $x^2+5=y^3$ в целых числах не имеет решений.

§ 3. Факториалы и биномиальные коэффициенты

(см. Приложение Г: определения 11, 12, 14—18; теоремы 2, 4, 8, 12, 13, 15—17, 20, 21, 96)

3.1. (Голландия, 82). Что больше:

$$(17091982!)^2 \text{ или } 17091982^{17091982}?$$

3.2. (СФРЮ, 74). Найти все числа $n\in\mathbf{N}$, для которых при каком-либо значении

$$k\in\{1;\ 2;\ \ldots;\ n-1\}$$

имеет место равенство

$$2C_n^k=C_n^{k-1}+C_n^{k+1}.$$

3.3. (Канада, 83). Решить уравнение

$$x!+y!+z!=u!$$

в натуральных числах.

3.4. (Жюри, США, 82). Доказать, что для любого значения $n\in\mathbf{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2\,((n-k)!)^2}=(C_{2n}^n)^2.$$

3.5. (Жюри, Австралия, 82). Для заданного значения $m\in\mathbf{N}$:

а) доказать, что число $\frac{1}{m+1}C_{2m}^m$ является натуральным;

б) найти наименьшее значение $k \in \mathbf{N}$, для которого число $\frac{k}{n+m+1} C_{2n}^{n+m}$ является натуральным при каждом натуральном значении $n \geqslant m$.

3.6. (Нью-Йорк, 74). Доказать, что для любых натуральных значений $n \geqslant k$ наибольший общий делитель чисел $C_n^k, C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ равен 1.

3.7. (Англия, 81). Доказать, что для любых значений $m, n \in \mathbf{N}$ число

$$S_{m,n} = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{n!\,(n+k)}$$

делится на $m!$, но при некоторых значениях $m, n \in \mathbf{N}$ число $S_{m,n}$ не делится на $m!(n+1)$.

3.8. (СФРЮ, 70). Доказать, что если число p простое, то число $C_{2p}^p - 2$ делится на p^2.

3.9. (СФРЮ, 75). Решить уравнение

$$1! + 2! + \ldots + (x+1)! = y^{z+1}$$

в натуральных числах.

3.10. (НРБ, 82; Австралия, 83). Решить уравнение

$$(y+1)^x - 1 = y!$$

в натуральных числах.

3.11. (Австрия, 73; СФРЮ, 77; ГДР, 79). Для заданного значения $n \in \mathbf{N}$, большего 1, обозначено

$$m_k = n! + k, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Доказать, что для любого значения $k \in \{1; \ldots; n\}$ существует простое число p, на которое делится число m_k и не делится ни одно из остальных чисел

$$m_1, \ldots, m_{k-1}, m_{k+1}, \ldots, m_n.$$

3.12*. (НРБ, 68). Доказать, что число C_n^k нечетно тогда и только тогда, когда числа $n, k \in \mathbf{N}$ удовлетворяют условию: если в каком-либо разряде двоичной записи числа k стоит 1, то в том же разряде двоичной записи числа n также стоит 1.

3.13*. (ММС, Люксембург, 80). Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ и простого числа p следующие условия эквивалентны:

а) ни одно из чисел C_n^k при $k = 0, 1, \ldots, n$ не делится на p.

б) $n = p^s m - 1$, где $s \in \mathbf{Z}^+$, $m \in \mathbf{N}$, $m < p$.

3.14*. (Жюри, СССР, 83). Пусть через h_n обозначена последняя ненулевая цифра десятичной записи числа $n!$. Доказать, что бесконечная десятичная дробь

$$0,h_1h_2h_3\ldots$$

представляет собой иррациональное число.

§ 4. Числовые множества

(см. Приложение Г: определения 1, 2, 11, 12; теоремы 1, 2, 10, 13, 18, 23, 55, 95, 96)

4.1. (СРР, 78). Доказать, что при любом разбиении множества

$$X=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$$

на два подмножества хотя бы одно из полученных подмножеств содержит 3 таких числа, что сумма двух из них равна удвоенному третьему.

4.2. (Бельгия, 79). Найти сумму всех $7!$ чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр в числе 1234567.

4.3. (Англия, 66). Доказать, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать 2 числа, сумма или разность которых делится на 100.

4.4. (Англия, 70). Доказать, что в любом множестве из n натуральных чисел можно выделить (непустое) подмножество чисел, сумма которых делится на n.

4.5. (ПНР, 79). Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при делении на некоторое число $m\in\mathbf{N}$ дают разные остатки, причем $n>m/2$. Доказать, что для каждого числа $k\in\mathbf{Z}$ существуют такие номера

$$i,\ j\in\{1;\ \ldots;\ n\}$$

(не обязательно различные), что число a_i+a_j-k делится на m.

4.6. (СФРЮ, 77). Даны 20 натуральных чисел $a_1<a_2<\ldots<a_{20}$, не превосходящих 70. Доказать, что среди разностей $a_j-a_k\ (j>k)$ найдутся хотя бы 4 одинаковых числа.

4.7. (СФРЮ, 81). Множество чисел 1, 2, ..., 100 разбито на 7 подмножеств. Доказать, что хотя бы в одном из этих подмножеств найдутся или 4 числа a, b, c, d, для которых $a+b=c+d$, или 3 числа e, f, g, для которых $e+f=2g$.

4.8. (США, 83). На числовой оси взят интервал длины $1/n$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что в этом интервале содержится *не более* $(n+1)/2$ несократимых дробей вида p/q, где $p, q \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant q \leqslant n$.

4.9. (СФРЮ, 77). Для заданного значения $n \in \mathbf{N}$ определить, сколько существует троек натуральных чисел, сумма которых равна $6n$.

4.10. (НРБ, 80). Доказать, что число способов, которыми из набора 1, 2, ..., 49 можно выбрать шестерку различных чисел так, чтобы хотя бы два из них были последовательными, равно

$$C_{49}^{6} - C_{44}^{6}.$$

4.11. (Австрия—ПНР, 78). Для заданного положительного рационального значения $c \neq 1$ доказать, что множество натуральных чисел можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств A и B так, чтобы отношение любых двух чисел из множества A, а также отношение любых двух чисел из множества B не равнялось числу c.

4.12. (Жюри, Испания, 77). Сумма целых чисел a_1, a_2, ..., a_n равна единице. Доказать, что тогда среди чисел

$$b_i = a_i + 2a_{i+1} + 3a_{i+2} + \ldots + (n-i+1)\,a_n + (n-i+2)\,a_1 + \\ + (n-i+3)\,a_2 + \ldots + na_{i-1} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

нет одинаковых.

4.13. (Жюри, СССР, 82). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, для каждого из которых существует строка из $2n$ чисел, обладающая следующим свойством: для любого значения $k = 1, \ldots, n$ в строке имеются 2 числа, равных k, между которыми находится ровно k чисел.

4.14. (Австрия, 75). Для непустого множества $M \subset \mathbf{Q}$ выполнены два условия:

1) если $a \in M$ и $b \in M$, то $a+b \in M$ и $ab \in M$;

2) если $r \in \mathbf{Q}$, то верно ровно одно из трех следующих утверждений: $r \in M$, $-r \in M$, $r = 0$.

Доказать, что множество M совпадает с множеством всех положительных рациональных чисел.

4.15. (Нью-Йорк, 73). Конечное множество $B \subset \mathbf{R}$ назовем базисом для множества $M \subset \mathbf{R}$, если каждое число из множества M может быть единственным образом представлено в виде произведения целых степеней чисел из множества B. Верно ли, что для любого конечного множества положительных чисел существует базис?

4.16. (Австрия—ПНР, 80). Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ имеет место равенство

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_k} = n,$$

где суммирование ведется по всем возможным наборам чисел

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

из множества $\{1; 2; \ldots; n\}$.

4.17*. (НРБ, 83). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, для каждого из которых существует такая перестановка

$$(a_1; a_2; \ldots; a_n)$$

чисел $0, 1, \ldots, n-1$, что все числа

$$a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2\ldots a_n$$

дают разные остатки при делении на n.

4.18*. (Жюри, Швеция, 83). Доказать, что если число $n \in \mathbf{N}$ не является целой степенью простого числа, то существует перестановка

$$(i_1; i_2; \ldots; i_n)$$

чисел $1, 2, \ldots, n$, для которой справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k \cos(2\pi i_k/n) = 0.$$

4.19*. (Жюри, Финляндия, 82). Определить сумму всех натуральных чисел, в десятичной записи каждого из которых цифры образуют возрастающую или убывающую последовательность.

4.20*. (Жюри, Финляндия, 79). Набор $(a_1; \ldots; a_n)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = 1979,$$

назовем четным, если число n четно, и назовем нечетным, если число n нечетно. Доказать, что четных наборов существует столько же, сколько нечетных.

4.21*. Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{N}$:

а) (Жюри, ПНР, 79) существует такой набор из $n < 2^m$ чисел, в котором все подмножества имеют разные суммы чисел, причем среди этих сумм содержатся все числа $a_1, \ldots, a_m$;

б) существует такой набор из $n \leqslant m$ чисел, в котором все подмножества имеют разные суммы чисел, причем среди этих сумм содержатся все числа $a_1, \ldots, a_m$.

4.22*. (Жюри, ПНР, 83). Существует ли множество $M \subset \mathbf{N}$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) любое число $n \in \mathbf{N}$, большее 1, представимо в виде $n = a + b$, где $a, b \in M$;

2) если каждое из чисел $a, b, c, d \in M$ больше 10, то равенство $a + b = c + d$ возможно лишь в случае $a = c$ или $a = d$?

§ 5. Различные свойства чисел

(см. Приложение Г: определения 11—19; теоремы 1, 2, 4, 10, 13, 18, 23, 55, 95, 96)

5.1. (ЧССР, 52). Доказать, что если положительные числа $a, b, c \in \mathbf{Q}$ удовлетворяют равенству $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$, то $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$.

5.2. (СРР, 75). Доказать, что существуют положительные иррациональные числа a и b, для которых число a^b является натуральным.

5.3. (Бразилия, 83). Доказать, что сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не является целым числом ни при каком значении $n \in \mathbf{N}$, большем 1.

5.4. (США, 78). Доказать, что любое число $n \in \mathbf{N}$, большее 32, представимо в виде суммы нескольких натуральных чисел, сумма обратных величин которых равна 1.

Указание. Значения $n = 33, 34, 35, \ldots, 73$ требуемому условию удовлетворяют.

5.5. (Англия, 82). Запись числа $n \in \mathbf{N}$, кратного 17, в двоичной системе счисления содержит ровно 3 цифры 1. Доказать, что в этой записи содержится не менее 6 цифр 0, а если их ровно 7, то число n является четным.

5.6. (СФРЮ, 83). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, обладающие следующим свойством: если записать рядом числа n^3 и n^4 (в десятичной системе счисления), то в полученной записи каждая из 10 цифр 0, 1, ..., 9 встретится ровно 1 раз.

5.7. (СФРЮ, 77). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, обладающие следующим свойством: пятая степень суммы цифр десятичной записи числа n равна n^2.

5.8. (Англия, 78). Доказать, что если знаменатель правильной дроби не превосходит 100, то в десятичной записи этой дроби не могут встретиться три цифры 1, 6, 7, идущие подряд в указанном порядке.

5.9. (Нью-Йорк, 78). Доказать, что любое простое число вида

$$2^{2^n}+1 \ (n \in \mathbf{N})$$

не представимо в виде разности пятых степеней двух натуральных чисел.

5.10. (Нью-Йорк, 77). Существует ли значение $n \in \mathbf{N}$, при котором числа

$$2^{n+1}-1 \text{ и } 2^{n-1}(2^n-1)$$

одновременно являются кубами целых чисел?

5.11. (СРР, 78). Доказать, что если числа $m, n \in \mathbf{N}$ удовлетворяют неравенству $\sqrt{7}-m/n > 0$, то $\sqrt{7}-m/n > 1/mn$.

5.12. (ММС, Финляндия, 80). Определить, какие цифры в разрядах единиц и десятых стоят в десятичной записи числа

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}.$$

5.13. (СРР, 80). Доказать, что для любых значений $m, n \in \mathbf{N}$ существует число $k \in \mathbf{N}$, удовлетворяющее равенству

$$(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n = \sqrt{k}+\sqrt{k-1}.$$

5.14. (Жюри, ПНР, 77). Доказать, что для любых значений $a, b \in \mathbf{R}$ и $\varepsilon > 0$ существуют числа $k, m \in \mathbf{Z}$ и $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющие неравенствам

$$|na-k| < \varepsilon \text{ и } |nb-m| < \varepsilon.$$

5.15. (Жюри, СРВ, 76). Доказать, что существует бесконечно много чисел вида

$$5^n \ (n \in \mathbf{N}),$$

в десятичной записи каждого из которых можно выделить не менее 1976 цифр 0, идущих подряд.

5.16*. (Жюри, Англия, 77). Доказать, что для любого значения $m \in \mathbf{N}$ существует бесконечно много чисел вида

$$5^n \ (n \in \mathbf{N}),$$

у которых каждая из m последних цифр десятичной записи имеет четность, отличную от четности соседних с ней цифр.

5.17*. (СФРЮ, 73). Доказать, что если длины сторон прямоугольника — нечетные числа, то внутри этого прямоугольника нет точки, расстояние от которой до любой из четырех его вершин является целым числом.

5.18*. (Жюри, ВНР, 79). Доказать, что не существует правильной четырехугольной пирамиды, у которой длины всех ребер, полная поверхность и объем являются целыми числами.

5.19*. (Англия, 81). Для заданных различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$ $(n > 1)$ и каждого значения $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ обозначено

$$p_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j).$$

Доказать, что при любом значении $k \in \mathbf{N}$ число

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k / p_i$$

является целым.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 6. Уравнения и системы

(см. Приложение Г: определения 2, 19; теоремы 6, 7, 18, 55, 56)

6.1. (Нью-Йорк, 78). Решить уравнение $8^x(3x+1) = 4$.

6.2. (Австрия, 74). Доказать, что для любых значений $a, b, c \in \mathbf{R}$ уравнение

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

6.3. (ГДР, 83). Доказать, что уравнение

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

имеет ровно два решения.

6.4. (Нью-Йорк, 80). Найти все пары чисел $a > 1$, $b > 0$, для которых уравнение $a^x = x^b$ имеет ровно одно положительное решение. Указать это решение для каждой пары найденных значений a, b.

6.5. (СФРЮ, 72). При каждом значении $a \in \mathbf{R}$ решить уравнение

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 2.$$

6.6. (Нью-Йорк, 73). Найти все значения $x \in [0, \pi/2]$, удовлетворяющие уравнению $\cos^8 x + \sin^8 x = 97/128$.

6.7. (Нью-Йорк, 78). Найти все пары натуральных чисел $A \neq B$, для которых система

$$\begin{cases} \cos Ax + \cos Bx = 0, \\ A \sin Ax + B \sin Bx = 0 \end{cases}$$

имеет решение.

6.8. (ЧССР, 56). Найти все пары чисел $x, y \in (0, \pi/2)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y. \end{cases}$$

6.9. (ГДР, 66). Решить уравнение

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) = 6.$$

6.10. (СРР, 78). При каждом значении $n \in \mathbf{N}$ решить уравнение

$$\sin x \sin 2x \ldots \sin nx + \cos x \cos 2x \ldots \cos nx = 1.$$

6.11. (ГДР, 66). При каждом значении $n \in \mathbf{N}$ решить уравнение $(x+y)^n = x^n + y^n$.

6.12. (ГДР, 78). Решить систему

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

6.13. (Англия, 75). Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ существует ровно один набор чисел $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющий уравнению

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \ldots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = 1/(n+1).$$

6.14. (НРБ, 68). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, для которых существует набор положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9, \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = 1. \end{cases}$$

Указать все такие наборы при каждом из найденных значений n.

6.15*. (ЧССР, 82). Для каждой пары значений $n, k \in \mathbf{N}$ найти все наборы неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = 1, \\ (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) = 2. \end{cases}$$

6.16*. (ГДР, 80). Решить систему

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$$

6.17*. (Австрия—ПНР, 79). Для любых значений $n \in \mathbf{N}$ и $a \in \mathbf{R}$ решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = a^n. \end{cases}$$

§ 7. Неравенства

(см. Приложение Г: определения 18, 30, 32; теоремы 2, 4—7, 34, 55, 56)

7.1. (ГДР, 74). Что больше: $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ или 0?

7.2. (Бельгия, 79). Расставить числа

$$x = (a+b)(c+d),$$
$$y = (a+c)(b+d),$$
$$z = (a+d)(b+c)$$

в порядке возрастания, если известно, что $a < b < c < d$.

7.3. (СФРЮ, 76). Доказать, что если произведение трех чисел равно 1, а их сумма больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

7.4. (Нью-Йорк, 75). Доказать, что для среднего арифметического $A = (a+b)/2$ и среднего геометрического $B = \sqrt{ab}$ любых положительных чисел $a \neq b$ справедливы оценки

$$B < \frac{(a-b)^2}{8(A-B)} < A.$$

7.5. (СФРЮ, 76). Доказать, что для любых чисел a, b, c, больших 1, справедливо неравенство

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

7.6. (Австрия, 71). Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

7.7. (США, 80). Доказать, что для любых чисел $a, b, c\in[0;\ 1]$ справедливо неравенство

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

7.8. (ЧССР, 59). Доказать, что если числа $a, b, c\in\mathbf{R}$ удовлетворяют неравенствам

$$a+b+c>0,\quad ab+bc+ca>0,\quad abc>0,$$

то эти числа положительные.

7.9. (Бельгия, 76). Доказать, что при всех $\alpha\in\mathbf{R}$ выполнено неравенство

$$\sin(\cos\alpha)<\cos(\sin\alpha).$$

7.10. (Балканиада, 84). Доказать, что для любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n\geqslant 2)$, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2-\alpha_i}\geqslant\frac{n}{2n-1}.$$

7.11. (ГДР, 67; Англия, 76). Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ $(n\geqslant 2)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1},\quad\text{где обозначено}\quad s=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

7.12. (Нью-Йорк, 75). Верно ли, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a_{n+1}=a_1$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}\,?$$

7.13. (Жюри, Канада, 82). Доказать, что для любых положительных чисел $x \neq 1$, $a < 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}.$$

7.14. (Жюри, СССР, 82). Доказать, что для любого значения $\alpha \leqslant 1$ и любых чисел $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям $1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0$, справедливо неравенство

$$(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)^\alpha \leqslant 1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha+2^{\alpha-1}x_2^\alpha+\ldots+n^{\alpha-1}x_n^\alpha.$$

7.15. (НРБ, 82). Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_n \in [0; 2]$ $(n \geqslant 2)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_i - a_j| \leqslant n^2.$$

Определить, при каких значениях $a_1, \ldots, a_n$ достигается равенство.

7.16. (СФРЮ, 72). Доказать, что если число M и набор чисел

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{matrix}$$

удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n| \leqslant M$$

при любых значениях $x_1, \ldots, x_n \in \{-1; 1\}$, то справедлива оценка

$$|a_{11}| + |a_{22}| + \ldots + |a_{nn}| \leqslant M.$$

7.17. (Жюри, США, 82). Доказать, что для любого набора чисел $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ можно подобрать такое значение $k \in \{1; \ldots; n\}$, чтобы любые неотрицательные числа $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, не превосходящие 1, удовлетворяли неравенству

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i a_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|.$$

7.18*. (НРБ, 84). Доказать, что для любых значений $m, n \in \mathbf{N}$ и любых чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in [0; 1]$, удовлетворяющих условиям $x_i + y_i = 1$ при $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство

$$(1-x_1\ldots x_n)^m+(1-y_1^m)\ldots(1-y_n^m)\geqslant 1.$$

7.19*. (Жюри, США, 77). Доказать, что для любых положительных чисел $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ справедливо неравенство

$$a^b b^c c^d d^a \geqslant b^a c^b d^c a^d.$$

7.20*. (ГДР, 80). Доказать, что для любых чисел $n, k\in \mathbf{N}$, больших 1, справедливо неравенство

$$\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}>k\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}.$$

7.21*. (Жюри, Франция, 82). Доказать, что для любых положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}\leqslant e\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

где e—основание натуральных логарифмов.

7.22*. (США, 77). Доказать, что если фиксированы два положительных числа $p<q$, то для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\in[p;\ q]$ справедливо неравенство

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

Определить, при каких значениях $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ достигается равенство.

7.23*. (ГДР, 70). Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

Определить, при каких значениях a, b, c, d достигается равенство.

§ 8. Задачи с целой частью

(см. Приложение Г: определения 11, 15, 18, 19; теоремы 2, 6, 8, 18, 20)

8.1. (Австрия, 73). Решить уравнение

$$1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}.$$

8.2. (Англия, 75). Решить уравнение

$$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400$$

в натуральных числах.

8.3. (Канада, 81). Доказать, что уравнение

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12\,345$$

не имеет решений.

8.4. (Швеция, 82). Для каждого значения $n\in\mathbf{N}$ определить, сколько решений имеет уравнение $x^2-[x^2]=\{x\}^2$ на отрезке $[1;\ n]$.

8.5. (Австрия, 74). Доказать, что для любого значения $n\in\mathbf{N}$ справедливо равенство

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

8.6. (Жюри, Бельгия, 79). Какие натуральные числа нельзя представить в виде $[n+\sqrt{n}+1/2]$, где $n\in\mathbf{N}$?

8.7. (СФРЮ, 83). Доказать, что среди членов последовательности $\{a_n\}$, заданной соотношениями

$$a_1=2,\ a_{n+1}=[(3/2)\,a_n]\ \text{при}\ n\in\mathbf{N},$$

имеется бесконечно много четных и бесконечно много нечетных чисел.

8.8. (Австрия—ПНР, 79). Для каждого значения $n\in\mathbf{N}$ найти наибольшее значение $k\in\mathbf{Z}^+$, при котором число $[(3+\sqrt{11})^{2n-1}]$ делится на 2^k.

8.9. (Жюри, СРР, 79). Доказать, что для любого значения $n\in\mathbf{N}$ имеет место оценка

$$\{n\sqrt{2}\}>1/(2n\sqrt{2}),$$

причем для любого $\varepsilon>0$ найдется число $n\in\mathbf{N}$, удовлетворяющее неравенству

$$\{n\sqrt{2}\}<(1+\varepsilon)/(2n\sqrt{2}).$$

8.10*. (США, 75). а) Доказать, что для любых неотрицательных чисел x, y справедливо неравенство

$$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x].$$

б) Доказать, что число

$$\frac{(5m)!\,(5n)!}{m!n!\,(3m+n)!\,(3n+m)!}$$

является целым при всех значениях $m, n\in\mathbf{N}$.

8.11*. (США, 81). Доказать, что для любых чисел $x \geqslant 0$ и $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$[nx] \geqslant \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \ldots + \frac{[nx]}{n}.$$

8.12*. (НРБ, 83). Доказать, что если числа a, b, c при каждом значении $n \in \mathbf{N}$ удовлетворяют равенству $[na] + [nb] = [nc]$, то хотя бы одно из чисел a, b является целым.

Глава 3

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 9. Треугольники

(см. Приложение Г: определения 36, 40, 41; теоремы 64, 67, 74, 75, 77, 82, 83)

9.1. (СФРЮ, 81). В остроугольном неравностороннем треугольнике через одну вершину проведена высота, через другую — медиана, а через третью — биссектриса. Доказать, что если проведенные линии, пересекаясь, образуют треугольник, то он не может быть равносторонним.

9.2. (Бельгия, 77). Доказать, что если заданы положительные числа $a, b, c \in \mathbf{R}$ и для каждого значения $n \in \mathbf{N}$ существует треугольник со сторонами a^n, b^n, c^n соответственно, то все эти треугольники равнобедренные.

9.3. (Швеция, 82). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, для каждого из которых существуют число $m \in \mathbf{N}$, треугольник ABC со сторонами $AB = 33$, $AC = 21$, $BC = n$ и точки D, E на сторонах AB, AC соответственно, удовлетворяющие условиям $AD = DE = EC = m$.

9.4. (Жюри, СРВ, 79). Найти все тройки чисел $a, b, c \in \mathbf{N}$, являющихся длинами сторон треугольника с диаметром описанной окружности, равным 6,25.

9.5. (Нью-Йорк, 78). Треугольники ABC и DEF вписаны в одну и ту же окружность. Доказать, что равенство их периметров равносильно условию

$$\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C = \sin \angle D + \sin \angle E + \sin \angle F.$$

9.6. (СФРЮ, 81). Прямая делит треугольник на две части равных площадей и периметров. Доказать, что центр вписанной окружности лежит на этой прямой.

9.7. (Австрия, 83). В треугольнике ABC на сторонах AB, AC и BC взяты точки C', B' и A' так, что отрезки

AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Точки A'', B'' и C'' симметричны точкам A, B и C соответственно относительно точек A', B' и C'. Доказать, что

$$S_{A''B''C''} = 3S_{ABC} + 4S_{A'B'C'}.$$

9.8. (Австрия, 71). Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O. Доказать, что

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2).$$

9.9. (Нью-Йорк, 79). Доказать, что если центр тяжести треугольника совпадает с центром тяжести его границы, то треугольник равносторонний.

9.10. (Англия, 83). Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Доказать, что если $AB = AC$, то $OE \perp CD$.

9.11. (ЧССР, 72). Найти все пары положительных чисел $a, b \in \mathbf{R}$, для которых существуют прямоугольный треугольник CDE и точки A, B на его гипотенузе DE, удовлетворяющие условиям $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ и $AC = a$, $BC = b$.

9.12. (Нью-Йорк, 76). Найти хотя бы один прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, каждый угол которого можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки.

9.13. (Финляндия, 80). Перпендикуляры, проведенные через середины сторон AB и AC треугольника ABC, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Доказать, что равенство $BC = XY$: а) выполнено, если

$$\operatorname{tg} \angle B \cdot \operatorname{tg} \angle C = 3;$$

б) может также выполняться и при условии

$$\operatorname{tg} \angle B \cdot \operatorname{tg} \angle C \neq 3;$$

найти множество $M \subset \mathbf{R}$, для которого указанное равенство равносильно условию

$$\operatorname{tg} \angle B \cdot \operatorname{tg} \angle C \in M.$$

9.14. (Нью-Йорк, 76). Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B_1 и C_1, для которых

$$\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90^\circ.$$

Доказать, что $AB_1 = AC_1$.

9.15. (Англия, 81). Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O, а точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон BC, CA, AB соответственно. Окружность с центром O пересекает прямую B_1C_1 в точках D_1, D_2, прямую C_1A_1 — в точках E_1, E_2, а прямую A_1B_1 — в точках F_1, F_2. Доказать, что

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2.$$

9.16. (СФРЮ, 83). Внутри треугольника ABC взята точка P, а на сторонах AC и BC взяты соответственно точки M и L, для которых

$$\angle PAC = \angle PBC, \ \angle PLC = \angle PMC = 90°.$$

Доказать, что если D — середина стороны AB, то $DM = DL$.

9.17. (СРР, 78). Найти геометрическое место точек M, лежащих внутри равностороннего треугольника ABC и удовлетворяющих условию

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = 90°.$$

9.18. (НРБ, 82). Через B_{ij} (i, $j \in \{1; 2; 3\}$) обозначена точка, симметричная вершине A_i данного неравнобедренного треугольника $A_1A_2A_3$ относительно его биссектрисы, проходящей через вершину A_j. Доказать, что прямые $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$ и $B_{23}B_{32}$ параллельны.

9.19. (НРБ, 81). Биссектрисы внутреннего и внешнего углов C треугольника ABC пересекают прямую AB в точках L и M соответственно. Доказать, что если $CL = CM$, то

$$AC^2 + BC^2 = 4R^2,$$

где R — радиус описанной окружности.

9.20. (СФРЮ, 83). Внутри треугольника ABC взята точка M, для которой $\angle MBA = 30°$, $\angle MAB = 10°$. Найти $\angle AMC$, если $\angle ACB = 80°$ и $AC = BC$.

9.21. (Англия, 70). На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BAD = 50°$, $\angle ABE = 30°$. Найти $\angle BED$, если $\angle ABC = \angle ACB = 50°$.

9.22. (ГДР, 64). На стороне BC треугольника ABC взята точка P, для которой $PC = 2BP$. Найти $\angle ACB$, если $\angle ABC = 45°$, $\angle APC = 60°$.

9.23*. (Жюри, Голландия, 79). Внутри равностороннего треугольника ABC взяты точки K, L, M, для которых $\angle KAB = \angle LBA = 15°$, $\angle MBC = \angle KCB = 20°$, $\angle LCA = \angle MAC = 25°$. Найти углы треугольника KLM.

§ 10. Окружности и круги

(см. Приложение Г: определения 35, 36; теоремы 66—75, 79)

10.1. (Бразилия, 83). Доказать, что все точки окружности можно разбить на два множества так, чтобы среди вершин любого вписанного прямоугольного треугольника присутствовали точки обоих множеств.

10.2. (Нью-Йорк, 75). Доказать, что четыре расстояния от точки окружности до вершин вписанного в нее квадрата не могут одновременно быть рациональными числами.

10.3. (Жюри, Бельгия, 76). Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Доказать, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники MB_1A, MC_1A, MC_1B, MA_1B, MA_1C и MB_1C, равны, то треугольник ABC равносторонний.

10.4. (Англия, 75). Семь точек в круге единичного радиуса расположены так, что расстояние между любыми двумя из них не меньше 1. Доказать, что одна из точек совпадает с центром круга.

10.5. (Пекин, 62). Шесть кругов на плоскости расположены так, что центр каждого из них лежит вне остальных кругов. Доказать, что все шесть кругов не имеют общей точки.

10.6. (Австрия—ПНР, 78). На плоскости расположены непересекающиеся круги, каждый из которых касается по меньшей мере шести из остальных кругов. Доказать, что множество кругов бесконечно.

10.7. (НРБ, 84). Доказать, что для любого треугольника ABC существуют 3 окружности одинакового радиуса, одна из которых касается сторон AB и BC, другая — сторон BC и AC, третья — сторон AC и AB, а все 3 окружности имеют ровно одну общую точку.

10.8. (ММС, Люксембург, 80). Две окружности касаются друг друга в точке P. Прямая, касающаяся одной из них в точке A, пересекает другую в точках B и C. Доказать, что прямая PA является биссектрисой угла BPC или смежного с ним.

10.9. (Жюри, США, 79). Окружность, центр которой лежит на стороне BC равнобедренного треугольника ABC, касается его равных сторон AB и AC. Доказать, что отрезок с концами P и Q, лежащими на сторонах AB и BC соответственно, касается окружности тогда и только тогда, когда $BP \cdot CQ = BC^2/4$.

10.10. (Англия, 80). На диаметре AB полуокружности взяты точки K и L, а на полуокружности — точки M, N и C так, что четырехугольник $KLMN$ является квадратом, площадь которого равна площади треугольника ABC. Доказать, что центр вписанной в треугольник ABC окружности совпадает с точкой пересечения одной из сторон квадрата и одной из прямых, соединяющих вершину N или M с вершиной A или B.

10.11. (Жюри, СРВ, 79). Точка M лежит на окружности, описанной около данного равностороннего треугольника ABC. Доказать, что величина $MA^4+MB^4+MC^4$ не зависит от выбора точки M.

10.12. (ГДР, 73). Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB=AD$ и $CB=CD$. Доказать, что:

а) в него можно вписать окружность;

б) около него можно описать окружность тогда и только тогда, когда $AB\perp BC$;

в) если $AB\perp BC$, то квадрат расстояния между центром вписанной окружности (радиуса r) и центром описанной окружности (радиуса R) равен

$$R^2+r^2-r\sqrt{r^2+4R^2}.$$

10.13. (СРР, 78). Доказать, что четыре вершины квадрата не могут быть расположены соответственно на четырех концентрических окружностях, радиусы которых образуют арифметическую прогрессию.

10.14. (СФРЮ, 83). На дуге AB описанной около прямоугольника $ABCD$ окружности взята точка M, отличная от вершин A, B. Точки P, Q, R и S являются проекциями точки M на прямые AD, AB, BC и CD соответственно. Доказать, что прямые PQ и RS перпендикулярны и пересекаются на одной из диагоналей прямоугольника.

10.15. (Англия, 77). Сторона BC треугольника ABC касается вписанной в него окружности в точке D. Доказать, что центр окружности лежит на прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

10.16. (Австрия, 72). Две окружности касаются друг друга. В большую окружность вписан равносторонний треугольник, из вершин которого проведены касательные к меньшей окружности. Доказать, что длина одной из трех касательных равна сумме длин двух других.

10.17. (Жюри, США, 79). Из точки P, лежащей на дуге BC окружности, описанной около треугольника ABC, опущены перпендикуляры PK, PL и PM на прямые BC,

AC и AB соответственно. Доказать, что

$$\frac{BC}{PK}=\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}.$$

10.18. (ГДР, 70; СФРЮ, 72). а) Пусть точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, а точка D — отличная от A точка пересечения прямой AO с описанной около треугольника ABC окружностью. Доказать, что $DB=DC=DO$.

б) Доказать, что если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то центры A_1, B_1, C_1, D_1 окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC соответственно, являются вершинами прямоугольника.

10.19*. (Балканиада, 84). Доказать, что вписанный четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ равен четырехугольнику, вершины которого H_1, H_2, H_3, H_4 являются точками пересечения высот треугольников

$$A_2A_3A_4,\ A_1A_3A_4,\ A_1A_2A_4,\ A_1A_2A_3$$

соответственно.

10.20*. а) (Жюри, США, 82). Диагональ данного вписанного четырехугольника делит его на два треугольника. Доказать, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, не зависит от выбора диагонали.

б) (ВНР, 78). Доказать, что наибольшая высота нетупоугольного треугольника не меньше суммы радиусов вписанной и описанной окружностей. Определить, когда достигается равенство.

10.21*. (СФРЮ, 77). На плоскости расположены 100 точек. Доказать, что существует конечное множество кругов, удовлетворяющее следующим трем условиям: 1) любая из данных точек лежит внутри одного из кругов; 2) любые две точки разных кругов удалены друг от друга более чем на 1; 3) сумма диаметров всех кругов меньше 100.

10.22*. (Пекин, 63). На плоскости расположены $2n+3$ точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности. Существует ли окружность, проходящая через какие-либо три из этих точек и ограничивающая круг, внутри которого лежит ровно половина остальных точек?

10.23*. (НРБ, 78). Доказать, что у любого выпуклого многоугольника найдется такая тройка соседних вершин, что проходящая через них окружность ограничивает круг, покрывающий весь многоугольник.

10.24*. (Финляндия, 80). Среди $n > 1$ пар противоположных сторон вписанного $2n$-угольника выбрана $n-1$ пара параллельных сторон. Найти все значения n, для которых стороны оставшейся при этом пары обязательно параллельны.

10.25*. (НРБ, 82). На плоскости расположены n различных окружностей радиуса 1 каждая. Доказать, что хотя бы одна из них содержит дугу, не пересекающуюся ни с одной из остальных окружностей и имеющую длину не меньше $2\pi/n$.

§ 11. Многоугольники

(см. Приложение Г: определения 1, 2, 35, 37; теоремы 2, 65, 70, 73, 74, 80)

11.1. (СФРЮ, 81; Швеция, 82). Доказать, что если для некоторой точки O, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$ площади треугольников ABO, BCO, CDO, DAO одинаковы, то эта точка лежит хотя бы на одной из диагоналей AC или BD.

11.2. (Канада, 82). Площади четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны S и S' соответственно. Доказать, что если внутри четырехугольника $ABCD$ существует точка O, для которой

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B'C'},\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{C'D'},\ \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{D'A'},$$

то $S=2S'$.

11.3. (СФРЮ, 72). Восемь прямых, соединяющих вершины параллелограмма с серединами несмежных сторон, пересекаясь, образовали восьмиугольник. Доказать, что его площадь составляет шестую часть площади параллелограмма.

11.4. (СФРЮ, 70). Диагонали выпуклого пятиугольника $ABCDE$, пересекаясь, образуют пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ и пятиконечную звезду.

а) Найти сумму углов этой звезды при вершинах A, B, C, D, E.

б) Найти отношение площади пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ к площади пятиугольника $ABCDE$ при условии правильности последнего.

11.5. (Жюри, Франция, 79). Соответственные стороны четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны. Доказать, что имеет место одно из следующих двух утверждений:

а) $BD\perp AC$ и $B'D'\perp A'C'$;

б) точки M и M' пересечения прямых AC и $A'C'$ с перпендикулярами, проходящими через середины отрезков BD и $B'D'$ соответственно, удовлетворяют равенству $MA \cdot M'C' = MC \cdot M'A'$ и либо одновременно лежат на отрезках AC и $A'C'$ соответственно, либо одновременно лежат на их продолжениях.

11.6. (Австрия, 73). Доказать, что если все углы выпуклого восьмиугольника равны, а отношение длин любых его соседних сторон рационально, то противоположные стороны этого восьмиугольника равны.

11.7. (СФРЮ, 76). На плоскости нарисован правильный шестиугольник со стороной a. Для любого значения $n \in \mathbf{N}$, большего 1, построить с помощью одной линейки отрезок длины a/n.

11.8. (Жюри, 81). Доказать, что если для углов равностороннего выпуклого пятиугольника $ABCDE$ выполнены неравенства $\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C \geqslant \angle D \geqslant \angle E$, то этот пятиугольник правильный.

11.9. (ГДР, 74; ГДР, 79). а) Доказать, что если вершины одного выпуклого n-угольника лежат в другом равном ему n-угольнике, то вершины этих n-угольников совпадают.

б) Верно ли утверждение а) для невыпуклых многоугольников?

в) Для любого ли невыпуклого многоугольника утверждение а) неверно?

11.10. (Жюри, Бельгия, 79). Любой ли правильный $2n$-угольник можно разбить на ромбы?

11.11. (ГДР, 64). Вне ромба $ABCD$ с заданной стороной a берется точка O, удаленная от каждой из вершин A и C на заданное расстояние $b > a$. Доказать, что произведение $OB \cdot OD$ не зависит от величины угла BAD.

11.12. (ВНР, 76). Вне параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $\angle PAB = \angle PCB$, причем вершины A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой PB. Доказать, что $\angle APB = \angle DPC$.

11.13. (Жюри, Бельгия, 83). В шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах A, C, E равны и не превосходят $180°$, причем

$$\angle ABF = \angle CBD, \ \angle AFB = \angle EFD.$$

Доказать, что если точка A' симметрична вершине A относительно диагонали BF и не лежит на прямой CE, то четырехугольник $A'CDE$ — параллелограмм.

11.14. (НРБ, 79). Вершины выпуклого пятиугольника $ABCDE$ расположены так, что треугольники ABC и CDE равносторонние. Доказать, что если точка O — центр треугольника ABC, а точки M и N — середины сторон BD и AE соответственно, то треугольники OME и OND подобны.

11.15. (Жюри, СССР, 82). В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B, E прямые и $\angle BAC = \angle EAD$. Доказать, что если диагонали BD и CE пересекаются в точке O, то прямые AO и BE перпендикулярны.

11.16. (Англия, 66). Найти число сторон правильного многоугольника, если для четырех его последовательных вершин A, B, C, D выполнено равенство

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

11.17*. (Англия, 71). На окружности, вписанной в правильный $2n$-угольник, взяты точки A и B. Доказать, что если диагонали, соединяющие противоположные вершины $2n$-угольника, видны из точки A под углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а из точки B под углами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно, то

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \ldots + \operatorname{tg}^2 \alpha_n = \operatorname{tg}^2 \beta_1 + \ldots + \operatorname{tg}^2 \beta_n.$$

11.18*. (ВНР, 78). Вершины выпуклого многоугольника с нечетным числом сторон окрашены так, что любые две соседние вершины имеют разный цвет. Доказать, что для всякой раскраски, удовлетворяющей этому условию, многоугольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы концы каждой диагонали имели разный цвет.

§ 12. Точки, отрезки и прямые

(см. Приложение Г: определения 1—3, 18, 34, 35, 37; теоремы 1, 2, 64, 65, 96)

12.1. (Нью-Йорк, 80). Средние линии равностороннего треугольника ABC делят его на четыре треугольника ADE, BDF, DEF и CEF, на сторонах которых отмечены середины K, L, M, N, O, P, Q, R, S. Каждая из 15 полученных точек окрашена в один из двух цветов. Доказать, что найдутся 3 точки одного цвета, являющиеся вершинами равностороннего треугольника.

12.2. (США, 81). На плоскости нарисован угол величиной $180°/n$, где число $n \in \mathbf{N}$ не делится на 3. Доказать, что с помощью циркуля и линейки этот угол можно разделить на 3 равных угла.

12.3. (СФРЮ, 72). Доказать, что любые два диаметра выпуклого множества на плоскости имеют хотя бы одну общую точку.

12.4. (ГДР, 82). Любой ли выпуклый четырехугольник можно разбить ломаной на две части, диаметр каждой из которых меньше диаметра исходного четырехугольника?

12.5. (ГДР, 72). Доказать, что если n точек на плоскости расположены так, что любая прямая, проходящая через две из них, содержит хотя бы еще одну из точек, то все они лежат на одной прямой.

12.6. (ЧССР, 68). Отрезки AB и CD равны и не параллельны. Найти геометрическое место точек O, обладающих следующим свойством: отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O, симметричен отрезку CD относительно некоторой прямой.

12.7. (Бельгия, 77). Доказать, что если множество на плоскости имеет более одного центра симметрии, то оно имеет их бесконечно много.

12.8. (Бельгия, 78). Доказать, что объединение L осей симметрии множества M на плоскости содержится в объединении осей симметрии множества L.

12.9. (Жюри, ГДР, 79). Множество на плоскости имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом α, где число α/π иррационально. Доказать, что если это множество содержит более одной точки, то оно содержит бесконечно много точек.

12.10. (СФРЮ, 76). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, большие 2, для которых на плоскости можно выбрать n точек так, чтобы любые две из них являлись вершинами равностороннего треугольника, третьей вершиной которого служит также одна из выбранных точек.

12.11. (ЧССР, 80). Множество M получено из плоскости выбрасыванием трех различных точек A, B и C. Найти наименьшее число выпуклых множеств, объединением которых является множество M.

12.12. (Жюри, СРР, 79). Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$, большего некоторого числа n_0, всю плоскость можно разбить на n частей, проведя несколько прямых, среди которых обязательно есть пересекающиеся. Найти наименьшее из таких значений n_0.

12.13. (ЧССР, 82). На координатной плоскости найти выпуклое множество, которое содержит бесконечно много точек с обеими целочисленными координатами, но в пересечении с любой прямой содержит лишь конечное (или пустое) множество таких точек.

12.14. (ГДР, 74). Найти все пары ненулевых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, для которых последовательность чисел

$$a_n = |\boldsymbol{x} - n\boldsymbol{y}| \quad (n \in \mathbf{N})$$

является: а) возрастающей; б) убывающей.

12.15. (СФРЮ, 73). Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Доказать, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести по плоскости на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из точек.

12.16. (Бельгия, 77). Внутри круга радиуса $n \in \mathbf{N}$ расположены $4n$ отрезков длины 1 каждый. Доказать, что если задана некоторая прямая, то найдется другая прямая, либо параллельная, либо перпендикулярная ей и пересекающая по крайней мере два отрезка.

12.17*. (ЧССР, 73). В квадрате со стороной 50 расположена ломаная. Доказать, что если расстояние от любой точки квадрата хотя бы до одной точки ломаной не больше 1, то длина ломаной больше 1248.

12.18*. (Жюри, ЧССР, 79). На прямой расположены n^2+1 $(n \in \mathbf{N})$ отрезков. Доказать, что либо среди них можно выбрать непересекающиеся друг с другом $n+1$ отрезков, либо найдется общая для некоторых $n+1$ отрезков точка.

12.19*. (США, 83). На прямой расположены несколько множеств, каждое из которых является объединением двух отрезков. Доказать, что если любые три из этих множеств имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая по меньшей мере половине всех множеств.

12.20*. (СФРЮ, 75). На плоскости отмечены $n+4$ точки, четыре из которых расположены в вершинах квадрата, а остальные n лежат внутри этого квадрата. Любые из отмеченных точек разрешается соединять отрезками, лишь бы при этом никакой построенный отрезок не содержал отмеченных точек, отличных от его концов, и никакие два из построенных отрезков не имели общих точек, кроме, возможно, концов. Найти наибольшее число отрезков, которые можно построить таким образом.

§ 13. Геометрические неравенства

(см. Приложение Г: определения 1, 35, 38; теоремы 1, 6, 64, 69, 70, 74, 75, 77, 80)

13.1. (Англия, 67). Длины a и b двух сторон треугольника удовлетворяют условию $a > b$, а длины соответствующих им высот равны h_a и h_b. Доказать неравенство

$$a + h_a \geqslant b + h_b.$$

Определить, когда достигается равенство.

13.2. (ЧССР, 76). Доказать, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого (также выпуклого), то периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего.

13.3. (СФРЮ, 75). Доказать, что если последовательно соединить середины сторон выпуклого n-угольника (где $n \geqslant 4$), то площадь полученного многоугольника будет не меньше половины площади исходного.

13.4. (Австрия—ПНР, 78). В правильный шестиугольник вписан параллелограмм, центр симметрии которого совпадает с центром шестиугольника. Доказать что площадь параллелограмма не превосходит 2/3 площади шестиугольника.

13.5. (СФРЮ, 77). Доказать, что площадь любого квадрата, лежащего в треугольнике, не превосходит половины площади этого треугольника.

13.6. (Пекин, 64). В треугольник ABC, в котором угол при вершине A не является острым, вписывается квадрат B_1C_1DE (сторона DE которого лежит на отрезке BC, а вершины B_1 и C_1 — на отрезках AB и AC соответственно). Затем в треугольник AB_1C_1 аналогичным образом вписывается квадрат $B_2C_2D_1E_1$ и т. д. Это построение проводится несколько раз. Доказать, что сумма площадей всех вписанных квадратов меньше половины площади треугольника ABC.

13.7. (ЧССР, 75). Доказать, что любой остроугольный треугольник площади 1 можно поместить в прямоугольный треугольник площади не больше $\sqrt{3}$.

13.8. (Жюри, 81). Доказать, что если на полуокружности радиуса 1 последовательно расположены точки A, B, C, D, E, то справедливо неравенство

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE < 4.$$

13.9. (ЧССР, 83). Доказать, что для любой точки O, лежащей на стороне AB треугольника ABC и не совпадающей с его вершинами, справедливо неравенство

$$OC \cdot AB < OA \cdot BC + OB \cdot AC.$$

13.10. (ГДР, 62). Доказать, что для любого выпуклого четырехугольника отношение наибольшего из расстояний между его вершинами к наименьшему из них не меньше $\sqrt{2}$.

13.11. (Австрия, 75). Доказать, что если на плоскости расположены 6 различных точек, то отношение наибольшего из расстояний между этими точками к наименьшему из них не меньше $\sqrt{3}$.

13.12. (Нью-Йорк, 77—79). Доказать, что если a, b, c — длины сторон треугольника, P — его периметр, а S — его площадь, то справедливы неравенства:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{P}$.

2) $a^2+b^2+c^2 \geqslant P^2/3$.

3) $P^2 \geqslant 12\sqrt{3}S$.

4) $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.

5) $a^3+b^3+c^3 \geqslant P^3/9$.

6) $a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3}SP$.

7) $a^4+b^4+c^4 \geqslant 16S^2$.

13.13. (СФРЮ, 75). Доказать, что для любой точки O, лежащей внутри треугольника ABC с полупериметром p, справедливо неравенство

$$OA \cdot \cos\frac{\angle BAC}{2} + OB \cdot \cos\frac{\angle ABC}{2} + OC \cdot \cos\frac{\angle ACB}{2} \geqslant p.$$

Определить, когда достигается равенство.

13.14. (ГДР, 65). Доказать, что для углов α, β, γ любого треугольника справедливо неравенство

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant {}^3/_2.$$

Определить, когда достигается равенство.

13.15. (Англия, 67). Доказать, что для углов α, β, γ любого треугольника справедливо неравенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant {}^3/_4.$$

Определить, когда достигается равенство. Доказать, что величина $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ не принимает наибольшего значения.

13.16. (СФРЮ, 76). Доказать, что для углов α, β, γ любого нетупоугольного треугольника справедливо неравенство

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

13.17. (Жюри, СРВ, 77). Доказать, что для любого треугольника с длинами сторон a, b, c и площадью S справедливо неравенство

$$\frac{ab+ac+bc}{4S}\geqslant\sqrt{3}.$$

13.18. (ЧССР, 74). Доказать, что если стороны вписанного шестиугольника $ABCDEF$ удовлетворяют равенствам

$$AB=BC,\ CD=DE,\ EF=FA,$$

то площадь треугольника ACE не превосходит площади треугольника BDF.

13.19. (Австралия, 82). Доказать, что если продолжения биссектрис углов A, B и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, то справедливо неравенство

$$AA_1+BB_1+CC_1>AB+BC+AC.$$

13.20. (ГДР, 81). Доказать, что если AD, BE и CF — биссектрисы треугольника ABC, то площадь треугольника DEF не превосходит четверти площади треугольника ABC.

13.21. (США, 82). Внутри правильного треугольника ABC взята точка A_1, а внутри треугольника A_1BC — точка A_2. Доказать, что

$$\frac{S_1}{P_1^2}>\frac{S_2}{P_2^2},$$

где S_1, S_2 и P_1, P_2 — площади и периметры треугольников A_1BC, A_2BC соответственно.

13.22. (Англия, 83). Доказать, что если 10 точек расположены в круге диаметра 5, то расстояние между некоторыми двумя из них меньше 2.

13.23. (Жюри, Польша, 82). Точки A_1, A_2, ..., A_n на окружности с центром O и радиусом 1 расположены так, что

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=0.$$

Доказать, что для любой точки B справедливо неравенство

$$BA_1+BA_2+\ldots+BA_n \geqslant n.$$

13.24*. (ВНР, 81). Доказать, что для любых точек A, B, C, D, E на плоскости справедливо неравенство

$$AB+CD+DE+EC \leqslant AC+AD+AE+BC+BD+BE.$$

§ 14. Геометрические задачи на экстремум

(см. Приложение Г: определения 35, 37; теоремы 1, 6, 64, 75)

14.1. (ЧССР, 80). Длина наибольшей стороны равнобедренной трапеции равна 13, а периметр — 28.

а) Найти стороны трапеции, если ее площадь равна 27.

б) Может ли площадь такой трапеции равняться 27,001?

14.2. (Жюри, Бельгия, 82). Из всех треугольников заданного периметра найти такой, у которого радиус вписанной окружности максимален.

14.3. (Жюри, США, 77). Через точку, находящуюся на расстоянии $k<1$ от центра окружности радиуса 1, проводится пара перпендикулярных хорд. Найти наибольшее и наименьшее значения суммы их длин.

14.4. (СФРЮ, 73). Доказать, что сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырехугольника равна его полупериметру тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

14.5. (Англия, 82). Доказать, что если для точки O, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$ площади S, справедливо равенство

$$2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2,$$

то четырехугольник $ABCD$ — квадрат, а точка O — его центр.

14.6. (Нью-Йорк, 80). Пусть A_iH_i $(i=1, 2, 3)$ — высоты треугольника $A_1A_2A_3$, площадь которого равна S. Доказать, что треугольник $A_1A_2A_3$ равносторонний тогда и только тогда, когда

$$S=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} A_iA_{i+1}\cdot A_iH_i \qquad (A_4=A_1).$$

14.7. (НРБ, 68). Найти соотношения между сторонами треугольника, удовлетворяющего равенству

$$\frac{a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma}{a\sin\beta+b\sin\gamma+c\sin\alpha}=\frac{P}{9R},$$

где a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — величины противолежащих углов, P — периметр, R — радиус описанной окружности.

14.8. (Нью-Йорк, 79). Доказать, что вершины наименьшего по площади правильного n-угольника ($n>3$), вписанного в данный правильный n-угольник, совпадают с серединами сторон последнего.

14.9. (СФРЮ, 74). Для произвольных $n\geqslant 3$ точек A_1, A_2, ..., A_n на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, через α обозначен наименьший из углов $\angle A_iA_jA_k$, образованных тройками A_i, A_j, A_k различных точек. При каждом значении n найти наибольшее значение α. Определить, при каких расположениях точек это значение достигается.

14.10. (НРБ, 83). Найти квадрат наименьших размеров, в котором можно расположить 5 кругов радиуса 1 каждый так, чтобы никакие два из них не имели общих внутренних точек.

14.11. (Жюри, ГДР, 82). Доказать, что если радиус окружности, вписанной в треугольник, вдвое меньше радиуса окружности, описанной около него, то этот треугольник является равносторонним.

14.12. (США, 79). На плоскости нарисован угол, внутри которого отмечена точка O. Провести через точку O такой отрезок BC с концами на сторонах угла, для которого величина

$$\frac{1}{BO}+\frac{1}{CO}$$

принимает наибольшее значение.

14.13*. Для каждой точки T заданного треугольника ABC через $m(T)$ и $M(T)$ обозначены наименьшая и соответственно наибольшая из длин отрезков TA, TB, TC.

а) (ЧССР, 74). Найти все точки T треугольника ABC, для которых величина $m(T)$ принимает наибольшее значение.

б) (СРР, 82). Доказать, что если $\angle BAC\geqslant 90°$, то для любой точки T треугольника ABC справедливы неравенства

$$m(T)\leqslant BC/2\leqslant M(T).$$

Глава 4

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 15. Тетраэдры

(см. Приложение Г: определения 10, 42; теоремы 6, 64, 84, 86—89, 91, 92)

15.1. (НРБ, 66). Доказать, что для любого тетраэдра можно построить треугольник, сторонами которого служат 3 ребра тетраэдра, выходящие из одной его вершины.

15.2. (ЧССР, 67). Доказать, что если ребра тетраэдра $ABCD$ удовлетворяют равенствам

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2,$$

то по крайней мере одна из его граней является остроугольным треугольником.

15.3. (Канада, 83). Верно ли, что если площади четырех граней одного тетраэдра равны площадям соответствующих граней другого, то объемы этих тетраэдров равны?

15.4. (ЧССР, 71). Доказать, что существует тетраэдр $ABCD$, все грани которого являются подобными прямоугольными треугольниками с острыми углами при вершинах A и B. Определить, какое из ребер этого тетраэдра наибольшее, а какое — наименьшее, и найти длину наименьшего ребра, если длина наибольшего равна 1.

15.5. (ГДР, 74). Определить, на сколько частей разбивают правильный тетраэдр шесть плоскостей, каждая из которых проходит через одно из ребер и середину противоположного ребра тетраэдра. Найти объем каждой из частей, если объем тетраэдра равен 1.

15.6. (ЧССР, 76). Тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ расположены так, что прямые AA', BB', CC' и DD' параллельны, грани ABC и $A'B'C'$ не имеют общих точек, а вершины D и D' лежат в плоскостях $A'B'C'$ и ABC соответственно. Доказать, что объемы этих тетраэдров одинаковы.

15.7. (НРБ, 68). Внутри тетраэдра $ABCD$ расположена точка O так, что прямые AO, BO, CO, DO пересекают грани BCD, ACD, ABD, ABC тетраэдра в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно, причем отношения

$$\frac{AO}{A_1O}, \frac{BO}{B_1O}, \frac{CO}{C_1O}, \frac{DO}{D_1O}$$

равны одному и тому же числу. Найти все значения, которые может принимать это число.

15.8. (НРБ, 66). На ребрах AB, AC, AD заданного тетраэдра $ABCD$ для каждого значения $n \in \mathbf{N}$ выбираются точки K_n, L_n, M_n соответственно так, что

$$AB = nAK_n, \quad AC = (n+1)\,AL_n, \quad AD = (n+2)\,AM_n.$$

Доказать, что все плоскости $K_nL_nM_n$ проходят через одну и ту же прямую.

15.9. (ПНР, 79). Доказать, что четыре прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда три произведения длин противоположных ребер равны между собой.

15.10. (НРБ, 76). Плоскость пересекает три ребра тетраэдра, выходящие из одной вершины. Доказать, что эта плоскость разбивает поверхность тетраэдра на части, пропорциональные объемам соответствующих частей тетраэдра, тогда и только тогда, когда она проходит через центр сферы, вписанной в тетраэдр.

15.11. (ЧССР, 68). Доказать, что если в тетраэдре имеются две пары противоположных взаимно перпендикулярных ребер, то середины всех его ребер лежат на одной сфере.

15.12. (Жюри, Греция, 79). Доказать, что если правильный тетраэдр с ребром a вписан в правильный тетраэдр с ребром b так, что на каждой грани последнего лежит ровно одна вершина вписанного тетраэдра, то $3a \geqslant b$.

15.13. (ГДР, 83). В тетраэдре $ABCD$ ребра AD, BD и CD взаимно перпендикулярны, а их длины равны a, b, c соответственно. Доказать, что для любой точки M, лежащей на одной из сторон треугольника ABC, сумма S расстояний от вершин A, B и C до прямой DM удовлетворяет неравенству

$$S \leqslant \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Определить, когда достигается равенство.

15.14. (СФРЮ, 73; Австрия — ПНР, 80). Доказать, что для любой точки, лежащей внутри тетраэдра, сумма углов, под которыми из этой точки видны его ребра, больше 540°.

15.15. (НРБ, 76). Доказать, что расстояния от некоторой точки пространства до каждой из четырех вершин правильного тетраэдра с ребром 2 являются одновременно целыми числами тогда и только тогда, когда эта точка совпадает с одной из вершин тетраэдра.

15.16. (ЧССР, 73). Доказать, что для высот h_i ($i=1$, 2, 3, 4) любого тетраэдра и радиусов r_i вневписанных сфер справедливо равенство

$$2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}.$$

15.17*. (ПНР, 78). Доказать, что для высот h_1, h_2, h_3, h_4 любого тетраэдра и расстояний d_1, d_2, d_3 между парами его противоположных ребер справедливо равенство

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}=\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}.$$

15.18*. (Жюри, НРБ, 81). Сфера касается ребер AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ в четырех точках, являющихся вершинами квадрата. Доказать, что если эта сфера, кроме того, касается ребра AC, то она касается и ребра BD.

15.19*. (НРБ, 81). Плоскости α, β, γ, δ касаются описанной около тетраэдра $ABCD$ сферы в точках A, B, C, D соответственно. Доказать, что если линия пересечения плоскостей α и β лежит в одной плоскости с прямой CD, то линия пересечения плоскостей γ и δ лежит в одной плоскости с прямой AB.

§ 16. Многогранники, сферы и другие множества

(см. Приложение Г: определения 11, 16;
теоремы 2, 10, 85, 87—89)

16.1. (ЧССР, 79). Рассматриваются кубы, центры которых совпадают с центром симметрии заданного прямоугольного параллелепипеда с ребрами $a<b<c$, а грани параллельны граням последнего. Найти ребро куба, имеющего наименьшую разность между объемами объединения и пересечения с этим параллелепипедом.

16.2. (ГДР, 83). Доказать, что внутри куба с ребром a можно разместить два правильных тетраэдра с ребром a, не имеющих общих точек.

16.3. (СФРЮ, 73). В пространстве расположены 5 точек так, что никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Доказать, что некоторая прямая, проходящая через 2 из них, пересекает плоскость, содержащую остальные 3 точки, внутри треугольника с вершинами в этих 3 точках.

16.4. (ВНР, 80). Пространство разбито на 5 непересекающихся непустых множеств. Доказать, что некоторая плоскость имеет общие точки по крайней мере с 4 множествами.

16.5. (Жюри, СССР, 83). Доказать, что при любом разбиении пространства на 3 множества хотя бы одно из множеств отличается тем, что в нем для каждого значения $a>0$ можно выбрать 2 точки, расстояние между которыми равно a.

16.6. (СРР, 80). Доказать, что для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ справедливо равенство

$$\sum (\varepsilon_1 \boldsymbol{a}_1 + \varepsilon_2 \boldsymbol{a}_2 + \varepsilon_3 \boldsymbol{a}_3)^2 = 8 \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{a}_k^2,$$

в котором сумма слева берется по всем 8 различным наборам чисел ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \in \{-1; 1\}$. Обобщить это утверждение на случай любого числа $n \in \mathbf{N}$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

16.7. (ЧССР, 62). Через концы A и B отрезка длины a проведены прямые, перпендикулярные друг другу и отрезку AB. На этих прямых берутся точки C и D соответственно так, чтобы точка пересечения отрезка CD с плоскостью, проходящей через середину O отрезка AB перпендикулярно ему, была удалена от точки O на расстояние r. Доказать, что длина отрезка CD определяется значениями a и r. Найти геометрическое место точек C.

16.8. (НРБ, 82). Сфера s радиуса r проходит через центр сферы S радиуса R. Доказать, что если хорда AB сферы S касается сферы s в точке C, то

$$AC^2 + BC^2 \leqslant 2R^2 + r^2.$$

16.9. (США, 82). Каждая из двух несовпадающих сфер радиусов r_1 и r_2 касается внутренним образом сферы S радиуса R и проходит через точки A, B, C, расположенные так, что перпендикуляр к плоскости ABC, проходящий через точку A, проходит и через центр сферы S. Доказать, что $r_1 + r_2 = R$.

16.10. (СРР, 58). Через S и V обозначены площадь поверхности и объем правильной n-угольной пирамиды.

а) Для заданных значений n и S найти наибольшее значение V.

б) Найти стороны оснований и высоты всех пирамид, для которых $n=4$, $S=144$, $V=64$.

16.11. (НРБ, 82). Доказать, что при любом значении $n \in \mathbf{N}$, большем 1, среди всех правильных $2n$-угольных призм $A_1 \ldots A_{2n} A_1' \ldots A_{2n}'$ с фиксированным радиусом R окружности, описанной около основания, наибольший угол между диагональю $A_1 A_{n+1}'$ и плоскостью $A_1 A_3 A_{n+2}'$

имеет призма, для которой

$$A_1A_1' = 2R\cos(180°/2n).$$

16.12. (ВНР, 79). Доказать, что если в пирамиде с равными боковыми ребрами любые соседние боковые грани образуют равные двугранные углы, а основанием служит многоугольник с нечетным числом сторон, то этот многоугольник правильный.

16.13. (НРБ, 84). Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает прямые AD, SA и SC в точках P, Q, R соответственно так, что

$$\frac{AP}{AD} = \frac{SQ}{SA} = \frac{RC}{SC},$$

причем все три точки A, S и C либо одновременно принадлежат отрезкам PD, QA и SR соответственно, либо одновременно им не принадлежат. Точка N является серединой отрезка CD, а точка M на прямой SB расположена так, что прямая MN параллельна плоскости α. Доказать, что геометрическим местом точек M при всевозможных положениях плоскости α является некоторый отрезок длины $(\sqrt{5}/2)\,SB$.

16.14. (НРБ, 77). Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2, а площадь боковой поверхности равна S. Доказать, что если некоторая плоскость, параллельная основаниям, делит пирамиду на две усеченные пирамиды, в каждую из которых можно вписать сферу, то

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\,(\sqrt[4]{S_1} + \sqrt[4]{S_2})^2.$$

16.15. (Англия, 68). Найти наибольшее число точек, которые можно расположить на сфере радиуса 1 так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было: а) не меньше $\sqrt{2}$; б) больше $\sqrt{2}$.

16.16. (ЧССР, 70). Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, большие 1, и $r_n > 0$, для которых на сфере радиуса 1 можно расположить непересекающиеся окружности $C_0, C_1, \ldots, C_n$ радиуса r_n каждая так, чтобы при любом значении $i = 1, \ldots, n$ окружность C_i касалась окружностей C_0 и C_{i+1} $(C_{n+1} = C_1)$.

16.17. (США, 79). Три окружности, лежащие на сфере и имеющие общий с ней центр O, проходят через точку

A. На этих окружностях выбраны точки B, C, D соответственно так, что $\angle AOB = 90°$, а прямая OB является биссектрисой угла COD. Доказать, что если лучи AB', AC', AD' касаются дуг AB, AC, AD соответствующих окружностей, то луч AB' является биссектрисой угла $C'AD'$.

16.18. (Жюри, СССР, 82). На окружности одного основания прямого кругового цилиндра взяты диаметрально противоположные точки A и B, а на окружности другого основания — точка C, не лежащая на плоскости ABO, где O — середина оси цилиндра. Доказать, что сумма двугранных углов трехгранного угла с вершиной O и ребрами OA, OB, OC равна $360°$.

16.19. (США, 81). Сумма величин плоских углов выпуклого многогранного угла равна сумме величин его двугранных углов. Доказать, что этот угол является трехгранным.

16.20. (Жюри, Бельгия, 79). Можно ли разбить пространство на 1979 равных непересекающихся подмножеств?

16.21. (Англия, 70). Найти наименьшее число плоскостей, разбивающих куб не менее чем на 300 частей.

16.22*. (СРР, 78). На плоскостях α и α', пересекающихся по прямой l, выбрано по три точки: A, B, C и A', B', C' соответственно. Плоскость α' вращается вокруг прямой l. Доказать, что если прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке при некотором положении плоскости α', то и при любом ее положении, отличном от плоскости α, они также пересекаются в одной точке. Найти геометрическое место этих точек пересечения.

16.23*. (ЧССР, 73). Рассматриваются повороты вокруг различных осей в пространстве, переводящие вершину A куба $ABCDA'B'C'D'$ в вершину B. Найти геометрическое место точек поверхности этого куба, являющихся образами вершины C при таких поворотах.

16.24*. (ВНР, 82). Куб в пространстве с прямоугольной системой координат расположен так, что координаты некоторых 4 его вершин, не лежащих в одной плоскости, являются целыми числами. Доказать, что все вершины куба имеют целые координаты.

16.25*. (Жюри, СФРЮ, 79). Доказать, что если прямоугольный параллелепипед можно разбить на прямоугольные параллелепипеды, каждый из которых имеет ребро целочисленной длины, то и исходный параллелепипед тоже имеет такое ребро.

Глава 5

АНАЛИЗ

§ 17. Последовательности

(см. Приложение Г: определения 2, 12, 14, 15, 18, 19; теоремы 1, 2, 10, 16, 18, 21)

17.1. (СФРЮ, 76). Вычислить сумму $a_1+a_2+\ldots+a_{99}$, где обозначено

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}.$$

17.2. (ЧССР, 72). Доказать, что существуют числа A и B, удовлетворяющие при любом значении $n\in\mathbf{N}$ равенству

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=A\operatorname{tg} n+Bn,$$

где обозначено

$$a_k=\operatorname{tg} k\operatorname{tg}(k-1).$$

17.3. (Нью-Йорк, 74). Пусть

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n},\ n\in\mathbf{N}.$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

17.4. (Нью-Йорк, 74). В последовательности положительных чисел $a_0, a_1, \ldots$ каждый из членов a_n $(n\in\mathbf{N})$ равен либо $a_{n-1}/2$, либо $\sqrt{a_{n-1}}$. Может ли эта последовательность иметь предел, принадлежащий интервалу $(0;\ 1)$?

17.5. (США, 80; СФРЮ, 81). Для заданного натурального значения $n\geqslant3$ найти наибольшее возможное число возрастающих арифметических прогрессий, состоящих из трех членов, которые могут быть выбраны из какого-либо набора, содержащего ровно n различных чисел.

17.6. (СФРЮ, 81). Числа 1, 9, 8, 1 являются соответственно четырьмя первыми членами последовательности, в которой каждый из последующих членов равен последней цифре суммы четырех предшествующих ему членов. Могут ли в этой последовательности встретиться числа 1, 2, 3, 4 идущими подряд?

17.7. (Австрия—ПНР, 80). Последовательность натуральных чисел $a_1<a_2<a_3<\ldots$ удовлетворяет условиям $a_1=1$ и $a_{n+1}\leqslant2n$ при $n\in\mathbf{N}$. Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ существуют члены a_p и a_q этой последовательности, для которых справедливо равенство $a_p - a_q = n$.

17.8. (ПНР, 79). Даны числа $A > 1$ и $B > 1$ и последовательность $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) чисел из отрезка $[1;\ AB]$. Доказать, что существует такая последовательность $\{b_n\}$ чисел из отрезка $[1;\ A]$, что для любых $m,\ n \in \mathbf{N}$ выполнена оценка $a_m/a_n \leqslant B b_m/b_n$.

17.9. (Жюри, Франция, 82). Пусть все члены последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — натуральные числа. Доказать, что существует пара номеров $p < q$, для которых справедливы неравенства $a_p \leqslant a_q$ и $b_p \leqslant b_q$.

17.10. (Пекин, 64). Последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет неравенствам $a_n^2 \leqslant a_n - a_{n+1}$ при $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ имеет место оценка $a_n < 1/n$.

17.11. (ММС, Финляндия, 80). Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ задана следующим образом:

$$a_0 = 1/2, \quad a_k = a_{k-1} + (1/n)\, a_{k-1}^2 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Доказать, что $1 - 1/n < a_n < 1$.

17.12. (Австрия—ПНР, 80). Дана числовая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая неравенствам $|a_{k+m} - a_k - a_m| \leqslant 1$ при $k,\ m \in \mathbf{N}$. Доказать, что для любых $p, q \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q} \right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

17.13. (ПНР, 78). Для заданного числа $a_1 \in \mathbf{R}$ определим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ следующим образом:

$$a_{n+1} = \begin{cases} (1/2)(a_n - 1/a_n), & \text{если } a_n \neq 0, \\ 0, & \text{если } a_n = 0, \end{cases}$$

при $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что в этой последовательности имеется бесконечно много неположительных членов.

17.14. (Англия, 80). Найти все значения $a_0 \in \mathbf{R}$, для которых последовательность $a_0, a_1, \ldots$, определенная равенствами $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ при $n \in \mathbf{Z}^+$, возрастает.

17.15. (Австрия, 72; НРБ, 78). Доказать, что последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющая для некоторого числа a условиям

$$a_1,\ a_2 \in \mathbf{Z},\ (a_1^2 + a_2^2 + a)/(a_1 a_2) \in \mathbf{Z},\ a_{n+2} = (a_{n+1}^2 + a)/a_n$$

при $n \in \mathbf{N}$, состоит из целых чисел.

17.16. (ЧССР, 68). Доказать, что каждый член последовательности

$$a_n = ((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)/(2\sqrt{3}) \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

является целым числом. Найти все значения $n \in \mathbf{Z}$, при каждом из которых число a_n делится на 3.

17.17. (ЧССР, 78). Доказать, что каждый член последовательности

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

является натуральным числом и представляется в виде $5m^2$ или m^2 ($m \in \mathbf{N}$) при четном или нечетном n соответственно.

17.18*. (Жюри, Англия, 82). Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ удовлетворяет для некоторого параметра $a \in \mathbf{N}$ соотношениям

$$a_0 = 0, \; a_1 = 1, \; a_{n+1} = 2a_n + (a-1)\, a_{n-1}$$

при $n \in \mathbf{N}$. Для фиксированного простого числа $p_0 > 2$ найти наименьшее значение a, при котором верны два утверждения: а) если p — простое число и $p \leqslant p_0$, то число a_p делится на p; б) если p — простое число и $p > p_0$, то число a_p не делится на p.

17.19*. (Англия, 78). Доказать, что существует ровно одна последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющая условиям

$$a_1 = 1, \; a_2 > 1, \; a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2} \quad \text{при } n \in \mathbf{N}.$$

17.20*. (ЧССР, 70). Для заданного простого числа p найти количество различных последовательностей натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots$, удовлетворяющих равенствам

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1 \quad \text{при} \quad n \in \mathbf{N}.$$

17.21*. (Англия, 83). Доказать, что для последовательности чисел (Фибоначчи) $a_1, a_2, \ldots$, заданной соотношениями

$$a_1 = a_2 = 1, \; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{при} \quad n \in \mathbf{N},$$

существует единственная тройка чисел $a, b, c \in \mathbf{N}$, удовлетворяющая условиям: $b < a$, $c < a$ и для любого значения $n \in \mathbf{N}$ число $a_n - nbc^n$ делится на a.

§ 18. Экстремумы

(см. Приложение Г: определения 9, 15, 16; теоремы 10, 12, 14, 36)

18.1. (ГДР, 73). Найти все пары $(x;\ y)$ положительных чисел, на которых достигается наименьшее значение функции

$$f(x,\ y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x},$$

и найти это наименьшее значение.

18.2. (Жюри, Швеция, 79). Найти наибольшее значение произведения $x^2y^2z^2u$ при условии, что $x, y, z, u\geqslant 0$ и

$$2x+xy+z+yzu=1.$$

18.3. (ГДР, 78; ЧССР, 80). Для заданных чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$ определить, существуют ли точки $x\in\mathbf{R}$, в которых функция

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$$

принимает наименьшее значение. Если существуют, то найти все такие точки, а также наименьшее значение функции $f(x)$.

18.4. (Жюри, ГДР, 79). Для заданного числа $n\geqslant 2$ найти наибольшее и наименьшее значения произведения

$$x_1x_2\ \ldots\ x_n$$

при условии, что $x_i\geqslant 1/n$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $x_1^2+x_2^2+\ldots$ $\ldots+x_n^2=1$.

18.5. (Жюри, Швеция, 79). Для заданных чисел $n\geqslant 2$ и $a>0$ найти наибольшее значение суммы $\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ при условии, что $x_i\geqslant 0$ $(i=1, \ldots, n)$ и $x_1+\ldots+x_n=a$.

18.6. (СРР, 79). Даны положительные числа $a_1<a_2<\ldots$ $\ldots<a_n$. Для какой перестановки $(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n)$ этих чисел произведение

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+1/b_i)$$

максимально?

18.7. (ЧССР, 63). Для каждого значения $k\in\mathbf{N}$ представить число $2k$ в виде суммы двух взаимно простых чисел x и y так, чтобы произведение xy было наибольшим.

18.8. (ЧССР, 83). Для заданных чисел $n\in\mathbf{N}$ и $a\in[0;\ n]$ найти наибольшее значение выражения $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|$ при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = a.$$

18.9. (СФРЮ, 74). Для каждого числа $n \in \mathbf{N}$ найти наибольшее значение, которое принимает произведение натуральных чисел с фиксированной суммой n.

18.10*. (Англия, 81). Найти наименьшее значение величины $|12^m - 5^n|$ при $m, n \in \mathbf{N}$.

§ 19. Различные свойства функций

(см. Приложение Г: определения 2, 3, 6; теоремы 27, 28, 30, 33, 34)

19.1. (ГДР, 83). Даны два положительных числа x_1, x_2, а про функцию $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, заданную формулой

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (\text{где } a,\ b,\ c \in \mathbf{R},\ a \neq 0),$$

известно, что $f(0) = f(x_1) = 1$ и $f'(x_2) = 0$. Найти коэффициенты a, b, c.

19.2. (СРР, 81). Существует ли функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая для всех $x \in \mathbf{R}$ неравенству

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant 1/4$$

и не принимающая никакое значение более чем в одной точке?

19.3. (ВНР, 79; Жюри, США, 79). Доказать, что если функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет для всех $x, y \in \mathbf{R}$ неравенствам

$$f(x) \leqslant x, \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y),$$

то справедливо тождество

$$f(x) \equiv x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

19.4. (ГДР, 72). Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \\ 1/(2 + \operatorname{tg}^2 x) & \text{при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Доказать, что функция $g(x) = f(x) + f(ax)$ периодична тогда и только тогда, когда $a \in \mathbf{Q}$.

19.5. (Канада, 81). Пусть непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют тождеству

$$f(g(x)) \equiv g(f(x)), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что если уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет действительных решений, то их не имеет также и уравнение $f(f(x))=g(g(x))$.

19.6. (СРР, 81). Пусть $f\colon [0;\ +\infty)\to[0;\ +\infty)$ — непрерывная функция. Доказать, что

а) если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;

б) результат пункта а) не верен для функции $f\colon (0;\ +\infty)\to(0;\ +\infty)$.

19.7. (СРР, 79). Доказать, что не существует непрерывной функции $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, обладающей следующим свойством: число $f(x)$ рационально при тех и только тех значениях $x\in\mathbf{R}$, при которых число $f(x+1)$ иррационально.

19.8. (Нью-Йорк, 79). Существует ли не равная константе функция $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, удовлетворяющая для всех $x,\ y\in\mathbf{R}$ неравенству

$$(f(x)-f(y))^2\leqslant|x-y|^3?$$

19.9. (Нью-Йорк, 76). Пусть непрерывная функция

$$f\colon [0;\ 1]\to[0;\ 1]$$

дифференцируема на интервале $(0;\ 1)$, причем $f(0)=0$, $f(1)=1$. Доказать, что существуют такие числа $a,\ b\in(0;\ 1)$, что

$$a\neq b \text{ и } f'(a)f'(b)=1.$$

19.10*. (Австралия, 82). Найти все числа $d\in(0;\ 1]$, обладающие следующим свойством: если $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, определенная при $x\in[0;\ 1]$, причем $f(0)=f(1)$, то существует число $x_0\in[0;\ 1-d]$, для которого

$$f(x_0)=f(x_0+d).$$

19.11*. (СРР, 78). Пусть функция $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена следующим образом: $f(x)=0$, если x иррационально; $f(p/q)=1/q^3$, если $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$ и дробь p/q несократима. Доказать, что эта функция дифференцируема в каждой точке $x=\sqrt{k}$, где k — натуральное число, не являющееся квадратом целого числа.

19.12*. (Жюри, ПНР, 76). Пусть $I=(0;\ 1]$. Для заданного значения $a\in(0;\ 1)$ определим функцию $f\colon I\to I$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x+(1-a) & \text{для } 0<x\leqslant a,\\ x-a & \text{для } a<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Доказать, что для любого интервала $J \subset I$ существует такое число $n \in \mathbf{N}$, что пересечение $f^n(J) \cap J$ не пусто.

19.13*. (Жюри, Швейцария, 77). Для заданной возрастающей функции f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ определим функцию $g(x, y)$ формулой

$$g(x, y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{f(x)-f(x-y)}, \qquad x \in \mathbf{R},\ y > 0.$$

Пусть для всех $y > 0$ при $x = 0$ и для всех $y \in (0; |x|]$ при $x \neq 0$ выполнены неравенства

$$2^{-1} < g(x, y) < 2.$$

Доказать, что при всех $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$ справедливы оценки

$$14^{-1} < g(x, y) < 14.$$

§ 20. Функциональные уравнения

(см. Приложение Г: определения 5, 6, 18, 20; теоремы 1, 3, 7, 16, 27, 28)

20.1. (Нью-Йорк, 78). Функция f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет тождеству

$$f(xy) \equiv \frac{f(x)+f(y)}{x+y}, \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad x+y \neq 0.$$

Существует ли такое значение $x \in \mathbf{R}$, для которого $f(x) \neq 0$?

20.2. (НРБ, 68). Найти все функции f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$xf(y) + yf(x) \equiv (x+y)\, f(x)\, f(y), \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

20.3. (Жюри, ГДР, 82). Пусть M — множество функций f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $f(0) \neq 0$ и тождеству

$$f(n)\, f(m) \equiv f(n+m) + f(n-m), \qquad n, m \in \mathbf{Z}.$$

Найти: а) все функции $f(n) \in M$, для которых $f(1) = 5/2$; б) все функции $f(n) \in M$, для которых $f(1) = \sqrt{3}$.

20.4. (Австрия — ПНР, 79). Найти все функции f: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f(n+m) + f(n-m) \equiv f(3n), \qquad n, m \in \mathbf{Z}^+,\ n \geqslant m.$$

20.5. (Нью-Йорк, 76). Функции f, g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непостоянны и удовлетворяют двум тождествам

$$f(x+y) \equiv f(x)\, g(y) + g(x)\, f(y),$$
$$g(x+y) \equiv g(x)\, g(y) - f(x)\, f(y),$$

$x, y \in \mathbf{R}$. Найти все возможные значения $f(0)$ и $g(0)$.

20.6. (ММС, Люксембург, 80). Найти все функции $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, удовлетворяющие условию $f(1)=2$ и тождеству

$$f(xy) \equiv f(x) f(y) - f(x+y) + 1, \qquad x, y \in \mathbf{Q}.$$

20.7. (СФРЮ, 83). Функция $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям

$$f(n) = \begin{cases} n-10, & \text{если } n > 100, \\ f(f(n+11)), & \text{если } n \leqslant 100, \end{cases}$$

при $n \in \mathbf{Z}$. Доказать, что для любого значения $n \leqslant 100$ справедливо равенство $f(n) = 91$.

20.8. (СРР, 79). Функции f, g, h: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ удовлетворяют следующим трем условиям:

а) функция $h(n)$ не принимает никакое значение более чем в одной точке $n \in \mathbf{N}$;

б) множество значений функции $g(n)$ есть $\mathbf{N}$;

в) $f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказать, что справедливо тождество $f(n) \equiv 1$, $n \in \mathbf{N}$.

20.9. (СРР, 78). Доказать, что существует функция f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, удовлетворяющая тождеству

$$f(f(n)) \equiv n^2, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

20.10. (СРР, 78). Рассматриваются непостоянные функции $f(n, m)$, определенные на множестве всех пар целых чисел, принимающие целочисленные значения и удовлетворяющие тождеству

$$f(n, m) \equiv \frac{1}{4}(f(n-1, m) + f(n+1, m) + f(n, m-1) + \\ + f(n, m+1)),$$

$n, m \in \mathbf{Z}$. Доказать, что: а) такие функции существуют; б) для любого значения $k \in \mathbf{Z}$ каждая такая функция принимает значения как большие k, так и меньшие k.

20.11. (Австрия—ПНР, 78). Для заданного подмножества S множества пар целых чисел назовем функцию f: $S \to S$ универсальной, если она обратима и для любой пары $(n; m) \in S$ удовлетворяет условию

$$f(n, m) \in \{(n-1;\ m);\ (n+1;\ m);\ (n;\ m-1);\ (n;\ m+1)\}.$$

Доказать, что если существует хотя бы одна универсальная функция, то существует универсальная функция $f(n, m)$, удовлетворяющая тождеству

$$f(f(n, m)) \equiv (n;\ m), \qquad (n;\ m) \in S.$$

20.12*. (США, 82). Найти все пары ненулевых целых значений $m \leqslant n$, удовлетворяющих неравенству $m+n \neq 0$ и тождеству

$$f_m(x, y) f_n(x, y) \equiv f_{m+n}(x, y), \qquad x, y \in \mathbf{R}, \qquad xy(x+y) \neq 0,$$

где обозначено

$$f_k(x, y) = (x^k + y^k + (-1)^k (x+y)^k)/k.$$

Указание. Пары $m=2$, $n=3$ и $m=2$, $n=5$ требуемым условиям удовлетворяют.

20.13*. (Жюри, ПНР, 77). Доказать, что если функция $f(x, y)$, определенная на множестве всех пар рациональных чисел и принимающая только положительные значения, удовлетворяет трем тождествам

$$f(xy, z) \equiv f(x, z) f(y, z),$$
$$f(z, xy) \equiv f(z, x) f(z, y),$$
$$f(x, 1-x) \equiv 1, \qquad x, y, z \in \mathbf{Q},$$

то справедливы тождества

$$f(x, x) \equiv 1, \quad f(x, -x) \equiv 1, \quad f(x, y) f(y, x) \equiv 1, \quad x, y \in \mathbf{Q}.$$

20.14*. (Жюри, СФРЮ, 79). Доказать, что любая функция f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющая одному из тождеств

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R},$$
$$f(xy + x + y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R},$$

удовлетворяет и другому.

20.15. (Австрия, 75). Найти все непрерывные функции f: $(1; +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f(xy) \equiv xf(y) + yf(x), \quad x, y > 1.$$

20.16*. (СРР, 82). а) Доказать, что если непрерывная функция f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет тождеству

$$f(f(f(x))) \equiv x, \quad x \in \mathbf{R},$$

то при любом значении $x \in \mathbf{R}$ справедливо равенство $f(x) = x$.

б) Привести пример (разрывной) функции g: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющей условиям

$$g(x) \not\equiv x \quad \text{и} \quad g(g(g(x))) \equiv x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

20.17*. (Жюри, Франция, 79). Найти все монотонные обратимые функции f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

20.18*. (Нью-Йорк, 77). Найти все дифференцируемые функции $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \quad x,\ y \in \mathbf{R},\quad x \neq y.$$

20.19. (Бельгия, 77). Найти все бесконечно дифференцируемые функции $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f(x+y) \equiv f(x)+f(y)+2xy, \quad x,\ y \in \mathbf{R}.$$

20.20. (Англия, 69). Доказать, что если не равная тождественно 0 функция $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет тождеству

$$f(x)\,f(y) \equiv f(x+y), \quad x,\ y \in \mathbf{R},$$

и дифференцируема в точке $x=0$, то она бесконечно дифференцируема в любой точке $x \in \mathbf{R}$.

Глава 6

МНОГОЧЛЕНЫ

§ 21. Корни многочленов

(см. Приложение Г: определения 18, 20, 22—24, 26, 28—30, 32; теоремы 2, 6, 28, 35, 38, 40, 41, 45—51, 53, 55—57, 59—61, 63)

21.1. (НРБ, 80). Доказать, что для корней x_1, x_2 многочлена

$$x^2+px-\frac{1}{2p^2}, \quad \text{где } p \in \mathbf{R}, \quad p \neq 0,$$

выполнено неравенство $x_1^4+x_2^4 \geqslant 2+\sqrt{2}$.

21.2. (НРБ, 61). Найти все пары действительных чисел p, q, для которых многочлен x^4+px^2+q имеет 4 действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

21.3. (Англия, 67). Доказать, что если корнями многочлена x^2+px+1 являются числа α и β, а корнями многочлена x^2+qx+1 — числа γ и δ, то справедливо равенство

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

21.4. (ГДР, 70). Доказать, что для любых ненулевых значений α, β корни x_1, x_2, x_3 многочлена

$$\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$$

удовлетворяют равенству

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1.$$

21.5. (Австрия, 83). Найти все значения a, при которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена x^3-6x^2+ax+a удовлетворяют равенству

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0.$$

21.6. (Жюри, Канада, 82). Пусть один из корней многочлена

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c, \quad \text{где} \quad a,b,c\in\mathbf{Z},$$

равен произведению двух других. Доказать, что число $2P(-1)$ делится на число $P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$.

21.7. (США, 77). Пусть a и b — два из четырех корней многочлена x^4+x^3-1. Доказать, что ab — корень многочлена $x^6+x^4+x^3-x^2-1$.

21.8. (СФРЮ, 81). Про целые числа a, b, c известно, что $a>0$, а многочлен ax^2+bx+c имеет два различных корня на интервале $(0;\ 1)$. Доказать, что $a\geqslant5$. Найти хотя бы одну пару чисел b, c при $a=5$.

21.9. (ЧССР, 67). Числа a, b, c являются тремя из четырех корней многочлена x^4-ax^3-bx+c. Найти все такие тройки чисел a, b, c.

21.10. (ЧССР, 54). Доказать, что комплексные числа a и b удовлетворяют условию $a^2=2b\neq0$ тогда и только тогда, когда корни многочлена x^2+ax+b образуют на комплексной плоскости две вершины равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого вершина прямого угла расположена в начале координат.

21.11. (ВНР, 83). Многочлен

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+1$$

с неотрицательными коэффициентами $a_1, \ldots, a_{n-1}$ имеет n действительных корней. Доказать, что

$$P(2)\geqslant3^n.$$

21.12. (НРБ, 84). Многочлен

$$ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$$

имеет ровно n положительных корней. Доказать, что все эти корни равны между собой.

21.13. (НРБ, 83). Могут ли многочлены

$$x^5-x-1 \quad \text{и} \quad x^2+ax+b, \quad \text{где} \quad a,\ b\in\mathbf{Q},$$

иметь общие комплексные корни?

21.14. (Сингапур, 78). Для некоторого многочлена $P(x)$ степени n и некоторых чисел $a<b$ выполнены неравенства

$$P(a)<0,\quad -P'(a)\leqslant 0,\ P''(a)\leqslant 0,\ \ldots,\ (-1)^n P^{(n)}(a)\leqslant 0,$$
$$P(b)>0,\quad P'(b)\geqslant 0,\ P''(b)\geqslant 0,\ \ldots,\ P^{(n)}(b)\geqslant 0.$$

Доказать, что все действительные корни многочлена $P(x)$ принадлежат интервалу $(a;\ b)$.

21.15. (ГДР, 70). Доказать, что для любого значения $n\in\mathbf{Z}^+$ многочлен

$$f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

не может иметь более одного действительного корня.

21.16*. (ГДР, 69; ГДР, 71). Доказать, что если многочлен $P(x)$ степени n с действительными коэффициентами не имеет действительных корней, то многочлен

$$Q(x)=P(x)+\alpha P'(x)+\ldots+\alpha^n P^{(n)}(x)$$

при любом значении $\alpha\in\mathbf{R}$ тоже не имеет действительных корней.

21.17*. (ПНР, 79). Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ степени $n>1$, имеющего n различных действительных корней $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, справедливо равенство

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{P'(x_n)}=0.$$

21.18*. (Нью-Йорк, 75). Пусть $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, все корни которого являются чисто мнимыми числами. Доказать, что все корни многочлена $P'(x)$, кроме одного, являются также чисто мнимыми.

21.19*. (СРР, 78). Доказать, что ненулевые многочлены P и Q с комплексными коэффициентами имеют одинаковые корни (одинаковой кратности) тогда и только тогда, когда функция $f(z)=|P(z)|-|Q(z)|$ имеет постоянный знак во всех точках $z\in\mathbf{C}$, в которых она отлична от нуля.

§ 22. Делимость и равенство многочленов

(см. Приложение Г: определения 11, 22—33; теоремы 2, 4, 24, 35—47, 49—55, 57, 58, 63)

22.1. (Нью-Йорк, 73; Бельгия, 81). Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{Z}^+$ многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ делится на многочлен x^2+x+1.

22.2. (СРР, 62). Доказать, что при любых значениях $n \in \mathbf{N}$ и $\alpha \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям $n \neq 1$ и $\sin\alpha \neq 0$, многочлен

$$P(x)=x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

делится на многочлен

$$Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1.$$

22.3. (СРР, 66). Найти все многочлены $R(x)$ степени меньше 4, для каждого из которых существует многочлен $P(x)$, удовлетворяющий тождеству

$$7\sin^{31} t+8\sin^{13} t-5\sin^5 t\cos^4 t-10\sin^7 t+5\sin^5 t-2 \equiv$$
$$\equiv P(\sin t)(\sin^4 t-(1+\sin t)(\cos^2 t-2))+R(\sin t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

22.4. (США, 77). Найти все пары чисел $m, n \in \mathbf{N}$, для которых многочлен $1+x^n+x^{2n}+\ldots+x^{mn}$ делится на многочлен $1+x+x^2+\ldots+x^m$.

22.5. (США, 76). Пусть многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ удовлетворяют тождеству

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5) \equiv (x^4+x^3+x^2+x+1)\,S(x).$$

Доказать, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $x-1$.

22.6. (Нью-Йорк, 75). Найти все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие условию $P(0)=0$ и тождеству

$$P(x) \equiv \frac{1}{2}(P(x+1)+P(x-1)), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

22.7. (ГДР, 77). Найти все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$xP(x-1) \equiv (x-2)P(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

22.8. (Нью-Йорк, 76). Найти все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x) \equiv 0, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

22.9. (СРР, 80). Найти все ненулевые многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$P(x^2) \equiv (P(x))^2, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

22.10. (НРБ, 76). Найти все ненулевые многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$P(x^2-2x) \equiv (P(x-2))^2, \qquad x \in \mathbf{R}$$

22.11. (Жюри, НРБ, 79). Найти все ненулевые многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству

$$P(x)\,P(2x^2) \equiv P(2x^3+x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

22.12. (СРР, 78). Доказать, что для любого многочлена $P(x) \not\equiv x$ и любого числа $n \in \mathbf{N}$ многочлен

$$Q_n(x) = \underbrace{P(P(\ldots P}_{n}(x)\ldots)) - x$$

делится на многочлен $Q_1(x) = P(x) - x$.

22.13. (СРР, 78). Доказать, что если многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ третьей степени с действительными коэффициентами удовлетворяют неравенствам $P(x) \leqslant Q(x) \leqslant \leqslant R(x)$ при всех значениях $x \in \mathbf{R}$ и хотя бы в одной точке $x_0 \in \mathbf{R}$ выполнено равенство $P(x_0) = R(x_0)$, то для некоторого числа $k \in [0;\ 1]$ справедливо тождество

$$Q(x) \equiv kP(x) + (1-k)\,R(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Можно ли утверждать то же самое для многочленов четвертой степени?

22.14. (Жюри, ВНР, 79). Дан многочлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Доказать, что для любого числа $n \in \mathbf{N}$ не может существовать более одного многочлена $Q(x)$ степени n, удовлетворяющего тождеству $Q(P(x)) \equiv P(Q(x))$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

22.15. (СРР, 79). Доказать, что многочлен $P(z)$ представляет собой четную функцию от $z \in \mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда существует многочлен $Q(z)$, удовлетворяющий тождеству

$$P(z) \equiv Q(z)\,Q(-z), \qquad z \in \mathbf{C}.$$

22.16. (Жюри, ВНР, 79). Доказать, что если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает при всех $x \in \mathbf{R}$ только неотрицательные значения, то он представим в виде

$$P(x)=Q_1^2(x)+\ldots+Q_n^2(x),$$

где $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ — некоторые многочлены с действительными коэффициентами.

22.17*. (ВНР, 76; Жюри, Швеция, 76). Пусть многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами удовлетворяет неравенству $P(x)>0$ при всех значениях $x>0$. Доказать, что существуют многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с неотрицательными коэффициентами, для которых справедливо тождество

$$P(x)\equiv Q(x)/R(x).$$

22.18*. (Жюри, ГДР, 83). Пусть $A(n)$ — множество многочленов вида

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

где $0\leqslant a_0=a_n\leqslant a_1=a_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant a_{[n/2]}=a_{[(n+1)/2]}$. Доказать, что если $P(x)\in A(n)$ и $Q(x)\in A(m)$, то многочлен $P(x)\,Q(x)$ принадлежит множеству $A(m+n)$.

22.19*. (Жюри, ВНР, 77). Для каких значений $n\in\mathbf{N}$ существуют ненулевые многочлены P и Q от n переменных с целыми коэффициентами, удовлетворяющие тождеству

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv Q(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2),$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbf{R}?$$

22.20*. (Жюри, 81). Пусть для многочленов $P(x)$, $Q(x)$ степени больше 0 обозначено

$$P_c=\{z\in\mathbf{C}\,|\,P(z)=c\},\quad Q_c=\{z\in\mathbf{C}\,|\,Q(z)=c\}.$$

Доказать, что если $P_0=Q_0$ и $P_1=Q_1$, то $P(x)\equiv Q(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

22.21*. (ПНР, 78). Доказать, что если многочлены $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ степени меньше $m\in\mathbf{N}$ удовлетворяют тождеству

$$x^{2m}P(x, y)+y^{2m}Q(x, y)\equiv(x+y)^{2m}R(x, y),\quad x, y\in\mathbf{R},$$

то

$$P(x, y)\equiv Q(x, y)\equiv R(x, y)\equiv 0.$$

§ 23. Различные свойства многочленов

(см. Приложение Г: определения 10, 18—20, 28—32; теоремы 2, 4, 17, 18, 27, 45—50, 52, 62)

23.1. (СРР, 62). При каких ограничениях на целые числа p и q:

а) многочлен $P(x)=x^2+px+q$ принимает при всех $x\in\mathbf{Z}$ четные (нечетные) значения;

б) многочлен $Q(x)=x^3+px+q$ принимает при всех $x\in\mathbf{Z}$ значения, делящиеся на 3?

23.2. (ГДР, 83). Доказать, что многочлен

$$P(x)=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{30}x^5-\frac{82}{63}x^3+\frac{32}{35}x$$

при всех $x\in\mathbf{Z}$ принимает целые значения.

23.3. (ЧССР, 62). Найти все значения $x\in\mathbf{Z}$, при которых многочлен $2x^2-x-36$ принимает значения, равные квадратам простых чисел.

23.4. (СРР, 75). Для заданных чисел $p,\ q\in\mathbf{R}$ найти все значения, которые многочлен $P(x)=x^2+px+q$ принимает при $x\in[-1;\ 1]$.

23.5. (Пекин, 63). Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 2 при четырех различных значениях $x\in\mathbf{Z}$. Доказать, что ни при каких $x\in\mathbf{Z}$ этот многочлен не принимает значений 1, 3, 5, 7 и 9.

23.6. (Англия, 80). Найти хотя бы одно множество M, состоящее из 7 последовательных натуральных чисел, для которого существует многочлен $P(x)$ пятой степени со следующими свойствами:

а) все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа;

б) для пяти чисел $k\in M$, включая наименьшее и наибольшее числа, выполнено равенство $P(k)=k$;

в) $P(k)=0$ для одного числа $k\in M$.

23.7. (ГДР, 74). а) Доказать, что не существует многочлена $P(x)$, для которого при любом $x\in\mathbf{R}$ выполнены неравенства: 1) $P'(x)>P''(x)$ и 2) $P(x)>P''(x)$.

б) Будет ли верно утверждение а), если неравенство 1) заменить неравенством 1') $P(x)>P'(x)$?

23.8. (СРР, 82). Пусть заданы многочлены $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ с действительными коэффициентами и числа $a_1, \ldots, a_n\in\mathbf{R}$. Доказать, что если функция

$$f(x)=P_0(x)+\sum_{k=1}^{n}a_k|P_k(x)|$$

не принимает никакое значение более чем в одной точке $x \in \mathbf{R}$, то множество всех ее значений есть $\mathbf{R}$.

23.9. (Жюри, СРР, 83). Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел (Фибоначчи), определяемая равенствами $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать, что если многочлен $P(x)$ степени 990 удовлетворяет условиям $P(k) = a_k$ при $k = 992, \ldots, 1982$, то $P(1983) = a_{1983} - 1$.

23.10. (Англия, 78). Доказать, что:

а) для любого $n \in \mathbf{N}$ существует многочлен $P_n(x)$ степени n с целыми коэффициентами, удовлетворяющий тождеству

$$2\cos nt = P_n(2\cos t), \qquad t \in \mathbf{R};$$

б) для любого $\alpha \in \mathbf{Q}$ число $\cos \alpha\pi$ либо совпадает с одним из чисел 0, $\pm 1/2$, ± 1, либо иррационально.

23.11. (Финляндия, 80). Пусть на координатной плоскости задана кривая, являющаяся графиком некоторого многочлена

$$P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s \quad (p, q, r, s \in \mathbf{R}).$$

Прямую на этой плоскости назовем горизонтальной, если она параллельна оси абсцисс и пересекает кривую в четырех точках A, B, C, D (перечисленных по порядку слева направо). Если, кроме того, длины отрезков AB, AC и AD могут являться длинами сторон некоторого треугольника, то такую прямую назовем триангулярной. Доказать, что возможны только два случая: либо все горизонтальные прямые триангулярны, либо все они не являются триангулярными.

23.12. (НРБ, 77). Пусть $Q(x)$ — ненулевой многочлен. Доказать, что для каждого $n \in \mathbf{Z}^+$ многочлен $P(x) = (x-1)^n Q(x)$ имеет не менее $n+1$ ненулевых коэффициентов.

23.13*. (ЧССР, 74). Пусть M — множество всех многочленов вида

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a, b, c, d \in \mathbf{R}),$$

удовлетворяющих неравенству $|P(x)| \leqslant 1$ при $x \in [-1; 1]$. Доказать, что некоторое число k осуществляет оценку $|a| \leqslant k$ для всех многочленов $P(x) \in M$. Найти наименьшее значение k.

23.14*. (Жюри, Финляндия, 83). Пусть p и q — произвольные натуральные числа. Доказать, что существует такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что для всех значений из некоторого интервала $I \subset \mathbf{R}$ длины $1/q$ выполнено неравенство $|P(x) - p/q| < 1/q^2$.

23.15. (ГДР, 80). Найти все пары многочленов $P(x)$, $Q(x)$ третьей степени с действительными коэффициентами, удовлетворяющие четырем условиям:

а) оба многочлена в каждой из точек $x = 1, 2, 3, 4$ принимают значение 0 или 1;

б) если $P(1) = 0$ или $P(2) = 1$, то $Q(1) = Q(3) = 1$;

в) если $P(2) = 0$ или $P(4) = 0$, то $Q(2) = Q(4) = 0$;

г) если $P(3) = 1$ или $P(4) = 1$, то $Q(1) = 0$.

23.16. (США, 75). Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет равенствам $P(k) = k/(k+1)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Найти $P(n+1)$.

23.17. (Жюри, 81). Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет равенствам $P(k) = 1/C_{n+1}^k$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Найти $P(n+1)$.

23.18*. (Жюри, СРВ, 77). Пусть заданы целые числа $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Доказать, что среди значений многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ найдется такое число, которое по модулю не меньше чем $n!/2^n$.

23.19*. (Жюри, ВНР, 79). Многочлен $P(x)$ имеет степень, не большую $2n$. Известно, что для каждого целого $k \in [-n; n]$ выполнено неравенство $|P(k)| \leqslant 1$. Доказать, что для любого числа $x \in [-n; n]$ справедлива оценка $|P(x)| \leqslant 2^{2n}$.

Глава 7

КОМБИНАТОРИКА

§ 24. Множества и подмножества

(см. Приложение Г: определения 1—4, 11; теоремы 1, 97)

24.1. (ЧССР, 73). Сколько различных пар непересекающихся подмножеств имеет множество, состоящее из n элементов?

24.2. (ПНР, 78). Множество X состоит из n элементов. Для двух подмножеств $A_1, A_2 \subset X$ сосчитано число элементов множества $A_1 \cap A_2$. Доказать, что сумма всех полученных чисел равна $n \cdot 4^{n-1}$.

24.3. (Нью-Йорк, 78). Про числа $n > 3$, $k = \left[\frac{1}{6} n(n+1)\right]$ и множество X_n, состоящее из $n(n+1)/2$ элементов, известно, что k элементов этого множества имеют синий цвет, k элементов — красный цвет, а все остальные элементы — белый цвет. Доказать, что множество X_n можно разбить на n попарно непересекающихся подмножеств $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы для любого значения $m=1, \ldots, n$ подмножество A_m имело ровно m элементов и причем одного цвета.

24.4. (СФРЮ, 72). Для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ найти наибольшее число $k \in \mathbb{N}$, обладающее следующим свойством: в множестве, состоящем из n элементов, можно выбрать k различных подмножеств, любые два из которых имеют непустое пересечение.

24.5. (Англия, 76). Пусть в конечном множестве X выбрано 50 подмножеств $A_1, \ldots, A_{50}$, каждое из которых содержит больше половины элементов множества X. Доказать, что можно найти подмножество $B \subset X$, содержащее не более 5 элементов и имеющее хотя бы один элемент, общий с каждым из множеств $A_1, \ldots, A_{50}$.

24.6. (Австрия — ПНР, 78). Дано 1978 множеств, каждое из которых имеет по 40 элементов. Известно, что любые два из этих множеств имеют ровно один общий элемент. Доказать, что существует элемент, принадлежащий всем 1978 множествам.

24.7. (Пекин, 63). Множество из 2^n элементов разбито на попарно непересекающиеся подмножества. Рассматривается операция, состоящая в переводе некоторых элементов из одного подмножества в другое, причем число переводимых элементов должно совпадать с числом элементов во втором множестве (которое должно содержать элементов не больше, чем первое). Доказать, что с помощью конечного числа таких операций можно получить подмножество, совпадающее с исходным множеством.

24.8. (Жюри, ЧССР, 79). Пусть M — подмножество множества всех пар натуральных чисел $i<k$, не превосходящих заданного натурального числа $n \geqslant 2$. При этом, если пара $i<k$ принадлежит множеству M, то никакая пара $k<m$ ему не принадлежит. Какое наибольшее число пар может быть в множестве M?

24.9*. (Жюри, Бельгия, 79). Множество X состоит из n элементов. Какое наибольшее число трехэлементных подмножеств можно выбрать в X так, чтобы любые два из них имели ровно один общий элемент?

24.10*. (США, 79). В множестве, состоящем из $n \geqslant 5$ элементов, выбрано $n+1$ различных трехэлементных подмножеств. Доказать, что найдутся два выбранных подмножества, имеющих ровно один общий элемент.

24.11*. (СРР, 78). Множество X разбито на попарно непересекающиеся подмножества $A_1, \ldots, A_n$, а также разбито на попарно непересекающиеся подмножества $B_1, \ldots, B_n$. Известно, что объединение $A_i \cup B_j$ любых непересекающихся подмножеств A_i, B_j $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ содержит не менее n элементов. Доказать, что число элементов множества X не меньше $n^2/2$. Может ли оно быть равным $n^2/2$?

§ 25. Задачи с использованием графов

(см. Приложение Г: определение 43; теоремы 1, 2)

25.1. (Англия, 72). На множестве S введено отношение $\to$, которое выполнено для пар элементов из множества S и обладает следующими свойствами: 1) для любых различных элементов $a, b \in S$ выполнено ровно одно из отношений $a \to b$ или $b \to a$; 2) для любых трех различных элементов $a, b, c \in S$ выполнеиие отношений $a \to b$ и $b \to c$ влечет за собой выполнение отношения $c \to a$. Каково наибольшее число элементов, которое может содержать множество S?

25.2. (США, 82). В обществе, состоящем из 1982 человек, среди любых четырех человек можно выбрать по крайней мере одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимально возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

25.3. (НРБ, 78). В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое, которые знают друг друга, и двое, незнакомых друг с другом. Доказать, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

25.4. (США, 78). Девять математиков встретились на международной конференции и обнаружили, что среди любых трех из них по меньшей мере двое говорят на одном языке. Кроме того, каждый математик может говорить не более чем на трех языках. Доказать, что хотя бы три из них говорят на одном и том же языке.

25.5. а) (Англия, 80). В комнате находится 10 человек, причем среди любых трех из них есть двое знакомых между собой. Доказать, что найдутся четыре человека, любые два из которых знакомы друг с другом.

б) (Жюри, ПНР, 77). Останется ли верным утверждение п.а), если в нем число 10 заменить на 9?

25.6. (НРБ, 81; США, 81). В некоторой стране любые два города связаны друг с другом непосредственно одним из следующих средств сообщения: автобусом, поездом или самолетом. Известно, что не существует города, обеспеченного всеми тремя видами транспорта, и в то же время не существует таких трех городов, любые два из которых связаны одним и тем же средством сообщения. Найти наибольшее возможное количество городов в этой стране.

25.7. (СФРЮ, 75). В некотором обществе любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Доказать, что в этом обществе все имеют одинаковое число знакомых.

25.8. (ВНР, 77). В каждой из трех школ учится по n человек. Любой ученик имеет в сумме $n+1$ знакомых учеников из двух других школ. Доказать, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы все трое выбранных учеников были знакомы друг с другом.

25.9*. (Австрия, 73). В пространстве даны $2n$ различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ $(n > 1)$. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Пусть M — множество из (n^2+1) отрезков, концами которых являются данные точки. Доказать, что существует хотя бы один треугольник с вершинами в некоторых точках A_r, A_s, A_t, все стороны которого принадлежат множеству M. Доказать, что если число элементов множества M не превосходит n^2, то такого треугольника может и не существовать.

25.10*. (СРР, 78). На вечере собралось несколько юношей и девушек. При этом оказалось, что если выбрать любую группу юношей, то число девушек, знакомых по крайней мере с одним из юношей этой группы, будет не меньше числа юношей в группе. Доказать, что все юноши одновременно смогут танцевать каждый в паре со знакомой девушкой.

25.11*. (Жюри, Австралия, 83). Некоторые из городов $P_1, \ldots, P_{1983}$ соединены попарно некоторыми авиалиниями, принадлежащими компаниям $A_1, \ldots, A_{10}$. Известно только, что из любого города можно перелететь в любой другой без пересадок и что каждая авиалиния действует в обоих направлениях. Доказать, что (как бы ни были города соединены авиалиниями) существует хотя бы одна компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе и с нечетным числом используемых авиалиний.

§ 26. Различные комбинаторные задачи

(см. Приложение Г: определения 16, 18, 35, 43, 44; теоремы 1, 2, 6, 10, 93—97)

26.1. (СФРЮ, 75). По кругу написаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. Над ними производится следующая операция: между одинаковыми цифрами пишется нуль, а между разными — единица, после чего первоначальные цифры стираются. Затем такая же операция производится над полученными цифрами и т. д. Доказать, что после нескольких таких операций невозможно получить 9 нулей.

26.2. (Жюри, НРБ, 79). На клетчатой бумаге отмечены произвольные n клеток. Доказать, что из них всегда можно выбрать не менее чем $n/4$ клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

26.3. (СФРЮ, 81). Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

26.4. (ЧССР, 77). На прямой отмечены n различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 4)$. Каждая из этих точек покрашена в один из четырех цветов, причем все четыре цвета присутствуют. Доказать, что существует отрезок прямой, содержащий ровно по одной точке двух цветов и по крайней мере по одной точке двух оставшихся цветов.

26.5. (СРР, 78). На плоскости дано множество M, состоящее из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждому отрезку с концами из M поставлено в соответствие либо число $+1$, либо число -1, причем число отрезков, которым соответствует число -1, равно m. Треугольник с вершинами из M назовем отрицательным, если произведение трех чисел, соответствующих его сторонам, равно -1. Доказать, что число отрицательных треугольников имеет ту же четность, что и произведение nm.

26.6. (Пекин, 64). На кольцевой дороге расположены n заправочных станций, содержащие вместе такое количество бензина, которого хватает для поездки одного автомобиля по всему кругу ровно один раз. Доказать, что автомобиль с пустым баком (неограниченной вместимости) может начать движение с одной из заправочных станций (предварительно заправившись на ней) и совершить полную поездку по кругу.

26.7. (СФРЮ, 74). На шахматной доске размером 8×8 стоят 8 белых фишек на первой горизонтали и 8 черных — на восьмой. Игроки по очереди (начинают белые) делают ходы, состоящие в перемещении одной из своих фишек по вертикали на одну или несколько клеток вперед или назад. Запрещается снимать фишки с доски, ставить фишку на клетку, занятую фишкой противника, или перепрыгивать через нее. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Доказать, что черные могут ходить так, чтобы наверняка выиграть.

26.8. (СФРЮ, 83). Прямоугольная полоса размером $1\times n$ $(n\geqslant 4)$ составлена из единичных полей, занумерованных числами 1, 2, ..., n. На полях с номерами $n-2$, $n-1$, n стоит по одной фишке. Двое играют в следующую игру: каждый игрок своим ходом может перенести любую фишку на любое свободное поле с меньшим номером. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Доказать, что начинающий может ходить так, чтобы наверняка выиграть.

26.9. (СФРЮ, 83). «Дельфин» — фигура, которая ходит на одно поле вверх, вправо или по диагонали налево

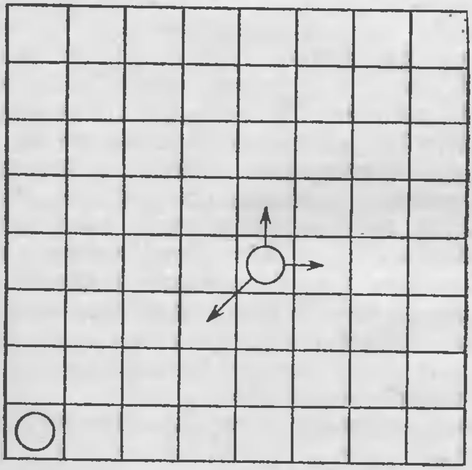


Рис. 1

вниз, как показано на рис. 1. Может ли «дельфин», начиная из левого нижнего угла доски размером 8×8, обойти всю эту доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу?

26.10. (Жюри, ПНР, 82). На бесконечной во все стороны клетчатой доске, на которой первоначально расставлены фишки, заполняющие в точности прямоугольник размером $3k \times n$, происходит игра по следующим правилам: любой фишкой можно перепрыгнуть через любую соседнюю (по вертикали или по горизонтали) фишку, за которой следует незанятая клетка, после чего фишка, через которую перепрыгнули, должна быть убрана с доски. Доказать, что на доске никогда не останется ровно одна фишка.

26.11. (СРР, 78). Дан выпуклый многогранник с $n \geqslant 5$ гранями, из каждой вершины которого выходит ровно по три ребра. Двое играют в следующую игру: каждый по очереди пишет свое имя на одной из свободных граней. Для победы игрок должен написать свое имя на трех гранях, имеющих общую вершину. Доказать, что существует выигрышная стратегия для первого игрока.

26.12. (Жюри, СРР, 77). Пусть $A = (a_1; \ldots; a_m)$ — набор из $m = 2^n$ $(n \in \mathbf{N})$ чисел $a_i \in \{1; -1\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Операция S определяется формулой

$$S(A) = (a_1a_2;\ a_2a_3;\ \ldots;\ a_ma_1).$$

Доказать, что для любого набора A в последовательности A, $S(A)$, $S(S(A))$, ... имеется набор из m единиц.

26.13. (Нью-Йорк, 76). Доказать, что квадратную доску размером $2n \times 2n$, где n не делится на 3, из которой удалена одна произвольная клетка, можно покрыть правильными тримино. (Правильное тримино — это квадрат размером 2×2, из которого удалена одна клетка.)

26.14. (США, 76). а) Пусть каждая клетка прямоугольной доски размером 4×7 окрашена в белый или черный цвет. Доказать, что на доске обязательно найдется прямоугольник, образованный горизонтальными и вертикальными линиями доски, все четыре угловые клетки которого окрашены в одинаковый цвет.

б) Привести пример раскраски прямоугольной доски размером 4×6, для которой указанного в п. а) прямоугольника не существует.

26.15. (Швеция, 82). На плоскости с прямоугольной системой координат рассматривается множество M точек (x, y), где $x, y \in \mathbf{N}$, причем $x \leqslant 12$, $y \leqslant 12$. Каждая из этих 144 точек окрашена либо в красный, либо в белый, либо в синий цвет. Доказать, что существует прямоугольник (со сторонами, параллельными осям), все вершины которого принадлежат множеству M и одинаково окрашены.

26.16. а) (Жюри, СРВ, 77). На координатной плоскости отмечены $n \geqslant 3$ точек с целочисленными координатами так, что любые три из них образуют треугольник, медианы которого не пересекаются в точке с целочисленными координатами. Найти наибольшее число n, при котором это возможно.

б) (Жюри, СРР, 77). В пространстве отмечены 37 различных точек с целочисленными координатами, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что из них можно выбрать такие 3 точки, что координаты точки пересечения медиан образованного ими треугольника являются целыми числами.

26.17*. (СФРЮ, 75). Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске размером $3n \times 3n$ так, чтобы каждая из них находилась под ударом не более одной из остальных?

26.18*. (ВНР, 81). Клетки шахматной доски размером $n \times n$, где n — четное число, большее 2, раскрашены $n^2/2$ красками так, что каждой краской окрашены ровно две клетки. Доказать, что на доске можно расставить n ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и не били друг друга.

26.19*. (ВНР, 79; Австралия, 82). На каждом поле таблицы размером $n \times n$ ($n \geqslant 2$) стоит некоторая буква. Известно, что все строки таблицы различны. Доказать, что в ней имеется столбец, после стирания которого останется таблица, также не имеющая совпадающих строк.

26.20*. (Жюри, Люксембург, 83). В пространстве с прямоугольной системой координат рассматривается множество E точек с целочисленными координатами, принимающими значения от 0 до 1982. Каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Сколько существует раскрасок, обладающих следующим свойством: число красных вершин у любого параллелепипеда (с вершинами из E и ребрами, параллельными осям) делится на 4?

§ 27. Элементы теории вероятностей

(см. Приложение Г: определения 18, 46—49; теоремы 95, 96, 98—100)

27.1. (Бельгия, 80). Каждая из двух урн содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих урнах равно 25. Из каждой урны наугад вынимают по одному шару. Зная, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54, найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

27.2. (Англия, 73). Учителю и учащимся некоторого класса задаются вопросы. Вероятность того, что ответ учителя будет правильным, равна α, а вероятность правильного ответа учащегося равна β или γ в зависимости от того, кто отвечал — мальчик или девочка соответственно. Вероятность того, что ответ случайно выбранного учащегося совпадет с ответом учителя, равна $1/2$. Найти отношение числа мальчиков к числу девочек в классе.

27.3. (США, 83). Из вершин правильного n-угольника ($n \geqslant 6$) наугад выбираются две тройки различных точек. Какова вероятность того, что два треугольника, вершинами которых являются выбранные тройки, не пересекаются?

27.4. (ГДР, 78). Вокруг правильного $2n$-угольника описана окружность. Тройка различных его вершин называется односторонней, если существует полуокружность, на которой лежат эти вершины (концы полуокружности принадлежат ей). Какова вероятность того, что случайно выбранная тройка вершин окажется односторонней?

27.5. (Жюри, Бразилия, 82; Австралия, 83). В урне находятся n белых и m черных шаров, рядом с урной — ящик с достаточно большим количеством черных шаров. Производится следующая операция: из урны наугад вынимается пара шаров; если они оказались одноцветными, то черный шар из ящика перекладывается в урну; если же они оказались разноцветными, то белый шар возвращается в урну. Операция повторяется до тех пор, пока в урне останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

27.6. (Австралия, 82). Игрок A бросает монету $n+1$ раз, а игрок B — n раз. Какова вероятность того, что в итоге у игрока A выпадет больше «орлов», чем у игрока B?

27.7. (Нью-Йорк, 76). Строка $(i_1; i_2; \ldots; i_n)$ составлена из $n > 3$ первых натуральных чисел, расположенных в случайном порядке. Какова вероятность того, что при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство $i_k \geqslant k - 3$?

27.8. (США, 75). Колода из n различных игральных карт, расположенных в случайном порядке, содержит три туза. Верхние карты колоды одна за другой снимаются, пока не будет снят второй туз. Доказать, что среднее число снятых карт равно $(n+1)/2$.

27.9. (Нью-Йорк, 81). Строка $(i_1; i_2; \ldots; i_n)$ составлена из n первых натуральных чисел, расположенных в случайном порядке. Найти среднее число инверсий (беспорядков) в этой строке, если инверсией называть каждую пару чисел $i_j > i_k$, для которой $j < k$.

27.10. (Бельгия, 81). Два игрока A и B наблюдают за мальчиком, который без остановки подбрасывает монету. Результаты подбрасываний записываются последовательно с помощью букв: на k-м месте последовательности ставится буква O или буква P в зависимости от того, что выпадает при k-м подбрасывании — «орел» или «решка» соответственно. Игрок A утверждает, что тройка OOO встретится в записи раньше, чем тройка OPO. Игрок B поспорил, что произойдет обратное. Кто из игроков имеет больше шансов выиграть в этом споре?

27.11. (Бельгия, 77). Три стрелка A, B, C решили одновременно драться на дуэли. Они расположились в вершинах равностороннего треугольника и условились о следующем: первый выстрел делает A, второй — B, третий — C и т. д. по кругу; если один из стрелков выбывает, то дуэль продолжается между двумя оставшимися. Известно, что стрелок A поражает цель с вероятностью 0,3, стрелок C — с вероятностью 0,5, а стрелок B вообще никогда не промахивается. Каждый стреляет в одного из двух других или в воздух с таким расчетом, чтобы с наибольшей вероятностью выиграть дуэль. Куда должен направить свой первый выстрел стрелок A: 1) в стрелка C; 2) в стрелка B; 3) в воздух?

27.12*. (Бельгия, 78). Точка движется по ребрам куба $ABCDA'B'C'D'$. Из любой вершины она может двигаться по одному из трех ребер (выходящих из этой вершины) наугад с одинаковой вероятностью, равной 1/3. Вершины B' и C' отличаются тем, что, попав в любую из них, точка уже никуда не движется. Если точка начинает движение из вершины A, то с какой вероятностью она: 1) остановится в вершине B'; 2) остановится в вершине C'; 3) никогда не попадет ни в вершину B', ни в вершину C'?

27.13*. (Бельгия, 82). На внутренней обертке каждой шоколадки серии «Великий Математик» изображен один из n выдающихся математиков, причем портрет каждого из них встречается с одинаковой вероятностью, равной $1/n$. Сколько в среднем надо купить шоколадок, чтобы собрать полную коллекцию портретов?

РЕШЕНИЯ

Глава 1
АРИФМЕТИКА

§ 1. Делимость. Простые и составные числа

1.1. Произведение чисел $c_i = a_i - b_i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$, является четным, так как хотя бы одно из них четно (если бы каждое из чисел c_i было нечетным, то нечетной была бы и их сумма, равная

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_7 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_7 - b_7) = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_7) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_7) = 0).$$

1.2. Обозначим $b_\varepsilon = a^2 + \varepsilon a + 1$, где $\varepsilon^2 = 1$. Тогда из равенств

$$(a^2+1)^3 = (b_\varepsilon - \varepsilon a)^3 \equiv -\varepsilon a^3 \pmod{b_\varepsilon},$$

$$-\varepsilon a^3 = -\varepsilon a b_\varepsilon + a^2 + \varepsilon a = b_\varepsilon(-\varepsilon a + 1) - 1 \equiv -1\ (\mathrm{mob}\ b_\varepsilon)$$

вытекает соотношение

$$(a^2+1)^3 \equiv -1 \pmod{b_\varepsilon}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (a^2+1)^{3k} \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \pmod{(a^2 \pm a + 1)},$$

т. е. ответ на вопрос задачи положителен.

1.3. Рассмотрим функцию, определенную на множестве целых чисел:

$$f(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } m \text{ нечетно,} \end{cases}$$

и построим таблицу чисел, заданных формулами $b_{n,k} = f(a_{n,k})$. Тогда при $n > 1$ имеем

$$b_{n,k} = f(a_{n,k}) = f(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} + a_{n-1,k+1}) = \\ = f(f(a_{n-1,k-1}) + f(a_{n-1,k}) + f(a_{n-1,k+1})) = \\ = f(b_{n-1,k-1} + b_{n-1,k} + b_{n-1,k+1});$$

при этом отсутствующее в таблице число заменяется нулем. Прямой подсчет показывает, что набор первых четырех чисел $b_{n,1-n}$,

$b_{n,2-n}$, $b_{n,3-n}$, $b_{n,4-n}$ n-й строки однозначно определяет набор первых четырех чисел $(n+1)$-й строки, причем в восьмой и четвертой строках эти наборы совпадают. Следовательно, эти наборы совпадают в девятой и пятой строках, в десятой и шестой строках и т. д. Поскольку в каждой строке, начиная с третьей, эти наборы содержат нули, то в этих же строках исходной таблицы содержатся четные числа, что и требовалось доказать.

1.4. Заметим, что число $p-1$ четное, и преобразуем дробь m/n к виду

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}=$$
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)=\frac{p}{1(p-1)}+\frac{p}{2(p-2)}+$$
$$+\frac{p}{3(p-3)}+\ldots+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\,\frac{p+1}{2}}=$$
$$=p\left(\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}+\ldots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\,\frac{p+1}{2}}\right).$$

Приводя полученное выражение к общему знаменателю

$$1(p-1)\cdot 2(p-2)\cdot 3(p-3)\ldots\frac{p-1}{2}\,\frac{p+1}{2}=(p-1)!,$$

получаем соотношение

$$\frac{m}{n}=p\,\frac{q}{(p-1)!}\qquad (q\in\mathbf{N}),$$

из которого вытекает равенство $m(p-1)!=pqn$. Поскольку ни одно из чисел 1, 2, 3, ..., $p-1$ не делится на простое число p, то последнее равенство возможно лишь в случае, если $m \vdots p$. Утверждение задачи доказано.

1.5. Пусть $n>2$, тогда по теореме 4 справедливы равенства

$$n^n-n^2+n-1=(n^{n-2}-1)\,n^2+(n-1)=$$
$$=(n-1)\,(n^{n-3}+\ldots+1)n^2+(n-1)\,n^0=(n-1)\,(n^{n-1}+\ldots+n^2+n^0).$$

Поскольку $n\equiv 1 \pmod{(n-1)}$, то для каждого значения $k=0,\ 2,\ \ldots$ ..., $n-1$ имеем

$$n^k\equiv 1 \pmod{(n-1)},$$

а значит,

$$n^{n-1}+\ldots+n^2+n^0\equiv 0 \pmod{(n-1)}$$

(количество слагаемых в левой части этого соотношения равно $n-1$). Поэтому число

$$(n-1)\,(n^{n-1}+\ldots+n^2+n^0)$$

делится на $(n-1)^2$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что при $n=2$ число $n^n-n^2+n-1=1$ также делится на $(n-1)^2=1$.

1.6. Пусть тройка чисел a, b, $c\in\mathbf{N}$ удовлетворяет условиям

$$(ab+1) \vdots c, \quad (ac+1) \vdots b, \quad \text{и} \quad (bc+1) \vdots a.$$

Заметим, что числа a, b, c попарно взаимно просты (если, например, $(a, b)>1$, то $(ac, b)=d>1$ и число $ac+1$ не делится на d, а тем более на b), следовательно, все они различны. Число $s=ab+ac+bc+1$ делится на каждое из чисел a, b, c, а в силу взаимной простоты этих чисел — делится и на их произведение, поэтому $s\geqslant abc$. Без ограничения общности можно считать, что $2\leqslant a<b<c$. Предположим, что $b\geqslant 4$, тогда $c\geqslant 5$, $abc\geqslant 2\cdot 4\cdot 5=40$ и

$$s=ab+ac+bc+1\leqslant\frac{abc}{5}+\frac{abc}{4}+\frac{abc}{2}+1=$$

$$=abc-\frac{abc}{20}+1\leqslant abc-\frac{40}{20}+1<abc.$$

Полученное противоречие означает, что $b<4$, поэтому $a=2$, $b=3$. Поскольку число $ab+1=7$ делится на c, то $c=7$, а значит, условию задачи удовлетворяет единственная тройка чисел 2, 3, 7.

1.7. Если $n=2k$ (здесь всюду $k\in\mathbf{Z}^+$), то

$$19\cdot 8^{2k}+17=18\cdot 8^{2k}+1\cdot(1+63)^k+(18-1)\equiv 0 \pmod 3.$$

Если $n=4k+1$, то

$$19\cdot 8^{4k+1}+17=13\cdot 8^{4k+1}+6\cdot 8\cdot 64^{2k}+17=$$
$$=13\cdot 8^{4k+1}+39\cdot 64^{2k}+9\cdot(1-65)^{2k}+(13+4)\equiv 0 \pmod{13}.$$

Если же $n=4k+3$, то

$$19\cdot 8^{4k+3}+17=15\cdot 8^{4k+3}+4\cdot 8^3\cdot 64^{2k}+17=$$
$$=15\cdot 8^{4k+3}+4\cdot 510\cdot 64^{2k}+4\cdot 2\cdot(1-65)^{2k}+(25-8)\equiv 0 \pmod 5.$$

Таким образом, число $19\cdot 8^n+17$ при любом значении $n\in\mathbf{Z}^+$ делится хотя бы на одно из чисел 3, 13 или 5.

1.8. Если $p=2$, то каждое из чисел $2^{(2k)}-(2k)$, где $k\in\mathbf{N}$, делится на p. Пусть $p>2$, тогда, учитывая малую теорему Ферма (теорема 25), получаем

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod p, \quad 2^{m(p-1)}\equiv 1 \pmod p, \qquad m\in\mathbf{N}.$$

Если же $m\equiv -1 \pmod p$, то имеем

$$2^{m(p-1)}-m(p-1)=2^{m(p-1)}+m-mp\equiv 0 \pmod p.$$

Таким образом, если $p>2$, то каждое из чисел

$$2^n-n, \text{ где } n=(kp-1)(p-1), \; k\in\mathbf{N},$$

делится на p.

1.9. Пусть $n=4k^4$, где $k=2, 3, \ldots$ Тогда для любого значения $m\in\mathbf{N}$ число

$$m^4+n=m^4+4k^4=(m^4+4m^2k^2+4k^4)-4m^2k^2=$$
$$=(m^2+2k^2)^2-(2mk)^2=(m^2+2mk+2k^2)(m^2-2mk+2k^2)=$$
$$=((m+k)^2+k^2)((m-k)^2+k^2)$$

является составным, поскольку каждый из сомножителей $(m\pm k)^2+k^2$ больше единицы (ибо $k>1$).

1.10. Пусть число n обладает требуемым в задаче свойством. Если оно не делится на 2, то $n\leqslant 2^2$ (иначе число $m=4$, взаимно простое с n и меньшее его, было бы простым). Поэтому $n=3$. Если n делится на два, но не делится на 3, то по аналогичным соображениям $n\leqslant 3^2$, т. е. $n\in\{4; 8\}$. Если n делится на 2 и 3, но не делится на 5, то $n\leqslant 5^2$ и $n \vdots 6$, т. е.

$$n\in\{6; 12; 18; 24\}.$$

Если же n делится на 2, 3 и 5, но не делится на 7, то $n\leqslant 7^2$ и $n \vdots 30$, т. е. $n=30$. Пусть для некоторого значения $k\geqslant 4$ число n делится на каждое из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, но не делится на p_{k+1}, где $2=p_1<p_2<\ldots<p_k<p_{k+1}$ — последовательные простые числа. Тогда

$$n\leqslant p_{k+1}^2 \text{ и } n \vdots p_1p_2\ldots p_k.$$

Из оценки

$$p_1p_2\ldots p_k\leqslant n\leqslant 10\,000\,000$$

получаем, что $k\leqslant 8$. Наконец, замечаем, что при каждом значении $k=4, 5, 6, 7, 8$ справедливо неравенство

$$p_1p_2\ldots p_k>p_{k+1}^2,$$

которое противоречит необходимому условию

$$p_1p_2\ldots p_k\leqslant n\leqslant p_{k+1}^2.$$

Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен. Таким образом, доказано, что все возможные значения n принадлежат множеству

$$\{3; 4; 6; 8; 12; 18; 24; 30\}.$$

Проверка показывает, что каждое число из этого множества обладает свойством, указанным в условии задачи.

1.11. Докажем, что искомое множество M состоит из всех чисел $m\in\mathbf{N}$, взаимно простых с числом a. Если некоторое число $m\in\mathbf{N}$ имеет общий делитель $d>1$ с числом a, то $m\notin M$. Действительно, для любого $n\in\mathbf{N}$ имеем

$$(a_n, a)=\left(\sum_{k=0}^{n} a^k,\ a\right)=\left(1+a\sum_{k=0}^{n-1} a^k,\ a\right)=(1, a)=1,$$

поэтому число a_n не делится на d, а значит, и на m. Пусть теперь $m > 1$ и $(m, a) = 1$. Среди чисел $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}$ найдутся два числа a_i и a_j $(i > j)$, которые имеют одинаковые остатки от деления на m, так как количество возможных различных остатков меньше количества чисел. Тогда разность этих чисел

$$a_i - a_j = \sum_{k=0}^{i} a^k - \sum_{k=0}^{j} a^k = \sum_{k=j+1}^{i} a^k = a^{j+1} \sum_{k=0}^{i-j-1} a^k$$

делится на m. Но число a^{j+1} взаимно просто с m, поэтому число

$$a_{i-j-1} = \sum_{k=0}^{i-j-1} a^k$$

делится на m (случай $i - j - 1 = 0$ невозможен, ибо $m \neq 1$). Поэтому $m \in M$. Наконец, замечаем также, что $1 \in M$.

1.12. Докажем, что ответ на вопрос задачи положительный. Пусть заданы n последовательных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда из неравенств $m < n \leqslant a_n - (a_1 - 1)$ следует, что среди них обязательно найдется число a_i, кратное n, и число a_j, кратное m. Если $i \neq j$, то произведение $a_i a_j$ делится на mn. Рассмотрим случай, когда $i = j$. Обозначим $d = (m, n)$, $q = [m, n]$, тогда

$$mn = dq, \ a_i \vdots d \text{ и } a_i \vdots q.$$

Докажем, что хотя бы одно из чисел $a_i + d$ или $a_i - d$, кратных d, принадлежит множеству $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. Если это не так, то $a_i + d > a_n$, $a_i - d < a_1$, откуда $i + d \geqslant n + 1$, $i - d < 1$ и $2d > n$, но $n \vdots d$, поэтому $d = n > m$, что противоречит условию $m \vdots d$. Итак, a_i и $a_i + d$ (или соответственно $a_i - d$) являются искомыми, так как произведение $a_i (a_i \pm d)$ делится на $dq = mn$.

1.13. Докажем сначала, что если $n = 2^m$, где $m \in \mathbf{Z}^+$, то $f(n) = 2n - 1$. Действительно, с одной стороны, сумма

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = (2^{m+1} - 1) \cdot 2^m$$

делится на $2^m = n$. С другой стороны, если $l \leqslant 2n - 2$, то сумма

$$\sum_{k=1}^{l} k = l(l+1)/2$$

не делится на 2^m, так как одно из чисел l, $l+1$ нечетно, а другое не превосходит числа $2n - 1 = 2^{m+1} - 1$ и, следовательно, не делится на 2^{m+1}. Пусть теперь число n не является степенью двойки, тогда $n = 2^m p$, где $m \in \mathbf{Z}^+$, а число $p > 1$ нечетно. Докажем, что существует натуральное число $l < 2n - 1$, удовлетворяющее условиям $l \vdots 2^{m+1}$ и $(l+1) \vdots p$ (тогда сумма

$$\sum_{k=1}^{l} k = l(l+1)/2$$

делится на $2^m p=n$, откуда $f(n) < 2n-1$). Поскольку числа 2^{m+1} и p взаимно просты, то, согласно китайской теореме об остатках (теорема 23) существует число l, удовлетворяющее условиям

$$l\equiv 0 \pmod{2^{m+1}},\quad l\equiv p-1 \pmod p,$$
$$0 < l\leqslant 2^{m+1}\cdot p=2n.$$

В действительности же это число удовлетворяет более сильному условию $l < 2n-1$. В самом деле, если

$$l=2n-1=2^{m+1}p-1,$$

то l не делится на 2^{m+1}, а если

$$l=2n=2^{m+1}p,$$

то $l+1$ не делится на $p > 1$. Поэтому $l < 2n-1$, что и требовалось доказать.

1.14. Пусть $n=3^k r$, где $k\in\mathbf{Z}^+$, а число $r\in\mathbf{N}$ не делится на 3. Докажем, что число

$$p=1+2^n+4^n$$

делится на число

$$q=1+2^{3^k}+4^{3^k}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1-й случай: $r=3s+1$, $s\in\mathbf{Z}^+$. Применяя теорему 11, имеем

$$p-q=(2^n-2^{3^k})+(4^n-4^{3^k})=$$
$$=2^{3^k}(2^{3^k\cdot 3s}-1)+4^{3^k}(2^{3^k\cdot 6s}-1)\equiv 0 \pmod{(2^{3^k\cdot 3}-1)}.$$

Так как

$$2^{3^k\cdot 3}-1=(2^{3^k}-1)(1+2^{3^k}+4^{3^k})=(2^{3^k}-1)\,q,$$

то число $p-q$ делится на q, откуда $p \,\vdots\, q$.

2-й случай: $r=3s+2$, $s\in\mathbf{Z}^+$. Применяя теорему 11, имеем

$$p-q=(4^n-2^{3^k})+(2^n-4^{3^k})=$$
$$=2^{3^k}(2^{3^k\cdot 3(2s+1)}-1)+2^{2\cdot 3^k}(2^{3^k\cdot 3s}-1)\equiv 0 \pmod{(2^{3^k\cdot 3}-1)},$$

откуда так же, как и в 1-м случае, получаем $p \,\vdots\, q$.

Итак, если число p простое, то оно совпадает со своим делителем $q > 1$, т. е. $n=3^k$, что и требовалось доказать.

1.15. Пусть $m=11^i p$, $n=11^j q$, где $i, j\in\mathbf{Z}^+$, а числа $p, q\in\mathbf{N}$ не делятся на 11. Докажем, что $p=q$ (откуда будет следовать, что $m=11^{i-j}n$). Предположим, что это не так, причем $p > q$ (случай $p < q$ рассматривается аналогично). Поскольку числа p и 11 взаимно просты, то в силу китайской теоремы об остатках (теорема 23) существует число $a > 0$, удовлетворяющее условиям

$$a\equiv 0 \pmod p,\quad a\equiv -1 \pmod{11}.$$

Тогда имеем

$$a=11k-1\quad (k\in\mathbf{N}),$$
$$(11k-1,\ m)=(a,\ 11^i p)=p,$$
$$(11k-1,\ n)=(a,\ 11^j q)\leqslant q < p,$$

что противоречит условию

$$(11k-1,\ m)=(11k-1,\ n).$$

Доказательство закончено.

1.16. *Докажем, что утверждение верно. Пусть каждый простой* делитель числа $ad-bc$ является делителем чисел a и c, однако, вопреки утверждению, для некоторого значения $n\in\mathbf{Z}$ числа $an+b$ и $cn+d$ делятся на простое число p. Тогда число

$$ad-bc=a(cn+d)-c(an+b),$$

а следовательно, и числа a и c, делятся на p. Поэтому числа

$$b=(an+b)-an \text{ и } d=(cn+d)-cn$$

также делятся на p, т. е.

$$(a,\ b,\ c,\ d)\geqslant p>1,$$

что противоречит условию задачи. Пусть теперь

$$(an+b,\ cn+d)=1$$

для каждого значения $n\in\mathbf{Z}$, однако, вопреки утверждению, для некоторого простого числа p выполнены соотношения

$$ad-bc\equiv 0 \pmod p),\ a\not\equiv 0 \pmod p)$$

(случай $c\not\equiv 0 \pmod p$ рассматривается аналогично). Тогда в силу китайской теоремы об остатках (теорема 23) существует число $n\in\mathbf{Z}$, удовлетворяющее условию

$$an\equiv -b \pmod p,$$

откуда получаем

$$an+b\equiv 0 \pmod p,$$
$$a(cn+d)=c(an+b)+(ad-bc)\equiv 0 \pmod p.$$

Поскольку $(a,\ p)=1$, то

$$cn+d\equiv 0 \pmod p \text{ и } (an+b,\ cn+d)\geqslant p>1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство утверждения.

1.17. Заметим, что числа $a_m=2^{2^m}+1$ при $m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ являются простыми, а число

$$2^{32}+1=(2^{32}-1)+2=$$
$$=(2^{16}+1)(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)+2=$$
$$=a_0a_1a_2a_3a_4+2\equiv 2 \pmod{a_m}$$

взаимно просто с каждым из нечетных чисел $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ и делится на простое число $641=a_5$, но не делится на его квадрат, т. е. число $a_6=(2^{32}+1)/641$ не делится на a_5. Таким образом, все числа $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$ попарно взаимно просты. Согласно китайской теореме об остатках (теорема 23) существует целое число

$$k>\max\{a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_6\},$$

удовлетворяющее соотношениям

$$k \equiv 1 \pmod{a_m} \text{ при } m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$
$$k \equiv -1 \pmod{a_6}.$$

Докажем, что любое число вида $k \cdot 2^n + 1$, где $n \in \mathbf{N}$, является составным. Пусть $n = 2^m p$, где $m \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, а число p нечетное. Тогда имеем соотношения

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n + 1 \pmod{a_m},$$
$$2^n + 1 = 2^{2^m \cdot p} + 1 = (a_m - 1)^p + 1 \equiv (-1)^p + 1 \pmod{a_m},$$
$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{a_m}.$$

Пусть $n = 2^5 p$, где число p нечетное, тогда

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n + 1 \pmod{a_5},$$
$$2^n + 1 = (2^{32})^p + 1 \equiv (-1)^p + 1 \pmod{a_5},$$
$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{a_5}.$$

Пусть, наконец, $n = 2^6 p$, где $p \in \mathbf{N}$, тогда

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^n + 1 \pmod{a_6},$$
$$2^n - 1 = 2^{64p} - 1 \equiv (-1)^{2p} - 1 \pmod{a_6},$$
$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{a_6}.$$

Поскольку число $k \cdot 2^n + 1 > k$ больше любого из простых чисел a_0, $a_1, \ldots, a_6$ и делится хотя бы на одно из них, то оно является составным.

1.18. Пусть задано натуральное число $a \geqslant 3$. Докажем индукцией по $k \in \mathbf{N}$, что последовательность $\{n_k\}$, заданная соотношениями

$$n_1 = 1,\quad n_{k+1} = a^{n_k} - 1,\quad k \in \mathbf{N},$$

удовлетворяет условию $a^{n_k} - 1 \vdots n_k$. При $k = 1$ имеем $a - 1 \vdots 1$. Пусть для некоторого значения $k \in \mathbf{N}$ уже доказано, что $a^{n_k} - 1 \vdots n_k$, т. е.

$$a^{n_k} - 1 = n_k q,$$

где $q \in \mathbf{N}$. Тогда в силу теоремы 11 число

$$a^{n_{k+1}} - 1 = a^{n_k q} - 1$$

делится на $n_{k+1} = a^{n_k} - 1$. Поскольку последовательность $\{n_k\}$ монотонно возрастает, то все полученные значения $n = n_k$ различны, а значит, утверждение задачи доказано.

Докажем, что аналогичное утверждение для $a = 2$ неверно, и более того, ни при каком натуральном значении $n > 1$ число $2^n - 1$ не делится на n. Предположим противное, т. е. $2^n - 1 \vdots n$ для некоторого $n > 1$. Тогда n нечетно (ибо $2^n - 1$ нечетно) и наименьший простой делитель p числа n также нечетен, поэтому, согласно малой теореме Ферма, удовлетворяет соотношению $2^{p-1} - 1 \vdots p$. Обозначим через $d \in \mathbf{N}$ наименьшее число, для которого $2^d - 1 \vdots p$, и докажем, что для любого $m \in \mathbf{N}$ из условия $2^m - 1 \vdots p$ вытекает условие $m \vdots d$.

Действительно, пусть $m=dq+r$, где $q, r\in Z^+$, $r<d$, тогда в силу теоремы 11 число

$$(2^m-1)-(2^r-1)=2^r(2^{dq}-1)\equiv 0 \pmod{(2^d-1)}$$

делится на p. Следовательно, если $2^m-1 \vdots p$, то $2^r-1 \vdots p$, откуда $r=0$ (в силу выбора числа d и неравенства $d>r$). Таким образом, из условий $2^n-1 \vdots p$ и $2^{p-1}-1 \vdots p$ имеем $n \vdots d$ и $p-1 \vdots d$. Но $(n, p-1)=1$, так как число n не имеет делителей, меньших p и отличных от 1. Поэтому $d=1$, откуда получаем, что число $2^1-1=1$ делится на $p>2$. Полученное противоречие означает, что на вопрос задачи следует дать отрицательный ответ.

1.19. Предположим, что, вопреки утверждению задачи, лишь конечное множество значений $n\in N$ удовлетворяет неравенствам $a_n>a_k$ при $k=1, 2, \ldots, n-1$, где обозначено $a_n=\sigma(n)/n$. Пусть N — наибольшее из таких значений n. Тогда последовательность чисел

$$A_n=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$$

ограничена сверху числом A_N, так как $A_1\leqslant A_2\leqslant \ldots \leqslant A_N$ и для каждого числа $n>N$ имеем

$$A_n=\max\{A_{n-1};\ a_n\}=A_{n-1}$$

(ибо для некоторого числа $k\in\{1;\ 2;\ \ldots;\ n-1\}$ выполняется неравенство $a_k\geqslant a_n$), откуда $A_N=A_{N+1}=A_{N+2}=\ldots$ Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ также ограничена сверху числом A_N, равным числу a_N, так как $a_i<a_N$ при $i=1, \ldots, N-1$. С другой стороны, среди делителей числа $2N$ есть все числа вида $2d$, где $n \vdots d$, и число 1, поэтому

$$\sigma(2N)\geqslant 2\sigma(N)+1,$$

$$a_{2N}\geqslant\frac{2\sigma(N)+1}{2N}=a_N+\frac{1}{2N}>a_N=A_N.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

1.20. Докажем, что неравенству $Q(n)>Q(n+1)$ удовлетворяет любое число

$$n=r\cdot k!-1, \text{ где } r\in N,\ r\geqslant 3.$$

Обозначим

$$m=[n+1, \ldots, n+k].$$

При $j=1, \ldots, k$ имеем $n\equiv -1 \pmod j$, откуда

$$(n, j)=1 \text{ и } (n, n+j)=1.$$

Следовательно,

$$(n, m)=1 \text{ и } Q(n)=[n, n+1, \ldots, n+k]=[n, m]=nm.$$

С другой стороны, число

$$n+k+1=r\cdot k!+k$$

делится на k. Число m делится на $n+1=r\cdot k!$, а значит, и на k. Поэтому число $m(n+k+1)/k$ делится как на m, так и на $n+k+1$. Значит,

$$Q(n+1)=[n+1, \ldots, n+k, n+k+1]=$$
$$=[m, n+k+1]\leqslant m(n+k+1)/k.$$

Отсюда, учитывая оценки $k\geqslant 2$; $r\geqslant 3$, получаем

$$Q(n+1)\leqslant\frac{m(n+k+1)}{2}=\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{3k-1}\right)<\frac{mn}{2}\cdot 2=mn=Q(n),$$

что и требовалось доказать.

1.21. Обозначим через $m(k)$ показатель двойки в разложении числа $k\in\mathbf{N}$ на простые множители, тогда $k=2^{m(k)}g(k)$ и

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{m(k)}}.$$

Заметим, что среди чисел 1, 2, ..., n содержится ровно $[n/2]$ четных чисел, $[n/2^2]$ чисел, кратных четырем, $[n/2^3]$ чисел, кратных восьми, и, вообще, $[n/2^m]$ чисел, делящихся на 2^m (здесь величина m пробегает значения 0, 1, 2, ..., а начиная с некоторого числа M, удовлетворяющего условию $2^M>n$, будут выполнены равенства $[n/2^M]=[n/2^{M+1}]=\ldots=0$). Поэтому количество чисел $k\in\{1; 2; \ldots; n\}$, для которых величина $m(k)$ принимает значение m, равно $[n/2^m]-[n/2^{m+1}]$; следовательно, имеем

$$S=\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{2^m}\left(\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{n}{2^{m+1}}\right]\right)=\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right]-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{1}{2^m}\right]=$$
$$=\left[\frac{n}{2^0}\right]+\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m-1}}\right)\left[\frac{n}{2^m}\right]=n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right],$$

так как $[n/2^{M+1}]=0$. Учитывая, что для любого значения $x\in\mathbf{R}$ имеет место неравенство $[x]\leqslant x$, получаем первую оценку

$$S\geqslant n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{n}{2^m}=n-n\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{4^m}=$$
$$=n-\frac{n}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4^M}\right)=\frac{2}{3}n+\frac{n}{3\cdot 4^M}>\frac{2}{3}n.$$

Для доказательства другой оценки заметим, что для любых значений $p, q\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\left[\frac{p}{q}\right]\geqslant\frac{p+1}{q}-1,$$

Действительно, пусть $[p/q]=r$; тогда

$$p=rq+s, \text{ где } s\in\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ q-1\},$$

откуда имеем

$$\left[\frac{p}{q}\right]=r=\left[\frac{p-s}{q}\right]\geqslant\frac{p-(q-1)}{q}=\frac{p+1}{q}-1.$$

Используя доказанное неравенство, получаем соотношения

$$S=n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\left[\frac{n}{2^m}\right]\leqslant n-\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}\left(\frac{n+1}{2^m}-1\right)=$$

$$=n-(n+1)\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{4^m}+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2^m}=n-\frac{n+1}{3}\left(1-\frac{1}{4^M}\right)+\left(1-\frac{1}{2^M}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}n+\frac{2}{3}+\frac{n+1}{3\cdot 4^M}-\frac{1}{2^M}.$$

Поскольку

$$2^M>n>(n+1)/3, \text{ то } (n+1)/(3\cdot 4^M)<1/2^M,$$

откуда получаем вторую из требуемых оценок

$$S<\frac{2}{3}n+\frac{2}{3}.$$

Утверждение доказано.

1.22. Пусть выбрано простое нечетное число p. Докажем, что любые два числа из возрастающей последовательности четных чисел $a_m=p^{2^m}+1$ $(m\in\mathbf{Z}^+)$ не имеют общих делителей, больших двойки. Действительно, если $m>l\geqslant 0$, то число

$$p^{2^m}-1=(p^{2^{m-1}}+1)(p^{2^{m-1}}-1)=\ldots$$
$$\ldots=(p^{2^{m-1}}+1)(p^{2^{m-2}}+1)\ldots(p^{2^l}+1)(p^{2^l}-1)$$

делится на $p^{2^l}+1$, поэтому

$$(a_m,\ a_l)=(2+(p^{2^m}-1),\ p^{2^l}+1)=(2,\ p^{2^l}+1)=2.$$

Рассмотрим множество тех членов последовательности, которые делятся хотя бы на одно простое число, большее p. Это множество не пусто, так как вследствие доказанного выше свойства последовательности $\{a_m\}$ лишь конечное множество ее членов может не иметь делителей, больших p. Пусть a_m — наименьшее число в этом множестве. Тогда имеем

$$h(a_m)>p,\ h(a_m-1)=h(p^{2^m})=p,$$

$$h(a_m-2)=h(p^{2^m}-1)=\max\{h(p^{2^{m-1}}+1),\ h(p^{2^{m-1}}-1)\}=\ldots$$
$$\ldots=\max\{h(p^{2^{m-1}}+1),\ h(p^{2^{m-2}}+1),\ \ldots,\ h(p+1),\ h(p-1)\}=$$
$$=\max\{h(a_{m-1}),\ h(a_{m-2}),\ \ldots,\ h(a_0),\ h(p-1)\}<p,$$

поскольку $h(p-1)<p$ и при каждом значении $l=0,\ 1,\ \ldots,\ m-2,$ $m-1$ согласно выбору числа m имеем $h(a_l)\leqslant p$, а кроме того,

$a_l \equiv 1 \pmod p$, откуда $h(a_l) < p$. Таким образом, для заданного нечетного простого числа p указано число вида $n = p^{2^m} - 1$, удовлетворяющее неравенствам

$$h(n) < h(n+1) < h(n+2).$$

Поскольку при разных числах p будут получаться разные значения n, то множество таких значений бесконечно.

1.23. Докажем прежде всего, что среди чисел вида $n = 2^k$, где $k \in \mathbf{N}$, имеется бесконечно много таких, которые удовлетворяют неравенству $w(n) < w(n+1)$. Предположим, что для некоторого значения $n = 2^k$ выполняется противоположное неравенство $w(n) \geqslant w(n+1)$. Тогда имеем

$$1 = w(2^k) \geqslant w(2^k+1) \geqslant 1,$$

откуда

$$w(2^k+1) = 1 \text{ и } 2^k + 1 = p^m, \text{ где } m \in \mathbf{N},$$

а p — простое число. Если $m = 2l$, то получаем

$$2^k = p^{2l} - 1 = (p^l - 1)(p^l + 1),$$

а значит, оба числа $p^l + 1$ и $p^l - 1$ являются степенями двойки, что возможно лишь в случае $p^l + 1 = 4$, $p^l - 1 = 2$, т. е. при $p = 3$, $l = 1$ и $k = 3$. Если же число m нечетно, то $m = 1$ (поскольку в случае $m > 1$ в силу разложения

$$2^k = p^m - 1 = (p-1)(p^{m-1} + \ldots + p + 1)$$

нечетное число

$$p^{m-1} + \ldots + p + 1 > 1$$

было бы одновременно и степенью двойки). Однако равенство $2^k + 1 = p$ возможно лишь в случае $k = 2^q$, где $q \in \mathbf{Z}^+$. Действительно, если $k = 2^q r$, где число $r > 1$ нечетно, то получаем, что простое число (см. теорему 11)

$$p = 2^k + 1 = 2^{2^q \cdot r} + 1 \equiv 0 \pmod{(2^{2^q} + 1)}$$

делится на число $2^{2^q} + 1 < p$. Итак, доказано, что для бесконечного множества значений $k \in \mathbf{N}$ (отличных от трех и степени двойки) справедливо неравенство

$$w(2^k) < w(2^k + 1).$$

Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда среди значений k, удовлетворяющих неравенству

$$w(2^k) < w(2^k + 1),$$

лишь конечное множество удовлетворяет также и неравенству

$$w(2^k + 1) < w(2^k + 2).$$

Поэтому найдется такое (достаточно большое) число $k_0 = 2^{q_0} > 5$, что для всех значений

$$k = k_0 + 1,\ k_0 + 2,\ \ldots,\ 2k_0 - 1 < 2^{q_0+1}$$

справедливы соотношения

$$w(2^k+1)\geqslant w(2^k+2)=w(2(2^{k-1}+1))=1+w(2^{k-1}+1),$$

из которых получаем неравенства

$$w(2^{2k_0-1}+1)\geqslant 1+w(2^{2k_0-2}+1)\geqslant\ldots\geqslant(k_0-1)+w(2^{k_0}+1)\geqslant k_0.$$

Следовательно, если обозначить через $p_1<p_2<p_3<\ldots$ последовательные простые числа, то будут выполнены оценки

$$2^{2k_0-1}+1\geqslant p_1p_2\ldots p_{k_0}=(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11)(p_6\ldots p_{k_0})>4^5\cdot4^{k_0-5}=$$
$$=2^{2k_0}>2^{2k_0-1}+1.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

§ 2. Уравнения в целых и рациональных числах

2.1. Перепишем уравнение в виде

$$2^x=(y-1)(y+1),$$

тогда для искомых значений $x, y\in\mathbf{N}$ имеем, что числа $y-1, y+1\in\mathbf{Z}^+$ являются делителями числа 2^x, т. е. $y-1=2^p$ и $y+1=2^q$, где $p, q\in\mathbf{Z}^+$, $p<q$. Поэтому

$$2^q-2^p=(y+1)-(y-1)=2,\ \text{т. е.}\ 2^p(2^{q-p}-1)=2.$$

Заметим, что $q-p\leqslant1$ (иначе нечетное число $2^{q-p}-1>1$ было бы делителем числа 2), поэтому $q=p+1$ и $2^p(2-1)=2$, т. е. $p=1$, $q=2$. Наконец, проверка показывает, что единственно возможное значение $y=3$ удовлетворяет уравнению только при $x=3$.

2.2. Поскольку $x, y, a, b, c, d\in\mathbf{Z}$, то уравнение

$$(x+ay+c)(x+by+d)=2$$

равносильно совокупности всех систем вида

$$\begin{cases}x+ay+c=p,\\ x+by+d=q,\end{cases}$$

где числа $p, q\in\mathbf{Z}$ удовлетворяют равенству $pq=2$. Каждая из таких систем не может иметь более одного решения, так как значения неизвестных определяются из системы однозначно (напомним, что по условию $a\neq b$):

$$\begin{cases}y=(p-q+d-c)/(a-b),\\ x=p-c-ay.\end{cases}$$

Заметим, что различных целочисленных пар $(p;\ q)$ имеется всего четыре: $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, причем разным парам чисел p, q соответствуют разные пары неизвестных x, y. Таким образом, исходное уравнение не может иметь более четырех решений, причем количество этих решений равно четырем в том и только в том случае, если каждое из чисел вида $(p-q+d-c)/(a-b)$ является целым, т. е. если $(\pm1+d-c)/(a-b)\in\mathbf{Z}$. Для этого необходимо, чтобы разность

$$\frac{1+d-c}{a-b}-\frac{-1+d-c}{a-b}=\frac{2}{a-b}$$

была целым числом, т. е. $2\vdots(a-b)$. Если $a-b=\pm1$, то $(\pm1+d-c)/(a-b)\in\mathbf{Z}$. Если же $a-b=\pm2$, то числа $(\pm1+d-c)/(a-b)$ являются целыми тогда и только тогда, когда число $d-c$ нечетно. Итак, уравнеие имеет ровно четыре решения в следующих случаях: либо $|a-b|=1$, либо $|a-b|=2$ и $c-d=2k+1$, где $k\in\mathbf{Z}$.

2.3. Пусть числа x, $y\in\mathbf{Z}$ удовлетворяют уравнению, тогда

$$y^2=(x(x+8))((x+1)(x+7))=(x^2+8x)(x^2+8x+7)=z^2+7z,$$

где обозначено $z=x^2+8x$. Если $z>9$, то

$$(z+3)^2=z^2+6z+9<z^2+7z=y^2<z^2+8z+16=(z+4)^2,$$

а значит, число y^2 заключено между квадратами двух последовательных натуральных чисел, что невозможно. Поэтому $x^2+8x=z\leqslant9$, откуда $-9\leqslant x\leqslant1$. Перебирая последовательно значения

$$x=-9,\ -8,\ \ldots,\ 1,$$

находим, что число $x(x+1)(x+7)(x+8)$ является квадратом целого числа только при x, равном -9, -8, -7, -4, -1, 0 и 1. Таким образом, получаем все решения исходиого уравнения: $(-9;\ 12)$, $(-9;\ -12)$, $(-8;\ 0)$; $(-7;\ 0)$, $(-4;\ 12)$, $(-4;\ -12)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 12)$, $(1;\ -12)$.

2.4. Пусть уравнению удовлетворяет некоторая пара чисел x, $y\in\mathbf{Z}$. Предположим, что $x>0$. Тогда имеем

$$(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1=y^4<x^6+4x^3+4=(x^3+2)^2,$$

откуда получаем, что число y^2 не может быть целым, так как

$$x^3+1<y^2<x^3+2.$$

Аналогичное противоречие получаем и при $x\leqslant-2$. Действительно, в этом случае $x^3+3<0$, а значит, имеем

$$(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4<x^6+3x^3+1=y^4<x^6+2x^3+1=(x^3+1)^2,$$

откуда получаем соотношения

$$-(x^3+2)=|x^3+2|<y^2<|x^3+1|=-(x^3+1),$$

не выполняющиеся ни при каком целом значеиии y. Далее, при $x=-1$ уравиение преобразуется в равенство $-1=y^4$, которое невозможно. Наконец, при $x=0$ имеем равенство $1=y^4$. Таким образом, получаем ответ: $x=0$, $y=\pm1$.

2.5. Пусть пара чисел x, $y\in\mathbf{Z}$ удовлетворяет уравнению, тогда

$$x^2+2xy+y^2=x^2y^2+xy,\ \text{т. е.}\ (x+y)^2=xy(xy+1).$$

Если $xy>0$, то

$$xy+1>\sqrt{xy(xy+1)}>xy.$$

В этом случае число

$$|x+y|=\sqrt{xy(xy+1)}$$

лежит между двумя последовательными целыми числами xy и $xy+1$, а значит, не может быть целым. Аналогично, если $xy<-1$, то

$$-xy-1<\sqrt{xy(xy+1)}<-xy,$$

а значит, число $|x+y|$ снова не может быть целым. Итак, имеем либо $xy=0$, либо $xy=-1$. В обоих случаях уравнение равносильно равенству $x+y=0$, поэтому либо $x=y=0$, либо $x=-y=\pm 1$ соответственно. Таким образом, получаем ответ: (0; 0), (1; —1), (—1; 1).

2.6. Пусть пара чисел $x, y \in Z$ удовлетворяет уравнению. Предположим, что $x \geqslant 0$, тогда

$$y^3=8x^3+24x^2+32x+16=8(x^3+3x^2+4x+2).$$

Поэтому $y=2z$ $(z \in Z)$ и

$$z^3=x^3+3x^2+4x+2.$$

Заметим, что

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1<z^3<x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3,$$

поэтому $x+1<z<x+2$, что невозможно. Предположим, что $x \leqslant -2$, тогда пара чисел $x_1=-x-2 \geqslant 0$, $y_1=-y$ также удовлетворяет исходному уравнению, так как

$$(x_1+2)^4-(x_1)^4=x^4-(x+2)^4=-y^3=(y_1)^3.$$

Но, как было доказано выше, неравенство $x_1 \geqslant 0$ приводит к противоречию. Таким образом, имеем оценки $-2<x<0$, из которых получаем единственное решение $x=-1$, $y=0$.

2.7. Заметим, что если число n четное, то $n=2k$ и

$$n^4=16k^4\equiv 0 \pmod{16};$$

если же n нечетно, то число

$$n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

делится на 16 (так как каждое из чисел $n-1$, $n+1$, n^2+1 является четным, а одно из чисел $n-1$ или $n+1$ делится на 4), т. е.

$$n^4\equiv 1 \pmod{16}.$$

Следовательно, остаток от деления на 16 левой части уравнения $x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4$ равен количеству нечетных чисел в наборе x_1, x_2, ..., x_{14}, т. е. не превосходит 14. С другой стороны, имеем

$$1599=1600-1\equiv 15 \pmod{16},$$

а значит, равенство левой и правой частей уравнения невозможно ни при каких целых значениях неизвестных.

2.8. Пусть хотя бы одно из возможных решений

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

исходного уравнения является рациональным числом. Тогда число $\sqrt{b^2-4ac}$ рационально, а значит (см. теорему 61), число b^2-4ac является квадратом некоторого числа $d\in\mathbf{Z}$. Поскольку числа a, b, c нечетны, то число d также нечетно, а кроме того,

$$ac\equiv 1 \pmod 2, \quad -4ac\equiv 4 \pmod 8$$

и

$$b^2\equiv 1 \pmod 8, \quad d^2\equiv 1 \pmod 8$$

(ибо $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$). Таким образом, имеем

$$b^2-4ac\equiv 5 \pmod 8,$$

а значит, равенство $d^2=b^2-4ac$ невозможно.

2.9. Пусть числа x, $y\in\mathbf{Q}$ удовлетворяют уравнению. Тогда справедливы равенства

$$2\sqrt{3}-3=x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-2\sqrt{3xy},$$
$$(x+y-2)\sqrt{3}=2\sqrt{3xy}-3.$$

Поскольку

$$(x+y-2)^2\cdot 3=9+12xy-12\sqrt{3xy},$$

то число $\sqrt{3xy}$ рационально, а значит, справедливы равенства

$$x+y-2=0,$$
$$2\sqrt{3xy}-3=0$$

(в противном случае число $\sqrt{3}=(2\sqrt{3xy}-3)/(x+y-2)$ было бы рациональным). Поэтому числа x, y удовлетворяют равенствам $x+y=2$, $xy=3/4$, т. е. являются корнями уравнения

$$t^2-2t+3/4=0.$$

Так как $x>y$, то исходное уравнение может иметь только одно решение $x=3/2$, $y=1/2$, которое, как показывает проверка, действительно удовлетворяет уравнению.

2.10. Заметим, что данное уравнение имеет решение: например, $x=y=z=3\cdot 1983$. Докажем теперь, что существует лишь конечное множество наборов чисел x, y, $z\in\mathbf{N}$, удовлетворяющих исходному уравнению и неравенствам $x\leqslant y\leqslant z$. Действительно, для любого такого набора выполнены соотношения

$$0<\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x}<\frac{1}{1983}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{3}{x},$$

из которых вытекают неравенства $1983<x\leqslant 3\cdot 1983$. Поэтому неизвестная величина x принимает не более $2\cdot 1983$ значений. Для каждого из значений x получаем

$$\frac{1}{1983}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant\frac{2}{y},$$

откуда

$$y \leqslant 2 \cdot \frac{1983x}{x-1983} \leqslant 2^2 \cdot 1983^2,$$

и неизвестная величина y принимает не более $2^2 \cdot 1983^2$ значений. Наконец, если значения x и y уже заданы, то неизвестная величина z определяется уравнением однозначно. Таким образом, существует не более $2^3 \cdot 1983^3$ решений, удовлетворяющих условию $x \leqslant y \leqslant z$. Поскольку к решениям такого вида с помощью *перестановок неизвестных приводятся все остальные решения исходного уравнения*, то общее число решений не превосходит $6 \cdot 2^3 \cdot 1983^3$.

2.11. Пусть числа $a, b \in \mathbf{Z}$ удовлетворяют неравенствам $5a \geqslant 7b \geqslant 0$. Положим $u = [b/5]$, тогда величина $v = b - 5u$ может принимать лишь значения из множества

$$\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}.$$

Используя равенства

$$7b = 7(5u + v) = 35u + 7v,$$

получаем соотношения

$$a - 7u \geqslant \frac{7b}{5} - 7u = \frac{7v}{5}.$$

В случае $v = 0$ положим

$$y = z = 0, \quad x = a - 7u,$$

тогда $x \geqslant 7v/5 = 0$. В случае $v = 1$ положим

$$y = 1, \quad z = 0, \quad x = a - 7u - 2,$$

тогда $x \geqslant 7/5 - 2 > -1$, т. е. $x \geqslant 0$ (ибо $x \in \mathbf{Z}$). В случае $v = 2$ положим

$$y = 0, \quad z = 1, \quad x = a - 7u - 3,$$

тогда $x \geqslant 14/5 - 3 > -1$, т. е. $x \geqslant 0$. В случае $v = 3$ положим

$$y = z = 1, \quad x = a - 7u - 5,$$

тогда $x \geqslant 21/5 - 5 > -1$, т. е. $x \geqslant 0$. Наконец, в случае $v = 4$ положим

$$y = 0, \quad z = 2, \quad x = a - 7u - 6,$$

тогда $x \geqslant 28/5 - 6 > -1$, т. е. $x \geqslant 0$. Таким образом, в каждом из разобранных случаев числа

$$x,\ y,\ z,\ u \in \mathbf{Z}^+$$

удовлетворяют равенствам

$$x = a - 7u - 3z - 2y, \quad 5u = b - v = b - 2z - y,$$

а значит, и исходной системе.

2.12. Пусть для некоторых значений

$$p,\ q \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ 100\}$$

число $x \in \mathbf{Q}$ удовлетворяет уравнению

$$x^5 + px + q = 0.$$

Так как все коэффициенты многочлена, стоящего в левой части уравнения, являются целыми, а его коэффициент при старшем члене равен 1, то в силу теоремы 60 любой рациональный корень этого многочлена, в том числе и число x, является целым. Докажем, что $-3 < x < 0$. Действительно, если $x \geqslant 0$, то

$$x^5 + px + q \geqslant q \geqslant 1 > 0,$$

а если $x \leqslant -3$, то

$$x^5 + px + q \leqslant -3^5 - 3p + q \leqslant -3^5 - 3 + 100 < 0.$$

Итак, возможны лишь два случая: $x = -1$ или $x = -2$. Подставляя в уравнение значение $x = -1$, получаем соотношение для коэффициентов $q = p + 1$, которое выполняется ровно для 99 пар чисел p, q, удовлетворяющих заданным ограничениям. Аналогично, при $x = -2$ имеем условие $q = 2p + 32$, которое выполняется для 34 пар чисел p, q. Поскольку условия $q = p + 1$ и $q = 2p + 32$ не могут выполняться одновременно (ибо $p > 0$), то все полученные пары будут различны, а их число равно $99 + 34 = 133$.

2.13. Набор чисел $x = y = z = 0$ является решением уравнения. Предположим, что уравнение имеет и другие решения. Выберем среди них тот набор чисел x, y, z, для которого величина

$$\alpha = |x| + |y| + |z|$$

принимает наименьшее (натуральное) значение. Заметим, что для любого значения $n \in \mathbb{Z}$ справедливо следующее: либо $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$, тогда

$$n^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod 4,$$

либо $n = 2k + 1$, тогда

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod 4.$$

Поэтому остаток от деления на 4 числа $x^2 + y^2$ (равный либо 0, либо 1, либо 2) совпадает с остатком от деления на 4 числа $3z^2$ (равным либо 0, либо 3) только в том случае, если каждое из чисел x, y, z является четным, т. е.

$$x = 2x_1, \quad y = 2y_1, \quad z = 2z_1, \text{ где } x_1, \ y_1, \ z_1 \in \mathbb{Z}.$$

Так как

$$x^2 + y^2 = 3z^2, \text{ то } x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2,$$

причем величина

$$\alpha_1 = |x_1| + |y_1| + |z_1|$$

удовлетворяет условиям $0 < \alpha_1 = \alpha/2 < \alpha$, что противоречит выбору набора чисел x, y, z. Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

2.14. Заметим, что если набор чисел x, y, z является решением исходного уравнения, то любой набор чисел tx, ty, tz, где $t \in \mathbb{Q}$, также является решением. Поэтому, если некоторый ненулевой набор (т. е. не совпадающий с набором $x=y=z=0$) рациональных чисел

$$x=m/n,\ y=l/k,\ z=p/q,$$

где $m,\ l,\ p\in \mathbf{Z}$ и $n,\ k,\ q\in \mathbf{N}$, удовлетворяет уравнению, то ненулевой набор целых чисел

$$x_1=t_1x,\ y_1=t_1y,\ z_1=t_1z,\ \text{где}\ t_1=nkq,$$

также удовлетворяет уравнению. Пусть d — наибольший общий делитель чисел $x_1,\ y_1,\ z_1$, тогда набор целых чисел

$$x_2=t_2x_1,\ y_2=t_2y_1,\ z_2=t_2z_1,\ \text{где}\ t_2=1/d,$$

также удовлетворяет уравнению, причем наибольший общий делитель этих чисел равен 1. Из уравнения получаем, что число

$$x_2^3=3\left(-y_2^3-3z_2^3+3x_2y_2z_2\right)$$

делится на 3, поэтому $x_2=3x_3$ ($x_3\in \mathbf{Z}$). Далее,

$$y_2^3+3z_2^3+9x_3^3-9y_2z_2x_3=0,$$

т. е. набор значений $x=y_2,\ y=z_2,\ z=x_3$ также удовлетворяет уравнению. Поэтому $y_2=3y_3$ ($y_3\in \mathbf{Z}$) и набор значений $x=z_2,\ y=x_3,\ z=y_3$ также удовлетворяет уравнению, откуда $z_2=3z_3$ ($z_3\in \mathbf{Z}$). Таким образом, каждое из чисел $x_2,\ y_2,\ z_2$ делится на 3, что противоречит выбору этих чисел. Утверждение задачи доказано.

2.15. Набор чисел $x_0=y_0=z_0=0$ является решением уравнения. Предположим, что уравнение имеет еще одно решение $(x;\ y;\ z)$. Тогда правая часть уравнения x^2y^2 делится на 4 (в противном случае x и y — нечетные числа, откуда

$$x^2\equiv 1 \pmod 4,\quad y^2\equiv 1 \pmod 4,\quad x^2y^2\equiv 1 \pmod 4$$

и либо

$$x^2+y^2+z^2\equiv 2 \pmod 4$$

при четном z, либо

$$x^2+y^2+z^2\equiv 3 \pmod 4$$

при нечетном z, т. е. равенство $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ невозможно). Заметим, что левая часть уравнения $x^2+y^2+z^2$ делится на 4 только в случае, если каждое из чисел $x,\ y,\ z$ является четным (ибо остаток от деления на 4 левой части равен количеству нечетных чисел в наборе $x,\ y,\ z$). Поэтому $x=2x_1,\ y=2y_1,\ z=2z_1$, причем

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1^2y_1^2.$$

Правая часть последнего уравнения также делится на 4, откуда с помощью аналогичных рассуждений получаем, что $x_1=2x_2,\ y_1=2y_2,\ z_1=2z_2$ и

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=16x_2^2y_2^2.$$

Продолжая подобные рассуждения и далее, получаем последовательность наборов целых чисел

$$x_k=x/2^k,\ y_k=y/2^k,\ z_k=z/2^k,\ \text{где}\ k\in \mathbf{N}.$$

Однако никакое целое число, отличное от нуля, не может делиться на любую степень двойки, поэтому каждое из чисел x, y, z равно нулю. Следовательно, нулевой набор представляет собой единственное решение исходного уравнения.

2.16. Каждой паре чисел $x, y \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих уравнению $n^2 = y^2 - x^2$, соответствует пара чисел $p = y + x$, $q = y - x$, произведение которых равно n^2. Поэтому количество a_n этих пар не превосходит количества различных натуральных делителей числа n^2. Следовательно, для всех простых чисел n имеет место неравенство $a_n \leqslant 3$, поскольку при таких значениях n число n^2 имеет ровно 3 натуральных делителя. Таким образом, на вопрос п. б) ответ отрицательный. Далее, каждой паре чисел p, q, имеющих одинаковую четность и удовлетворяющих равенству $pq = n^2$, соответствует пара чисел

$$y = (p+q)/2, \quad x = (p-q)/2,$$

причем неравенство $x > n$ имеет место в том и только в том случае, если

$$2x = p - q = n^2/q - q > 2n, \text{ т. е. } q < n/(1+\sqrt{2}).$$

Для всех значений $n = 3^l$ ($l \in \mathbb{N}$) число q имеет вид 3^i ($i \in \mathbb{Z}^+$), а число $p = 3^{2l-i}$ имеет ту же четность. При этом неравенство $3^i < 3^l/(1+\sqrt{2})$ выполняется для значений $i = 0, 1, \ldots, l-1$, поэтому $a_n = l$, откуда вытекает справедливость утверждения п. а).

2.17. Докажем, что если для некоторого значения $x \in \mathbb{Z}$ число

$$f(x) = x^4 + 4^x$$

является целым, то это число либо не превосходит пяти, либо является составным. Действительно, если $x < 0$, то число $f(x)$ не целое. Далее, при $x = 0$ и $x = 1$ имеем

$$f(0) = 0^4 + 4^0 < 5, \quad f(1) = 1^4 + 4^1 = 5.$$

Если $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), то число

$$f(x) = 2^4k^4 + 4^{2k} = 2^4(k^4 + 4^{2(k-1)})$$

является составным. Наконец, если $x = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), то число

$$f(x) = x^4 + 4 \cdot 4^{2k} = (x^4 + 4x^2(2^k)^2 + 4(2^k)^4) - 4x^2(2^k)^2 =$$
$$= (x^2 + 2(2^k)^2)^2 - (2x2^k)^2 =$$
$$= (x^2 + 2x2^k + 2(2^k)^2)(x^2 - 2x2^k + 2(2^k)^2) =$$
$$= ((x+2^k)^2 + 2^{2k})((x-2^k)^2 + 2^{2k})$$

также является составным, поскольку каждый из сомножителей $(x \pm 2^k)^2 + 2^{2k}$ больше 1 (ибо $2^{2k} > 1$ при $k > 0$). Таким образом, если число $p > 5$ простое, то равенство $x^4 + 4^x = p$ не выполняется ни при каких значениях $x \in \mathbb{Z}$.

2.18. Предположим, что тройка чисел $x, y, z \in \mathbb{N}$ удовлетворяет уравнению. Тогда имеем разложение

$$((2x)^x + 1)((2x)^x - 1) = y^{z+1},$$

причем числа

$$k=(2x)^x+1 \text{ и } m=(2x)^x-1$$

взаимно просты, ибо они нечетны и

$$(k,\ m)=(k,\ k-m)=(k,\ 2)=1.$$

Поэтому в силу теоремы 22 найдутся числа $p,\ q\in\mathbf{N}$, удовлетворяющие равенствам

$$k=p^{z+1},\quad m=q^{z+1},$$

откуда имеем

$$2=p^{z+1}-q^{z+1}=(p-q)(p^z+p^{z-1}q+\ldots+q^z),\qquad p\geqslant q+1.$$

Поэтому

$$2\geqslant p^z+p^{z-1}q+\ldots+q^z\geqslant p^z+q^z\geqslant p+q>2q\geqslant 2.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

2.19. Докажем индукцией по n более сильное утверждение: для любого значения $n\in\mathbf{N}$ существуют числа

$$x_1,\ \ldots,\ x_n\in\mathbf{N}$$

и нечетное число $y_n>1$, удовлетворяющие уравнению

$$x_1^2+\ldots+x_n^2=y_n^2.$$

При $n=1$ утверждение справедливо (достаточно положить $x_1=y_1=3$). Пусть утверждение доказано для некоторого значения $n\geqslant 1$. Рассмотрим соответствующий набор чисел $x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n$ и положим

$$x_{n+1}=(y_n^2-1)/2,\quad y_{n+1}=(y_n^2+1)/2.$$

Так как число y_n нечетно и $y_n>1$, то $x_{n+1},\ y_{n+1}\in\mathbf{N}$ и $y_{n+1}>1$. Тогда набор

$$x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1},\ y_{n+1}$$

удовлетворяет условиям

$$x_1^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2=y_n^2+x_{n+1}^2=y_n^2+\frac{y_n^4-2y_n^2+1}{4}=(y_{n+1})^2,$$

$$y_{n+1}=(y_n^2+1)/2\equiv 1 \pmod 2$$

(так как $y_n^2\equiv 1 \pmod 4$), т. е. утверждение справедливо и для значения $n+1$.

2.20. Если $n=1$, то при каждом значении $z\in\mathbf{N}$ пара чисел

$$x_1=z^{a_2},\ x_2=z^{a_1}$$

удовлетворяет уравнению. Пусть теперь $n>1$. Тогда, согласно китайской теореме об остатках (теорема 23), существует бесконечно много натуральных чисел z, удовлетворяющих двум условиям:

$$z\equiv 0 \pmod{a_1\ldots a_n} \text{ и } z\equiv -1 \pmod{a_{n+1}}.$$

Каждому из таких значений z соответствуют натуральные числа

$$y_1=z/a_1,\ \ldots,\ y_n=z/a_n,\ y_{n+1}=(z+1)/a_{n+1},$$

по которым в свою очередь строится набор неизвестных

$$x_i = n^{y_i} \in \mathbf{N}, \quad i = 1, \ldots, n, n+1.$$

Каждый из полученных наборов удовлетворяет уравнению, так как

$$x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n} = (n^{y_1})^{a_1} + \ldots + (n^{y_n})^{a_n} = n^z + \ldots + n^z =$$
$$= n \cdot n^z = n^{z+1} = (n^{y_{n+1}})^{a_{n+1}} = x_{n+1}^{a_{n+1}}.$$

Поскольку при каждом значении $n \in \mathbf{N}$ разным значениям z соответствуют разные наборы неизвестных, то исходное уравнение в натуральных числах имеет бесконечно много решений.

2.21. Согласно китайской теореме об остатках (теорема 23) существует целое число $n \in [0; ab)$, удовлетворяющее условиям

$$n \equiv 0 \pmod b \text{ и } n \equiv c \pmod a.$$

Поэтому $n = by = c - ax$ для некоторых значений $x, y \in \mathbf{Z}$. Так как $0 \leqslant by < ab$, то

$$0 \leqslant y \leqslant a-1 \text{ и } n \leqslant (a-1)\, b.$$

Наконец, из неравенств

$$c - ax \leqslant (a-1)\, b, \quad c \geqslant (a-1)(b-1)$$

получаем

$$ax \geqslant (a-1)(b-1) - (a-1)\, b = 1 - a > -a,$$

т. е. $x > -1$. Таким образом, пара значений $x, y \in \mathbf{Z}^+$ представляет собой решение исходного уравнения.

2.22. Пусть пара чисел $x_0, y_0 \in \mathbf{Q}$ является решением исходного уравнения, а число $k \in \mathbf{Q}$ удовлетворяет условию $ak^2 + b \neq 0$ (таких значений k бесконечно много, так как $a^2 + b^2 > 0$, а значит, равенству $ak^2 + b = 0$ может удовлетворять не более двух из бесконечного множества значений $k \in \mathbf{Q}$). Тогда числа

$$x_k = \frac{(b - ak^2)\, x_0 - 2bky_0}{ak^2 + b}, \quad y_k = \frac{(b - ak^2)\, y_0 + 2akx_0}{ak^2 + b}$$

также удовлетворяют уравнению, поскольку

$$ax_k^2 + by_k^2 = \frac{(b - ak^2)^2 (ax_0^2 + by_0^2) + 4abk^2 (ax_0^2 + by_0^2)}{(ak^2 + b)^2} = ax_0^2 + by_0^2 = 1.$$

Заметим, что если пара чисел x_k, y_k может быть получена с помощью указанных выше формул, то это возможно не более чем при двух значениях k, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} a(x_k + x_0)\, k^2 + 2by_0k + b(x_k - x_0) = 0, \\ a(y_k + y_0)\, k^2 - 2ax_0k + b(y_k - y_0) = 0 \end{cases}$$

(поскольку $ax_0^2 + by_0^2 = 1$, то хотя бы в одном из этих равенств коэффициент при k отличен от нуля, и, следовательно, этому равенству не могут удовлетворять более двух значений k). Таким образом, исходное уравнение имеет бесконечно много решений. Действительно, если бы всего решений было n, то различных значений $k \in \mathbf{Q}$, удовлетворяющих условию $ak^2+b \neq 0$, было бы не более $2n$, что неверно. Утверждение доказано.

Замечание. Приведенное решение задачи имеет наглядный геометрический смысл: на координатной плоскости точки $(x_0; y_0)$ и $(x_k; y_k)$ — это точки пересечения прямой $x-x_0=k(y-y_0)$ и кривой $ax^2+by^2=1$. То, что значения x_k и y_k рациональны, можно доказать, не вычисляя самих значений: действительно, при $ak^2+b \neq 0$ числа y_0 и y_k являются корнями квадратного уравнения (относительно y)

$$a(x_0+k(y-y_0))^2+by^2=1$$

с рациональными коэффициентами. По теореме Виета y_0+y_k — рациональное число. Значит,

$$y_k \in \mathbf{Q} \text{ и } x_k=x_0+k(y_k-y_0) \in \mathbf{Q}.$$

2.23. Для любых чисел k, m, a, b справедливо равенство

$$(ak^2+bm^2)^3=a(ak^3-3bkm^2)^2+b(3ak^2m-bm^3)^2.$$

Поэтому, если положить

$$x=ak^3-3bkm^2, \quad y=3ak^2m-bm^3, \quad z=ak^2+bm^2,$$

то будет выполнено равенство

$$ax^2+by^2=z^3.$$

Докажем, что существует бесконечно много пар чисел k, $m \in \mathbf{Z}$, которым соответствуют различные тройки чисел x, y, $z \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющие условию $(x, y)=1$. Заметим, что если все числа k, m, a, b попарно взаимно просты (числа a и b взаимно просты по условию), причем ровно одно из них четно и ни одно из чисел k, m не делится на 3, то числа x и y взаимно просты. Действительно, при указанных условиях имеем

$$(k, y)=(k, 3ak^2m-bm^3)=(k, bm^3)=1,$$
$$(m, x)=(m, ak^3-3bkm^2)=(m, ak^3)=1,$$

причем хотя бы одно из чисел a или b, например b, не делится на 3 (случай, когда a не делится на 3, рассматривается аналогично; случай, когда оба числа a и b делятся на 3, невозможен, ибо $(a, b)=1$). Тогда справедливы соотношения

$$(x, y)=(k(ak^2-3bm^2), m(3ak^2-bm^2))=$$
$$=(ak^2-3bm^2, 3ak^2-bm^2) \leqslant (3ak^2-9bm^2, 3ak^2-bm^2)=$$
$$=(8bm^2, 3ak^2-bm^2)=(bm^2, 3ak^2-bm^2)=(bm^2, 3ak^2)=1,$$

так как число $3ak^2-bm^2$ нечетно, а число bm^2 не делится на 3. Пусть оба числа a и b ненулевые. Положим

$$k=3|ab|+1,$$

Тогда каждому значению

$$m=(6|ab|+1)^l \text{ при } l\in \mathbf{N}$$

соответствует набор чисел x, y, z, удовлетворяющий условию задачи (поскольку для чисел k, m, a, b выполнены указанные выше условия). При этом все полученные наборы различны, так как все полученные значения

$$z=ak^2+bm^2$$

различны. Пусть, наконец, одно из чисел a или b, например b, равно нулю (случай $a=0$ рассматривается аналогично). Тогда, если положить $x=z=a$, а в качестве y брать различные числа, взаимно простые с числом a, то будут выполнены равенства

$$ax^2+by^2=a\cdot a^2+0\cdot y^2=a^3=z^3.$$

Задача решена.

2.24. Предположим, что тройка чисел $x, y, z\in \mathbf{N}$ удовлетворяет уравнению при $n>1$ и неравенствам $x\leqslant n$, $y\leqslant n$. При этом без ограничения общности можно считать, что $x\leqslant y$. Тогда, используя бином Ньютона, получаем

$$(y+1)^n=y^n+ny^{n-1}+\ldots+1>y^n+xy^{n-1}\geqslant y^n+x^n=z^n>y^n.$$

Поэтому $y+1>z>y$, что невозможно ни при каких значениях $y, z\in \mathbf{Z}$.

2.25. Пусть при некоторых значениях $x, n\in \mathbf{N}$, $n>2$, исходное уравнение превращается в верное равенство. Обозначим $y=x+1\geqslant 2$, тогда имеем равенство

$$(y-1)^n+y^n=(y+1)^n,$$

из которого получаем

$$0=(y+1)^n-y^n-(y-1)^n\equiv 1-(-1)^n \pmod y.$$

Поэтому число n четно, так как при нечетном $n>2$ получилось бы $0\equiv 2 \pmod y$, откуда

$$y=2 \text{ и } 0=3^n-1-2^n>0,$$

что невозможно. Далее, согласно биному Ньютона, при четном n справедливы сравнения

$$(y\pm 1)^n\equiv \frac{n(n-1)}{2}y^2\pm ny+1 \pmod{y^3},$$

$$0=(y+1)^n-y^n-(y-1)^n\equiv 2ny \pmod{y^3},$$

следовательно, $2n\equiv 0 \pmod{y^2}$, откуда $2n\geqslant y^2$. Деля исходное равенство для y на y^n, получаем соотношения

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^n=1+\left(1-\frac{1}{y}\right)^n<2.$$

С другой стороны, в силу неравенства Бернулли (теорема 5) имеем

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^n > 1+\frac{n}{y}=1+\frac{2n}{2y}\geqslant 1+\frac{y^2}{2y}=1+\frac{y}{2}\geqslant 2.$$

Полученное противоречие означает, что исходное уравнение не может иметь решений.

2.26. Пусть положительные $x,\ y\in\mathbf{Q}$ удовлетворяют исходному уравнению. Докажем, что тогда положительное число

$$z=y/x\in\mathbf{Q}$$

является натуральным. Из уравнения получаем

$$x^{x+xz}=(x+xz)^{xz},\ \text{т. е.}\ x^{1+z}=x^z\,(1+z)^z,$$

поэтому имеем равенство

$$x=(1+z)^z.$$

Обозначая

$$z=p/q,\ x=m/n,$$

где

$$p,\ q,\ m,\ n\in\mathbf{N}\ \text{и}\ (p,\ q)=(m,\ n)=1,$$

получаем соотношение

$$(m/n)^q=((p+q)/q)^p,\ \text{т. е.}\ m^q q^p=n^q\,(p+q)^p.$$

Поскольку $(m^q,\ n^q)=1$, то $q^p \vdots n^q$. С другой стороны,

$$((p+q)^p,\ q^p)=(p+q,\ q)^p=(p,\ q)^p=1,$$

поэтому $n^q \vdots q^p$. Таким образом, имеет место равенство $q^p=n^q$, из которого следует, что если $q>1$, то в разложении числа q^p на простые множители каждый из простых делителей имеет степень, кратную как числу p, так и числу q, а значит, и их произведению pq (так как числа p и q взаимно просты). Следовательно, в разложении числа q на простые множители каждый из простых делителей имеет степень, кратную q, что невозможно (ибо $q<2^q$ при любом $q\in\mathbf{N}$). Итак, доказано, что $q=1$. Поэтому получаем

$$x=(1+z)^z,\ y=z\,(1+z)^z\quad \text{при}\ z\in\mathbf{N},$$

а проверка показывает, что все полученные пары значений $x,\ y\in\mathbf{N}$ удовлетворяют исходному уравнению.

2.27. Если

$$n=m\,(4k-1)\qquad (m,\ k\in\mathbf{N}),$$

то выполнено равенство

$$\frac{1}{km}+\frac{1}{km\,(4k-1)}=\frac{4}{m\,(4k-1)}=\frac{4}{n},$$

т. е. уравнение имеет решение

$$x=km,\ y=km\,(4k-1).$$

Пусть теперь числа

$$x=2^q x_1,\ y=2^r y_1,\ \text{где}\ q,\ r\in\mathbf{Z}^+,$$

x_1, y_1 — нечетны, удовлетворяют уравнению. Тогда, если $q < r$, то число

$$n = \frac{4xy}{x+y} = \frac{2^{q+r+2}x_1y_1}{2^q(x_1+2^{r-q}y_1)}$$

является нечетным только в случае $q+r+2=q$, что невозможно. Аналогично доказывается, что невозможен случай $q > r$. Таким образом, $q=r$ и число

$$n = \frac{2^{q+2}x_1y_1}{x_1+y_1}$$

нечетно. Поэтому сумма нечетных чисел x_1 и y_1 делится на 4, а значит, они дают разные остатки при делении на 4. Заметим, что если бы все простые числа вида $4k-1$ при $k \in \mathbf{N}$ входили в разложения чисел x и y на простые множители с одинаковыми степенями (возможно, нулевыми), то выполнялось бы соотношение $x_1 \equiv y_1 \pmod 4$, что неверно. Следовательно, существует простое число $p = 4k-1$ ($k \in \mathbf{N}$), удовлетворяющее условиям

$$x_1 = p^u x_2, \quad y_1 = p^v y_2, \quad u, v \in \mathbf{Z}^+, \quad u \neq v,$$

где числа x_2, y_2 не делятся на p. Пусть $u < v$ (случай $u > v$ рассматривается аналогично), тогда $u+v > u$ и число

$$n = \frac{2^{q+2}p^{u+v}x_2y_2}{p^u(x_2+p^{v-u}y_2)}$$

делится на p, т. е. имеет вид

$$n = mp = m(4k-1).$$

Доказательство закончено.

2.28. Обозначим описанное в задаче множество чисел через M и допустим, что оно представимо в виде объединения конечного множества арифметических прогрессий. Докажем, что среди этих прогрессий нет ни одной бесконечной. Действительно, пусть для некоторых значений a, $d \in \mathbf{N}$ множество M содержит все числа вида $a+jd$ при $j \in \mathbf{Z}^+$. Заметим, что $3d-1 \notin M$, так как при $n=3d-1$, $x=d$, $y=d(3d-1)$ имеют место равенства

$$\frac{3}{n} = \frac{3}{3d-1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d(3d-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Далее, если $n \notin M$, то $mn \notin M$ для любого значения $m \in \mathbf{N}$, так как из равенства

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

вытекает равенство

$$\frac{3}{mn} = \frac{1}{mx} + \frac{1}{my}.$$

Выберем число m, удовлетворяющее условиям

$$m \equiv -a \pmod d, \quad m \geqslant a/(3d-1),$$

тогда число

$$m(3d-1) \equiv a \pmod d,$$

с одной стороны, имеет вид $a+jd$ $(j \in \mathbf{Z}^+)$. С другой стороны, оно не содержится в множестве M. Полученное противоречие доказывает, что множество M является объединением конечного множества конечных арифметических прогрессий, т. е. это множество конечно. Докажем, что и это невозможно. Для этого проверим, что любое число вида $n=7^k$ $(k \in \mathbf{Z}^+)$ принадлежит множеству M. Предположим, что это не так, т. е. равенство

$$\frac{3}{7^k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

выполняется для некоторых значений $x, y \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}^+$. Обозначим $q=(x, y)$, тогда имеем $x=qx_1$, $y=qy_1$, $(x_1, y_1)=1$ и

$$\frac{3}{7^k}=\frac{x+y}{xy}=\frac{x_1+y_1}{qx_1y_1},$$

т. е.

$$7^k(x_1+y_1)=3qx_1y_1.$$

Заметим, что $(x_1+y_1, x_1y_1)=1$, так как если произведение x_1y_1 делится на какое-либо простое число p, то одно из чисел x_1, y_1 делится на p, а другое нет (ибо $(x_1, y_1)=1$), а значит, сумма x_1+y_1 также не делится на p. Но число $7^k(x_1+y_1)$ делится на x_1y_1, поэтому имеем соотношения

$$x_1=7^u, \quad y_1=7^v \quad (u, v \in \mathbf{Z}^+),$$

$$x_1=(2\cdot 3+1)^u \equiv 1 \pmod 3, \quad y_1=(2\cdot 3+1)^v \equiv 1 \pmod 3,$$

$$x_1+y_1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Таким образом, число $7^k(x_1+y_1)$ не делится на 3, что противоречит равенству

$$7^k(x_1+y_1)=3qx_1y_1$$

и завершает доказательство утверждения задачи.

2.29. Предположим, что, вопреки утверждению задачи, некоторая пара чисел $x, y \in \mathbf{Z}$ удовлетворяет уравнению. Тогда число x четно. Действительно, в противном случае

$$x^2=(2k+1)^2=4k(k+1)+1 \equiv 1 \pmod 4,$$

откуда

$$y^3=x^2+5 \equiv 2 \pmod 4,$$

что невозможно (поскольку в этом случае y четно, а значит, $y^3 \equiv 0 \pmod 4$). Из четности числа x следует, что

$$y^3=x^2+5 \equiv 1 \pmod 4,$$

поэтому

$$y \equiv 1 \pmod 4$$

(если $y \equiv -1 \pmod 4$, то $y^3 \equiv -1 \pmod 4$). Обозначим

$$x = 2n, \quad y = 4m + 1 \quad (m, n \in \mathbf{Z}),$$

тогда из уравнения получаем

$$4(n^2+1) = x^2 + 4 = y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1) = 4m(16m^2+12m+3),$$

откуда

$$n^2 + 1 = md, \text{ где } d = 16m^2 + 12m + 3 \equiv 3 \pmod 4.$$

Заметим, что хотя бы один из простых делителей числа d должен иметь вид $p = 4l + 3$, где $l \in \mathbf{Z}^+$. Действительно, так как число d нечетно, то все его простые делители нечетны. Если бы все они были сравнимы с единицей по модулю 4, то и число d (равное произведению этих делителей, взятых в некоторых степенях) было бы также сравнимо с единицей по модулю 4. Итак, имеем

$$n^2 + 1 = md \equiv 0 \pmod p,$$

поэтому

$$n^2 \equiv -1 \pmod p \text{ и } n^{p-1} = n^{4l+2} = (n^2)^{2l+1} \equiv -1 \pmod p,$$

что противоречит малой теореме Ферма (теорема 25), согласно которой

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Утверждение задачи доказано.

§ 3. Факториалы и биномиальные коэффициенты

3.1. Докажем, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$, большего 2, справедливо неравенство

$$(n!)^2 > n^n.$$

Действительно, имеем

$$n! \cdot n! = (1 \cdot 2 \ldots n)(n(n-1) \ldots 1) = (1 \cdot n)(2(n-1)) \ldots (n \cdot 1) > n^n,$$

так как

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n \text{ и } k(n-k+1) = (n-k)(k-1) + n > n$$

при $k = 2, \ldots, n-1$. Положив в доказанном неравенстве

$$n = 17091982,$$

получим ответ:

$$(17091982!)^2 > 17091982^{17091982}.$$

3.2. Поскольку для каждого значения $k = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнены соотношения

$$C_n^{k-1} = C_n^k \cdot \frac{k}{n-k+1}, \quad C_n^{k+1} = C_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1}, \quad C_n^k \neq 0,$$

то равенство

$$2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$$

равносильно равенству

$$2=\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1} \text{ или } (n-2k)^2=n+2.$$

Следовательно, искомые значения $n\in\mathbf{N}$ обязаны иметь вид $n=m^2-2$, где $m=2, 3, \ldots$ Однако если $m=2$, то $n=2$ и равенство $(n-2k)^2=$ $=n+2$ не выполняется при единственно возможном в этом случае значении $k=1$. Если же $m>2$, то это равенство справедливо, например, при $k=m(m-1)/2-1$ (указанное значение k является целым и удовлетворяет неравенствам $0<k<n$, так как одно из чисел m или $m-1$ является четным и при $m>2$ имеют место оценки

$$0<m(m-1)/2-1<m^2-2).$$

Таким образом, искомые значения n — это все числа вида $n=m^2-2$, где $m=3, 4, \ldots$

3.3. Пусть числа $x, y, z, u\in\mathbf{N}$ удовлетворяют исходному уравнению, а через v обозначено наибольшее из чисел x, y, z. Тогда $1\leqslant v<u$ и

$$uv!\leqslant u(u-1)!=u!=x!+y!+z!\leqslant 3v!,$$

откуда $uv!\leqslant 3v!$, а значит, $u\leqslant 3$. При $u=3$ имеем равенства

$$3!=3v!=x!+y!+z!,$$

которые справедливы только в случае $x=y=z=v=2$. При $u=2$ уравнение решений не имеет, так как в этом случае

$$u!=2<3\leqslant x!+y!+z!.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение $x=y=z=2$, $u=3$.

3.4. Из тождества

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n,$$

пользуясь биномом Ньютона, получаем

$$C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\ldots+C_{2n}^{2n}x^{2n}=$$
$$=(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n).$$

Приравнивая коэффициенты при x^n и учитывая равенства

$$C_n^k=C_n^{n-k},\ k=0, 1, \ldots, n,$$

получаем соотношение

$$C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}=\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2}=$$
$$=C_{2n}^n\left[(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2\right]=(C_{2n}^n)^2,$$

что и требовалось доказать.

3.5. а) Положительное число

$$\frac{1}{m+1}C_{2m}^{m}=\left(1-\frac{m}{m+1}\right)C_{2m}^{m}=C_{2m}^{m}-\frac{(2m)!}{(m-1)!\,(m+1)!}=C_{2m}^{m}-C_{2m}^{m-1}$$

является целым, ибо $C_{2m}^{m}, C_{2m}^{m-1}\in\mathbf{N}$ при $m\in\mathbf{N}$.

б) Пусть задано число $m\in\mathbf{N}$. Так как при $n=m$ число

$$\frac{k}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}=\frac{k}{2m+1}$$

должно быть натуральным, то искомое значение $k\in\mathbf{N}$ должно делиться на $2m+1$, поэтому $k\geqslant 2m+1$. Пусть $k=2m+1$. Тогда при $n=m$ положительное число

$$\frac{k}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}$$

является натуральным, а при $n>m$ оно равно

$$\frac{2m+1}{n+m+1}C_{2n}^{n+m}=\left(1-\frac{n-m}{n+m+1}\right)C_{2n}^{n+m}=$$
$$=C_{2n}^{n+m}-\frac{(2n)!}{(n+m+1)!\,(n-m-1)!}=C_{2n}^{n+m}-C_{2n}^{n+m+1},$$

т. е. является целым, ибо $C_{2n}^{n+m}, C_{2n}^{n+m+1}\in\mathbf{N}$. Таким образом, искомое наименьшее значение k равно $2m+1$.

3.6. Пусть числа $C_n^k, C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ имеют общий делитель $d\in\mathbf{N}$. Тогда числа

$$C_n^{k-1}=C_{n+1}^{k}-C_n^{k},\ C_{n+1}^{k-1}=C_{n+2}^{k}-C_{n+1}^{k},\ \ldots,\ C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k}^{k}-C_{n+k-1}^{k}$$

также имеют общий делитель d. Аналогично получаем, что числа

$$C_n^{k-2},\ \ldots,\ C_{n+k-2}^{k-2}$$

имеют общий делитель d. Продолжая аналогичные рассуждения и далее, получим в итоге, что число $C_n^0=1$ делится на d. Следовательно, $d=1$.

3.7. При каждом значении $n\in\mathbf{N}$ докажем индукцией по $m\in\mathbf{N}$ справедливость равенства

$$S_{m,\,n}=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}.$$

При $m=1$ имеем верное утверждение

$$S_{1,\,n}=1-\frac{(n+2)!}{n!\,(n+1)}=1-(n+2)=-\frac{(n+1)!}{n!},$$

Пусть для некоторого значения $m \in \mathbf{N}$ равенство уже доказано, тогда имеем

$$S_{m+1,\,n} = S_{m,\,n} + (-1)^{m+1} \frac{(n+m+2)!}{n!\,(n+m+1)} =$$

$$= (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!} + (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!\,(n+m+2)}{n!} =$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!}{n!} (-1+n+m+2) = (-1)^{m+1} \frac{(n+m+1)!}{n!},$$

т. е. утверждение справедливо и для значения $m+1$. Таким образом, число

$$S_{m,\,n} = (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!\,m!}\, m! = (-1)^m C_{n+m}^m m!$$

делится на $m!$, ибо $C_{n+m}^m \in \mathbf{N}$. Наконец, заметим, что при $n=2$, $m=3$ число $S_{m,\,n} = -60$ не делится на $m!\,(n+1) = 18$. Задача решена.

3.8. Рассмотрим простое число $p > 2$ (при $p=2$ утверждение задачи верно, так как число $C_4^2 - 2 = 4$ делится на $2^2 = 4$). Прежде всего, имеем равенства

$$C_{2p}^p = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{2p\,(2p-1)!}{p\,(p-1)!\,p!} = 2C_{2p-1}^{p-1}.$$

Из соотношения

$$(2p-k)(p+k) \equiv k\,(p-k) \pmod{p^2},$$

выполненного при каждом значении $k = 1, 2, \ldots, (p-1)/2$ (число $p-1$ четное), получаем, что произведение

$$(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1) =$$

$$= ((2p-1)(p+1))((2p-2)(p+2))\ldots\left(\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)\right) \equiv$$

$$\equiv (1\cdot(p-1))(2\cdot(p-2))\ldots\left(\frac{p-1}{2}\,\frac{p+1}{2}\right) \pmod{p^2}$$

сравнимо с числом $(p-1)!$ по модулю p^2. Следовательно, для некоторого числа $m \in \mathbf{Z}$ справедливы равенства

$$C_{2p-1}^{p-1} = \frac{(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{(p-1)!} = \frac{mp^2 + (p-1)!}{(p-1)!} = \frac{mp^2}{(p-1)!} + 1.$$

Поскольку число $mp^2/(p-1)! = C_{2p-1}^{p-1} - 1$ является целым и $(p^2, (p-1)!) = 1$, то $m = l\,(p-1)!$, где $l \in \mathbf{Z}$. Поэтому имеем соотношения

$$C_{2p-1}^{p-1} = \frac{l\,(p-1)!\,p^2}{(p-1)!} + 1 = lp^2 + 1 \equiv 1 \pmod{p^2},$$

$$C_{2p}^p = 2C_{2p-1}^{p-1} \equiv 2 \pmod{p^2},$$

откуда вытекает справедливость утверждения задачи.

3.9. Обозначим

$$f(x) = 1! + 2! + \ldots + (x+1)!,$$

тогда

$$f(1)=3, \quad f(2)=9=3^{1+1}, \quad f(3)=33=3\cdot 11.$$

При $x>3$ получаем, что величина

$$f(x)=f(3)+5!+\ldots+(x+1)!\equiv 3 \pmod 5$$

не является квадратом целого числа, так как при любом $k\in\mathbf{Z}$ имеем

$$(5k)^2=25k^2\equiv 0 \pmod 5,$$
$$(5k\pm 1)^2=25k^2\pm 10k+1\equiv 1 \pmod 5$$

и

$$(5k\pm 2)^2=25k^2\pm 20k+4\equiv 4 \pmod 5.$$

Следовательно, значение $z=1$ ни при каких натуральных числах $x\neq 2$ и y не удовлетворяет равенству $f(x)=y^{z+1}$. Докажем, что при остальных значениях $z\geqslant 2$ это равенство также не выполняется. Непосредственная проверка показывает, что каждое из чисел $f(x)$ при $x=1$, 2, 3, 4, 5, 7 делится на 3, но не делится на 27, а значит, не может быть представлено в виде

$$f(x)=y^{z+1}, \quad z\geqslant 2.$$

Такой же вывод можно сделать и при $x>7$, так как в этом случае

$$f(x)=f(7)+9!+\ldots+(x+1)!\equiv f(7) \pmod{27}.$$

Наконец, при $x=6$ также получаем, что число

$$f(6)=5913=3^4\cdot 73$$

не представимо в указанном виде. Итак, уравнению удовлетворяет единственный набор значений $x=2$, $y=3$, $z=1$.

3.10. Пусть пара чисел $x, y\in\mathbf{N}$ удовлетворяет уравнению. Заметим, что число $p=y+1$ простое. Действительно, если существует делитель d числа p, удовлетворяющий условию $1<d<y+1$, то имеем $y!\,\vdots\, d$ и

$$1=(y+1)^x-y!\equiv 0 \pmod d,$$

что невозможно. Поэтому имеем уравнение

$$p^x-1=(p-1)!,$$

из которого вытекает, что $p<7$. Действительно, предположим, что $p\geqslant 7$. Тогда, сокращая обе части уравнения на $p-1$, получаем равенство

$$p^{x-1}+\ldots+1=(p-2)!,$$

в котором правая часть делится на $2\cdot(p-1)/2=p-1$ (так как $2<(p-1)/2\leqslant p-2$ при $p\geqslant 7$ и $(p-1)/2\in\mathbf{Z}$), а левая часть представляет собой сумму x чисел вида

$$p^i\equiv 1^i\equiv 1 \pmod{(p-1)}, \quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ x-1.$$

Следовательно, $x\equiv 0 \pmod{(p-1)}$, а значит, $x\geqslant p-1$. Но это невозможно, так как

$$p^{x-1}<p^{x-1}+\ldots+1=(p-2)!<(p-2)^{p-2}<p^{p-2},$$

т. е. $x < p-1$. Итак, простое число $p < 7$ может принимать только значения 2, 3 или 5. Если $p=2$, то

$$2^x-1=1 \quad \text{и} \quad x=1,\ y=1.$$

Если $p=3$, то

$$3^x-1=2 \text{ и } x=1,\ y=2.$$

Если же $p=5$, то

$$5^x-1=24 \text{ и } x=2,\ y=4.$$

Таким образом, получаем, что исходному уравнению удовлетворяют только три пары натуральных чисел $(x;\ y)$: $(1;\ 1)$, $(1;\ 2)$ и $(2;\ 4)$.

3.11. Пусть

$$l_k=\frac{m_k}{k}=\frac{n!}{k}+1 \quad (k=1,\ \ldots,\ n).$$

Докажем, что если p — простой делитель числа l_k, то число p не делит ни одно из чисел m_j, $j \neq k$. Так как при этом число p делит число $m_k=l_k k$, то оно будет искомым. Предположим, что $l_k \vdots p$ и $m_j \vdots p$ при некоторых значениях $k \neq j$. Тогда $l_j \vdots p$ или $j \vdots p$. Случай $j \vdots p$ невозможен, так как число j является одним из сомножителей в произведении

$$1\cdot 2\ldots(k-1)(k+1)\ldots n=l_k-1$$

и, значит, $(l_k-1) \vdots j$ и

$$(j,\ l_k)=(j,\ 1)=1.$$

Остается рассмотреть случай $l_k \vdots p$, $l_j \vdots p$ $(k \neq j)$. Пусть $p \leqslant n$. Тогда, если $p \neq k$, то число p взаимно просто с числом l_k (доказательство этого факта подобно проведенному выше для числа j), а если $p \neq j$, то число p взаимно просто с числом l_j (доказательство аналогично). Следовательно, в любом случае число p взаимно просто хотя бы с одним из чисел l_k или l_j. Поэтому неравенство $p \leqslant n$ невозможно. Пусть $p > n$. Тогда имеем

$$k-j=m_k-m_j=kl_k-jl_j\equiv 0 \pmod p,$$

т. е. $(k-j) \vdots p$, что невозможно, так как

$$0<|k-j|<n<p.$$

Утверждение доказано.

3.12. Показатель степени, в которой двойка входит в разложение числа $l!$ на простые множители, равен

$$\left[\frac{l}{2}\right]+\left[\frac{l}{4}\right]+\left[\frac{l}{8}\right]+\ldots$$

см. теорему 20). Поэтому число $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ является нечетным тогда и только тогда, когда наибольшая степень двойки, на которую делится число C_n^k, имеет показатель

$$d=\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{n-k}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{k}{4}\right]-\left[\frac{n-k}{4}\right]\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{n}{8}\right]-\left[\frac{k}{8}\right]-\left[\frac{n-k}{8}\right]\right)+\ldots,$$

равный нулю (при достаточно больших значениях $m\in\mathbf{N}$ каждое из чисел $[n/2^m]$, $[k/2^m]$, $[(n-k)/2^m]$ равно нулю). Из равенств

$$\frac{n}{2^m}=\frac{k}{2^m}+\frac{n-k}{2^m}=\left[\frac{k}{2^m}\right]+\left[\frac{n-k}{2^m}\right]+\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}$$

вытекает, что каждое из чисел

$$\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{k}{2^m}\right]-\left[\frac{n-k}{2^m}\right]=\left[\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}\right]$$

при $m\in\mathbf{N}$ неотрицательно. Поэтому равенство $d=0$ возможно в том и только в том случае, если для всех значений $m\in\mathbf{N}$ выполнены неравенства

$$\{k/2^m\}+\{(n-k)/2^m\}<1.$$

Докажем, что последнее условие равносильно условию для двоичных записей чисел n и k, сформулированному в задаче. Предположим, что в любом разряде двоичной записи числа n стоит не меньшая цифра, чем в том же разряде числа k. Тогда для каждого $m\in\mathbf{N}$ имеем $\{n/2^m\}\geqslant\{k/2^m\}$, поэтому

$$\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}=\left\{\frac{n}{2^m}\right\}-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}<1-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}.$$

Предположим теперь, что в некотором разряде числа n стоит меньшая цифра, чем в том же рааряде числа k (это могут быть только цифры 0 и 1 соответственно). Тогда для некоторого значения $m\in\mathbf{N}$ имеем $\{n/2^m\}<\{k/2^m\}$, поэтому

$$\left\{\frac{n-k}{2^m}\right\}=\left\{\frac{n}{2^m}\right\}-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}+1\geqslant 1-\left\{\frac{k}{2^m}\right\}.$$

Итак, равносильность указанных выше двух условий доказана. Задача решена.

3.13. Докажем, что условие б) эквивалентно следующему условию:

в) $n=p^tl+(p^t-1)$, где $t\in\mathbf{Z}^+$, $l\in\mathbf{N}$, $l<p$.

Действительно, из условия б) имеем

$$n=p^sm-1=p^s(m-1)+(p^s-1),$$

где $s\in\mathbf{Z}^+$, $m\in\mathbf{N}$, $m<p$. Если $m>1$, то положим

$$t=s,\ l=(m-1)>0.$$

Если же $m=1$, то $s>0$, так как иначе $n=p^0\cdot 1-1=0\notin\mathbf{N}$. Поэтому

$$n=p^{s-1}\cdot p-1=p^{s-1}(p-1)+(p^{s-1}-1)$$

и можно положить $t=s-1\geqslant 0$, $l=p-1<p$. В обоих случаях условие в) выполнено. С другой стороны, из условия в) имеем

$$n=p^tl+(p^t-1)=p^t(l+1)-1.$$

Если $l+1<p$, то

$$m=l+1,\ s=t,$$

а если $l+1=p$, то

$$m=1,\ s=t+1.$$

Для заданного числа $n\in\mathbf{N}$ найдется такое $t\in\mathbf{Z}^+$, что

$$p^t\leqslant n<p^{t+1},$$

откуда

$$n=p^tl+r,\quad \text{где}\quad 0\leqslant r<p^t,\ 1\leqslant l<p.$$

Поскольку наибольший показатель степени простого числа p, на которую делится число $q!$, равен

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{q}{p^2}\right]+\left[\frac{q}{p^3}\right]+\ldots,$$

то наибольшая степень числа p, на которую делится число

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

имеет показатель

$$d_k=\left(\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{k}{p}\right]-\left[\frac{n-k}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left[\frac{k}{p^2}\right]-\left[\frac{n-k}{p^2}\right]\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{r}{p^3}\right]-\left[\frac{k}{p^3}\right]-\left[\frac{n-k}{p^3}\right]\right)+\ldots$$

(при $i>t$ каждое из чисел $[n/p^i]$, $[k/p^i]$, $[(n-k)/p^i]$ равно нулю). Из соотношений

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{k}{p^i}+\frac{n-k}{p^i}\right]\geqslant\left[\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{n-k}{p^i}\right]\right]=\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{n-k}{p^i}\right]$$

вытекает, что $d_k=0$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{n-k}{p^i}\right],\qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ t.$$

Докажем, что это возможно лишь в случае $r=p^t-1$, т. е. при условии в). Действительно, если $r\leqslant p^t-2$, то положим $k=p^t-1$, $i=t$. Тогда имеем

$$\left[\frac{k}{p^t}\right]=\left[\frac{p^t-1}{p^t}\right]=0,\quad \left[\frac{n-k}{p^t}\right]\leqslant\left[\frac{p^tl-1}{p^t}\right]=l-1,$$
$$\left[\frac{n}{p^t}\right]=\left[\frac{p^tl+r}{p^t}\right]=l,\qquad l>0+(l-1),$$

следовательно, указанное выше равенство, а с ним и условие а) не выполняются. Пусть теперь выполнено условие в), тогда для всех значений $i=0, 1, \ldots, t$ и $k=0, 1, \ldots, n$ имеем

$$n=p^t\left[\frac{n}{p^i}\right]+(p^i-1),$$

$$k=p^i\left[\frac{k}{p^i}\right]+q, \quad 0\leqslant q<p^i,$$

$$\left[\frac{n-k}{p^i}\right]=\left[\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]+\frac{p^i-(q+1)}{p^i}\right]=\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right],$$

поскольку $0\leqslant p^i-(q+1)<p^i$. Поэтому $d_k=0$ при $k=0, 1, \ldots, n$, а значит, условие а) выполнено. Доказательство закончено.

3.14. Предположим, что число

$$0,h_1h_2h_3\ldots$$

рационально. Тогда существуют числа N, $T\in\mathbf{N}$, для которых выполнены равенства $h_{n+T}=h_n$ при всех $n\geqslant N$. Докажем, что существует число T_1, которое делится на T и имеет последнюю ненулевую цифру, равную 1. Действительно, пусть

$$T=2^\alpha\cdot 5^\beta\cdot p, \quad \text{где} \quad \alpha,\ \beta\in\mathbf{Z}^+,$$

а число p не делится ни на 2, ни на 5. Тогда последняя ненулевая цифра числа

$$T_0=2^\beta\cdot 5^\alpha\cdot T=2^{\alpha+\beta}\cdot 5^{\alpha+\beta}\cdot p=10^{\alpha+\beta}p$$

нечетна и отлична от 5. Если она равна 1, то положим $T_1=T_0$, если она равна 3, то положим $T_1=7T_0$, если она равна 7, то положим $T_1=3T_0$ и, наконец, если она равна 9, то положим $T_1=9T_0$. В этих случаях последняя ненулевая цифра числа T_1 совпадает с последней цифрой числа 1, 21, 21 и 81 соответственно. Итак, найдено число

$$T_1=10^m(10a+1) \qquad (m,\ a\in\mathbf{Z}^+),$$

удовлетворяющее равенствам $h_{n+T_1}=h_n$ при $n\geqslant N$. Докажем, что $h_n\neq 5$ для любого значения $n\in\mathbf{N}$. Действительно, показатель степени, в которой входит двойка в разложение числа $n!$ на простые множители, равен

$$\gamma=[n/2]+[n/2^2]+[n/2^3]+\ldots,$$

а соответствующий показатель для пятерки равен

$$\delta=[n/5]+[n/5^2]+[n/5^3]+\ldots$$

(см. теорему 20). Поскольку справедливы оценки $[n/2^i]\geqslant[n/5^i]$ при $i\in\mathbf{N}$, то $\gamma\geqslant\delta$ и

$$n!=2^\gamma\cdot 5^\delta\cdot q=10^\delta\cdot 2^{\gamma-\delta}\cdot q,$$

где число q не делится ни на 2, ни на 5, а значит, последняя ненулевая цифра числа $n!$ совпадает с последней цифрой числа $2^{\gamma-\delta}\cdot q$, отличной от 5. Выберем число $b\in\mathbf{N}$ таким большим, чтобы выполнялось неравенство $M=10^m(10b+1)>N$, и обозначим $h_{M-1}=h$. Тогда

$$(M-1)!=10^k(10c+h), \quad \text{где} \quad k,\ c\in\mathbf{Z}^+,$$

откуда получаем равенства

$$M! = (M-1)!\,M = 10^k(10c+h)\cdot 10^m(10b+1) = \\ = 10^{k+m}(10(10bc+hb+c)+h),$$

поэтому $h_M = h$. Далее, $h_{M-1+T_1} = h_{M-1} = h$, откуда имеем равенство

$$(M-1+T_1)! = 10^l(10d+h), \quad \text{где} \quad l,\ d \in \mathbf{Z}^+.$$

Следовательно, получаем соотношения

$$(M+T_1)! = (M-1+T_1)!\,(M+T_1) = \\ = 10^l(10d+h)(10^m(10b+1)+10^m(10a+1)) = \\ = 10^{m+l}(10d+h)(10(a+b)+2) = \\ = 10^{m+l}(10(10ad+10bd+ah+bh+2d)+2h),$$

т. е. величина h_{M+T_1} совпадает с последней цифрой числа $2h$ (отличной от нуля, ибо $h \neq 0$ и $h \neq 5$). С другой стороны, эта цифра должна равняться $h_M = h$, чего не может быть ни для одного из значений $h = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

§ 4. Числовые множества

4.1. Пусть $X = A \cup B$ и для определенности $5 \in A$. Предположим, что ни в каком из множеств A и B нет тройки чисел, сумма двух из которых равна удвоенному третьему. Если $3 \in A$, то $1 \in B$, $4 \in B$ и $7 \in B$, что противоречит предположению, так как $1+7 = 2\cdot 4$. Аналогично доказывается, что $7 \notin A$. Поэтому $3 \in B$ и $7 \in B$. Заметим, что хотя бы одно из чисел 4, 6 принадлежит множеству B (иначе числа 4, 5, 6 образовали бы недопустимую тройку). Пусть $4 \in B$ (случай $6 \in B$ аналогичен), тогда

$$\begin{array}{ll} 2 \in A & (\text{иначе } \{2;\ 3;\ 4\} \subset B), \\ 8 \in B & (\text{иначе } \{2;\ 5;\ 8\} \subset A), \\ 6 \in A & (\text{иначе } \{4;\ 6;\ 8\} \subset B), \\ 9 \in A & (\text{иначе } \{7;\ 8;\ 9\} \subset B). \end{array}$$

Если $1 \in A$, то

$$\{1;\ 5;\ 9\} \subset A.$$

Если $1 \in B$, то

$$\{1;\ 4;\ 7\} \subset B.$$

Получили противоречие с предположением.

4.2. Для любых значений $i,\ j \in \{1;\ \ldots;\ 7\}$ количество чисел, в которых на i-м месте стоит цифра j, равно $6!$. Поэтому сумма всех чисел равна

$$(6!\cdot 1+\ldots+6!\cdot 7)+(6!\cdot 1+\ldots+6!\cdot 7)\,10+ \\ +(6!\cdot 1+\ldots+6!\cdot 7)\,10^2+\ldots+(6!\cdot 1+\ldots+6!\cdot 7)\,10^6 = \\ = 6!\,(1+2+\ldots+7)(1+10+\ldots+10^6) = 720\cdot 28\cdot 1111111 = 22399997760.$$

4.3. Разобьем все возможные остатки от деления на 100 на следующие группы:

$$\{0\},\ \{1;\ 99\},\ \{2;\ 98\},\ \ldots,\ \{49;\ 51\},\ \{50\}.$$

Так как всего групп 51, а чисел 52, то по принципу Дирихле (теорема 1) среди них обязательно найдутся 2 числа, остатки от деления которых на 100 попадают в одну группу. Эти числа и будут искомыми (если их остатки совпадают, то на 100 делится разность чисел, а если различаются, то их сумма).

4.4. Пусть для некоторого множества, состоящего из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, утверждение задачи неверно. Тогда ни одно из n чисел

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

не делится на n. Поскольку количество возможных ненулевых остатков от деления на n равно $n-1$, то по принципу Дирихле (теорема 1) найдутся два числа S_i и S_j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, имеющие одинаковые остатки. Следовательно, разность

$$S_j - S_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$$

делится на n, что противоречит сделанному предположению и доказывает утверждение задачи.

4.5. Рассмотрим $2n$ чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ k-a_1,\ k-a_2,\ \ldots,\ k-a_n.$$

Так как $2n > m$, то хотя бы два из них дают при делении на m одинаковые остатки. По условию задачи числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеют разные остатки от деления на m, откуда получаем, что числа

$$k-a_1,\ k-a_2,\ \ldots,\ k-a_n$$

также имеют разные остатки. Поэтому пару чисел с одинаковыми остатками могут образовывать только числа вида a_i, $k-a_j$ (для некоторых номеров i, j). Тогда разность этих чисел $a_i + a_j - k$ делится на m, что и требовалось доказать.

4.6. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда среди 19 натуральных чисел

$$a_{20} - a_{19},\ a_{19} - a_{18},\ \ldots,\ a_2 - a_1$$

нет 4 одинаковых чисел. Поэтому среди них ни одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 не может встретиться более 3 раз. Следовательно, хотя бы одно из этих 19 чисел больше 6 (иначе чисел, не превосходящих 6, было бы более 18), хотя бы 3 из оставшихся 18 чисел больше 5, хотя бы 3 из оставшихся 15 чисел больше 4 и т. д. Поэтому их сумма

$$(a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \ldots + (a_2 - a_1) \geqslant$$
$$\geqslant 7 + (6+6+6) + (5+5+5) + \ldots + (1+1+1) = 70$$

не может быть равна числу $a_{20} - a_1 \leqslant 70 - 1 = 69$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

4.7. Заметим, что хотя бы в одном из 7 подмножеств содержится не менее 15 чисел (в противном случае во всех подмножествах вместе содержалось бы не более $7 \cdot 14 = 98$ чисел). Каждой паре чисел $a > b$ из этого подмножества поставим в соответствие разность $a - b$. Тогда всего получится не менее

$$C_{15}^2 = 15 \cdot 14/2 = 105$$

разностей, среди которых обязательно найдутся одинаковые (так как величина разности может принимать не более 99 значений $1, 2, \ldots, 99$). Пусть оказалось, что для двух пар чисел $a > b$ и $c > d$ выполнено равенство $a - b = c - d$ (откуда $a \neq c$, $b \neq d$), тогда $a + d = b + c$. Если же при этом $a = d$ (или $b = c$; других совпадений быть не может), то $b + c = 2a$ (или $a + d = 2b$). Утверждение задачи доказано.

4.8. Предположим, что, вопреки утверждению задачи, в некотором интервале длины $1/n$ содержится более $(n+1)/2$ несократимых дробей вида p/q, где $q \in \{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$. Докажем, что среди знаменателей этих дробей найдутся два, один из которых делится на другой. Действительно, представим каждый из знаменателей в виде $2^r s$, где s — нечетное число, $r \in \mathbf{Z}^+$. Количество различных нечетных чисел среди чисел $1, 2, \ldots, n$ равно $[(n+1)/2]$ (т. е. меньше, чем количество рассматриваемых знаменателей), следовательно, найдутся два знаменателя

$$q = 2^r \cdot s \text{ и } q_1 = 2^{r_1} \cdot s_1,$$

для которых $s = s_1$ и $r \leqslant r_1$. Тогда один из них делится на другой, т. е. $q_1 = kq$. Таким образом, среди дробей можно выбрать два различных числа вида m/q и l/kq, где $kq \leqslant n$. Тогда

$$\left| \frac{m}{q} - \frac{l}{kq} \right| < \frac{1}{n},$$

так как оба числа лежат в интервале длины $1/n$. Поэтому $km - l = 0$, ибо в противном случае

$$\left| \frac{m}{q} - \frac{l}{kq} \right| = \frac{|km - l|}{kq} \geqslant \frac{1}{kq} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Итак,

$$km = l \text{ и } l/kq = km/kq = m/q,$$

т. е. оба выбранных числа совпадают. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

4.9. Найдем количество троек натуральных чисел $x \leqslant y \leqslant z$, составляющих в сумме $6n$. При каждом значении $k = 1, 2, \ldots, n$ выпишем все тройки, для которых $x = 2k - 1$ и соответственно $x = 2k$:

$$\begin{array}{lll}
(2k-1; & 2k-1; & 6n-4k+2), \\
(2k-1; & 2k; & 6n-4k+1), \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(2k-1; & 3n-k; & 3n-k+1),
\end{array}$$

и соответственно

$$\begin{aligned}&(2k;\ 2k;\quad\ \ 6n-4k),\\&(2k;\ 2k+1;\ 6n-4k-1),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&(2k;\ 3n-k;\ 3n-k).\end{aligned}$$

Поэтому количество всех выписанных троек равно

$$S_k=(3n-k)-(2k-2)+(3n-k)-(2k-1)=6n-6k+3,$$

а количество всех троек, удовлетворяющих условию задачи, равно

$$\sum_{k=1}^{n} S_k=\sum_{k=1}^{n}(6n-6k+3)=\frac{(6n-3)+3}{2}\cdot n=3n^2.$$

4.10. Каждому набору из 6 различных натуральных чисел от 1 до 49 (без ограничения общности считаем их расположенными в порядке возрастания)

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$$

поставим в соответствие набор вида

$$a_1,\ a_2-1,\ a_3-2,\ a_4-3,\ a_5-4,\ a_6-5.$$

Числа в последнем наборе различны в том и только в том случае, если в исходном наборе не было последовательных чисел, и всегда расположены в порядке неубывания. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством наборов из 6 различных чисел от 1 до 49, среди которых нет последовательных чисел, и множеством всех наборов из 6 различных чисел от 1 до 44. Количество элементов в каждом из этих множеств равно C_{44}^6, а количество всех наборов из 6 различных чисел от 1 до 49 равно C_{49}^6. Таким образом, количество наборов, в которых есть последовательные числа, равно $C_{49}^6-C_{44}^6$.

4.11. Будем строить множества A и B индукцией по $n\in\mathbf{N}$. Положим $1\in A$. Пусть числа $1,\ldots,n-1$ уже распределены по подмножествам A и B. Рассмотрим число n. Если найдется число

$$k_1\in\{1;\ \ldots;\ n-1\},$$

удовлетворяющее равенству $k_1/n=c$, то отнесем число n в то подмножество, которое не содержит числа k_1. Если же для некоторого числа

$$k_2\in\{1;\ \ldots;\ n-1\}$$

выполнено равенство $n/k_2=c$, то отнесем число n в подмножество, не содержащее числа k_2. Заметим, что равенства $k_1/n=c$ и $n/k_2=c$ одновременно выполняться не могут, поскольку иначе было бы верно равенство $k_1/n=n/k_2$, т. е. $k_1k_2=n^2$, что невозможно. Наконец, если чисел k_1 и k_2 нет ни в одном из подмножеств, то положим $n\in A$.

Полученное в итоге разбиение множества $\mathbf{N}$ на два подмножества будет удовлетворять условию задачи.

4.12. Поскольку

$$b_i - b_{i+1} = (1-n)\,a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots$$
$$\ldots + a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} = 1 - na_i \equiv 1 \pmod n$$

при каждом значении $i = 1, \ldots, n-1$, то

$$b_{n-1} \equiv b_n + 1 \pmod n,$$
$$b_{n-2} \equiv b_{n-1} + 1 \pmod n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_1 \equiv b_2 + 1 \pmod n.$$

Следовательно, числа

$$b_{n-i} \equiv b_n + i \pmod n, \quad i = 0,\ 1, \ldots,\ n-1,$$

дают при делении на n различные остатки, а значит, не могут совпадать.

4.13. Допустим, что для некоторого значения n существует строка из $2n$ чисел, обладающая требуемым свойством. Обозначим через m_k номер того из двух чисел, равных k, которое идет в строке первым (слева). Тогда второе из этих чисел имеет номер $m_k + k + 1$, а сумма номеров всех $2n$ чисел в строке равна

$$\sum_{k=1}^{n} (m_k + (m_k + k + 1)) = 2 \sum_{k=1}^{n} m_k + n\,(n+3)/2.$$

С другой стороны, сумма тех же $2n$ номеров равна

$$\sum_{i=1}^{2n} i = n\,(2n+1).$$

Поэтому

$$2 \sum_{k=1}^{n} m_k = n\,(2n+1) - n\,(n+3)/2 = n\,(3n-1)/2,$$

следовательно, число $n\,(3n-1)/4$ является целым. Поскольку лишь одно из чисел n и $3n-1$ может быть четным, то оно же должно делиться и на 4, а значит, возможны только два случая: либо $n = 4l$, либо $3n - 1 = 4l'$, т. е.

$$n = 4\,\frac{l'+1}{3} - 1 = 4l - 1, \quad \text{где} \quad l,\ l' \in \mathbf{N}.$$

Докажем, что любое число n указанного вида удовлетворяет условию задачи. При $n = 4l$, $l \geqslant 2$, требуемым свойством обладает, например, строка

$$(4l-4; \ldots; 2l;\ 4l-2;\ 2l-3; \ldots; 1;\ 4l-1;\ 1; \ldots; 2l-3;$$
$$2l; \ldots; 4l-4;\ 4l;\ 4l-3; \ldots; 2l+1;\ 4l-2;\ 2l-2; \ldots; 2;$$
$$2l-1;\ 4l-1;\ 2; \ldots; 2l-2;\ 2l+1; \ldots; 4l-3;\ 2l-1;\ 4l),$$

в которой каждое многоточие обозначает арифметическую прогрессию с разностью 2 или —2, начинающуюся числом перед этим многоточием и кончающуюся числом после него. Аналогично, при $n=4l-1$, $l\geqslant 2$, подходит, например, строка

$$(4l-4;\ \ldots;\ 2l;\ 4l-2;\ 2l-3;\ \ldots;\ 1;\ 4l-1;\ 1;\ \ldots;\ 2l-3;\\ 2l;\ \ldots;\ 4l-4;\ 2l-1;\ 4l-3;\ \ldots;\ 2l+1;\ 4l-2;\ 2l-2;\ \ldots,\ 2;\\ 2l-1;\ 4l-1;\ 2;\ \ldots;\ 2l-2;\ 2l+1;\ \ldots;\ 4l-3).$$

Наконец, для $n=4$ и $n=3$ имеем строки (2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4) и (2, 3, 1, 2, 1, 3) соответственно. Таким образом, условию задачи удовлетворяют числа вида $n=4l$, $n=4l-1$ ($l\in\mathbf{N}$) и только они.

4.14. Из условия 2) следует, что либо $1\in M$, либо $(-1)\in M$. Но $(-1)\notin M$, так как иначе в силу условия 1)

$$(-1)(-1)=1\in M,$$

что противоречит условию 2). Поэтому $1\in M$. Из условия 1) следует, что $1+1\in M$, $2+1\in M$ и т. д., т. е. $M\supset\mathbf{N}$. Если теперь $(-1/m)\in M$ (где $m\in\mathbf{N}$), то, согласно условию 1),

$$(-1/m)\,m=(-1)\in M,$$

что неверно. Поэтому $(-1/m)\notin M$ и $1/m\in M$ для любого $m\in\mathbf{N}$. Из условия 1) далее следует, что

$$n\,(1/m)=n/m\in M \text{ для любых } n,\ m\in\mathbf{N}.$$

Тогда

$$(-n/m)\notin M \qquad (n,\ m\in\mathbf{N}),$$

а кроме того, из условия 2) имеем $0\notin M$. Утверждение доказано.

4.15. Докажем, что для конечного множества M положительных чисел существует базис B. Назовем подмножество S положительных чисел надбазисом для M, если каждое число из M представимо в виде произведения

$$\alpha_1^{i_1}\ldots\alpha_m^{i_m}, \text{ где } \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m\in S,\ i_1,\ \ldots,\ i_m\in\mathbf{Z}.$$

Например, само множество M является надбазисом для M. Среди всех надбазисов для M выберем множество

$$S_0=\{\beta_1;\ \ldots;\ \beta_n\},$$

содержащее минимальное число элементов. Докажем, что если $n\geqslant 2$, то S_0 — базис для M. Допустим, что некоторый элемент $u\in M$ допускает различные представления в виде произведения целых степеней элементов из S_0:

$$u=\beta_1^{i_1}\ldots\beta_n^{i_n}=\beta_1^{j_1}\ldots\beta_n^{j_n}, \qquad \text{т. е.} \qquad \beta_1^{k_1}\ldots\beta_n^{k_n}=1$$

для целых чисел $k_l=i_l-j_l$, не равных одновременно при всех $l=1,\ \ldots,\ n$ нулю. Без ограничения общности можно считать, что $k_n\neq 0$. Пусть

$$S_1=\{\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{n-1}\}, \qquad \text{где } \gamma_l=\beta_l^{1/k_n} \text{ при } l=1,\ \ldots,\ n-1.$$

Тогда каждый элемент множества S_0 представляется в виде произведения целых степеней элементов из S_1:

$$\beta_l=\gamma_l^{k_n} \text{ при } l=1, \ldots, n-1; \ \beta_n=\gamma_1^{-k_1} \ldots \gamma_{n-1}^{-k_{n-1}}.$$

Поэтому множество S_1 является надбазисом для M, содержащим $n-1$ элементов, что противоречит выбору S_0. Значит, S_0 — базис для M. Если существует надбазис S_0 для M, содержащий единственный элемент $\beta \neq 1$, то S_0 также является базисом для M, так как равенство $\beta^i=\beta^j$ невозможно при $i \neq j$. Наконец, если множество $S_0=\{1\}$ является надбазисом для M, то $M=\{1\}$ и множество $S_1=\{2\}$ будет базисом для M.

4.16. Первое решение. Рассмотрим многочлен

$$P(x)=\left(x+\frac{1}{1}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \ldots \left(x+\frac{1}{n}\right),$$

который по теореме Виета имеет вид

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n,$$

где обозначено

$$a_1=\sum_{i_1=1}^{n} \frac{1}{i_1}, \quad a_2=\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2}, \ \ldots, \ a_n=\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Тогда указанная в условии задачи сумма равна

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=P(1)-1=$$
$$=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\frac{2 \cdot 3 \ldots (n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n}-1=$$
$$=(n+1)-1=n,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Обозначим

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \frac{1}{i_1 \ldots i_k}$$

через S_n и докажем индукцией по n, что $S_n=n$. При $n=1$ это верно: $S_1=1$. Пусть $n \geqslant 2$ и $S_{n-1}=n-1$, тогда

$$S_n-S_{n-1}=\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k = n} \frac{1}{i_1 \ldots i_k}=$$
$$=\frac{1}{n}+\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n-1} \frac{1}{i_1 \ldots i_l \cdot n}=\frac{1}{n}+\frac{S_{n-1}}{n},$$

т. е.

$$S_n=S_{n-1}+\frac{S_{n-1}}{n}+\frac{1}{n}=(n-1)+\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}=n.$$

4.17. При $n=1$ перестановка $(a_1)=(0)$ удовлетворяет условию задачи. При $n=4$ требуемым свойством обладает перестановка

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4)=(1;\ 3;\ 2;\ 0).$$

Пусть n — простое число. Согласно китайской теореме об остатках (теорема 23) для каждого значения $k=2, \ldots, n$ существует число b_k, удовлетворяющее условиям

$$b_k \equiv 0 \pmod{k-1},\ b_k \equiv k \pmod{n}.$$

Обозначим через a_k остаток от деления на n числа $c_k=b_k/(k-1)$, тогда

$$b_k=c_k(k-1) \equiv a_k(k-1) \pmod{n}.$$

Положим $a_1=1$ и докажем, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны. Действительно, имеем $a_n=0$ и $a_k \neq a_n$ при $k=1, \ldots, n-1$ (так как $a_n(n-1) \equiv 0 \pmod{n}$, $a_1=1$, $a_k(k-1) \equiv k \pmod{n}$ при $k=2, \ldots, n-1$). Далее, если выполнено равенство $a_l=a_k=a$, где $1<l<k<n$, то имеем

$$a(kl-k)=a_l(l-1)k \equiv lk \pmod{n},$$
$$a(kl-l)=a_k(k-1)l \equiv kl \pmod{n}.$$

Тогда

$$a(k-l)=a(kl-l)-a(kl-k) \equiv 0 \pmod{n},$$

что невозможно, так как

$$(a,\ n)=(k-l,\ n)=1.$$

Наконец, в случае $a_k=a_1$, где $1<k<n$, также получаем противоречие

$$k-1=a_k(k-1) \equiv k \pmod{n}.$$

Таким образом, множество

$$\{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}$$

состоит из n различных чисел, лежащих в множестве

$$\{0;\ 1;\ \ldots;\ n-1\},$$

а значит, совпадает с этим множеством. Докажем, что полученная перестановка

$$(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$$

удовлетворяет условию задачи. Действительно, имеем равенства

$$a_1=1,\ a_1a_2\ldots a_n=0,$$

а при $k=2, \ldots, n-1$ получаем, что числа

$$a_1a_2a_3\ldots a_k,\ 1\cdot a_2a_3\ldots a_k,\ 2a_3\ldots a_k, \ldots, (k-1)a_k,\ k$$

дают одинаковые остатки от деления на n, т. е.

$$a_1a_2\ldots a_k \equiv k \pmod{n}.$$

Следовательно, множество остатков от деления на n чисел a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2\ldots a_n$ совпадает с множеством

$$\{1;\ 2;\ \ldots;\ n-1;\ 0\}.$$

Докажем, что никакое составное число $n > 4$ не удовлетворяет условию задачи. Если $n = p^2$, то положим $q = 2p < n$, а в противном случае число n представимо в виде произведения pq, где $1 < p < q < n$. В обоих случаях

$$pq \equiv 0 \pmod n.$$

Предположим, что существует перестановка $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$, удовлетворяющая условию задачи. Тогда

$$a_k \neq 0 \text{ при } k = 1, \ldots, n-1,$$

так как иначе

$$a_1 \ldots a_k \equiv 0 \pmod n)$$

и

$$a_1 \ldots a_k a_{k+1} \equiv 0 \pmod n.$$

Возьмем такие значения $k, l < n$, для которых $a_k = p$, $a_l = q$. Обозначим

$$m = \max(k, l),$$

тогда

$$a_1 a_2 \ldots a_m \vdots a_k a_l,$$

поэтому

$$a_1 a_2 \ldots a_m \equiv 0 \pmod n$$

и

$$a_1 a_2 \ldots a_m a_{m+1} \equiv 0 \pmod n,$$

что противоречит предположению. Итак, условию задачи удовлетворяют числа 1, 4, а также все простые числа.

4.18. Число n представимо в виде произведения $p \cdot q$ взаимно простых чисел $p > 1$ и $q > 1$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ подберем числа

$$m \in \{0; 1; \ldots; p-1\}, \quad l \in \{1; 2; \ldots; q\},$$

для которых выполнено равенство $k = mq + l$, и положим $i_k = r + 1$, где r — остаток от деления числа $(mq + lp - 1)$ на n. Таким образом, получен набор чисел

$$i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1; \ldots; n\}.$$

Докажем, что среди них нет одинаковых. Пусть, напротив, нашлись два различных номера

$$k_1 = m_1 q + l_1, \quad k_2 = m_2 q + l_2,$$

для которых выполнено равенство $i_{k_1} = i_{k_2}$. Тогда число

$$(m_1 q + l_1 p) - (m_2 q + l_2 p) = (m_1 - m_2) q + (l_1 - l_2) p$$

делится на $n = pq$, но числа p, q взаимно просты, поэтому число $(m_1 - m_2)$ делится на p, а число $(l_1 - l_2)$ — на q. Поскольку

$$|m_1 - m_2| < p, \quad |l_1 - l_2| < q,$$

то справедливы равенства $m_1 - m_2 = l_1 - l_2 = 0$, откуда $k_1 = k_2$, что противоречит сделанному выше предположению. Таким образом, набор

$$(i_1; i_2; \ldots; i_n)$$

представляет собой перестановку чисел 1, 2, ..., n. Пользуясь периодичностью функций $\sin x$, $\cos x$ и группируя специальным образом слагаемые в сумме

$$S=\sum_{k=1}^{n} k\cos(2\pi i_k/n),$$

получаем

$$S=\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{l=1}^{q}(mq+l)\cos\frac{2\pi(mq+lp)}{pq}=$$

$$=\sum_{m=0}^{p-1} mq\sum_{l=1}^{q}\cos\left(\frac{2\pi m}{p}+\frac{2\pi l}{q}\right)+\sum_{l=1}^{q} l\sum_{m=0}^{p-1}\cos\left(\frac{2\pi m}{p}+\frac{2\pi l}{q}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{p-1} mq\left(\cos\frac{2\pi m}{p}\sum_{l=1}^{q}\cos\frac{2\pi l}{q}-\sin\frac{2\pi m}{p}\sum_{l=1}^{q}\sin\frac{2\pi l}{q}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{q} l\left(\cos\frac{2\pi l}{q}\sum_{m=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi m}{p}-\sin\frac{2\pi l}{q}\sum_{m=0}^{p-1}\sin\frac{2\pi m}{p}\right)=0,$$

так как

$$\sum_{l=1}^{q}\cos\frac{2\pi l}{q}=\sum_{l=1}^{q}\sin\frac{2\pi l}{q}=0$$

и

$$\sum_{m=0}^{p-1}\cos\frac{2\pi m}{p}=\sum_{m=0}^{p-1}\sin\frac{2\pi m}{p}=0$$

(для доказательства последних равенств достаточно заметить, что, согласно теореме Виета, суммы комплексных чисел

$$x_l=\cos\frac{2\pi l}{q}+i\sin\frac{2\pi l}{q},\quad l=1,\ \ldots,\ q,$$

и

$$y_m=\cos\frac{2\pi m}{p}+i\sin\frac{2\pi m}{p},\qquad m=0,\ \ldots,\ p-1,$$

являющихся корнями многочленов x^q-1 и x^p-1 соответственно, равны нулю; более элементарное доказательство этих равенств состоит в том, что если на плоскости ввести систему координат, то точки

$$(\cos(2\pi j/N);\ \sin(2\pi j/N)),\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

где $N\geqslant 2$, суть вершины правильного N-угольника с центром в начале координат, а сумма всех N векторов, проведенных из центра правильного N-угольника к его вершинам, будучи инвариантной относительно поворота плоскости вокруг этого центра на угол $2\pi/N$, равна нулевому вектору). Итак, доказано, что определенная выше перестановка $(i_1;\ i_2;\ \ldots;\ i_n)$ удовлетворяет требуемому равенству.

4.19. Обозначим через A и B множества натуральных чисел со строго возрастающими и соответственно со строго убывающими цифрами. Сумму всех чисел из какого-либо множества M будем обозначать через $S(M)$. Множество B разобьем на два непересекающихся подмножества B_0 и B_1 чисел, которые оканчиваются цифрой 0 и соответственно не оканчиваются цифрой 0; при этом

$$S(B)=S(B_0)+S(B_1).$$

Если сопоставить друг другу числа $b\in B_1$ и $(10b)\in B_0$, то получится взаимно однозначное соответствие между множествами B_1 и B_0; при этом

$$S(B_0)=10S(B_1),$$

а значит,

$$S(B)=11S(B_1).$$

Далее, если сопоставить друг другу числа

$$a=\overline{a_1\ldots a_k}\in A \quad \text{и} \quad b=\overline{(10-a_1)\ldots(10-a_k)}\in B_1$$

(при этом

$$a+b=(10/9)(10^k-1)),$$

то получится также взаимно однозначное соответствие между множествами A и B_1. Поскольку каждое число, принадлежащее множеству A, получено из числа 123456789 выбрасыванием каких-либо цифр и при каждом значении $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 9$ в множестве A имеется ровно C_9^k k-значных чисел, то

$$l=S(A)+S(B_1)=\sum_{k=1}^{9} C_9^k\,(10/9)(10^k-1)=$$

$$=(10/9)\left(\sum_{k=0}^{9} C_9^k\,10^k-\sum_{k=0}^{9} C_9^k\right)=(10/9)\left((1+10)^9-(1+1)^9\right)=$$

$$=(10/9)(11^9-2^9).$$

Обозначим через B_2 подмножество чисел из множества B, начинающихся цифрой 9, а множество всех остальных чисел из множества B вместе с числом 0 обозначим через B_3 (при этом $S(B)=S(B_2)+$ $+S(B_3)$). Тогда между числами

$$a=\overline{a_1\ldots a_k}\in A \quad \text{и} \quad b=\overline{(9-a_1)\ldots(9-a_k)}\in B_3$$

существует взаимно однозначное соответствие, при котором $a+b=$ $=10^k-1$. Следовательно,

$$m=S(A)+S(B_3)=\sum_{k=1}^{9} C_9^k\,(10^k-1)=11^9-2^9.$$

Наконец, если каждому числу

$$b=\overline{9b_1\ldots b_k}\in B_2$$

поставить в соответствие число

$$a=\overline{(9-b_1)\ldots(9-b_k)}\in A$$

при $k\geqslant 1$ и число 0 при $k=0$, то получится взаимно однозначное соответствие между множествами B_2 и $A\cup\{0\}$, при котором $a+b=$ $=10^{k+1}-1$. Следовательно,

$$n=S(A)+S(B_2)=\sum_{k=0}^{9} C_9^k(10^{k+1}-1)=10\cdot 11^9-2^9$$

и

$$m+n=S(A)+S(B_3)+S(A)+S(B_2)=2S(A)+S(B).$$

Итак, получаем систему

$$\begin{cases} S(A)+(1/11)\,S(B)=l=(10/9)\,(11^9-2^9),\\ 2S(A)+S(B)=m+n=11^{10}-2^{10}, \end{cases}$$

из которой находим

$$S(A)=(1/9)\,(11l-m-n),\qquad S(B)=(11/9)\,(m+n-2l).$$

В множествах A и B есть 9 общих элементов, а именно, однозначные числа, сумма которых равна 45. Поэтому вся искомая сумма равна

$$S(A)+S(B)-45=\frac{10}{9}(m+n)-\frac{11}{9}l-45=$$

$$=\frac{10}{9}(11^{10}-2^{10})-\frac{10}{81}\cdot 11^{10}+\frac{55}{81}\cdot 2^{10}-45=\frac{80}{81}\cdot 11^{10}-\frac{35}{81}\cdot 2^{10}-45.$$

4.20. Каждому набору $(a_1;\ \ldots;\ a_n)$ соответствует набор $b=$ $=(b_1;\ \ldots;\ b_n)$ натуральных чисел, определяемых равенствами

$$b_i=a_i+a_{i+1}+\ldots+a_n \quad \text{при} \quad i=1,\ \ldots,\ n.$$

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством исходных наборов и множеством B наборов b, удовлетворяющих условиям

$$b_1>b_2>\ldots b_n,$$
$$b_1+b_2+\ldots+b_n=1979.$$

Обозначим через $\pi(b)$ последнее число b_n в наборе b, а через $\sigma(b)$ — наибольшее число s, для которого выполнено равенство

$$b_s=b_1-s+1$$

(заметим, что $1\leqslant s\leqslant n$), а значит, и равенства

$$b_2=b_1-1,\ b_3=b_2-1,\ \ldots,\ b_s=b_{s-1}-1.$$

Определим в множестве B операции α и β, результатами действия которых на набор $b\in B$ будут некоторые новые наборы $\alpha(b)$ и $\beta(b)$

из множества B. Пусть $\pi(b) \leqslant \sigma(b)$. Тогда $b_n \leqslant n-1$ (в противном случае
$$n-1 < b_n \leqslant \sigma(b) \leqslant n, \text{ т. е. } \sigma(b) = b_n = n,$$
а значит,
$$1979 = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 = n + (n+1) + \ldots + (2n-1) = n(3n-1)/2,$$
чего не может быть ни при каком значении $n \in \mathbf{N}$), следовательно, возможна операция
$$\alpha(b_1; \ldots; b_n) = (b_1+1; b_2+1; \ldots; b_{\pi(b)}+1; b_{\pi(b)+1}; \ldots; b_{n-1}).$$
При этом
$$\pi(\alpha(b)) = b_{n-1} > b_n = \pi(b) = \sigma(\alpha(b)).$$
Пусть $\pi(b) > \sigma(b)$. Тогда зададим операцию
$$\beta(b_1; \ldots; b_n) = (b_1-1; b_2-1; \ldots; b_{\sigma(b)}-1; b_{\sigma(b)+1}; \ldots; b_n; \sigma(b)).$$
Заметим, что в случае $\sigma(b) = n$ будет выполнено необходимое неравенство $b_n - 1 > \sigma(b)$ (иначе $n = \sigma(b) < b_n \leqslant \sigma(b) + 1 = n+1$, т. е. $b_n = n+1$, $b_{n-1} = n+2$, $\ldots$, $b_1 = 2n$, а значит,
$$1979 = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 = n(3n+1)/2,$$
чего не может быть ни при каком значении $n \in \mathbf{N}$). При этом
$$\pi(\beta(b)) = \sigma(b) \leqslant \sigma(\beta(b)).$$
Множество B разобьем на пары элементов: с каждым набором b свяжем набор b', равный набору $\alpha(b)$ или $\beta(b)$ в зависимости от того, какое из неравенств $\pi(b) \leqslant \sigma(b)$ или $\pi(b) > \sigma(b)$ имеет место (при этом выполнено условие
$$\beta(\alpha(b)) = b \quad \text{или} \quad \alpha(\beta(b)) = b$$
соответственно, гарантирующее, что набор b' образует ту же самую пару наборов b, b'). Поскольку в каждой паре один из наборов четный, а другой — нечетный (под действием каждой из операций α или β четность набора, определенная четностью числа n, меняется на противоположную), то во множестве B содержится одинаковое количество четных и нечетных наборов. Следовательно, то же самое можно утверждать и о множестве исходных наборов $(a_1; \ldots; a_n)$.

4.21. а) Рассмотрим двоичные записи чисел $a_1, \ldots, a_m$ и дополним некоторые из них спереди цифрами 0 так, чтобы все записи имели равную длину k. Образуем прямоугольную таблицу размером $m \times k$ из нулей и единиц, в которой для каждого значения $i = 1, \ldots, m$ i-я строка представляет собой полученную выше запись числа a_i. Поскольку каждый столбец этой таблицы состоит из m цифр, то число n различных ненулевых столбцов в ней не превосходит $2^m - 1$. Каждому из этих n столбцов поставим в соответствие число, двоичная запись которого содержит цифру 1 в тех и только тех разрядах, в которых таблица содержит столбцы, совпадающие с данным. Полученный набор чисел $b_1, \ldots, b_n$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, так как в любом из k разрядов цифру 1 содержит не более чем одно число из набора

$$(b_1; \ldots; b_n),$$

то любое подмножество чисел из этого набора однозначно определяется двоичной записью их суммы. Следовательно, различные подмножества из полученного набора имеют различные суммы. Наконец, если для какого-либо значения

$$i \in \{1; \ldots; m\}$$

сложить все числа из набора

$$(b_1; \ldots; b_n),$$

содержащие цифры 1 только в тех разрядах, в которых их содержит число a_i, то сумма совпадает с этим числом (заметим, что во всех разрядах, в которых некоторое число из этого набора содержит цифру 1, число a_i содержит либо только цифры 1, либо только цифры 0). Так как $n < 2^m$, то утверждение доказано полностью.

б) Докажем утверждение индукцией по сумме данных чисел $N = a_1 + \ldots + a_m$. Если $N = 1$, то $m = 1$, $a_1 = 1$, и можно положить $b_1 = 1$. Пусть утверждение верно для всех наборов, сумма элементов которых меньше N, и $(a_1; \ldots; a_m)$ — произвольный набор такой, что

$$a_1 + \ldots + a_m = N.$$

Будем называть набор $(b_1; \ldots; b_n)$ допустимым для набора $(a_1; \ldots; a_m)$, если $n \leqslant m$, все подмножества множества

$$\{b_1; \ldots; b_n\}$$

имеют разные суммы чисел, причем среди этих сумм содержатся все числа $a_1, \ldots, a_m$. Нужно доказать существование хотя бы одного допустимого набора. Если все числа $a_1, \ldots, a_m$ являются четными, то рассмотрим новый набор $a_1', \ldots, a_m'$, где

$$a_i' = a_i/2 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Так как

$$a_1' + \ldots + a_m' = N/2 < N,$$

то по предположению индукции существует допустимый набор

$$(b_1'; \ldots; b_n'),$$

допустимый для набора

$$(a_1'; \ldots; a_m').$$

Тогда набор

$$(2b_1'; \ldots; 2b_n')$$

будет допустимым для набора

$$(2a_1'; \ldots; 2a_m').$$

Пусть теперь набор $(a_1; \ldots; a_m)$ содержит хотя бы одно нечетное число. Рассмотрим наименьшее среди нечетных чисел этого набора. Так как набор $(a_1; \ldots; a_m)$ не изменится при перенумерации его элементов, то можно считать, что это число равно a_m. Рассмотрим набор, состоящий из всех чисел вида a_i' $(i=1, \ldots, m-1)$, где

$$a_i' = \begin{cases} a_i/2, & \text{если } a_i \text{ четно,} \\ (a_i - a_m)/2, & \text{если } a_i \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Набор $\{a_i'\}$ содержит не более $m-1$ элементов (число его элементов может быть меньше $m-1$, если $a_i' = a_j'$ при некоторых $i \neq j$). Заметим, что все элементы a_i' — натуральные числа. Сумма чисел набора $\{a_i'\}$ не превосходит

$$a_1' + \ldots + a_{m-1}' \leqslant \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{2} \leqslant a_1 + \ldots + a_{m-1} < N.$$

Поэтому к нему применимо предположение индукции, согласно которому существует набор $(b_1'; \ldots; b_k')$, допустимый для набора $\{a_i'\}$. Докажем, что набор

$$(b_1; \ldots; b_{k+1}),$$

где $b_i = 2b_i'$ при $i=1, \ldots, k$ и $b_{k+1} = a_m$, является допустимым для набора

$$(a_1; \ldots; a_n).$$

Количество элементов набора $(b_1; \ldots; b_{k+1})$ не превосходит $k+1 \leqslant \leqslant m-1+1=m$. Далее, заметим, что b_{k+1} — единственное нечетное число в наборе $(b_1; \ldots; b_{k+1})$. Все подмножества набора

$$(b_1; \ldots; b_{k+1})$$

имеют разные суммы чисел. Действительно, пусть суммы чисел каких-либо двух подмножеств одинаковы. Если они равны четному числу, то оба этих подмножества не содержат элемента b_{k+1}, и, разделив все элементы этих подмножеств на 2, мы получим два подмножества множества

$$\{b_1'; \ldots; b_k'\},$$

имеющих одинаковые суммы чисел, что противоречит допустимости набора

$$(b_1'; \ldots; b_k').$$

Если же суммы чисел двух подмножеств набора

$$(b_1; \ldots; b_{k+1})$$

равны нечетному числу, то оба этих подмножества содержат элемент b_{k+1}, и, удалив его из этих подмножеств, мы получим два подмножества набора

$$(b_1; \ldots; b_k)$$

с одинаковой четной суммой чисел, т. е. придем к уже разобранному случаю. Остается проверить, что каждое число a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ представимо в виде суммы различных элементов набора

$$(b_1;\ \ldots;\ b_k).$$

Число a_m само является элементом этого набора. Если $i < m$ и a_i четно, то

$$a_i/2 = a'_i = b'_l + \ldots + b'_p$$

для некоторых элементов $b'_l, \ldots, b'_p$ из набора

$$(b'_1;\ \ldots;\ b'_k).$$

Поэтому

$$a_i = 2b'_l + \ldots + 2b'_p = b_l + \ldots + b_p$$

Если же $i < m$ и a_i нечетно, то

$$a_i = a_m + 2a'_i = b_{k+1} + 2(b'_l + \ldots + b'_p) = b_{k+1} + b_l + \ldots + b_p$$

для некоторых элементов $b_l, \ldots, b_p$ из набора

$$(b_1;\ \ldots;\ b_k).$$

Утверждение задачи доказано.

4.22. Предположим, что описанное в задаче множество M существует. Обозначим через m_k количество чисел из множества M, не превосходящих числа $k \in \mathbf{N}$. Тогда количество чисел $a \in M$, удовлетворяющих неравенствам $10 < a \leqslant k$, равно $m_k - m_{10}$, а количество различных пар таких чисел равно

$$C^2_{m_k - m_{10}} = (m_k - m_{10})(m_k - m_{10} - 1)/2.$$

Если каждой такой паре чисел $a > b$ поставить в соответствие их разность $a - b$, то все полученные разности будут различны. Действительно, пусть для пар $a > b$ и $c > d$ справедливо равенство $a - b = c - d$, тогда $a + d = c + b$ и, согласно, условию 2), либо $a = b$ (что неверно, ибо $a > b$), либо $a = c$ (откуда $b = d$, т. е. пары совпадают). Поскольку все полученные разности меньше k, то имеем неравенства

$$k > C^2_{m_k - m_{10}} > (m_k - m_{10} - 1)^2/2.$$

Но $m_{10} \leqslant 10$, поэтому

$$m_k < \sqrt{2k} + m_{10} + 1 \leqslant \sqrt{2k} + 11$$

для любого значения $k = 11, 12, \ldots$ Далее, любое число

$$n \in \{2;\ 3;\ \ldots;\ 2k\}$$

представимо, согласно условию 1), в виде суммы двух чисел из множества M, причем либо оба этих числа не превосходят k, либо ровно одно из них больше k, но меньше $2k$. Поэтому количество таких пар чисел, с одной стороны, не меньше $2k - 1$, а с другой стороны, не больше чем

$$\frac{m_k(m_k-1)}{2}+m_k(m_{2k}-m_k)=\frac{m_k}{2}(2m_{2k}-m_k-1)\leqslant\frac{m_k}{2}(2m_{2k}-m_k).$$

Таким образом, при любом значении $k>10$ имеем неравенство

$$m_k(2m_{2k}-m_k)\geqslant 4k-2,$$

а учитывая, что

$$m_{2k}<\sqrt{4k}+11=\alpha \quad \text{и} \quad m_k<\sqrt{2k}+11=\beta<\alpha,$$

получаем

$$4k-2\leqslant m_k(2\alpha-m_k)=(\alpha-(\alpha-m_k))(\alpha+(\alpha-m_k))=$$
$$=\alpha^2-(\alpha-m_k)^2\leqslant 4k+44\sqrt{k}+121-k(2-\sqrt{2})^2.$$

Следовательно, при всех значениях $k>10$ квадратный трехчлен

$$f(\sqrt{k})=k(2-\sqrt{2})^2-44\sqrt{k}-123$$

принимает только неположительные значения, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что множества M, удовлетворяющего условиям задачи, не существует.

§ 5. Различные свойства чисел

5.1. Так как $a, b, c\in\mathbf{Q}$, то число

$$d=\frac{a-b}{c}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

рационально, следовательно, рациональны и числа

$$\sqrt{a}=(c+d)/2, \quad \sqrt{b}=(c-d)/2.$$

5.2. Возьмем положительные числа

$$a=\sqrt{2} \quad \text{и} \quad b=\log_{\sqrt{2}}3,$$

тогда число

$$a^b=\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}}3}=3$$

является натуральным. Число a иррационально. Докажем, что число b также иррационально. Действительно, в противном случае имеем $b=p/q$, где $p, q\in\mathbf{N}$, откуда

$$p/q=2\log_2 3, \text{ т. е. } 2^p=3^{2q},$$

что невозможно.

5.3. Обозначив через k натуральное число, удовлетворяющее условию

$$2^k\leqslant n<2^{k+1},$$

а через M — произведение всех нечетных чисел, не превосходящих n, умножим каждое слагаемое суммы

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

на произведение $2^{k-1}M$. Любое число $m \in \mathbf{N}$ представимо в виде $m = 2^p \cdot q$, где $p \in \mathbf{Z}^+$, q — нечетное число. При этом, если $m \leqslant n$, то $q \leqslant n$ (ибо $q = m/2^p \leqslant n$), а если, кроме того, $m \neq 2^k$, то $p < k$ (действительно, в случае $p > k$ имеем

$$m = 2^p \cdot q \geqslant 2^{k+1} > n,$$

а в случае $p = k$ имеем

$$q \neq 1 \text{ и } m = 2^p \cdot q \geqslant 2^k \cdot 3 > 2^{k+1} > n).$$

Поэтому число

$$a_m = \frac{1}{m} \cdot 2^{k-1}M$$

является целым при любом значении $m = 1, 2, \ldots, n$, кроме одного (равного 2^k), следовательно, число

$$S \cdot 2^{k-1} \cdot M = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

не является целым. Таким образом, сумма S также не может быть целым числом.

5.4. Заметим, что если число n удовлетворяет условию задачи, то числа $2n+2$ и $2n+9$ тоже ему удовлетворяют. Действительно, если

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

где

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{N} \text{ и } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1,$$

то

$$2n+2 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 2,$$

причем

$$\frac{1}{2a_1} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

и

$$2n+9 = 2a_1 + \ldots + 2a_k + 3 + 6,$$

причем

$$\frac{1}{2a_1} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Теперь докажем по индукции, что все числа $n \geqslant 33$ удовлетворяют условию задачи. Числа 33, ..., 73 обладают нужным свойством. Пусть уже известно, что этим свойством обладают все числа от 33 до $n-1$, где $n > 73$. Если число n четно, то оно представимо в виде $2m+2$, а если нечетно — то в виде $2m+9$, где $m \in \mathbf{N}$, $n > m \geqslant (74-9)/2 > 32$. В обоих случаях, согласно доказанному выше, число n удовлетворяет условию задачи, поскольку число m этому условию удовлетворяет. Утверждение доказано.

5.5. Поскольку двоичная запись числа n, делящегося на 17, содержит ровно 3 цифры 1 (а остальные цифры — 0), то это число представляется в виде суммы

$$n=2^k+2^l+2^m,$$

где числа k, l, $m\in\mathbf{Z}^+$ удовлетворяют неравенствам $k<l<m$. Пусть рассматриваемая двоичная запись содержит менее 6 цифр 0. Тогда $m\leqslant 7$ и соотношение

$$n\equiv 0 \pmod{17}$$

не может быть выполнено, поскольку числа вида 2^i при $i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ сравнимы по модулю 17 с числами 1, 2, 4, 8, —1, —2, —4, —8 соответственно, и несложный перебор показывает, что сумма любых 3 различных чисел из последнего набора не делится на 17. Поэтому в двоичной записи числа n имеется по меньшей мере 6 цифр 0. Если же их ровно 7, то $m=9$. Тогда число n не может быть нечетным, так как иначе $k=0$ и

$$2^k+2^m\equiv 3 \pmod{17},$$

в то время как соотношение

$$2^l\equiv -3 \pmod{17}$$

не выполнено ни при каких значениях

$$l\in\{1; \ldots; 8\}.$$

Следовательно, в этом случае число n является четным (оно действительно может делиться на 17, например, если $k=1$, $l=6$, $m=9$).

5.6. Обозначим через $f(m)$ число цифр в десятичной записи числа $m\in\mathbf{N}$, тогда для искомого числа n имеем

$$f(n^3)+f(n^4)=10.$$

Кроме того, $f(n^3)\geqslant 4$, так как в противном случае были бы выполнены соотношения $n^3<1000$, $n<10$ и $n^4<10\,000$, откуда

$$f(n^3)+f(n^4)<4+5<10.$$

С другой стороны, если $f(n^3)>4$, то $n>10$, $n^4>10n^3$, откуда

$$f(n^3)\geqslant 5, \quad f(n^4)\geqslant f(n^3)+1$$

и

$$f(n^3)+f(n^4)\geqslant 5+6>10.$$

Таким образом, $f(n^3)=4$ и $f(n^4)=6$. Далее, из неравенства $n^3<10\,000$ имеем оценку $n<22$, так как $22^3>10\,000$. Аналогично, из неравенства $n^4\geqslant 100\,000$ имеем оценку $n>17$, так как $17^4<100\,000$. Итак, $18\leqslant n\leqslant 21$. Поскольку любое натуральное число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр, то

$$n^3+n^4\equiv(0+1+\ldots+9) \pmod 9,$$

откуда

$$n^3(n+1)\equiv 0 \pmod 9.$$

Последнему условию не удовлетворяют значения $n=19$ и $n=20$, а значение $n=21$ не обладает требуемым в задаче свойством, так как оба числа 21^3 и 21^4 оканчиваются цифрой 1. Наконец, проверка показывает, что единственно возможное значение $n=18$ удовлетворяет условию задачи ($18^3=5832$, $18^4=104\,976$).

5.7. Пусть n — искомое число, s — сумма цифр его десятичной записи, а k — количество этих цифр. Тогда имеют место соотношения

$$s^5=n^2, \quad s\leqslant 9k, \quad n\geqslant 10^{k-1},$$

из которых получаем, что

$$9^5k^5\geqslant s^5=n^2\geqslant 10^{2k-2}.$$

Обозначим

$$a_k=9^5k^5/10^{2k-2},$$

тогда из соотношений

$$\frac{9^5(k+1)^5}{9^5k^5}=\frac{(k+1)^5}{k^5}\leqslant 2^5 < 10^2=\frac{10^{2(k+1)-2}}{10^{2k-2}},$$

выполненных при каждом значении $k\in\mathbf{N}$, получаем оценку $a_{k+1} < a_k$, т. е. последовательность чисел a_k убывает. Поскольку $a_6 < 1$, то при всех $k\geqslant 6$ имеем неравенства

$$9^5k^5 < 10^{2k-2},$$

а значит, число k не может принимать значений, больших 5. Поэтому $s\leqslant 9\cdot 5=45$. Из равенства $s^5=n^2$ заключаем, что число s должно быть квадратом какого-либо натурального числа, так как все простые делители в разложении числа s^5 (а значит, и числа s) на простые множители должны иметь четные степени. Поэтому число s может принимать лишь следующие значения: 1, 4, 9, 16, 25, 36. Проверка показывает, что лишь для двух значений $s=1$ и $s=9$ число $n=\sqrt{s^5}$ имеет сумму цифр, равную s. Поэтому условию задачи удовлетворяют два значения $n=1$ и $n=243$.

5.8. Предположим, что существует дробь m/n, где $m, n\in\mathbf{Z}$ и $m < n\leqslant 100$, причем десятичная запись этой дроби имеет вид

$$m/n=0,a_1a_2\ldots a_k167a_{k+4}\ldots,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+4}, \ldots$ — некоторые цифры. Тогда для числа $p=10^km/n$ имеем

$$p-[p]=0,167a_{k+4}\ldots,$$

поэтому

$$0,167\leqslant\frac{10^km-[p]\,n}{n} < 0,168.$$

Обозначим

$$q=10^km-[p]\,n\in\mathbf{Z},$$

тогда имеем

$$1,002\leqslant 6q/n < 1,008.$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$0 < 0,002\leqslant 6q/n-1=(6q-n)/n < 0,008 < 1/100,$$

из которых вытекают оценки $0 < 6q - n < n/100 \leqslant 1$, т. е. число $6q-n$ не может быть целым. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

5.9. Пусть, вопреки утверждению задачи, существуют числа $n, m, k \in \mathbf{N}$, удовлетворяющие равенству

$$2^{2^n} + 1 = m^5 - k^5,$$

причем число

$$m^5 - k^5 = (m-k)(m^4 + m^3k + m^2k^2 + mk^3 + k^4)$$

является простым. Тогда $m - k = 1$ и

$$2^{2^n} + 1 = (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1,$$

поэтому число

$$2^{2^n} = 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$$

делится на 5. Полученное противоречие доказывает справедливость требуемого утверждения.

5.10. Предположим, что при некотором значении $n \in \mathbf{N}$ число

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

является кубом целого числа. Заметим, что двойка входит в это произведение с показателем $n-1$ (ибо второй сомножитель $2^n - 1$ не делится на 2), поэтому $n - 1 = 3k$, т. е. $n = 3k+1$, где $k \in \mathbf{Z}^+$. Но тогда число

$$2^{n+1} - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(7+1)^k - 1 \equiv 3 \pmod 7$$

не может быть кубом целого числа, так как куб любого целого числа при делении на 7 может давать остаток 0, 1 или 6 (действительно,

$$(7m)^3 \equiv 0 \pmod 7, \quad (7m \pm 1)^3 \equiv \pm 1 \pmod 7,$$
$$(7m \pm 2)^3 \equiv \pm 1 \pmod 7, \quad (7m \pm 3)^3 \equiv \mp 1 \pmod 7)).$$

Таким образом, ни при каком значении $n \in \mathbf{N}$ числа $2^{n+1} - 1$ и $2^{n-1}(2^n - 1)$ не могут одновременно быть кубами целых чисел.

5.11. Требуется доказать, что из неравенства $n\sqrt{7} - m > 0$, где $n, m \in \mathbf{N}$, вытекает неравенство $n\sqrt{7} - m > 1/m$. Если $n\sqrt{7} - m > 1$, то тем более $n\sqrt{7} - m > 1/m$. Рассмотрим случай $0 < n\sqrt{7} - m < 1$ (равенство $n\sqrt{7} - m = 1$ невозможно, так как иначе число $\sqrt{7} = (1+m)/n$ было бы рациональным). Заметим, что натуральное число

$$7n^2 - m^2 = (n\sqrt{7} - m)(n\sqrt{7} + m)$$

не может быть равно 1 или 2, так как число m^2 не может давать при делении на 7 остаток 6 или 5 (действительно,

$$(7k)^2 \equiv 0 \pmod 7, \quad (7k \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod 7,$$
$$(7k \pm 2)^2 \equiv 4 \pmod 7, \quad (7k \pm 3)^2 \equiv 2 \pmod 7)).$$

Поэтому $7n^2 - m^2 \geqslant 3$ и, следовательно,

$$n\sqrt{7} - m \geqslant 3/(n\sqrt{7} + m) > 1/m,$$

поскольку

$$3m \geqslant 2m + 1 > 2m + (n\sqrt{7} - m) = n\sqrt{7} + m.$$

Утверждение доказано.

5.12. Докажем, что число

$$m = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980}$$

является целым, и определим его последнюю цифру. Обозначим

$$a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n.$$

Тогда при любом значении $n \in \mathbf{Z}^+$ справедливо равенство

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n.$$

Действительно, пусть

$$(5 + 2\sqrt{6})^n = \alpha, \quad (5 - 2\sqrt{6})^n = \beta,$$

тогда

$$a_n = \alpha + \beta, \quad a_{n+1} = (5 + 2\sqrt{6})\,\alpha + (5 - 2\sqrt{6})\,\beta,$$

$$a_{n+2} = (5 + 2\sqrt{6})^2\,\alpha + (5 - 2\sqrt{6})^2\,\beta = (49 + 20\sqrt{6})\,\alpha +$$
$$+ (49 - 20\sqrt{6})\,\beta = (50 + 20\sqrt{6})\,\alpha + (50 - 20\sqrt{6})\,\beta - (\alpha + \beta) =$$
$$= 10a_{n+1} - a_n.$$

Так как числа $a_0 = 2$, $a_1 = 10$ целые, то $a_n \in \mathbf{Z}$ при $n \in \mathbf{Z}^+$ и, кроме того, каждое из чисел

$$a_n + a_{n+2} = 10a_{n+1}$$

делится на 10. Поэтому каждое из чисел

$$a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_n)$$

также делится на 10, а значит, числа

$$a_2, \; a_6, \; a_{10}, \; \ldots, \; a_{990}$$

дают одинаковые остатки при делении на 10. Поскольку $a_2 = 98$, десятичная запись числа $m = a_{990}$ оканчивается цифрой 8. Наконец, из оценок

$$m = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980} > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} >$$
$$> m - (0,5)^{1980} > m - 0,1$$

получим, что в десятичной записи числа $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$ в разряде единиц стоит цифра 7, а в разряде десятых — 9.

5.13. Для заданных чисел m, $n \in \mathbf{N}$, пользуясь биномом Ньютона, получаем

$$(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (\sqrt{m})^{n-i} (\pm\sqrt{m-1})^i.$$

В случае $n=2j$ ($j\in\mathbf{N}$) имеем

$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=$$

$$=\sum_{i=0}^{j} C_n^{2i}(\sqrt{m})^{2j-2i}(\sqrt{m-1})^{2i}\pm$$

$$\pm\sum_{i=1}^{j} C_n^{2i-1}(\sqrt{m})^{2j-2i+1}(\sqrt{m-1})^{2i-1}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j} C_n^{2i}m^{j-i}(m-1)^i\pm\sqrt{m(m-1)}\sum_{i=1}^{j} C_n^{2i-1}m^{j-i}(m-1)^{i-1}=$$

$$=a\pm b\sqrt{m(m-1)},$$

где a, $b\in\mathbf{Z}^+$. В случае $n=2j-1$ ($j\in\mathbf{N}$) имеем

$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=$$

$$=\sum_{i=0}^{j-1} C_n^{2i}(\sqrt{m})^{2j-1-2i}(\sqrt{m-1})^{2i}\pm$$

$$\pm\sum_{i=1}^{j} C_n^{2i-1}(\sqrt{m})^{2j-2i}(\sqrt{m-1})^{2i-1}=$$

$$=\sqrt{m}\sum_{i=0}^{j-1} C_n^{2i}m^{j-i-1}(m-1)^i\pm\sqrt{m-1}\sum_{i=1}^{j} C_n^{2i-1}m^{j-i}(m-1)^{i-1}=$$

$$=c\sqrt{m}\pm d\sqrt{m-1},$$

где c, $d\in\mathbf{Z}^+$. В обоих случаях имеют место равенства

$$(\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1})^n=\sqrt{k}\pm\sqrt{l},$$

где k, $l\in\mathbf{Z}^+$, причем

$$k-l=(\sqrt{k}+\sqrt{l})(\sqrt{k}-\sqrt{l})=$$

$$=(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})^n=((\sqrt{m})^2-(\sqrt{m-1})^2)^n=1.$$

Поэтому

$$l=k-1 \text{ и } (\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1},$$

что и требовалось доказать.

5.14. Выберем целое число $N>1/\varepsilon$ и каждой паре значений

$$x,\ y\in[0;\ 1)$$

поставим в соответствие пару чисел u, v, определяемых формулами

$$u=[Nx],\quad v=[Ny].$$

Тогда, если двум парам $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ соответствует одна и та же пара $(u;\ v)$, то

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{N}(u+\{Nx_1\})-\frac{1}{N}(u+\{Nx_2\})\right|=$$

$$=\frac{1}{N}|\{Nx_1\}-\{Nx_2\}|<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

и аналогично $|y_1-y_2|<\varepsilon$. Поскольку

$$u,\ v\in\{0;\ \ldots;\ N-1\},$$

то всего различных пар $(u;\ v)$ имеется N^2. Рассмотрим множество из (N^2+1) пар значений

$$x=\{la\},\quad y=\{lb\} \text{ при } l=0,\ 1,\ \ldots,\ N^2.$$

По принципу Дирихле (теорема 1) хотя бы двум парам (скажем, при $l=i$ и $l=j$, где $i>j$) из этого множества соответствует одна и та же пара $(u;\ v)$. Поэтому, обозначив

$$n=i-j,\ k=[ia]-[ja],\quad m=[ib]-[jb],$$

получаем требуемые неравенства

$$|na-k|=|(ia-[ia])-(ja-[ja])|=|\{ia\}-\{ja\}|<\varepsilon,$$
$$|nb-m|=|(ib-[ib])-(jb-[jb])|=|\{ib\}-\{jb\}|<\varepsilon.$$

Замечание. Решение допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть квадрат

$$K=\{(x;\ y)\,|\,0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<1\}$$

на координатной плоскости разбит на N^2 квадратиков со стороной $1/N$ каждый. Тогда, согласно решению, двум парам значений x_1, y_1 и x_2, y_2 соответствует одна и та же пара целых чисел u, v в том и только в том случае, если точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ попадают в один и тот же квадратик.

5.15. Докажем, что для любого значения $k\in\mathbf{N}$ существует бесконечно много чисел $m\in\mathbf{N}$, удовлетворяющих условию

$$5^m\equiv 1 \pmod{2^k}.$$

Действительно, среди чисел

$$5^0,\ 5^1,\ 5^2,\ \ldots,\ 5^{2^k}$$

найдутся два числа 5^p и 5^q $(p>q)$, дающие при делении на 2^k одинаковые остатки. Тогда их разность

$$5^p-5^q=5^q(5^{p-q}-1)$$

делится на 2^k, а значит, число $5^{p-q}-1$ и все числа вида

$$5^{r(p-q)}-1\quad (r\in\mathbf{N})$$

делятся на 2^k. Таким образом, для каждого значения $m=r(p-q)$, $r\in\mathbf{N}$, имеем

$$5^m\equiv 1 \pmod{2^k},$$

откуда

$$5^{m+k}\equiv 5^k \pmod{10^k},$$

т. е. последние k цифр числа 5^{m+k} образуют десятичную запись числа 5^k. Пусть число k удовлетворяет неравенству $2^k>10^{1976}$, тогда десятичная запись числа

$$5^k=10^k/2^k<10^{k-1976}$$

содержит не более $k-1976$ цифр. Следовательно, среди последних k цифр числа 5^{m+k} ненулевыми могут быть только последние $k-1976$ цифр, а остальные 1976 цифр (идущие подряд) являются нулями. Утверждение доказано.

5.16. Прежде всего индукцией по $j\in\mathbf{Z}^+$ докажем, что число $5^{2^j}-1$ делится на 2^{j+2}, но не делится на 2^{j+3}. При $j=0$ имеем

$$5^{2^0}-1=4,$$

т. е. утверждение верно. Далее, пусть для некоторого $j\geqslant 0$ число $5^{2^j}-1$ делится на 2^{j+2}, но не делится на 2^{j+3}, тогда число

$$5^{2^{j+1}}-1=(5^{2^j}-1)(5^{2^j}+1)$$

делится на 2^{j+3}, но не делится на 2^{j+4}, так как

$$5^{2^j}+1=(4+1)^{2^j}+1\equiv 2 \pmod 4).$$

Докажем теперь утверждение задачи индукцией по $m\in\mathbf{N}$. При $m=1$ получаем верное утверждение, так как последняя нечетная цифра 5 (десятичной записи) числа 5^n при $n>1$ всегда соседствует с предпоследней четной цифрой 2. Пусть утверждение справедливо для некоторого значения $m\geqslant 1$, т. е. существует бесконечно много чисел $n\in\mathbf{N}$, для каждого из которых число 5^n оканчивается $m+1$ цифрами чередующейся четности. Пусть 5^n — одно из таких чисел, причем $5^n>10^{m+2}$. Построим число 5^k, оканчивающееся $m+2$ цифрами чередующейся четности. Если $(m+2)$-я и $(m+1)$-я цифры (считая справа) числа 5^n имеют разную четность, то положим $k=n$. В противном случае положим $k=n+2^{m-1}$, тогда имеем

$$5^{k-(m+2)}-5^{n-(m+2)}\equiv 5^{n-(m+2)}(5^{2^{m-1}}-1)\equiv 2^{m+1} \pmod{2^{m+2}},$$

поскольку число $5^{2^{m-1}}-1$ делится на 2^{m+1}, но не делится на 2^{m+2}. Поэтому

$$5^k-5^n\equiv 5\cdot 10^{m+1} \pmod{10^{m+2}},$$

т. е. последние $m+1$ цифр чисел 5^k и 5^n просто совпадают, а $(m+2)$-е цифры этих чисел имеют разную четность. Таким образом, число 5^k построено (причем, поскольку $5^k\geqslant 5^n$, таких чисел бесконечно много), а значит, утверждение справедливо и для значения $m+1$. Задача решена.

5.17. Обозначим через x_1 и x_2 расстояния от некоторой точки внутри прямоугольника до двух его противоположных сторон, а через y_1 и y_2 — расстояния до двух других его сторон. Тогда по условию стороны прямоугольника

$$A=x_1+x_2 \quad \text{и} \quad B=y_1+y_2$$

являются нечетными числами. Предположим, что найдутся числа

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}\in\mathbf{Z},$$

удовлетворяющие условиям

$$x_i^2+y_j^2=a_{ij}^2$$

(здесь и ниже i, $j=1$, 2). Обозначим

$$u_i=x_iAB, \quad v_j=y_jAB.$$

Тогда имеем

$$u_1-u_2=(x_1-x_2)\,AB=(x_1^2-x_2^2)B=((x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_1^2))\,B=$$
$$=(a_{11}^2-a_{21}^2)\,B=C,$$
$$u_1+u_2=(x_1+x_2)\,AB=A^2B=D.$$

Аналогично получаем

$$v_1-v_2=(a_{11}^2-a_{12}^2)\,A=E, \quad v_1+v_2=AB^2=F.$$

Наконец, имеем

$$u_i^2+v_j^2=(x_i^2+y_j^2)\,A^2B^2=a_{ij}^2A^2B^2=b_{ij}^2.$$

При этом числа C, E и b_{ij} целые, а D и F нечетные. Предположим, что все числа u_i, v_j целые. Тогда одно из чисел u_1, u_2 является нечетным (ибо их сумма нечетна) и одно из чисел v_1, v_2 также нечетно. Обозначая эти два числа через u и v, а сумму их квадратов через b^2, имеем:

$$u^2\equiv 1 \pmod 4, \quad v^2\equiv 1 \pmod 4,$$

и равенство

$$u^2+v^2=b^2$$

невозможно, так как

$$b^2\not\equiv 2 \pmod 4.$$

Полученное противоречие доказывает, что не все числа u_i, v_j являются целыми. Поэтому хотя бы одно из целых чисел

$$U_i=2u_i, \; V_j=2v_j \; (2u_i=D\pm C, \; 2v_j=F\pm E)$$

является нечетным. Пусть нечетным оказалось, например, число U_1 (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда из равенства

$$u_1^2+v_1^2=b_{11}^2$$

получаем равенство

$$U_1^2+V_1^2=4b_{11}^2,$$

которое невозможно, так как

$$U_1^2\equiv 1 \pmod 4, \quad 4b_{11}^2\equiv 0 \pmod 4, \quad \text{но} \quad V_1^2\not\equiv 3 \pmod 4.$$

Доказательство закончено.

5.18. Предположим, что указанная в задаче пирамида существует. Обозначим через g длину стороны квадрата, служащего ее основанием, а через h — высоту пирамиды. Тогда длина бокового ребра пирамиды, ее полная поверхность и объем равны соответственно

$$f=\sqrt{h^2+2\,(g/2)^2}, \quad s=g^2+2g\sqrt{h^2+(g/2)^2} \quad \text{и} \quad v=g^2h/3.$$

Поскольку $g, f, s, v \in \mathbf{N}$, то числа

$$x = g^3,\ y = 6v,\ z = g(s - g^2),\ u = 2g^2 f$$

являются натуральными, причем справедливы соотношения

$$x^2 + y^2 = g^6 + 36v^2 = 4g^4\ ((g/2)^2 + h^2) = g^2(s - g^2)^2 = z^2,$$
$$x^2 + z^2 = g^6 + 4g^4(h^2 + (g/2)^2) = 4g^4(h^2 + 2(g/2)^2) = u^2.$$

Таким образом, система уравнений в натуральных числах

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x^2 + z^2 = u^2 \end{cases}$$

имеет решения. Выберем среди них решение $(x_0;\ y_0;\ z_0;\ u_0)$, для которого величина $x \in \mathbf{N}$ принимает наименьшее возможное значение x_0. Тогда числа $x_0;\ y_0;\ z_0;\ u_0$ попарно взаимно просты. Действительно, если какие-либо два из них одновременно делятся на некоторое простое число p, то из равенств

$$x_0^2 + y_0^2 = z_0^2,\ x_0^2 + z_0^2 = u_0^2,\ y_0^2 + u_0^2 = 2z_0^2$$

следует, что и два других числа также делятся на p. Но тогда набор $(x_0/p;\ y_0/p;\ z_0/p;\ u_0/p)$ представляет собой решение системы, причем число $x_0/p < x_0$, что противоречит выбору значения x_0. Кроме того, число x_0 четно, а значит, числа y_0, z_0, u_0 нечетны. Действительно, если x_0 нечетно, то

$$x_0^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

а число $u_0^2 = 2x_0^2 + y_0^2$ при делении на 4 дает остаток 2 или 3 (в зависимости от четности числа y_0), чего не может быть. Из равенства $x_0^2 = z_0^2 - y_0^2$ получаем равенство

$$\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 = \frac{z_0 + y_0}{2} \cdot \frac{z_0 - y_0}{2},$$

причем натуральные числа $(z_0 + y_0)/2$ и $(z_0 - y_0)/2$ взаимно просты, так как в противном случае выполнялись бы соотношения

$$(z_0,\ y_0) = (z_0,\ z_0 - y_0) \geqslant$$
$$\geqslant \left(z_0, \frac{z_0 - y_0}{2}\right) = \left(z_0 - \frac{z_0 - y_0}{2}, \frac{z_0 - y_0}{2}\right) = \left(\frac{z_0 + y_0}{2}, \frac{z_0 - y_0}{2}\right) > 1,$$

т. е. числа z_0 и y_0 не были бы взаимно простыми. Следовательно, числа $(z_0 + y_0)/2$, $(z_0 - y_0)/2$ являются квадратами некоторых взаимно простых чисел $k, l \in \mathbf{N}$ соответственно, поэтому

$$x_0 = 2kl,\ y_0 = k^2 - l^2,\ z_0 = k^2 + l^2.$$

Аналогично, из равенства

$$x_0^2 = u_0^2 - z_0^2$$

вытекают соотношения

$$x_0 = 2mn,\ z_0 = m^2 - n^2,\ u_0 = m^2 + n^2$$

для некоторых чисел m, $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} kl = mn, \\ k^2 + l^2 = m^2 - n^2. \end{cases}$$

Обозначим $(k, m) = a$, тогда

$$k = ab, \ m = ac, \text{ где } a, b, c \in \mathbf{N} \text{ и } (b, c) = 1.$$

Равенство $kl = mn$ записывается в виде $abl = acn$, откуда $bl = cn$ и $l = cd$, где $d \in \mathbf{N}$ (ибо $bl \vdots c$, но $(b, c) = 1$). Следовательно, $bcd = cn$, откуда $n = bd$, причем из условия

$$1 = (k, l) = (ab, cd)$$

вытекает соотношение $(a, d) = 1$. Далее, имеем равенство

$$a^2b^2 + c^2d^2 = a^2c^2 - b^2d^2,$$

из которого получаем условие

$$(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = 2a^2c^2.$$

Поскольку

$$(a^2 + d^2, a^2) = (d^2, a^2) = 1 \text{ и } (b^2 + c^2, c^2) = (b^2, c^2) = 1,$$

то последнее условие выполнимо лишь в следующих двух случаях:

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = 2c^2, \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a^2 + d^2 = c^2, \\ b^2 + c^2 = 2a^2. \end{cases}$$

В этих случаях соответственно имеем

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = c^2, \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} d^2 + b^2 = a^2, \\ d^2 + a^2 = c^2, \end{cases}$$

откуда получаем, что один из наборов

$$(b;\ d;\ c;\ a) \text{ или } (d;\ b;\ a;\ c)$$

удовлетворяет исходной системе наряду с набором

$$(x_0;\ y_0;\ z_0;\ u_0).$$

Так как $x_0 = 2mn = 2mbd$, то $b < x_0$ и $d < x_0$, что противоречит выбору значения x_0. Утверждение доказано.

5.19. Докажем требуемое утверждение сначала для значений

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Построим многочлен степени не выше $(n-1)$, который в каждой точке a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ принимает значение a_i^k. Согласно формуле Лагранжа (см. теорему 62) этот многочлен имеет вид

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{p_i} \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x - a_j),$$

а коэффициент при x^{n-1} равен $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k / p_i$. С другой стороны, многочлен $P(x)$ совпадает с многочленом x^k, поэтому при $k < n-1$ указанный коэффициент равен нулю, а при $k=n-1$ — единице. Таким образом, доказано, что число $\sum_{i=1}^{n} a_i^k/p_i$ является целым при каждом значении $k=0, 1, \ldots, n-1$. Докажем теперь, что если для некоторого числа $k \geqslant n$ и чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}$ выполнены равенства

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_1^{k-1}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-1}}{p_2}+\ldots+\dfrac{a_n^{k-1}}{p_n}=b_1, \\ \dfrac{a_1^{k-2}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-2}}{p_2}+\ldots+\dfrac{a_n^{k-2}}{p_n}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a_1^{k-n}}{p_1}+\dfrac{a_2^{k-n}}{p_2}+\ldots+\dfrac{a_n^{k-n}}{p_n}=b_n, \end{array}\right. \tag{1}$$

то число

$$b_0=\frac{a_1^k}{p_1}+\frac{a_2^k}{p_2}+\ldots+\frac{a_n^k}{p_n}$$

является целым. Тогда, согласно принципу математической индукции, требуемое утверждение будет доказано для любого $k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим многочлен

$$x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_n,$$

корнями которого являются числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В силу теоремы Виета коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ этого многочлена являются целыми числами, при этом для каждого $j=1, 2, \ldots, n$ выполнены равенства

$$a_j^n=-\sum_{i=1}^{n} c_i a_j^{n-i}.$$

Умножая первое равенство выписанной системы (1) на c_1, второе — на c_2, ..., последнее — на c_n, а затем складывая все полученные равенства, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \frac{a_j^{k-i}}{p_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k-n}}{p_j}\sum_{i=1}^{n} c_i a_j^{n-i}=$$
$$=-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k-n}}{p_j}\,a_j^n=-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^k}{p_j}=-b_0,$$

т. е. число

$$b_0=-\sum_{i=1}^{n} c_i b_i$$

является целым, что и требовалось доказать.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 6. Уравнения и системы

6.1. Число $x=1/3$ является решением данного уравнения. Докажем, что других решений нет. При $x>-1/3$ функции $y_1(x)=8^x$ и $y_2(x)=3x+1$ принимают положительные значения и возрастают, следовательно, их произведение (левая часть уравнения) также является возрастающей функцией. Поэтому на промежутке $(-1/3;\ +\infty)$ уравнение не может иметь более одного решения. Далее, при $x\leqslant -1/3$ имеем $y_1(x)>0$, $y_2(x)\leqslant 0$, а значит, $y_1(x)\,y_2(x)\leqslant 0$. Поэтому на промежутке $(-\infty;\,-1/3]$ уравнение не имеет решений. Таким образом, получаем ответ: 1/3.

6.2. Обозначим

$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a).$$

Без ограничения общности можно считать, что $a\leqslant b\leqslant c$. Если $a=b$ или $b=c$, то $f(b)=(b-a)(b-c)=0$. Если же $a<b<c$, то $f(b)<0$ и $f(a)=(a-b)(a-c)>0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то существует такое число $x_0\in(a;\ b)$, что $f(x_0)=0$.

6.3. Докажем, что функция

$$f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-16$$

принимает значение 0 ровно в двух точках. Для этого исследуем производную этой функции

$$f'(x)=4x^3+15x^2+12x-4=(x+2)^2(4x-1).$$

При $x<-2$ и при $-2<x<{}^1/_4$ имеет место неравенство $f'(x)<0$, а при $x>{}^1/_4$ — неравенство $f'(x)>0$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на интервале $(-\infty;\ {}^1/_4)$ и возрастает на интервале $({}^1/_4;\ +\infty)$. Поскольку $f(-10)>0$, $f(10)>0$ и $f({}^1/_4)<f(0)<0$, то на каждом из двух указанных интервалов функция $f(x)$ однажды принимает значение 0, а уравнение $f(x)=0$ имеет ровно два решения.

6.4. Уравнение $a^x=x^b$ равносильно уравнению $c^x=x$, где $c=a^{1/b}>1$. Так как производная функции $f(x)=c^x-x$, равная $f'(x)=c^x\ln c-1$, положительна при $c^x>\log_c e$ и отрицательна при $c^x<\log_c e$, то функция $f(x)$ имеет минимум в точке $x_0>0$, удовлетворяющей равенству $c^{x_0}=\log_c e$. Если $f(x_0)>0$, то исходное уравнение не имеет решений; если $f(x_0)=0$, то уравнение имеет единственное положительное решение $x=x_0$; если же $f(x_0)<0$, то уравнение имеет два положительных решения (по одному решению на интервалах $(0;\ x_0)$ и $(x_0;\ \infty)$ соответственно, поскольку $f(0)>0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

Итак, исходное уравнение удовлетворяет требованиям задачи тогда и только тогда, когда $x_0=c^{x_0}=\log_c e$, т. е. $x_0=c^{\log_c e}=e$ и $c=e^{1/e}$.

Таким образом, искомые значения a, b (и только они) удовлетворяют равенству $a^e = e^b$, где $b > 0$, т. е. $a = t$, $b = e \ln t$, где $t \in (1; \infty)$ при этом единственное положительное решение уравнения есть $x = e$.

6.5. Преобразовывая левую часть уравнения, получаем

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=(a-1)\left(\frac{\cos x+\sin x+1}{\sin x\cos x}\right)=$$

$$=(a-1)\left(\frac{\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)+1}{\sin^2(x+\pi/4)-\frac{1}{2}}\right), \text{ т. е. } \sin^2(x+\pi/4)\neq 1/2.$$

Следовательно,

$$\frac{2(a-1)}{\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)-1}=2, \text{ или } \sin(x+\pi/4)=a/\sqrt{2}\neq \pm 1/\sqrt{2}.$$

Последнее соотношение не имеет решений при $|a| > \sqrt{2}$ или при $|a| = 1$, а при остальных значениях a имеет решение. Таким образом, в случае $|a| \in \{1\} \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ исходное уравнение решений не имеет. Если же $|a| \in [0; 1) \cup (1; \sqrt{2}]$, то исходное уравнение имеет решения

$$x=(-1)^n \arcsin(a\sqrt{2}/2)-\pi/4+\pi n,$$

где $n \in \mathbf{Z}$ при $|a| \in [0; 1) \cup (1; \sqrt{2}[$ и $n/2 \in \mathbf{Z}$ при $|a| = \sqrt{2}$.

6.6. Преобразовывая левую часть уравнения, получаем

$$\cos^8 x+\sin^8 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4=$$

$$=\frac{1}{16}(2+12\cos^2 2x+2\cos^4 2x)=\frac{1}{32}(4+12(1+\cos 4x)+(1+\cos 4x)^2)=$$

$$=\frac{1}{32}(\cos^2 4x+14\cos 4x+17).$$

Поэтому имеем (равносильное исходному) уравнение

$$\cos^2 4x+14\cos 4x=97/4-17=29/4,$$

т. е.

$$(\cos 4x+29/2)(\cos 4x-1/2)=0, \text{ или } \cos 4x=1/2.$$

Учитывая, что $4x \in [0; 2\pi]$, имеем $4x \in \{\pi/3; 5\pi/3\}$. Таким образом, получаем ответ: $\pi/12$, $5\pi/12$.

6.7. Пусть заданная система при некоторых искомых значениях A, B имеет решение x. Из первого уравнения системы получаем, что $\cos Bx = -\cos Ax$, поэтому $\sin Bx = \varepsilon \sin Ax$, где $\varepsilon \in \{-1; 1\}$. Тогда из второго уравнения системы получаем

$$(A+\varepsilon B)\sin Ax=0.$$

Так как $A, B \in \mathbf{N}$ и $A \neq B$, то $A + \varepsilon B \neq 0$. Итак, $\sin Ax = 0 = \sin Bx$, откуда

$$Ax=k\pi, \quad Bx=n\pi \quad (k, n \in \mathbf{Z}).$$

Подставляя эти значения Ax и Bx в первое уравнение системы, находим, что числа k и n имеют разную четность. Исключая переменную x, получаем условие $Bk=An$. Так как четность чисел k и n различна, то в разложении чисел A, $B\in\mathbf{N}$ на простые множители число 2 имеет различные показатели. Обратно, если $A=2^l p$, $B=2^m q$, где l, $m\in\mathbf{Z}^+$, $l\neq m$, $p,q\in\mathbf{N}$ и p, q нечетны, то исходная система имеет решение $x=\pi/2^s$, где $s=\min(l;\ m)$.

6.8. Сложив уравнения исходной системы, получаем для любого решения системы

$$\frac{\cos x\sin y+\sin x\cos y}{\cos y\sin y}=2,$$

т. е.

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin 2y}=1.$$

Следовательно,

$$\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+3y}{2}\right)=0,$$

а поскольку x, $y\in(0;\ \pi/2)$, то либо $x=y$, либо $x+3y=\pi$. Далее, рассмотрев разность двух исходных уравнений, имеем

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin 2y}=\cos 2y,\quad \text{т. е.}\quad \sin(y-x)=\frac{1}{2}\sin 4y.$$

Если $x=y$, то $\sin 4y=0$, откуда $y=\pi/4$ (ибо $y\in(0;\ \pi/2)$). Отсюда следует, что $x=y=\pi/4$. Если же $x=\pi-3y$, то $\sin(4y-\pi)=\frac{1}{2}\sin 4y$, или $-\sin 4y=\frac{1}{2}\sin 4y$, значит, $\sin 4y=0$. Поэтому опять получаем $y=\pi/4$, $x=\pi-3\pi/4=\pi/4$. Таким образом, имеем $x=y=\pi/4$. Проверкой убеждаемся, что значения $x=y=\pi/4$ действительно удовлетворяют исходной системе.

6.9. В силу оценок $-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$, $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$ имеем неравенство

$$(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1)\leqslant 6,$$

в котором равенство возможно лишь в случае, когда

$$\sin(x-y)=1\quad\text{и}\quad\cos(2x-y)=1.$$

Поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin(x-y)=1,\\ \cos(2x-y)=1,\end{cases}$$

т. е. системе

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\quad(m\in\mathbf{Z}),\\ 2x-y=2\pi n\quad(n\in\mathbf{Z}).\end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$x=-\frac{\pi}{2}+2(n-m)\pi=2\pi k-\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbf{Z}),$$

$$y=(2(n-2m)-1)\pi=(2(k-m)-1)\pi=(2l+1)\pi \quad (l\in\mathbf{Z}).$$

6.10. Пусть $n=1$, тогда

$$1=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\pi/4),$$

т. е.

$$x=2\pi m \quad \text{или} \quad x=\pi/2+2\pi k \quad (m,\ k\in\mathbf{Z}).$$

Пусть $n=2$, тогда

$$1=\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x=\cos(2x-x)=\cos x,$$

т. е.

$$x=2\pi m \quad (m\in\mathbf{Z}).$$

Пусть, наконец, $n>2$, тогда

$$1=\sin x\sin 2x\ \ldots\ \sin nx+\cos x\cos 2x\ \ldots\ \cos nx\leqslant$$
$$\leqslant|\sin x\sin 2x\ \ldots\ \sin nx|+|\cos x\cos 2x\ \ldots\ \cos nx|\leqslant$$
$$\leqslant|\sin x\sin 2x|+|\cos x\cos 2x|=$$
$$=\max(|\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x|,\ |\sin x\sin 2x-\cos x\cos 2x|)=$$
$$=\max(|\cos x|,\ |\cos 3x|).$$

Поэтому, если некоторое значение x является решением исходного уравнения, то либо $|\cos 3x|=1$, либо $|\cos x|=1$. Однако если $|\cos 3x|=1$, то $\sin 3x=0$, откуда $\cos x\ \ldots\ \cos nx=1$, и $|\cos x|=1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $|\cos x|=1$. Проверка показывает, что все значения $x=2\pi m$ $(m\in\mathbf{Z})$ удовлетворяют исходному уравнению при любом $n\geqslant 3$. Если же $x=(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, то

$$\sin rx=0, \quad \cos rx=(-1)^r \text{ при } r=1,\ \ldots,\ n.$$

Поэтому значения $x=(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ удовлетворяют исходному уравнению лишь в случае

$$1=\sin x\sin 2x\ \ldots\ \sin nx+\cos x\cos 2x\ \ldots\ \cos nx=(-1)^{n(n+1)/2},$$

т. е. при четном $n(n+1)/2$. Но число $n(n+1)/2$ четно тогда и только тогда, когда одно из чисел n или $n+1$ делится на 4. Итак, окончательный ответ имеет вид:

если $n=1$, то $x=2\pi m$ или $x=\pi/2+2\pi k$ $(m,\ k\in\mathbf{Z})$,
если $n=4l-2$ или $n=4l+1$ $(l\in\mathbf{N})$, то $x=2\pi m$ $(m\in\mathbf{Z})$,
если $n=4l$ или $n=4l-1$ $(l\in\mathbf{N})$, то $x=\pi m$ $(m\in\mathbf{Z})$.

6.11. Если $n=1$, то x и y — любые. Далее, для любого $n\in\mathbf{N}$ имеем: если $x=0$, то уравнение выполняется при любом y, если же $y=0$, то уравнение выполняется при любом x. Пары $(x;\ y)$, для которых $xy\neq 0$ и $x+y=0$, удовлетворяют уравнению при нечетных значениях n (и только при них). Докажем, что при $n\geqslant 2$ никакая пара $(x;\ y)$, для которой

$$xy(x+y)\neq 0,$$

не удовлетворяет уравнению. Пусть для определенности $|x| \geqslant |y|$, обозначим $z = y/x \neq -1$, тогда $|z| \in (0;\ 1]$, а уравнение принимает вид

$$(1+z)^n = 1+z^n.$$

Если $z > 0$, то

$$(1+z)^n = 1+nz+\ldots+z^n > 1+z^n.$$

Если же $z < 0$, то

$$(1+z)^n = (1-|z|)^n < 1-|z| < 1-|z|^n \leqslant 1+z^n.$$

В обоих случаях

$$(1+z)^n \neq 1+z^n.$$

Таким образом, имеем следующий ответ:

если $n=1$, то

$$(x;\ y) \in \mathbf{R}^2,$$

если $n=2k$ $(k \in \mathbf{N})$, то

$$(x;\ y) \in \{(0;\ t) \mid t \in \mathbf{R}\} \cup \{(t;\ 0) \mid t \in \mathbf{R}\},$$

если $n=2k+1$ $(k \in \mathbf{N})$, то

$$(x;\ y) \in \{(0;\ t) \mid t \in \mathbf{R}\} \cup \{(t;\ 0) \mid t \in \mathbf{R}\} \cup \{(t;\ -t) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

6.12. Умножив первое уравнение на 2 и сложив его со вторым, получаем для любого решения системы

$$x^2+2xy+y^2+2(x+y) = (x+y)^2+2(x+y) = 10+6\sqrt{2},$$

т. е. $(x+y+1)^2 = (3+\sqrt{2})^2$, а значит, $x+y+1 = \pm(3+\sqrt{2})$. Если $x+y=-4-\sqrt{2}$, то $xy=6+4\sqrt{2}$ и $(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy = (4+\sqrt{2})^2-4(6+4\sqrt{2}) = -6-8\sqrt{2} < 0$, что невозможно. Следовательно, $x+y=2+\sqrt{2}$, $xy=2\sqrt{2}$, откуда получаем две пары $x_1=2$, $y_1=\sqrt{2}$ и $x_2=\sqrt{2}$, $y_2=2$, каждая из которых (как показывает проверка) удовлетворяет исходной системе.

6.13. По теореме о средних (теорема 6) имеем

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\ldots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n+1}((1-x_1)+(x_1-x_2)+\ldots+(x_{n-1}-x_n)+x_n)^2 = \frac{1}{n+1},$$

причем равенство достигается лишь в случае

$$1-x_1 = x_1-x_2 = \ldots = x_{n-1}-x_n = x_n = 1/(n+1),$$

т. е. когда $x_i = 1-i/(n+1)$. Следовательно, существует единствененый набор чисел $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих указанному в задаче уравнению.

6.14. Обозначим $R = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, где $(x_1;\ \ldots;\ x_n)$ — решение системы. Применяя теорему о средних, получаем

$$1 = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n} \geqslant \frac{n}{R}, \quad 9 = x_1+x_2+\ldots+x_n \geqslant nR,$$

откуда $R \geqslant n$ и $R \leqslant 9/n$. Поэтому $n^2 \leqslant 9$ и $n \leqslant 3$. При этом, если $n=3$, то все написанные неравенства обращаются в равенства, а это возможно (и действительно имеет место) только в случае $x_1=x_2=$ $=x_3=R=3$. Значит, значение $n=3$ удовлетворяет условию задачи и при этом значении n система имеет единственное решение в положительных числах (3; 3; 3). Поскольку при $n=1$ получаем несовместную систему, остается рассмотреть случай $n=2$. В этом случае имеем систему

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=9, \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1, \end{array}\right.$$

которая в силу равенства

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=9, \\ \quad x_1x_2=9. \end{array}\right.$$

По теореме, обратной теореме Виета, значения x_1, x_2 образуют пару корней многочлена t^2-9t+9, имеющих вид $t_{1,2}=(9 \pm 3\sqrt{5})/2$. Таким образом, имеем два решения $(t_1; t_2)$, $(t_2; t_1)$. Так как $t_1, t_2>0$, то значение $n=2$ удовлетворяет условию задачи.

6.15. Заметим, что для любого номера $i \in \{1; \ldots; n\}$ набор неизвестных

$$x_i=1, \quad x_1=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_n=0$$

удовлетворяет исходной системе. Докажем, что других наборов из n неотрицательных чисел, удовлетворяющих этой системе, не существует. Заметим, что если $x_i \geqslant 0$ при $i=1, 2, \ldots, n$ и $x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k=1$, то $x_i \in [0; 1]$. Следовательно, для искомых значений неизвестных имеем

$$2=(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)=$$
$$=1+(x_1+x_2+\ldots+x_n)+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_ix_j+\ldots+x_1x_2\ldots x_n \geqslant$$
$$\geqslant 1+(x_1^k+\ldots+x_n^k)+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_ix_j=2+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_ix_j,$$

поэтому $\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_ix_j=0$. Отсюда следует, что все значения неизвестных, кроме, быть может, одного, должны быть равны нулю (если бы нашлась пара неизвестных x_p, x_q, отличных от нуля, с номерами $p<q$, то выполнялись бы неравенства $\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_ix_j \geqslant x_px_q>0$). Наконец, если для некоторого номера $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$ все переменные $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ равны нулю, то в силу системы имеем $x_i=1$.

6.16. Пусть набор $(x;\ y;\ z)$ удовлетворяет исходной системе. Если обозначить $x=\operatorname{tg} a$, где $a\in(-\pi/2;\ \pi/2)$, то из первого уравнения системы получаем

$$y=2x/(1-x^2)=\operatorname{tg} 2a,$$

из второго —

$$z=\operatorname{tg} 4a,$$

а из третьего —

$$x=\operatorname{tg} 8a.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} 8a, \quad \text{т. е.} \quad 7a=\pi k \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Следовательно, $a=\pi k/7$. При этом

$$x=\operatorname{tg}(\pi k/7), \quad y=\operatorname{tg}(2\pi k/7), \quad z=\operatorname{tg}(4\pi k/7).$$

Проверка показывает, что при $k\in\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ полученные 7 наборов чисел $x,\ y,\ z$ различны и действительно удовлетворяют исходной системе.

6.17. Заметим, что для любого номера $i\in\{1;\ \ldots;\ n\}$ набор неизвестных

$$x_i=a, \quad x_1=\ldots=x_{i-1}=x_{i+1}=\ldots=x_n=0$$

удовлетворяет исходной системе. Докажем, что других решений эта система не имеет.

1) При $n=1$ получаем единственное условие $x_1=a$.

2) При $n=2$ имеем систему

$$\begin{cases} x_1+x_2=a, \\ x_1^2+x_2^2=a^2, \end{cases}$$

из которой получаем условие

$$(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)=2x_1x_2=0.$$

Поэтому либо $x_1=a,\ x_2=0$, либо $x_1=0,\ x_2=a$.

3) Пусть $n\geqslant 3$, тогда для любого решения системы имеем по меньшей мере два условия:

$$\begin{cases} x_1^2+\ldots+x_n^2=a^2, \\ x_1^3+\ldots+x_n^3=a^3. \end{cases}$$

Если $a=0$, то из первого условия получаем $x_1=\ldots=x_n=0$. Если же $a\neq 0$, то $(x_1/a)^2+\ldots+(x_n/a)^2=1$, поэтому для всех $i=1,\ \ldots,\ n$ имеем $|x_i/a|\leqslant 1$, а значит, $(x_i/a)^3\leqslant(x_i/a)^2$. Далее,

$$1=\sum_{i=1}^{n}(x_i/a)^3\leqslant\sum_{i=1}(x_i/a)^2=1,$$

следовательно, при всех значениях i справедливы равенства

$$\left(\frac{x_i}{a}\right)^2\left(\frac{x_i}{a}-1\right)=0,$$

т. е. либо $x_i=0$, либо $x_i=a$. С другой стороны, если для некоторого номера $i\in\{1; \ldots; n\}$ оказалось, что $x_i=a$, то в силу системы все остальные переменные $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ равны нулю, и наоборот. Таким образом, во всех трех случаях описанные выше наборы и только они удовлетворяют системе. (Попутно доказано, что при $n\geqslant 3$ из второго и третьего уравнений исходной системы вытекают все остальные ее уравнения.)

§ 7. Неравенства

7.1. Пользуясь теоремой 4, получаем

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)-$$
$$-\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}}\right)-\sqrt{2}=$$
$$=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}=0,$$

т. е. заданные числа равны друг другу.

7.2. Так как $a<b<c<d$, то

$$y-x=ab+cd-ac-bd=(a-d)(b-c)>0$$

и

$$z-y=ac+bd-ad-bc=(a-b)(c-d)>0.$$

Таким образом, $x<y<z$.

7.3. Пусть числа a, b, c удовлетворяют условиям задачи:

$$abc=1 \text{ и } a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Тогда

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1=$$
$$=(abc-1)+(a+b+c)-abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$
$$=(a+b+c)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>0.$$

Итак, произведение трех сомножителей $(a-1)(b-1)(c-1)$ положительно, а значит, либо ровно один из этих сомножителей положителен, либо положительны все три числа $a-1$, $b-1$, $c-1$. Но последний случай невозможен, так как если $a>1$, $b>1$, $c>1$, то $abc>1$, что противоречит условию $abc=1$.

7.4. Требуемые оценки вытекают из неравенств $B<(A+B)/2<A$ (поскольку $B<A$) и соотношений

$$\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}=\frac{(\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2)^2}{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}=\frac{A+B}{2}.$$

7.5. Применяя теорему о средних и учитывая, что числа $\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$ положительны, а их произведение равно единице, получим

$$\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{a+c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a\log_c b\log_a c}{(a+b)(b+c)(a+c)}}=$$
$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}}\geqslant\frac{9}{(a+b)+(b+c)+(a+c)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{a+b+c},$$

откуда вытекает требуемое неравенство.

7.6. Без ограничения общности можно считать, что $a\geqslant b\geqslant c>0$. Преобразуем разность между правой и левой частями неравенства к виду

$$3abc+a^2(a-b-c)+b^2(b-a-c)+c^2(c-a-b)=$$
$$=3abc+a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2a-a^2c-b^2c-c^2a-c^2b=$$
$$=a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)+c(c^2-bc+ab-ac)=$$
$$=(a-b)(a^2-b^2)-c(a-b)^2+c(c-a)(c-b)=$$
$$=(a-b)^2(a+b-c)+c(b-c)(a-c).$$

Теперь для доказательства требуемого неравенства остается заметить, что полученное выражение неотрицательно, так как

$$a+b>c,\quad b\geqslant c,\quad a\geqslant c,\quad c>0.$$

7.7. Если $a=b=c=0$, то неравенство справедливо. Пусть $s=a+b+c>0$, тогда

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)=$$
$$=\frac{a}{s}-\frac{a(1-a)}{s(b+c+1)}+\frac{b}{s}-\frac{b(1-b)}{s(a+c+1)}+\frac{c}{s}-\frac{c(1-c)}{s(a+b+1)}+$$
$$+(1-a)(1-b)(1-c)\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)=\left(\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}\right)-$$
$$-\frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)-$$
$$-\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)-$$
$$-\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-b)(1-a)\right)\leqslant 1,$$

так как

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{s}+\frac{c}{s}=1,\quad \frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)\right)\geqslant 0,$$
$$\frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{a+c+1}-(1-a)(1-c)\right)\geqslant 0,$$
$$\frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1}-(1-b)(1-a)\right)\geqslant 0.$$

Для доказательства первого из трех последних неравенств достаточно

заметить, что
$$\frac{a(1-a)}{s} \geqslant 0,$$
$$\frac{1}{b+c+1}-(1-b)(1-c)=\frac{(b+c)^2-(b+c+1)\,bc}{b+c+1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(b+c)^2-3bc}{b+c+1}=\frac{(b-c)^2+bc}{b+c+1} \geqslant 0.$$

Аналогично доказываются и два других неравенства.

7.8. Пусть $p=a+b+c>0$, $q=ab+bc+ac>0$, $r=abc>0$. Тогда многочлен $P(x)=x^3-px^2+qx-r$ принимает отрицательные значения при $x \leqslant 0$. Следовательно, все корни этого многочлена, равные по теореме, обратной теореме Виета, числам a, b, c, являются положительными.

7.9. Пусть $\alpha \in [0;\ \pi/2)$. Тогда, во-первых, подставляя $x=\cos\alpha$ в неравенство $\sin x < x$, справедливое при $x>0$, получаем оценку $\sin(\cos\alpha) < \cos\alpha$. Во-вторых, из неравенства $\alpha \geqslant \sin\alpha$ имеем оценку $\cos\alpha \leqslant \cos(\sin\alpha)$, так как функция $\cos x$ убывает при $x \in [0;\ \pi/2)$. Таким образом, $\sin(\cos\alpha) < \cos\alpha \leqslant \cos(\sin\alpha)$, т. е. требуемое неравенство доказано при $\alpha \in [0;\ \pi/2)$. Далее, при $\alpha \in [\pi/2;\ \pi]$ имеем $\sin(\cos\alpha) \leqslant 0 < \cos(\sin\alpha)$, т. е. неравенство выполняется и при $\alpha \in [\pi/2,\ \pi]$. Учитывая четность функций $\sin(\cos x)$ и $\cos(\sin x)$, получаем требуемое неравенство для $\alpha \in [-\pi;\ \pi]$, а поскольку число 2π является периодом этих функций, то неравенство справедливо при всех $\alpha \in R$.

7.10. Обозначим $\beta_i=2-\alpha_i>0$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$. Тогда, учитывая равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=2n-1$ и теорему о средних, получаем
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\beta_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}+1\right)-n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i+\beta_i}{\beta_i}-n=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}-n \geqslant$$
$$\geqslant 2\frac{n}{\sqrt[n]{\beta_1\ldots\beta_n}}-n \geqslant \frac{2n^2}{\beta_1+\ldots+\beta_n}-n=\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1},$$
что и требовалось доказать.

7.11. Обозначим $b_i=s-a_i>0$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$. Тогда, учитывая равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=(n-1)\,s$ и теорему о средних, получаем
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}+1\right)-n=\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{b_i}-n=s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}-n \geqslant$$
$$\geqslant s\frac{n}{\sqrt[n]{b_1\ldots b_n}}-n \geqslant s\frac{n^2}{b_1+\ldots+b_n}-n=\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1},$$
что и требовалось доказать.

7.12. Обозначим $a_i/a_{i+1}=b_i$ ($i=1, \ldots, n$) и положим $b_{n+1}=1$. Тогда имеем $\prod_{i=1}^{n+1} b_i=1$ и, пользуясь теоремой о средних, получаем соотношения

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{b_i}=\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{j\neq i} b_j\leqslant\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} b_j^n\right)=\sum_{i=1}^{n+1} b_i^n,$$

из которых вытекает справедливость неравенства $\sum_{i=1}^{n} b_i^n\geqslant\sum_{i=1}^{n}(1/b_i)$. Таким образом, на поставленный в задаче вопрос следует дать утвердительный ответ.

7.13. Введем обозначение $1-a=b$. Рассмотрим сначала случай, когда $0<x<1$. По неравенству Бернулли (теорема 5), учитывая, что $0<b<1$, имеем $(1+x)^b\leqslant 1+bx$, следовательно, $(1+x)^{-b}\geqslant 1/(1+bx)$. Снова применяя неравенство Бернулли, получаем

$$(1+b)\,x^b=(1+b)\,(1-(1-x))^b\leqslant(1+b)\,(1-b\,(1-x))=$$
$$=1+bx+b^2\,(x-1)<1+bx,$$

откуда

$$1+bx>(1+b)\,x^b,\quad \text{или}\quad x^a+bx^{a+1}>(1+b)\,x.$$

Теперь имеем

$$(1+x)^{-b}-\frac{1-x^a}{1-x}\geqslant\frac{1}{1+bx}-\frac{1-x^a}{1-x}=$$
$$=\frac{1-x+(x^a-1)\,(1+bx)}{(1+bx)\,(1-x)}=\frac{x^a+bx^{a+1}-(1+b)\,x}{(1+bx)\,(1-x)}>0$$

(мы воспользовались тем, что $(1+bx)\,(1-x)>0$). Итак, $(1-x)^{-b}>\frac{1-x^a}{1-x}$ при $0<x<1$, что и требовалось доказать. Случай $x>1$ сводится к предыдущему подстановкой $x=1/t$. Тогда $0<t<1$ и

$$\frac{1-x^a}{1-x}=\frac{1-1/t^a}{1-1/t}=t^b\,\frac{1-t^a}{1-t}<t^b\,(1+t)^{-b}=\left(\frac{1}{t}+1\right)^{-b}=(1+x)^{-b},$$

что и требовалось доказать.

7.14. Доказательство проведем индукцией по $n\in Z^+$. При $n=0$ получаем верное неравенство $1^\alpha\leqslant 1$. Допустим, что неравенство справедливо для числа n, и докажем его для числа $n+1$. Имеем

$$(1+x_1+\ldots+x_n+x_{n+1})^\alpha-(1+x_1+\ldots+x_n)^\alpha=$$
$$=(1+x_1+\ldots+x_n)^\alpha\left(\left(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\ldots+x_n}\right)^\alpha-1\right)\leqslant$$
$$\leqslant(1+x_1+\ldots+x_n)^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}\leqslant((n+1)\,x_{n+1})^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}=$$
$$=(n+1)^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}^\alpha$$

(справедливость неравенства

$$(1+x_1+\ldots+x_n)^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}\leqslant((n+1)\,x_{n+1})^{\alpha-1}\cdot x_{n+1}$$

ытекает из условий $1+x_1+\ldots+x_n\geqslant(n+1)\,x_{n+1}$ и $\alpha-1\leqslant 0$). Из доказанного неравенства и предположения индукции получаем

$$(1+x_1+\ldots+x_{n+1})^{\alpha}\leqslant(1+x_1+\ldots+x_n)^{\alpha}+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^{\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant 1+1^{\alpha-1}\,x_1^{\alpha}+2^{\alpha-1}\,x_2^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha-1}\,x_n^{\alpha}+(n+1)^{\alpha-1}\,x_{n+1}^{\alpha},$$

что и требовалось доказать.

7.15. Без ограничения общности считаем, что $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$. Тогда

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j|=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}|a_i-a_j|=$$
$$=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i-a_j|=2\sum_{1\leqslant i<m\leqslant n}a_m-2\sum_{1\leqslant m<j\leqslant n}a_m=$$
$$=2\sum_{m=1}^{n}(2m-n-1)\,a_m.$$

Сумма S принимает наибольшее значение в том и только в том случае, если для номеров m, удовлетворяющих неравенству $2m-n-1>0$, каждое из чисел a_m равно двум, а для номеров m, удовлетворяющих неравенству $2m-n-1<0$, все числа a_m равны нулю. Поэтому справедливо неравенство

$$S\leqslant 4\sum_{(n+1)/2<m\leqslant n}(2m-n-1).$$

Пусть $n=2k+1$ ($k\in\mathbb{N}$), тогда

$$S\leqslant 4\sum_{m=k+2}^{2k+1}(2m-2k-2)=8\,(1+2+\ldots+k)=4k\,(k+1)=$$
$$=(2k+1)^2-1<n^2,$$

причем равенство $S=n^2$ невозможно. Пусть $n=2k$ ($k\in\mathbb{N}$), тогда

$$S\leqslant 4\sum_{m=k+1}^{2k}(2m-2k-1)=4\,(1+3+\ldots+(2k-1))=4k^2=n^2.$$

При этом равенство $S=n^2$ выполняется тогда и только тогда, когда среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ ровно k чисел равны двум, а остальные k чисел равны нулю.

7.16. Поскольку

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n|\leqslant M$$

для любого набора чисел $x_1, \ldots, x_n\in\{-1;\ 1\}$, то имеем неравенство

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\{x_1;\ldots;x_n\}}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n|\right)\leqslant M,$$

которое можно переписать так:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\{x_1;\ldots;x_n\}}|a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n|\right)\leqslant M.$$

Для каждого фиксированного значения $j\in\{1;\ \ldots;\ n\}$ в сумме

$$S_j=\sum_{\{x_1;\ldots;x_n\}}|a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n|$$

разобьем все 2^n слагаемых на 2^{n-1} пар так, что в каждой паре значения $x_1,\ \ldots,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_n$ совпадают, а значения x_j различны. Тогда сумма слагаемых в каждой паре имеет вид $|A+a_{jj}|+|A-a_{jj}|$, где

$$A=a_{j1}x_1+\ldots+a_{j,(j-1)}x_{j-1}+a_{j,(j+1)}x_{j+1}+\ldots+a_{jn}x_n.$$

Но

$$|A+a_{jj}|+|A-a_{jj}|\geqslant|(A+a_{jj})-(A-a_{jj})|=2|a_{jj}|,$$

поэтому $S_j\geqslant 2^{n-1}\cdot 2|a_{jj}|=2^n|a_{jj}|$. Таким образом, получаем

$$|a_{11}|+\ldots+|a_{nn}|=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\cdot 2^n|a_{jj}|\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}S_j\right)\leqslant M,$$

что и требовалось доказать.

7.17. Заметим, что сумму $S=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ia_i$ можно представить в виде

$$S=b_1a_1+\sum_{i=2}^{n}b_i(a_1+\ldots+a_i)-\sum_{i=2}^{n}b_i(a_1+\ldots+a_{i-1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a_1+\ldots+a_i)\,b_i-\sum_{i=1}^{n-1}(a_1+\ldots+a_i)\,b_{i+1}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a_1+\ldots+a_i)(b_i-b_{i+1}),$$

где считаем $b_{n+1}=0$. Далее, среди чисел $A_i=|a_1+\ldots+a_i|$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ выберем наибольшее число A_k. Тогда для этого значения k имеем

$$|S|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_1+\ldots+a_i|\cdot|b_i-b_{i+1}|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}A_k(b_i-b_{i+1})=A_k\sum_{i=1}^{n}(b_i-b_{i+1})=A_k(b_1-b_{n+1})\leqslant A_k,$$

что и требовалось доказать.

7.18. Доказательство проведем индукцией по $n\in\mathbf{N}$. Поскольку

$$(1-x_1)^m+(1-y_1^m)=y_1^m+(1-y_1^m)=1,$$

то при $n=1$ утверждение верно. Пусть оно верно для числа $n-1$, тогда имеем

$$(1-x_1\dots x_n)^m+(1-y_1^m)\dots(1-y_n^m)=$$
$$=(1-x_1\dots x_{n-1}(1-y_n))^m+(1-y_1^m)\dots(1-y_{n-1}^m)(1-y_n^m)\geqslant$$
$$\geqslant(1-x_1\dots x_{n-1}+x_1\dots x_{n-1}y_n)^m+(1-(1-x_1\dots x_{n-1})^m)(1-y_n^m)=$$
$$=(a+(1-a)y_n)^m+(1-a^m)(1-y_n^m)=(a+b-ab)^m+(1-a^m)(1-b^m),$$

где обозначено $a=1-x_1\dots x_{n-1}$ и $b=y_n$. Докажем индукцией по $m\in\mathbf{N}$, что для любых чисел a, $b\in[0;\,1]$ справедливо неравенство

$$(a+b-ab)^m\geqslant a^m+b^m-a^mb^m.$$

При $m=1$ это неравенство обращается в равенство. Пусть для числа $m-1$ неравенство также верно, т. е.

$$(a+b-ab)^{m-1}\geqslant a^{m-1}+b^{m-1}-a^{m-1}b^{m-1}.$$

Тогда (учитывая к тому же, что $a+b-ab\geqslant 0$) получаем справедливость этого неравенства для числа m. Действительно,

$$(a+b-ab)^m-a^m-b^m+a^mb^m\geqslant$$
$$\geqslant(a^{m-1}+b^{m-1}-a^{m-1}b^{m-1})(a+b-ab)-a^m-b^m+a^mb^m=$$
$$=2a^mb^m+ab^{m-1}+ba^{m-1}-a^mb^{m-1}-b^ma^{m-1}-a^mb-b^ma=$$
$$=a^m(b^m-b^{m-1})+a(b^{m-1}-b^m)+b^m(a^m-a^{m-1})+b(a^{m-1}-a^m)=$$
$$=(b^{m-1}-b^m)(a-a^m)+(a^{m-1}-a^m)(b-b^m)\geqslant 0,$$

так как $a\geqslant a^{m-1}\geqslant a^m$, $b\geqslant b^{m-1}\geqslant b^m$. Итак, доказано, что для любого числа $m\in\mathbf{N}$ справедливо неравенство, которое можно переписать в виде

$$(a+b-ab)^m+(1-a^m)(1-b^m)\geqslant 1.$$

Из него, согласно принятым выше обозначениям, вытекает справедливость требуемого в задаче неравенства для числа n. На этом индуктивный переход закончен. Утверждение доказано.

7.19. Сделаем замену $b=ax$, $c=ay$, $d=az$, тогда в силу условия задачи имеем $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z$, а требуемое неравенство можно записать следующим образом:

$$a^{ax}(ax)^{ay}(ay)^{az}(az)^a\geqslant(ax)^a(ay)^{ax}(az)^{ay}a^{az}.$$

Далее, после сокращения на $a^aa^{ax}a^{ay}a^{az}$ и возведения обеих (положительных) частей неравенства в степень $1/a$ получаем равносильное неравенство

$$x^yy^zz\geqslant xy^xz^y.$$

Положим $y=xs$, $z=xt$, тогда $1\leqslant s\leqslant t$ (так как $x\leqslant y\leqslant z$) и $y\geqslant s$ (так как $x\geqslant 1$), а неравенство имеет вид

$$x^{xs}y^{xt}xt\geqslant xy^x(xt)^{xs}.$$

После сокращения на $x^{xs}y^x xt$ и возведения обеих частей неравенства в степень $1/x$ имеем равносильное неравенство

$$y^{t-1} \geqslant t^{s-1/x}.$$

Если $y=1$, то неравенство верно, так как в этом случае

$$x=1, \quad s=y/x=1, \quad y^{t-1}=1=t^{1-1}=1.$$

Если $t=1$, то неравенство также справедливо: $y^{t-1}=y^0=1=1^{s-1/x}=1$. Пусть $y>1$ и $t>1$. Тогда, возводя обе части неравенства в степень $\frac{1}{t-1}\cdot\frac{y}{y-1}>0$, получаем равносильное неравенство

$$y^{y/(y-1)} \geqslant t^{s/(t-1)} \quad (\text{где } 1 \leqslant s \leqslant t, \quad s \leqslant y).$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть $y \geqslant t$. Докажем, что функция $f_1(\alpha)=\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}$ возрастает при $\alpha>1$. Имеем

$$f_1'(\alpha)=\left(e^{(\alpha/(\alpha-1))\ln\alpha}\right)'=e^{(\alpha/(\alpha-1))\ln\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-1}-\frac{\ln\alpha}{(\alpha-1)^2}\right)=$$
$$=\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}\frac{1}{(\alpha-1)^2}(\alpha-1-\ln\alpha)>0$$

(последняя оценка вытекает из неравенства $g_1(\alpha)=\alpha-1-\ln\alpha>0$, выполненного при $\alpha>1$, поскольку $g_1'(\alpha)=1-1/\alpha>0$ и $g_1(1)=0$). Поэтому требуемое неравенство следует из соотношений

$$y^{y/(y-1)}=f_1(y) \geqslant f_1(t)=t^{t/(t-1)} \geqslant t^{s/(t-1)}.$$

б) Пусть $y<t$. Докажем, что функция $f_2(\alpha)=\alpha^{1/(\alpha-1)}$ убывает при $\alpha>1$. Имеем

$$f_2'(\alpha)=\left(e^{(1/(\alpha-1))\ln\alpha}\right)'=e^{(1/(\alpha-1))\ln\alpha}\left(\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}-\frac{\ln\alpha}{(\alpha-1)^2}\right)=$$
$$=\alpha^{1/(\alpha-1)}\frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2}(\alpha-1-\alpha\ln\alpha)<0$$

(последняя оценка вытекает из неравенства $g_2(\alpha)=\alpha-1-\alpha\ln\alpha<0$, выполненного при $\alpha>1$, поскольку $g_2'(\alpha)=1-\ln\alpha-1<0$ и $g_2(1)=0$). Следовательно, и в этом случае неравенство выполнено, так как

$$y^{y/(y-1)}=(f_2(y))^y \geqslant (f_2(t))^y=t^{y/(t-1)} \geqslant t^{s/(t-1)}.$$

7.20. Преобразуем левую часть неравенства к виду

$$\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}=\left(\frac{1}{1+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{n^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^k}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^i}\right)$$

и заметим, что для любого $i \in \mathbf{N}$ выполнены соотношения

$$\frac{1}{n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^i}=\left(\frac{1}{1\cdot n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2n^{i-1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{3n^{i-1}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)\,n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n\cdot n^{i-1}}\right)=$$

$$=\sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{(m-1)\,n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{mn^{i-1}}\right)>\sum_{m=2}^{n}\left(n^{i-1}\frac{1}{mn^{i-1}}\right)=\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}.$$

Отсюда следует требуемое неравенство

$$\sum_{j=2}^{n^k}\frac{1}{j}>\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=k\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}.$$

7.21. Обозначим

$$b_k=(k+1)^k/k^{k-1}=k\,(1+1/k)^k \qquad (k=1,\ \ldots,\ n).$$

Учитывая соотношения $b_k \leqslant ke$ (см. теорему 7) и

$$b_1\ \ldots\ b_k=(k+1)^k,$$

а также теорему о средних, имеем

$$\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}=\frac{1}{k+1}\sqrt[k]{(a_1b_1)\ \ldots\ (a_kb_k)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{k(k+1)}(a_1b_1+\ldots+a_kb_k)=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_jb_j.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\sum_{j=1}^{k}a_jb_j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(a_jb_j\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right)\sum_{j=1}^{n}(a_jb_j)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{a_jb_j}{j}\leqslant e\sum_{j=1}^{n}a_j,$$

что и требовалось доказать.

7.22. Будем считать, что пятерка чисел α, β, γ, δ, ε совпадает (с точностью до порядка) с пятеркой чисел $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$. Тогда

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}\right)=$$

$$=5+\sum_{i<j}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)=25+\sum_{i<j}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}-2\right),$$

где сумма берется по всем $C_5^2=10$ парам индексов $1\leqslant i<j\leqslant 5$. Далее, имеем

$$\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2.$$

Обозначим $f(x, y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2$, тогда достаточно доказать неравенство

$$\sum_{i<j} f(x_i, x_j)\leqslant 6f(p, q).$$

Докажем, что для положительных чисел $x\leqslant y\leqslant z$ справедливо неравенство $f(x, y)+f(y, z)\leqslant f(x, z)$, т. е.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\leqslant\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2.$$

Заметим, что

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{x}{z}-1=\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\leqslant 0,$$

так как $x/y\leqslant 1$ и $1\geqslant y/z$. Аналогично получаем оценку

$$\frac{z}{y}+\frac{y}{x}-\frac{z}{x}-1\leqslant 0,$$

которая в сумме с предыдущей дает необходимое неравенство. Кроме того, равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $x=y$, либо $y=z$. Пользуясь доказанным соотношением, получаем следующий ряд неравенств

$$f(p, x_1)+f(x_1, x_2)+f(x_2, x_3)+f(x_3, x_4)+f(x_4, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_1)+f(x_1, x_3)+f(x_3, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_1)+f(x_1, x_4)+f(x_4, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_2)+f(x_2, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_2)+f(x_2, x_4)+f(x_4, q)\leqslant f(p, q),$$
$$f(p, x_1)+f(x_1, x_5)+f(x_5, q)\leqslant f(p, q),$$

сложив которые и отбросив положительные слагаемые вида $f(p, x_i)$ и $f(x_i, q)$, получим требуемое неравенство. Теперь определим, когда имеет место равенство. Заметим, что если $p<x_2$ или $x_4<q$, то равенство не достигается, поскольку тогда среди отброшенных выше слагаемых $f(p, x_2)$ или $f(x_4, q)$ есть ненулевое. Поэтому для равенства необходимо выполнение соотношений $x_1=x_2=p$ и $x_4=x_5=q$. Тогда из второго среди выписанных выше шести неравенств получаем

$$f(p, x_3)+f(x_3, q)\leqslant f(p, q).$$

Поскольку и в этом неравенстве должно быть выполнено равенство, то либо $p=x_3$, либо $x_3=q$. Переходя к исходной формулировке, получаем, что равенство достигается в том и только в том случае, когда два числа из пятерки чисел α, β, γ, δ, ε совпадают с одним концом отрезка $[p; q]$, а остальные три числа — с другим его концом.

7.23. Будем считать, что четверка чисел a, b, c, d совпадает (с точностью до порядка) с четверкой чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$. Найдем производную многочлена

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

С одной стороны, по теореме Виета

$$P'(x) = \left(x^4 - \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)x^3 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_i x_j\right)x^2 - \left(\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} x_i x_j x_k\right)x + (x_1 x_2 x_3 x_4)\right)' =$$

$$= 4x^3 - \left(3\sum_{i=1}^{4} x_i\right)x^2 + \left(2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_i x_j\right)x - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} x_i x_j x_k.$$

С другой стороны, по теореме Ролля, если $x_i < x_{i+1}$ для некоторого значения $i \in \{1; 2; 3\}$, то производная $P'(x)$ равна нулю в некоторой точке $y \in (x_i; x_{i+1})$. Если же многочлен $P(x)$ имеет кратный корень, то многочлен $P'(x)$ имеет тот же корень на единицу меньшей кратности. Таким образом, многочлен $P'(x)$ третьей степени имеет корни y_1, y_2, y_3, удовлетворяющие неравенствам $x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant x_3 \leqslant \leqslant y_3 \leqslant x_4$, следовательно,

$$P'(x) = 4(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3) =$$
$$= 4x^3 - 4(y_1 + y_2 + y_3)x^2 + 4(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3)x - 4y_1 y_2 y_3.$$

По теореме о средних имеем

$$\sqrt[3]{(y_1 y_2 y_3)^2} \leqslant \frac{y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3}{3},$$

откуда $\sqrt[3]{A} \leqslant \sqrt{B}$, где обозначено

$$A = y_1 y_2 y_3 = \frac{1}{4}(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4),$$

$$B = \frac{1}{3}(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3) = \frac{1}{6}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4).$$

Итак, требуемое неравенство доказано, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $y_1 y_2 = y_2 y_3 = y_1 y_3$, т. е. когда $y_1 = y_2 = y_3$. Последнее условие выполняется в том и только в том случае, если $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, т. е. если $a = b = c = d$.

§ 8. Задачи с целой частью

8.1. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$|x - 1|(|x + 1| - 1) = \{x\} \quad \text{при} \quad x \neq 1.$$

Рассмотрим следующие случаи: $x > 1$, $-1 \leqslant x < 1$ и $x < -1$. При $x > 1$ уравнение записывается в виде $x(x - 1) = \{x\}$ и не имеет решений, так как $x(x-1) > x-1 \geqslant \{x\}$. При $-1 \leqslant x < 1$ имеем уравнение

$$x(1-x) = \{x\}.$$

Так как $\{x\} \geqslant 0$ и $1-x > 0$, то $x \geqslant 0$. Но при $0 \leqslant x < 1$ справедливо равенство $\{x\} = x$. Следовательно, в этом случае получаем уравнение $x(1-x) = x$, т. е. $x = 0$. При $x < -1$ получаем уравнение

$$(2+x)(x-1) = \{x\}.$$

Так как $x-1 < 0$ и $\{x\} \geqslant 0$, то $2+x \leqslant 0$, т. е. $x \leqslant -2$. Число $x=-2$ удовлетворяет уравнению. Если $-3 \leqslant x < -2$, то $\{x\} = x+3$, а уравнение принимает вид

$$(2+x)(x-1) = 3+x$$

и имеет решение $-\sqrt{5} \in [-3;\ -2)$. Наконец, нн одно значение $x < -3$ не удовлетворяет уравнению, ибо при $x < -3$ имеем

$$|(2+x)(1-x)| = |2+x| \cdot |1-x| > 1 \cdot 4 > |\{x\}|.$$

Таким образом, получаем ответ: 0; -2; $-\sqrt{5}$.

8.2. Заметнм, что соотношение $\left[\sqrt[3]{m}\right] = k$, где $m, k \in \mathrm{N}$, равносильно неравенству $k^3 \leqslant m \leqslant (k+1)^3 - 1$. Количество натуральных чисел m, удовлетворяющих этому условию (прн фиксированном k), равно $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Следовательно, левая часть уравнения равна $\sum\limits_{k=1}^{x-1} S_k$, где обозначено

$$S_k = k(3k^2 + 3k + 1).$$

Так как $S_k > 0$ при $k \in \mathrm{N}$, $S_1 = 1 \cdot 7 = 7$, $S_2 = 2 \cdot 19 = 38$, $S_3 = 3 \cdot 37 = 111$, $S_4 = 4 \cdot 61 = 244$ и $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 400$, то исходное уравнение имеет единственное решение в натуральных числах: $x = 5$.

8.3. Докажем, что для любого $k \in \mathrm{N}$ справедливы оценки

$$k[x] \leqslant [kx] \leqslant k[x] + k - 1.$$

Действительно, обозначим $m = [x]$, $\alpha = \{x\}$, тогда получаем $x = m + \alpha$, $m \in \mathrm{Z}$, $0 \leqslant \alpha < 1$ и

$$km = [km] \leqslant [kx] = [km + k\alpha] \leqslant km + k\alpha < km + k.$$

Таким образом, имеем

$$S = [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] \leqslant$$
$$\leqslant 63[x] + (1+3+7+15+31) = 63[x] + 57 \quad \text{и} \quad S \geqslant 63[x],$$

т. е. для некоторого $m \in \mathrm{Z}$ имеют место оценки

$$63m \leqslant S \leqslant 63m + 57.$$

С другой стороны, $12345 = 63 \cdot 195 + 60$, поэтому равенство $S = 12345$ невозможно ни при каком значении x.

8.4. Положим $m=[x]$, $\alpha=\{x\}$. Тогда $x=m+\alpha$ и исходное уравнение будет иметь вид

$$(m+\alpha)^2-[m^2+2m\alpha+\alpha^2]=\alpha^2,$$

откуда

$$m^2+2m\alpha=[m^2+2m\alpha+\alpha^2].$$

Но $m^2\in Z$, поэтому

$$2m\alpha=[2m\alpha+\alpha^2].$$

Последнее равенство при $0\leqslant\alpha<1$ равносильно условию $2m\alpha\in Z$, следовательно $\alpha=k/(2m)$, где $k\in\{0;\ 1;\ \ldots;\ 2m-1\}$. Таким образом, при каждом из значений $m=1,\ \ldots,\ n-1$ (при $n=1$ таких значений нет) величина α может принимать ровно $2m$ значений, а при $m=n$ имеем $\alpha=0$ (так как $x\leqslant n$), а значит, количество решеиий равно

$$2+4+\ldots+2(n-1)+1=n(n-1)+1=n^2-n+1.$$

8.5. Докажем, что для любого $n\in N$ выполнено неравенство $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$. Действительно, поскольку $4n(n+1)<(2n+1)^2$, то $2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$. Поэтому

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<4n+2,$$

откуда вытекает требуемое неравенство, а значит, и неравенство

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\leqslant[\sqrt{4n+2}].$$

Предположим, что для некоторого $n\in N$ имеет место строгое неравенство

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]<[\sqrt{4n+2}].$$

Тогда существует такое $m\in N$, что

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<m\leqslant\sqrt{4n+2}.$$

Отсюда имеем

$$2\sqrt{n(n+1)}<m^2-(2n+1)\leqslant 2n+1,$$

а значит,

$$4n(n+1)<(m^2-(2n+1))^2\leqslant 4n(n+1)+1.$$

Поскольку число $(m^2-(2n+1))^2$ является натуральным, то $m^2-(2n+1)=2n+1$. Следовательно, число $m^2=2(2n+1)$ делится на 2, но не делится на 4, что невозможно. Таким образом, требуемое равенство справедливо при любом $n\in N$.

8.6. Обозначим

$$f(n)=[n+\sqrt{n}+{}^1/_2],\qquad n\in N,$$

тогда разность

$$f(n+1)-f(n)=[n+1+\sqrt{n+1}+{}^1/_2]-[n+\sqrt{n}+{}^1/_2]=$$
$$=1+[\sqrt{n+1}+{}^1/_2]-[\sqrt{n}+{}^1/_2]$$

больше единицы в том и только в том случае, если

$$[\sqrt{n+1}+{}^1/_2]>[\sqrt{n}+{}^1/_2],$$

т. е. если $\sqrt{n}+{}^1/_2 < m \leqslant \sqrt{n+1}+{}^1/_2$ для некоторого $m \in N$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$n < m^2-m+{}^1/_4 \leqslant n+1,$$

т. е. условию $n=m^2-m$. С другой стороны, для любого $n \in \mathrm{N}$ имеем оценку

$$f(n+1)=n+2+[\sqrt{n+1}-{}^1/_2] \leqslant n+[\sqrt{n}+{}^1/_2]+2=f(n)+2,$$

так как $\sqrt{n+1}-{}^1/_2 < \sqrt{n}+{}^1/_2$. Таким образом, получаем

$$f(n+1)-f(n)=\begin{cases} 2 \text{ при } n=m^2-m, \quad m=2,\ 3,\ \ldots, \\ 1 \text{ при остальных } n \in \mathrm{N}. \end{cases}$$

Следовательно, величина $f(n)$ принимает все натуральные значения, кроме чисел вида

$$f(m^2-m)+1=m^2+[\sqrt{m^2-m}+{}^1/_2]-m+1=m^2$$

(последнее равенство вытекает из оценок $m-1 < \sqrt{m^2-m}+{}^1/_2 < m$, справедливых при $m \geqslant 2$) и чисел, меньших числа $f(1)=2$. Итак, доказано, что натуральное число не представимо в виде $[n+\sqrt{n}+{}^1/_2]$, $n \in \mathrm{N}$, в том и только том случае, если оно является квадратом какого-либо натурального числа.

8.7. Предположим, что среди членов последовательности $\{a_n\}$ имеется лишь конечное множество нечетных чисел. Тогда, выбрав нечетное число a_m с наибольшим номером m, получим, что все числа a_{m+n}, $n \in \mathrm{N}$, являются четными. Пусть $a_{m+1}=2^pq$, где q нечетно и $p \in \mathrm{N}$ ($a_{m+1} \neq 0$, так как последовательность возрастает и $a_1 > 0$); тогда

$$a_{m+2}=\left[\frac{3}{2}a_{m+1}\right]=2^{p-1}\cdot 3q.$$

Аналогично получаем, что $a_{m+3}=2^{p-2}\cdot 3^2q$ и т. д., наконец, $a_{m+p+1}=$ $=3^pq$ — нечетное число, что противоречит выбору номера m. Предположим теперь, что среди членов последовательности имеется лишь конечное множество четных чисел. Пусть a_m — четное число с наибольшим номером m, тогда число a_{m+1} является нечетным и $a_{m+1}-1=$ $=2^pq$, где q нечетно и $p \in \mathrm{N}$. Имеем

$$a_{m+2}=\left[\frac{3}{2}a_{m+1}\right]=\left[\frac{3}{2}(a_{m+1}-1)+\frac{3}{2}\right]=2^{p-1}\cdot 3q+1,$$

т. е.

$$a_{m+2}-1=2^{p-1}\cdot 3q.$$

Аналогично получаем, что $a_{m+3}-1=2^{p-2}\cdot 3^2q$ и т. д., наконец, $a_{m+p+1}-1=3^pq$. Поэтому $a_{m+p+1}=3^pq+1$ — четное число, что противоречит выбору номера m. Утверждение задачи доказано.

8.8. Обозначим

$$a_n=(3+\sqrt{11})^n+(3-\sqrt{11})^n,$$

тогда имеет место равенство

$$a_{n+2}=6a_{n+1}+2a_n, \qquad n\in Z^+.$$

Действительно, пусть $\alpha=(3+\sqrt{11})^n$, $\beta=(3-\sqrt{11})^n$, тогда

$$a_n=\alpha+\beta,$$

$$a_{n+1}=(3+\sqrt{11})\,\alpha+(3-\sqrt{11})\beta,$$

$$a_{n+2}=(3+\sqrt{11})^2\alpha+(3-\sqrt{11})^2\beta=(20+6\sqrt{11})\,\alpha+(20-6\sqrt{11})\beta=$$
$$=(18+6\sqrt{11})\,\alpha+(18-6\sqrt{11})\,\beta+(2\alpha+2\beta)=6a_{n+1}+2a_n.$$

Отсюда и из равенств $a_0=2$, $a_1=6$ следует, что число a_n является целым для любого $n\in Z^+$. Поскольку $-1<3-\sqrt{11}<0$, то при $n\in N$ имеем

$$a_{2n-1}=(3+\sqrt{11})^{2n-1}+(3-\sqrt{11})^{2n-1}<(3+\sqrt{11})^{2n-1}<a_{2n-1}+1,$$

т. е.

$$a_{2n-1}=\left[(3+\sqrt{11})^{2n-1}\right].$$

Теперь докажем индукцией по $n\in N$ следующее утверждение: число a_{2n-2} делится на 2^n, а число a_{2n-1} делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}. При $n=1$ утверждение верно, поскольку $a_0=2$, $a_1=6$. Пусть оно верно для некоторого значения $n\in N$. Тогда число $a_{2n}=6a_{2n-1}+2a_{2n-2}$ делится на 2^{n+1}, так как оба числа a_{2n-1} и a_{2n} делятся на 2^n. Далее, число $a_{2n+1}=6a_{2n}+2a_{2n-1}$ делится на 2^{n+1} (поскольку оба числа a_{2n} и a_{2n-1} делятся на 2^n), но не делится на 2^{2n+2} (поскольку число a_{2n} делится на 2^{n+1}, а число a_{2n-1} — не делится). Утверждение доказано. Таким образом, наибольшая степень двойки, на которую делится число a_{2n-1}, равна 2^n, т. е. $k=n$.

8.9. Для заданного значения $n\in N$ обозначим $m=[n\sqrt{2}]$. Так как $m\neq n\sqrt{2}$ (иначе число $\sqrt{2}=m/n$ было бы рациональным), то $m<n\sqrt{2}$ и $m^2<2n^2$. Поэтому

$$1\leqslant 2n^2-m^2=(n\sqrt{2}-m)(n\sqrt{2}+m)=$$
$$=\{n\sqrt{2}\}(n\sqrt{2}+m)<\{n\sqrt{2}\}\,2n\sqrt{2},$$

откуда вытекает требуемая оценка. Пусть задано число $\varepsilon>0$. Рассмотрим последовательности $\{n_i\}$ и $\{m_i\}$, определенные следующим образом: $n_1=m_1=1$,

$$n_{i+1}=3n_i+2m_i, \quad m_{i+1}=4n_i+3m_i, \quad i\in N.$$

Тогда $2n_i^2-m_i^2=1$ для всех $i\in N$. Действительно, при $i=1$ имеем верное равенство $2n_1^2-m_1^2=1$. Если же это равенство верно для некоторого значения $i\in N$, то

$$2n_{i+1}^2-m_{i+1}^2=2(9n_i^2+12n_im_i+4m_i^2)-$$
$$-(16n_i^2+24n_im_i+9m_i^2)=2n_i^2-m_i^2=1,$$

т. е. оно верно и для значения $i+1$. Так как последовательность $\{n_i\}$ возрастает, то можно выбрать такое значение $n=n_{i_0}$, чтобы выполнялось неравенство

$$n > \left(1/(2\sqrt{2})\right)(1+1/\varepsilon).$$

Тогда справедливы оценки

$$\varepsilon\left(2n\sqrt{2}-1\right) > 1, \quad (1+\varepsilon)\left(2n\sqrt{2}-1\right) > 2n\sqrt{2},$$

из которых при $m=m_{i_0}$ вытекают соотношения

$$\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}} > \frac{1}{2n\sqrt{2}-1} > \frac{1}{n\sqrt{2}+m} = n\sqrt{2}-m = \{n\sqrt{2}\},$$

поскольку $0 < n\sqrt{2}-m = 1/(n\sqrt{2}+m) < 1$. Задача решена.

8.10. а) Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = [5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x]-[x]-[y]$$

и докажем, что $f(x, y) \geqslant 0$ при $x, y \in \mathbf{R}$. Пусть для некоторых значений $x, y \in [0; 1)$ имеет место неравенство

$$f(x, y) = [5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x] < 0.$$

При этом без ограничения общности можно считать, что $x \leqslant y$. Тогда $f(x, y) \leqslant -1$ (ибо $f(x, y) \in \mathbf{Z}$) и

$$f(x, y) > (5x-1)+(5y-1)-(3x+y)-(3y+x) = x+y-2,$$

т. е. $x+y-2 < -1$, или $x+y < 1$. Так как

$$[5y]-[3y+x] \geqslant [5y]-[4y] \geqslant 0,$$

то

$$[5x]-[3x+y] = f(x, y)-([5y]-[3y+x]) \leqslant -1.$$

С другой стороны,

$$[5x]-[3x+y] \geqslant [5x]-[3x+1-x] = [5x]-[2x+1].$$

Значит, $[5x] < [2x+1]$, откуда следует, что $5x < 2x+1$, или $x < 1/3$. Но тогда

$$[2x+1] \leqslant \left[2\cdot\frac{1}{3}+1\right] = 1,$$

т. е. $[5x] < 1$, или $x < 1/5$. Так как

$$[3x+y] \geqslant 1+[5x] = 1,$$

то $y \geqslant 1-3x > 2/5$ и $[5y] \geqslant 2$. Заметим, что

$$[3x+y] \leqslant \left[3\cdot\frac{1}{5}+1\right] = 1.$$

Если $y < 3/5$, то $3y+x < 3\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5} = 2$, $[3y+x] \leqslant 1$ и

$$f(x, y) = [5x]+[5y]-[3x+y]-[3y+x] \geqslant 0+2-1-1 = 0.$$

Если же $y \geqslant 3/5$, то $[5y] \geqslant 3$,

$$[3y+x] = [y+x+2y] \leqslant [y+x]+2 \leqslant 2,$$

и

$$f(x, y) \geqslant 0+3-1-2 = 0.$$

Итак, неравенство $f(x, y) \geqslant 0$ доказано при $x, y \in [0; 1)$. Но так как число 1 является периодом функции $f(x, y)$ по каждому из аргументов x, y, то это неравенство можно считать доказанным при всех $x, y \in \mathbf{R}$. Наконец, при $x, y \geqslant 0$ имеем

$$[5x]+[5y]=f(x, y)+[3x+y]+[3y+x]+[x]+[y] \geqslant [3x+y]+[3y+x],$$

что и требовалось доказать.

б) Докажем, что степень, с которой произвольное простое число p входит в разложение знаменателя $m!n!(3n+m)!(n+3m)!$ на простые множители, не превосходит соответствующей степени для числителя $(5m)!(5n)!$ Поскольку число p входит в разложение числа $q!$ в степени, равной $[q/p]+[q/p^2]+\ldots$, то в числитель оно входит в степени $[5m/p]+[5m/p^2]+\ldots+[5n/p]+[5n/p^2]+\ldots$, а в знаменатель — в степени

$$[m/p]+[m/p^2]+\ldots+[n/p]+[n/p^2]+\ldots+[(3m+n)/p]+$$
$$+[(3m+n)/p^2]+\ldots+[(3n+m)/p]+[(3n+m)/p^2]+\ldots$$

Обозначим $m/p^k=x_k$, $n/p^k=y_k$, где $k \in \mathbf{N}$. В силу доказанной выше (в п. а)) оценки имеем неравенства

$$[5x_k]+[5y_k] \geqslant [x_k]+[y_k]+[3x_k+y_k]+[x_k+3y_k],$$

суммируя которые по всем значениям $k \in \mathbf{N}$ (при достаточно больших k обе части неравенств равны нулю), получим требуемое неравенство.

8.11. Так как $x=m+\alpha$, где $m=[x]$, $\alpha=\{x\}$, то при любом $k \in \mathbf{N}$ имеем

$$[kx]=[km+k\alpha]=km+[k\alpha].$$

Поэтому исходное неравенство имеет вид

$$nm+[n\alpha] \geqslant \left(m+\frac{[\alpha]}{1}\right)+\left(m+\frac{[2\alpha]}{2}\right)+\ldots+\left(m+\frac{[n\alpha]}{n}\right),$$

а значит, равносильно неравенству

$$[n\alpha] \geqslant \frac{[\alpha]}{1}+\frac{[2\alpha]}{2}+\ldots+\frac{[n\alpha]}{n}.$$

Следовательно, достаточно рассмотреть случай $0 \leqslant x < 1$. Левая и правая части неравенства при $x \in [0; 1)$ представляют собой неубывающие кусочно-постоянные функции, которые могут менять свои значения только при переходе через точки вида $x=p/q$, где числа $p, q \in \mathbf{N}$ взаимно простые, т. е. $(p, q)=1$, и $2 \leqslant q \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant q-1$. Поэтому достаточно доказать неравенство лишь в точках такого вида (а также в точке $x=0$, где оно, разумеется, выполнено). При этом, если обозначить $[k(p/q)]=a_k$, $q\{k(p/q)\}=b_k$, $k=1, \ldots, n$, то

$$0 \leqslant b_k < q, \quad kp=a_kq+b_k,$$

а неравенство, которое требуется доказать, имеет вид

$$a_n \geqslant \frac{a_1}{1}+\ldots+\frac{a_n}{n}.$$

Заметим, что числа $b_1, \ldots, b_{q-1}$ отличны от нуля и попарно различны (если $b_i = b_j$ при $i > j$, то $ip - a_i q = jp - a_j q$, откуда

$$(i-j)\,p = (a_i - a_j)\,q, \quad 0 < i-j < q,$$

что невозможно, так как $(p, q) = 1$). Поэтому

$$\{b_1; \ldots; b_{q-1}\} = \{1; \ldots; q-1\},$$

а из теоремы о средних имеем

$$\frac{\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\ldots+\frac{b_{q-1}}{q-1}}{q-1} \geqslant \sqrt[q-1]{\frac{b_1 b_2 \ldots b_{q-1}}{1\cdot 2 \ldots (q-1)}} = \sqrt[q-1]{\frac{(q-1)!}{(q-1)!}} = 1,$$

откуда

$$\frac{b_1}{1}+\ldots+\frac{b_n}{n} \geqslant \frac{b_1}{1}+\ldots+\frac{b_{q-1}}{q-1} \geqslant q-1.$$

Таким образом,

$$a_n + \frac{q-1}{q} \geqslant a_n + \frac{b_n}{q} = \frac{np}{q} = \frac{p}{q} + \frac{2p}{2q} + \ldots + \frac{np}{nq} =$$
$$= \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} + \frac{1}{q}\left(\frac{b_1}{1}+\ldots+\frac{b_n}{n}\right) \geqslant a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} + \frac{q-1}{q},$$

что и требовалось доказать.

8.12. Заметим, что из условий задачи вытекает равенство $c = a+b$, так как в противном случае при достаточно больших значениях $n \in \mathbf{N}$ равенства

$$[an] + [bn] = [cn]$$

не могут выполняться. Действительно, если $c > a+b$ и $n \geqslant 1/(c-a-b)$, то

$$[nc] > nc - 1 \geqslant na + nb \geqslant [na] + [nb],$$

а если $c < a+b$ и $n \geqslant 2/(a+b-c)$, то

$$[nc] \leqslant nc \leqslant na - 1 + nb - 1 < [na] + [nb].$$

Кроме того, при $n = 1$ получаем $[a] + [b] = [c]$. Далее, без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant a < 1$, $0 \leqslant b < 1$ и $c = a+b < 1$ (действительно, если обозначить $a = [a] + \alpha$, $b = [b] + \beta$, $c = [c] + \gamma$, то для чисел $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1)$ из равенств

$$[an] + [bn] = ([a]\,n + [\alpha n]) + ([b]\,n + [\beta n]) =$$
$$= ([a] + [b])\,n + [\alpha n] + [\beta n] = [c]\,n + [\gamma n]$$

вытекает условие $[\alpha n] + [\beta n] = [\gamma n]$). Предположим, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, и рассмотрим два случая.

а) Пусть a, b — рациональные числа, т. е. $a = k/m$, $b = l/m$, $c = (k+l)/m$, где $k, l, m \in \mathbf{N}$ и $k + l < m$. Тогда если $n = m-1$, то

$$[an] = [k(m-1)/m] = [k - k/m] = [k-a] = k-1;$$

аналогично,

$$[bn]=l-1 \text{ и } [cn]=k+l-1,$$

следовательно, равенство $[an]+[bn]=[cn]$ не выполняется при этом значении n.

б) Пусть хотя бы одно из чисел a, b, скажем число a, является иррациональным. Выберем чнсло $p\in\mathbf{N}$, удовлетворяющее неравенствам

$$a+pb<1\leqslant a+(p+1)\,b,$$

и докажем, что для некоторого числа $n\in\mathbf{N}$ выполнены оценки $a+pb<$ $<\{na\}$. Действительно, обозначим $\varepsilon=1-(a+pb)$ и рассмотрим числа $\{a\}$, $\{2a\}$, $\{3a\}$, $\ldots$, $\{ta\}$, где $t>1/\varepsilon+1$. Поскольку все эти числа принадлежат интервалу $(0;\ 1)$, то среди них обязательно найдутся по меньшей мере два числа $\{ra\}$ и $\{qa\}$ $(r<q)$, отличающиеся друг от друга менее чем на ε (в противном случае наименьшее и наибольшее из этих чисел различаются не менее чем на $\varepsilon\,(t-1)>\varepsilon\,(1/\varepsilon)=1$). Поэтому имеются две возможности: либо $\{(q-r)\,a\}>1-\varepsilon$, либо $\{(q-r)\,a\}<\varepsilon$. В первом случае положим $n=q-r$ и получим $a+pb=$ $=1-\varepsilon<\{na\}$. Во втором случае обозначим $\delta=\{(q-r)\,a\}<\varepsilon$ и выберем число $s\in\mathbf{N}$, удовлетворяющее оценкам $\delta s<1\leqslant\delta\,(s+1)$. Тогда положим $n=s\,(q-r)$ и получим

$$\{na\}=s\,\{(q-r)\,a\}=\delta s>1-\varepsilon.$$

Поэтому и во втором случае имеем $a+pb<\{na\}$. Для найденного значения n должны выполняться равенства

$$[na]+[nb]=[nc],$$
$$\{na\}+\{nb\}=n\,(a+b)-([na]+[nb])=\{nc\}.$$

Таким образом, имеем оценки

$$\{na\}>a,$$
$$\{nc\}=\{na\}+\{nb\}\geqslant\{na\}>a+pb\geqslant a+b=c,$$
$$\{nb\}=\{nc\}-\{na\}<1-(a+pb)=1-(a+(p+1)\,b-b)\leqslant$$
$$\leqslant 1-(1-b)=b,$$

из которых получаем, что $n>1$ и

$$[(n-1)\,a]=[na],\quad [(n-1)\,c]=[nc],$$
$$[(n-1)\,b]=[nb]-1,$$

а значит, равенство

$$[(n-1)\,a]+[(n-1)\,b]=[(n-1)\,c]$$

не выполняется. Итак, доказано, что хотя бы одио из чисел a или b должно быть равно нулю. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения задачн.

Глава 3

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 9. Треугольники

9.1. Предположим противное, т. е. высота AH, медиана BM и биссектриса CL остроугольного неравностороннего треугольника ABC (рис. 2), пересекаясь, образуют правильный треугольник. Точки пересечения отрезков AH и BM, BM и CL, CL и AH обозначим соответственно P, Q, R. Тогда в треугольнике CRH имеем $\angle CHR = 90°$, $\angle CRH = 60°$, откуда $\angle RCH = 30°$. Далее, в треугольнике CMQ имеем $\angle QCM = \angle RCH = 30°$, $\angle MQC = 60°$ (равенство $\angle BQC = 60°$ невозможно, так как иначе $\angle ABC > \angle QBC = 180° - \angle BQC - \angle QCB = 90°$, т. е. треугольник ABC тупоугольный), откуда $BM \perp AC$. Таким образом, медиана BM является одновременно высотой треугольника ABC, поэтому

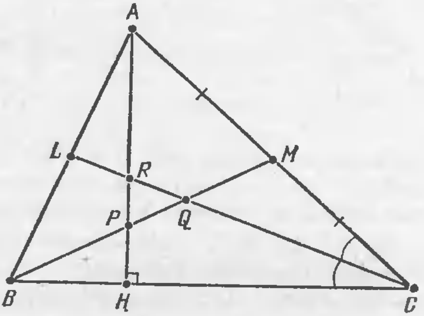


Рис. 2

$$\angle BAC = \angle BCA = \angle ACL + \angle BCL = 60°,$$

т. е. треугольник ABC правильный, что противоречит условию задачи.

9.2. Без ограничения общности можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Если $c > b$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{c^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{c^n} = 0$$

и при достаточно больших значениях $n \in \mathbf{N}$ не выполняется неравенство $a^n + b^n > c^n$, необходимое для существования треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n. Следовательно, $b = c$ и все треугольники равнобедренные.

9.3. Пусть числа m, $n \in \mathbf{N}$ удовлетворяют условию задачи. Тогда $m = CE < AC = 21$ и из треугольника ADE (рис. 3) имеем $21 - m = AE < AD + DE = 2m$, т. е.

$$7 < m < 21.$$

Далее, поскольку $AD = DE$, то для угла $\alpha = \angle BAC$ находим

$$\cos\alpha = AE/(2 \cdot AD) = (21 - m)/2m.$$

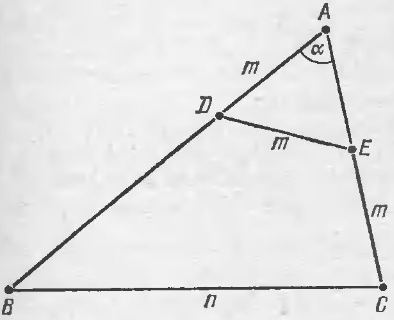


Рис. 3

Наконец, по теореме косинусов для треугольника ABC получаем

$$n^2=BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha=33^2+21^2-2\cdot33\cdot21\cdot\frac{21-m}{2m}=2223-\frac{27\cdot49\cdot11}{m},$$

откуда следует, что число m является делителем числа $27\cdot49\cdot11$. Из двух возможных значений $m=9$ и $m=11$ первое не подходит (так как $n^2\neq606$), а второе дает равенство $n^2=900$, т. е. $n=30$. Проверка показывает, что все условия задачи при найденном значении n выполняются.

9.4. Пусть $a,\ b,\ c\in\mathbf{N}$ — длины сторон треугольника с диаметром $2R=6{,}25$ описанной окружности, площадью S и полупериметром $p=(a+b+c)/2$. Так как $a,\ b,\ c\leqslant 2R$, то

$$a,\ b,\ c\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}.$$

Далее, имеем равенства

$$(abc)^2=(4SR)^2=p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(4R)^2,$$

откуда получаем

$$64a^2b^2c^2=625\,(a+b+c)\,(c+b-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c).$$

Следовательно, число $64a^2b^2c^2$ делится на 625, а значит, по крайней мере два из трех чисел a, b, c равны 5. Пусть, например, $a=b=5$, тогда

$$64c^2=(10+c)\,c^2\,(10-c),$$

т. е. $64=100-c^2$, откуда $c=6$. Итак, искомая тройка может состоять только из чисел 5, 5, 6, которые, как показывает проверка, удовлетворяют условию задачи.

9.5. Пусть R — радиус окружности, в которую вписаны треугольники ABC и DEF. Тогда по теореме синусов имеем

$$\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=\frac{BC+AC+AB}{2R}=\frac{p_1}{2R},$$

где p_1 — периметр треугольника ABC. Аналогично,

$$\sin\angle E+\sin\angle D+\sin\angle F=p_2/(2R),$$

где p_2 — периметр треугольника DEF. Поэтому равенства

$$\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=\sin\angle E+\sin\angle D+\sin\angle F$$

и

$$p_1=p_2$$

равносильны.

9.6. Пусть прямая пересекает стороны треугольника ABC в точках K и M, лежащих для определенности иа сторонах AB и AC соответственно (рис. 4). Докажем, что равенство

$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}}=\frac{AK+AM}{AB+AC+BC}$$

имеет место тогда и только тогда, когда прямая KM проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности. Утверждение

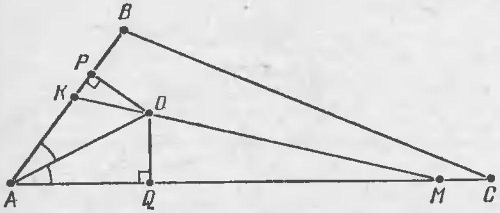


Рис. 4

задачи является частным случаем этого факта при дополнительном условии

$$S_{AKM}=(1/2)\,S_{ABC}$$

(ибо последнее условие равносильно равенству $S_{AKM}=S_{KBCM}$, а условие

$$AK+AM=(1/2)\,(AB+AC+BC)$$

— равенству

$$AK+AM+KM=KB+MC+BC+KM).$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда

$$2S_{ABC}=r\,(AB+AC+BC).$$

С другой стороны, пусть ρ — радиус окружности с центром на прямой KM, касающейся сторон AK и AM. Тогда

$$2S_{AKM}=\rho\,(AK+AM).$$

Следовательно, сформулированное выше равенство равносильно равенству $r=\rho$, которое справедливо тогда и только тогда, когда центры обеих окружностей совпадают.

9.7. Пусть отрезки AA', BB', CC' пересекаются в точке O (рис. 5) и $\angle AOB=\varphi$. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned}2S_{AOB}&=AO\cdot BO\sin\varphi,\\ 2S_{AOB'}&=AO\cdot B'O\sin\varphi,\\ 2S_{BOA'}&=BO\cdot A'O\sin\varphi,\\ 2S_{A'OB'}&=A'O\cdot B'O\sin\varphi,\end{aligned}$$

откуда

$$S_{A''OB''}=\frac{1}{2}\,A''O\cdot B''O\sin\varphi=\frac{1}{2}\,(AO+2A'O)(BO+2B'O)\sin\varphi=$$
$$=S_{AOB}+2S_{AOB'}+2S_{BOA'}+4S_{A'OB'}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$S_{A''OC''}=S_{AOC}+2S_{AOC'}+2S_{COA'}+4S_{A'OC'},$$
$$S_{B''OC''}=S_{BOC}+2S_{BOC'}+2S_{COB'}+4S_{B'OC'}.$$

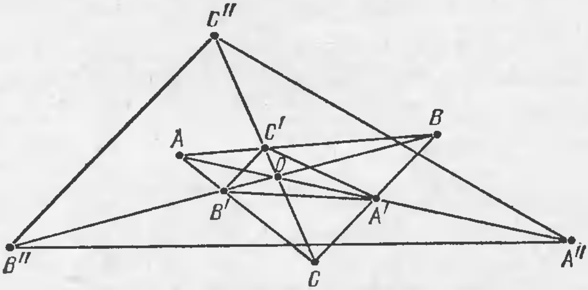


Рис. 5

Таким образом, получаем

$$S_{A''B''C''}=S_{A''OB''}+S_{A''OC''}+S_{B''OC''}=$$
$$=S_{ABC}+2\,(S_{AOB'}+S_{B'OC}+S_{COA'}+S_{A'OB}+S_{BOC'}+S_{C'OA})+4S_{A'B'C'}=$$
$$=3S_{ABC}+4S_{A'B'C'},$$

что и требовалось доказать.

9.8. Положим $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, тогда

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}),\quad \overrightarrow{CO}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

и

$$(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2)-3\,(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2)=$$
$$=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-\frac{1}{3}((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2)=$$
$$=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{ab}+2\boldsymbol{bc}+2\boldsymbol{ac})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=0,$$

что и требовалось доказать.

9.9. Пусть центр тяжести границы треугольника ABC совпадает с центром тяжести самого треугольника, т. е. с точкой O пересечения его медиан. Обозначим через a, b, c длины сторон BC, CA, AB соответственно, а через A_1, B_1, C_1 — их середины (которые являются их центрами тяжести). Тогда

$$a\cdot\overrightarrow{OA_1}+b\cdot\overrightarrow{OB_1}+c\cdot\overrightarrow{OC_1}=0.$$

Поскольку

$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=-\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{1}{6}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=$$
$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}=-\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB_1},$$

мы получаем

$$(a-c)\overrightarrow{OA_1}+(b-c)\overrightarrow{OB_1}=a\overrightarrow{OA_1}+b\overrightarrow{OB_1}+c\overrightarrow{OC_1}=0,$$

откуда в силу неколлинеарности векторов $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ имеем $a=c=b$, т. е. треугольник ABC правильный.

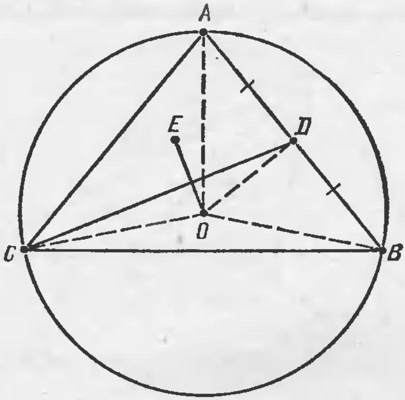


Рис. 6

9.10. Из соотношений (рис. 6)

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right),$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}),$$

$$AB=AC,\ \overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{BC}$$

получаем

$$12\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=(2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=$$
$$=3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-4\overrightarrow{OC}^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=$$
$$=3R^2+R^2-4R^2+4\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}=0,$$

где $R=OA=OB=OC$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, и, значит, $OE\perp CD$.

9.11. Обозначим $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{y}$, тогда (рис. 7)

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\ \overrightarrow{CE}=2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\ \overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},$$

а условие $CD\perp CE$ равносильно равенству

$$(2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(2\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=0,\ \text{или}\ 5(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2.$$

Последнее условие означает, что стороны $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ треугольника ABC удовлетворяют равенству $5c^2=a^2+b^2$. Такой треугольник существует при тех и только тех значениях a, b, при которых выполнены неравенства треугольника

$$|a-b| < \sqrt{(a^2+b^2)/5} < a+b,$$

т. е.

$$5(a-b)^2 < a^2+b^2 < 5(a+b)^2.$$

Правое неравенство выполнено при всех a, $b > 0$, а левое равносильно

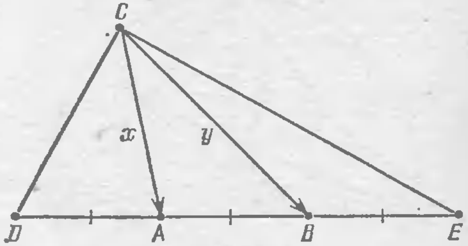


Рис. 7

условию $(2a-b)(2b-a) > 0$. Таким образом, получаем ответ: $1/2 < a/b < 2$.

9.12. Выберем угол α, удовлетворяющий условиям $6\alpha < 90°$ и $\operatorname{tg}\alpha \in Q$ (годится, например, значение $\operatorname{tg}\alpha = 1/4$). Тогда каждое из чисел

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 6\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2 3\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 3\alpha},\quad \sin 6\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 3\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 3\alpha}$$

является рациональным. Поэтому у прямоугольного треугольника $A_1B_1C_1$, удовлетворяющего условиям

$$\angle C_1 = 90°,\ \angle A_1 = 6\alpha,\ A_1B_1 = 1,\ A_1C_1 = \cos 6\alpha,\ B_1C_1 = \sin 6\alpha,$$

длины всех сторон рациональны, следовательно, он подобен некоторому треугольнику ABC с целочисленными сторонами (например, при $\operatorname{tg}\alpha = 1/4$ стороны треугольника ABC могут быть равны $AB = 4913$, $AC = 495$, $BC = 4888$). С другой стороны, у прямоугольного треугольника $A_2B_2C_2$, удовлетворяющего условиям

$$\angle C_2 = 90°,\ \angle A_2 = 2\alpha,\ A_2B_2 = 1,\ A_2C_2 = \cos 2\alpha,\ B_2C_2 = \sin 2\alpha,$$

длины всех сторон также рациональны. Поэтому можно построить с помощью циркуля и линейки угол $2\alpha = (1/3)\angle A_1$, т. е. разделить на три равные части угол A треугольника ABC. Поскольку угол, равный $30°$, также можно построить и

$$\frac{1}{3}\angle B = \frac{1}{3}(\angle C - \angle A) = 30° - 2\alpha,$$

то каждый угол треугольника ABC можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки. Итак, треугольник ABC удовлетворяет требоваииям задачи.

9.13. В треугольнике ABC обозначим

$$\alpha=\angle A,\ \beta=\angle B,\ \gamma=\angle C,\ a=BC,\ b=AC,\ c=AB,$$

R—радиус описанной окружности. Равенство $BC=XY$ выполнено в том и только в том случае, если $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{YX}$ или $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{XY}$, что

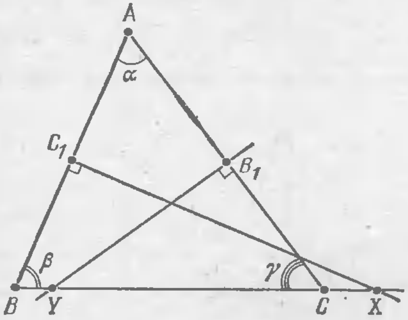


Рис. 8

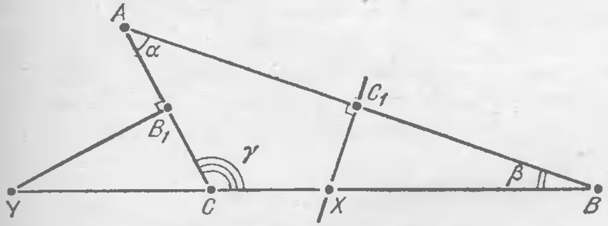


Рис. 9

в силу равенств

$$|\overrightarrow{XY}\pm\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CY}\pm\overrightarrow{BC}|=$$
$$=\left|-\frac{c}{2\cos\beta}+a-\frac{b}{2\cos\gamma}\pm a\right|=R\left|-\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}+2\,(1\pm1)\sin\alpha\right|,$$

равносильно условию

$$2\,(1\pm1)\sin\alpha=\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$$

(знак «плюс» соответствует случаю, изображенному на рис. 8, а знак «минус»—случаю, изображенному на рис. 9). Учитывая, что

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin2\gamma+\sin2\beta}{2\cos\beta\cos\gamma}=$$
$$=\frac{\sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha\,(\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}=$$
$$=\sin\alpha\,(1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta),$$

получаем равносильное условие

$$2(1 \pm 1) = 1 + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \beta,$$

которое выполнено в том и только в том случае, если $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 3$ или $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = -1$. Таким образом, $M = \{-1; 3\}$ и утверждение п. а) доказано, а для доказательства п. б) достаточно заметить, что случай $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = -1$ реализуется, например, при $\alpha = \beta = 30°$, $\gamma = 120°$.

9.14. Обозначим через B_2 и C_2 основания высот, опущенных на стороны AC и AB соответственно (рис. 10). Тогда из соотношений

$$\Delta AB_1C \backsim \Delta AB_2B_1,\ \Delta ABB_2 \backsim \Delta ACC_2,\ \Delta AC_1B \backsim \Delta AC_2C_1$$

(каждая из указанных пар прямоугольных треугольников имеет

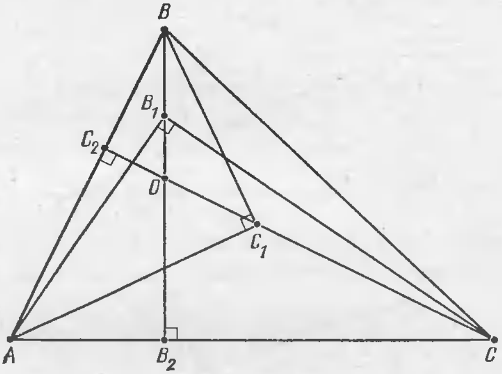


Рис. 10

общий острый угол) имеем

$$AB_1^2 = AB_2 \cdot AC = AC_2 \cdot AB = AC_1^2,$$

откуда получаем требуемое равенство $AB_1 = AC_1$.

9.15. Обозначим через A_2, B_2, C_2 основания высот, опущенных на стороны BC, CA, AB соответственно. Тогда справедливы равенства

$$AO \cdot A_2O = BO \cdot B_2O = CO \cdot C_2O$$

(первое равенство следует из подобия прямоугольных треугольников AOB_2 и BOA_2, а второе — из подобия прямоугольных треугольников COB_2 и BOC_2). Далее, поскольку B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, то точка Q ее пересечения с высотой AA_2 делит последнюю пополам, причем $OQ \perp D_1D_2$, и по теореме Пифагора имеем

$$AD_i^2 = AQ^2 + (R^2 - OQ^2) = R^2 + (AQ - OQ)(AQ + OQ)\ (i = 1,\ 2),$$

где R — радиус окружности. Перебор различных случаев расположения точки O на прямой AA_2 показывает, что справедливо равенство

$$AD_i^2 = R^2 \pm AO \cdot A_2O,$$

причем если точка O лежит внутри треугольника AEC, то в этом равенстве стоит знак «плюс», а если вне его, то «минус» (например,

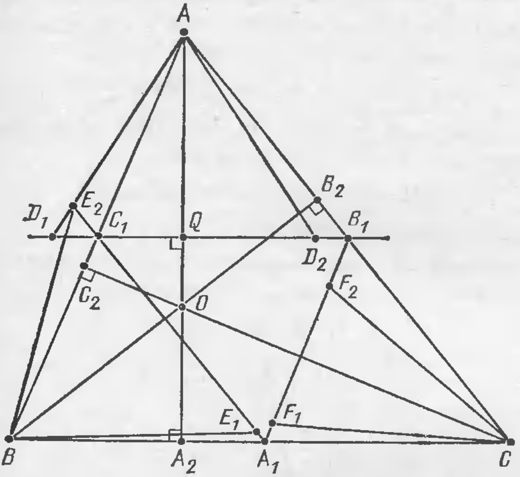


Рис. 11

в случае, изображенном на рис. 11, имеем $AQ - OQ = A_2Q - OQ = A_2O$, $AQ + OQ = AO$). Аналогично устанавливаются равенства

$$BE_1^2 = R^2 \pm BO \cdot B_2O, \quad CF_1^2 = R^2 \pm CO \cdot C_2O,$$

из которых вытекает доказываемое утверждение.

9.16. Пусть E и F — середины отрезков AP и BP соответственно. Тогда, так как DE и DF — средние линии треугольника APB, то

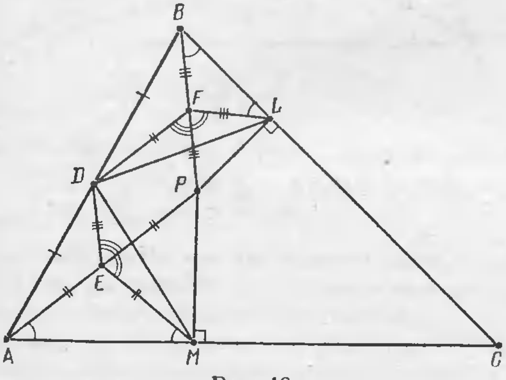


Рис. 12

четырехугольник $DFPE$ — параллелограмм, и из прямоугольных треугольников APM и BPL имеем

$$ME = \frac{1}{2} AP = DF, \quad LF = \frac{1}{2} BP = DE.$$

Далее,

$$\angle PEM = 2\angle EAM = 2\angle FBL = \angle PFL, \quad \angle PED = \angle PFD.$$

Таким образом, треугольники DEM и DFL равны по двум сторонам и углу между ними (равному величине

$$\alpha = \angle PEM + \angle PED = \angle PFL + \angle PFD,$$

если, как изображено на рис. 12, $\alpha < 180°$, и равному $360° - \alpha$, если $\alpha > 180°$; если $\alpha = 180°$, то сразу имеем

$$DM = ME + DE = DF + LF = DL),$$

откуда вытекает равенство $DM = DL$.

9.17. Приведенное в задаче условие выполняется для всех точек, лежащих на высотах правильного треугольника ABC. Например,

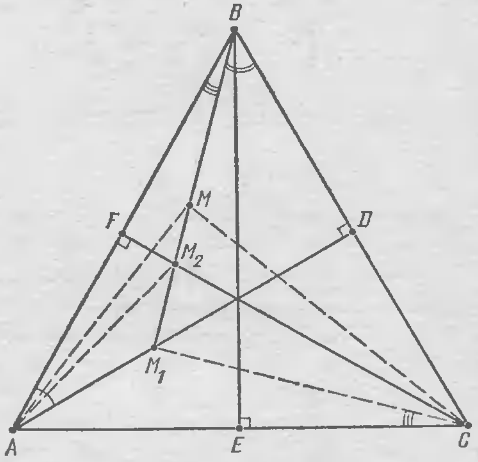


Рис. 13

если M_1 — точка на высоте, выходящей из вершины A (рис. 13), то

$$\angle M_1AB + \angle M_1BC + \angle M_1CA = \angle M_1AB + \angle M_1BC + \angle M_1BA = \\ = \angle M_1AB + \angle ABC = 90°.$$

Докажем, что других таких точек нет. Пусть, напротив, условию задачи удовлетворяет точка M, не лежащая ни на одной из высот треугольника. Тогда прямая BM пересекает высоты, проведенные из вершин A и C, в некоторых точках M_1 и M_2 соответственно. Если бы для всех трех (непременно различных) точек M, M_1, M_2 было выполнено условие задачи, то имели бы место соотношения

$$\angle MAM_1 = \angle MCM_1, \quad \angle MAM_2 = \angle MCM_2.$$

Но тогда точка C', симметричная точке C относительно прямой BM, лежала бы как на окружности, описанной около треугольника AMM_1, так и на окружности, описанной около треугольника AMM_2. Поэтому обе эти окружности, проходя через три различные точки A, M, C' ($C' \neq A$, ибо прямая BM не перпендикулярна стороне AC), совпадали бы, что невозможно, так как точки M, M_1, M_2 не могут лежать на одной окружности.

9.18. Пусть A_1C_1 — биссектриса треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 14). Так как образ отрезка A_2A_3 при преобразовании симметрии относи-

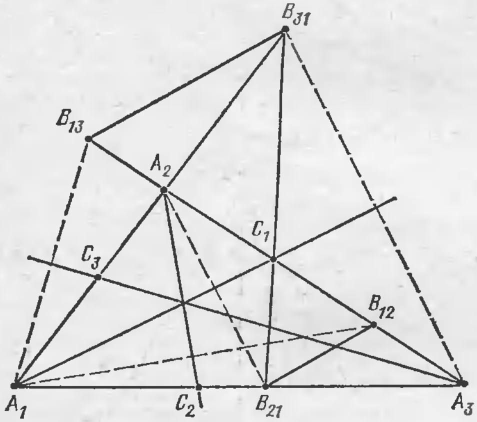


Рис. 14

тельно прямой A_1C_1 есть отрезок $B_{21}B_{31}$, то прямые A_2A_3 и $B_{21}B_{31}$ пересекаются в точке C_1. По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3}=\frac{C_1A_2}{C_1A_3},$$

откуда получаем

$$\frac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1}=\frac{B_{12}A_2-C_1A_2}{B_{13}A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2-C_1A_2}{A_1A_3-C_1A_3}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3},$$

поскольку $B_{12}A_2=A_1A_2$, $B_{13}A_3=A_1A_3$. Аналогично устанавливается равенство

$$\frac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1}=\frac{A_1A_2}{A_1A_3}.$$

Таким образом, треугольники $B_{12}C_1B_{21}$ и $B_{13}C_1B_{31}$ гомотетичны, откуда $B_{12}B_{21} \parallel B_{13}B_{31}$. Аналогично доказывается, что $B_{23}B_{32} \parallel B_{13}B_{31}$.

Замечание. Можно доказать, что прямые $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$, $B_{23}B_{32}$ перпендикулярны прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника $A_1A_2A_3$.

9.19. Пусть точки A, L, B, M расположены на прямой AB в указанном порядке (рис. 15; случай их расположения в порядке M, A, L, B рассматривается аналогично), тогда

$$\angle LCM=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ \text{ и } \angle CLM=45^\circ$$

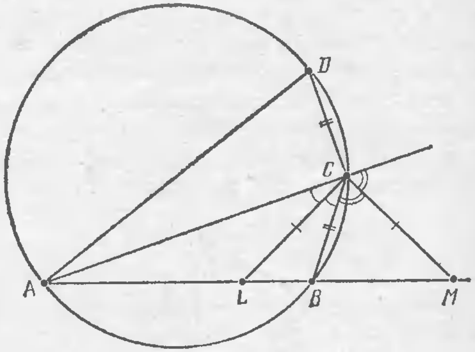


Рис. 15

(ибо $CL = CM$). Поэтому

$$2 \angle BAC + \angle BCA = 2(\angle LAC + \angle LCA) = 2 \angle CLM = 90^\circ$$

и

$$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC,$$

откуда

$$\angle BAC = \angle ABC - 90^\circ.$$

Поскольку угол ABC тупой, то диаметр AD описанной около треугольника ABC окружности лежит вне этого треугольника, а значит,

$$\angle DAC = (180^\circ - \angle ADC) - \angle ACD = \angle ABC - 90^\circ = \angle BAC$$

(ибо $\angle ABC$ и $\angle ADC$ — противоположные углы вписанного четырехугольника $ABCD$). Поэтому $DC = BC$ и

$$4R^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + BC^2,$$

что и требовалось доказать.

9.20. Пусть высота CH треугольника ABC пересекается с пря-

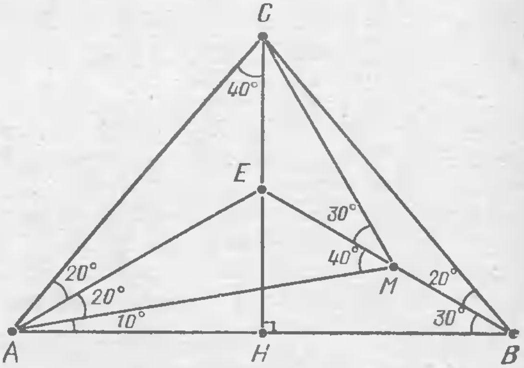


Рис. 16

мой BM в точке E (рис. 16). Тогда $AE=BE$ и

$$\angle EAM=\angle EAB-\angle MAB=30^\circ-10^\circ=20^\circ,$$
$$\angle ACE=(1/2)\angle ACB=40^\circ,$$
$$\angle EAC=\angle CAH-\angle EAB=(90^\circ-40^\circ)-30^\circ=20^\circ,$$
$$\angle AME=\angle MAB+\angle MBA=10^\circ+30^\circ=40^\circ,$$

а значит, треугольники AME и ACE равны по общей стороне и двум углам. Поэтому

$$AM=AC,\ \angle AMC=\angle ACM=(1/2)(180^\circ-\angle CAM)=70^\circ.$$

9.21. Пусть O — точка пересечения прямых AD и BE (рис. 17), тогда

$$\angle AOB=180^\circ-30^\circ-50^\circ=100^\circ,$$
$$\angle BDA=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ,$$
$$\angle CBE=50^\circ-30^\circ=20^\circ,$$
$$\angle AEB=\angle CBE+\angle ECB=70^\circ,$$
$$\angle CAD=180^\circ-\angle ACB-\angle ABC-\angle BAD=30^\circ.$$

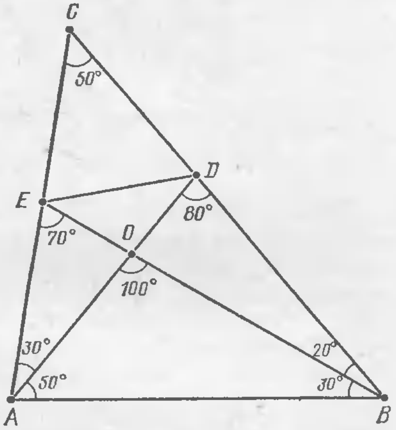


Рис. 17

По теореме синусов имеем

$$\frac{OD}{OB}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ},\quad \frac{OB}{OA}=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ},\quad \frac{OA}{OE}=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ},$$

откуда получаем

$$\frac{OD}{OE}=\frac{OD}{OB}\cdot\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OA}{OE}=\frac{\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ\sin^2 30^\circ}=$$
$$=\frac{4\sin 20^\circ\cos 40^\circ\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}=1,$$

т. е. $OD=OE$ и

$$\angle BED=\angle ODE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle EOD)=\frac{1}{2}(180^\circ-100^\circ)=40^\circ.$$

9.22. Если точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AP (рис. 18), то $C_1P=CP=2BP$ и $\angle C_1PB=180^\circ-\angle APC-\angle APC_1=$ $=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$. Поэтому $\angle C_1BP=90^\circ$ (ибо треугольник C_1PB подобен прямоугольному треугольнику с гипотенузой 2 и катетом 1), а значит, BA — биссектриса угла C_1BP. Таким образом, точка A, равноудаленная от прямых C_1P, PC, C_1B, лежит на биссектрисе угла PC_1D (где точка D лежит на продолжении отрезка BC_1 за точку C_1). Поэтому

$$\angle ACB=\angle AC_1P=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BC_1P)=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ.$$

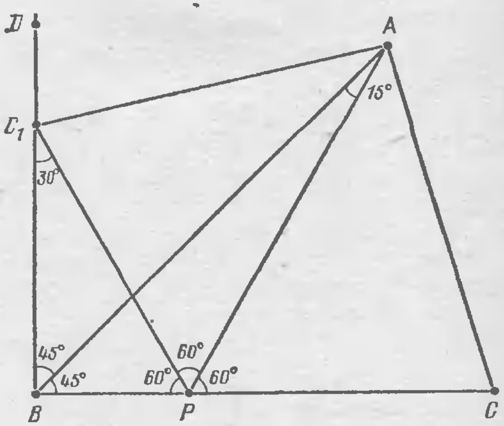


Рис. 18

9.23. Обозначим $\alpha=20°$, $\beta=25°$, $\gamma=15°$ (рис. 19). Тогда $\alpha, \beta, \gamma < 30°$, $\alpha+\beta+\gamma=60°$, $\angle KAM=60°-\angle MAC-\angle KAB=\alpha$ и аналогично $\angle LBM=\beta$, $\angle KCL=\gamma$. Пусть отрезки AM и CL пересекаются в точке N, прямые BN и AC — в точке P, а прямые CL и AB — в точке Q. Так как $AB=BC$ и $AN=NC$ (ибо $\angle NAC=$ $=\angle NCA=\beta$), то BP — биссектриса угла ANC, а значит, и угла LNM. Возьмем точку B', лежащую внутри угла LNM и вне треугольника LMN и равноудаленную от трех прямых LN, LM и MN. Эта точка лежит на прямой NB и биссектрисах внешних углов L и M треуголь-

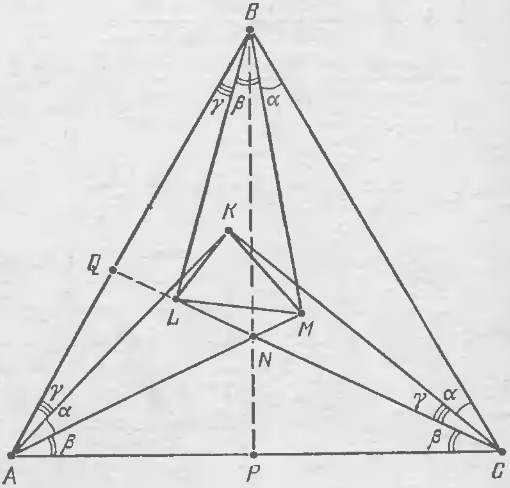


Рис. 19

ника LMN, поэтому

$$\angle LB'M = 180^\circ - \angle B'LM - \angle B'ML =$$
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle NLM}{2} - \frac{180^\circ - \angle NML}{2} = \frac{\angle NLM + \angle NML}{2} =$$
$$= \frac{180^\circ - \angle LNM}{2} = \frac{\angle NAC + \angle NCA}{2} = \beta = \angle LBM.$$

Следовательно, $B' = B$ и

$$\angle BLM = \angle BLQ = 180^\circ - \angle CQB - \angle ABL =$$
$$= \angle ABC + \angle BCQ - \angle ABL = 60^\circ + \alpha + \gamma - \gamma = 60^\circ + \alpha.$$

Поскольку

$$\angle BLC = 180^\circ - \angle LBC - \angle LCB = 180^\circ - (\beta + \alpha) - (\alpha + \gamma) = 120^\circ - \alpha,$$

то

$$\angle MLC = \angle BLC - \angle BLM = 120^\circ - \alpha - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ - 2\alpha$$

(напомним, что $\alpha < 30^\circ$). Подобным же образом доказывается, что

$$\angle KLB = 60^\circ - 2\alpha.$$

Итак, имеем

$$\angle KLM = \angle BLC - \angle KLB - \angle MLC =$$
$$= (120^\circ - \alpha) - (60^\circ - 2\alpha) - (60^\circ - 2\alpha) = 3\alpha,$$

т. е.

$$\angle KLM = 3\alpha = 60^\circ.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\angle LKM = 3\beta = 75^\circ \text{ и } \angle KML = 3\gamma = 45^\circ.$$

§ 10. Окружности и круги

10.1. Разобьем все точки окружности на пары диаметрально противоположных точек и в каждой паре одну точку (любую) отнесем к первому множеству, а другую — ко второму. Так как гипотенуза любого вписанного прямоугольного треугольника является диаметром окружности, то вершины острых углов такого треугольника будут принадлежать разным множествам.

10.2. Пусть квадрат $ABCD$ вписан в окружность диаметра d, а точка P лежит на дуге AD (рис. 20). Обозначим $\alpha = \angle ACP$. Тогда, если числа

$$AP = d \sin \alpha \text{ и } CP = d \cos \alpha$$

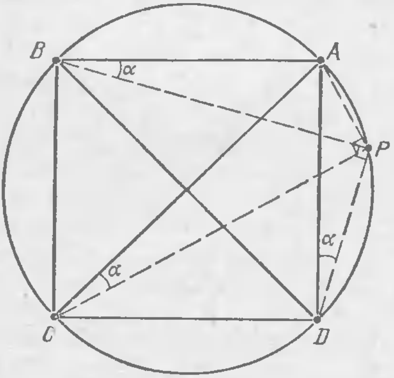


Рис. 20

являются рациональными, то число

$$BP = d\sin\angle PDB = d\sin(\angle ADB + \angle ADP) =$$
$$= d\sin(45^\circ + \alpha) = d(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2)(AP + CP)$$

иррационально.

10.3. Рассмотрим равные окружности с центрами O_1 и O_2, вписанные в треугольники AC_1M и AB_1M соответственно. Пусть они ка-

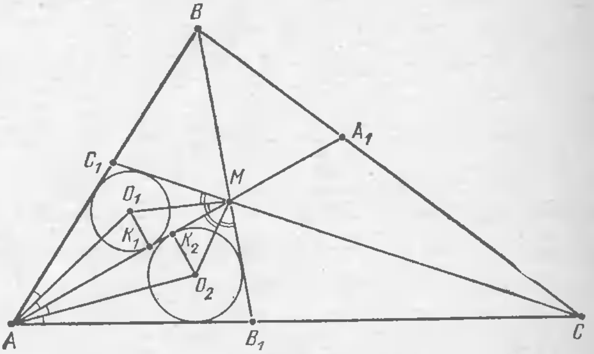


Рис. 21

саются отрезка AM в точках K_1 и K_2 (рис. 21). Тогда прямоугольные треугольники AO_1K_1 и AO_2K_2 равны, поскольку

$$O_1K_1 = O_2K_2 \text{ и } \angle O_1AK_1 = \frac{1}{2}\angle C_1AM = \frac{1}{2}\angle B_1AM = \angle O_2AK_2.$$

Поэтому $K_1 = K_2$ и прямоугольные треугольники O_1K_1M и O_2K_2M также равны (по двум катетам), откуда

$$\angle O_1MK_1 = \angle O_2MK_2 \quad \text{и} \quad \angle C_1MA = \angle B_1MA.$$

Следовательно, имеем $\angle AC_1C = \angle AB_1B$ (из треугольников AC_1M и AB_1M, имеющих по два соответственно равных угла), $\angle ABB_1 = \angle ACC_1$ (из треугольников ABB_1 и ACC_1) и $\angle ABC = \angle ACB$. Аналогично доказывается равенство $\angle ACB = \angle BAC$.

10.4. Пусть, вопреки утверждению задачи, ни одна из точек $O_1, \ldots, O_7$, расположенных в порядке обхода вокруг центра O данного круга по часовой стрелке (рис. 22), не совпадает с точкой O. Так как сумма углов $\angle O_1OO_2$, $\angle O_2OO_3$, $\ldots$, $\angle O_7OO_1$

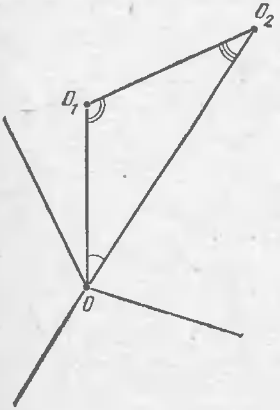


Рис. 22

равна 360°, то хотя бы один из них меньше 60°. Пусть, например, $\angle O_1OO_2 < 60°$, а угол OO_1O_2 — бо́льший из двух оставшихся углов треугольника OO_1O_2 (если $\angle O_1OO_2 = 0$, то сразу $O_1O_2 < 1$). Тогда $\angle OO_1O_2 > 60° > \angle O_1OO_2$, откуда $O_1O_2 < O_2O \leqslant 1$, что противоречит условию задачи.

10.5. Пусть, вопреки утверждению задачи, существует точка O, принадлежащая всем шести кругам. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 центры этих кругов в порядке обхода вокруг точки O по часовой стрелке (см. рис. 22; согласно условию точка O не может быть центром ни одного из кругов). Так как сумма углов $\angle O_1OO_2$, $\angle O_2OO_3$, ..., $\angle O_6OO_1$ равна 360°, то хотя бы один из них не превосходит 60°. Пусть, например, $\angle O_1OO_2 \leqslant 60°$, а угол OO_1O_2 — бо́льший из двух оставшихся углов треугольника OO_1O_2 (если $\angle O_1OO_2 = 0$, то сразу $O_2O \geqslant O_2O_1$). Тогда $\angle OO_1O_2 \geqslant 60° \geqslant \angle O_1OO_2$, откуда $O_2O \geqslant O_2O_1$. Поэтому круг с центром O_2, содержащий точку O, содержит и центр O_1 другого круга, что противоречит условию задачи.

10.6. Допустим, что множество кругов конечно. Тогда круг с центром O и наименьшим радиусом r касается шести кругов с центрами O_1, ..., O_6 (расположенными в порядке обхода вокруг точки O по часовой стрелке; см. рис. 22) и радиусами r_1, ..., r_6 соответственно. В треугольнике O_1OO_2 сторона $O_1O_2 = r_1 + r_2$ наибольшая, откуда $\angle O_1OO_2 \geqslant 60°$. Аналогично получаем, что $\angle O_2OO_3 \geqslant 60°, \ldots, \angle O_6OO_1 \geqslant$ $\geqslant 60°$. Но сумма перечисленных шести углов равна 360°, поэтому каждый из них равен 60° и каждый из остальных углов треугольников O_1OO_2, O_2OO_3, ..., O_6OO_1 (не превосходящий 60°) также равен 60°, т. е. все эти треугольники равносторонние, откуда $r =$ $= r_1 = \ldots = r_6$. Поскольку круг с центром O_1, например, также имеет наименьший радиус, то к нему применимы те же рассуждения, в силу которых он касается некоторого круга того же радиуса с центром $O_7 \neq O$, лежащим на прямой OO_1. Аналогично, последний круг также касается некоторого круга того же радиуса с центром $O_8 \neq O_1$, лежащим на той же прямой, и т. д. Таким образом, множество кругов бесконечно, а утверждение задачи верно.

10.7. Пусть дан треугольник ABC. Построим подобный ему треугольник $A'B'C'$, для которого существуют указанные в задаче окружности (тогда существование соответствующих окружностей для исходного треугольника ABC также будет доказано). Для этого проведем 3 окружности с центрами соответственно в точках A, B, C и радиусом, равным радиусу описанной около треугольника ABC окружности. Тогда эти окружности имеют единственную общую точку (равноудаленную от вершин A, B, C). Три общие касательные к парам проведенных окружностей образуют искомый треугольник $A'B'C'$, подобный треугольнику ABC (ибо $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $A'C' \parallel AC$; см. рис. 23).

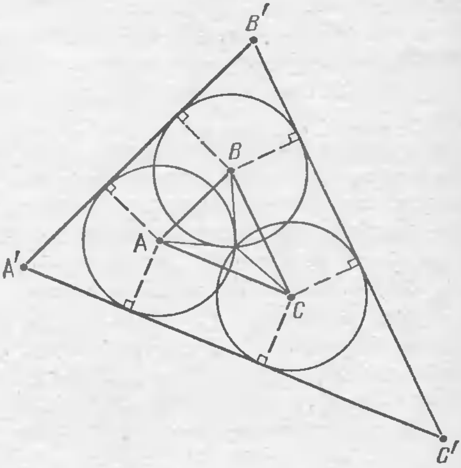


Рис. 23

10.8. Рассмотрим гомотетию с центром P, при которой окружность, содержащая точки B и C, переходит в другую окружность. При этой гомотетии точки B и C переходят в некоторые точки B' и C', лежащие иа прямых BP и CP соответственно, а прямая BC — в параллельиую ей прямую $B'C'$. Следовательно, дуги $B'A$ и $C'A$ равны, а значит, вписанные углы $B'PA$ и $C'PA$ либо равны (в случае внутреинего касания, изображенного на рис. 24), либо составляют в сумме $180°$ (в случае внешнего касания, изображеиного на рис. 25), т. е. равными являются углы BPA и $C'PA$. В обоих случаях прямая PA является биссектрисой одного из углов BPC или BPC'.

10.9. Пусть отрезок PQ касается указанной в задаче окружности с центром O (совпадающим с серединой основания BC равнобедренного треугольника ABC). Обозначим

$$\angle PBO=\angle QCO=\alpha, \quad \angle BPO=\angle QPO=\beta, \quad \angle CQO=\angle PQO=\gamma$$

(рис. 26), тогда, рассматривая четырехугольник $CBPQ$, имеем

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=360°, \text{ т. е. } \alpha+\beta+\gamma=180°,$$

следовательио, треугольники BPO и COQ подобны (по трем углам). Поэтому получаем

$$BP\cdot CQ=BO\cdot OC=BC^2/4.$$

Допустим теперь, что отрезок $P'Q'$ не касается указанной окружиости. Построим отрезок с концами P и Q на сторонах AB и AC соответственно, параллельный отрезку $P'Q'$ и касающийся окруж-

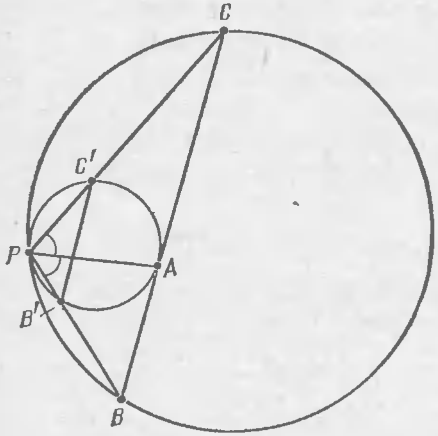


Рис. 24

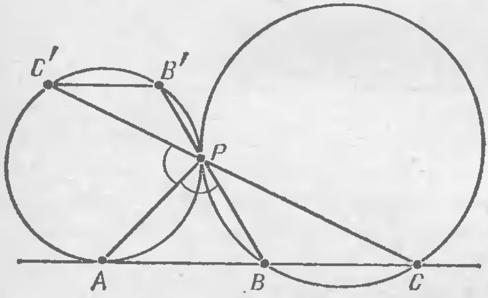


Рис. 25

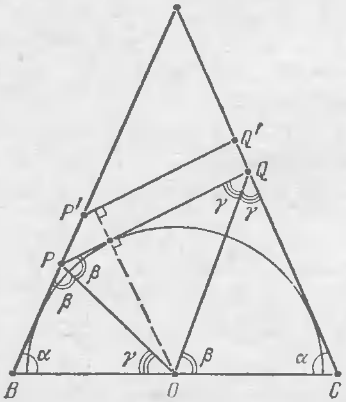


Рис. 26

ности. Тогда, согласно доказанному выше, имеем

$$BC^2/4 = BP \cdot CQ \neq BP' \cdot CQ'.$$

Утверждение полностью доказано.

10.10. Пусть a — сторона квадрата, R — радиус полуокружности с центром O, r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности,

$$\alpha = \angle AON < 90^\circ \text{ и } \angle COB \leqslant 90^\circ$$

(рис. 27). Тогда

$$a^2 = NK^2 = ON^2 - KO^2 = R^2 - (a/2)^2,$$

откуда $a = 2R/\sqrt{5}$. Из равенства площадей квадрата и треугольника ABC получаем, что высота CH последнего равна $4R/5$. Дока-

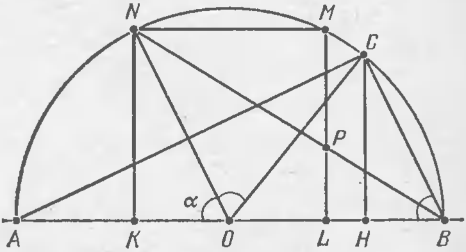


Рис. 27

жем, что ON — биссектриса угла AOC. Действительно, так как $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$ (откуда $\alpha > 45^\circ$), то имеем

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = \sin\angle COB = \sin\angle AOC,$$

где $2\alpha > 90^\circ$, $\angle AOC > 90^\circ$. Следовательно, $\angle AOC = 2\alpha$ и $\angle AON = \angle CON$. Поскольку вписанные углы ABN и CBN опираются на равные дуги, то BN — биссектриса угла ABC (равного α) и на ней лежит центр вписанной в прямоугольный треугольник ABC окружности, радиус которой равен

$$r = (1/2)(AC + BC - AB) = (1/2) \cdot 2R(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = R\left(3/\sqrt{5} - 1\right).$$

Но тогда точка P пересечения прямых BN и LM является центром этой окружности, так как из подобных треугольников NKB и PLB имеем

$$PL = \frac{NK \cdot LB}{KB} = R\frac{(2/\sqrt{5})(1 - 1/\sqrt{5})}{1 + 1/\sqrt{5}} =$$

$$= R\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4} = R\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right) = r.$$

10.11. Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит на дуге AB (рис. 28) описанной окружности с центром O и

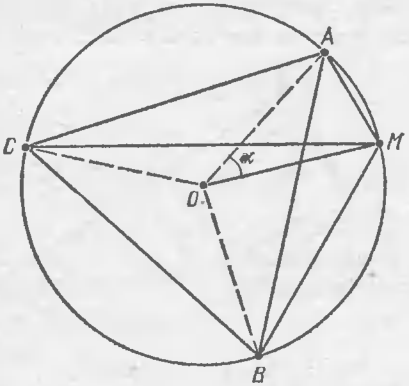


Рис. 28

радиусом R. Обозначим $\angle AOM = \alpha$, тогда

$$MA = 2R\sin(\alpha/2),$$

$$MB = 2R\cdot\sin\frac{1}{2}(\angle AOB - \angle AOM) = 2R\sin(60^\circ - \alpha/2),$$

$$MC = 2R\sin\frac{1}{2}(\angle AOC + \angle AOM) = 2R\sin(60^\circ + \alpha/2).$$

Поэтому величина

$$\frac{MA^4 + MB^4 + MC^4}{R^4} = 16(\sin^4(\alpha/2) + \sin^4(60^\circ - \alpha/2) + \sin^4(60^\circ + \alpha/2)) =$$
$$= 4((1-\cos\alpha)^2 + (1-\cos(120^\circ - \alpha))^2 + (1-\cos(120^\circ + \alpha))^2) =$$
$$= 12 - 8(\cos\alpha + (\cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha))) +$$
$$+ 4(\cos^2\alpha + \cos^2(120^\circ - \alpha) + \cos^2(120^\circ + \alpha)) = 12 - 8\cos\alpha -$$
$$- 8\cdot 2\cos\alpha\cos 120^\circ + 2((1-\cos 2\alpha) + (1 - \cos(240^\circ - 2\alpha)) +$$
$$+ (1 - \cos(240^\circ + 2\alpha))) = 12 - 8\cos\alpha + 8\cos\alpha + 6 - 2\cos 2\alpha -$$
$$- 2\cdot 2\cos 2\alpha\cos 240^\circ = 18 - 2\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha = 18$$

не зависит от выбора точки M.

10.12. а) По условию задачи

$$AB + CD = AD + BC,$$

поэтому в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Из равенства треугольников ABC и ADC следует, что $\angle B = \angle D$. Поэтому около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда

$$\angle B = (1/2)(\angle B + \angle D) = 180^\circ/2 = 90^\circ,$$

т. е. когда $\angle B = 90^\circ$ и $AB \perp BC$.

в) Пусть вписанная окружность с центром N касается сторон AB и BC в точках N_1 и N_2 соответственно, а проекциями центра M

описанной окружности на стороны AB и BC являются их середины M_1 и M_2 (рис. 29; заметим, что точки N и M лежат на оси симмет-

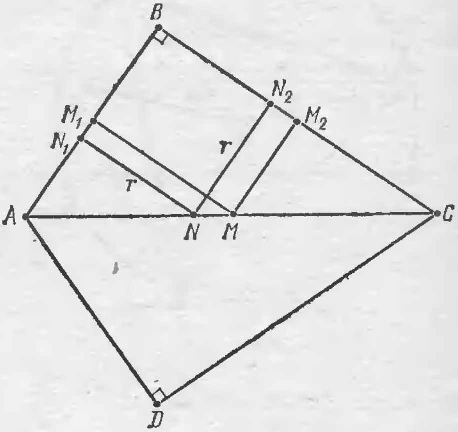


Рис. 29

рии AC четырехугольника $ABCD$). Обозначим $AB = x$, $BC = y$, тогда из подобия треугольников AN_1N и ABC имеем

$$\frac{x}{y} = \frac{AB}{BC} = \frac{AN_1}{N_1N} = \frac{x - r}{r}, \text{ т. е. } xy = r(x + y).$$

Далее, учитывая равенства $x^2 + y^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = (2R)^2$, получаем

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 4R^2 + 2r(x+y),$$

откуда

$$x + y = r + \sqrt{r^2 + 4R^2}.$$

Наконец, из свойств проекций имеем

$$\begin{aligned} NM^2 &= N_1M_1^2 + N_2M_2^2 = (BN_1 - AB/2)^2 + (BN_2 - BC/2)^2 = \\ &= (r - x/2)^2 + (r - y/2)^2 = (x^2 + y^2)/4 - r(x+y) + 2r^2 = \\ &= R^2 - r\left(r + \sqrt{r^2 + 4R^2}\right) + 2r^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Равенство п. в) справедливо для любого четырехугольника, являющегося одновременно вписанным и описанным.

10.13. Если бы вершины квадрата располагались на концентрических окружностях радиусов a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ соответственно, то в силу теоремы 79 выполнялось бы одно из равенств

$$a^2 + (a+d)^2 = (a+2d)^2 + (a+3d)^2,$$
$$a^2 + (a+2d)^2 = (a+d)^2 + (a+3d)^2,$$
$$(a+d)^2 + (a+2d)^2 = a^2 + (a+3d)^2,$$

у которых левые части меньше правых при любых значениях a, $d > 0$.

10.14. Обозначим через L отличную от M точку пересечения окружности с прямой QS (рис. 30). Тогда

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{MS}-\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{QB},\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{MQ},$$

откуда, используя теорему 71, получаем

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{QL}-\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{QB}=a\cdot b-c\cdot d=0,$$

где обозначено $MQ=a$, $QL=b$, $AQ=c$, $QB=d$. Итак, доказано, что $PQ\perp RS$. Пусть прямая RS пересекает прямые PQ и BD в точках T и E соответственно, а F — точка пересечения прямых BD и QS. Тогда из подобия различных треугольников имеем

$$QF=\frac{BQ\cdot AD}{BA}=\frac{d\,(b-a)}{c+d},$$

$$FS=QS-QF=(b-a)-\frac{d\,(b-a)}{c+d}=\frac{c\,(b-a)}{c+d},$$

$$\frac{RE}{ES}=\frac{RB}{FS}=\frac{a\,(c+d)}{c\,(b-a)}.$$

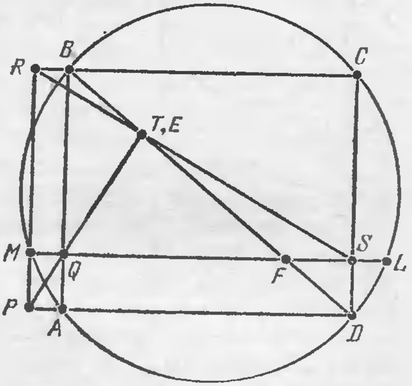


Рис. 30

С другой стороны, получаем

$$RT\cdot RS=RM\cdot RP,$$
$$TS\cdot RS=QS\cdot MS,$$

откуда

$$\frac{RT}{TS}=\frac{RM\cdot RP}{MS\cdot QS}=\frac{d\,(c+d)}{b\,(b-a)}=\frac{a\,(c+d)}{c\,(b-a)}=\frac{RE}{ES}\quad\left(\text{ибо } \frac{d}{b}=\frac{a}{c}\right).$$

Таким образом, точки T и E делят отрезок RS в равных отношениях, а значит, совпадают. А это означает, что прямые PQ, RS, BD пересекаются в одной точке.

10.15. Пусть вписанная окружность касается сторон AB и AC в точках E и F соответственно, а вневписанная окружность касается стороны CB в точке L и продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно (рис. 31). Тогда имеем

$$2DB=DB+BE=CB-CD+AB-AE=CB+AB-CF-AF=$$
$$=CB+AB-AC,$$
$$2CL=CL+CN=CB-LB+AN-AC=CB-BM+AM-AC=$$
$$=CB+AB-AC,$$

откуда

$$DB=(CB+AB-AC)/2=CL,$$

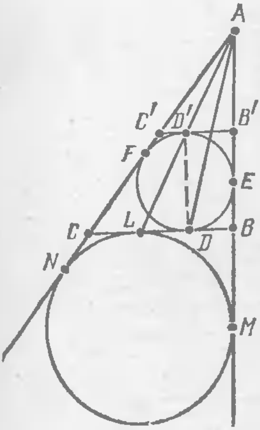


Рис. 31

а значит, середина отрезка BC совпадает с серединой отрезка LD. Пусть точка D' диаметрально противоположна точке D на вписанной окружности, а прямая $C'B'$ касается этой окружности в точке D'. Рассмотрим гомотетию с центром A, переводящую вневписанную окружность во вписанную. При этой гомотетии точка L переходит в точку D'. Следовательно, точки L, D' и A лежат на одной прямой, поэтому середины отрезков LD, $D'D$ и AD также лежат на одной прямой — средней линии треугольника ADL (параллельной стороне AL), что и требовалось доказать.

10.16. Пусть D — точка касания окружностей, а ABC — правильный треугольник, вписанный в бо́льшую из них. Без ограничения общности можно считать, что точка D лежит на дуге AB (рис. 32). Докажем, что $DC = DA + DB$. Для этого на отрезке DC возьмем точку M, для которой $AD = DM$ (заметим, что $DC \geqslant BC = AB \geqslant AD$). Тогда треугольник ADM правильный, ибо он равнобедренный и $\angle ADM = \angle ABC = 60°$. Следовательно, при повороте на угол 60° вокруг точки A точка D переходит в точку M, а точка B — в точку C, поэтому $BD = MC$ и $DC = DM + MC = AD + DB$. Пусть R и r — радиусы большей и меньшей окружностей соответственно, l_A, l_B, l_C — длины касательных к меньшей окружности, проведенных из точек A, B, C соответственно, а A' — отличная от D (если $A \neq D$; в противном случае $A' = D$) точка пересечения прямой AD с меньшей окружно-

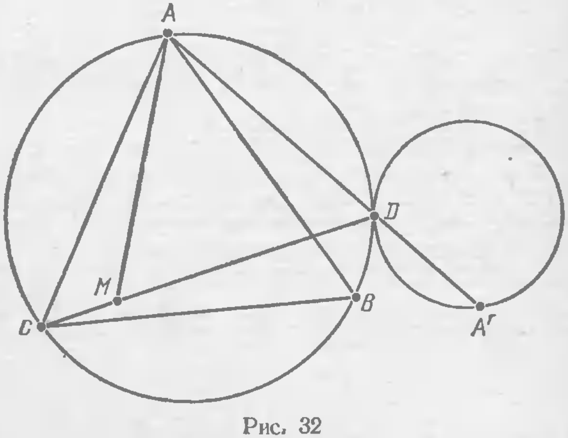


Рис. 32

стью. Точка A' получается из точки A в результате гомотетии с центром D и коэффициентом $\pm r/R$ (если окружности касаются внешним образом, то берется знак «минус», а если внутренним — то «плюс»). Поэтому

$$AA' = AD \pm DA' = AD(1 \pm r/R)$$

и по теореме о касательной и секущей имеем

$$l_A = \sqrt{AD \cdot AA'} = AD\sqrt{1 \pm r/R}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$l_B = BD\sqrt{1 \pm r/R}, \quad l_C = CD\sqrt{1 \pm r/R}.$$

Отсюда вытекает требуемое равенство $l_C = l_A + l_B$.

10.17. На отрезке BC существует точка N, для которой $\angle PNB = \angle PCA$ (ибо $\angle PCB < \angle PCA = 180° - \angle PBA < 180° - \angle PBC$, см. рис. 33). Тогда имеем

$$\triangle BPN \backsim \triangle APC \quad \text{и} \quad \triangle CPN \backsim \triangle APB,$$

так как

$$\angle PBC = \angle PAC$$

и

$$\angle PCB = \angle PAB, \quad \angle PNC = 180° - \angle PNB = \angle PBA.$$

Учитывая, что PK — высота треугольников BPN и CPN, а PL и PM — высоты подобных им треугольников APC и APB, получаем

$$\frac{AC}{PL} = \frac{BN}{PK}, \quad \frac{AB}{PM} = \frac{CN}{PK},$$

откуда

$$\frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM} = \frac{BN + CN}{PK} = \frac{BC}{PK},$$

что и требовалось доказать.

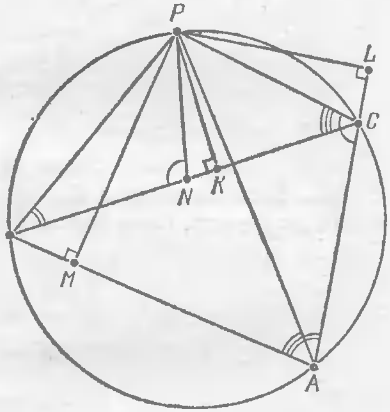


Рис. 33

10.18. а) В условиях задачи обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ (рис. 34) тогда имеем $\angle DAB = \angle DAC = \alpha/2$, откуда $BD = DC$. Поскольку

$$\angle ODC = \angle ABC = \beta,$$

$$\angle OCD = \angle OCB + \angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB + \angle BAD = (\alpha + \gamma)/2,$$

то

$$\angle COD = 180° - \beta - (\alpha + \gamma)/2 = \alpha + \gamma - (\alpha + \gamma)/2 = (\alpha + \gamma)/2 = \angle OCD,$$

так что $DO = DC$. Равенства доказаны.

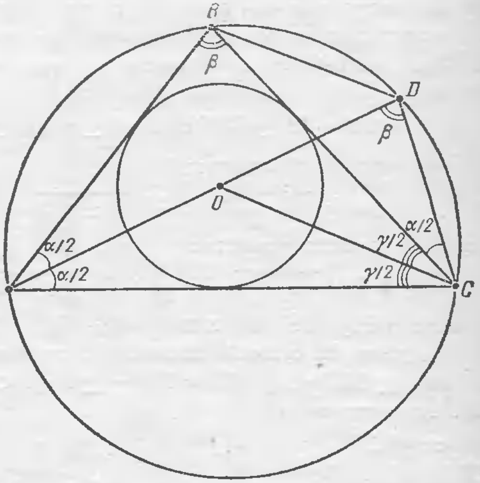


Рис. 34

б) В условиях задачи обозначим $\breve{AD}=2\alpha$, $\breve{AB}=2\beta$, $\breve{BC}=2\gamma$, $\breve{CD}=2\delta$, а через M и N обозначим середины дуг BC и CD соответственно. Тогда точки D_1 и B_1 лежат на отрезках AM и AN соответственно, а A_1 есть точка пересечения отрезков BN и DM (рис. 35). Согласно п. а) имеем

$$MD_1=MB=MC=MA_1,$$

поэтому треугольник D_1MA_1 равнобедренный и

$$\angle D_1A_1M=(1/2)(180°-\angle AMD)=90°-\alpha/2.$$

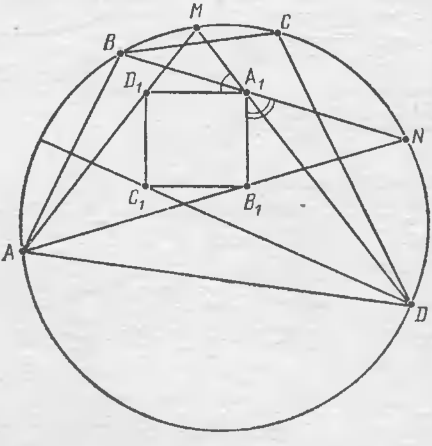


Рис. 35

Аналогично получаем
$$\angle B_1A_1N = 90° - \beta/2.$$
Так как
$$\angle DA_1N = \angle BA_1M = (\gamma + \delta)/2,$$
то
$$\angle D_1A_1B_1 = 180° - \angle D_1A_1M - (\angle B_1A_1N - \angle DA_1N) =$$
$$= 180° - (90° - \alpha/2) - (90° - \beta/2) + (\gamma + \delta)/2 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)/2 = 90°.$$
Аналогично доказывается, что и остальные 3 угла четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ прямые.

10.19. Докажем сначала, что середины отрезков A_1H_1 и A_2H_2 совпадают. Для этого через точку A_3 проведем прямую, перпендикулярную стороне A_3A_4, и обозначим через K отличную от A_3 точку пересечения этой прямой с окружностью, описанной около четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 36). Тогда $A_2H_1 \parallel KA_3$ (ибо $A_2H_1 \perp A_3A_4$) и $A_3H_1 \parallel KA_2$ (ибо $A_3H_1 \perp A_2A_4$ и $\angle KA_2A_4 = 90°$, так как KA_4 — диаметр), поэтому $KA_2H_1A_3$ — параллелограмм, откуда $\overrightarrow{A_2H_1} = \overrightarrow{KA_3}$. Аналогично доказывается, что $A_1H_2A_3K$ — параллелограмм, откуда $\overrightarrow{A_1H_2} = \overrightarrow{KA_3}$. Итак, $\overrightarrow{A_2H_1} = \overrightarrow{A_1H_2}$ и отрезки A_1H_1, A_2H_2 являются диагоналями параллелограмма $A_1H_2H_1A_2$, т. е. делятся в точке их пересечения пополам. Подобным же образом доказывается, что середина отрезка A_2H_2 совпадает с серединой отрезка A_3H_3, которая в свою очередь совпадает с серединой отрезка A_4H_4. Следовательно, при центральной симметрии относительно этой общей для всех 4 отрезков середины четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ переходит в четырехугольник $H_1H_2H_3H_4$, из чего вытекает утверждение задачи.

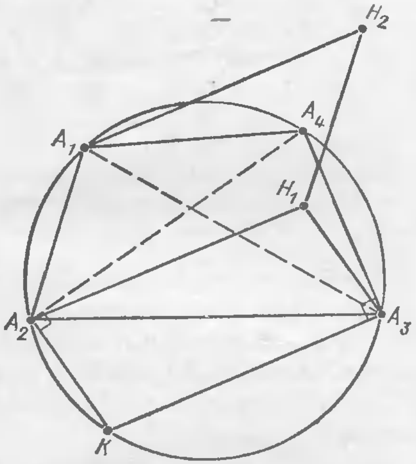


Рис. 36

10.20. а) Пусть четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность с центром O и радиусом R, а проекциями точки O на хорды A_1A_3, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 являются их середины H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 соответственно. Обозначим
$$h_i = OH_i \qquad (i = 0, \ldots, 4),$$
пусть S_1, S_2 и p_1, p_2 — площади и полупериметры треугольников $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_1$, а r_1, r_2 — радиусы вписанных в них окружностей. Рассмотрим треугольник, содержащий точку O (если такой сущест-

вует, т. е. если O лежит в исходном четырехугольнике). Предположим для определенности, что точка O лежит в треугольнике $A_1A_2A_3$ (рис. 37). Используя теорему Птолемея (теорема 69) для вписанных

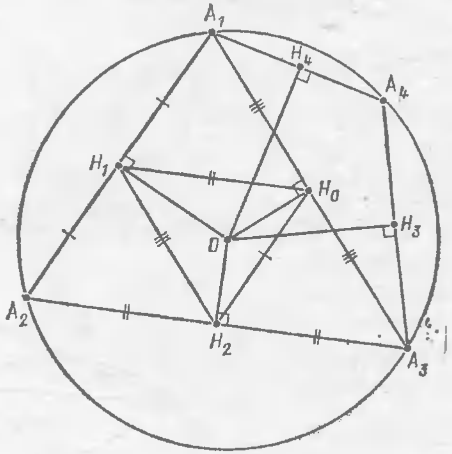


Рис. 37

четырехугольников $A_3H_0OH_2$, $A_1H_1OH_0$, $A_2H_2OH_1$ и тот факт, что H_0H_2, H_0H_1, H_1H_2 — средние линии треугольника $A_1A_2A_3$, получаем

$$\begin{aligned}(R+r_1)\,p_1 &= R\cdot H_0H_2+R\cdot H_0H_1+R\cdot H_1H_2+S_1=\\ &=(h_0\cdot H_2A_3+h_2\cdot H_0A_3)+(h_0\cdot H_1A_1+h_1\cdot H_0A_1)+(h_2\cdot H_1A_2+h_1\cdot H_2A_2)+\\ &+(1/2)\,(h_1\cdot A_1A_2+h_2\cdot A_2A_3+h_0\cdot A_3A_1)=(h_1+h_2+h_0)\,p_1,\end{aligned}$$

откуда

$$R+r_1=h_1+h_2+h_0.$$

Теперь рассмотрим случай, когда центр O описанной окружности лежит вне треугольника. В этом случае ровно одна из его вершин лежит с точкой O в разных полуплоскостях относительно противолежащей стороны. Пусть для определенности такой вершиной является вершина A_4 треугольника $A_3A_4A_1$ (см. рис. 37). Тогда четырехугольники $A_1H_4H_0O$, $A_3H_3H_0O$, $A_4H_4OH_3$ являются вписанными, поэтому получаем

$$\begin{aligned}(R+r_2)\,p_2 &= R\cdot H_0H_4+R\cdot H_0H_3+R\cdot H_3H_4+S_2=\\ &=(h_4\cdot H_0A_1-h_0\cdot H_4A_1)+(h_3\cdot H_0A_3-h_0\cdot H_3A_3)+(h_4\cdot H_3A_4+h_3\cdot H_4A_4)+\\ &+(1/2)\,(h_3\cdot A_3A_4+h_4\cdot A_4A_1-h_0\cdot A_1A_3)=(h_3+h_4-h_0)\,p_2,\end{aligned}$$

откуда

$$R+r_2=h_3+h_4-h_0.$$

Таким образом, в случае, изображенном на рис. 37, имеем

$$r_1+r_2=h_1+h_2+h_3+h_4-2R,$$

а в общем случае искомая сумма радиусов вписанных окружностей равна сумме величин h_1, h_2, h_3, h_4, $2R$, взятых с определенными знаками, зависящими лишь от расположения точки O относительно четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$. Следовательно, эта сумма не зависит от того, какая диагональ проведена.

б) Пусть $A_1A_2A_3$ — данный нетупоугольный треугольник, а k_1, k_2, k_3 — длины высот, опущенных из вершин A_1, A_2, A_3 соответственно. Все обозначения для остальных элементов и параметров треугольника $A_1A_2A_3$ сохраним такими же, как и в решении п. а). Без ограничения общности считаем, что $k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3$, а так как

$$k_1 \cdot A_2A_3 = k_2 \cdot A_1A_3 = k_3 \cdot A_1A_2 = 2S_1,$$

то $A_2A_3 \geqslant A_1A_3 \geqslant A_1A_2$. Итак, имеем

$$k_3 = \frac{2S_1}{A_1A_2} = \frac{h_2 \cdot A_2A_3 + h_0 \cdot A_1A_3 + h_1 \cdot A_1A_2}{A_1A_2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{h_2 \cdot A_1A_2 + h_0 \cdot A_1A_2 + h_1 \cdot A_1A_2}{A_1A_2} = h_1 + h_2 + h_0 = R + r_1$$

(последнее равенство установлено в п. а)). Требуемое неравенство, таким образом, доказано. При этом, если треугольник $A_1A_2A_3$ остроугольный, то точка O лежит внутри него, откуда $h_2 > 0$, а равенство достигается при $k_1 = k_3$, т. е. для равностороннего треугольника. Если же треугольник $A_1A_2A_3$ прямоугольный, то $\angle A_1 = 90°$, $h_2 = 0$, $h_1 > 0$, а равенство достигается при $k_2 = k_3$, т. е. для равнобедренного прямоугольного треугольника.

10.21. Рассмотрим следующую процедуру, заключающуюся в выполнении некоторого числа шагов. На первом шаге покроем каждую из данных точек кругом диаметра 1/200. Пусть после k-го шага ($k \in \mathbf{N}$) существуют два круга, удаленные друг от друга не более, чем на 1. Через O_1 и O_2 обозначим центры этих кругов, а через A_1, A_2, A_3, A_4 — точки пересечения прямой O_1O_2 с окружностями, ограничивающими эти круги (точки A_2 и A_3 лежат между точками A_1 и A_4, причем $A_2A_3 \leqslant 1$; рис. 38). Тогда $(k+1)$-й шаг заключается в том, что указанные два круга заменяются кругом, построенным на отрезке A_1A_4, как на диаметре. Описанная процедура продолжается до тех пор, пока это возможно, т. е. пока не будет выполнено условие 2). Так как после первого шага число кругов было равно 100, а на каждом последующем шаге их число уменьшается на 1, то общее

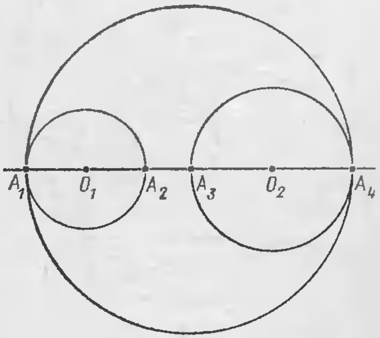


Рис. 38

число шагов не превосходит 100. Поэтому процедура обязательно закончится, а условие 1), выполненное на каждом шаге, будет выполнено и по окончании процедуры. Поскольку после первого шага сумма диаметров равнялась $100/200=0{,}5$, а на каждом последующем шаге она может увеличиваться не более чем на 1, то итоговая сумма диаметров не будет превосходить числа $0{,}5+99<100$, т. е. условие 3) также будет выполнено.

10.22. Возьмем прямую, относительно которой все точки лежат в одной полуплоскости, и будем ее параллельно передвигать до тех пор, пока она не пройдет через первую точку A_1. Затем будем поворачивать полученную прямую вокруг точки A_1 до тех пор, пока она не пройдет впервые через другую точку A_2. Тогда все остальные точки лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_2. Занумеруем эти точки $A_3, \ldots, A_{2n+3}$ так, чтобы выполнялись неравенства $\angle A_1A_iA_2 \leqslant \angle A_1A_{i+1}A_2$ при $i=3, \ldots, 2n+2$. При этом равенство $\angle A_1A_iA_2=\angle A_1A_{i+1}A_2$ невозможно ни при каком значении i (ибо точки A_1, A_i, A_{i+1}, A_2 не лежат на одной окружности). Поэтому неравенство $\angle A_1A_{n+3}A_2<\angle A_1A_iA_2$ выполнено ровно для n точек $A_i=A_{n+4}, \ldots, A_{2n+3}$, которые (и только они) лежат внутри круга, ограниченного окружностью, проходящей через точки A_1, A_{n+3}, A_2.

10.23. Среди всех окружностей, проходящих через какие-либо три вершины данного многоугольника, две из которых являются соседними, а соединяющая их сторона видна из третьей вершины под углом, не превосходящим 90° (множество таких троек вершин не пусто, ибо оно содержит любую тройку соседних вершин), выберем окружность Г наибольшего радиуса R. Пусть для определенности она проходит через соседние вершины A_1, A_2 и некоторую вершину A многоугольника, причем $\angle AA_1A_2 \leqslant 90°$ (рис. 39). Пусть какая-либо вершина B данного многоугольника лежит вне круга, ограниченного выбранной окружностью Г. Поскольку точка B лежит в той же полуплоскости относительно прямой A_1A_2, что и точка A, то

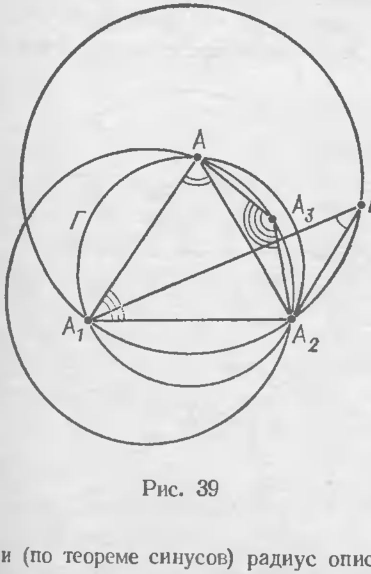


Рис. 39

$$\angle A_1BA_2<\angle A_1AA_2 \leqslant 90°$$

и (по теореме синусов) радиус описанной около треугольника A_1A_2B окружности больше R, что противоречит выбору исходной окружности. Итак, выбранная окружность ограничивает круг, покрывающий весь многоугольник. Докажем, что вершина A_3, соседняя с вершиной A_2 и отличная от A_1, также лежит на выбранной окружности. Допустим, что это не так, т. е. точка $A_3 \neq A$ лежит внутри сегмента круга, соответствующего хорде A_2A (рис. 39). Тогда $\angle A_2A_3A >$ $> 180° - \angle A_2A_1A \geqslant 90°$ и (по теореме синусов) снова радиус описанной около треугольника A_2A_3A окружности больше R, что противоречит выбору исходной окружности. Таким образом, тройка вершин A_1, A_2, A_3 удовлетворяет условию задачи.

10.24. Докажем, что искомые значения n — это все нечетные числа $n > 1$. Пусть n нечетно и в $2n$-угольнике $A_1 \ldots A_{2n}$ все пары противоположных сторон, кроме, быть может, пары A_1A_{2n}, A_nA_{n+1}, составлены из параллельных отрезков. Если (рис. 40) $\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} =$ $= 180° + \alpha$, то

$$\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \overset{\frown}{A_2A_nA_{n+1}} + \overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}} = \overset{\frown}{A_1A_{2n}A_{n+2}} + \overset{\frown}{A_{n+2}A_{n+1}} = 360° - \overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} = 180° - \alpha \text{ (ибо } A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}).$$

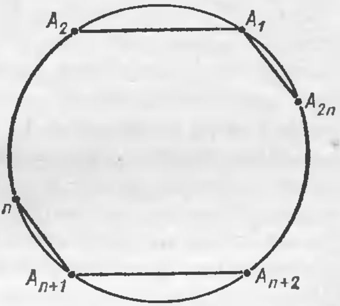


Рис. 40

Аналогично проверяется, что

$$\overset{\frown}{A_3A_{n+2}A_{n+3}} = 180° + \alpha, \ \ldots, \ \overset{\frown}{A_nA_{n+1}A_{2n}} = 180° + (-1)^{n+1}\alpha = 180° + \alpha.$$

Поэтому

$$\overset{\frown}{A_1A_2A_n} = 180° + \alpha - \overset{\frown}{A_nA_{n+1}} = \overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}A_{2n}},$$

откуда $A_nA_{n+1} \parallel A_1A_{2n}$. Теперь докажем, что при том же (нечетном) значении n существует $2(n-1)$-угольник, для которого требуемое в задаче условие не выполнено. Возьмем какой-либо $2n$-угольник $A_1 \ldots A_{2n}$, для которого противоположные стороны параллельны, но $\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} \neq 180°$. Для этого достаточно дугу $\overset{\frown}{A_1A_{n+1}} < 180°$ разбить на n равных дуг точками $A_2, \ldots, A_n$ и провести последовательно хорды

$$A_{n+1}A_{n+2} \parallel A_1A_2, \ \ldots, \ A_{2n-1}A_{2n} \parallel A_{n-1}A_n,$$

после чего, согласно доказанному выше, будет выполнено условие $A_{2n}A_1 \parallel A_nA_{n+1}$, причем

$$\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} = \overset{\frown}{A_{2n}A_1A_n} \neq 180°.$$

Поэтому

$$\overset{\frown}{A_2A_3A_n}-\overset{\frown}{A_{2n}A_{2n-1}A_{n+2}}=\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}}-\overset{\frown}{A_{2n}A_{n+1}A_n}=\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}}-$$
$$-(360^\circ-\overset{\frown}{A_{2n}A_1A_n})\neq 0,$$

т. е. отрезки A_2A_{2n} и A_nA_{n+2} не параллельны и $2(n-1)$-угольник $A_2\ldots A_nA_{n+2}\ldots A_{2n}$ имеет ровно $n-2$ пары противоположных параллельных сторон.

10.25. При $n=1$ полная дуга единственной окружности имеет длину $2\pi\geqslant 2\pi/n$, т. е. утверждение задачи верно. Пусть $n\geqslant 2$. Предположим сначала, что центры всех n окружностей лежат на одной прямой. Выберем тот из центров, относительно которого все остальные центры лежат на одной полупрямой. Тогда перпендикуляр к этой прямой, проходящий через выбранный центр, отсекает от соответствующей окружности дугу длины $\pi\geqslant 2\pi/n$, которая не пересекается ни с одной из остальных окружностей. Рассмотрим теперь случай, когда центры окружностей не лежат на одной прямой. Из всех выпуклых многоугольников с вершинами в центрах (множество таких многоугольников не пусто, ибо оно содержит хотя бы один треугольник) выберем тот, вне которого лежит наименьшее число этих точек. Докажем, что вне выбранного многоугольника нет ни одной из точек. Действительно, если некоторая точка O лежит вне выбранного многоугольника, то проведем через нее прямую, не пересекающую его, и

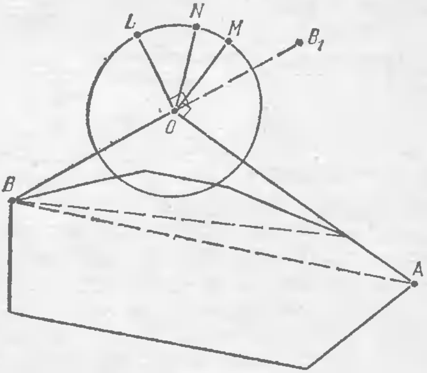


Рис. 41

будем поворачивать ее вокруг точки O до тех пор, пока она не пройдет сначала через первую вершину A, а затем через последнюю вершину B многоугольника (если их оказалось несколько, то выберем наиболее удаленную от точки O; рис. 41). Наконец, все вершины многоугольника, лежащие в треугольнике AOB, заменим лишь тремя вершинами A, O, B, тогда вне полученного многоугольника будет содержаться меньше точек, чем вне выбранного. Полученное противоречие означает, что существует выпуклый k-угольник ($k \leqslant n$) с вершинами в центрах, в котором содержатся все центры. Так как сумма внешних углов k-угольника равна $360°$, то найдется внешний угол, не меньший $360°/k \geqslant 360°/n$. Пусть им оказался внешний угол B_1OA угла O k-угольника (см. рис. 41). Тогда перпендикуляры OL и OM к сторонам OB и OA соответственно отсекают на внешней дуге окружности с центром O дугу LM длины не меньше $2\pi/n$, так как $\angle LOM = \angle B_1OA$. Докажем, что эта дуга не пересекается с другими окружностями. В самом деле, пусть N — произвольная точка дуги LM. Поскольку

$$\angle NOA > 90° \text{ и } \angle NOB > 90°,$$

то окружность с центром N и радиусом 1 имеет с k-угольником единственную общую точку O. Это значит, что центр любой из данных окружностей, проходящих через точку N, должеи совпадать с точкой O. Утверждение доказано.

§ 11. Многоугольники

11.1. Пусть диагональ AC пересекает прямые OB и OD в точках P и Q соответственно (рис. 42). Так как площади треугольников AOB и COB равны, то равны и их высоты к общей стороне OB, а

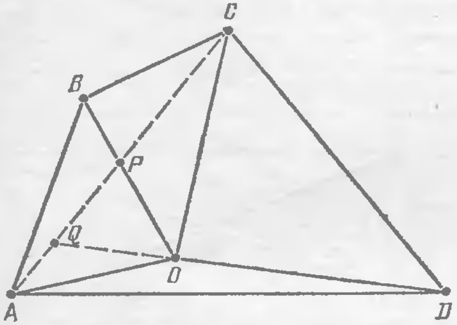


Рис. 42

значит, $AP = PC$. Аналогично, имеем $AQ = QC$, откуда $P = Q$. Поэтому, если $O \neq P$, то точки B, P, O, D лежат на одной прямой, т. е. точка O лежит на диагонали BD; если же $O = P$, то точка O лежит на диагонали AC.

11.2. Параллелограммы $OAMB$ и $A'B'C'N$, построенные на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ (рис. 43), равны, поэтому имеем

$$S_{AOB} = (1/2)\, S_{OAMB} = (1/2)\, S_{A'B'C'N} = S_{A'B'C'}.$$

Аналогично получаем

$$S_{BOC} = S_{B'C'D'},\ S_{COD} = S_{C'D'A'},\ S_{DOA} = S_{D'A'B'},$$

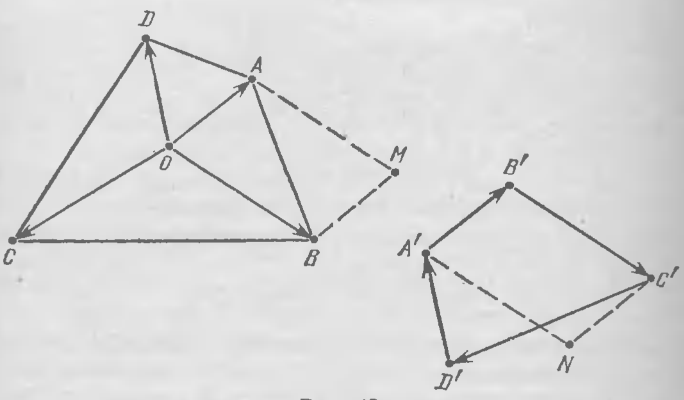


Рис. 43

откуда

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = (S_{A'B'C'} + S_{A'D'C'}) + (S_{B'C'D'} + S_{B'A'D'}) = 2S',$$

что и требовалось доказать.

11.3. Обозначим через A_1, B_1, C_1, D_1 середины сторон AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ площади S, через K, K_1, K_2 — точки пересечения прямой AC_1 с прямыми BD_1, A_1D, CD_1 соответственно. Аналогично получим точки $L, L_1, L_2, M, M_1, M_2, N, N_1, N_2$ (рис. 44). Так как параллелограмм AA_1CC_1 ($AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = CC_1$) имеет ту же

Рис. 44

высоту, что и параллелограмм $ABCD$ и вдвое меньшее основание $AA_1 = AB/2$, то его площадь равна $S/2$. Далее, параллелограмм $KLMN$ ($LM \parallel KN$, $KL \parallel MN$) имеет ту же высоту, что и параллелограмм AA_1CC_1 и основание $KN = (2/5)\, AC_1$ (ибо $AK = KN$ из подобия треугольников

AKD_1, AND и $KN = LM = MC = 2NC_1$), поэтому

$$S_{KLMN} = (2/5)\, S_{AA_1CC_1} = (2/5)\cdot(S/2) = S/5.$$

Точка K_1 является точкой пересечения диагоналей AC_1 и DA_1 параллелограмма AA_1C_1D, поэтому $AK_1 = K_1C_1$. Точка K_2 является точкой пересечения медиан CD_1 и AC_1 треугольника ACD, поэтому $AK_2 = 2K_2C_1$. Таким образом, имеем

$$KK_1 = AK_1 - AK = (1/2)\, AC_1 - (2/5)\, AC_1 = (1/10)\, AC_1 = (1/4)\, KN,$$

$$NK_2 = C_1K_2 - C_1N = (1/3)\, AC_1 - (1/5)\, AC_1 = (2/15)\, AC_1 = KN/3.$$

Аналогично получаем

$$KL_2 = KL/3,$$

откуда

$$S_{KK_1L_2} = (1/2)\cdot KK_1\cdot KL_2\cdot \sin\angle K_1KL_2 =$$
$$= (1/2)\cdot(1/4)\, KN\cdot(1/3)\, KL\cdot\sin\angle NKL = (1/12) S_{NKL} = (1/24) S_{KLMN} = S/120.$$

Подобным же способом доказывается, что

$$S_{LL_1M_2} = S_{MM_1N_2} = S_{NN_1K_2} = S/120,$$

следовательно,

$$S_{K_1L_2L_1M_2M_1N_2N_1K_2} = S/5 - 4\cdot(S/120) = S/6,$$

что и требовалось доказать.

11.4. а) Сумма внутренних углов пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ и десятиугольника $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ равны соответственно $3\cdot 180°$ и $8\cdot 180°$. Кроме того, каждый из углов этого пятиугольника в сумме с углом десятиугольника при той же вершине составляет $360°$ (рис. 45). Поэтому имеем

$$\angle A_1BB_1 + \angle B_1CC_1 + \angle C_1DD_1 +$$
$$+ \angle D_1EE_1 + \angle E_1AA_1 =$$
$$= 8\cdot 180° + 3\cdot 180° - 5\cdot 360° = 180°.$$

б) Если $ABCDE$ — правильный пятиугольник, то из соображений симметрии (относительно биссектрисы любого из его углов) имеем

$$AA_1 = AE_1 = EE_1,\ AC \parallel ED,$$

откуда

$$\angle AA_1E = \angle A_1ED = \angle CEA =$$
$$= \angle EAA_1,$$

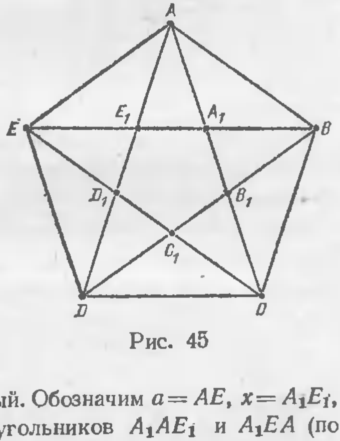


Рис. 45

т. е. треугольник AEA_1 равнобедренный. Обозначим $a = AE$, $x = A_1E_1$, тогда из подобия равнобедренных треугольников A_1AE_1 и A_1EA (по общему углу при основании) получаем

$$AA_1/A_1E_1 = A_1E/AA_1,\ \text{т. е.}\ (a-x)/x = a/(a-x),$$

откуда

$$x^2-3ax+a^2=0.$$

Поэтому

$$x/a=(3-\sqrt{5})/2 \ (\text{ибо } x<a)$$

и

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1}/S_{ABCDE}=(x/a)^2=((3-\sqrt{5})/2)^2=(7-3\sqrt{5})/2.$$

11.5. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точка O — середина отрезка BD, а точки K и L — проекции на прямую BD вершин A и C соответственно; при этом $\overrightarrow{OK}=x\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OL}=y\overrightarrow{BD}$ (соответствующие элементы в четырехугольнике $A'B'C'D'$ будем помечать знаком «штрих»). Тогда имеем (рис. 46)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD},$$

$$AB^2-AD^2=AK^2+KB^2-AK^2-KD^2=(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD})(\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KD})=$$
$$=((\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DO}))(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KB})=2\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{DB}=2xBD^2$$

и аналогично

$$CB^2-CD^2=2yBD^2,$$
$$2x'B'D'^2=A'B'^2-A'D'^2=2xBD^2,$$
$$2yB'D'^2=C'B'^2-C'D'^2=2yBD^2.$$

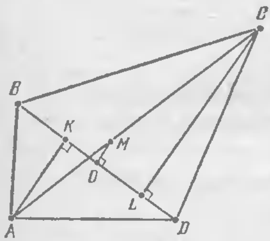


Рис. 46

Если $x=y$, то $x'=y'$ и $K=L$, $K'=L'$, т. е. имеет место утверждение а). Если же $x\neq y$, то одно из чисел x, y, например число x, не равно 0, поэтому

$$\overrightarrow{MC}=(y/x)\,\overrightarrow{AM} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{M'C'}=(y'/x')\,\overrightarrow{A'M'}=(y/x)\overrightarrow{A'M'},$$

откуда следует утверждение б) задачи.

11.6. Без ограничения общности можно считать, что длины сторон данного восьмиугольника $A_1A_2\ldots A_8$ являются рациональными числами (в противном случае докажем требуемое утверждение для подобного восьмиугольника $A_1'A_2'\ldots A_8'$, у которого $A_1'A_2'=1$, а значит, остальные стороны рациональны; в результате утверждение будет доказано и для исходного восьмиугольника). Рассмотрим векторы

$$a_i=\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \qquad (i=1,\ \ldots,\ 8;\ A_9=A_1),$$

сумма которых равна 0. Так как все углы восьмиугольника равны и в сумме составляют $6\cdot180°$, то каждый из углов равен $(3/4)\cdot180°$, углы между векторами a_i и a_{i+1} $(a_9=a_1)$ равны $(1/4)\cdot180°=45°$ (рис. 47). Спроектируем все векторы на ось, параллельную, например, вектору a_1, и через x обозначим длину проекции суммы a_1+a_5, а через y — длину проекции суммы $a_2+a_4+a_6+a_8$. Так как проекция суммы a_3+a_7 равна 0 (ибо $a_3 \perp a_1$, $a_7 \perp a_1$), то $x-y=0$. С другой стороны, длина проекции каждого из векторов a_2, a_4, a_6, a_8 равна некоторому рациональному числу, умноженному на $\cos 45° = \sqrt{2}/2$.

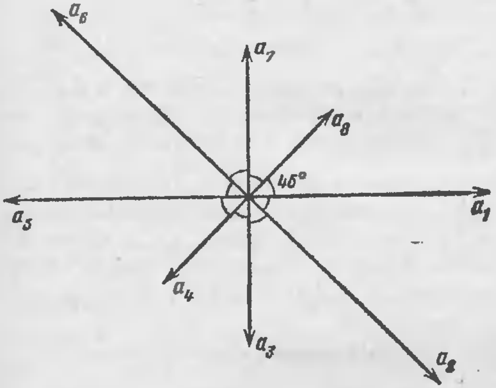


Рис. 47

Поэтому имеем $x=y=z\sqrt{2}$, где $x, z \in \mathbf{Q}$, откуда $x=0$ и $a_5=-a_1$. Аналогично доказывается, что

$$a_6=-a_2,\ a_7=-a_3,\ a_8=-a_4.$$

Следовательно, получаем

$$A_1A_2=A_5A_6,\ A_2A_3=A_6A_7,\ A_3A_4=A_7A_8,\ A_4A_5=A_8A_1,$$

что и требовалось доказать.

11.7. По заданному правильному шестиугольнику $A_0A_1B_2C_2C_1B_0$ (рис. 48) построим с помощью линейки следующие точки: A_2 и A_3 — на пересечении прямой A_0A_1 с прямыми C_2B_2 и C_1B_2 соответственно,

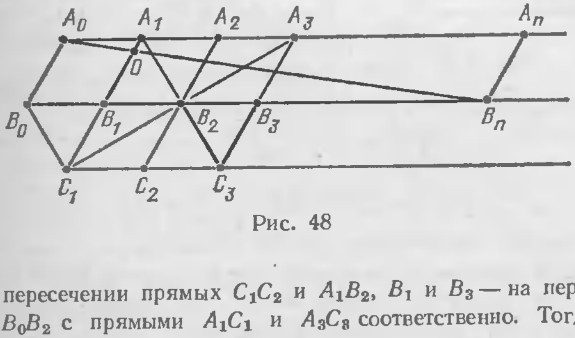


Рис. 48

C_3 — на пересечении прямых C_1C_2 и A_1B_2, B_1 и B_3 — на пересечении прямой B_0B_2 с прямыми A_1C_1 и A_3C_3 соответственно. Тогда имеем

$$A_1A_2=C_1C_2=a$$

(ибо $A_1A_2C_2C_1$ — параллелограмм),

$$A_2A_3=C_1C_2=a$$

(ибо $\triangle A_2A_3B_2=\triangle C_2C_1B_2$),

$$C_2C_3=A_1A_2=a$$

(ибо $\triangle C_2C_3B_2=\triangle A_2A_1B_2$) и, наконец,

$$B_1B_2=B_2B_3=a$$

(ибо $A_1A_2C_2C_1$, $A_2A_3C_3C_2$ — параллелограммы и $B_0B_2 \parallel A_0A_1$). Теперь проведем аналогичные построения для правильного шестиугольника $A_1A_2B_3C_3C_2B_1$, являющегося результатом параллельного переноса исходного шестиугольника на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$, добавив 1 к индексу у каждой буквы (при этом часть точек уже построена). Получим точки A_4, B_4, C_4, затем аналогично точки A_5, B_5, C_5 и т. д. Когда будет построена точка B_n, найдем точку O пересечения прямых A_0B_n и A_1B_1. Из подобия треугольников A_0A_1O и $A_0A_nB_n$ имеем отрезок

$$A_1O=\frac{A_nB_n\cdot A_0A_1}{A_0A_n}=\frac{a\cdot a}{na}=\frac{a}{n},$$

что и требовалось построить.

Замечание. Справедливо следующее общее утверждение: если дан отрезок и прямая, ему параллельная, то с помощью одной линейки можно разделить этот отрезок на n равных частей.

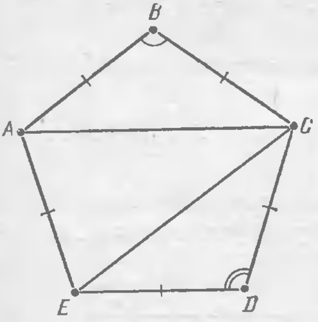


Рис. 49

11.8. Так как

$$AC=2\cdot AB\sin(\angle B/2)\geqslant$$
$$\geqslant 2\cdot CD\sin(\angle D/2)=CE$$

(рис. 49), то из треугольника ACE имеем $\angle AEC\geqslant\angle EAC$. С другой стороны, получаем

$$\angle EAC=\angle A-(180^\circ-\angle B)/2=$$
$$=\angle A+\angle B/2-90^\circ\geqslant\angle E+\angle D/2-$$
$$-90^\circ=\angle E-(180^\circ-\angle D)/2=\angle AEC.$$

Следовательно, имеет место равенство $\angle EAC=\angle AEC$, которое возможно лишь в случае

$$\angle A=\angle E,\ \angle B/2=\angle D/2,$$

т. е.

$$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E.$$

Таким образом, пятиугольник $ABCDE$ правильный.

11.9. а) Если вершины первого многоугольника лежат во втором, равном ему выпуклом многоугольнике, то первый многоугольник полностью лежит во втором. Из равенства их площадей следует, что они совпадают.

б) Неверно (см. рис. 50, на котором изображены равные невыпуклые четырехугольники $ABCE$ и $ACDE$).

в) Рассмотрим невыпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором вершина C является центром равностороннего треугольника ABD (рис. 51). Тогда, если вершины равного ему четырехугольника

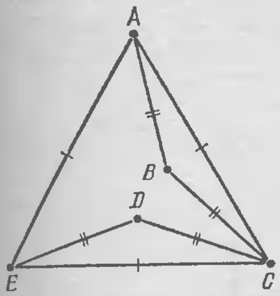


Рис. 50

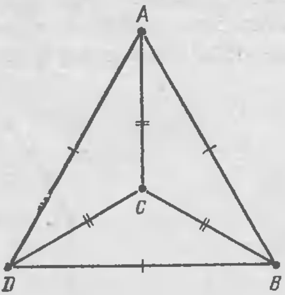


Рис. 51

$A'B'C'D'$ лежат в четырехугольнике $ABCD$, то вершины равностороннего треугольника $A'B'D'$ лежат в треугольнике ABD. Согласно утверждению п. а) вершины этих треугольннков совпадают, следовательно, совпадают и вершины C' и C. Таким образом, ответ на вопрос п. в) отрицателен.

11.10. Докажем более общее утверждение: любой равносторонний $2n$-угольннк, противоположные стороны которого параллельны, можно разбить на ромбы. При $n=2$ утверждение справедливо, ибо равносторонний четырехугольник уже есть ромб. Пусть утверждение доказано для некоторого значения $n \geqslant 2$ и дан $2(n+1)$-угольник

$$A_1A_2\ldots A_{n+1}B_1\ldots B_nB_{n+1}$$

указанного вида. Пусть точки $C_1 = A_{n+1}, C_2, \ldots, C_n$ и $C_{n+1}=A_1$ являются результатом параллельного переноса точек $B_1, \ldots, B_n$ и B_{n+1} на вектор $\overrightarrow{B_{n+1}A_1}$ (рис. 52). Тогда имеем равенства

$$B_iC_i = B_{n+1}A_1 = B_iB_{i+1} \quad \text{при } i=1, \ldots, n,$$

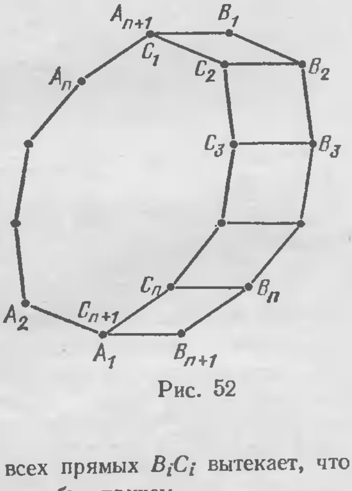


Рис. 52

из которых в силу параллельности всех прямых B_iC_i вытекает, что все четырехугольники $C_iB_iB_{i+1}C_{i+1}$ — ромбы, причем

$$A_nC_1 = C_1C_2 = \ldots = C_nA_1 \text{ и } C_iC_{i+1} \parallel B_iB_{i+1} \parallel A_iA_{i+1}.$$

Следовательно, $2n$-угольник $A_1 \ldots A_n C_1 \ldots C_n$ также имеет указанный вид и его, согласно индукционному предположению, можно разбить на ромбы. Утверждение доказано. Таким образом, на вопрос задачи следует дать утвердительный ответ.

11.11. Так как каждая из точек O, D, B равноудалена от вершин A и C, то эти точки лежат на одной прямой. Рассмотрим окружность с центром A и радиусом a (рис. 53). По теореме 73 произведение $OB \cdot OD$ равно квадрату длины касательной OE, проведенной

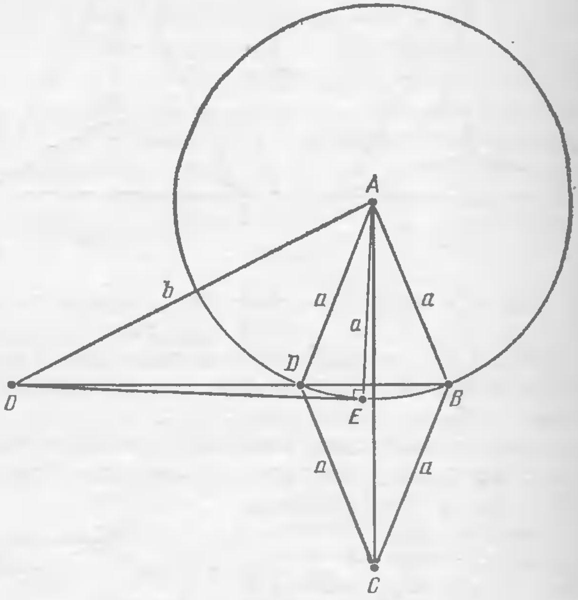


Рис. 53

из точки O к этой окружности, т. е. величине $b^2 - a^2$, не зависящей от угла BAD.

11.12. Возьмем точку Q, для которой четырехугольник $QPAB$ — параллелограмм (рис. 54). Тогда $QPDC$ — тоже параллелограмм, ибо

$$CD = BA = QP, \; CD \parallel BA \parallel QP.$$

Так как вершины равных углов PQB и PCB лежат по одну сторону относительно прямой PB, то точки Q, P, B, C лежат на одной окружности, откуда получаем

$$\angle APB = \angle PBQ = \angle PCQ = \angle DPC,$$

что и требовалось доказать.

11.13. Заметим, что треугольники $A'EF$ и BDF подобны. Действительно, имеем (рис. 55)

$$\angle EFD = \angle BFA = \angle BFA', \; \angle FED = \angle FAB = \angle FA'B,$$

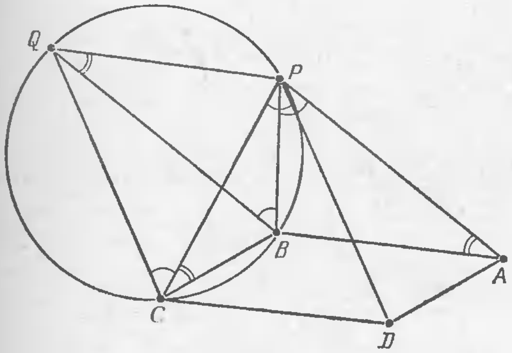


Рис. 54

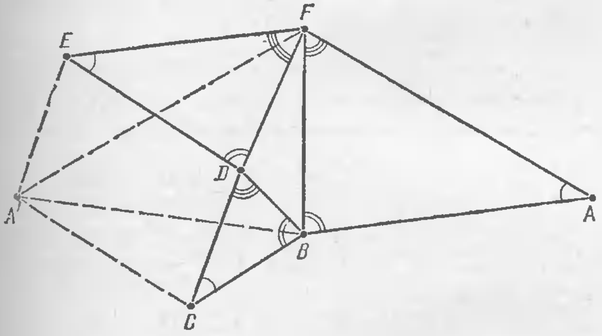


Рис. 55

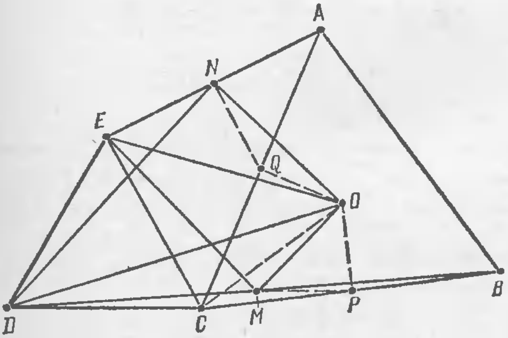


Рис. 56

поэтому

$$\angle A'FE = |\angle EFB - \angle A'FB| = |\angle EFB - \angle EFD| = \angle DFB,$$

а из подобия треугольников EDF и $A'BF$ получаем

$$EF/DF = A'F/BF.$$

Таким же образом доказывается подобие треугольников $A'CB$ и BDF. Следовательно, получаем

$$\triangle A'EF \backsim \triangle BCA',$$

откуда

$$\frac{A'C}{EF} = \frac{A'B}{A'F} = \frac{DE}{EF}, \text{ т. е. } A'C = DE.$$

Аналогично, $A'E = CD$, поэтому $A'CDE$ — параллелограмм.

11.14. Обозначим через P и Q середины отрезков BC и AC соответственно. Заметим, что если треугольник OPM повернуть вокруг точки O на $60°$ (по часовой стрелке; рис. 56), а затем применить к нему гомотетию с центром O и коэффициентом 2, то он перейдет в треугольник OCE. Действительно, так как

$$\angle COP = 60° \text{ и } CO = 2 \cdot OP$$

(ибо точка O — центр правильного треугольника ABC), то точка P в результате указанных преобразоваиий перейдет в точку C. Далее, так как

$$PM \parallel DC, \ \angle DCE = 60° \text{ и } EC = DC = 2 \cdot PM$$

(ибо PM — средняя линия треугольника BCD), то отрезок PM перейдет в отрезок CE, а треугольник OPM — в треугольник OCE. Таким образом, имеем

$$\angle EOM = 60° \text{ и } EO = 2 \cdot MO.$$

Аналогично доказывается, что в результате поворота вокруг точки O на $60°$ (против часовой стрелки) и гомотетии с центром O и коэффициентом 2 треугольник OQN перейдет в треугольник OCD, откуда

$$\angle NOD = 60° \text{ и } DO = 2 \cdot NO.$$

Поэтому

$$\triangle NOD \backsim \triangle MOE,$$

что и требовалось доказать.

11.15. Пусть продолжение перпендикуляра AH к прямой BE пересекает прямые CE и BD в точках P и Q соответственно. Докажем, что $AP = AQ$, откуда будут следовать равенства $P = Q = O$. Опустим перпендикуляр CK к прямой BE (рис. 57), тогда из подобия прямоугольных треугольников CKB, BHA (с попарно перпендикулярными сторонами $AB \perp BC$, $CK \perp BH$) имеем

$$\frac{CK}{BH} = \frac{BK}{AH} = \frac{BC}{AB} = \operatorname{tg} \angle BAC,$$

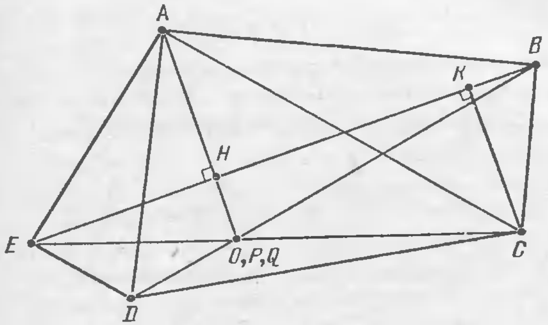


Рис. 57

а из подобия прямоугольных треугольников EHP, EKC получаем

$$PH=\frac{EH\cdot CK}{EK}=\frac{EH\cdot BH\cdot \operatorname{tg}\angle BAC}{EB-BK}=\frac{EH\cdot BH\cdot \operatorname{tg}\angle BAC}{EB-AH\cdot \operatorname{tg}\angle BAC}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$QH=\frac{BH\cdot EH\cdot \operatorname{tg}\angle EAD}{EB-AH\cdot \operatorname{tg}\angle EAD},$$

откуда с учетом равенства $\angle BAC=\angle EAD$ получаем $PH=QH$. Утверждение доказано.

11.16. Пусть около многоугольника описана окружность с центром O и радиусом R (рис. 58). Обозначим $\alpha=\angle AOB$, тогда $0<\alpha<$ $<120°$ и

$$AB=2R\sin(\alpha/2),\ AC=2R\sin\alpha,$$
$$AD=2R\sin(3\alpha/2),$$

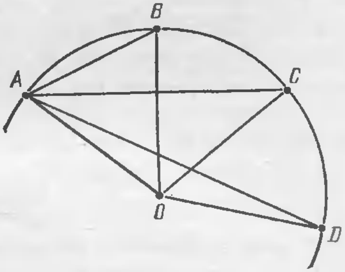


Рис. 58

откуда имеем

$$\frac{1}{\sin(\alpha/2)}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin(3\alpha/2)}.$$

Следовательно, получаем

$$0=\sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}-\left(\sin\alpha+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\times$$
$$\times\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 2\alpha)=\frac{1}{2}\left(\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos 2\alpha\right)-\left(\cos\alpha+\cos\frac{5\alpha}{2}\right)\right)=$$
$$=\cos\frac{7\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{3\alpha}{4}\right)=2\cos\frac{7\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$7\alpha/4=90^\circ \text{ и } \alpha=360^\circ/7,$$

т. е. исходный многоугольник имеет семь сторон.

11.17. Пусть точка O — центр правильного $2n$-угольника $C_0C_1\ldots C_{2n-1}$, а R — радиус описанной около него окружности. Возьмем

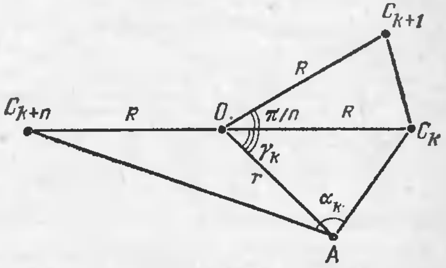


Рис. 59

произвольную точку A на расстоянии $r\neq R$ от точки O и обозначим

$$\alpha_k=\angle C_kAC_{k+n},\quad \gamma_k=\angle AOC_k$$

при $k=0, 1, \ldots, n-1$. Тогда по теореме косинусов имеем (рис. 59)

$$AC_k^2=R^2+r^2-2Rr\cos\gamma_k,$$

$$AC_{k+n}^2=R^2+r^2+2Rr\cos\gamma_k,$$

$$\cos\alpha_k=\frac{AC_k^2+AC_{k+n}^2-C_kC_{k+n}^2}{2\cdot AC_k\cdot AC_{k+n}}=\frac{r^2-R^2}{\sqrt{(R^2+r^2)^2-4R^2r^2\cos^2\gamma_k}},$$

откуда получаем

$$\operatorname{tg}^2\alpha_k=\frac{1}{\cos^2\alpha_k}-1=$$

$$=\frac{1}{(R^2-r^2)^2}\left((R^2+r^2)^2-(R^2-r^2)^2-4R^2r^2\cos^2\gamma_k\right)=$$

$$=\frac{4R^2r^2}{(R^2-r^2)^2}\sin^2\gamma_k.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\gamma_k=\gamma_0+k\pi/n$$

(при этом, возможно, потребуется лишь перенумеровать вершины исходного $2n$-угольника в другом порядке). Поэтому имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{tg}^2\alpha_k=\frac{2R^2r^2}{(R^2-r^2)^2}\sum_{k=0}^{n-1}(1-\cos 2\gamma_k)=\frac{2R^2r^2n}{(R^2-r^2)^2},$$

ибо $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos 2\gamma_k=0$. Для доказательства последнего равенства рассмотрим векторы $\boldsymbol{d}_k$ единичной длины с координатами

$$(\sin 2\gamma_k;\ \cos 2\gamma_k) \text{ при } k=0, 1, \ldots, n-1$$

и заметим, что углы между векторами $\boldsymbol{d}_k$ и $\boldsymbol{d}_{k+1}$ ($\boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{d}_0$) равны $2\pi/n$. Следовательно, существует правильный n-угольник $D_0D_1\ldots D_{n-1}$, для которого

$$\overrightarrow{D_kD_{k+1}} = \boldsymbol{d}_k \qquad (D_n = D_0),$$

а значит, сумма векторов $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_k$, равно как и сумма их проекций на любую ось, равна 0. Итак, доказано, что для любых точек A и B, удаленных от точки O на расстояние, не равное R, рассматриваемая сумма одинакова, откуда вытекает утверждение задачи (ибо радиусы вписанной и описанной окружностей не совпадают).

11.18. Доказательство проведем индукцией по числу n сторон многоугольника. При $n=3$ утверждение верно, ибо треугольник не имеет диагоналей. Пусть оно уже доказано для некоторого нечетного значения $n \geqslant 3$ и дан выпуклый $(n+2)$-угольник, вершины которого окрашены указанным в задаче способом. Тогда найдется такая вершина A, что две соседние с ней вершины имеют разный цвет. Действительно, в противном случае любые две вершины, расположенные через одну, имели бы одинаковый цвет, а в силу нечетности числа $n+2$ все вершины оказались бы одного цвета, что противоречило бы условию задачи. Тогда диагональ, соединяющая две вершины, соседние с вершиной A, делит $(n+2)$-угольник на треугольник и $(n+1)$-угольник. Если в этом $(n+1)$-угольнике также найдется вершина, соседние с которой имеют разный цвет, то соединим эти две разноцветные вершины диагональю, после чего образуется еще один треугольник и n-угольник, для которого, по предположению индукции, существует требуемое разбиение. Если же такой вершины в $(n+1)$-угольнике нет, то любые его вершины, расположенные через одну, имеют одинаковый цвет, т. е. все его вершины раскрашены в два цвета в чередующемся порядке. Поскольку цвет вершины A отличен от цветов соседних с ней вершин, то он отличен от цветов и всех остальных вершин исходного $(n+2)$-угольника. Следовательно, если с самого начала из точки A провести все выходящие из нее диагонали $(n+2)$-угольника, то получится требуемое разбиение. Таким образом, утверждение доказано и для следующего за числом n нечетного значения $n+2$.

§ 12. Точки, отрезки и прямые

12.1. Докажем более сильное утверждение: среди 10 точек A, D, E, K, L, M, N, O, P, Q, расположенных, как показано на рис. 60, найдутся 3 точки одного цвета, являющиеся вершинами правильного треугольника. Пусть это не так. Тогда точку O без ограничения общности считаем черной, причем хотя бы одна из точек P, E, L, скажем P, также является черной. Далее, черной является хотя бы одна из точек Q, D, M, но точки Q и D обязаны быть белыми (они образуют правильные треугольники OPQ и OPD соответственно). Итак, точка M черная, а точки Q и D белые. Аналогично получаем, что точки E и L также являются белыми (из треугольников OME и OML соответственно). Наконец, рассмотрев треугольники

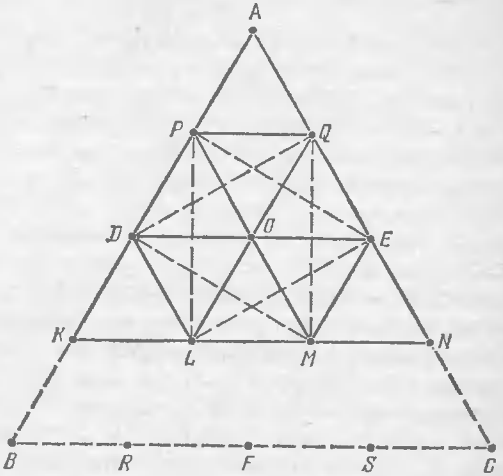


Рис. 60

DEA, QLN и DLK, получим, что вершины правильного треугольника AKN являются черными. Из полученного противоречия вытекает справедливость требуемого утверждения.

12.2. Если $n=3k+1$ ($k\in\mathbf{Z}^+$), то с помощью циркуля и линейки строим угол

$$60^\circ-k\cdot\frac{180^\circ}{n}=\frac{(3k+1)\cdot180^\circ-3k\cdot180^\circ}{3n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{180^\circ}{n},$$

а если $n=3k-1$ ($k\in\mathbf{N}$), то строим угол

$$k\cdot\frac{180^\circ}{n}-60^\circ=\frac{3k\cdot180^\circ-(3k-1)\cdot180^\circ}{3n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{180^\circ}{n}.$$

В обоих случаях строится угол втрое меньший исходного.

12.3. Предположим противное. Пусть два непересекающихся отрезка являются диаметрами выпуклого множества. Возможны два случая: 1) никакой из отрезков не пересекается с продолжением другого; 2) один из отрезков пересекается с продолжением другого. В первом случае рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны AB и CD которого являются диаметрами (рис. 61). Так как хотя бы один из его углов, например угол D, не меньше 90°, то имеем $AC>CD$, т. е. CD — не диаметр. Во втором случае рассмотрим точку O пересечения диаметра AB с продолжением диаметра CD за точку D (рис. 62). Так как хотя бы один из углов AOC или BOC,

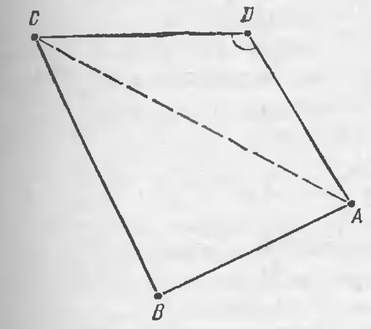


Рис. 61

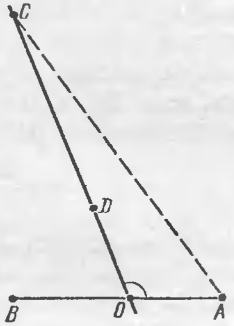


Рис. 62

скажем первый, не меньше 90°, то имеем $AC > OC > CD$, т. е. CD — не диаметр. Итак, в обоих случаях получено противоречие.

12.4. Ответ на вопрос задачи отрицателен. В самом деле, рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AC = BC = d$, $BD < d$ (рис. 63). Его диаметр равен d. С другой стороны, хотя бы две из трех вершин A, B, C попадают в одну из двух частей, на которые ломаная разбивает этот четырехугольник. Тогда диаметр этой части равен d.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что если среди вершин данного выпуклого четырехугольника нельзя выбрать три вершины, попарные расстояния между которыми равны его диаметру, то указаиное в задаче разбиение возможно, причем достаточно использовать не ломаную, а прямую.

12.5. Допустим, что не все точки лежат на одной прямой. Проведем всевозможные прямые через все пары точек и рассмотрим все не равные нулю расстояния между точками и проведенными прямыми. Так как этих расстояний конечное число, то найдется точка A и прямая l, расстояние между которыми минимально. Опустим перпендикуляр AH на прямую l (рис. 64). Поскольку прямая l

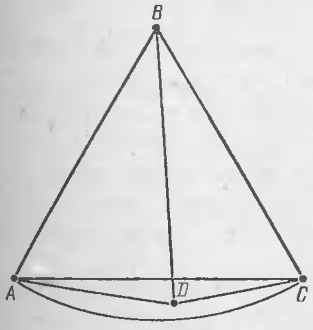


Рис. 63

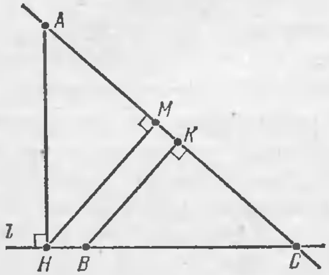


Рис. 64

содержит по меньшей мере три из данных точек, то хотя бы две из них лежат на прямой l с одной стороны от точки H. Пусть ими оказались точки B и C, причем точка B лежит между точками H и C. Тогда, если BK и HM — перпендикуляры к прямой AC, то из подобия треугольников BKC и HMC имеем

$$BK = \frac{HM \cdot BC}{HC} \leqslant HM < HA$$

(если $A = M$, то $AC \parallel HC$, что неверно), т. е. расстояние от точки A до прямой l не является наименьшим. Полученное противоречие доказывает, что все точки лежат на одной прямой.

12.6. Обозначим через $A'B'$ образ отрезка AB при симметрии относительно искомой точки O. Рассмотрим произвольную прямую l такую, что образ $C'D'$ отрезка CD при симметрии относительно l параллелен $A'B'$. Так как $C'D' \parallel A'B' \parallel AB$, то прямая l параллельна одной из взаимно перпендикулярных биссектрис l_1 или l_2 между прямыми AB и CD (рис. 65). Обозначим образ отрезка CD при симметрии относительно прямой l через $C_1'D_1'$ в случае $l \parallel l_1$ и через $C_2'D_2'$ в случае $l \parallel l_2$. Поскольку $\overrightarrow{C_1'D_1'} = -\overrightarrow{C_2'D_2'}$, то один из двух векторов $\overrightarrow{C_1'D_1'}$, или $\overrightarrow{C_2'D_2'}$, скажем первый, равен вектору $\overrightarrow{AB}$. В этом

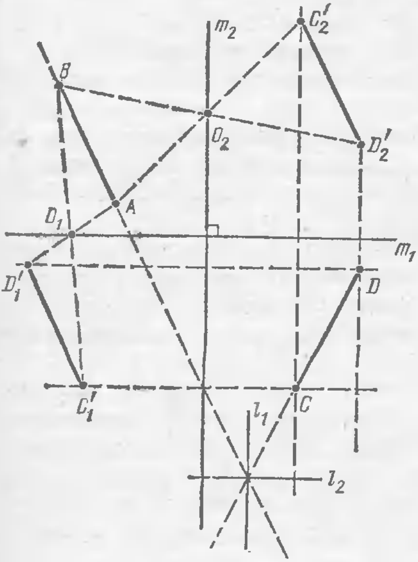


Рис. 65

случае отрезки $A'B'$ и $C_1'D_1'$ совпадают (при соответствующем выборе прямой $l \parallel l_1$) тогда и только тогда, когда точка $O = O_1$ лежит на прямой $m_1 \perp l_1$, равноудаленной от точек A и D. Аналогично, отрезки $A'B'$ и $C_2'D_2'$ совпадают (при соответствующем выборе прямой $l \parallel l_2$), когда точка $O = O_2$ лежит на прямой $m_2 \perp l_2$, равноудаленной от точек A и C. Таким образом, искомое геометрическое место точек O есть объединение указанных прямых m_1 и m_2.

12.7. Пусть множество M имеет два различных центра симметрии O_1 и O_2. Тогда точка O_3, симметричная точке O_1 относительно точки O_2, также является центром симметрии множества M. Действительно, если через $C_O(A)$ обозначить точку, симметричную точке A относительно точки O, то из симметричности точек A и $C_{O_2}(A)$, а также точек O_3 и O_1 относительно точки O_2 вытекает (рис. 66) симметричность точек $C_{O_3}(A)$ и $C_{O_1}(C_{O_2}(A))$ относительно той же точки O_2.

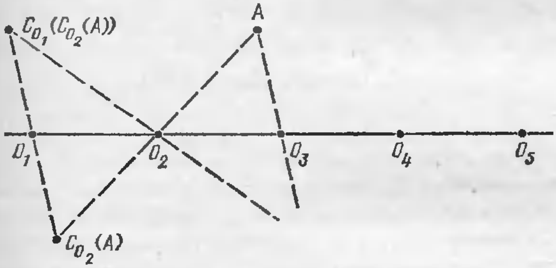


Рис. 66

Поэтому для любой точки A справедливо равенство

$$C_{O_3}(A) = C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(A))),$$

откуда имеем

$$C_{O_3}(M) = C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(M))) = C_{O_2}(C_{O_1}(M)) = C_{O_2}(M) = M.$$

Аналогично, точки

$$O_4 = C_{O_3}(O_2),\ O_5 = C_{O_4}(O_3) \text{ и т. д.}$$

являются центрами симметрии множества M. Так как

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{O_3O_4} = \ldots,$$

то все полученные центры симметрии различны, а значит, их бесконечно много.

12.8. Пусть множество M имеет оси симметрии l_0 и l_1 (не обязательно различные). Тогда прямая l_2, симметричная прямой l_1 отно-

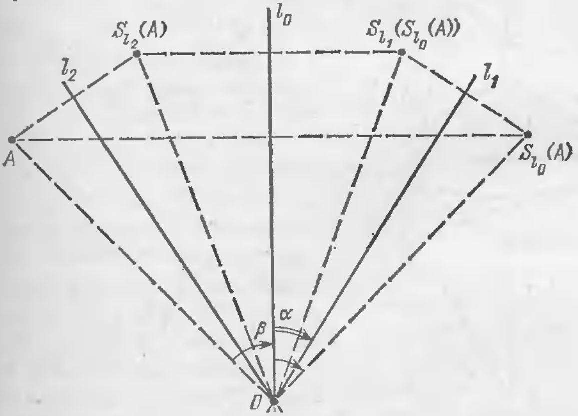


Рис. 67

сительно прямой l_0, также является осью симметрии множества M. Действительно, если через $S_l(A)$ обозначить точку, симметричную точке A относительно прямой l, то из симметричности точек A и $S_{l_0}(A)$, а также прямых l_2 и l_1 относительно прямой l_0 вытекает (рис. 67) симметричность точек $S_{l_2}(A)$ и $S_{l_1}(S_{l_0}(A))$ относительно той же прямой l_0. Поэтому для любой точки A справедливо равенство

$$S_{l_2}(A)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(A))),$$

откуда имеем

$$S_{l_2}(M)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(M)))=S_{l_0}(S_{l_1}(M))=S_{l_0}(M)=M.$$

Таким образом, любая ось симметрии l_0 множества M является осью симметрии множества L, откуда вытекает утверждение задачи.

12.9. Пусть оси симметрии l_0 и l_1 множества M пересекаются в в точке O, причем ось l_0 при вращении по часовой стрелке вокруг точки O на угол α переходит в ось l_1. Тогда, если обозначить через $S_l(A)$ точку, симметричную точке A относительно прямой l, то при вращении по часовой стрелке вокруг точки O на угол 2α любая точка A переходит в точку $R(A)=S_{l_1}(S_{l_0}(A))$. Действительно, расстояние от точки O до любой из точек A, $S_{l_0}(A)$, $S_{l_1}(S_{l_0}(A))$ одинаковы (см. рис. 67), и если ориентированный по часовой стрелке угол между прямыми OA и l_0 равен β ($A\neq O$), то угол между прямыми OA и $OS_{l_1}(S_{l_0}(A))$ равен $2\beta-2(\beta-\alpha)=2\alpha$. Поскольку множество M содержит более одной точки, то оно содержит точку $A_0\neq O$. Итак, имеем

$$R(M)=S_{l_1}(S_{l_0}(M))=S_{l_1}(M)=M,$$

поэтому каждая из точек A_0, $A_1=R(A_0)$, $A_2=R(A_1)$, $A_3=R(A_2)$ и т. д. содержится в множестве M. При этом все указанные точки различны, так как если бы при некоторых значениях $i>j$ точки A_i и A_j совпали, то выполнялось бы равенство

$$2\alpha(i-j)=2\pi k \qquad (k\in\mathrm{N}),$$

т. е. число $\alpha/\pi=k/(i-j)$ было бы рациональным. Таким образом, множество M бесконечно.

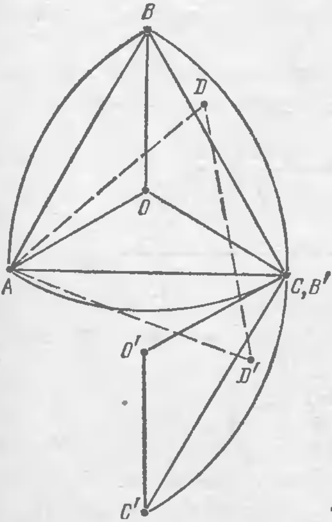


Рис. 68

12.10. Докажем, что условию задачи удовлетворяет лишь значение $n=3$ (при котором точки достаточно расположить в вершинах правильного треугольника). В самом деле, пусть указанным в задаче образом можно расположить $n\geqslant 4$ точек. Выберем из них две точки A и B, расстояние между которыми максимально, и третью точку C, для которой треугольник ABC правильный. Тогда все остальные точки лежат в фигуре M, являющейся пересечением трех кругов радиуса AB с центрами в точках A, B и C (рис. 68). Если точка O — центр треугольника ABC, то отрезки AO, BO и CO делят множество M на три равные части, ни в одной из которых не может располагаться ни одна из n точек, кроме уже названных. Действительно, пусть, например, в части M_{BC}, составленной из треугольника BOC и сегмента круга с центром A и дугой BC, находится еще одна точка D. Тогда существует точка D', для которой треугольник ADD' правильный. Следовательно, при повороте (в определенном направлении) вокруг точки A на угол $60°$ точка D переходит в точку D', лежащую, таким образом, одновременно и в образе M'_{BC} части M_{BC} при этом повороте, и в множестве M. Но так как $\angle BAC = 60°$, то либо $C' = B$, либо $B' = C$. Предположим для определенности, что $B' = C$. Тогда множества M'_{BC} и M лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $B'O'$, ибо

$$\angle BB'O' = \angle BCA + \angle AB'O' = 60° + 30° = 90°,$$

т. е. прямая $B'O'$ касается дуги AC. Поэтому M'_{BC} и M имеют только одну общую точку B', откуда $D' = B'$ и $D = B$, что противоречит выбору точки D. Утверждение доказано.

12.11. Пусть вначале точки A, B и C расположены на одной прямой. Тогда эти точки делят прямую на 4 интервала, причем никакие точки разных интервалов не могут лежать в одном выпуклом

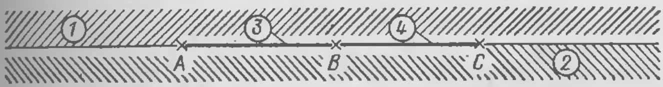


Рис. 69

множестве. Поэтому число искомых множеств не может быть меньше 4. Число 4 достигается, если разбить множество M на части так, как показано на рис. 69. Пусть теперь точки A, B и C не лежат на одной прямой. Тогда точки B и C делят прямую BC на 3 интервала, причем точки разных интервалов должны лежать в разных выпуклых множествах. Поэтому число искомых множеств не может быть меньше 3, а 3 множества можно выбрать так, как показано на рис. 70.

12.12. Среди проведенных прямых по условию обязательно есть две пересекающиеся, которые уже делят плоскость на 4 части. Если провести еще одну прямую, то, как показывает несложный перебор случаев ее расположения, число частей увеличится по крайней мере на 2. Поэтому ровно 5 частей получиться не может, откуда $n_0 \geqslant 5$. С другой стороны, любое число $n > 5$ частей можно получить требуемым способом: если $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), то разбиение плоскости можно построить так, как показано на рис. 71, если же $n = 4k + 3$, то см.

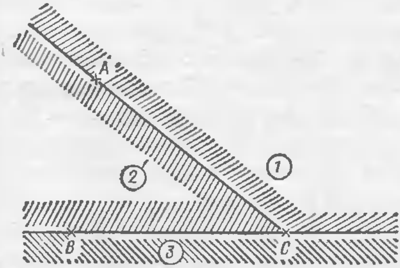


Рис. 70

Рис. 71

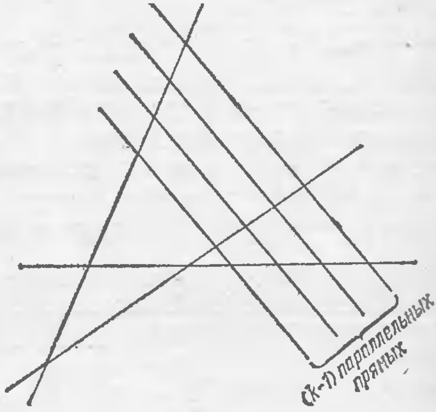


Рис. 72

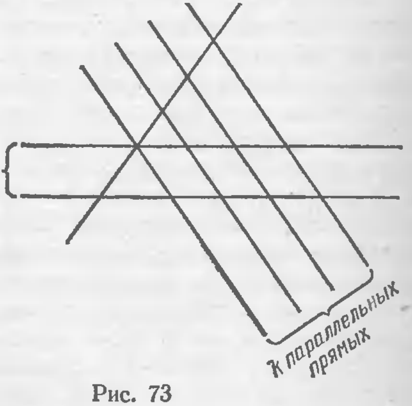


Рис. 73

рис. 72, а если $n=4k+5$, то см. рис. 73. Таким образом, наименьшее значение n_0 равно 5.

12.13. Условию задачи удовлетворяет, например, множество на координатной плоскости, представляющее собой полосу

$$M=\{(x;\ y)\mid \sqrt{2}\,x-1\leqslant y\leqslant \sqrt{2}\,x\}.$$

В самом деле, это множество содержит бесконечно много целочисленных точек вида $(x;\ [\sqrt{2}\,x])$ при $x\in \mathbf{Z}$. С другой стороны, любая прямая $y=kx+b$ в случае $k=\sqrt{2}$ содержит не более одной целочисленной точки (иначе число

$$|(\sqrt{2}\,x_1+b)-(\sqrt{2}\,x_2+b)|=\sqrt{2}\,|x_1-x_2|$$

было бы целым при $|x_1-x_2|\in \mathbf{N}$, что противоречило бы иррациональности числа $\sqrt{2}$), а в случае $k\neq\sqrt{2}$ пересекает множество M по некоторому отрезку, который не может содержать бесконечно много целочисленных точек.

Замечание. Можно доказать, что полоса, лежащая между любыми двумя параллельными прямыми $y=kx+b_1$ и $y=kx+b_2$ с иррациональным значением k, всегда содержит бесконечно много целочисленных точек (какой бы малой ни была разность $|b_1-b_2|$). Таким образом, любая такая полоса удовлетворяет условию задачи.

12.14. Так как $a_n\geqslant 0$ при всех значениях n, то возрастание или убывание последовательности $\{a_n\}$ равносильно возрастанию или убыванию последовательности чисел

$$a_n^2=(\boldsymbol{x}-n\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2-2n\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+n^2\boldsymbol{y}^2,$$

которая представляет собой последовательность значений квадратного трехчлена с положительным старшим коэффициентом в точках $n\in\mathbf{N}$. Из свойств квадратных трехчленов вытекает, что такая последовательность не может быть убывающей, а возрастающей она является тогда и только тогда, когда $a_1^2<a_2^2$, или

$$\boldsymbol{x}^2-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^2<\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{y}^2.$$

Таким образом, условие а) равносильно условию

$$3\boldsymbol{y}^2>2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y},\ \text{т. е.}\ 3|\boldsymbol{y}|>2|\boldsymbol{x}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а условие б) не выполняется никогда.

12.15. Пусть M — множество площади меньше π, $U_1, \ldots, U_n$ — круги единичного радиуса с центрами в данных точках $A_1, \ldots, A_n$ соответственно,

$$V_i=U_i\cap M \qquad (i=1,\ \ldots,\ n).$$

Поскольку расстояния между центрами кругов больше 2, то круги не пересекаются, а значит, не пересекаются и множества $V_1, \ldots, V_n$. С другой стороны, имеем $V_i\subset M$, следовательно, площадь множества $V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_n\subset M$ меньше π. Поэтому, если мысленно с помощью параллельного переноса совместить все круги U_i (вместе с содержащимися в них множествамн V_i) в один круг с центром O, то внутри него найдется точка B, не принадлежащая ни одному нз образов множеств V_i. Тогда после параллельного переноса множества M на вектор $\overrightarrow{BO}$ длины меньше 1 центры A_i всех кругов U_i уже не будут принадлежать этому множеству.

12.16. Заметим, что сумма длнн двух проекций каждого отрезка на заданную прямую l и прямую l', ей перпендикулярную, не меньше 1. В самом деле, если вектор $\boldsymbol{a}$ длины 1 параллелен некоторому отрезку, а векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ являются проекциями вектора $\boldsymbol{a}$ на прямые l и l', то $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, откуда

$$|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|\geqslant|\boldsymbol{a}|=1.$$

Но длины проекций отрезка равны $|\boldsymbol{x}|$ и $|\boldsymbol{y}|$, поэтому их сумма также не меньше 1. Следовательно, сумма длин проекцнй всех отрезков не меньше $4n$. Поэтому нз двух прямых l и l' можно выбрать прямую, сумма длин проекцнй отрезков на которую не меньше $2n$. Так как все отрезки расположены внутри круга радиуса n, то объединение нх проекций на любую прямую нмеет длнну меньше $2n$. Следовательно, на выбранной прямой найдется точка, принадлежащая проекциям хотя бы двух отрезков. Прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно выбранной прямой, пересекает по крайней мере эти два отрезка. Так как эта прямая либо перпендикулярна, либо параллельна прямой l, то она удовлетворяет условиям задачи.

12.17. Обозначим $U(M)$ объеднненне всех кругов раднуса 1, центры которых прннадлежат множеству M на плоскости. Докажем индукцией по $n\in\mathbf{N}$, что для любой ломаной $A_0A_1\ldots A_n$ справедливо неравенство

$$S_{U(A_0\ldots A_n)}\leqslant 2\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_i+\pi.$$

При $n=1$ множество $U(A_0A_1)$ разбивается на два полукруга радиуса 1 и прямоугольник со сторонами A_0A_1 и 2, поэтому

$$S_{U(A_0A_1)}=2\cdot A_0A_1+\pi,$$

т. е. утвержденне справедлнво. Пусть оно уже доказано для некоторого значения $n-1\in\mathbf{N}$. Обозначим

$$X=U(A_0\ldots A_{n-1}),\quad Y=U(A_{n-1}A_n),\quad Z=X\cap Y,$$

тогда $S_Z\geqslant\pi$ (нбо $Z\supset U(A_{n-1})$) и, учнтывая предположение ннндукции, имеем

$$S_{U(A_0\ldots A_{n-1}A_n)}=S_{X\cup Y}=S_{X\setminus Z}+S_{Y\setminus Z}+S_Z=$$
$$=(S_{X\setminus Z}+S_Z)+(S_{Y\setminus Z}+S_Z)-S_Z=S_X+S_Y-S_Z\leqslant$$
$$\leqslant\left(2\sum_{i=1}^{n-1} A_{i-1}A_i+\pi\right)+(2A_{n-1}A_n+\pi)-\pi=2\sum_{i=1}^{n} A_{i-1}A_i+\pi,$$

что и завершает доказательство неравенства. Для данной в условии задачи ломаной множество $U(A_0 \ldots A_n)$ содержит весь квадрат со стороной 50, поэтому ее длина не меньше чем

$$(S_{U(A_0 \ldots A_n)} - \pi)/2 > (50^2 - 4)/2 = 1248,$$

что и требовалось доказать.

12.18. Выберем на прямой левое направление и будем говорить, что один отрезок находится левее другого, если левый конец первого отрезка расположен левее (точнее, не правее) левого конца второго. Каждому отрезку поставим в соответствие один из n номеров $1, 2, \ldots, n$ следующим образом. На первом шаге самому левому из всех отрезков[1]) поставим в соответствие номер 1. Затем на каждом последующем шаге найдем самый левый из еще незанумерованных отрезков[1]) и поставим ему в соответствие номер, отличный от номеров пересекающихся с ним отрезков (уже занумерованных). Если на каком-то шаге выбран некоторый отрезок, но для него не удается подобрать очередной номер, то это означает, что он пересекается с n отрезками, расположенными левее его и имеющими разные номера. В этом случае левый конец выбранного отрезка принадлежит $n+1$ отрезкам. Если же на каком-то шаге занумерован последний отрезок, то по принципу Дирихле (теорема 1) хотя бы один из n номеров соответствует более чем n отрезкам, которые, согласно описанному порядку нумерации, не пересекаются. Доказательство закончено.

12.19. Каждому множеству A_i ($i = 1, \ldots, n$), представляющему собой объединение двух отрезков прямой (где выделены левое и правое направления), поставим в соответствие отрезок B_i, левый конец которого совпадает с самой левой точкой множества A_i, а правый — с самой правой. Так как $B_i \supset A_i$, то любые два (и даже три) из отрезков $B_1, \ldots, B_n$ имеют общую точку. Докажем, что существуют отрезки B_k и B_m (возможно, $k = m$), пересечение C которых содержится в любом из отрезков B_i. Действительно, пусть левый конец отрезка B_k является самым правым из всех левых концов отрезков B_i, а правый конец отрезка B_m — самым левым из всех правых концов. Тогда пересечение

$$C = B_k \cap B_m$$

лежит не левее левого конца любого из отрезков B_i и не правее правого его конца, т. е. $C \subset B_i$. Заметим, что

$$C \cap A_i = B_k \cap B_m \cap A_i \supset A_k \cap A_m \cap A_i \neq \varnothing.$$

Поэтому каждое множество A_i содержит либо самую левую точку a множества C, либо самую правую его точку b (возможно, $a = b$). В самом деле, в противном случае имеем

$$a,\ b \in B_i \setminus A_i \text{ и } C \subset B_i \setminus A_i,$$

---

[1]) Если таких отрезков несколько, то выбираем любой из них.

откуда

$$C \cap A_i = \varnothing,$$

что неверно. По принципу Дирихле (теорема 1) хотя бы одна из точек a или b принадлежит по меньшей мере половине множеств A_i, что и требовалось доказать.

12.20. Предположим, что по данным $n+4$ точкам уже построена некоторая сеть отрезков, удовлетворяющих условию задачи, причем больше ни одного отрезка провести нельзя (такие сети, называемые в дальнейшем максимальными, обязательно существуют, так как количество всех возможных отрезков ограничено числом C_{n+4}^2). Многоугольник, вершинами которого служат данные точки, а каждая сторона есть либо отрезок сети, либо объединение нескольких отрезков сети, лежащих на одной прямой, будем называть сетевым. Стороны квадрата K с вершинами в 4 отмеченных точках, внутри которого лежат остальные n точек, всегда принадлежат максимальной сети, так что этот квадрат является сетевым многоугольником. Докажем, что максимальная сеть разбивает квадрат K на сетевые треугольники, каждый из которых содержит ровно три данные точки, а именно его вершины. Рассмотрим произвольную точку O квадрата. Среди всех сетевых многоугольников, содержащих эту точку (множество таких многоугольников не пусто, ибо содержит квадрат K), выберем m-угольник M наименьшей площади. Так как сумма углов многоугольника M равна $180°(m-2)$, то среди его вершин найдется такая вершина A, угол при которой меньше $180°$. На каждой из двух сторон этого угла выберем ближайшую к вершине A данную точку, получим тем самым точки B и C (рис. 74). Отметим, что треугольник ABC содержит данные точки, отличные от A и B, например точку C. Возьмем ту из них — точку D, — для которой угол ABD минимален (если таких точек несколько, то выберем из них ближайшую к точке B). Тогда в треугольнике ABD нет данных точек, отличных от вершин A, B, D, а значит, ни один из отрезков сети не имеет общих точек со сторонами AD и BD, кроме, возможно, этих вершин. В силу максимальности сети отрезки AD и BD ей принадлежат. Таким образом, треугольник ABD сетевой. Если он не совпадает с многоугольником M, то последний разбивается на две части, каждая из которых также является сетевым многоугольником, что противоречит выбору

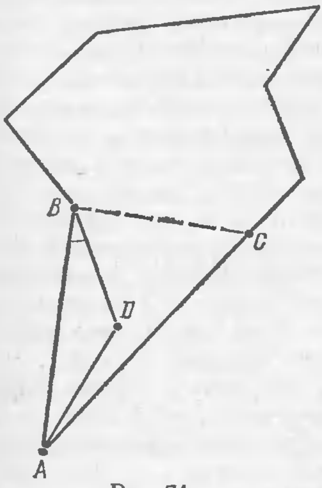


Рис. 74

многоугольника M. Поэтому треугольник ABD и есть многоугольник M. Итак, точка O лежит в сетевом треугольнике ABD, не содержащем данных точек, отличных от его вершин. Теперь сосчитаем количество k отрезков в максимальной сети. Для этого найдем сумму всех углов всех треугольников, на которые квадрат K разбит этой сетью. С одной стороны, она равна $180°\cdot l$, где l — число треугольников. С другой стороны, она составлена из суммы углов при вершинах квадрата и всех полных углов с вершинами в данных точках внутри квадрата, т. е. равна $360°(n+1)$. Поэтому имеем

$$180°\cdot l = 360°\cdot(n+1),$$

откуда $l=2(n+1)$. Наконец, каждая сторона квадрата K является одной стороной одного треугольника, а каждый отрезок сети, отличный от стороны этого квадрата, является общей стороной двух треугольников. Следовательно, получаем равенство $4+2(k-4)=3l$, откуда

$$k=\frac{3}{2}l+2=3n+5.$$

§ 13. Геометрические неравенства

13.1. Заметим, что

$$2S=ab\sin\gamma\leqslant ab,$$

где S — площадь треугольника, а γ — угол между данными сторонами. Поэтому если $a>b$, то

$$(a+h_a)-(b+h_b)=\left(a+\frac{2S}{a}\right)-\left(b+\frac{2S}{b}\right)=(a-b)\left(1-\frac{2S}{ab}\right)\geqslant 0,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $2S=ab$, т. е. когда угол между данными сторонами прямой.

13.2. Пусть выпуклый многоугольник

$$M_0=A_1A_2\ \ldots\ A_n$$

лежит внутри выпуклого многоугольника M. Тогда прямая A_1A_2 делит многоугольник M на две части, одна из которых представляет собой выпуклый многоугольник M_1, содержащий многоугольник M_0 (рис. 75), причем сторона B_1B_2 многоугольника M_1, содержащая отрезок A_1A_2, не является стороной многоугольника M, откуда имеем $P_{M_1}<P_M$ (ибо отрезок B_1B_2 короче любой ломаной, соединяющей его концы). Прямая A_2A_3 отсекает от многоугольника M_1 выпуклый многоугольник M_2, содержащий многоугольник M_0, причем $P_{M_2}\leqslant P_{M_1}$. Рассуждая подобным образом и далее, получаем последовательность многоугольников

$$M\supset M_1\supset M_2\supset\ldots\supset M_n,$$

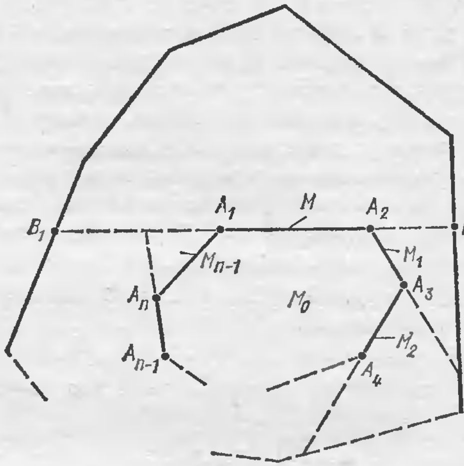


Рис. 75

последний из которых совпадает с многоугольником M_0, причем выполнены неравенства

$$P_M > P_{M_1} \geqslant P_{M_2} \geqslant \ldots \geqslant P_{M_n} = P_{M_0},$$

откуда следует требуемое неравенство.

13.3. Пусть точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ являются соответственно серединами сторон A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 выпуклого n-угольника

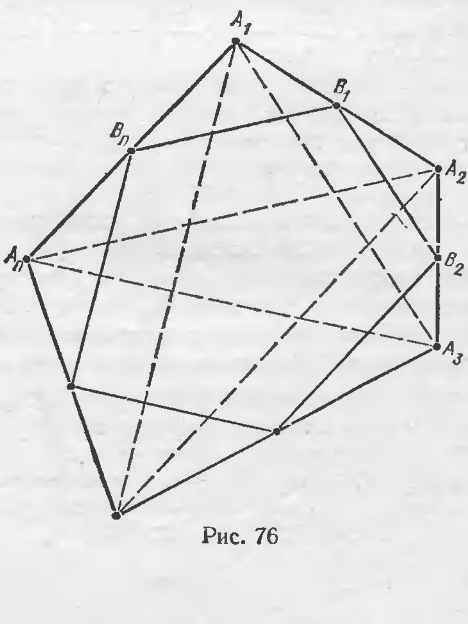


Рис. 76

$A_1A_2 \ldots A_n$ площади S. Положим $A_{n+1}=A_1$, $A_{n+2}=A_2$, тогда любой треугольник

$$A_iA_{i+1}A_{i+2} \qquad (i=1, \ldots, n)$$

не имеет общих внутренних точек ни с одним из других таких треугольников, кроме двух из них, имеющих своей вершиной точку A_{i+1}, причем два последних треугольника не имеют общих внутренних точек (рис. 76). Поэтому любая точка n-угольника является внутренней не более чем для двух из таких треугольников, откуда имеем

$$2S \geqslant \sum_{i=1}^{n} S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}}.$$

Поскольку каждый отрезок B_iB_{i+1} ($B_{n+1}=B_1$) является средней линией треугольника $A_iA_{i+1}A_{i+2}$, то

$$S_{B_iA_{i+1}B_{i+1}}=\frac{1}{4}S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}},$$

а значит, справедливы соотношения

$$S_{B_1B_2 \ldots B_n}=S-\sum_{i=1}^{n} S_{B_iA_{i+1}B_{i+1}}=$$

$$=S-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}} \geqslant S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}S,$$

из которых вытекает требуемое неравенство.

13.4. Пусть параллелограмм $ABCD$ вписан в правильный шестиугольник M, центр O которого является точкой пересечения диагоналей параллелограмма. Выберем вершины E и F шестиугольника, лежащие в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой OA и удовлетворяющие неравенствам $\angle AOE < 60°$, $\angle AOF < 120°$ (рис. 77; заметим, что этими условиями вершины E и F определяются однозначно). Тогда имеем

$$60° \leqslant \angle AOF < 120°,$$

так что остальные вершины E и G шестиугольника (а с ними и точка B), лежащие в этой полуплоскости, удалены от прямой AO не дальше вершины F. Поэтому

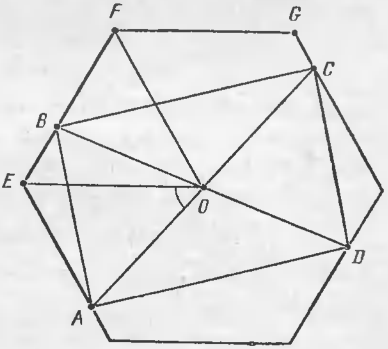


Рис. 77

$$S_{AOB} \leqslant S_{AOF}=S_{EOF},$$

так как точки A и E лежат на одной стороне шестиугольника, параллельной прямой OF, т. е. равноудалены от этой прямой. Из свойств параллелограмма и правильного шестиугольника вытекают равенства

$$S_{AOB}=S_{BOC}=S_{COD}=S_{DOA}=(1/4)\,S_{ABCD}$$

и

$$S_{EOF}=(1/6)\,S_M,$$

следовательно, справедливо неравенство

$$(1/4)\,S_{ABCD}\leqslant(1/6)\,S_M,$$

откуда

$$S_{ABCD}\leqslant(2/3)\,S_M,$$

что и требовалось доказать.

13.5. Докажем более общее утверждение: площадь любого параллелограмма $KLMN$, лежащего в треугольнике ABC, не превосходит половины площади этого треугольника. Заметим, что каждая из прямых KL и MN пересекает две стороны треугольника ABC (возможно, в его вершинах), а значит, хотя бы две из четырех точек пересечения по принципу Дирихле (теорема 1) принадлежат одной стороне. Пусть, например, сторона BC пересекает прямые KL и MN в точках K_1 и N_1 соответственно. На сторонах AB, AC и BC выберем соответственно точки D, E и F так, чтобы для точек L_1 и M_1 пересечения прямых KL и MN с отрезком DE выполнялись условия

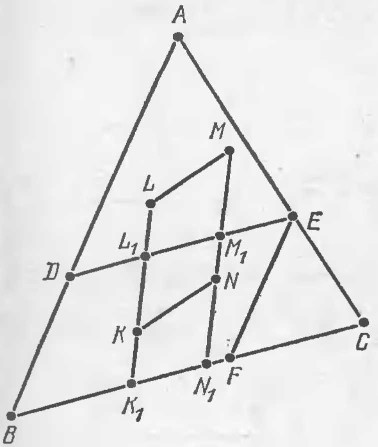


Рис. 78

$$K_1L_1=KL,\quad L_1M_1\parallel K_1N_1,$$

причем $EF\parallel BD$ (рис. 78). Тогда параллелограммы $KLMN$ и $K_1L_1M_1N_1$ имеют равные высоты к равным основаниям, а в параллелограммах $BDEF$ и $K_1L_1M_1N_1$ основание DE не меньше основания L_1M_1, в то время как высоты к ним равны. Поэтому имеем

$$S_{KLMN}=S_{K_1L_1M_1N_1}\leqslant S_{BDEF}.$$

Пусть $AE=x\cdot AC$, тогда $EC=(1-x)\,AC$, и из подобия треугольников ABC, ADE и EFC получаем

$$S_{BDEF}=S_{ABC}-S_{ADE}-S_{FEC}=S_{ABC}-x^2S_{ABC}-(1-x)^2\,S_{ABC}=$$
$$=2x\,(1-x)\,S_{ABC}\leqslant(1/2)\,S_{ABC},$$

ибо $x\,(1-x)\leqslant 1/4$ при любом x. Поэтому

$$S_{KLMN}\leqslant(1/2)\,S_{ABC},$$

что и требовалось доказать.

13.6. Так как по условию $\angle BAC \geqslant 90°$, то точка A лежит в круге с диаметром BC и центром O на нем. Поэтому для высоты AH треугольника ABC имеем

$$AH \leqslant AO \leqslant BO = BC/2$$

(рис. 79), т. е. $BC \geqslant 2AH$. Отсюда и из подобия треугольников BB_1E и BAH, а также треугольников CC_1D и CAH, получаем

$$\frac{S_{BB_1C_1C}}{S_{B_1C_1DE}} = \frac{S_{B_1C_1DE}}{S_{B_1C_1DE}} + \frac{S_{BB_1E}}{S_{B_1C_1DE}} + \frac{S_{CC_1D}}{S_{B_1C_1DE}} = 1 + \frac{BE}{2B_1E} + \frac{CD}{2C_1D} =$$
$$= 1 + \frac{BH}{2AH} + \frac{CH}{2AH} = 1 + \frac{BC}{2AH} \geqslant 2,$$

т. е. $S_{B_1C_1DE} \leqslant S_{BB_1C_1C}/2$. Аналогично, имеем

$$S_{B_2C_2D_1E_1} \leqslant \frac{1}{2} S_{B_1B_2C_2C_1}, \quad \ldots, \quad S_{B_nC_nD_{n-1}E_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2} S_{B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}},$$

где n — число построенных квадратов. Складывая эти неравенства, получаем, что сумма площадей квадратов не превосходит половины

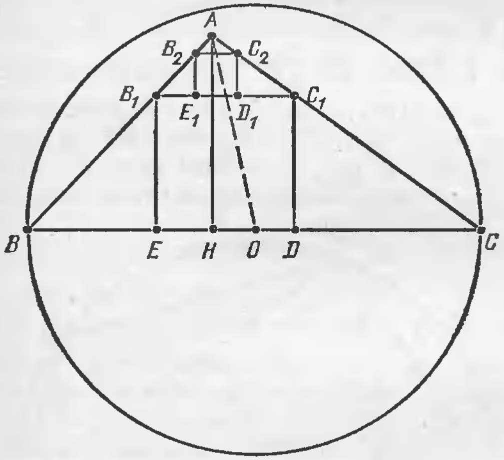


Рис. 79

площади четырехугольника BB_nC_nC, а значит, меньше половины площади треугольника ABC.

13.7. Пусть в остроугольном треугольнике ABC площади 1 угол при вершине A наибольший. Проведем окружность с центром в середине M стороны BC и радиусом $R = MA$, которая пересекает прямую BC в точках D и E (рис. 80). Тогда угол DAE прямой и

$$a = MB = MC < R$$

(иначе $MB \geqslant MD$, $MC \geqslant ME$, откуда $\angle BAC \geqslant \angle DAE = 90°$, что противоречит остроугольности треугольника ABC). Хотя бы один из углов AMC или AMB не является острым, например $\angle AMB = \alpha \geqslant$

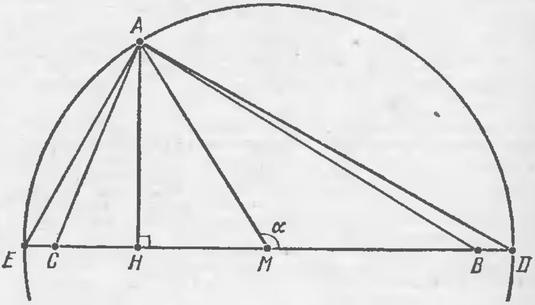


Рис. 80

$\geqslant 90°$. Так как $AB \leqslant BC = 2a$ (ибо $\angle BAC \geqslant \angle ACB$), то по теореме косинусов имеем

$$R^2 + a^2 = MA^2 + MB^2 \leqslant MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos\alpha = AB^2 \leqslant 4a^2,$$

откуда $R \leqslant \sqrt{3}\,a$ и

$$S_{ADE} = (1/2)\,DE \cdot AH = R \cdot AH \leqslant \sqrt{3}\,a \cdot AH = \sqrt{3} \cdot (1/2)\,BC \cdot AH = \sqrt{3}$$

(где AH — перпендикуляр к прямой BC). Утверждение доказано.

13.8. Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $AC = x$, $CE = y$, $\angle CAE = \alpha$, $\angle AEC = \beta$. Без ограничения общности можно считать, что точки A и E являются концами диаметра, стягивающего полу-

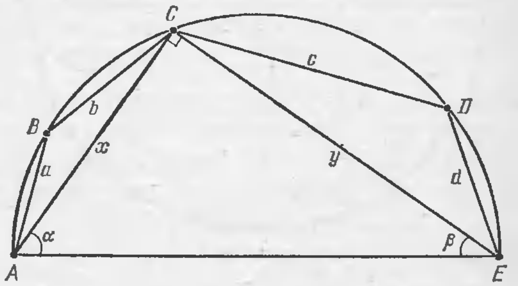


Рис. 81

окружность (рис. 81), ибо в противном случае их можно переместить в указанные концы, после чего выражение

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd$$

только увеличится. Так как $\angle ACE = 90°$, то $x^2 + y^2 = 4$. Далее, $\angle ABC = 180° - \angle AEC = 180° - \beta$, $\angle CDE = 180° - \angle CAE = 180° - \alpha$;

следовательно, по теореме косинусов

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ABC = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta,$$

$$y^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle CDE = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha.$$

Наконец, из соотношений

$$2\cos\alpha = x > b,\ 2\cos\beta = y > c$$

получаем

$$4 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + aby + c^2 + d^2 + cdx > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd,$$

что и требовалось доказать.

13.9. Поскольку

$$\overrightarrow{AO} = x\cdot\overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{OB} = (1-x)\cdot\overrightarrow{AB},$$

где $x \in (0;\ 1)$, то имеем (рис. 82)

$$OC = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{CA} + x(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})| =$$
$$= |(1-x)\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CB}| < CA(1-x) + CB\,x$$

(ибо векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ не параллельны), откуда получаем

$$OC\cdot AB < CA(1-x)AB + CBx\,AB =$$
$$= CA\cdot OB + CB\cdot OA,$$

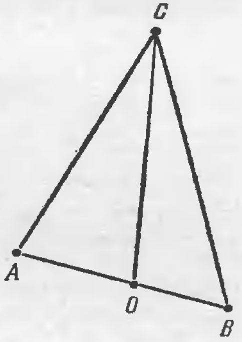


Рис. 82

что и требовалось доказать.

13.10. Пусть M — наибольшее, а m — наименьшее из расстояний между вершинами четырехугольника. Поскольку хотя бы один из его углов, скажем угол ABC, не является острым, то по теореме косинусов имеем

$$M^2 \geqslant AC^2 \geqslant AB^2 + BC^2 \geqslant m^2 + m^2 = 2m^2,$$

откуда

$$M \geqslant \sqrt{2}\,m, \text{ или } M/m \geqslant \sqrt{2},$$

что и требовалось доказать.

13.11. Заметим прежде всего, что если среди данных точек всегда можно выбрать три точки A, B, C, для которых $120^\circ \leqslant \angle ABC$, то утверждение задачи выполнено. Действительно, пусть M — наибольшее, а m — наименьшее из расстояний между точками, тогда по теореме косинусов (справедливой и в случае $\angle ABC = 180^\circ$) имеем

$$M^2 \geqslant AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle ABC \geqslant$$
$$\geqslant m^2 + m^2 + 2m^2\cdot(1/2) = 3m^2,$$

откуда $M \geqslant \sqrt{3}\,m$. Если 6 точек расположены в вершинах выпуклого шестиугольника, то хотя бы один из его внутренних углов (составляющих в сумме $180^\circ\cdot 4 = 120^\circ\cdot 6$) не меньше 120°. Если же это не так, то хотя бы одна точка O обладает следующим свойством: относительно любой прямой, проходящей через точку O и еще одну из точек, все остальные точки не лежат внутри одной полуплоскости. Тогда возьмем еще одну точку A и в каждой из двух полуплоскостей относительно прямой OA выберем точки B и C соответственно, для которых углы AOB и AOC максимальны (рис. 83). Тогда

$$\angle AOB + \angle AOC \geqslant 180^\circ$$

(иначе все точки лежат внутри одной полуплоскости относительно прямой OB), поэтому возможны три случая: либо

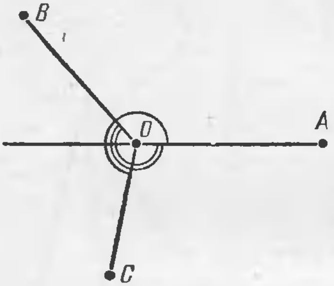


Рис. 83

$$\angle AOB \geqslant 120^\circ,$$

либо

$$\angle AOC \geqslant 120^\circ,$$

либо

$$\angle BOC = 360^\circ - \angle AOB - \angle AOC > 120^\circ.$$

Итак, в любом из случаев расположения точек существуют три точки, образующие угол не меньше 120°, следовательно, утверждение задачи справедливо.

13.12. 1) По теореме о средних имеем

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) = a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b+3abc \geqslant 6abc+3abc = 9abc,$$

откуда вытекает неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{P}.$$

2) Неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant P^2/3$$

вытекает из цепочки соотношений

$$P^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \leqslant a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2).$$

3) По формуле Герона и теореме о средних получаем

$$27S^2 = 27(P/2)(P/2-a)(P/2-b)(P/2-c) \leqslant 27(P/2)\left(\frac{(P/2-a)+(P/2-b)+(P/2-c)}{3}\right)^3 = P^4/16,$$

т. е. $P^2 \geqslant 12\sqrt{3}\,S$.

4) Согласно неравенствам 2) и 3) имеем

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant P^2/3 \geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

5) Неравенство

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant P^3/9$$

следует из цепочки соотношений

$$P^3=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab(a+b)+3bc(b+c)+$$
$$+3ca(c+a)\leqslant a^3+b^3+c^3+2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2-ab+b^2)(a+b)+$$
$$+3(a^2-ac+c^2)(a+c)+3(b^2-bc+c^2)(b+c)=9(a^3+b^3+c^3).$$

6) Согласно неравенствам 3) и 5) имеем

$$a^3+b^3+c^3\geqslant P^3/9\geqslant 12\sqrt{3}\,SP/9=(4\sqrt{3}/3)\,SP.$$

7) Из неравенства 4) получаем

$$16S^2\leqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{3}\leqslant a^4+b^4+c^4.$$

13.13. Положим $\alpha_1=\angle OAC$, $\alpha_2=\angle OAB$, $\beta_1=\angle OBA$, $\beta_2=\angle OBC$, $\gamma_1=\angle OCB$, $\gamma_2=\angle OCA$, $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta=\beta_1+\beta_2$,

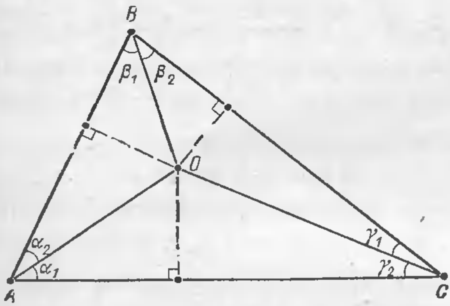


Рис. 84

$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ (рис. 84). Тогда требуемое неравенство вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}(OC\cos\gamma_1+OC\cos\gamma_2+OB\cos\beta_1+OB\cos\beta_2+$$
$$+OA\cos\alpha_1+OA\cos\alpha_2)=OC\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}+$$
$$+OB\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+OA\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant$$
$$\leqslant OA\cos\frac{\alpha}{2}+OB\cos\frac{\beta}{2}+OC\cos\frac{\gamma}{2}.$$

При этом равенство достигается при

$$\alpha_1=\alpha_2,\quad \beta_1=\beta_2,\quad \gamma_1=\gamma_2,$$

т. е. когда точка O является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC.

13.14. Заметим, что при $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ требуемое неравенство обращается в равенство. Пусть хотя бы два угла треугольника, скажем α и β, не равны, тогда

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)<2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2+\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2},$$

т. е. требуемое неравенство также выполнено, но является строгим. Таким образом, равенство имеет место только для правильного треугольиика.

13.15. Обозначим

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma,$$

где α, β, γ — углы треугольника. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=180°$, следовательио,

$$4\left(f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)-\frac{3}{4}\right)=4\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\frac{1+\cos 2\gamma}{2}-\frac{3}{4}\right)=$$
$$=2\cos 2\alpha+2\cos 2\beta+2\cos 2\gamma+3=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$$
$$+4\cos^2(\alpha+\beta)+1=(2\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))^2+1-\cos^2(\alpha-\beta)\geqslant 0,$$

откуда вытекает требуемое неравенство

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\geqslant 3/4.$$

При этом равеиство достигается тогда и только тогда, когда

$$\cos(\alpha-\beta)=1,\ \cos(\alpha+\beta)=-1/2,\ \text{т. е. при}\ \alpha=\beta=\gamma=60°.$$

Заметим, что величина $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ не принимает наибольшего значения, так как для любого набора углов α, β, γ треугольиика при достаточио малом положительном значеиии ε выполнеиы оценки

$$\varepsilon<\alpha,\beta,\gamma<180°-2\varepsilon,$$

из которых получаем

$$|\cos\alpha|<\cos\varepsilon,\quad |\cos\beta|<\cos\varepsilon,\quad |\cos\gamma|<\cos\varepsilon$$

и

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)<f(\varepsilon,\ \varepsilon,\ 180°-2\varepsilon).$$

13.16. Для углов α, β, $\gamma\leqslant 90°$ треугольника имеем

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}+$$
$$+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}+$$
$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\gamma+\sin\beta+\sin\alpha,$$

при этом использованы неравенства

$$\cos((\alpha-\beta)/2)<2\cos(\gamma/2),$$
$$\cos((\alpha-\gamma)/2)<2\cos(\beta/2),$$
$$\cos((\beta-\gamma)/2)<2\cos(\alpha/2)$$

(для доказательства, например, первого из них достаточно заметить, что $\gamma/2 < 60°$, откуда

$$\cos((\alpha-\beta)/2) \leqslant 1 = 2\cos 60° < 2\cos(\gamma/2);$$

остальные неравенства доказываются аналогично).

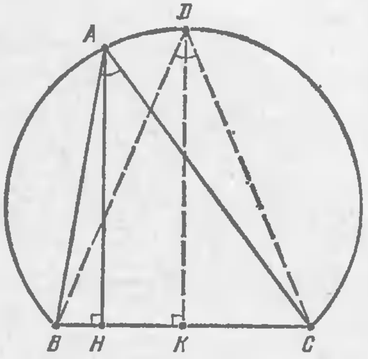


Рис. 85

13.17. Пусть в треугольнике ABC выполнены равенства

$AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ и $\angle BAC=\alpha$.

Рассмотрим опирающуюся на сторону BC дугу BAC окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 85). Так как середина D этой дуги является наиболее удаленной от хорды BC точкой дуги, то для высот $AH=h$ и DK треугольников ABC и DBC справедливы соотношения

$$h \leqslant DK = BK\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2}\angle BDC\right)=\frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Согласно теореме о средних имеем

$$\frac{ab+ac+bc}{4S} \geqslant \frac{3}{4S}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{((1/2)\,bc\sin\alpha)^2\,((1/2)\,ah)}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{h\sin^2\alpha}} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,(\alpha/2)}}.$$

Снова применяя теорему о средних и обозначая $\cos\alpha = x$, получаем

$$\frac{1}{2}\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)= \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\,(1+x)=\frac{1}{2}\sqrt{(1+x)^3\,(1-x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{27\left(\frac{1+x}{3}\right)^3(1-x)} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{27}\left(\frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{1+x}{3}+(1-x)\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt{27}\left(\frac{2}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

так что

$$\frac{ab+ac+bc}{4S} \geqslant \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

что и требовалось доказать.

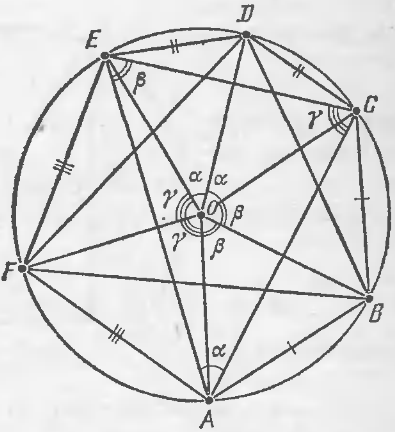


Рис. 86

13.18. Если точка O — центр описанной около данного шестиугольника $ABCDEF$ окружности радиуса R (рис. 86) и

$$\alpha = \angle CAE,\ \beta = \angle AEC,\ \gamma = \angle ACE,$$

то из равенств сторон, указанных в условии, имеем

$$\angle AOB = \angle BOC = \beta,\ \angle COD = \angle DOE = \alpha,$$
$$\angle EOF = \angle FOA = \gamma.$$

Отсюда находим площадь

$$S_{ACE} = \frac{EC \cdot CA \cdot AE}{4R} = \frac{2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot 2R\sin\gamma}{4R} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

и аналогично

$$S_{BDF} = 2R^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Из соотношений

$$\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma = (\sin\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\sin\gamma)(\sin\beta\sin\gamma) =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \cdot \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma)) \times$$
$$\times \frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(1-\cos(\alpha+\beta)) \cdot \frac{1}{2}(1-\cos(\alpha+\gamma)) \cdot \frac{1}{2}(1-\cos(\beta+\gamma)) =$$
$$= \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} \sin^2\frac{\beta+\gamma}{2} \sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

справедливых для любых положительных значений α, β, γ, удовлетворяющих условию

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

имеем

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

откуда вытекает требуемое неравенство.

13.19. Докажем, что $AA_1 > (AB+AC)/2$. Действительно, по теореме Птолемея (теорема 69) имеем

$$AA_1 \cdot BC = AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B$$

(рис. 87) и, учитывая равенство вписанных углов BAA_1, CAA_1

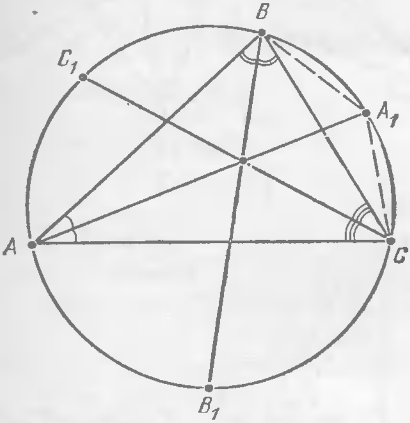


Рис. 87

получаем $A_1B = A_1C = x$ и

$$2AA_1 = 2\,\frac{AB \cdot x + AC \cdot x}{BC} = (AB+AC) \cdot \frac{2x}{BC} > AB + AC,$$

ибо

$$2x = A_1B + A_1C > BC.$$

Аналогично доказываются неравенства

$$BB_1 > (BA+BC)/2, \quad CC_1 > (CA+CB)/2,$$

складывая которые, получаем требуемое неравенство

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 > (AB+AC+AB+BC+AC+BC)/2 = AB+BC+AC$$

13.20. Обозначим

$$a = BC, \ b = AC, \ c = AB, \ S = S_{ABC}, \ S_0 = S_{DEF}.$$

Тогда по свойству биссектрисы треугольника (рис. 88) имеем

$$\frac{AF}{b} = \frac{BF}{a} = \frac{AF+BF}{b+a} = \frac{c}{a+b},$$

откуда

$$AF = \frac{bc}{a+b}.$$

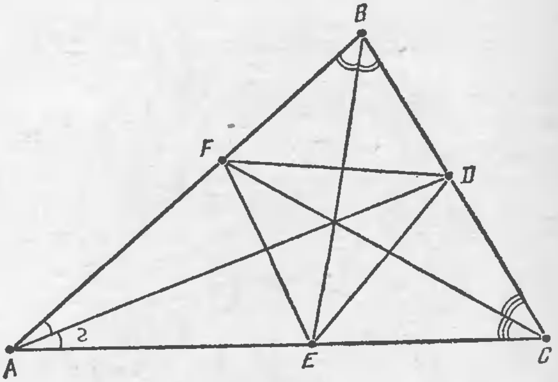


Рис. 88

Аналогичио, имеем

$$AE = \frac{bc}{a+c},$$

поэтому

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE \sin \angle BAC =$$
$$= \frac{bc \sin \angle BAC}{2} \cdot \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)} S.$$

Точио так же находим

$$S_{BDF} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} S, \quad S_{CDE} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)} S$$

и, используя теорему о средних, получаем

$$S - S_0 = S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE} =$$
$$= \left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+a)(b+c)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right) S =$$
$$= \frac{c^2b + b^2c + a^2c + c^2a + b^2a + a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)} S \geqslant \frac{6abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} S =$$
$$= 3\left(1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(c+b)} - \frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right) S =$$
$$= 3(S - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}) = 3S_0.$$

Итак,

$$S - S_0 \geqslant 3S_0, \text{ т. е. } S_0 \leqslant S/4,$$

что и требовалось доказать.

13.21. Прежде всего, в треугольнике со сторонами a, b, c, противолежащими им углами α, β, γ, периметром P, площадью S и радиусом r вписанной окружности имеем соотношения

$$a=r(\operatorname{ctg}(\beta/2)+\operatorname{ctg}(\gamma/2)),\quad b=r(\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\gamma/2)),$$
$$c=r(\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2)),$$
$$\frac{P^2}{S}=\frac{2P^2}{Pr}=\frac{2(a+b+c)}{r}=4(\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2)+\operatorname{ctg}(\gamma/2)).$$

Следовательно, для решения задачи достаточно доказать, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha_1/2)+\operatorname{ctg}(\beta_1/2)+\operatorname{ctg}(\gamma_1/2)<\operatorname{ctg}(\alpha_2/2)+\operatorname{ctg}(\beta_2/2)+\operatorname{ctg}(\gamma_2/2),$$

где обозначено

$$\alpha_j=\angle BA_jC,\quad \beta_j=\angle A_jBC,\quad \gamma_j=\angle A_jCB.$$

Рассмотрим точку A_3, лежащую на одной из сторон треугольника A_1BC, скажем на пересечении прямой BA_2 со стороной A_1C (рис. 89). Тогда $\gamma_1=\gamma_3=\gamma$ и соответствующее неравенство для треугольников A_1BC и A_3BC примет вид

$$\operatorname{ctg}(\alpha_1/2)+\operatorname{ctg}(\beta_1/2)<$$
$$<\operatorname{ctg}(\alpha_3/2)+\operatorname{ctg}(\beta_3/2).$$

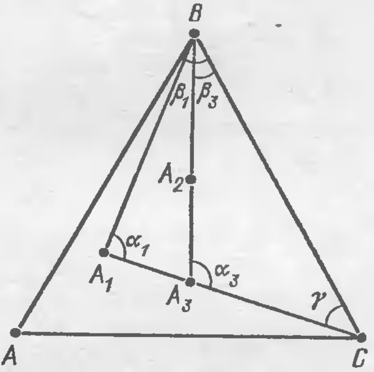


Рис. 89

Для его доказательства заметим, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha_j/2)+\operatorname{ctg}(\beta_j/2)=$$
$$=\frac{\sin(\alpha_j/2+\beta_j/2)}{\sin(\alpha_j/2)\sin(\beta_j/2)}=$$
$$=\frac{2\cos(\gamma/2)}{\cos(\alpha_j/2-\beta_j/2)-\sin(\gamma/2)},$$

поэтому из неравенства
$$\cos((\alpha_1-\beta_1)/2)>\cos((\alpha_3-\beta_3)/2)$$

(вытекающего из оценок $\alpha_3>\alpha_1>\pi/3>\beta_1>\beta_3$, $0<(\alpha_1-\beta_1)/2<$ $<(\alpha_3-\beta_3)/2<\pi/2$) получаем

$$S_1/P_1^2>S_3/P_3^2,$$

где S_j и P_j — площадь и периметр треугольника A_jBC. Применяя доказанный факт еще раз к паре треугольников A_3BC и A_2BC (заметим, что точка A_2 лежит на стороне A_3B треугольника A_3BC), получаем неравенство

$$S_3/P_3^2>S_2/P_2^2,$$

а с ним и требуемое в задаче неравенство.

13.22. Выделим в данном круге с центром O концентрический с ним круг диаметра 2. Тогда, если внутри круга лежат некоторые две из данных точек, то расстояние между ними меньше 2, и утверждение задачи справедливо. В противном случае в оставшемся кольце данного круга расположены по меньшей мере 9 точек. Разобьем это кольцо лучами, выходящими из точки O, на 8 равных кольцевых секторов (углы между соседними лучами равны 45°; рис. 90). Тогда хотя бы две данные точки A и B находятся в одном кольцевом секторе $CDEF$. На радиусах OC и OD возьмем точки A_1 и B_1 соответственно, для которых $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, а значит, $AB \leqslant A_1B_1$ (по теореме косинусов, так как $\angle AOB \leqslant \angle A_1OB_1$). Заметим, что

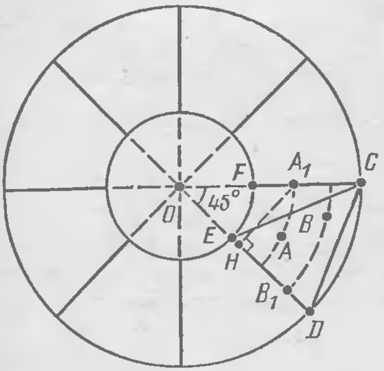


Рис. 90

$$A_1B_1 \leqslant \max\{A_1D;\ A_1E\}.$$

Действительно, точка B_1 лежит на прямой DE между проекцией H (на эту прямую) точки A_1 и хотя бы одной из точек D, E, например точкой D. Поэтому проекция HD наклонной A_1D не меньше проекции HB_1 наклонной A_1B_1, т. е.

$$A_1B_1 \leqslant A_1D.$$

По той же причине имеем

$$DA_1 \leqslant \max\{DF;\ DC\},\ EA_1 \leqslant \max\{EF;\ EC\}.$$

Из оценок

$$EF^2 < CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cos 45° =$$
$$= 2 \cdot \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{2}}{4} < \frac{25}{2} - \frac{25 \cdot 1,4}{4} = 3,75 < 4,$$
$$EC^2 = FD^2 = OF^2 + OD^2 - 2OF \cdot OD \cos 45° =$$
$$= 1 + \frac{25}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{2} < 7,25 - \frac{5 \cdot 1,4}{2} = 3,75 < 4$$

получаем

$$AB \leqslant A_1B_1 \leqslant \max\{DF;\ DC;\ EF;\ EC\} < 2.$$

Утверждение доказано.

13.23. Обозначим

$$\overrightarrow{OA_i} = \boldsymbol{a}_i,\quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}\quad (i = 1,\ \ldots,\ n),$$

тогда имеем

$$|\boldsymbol{a}_i| = 1,\quad \overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{b}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} BA_i=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b|=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b|\cdot|a_i|\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i-b)\,a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^2-b\sum_{i=1}^{n}a_i=n-b\cdot 0=n,$$

что и требовалось доказать.

13.24. Заметим, что если точки A, B, C, D, E лежат на одной прямой, то неравенство выполнено. Действительно, пусть для определенности точка E лежит между точками C и D, тогда имеем

$$(AC+AD)+$$
$$+(BC+BD+AE+BE)\geqslant$$
$$\geqslant CD+CD+AB=$$
$$=(CE+ED)+CD+AB.$$

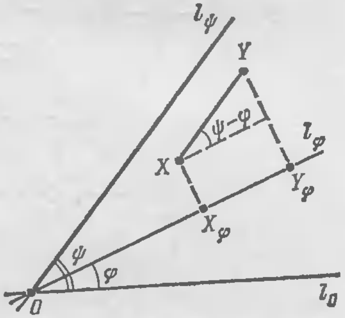


Рис. 91

Фиксируем некоторую прямую l_0 на плоскости и точку O на ней. Обозначим через l_φ образ прямой l_0 при повороте на угол φ против часовой стрелки вокруг точки O, а через X_φ — проекцию произвольной точки X на прямую l_φ. Тогда для любого отрезка XY, параллельного некоторой прямой l_ψ, имеет место равенство

$$X_\varphi Y_\varphi=XY\cdot|\cos(\psi-\varphi)|$$

(рис. 91), из которого получаем

$$\int_0^\pi X_\varphi Y_\varphi d\varphi=XY\int_0^\pi|\cos(\varphi-\psi)|\,d\varphi=XY\int_{-\psi}^{\pi-\psi}|\cos\chi|\,d\chi=$$

$$=XY\int_0^\pi|\cos\chi|\,d\chi=2XY\int_0^{\pi/2}\cos\chi\,d\chi=2XY$$

(ибо интеграл π-периодической функции $|\cos\chi|$ на отрезке длины π не зависит от расположения этого отрезка на числовой оси). Следовательно, интегрируя по φ в пределах от 0 до π обе части установленного выше неравенства для проекций A_φ, B_φ, C_φ, D_φ, E_φ данных точек на прямую l_φ

$$A_\varphi B_\varphi+C_\varphi D_\varphi+D_\varphi E_\varphi+E_\varphi C_\varphi\leqslant A_\varphi C_\varphi+A_\varphi D_\varphi+A_\varphi E_\varphi+B_\varphi C_\varphi+$$
$$+B_\varphi D_\varphi+B_\varphi E_\varphi,$$

получаем неравенство

$$2AB+2CD+2DE+2EC\leqslant 2AC+2AD+2AE+2BC+2BD+2BE,$$

равносильное требуемому.

§ 14. Геометрические задачи на экстремум

14.1. Пусть AD — большее основание, а BH — высота данной трапеции $ABCD$ (рис. 92). Тогда

$$AD=13$$

(в противном случае $AB=CD=13$, $AD+BC=28-2\cdot 13=2$ и $S_{ABCD}=$ $=BH\cdot(AD+BC)/2\leqslant 13\cdot(2/2)=13<27$),

$$AB=x,$$

$$BC=28-13-2x=15-2x,\quad AH=\frac{13-(15-2x)}{2}=x-1;$$

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{2x-1}.$$

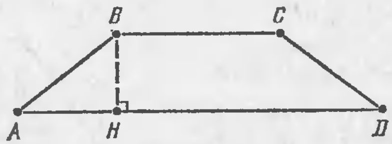


Рис. 92

Применяя теорему о средних, получаем

$$S_{ABCD}=\sqrt{2x-1}\cdot(28-2x)/2=\sqrt{(2x-1)(14-x)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{(2x-1)+(14-x)+(14-x)}{3}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{27}{3}\right)^3}=27,$$

причем равенство $S_{ABCD}=27$ возможно лишь в случае

$$2x-1=14-x,\quad \text{т. е.}\quad x=5,$$

и $AB=BC=CD=5$, а равенство

$$S_{ABCD}=27{,}001$$

невозможно.

14.2. Пусть a, b, c — стороны треугольника с заданным полупериметром p, S — его площадь, а r — радиус вписанной окружности. Тогда по теореме о средних имеем

$$(rp)^2=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant$$
$$\leqslant p\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^4}{27},$$

откуда $r\leqslant p/\sqrt{27}$, причем наибольшее значение величина r принимает в случае $p-a=p-b=p-c$, т. е. когда треугольник правильный.

14.3. Пусть через точку A, находящуюся на расстоянии k от центра O окружности, проведены перпендикулярные хорды KL и MN. Опустим перпендикуляры OB и OC на хорды KL и MN соответст-

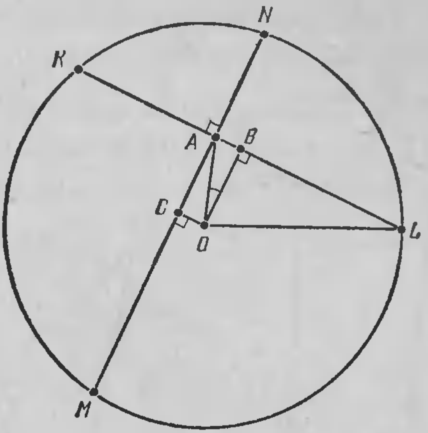


Рис. 93

венно и обозначим $\angle AOB=\alpha$ (рис. 93). Тогда

$$KL=2BL=2\sqrt{1-k^2\cos^2\alpha},$$
$$MN=2MC=2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$$

и

$$(KL+MN)^2=8-4k^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+$$
$$+8\sqrt{1-k^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+k^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=$$
$$=8-4k^2+4\sqrt{4-4k^2+k^4\sin^2 2\alpha}.$$

Последнее выражение максимально при $\sin 2\alpha=1$, т. е. при $\alpha=45°$, и минимально при $\sin 2\alpha=0$, т. е. при $\alpha=0°$ или $\alpha=90°$. Поэтому наибольшее значение величины $KL+MN$ равно

$$\sqrt{8-4k^2+4(2-k^2)}=2\sqrt{4-2k^2},$$

а наименьшее — равно

$$\sqrt{8-4k^2+8\sqrt{1-k^2}}=2\left(1+\sqrt{1-k^2}\right).$$

14.4. Пусть K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ (рис. 94). Тогда имеем

$$\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

и аналогично

$$\overrightarrow{NL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}).$$

Поэтому

$$KM=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|\leqslant\frac{1}{2}(AD+BC),$$
$$NL=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|\leqslant\frac{1}{2}(AB+DC),$$

и справедливо неравенство

$$KM+LN\leqslant\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA),$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны и векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ также коллинеарны, т. е. когда $ABCD$ — параллелограмм.

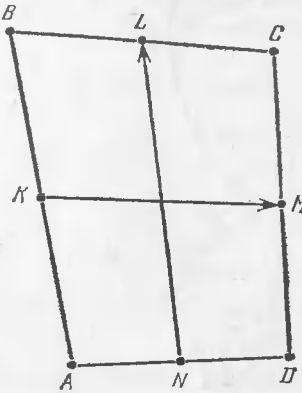


Рис. 94

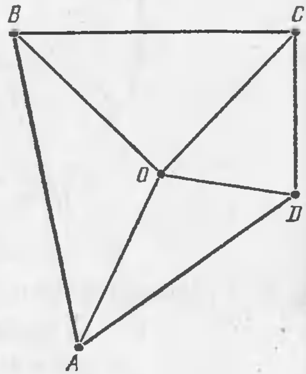


Рис. 95

14.5. Поскольку имеют место соотношения (рис. 95)

$$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=$$
$$=\frac{1}{2}(OA^2+OB^2)+\frac{1}{2}(OB^2+OC^2)+\frac{1}{2}(OC^2+OD^2)+\frac{1}{2}(OD^2+OA^2)\geqslant$$
$$\geqslant OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD+OD\cdot OA\geqslant$$
$$\geqslant 2S_{AOB}+2S_{BOC}+2S_{COD}+2S_{DOA}=2S,$$

причем равенства достигаются только при

$$OA=OB=OC=OD \quad\text{и}\quad \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA,$$

то диагонали AC и BD данного четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и делятся в точке O их пересечения пополам, т. е. $ABCD$ — квадрат с центром O.

14.6. Положим

$$a_1=A_2A_3,\quad a_2=A_1A_3,\quad a_3=A_1A_2,$$
$$h_1=A_1H_1,\quad h_2=A_2H_2,\quad h_3=A_3H_3,$$

тогда справедливы равенства

$$a_3h_1+a_1h_2+a_2h_3=$$
$$=a_1h_1\frac{a_3}{a_1}+a_2h_2\frac{a_1}{a_2}+a_3h_3\frac{a_2}{a_3}=2S\left(\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\right).$$

По теореме о средних имеем оценку $\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\geqslant 3$, в которой равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}, \text{ т. е. } a_1=a_2=a_3.$$

Поэтому условие

$$a_3h_1+a_1h_2+a_2h_3=6S$$

равносильно условию $a_1=a_2=a_3$, что и требовалось доказать.

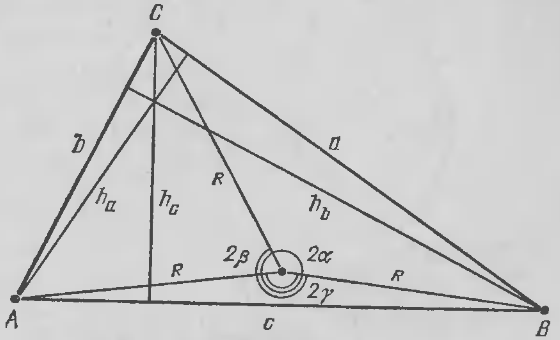


Рис. 96

14.7. Пусть h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, удовлетворяющего указанному в условии задачи равенству, а S — его площадь, тогда (рис. 96)

$$a\sin\beta=h_c, \quad b\sin\gamma=h_a, \quad c\sin\alpha=h_b,$$

и исходное равенство равносильно условию

$$P(h_a+h_b+h_c)=9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma).$$

С одной стороны, согласно теореме 75, имеем

$$9R(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)=$$
$$=9R(2R\sin\alpha\cos\alpha+2R\sin\beta\cos\beta+2R\sin\gamma\cos\gamma)=$$
$$=9R^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)=18S.$$

С другой стороны, пользуясь теоремой о средних, получаем

$$P(h_a+h_b+h_c)=(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)\geqslant$$
$$\geqslant 9\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{h_ah_bh_c}=9\sqrt[3]{ah_abh_bch_c}=9\sqrt[3]{(2S)^3}=18S.$$

При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$a=b=c, \quad h_a=h_b=h_c,$$

т. е. когда треугольник равносторонний.

14.8. Пусть правильный n-угольник $B_1\ldots B_n$ площади S_B вписан в правильный n-угольник $A_1\ldots A_n$ площади S_A. Тогда, если они не совпадают, то на каждой стороне A_iA_{i+1} при $i=1, \ldots, n$ ($A_{n+1}=A_1$) лежит ровно одна вершина, для определенности B_i. Действительно, в противном случае по принципу Дирихле (теорема 1) хотя бы на одной стороне, скажем A_1A_2, лежат две точки B_1 и B_2 (для определенности $A_1B_2 > A_1B_1$), тогда вершина B_3 (лежащая в треугольнике $A_1A_2A_3$, подобном треугольнику $B_1B_2B_3$) и вершина B_n (в треугольнике $A_2A_1A_n$) могут лежать только на сторонах A_2A_3 и A_1A_n

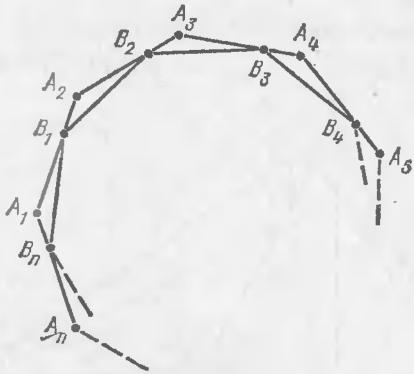


Рис. 97

соответственно (ввиду $n > 3$ отрезки A_1A_3 и A_2A_n являются диагоналями, а не сторонами n-угольника $A_1\ldots A_n$), а значит, $B_1 = A_1$ и $B_2 = A_2$. Докажем, что

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_nB_n.$$

В самом деле, треугольники $B_1A_2B_2$ и $B_2A_3B_3$ равны (рис. 97), поскольку

$$\angle B_1A_2B_2 = \angle B_2A_3B_3 = \angle B_1B_2B_3 = 180°\cdot(n-2)/n,$$

$$\angle A_2B_1B_2 = 180° - \angle B_1A_2B_2 - \angle A_2B_2B_1 =$$
$$= 180° - \angle B_1B_2B_3 - \angle A_2B_2B_1 = \angle A_3B_2B_3, \qquad B_1B_2 = B_2B_3.$$

Поэтому $A_2B_2 = A_3B_3$; аналогично доказываются остальные равенства. Величина

$$S_B = S_A - S_{B_1A_2B_2} - S_{B_2A_3B_3} - \ldots - S_{B_nA_1B_1} = S_A - nS_{B_1A_2B_2}$$

принимает наименьшее значение, когда площадь треугольника $B_1A_2B_2$ максимальна. Пусть

$$A_1A_2 = a, \qquad A_1B_1 = x,$$

тогда величина

$$S_{B_1A_2B_2} = \frac{1}{2} B_1A_2 \cdot A_2B_2 \sin \angle B_1A_2B_2 =$$
$$= \frac{1}{2}(a-x)\,x \sin \angle B_1A_2B_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right) \sin \angle B_1A_2B_2$$

принимает наибольшее значение при $x = a/2$, т. е. когда $A_1B_1 = B_1A_2$. Утверждение доказано.

14.9. Докажем, что наибольшее значение α равно $180°/n$. Действительно, пусть некоторому расположению точек на плоскости соответствует значение α. Рассмотрим такую прямую, скажем $A_1'A_2'$, относительно которой все точки расположены в одной полуплоскости, и выберем точку A_3', для которой угол $\angle A_1'A_2'A_3'$ максимален (рис. 98). Тогда все остальные точки лежат внутри этого угла и

$$\angle A_1'A_2'A_3' \geqslant \alpha (n-2),$$

так как каждый из $n-2$ углов между соседними лучами $A_2'A_i$ $(A_i \neq A_2')$ не меньше α. Далее, выберем точку A_4', для которой угол $\angle A_2'A_3'A_4'$ максимален. Тогда все точки

$$A_i \notin \{A_2';\ A_3';\ A_4'\}$$

лежат внутри этого угла и

$$\angle A_2'A_3'A_4' \geqslant \alpha (n-2).$$

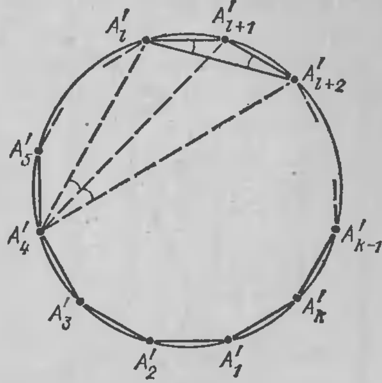


Рис. 98

Если $A_4' \neq A_1'$ и $A_4' \neq A_2'$, то выберем аналогично точку A_5' и т. д. Так как число точек равно n, то одна из точек в последовательности A_1', A_2', A_3', ... обязательно первый раз повторится. Пусть это произошло после выбора точки A_k', т. е. угол $\angle A_{k-1}'A_k'A_j$ максимален для некоторой точки

$$A_j = A_i' \in \{A_1';\ \ldots;\ A_{k-2}'\}.$$

Тогда, если $i \neq 1$, то точка A_1' лежит внутри угла $\angle A_{k-1}'A_k'A_i'$, а значит, и внутри выпуклого многоугольника $A_i'A_{i+1}'\ldots A_{k-1}'A_k'$, что противоречит ее выбору. Поэтому $i=1$ и выпуклый k-угольник $A_1'A_2'\ldots A_k'$ имеет сумму углов

$$180^\circ (k-2) \geqslant k\cdot\alpha (n-2),$$

откуда

$$\alpha \leqslant \frac{180^\circ (k-2)}{(n-2)\,k} = \frac{180^\circ}{n-2}\left(1-\frac{2}{k}\right) \leqslant \frac{180^\circ}{n-2}\left(1-\frac{2}{n}\right) = \frac{180^\circ}{n}.$$

При этом равенство $\alpha = 180^\circ/n$ возможно лишь в случае, если $k=n$,

$$\angle A_1'A_2'A_3' = \angle A_2'A_3'A_4' = \ldots = \angle A_k'A_1'A_2' = \alpha (n-2),$$

и все диагонали, исходящие из любого угла n-угольника $A_1'\ldots A_n'$, делят его на равные углы α. Такой n-угольник может быть только правильным, поскольку для любого значения $l=1, \ldots, n$ имеем

$$\angle A_l'A_{l+2}'A_{l+1}' = \angle A_{l+2}'A_l'A_{l+1}', \quad \text{т. е.} \quad A_l'A_{l+1}' = A_{l+1}'A_{l+2}'$$

(считаем $A_{n+1}' = A_1'$, $A_{n+2}' = A_2'$) (рис. 98), следовательно, n-угольник должен иметь не только равные углы, но и равные стороны. Наконец, вершины правильного n-угольника действительно удовлетворяют условию $\alpha=180^\circ/n$. Это становится ясным, если описать около n-угольника окружность и заметить, что все углы между соседними диагоналями, исходящими из любой вершины, опираются на дуги $360^\circ/n$, а значит, равны $180^\circ/n$.

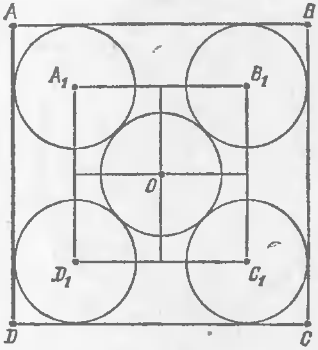


Рис. 99

14.10. Пусть $ABCD$ — квадрат с центром O и стороной a, содержащий 5 непересекающихся кругов радиуса 1. Тогда центры кругов лежат во внутреннем квадрате $A_1B_1C_1D_1$ с центром O и стороной $a-2$ (где $A_1B_1 \parallel AB$; рис. 99). Прямые, соединяющие середины противоположных сторон квадрата $A_1B_1C_1D_1$, разбивают его на четыре маленьких квадрата, в одном из которых (по принципу Дирихле (теорема 1)) расположено по крайней мере два из центров кругов. Тогда расстояние между ними, с одной стороны, не превосходит диагонали маленького квадрата, а с другой стороны, не меньше 2. Поэтому имеем

$$2 \leqslant OA_1 = \frac{A_1B_1}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{a-2}{2}\sqrt{2},$$

откуда

$$a \geqslant 2\sqrt{2}+2.$$

Наконец, если $a=2\sqrt{2}+2$ и центры кругов лежат в точках O, A_1, B_1, C_1, D_1, то все требуемые условия выполнены. Таким образом, искомый квадрат имеет сторону $2\sqrt{2}+2$.

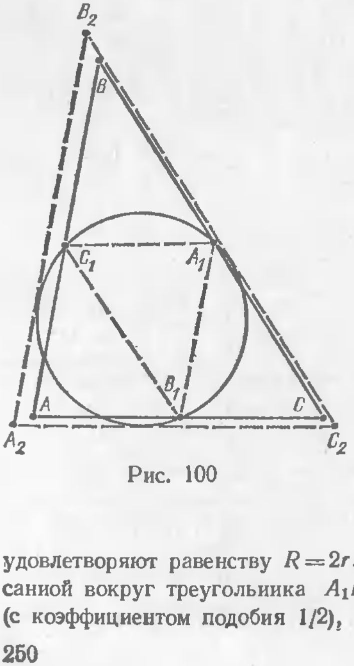


Рис. 100

14.11. Пусть точки A_1, B_1, C_1 являются соответственно серединами сторон BC, AC, AB данного треугольника ABC, для которого радиусы R и r описанной и вписанной окружностей соответственно удовлетворяют равенству $R=2r$. Тогда радиус ρ окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$, подобного треугольнику ABC (с коэффициентом подобия 1/2), вдвое меньше радиуса R. Если эта окружность не касается некоторых сторон треугольника ABC, то проведем касательные, параллельные этим сторонам, к соответствующим дугам этой окружности, выходящим за пределы треугольника (рис. 100). Тогда окружность радиуса ρ вписана в получившийся треугольник $A_2B_2C_2$, подобный треугольнику ABC и имеющий большую площадь. Следовательно, имеем $r < \rho = R/2$, что противоречит условию задачи. Таким образом, указанная окружность касается сторон AB, BC, AC, откуда по свойству касательных получаем $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, поэтому $AC = AB = BC$, т. е. треугольник ABC равносторонний.

14.12. Докажем, что если через точку O проведены отрезки B_1C_1 и B_2C_2, концы B_1 и B_2 которых лежат на стороне AB данного угла

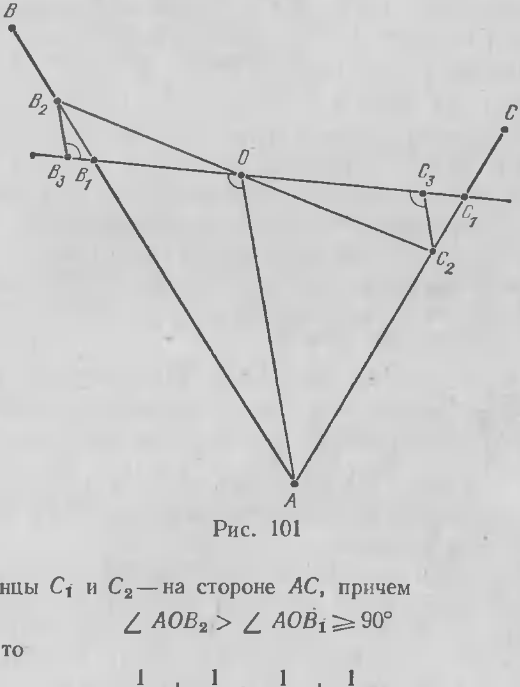


Рис. 101

BAC, а концы C_1 и C_2 — на стороне AC, причем

$$\angle AOB_2 > \angle AOB_1 \geqslant 90^\circ$$

(рис. 101), то

$$\frac{1}{B_1O} + \frac{1}{C_1O} > \frac{1}{B_2O} + \frac{1}{C_2O}.$$

Обозначим через B_3 и C_3 точки пересечения прямой B_1C_1 с прямыми, проходящими через точки B_2 и C_2 соответственно параллельно прямой AO. Так как

$$\angle B_2B_3O = \angle AOB_3 \geqslant 90^\circ,$$

то $OB_2 > OB_3$ и

$$\frac{1}{B_1O} - \frac{1}{B_2O} = \frac{B_2O - B_1O}{B_1O \cdot B_2O} > \frac{B_3O - B_1O}{B_1O \cdot B_2O} = \frac{B_1B_3}{B_1O \cdot B_2O} = \frac{B_2B_3}{AO \cdot B_2O}$$

(ибо $\triangle B_1B_3B_2 \sim \triangle B_1OA$). Аналогично получаем

$$\frac{1}{C_1O}-\frac{1}{C_2O} > -\frac{C_2C_3}{AO\cdot C_2O}.$$

Складывая полученные в итоге неравенства и учитывая подобие треугольников B_2B_3O и C_2C_3O, имеем

$$\frac{1}{B_1O}+\frac{1}{C_1O}-\left(\frac{1}{B_2O}+\frac{1}{C_2O}\right) > \frac{B_2B_3}{AO\cdot B_2O}-\frac{C_2C_3}{AO\cdot C_2O}=$$
$$=\frac{1}{AO}\left(\frac{B_2B_3}{B_2O}-\frac{C_2C_3}{C_2O}\right)=0.$$

Если прямая, проходящая через точку O перпендикулярно прямой AO, пересекает лучи AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно, то отрезок B_1C_1 искомый. Действительно, для любого другого отрезка B_2C_2, проходящего через точку O, имеет место одно из неравенств

$$\angle AOB_2 > 90^\circ \quad \text{или} \quad \angle AOC_2 > 90^\circ$$

(для определенности можно считать, что точки B_2 и C_2 лежат на лучах AB и AC соответственно и выполнено, например, первое из неравенств). Тогда справедливо доказанное выше неравенство. Если же прямая, проходящая через точку O перпендикулярно прямой AO, не пересекает одну из сторон угла BAC, скажем сторону AC, то искомый отрезок построить нельзя. Допустим, что искомым является некоторый отрезок B_2C_2, концы B_2 и C_2 которого лежат на лучах AB и AC соответственно. Тогда

$$\angle AOB_2 > 90^\circ,$$

а значит, если выбрать точку C_1 на продолжении отрезка AC_2 за точку C_2 и провести еще один отрезок C_1B_1 через точку O, то снова

$$90^\circ < \angle AOB_1 < \angle AOB_2$$

и в силу доказанного выше неравенства отрезок B_2C_2 не удовлетворяет требуемому условию.

14.13. а) Пусть треугольник ABC нетупоугольный. Тогда искомая точка T есть центр O описанной около треугольника окружности радиуса R. Действительно, перпендикуляры OH_1, OH_2, OH_3, опущенные из точки O на стороны AB, BC, AC соответственно, разбивают треугольник ABC на три четырехугольника

$$OH_1AH_3,\ OH_1BH_2,\ OH_2CH_3 \quad \text{(рис. 102)}.$$

Если точка $T \neq O$ лежит, например, в первом из четырехугольников, то

$$m(T) \leqslant AT < AO = R = m(O),$$

ибо точка T лежит в круге с диаметром AO (содержащем весь четырехугольник OH_1AH_3: вследствие равенств

$$\angle OH_1A = \angle OH_3A = 90^\circ$$

этот четырехугольник вписан в окружность с диаметром AO). Пусть теперь в треугольнике ABC угол при вершине A тупой и $\angle C \leqslant \angle B$. Через середины D, E сторон AB, AC проведем перпендикуляры к этим сторонам до пересечения их в точках F, G соответственно со

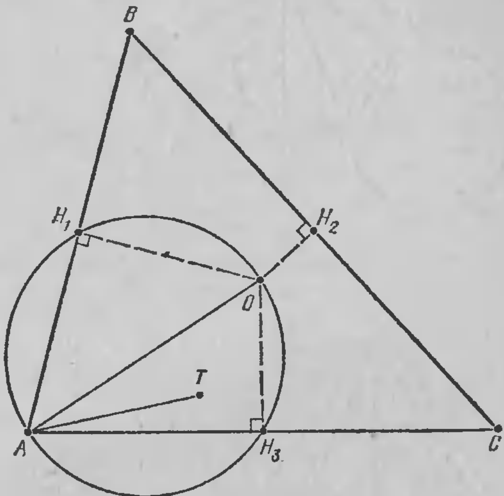


Рис. 102

стороной BC и обозначим $BF = b$, $CG = c$. Заметим, что $b \leqslant c$, причем равенство $b = c$ имеет место лишь в случае $\angle C = \angle B$. В самом деле, из треугольников BDF, CEG и ABC (по теореме синусов) имеем

$$\frac{b}{c} = \frac{BD}{\cos \angle B} \cdot \frac{\cos \angle C}{CE} = \frac{AB}{AC} \frac{\cos \angle C}{\cos \angle B} = \frac{\sin \angle C \cos \angle C}{\sin \angle B \cos \angle B} =$$
$$= \frac{\sin (2 \angle C)}{\sin (2 \angle B)} \leqslant 1,$$

так как $0 < 2\angle C \leqslant 2\angle B < 180° - 2\angle C$. Заметим далее, что $BG > c$ (а тем более $FC > b$), поскольку

$$\angle B + \angle C < 90° < \angle BAC,$$

а значит,

$$\angle B < \angle BAC - \angle C = \angle BAG \quad \text{и} \quad BG > AG = GC = c.$$

Наконец, высота AH треугольника ABC разбивает его на два треугольника ABH и ACH. Если точка $T \neq F$ лежит в треугольнике ABH, то

$$m(T) < m(F) = b,$$

ибо она лежит либо в круге с диаметром BF, либо в круге с диаметром AF (рис. 103 и рис. 104, на которых изображены случаи

$\angle B < 45°$ и $\angle B > 45°$ соответственно). Аналогично, если точка $T \neq G$ лежит в треугольнике ACH, то $m(T) < m(G) = c$. Таким

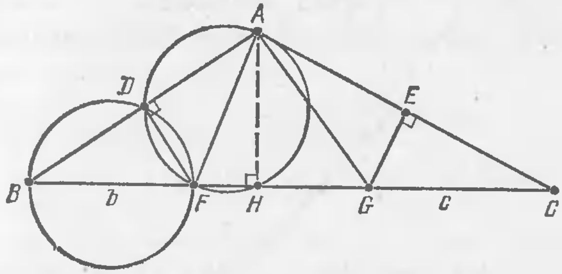


Рис. 103

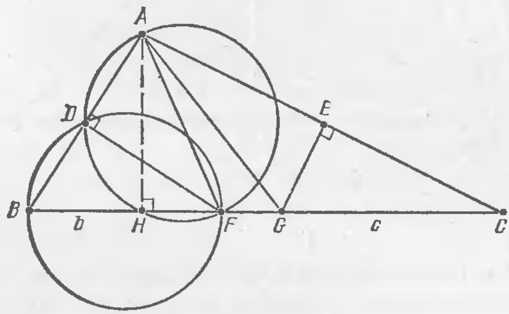


Рис. 104

образом, если треугольник ABC равнобедренный, то искомыми являются обе точки F и G, а если он неравнобедренный, то

$$m(F) < m(G)$$

и искомая точка совпадает с точкой G.

б) Для любой точки T треугольника ABC имеем

$$M(T) \geqslant TB, \quad M(T) \geqslant TC,$$

откуда

$$2M(T) \geqslant TB + TC \geqslant BC, \quad \text{т. е.} \quad BC/2 \leqslant M(T).$$

Наконец, согласно утверждению, доказанному в п. а), величина $m(T)$ в случае $\angle A \geqslant 90°$ достигает наибольшего значения в некоторой точке G отрезка BC. Поэтому для любой точки T треугольника ABC имеем

$$m(T) \leqslant m(G) \leqslant \min\{GB;\ GC\} \leqslant BC/2.$$

Глава 4

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 15. Тетраэдры

15.1. Пусть AB — наибольшее ребро тетраэдра $ABCD$. Тогда имеем (рис. 105)

$$(AC+AD-AB)+(BC+BD-BA)=$$
$$=(AC+CB-AB)+(AD+DB-AB)>0,$$

поэтому справедливо хотя бы одно из неравенств $AC+AD>AB$ или $BC+BD>BA$, гарантирующих, что из ребер AC, AD, AB или соответственно из ребер BC, BD, BA можно составить треугольник (остальные неравенства треугольника вытекают из выбора ребра AB).

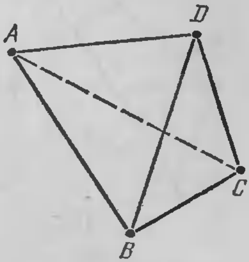


Рис. 105

15.2. Для данного в задаче тетраэдра $ABCD$ по теореме косинусов имеем (см. рис. 105)

$$2AB\cdot AC\cos\angle BAC=AB^2+AC^2-BC^2=$$
$$=AB^2+AD^2-BD^2=2AB\cdot AD\cos\angle BAD,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{sign}\cos\angle BAC=\operatorname{sign}\cos\angle BAD,$$

т. е. углы BAC и BAD либо одновременно острые, либо одновременно неострые. То же самое можно утверждать (доказательство аналогично) и про любые плоские углы этого тетраэдра, имеющие общую вершину. Если все плоские углы тетраэдра $ABCD$ острые, то любая его грань является остроугольным треугольником. Если же хотя бы один из плоских углов, скажем при вершине A, не является острым, то все три плоских угла при этой вершине неострые, а значит, все остальные плоские углы тетраэдра острые (ибо любая грань имеет по меньшей мере два острых угла). В этом случае треугольник BCD остроугольный.

15.3. Пусть через концы отрезка AB длины d проведены прямые, перпендикулярные друг другу и отрезку AB. На этих прямых расположены по одному отрезку длины a с серединами A и B соответственно. Концы этих отрезков являются вершинами тетраэдра, у которого каждая грань имеет площадь

$$(1/2)\,a\sqrt{(a/2)^2+d^2}=(1/4)\,a\sqrt{a^2+4d^2},$$

а объем равен $a^2d/6$. Поэтому два тетраэдра, соответствующие значениям $a_1=3$, $d_1=2$ и соответственно $a_2=1$, $d_2=\sqrt{56}$, имеют одинаковые площади граней $\left(\text{ибо } a_1\sqrt{a_1^2+4d_1^2}=15=a_2\sqrt{a_2^2+4d_2^2}\right)$, но разные объемы $\left(\text{ибо } a_1^2d_1=18\neq\sqrt{56}=a_2^2d_2\right)$. Итак, ответ на вопрос задачи отрицателен.

15.4. Предположим, что указанный в условии задачи тетраэдр $ABCD$ существует, и докажем, что ребро AB является наибольшим, а ребро CD — наименьшим. Из условия задачи следует, что каждый из углов ACB, ADB, а также один из углов ACD или ADC, скажем угол ACD, прямой (рис. 106). Положим $\angle BAC = \varphi$. Тогда $\angle ABD = \varphi$, поскольку в противном случае $\angle BAD = \varphi$ и $AC = AD$, что невозможно (ибо AD — гипотенуза треугольника ACD). Аналогично, $\angle CDA = \varphi$ (иначе $\angle CAD = \varphi$ и $AB = AD$, что невозможно). Поэтому имеем равенства

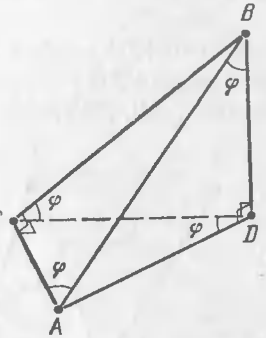


Рис. 106

$$BD = AC = AB \cos\varphi,$$
$$BC = AD = AB \sin\varphi,$$
$$CD = AD \cos\varphi = AB \sin\varphi \cos\varphi,$$
$$AC = AD \sin\varphi = AB \sin^2\varphi,$$

откуда, в частности, получаем, что

$$\cos\varphi = \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi,$$

т. е.

$$\varphi = \arccos\left((\sqrt{5} - 1)/2\right).$$

Таким образом, наибольшее ребро AB имеет длину 1, а наименьшее ребро CD — длину $\sin\varphi\cos\varphi = \sqrt{\cos\varphi}\cos\varphi = \left((\sqrt{5}-1)/2\right)^{3/2}$. Для доказательства существования такого тетраэдра достаточно заметить, что если рассмотреть тетраэдр $ABCD$ с ребрами

$$CA = (\sqrt{5}-1)/2,\ CB = \left((\sqrt{5}-1)/2\right)^{1/2},\ CD = \left((\sqrt{5}-1)/2\right)^{3/2}$$

и плоскими углами

$$\angle BCA = \angle DCA = 90^\circ,\ \angle BCD = \arccos\left((\sqrt{5}-1)/2\right),$$

то

$$AB = 1, \quad AD = CB, \quad BD = AC, \quad \angle CAB = \angle BCD,$$

откуда вытекают равенства

$$\triangle ABD = \triangle BAC,\ \triangle CBD = \triangle DAC$$

и подобие всех граней тетраэдра.

15.5. Поскольку любая из проведенных плоскостей содержит один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, то все плоскости проходят через точку пересечения этих отрезков, лежащую внутри тетраэдра (см. теорему 92). Поэтому шесть проведенных плоскостей разбивают все пространство на многогранные углы с общей вершиной, а значит, любая из частей тетраэдра имеет хотя бы одну грань, принадлежащую грани тетраэдра. С другой стороны, никакие две грани тетраэдра не могут служить границей одной и той же части, так как любые две его грани отделены друг от друга плоскостью, проходящей через их общее ребро. Таким образом, число частей тетраэдра равно числу частей, на которые разделена его поверхность, а так как каждая грань тетраэдра разделена на 6 частей (в ней проведены медианы), то всего частей имеется $6\cdot4=24$. Из соображений симметрии (относительно любой из шести плоскостей) следует, что все части тетраэдра равны между собой, а объем каждой из них равен $1/24$.

15.6. При любом расположении точки D в плоскости треугольника $A'B'C'$ хотя бы одна сторона этого треугольника пересекается с прямой, проходящей через противоположную ей вершину и точку D. Пусть для определенности O — точка пересечения стороны $A'B'$ с прямой $C'D$, а прямая, проходящая через точку O параллельно прямой DD', пересекает плоскость ABC в точке O' (рис. 107). Тогда из параллельности прямых AA', BB', CC', DD', OO' вытекает, что отрезок AB пересекает в точке O' прямую CD'. Обозначим через φ угол между прямой OO' и плоскостью ABC. Тогда имеем

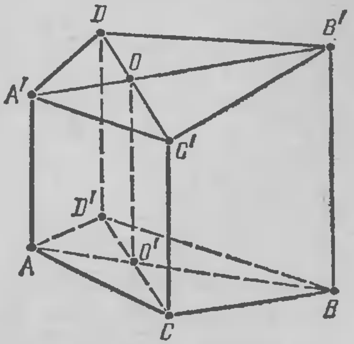


Рис. 107

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot DD'\cdot\sin\varphi=\frac{DD'}{OO'}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot OO'\cdot\sin\varphi=\frac{DD'}{OO'}V_{ABCO}$$

и аналогично

$$V_{A'B'C'D'}=\frac{DD'}{OO'}V_{A'B'C'O'}.$$

Далее, пусть a — расстояние между прямыми AA' и BB', тогда

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}AB\cdot OO'\cdot\sin\angle OO'B=\frac{1}{2}a\cdot OO'$$

и аналогично

$$S_{A'B'O'}=\frac{1}{2}a\cdot OO'.$$

Обозначив через b расстояние между плоскостью ABB' и прямой CC', получаем

$$V_{ABCO}=\frac{1}{3}S_{ABO}\cdot b=\frac{1}{3}S_{A'B'O'}\cdot b=V_{A'B'C'O'},$$

откуда

$$V_{ABCD}=\frac{DD'}{OO'}V_{ABCO}=\frac{DD'}{OO'}V_{A'B'C'O'}=V_{A'B'C'D'},$$

что и требовалось доказать.

15.7. Пусть V — объем тетраэдра $ABCD$, а k — искомое число. Тогда имеем

$$\frac{V}{V_{OBCD}}=\frac{AA_1}{OA_1}=\frac{AO}{A_1O}+\frac{OA_1}{OA_1}=k+1$$

и аналогично

$$\frac{V}{V_{OACD}}=\frac{V}{V_{OABD}}=\frac{V}{V_{OABC}}=k+1,$$

откуда

$$k+1=\frac{4V}{V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABD}+V_{OABC}}=\frac{4V}{V}=4, \text{ т. е. } k=3.$$

15.8. Докажем, что все прямые K_nL_n при $n\in\mathrm{N}$ проходят через фиксированную точку O, лежащую на прямой, проходящей через вершину A параллельно прямой BC. Действительно, если прямая K_nL_n пересекает прямую BC в точке P (лежащей на луче CB; рис. 108), то из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{PB}{OA}=\frac{BK_n}{AK_n}=n-1, \quad \frac{PC}{OA}=\frac{CL_n}{AL_n}=n,$$

откуда получаем

$$OA=nOA-(n-1)\,OA=PC-PB=BC.$$

Аналогично доказывается, что все прямые L_nM_n при $n\in\mathrm{N}$ проходят через фиксированную точку Q, лежащую на прямой, проходящей через вершину A параллельно прямой CD. Следовательно, все плоскости $K_nL_nM_n$ при $n\in\mathrm{N}$ проходят через прямую OQ.

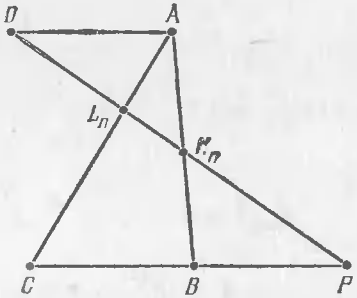


Рис. 108

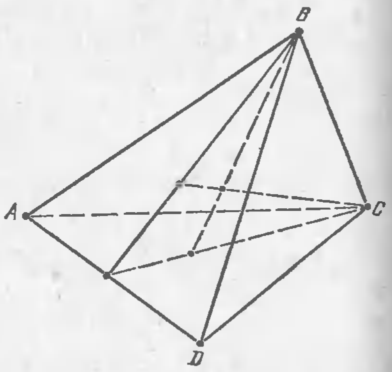


Рис. 109

15.9. Для того чтобы две прямые, соединяющие точки B и C с центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и ABD, пересекались, необходимо и достаточно, чтобы они лежали в одной плоскости. А это в свою очередь равносильно тому, что биссектрисы углов ABD и ACD пересекают ребро AD в одной точке (рис. 109). Последнее условие, согласно свойству биссектрисы треугольника, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD},$$

т. е. когда

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Таким образом, если четыре прямые, о которых говорится в условии задачи, пересекаются в одной точке, то произведения длин противоположных ребер равны. Обратно, если три указанных произведения равны, то каждые две из четырех прямых пересекаются, причем никакие три из них не лежат в одной плоскости, поэтому все прямые пересекаются в одной точке.

15.10. Обозначим через V, S и r объем, площадь поверхности тетраэдра и радиус вписанной в него сферы. Одна из частей, на которые плоскость разбивает тетраэдр, есть пирамида с основанием, лежащим в этой плоскости. Обозначим через V_1, S_1 и r_1 объем, площадь боковой поверхности этой пирамиды и радиус сферы с центром на ее основании, касающейся ее боковых граней. Основание пирамиды проходит через центр сферы, вписанной в тетраэдр, тогда и только тогда, когда $r = r_1$. Последнее равенство, согласно формулам

$$V = (1/3)\, Sr, \quad V_1 = (1/3)\, S_1 r_1,$$

равносильно равенству

$$\frac{V}{V_1} = \frac{S}{S_1}, \text{ т. е. } \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{S - S_1}{S_1},$$

что и доказывает утверждение задачи.

15.11. Пусть ребра тетраэдра $ABCD$ удовлетворяют условиям $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Полученные три пары

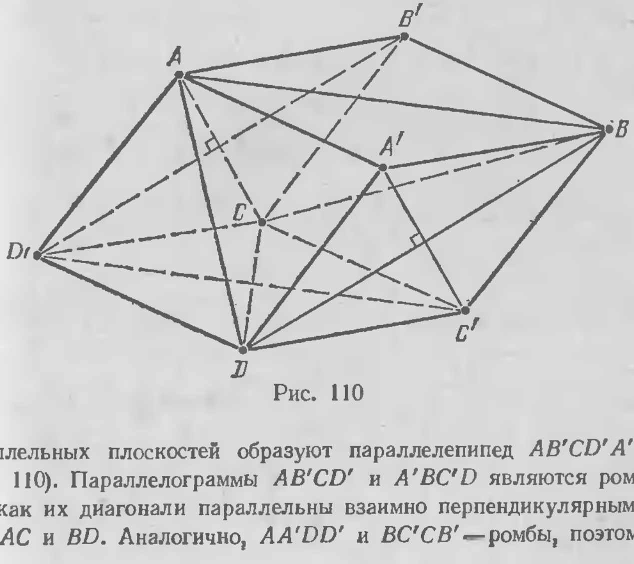


Рис. 110

параллельных плоскостей образуют параллелепипед $AB'CD'A'BC'D$ (рис. 110). Параллелограммы $AB'CD'$ и $A'BC'D$ являются ромбами, так как их диагонали параллельны взаимно перпендикулярным прямым AC и BD. Аналогично, $AA'DD'$ и $BC'CB'$ — ромбы, поэтому все ребра параллелепипеда равны между собой. Наконец, расстояние от центра O симметрии параллелепипеда до середины любого ребра тетраэдра равно половине ребра параллелепипеда (например, расстояние от точки O до середины ребра AB равно расстоянию от центра симметрии параллелограмма $ABC'D'$ до середины его стороны AB, т. е. половине ребра AD' параллелепипеда), откуда и следует утверждение задачи.

15.12. Пусть правильный тетраэдр T_1 вписан в правильный тетраэдр T_2. Тогда радиус R_1 описанной около тетраэдра T_1 сферы S не меньше радиуса r_2 сферы, вписанной в тетраэдр T_2. Действительно, проведя к сфере S касательные плоскости, параллельные граням тетраэдра T_2, можно получить тетраэдр T_3 (подобный тетраэдру T_2, а значит, тоже правильный), описанный около сферы S и содержащий тетраэдр T_2. Поэтому радиус $r_3=R_1$ вписанной в тетраэдр T_3 сферы не меньше r_2. Так как радиус r_1 вписанной в правильный тетраэдр T_1 сферы втрое меньше, чем R_1, то $3r_1=R_1\geqslant r_2$, откуда вытекает требуемое неравенство.

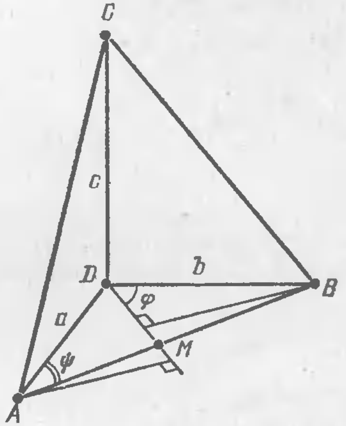


Рис. 111

15.13. Пусть для определенности точка M лежит на стороне AB треугольника ABC и $\angle MDB=\varphi$ (рис. 111). Тогда

$$S=c+a\cos\varphi+b\sin\varphi$$

и, обозначив

$$d=a\cos\varphi+b\sin\varphi,$$
$$\psi=\arccos\left(a/\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

имеем неравенство

$$d=\sqrt{a^2+b^2}\times$$
$$\times(\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi-\psi)\leqslant\sqrt{a^2+b^2},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\varphi=\psi$, т. е. когда

$$\cos\varphi=AD/AB=\cos\angle DAB \text{ или } DM\perp AB.$$

Далее, используя теорему о средних (теорема 6), получаем оценку

$$S=c+d\leqslant\sqrt{2(c^2+d^2)},$$

в которой равенство достигается тогда и только тогда, когда $c=d$. Таким образом, требуемое неравенство

$$S\leqslant\sqrt{2(c^2+a^2+b^2)}$$

доказано. Равенство достигается в том и только в том случае, если ребра AD, BD, CD могут служить тремя сторонами прямоугольного треугольника, а DM — высота, опущенная на меньшую из сторон треугольника ABC.

15.14. Пусть точка O лежит внутри тетраэдра $ABCD$. Обозначим через P точку пересечения прямой DO с плоскостью ABC, а через Q

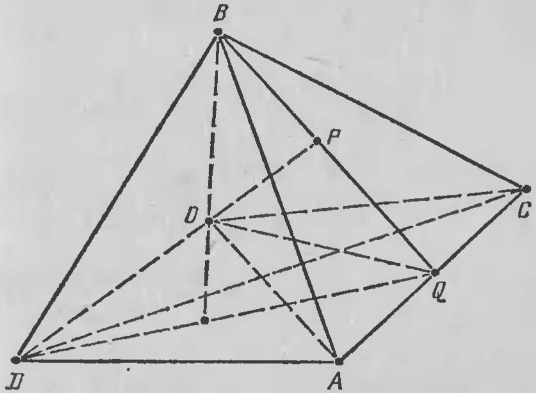


Рис. 112

точку пересечения прямой BP со стороной AC (рис. 112). Тогда по теореме 84 получаем

$$\angle AOB+\angle AOC=\angle AOB+\angle AOQ+\angle QOC>\angle BOQ+\angle QOC=$$
$$=\angle BOP+\angle POQ+\angle QOC>\angle BOP+\angle POC=$$
$$=180^\circ-\angle BOD+180^\circ-\angle COD,$$

откуда имеем

$$\angle AOB+\angle AOC+\angle BOD+\angle COD>360^\circ.$$

Аналогично получаем неравенства

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle AOD+\angle COD>360^\circ$$

и

$$\angle AOC+\angle BOC+\angle AOD+\angle BOD>360^\circ.$$

Сложив эти три неравенства и разделив обе части полученного неравенства на два, получим требуемое.

15.15. Докажем, что если расстояния от точки M до вершин тетраэдра $ABCD$ с ребром 2 являются целыми числами, то хотя бы одно из расстояний равно 0 (обратное утверждение сомнений не вызывает). Заметим, что если точка M расположена на прямой, содержащей ребро тетраэдра, скажем ребро AB с серединой H, то, обозначив $MH=x$, $MC=y$, имеем $y>x\geqslant 0$ и $x^2+(\sqrt{3})^2=y^2$, откуда

$$(y-x)(y+x)=3 \text{ и } y-x=1,\ y+x=3,$$

поэтому $x=1$, а это значит, что точка M совпадает с одной из вершин A или B. Если же точка M не лежит ни на одной из таких прямых, то кратчайшее расстояние $x > 0$ до вершин тетраэдра отличается от остальных расстояний менее чем на 2, т. е. каждое из расстояний равно либо x, либо $x+1$. Рассмотрим четыре случая.

1) Все четыре расстояния равны x. Тогда M — центр описанной около тетраэдра сферы радиуса $\sqrt{6}/2$, что невозможно, ибо $x \in \mathbb{N}$.

2) Три расстояния равны x, а одно — $x+1$. Пусть для определенности

$$MA = MB = MC = x, \quad MD = x+1,$$

а точка O — центр треугольника ABC. Тогда точка M лежит на луче DO, причем $x \geqslant AO = 2/\sqrt{3} > 1$, т. е.

$$DM = x+1 > 2 > 2\sqrt{2/3} = DO = DM - MO = x+1-\sqrt{x^2-4/3},$$

откуда

$$x+1 = 2\sqrt{2/3} + \sqrt{x^2-4/3} = 2\sqrt{2/3} + \sqrt{(x-1/2)^2 + x - 19/12} > \\ > 3/2 + x - 1/2 = x+1,$$

что невозможно.

3) Три расстояния равны $x+1$, а одно равно x. Аналогично случаю 2) считаем

$$MD = x \geqslant 1, \quad MA = MB = MC = x+1 \geqslant 2.$$

Тогда точка M лежит на прямой OD, причем точка O не может находиться между точками M и D, так как иначе

$$x = 2\sqrt{2/3} + \sqrt{(x+1)^2 - 4/3} > 1 + x.$$

Поэтому точка M лежит на луче OD и

$$2\sqrt{2/3} = OD = OM - MD = \sqrt{(x+1)^2-4/3} - x < x+1-x = \\ = 1 < 2\sqrt{2/3},$$

что также невозможно.

4) Два расстояния равны x, а два другие — $x+1$. Пусть для определенности

$$MA = MB = x \geqslant 1, \quad MC = MD = x+1 \geqslant 2.$$

Заметим, что $x \neq 1$ (поскольку согласно доказанному выше точка M не может лежать на прямой AB), следовательно, $x \geqslant 2$. Пусть точки E и F — середины отрезков AB и CD соответственно. Тогда точка M лежит на луче FE, причем

$$MF = \sqrt{(x+1)^2-1} \geqslant \sqrt{3} > \sqrt{2} = EF,$$

откуда имеем

$$\sqrt{(x+1)^2-1} - \sqrt{x^2-1} = MF - ME = EF = \sqrt{2},$$

что невозможно, так как

$$\sqrt{(x+1)^2-1} - \sqrt{x^2-1} < \sqrt{2} \text{ при } 1 < x \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, утверждение полностью доказано.

15.16. Обозначим через V и S объем и площадь поверхности тетраэдра, а через S_i площадь той его грани, которая соответствует высоте h_i тетраэдра и касается вневписанной сферы радиуса r_i. Тогда имеем равенства

$$3V = h_1S_1 = r_1(S_2+S_3+S_4-S_1) = r_1(S-2S_1)$$

и аналогично

$$3V = h_iS_i = r_i(S-2S_i)$$

при остальных значениях i. Поэтому получаем

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4} = \frac{1}{3V}(S-2S_1+S-2S_2+S-2S_3+S-2S_4) = \frac{2S}{3V} =$$
$$= \frac{2}{3V}(S_1+S_2+S_3+S_4) = 2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right),$$

т. е. равенство справедливо.

15.17. Пусть в тетраэдре $A_1A_2A_3A_4$ обозначено: h_i — высота, опущенная из вершины A_i, а S_i — площадь соответствующей грани, d_1, d_2, d_3 — расстояния между ребрами A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 и противоположными ребрами тетраэдра соответственно, а Q_1, Q_2, Q_3 — площади параллелограммов с диагоналями, параллельными и равными парам соответствующих противоположных ребер тетраэдра, φ_1, φ_2, φ_3 — двугранные углы при ребрах A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2. Тогда объем тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{3}h_iS_i = \frac{1}{3}d_kQ_k$$

(см. теорему 87; здесь и ниже $i=1, 2, 3, 4$; $k=1, 2, 3$). Далее, имеем

$$S_4 = S_1\cos\varphi_1 + S_2\cos\varphi_2 + S_3\cos\varphi_3$$

(см. теорему 90) и, наконец,

$$S_4^2+S_k^2-2S_4S_k\cos\varphi_k = Q_k^2.$$

Последнее равенство можно доказать, если провести плоскость, перпендикулярную, скажем, ребру A_2A_3, и заметить, что для длин проекций a, b, c ребер A_1A_2, A_2A_4, A_1A_4 соответственно на эту плоскость по теореме косинусов имеет место равенство

$$a^2+b^2-2ab\cos\varphi_1 = c^2.$$

Умножая обе части этого равенства на число $(A_2A_3/2)^2$, получаем требуемое равенство при $k=1$. Аналогичные рассуждения можно провести и при остальных значениях $k=2, 3$. Таким образом, получаем

$$Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2 = 3S_4^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2-$$
$$-2S_4(S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3) = S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2,$$

откуда

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{Q_1^2}{9V^2}+\frac{Q_2^2}{9V^2}+\frac{Q_3^2}{9V^2}=\frac{S_1^2}{9V^2}+\frac{S_2^2}{9V^2}+\frac{S_3^2}{9V^2}+\frac{S_4^2}{9V^2}=$$
$$=\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2},$$

что и требовалось доказать.

15.18. Обозначим через K, L, M, N точки касания ребер AB, BC, CD, DA соответственно со сферой (рис. 113). Через центр O сферы проведем прямую l перпендикулярно плоскости квадрата $KLMN$. Четыре плоскости, касающиеся сферы в точках K, L, M, N, образуют равные двугранные углы с плоскостью квадрата, а значит, либо параллельны прямой l, либо пересекаются в некоторой точке S на прямой l. В последнем случае они образуют правильную четырехугольную пирамиду с вершиной S, основанием, содержащим квадрат $KLMN$, и апофемами SK, SL, SM, SN. Так как ребра AB, BC, CD, DA лежат в соответствующих гранях этой пирамиды, то точки A, B, C, D лежат на ее ребрах. Из равенства биссектрис SK, SL, SM, SN равных углов ASB, BSC, CSD, DSA вытекает равенство треугольников ASB, BSC, CSD, DSA, откуда получаем

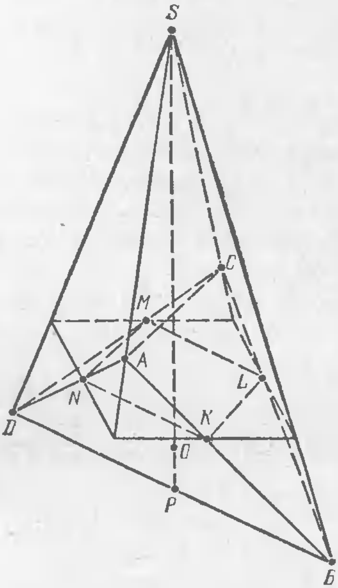


Рис. 113

$$SA=SC,\ SB=SD,\ AK=CL=CM=AN,$$

а если ребро AC также касается сферы, то

$$AC=AK+CL=2AK.$$

Из подобия равнобедренных треугольников ASC, BSD по свойству биссектрисы треугольника имеем

$$BD/AC=SB/SA=KB/AK,$$

откуда

$$BD=\frac{AC}{AK}\cdot KB=2KB.$$

Поэтому для середины P ребра BD, лежащей на прямой l, справедливо равенство $OP=OK$ (ибо прямоугольные треугольники BOK и BOP с общей гипотенузой BO имеют равные катеты BK и BP), т. е. ребро BD касается сферы в точке P. Наконец, в случае, если четыре упомянутые касательные плоскости параллельны прямой l, то и тогда они пересекают плоскость квадрата $KLMN$ по сторонам некоего квадрата, причем серединами его сторон также служат точки K, L, M, N. В этом случае

$$AK = KB = BL = LC = CM = MD = DN = AN$$

и центр O, совпадающий с центром квадрата $KLMN$, равноудален от ребер AC и BD, а значит, сфера может касаться этих ребер только одновременно. Утверждение доказано.

15.19. Пусть около тетраэдра $ABCD$ описана сфера с центром O и радиусом R. Обозначим

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB},\ \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC},\ \boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$$

и, вообще, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$ для любой точки X пространства. Тогда

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{d}^2 = R^2.$$

Так как $\alpha \perp OA$, то точки X, принадлежащие плоскости α, задаются уравнением

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0, \text{ или } \boldsymbol{ax} = R^2.$$

Аналогично, точки X, принадлежащие плоскостям β, γ, δ, задаются уравнениями

$$\boldsymbol{bx} = R^2,\ \boldsymbol{cx} = R^2,\ \boldsymbol{dx} = R^2$$

соответственно. Заметим, что уравнение

$$(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{x} = (\lambda + \mu)\, R^2$$

для любых значений λ и μ, не равных нулю одновременно, задает плоскость, проходящую через прямую l пересечения плоскостей α и β (ибо $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} \neq 0$ и для любой точки $X \in l$ имеем $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{bx} = R^2$). Кроме того, для любой точки X пространства найдутся такие числа λ и μ, не равные нулю одновременно, что

$$\lambda(\boldsymbol{ax} - R^2) + \mu(\boldsymbol{bx} - R^2) = 0,$$

т. е. через любую точку X проходит плоскость, задаваемая некоторыми значениями λ и μ. Поэтому прямая CD лежит в одной плоскости с прямой l тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} \lambda(\boldsymbol{ac} - R^2) + \mu(\boldsymbol{bc} - R^2) = 0, \\ \lambda(\boldsymbol{ad} - R^2) + \mu(\boldsymbol{bd} - R^2) = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение (относительно пары неизвестных λ, μ), т. е. когда

$$(\boldsymbol{ac} - R^2)(\boldsymbol{bd} - R^2) = (\boldsymbol{ad} - R^2)(\boldsymbol{bc} - R^2).$$

Аналогично доказывается, что линия пересечения плоскостей γ и δ лежит в одной плоскости с прямой AB тогда и только тогда, когда

$$(\boldsymbol{ca} - R^2)(\boldsymbol{db} - R^2) = (\boldsymbol{cb} - R^2)(\boldsymbol{da} - R^2).$$

Так как два полученных условия равносильны, то утверждение задачи доказано.

§ 16. Многогранники, сферы и другие множества

16.1. Если обозначить через x ребро куба, то указанная в задаче разность объемов равна

$$f(x)=\begin{cases} abc-x^3 & \text{при } 0<x\leqslant a,\\ abc+(x-a)x^2-ax^2 & \text{при } a<x\leqslant b,\\ x^3+ab(c-x)-abx & \text{при } b<x\leqslant c,\\ x^3-abc & \text{при } c<x. \end{cases}$$

Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна при $x>0$, а ее производная равна

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2 & \text{при } 0<x<a,\\ 3x^2-4ax & \text{при } a<x<b,\\ 3x^2-2ab & \text{при } b<x<c,\\ 3x^2 & \text{при } c<x. \end{cases}$$

Следовательно, эта функция убывает при $0<x<a$, возрастает при $b<x$ (ибо $3x^2-2ab>3b^2-2ab>0$), а на интервале $(a;\ b)$ она либо убывает, если $b\leqslant 4a/3$ (ибо $3x^2-4ax<3b^2-4ab\leqslant 0$), либо имеет минимум в точке $x=4a/3$, если $b>4a/3$. Таким образом, наименьшее значение функция $f(x)$ принимает либо при $x=b$ (если $b\leqslant 4a/3$), либо при $x=4a/3$ (если $b>4a/3$), а искомое значение x равно $\min\{b;\ 4a/3\}$.

16.2. Проведем через центр O данного куба $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ плоскость, перпендикулярную диагонали A_1A_3' (рис. 114). Эта плоскость проходит через середины B_1, B_2, B_3 ребер $A_1'A_4'$, A_2A_2', A_3A_4 соответственно, ибо каждая из точек B_1, B_2, B_3 удалена от вершин A_1 и A_3' на одинаковое расстояние $a\sqrt{5}/2$. Поскольку

$$B_1O=B_2O=B_3O$$

и

$$B_1B_2=B_2B_3=B_3B_1=a\sqrt{3/2}>\\ >a\sqrt{5}/2,$$

то каждая из двух правильных пирамид

$$A_1B_1B_2B_3 \text{ и } A_3'B_1B_2B_3$$

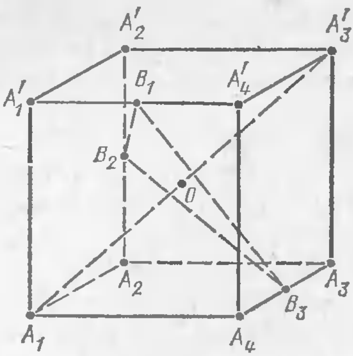


Рис. 114

(не имеющих общих внутренних точек) содержит правильный тетраэдр с высотой

$$a\sqrt{3}/2=A_1O=A_3'O$$

и основанием $B_1'B_2'B_3'$, гомотетичным треугольнику $B_1B_2B_3$ относительно центра O. Наконец, внутри этих тетраэдров

$$A_1B_1'B_2'B_3' \text{ и } A_3'B_1'B_2B_3'$$

лежат искомые правильные тетраэдры, гомотетичные им относительно их центров с коэффициентом $2\sqrt{2}/3 < 1$ и имеющие высоту $a\sqrt{2/3}$, а значит, ребро a.

16.3. Рассмотрим тетраэдр с вершинами в данных точках A_1, A_2, A_3, A_4. Тогда пространство разбивается плоскостями его граней на 2 множества. Первое из них объединяет 4 однотипных области, каждая из которых составлена из трехгранного угла при какой-либо вершине тетраэдра и ему симметричного относительно этой вершины. Если точка A_5 лежит, например, в области, соответствующей вершине A_4, то прямая A_5A_4 пересекает треугольник $A_1A_2A_3$ (рис. 115). Второе множество объединяет 6 однотипных областей, каждая из которых представляет собой пересечение двугранного угла при каком-либо ребре

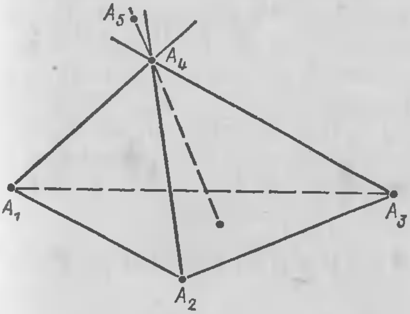


Рис. 115

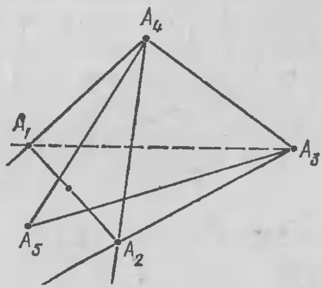


Рис. 116

тетраэдра с углом, симметричным двугранному углу при противоположном ребре относительно этого ребра. Если точка A_5 лежит, например, в области, соответствующей ребру A_3A_4, то прямая A_1A_2 пересекает треугольник $A_3A_4A_5$ (рис. 116).

16.4. Допустим, что, вопреки утверждению задачи, любая плоскость пересекает не более 3 множеств. Выберем точки A, B, C, D, E разных множеств. Тогда никакие 4 из них не лежат в одной плоскости, и, следовательно, никакие 3 не принадлежат одной прямой. Далее, через некоторые 3 из них проходит плоскость, относительно которой остальные 2 точки расположены в разных полупространствах (таким свойством обладает хотя бы одна из плоскостей ABC, ABD, ABE). Пусть эта плоскость проходит через точки A, B, C. Точка F пересечения с ней прямой DE принадлежит одному из множеств, содержащих точки A, B, C, например множеству, содержащему точку A. Следовательно, плоскость, проходящая через точки D, E, F, B, пересекает не менее четырех множеств. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

16.5. Пусть, вопреки утверждению задачи, пространство разбито на 3 множества M_1, M_2, M_3 и существуют такие положительные числа $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$, что при каждом значении $i = 1, 2, 3$ между любыми точками множества M_i не реализуется расстояние a_i. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ с ребрами

$$AB=a_1,\ AC=BC=a_2,\ AD=BD=CD=a_3$$

(такой тетраэдр существует, поскольку центр O окружности, описанной около равнобедренного остроугольного треугольника ABC с нужными сторонами, лежит внутри него, а значит,

$$OA=OB=OC<a_2\leqslant a_3$$

и на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через точку O, найдется искомая вершина D) и расположим его в пространстве так, что

$$A,\ B,\ C\notin M_3 \text{ и } A,\ B\notin M_2.$$

Для этого достаточно поместить вершину D в какую-либо точку множества M_3 (если $M_3=\varnothing$, то автоматически A, B, $C\notin M_3$), а вершину C в какую-либо точку множества M_2, удаленную от точки D на расстояние a_3 (если таких точек не найдется, то автоматически A, $B\notin M_2$). Тогда получим, что A, $B\in M_1$ и $AB=a_1$, что противоречит сделанному предположению и доказывает утверждение задачи.

16.6. Обозначим через A_n множество 2^n всевозможных наборов

$$\varepsilon=(\varepsilon_1;\ \ldots;\ \varepsilon_n),$$

состоящих из чисел $\varepsilon_i\in\{-1;\ 1\}$ ($i=1,\ \ldots,\ n$). Введем также обозначение

$$\boldsymbol{a}_\varepsilon=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\boldsymbol{a}_k,$$

где $\varepsilon\in A_n$, а $\boldsymbol{a}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_n$ — произвольные векторы, и докажем индукцией по $n\in\mathbf{N}$ следующее равенство:

$$\sum_{\varepsilon\in A_n}\boldsymbol{a}_\varepsilon^2=2^n\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{a}_k^2.$$

При $n=1$ равенство верно, так как

$$\sum_{\varepsilon\in A_1}\boldsymbol{a}_\varepsilon^2=\boldsymbol{a}_1^2+(-\boldsymbol{a}_1)^2=2\boldsymbol{a}_1^2=2^1\sum_{k=1}^{1}\boldsymbol{a}_k^2.$$

Пусть равенство уже доказано для некоторого значения $n-1\in\mathbf{N}$. Если в наборе

$$\varepsilon=(\varepsilon_1;\ \ldots;\ \varepsilon_{n-1};\ \varepsilon_n)$$

выделить набор

$$\varepsilon'=(\varepsilon_1;\ \ldots;\ \varepsilon_{n-1})$$

и обозначить

$$\boldsymbol{a}_{\varepsilon'}=\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k\boldsymbol{a}_k,$$

то, используя справедливое для любых двух векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равенство

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2=2\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{c}^2$$

(ср. с равенством параллелограмма), можно получить требуемое равенство для значения n:

$$\sum_{\varepsilon \in A_n} a_\varepsilon^2 = \sum_{\varepsilon' \in A_{n-1}} ((a_{\varepsilon'} + a_n)^2 + (a_{\varepsilon'} - a_n)^2) =$$

$$= \sum_{\varepsilon' \in A_{n-1}} 2(a_{\varepsilon'}^2 + a_n^2) = 2 \cdot 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + 2 \cdot 2^{n-1} a_n^2 = 2^n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Утверждение доказано.

16.7. Пусть отрезок CD пересекает указанную в задаче плоскость в точке E, а точки C' и D' — проекции точек C и D на эту плоскость (рис. 117). Из равенства прямоугольных треугольников $CC'E$ и $DD'E$

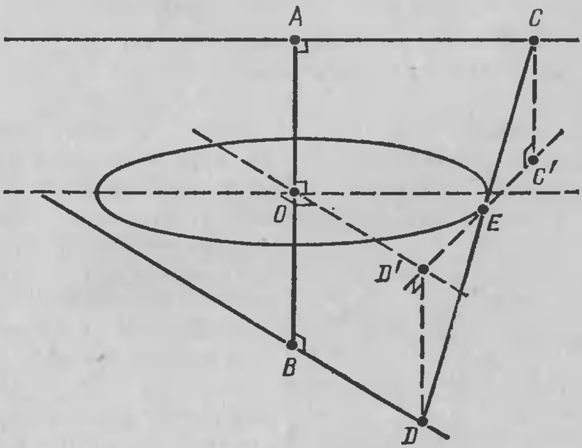


Рис. 117

(где $CC' = DD' = a/2$, $\angle CEC' = \angle DED'$) следует, что OE — медиана прямоугольного треугольника $C'OD'$, откуда $C'D' = 2OE = 2r$. Поэтому

$$CD = 2\sqrt{C'C^2 + C'E^2} = \sqrt{4r^2 + a^2},$$

а точки C заполняют отрезок длины $4r$ с серединой в точке A.

16.8. Проведем плоскость, проходящую через точки A, B и центр O сферы S. Сечением сферы s будет окружность с центром O_1 и радиусом $r_1 \leqslant r$, касающаяся прямой AB. Пусть OH и OK — перпендикуляры к прямым AB и O_1C соответственно (рис. 118), тогда, обозначив

$$AB = 2a, \ OH = h,$$

получаем

$$AC^2 + BC^2 = (a + HC)^2 + (a - HC)^2 = 2a^2 + 2HC^2 =$$

$$= 2(R^2 - OH^2) + 2(OO_1^2 - O_1K^2) = 2(R^2 - h^2) + 2(r_1^2 - (r_1 - h)^2) =$$

$$= 2R^2 - 4h^2 + 4hr_1 = 2R^2 + r_1^2 - (2h - r_1)^2 \leqslant 2R^2 + r^2.$$

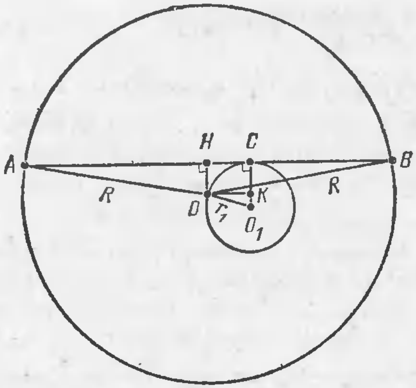


Рис. 118

16.9. Проведем через точку A прямую d, перпендикулярную плоскости ABC. Тогда центры O_1 и O_2 сфер, касающихся сферы S, лежат на прямой l, состоящей из точек, равноудалениых от точек A, B, C, а значит, параллельной прямой d. Пусть A' — точка, симметричная точке A относительно прямой l, а D — точка пересечения прямых OA' и l (рис. 119). Точка A (а также точка A') приивдлежит обеим сферам, поэтому $O_1A = r_1$ и $O_2A = r_2$. Из условий касаиия сфер имеем $O_1O = R - r_1$ н $O_2O = R - r_2$, поэтому

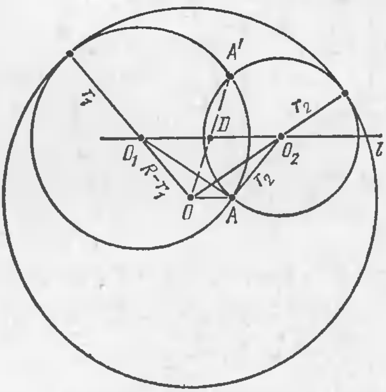


Рис. 119

$$O_1O + O_1A = R = O_2O + O_2A.$$

Докажем, что точки O_1 и O_2 симметричны относительно точки D. Действительно, фиксируем точку O_1, для которой

$$O_1O + O_1A = R.$$

Тогда для точки O_2, симметричной точке O_1 относительно точки D, имеем

$$O_2O + O_2A = O_1A + O_1O = R.$$

Далее, для любой точки O_2', лежащей на прямой l между точками D и O_2, имеем

$$O_2'O + O_2'A = O_2'O + O_2'A' < O_2O + O_2A' = O_2O + O_2A = R$$

(нбо периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего), а для любой точки O_2'', расположенной на продолжении отрезка

DO_2 за точку O_2, аналогично имеем

$$O_2''O+O_2''A > R.$$

Точно так же рассматриваются точки луча DO_1. Таким образом, получаем

$$R-r_1=O_1O=O_2A=r_2,$$

откуда

$$r_1+r_2=R,$$

что и требовалось доказать.

16.10. Введем дополнительные обозначения: Q — площадь основания, h — высота пирамиды, x — косинус двугранного угла между основанием и боковой гранью, a — сторона основания, r — радиус окружности, вписанной в основание. Тогда справедливы равенства

$$a=2r\operatorname{tg}(180°/n),\ Q=n(1/2)ra=nr^2\operatorname{tg}(180°/n),$$
$$h=r\operatorname{tg}(\arccos x)=r\sqrt{1-x^2}/x,\ S=Q+(1/x)Q,$$

откуда

$$Q=xS/(x+1),\ r=\sqrt{\frac{Q}{n\operatorname{tg}(180°/n)}}=\sqrt{\frac{S}{n\operatorname{tg}(180°/n)}\,\frac{x}{x+1}},$$
$$V=\frac{1}{3}hQ=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\sqrt{\frac{S}{n\operatorname{tg}(180°/n)}\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{xS}{x+1}=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{S^{3/2}}{\sqrt{n\operatorname{tg}(180°/n)}}\cdot f(x),$$

где

$$f(x)=\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}.$$

а) Имеем

$$f'(x)=\frac{1-3x}{2(1+x)^2\sqrt{x(1-x)}},$$

поэтому наибольшее значение функции $f(x)$ при $x\in(0;\ 1)$ равно $f(1/3)=\sqrt{2}/4$ (ибо $f'(x)>0$ при $x<1/3$ и $f'(x)<0$ при $x>1/3$), а искомое значение объема V равно

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{S^{3/2}}{\sqrt{n\operatorname{tg}(180°/n)}}.$$

б) Подставляя в полученное соотношение между величинами V, S, n, x данные значения n, S, V, получаем уравнение для x

$$\sqrt{x(1-x)}/(1+x)=2/9,$$

имеющее корни $x_1=1/17$ и $x_2=4/5$. Поэтому $Q_1=8$ и $Q_2=64$, откуда $r_1=\sqrt{2}$ и $r_2=4$, следовательно,

$$a_1=2\sqrt{2},\ h_1=24\ \text{и}\ a_2=8,\ h_2=3.$$

16.11. Обозначим через h высоту призмы. Тогда в тетраэдре

$$A_1A_3A'_{n+1}A'_{n+2}$$

(рис. 120) угол между противоположными ребрами A_1A_3 и $A'_{n+1}A'_{n+2}$ равен углу

$$\angle A_3A_1A_2 = (1/2)\angle A_3OA_2 = 180°/2n$$

(где O — центр многоугольника $A_1\ldots A_{2n}$; заметим, что

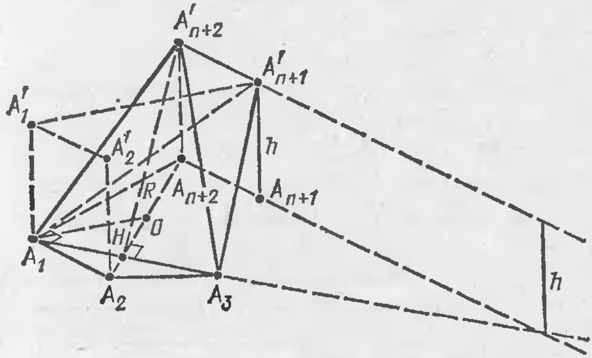


Рис. 120

$A'_{n+1}A'_{n+2} \parallel A'_1A'_2 \parallel A_1A_2$). Расстояние между ребрами A_1A_3 и $A'_{n+1}A'_{n+2}$ равно h, а их длины равны

$$A_1A_3 = 2R\sin(180°/n),\quad A'_{n+1}A'_{n+2} = 2R\sin(180°/2n),$$

поэтому объем указанного тетраэдра равен

$$(1/6)\ A_1A_3\cdot A'_{n+1}A'_{n+2}\cdot h\sin(180°/2n) = (2/3)\ R^2h\sin(180°/n)\sin^2(180°/2n).$$

С другой стороны, если φ — угол между прямой $A_1A'_{n+1}$ и плоскостью $A_1A_3A'_{n+2}$, то тот же объем равен

$$(1/3)\ S_{A_1A_3A'_{n+2}}\cdot A_1A'_{n+1}\sin\varphi,$$

где

$$A_1A'_{n+1} = \sqrt{(A_1A'_1)^2 + (A'_1A'_{n+1})^2} = \sqrt{h^2+4R^2},$$

$$S_{A_1A_3A'_{n+2}} = (1/2)\ A_1A_3\cdot A'_{n+2}H =$$

$$= (1/2)\ 2R\sin(180°/n)\sqrt{h^2+(2R\cos^2(180°/2n))^2}$$

($A'_{n+2}H$ — высота треугольника $A_1A_3A'_{n+2}$). Таким образом, получаем равенство

$$(2/3)\ R^2h\sin(180°/n)\sin^2(180°/2n) =$$

$$= (1/3)\ R\sin(180°/n)\sqrt{h^2+4R^2\cos^4(180°/2n)}\cdot\sqrt{h^2+4R^2}\sin\varphi,$$

поэтому величина

$$\sin\varphi=2R\sin^2(180^\circ/2n)\left(h^2+\frac{16R^4\cos^4(180^\circ/2n)}{h^2}+\right.$$
$$\left.+4R^2\cos^4(180^\circ/2n)+4R^2\right)^{-1/2}$$

максимальна, когда в неравенстве

$$h^2+\frac{16R^4\cos^4(180^\circ/2n)}{h^2}\geqslant 2\sqrt{16R^4\cos^4(180^\circ/2n)}$$

достигается равенство, т. е. когда

$$h^2=\frac{16R^4\cos^4(180^\circ/2n)}{h^2},\quad \text{или}\quad h=2R\cos(180^\circ/2n),$$

что и требовалось доказать.

16.12. Из равенства боковых ребер пирамиды $SA_1\ldots A_n$ следует, что проекция O вершины S на основание пирамиды равноудалена от вершин $A_1, \ldots, A_n$, т. е. является центром окружности, описанной около многоугольника $A_1\ldots A_n$. Поскольку при каждом значении $k=1, \ldots, n$ пирамида SOA_kA_{k+1} (где $A_{n+1}=A_1$) симметрична относительно биссектральной плоскости двугранного угла при ребре SO, то ее двугранные углы при ребрах SA_k и SA_{k+1} равны одному и тому же числу φ_k. Так как по условию

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi_2+\varphi_3=\ldots=\varphi_{n-1}+\varphi_n=\varphi_n+\varphi_1,$$

а число n нечетно, то

$$\varphi_1=\varphi_3=\ldots=\varphi_n=\varphi_2=\ldots=\varphi_{n-1},$$

откуда вытекает равенство всех пирамид SOA_kA_{k+1} (ибо любые две соседние пирамиды симметричны друг другу относительно их общей грани) и равенство всех углов $\angle A_kOA_{k+1}$. Таким образом, многоугольник $A_1\ldots A_n$ правильный.

16.13. Обозначим

$$\overrightarrow{SA}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{SB}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{SC}=\boldsymbol{c}$$

(рис. 121), тогда

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$$

и если

$$\overrightarrow{SQ}=x\boldsymbol{a},$$

то

$$\overrightarrow{SR}=(1-x)\,\boldsymbol{c},\ \overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SA}+x\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+x\,(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),$$
$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\,\boldsymbol{c}-x\boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SQ}=(1-x)\,\boldsymbol{a}+x\,(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),$$

причем векторы $\overrightarrow{QR}$ и $\overrightarrow{QP}$ ие параллельны ни при каком значении x (что следует из их разложений по трем векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, не лежащим в одной плоскости). Так как точка M лежит в плоскости,

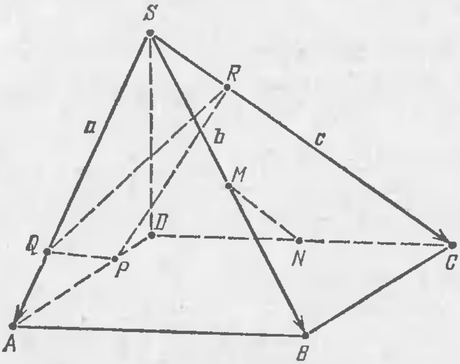


Рис. 121

проходящей через точку N параллельно плоскостн α, то для некоторых значений λ и μ имеем

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SN}+\lambda\overrightarrow{QR}+\mu\overrightarrow{QP}=$$
$$=(1/2)\,(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD})+\lambda\,((1-x)\,\boldsymbol{c}-x\boldsymbol{a})+\mu\,((1-x)\,\boldsymbol{a}+x\,(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}))=$$
$$=(1/2-\lambda x+\mu\,(1-x))\,\boldsymbol{a}+(-1/2-\mu x)\,\boldsymbol{b}+(1+\lambda\,(1-x)+\mu x)\,\boldsymbol{c}.$$

Поэтому точка M лежит на прямой SB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{SM}=y\boldsymbol{b}$, т. е.

$$\begin{cases} 1/2-\lambda x+\mu\,(1-x)=0, \\ 1+\lambda\,(1-x)+\mu x=0. \end{cases}$$

Последняя снстема совместна при любом значеини x:

$$\mu=-\frac{x+1}{2\,(2x^2-2x+1)},\quad \lambda=\frac{3x-2}{2\,(2x^2-2x+1)}$$

(заметим, что $4x^2-4x+2=(2x-1)^2+1>0$). Следовательно, искомые значения y и только они удовлетворяют равенству

$$y=-\frac{1}{2}+\frac{x\,(x+1)}{2\,(2x^2-2x+1)}$$

хотя бы при одном значении x. Иными словами, уравнение

$$(4y+1)\,x^2-(4y+3)\,x+(2y+1)=0$$

разрешимо относительио x при искомых значениях y, т. е. прн

$$(4y+3)^2-4\,(4y+1)\,(2y+1)=-16y^2+5\geqslant 0$$

(в том числе и при $4y-1=0$, $4y+3\neq 0$). Таким образом, искомые значения y заполняют отрезок $[-\sqrt{5}/4;\ \sqrt{5}/4]$.

16.14. Пусть большее основание M_1 исходной усеченной пирамиды имеет площадь S_1, меньшее основание M_2 — площадь S_2, а общее основание M_0 двух усеченных пирамид, составляющих исходную,— площадь S_0. Продолжим боковые ребра пирамиды до их пересечения в точке T и обозначим через P_1, P_2 и P_0 пирамиды с вершиной T и основаниями M_1, M_2 и M_0 соответственно (рис. 122). Гомотетия относительно точки T, переводящая основание M_1 в основание M_0, переводит сферу, вписанную в пирамиду P_1, в сферу, вписанную в пирамиду P_0, а значит, переводит основание M_0 в основание M_2 и сферу, вписанную в пирамиду P_0, в сферу, вписанную в пирамиду P_2. Поэтому для радиусов R_1, R_2, R_0 вписанных сфер и площадей Q_1, Q_2, Q_0 боковых поверхностей пирамид P_1, P_2, P_0 соответственно имеем пропорции

$$\frac{R_0}{R_1}=\frac{R_2}{R_0},\quad \frac{Q_2}{Q_1}=\frac{S_2}{S_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

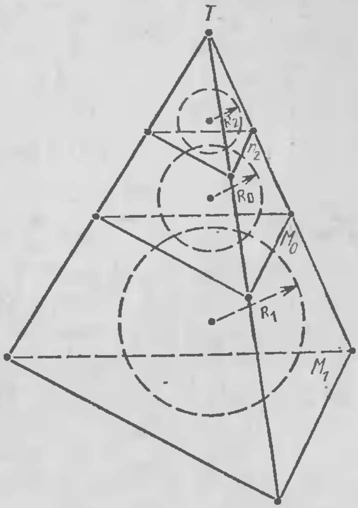


Рис. 122

Объем пирамиды P_2 равен, с одной стороны, $(1/3)\,R_2(Q_2+S_2)$, а с другой стороны, $(1/3)\,R_0(Q_2-S_2)$ (ибо сфера радиуса R_0 вневписана по отношению к пирамиде P_2), поэтому

$$R_2(Q_2+S_2)=R_0(Q_2-S_2),$$

откуда

$$\frac{Q_2-S_2}{Q_2+S_2}=\frac{R_2}{R_0}=\frac{R_2}{\sqrt{R_1R_2}}=\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}}=\frac{\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}}$$

и

$$(Q_2-S_2)\sqrt[4]{S_1}=(Q_2+S_2)\sqrt[4]{S_2}.$$

Следовательно, получаем

$$\frac{Q_2}{S_2}=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}}$$

и, наконец,

$$S=Q_1-Q_2=\frac{Q_2}{S_2}(S_1-S_2)=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}}(S_1-S_2)=$$
$$=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

16.15. а) Докажем, что если точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ расположены на сфере с центром O и радиусом 1 так, что расстояние между любыми точками A_i, A_j $(i \neq j)$ не меньше $\sqrt{2}$, то $n \leqslant 6$. В самом деле, пусть $n > 6$. По теореме косинусов имеем

$$A_iA_j^2=2-2\cos\angle A_iOA_j \geqslant 2,$$

откуда $\angle A_iOA_j \geqslant 90^\circ$ и $\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_j} \leqslant 0$. Выберем в пространстве прямоугольную систему координат с началом в точке O следующим образом. Заметим прежде всего, что среди векторов $\overrightarrow{OA_i}$ обязательно найдутся три некомпланарных вектора (в противном случае все $n>4$ векторов лежали бы в одной плоскости и, следовательно, угол между какими-то двумя из них был бы острым). Без ограничения общности можно считать, что векторы $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, некомпланарны. Ось OX направим вдоль прямой OA_1 так, чтобы абсцисса точки A_1 равнялась 1. Далее, ось OY направим так, чтобы точка A_2 лежала в плоскости XOY и имела положительную ординату. Наконец, ось OZ направим так, чтобы аппликата точки A_3 была положительной. Обозначим через x_i, y_i, z_i координаты точки A_i. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1}=(1;\ 0;\ 0),\ \overrightarrow{OA_2}=(x_2;\ y_2;\ 0),\ \overrightarrow{OA_3}=(x_3;\ y_3;\ z_3),$$

где $y_2>0$, $z_3>0$, поэтому для всех значений $i>1$ имеем

$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_1}=x_i\leqslant 0;$$

далее, для всех значений $i>2$ имеем

$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_2}=x_ix_2+y_iy_2\leqslant 0,$$

откуда $y_i\leqslant 0$ (ибо $x_2\leqslant 0$, $x_i\leqslant 0$, $y_2>0$); наконец, для всех значений $i>3$ имеем

$$\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_3}=x_ix_3+y_iy_3+z_iz_3\leqslant 0,$$

откуда $z_i\leqslant 0$ (ибо $x_3\leqslant 0$, $x_i\leqslant 0$, $y_3\leqslant 0$, $y_i\leqslant 0$, $z_3>0$). Среди четырех векторов $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$, $\overrightarrow{OA_6}$, $\overrightarrow{OA_7}$ хотя бы два имеют одноименную отрицательную координату, а значит, их скалярное произведение положительно. Полученное противоречие доказывает, что $n\leqslant 6$. Так как 6 точек с координатами

$$(\pm 1;\ 0;\ 0),\ (0;\ \pm 1;\ 0),\ (0;\ 0;\ \pm 1)$$

удовлетворяют условию п. а), то наибольшее число точек равно 6.

б) Докажем, что если точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ расположены на той же сфере так, что расстояние между любыми точками A_i, A_j ($i \neq j$) больше $\sqrt{2}$, то $n \leqslant 4$. В самом деле, пусть $n > 4$. Тогда $\overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j} < 0$, и если выбрать прямоугольную систему координат так же, как в решении п. а), то аналогично при $i > 3$ будем иметь $x_i < 0$, $y_i < 0$, $z_i < 0$. Поэтому скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA_4}$, $\overrightarrow{OA_5}$ будет положительно. Итак, доказано, что $n \leqslant 4$. Поскольку 4 точки, расположенные в вершинах правильного тетраэдра, вписанного в сферу, удовлетворяют условию п. б), то наибольшее число точек равно 4.

16.16. Пусть O — центр сферы, O_i — центр окружности C_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), A_i — точка пересечения луча OO_i со сферой, B — точка касания окружностей C_0 и C_1. Обозначим $\varphi = \angle A_0OB$, тогда

$$\sin\varphi = r_n \text{ и } A_0A_1 = 2r_n,$$

так как

$$OB = OA_0 = OA_1 = 1,\ O_0B = O_1B = r_n,$$
$$\angle OO_0B = \angle OO_1B = 90^\circ$$

(рис. 123). В правильной пирамиде $OA_0A_1A_2$ плоские углы при вершине O равны 2φ, а двугранный угол при ребре OA_0 равен $360^\circ/n$.

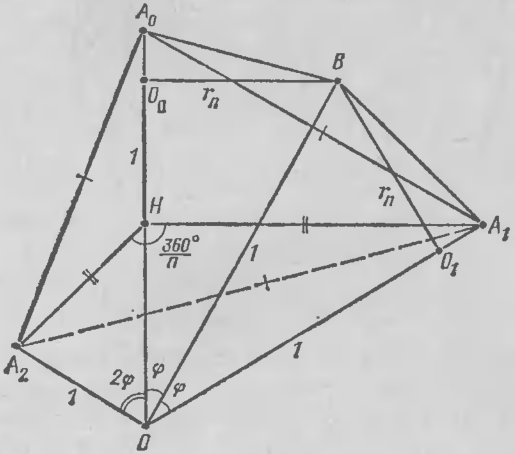


Рис. 123

Если A_1H — перпендикуляр к ребру OA_0, то

$$A_1H = A_2H = \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 2r_n\sqrt{1 - r_n^2}.$$

Далее, имеем

$$2r_n = A_0A_1 = A_1A_2 = 2 \cdot A_1H \cdot \sin(180^\circ/n) = 4r_n\sqrt{1 - r_n^2}\sin(180^\circ/n),$$

откуда

$$2\sqrt{1 - r_n^2}\sin(180^\circ/n) = 1.$$

Поэтому

$$\sin(180°/n) = 1/\left(2\sqrt{1-r_n^2}\right) > 1/2 \text{ и } n < 6$$

(последнее неравенство вытекает также из того факта, что двугранный угол $\angle A_1HA_2 = 360°/n$ при боковом ребре OA_0 больше плоского угла $\angle A_1A_0A_2 = 60°$ основания пирамиды), а для остальных значений $n = 2, 3, 4, 5$ имеем

$$r_n = \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2(180°/n)}}.$$

16.17. Угол $C'AB'$ представляет собой линейный угол двугранного угла с ребром OA и гранями, проходящими через точки C и B соответственно, так как лучи AC' и AB' перпендикулярны общему

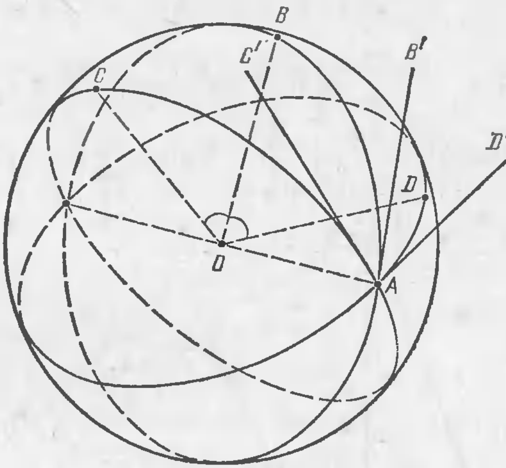


Рис. 124

радиусу OA (рис. 124). Аналогично угол $D'AB'$ является линейным углом двугранного угла с ребром OA и гранями, проходящими через точки D и B. Так как указанные двугранные углы симметричны друг другу относительно прямой OB (прямая OA симметрична себе, а точка C — точке D), то они равны, а значит, равны и их линейные углы $\angle C'AB' = \angle D'AB'$.

16.18. Пусть точка C' симметрична точке C относительно центра симметрии цилиндра — точки O (рис. 125). Тогда, если у трехгранного угла $OABC$ двугранные углы при ребрах OA, OB, OC равны α, β, γ, то у трехгранного угла $OABC'$ двугранные углы при ребрах OA, OB, OC' равны $180°-\alpha$, $180°-\beta$, γ соответственно. Пусть D — центр окружности с диаметром AB. Тогда в пирамиде $OADC'$ двугранные углы при ребрах OA и OC' равны (ибо эта пирамида симметричиа относительно биссектральной плоскости двугранного угла при ребре OD), а в пирамиде $OBDC'$ равны двугранные углы при ребрах OB и OC' (по той же причине), откуда $(180°-\alpha)+(180°-\beta)=\gamma$, т. е.

$$\alpha+\beta+\gamma=360°,$$

что и требовалось доказать.

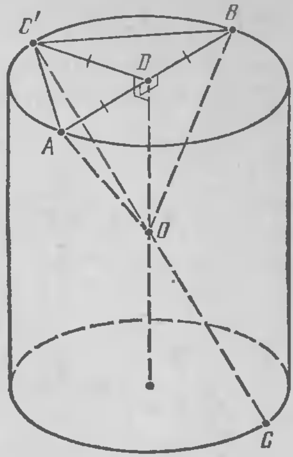


Рис. 125

16.19. Заметим, что сумма плоских углов данного угла с вершиной S и ребрами $SA_1, \ldots, SA_n$ меньше 360°. Возьмем какую-либо внутреннюю точку O этого n-гранного угла и опустим из нее перпендикуляры OH_i на плоскости SA_iA_{i+1} ($i=1, \ldots, n$; $A_{n+1}=A_1$). Полученный n-гранный угол с вершиной O н ребрами OH_i является выпуклым, ибо все его ребра лежат относительно любой его грани в том же полупространстве, что и точка S. Каждый его плоский угол $\angle H_iOH_{i-1}$ ($H_0=H_n$) в сумме с линейным углом двугранного угла при ребре SA_i (перпендикулярном плоскости H_iOH_{i-1}) составляет 180°. Так как сумма плоских углов построенного n-гранного угла также меньше 360°, то сумма величин двугранных углов исходного n-гранного угла больше $180°\cdot n-360°$ и не может быть меньше 360° ни при каком значении $n\geqslant 4$. Следовательно, условию задачи может удовлетворять только трехгранный угол.

16.20. Введем в пространстве систему координат и для каждого значения $i=1, \ldots, 1979$ отнесем к i-му множеству все точки, абсциссы которых удовлетворяют равенству

$$[x]\equiv i \pmod{1979}.$$

Построенный пример показывает, что ответ на вопрос задачи положителен.

16.21. Докажем индукцией по n, что n прямых разбивают плоскость не более чем на

$$p(n)=\frac{n(n+1)}{2}+1$$

частей, причем в точности $p(n)$ частей получается, если никакие 2 прямые не параллельны и никакие 3 прямые ие проходят через одну точку. Действительно, $p(0)=1$, н при любом значении $n\in\mathbb{N}$ имеем неравенство

$$p(n)\leqslant p(n-1)+n=\frac{(n-1)n}{2}+1+n=\frac{n(n+1)}{2}+1,$$

причем равенство достигается (n-я прямая, пересекаясь с каждой из остальных прямых, сама разбивается не более чем на n частей, каждая из которых определяет новую часть плоскости). Аналогично докажем, что n плоскостей разбивают пространство не более чем на

$$q(n)=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

частей, причем в точности $q(n)$ частей получается, если никакие 2 плоскости не параллельны, никакие 3 плоскости не проходят через одну прямую и никакие 4 плоскости не проходят через одну точку. Действительно, $q(0)=1$ и при любом значении $n \in \mathbf{N}$ имеем неравенство

$$q(n) \leqslant q(n-1)+p(n-1)= \\ =\frac{(n-1)^3+5(n-1)+6}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+1=\frac{n^3+5n+6}{6},$$

причем равенство достигается (n-я плоскость, пересекаясь с остальными плоскостями, сама разбивается не более чем на $p(n-1)$ частей, каждая из которых определяет новую часть пространства). Искомое число плоскостей равно 13, поскольку

$$q(12)=299<300<378=q(13).$$

Действительно, 12 плоскостей не хватает, а 13 плоскостями можно разбить все пространство на $q(13)$ частей, затем выбрать внутри каждой из них по одной точке и взять куб, содержащий все $q(13)$ точек, после чего останется подвергнуть всю конструкцию преобразованию подобия с надлежащим коэффициентом.

16.22. Докажем, что в условиях задачи прямые AA' и BB' пересекаются при любом положении плоскости α'. Так как в начальном положении эти прямые пересекаются, то точки A, A', B, B' лежат в одной плоскости. Поэтому прямые AB и $A'B'$ либо пересекаются,

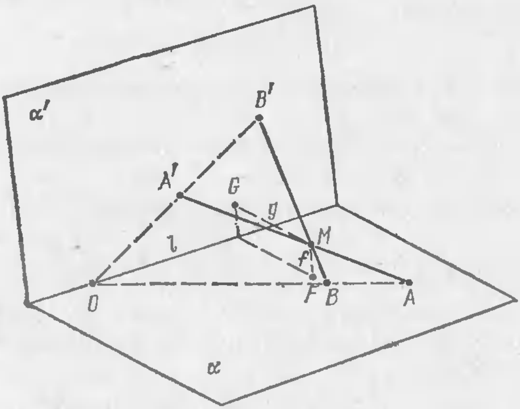


Рис. 126

либо параллельны. В первом случае (рис. 126) точка O их пересечения лежит на прямой l, причем

$$OA \cdot OB' \neq OB \cdot OA'$$

(ибо прямые AA' и BB' не параллельны). Так как те же условия будут выполнены и для других положений α', то прямые AA' и BB' по-прежнему будут пересекаться. Во втором случае прямые $AB \parallel A'B'$ параллельны прямой l, причем $\overleftrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, что сохраняется при вращении плоскости α'. Следовательно, и в этом случае прямые AA' и BB' пересекаются при любом положении α'. Если прямые AA', BB', CC' в начальный момент не лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, то при любом положении α', отличном от α, они также не лежат в одной плоскости и, согласно доказанному выше, попарно пересекаются, а значит, имеют общую точку пересечения. Наконец, если прямые AA', BB', CC' в начальный момент лежат в одной плоскости, то рассмотрим четвертую прямую DD', проходящую через точку их пересечения, но не лежащую в той же плоскости. Тогда прямые AA', BB', DD' пересекаются в одной точке и прямые AA', CC', DD' также пересекаются в одной точке, причем эти точки совпадают с точкой пересечения прямых AA', DD'. Поэтому прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке при любом положении α', отличном от α. Через точку $M = M_0$ пересечения данных прямых в начальном положении проведем плоскость β, перпендикулярную прямой l, и заметим, что точка M не покидает эту плоскость при вращении плоскости α'. В плоскости β проведем прямую f, проходящую через точку M параллельно плоскости α', и докажем, что точка F ее пересечения с плоскостью α не зависит от положения α'. Если в начальном положении — это точка F_0, а в другом — F_1, то в последнем положении плоскости α' прямая MF_0 ($M \neq F_0$, иначе $F_0 = M = F_1$) пересекает плоскость α' в некоторой точке F'. Следовательно, согласно доказанному выше, в начальном положении прямая F_0F' также проходит через точку M, т. е. совпадает с прямой f, однако не параллельна плоскости α'. Аналогично доказывается, что точка G пересечения плоскости α' с прямой g, проходящей через точку M параллельно плоскости α, поворачивается вместе с плоскостью α, занимая фиксированное положение на ней. Таким образом, при вращении плоскости α' точка M вращается вокруг точки F, находясь от нее на постоянном расстоянии (равном расстоянию от точки G до прямой l) и образуя тот же угол с плоскостью α, что и плоскость α'. Поэтому искомое множество есть окружность в плоскости β с центром F и радиусом FM_0 (возможно, нулевым), из которой выброшены две диаметрально противоположные точки, принадлежащие плоскости α.

16.23. Прямая l может служить осью поворота, переводящего точку A в точку B тогда и только тогда, когда точки A и B имеют общую проекцию O на эту прямую и равноудалены от нее, т. е. когда прямая l лежит в плоскости α_1, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему. Поворот вокруг такой прямой l на угол φ совпадает с результатом последовательного применения симметрий относительно плоскости α_1, а затем относительно плоскости α_2, являющейся образом плоскости α_1 при повороте вокруг прямой l на угол $\varphi/2$ (в том же направлении). Для доказательства этого факта достаточно заметить, что, например, в плоскости ABO (которая перпендикулярна оси l) поворот вокруг точки O на угол φ совпадает с результатом двух симметрий: относительно прямых l_1 и l_2, лежащих в пересечении плоскости ABO с плоскостями α_1 и α_2 соответственно. Поскольку симметрия относительно плоскости α_1 уже переводит точку A в точку B, то плоскость α_2 для рассматриваемых в задаче поворотов (и только для них) проходит через точку B. Следовательно, все образы точки C при рассматриваемых поворотах можно получить следующим образом: сначала симметрично отразить вершину C относительно плоскости α_1 (получив вершину D), а затем — относительно произвольной плоскости α_2, проходящей через точку B и не параллельной плоскости α_1. Поэтому образы точки C заполняют сферу с центром B и радиусом BD, за исключением точки, симметричной точке D относительно плоскости BCC', а значит, не лежащей на поверхности куба. Таким образом, искомое множество есть пересечение этой сферы с гранями куба и состоит из трех дуг DA', $A'C'$, $C'D$ окружностей с центрами в точках A, B', C соответственно и радиусами, равными ребру куба (рис. 127).

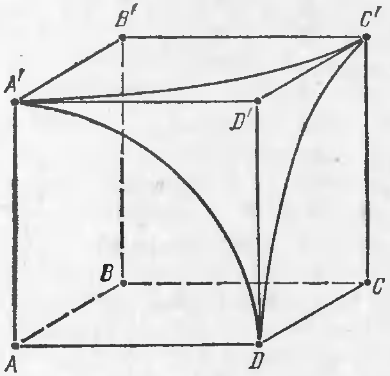


Рис. 127

16.24. Предположим сначала, что три из четырех данных вершин куба

$$A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$$

(см. рис. 114) лежат в одной грани. Пусть для определенности ими являются точки A_1, A_2, A_3, тогда вершина A_4 также имеет целые координаты, так как координаты вектора $\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{A_2A_1}$ являются целыми. Следовательно, какой бы ни оказалась четвертая из данных вершин, A_1', A_2', A_3' или A_4', координаты всех остальных вершин куба являются целыми, поскольку

$$\overrightarrow{A_1A_1'}=\overrightarrow{A_2A_2'}=\overrightarrow{A_3A_3'}=\overrightarrow{A_4A_4'}.$$

Предположим теперь, что никакие три из данных четырех вершин не лежат в одной грани. Так как эти вершины по условию не лежат в одной плоскости, то они являются вершинами правильного тетраэдра, ребра которого — диагонали граней куба. Пусть для определенности это вершины A_1, A_2', A_3, A_4'. Докажем, что вектор $\overrightarrow{A_1A_3'}$ имеет целые координаты. Действительно, рассмотрим вектор

$$2\overrightarrow{A_1A_3'}=\overrightarrow{A_1A_2'}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4'},$$

который имеет целые координаты x, y, z. Обозначим

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2'}\right)^2=\left(\overrightarrow{A_1A_3}\right)^2=\left(\overrightarrow{A_1A_4'}\right)^2=a,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2'}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_1A_2'}\cdot\overrightarrow{A_1A_4'}=\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4'}=a\cos 60^\circ=a/2=b,$$

тогда $a, b\in\mathbf{Z}$ и

$$x^2+y^2+z^2=\left(2\overrightarrow{A_1A_3}\right)^2=3a+3\cdot 2b=12b\equiv 0 \pmod 4).$$

Так как квадрат четного числа дает при делении на 4 остаток 0, а квадрат нечетного числа — остаток 1, то остаток при делении на 4 числа $x^2+y^2+z^2$ равен количеству нечетных чисел среди чисел x, y, z. Таким образом, все координаты x, y, z вектора $2\overrightarrow{A_1A_3'}$ — четные числа, а координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_3'}$ — целые числа. Поэтому точка A_3', лежащая в одной грани с точками A_2', A_4', имеет целые координаты и, согласно доказанному вначале утверждению, координаты всех вершин куба являются целыми.

16.25. Мысленно разобьем все пространство, в котором лежат параллелепипеды, на кубики с ребром 1/2 и раскрасим их в белый и черный цвет в «шахматном» порядке (т. е. так, чтобы любые кубики с общей гранью имели разный цвет). Докажем, что если какой-либо параллелепипед имеет целое ребро и все его грани параллельны граням кубиков, то объем его белой части равен объему его черной части. Действительно, с помощью разрезов плоскостями, перпендикулярными целому ребру, разобьем весь параллелепипед на слои толщины 1/2 и заметим, что при параллельном переносе крайнего слоя до совмещения его с соседним слоем белые части первого совпадают с черными частями второго и наоборот. То же самое произойдет со следующей парой соседних слоев и т. д. Следовательно, объем белой части равен объему черной в каждой паре соседних слоев (которых всего имеется четное число), а значит, и целиком в параллелепипеде. Пусть грани исходного параллелепипеда параллельны граням кубиков, причем его вершина A совпадает с вершиной одного из кубиков, а среди его ребер нет целочисленных. Тогда все параллелепипеды, на которые он по условию разбит, имеют по целому ребру (а грани их, разумеется, параллельны граням кубиков, так как этих параллелепипедов конечное множество и их можно последовательно перебрать, если сначала выбросить тот из них, который лежит в углу исходного параллелепипеда, затем тот, который лежит в углу оставшейся фигуры и т. д.). Следовательно, в силу доказанного выше утверждения объем белой части каждого из них (а значит, и исходного параллелепипеда целиком) равен объему черной. В исходном параллелепипеде тремя плоскостями, параллельными его граням, можно вырезать параллелепипед с вершиной A, целыми ребрами и наибольшим объемом. Среди оставшихся семи параллелепипедов, которые образуются в результате этих разрезов, шесть имеют по целому ребру, а один имеет все ребра, меньшие 1, и вершину B, совпадающую с вершиной одного из кубиков. Достроим этот параллелепипед до куба с ребром 1 и той же вершиной B. Три плоскости, вырезающие в этом кубе внутренний параллелепипед, разрезают куб на восемь параллелепипедов, среди которых хотя бы один имеет все ребра, не превосходящие 1/2, поэтому объемы его белой и черной частей не равны (ибо один из этих объемов равен 0). То же самое можно сказать и про три параллелепипеда, имеющих с ним общую грань (каждый из которых образует с ним параллелепипед с ребром 1), а также про остальные параллелепипеды, в том числе и про тот из них, который имеет вершину B. Таким образом, исходный параллелепипед оказался разрезанным на восемь параллелепипедов, в семи из которых объемы белых и черных частей равны, а в восьмом — нет. Полученное противоречие показывает, что исходный параллелепипед не может не иметь целого ребра.

Глава 5
АНАЛИЗ

§ 17. Последовательности

17.1. Замечая, что при каждом $n=1, 2, \ldots, 99$ справедливы равенства

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n-n^2(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

для искомой суммы получаем

$$a_1+a_2+\ldots+a_{99}=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{9}{10}.$$

17.2. Пользуясь формулой

$$\operatorname{tg} 1 = \frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{1 + \operatorname{tg} k \operatorname{tg}(k-1)}$$

(заметим, что ввиду иррациональности числа π выражение $\operatorname{tg} k$ определено при всех $k \in \mathbb{N}$), получаем при любом $n \in \mathbb{N}$ равенства

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \operatorname{tg}(k-1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)}{\operatorname{tg} 1} - 1 \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} 1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tg} 1} - n = \frac{\operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} 1} - n.$$

Таким образом, числа $A = 1/\operatorname{tg} 1$, $B = -1$ удовлетворяют требованиям задачи.

17.3. Так как

$$a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \ldots \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}$$

при любом $n \in \mathbb{N}$, то

$$0 < a_n < 1/\sqrt{2n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

17.4. Пусть $A \in (0;\ 1)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$. Тогда найдется такое натуральное число N, что для всех номеров $n \geqslant N$ имеют место оценки $2A/3 < a_n < 4A/3$. Если для любого $n > N$ выполнено равенство $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$, то, переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$A = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{a_{n-1}} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} a_{n-1}} = \sqrt{A}.$$

Следовательно, $A \in \{0;\ 1\}$, что противоречит условию $A \in (0;\ 1)$. Если же для некоторого номера $n > N$ равенство $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ не выполнено, то $a_n = a_{n-1}/2 < (1/2) \cdot 4A/3 = 2A/3$, т. е. $a_n < 2A/3$, что противоречит выбору числа N. Поэтому у последовательности $\{a_n\}$ не может быть предела, лежащего в интервале $(0;\ 1)$.

17.5. Рассмотрим число a_i из набора $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Количество трехчленных арифметических прогрессий, в которых это число является средним членом, не превосходит как $i-1$, так и $n-i$, поскольку на месте первого члена может стоять только одно из чисел $a_1, \ldots, a_{i-1}$, а на месте последнего — одно из чисел $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ $\ldots, a_n$. Поэтому общее число прогрессий не превосходит суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{i-1,\ n-i\} = S.$$

Если $n=2l \quad (l\in\mathbb{N}\setminus\{1\})$, то

$$S=\sum_{i=1}^{l}(i-1)+\sum_{i=l+1}^{n}(n-i)=l(l-1).$$

Если же $n=2l+1 \quad (l\in\mathbb{N})$, то

$$S=\sum_{i=1}^{l}(i-1)+\sum_{i=l+1}^{n}(n-i)=l^2.$$

Заметим, наконец, что полученные оценки для количества прогрессий достигаются в случае последовательности $a_i=i \quad (i=1, \ldots, n)$.

17.6. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — указанная в задаче последовательность. Рассмотрим функцию, определенную на множестве целых чисел:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ четно},\\ 1, & \text{если } x \text{ нечетно},\end{cases}$$

и зададим последовательность $\{b_n\}$ формулами $b_n=f(a_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$b_{n+4}=f(a_{n+4})=f(a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})=$$
$$=f(f(a_n)+f(a_{n+1})+f(a_{n+2})+f(a_{n+3}))=f(b_n+b_{n+1}+b_{n+2}+b_{n+3}),$$

поскольку число a_{n+4} является четным в том и только в том случае, если четна сумма $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$. Первые 9 членов последовательности $\{b_n\}$ равны соответственно 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1. Поэтому $b_6=b_1$, $b_7=b_2$, $b_8=b_3$, $b_9=b_4$ и, вообще, $b_{n+5}=b_n$, а значит, в этой последовательности нули стоят только на местах с номерами вида $n=3+5k \quad (k\in\mathbb{Z}^+)$. Таким образом, в последовательности $\{a_n\}$ разность номеров любых двух четных членов делится на 5. Следовательно, четверка чисел 1, 2, 3, 4 встретиться не может.

17.7. Пусть задано число $n\in\mathbb{N}$, тогда из условия следует, что каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ не превосходит $2n$. Множество чисел $1, 2, \ldots, 2n$ разобьем на n пар: $(1;\ n+1)$, $(2;\ n+2)$, $\ldots$ $\ldots$, $(n;\ 2n)$. Поскольку среди чисел $1, 2, \ldots, 2n$ содержится не менее $(n+1)$ членов последовательности, то найдутся два разных числа a_p и a_q, принадлежащие одной паре. Для завершения доказательства остается заметить, что разность между числами в каждой из пар равна n.

17.8. Построим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом:

$$b_n=\begin{cases}a_n, & \text{если } a_n\leqslant A,\\ A, & \text{если } a_n>A,\end{cases}$$

и обозначим a_n/b_n через c_n. Тогда справедливы оценки $1\leqslant c_n\leqslant B$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому для любых $m, n\in\mathbb{N}$ имеем $c_m/c_n\leqslant B$, т. е. $a_m/a_n\leqslant Bb_m/b_n$.

17.9. Построим возрастающую последовательность номеров $\{i_n\}$ следующим образом. Пусть a_{i_1} — наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots$ (оно существует, ибо все члены последовательности $\{a_n\}$ — натуральные числа); a_{i_2} — наименьшее из чисел $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \ldots$; a_{i_3} — наименьшее из чисел $a_{i_2+1}, a_{i_2+2}, \ldots$ и т. д. Тогда бесконечная последовательность $\{a_{i_n}\}$ не убывает. Пусть b_{i_k} — наименьшее из чисел $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots$ Тогда $i_k < i_{k+1}$, $a_{i_k} \leqslant a_{i_{k+1}}$, $b_{i_k} \leqslant b_{i_{k+1}}$, т. е. в качестве искомых номеров p и q можно взять числа i_k и i_{k+1} соответственно.

17.10. Докажем утверждение индукцией по n. При $n=1$ имеем $a_1^2 \leqslant a_1 - a_2 < a_1$, откуда $a_1 < 1$. Кроме того,

$$a_2 \leqslant a_1 - a_1^2 = 1/4 - (a_1 - 1/2)^2 \leqslant 1/4 < 1/2,$$

т. е. $a_n < 1/n$ при $n=2$. Пусть утверждение уже доказано для некоторого числа $n \geqslant 2$. Докажем его для числа $n+1$. Так как функция $f(x) = x - x^2$ возрастает на отрезке $[0; 1/2]$ и $a_n < 1/n$, то

$$a_{n+1} \leqslant f(a_n) < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n+1},$$

что и требовалось доказать.

17.11. Соотношение $a_k = a_{k-1} + a_{k-1}^2/n$ эквивалентно равенству

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}}.$$

Поскольку $1/2 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, то справедливы неравенства

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n,$$

складывая которые, получаем оценку

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1.$$

Следовательно, $1/a_n > 2 - 1 = 1$, а значит, $a_n < 1$. Поэтому справедливы неравенства

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} > \frac{1}{n+1} \quad \text{при } k = 1, \ldots, n,$$

складывая которые, получаем оценку

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1},$$

а значит,

$$a_n > (n+1)/(n+2) > (n-1)/n.$$

Утверждение задачи доказано.

17.12. Из условия имеем неравенства

$$a_{k+m} - 1 \leqslant a_k + a_m \leqslant a_{k+m} + 1, \qquad k, m \in \mathbb{N}.$$

Докажем индукцией по $q \in \mathbf{N}$, что для любых $p, q \in \mathbf{N}$ выполнены неравенства

$$a_{pq} - (q-1) \leqslant q a_p \leqslant a_{pq} + (q-1).$$

При $q=1$ имеем верные неравенства. Пусть неравенства доказаны для числа q. Докажем их для числа $q+1$. Действительно, для любого значения $p \in \mathbf{N}$ имеем

$$(q+1)\, a_p = q a_p + a_p \leqslant a_p + a_{pq} + (q-1) \leqslant a_{p+pq} + q = a_{p(q+1)} + q.$$

Аналогично доказывается, что

$$(q+1)\, a_p \geqslant a_{p(q+1)} - q.$$

Поменяв местами p и q, получаем неравенство

$$a_{pq} - (p-1) \leqslant p a_q \leqslant a_{pq} + (p-1).$$

Таким образом,

$$| p a_q - q a_p | \leqslant$$
$$\leqslant \max \{ | a_{pq} + (p-1) - (a_{pq} - (q-1)) |, \ | a_{pq} + (q-1) - (a_{pq} - (p-1)) | \} =$$
$$= p + q - 2 < p + q,$$

а значит,

$$\left| \frac{a_q}{q} - \frac{a_p}{p} \right| < \frac{1}{q} + \frac{1}{p},$$

что и требовалось доказать.

17.13. Допустим, что множество неположительных членов конечно. Тогда найдется такое натуральное число N, что $a_n > 0$ для всех $n \geqslant N$. Но в этом случае для всех $n \geqslant N$ имеем также $a_n > 1$ (если $a_n \leqslant 1$, то $a_{n+1} = (1/2)\,(a_n - 1/a_n) \leqslant 0$). С другой стороны,

$$a_{N+1} = (1/2)\,(a_N - 1/a_N) < a_N/2,$$
$$a_{N+2} = (1/2)\,(a_{N+1} - 1/a_{N+1}) < a_{N+1}/2 < a_N/4$$

и, вообще,

$$a_{N+k} < a_N/2^k \quad \text{для всех } k \in \mathbf{N}.$$

Поэтому $a_{N+k} < 1$, если $2^k > a_N$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

17.14. При $n \in \mathbf{N}$ имеем равенства

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1} = 2^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-2} + 9 \cdot a_{n-2} = \ldots$$
$$\ldots = 2^{n-1} - 3^1 \cdot 2^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} 3^{n-1} + (-1)^n 3^n a_0,$$

из которых получаем формулу

$$a_n = (2^n + (-1)^{n+1} 3^n)/5 + (-1)^n 3^n a_0,$$

справедливую также и при $n=0$. Далее, находим разность

$$d_n = a_n - a_{n-1} = (2^n + (-1)^{n+1} 3^n)/5 + (-1)^n 3^n a_0 -$$
$$- (2^{n-1} + (-1)^n 3^{n-1})/5 - (-1)^{n-1} 3^{n-1} a_0 =$$
$$= 2^{n-1}/5 + (-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot 3^{n-1}/5 + (-1)^n \cdot 4 \cdot 3^{n-1} a_0 =$$
$$= 2^{n-1}/5 + (-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot 3^{n-1}\,(1/5 - a_0) =$$
$$= (2^{n-1}/5)\,(1 + 4 \cdot (-1)^{n+1}\,(3/2)^{n-1}\,(1 - 5a_0)).$$

Если $1-5a_0>0$, то $d_n<0$ при достаточно больших четных значениях n, а если $1-5a_0<0$, то $d_n<0$ при достаточно больших нечетных значениях n. Следовательно, если $a_0\neq 1/5$, то последовательность $\{a_n\}$ не является возрастающей. Если же $a_0=1/5$, то $d_n=2^{n-1}/5>0$ при всех $n\in\mathbf{N}$, а значит, последовательность $\{a_n\}$ возрастает.

17.15. Заметим, что для указанной в задаче последовательности справедливы соотношения

$$a_{n+1}a_{n+3}+a_{n+1}=a_{n+2}^2+a+a_{n+1}^2=a_{n+2}^2+a_na_{n+2}, \qquad n\in\mathbf{N},$$

из которых получаем равенство

$$(a_{n+3}+a_{n+1})/a_{n+2}=(a_{n+2}+a_n)/a_{n+1}.$$

Поэтому, если обозначить $b_n=(a_{n+2}+a_n)/a_{n+1}$, то имеют место равенства $b_1=b_2=b_3=\ldots=b$, откуда получаем

$$(a_{n+2}+a_n)/a_{n+1}=b_n=b_1=(a_3+a_1)/a_2=$$
$$=((a_2^2+a)/a_1+a_1)/a_2=(a_1^2+a_2^2+a)/(a_1a_2)\in\mathbf{Z},$$

т. е. $a_{n+2}=ba_{n+1}-a_n$, где $b\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$. Поскольку $a_1,a_2\in\mathbf{Z}$, то каждое из чисел $a_3=ba_2-a_1$, $a_4=ba_3-a_2$, ... является целым.

17.16. Заметим, что $a_0=0$, $a_1=1$, и докажем справедливость равенства $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$ при каждом $n\in\mathbf{Z}^+$ (откуда последовательно получим, что каждое из чисел a_2, a_3, a_4, ... также является целым). Действительно, пусть

$$\alpha=(2+\sqrt{3})^n/(2\sqrt{3}), \qquad \beta=(2-\sqrt{3})^n/(2\sqrt{3}),$$

тогда имеем

$$a_n\ \ =\alpha-\beta,$$
$$a_{n+1}=(2+\sqrt{3})\,\alpha-(2-\sqrt{3})\,\beta,$$
$$a_{n+2}=(2+\sqrt{3})^2\,\alpha-(2-\sqrt{3})^2\,\beta=(7+4\sqrt{3})\,\alpha-(7-4\sqrt{3})\,\beta=$$
$$=(8+4\sqrt{3})\,\alpha-(8-4\sqrt{3})\,\beta-(\alpha+\beta)=4a_{n+1}-a_n.$$

Поскольку

$$a_{n+2}\equiv a_{n+1}-a_n \pmod 3,$$

а остатки от деления на 3 первых 8 членов последовательности a_0, a_1, a_2, ... равны соответственно 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, то

$$a_6\equiv a_0 \pmod 3,\ a_7\equiv a_1 \pmod 3,$$

и, вообще,

$$a_{n+6}\equiv a_n \pmod 3.$$

Таким образом, в этой последовательности остаток 0 при делении на 3 дают члены вида a_{3k}, где $k\in\mathbf{Z}^+$, и только они. Так как $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$, то имеет место равенство

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^{-n}-(2+\sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}}=-a_{-n},$$

из которого вытекает, что при отрицательных значениях n числа a_n также целые, причем $a_n \equiv 0 \pmod 3$ тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod 3$.

17.17. Обозначим

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n,$$

тогда при $n \in \mathbf{N}$ имеем $a_n > 0$ и

$$a_{n+2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+2} =$$
$$= \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) -$$
$$- \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n}\right)\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}\, a_{n+1} - a_n.$$

Индукцией по $k \in \mathbf{N}$ докажем, что число a_{2k-1} является целым, а число a_{2k} имеет вид $m\sqrt{5}$ при $m \in \mathbf{Z}$. Действительно, при $k=1$ имеем $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{5}$. Далее, пусть утверждение верно для некоторого значения $k \in \mathbf{N}$. Тогда

$$a_{2k+1} = \sqrt{5}\, a_{2k} - a_{2k-1} = 5m - a_{2k-1},$$
$$a_{2k+2} = \sqrt{5}\, a_{2k+1} - a_{2k} = \sqrt{5}\,(a_{2k+1} - m),$$

т. е. утверждение верно и для значения $k+1$. Следовательно, указанное в условии задачи число

$$-2 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n} -$$
$$-2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n = \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)^2 = a_n^2$$

является квадратом числа $a_n \in \mathbf{N}$ при нечетном n и имеет вид $(m\sqrt{5})^2 = 5m^2$ $(m \in \mathbf{N})$ при четном n.

17.18. Заметим, что две последовательности

$$a_n = (1+\sqrt{a})^n \text{ и } a_n = (1-\sqrt{a})^n$$

удовлетворяют условию

$$a_{n+1} = 2a_n + (a-1)\, a_{n-1}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Действительно, имеем

$$a_{n+1} - 2a_n + (1-a)\, a_{n-1} = (1 \pm \sqrt{a})^2 a_{n-1} - 2(1 \pm \sqrt{a})\, a_{n-1} +$$
$$+ (1-a)\, a_{n-1} = 0$$

при любом значении $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, любая последовательность вида

$$a_n = A\,(1+\sqrt{a})^n + B\,(1-\sqrt{a})^n$$

также удовлетворяет этому условию. В частности, при $A=-B=1/(2\sqrt{a})$ имеем последовательность

$$a_n=((1+\sqrt{a})^n-(1-\sqrt{a})^n)/(2\sqrt{a}),$$

которая удовлетворяет заданным в условии задачи соотношениям, так как $a_0=0$, $a_1=1$. Пользуясь биномом Ньютона, для любого простого числа p, отличного от 2 (а значит, нечетного), получаем соотношения

$$a_p=\frac{1}{2\sqrt{a}}((1+\sqrt{a})^p-(1-\sqrt{a})^p)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i(\sqrt{a})^i-\sum_{i=0}^{p} C_p^i(-\sqrt{a})^i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{(p-1)/2} C_p^{2i+1}a^i\equiv a^{(p-1)/2} \pmod p,$$

так как в последней сумме все слагаемые вида $C_p^{2i+1}a^i$ при $i=0, 1, \ldots, (p-1)/2-1$ делятся на p (ибо

$$C_p^k=p!/(k!\,(p-k)!)\equiv 0 \pmod p$$

при $k=1, 2, \ldots, p-1$), а при $i=(p-1)/2$ соответствующее слагаемое равно $C_p^pa^i=a^{(p-1)/2}$. При $p=2$ имеем

$$a_p=((1+\sqrt{a})^2-(1-\sqrt{a})^2)/(2\sqrt{a})=2\equiv 0 \pmod p.$$

Таким образом, для выполнения указанных в задаче утверждений а) и б) необходимо и достаточно, чтобы число a делилось на каждое простое число p, удовлетворяющее неравенствам $2<p\leqslant p_0$, и не делилось ни на одно из простых чисел $p>p_0$. Наименьшее значение $a\in\mathbf{N}$, обладающее этим свойством, равно произведению всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенствам $3\leqslant p\leqslant p_0$.

17.19. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию задачи. Поскольку $a_1>0$, $a_2>0$ и $a_2^3+1=a_1a_3$, то $a_3>0$. Аналогично получаем, что $a_n>0$ при $n=4, 5, \ldots$ Поэтому $a_{n+2}=(a_{n+1}^3+1)/a_n$ при $n\in\mathbf{N}$, а значит,

$$a_3=(a_2^3+1)/a_1=a_2^3+1,$$

$$a_4=(a_3^3+1)/a_2=((a_2^3+1)^3+1)/a_2=(a_2^9+3a_2^6+3a_2^3+2)/a_2=$$
$$=a_2^8+3a_2^5+3a_2^2+2/a_2.$$

Так как $a_4\in\mathbf{Z}$, то число $a_2>1$ является делителем двойки, т. е. $a_2=2$. Поскольку все остальные члены последовательности однозначно определяются первыми двумя ее членами, то указанная последовательность единственна. Докажем индукцией по $n\in\mathbf{N}$, что все члены этой последовательности — целые числа (т. е. она действительно удовлетворяет условиям задачи). Как было уже проверено, числа a_1, a_2, a_3, a_4 являются целыми. Далее, пусть для некоторого значения $n\geqslant 5$ доказано, что $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{Z}$. Тогда имеем

$$a_n = (a_{n-1}^3+1)/a_{n-2} = (((a_{n-2}^3+1)/a_{n-3})^3+1)/a_{n-2} =$$
$$= (a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3)/a_{n-2}a_{n-3}^3,$$

причем числитель полученной дроби делится на a_{n-3}^3, поскольку число

$$(a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3)/a_{n-3}^3 = a_{n-1}^3+1$$

является целым. Этот числитель делится и на a_{n-2}, так как

$$(a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3)/a_{n-2} = a_{n-2}^8+3a_{n-2}^5+3a_{n-2}^2+a_{n-4}.$$

Докажем, что числа a_{n-2} и a_{n-3}^3 взаимно просты (откуда будет следовать, что числитель рассматриваемой дроби делится на произведение этих чисел). Действительно, этот факт вытекает из соотношений

$$(a_{n-2}, a_{n-3}) = ((a_{n-3}^3+1)/a_{n-4}, a_{n-3}) \leqslant (a_{n-3}^3+1, a_{n-3}) = (1, a_{n-3}) = 1.$$

Таким образом, число a_n является целым. Утверждение доказано.

17.20. Обозначим

$$S_n = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}};$$

тогда последовательность $S_1, S_2, \ldots$ состоит из одинаковых чисел в том и только в том случае, если для каждого $n \in \mathbf{N}$ разность

$$S_{n+1} - S_n = \frac{a_0}{a_{n+1}} + \frac{p}{a_{n+2}} - \frac{p}{a_{n+1}} = \frac{p}{a_{n+2}} - \frac{p-a_0}{a_{n+1}}$$

равна нулю, т. е. $a_{n+2} = (p/(p-a_0))\, a_{n+1}$. Пусть последовательность $a_0, a_1, \ldots$ удовлетворяет условию задачи, тогда при всех значениях $n \geqslant 3$ выполнены равенства

$$a_n = (p/(p-a_0))\, a_{n-1} = (p^2/(p-a_0)^2)\, a_{n-2} = \ldots = (p^{n-2}/(p-a_0)^{n-2})\, a_2.$$

Поскольку $a_n \in \mathbf{N}$, а числа p и $p-a_0$ взаимно просты (ибо $0 < p-a_0 < p$), то число a_2 делится на любую степень (с натуральным показателем) числа $p-a_0$, откуда $p-a_0=1$. Поэтому имеем равенства

$$a_0 = p-1, \quad \frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1, \quad a_n = p^{n-2}a_2 \quad (a_1, a_2 \in \mathbf{N})$$
$$\text{при } n = 3, 4, \ldots$$

Выполнение же указанных равенств гарантирует, что последовательность удовлетворяет условию задачи, так как в этом случае имеем

$$S_1 = 1, \quad S_{n+1} = S_n \quad \text{при } n \in \mathbf{N}.$$

Итак, задача свелась к нахождению по заданному простому числу p количества решений уравнения

$$\frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1$$

в натуральных числах. Перепишем уравнение в виде

$$pa_1 = a_2 (a_1 - (p-1))$$

и заметим, что левая часть этого уравнения делится на p. Поэтому уравнение может иметь решение только при выполнении одного из двух условий $a_2 = kp$ или $a_1 - (p-1) = mp$, где k, $m \in \mathbf{N}$ (ибо $a_2 > 0$, $a_1 - (p-1) > 0$). При этом указанные два условия несовместны, так как если $a_1 - (p-1) \equiv 0 \pmod p$, то $a_1 \equiv -1 \pmod p$, левая часть уравнения не делится на p^2 и, стало быть, число a_2 не делится на p. Пусть $a_2 = kp$, тогда исходное уравнение перепишем в виде

$$a_1 = k(a_1 - (p-1)), \text{ т. е. } p-1 = (k-1)(a_1 - p + 1).$$

Поэтому каждое решение в этой серии получается следующим образом: в качестве значения $a_1 - p + 1$ нужно взять любой из делителей числа $p-1$, а затем положить $a_2 = kp$, где

$$k = (p-1)/(a_1 - p + 1) + 1.$$

Пусть теперь $a_1 - (p-1) = mp$, тогда исходное уравнение имеет решение в том и только в том случае, если

$$mp + p - 1 = a_2 m, \text{ т. е. } p - 1 = (a_2 - p)m.$$

В этой серии все решения получаются так: в качестве значения m нужно взять любой из делителей числа $p-1$, а затем положить

$$a_2 = (p-1)/m + p, \quad a_1 = mp + p - 1.$$

Ни одно из полученных решений не может принадлежать обеим сериям сразу, так как иначе оно удовлетворяло бы двум исключающим друг друга условиям. Поэтому количество решений уравнения, равное количеству искомых последовательностей, совпадает с удвоенным числом делителей числа $p-1$.

17.21. Докажем, что тройка чисел a, b, $c \in \mathbf{N}$, где $b < a$, $c < a$, удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$bc \equiv 1 \pmod a, \tag{1}$$

$$nbc^n + (n-1)bc^{n-1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod a \quad \text{при } n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Пусть числа a, b, c удовлетворяют условию задачи. Тогда условие (1) вытекает из соотношений

$$bc \equiv a_1 \pmod a, \quad a_1 = 1,$$

а с учетом соотношений

$$2bc^2 \equiv a_2 \pmod a, \quad a_2 = a_1$$

получаем и условие (2) при $n = 1$, которое в этом случае выглядит так:

$$bc \equiv 2bc^2 \pmod a. \tag{3}$$

Наконец, при остальных значениях $n > 1$ условие (2) также выполнено, так как

$$a_n \equiv nbc^n \pmod a,$$
$$a_{n-1} \equiv (n-1)\,bc^{n-1} \pmod a, \quad a_{n+1} \equiv (n+1)\,bc^{n+1} \pmod a,$$
$$a_n + a_{n-1} = a_{n+1}. \tag{4}$$

Пусть теперь числа a, b, c удовлетворяют условиям (1) и (2). Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ докажем, что каждое из чисел $a_n - nbc^n$ делится на a. При $n=1$ и $n=2$ утверждение вытекает из условий (1) и (3) (последнее совпадает с условием (2) при подстановке $n=1$), так как $a_1=a_2=1$. Пусть для некоторого значения $n > 1$ уже доказано, что числа $a_n - nbc^n$ и $a_{n-1} - (n-1)\,bc^{n-1}$ делятся на a. Тогда из условий (2) и (4) следует, что число

$$a_{n+1} - (n+1)\,bc^{n+1} \equiv ((a_n - nbc^n) + (a_{n-1} - (n-1)\,bc^{n-1})) \pmod a$$

также делится на a. Заметим, что из условия (1) вытекают соотношения $(b,\ a) = (c,\ a) = 1$. При этом условие (2) равносильно тому, что каждое из чисел

$$d_n = (n+1)\,c^2 - nc - (n-1) = (n+1)\,(c^2 - c - 1) + (c+2)$$

при $n \in \mathbb{N}$ делится иа a, что (в свою очередь) имеет место тогда и только тогда, когда каждое из двух чисел

$$c^2 - c - 1 = d_2 - d_1 \text{ и } c+2 = d_1 - 2\,(c^2 - c - 1)$$

делится на a. Следовательно, число

$$(c^2 - c - 1) - (c+2)\,(c-3) = 5$$

должно делиться на a. Поскольку $a > 1$, то $a=5$, а из соотношений $c+2 \equiv 0 \pmod 5$, $1 \leqslant c < 5$ и $bc \equiv 1 \pmod 5$, $1 \leqslant b < 5$ имеем $c=3$, $b=2$. Для завершеиия доказательства остается заметить, что полученные значения a, b, c удовлетворяют условию (1) и числа $c+2$ и $c^2 - c - 1$ делятся на a.

§ 18. Экстремумы

18.1. Наименьшее значение функции $f(x,\ y)$ при $x, y > 0$ равно 2, поскольку имеют место соотношения

$$f(x,\ y) - 2 =$$
$$= \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0,$$

а равенство $f(x,\ y) = 2$ достигается тогда и только тогда, когда $x=y$.

18.2. Используя теорему о средних, имеем

$$\sqrt[4]{2x^2y^2z^2u} = \sqrt[4]{2x \cdot xy \cdot z \cdot yzu} \leqslant \frac{2x + xy + z + yzu}{4} = \frac{1}{4},$$

т. е. $x^2y^2z^2u \leqslant 1/512$. Равенство достигается, если $2x = xy = z = yzu = 1/4$, т. е. при $x = 1/8$, $y = 2$, $z = 1/4$, $u = 1/2$. Итак, наибольшее значение равно 1/512.

18.3. Пусть сначала $n = 2k$, где $k \in \mathbf{N}$. По неравенству треугольника имеем

$$\begin{cases} |x-a_1|+|x-a_n| \geqslant a_n - a_1, \\ |x-a_2|+|x-a_{n-1}| \geqslant a_{n-1} - a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |x-a_k|+|x-a_{k+1}| \geqslant a_{k+1} - a_k, \end{cases}$$

откуда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x-a_i| \geqslant \sum_{j=1}^{k} (a_{n-j+1} - a_j).$$

При этом, если $x \in [a_k;\ a_{k+1}]$, то

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} (a_{n-j+1} - a_j).$$

С другой стороны, если $x \notin [a_k;\ a_{k+1}]$, то

$$|x-a_k|+|x-a_{k+1}| > a_{k+1} - a_k$$

и

$$f(x) > \sum_{j=1}^{k} (a_{n-j+1} - a_j).$$

Итак, функция $f(x)$ принимает наименьшее значение, равное

$$\sum_{j=1}^{k} (a_{n-j+1} - a_j), \text{ при любом } x \in [a_k;\ a_{k+1}].$$

Пусть теперь $n = 2k - 1$, где $k \in \mathbf{N}$. Имеем

$$\begin{cases} |x-a_1|+|x-a_n| \geqslant a_n - a_1, \\ |x-a_2|+|x-a_{n-1}| \geqslant a_{n-1} - a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |x-a_{k-1}|+|x-a_{k+1}| \geqslant a_{k+1} - a_{k-1}, \\ |x-a_k| \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x-a_i| \geqslant \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j).$$

При этом, если $x = a_k$, то

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j).$$

Если же $x \neq a_k$, то

$$f(x) \geqslant \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j) + |x-a_k| > \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j).$$

Итак, функция $f(x)$ принимает наименьшее значение, равное

$$\sum_{j=1}^{k-1}(a_{n-j+1}-a_j), \quad \text{при} \quad x=a_k.$$

18.4. а) Найдем наименьшее значение произведения $x_1x_2\ldots x_n$. Пусть произвольный набор $(x_1;\ \ldots;\ x_n)$ удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим новый набор

$$\left(x_1^{(1)};\ x_2^{(1)};\ \ldots;\ x_n^{(1)}\right),$$

где

$$x_1^{(1)}=x_1,\ x_2^{(1)}=x_2,\ \ldots,\ x_{n-2}^{(1)}=x_{n-2},$$
$$x_{n-1}^{(1)}=\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2-1/n^2},\ x_n^{(1)}=1/n.$$

Этот набор удовлетворяет соотношениям

$$x_i^{(1)}\geqslant 1/n\ (i=1,\ \ldots,\ n),\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(1)})^2=1.$$

Докажем, что

$$x_1x_2\ldots x_n\geqslant x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}\ \ldots\ x_n^{(1)}.$$

Действительно, имеем

$$x_{n-1}^2\ x_n^2-\left(x_{n-1}^{(1)}\ x_n^{(1)}\right)^2=$$
$$=x_{n-1}^2\ x_n^2-\left(x_{n-1}^2+x_n^2-\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^2}=\left(x_{n-1}^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(x_n^2-\frac{1}{n^2}\right)\geqslant 0.$$

Далее, положим

$$x_1^{(2)}=x_1^{(1)},\ \ldots,\ x_{n-3}^{(2)}=x_{n-3}^{(1)},$$
$$x_{n-2}^{(2)}=\sqrt{(x_{n-2}^{(1)})^2+(x_{n-1}^{(1)})^2-1/n^2},\quad x_{n-1}^{(2)}=x_n^{(2)}=1/n$$

и аналогично получим, что

$$x_i^{(2)}\geqslant 1/n,\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(2)})^2=1$$

и

$$x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}\ \ldots\ x_n^{(1)}\geqslant x_1^{(2)}x_2^{(2)}\ \ldots\ x_n^{(2)}.$$

Повторив эту процедуру $(n-1)$ раз, мы в итоге получим набор

$$\left(x_1^{(n-1)};\ x_2^{(n-1)};\ \ldots;\ x_n^{(n-1)}\right),$$

где

$$x_1^{(n-1)}=\sqrt{n^2-n+1}/n,\quad x_2^{(n-1)}=\ldots=x_n^{(n-1)}=1/n,$$

причем

$$x_i^{(n-1)}\geqslant 1/n,\quad \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(n-1)})^2=1$$

и

$$x_1x_2\ldots x_n\geqslant x_1^{(n-1)}\ x_2^{(n-1)}\ \ldots\ x_n^{(n-1)}=\sqrt{n^2-n+1}/n^n.$$

Значит, для любого набора $(x_1; \ldots; x_n)$, удовлетворяющего условию задачи, справедливо неравенство

$$x_1x_2 \ldots x_n \geqslant \sqrt{n^2-n+1}/n^n,$$

а при

$$x_1=\sqrt{n^2-n+1}/n, \quad x_2=\ldots=x_n=1/n$$

достигается равенство. Итак, наименьшее значение равно

$$\sqrt{n^2-n+1}/n^n.$$

б) Найдем наибольшее значение произведения $x_1x_2\ldots x_n$. Применяя теорему о средних, получаем

$$x_1^2\ldots x_n^2 \leqslant ((x_1^2+\ldots+x_n^2)/n)^n=1/n^n,$$

т. е.

$$x_1x_2\ldots x_n \leqslant n^{-n/2}.$$

Равенство достигается при $x_1=x_2=\ldots=x_n=1/\sqrt{n}$. Итак, наибольшее значение равно $n^{-n/2}$.

18.5. Пусть $\max(x_1, \ldots, x_n)=x_k$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}=\sum_{i=1}^{k-1} x_ix_{i+1}+\sum_{i=k}^{n-1} x_ix_{i+1} \leqslant$$

$$\leqslant x_k\sum_{i=1}^{k-1} x_i+x_k\sum_{l=k+1}^{n} x_l=x_k(a-x_k)\leqslant((x_k+a-x_k)/2)^2=a^2/4.$$

Равенство достигается, например, при $x_1=x_2=a/2$, $x_3=\ldots=x_n=0$. Следовательно, наибольшее значение равно $a^2/4$.

18.6. Обозначим $A=\prod_{i=1}^{n} a_i$. Для чисел $0<a_1<\ldots<a_n$ имеем

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+1/b_i)=\prod_{i=1}^{n}((a_ib_i+1)/b_i)=(1/A)\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i+1)\leqslant$$

$$\leqslant(1/A)\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+1)$$

(для доказательства последнего неравенства достаточно заметить, что

$$(a_ib_i+1)^2=a_i^2b_i^2+2a_ib_i+1\leqslant a_i^2b_i^2+a_i^2+b_i^2+1=(a_i^2+1)(b_i^2+1),$$

откуда

$$\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i+1)^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+1)(b_i^2+1)=\prod_{i=1}^{n}(a_i^2+1)^2).$$

Равенство достигается, причем только если $2a_ib_i=a_i^2+b_i^2$ для всех $i=1, \ldots, n$. Таким образом, указанное в задаче произведение максимально только в случае

$$(b_1; \ldots; b_n)=(a_1; \ldots; a_n).$$

18.7. Без ограничения общности можно считать, что $x \geqslant y$. Обозначим $p = x - k$. Тогда $x = k + p$, $y = 2k - x = k - p$, $p \geqslant 0$, и произведение

$$xy = (k+p)(k-p) = k^2 - p^2$$

принимает наибольшее значение при наименьшем возможном значении p. Пусть $p=0$, тогда $x=y=k$ и числа x, y являются взаимно простыми лишь при $k=1$. Пусть $p=1$, тогда $x=k+1$, $y=k-1$. Для того чтобы числа x, y были взаимно простыми, необходимо, чтобы число k было четным (в противном случае оба числа x и y делились бы на 2). Но это же условие является и достаточным, поскольку общими делителями чисел x и y могут быть только делители их разности $x-y=(k+1)-(k-1)=2$ (т. е. числа 1 или 2), а при четном значении k число 2 не является делителем, например числа $x=k+1$. Пусть $p=2$, тогда числа $x=k+2, y=k-2$ при нечетном значении k являются взаимно простыми, так как в этом случае числа x, y нечетны и не могут иметь общих делителей, отличных от делителей их разности $x-y=(k+2)-(k-2)=4$. Итак, искомые числа x, y определяются следующим образом:

если $k=1$, то $x=1$, $y=1$;

если $k=2m$, $m \in \mathbf{N}$, то $x=k \pm 1$, $y=k \mp 1$;

если $k=2m+1$, $m \in \mathbf{N}$, то $x=k \pm 2$, $y=k \mp 2$.

18.8. Имеем

$$a = \sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} (1 - \cos 2x_i)/2,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = n - 2a.$$

Далее, рассмотрим на плоскости векторы

$$(\cos 2x_i; \quad \sin 2x_i)$$

единичной длины. Их сумма имеет длину не больше n, а значит, выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i \right| \leqslant \sqrt{n^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i \right)^2} =$$

$$= \sqrt{n^2 - (n-2a)^2} = 2\sqrt{a(n-a)},$$

в котором при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \arcsin \sqrt{a/n}$$

достигается равенство. Итак, наибольшее значение равно $2\sqrt{a(n-a)}$.

18.9. Заметим, что любое фиксированное число $n \in \mathbf{N}$ можно разложить в сумму натуральных чисел лишь конечным числом способов.

Поэтому среди этих представлений найдется такое (быть может, неединственное) разложение $n=m_1+m_2+\ldots+m_k$, где $m_1\leqslant m_2\leqslant\ldots\leqslant m_k$, для которого произведение $m_1m_2\ldots m_k$ принимает наибольшее значение $f(n)$, причем ни одно из чисел m_i ($i=1, 2, \ldots, k$) не равно 4 (любую четверку с самого начала можно заменить двумя двойками, после чего ни сумма, ни произведение чисел не изменится). Тогда каждое из чисел m_i не превосходит 4, так как если $m_k>4$, то произведение чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k-2, 2$ будет больше прежнего (ибо $(m_k-2)2>m_k$), в то время как их сумма по-прежнему равна n. При $n=1$ имеем единственное разложение, поэтому $f(1)=1$. Далее, при $n>1$ ни одно из чисел m_i не равно 1, так как если $m_1=1$, то произведение чисел $m_1+m_2, m_3, \ldots, m_k$ будет больше прежнего (ибо $m_1+m_2>m_1m_2$), а сумма равна n. Наконец, среди чисел m_i не может быть трех (и более) двоек, так как если $m_1=m_2=m_3=2$, то произведение чисел $3, 3, m_4, \ldots, m_k$ будет больше прежнего (ибо $3^2>2^3$) при той же сумме. Таким образом, если $n>1$, то каждое из чисел m_i равно 3, кроме, быть может, одного или двух чисел, равных 2. Этими условиями набор чисел m_i определяется однозначно для каждого значения $n>1$. Поэтому для искомой величины $f(n)$ имеем

$$f(1)=1,\ f(3l)=3^l,\ f(3l-1)=2\cdot 3^{l-1}$$

и

$$f(3l+1)=4\cdot 3^{l-1}\quad \text{при}\quad l\in\mathbf{N}.$$

18.10. Докажем, что наименьшее по модулю значение величины

$$f(m, n)=12^m-5^n$$

при $m, n\in\mathbf{N}$ равно 7. Прежде всего, имеем равенство $f(1,1)=7$. Далее, предположим, что для некоторых чисел $m, n\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$|f(m, n)|<7.$$

Поскольку число $f(m, n)$ не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, то $|f(m, n)|=1$. Следовательно, остаток от деления числа $f(m, n)$ на 13 равен либо 1, либо 12. Так как

$$12^m\equiv(-1)^m \pmod{13},$$

то остаток от деления числа 12^m на 13 равен 1 при четном m и 12 при нечетном m. Пусть $n=4k+r$, где $k\in\mathbf{Z}^+$, $r\in\{0; 1; 2; 3\}$. Тогда

$$5^n=625^k\cdot 5^r\equiv 1^k\cdot 5^r \pmod{13},$$

откуда следует, что остаток от деления числа 5^n на 13 равен 1, 5, 12 или 8, если число r равно 0, 1, 2 или 3 соответственно. Таким образом, остаток от деления числа 12^m-5^n на 13 не может равняться ни 1, ни 12, а значит, неравенство $|f(m, n)|<7$ не выполняется ни при каких значениях $m, n\in\mathbf{N}$.

§ 19. Различные свойства функций

19.1. Условия задачи выполнены тогда и только тогда, когда

$$f(0)=c=1$$

и справедливы равенства

$$f(x_1)=ax_1^4+bx_1^2+1=1,$$
$$f'(x_2)=4ax_2^3+2bx_2=0,$$

из которых получаем

$$b=-2ax_2^2 \quad \text{и} \quad ax_1^4-2ax_2^2x_1^2=ax_1^2(x_1^2-2x_2^2)=0,$$

а значит, $x_1=x_2\sqrt{2}$ (так как числа x_1, a отличны от нуля). Проверка показывает, что если $x_1=x_2\sqrt{2}$, то функция

$$f(x)=ax^4-2ax_2^2x^2+1$$

удовлетворяет условиям задачи. Таким образом, если $x_1\neq x_2\sqrt{2}$, то указанной функции не существует, а если $x_1=x_2\sqrt{2}$, то тройка $(a;\ b;\ c)$ имеет вид $(a;\ -2ax_2^2;\ 1)$ (где a — произвольное ненулевое число).

19.2. Докажем, что такой функции не существует. Действительно, в противном случае имеем: $f(0)-(f(0))^2\geqslant 1/4$, т. е. $(f(0)-1/2)^2\leqslant 0$, откуда $f(0)=1/2$. Аналогично получаем, что $f(1)=1/2$, т. е. $f(0)=f(1)$, что невозможно.

19.3. Докажем требуемое тождество. Подставляя в неравенство

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

значения $x=y=0$, получаем $f(0)\leqslant 2f(0)$, или $f(0)\geqslant 0$. Отсюда и из неравенства $f(0)\leqslant 0$ следует, что $f(0)=0$. Далее, для любого $x\in\mathbf{R}$ имеем

$$f(x)\geqslant f(x+(-x))-f(-x)=-f(-x)\geqslant x.$$

Отсюда и из неравенства $f(x)\leqslant x$ вытекает тождество $f(x)\equiv x$, $x\in\mathbf{R}$.

19.4. Рассмотрим функцию

$$g(x)=f(x)+f(ax).$$

Если $a=p/q$, где $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$, то $T=q\pi$ — период функции $g(x)$, так как

$$g(x+q\pi)\equiv f(x+q\pi)+f(ax+p\pi),$$

а π — период функции $f(x)$. Докажем, что если a иррационально, то функция $g(x)$ непериодична. Заметим, что $g(0)=f(0)+f(0)=1$. Если же $g(x_0)=1$ для некоторого $x_0\neq 0$, то $\operatorname{tg}^2 x_0=0$ и $\operatorname{tg}^2(ax_0)=0$, т. е.

$$x_0=\pi k \quad \text{и} \quad ax_0=\pi l \quad (k,\ l\in\mathbf{Z}).$$

Но $x_0\neq 0$, значит, $a=l/k$, что противоречит иррациональности числа a. Итак, функция $g(x)$ принимает значение 1 в единственной точке $x=0$, следовательно, она непериодична.

19.5. Поскольку уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет действительных решений, то функция
$$h(x)=f(x)-g(x)$$
принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения при всех $x\in\mathbf{R}$. Поэтому функция
$$f(f(x))-g(g(x))=f(f(x))-g(f(x))+f(g(x))-g(g(x))=$$
$$=h(f(x))+h(g(x))$$
не принимает нулевых значений ни при каком $x\in\mathbf{R}$.

19.6. а) Пусть f: $[0;+\infty)\longrightarrow[0;+\infty)$ — непрерывная функция и
$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty.$$
Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует такое значение $N>0$, что для любого $n\in\mathbf{N}$ найдется число $x_n>n$, удовлетворяющее условию $f(x_n)\in[0;N]$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, а значит, ее значения на отрезке $[0;N]$ ограничены, то найдется такое значение M, что если $f(x)\leqslant N$, то $f(f(x))\leqslant M$. Поэтому для каждого $n\in\mathbf{N}$ существует число $x_n>n$, для которого $f(f(x_n))\leqslant M$, что противоречит условию
$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty.$$
Значит,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$
б) Пусть $f(x)\equiv 1/x$, тогда f: $(0;+\infty)\longrightarrow(0;+\infty)$,
$$f(f(x))\equiv x,\quad \lim_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

19.7. Пусть описанная в задаче функция $f(x)$ существует. Рассмотрим непрерывные функции
$$g(x)=f(x+1)-f(x)\quad\text{и}\quad h(x)=f(x+1)+f(x).$$
Они не могут быть одновременно постоянными, так как иначе функция $f(x)\equiv(h(x)-g(x))/2$ была бы постоянной. Пусть, например, $h(x)$ — не постоянная функция, т. е. существуют такие значения x_1 и x_2, для которых $h(x_1)<h(x_2)$. Тогда существует рациональное число $r\in[h(x_1);\,h(x_2)]$, и в силу непрерывности функции $h(x)$ найдется такое число x_0, что $h(x_0)=r$. Итак, $f(x_0+1)+f(x_0)=r$. Следовательно, числа $f(x_0+1)$ и $f(x_0)$ либо одновременно рациональные, либо одновременно иррациональные. Получили противоречие.

19.8. Из неравенства $(f(x)-f(y))^2\leqslant|x-y|^3$ при $x\neq y$ следует, что
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant|x-y|^{1/2},$$
откуда
$$\lim_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=0$$

$\left(\text{так как } \lim\limits_{x\to y}|x-y|^{1/2}=0\right)$. Значит, функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке, причем $f'(x)\equiv 0$, $x\in\mathbf{R}$. Следовательно, она может быть только константой.

19.9. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)+x-1$, определенную на отрезке $[0;\ 1]$. Так как она непрерывна (ибо $f(x)$ непрерывна), причем $g(0)=-1$, $g(1)=1$, то существует такое число $c\in(0;\ 1)$, что $g(c)=0$, т. е. $f(c)=1-c$. По теореме Лагранжа найдутся точки $a\in(0;\ c)$, $b\in(c;\ 1)$, для которых

$$f'(a)=\frac{f(c)-f(0)}{c},\quad f'(b)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c},$$

поэтому

$$f'(a)\cdot f'(b)=\frac{1-c}{c}\cdot\frac{c}{1-c}=1.$$

19.10. Докажем, что любое число $d=1/k$, где $k\in\mathbf{N}$, удовлетворяет условию задачи. Возьмем произвольную непрерывную функцию $f(x)$ и число $k>1$ (число $d=1$ удовлетворяет условию, ибо $f(0)=f(1)$). Рассмотрим функцию

$$g(x)=f(x+1/k)-f(x),$$

определенную на отрезке $[0;\ (k-1)/k]$. Поскольку сумма чисел

$$g(0)=f(1/k)-f(0),\ g(1/k)=f(2/k)-f(1/k),\ \ldots,\ g((k-1)/k)=f(1)-f((k-1)/k)$$

равна 0, то среди них есть как неположительные, так и неотрицательные числа. Поэтому в силу непрерывности функции $g(x)$ существует число x_0, для которого $g(x_0)=0$, т. е.

$$f(x_0+1/k)=f(x_0).$$

Пусть теперь дано число $d\in(0;\ 1]$, не равное $1/k$ ни при каком значении $k\in\mathbf{N}$. Возьмем такое число $k\in\mathbf{N}$, для которого $kd<1<(k+1)d$, и рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[0;\ d]$ и удовлетворяющую равенствам

$$f(0)=0,\ f(1-kd)=-k,\ f(d)=1.$$

Продолжим эту функцию на отрезок $[0;\ 1]$ таким образом, чтобы при каждом $x\in[d;\ 1]$ выполнялось равенство

$$f(x)=f(x-d)+1.$$

Полученная функция непрерывна, причем $f(1)=f(1-d)+1=f(1-2d)+2=\ldots=f(1-kd)+k=0=f(0)$ и при любом значении $x\in[0;\ 1-d]$ имеют место соотношения $f(x+d)=f(x)+1\neq f(x)$.

19.11. Пусть число $k\in\mathbf{N}$ не является квадратом целого числа. Покажем, что $f'(\sqrt{k})=0$. Так как $\sqrt{k}\notin\mathbf{Q}$, то $f(\sqrt{k})=0$, и остается доказать, что предел

$$\lim_{x\to\sqrt{k}} f(x)/(x-\sqrt{k})$$

существует и равен 0. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует лишь конечное число дробей p/q (всюду ниже $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$), удовлетворяющих условиям

$$0 < q < 1/\varepsilon \quad \text{и} \quad |p/q - \sqrt{k}| < 1.$$

Поэтому при некотором $\delta \in (0; 1)$ в интервале

$$I_\delta = (\sqrt{k} - \delta;\ \sqrt{k} + \delta)$$

таких дробей нет совсем. Если $x = p/q \in I_\delta$, где p/q — несократимая дробь, то

$$q \geqslant 1/\varepsilon \quad \text{и} \quad |\sqrt{k} + p/q| < \sqrt{k} + (\sqrt{k} + \delta) < 2\sqrt{k} + 1,$$

причем $|kq^2 - p^2| \geqslant 1$ (ибо $kq^2 - p^2 \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$), следовательно, имеем

$$\left| \frac{f(x)}{x - \sqrt{k}} \right| = \left| \frac{f(p/q)}{p/q - \sqrt{k}} \right| = \frac{1}{q^3} \frac{|\sqrt{k} + p/q|}{|k - p^2/q^2|} = \frac{1}{q} \frac{|\sqrt{k} + p/q|}{|q^2 k - p^2|} < \varepsilon (2\sqrt{k} + 1).$$

Если же число $x \in I_\delta \setminus \{\sqrt{k}\}$ иррационально, то $f(x) = 0$ и $|f(x)/(x - \sqrt{k})| = 0$. Утверждение доказано.

19.12. Предположим, что существует такой интервал $J \subset I$ длины d, для которого

$$f^n(J) \cap J = \varnothing \quad \text{при любом } n \in \mathbf{N}.$$

Тогда для любых $m, n \in \mathbf{N}$ имеем

$$f^{m+n}(J) \cap f^m(J) = f^m(f^n(J) \cap J) = f^m(\varnothing) = \varnothing,$$

поэтому множества $f(J), f^2(J), \ldots, f^n(J), \ldots$ попарно не пересекаются. С другой стороны, каждое множество $f^n(J)$ при $n \in \mathbf{N}$ есть объединение нескольких промежутков суммарной длины d, лежащих в I. Поэтому все они не могут попарно не пересекаться. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

19.13. Обозначим $h(x, y) = f(y) - f(x)$, тогда функция $h(x, y)$ возрастает по второму аргументу и убывает по первому, причем $h(x, y) > 0$ для всех $y > x$ и

$$g(x, y) \equiv h(x, x+y)/h(x-y, x).$$

Докажем, что при всех $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$ справедлива оценка $g(x, y) < 14$. Если $x - y \geqslant 0$ или $x + y \leqslant 0$, то по условию уже имеем

$$h(x, x+y) < 2h(x-y, x),$$

а кроме того, для всех $y > 0$ выполнено неравенство

$$h(0, y) < 2h(-y, 0).$$

Поэтому остается рассмотреть два случая: 1) $x - y < 0 < x$; 2) $x < 0 < x + y$. Заметим, что для всех $x \geqslant 0$, $y > 0$ справедлива оценка

$$h(x+y, x+3y) < 6h(x, x+y). \tag{1}$$

Действительно, имеем

$$h(x+y,\ x+2y) < 2h(x,\ x+y),$$
$$h(x+2y,\ x+3y) < 2h(x+y,\ x+2y) < 4h(x,\ x+y),$$

откуда

$$h(x+y,\ x+3y) = h(x+y,\ x+2y) + h(x+2y,\ x+3y) < 6h(x,\ x+y).$$

Рассмотрим случай 1). Если $x-y < 0 \leqslant x-y/2$, то, используя оценку (1), получаем

$$h(x,\ x+y) < 6h(x-y/2,\ x) < 6h(x-y,\ x) < 14h(x-y,\ x).$$

Если же $x-y/2 < 0 < x$, то

$$x < y-x < x+y < 3(y-x)$$

и, используя оценку (1), имеем

$$h(y-x,\ x+y) < h(y-x,\ 3(y-x)) < 6h(0,\ y-x).$$

Поскольку $h(x,\ y-x) < h(0,\ y-x)$, то снова получаем

$$h(x,\ x+y) = h(x,\ y-x) + h(y-x,\ x+y) < 7h(0,\ y-x) <$$
$$< 14h(x-y,\ 0) < 14h(x-y,\ x).$$

В случае 2) имеем

$$h(x,\ 0) < 2h(2x,\ x) < 2h(x-y,\ x),$$
$$h(0,\ x+y) < 2h(-x-y,\ 0) < 2h(x-y,\ 0) =$$
$$= 2h(x-y,\ x) + 2h(x,\ 0) < 6h(x-y,\ x)$$

поэтому

$$h(x,\ x+y) < 8h(x-y,\ x).$$

Итак, во всех случаях доказано, что

$$h(x,\ x+y) < 14h(x-y,\ x),$$

откуда следует оценка $g(x, y) < 14$. Докажем теперь, что $g(x, y) > 14^{-1}$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Рассмотрим возрастающую функцию $f_1(x) = -f(-x)$ и положим

$$g_1(x,\ y) = \frac{f_1(x+y) - f_1(x)}{f_1(x) - f_1(x-y)}.$$

Так как $g_1(x,\ y) = (g(-x,\ y))^{-1}$, то $2^{-1} < g_1(x,\ y) < 2$ для всех $y > 0$ при $x = 0$ и для всех $y \in (0;\ |x|]$ при $x \neq 0$. Тогда, по доказанному выше, для функции $g_1(x,\ y)$ справедлива оценка $g_1(x,\ y) < 14$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, откуда следует, что

$$g(x,\ y) = 1/g_1(-x,\ y) > 1/14.$$

Утверждение задачи доказано.

§ 20. Функциональные уравнения

20.1. Положим $y = 1$ в тождестве, выполненном для функции $f(x)$. Тогда имеем тождество

$$f(x) \equiv (f(x) + f(1))/(x+1) \quad (x \neq -1),$$

т. е. $xf(x) \equiv f(1)$. При $x=0$ получаем $f(1)=0$, а значит, при $x \notin \{-1;\ 0\}$ имеем $f(x)=0$. Далее, подставляя в исходное тождество значения $y=0$, $x=2$, получаем $f(0)=(f(2)+f(0))/2$, откуда $f(0)=f(2)=0$. Наконец, подставляя значения $y=0$, $x=-1$, получаем $f(0)=-f(-1)-f(0)$, откуда $f(-1)=-2f(0)=0$. Таким образом, для функции $f(x)$ доказано тождество $f(x) \equiv 0$, $x \in \mathbf{R}$.

20.2. Положим в исходном тождестве $x=y=1$, тогда получим $2f(1)=2(f(1))^2$, т. е. $f(1)=0$ или $f(1)=1$. Рассмотрим каждый из этих случаев:

а) Если $f(1)=0$, то, положив в тождестве $y=1$, получим тождество $f(x) \equiv 0$.

б) Если $f(1)=1$, то, снова положив $y=1$, получим тождество

$$f(x)+x \equiv (x+1)f(x), \text{ т. е. } x(f(x)-1) \equiv 0,$$

откуда при любом $x \neq 0$ имеем $f(x)=1$. Таким образом, для функции $f(x)$ имеется две возможности: либо $f(x) \equiv 0$, либо

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0, \\ a & \text{при } x=0, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Проверка показывает, что любая из этих функций удовлетворяет условию задачи.

20.3. Подставляя в исходное тождество для функции $f(n) \in M$ значения $n=m=0$, получаем $(f(0))^2=2f(0)$. Но $f(0) \neq 0$, поэтому $f(0)=2$. Далее, подставляя в тождество значение $m=1$, получаем тождество $f(n)f(1) \equiv f(n+1)+f(n-1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Если заданы значения функции $f(n)$ в точках $n=0$ и $n=1$, то из этого тождества однозначно определяются значения $f(2)$ и $f(-1)$, а затем $f(3)$ и $f(-2)$ и т. д., т. е. все значения $f(n)$ при $n \in \mathbf{Z}$. Таким образом, функция $f(n)$ единственным образом определяется условиями задачи, так как $f(0)=2$ и $f(1)=5/2$ (в п. а)) или $f(1)=\sqrt{3}$ (в п. б)). Остается убедиться в том, что функции

$$f(n)=2^n+2^{-n} \text{ и } f(n)=2\cos(\pi n/6)$$

удовлетворяют всем условиям п. а) и б) соответственно. Действительно, имеем:

а) $f(0)=2^0+2^0 \neq 0$, $f(1)=2^1+2^{-1}=5/2$,

$$f(n)f(m)=(2^n+2^{-n})(2^m+2^{-m})=(2^{n+m}+2^{-n-m})+(2^{n-m}+2^{m-n})=$$
$$=f(n+m)+f(n-m) \quad \text{при всех } n,\ m \in \mathbf{Z};$$

б) $f(0)=2\cos 0 \neq 0$, $f(1)=2\cos(\pi/6)=\sqrt{3}$,

$$f(n)f(m)=2\cos(\pi n/6)\cdot 2\cos(\pi m/6)=2\cos(\pi(n+m)/6)+$$
$$+2\cos(\pi(n-m)/6)=f(n+m)+f(n-m)$$
$$\text{при всех } n, m \in \mathbf{Z}.$$

20.4. Положив $m=0$ в исходном тождестве, для функции $f(n)$ получим $2f(n) \equiv f(3n)$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$, а при $n=m=0$ имеем $f(0)=0$. Далее, положив в тождестве $n=m$, получим

$$f(2n)+f(0)\equiv f(3n), \text{ т. е. } f(2n)\equiv f(3n).$$

Отсюда с одной стороны для любого значения $m\in\mathbf{Z}^+$ имеем равенства

$$f(4m)=f(6m)=f(9m),$$

а с другой стороны, из тождества при $n=3m$ получаем

$$f(4m)+f(2m)\equiv f(9m),$$

что возможно лишь в случае $f(2m)\equiv 0$. Следовательно, при любом значении $n\in\mathbf{Z}^+$ имеем

$$f(n)=(1/2)f(3n)=(1/2)f(2n)=0,$$

т. е. исходному тождеству может удовлетворять (и действительно удовлетворяет) лишь функция $f(n)$, тождественно равная 0.

20.5. Положив $x=y=0$ в каждом из двух тождеств, которым удовлетворяют непостоянные функции $f(x)$, $g(x)$, получим два равенства

$$f(0)=2f(0)g(0) \text{ и } g(0)=(g(0))^2-(f(0))^2.$$

Поскольку $g(0)\neq 1/2$ (в противном случае из второго равенства следовало бы, что $(f(0))^2=1/4-1/2<0$), то из первого равенства имеем $f(0)=0$, а из второго получаем, что либо $g(0)=1$, либо $g(0)=0$. Однако последний случай невозможен, так как иначе в силу первого тождества при $y=0$ функция

$$f(x)\equiv f(x)g(0)+g(x)f(0)\equiv 0$$

была бы постоянной. Итак, получены единственно возможные значения $f(0)=0$, $g(0)=1$, которые реализуются, например, для функций

$$f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos x.$$

20.6. Положив в исходном тождестве $y=1$, получим тождество

$$f(x)\equiv f(x)f(1)-f(x+1)+1\quad (x\in\mathbf{Q}),$$

т. е.

$$f(x+1)\equiv f(x)+1.$$

Отсюда для всех $x\in\mathbf{Q}$, $n\in\mathbf{Z}$ имеем

$$f(x+n)=f(x)+n,$$

поэтому

$$f(n)=f(1)+n-1=n+1.$$

Далее, подставляя в исходное тождество значения $x=1/n$, $y=n$ при $n\in\mathbf{Z}$, получаем

$$f\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f(n)-f\left(\frac{1}{n}+n\right)+1,$$

откуда

$$2=f(1/n)(n+1)-f(1/n)-n+1, \text{ т. е. } f(1/n)=1+1/n.$$

Наконец, подставляя значения $x=p$, $y=1/q$ при $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$, имеем

$$f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=f(p)\cdot f\left(\frac{1}{q}\right)-f\left(p+\frac{1}{q}\right)+1,$$

откуда

$$f(p/q)=(p+1)(1/q+1)-1/q-p=p/q+1.$$

Такнм образом, имеем только одну функцию $f(x)=x+1$, которая действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

20.7. Пусть сначала $n\leqslant 100$ и $n+11>100$, т. е. $90\leqslant n\leqslant 100$. Тогда

$$f(n)=f(f(n+11))=f(n+11-10)=f(n+1),$$

поэтому

$$f(90)=f(91)=\ldots=f(100)=f(101)=91.$$

Пусть теперь $n<90$. Выберем такое чнсло $m\in\mathbf{N}$, чтобы выполнялись оценки

$$90\leqslant n+11m\leqslant 100.$$

Тогда имеем

$$f(n)=f^2(n+11)=\ldots=f^{m+1}(n+11m)=f^m(f(n+11m))=f^m(91)=91.$$

Таким образом, требуемое равенство доказано при всех значениях $n\leqslant 100$.

20.8. Докажем тождество $g(n)\equiv h(n)\quad(n\in\mathbf{N})$, из которого в силу условия в) будет следовать, что

$$f(n)\equiv g(n)-h(n)+1\equiv 1,\qquad n\in\mathbf{N}.$$

При любом $n\in\mathbf{N}$ имеем

$$h(n)=g(n)+1-f(n)\leqslant g(n)$$

(ибо $f(n)\geqslant 1$). Предположим, что для некоторого значения $n\in\mathbf{N}$ равенство $g(n)=h(n)$ не выполнено, тогда $h(n)<g(n)=k$. Согласно условию б) найдутся числа $n_1, \ldots, n_{k-1}\in\mathbf{N}$, для которых $g(n_i)=i$ при $i=1, \ldots, k-1$. Поэтому каждое из k чисел $h(n_1), \ldots, h(n_{k-1})$, $h(n)$ принадлежит множеству $\{1; \ldots; k-1\}$, следовательно, по принцнпу Дирихле (теорема 1) функция $h(n)$ принимает некоторое значение более одного раза, что противоречит условию а). Утверждение доказано.

20.9. Пусть последовательность $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=5, \ldots$ перечисляет в порядке возрастания все натуральные числа, не являющнеся квадратом целого числа. Положим

$$n_{k,m}=(n_k)^{2^m},\quad \text{где } k\in\mathbf{N},\quad m\in\mathbf{Z}^+.$$

Тогда $n_{k,m+1}=(n_{k,m})^2$, и каждому значению $n>1$ соответствует единственная пара чисел k, m, для которых $n=n_{k,m}$. Определим функцию $f(n)$ следующим образом:

$$f(1)=1,\quad f(n_{k,m})=\begin{cases} n_{k+1,m}, & \text{если } k \text{ нечетно,}\\ n_{k-1,m+1}, & \text{если } k \text{ четно,}\end{cases}$$

при $k\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{Z}^+$. Тогда справедливо тождество

$$f(f(n))\equiv n^2,\qquad n\in\mathbf{N}.$$

20.10. а) Например, функция

$$f(n,\ m)=n \qquad (n,\ m\in\mathbf{Z})$$

удовлетворяет всем условиям задачи.

б) Пусть утверждение неверно, т. е. для некоторого числа $k\in\mathbf{Z}$ все значения некоторой функции $f(n,\ m)$, удовлетворяющей условию задачи, например, не превосходят k. Тогда среди значений $f(n,\ m)$ $(n,\ m\in\mathbf{Z})$ найдется наибольшее, равное, скажем, $l=f(n_0,\ m_0)$. Этому же значению равны и все числа $f(n_0\pm 1,\ m_0)$, $f(n_0,\ m_0\pm 1)$, так как в противном случае оказалось бы, что

$$f(n_0,\ m_0)=$$
$$=\frac{1}{4}(f(n_0-1,\ m_0)+f(n_0+1,\ m_0)+f(n_0,\ m_0-1)+f(n_0,\ m_0+1))<l.$$

Рассуждая подобным образом, можно получить равенство

$$l=f(n_0,\ m_0)=f(n_0\pm 1,\ m_0)=f(n_0\pm 2,\ m_0)=\ldots=f(n_0\pm n,\ m_0)=$$
$$=f(n_0\pm n,\ m_0\pm 1)=f(n_0\pm n,\ m_0\pm 2)=\ldots=f(n_0\pm n,\ m_0\pm m)$$

для любых значений $n,\ m\in\mathbf{N}$. Таким образом, $f(n,\ m)\equiv l$, что противоречит условию задачи.

20.11. Назовем точку $(n;\ m)\in S$ четной или нечетной в зависимости от того, является ли сумма $n+m$ четной или нечетной соответственно. Пусть существует универсальная функция $g(n,\ m)$, тогда функция $g^{-1}(n,\ m)$ также универсальна. Рассмотрим функцию, заданную следующим образом:

$$f(n,\ m)=\begin{cases} g(n,\ m), & \text{если точка } (n;\ m) \text{ четная,}\\ g^{-1}(n,\ m), & \text{если точка } (n;\ m) \text{ нечетная,}\end{cases}$$

при $(n;\ m)\in S$. Точки $g(n,\ m)$ и $g^{-1}(n,\ m)$ имеют противоположную с точкой $(n;\ m)$ четность, поэтому для любой точки $(n;\ m)\in S$ получаем

$$f^2(n,\ m)=\begin{cases} g^{-1}(g(n,\ m))=(n;\ m), & \text{если точка } (n;\ m) \text{ четная,}\\ g(g^{-1}(n,\ m))=(n;\ m), & \text{если точка } (n;\ m) \text{ нечетная.}\end{cases}$$

Таким образом, доказано тождество

$$f^2(n,\ m)\equiv(n;\ m), \qquad (n;\ m)\in S,$$

из которого вытекает обратимость функции $f(n,\ m)$, а для доказательства универсальности этой функции достаточно теперь вспомнить, что функции $g(n,\ m)$ и $g^{-1}(n,\ m)$ универсальны.

20.12. Докажем, что никакие пары искомых значений, кроме приведенных в указании, не удовлетворяют требуемым условиям. Предположим, что некоторая целочисленная пара $(m;\ n)$, отличная от $(2;\ 3)$ и $(2;\ 5)$, удовлетворяет неравенствам $m\leqslant n$, $mn(m+n)\neq 0$ и тождеству

$$f_m(x,\ y)f_n(x,\ y)\equiv f_{m+n}(x,\ y), \qquad x,\ y\in\mathbf{R}, \qquad xy(x+y)\neq 0,$$

где

$$f_k(x,\ y)=(x^k+y^k+(-1)^k(x+y)^k)/k \quad \text{при} \quad k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0.$$

Для каждого фиксированного значения $y=y_0\neq 0$ справедливы следующие утверждения. Если $k<0$, то

$$\lim_{x\to\infty} x^k=\lim_{x\to\infty}(x+y_0)^k=0,$$

откуда

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x, y_0)=y_0^k/k.$$

Если число $k\in\mathbf{N}$ четно, то

$$f_k(x, y)=\frac{1}{k}\left(2x^k+2y^k+\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i}\right),$$

откуда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x, y_0)}{x^k}=\frac{2}{k}.$$

Наконец, $f_1(x, y)\equiv 0$, а если число $k\in\mathbf{N}$ нечетно и $k\neq 1$, то

$$f_k(x, y)\equiv-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i},$$

откуда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_k(x, y_0)}{x^{k-1}}=-\frac{y_0}{k}C_k^{k-1}=-y_0.$$

Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть числа $m, n\in\mathbf{N}$ четны. Тогда, учитывая исходное тождество, получаем

$$\frac{2}{m+n}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x, y_0)}{x^m}\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x, y_0)}{x^n}=\frac{4}{mn},$$

откуда $(m+n)/2=mn/4$, т. е. $(m/2-1)(n/2-1)=1$. Последнее условие выполняется лишь при $n/2=m/2=2$, откуда $m=n=4$, что невозможно, ибо

$$f_4(1, 1)f_4(1, 1)=(2+2^4)^2/4^2=81/4\neq 129/4=(2+2^8)/8=f_8(1, 1).$$

б) Пусть числа $m, n\in\mathbf{N}$ нечетны. Тогда имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x, y_0)f_n(x, y_0)}{x^{m+n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\frac{f_m(x, y_0)}{x^{m-1}}\frac{f_n(x, y_0)}{x^{n-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}}=\frac{2}{m+n},$$

что противоречит исходному тождеству.

в) Пусть одно из чисел $m, n\in\mathbf{N}$ (обозначим его через p) четно, а другое (обозначим его через q) нечетно. Тогда $q>1$, так как если $q=1$, то $f_q(1, 1)=0$, и в силу тождества имеем

$$f_{p+q}(1, 1)=\frac{2-2^{p+q}}{p+q}=0,$$

что невозможно, ибо $p+q>1$. Поэтому получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x,\ y_0)\,f_q(x,\ y_0)}{x^{p+q-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_p(x,\ y_0)}{x^p}\,\frac{f_q(x,\ y_0)}{x^{q-1}}=-\frac{2y_0}{p},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{p+q}(x,\ y_0)}{x^{p+q-1}}=-y_0,$$

откуда $p=2$. Из тождества имеем

$$3\cdot(2-2^q)/q=f_2(1,\ 1)\,f_q(1,\ 1)=f_{2+q}(1,\ 1)=(2-2^{2+q})/(2+q),$$

т. е.

$$3(2+q)(1-2^{q-1})=q(1-2^{q+1}),\quad \text{или}\quad 3+q=(6-q)\,2^{q-2}.$$

Поэтому $q<6$, а так как q нечетно и $q>1$, то $q\in\{3;5\}$, что противоречит сделанному предположению.

г) Пусть $m<0$, а число $n\in\mathbb{N}$ четно. Так как $n>m+n$, то независимо от знака и четности числа $m+n$ имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,\ y_0)}{x^n}=0,$$

в то время как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,\ y_0)\,f_n(x,\ y_0)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}f_m(x,\ y_0)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x,\ y_0)}{x^n}=\frac{2y_0^m}{mn}\neq 0.$$

д) Пусть $m<0$, а число $n\in\mathbb{N}$ нечетно. Тогда $n\neq 1$, так как если $n=1$, то $f_n(1,\ 1)=0$, и в силу тождества имеем

$$f_{m+n}(1,\ 1)=\frac{2+(-1)^{m+n}2^{m+n}}{m+n}=0,$$

что невозможно, ибо $m+n<0$. Поэтому, с одной стороны, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_m(x,\ y_0)\,f_n(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}f_m(x,\ y_0)\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=\frac{-y_0^{m+1}}{m}\neq 0.$$

С другой стороны, если $m<-1$, то $n-1>m+n$, и независимо от знака и четности числа $m+n$ имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=0.$$

Поэтому число m может быть равным только -1. Тогда число $m+n=n-1$ четно и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{m+n}(x,\ y_0)}{x^{n-1}}=\frac{2}{n-1}.$$

Итак, при каждом значении $y_0\neq 0$ справедливо равенство $1/y_0=$ $=2/(n-1)$, что невозможно.

е) Пусть $m,\ n<0$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}f_m(x,\ y_0)\,f_n(x,\ y_0)=y_0^{m+n}/mn,$$

$$\lim_{x\to\infty}f_{m+n}(x,\ y_0)=y_0^{m+n}/(m+n),$$

но равенство $y_0^{m+n}/mn = y_0^{m+n}/(m+n)$ не имеет места, ибо $mn > 0$, $m+n < 0$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют только две пары $(m;\ n)$: $(2;\ 3)$ и $(2;\ 5)$.

20.13. Подставляя в первое исходное тождество для функции $f(x,\ y)$ значения $x=y=0$ и $x=y=1$, получаем равенства $f(0,\ z)=1$ и $f(1,\ z)=1$ соответственно. Далее, подставляя $x=y=-1$, имеем

$$1 = f(1,\ z) = f(-1,\ z)\, f(-1,\ z) = (f(-1,\ z))^2,$$

следовательно, $f(-1,\ z)=1$. Аналогично из второго исходного тождества получаем равенства $f(z,\ 0)=f(z,\ 1)=f(z,\ -1)=1$. Отсюда следует, что

$$f(0,\ 0)=1 \quad \text{и} \quad f(0,\ z)\, f(z,\ 0)=1.$$

Остается доказать требуемые тождества для ненулевых значений x и y. При $x \neq 0$ имеем

$$1 = f(1,\ z) = f(x,\ z)\, f(1/x,\ z),$$

поэтому

$$f(x,\ z) = 1/f(1/x,\ z).$$

Далее, получаем

$$1 = \frac{1}{f(x,\ 1-x)} = f\left(\frac{1}{x},\ 1-x\right) = f\left(\frac{1}{x},\ \frac{1-x}{x}\cdot x\right) = \\ = f(1/x,\ (1-x)/x)\, f(1/x,\ x).$$

Но поскольку

$$f(1/x,\ (1-x)/x) = f(1/x,\ 1/x-1)\cdot 1 = f(1/x,\ 1/x-1)\, f(1/x,\ -1) = \\ = f(1/x,\ 1-1/x) = 1,$$

то $f(1/x,\ x)=1$. Итак, имеем

$$1 = f(x,\ 1) = f(x,\ 1/x) = f(x,\ x) = f(x,\ x)\, f(x,\ -1) = f(x,\ -x),$$

т. е. $f(x,\ x)=f(x,\ -x)=1$. Наконец, при $x \neq 0$, $y \neq 0$ имеем

$$f(x,\ y) = f(x,\ y)\cdot f(1/y,\ y) = f(x/y,\ y) = f(x/y,\ y)\cdot f(x/y,\ x/y) = \\ = f(x/y,\ x) = f(x/y,\ x)\cdot f(1/x,\ x) = f(1/y,\ x) = 1/f(y,\ x).$$

Следовательно, $f(x,\ y)\, f(y,\ x)=1$.

20.14. Если функция $f(x)$ удовлетворяет первому тождеству, то

$$f(xy+x+y) \equiv f(xy)+f(x+y) \equiv f(xy)+f(x)+f(y)$$

$(x,\ y \in \mathbb{R})$, т. е. второе тождество для нее также выполнено. Пусть теперь функция $f(x)$ удовлетворяет второму тождеству. Положив в нем $y=u+v+uv$, получим

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv) \equiv \\ \equiv f(x)+f(u+v+uv)+f(xu+xv+xuv),$$

что можно преобразовать к виду

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv) \equiv \\ \equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(uv)+f(xu+xv+xuv). \qquad (1)$$

Поменяв местами переменные x, u в тождестве (1), получим

$$f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv) \equiv \equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(xv)+f(xu+uv+xuv). \quad (2)$$

Из тождеств (1) и (2) получаем

$$f(uv)+f(xu+xv+xuv) \equiv f(xv)+f(xu+uv+xuv). \quad (3)$$

Положив в тождестве (3) $x=1$, имеем

$$f(uv)+f(u+v+uv) \equiv f(v)+f(u+2uv),$$

или

$$f(uv)+f(u)+f(v)+f(uv) \equiv f(v)+f(u+2uv).$$

Отсюда

$$f(u)+2f(uv) \equiv f(u+2uv). \quad (4)$$

Положив в тождестве (4) $u=0$, получаем $f(0)=3f(0)$, поэтому

$$f(0)=0. \quad (5)$$

Положив в тождестве (4) $v=-1$, получаем $f(-u) \equiv f(u)+2f(-u)$, следовательно,

$$f(-u) \equiv -f(u). \quad (6)$$

Положив в тождестве (4) $v=-1/2$, получаем

$$f(0) \equiv f(u)+2f(-u/2).$$

Используя соотношения (5), (6), получаем

$$f(u) \equiv 2f(u/2) \quad \text{или} \quad f(2u) \equiv 2f(u). \quad (7)$$

Из тождеств (7), (4) имеем $f(u+2uv) \equiv f(u)+f(2uv)$, и, сделав в последнем уравнении замену $2v=t$, получаем

$$f(u+ut)=f(u)+f(ut). \quad (8)$$

Итак, мы приходим к тождеству $f(x+y) \equiv f(x)+f(y)$, так как при $x=0$ это тождество обращается в равенство (5), а при $x \neq 0$ имеем из тождества (8)

$$f(x+y) \equiv f\left(x+x\cdot\frac{y}{x}\right)=f(x)+f\left(x\cdot\frac{y}{x}\right) \equiv f(x)+f(y).$$

20.15. Докажем, что для любого значения $k>0$ справедливо тождество

$$f(x^k) \equiv kx^{k-1}f(x) \qquad (x>1).$$

Доказательство проведем в три этапа.

1) Пусть $k \in \mathbf{N}$. Если $k=1$, то имеем

$$f(x^1) \equiv 1\cdot x^0\cdot f(x),$$

а если тождество справедливо для некоторого значения $k \in \mathbf{N}$, то оно справедливо и для значения $k+1$, так как

$$f(x^{k+1}) \equiv f(x^k x) \equiv x^k f(x)+xf(x^k) \equiv \equiv x^k f(x)+xkx^{k-1}f(x) \equiv (k+1)x^k f(x).$$

По принципу математической индукции тождество справедливо для любого $k\in\mathbf{N}$.

2) Пусть $k\in\mathbf{Q}$, $k>0$, т. е. $k=p/q$, где $p, q\in\mathbf{N}$. По доказанному в п. 1) имеем два тождества

$$f\left(x^p\right)\equiv px^{p-1}f(x),$$
$$f\left(\left(x^{p/q}\right)^q\right)\equiv q\left(x^{p/q}\right)^{q-1}f\left(x^{p/q}\right).$$

Приравнивая правые части этих тождеств, получаем

$$f\left(x^{p/q}\right)\equiv(p/q)\,x^{p/q-1}f(x),$$

т. е. тождество справедливо для любого рационального $k>0$.

3) Пусть $k\in\mathbf{R}$, $k>0$. Тогда выберем такую последовательность положительных рациональных чисел $k_1, k_2, \ldots$, для которой

$$\lim_{n\to\infty}k_n=k.$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, то для любого значения $x>1$ имеем

$$f\left(x^k\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x^{k_n}\right)=\lim_{n\to\infty}k_nx^{k_n-1}f(x)=kx^{k-1}f(x).$$

Из доказанного тождества легко найти явный вид функции $f(x)$. Действительно, обозначив $t=\ln x$, т. е. $x=e^t$, получим

$$f(x)=f\left(e^t\right)=te^{t-1}f(e)=(\ln x)\cdot\frac{x}{e}f(e).$$

С другой стороны, при любом значении $c\in\mathbf{R}$ функция $f(x)=cx\ln x$ удовлетворяет условию задачи.

20.16. а) Из условия задачи следует, что функция $f(x)$ не принимает никакого значения более чем в одной точке $x\in\mathbf{R}$. Действительно, если $u=f(x)=f(y)$ для некоторых $x, y\in\mathbf{R}$, то

$$x=f^3(x)=f^2(u)=f^3(y)=y.$$

Отсюда и из непрерывности функции $f(x)$ следует, что она строго монотонна. В противном случае найдутся числа $x_1<x_2<x_3$, удовлетворяющие неравенствам

$$f(x_1)<f(x_2),\quad f(x_2)>f(x_3)$$

или

$$f(x_1)>f(x_2),\quad f(x_2)<f(x_3),$$

а значит, некоторое значение u, лежащее как между числами $f(x_1)$ и $f(x_2)$, так и между числами $f(x_2)$ и $f(x_3)$, согласно теореме о промежуточном значении непрерывной функции, будет приниматься функцией $f(x)$ в двух различных точках $x_4\in(x_1;\ x_2)$ и $x_5\in(x_2;\ x_3)$, что невозможно. Итак, функция $f(x)$ либо убывает, либо возрастает на всей числовой прямой. В первом случае функция $f^2(x)$ возрастает, а функция $f^3(x)$ убывает, поэтому тождество $f^3(x)\equiv x$ выполняться не может. Допустим, что $f(x)$ возрастает и $f(x_0)\neq x_0$ при некотором значении $x_0 \in \mathbf{R}$. Тогда, если $f(x_0) > x_0$, то

$$f^2(x_0) > f(x_0), \quad f^3(x_0) > f^2(x_0) \quad \text{и} \quad f^3(x_0) > x_0,$$

а если $f(x_0) < x_0$, то

$$f^2(x_0) < f(x_0), \quad f^3(x_0) < f^2(x_0) \quad \text{и} \quad f^3(x_0) < x_0.$$

В любом случае имеем противоречие с равенством $f^3(x_0) = x_0$. Таким образом, доказано тождество $f(x) \equiv x$, $x \in \mathbf{R}$.

б) Функция

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \notin \{1;\ 2;\ 3\}, \\ 2, & \text{если} \quad x = 1, \\ 3, & \text{если} \quad x = 2, \\ 1, & \text{если} \quad x = 3 \end{cases}$$

удовлетворяет всем требованиям задачи.

20.17. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$ и докажем, что для любого значения $k \in \mathbf{Z}$ справедливо тождество

$$f(x + kg(x)) \equiv x + (k+1)\, g(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

При $k = 0$ имеем верное тождество $f(x) \equiv x + g(x)$. Пусть для некоторого значения $k \in \mathbf{N}$ тождества

$$f(x + (k-1)\, g(x)) \equiv x + kg(x)$$

и

$$f(x - (k-1)\, g(x)) \equiv x - kg(x)$$

уже доказаны. Тогда, используя тождество для функции $f(x)$, заданное в условии задачи, получаем

$$f(x \pm kg(x)) \equiv 2(x \pm kg(x)) - f^{-1}(x \pm kg(x)) \equiv$$
$$\equiv 2(x \pm kg(x)) - (x \pm (k-1)\, g(x)) \equiv x \pm (k+1)\, g(x).$$

С помощью установленного тождества докажем, что функция $g(x)$ постоянна. Пусть, напротив, для некоторых значений $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ имеет место неравенство $g(x_1) < g(x_2)$. Тогда существует такое число $k \in \mathbf{N}$, что

$$x_1 - kg(x_1) > x_2 - kg(x_2).$$

Заметим, что функция $f(x)$ является неубывающей (так как в противном случае функция $f^{-1}(x)$, а с ней и функция $f(x) + f^{-1}(x) \equiv 2x$ были бы невозрастающими, что неверно). Следовательно, при любом значении $n \in \mathbf{N}$ функция $f^n(x)$ также является неубывающей. Итак, имеем неравенство

$$f^n(x_1 - kg(x_1)) \geqslant f^n(x_2 - kg(x_2)),$$

из которого в силу равенств

$$f^n(x_i - kg(x_i)) = f^{n-1}(x_i + (1-k)\, g(x_i)) = \ldots = x_i + (n-k)\, g(x_i)$$

$(i = 1,\ 2)$ получаем неравенство

$$x_1 + (n-k)\, g(x_1) \geqslant x_2 + (n-k)\, g(x_2).$$

Однако при достаточно больших значениях n последнее неравенство неверно (ибо $g(x_1) < g(x_2)$). Таким образом, функция $g(x) \equiv c$ постоянна, а значит,

$$f(x) \equiv x + c.$$

Заметим, что при любом значении $c \in \mathbf{R}$ функция $f(x) \equiv x + c$ удовлетворяет всем условиям задачи.

20.18. Поскольку, в силу условия задачи, при любом значении $y \neq 0$ справедливо тождество

$$f'(x) \equiv \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2y} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

правая часть которого дифференцируема по x, то

$$f''(x) \equiv \frac{f'(x+y) - f'(x-y)}{2y} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2y}\left[\frac{f(x+2y) - f(x)}{2y} - \frac{f(x-2y) - f(x)}{(-2y)}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{f(x+2y) + f(x-2y) - 2f(x)}{4y^2}.$$

Далее, последнее выражение снова дифференцируемо по x, поэтому

$$f'''(x) \equiv \frac{f'(x+2y) + f'(x-2y) - 2f'(x)}{4y^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4y^2}\left[\frac{f(x+4y) - f(x)}{4y} + \frac{f(x-4y) - f(x)}{(-4y)} - \frac{f(x+4y) - f(x-4y)}{4y}\right] \equiv 0.$$

Таким образом, искомые функции обязаны удовлетворять тождеству $f'''(x) \equiv 0$, поэтому

$$f''(x) \equiv f''(0), \quad f'(x) \equiv f''(0)\,x + f'(0),$$
$$f(x) \equiv f''(0)\,x^2/2 + f'(0)\,x + f(0).$$

Заметим, что любая функция вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ где } a,\ b,\ c \in \mathbf{R},$$

обладает всеми указанными в задаче свойствами.

20.19. Подставив $x = y = 0$ в исходное тождество, получим $f(0) = 2f(0)$, т. е. $f(0) = 0$. Для любого $x \in \mathbf{R}$ из тождества

$$f(x+y) - f(x) \equiv f(y) + 2xy \qquad (y \in \mathbf{R})$$

имеем

$$f'(x) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(y) + 2xy}{y} =$$

$$= 2x + \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = 2x + f'(0),$$

поэтому искомые функции обязаны удовлетворять условию

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y)\,dy = x^2 + f'(0)\,x.$$

Заметим, что при любом значении $a \in \mathbf{R}$ функция $f(x)=x^2+ax$ удовлетворяет требуемому в задаче тождеству.

20.20. Подставив в исходное тождество для функции $f(x)$ значения $x=y=0$, получим $f(0)(f(0)-1)=0$, т. е. $f(0)=0$ или $f(0)=1$. Но если $f(0)=0$, то из тождества

$$f(0)\,f(x) \equiv f(x) \qquad (x \in \mathbf{R})$$

следует тождество $f(x) \equiv 0$, противоречащее условию задачи. Итак, $f(0)=1$. Докажем, что функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой. Действительно, для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$f(x+y) \equiv f(x)\,f(y) \qquad (y \in \mathbf{R}),$$

отсюда

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y)-f(x)}{y} \equiv f(x) \lim_{y \to 0} \frac{f(y)-f(0)}{y}.$$

Значит, предел в левой части последнего тождества существует и равен

$$f'(x)=f(x)\,f'(0).$$

Пусть $f'(0)=a$, тогда $f'(x)=af(x)$. Функция $f(x)$ дифференцируема любое число раз. Действительно,

$$f''(x)=af'(x)=a^2f(x), \quad f'''(x)=a^2f'(x)=a^3f(x)$$

и т. д. Таким образом, при любом $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$f^{(n)}(x)=a^n f(x).$$

Глава 6
МНОГОЧЛЕНЫ

§ 21. Корни многочленов

21.1. Используя теорему Виета $(x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=-1/(2p^2))$ и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел, получаем

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-2x_1x_2(2(x_1+x_2)^2-x_1x_2)=$$
$$=p^4+\frac{1}{p^2}\left(2p^2+\frac{1}{2p^2}\right)=p^4+2+\frac{1}{2p^4} \geqslant 2+2\sqrt{p^4\cdot\frac{1}{2p^4}}=$$
$$=2+\sqrt{2},$$

что и требовалось доказать.

21.2. Многочлен x^4+px^2+q имеет 4 действительных корня в том и только в том случае, если многочлен y^2+py+q (относительно $y=x^2$) имеет два неотрицательных корня, т. е. числа p и q удовлетворяют условиям $p^2 \geqslant 4q$, $q \geqslant 0$, $p \leqslant 0$. Если исходный многочлен имеет 4 действительных корня (а именно: $-x_1$, $-x_2$, x_2, x_1, где без ограничения общности считаем, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$), то они образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда совместна система

$$-2x_2 = -x_1 + x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 = -p, \quad x_1^2 x_2^2 = q$$

(см. теорему Виета и обратную к ней), т. е. когда $q = 0{,}09p^2$. Таким образом, все искомые пары чисел p, q описываются условиями

$$p \leqslant 0, \quad q = 0{,}09p^2$$

(неравенства $p^2 \geqslant 4q$ и $q \geqslant 0$ вытекают из последнего равенства).

21.3. По теореме Виета имеем равенства

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = 1, \quad \gamma + \delta = -q, \quad \gamma\delta = 1,$$

из которых получаем

$$\begin{aligned}
&(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta) = \\
&=(\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2)(\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2) = (1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2) = \\
&\qquad =(\gamma^2+1+\gamma^2\delta^2+\delta^2)+p(\gamma-\delta-\delta\gamma^2+\gamma\delta^2)-p^2\gamma\delta = \\
&\qquad\qquad = (\gamma+\delta)^2+p(\gamma-\delta)(1-\delta\gamma)-p^2 = q^2-p^2,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

21.4. По теореме Виета для корней x_1, x_2, x_3 многочлена $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$ имеем

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \beta/\alpha, \quad x_1x_2x_3 = -\beta/\alpha.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = \\
&\qquad = (x_1+x_2+x_3)\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3} = 1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = -1.
\end{aligned}$$

21.5. Сделаем замену $y = x - 3$, тогда числа $y_1 = x_1 - 3$, $y_2 = x_2 - 3$ и $y_3 = x_3 - 3$ являются корнями многочлена

$$(y+3)^3 - 6(y+3)^2 + a(y+3) + a = y^3 + 3y^2 + (a-9)y + 4a - 27.$$

По теореме Виета имеем равенства

$$\begin{aligned}
&y_1 + y_2 + y_3 = -3, \\
&y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = a - 9, \\
&y_1y_2y_3 = 27 - 4a,
\end{aligned}$$

а кроме того, должно выполняться соотношение $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости тождества $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 \equiv$

$$\equiv (y_1+y_2+y_3)^3 - 3(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)(y_1+y_2+y_3) + 3y_1y_2y_3,$$

из которого получаем необходимое и достаточное условие для a:

$$0 = (-3)^3 - 3(a-9)\cdot(-3) + 3(27-4a) = -27 - 3a,$$

т. е. $a = -9$.

21.6. Для корней u, v и uv многочлена $P(x)$ по теореме Виета нмеем равенства

$$u+v+uv=-a,$$
$$uv(1+u+v)=b,$$
$$u^2v^2=-c,$$

из которых в случае $a\neq 1$ получаем

$$b-c=uv(1+u+v+uv)=uv(1-a),$$

т. е. $uv=(b-c)/(1-a)$ — рациональное число. Так как число $u^2v^2=-c$ целое, то и число uv также целое (см. теорему 61). Поэтому из равенств

$$P(1)+P(-1)-2(1+P(0))=$$
$$=(1+a+b+c)+(-1+a-b+c)-2(1+c)=2(a-1)=$$
$$=-2(u+v+uv+1)=-2(1+u)(1+v)\neq 0,$$
$$2P(-1)=2(-1-u)(-1-v)(-1-uv)=-2(1+uv)(1+u)(1+v)$$

вытекает, что число

$$\frac{2P(-1)}{P(1)+P(-1)-2(1+P(0))}=1+uv$$

является целым. В случае $a=1$ имеем равенство $0=u+v+uv+1=(u+1)(v+1)$, поэтому один из корней равен -1, т. е. число $2P(-1)=0$ делится иа любое целое число.

21.7. Пусть a, b, c, d — корни многочлена

$$P(x)=x^4+x^3-1=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Докажем равенство

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=0$$

(из которого будет вытекать требуемое

$$(ab)^6+(ab)^4+(ab)^3-(ab)^2-1=$$
$$=(ab)^3\left((ab)^3-\left(\frac{1}{ab}\right)^3+ab-\frac{1}{ab}+1\right)=0,$$

так как по теореме Виета $abcd=-1$). Действительно, из равенств $P(a)=P(b)=0$ имеем $a^3=1/(a+1)$, $b^3=1/(b+1)$, откуда получаем

$$(ab)^3=\frac{1}{(1+a)(1+b)}=\frac{(1+c)(1+d)}{P(-1)}=-(1+c)(1+d).$$

Аналогнчно получаем $(cd)^3=-(1+a)(1+b)$. Следовательно, имеем

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1=-(1+c)(1+d)-(1+a)(1+b)+$$
$$+ab+cd+1=-1-a-b-c-d=0,$$

так как по теореме Внета $a+b+c+d=-1$.

21.8. Поскольку многочлеи $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ имеет два различных корня $0<x_1<x_2<1$, то $b^2>4ac$ и в силу теоремы Виета $0<c/a<1$, $b/a<0$, т. е. $a>c>0$, $b<0$. Далее, $P(1)=a+b+c>0$, откуда $a+c>-b$. Возводя в квадрат обе (положительные) части последнего неравенства, получаем $a^2+2ac+c^2 > b^2$, откуда имеем оценки $(a-c)^2 > b^2-4ac > 0$, из которых вытекает, что $a-c \geqslant 2$. Если предположить, что $a \leqslant 4$, то возможны лишь три набора целых коэффициентов a, c:

$$a_1=4,\ c_1=2; \qquad a_2=3,\ c_2=1; \qquad a_3=4,\ c_3=1,$$

а для коэффициента b должны быть выполнены соответственно три условия:

$$4 > b_1^2-32 > 0, \qquad 4 > b_2^2-12 > 0, \qquad 9 > b_3^2-16 > 0.$$

Но ни одно целое число не удовлетворяет ни одному из этих трех условий. Следовательно, $a \geqslant 5$. Наконец, уравнение $5x^2-5x+1=0$ имеет своими корнями числа $(5+\sqrt{5})/10$ и $(5-\sqrt{5})/10$, принадлежащие интервалу $(0; 1)$.

21.9. Предположим, что $c=0$. Тогда число c является корнем уравнения $x^4-ax^3-bx=0$, следовательно, отстается найти все многочлены вида x^3-ax^2-b, для которых числа a и b являются корнями. Если обозначить через d третий корень такого многочлена, то по теореме Виета будем иметь $a+b+d=a$, т. е. $d=-b$, далее, $ab+ad+bd=ab-b(a+b)=-b^2=0$, т. е. $b=0$. Наконец, замечаем, что любая тройка чисел вида $(a; 0; 0)$ удовлетворяет условию задачи. Теперь предположим, что $c \neq 0$. Тогда ни один из четырех корней a, b, c, d многочлена x^4-ax^3-bx+c не равен нулю. По теореме Виета имеем $a+b+c+d=a$, т. е. $d=-(b+c)$, далее,

$$ab+ac+bc+ad+bd+cd=$$
$$=ab+ac+bc-(a+b+c)(b+c)=-b^2-bc-c^2=0,$$
$$abc+abd+acd+bcd=abc-(ab+ac+bc)(b+c)=$$
$$=-a(b^2+bc+c^2)-b^2c-bc^2=-bc(b+c)=b,$$

т. е.

$$b^2=-c(b+c)=1, \quad c^2+bc+1=0,$$

наконец,

$$abcd=-abc(b+c)=ab=c,$$

т. е. $a=c/b$. Поэтому возможны лишь четыре набора чисел a, b, c:

$$b_{1,2}=1,\ c_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\ a_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$b_{3,4}=-1,\ c_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\ a_{3,4}=\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2},$$

каждый из которых удовлетворяет условию задачи. Таким образом, тройка $(a; b; c)$ либо имеет вид $(a; 0; 0)$, где a — любое комплексное число, либо совпадает с одной из троек:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ 1;\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ 1;\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ -1;\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ -1;\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

21.10. Пусть x_1, x_2 — корни многочлена x^2+ax+b. Точки x_1, x_2, 0 образуют вершины требуемого в задаче треугольника тогда и только тогда, когда $x_1 \neq 0$ и число x_2/x_1 равно либо i, либо $-i$ $\left(\text{так как модули чисел } x_1 \text{ и } x_2 \text{ совпадают, а их аргументы отличаются на величину } \frac{\pi}{2}+2\pi n \text{ для некоторого числа } n\in\mathbb{Z}\right)$. Это означает, что либо $x_2=ix_1$, либо $x_1=ix_2$, т. е. корни исходного уравнения имеют вид x_0, ix_0, причем $x_0\neq 0$. Согласно теореме Виета последние условия эквивалентны системе

$$\begin{cases} (1+i)\,x_0=-a, \\ ix_0^2=b, \\ x_0\neq 0, \end{cases}$$

которая совместна тогда и только тогда, когда $a^2=2b\neq 0$ (так как $2\left(ix_0^2\right)=((1+i)\,x_0)^2$).

21.11. Так как все коэффициенты многочлена $P(x)$ неотрицательны, то ни один из его корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не может быть положительным. Следовательно, этот многочлен имеет вид

$$P(x)=(x+\beta_1)\ldots(x+\beta_n),$$

где $\beta_i=-\alpha_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$. Используя теорему о средних (теорема 6), получаем неравенства

$$2+\beta_i=1+1+\beta_i\geqslant 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot\beta_i}=3\sqrt[3]{\beta_i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Учитывая, что по теореме Виета $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n=1$, получаем

$$P(2)=(2+\beta_1)\ldots(2+\beta_n)\geqslant 3^n\sqrt[3]{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}=3^n,$$

что и требовалось доказать.

21.12. Так как исходный многочлен имеет n положительных корней $x_1, \ldots, x_n$, то его степень не меньше n. Поэтому $a\neq 0$, и по теореме Виета имеем

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=1,$$

$$(-1)^n\sum_{i=1}^{n}x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n=n^2\frac{b}{a},$$

$$(-1)^n\,x_1x_2\ldots x_n=\frac{b}{a},$$

откуда $b\neq 0$. Учитывая теорему о средних, получаем условие

$$n^2=1\cdot\frac{(-1)^n\,n^2b/a}{(-1)^n\,b/a}=(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}}\right)=n^2,$$

которое выполняется лишь в случае, когда

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=1/n.$$

21.13. Допустим, что некоторое число α является решением каждого из двух данных уравнеиий, т. е.

$$\alpha^5=\alpha+1 \text{ и } \alpha^2=-a\alpha-b.$$

Тогда

$$\alpha+1=\alpha^5=\alpha(\alpha^2)^2=\alpha(-a\alpha-b)^2=\alpha(a^2(-a\alpha-b)+2ab\alpha+b^2)=$$
$$=(2ab-a^3)(-a\alpha-b)+(b^2-a^2b)\alpha=(a^4-3a^2b+b^2)\alpha+(a^3b-2ab^2),$$

следовательно, выполнено условие

$$(a^4-3a^2b+b^2-1)\alpha=-a^3b+2ab^2+1,$$

из которого получаем равенства

$$a^4-3a^2b+b^2-1=0,$$
$$-a^3b+2ab^2+1=0$$

(в противном случае число α являлось бы рациональным корнем многочлена x^5-x-1, не имеющего в силу теоремы 59 рациональных корней). Исключая из двух последних равенств число

$$b=(2a^5-2a-1)/(5a^3),$$

получаем равенство

$$a^{10}+3a^6-11a^5-4a^2-4a-1=0,$$

противоречащее рациональности числа a (ибо многочлен $x^{10}+3x^6-11x^5-4x^2-4x-1$ в силу той же теоремы 59 не имеет рациональных корией). Следовательно, многочлены x^5-x-1 и x^2+ax+b, где a, $b\in\mathbf{Q}$ не могут иметь общих корней.

21.14. Рассмотрим многочлен

$$Q(x)=P(a-x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0.$$

Тогда имеем

$$a_0=Q(0)=P(a)<0,$$
$$a_1=Q'(0)=-P'(a)\leqslant 0,$$
$$a_2=\frac{Q''(0)}{2!}=\frac{(-1)^2P''(a)}{2!}\leqslant 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n=\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^nP^{(n)}(a)}{n!}\leqslant 0.$$

Поэтому $Q(x)<0$ для всех $x\geqslant 0$, а значит, многочлен $P(x)$ не имеет корней при $x\in(-\infty;\ a]$. Аналогично, для многочлена

$$R(x)=P(b+x)=b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0$$

имеем

$$b_0=R(0)=P(b)>0,$$
$$b_1=R'(0)=P'(b)\geqslant 0,$$
$$b_2=\frac{R''(0)}{2!}=\frac{P''(b)}{2!}\geqslant 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_n=\frac{R^{(n)}(0)}{n!}=\frac{P^{(n)}(b)}{n!}\geqslant 0,$$

откуда $R(x) > 0$ при $x \geqslant 0$. Следовательно, многочлен $P(x)$ не имеет корней и при $x \in [b; +\infty)$. Тем самым доказано, что все действительные корни многочлена $P(x)$ лежат на $(a; b)$.

21.15. Докажем по индукции, что если n четно, то многочлен $P_n(x)$ принимает положительные значения при всех $x \in \mathbf{R}$ (следовательно, он не имеет действительных корней), а если n нечетно, то многочлен $P_n(x)$ имеет ровно один действительный корень. При $n=0$ имеем $P_0(x)=1>0$ при всех x. Пусть утверждение верно для всех значений, меньших числа $n \in \mathbf{N}$. Докажем, что оно верно и для значения n.

а) Пусть n нечетно. Тогда, согласно индукционному предположению, $P_n'(x)=P_{n-1}(x)>0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, поэтому функция $P_n(x)$ возрастает и не может обращаться в нуль более одного раза. Так как $P_n(0)=1>0$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = -\infty$ (т. е. функция $P_n(x)$ принимает отрицательное значение хотя бы в одной точке x), то непрерывная функция $P_n(x)$ хотя бы один раз принимает нулевое значение (см. теорему 28).

б) Пусть n четно. Тогда многочлен $P_n'(x)=P_{n-1}(x)$ имеет ровно один действительный корень $x_0 \neq 0$. Так как $P_n''(x)=P_{n-2}(x)>0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, то $P_n'(x)>0$ при $x>x_0$ и $P_n'(x)<0$ при $x<x_0$. Следовательно, при всех $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$P_n(x) \geqslant P_n(x_0) = P_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0.$$

Утверждение доказано.

21.16. Имеем

$$Q'(x) = P'(x) + \alpha P''(x) + \ldots + \alpha^{n-1} P^{(n)}(x)$$

(ибо $P^{(n+1)}(x)=0$). Поэтому

$$Q(x) - \alpha Q'(x) = P(x).$$

Без ограничения общности считаем, что старший коэффициент многочлена $P(x)$ положителен. Так как этот многочлен не имеет действительных корней, то его степень n — четное число, и для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство $P(x)>0$. Предположим, что многочлен $Q(x)$ имеет действительные корни $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k$. Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда, так как старший коэффициент многочлена $Q(x)$, равный старшему коэффициенту многочлена $P(x)$, положителен, то $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$, откуда имеем $Q(x)>0$ при $x>x_k$. Поэтому $Q'(x_k) \geqslant 0$ и

$$P(x_k) = Q(x_k) - \alpha Q'(x_k) \leqslant 0.$$

Если же $\alpha<0$, то при $x<x_1$ имеем $Q(x)>0$ (так как $\deg Q(x) = n$ — четное число). Поэтому $Q'(x_1) \leqslant 0$ и

$$P(x_1) = Q(x_1) - \alpha Q'(x_1) \leqslant 0.$$

В обоих случаях получено противоречие с неравенством $P(x)>0$. Следовательно, многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней.

21.17. Разложим исходный многочлен на множители:

$$P(x)=a(x-x_1)\ldots(x-x_n),\text{ где } a\neq 0.$$

Тогда

$$P'(x)=P_1(x)+\ldots+P_n(x),$$

где через $P_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ обозначен многочлен степени $n-1\geqslant 1$, удовлетворяющий тождеству

$$(x-x_k)\,P_k(x)\equiv P(x).$$

Заметим, что $P_k(x_i)=0$ при $k\neq i$, а значит,

$$P'(x_i)=P_i(x_i)\neq 0.$$

Рассмотрим многочлен

$$F(x)=-1+\frac{P_1(x)}{P'(x_1)}+\ldots+\frac{P_n(x)}{P'(x_n)},$$

степень которого (если $F(x)\not\equiv 0$) не превышает числа $n-1$. Для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ имеем равенства

$$F(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{P_j(x_i)}{P'(x_j)}-1=\frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)}-1=0,$$

а значит, многочлен $F(x)$ имеет n различных корней. Следовательно, $F(x)\equiv 0$. Так как старший коэффициент каждого из многочленов $P_k(x)$ равен a, то коэффициент многочлена $F(x)$ при x^{n-1} равен выражению

$$\frac{a}{P'(x_1)}+\ldots+\frac{a}{P'(x_n)},$$

но этот коэффициент равен нулю. Отсюда вытекает утверждение задачи.

21.18. Согласно теореме 57 многочлен с действительными коэффициентами может иметь только четное число чисто мнимых корней, которые разбиваются на пары взаимно сопряженных. Поэтому данный многочлен $P(x)$ представляется в виде $P(x)=a(x-ia_1)\ldots(x-ia_{2n})=$ $=a\left(x^2+a_1^2\right)\ldots\left(x^2+a_n^2\right)$, где $a, a_1, \ldots, a_{2n}$ — ненулевые действительные числа и $a_{n+k}=-a_k$ при $k=1, \ldots, n$. Поскольку у многочлена $P(x)$ коэффициент при x^2 отличен от нуля, а при x^1 — равен нулю, то многочлен $P'(x)$ будет иметь ровно один корень $x=0$. Докажем, что остальные его $n-2$ корня — чисто мнимые. Пусть $P'(b+ic)=0$, причем $b^2+c^2\neq 0$. Если при этом $P(b+ic)=0$, то $b+ic$ — корень исходного многочлена, а значит, это чисто мнимое число. Если же $P(b+ic)\neq 0$, то

$$0=\frac{P'(b+ic)}{P(b+ic)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b+i(c-a_k)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{b-i(c-a_k)}{b^2+(c-a_k)^2},$$

так как

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{x-ia_k}.$$

Поэтому действительная часть выражения $P'(b+ic)/P(b+ic)$ равна

$$b\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b^2+(c-a_k)^2}=0,$$

а значит, $b=0$, что и требовалось доказать.

21.19. Пусть корни многочленов P и Q совпадают (вместе с кратностями), тогда имеем

$$P(z)=a(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\ldots(z-z_k)^{n_k},$$
$$Q(z)=b(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\ldots(z-z_k)^{n_k},$$

где a, b — ненулевые комплексные числа, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$. Поэтому функция

$$f(z)=|P(z)|-|Q(z)|=(|a|-|b|)\left|(z-z_1)^{n_1}\ldots(z-z_k)^{n_k}\right|$$

не может принимать значения разных знаков. Пусть теперь функция $f(z)$ не принимает, для определенности, отрицательных значений. Тогда $\deg P \geqslant \deg Q$, так как в противном случае для достаточно больших по модулю значений z было бы выполнено неравенство $|P(z)|<|Q(z)|$, т. е. $f(z)<0$. Далее, предположим, что

$$P(z)=(z-z_0)^{n_0}P_0(z),$$

где $z_0 \in \mathbf{C}$, $n_0 \in \mathbf{N}$, $P_0(z)$ — многочлен, $P_0(z_0)\neq 0$. Пусть $Q(z)=$ $=(z-z_0)^{m_0}Q_0(z)$, где $m_0 \in \mathbf{Z}^+$, $Q_0(z)$ — многочлен, $Q_0(z_0)\neq 0$. Докажем, что $m_0 \geqslant n_0$. Действительно, если $0 \leqslant m_0 < n_0$, то число

$$f(z)=|z-z_0|^{m_0}(|(z-z_0)^{n_0-m_0}\cdot P_0(z)|-|Q_0(z)|)$$

будет отрицательным для некоторого значения z, достаточно близкого к z_0. Таким образом, если многочлен P имеет корни $z_1, \ldots, z_k$ кратностей $n_1, \ldots, n_k$ соответственно, то такие же корни не меньших кратностей $m_1, \ldots, m_k$ соответственно имеет и многочлен Q. Наконец, из неравенств

$$n_1 \leqslant m_1, \ \ldots, \ n_k \leqslant m_k, \quad n_1+\ldots+n_k \geqslant m_1+\ldots+m_k$$

вытекает, что

$$n_1=m_1, \ \ldots, \ n_k=m_k, \quad \deg P=\deg Q$$

и что других корней, кроме $z_1, \ldots, z_k$ у многочлена Q нет, следовательно, корни многочленов P и Q совпадают.

§ 22. Делимость и равенство многочленов

22.1. Доказательство проведем индукцией по $n \in \mathbf{Z}^+$. При $n=0$ утверждение справедливо, так как в этом случае $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} \equiv x^2+x+1$. Предположим, что для некоторого значения $n-1$ утверждение выполняется, т. е. многочлен $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ делится на многочлен x^2+x+1. Но тогда многочлен

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} \equiv (x+1)^2 (x+1)^{2n-1}+x \cdot x^{n+1} \equiv$$
$$\equiv (x^2+2x+1)(x+1)^{2n-1}+x \cdot x^{n+1} \equiv$$
$$\equiv (x^2+x+1)(x+1)^{2n-1}+x((x+1)^{2n-1}+x^{n+1})$$

также делится на многочлен x^2+x+1, т. е. утверждение верно и для значения n.

22.2. Обозначим $x_\varepsilon = \cos\alpha + i\varepsilon\sin\alpha$, где $\varepsilon \in \{-1;\ 1\}$. Тогда многочлен $Q(x)$ представляется в виде

$$Q(x) = (x-\cos\alpha - i\sin\alpha)(x-\cos\alpha+i\sin\alpha) = (x-x_1)(x-x_{-1}).$$

По формуле Муавра имеем $x_\varepsilon^n = (\cos\varepsilon\alpha + i\sin\varepsilon\alpha)^n = \cos\varepsilon n\alpha + i\sin\varepsilon n\alpha = \cos n\alpha + \varepsilon i\sin n\alpha$, поэтому

$$P(x_\varepsilon) = (\cos n\alpha + \varepsilon i\sin n\alpha)^n \sin\alpha - (\cos\alpha + \varepsilon i\sin\alpha)\sin n\alpha +$$
$$+\sin(n-1)\alpha = \cos n\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha =$$
$$= \sin(1-n)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0.$$

Следовательно, по теореме Безу многочлен $P(x)$ делится на каждый из многочленов $x-x_1$, $x-x_{-1}$ (не равных друг другу, так как $\sin\alpha \neq 0$), а значит, и на их произведение $Q(x)$.

22.3. Сделаем замены $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$ и $\sin t = x$. Получим, что искомый многочлен $R(x)$ степени меньше 4 есть остаток от деления многочлена $S(x) = 7x^{31}+8x^{13}-5x^9-2$ на многочлен $Q(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$, ибо тождество $S(x) \equiv P(x)Q(x)+R(x)$ должно быть выполнено при всех $x \in [-1;\ 1]$, а значит, и при всех $x \in \mathbf{C}$ (см. теорему 52). Поскольку $(x-1)Q(x) = x^5-1$, то существуют 4 различных значения переменной x, удовлетворяющих условию $Q(x)=0$. Для каждого из этих значений имеем равенства $x^5=1$ и

$$R(x) = S(x) = 7x^{31}+8x^{13}-5x^9-2 =$$
$$= 7x+8x^3-5x^4-2+5Q(x) = 13x^3+5x^2+12x+3.$$

Итак, многочлены $R(x)$ и $13x^3+5x^2+12x+3$, степени которых не превышают 3, в четырех различных точках принимают одинаковые значения, следовательно, они совпадают.

22.4. Многочлены $P(x) = 1+x+\ldots+x^m$ и $Q(x) = 1+x^n+\ldots+x^{mn}$ не имеют кратных корней, поскольку их не имеют многочлены $x^{m+1}-1 = (x-1)P(x)$ и $x^{n(m+1)}-1 = (x^n-1)Q(x)$. Поэтому, согласно теореме 54, многочлен $Q(x)$ делится на $P(x)$ в том и только в том случае, если каждый корень многочлена $P(x)$ является корнем многочлена $Q(x)$ или, что то же, если каждый отличный от 1 корень уравнения $x^{m+1}=1$ (удовлетворяющий автоматически и уравнению $x^{n(m+1)}=1$) не является корнем уравнения $x^n=1$. Таким образом, все искомые пары (и только они) чисел m, n должны быть таковы, чтобы система

$$\begin{cases} x^{m+1}=1, \\ x^n=1 \end{cases}$$

имела единственное решение $x=1$. Если $(m+1, n)=d>1$, то эта система имеет одним из своих решений число $x=\cos(2\pi/d)+$ $+i\sin(2\pi/d)\neq 1$. Если же $(m+1, n)=1$, то в силу теоремы 24 существуют такие целые числа k и l, что $k(m+1)+ln=1$, а значит, для любого решения x этой системы имеем $x=x^{k(m+1)+ln}=$ $=(x^{m+1})^k(x^n)^l=1$. Следовательно, пара натуральных чисел m, n тогда и только тогда удовлетворяет условию задачи, когда числа $m+1$ и n взаимно просты.

22.5. Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_n$ — коэффициенты многочлена $S(x)=$ $=s_0+s_1x+\ldots+s_nx^n$. Умножая обе части исходного тождества на многочлен $x-1$, получаем тождество

$$(x-1)(P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5))\equiv(x^5-1)S(x),$$

или

$$P(x^5)+(x^5-1)S_1(x)\equiv$$
$$\equiv-(x^5-1)S_2(x)+xP(x^5)+(x^2-x)Q(x^5)+(x^3-x^2)R(x^5),$$

где обозначено

$$S_1(x)=s_0+s_5x^5+s_{10}x^{10}+\ldots+s_{5m}x^{5m},$$
$$S_2(x)=S(x)-S_1(x), \quad m=[n/5].$$

Поскольку в левую часть последнего тождества переменная x входит лишь с показателями, кратными пяти, а в правую часть — лишь с показателями, не кратными пяти, то обе части тождества равны нулю, откуда имеем

$$P(x^5)\equiv-(x^5-1)S_1(x).$$

Подставляя в последнее тождество значение $x=1$, получаем $P(1)=0$, следовательно, по теореме Безу многочлен $P(x)$ делится на $x-1$.

22.6. Любой многочлен вида $P(x)=ax$, где a — константа, удовлетворяет условиям задачи. Докажем индукцией по $n\in\mathbf{Z}^+$, что для каждого искомого многочлена $P(x)$ выполнены равенства $P(n)=nP(1)$. При $n=0$ и $n=1$ эти равенства верны. Пусть они уже доказаны для чисел $n-1$ и n, где $n\in\mathbf{N}$. Тогда $P(n+1)=2P(n)-P(n-1)=$ $=(n+1)P(1)$, а значит, равенство справедливо и для числа $n+1$. Поскольку многочлен $P(x)-P(1)x$ имеет бесконечно много корней $x=0, 1, 2, \ldots$, то он равен нулю. Таким образом, искомые многочлены имеют вид $P(x)=ax$.

22.7. Подставляя в исходное тождество значения $x=0; 2$, получаем, что многочлен $P(x)$ имеет корни 0 и 1, а значит, делится на многочлен x^2-x. Далее, подставляя в тождество выражение $P(x) = (x^2-x)\,Q(x)$, получаем для многочлена $Q(x)$ тождество $Q(x) \equiv Q(x-1)$; отсюда имеем $Q(0)=Q(-1)=Q(-2)=\ldots$ Поэтому $Q(x)\equiv a$ — константа, и искомые многочлены имеют вид $P(x) = a(x^2-x)$. (Проверка показывает, что все многочлены такого вида удовлетворяют требуемому тождеству.)

22.8. Подставляя в исходное тождество последовательно значения $x=1$; -2; 0, получаем, что искомый многочлен $P(x)$ имеет корни 0, ± 1, а значит, делится на многочлен x^3-x. Далее, подставляя в тождество выражение

$$P(x)=(x^3-x)\,Q(x),$$

получаем для многочлена $Q(x)$ тождество $Q(x+1)-Q(x)\equiv 0$, откуда имеем $Q(0)=Q(1)=Q(2)=\ldots$ Поэтому $Q(x)\equiv a$ — константа, и искомые многочлены имеют вид $P(x)=a(x^3-x)$. (Проверка показывает, что все многочлены такого вида удовлетворяют требуемому тождеству.)

22.9. Пусть искомый многочлен имеет вид

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \text{ где } a_n\neq 0.$$

Предположим, что хотя бы один из коэффициентов $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ отличен от нуля. Выберем наибольшее значение $k<n$, для которого $a_k\neq 0$. Тогда имеем

$$P(x^2)\equiv a_nx^{2n}+a_kx^{2k}+\ldots+a_1x^2+a_0\equiv$$
$$\equiv(a_nx^n+a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0)^2\equiv(P(x))^2.$$

Сравнивая коэффициенты при x^{n+k}, получаем равенство $0=2a_na_k$, которое противоречит условиям $a_n\neq 0$, $a_k\neq 0$. Следовательно, $a_{n-1}=\ldots=a_1=a_0=0$ и $P(x)=a_nx^n$. Наконец, из условий $a_nx^{2n}\equiv P(x^2)\equiv(P(x))^2\equiv a_n^2x^{2n}$ получаем $a_n=1$, т. е. $P(x)=x^n$, где $n\in\mathbb{Z}^+$.

22.10. Обозначим $y=x-1$, $Q(y)=P(y-1)$. Тогда имеем

$$(P(x-2))^2=(P(y-1))^2=(Q(y))^2,$$
$$P(x^2-2x)=P(y^2-1)=Q(y^2),$$

а исходное тождество записывается в виде

$$Q(y^2)\equiv(Q(y))^2, \qquad y\in\mathbb{R},$$

т. е. совпадает, с точностью до обозначений, с тождеством задачи 22.9. Поэтому $Q(y)=y^n$ и $P(y)=(y+1)^n$, где $n\in\mathbb{Z}^+$.

22.11. Пусть ненулевой многочлен $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$, где $a_n\neq 0$, удовлетворяет условиям задачи. Тогда, сравнивая в исходном тождестве коэффициенты при x^{3n} и при x^0, получаем равенства $a_n^2=a_n$, $a_0^2=a_0$, откуда $a_n=1$ и $a_0=1$ (если $a_0=0$, то $P(x)=x^lP_1(x)$, где $P_1(0)\neq 0$, $l\in\mathbb{N}$, и из тождества

$$x^lP_1(x)\cdot(2x^2)^l\,P_1(2x^2)\equiv(2x^3+x)^l\,P_1(2x^3+x)$$

получаем тождество

$$2^lx^{2l}P_1(x)\,P_1(2x^2)\equiv(2x^2+1)^l\,P_1(2x^3+x);$$

отсюда $P_1(0)=0$ — противоречие). Пусть $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — произвольный корень многочлена $P(x)$; тогда число $2\alpha^3+\alpha$ также является его корнем, так как $P(2\alpha^3+\alpha)=P(\alpha)P(2\alpha^2)$. Далее,

$$|2\alpha^3+\alpha|=|\alpha|\cdot|2\alpha^2+1|\geqslant|\alpha|\cdot(2|\alpha|^2-1),$$

поэтому, если $|\alpha|=\rho>1$, то $|2\alpha^3+\alpha|>|\alpha|$, и многочлен $P(x)\not\equiv\not\equiv 0$ имеет бесконечно много различных корней $\beta_1=\alpha$, $\beta_{j+1}=2\beta_j^3+\beta_j$ при $j=1, 2, \ldots$, что невозможно. Следовательно, любой корень многочлена $P(x)$ по модулю не превосходит 1, но так как произведение всех корней этого многочлена равно 1 (по теореме Виета), то ни один из его корней не может быть по модулю меньше 1. Итак, $\rho=1$ и из цепочки равенств

$$1=|2\alpha^3+\alpha|^2=|2\alpha^2+1|^2=4\cos 2\varphi+5$$

имеем $\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$, и $\alpha=\pm i$. Так как многочлен $P(x)$ имеет действительные коэффициенты, то $P(x)=(x^2+1)^k$, где $k\in\mathbf{Z}^+$. Наконец, проверка показывает, что все многочлены такого вида удовлетворяют условиям задачи.

22.12. Доказательство проведем индукцией по $n\in\mathbf{N}$. Так как многочлен $Q_1(x)$ делится на себя, то при $n=1$ утверждение справедливо. Пусть теперь для некоторого значения $n\in\mathbf{N}$ уже доказано тождество $Q_n(x)\equiv R_n(x)Q_1(x)$, где $R_n(x)$ — многочлен. Тогда имеем

$$Q_{n+1}(x)\equiv P(Q_n(x)+x)-x\equiv P(R_n(x)Q_1(x)+x)-x\equiv$$
$$\equiv(P(R_n(x)Q_1(x)+x)-P(x))+(P(x)-x).$$

Пусть $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_kx^k$, тогда

$$Q_{n+1}(x)\equiv\sum_{k=0}^{m}a_k((R_n(x)Q_1(x)+x)^k-x^k)+Q_1(x)\equiv$$
$$\equiv\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)Q_1(x)S_k(x)+Q_1(x)\equiv Q_1(x)\cdot\left(1+\sum_{k=0}^{m}a_kR_n(x)S_k(x)\right),$$

где обозначено

$$S_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}(R_n(x)Q_1(x)+x)^j\,x^{k-j-1}$$

(мы воспользовались равенством

$$a^k-b^k=(a-b)\sum_{j=0}^{k-1}a^jb^{k-j-1}$$

при $a=R_n(x)Q_1(x)+x$, $b=x$). Таким образом, утверждение доказано и для значения $n+1$.

22.13. Заметим, что если многочлен $S(x)$ степени не выше трех удовлетворяет условию $S(x)\geqslant 0$ при всех $x\in\mathbf{R}$ и равенству $S(x_0)=0$, то он представляется в виде $S(x)=a(x-x_0)^2$, где $a\geqslant 0$. Поэтому

$$R(x)\equiv P(x)+a(x-x_0)^2,$$

$$Q(x)\equiv P(x)+b(x-x_0)^2\equiv$$
$$\equiv\frac{a-b}{a}P(x)+\frac{b}{a}(P(x)+a(x-x_0)^2)\equiv kP(x)+(1-k)R(x),$$

где $a\geqslant b\geqslant 0$, $k=1-\dfrac{b}{a}\in[0;1]$ (в случае $a=0$ имеем $R(x)\equiv Q(x)\equiv$ $\equiv P(x)$, поэтому требуемое тождество справедливо, например, при $k=1$). Аналогичное утверждение для многочленов четвертой степени неверно. Например, многочлены $P(x)=x^4$, $Q(x)=x^4+x^2$, $R(x)=$ $=2x^4+x^2$ удовлетворяют соотношениям $P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$, $x\in\mathbf{R}$, и $P(0)=R(0)$, но тождество $x^4+x^2\equiv kx^4+(1-k)(2x^4+x^2)$ не выполняется ни при каком значении k (для константы k имеем противоречивые равенства $1=k+2(1-k)$ и $1=1-k$).

22.14. Если некоторый многочлен $Q(x)=q_nx^n+\ldots+q_0$ удовлетворяет условиям $q_n\neq 0$ и $Q(P(x))\equiv P(Q(x))$, то, приравнивая старшие коэффициенты многочленов $Q(P(x))$ и $P(Q(x))$ степени $2n$, получаем $q_na^n=aq_n^2$, т. е. $q_n=a^{n-1}$. Поэтому, если, вопреки утверждению задачи, для некоторого значения n и многочлена $P(x)$ существуют два разных многочлена $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ степени n, удовлетворяющих требуемому тождеству, то многочлен $R(x)=Q_1(x)-Q_2(x)$ имеет степень $k<n$ (так как старшие коэффициенты многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ равны одному и тому же числу a^{n-1}) и удовлетворяет тождеству

$$R(P(x))\equiv Q_1(P(x))-Q_2(P(x))\equiv P(Q_1(x))-P(Q_2(x))\equiv$$
$$\equiv a\left(Q_1^2(x)-Q_2^2(x)\right)+b(Q_1(x)-Q_2(x))\equiv$$
$$\equiv(Q_1(x)-Q_2(x))(a(Q_1(x)+Q_2(x))+b)\equiv R(x)T(x),$$

где обозначено $T(x)=aQ_1(x)+aQ_2(x)+b$. Поэтому

$$2k=\deg R(P(x))=\deg(R(x)T(x))=k+n,$$

что противоречит неравенству $k<n$ и, тем самым, доказывает утверждение задачи.

22.15. Если $P(z)\equiv Q(z)Q(-z)$, то $P(-z)\equiv Q(-z)Q(z)\equiv P(z)$, т. е. $P(z)$ — четная функция. Пусть теперь известно, что ненулевой многочлен $P(z)$ — четная функция (если $P(z)\equiv 0$, то положим $Q(z)=0$). Докажем индукцией по числу m ненулевых корней многочлена $P(z)$, что существует многочлен $Q(z)$, удовлетворяющий тождеству $P(z)\equiv$ $\equiv Q(z)Q(-z)$. При $m=0$ многочлен $P(z)$ имеет вид $P(z)=az^n$, причем $a\neq 0$, и из четности функции $P(z)$ вытекает, что $n=2k$, где $k\in\mathbf{Z}^+$. Тогда многочлен $Q(z)=bz^k$, где $b^2=(-1)^ka$, удовлетворяет требуемому тождеству, так как $az^n\equiv bz^kb(-z)^k$. Пусть утверждение доказано для всех значений, меньших $m\in\mathbf{N}$. Докажем, что оно верно и для значения m. Действительно, если α — ненулевой

корень многочлена $P(z)$, то $P(-\alpha)=P(\alpha)=0$, поэтому
$$P(z)\equiv(z-\alpha)(z+\alpha)R(z),$$
где многочлен $R(z)$ — четная функция (ибо $R(-z)((-z)^2-\alpha^2)\equiv\equiv P(-z)\equiv P(z)\equiv R(z)(z^2-\alpha^2)$). Согласно предположению индукции существует многочлен $S(z)$, удовлетворяющий тождеству $R(z)\equiv\equiv S(z)S(-z)$. Положим $Q(z)=i(z-\alpha)S(z)$, тогда
$$P(z)\equiv i(z-\alpha)S(z)\,i(-z-\alpha)S(-z)\equiv Q(z)Q(-z).$$
Утверждение доказано.

22.16. Докажем утверждение задачи индукцией по числу m тех корней ненулевого многочлена $P(x)$, которые не являются действительными числами (если $P(x)\equiv 0$, то положим $n=1$ и $Q_1(x)=0$). Пусть $m=0$ и многочлен $P(x)$ удовлетворяет условию задачи. Тогда любой из его корней действителен и имеет четную кратность (если $P(x)\equiv(x-\alpha)^l R(x)$, где $\alpha\in\mathbf{R}$ и l нечетно, то $R(x)\geqslant 0$ при всех $x>\alpha$ и $R(x)\leqslant 0$ при всех $x<\alpha$, откуда число α является корнем многочлена $R(x)$). Поэтому имеет место тождество
$$P(x)\equiv a(x-\alpha_1)^{2l_1}(x-\alpha_2)^{2l_2}\ldots(x-\alpha_k)^{2l_k},$$
где $a>0$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\in\mathbf{R}$, $l_1, l_2, \ldots, l_k\in\mathbf{Z}^+$. Положим $n=1$ и
$$Q_1(x)=\sqrt{a}\,(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\ldots(x-\alpha_k)^{l_k},$$
тогда $P(x)\equiv Q_1^2(x)$. Пусть утверждение доказано для всех значений, меньших $m\in\mathbf{N}$. Докажем, что оно верно и для значения m. В самом деле, если многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условию задачи, имеет m корней, не являющихся действительными числами, то он представим в виде $P(x)=(x^2+2px+q)R(x)$, где $p^2<q$ (т. е. $x^2+2px+q=(x+p)^2+(q-p^2)>0$ при всех $x\in\mathbf{R}$), а многочлен $R(x)$, согласно предположению индукции, для некоторых многочленов $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ удовлетворяет тождеству
$$R(x)\equiv Q_1^2(x)+\ldots+Q_n^2(x).$$
Тогда из тождества
$$P(x)\equiv((x+p)^2+c^2)(Q_1^2(x)+\ldots+Q_n^2(x)),$$
где $c=\sqrt{q-p^2}$, вытекает, что многочлен $P(x)$ представим в виде суммы квадратов некоторых многочленов с действительными коэффициентами.

22.17. Исходный многочлен представляется в виде (см. теорему 58)
$$P(x)=aF_1(x)\ldots F_m(x)G_1(x)\ldots G_k(x),$$
где многочлены $F_i(x)$ и $G_j(x)$ имеют вид
$$F_i(x)=x-\alpha_i,\quad \alpha_i\leqslant 0,\quad i=1, \ldots, m;$$
$$G_j(x)=(x-\beta_j)(x-\overline{\beta}_j),\quad \beta_j\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R},\quad j=1, \ldots, k,$$

и $a > 0$. Заметим, что произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами снова является многочленом с неотрицательными коэффициентами. Поэтому достаточно доказать представимость каждого из многочленов $F_i(x)$ и $G_j(x)$ в виде отношения $Q(x)/R(x)$ многочленов с неотрицательными коэффициентами. Для многочлена $F(x) = x - \alpha$ ($\alpha \leqslant 0$) положим $Q(x) = F(x) = x + |\alpha|$, $R(x) = 1$. Далее, если $\operatorname{Re}\beta \leqslant 0$, то для многочлена $G(x) = (x-\beta)(x-\overline{\beta})$ положим $Q(x) = G(x) = x^2 + 2|\operatorname{Re}\beta|x + |\beta|^2$, $R(x) = 1$. Если же $\operatorname{Re}\beta > 0$, то без ограничения общности считаем, что $\arg\beta \in (0; \pi/2)$. Выберем такое $n \in \mathbf{N}$, чтобы выполнялись условия $2^n \arg\beta \in [\pi/2; \pi)$ и $2^s \arg\beta \in (0; \pi/2)$ при $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Так как $\arg(\beta^{2^r}) = 2^r \arg\beta$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$, то $\operatorname{Re}(\beta^{2^n}) \leqslant 0$ и $\operatorname{Re}(\beta^{2^s}) > 0$ при $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, имеем

$$G(x) \equiv (x-\beta)(x-\overline{\beta}) \equiv$$

$$\equiv \frac{(x^2-\beta^2)(x^2-(\overline{\beta})^2)}{(x+\beta)(x+\overline{\beta})} \equiv \frac{(x^4-\beta^4)(x^4-(\overline{\beta})^4)}{(x+\beta)(x+\overline{\beta})(x^2+\beta^2)(x^2+(\overline{\beta})^2)} \equiv \ldots$$

$$\ldots \equiv \frac{\left(x^{2^n}-\beta^{2^n}\right)\left(x^{2^n}-\overline{\beta}^{2^n}\right)}{(x+\beta)(x+\overline{\beta})\ldots\left(x^{2^{n-1}}+\beta^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}+\overline{\beta}^{2^{n-1}}\right)} \equiv \frac{Q(x)}{R(x)},$$

где многочлены

$$Q(x) = \left(x^{2^n}-\beta^{2^n}\right)\left(x^{2^n}-\overline{\beta}^{2^n}\right),$$

$$R(x) = (x+\beta)(x+\overline{\beta})\ldots\left(x^{2^{n-1}}+\beta^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}+\overline{\beta}^{2^{n-1}}\right)$$

имеют неотрицательные коэффициенты, так как каждый из многочленов вида $(x^l+\gamma)(x^l+\overline{\gamma}) \equiv x^{2l} + (2\operatorname{Re}\gamma)x^l + |\gamma|^2$, где $l \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Re}\gamma > 0$, имеет неотрицательные коэффициенты.

22.18. Введем обозначение $R_{n,i}(x) = x^i + x^{i+1} + \ldots + x^{n-i}$, где $i = 0, 1, \ldots, [n/2]$. Тогда любой многочлен $P(x) \in A(n)$ представим в виде

$$P(x) = a_0 R_{n,0}(x) + (a_1 - a_0) R_{n,1}(x) + \ldots$$

$$\ldots + \left(a_{[n/2]} - a_{[n/2]-1}\right) R_{n,[n/2]}(x) = \sum_{i=0}^{[n/2]} b_i R_{n,i}(x),$$

где $b_0 = a_0$, $b_i = a_i - a_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, [n/2])$ — неотрицательные числа. Аналогично, если $Q(x) \in A(m)$, то

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{[m/2]} c_j R_{m,j}(x),$$

где $c_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, [m/2]$. Наконец, если $P(x) \in A(n)$ и $Q(x) \in A(m)$, то многочлен

$$P(x)Q(x) = \sum_{i,j} b_i c_j R_{n,i}(x) R_{m,j}(x)$$

принадлежит множеству $A(m+n)$. Для доказательства этого утверждения достаточно проверить, что $R_{n,i}(x)R_{m,j}(x)\in A(m+n)$ при любых значениях $i\leqslant n/2$, $j\leqslant m/2$. Действительно, обозначим $p=n-2i$, $q=m-2j$ и предположим для определенности, что $p\leqslant q$. Тогда многочлен

$$R_{n,i}(x)\cdot R_{m,j}(x)=x^i(1+x+\ldots+x^p)x^j(1+x+\ldots+x^q)=$$
$$=x^{i+j}(R_{p+q,0}(x)+R_{p+q,1}(x)+\ldots+R_{p+q,p}(x))=$$
$$=R_{m+n,j+i}(x)+R_{m+n,j+i+1}(x)+\ldots+R_{m+n,j+n-i}(x)$$

принадлежит множеству $A(m+n)$. Утверждение доказано.

22.19. Обозначим через A_n множество 2^n всевозможных иаборов $\varepsilon=(\varepsilon_1;\ \ldots;\ \varepsilon_n)$, состоящих из чисел ε_i, каждое из которых равно либо 1, либо -1. Обозначим также $x_\varepsilon=\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_nx_n$ и докажем, что произведение $\prod\limits_{\varepsilon\in A_n}x_\varepsilon$ для каждого $n\in\mathbf{N}$ представляется в виде $Q_n(x_1^2,\ \ldots,\ x_n^2)$, где Q_n — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Для $n=1$ это утверждение верно, так как

$$\prod_{\varepsilon\in A_1}x_\varepsilon=x_1(-x_1)=Q_1(x_1^2).$$

Пусть теперь $n>1$ и $k\in\{1;\ 2;\ \ldots;\ n\}$; тогда, если обозначить

$$\varepsilon'=(\varepsilon_1;\ \ldots;\ \varepsilon_{k-1};\ \varepsilon_{k+1};\ \ldots;\ \varepsilon_n),$$

то будем иметь

$$\prod_{\varepsilon\in A_n}x_\varepsilon=\prod_{\varepsilon'\in A_{n-1}}((x_{\varepsilon'}+x_k)(x_{\varepsilon'}-x_k))=\prod_{\varepsilon'\in A_{n-1}}(x_{\varepsilon'}^2-x_k^2).$$

Если в последнем произведении раскрыть все скобки и привести подобные члены, то получится некоторый многочлен (с целыми коэффициентами) от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем переменная x_k в каждом одночлене будет иметь четную степень. Поскольку индекс k произвольный, то аналогичное утверждение справедливо для каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, доказано представление

$$\prod_{\varepsilon\in A_n}x_\varepsilon=Q_n(x_1^2,\ \ldots,\ x_n^2).$$

Заметим, что многочлен Q_n ненулевой, так как

$$|Q_n(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)|=1.$$

Выделяя в произведении

$$\prod_{\varepsilon\in A_n}(\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_nx_n)$$

сомножитель $x_1+\ldots+x_n$, получающийся при $\varepsilon=(1;\ \ldots;\ 1)$, и обозначая многочлен (с целыми коэффициентами от n переменных), равный произведению всех остальных сомножителей, через P_n, получаем требуемое тождество

$$(x_1+\ldots+x_n)\,P_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\equiv Q_n(x_1^2,\ \ldots,\ x_n^2)$$

для любого значения $n\in\mathbb{N}$.

22.20. Если многочлен $P(x)$ имеет корни $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s$ кратностей $k_1,\ \ldots,\ k_s$ соответственно, то многочлен $Q(x)$ имеет те же корни (но, возможно, других кратностей), так как $P_0=Q_0$. Аналогично, если многочлен $P(x)-1$ имеет корни $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_r$ кратностей $l_1,\ \ldots,\ l_r$ соответственно, то многочлен $Q(x)-1$ имеет те же корни, так как $P_1=Q_1$. Поэтому каждое из попарно различных чисел $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s$, $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_r$ является корнем многочлена $P(x)-Q(x)$. Предположим, что $P(x)-Q(x)\not\equiv 0$, тогда $\deg(P(x)-Q(x))\geqslant s+r$. Не уменьшая общности, считаем, что $\deg P(x)\geqslant\deg Q(x)\geqslant 1$. Поэтому

$$\deg P(x)=\deg(P(x)-1)\geqslant\deg(P(x)-Q(x)).$$

Далее, если кратность корня γ многочлена $P(x)-c$ равна $m>1$, то многочлен $P'(x)$ имеет корень γ кратности $m-1$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}\deg P'(x)&\geqslant(k_1-1)+\ldots+(k_s-1)+(l_1-1)+\ldots+(l_r-1)=\\&=(k_1+\ldots+k_s)+(l_1+\ldots+l_r)-(s+r)\geqslant\\&\geqslant\deg P(x)+\deg(P(x)-1)-\deg(P(x)-Q(x))\geqslant\deg P(x),\end{aligned}$$

что противоречит неравенству $\deg P'(x)<\deg P(x)$. Следовательно, $P(x)\equiv Q(x)$.

22.21. Допустим, что хотя бы один из многочленов P, Q, R, удовлетворяющих условию задачи, не равен нулю тождественно. Тогда существуют числа x_0 и $y_0\neq 0$ такие, что хотя бы одно из чисел $P(x_0,\ y_0)$, $Q(x_0,\ y_0)$, $R(x_0,\ y_0)$ отлично от нуля. Рассмотрим многочлены от одной переменной

$$P_1(x)=P(x,\ y_0),\qquad Q_1(x)=y_0^{2m}Q(x,\ y_0),\qquad R_1(x)=R(x,\ y_0).$$

По условию задачи имеем

$$x^{2m}P_1(x)+Q_1(x)\equiv(x+y_0)^{2m}R_1(x),$$

причем степени многочленов $P_1(x)$, $Q_1(x)$ и $R_1(x)$ меньше m. Обозначим

$$U(x)=x^{2m}P_1(x),\quad T(x)=U(x)+Q_1(x)\equiv(x+y_0)^{2m}R_1(x),$$
$$S(x)=T^{(m)}(x).$$

Так как многочлен $U(x)$ делится на x^{2m}, то число 0 является его корнем кратности не меньше $2m$, поэтому

$$U^{(m)}(0)=U^{(m+1)}(0)=\ldots=U^{(2m-1)}(0)=0.$$

Так как $\deg Q_1(x)<m$, то

$$Q_1^{(m)}(0)=Q_1^{(m+1)}(0)=\ldots=0.$$

Следовательно,

$$T^{(m)}(0)=T^{(m+1)}(0)=\ldots=T^{(2m-1)}(0)=0,$$

т. е.

$$S(0)=S'(0)=\ldots=S^{(m-1)}(0)=0.$$

Поскольку число $-y_0$ является корнем многочлена $T(x)=(x+y_0)^{2m}R_1(x)$ кратности не меньше $2m$, то

$$T^{(m)}(-y_0)=T^{(m+1)}(-y_0)=\ldots=T^{(2m-1)}(-y_0)=0,$$

а значит,

$$S(-y_0)=S'(-y_0)=\ldots=S^{(m-1)}(-y_0)=0.$$

Таким образом, числа 0 и $-y_0\neq 0$ являются корнями многочлена $S(x)$ кратностей, не меньших m. Следовательно, этот многочлен делится на многочлен $x^m(x+y_0)^m$ степени $2m$. Но $\deg T(x)<3m$, а значит, $\deg S(x)<2m$, поэтому $S(x)\equiv 0$. Отсюда вытекает, что многочлен $T(x)$ имеет степень меньше m, но он делится на многочлен $(x+y_0)^{2m}$, следовательно, $T(x)\equiv 0$, откуда $R_1(x)\equiv 0$. Из тождества $x^{2m}P_1(x)+Q_1(x)\equiv T(x)\equiv 0$ и неравенства $\deg Q_1(x)<m$ получим, что $P_1(x)\equiv Q_1(x)\equiv 0$. Таким образом, $P_1(x_0)=Q_1(x_0)=R_1(x_0)=0$, что противоречит выбору чисел x_0 и y_0. Утверждение задачи доказано.

§ 23. Различные свойства многочленов

23.1. а) Значения $P(x)$ при всех $x\in\mathbf{Z}$ имеют одинаковую четность тогда и только тогда, когда каждое из чисел

$$P(x+1)-P(x)=((x+1)^2+p(x+1)+q)-(x^2+px+q)=2x+1+p$$

делится на 2, т. е. когда p нечетно. При этом четность всех значений $P(x)$ однозначно определяется по четности числа $q=P(0)$. Таким образом, все значения $P(x)$ четны (нечетны) при нечетном p и четном (соответственно нечетном) q.

б) Поскольку $Q(x)=x(x^2+p)+q$, то значения $Q(3x)=3x(9x^2+p)+q$ при всех $x\in\mathbf{Z}$ делятся на 3 тогда и только тогда, когда число q делится на 3. При этом каждое из значений

$$Q(3x\pm 1)=(3x\pm 1)(9x^2\pm 6x+1+p)+q\equiv\pm(1+p)\pmod 3$$

делится на 3 в том и только в том случае, когда число $1+p$ делится на 3. Таким образом, все значения $Q(x)$ делятся на 3 при условиях

$$q\equiv 0\pmod 3,\quad p\equiv 2\pmod 3.$$

23.2. Заметим, что исходный многочлен можно представить в виде

$$P(x)=\frac{1}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 9}(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

Поскольку среди девяти последовательных целых чисел обязательно найдутся числа, делящиеся на 2, 5, 7, 9, то при любом $x\in\mathbf{Z}$ произведение $\prod\limits_{i=-4}^{4}(x+i)$ делится на $2\cdot 5\cdot 7\cdot 9$ (произведение взаимно простых чисел), т. е. число $P(x)$ является целым.

23.3. Пусть $2x^2-x-36=p^2$, где p — простое число. Тогда $p^2 = (x+4)(2x-9)=ab$, где обозначено $a=x+4$, $b=2x-9$, причем a, $b\in\mathbf{Z}$ и $2a-b=17$. Так как a — целое число, на которое делится p^2, то возможны лишь следующие 6 случаев:

1) $a=p^2$, $b=1$, тогда $2p^2-1=17$ и $p=3$, поэтому $x=a-4=p^2-4=5$;

2) $a=p$, $b=p$, тогда $2p-p=17$ и $p=17$, поэтому $x=a-4=p-4=13$;

3) $a=1$, $b=p^2$, тогда $2-p^2=17$ и $p^2=-15$, что невозможно;

4) $a=-p^2$, $b=-1$, тогда $-2p^2+1=17$ и $p^2=-8$, что невозможно;

5) $a=-p$, $b=-p$, тогда $-2p+p=17$ и $p=-17$, что невозможно;

6) $a=-1$, $b=-p^2$, тогда $-2+p^2=17$ и $p^2=19$, что невозможно.

Итак, искомыми значениями являются $x=5$ и $x=13$.

23.4. Функция $P(x)$ имеет на прямой одну точку минимума $x_0=-p/2$. При $x<x_0$ эта функция убывает, а при $x>x_0$ — возрастает. Поэтому для множества A значений функции $P(x)$ на отрезке $[-1;\ 1]$ имеем следующее: если $p<-2$, то $x_0>1$ и

$$A=[P(1);\ P(-1)]=[1+p+q;\ 1-p+q];$$

если $-2\leqslant p\leqslant 2$, то $-1\leqslant x_0\leqslant 1$ и

$$A=[P(x_0);\ \max\{P(-1);\ P(1)\}],$$

т. е.

$$A=[q-p^2/4;\ 1-p+q] \text{ при } -2\leqslant p\leqslant 0$$

и

$$A=[q-p^2/4;\ 1+p+q] \text{ при } 0\leqslant p\leqslant 2;$$

если $p>2$, то $x_0<-1$ и

$$A=[P(-1);\ P(1)]=[1-p+q;\ 1+p+q].$$

23.5. Рассмотрим многочлен $Q(x)=P(x)-2$ и докажем следующее утверждение: если многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами имеет четыре различных целых корня, то при любом значении $x\in\mathbf{Z}$ целое число $|Q(x)|$ либо равно нулю, либо является составным (в частности, оно не может быть равно 1). Пусть a, b, c, d — различные целые корни многочлена $Q(x)$. Тогда по теореме Безу имеем разложение $Q(x)=S(x)R(x)$, где

$$S(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

а $R(x)$ — некоторый многочлен. Так как старший коэффициент многочлена $S(x)$ равен единице, то многочлен $R(x)$ по теореме 48 имеет целые коэффициенты. Пусть x_0 — целое число, отличное от a, b, c и d. Тогда число $R(x_0)$ целое, а число $Q(x_0)$ делится на произведение $(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)(x_0-d)$ четырех различных целых чисел (хотя бы два из которых отличны от 1 и -1). Поэтому либо $Q(x_0)=0$, либо число $|Q(x_0)|$ — составное. В частности, ни при каком значении $x \in \mathbf{Z}$ число $Q(x)$ не равно ни одному из чисел -1, 1, 3, 5 и 7, а значит, число $P(x) = Q(x) + 2$ не равно ни одному из чисел 1, 3, 5, 7 и 9.

23.6. Множество $M = \{25; 26; 27; 28; 29; 30; 31\}$ и многочлен $P(x) = x + (x-25)(x-27)(x-28)(x-29)(x-31)$ удовлетворяют всем условиям задачи (при этом условие б) выполнено для $k = 25, 27, 28, 29, 31$, а условие в) — для $k = 30$).

23.7. а) Если $P(x)$ — константа, то $P'(x) \equiv P''(x) \equiv 0$, и неравенство 1) не выполнено. Пусть $\deg P(x) = n \geqslant 1$, тогда если n нечетно, то $\deg(P(x) - P''(x)) = n$ — нечетное число, откуда $P(x) - P''(x) \leqslant 0$ хотя бы в одной точке $x \in \mathbf{R}$, если же n четно, то $\deg(P'(x) - P''(x)) = n - 1$ — нечетное число, откуда $P'(x) - P''(x) \leqslant 0$ хотя бы в одной точке $x \in \mathbf{R}$. Таким образом, для любого многочлена $P(x)$ не выполнено либо неравенство 2), либо неравенство 1). Утверждение а) доказано.

б) Положим $P(x) = x^2 + 3$. Тогда при всех $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$P(x) - P'(x) \equiv x^2 - 2x + 3 > 0, \quad P(x) - P''(x) \equiv x^2 + 1 > 0,$$

т. е. ответ на вопрос п. б) отрицателен.

23.8. Можно считать, что все многочлены $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ ненулевые. Выберем какое-либо число x^+, большее всех действительных корней любого из этих многочленов. Тогда при всех $x \geqslant x^+$ функция $f(x)$ совпадает с многочленом

$$P^+(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k (\operatorname{sign} P_k(x^+)) P_k(x),$$

поскольку каждый из многочленов $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ на промежутке $[x^+; +\infty)$ имеет постоянный знак. Аналогично, выберем такое число x^-, чтобы при всех $x \leqslant x^-$ функция $f(x)$ совпадала с некоторым многочленом $P^-(x)$. Так как функция $f(x)$ не принимает дважды ни одного из своих значений, то многочлены $P^+(x)$ и $P^-(x)$ не являются константами, поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \infty.$$

Из свойств функции $f(x)$ следует, что есть лишь две возможности: либо

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

либо

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

В обоих случаях функция $f(x)$ принимает сколь угодно большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения. Покажем, что она принимает любое значение $c \in \mathbf{R}$. Действительно, существует точка x_1 такая, что $f(x_1) > c$ и существует точка x_2 такая, что $f(x_2) < c$. Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то по теореме о промежуточном значении существует точка x, лежащая между x_1 и x_2, для которой $f(x) = c$. Доказательство закончено.

23.9. Докажем индукцией по $n \in \mathbf{N}$ общее утверждение: если многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет условиям $P(k) = a_k$ при $k = n+2, \ldots, 2n+2$, то $P(2n+3) = a_{2n+3} - 1$. При $n=1$ имеем $P(3) = 2$, $P(4) = 3$, откуда $P(x) \equiv x - 1$ и $P(5) = 4 = a_5 - 1$. Пусть теперь утверждение верно для числа $n-1$. Докажем, что оно верно и для числа n. Пусть многочлен $P(x)$ имеет степень n и $P(k) = a_k$ для всех $k = n+2, \ldots, 2n+2$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x+2) - P(x+1)$ степени не выше $n-1$. Он удовлетворяет условиям $Q(k) = a_k$ при $k = n+1, \ldots, 2n$, так как $Q(k) = P(k+2) - P(k+1) = a_{k+2} - a_{k+1} = a_k$. Значит, $Q(2n+1) = a_{2n+1} - 1$ по предположению индукции. Но $Q(2n+1) = P(2n+3) - P(2n+2)$ и, следовательно, $P(2n+3) = P(2n+2) + Q(2n+1) = a_{2n+2} + a_{2n+1} - 1 = a_{2n+3} - 1$. Утверждение доказано.

23.10. а) Обозначим $x \equiv 2\cos t$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда

$$2\cos(0 \cdot t) \equiv 2 \equiv P_0(x), \quad 2\cos(1 \cdot t) \equiv 2\cos t \equiv x \equiv P_1(x).$$

Полагая в формуле

$$2\cos nt \equiv -2\cos((n-2)t) + 2(\cos t)\, 2\cos((n-1)t) \equiv \equiv -P_{n-2}(x) + xP_{n-1}(x)$$

значение n равным сначала 2, затем 3 и т. д., находим сначала многочлен $P_2(x)$, затем $P_3(x)$ и т. д. Заметим, что старший коэффициент любого из многочленов $P_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ равен 1.

б) Пусть $\alpha = m/n$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, и дробь m/n несократима. Тогда величина $2\cos(n\alpha\pi) = 2\cos(m\pi)$ равна либо 2, либо -2. В силу доказанного выше утверждения а) величину $2\cos(nt)$ можно представить в виде многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами от переменной $x = 2\cos t$. Тогда число $x_0 = 2\cos\alpha\pi$ является корнем многочлена $Q(x) = P_n(x) - 2\cos(m\pi)$, у которого все коэффициенты целые, а коэффициент при старшем члене равен 1. Поэтому (см. теорему 60) число $2\cos(\alpha\pi)$ может быть либо целым, либо иррациональным. Пусть $2\cos(\alpha\pi)$ — целое число. Так как $|2\cos\alpha\pi| \leqslant 2$, то оно равно одному из чисел $0, \pm 1, \pm 2$. Получаем, что если число $\cos(\alpha\pi)$ рационально (где $\alpha \in \mathbf{Q}$), то оно равно одному из чисел $0, \pm 1/2, \pm 1$.

23.11. Пусть произвольная горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает кривую $y = P(x)$ в четырех точках A, B, C, D с абсциссами $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ соответственно. Эта прямая триангулярна тогда и только тогда, когда $|AB| + |AC| > |AD|$, т. е. когда

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) > (x_4 - x_1),$$

что эквивалентно неравенству

$$x_2 - x_1 > x_4 - x_3$$

или $|AB|>|CD|$. Предположим, что, вопреки утверждению задачи, существуют две горизонтальные прямые, пересекающие кривую в точках A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 соответственно, причем $|A_1B_1|>|C_1D_1|$ и $|A_2B_2|\leqslant|C_2D_2|$. Из свойств многочленов четвертой степени вытекает, что любая прямая, параллельная этим двум прямым и проходящая между ними, также пересекает эту кривую в четырех точках. Тогда хотя бы одна из таких прямых пересекает кривую в точках A, B, C, D, для которых справедливо равенство $|AB|=|CD|$. Пусть середина E отрезка BC (она же — середина отрезка AD) имеет координаты $(x_0;\ y_0)$. Тогда многочлен $Q(u)$, графиком которого является данная кривая в системе координат $u=x-x_0$, $v=y-y_0$, имеет четыре корня u_1, u_2, u_3, u_4, являющихся абсциссами точек A, B, C, D соответственно, причем $u_1=-u_4$ и $u_2=-u_3$. Уравнение кривой будет записываться в виде

$$v=(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)=\left(u^2-u_1^2\right)\left(u^2-u_2^2\right),$$

поэтому $Q(u)=Q(-u)$, т. е. кривая симметрична относительно оси ординат. Следовательно, какой бы горизонтальной прямой ее ни пересекли, для точек пересечения A, B, C, D будет выполнено равенство $|AB|=|CD|$. Из полученного противоречия вытекает справедливость утверждения задачи.

23.12. Докажем требуемое утверждение индукцией по числу $n\in Z^+$. При $n=0$ многочлен $P(x)=Q(x)$ имеет по крайней мере один ненулевой коэффициент, так как $Q(x)\not\equiv 0$. Пусть для некоторого $n\geqslant 1$ уже доказано, что если многочлен $R(x)$ ненулевой, то многочлен $(x-1)^{n-1}R(x)$ имеет не менее n ненулевых коэффициентов. Предположим, что для некоторого ненулевого многочлена $Q(x)=x^rQ_0(x)$ (где $r\in \mathbf{Z}^+$, $Q_0(0)\neq 0$) многочлен

$$P(x)=(x-1)^n Q(x)=x^r(x-1)^n Q_0(x)$$

имеет, вопреки утверждению задачи, не более n ненулевых коэффициентов. Тогда многочлен $P_0(x)=(x-1)^n Q_0(x)$ также имеет не более n ненулевых коэффициентов, а его производная $P_0'(x)$ — не более $n-1$ ненулевых коэффициентов. Но

$$P_0'(x)\equiv(x-1)^n Q_0'(x)+n(x-1)^{n-1}Q_0(x)\equiv(x-1)^{n-1}R(x),$$

где $R(x)\not\equiv 0$ (ибо $P_0(x)$ не есть константа). Получено противоречие с индукционным предположением. Утверждение задачи доказано.

23.13. Многочлен $P_0(x)=4x^3-3x$ принадлежит множеству M, поскольку $P_0(-1)=-1$, $P_0(1)=1$, а в точках его экстремума имеем $P_0(-1/2)=1$, $P_0(1/2)=-1$. Докажем, что для любого многочлена $P(x)\in M$ имеет место оценка $|a|\leqslant 4$. Пусть, напротив, существует многочлен $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, удовлетворяющий неравенствам $|a|>4$ и $|P(x)|\leqslant 1$ при $|x|\leqslant 1$. Тогда рассмотрим ненулевой многочлен

$$Q(x)=P_0(x)-\frac{4}{a}P(x),$$

степень которого не превосходит двух. Поскольку $\left|\frac{4}{a}P(x)\right| < 1$ при $|x| \leqslant 1$, то $Q(-1) < 0$, $Q(-1/2) > 0$, $Q(1/2) < 0$, $Q(1) > 0$, а значит, многочлен $Q(x)$ имеет не менее трех корней. Полученное противоречие доказывает, что искомое число k равно 4.

23.14. Если $q = 1$, то положим $P(x) \equiv p$. Пусть $q > 1$, тогда рассмотрим интервал $I = (1/(2q),\ 3/(2q))$ длины $1/q$. Так как $3/(2q) < 1$, то существует такое число $m \in \mathbf{N}$, что $(3/(2q))^m < 1/q$. Обозначим $a = 1 - (1/(2q))^m$, тогда имеем неравенства $0 < 1 - qx^m < a < 1$ для всех $x \in I$. Выберем число $n \in \mathbf{N}$ столь большим, чтобы выполнялось неравенство $a^n < \frac{1}{pq}$, и положим

$$P(x) = \frac{p}{q}(1 - (1 - qx^m)^n).$$

Многочлен $P(x)$ имеет целые коэффициенты, так как

$$P(x) \equiv \frac{p}{q}(1 - (1 - qx^m))\,Q(x) \equiv px^m Q(x),$$

а коэффициенты многочлена $Q(x)$ — целые числа. Далее, при $x \in I$ имеем

$$\left|P(x) - \frac{p}{q}\right| = \frac{p}{q}\,|(1 - qx^m)^n| < \frac{p}{q}\,a^n < \frac{1}{q^2},$$

что и требовалось доказать.

23.15. Пусть обозначено $\alpha_k = P(k)$, $\beta_k = Q(k)$, где $k = 1, 2, 3, 4$, а многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют условию задачи. Тогда «четырехзначные» числа $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ и $\overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}$ не равны ни одному из чисел 0000, 0110, 1001, 1111, так как многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют третью степень. С другой стороны, число $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ не может принимать ни одного из видов $\overline{0\alpha_2 1\alpha_4}$, $\overline{0\alpha_2\alpha_3 1}$, $\overline{\alpha_1 11\alpha_4}$ или $\overline{\alpha_1 1\alpha_3 1}$, так как иначе из пп. б) и г) получаем противоречие: $\beta_1 = 1$ и $\beta_1 = 0$. Отсюда, учитывая п. в), заключаем, что условию задачи удовлетворяют следующие семь пар чисел $(\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4};\ \overline{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4})$ и только они: (0100; 1010), (1000; 0010), (1000; 1000), (1000; 1010), (1010; 0010), (1011; 0010) и (1100; 1010). Заметим, что при этом использованы всего шесть различных «четырехзначных» чисел, а именно, 0010, 0100, 1000, 1010, 1011 и 1100. Следуя интерполяционной формуле Лагранжа, каждому числу $\overline{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}$ поставим в соответствие многочлен $R(x)$, удовлетворяющий равенствам $R(k) = \gamma_k$ при $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда получим соответственно шесть многочленов:

$$R_1(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2-7x+4,$$

$$R_2(x)=\frac{1}{2}x^2-4x^2+\frac{19}{2}x-6,$$

$$R_3(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{3}x+4,$$

$$R_4(x)=-\frac{2}{3}x^3+5x^2-\frac{34}{3}x+8,$$

$$R_5(x)=-\frac{1}{2}x^3+4x^2-\frac{19}{2}x+7,$$

$$R_6(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{31}{6}x-2.$$

Итак, пара многочленов $(P(x);\ Q(x))$ совпадает с одной из пар: $(R_2(x);\ R_4(x))$, $(R_3(x);\ R_1(x))$, $(R_3(x):\ R_3(x))$, $(R_3(x);\ R_4(x))$, $(R_4(x);\ R_1(x))$, $(R_5(x);\ R_1(x))$, $(R_6(x);\ R_4(x))$.

23.16. Заметим, что существует только один многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условиям задачи, так как если бы существовал другой многочлен $Q(x)\not\equiv P(x)$ с такими же свойствами, то многочлен $P(x)-Q(x)$ степени, не большей n, имел бы не менее $n+1$ корней. Поскольку для многочлена $R(x)=x+\frac{1}{(n+1)!}(0-x)(1-x)\ldots(n-x)$ выполнено условие $R(-1)=0$, то по теореме Безу этот многочлен делится на $x+1$, т. е. $R(x)\equiv S(x)(x+1)$, где $S(x)$ — многочлен степени n. Так как $R(k)=k$ и $S(k)=k/(k+1)$ при $k=0, 1, \ldots, n$, то $S(x)$ удовлетворяет условиям задачи, а значит, $P(x)\equiv S(x)$ и

$$P(n+1)=\frac{R(n+1)}{n+2}=\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

23.17. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, получаем (ниже подразумевается, что $1\leqslant i\leqslant n$)

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k}}\prod_{i\neq k}\frac{(x-i)}{(k-i)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod\limits_{i\neq k}(x-i)}{C_{n+1}^{k}(-1)^{n-k}(n-k)!\,k!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{i\neq k}(x-i),$$

$$P(n+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{(n+1-k)}{(n+1)!}\prod_{i\neq k}(n+1-i)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}.$$

Поэтому $P(n+1)=0$, если n нечетно, и $P(n+1)=1$, если n четно.

23.18. Согласно интерполяционной формуле Лагранжа многочлен

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

можно представить в виде (ниже подразумевается, что $0\leqslant i\leqslant n$)

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)P(x_j).$$

Предположим, что утверждение задачи не выполняется, т. е. $|P(x_j)|<n!/2^n$ при $j=0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Тогда старший коэффициент многочлена $P(x)$, равный сумме старших коэффициентов в произведениях $\prod\limits_{i\neq j}\dfrac{x-x_i}{x_j-x_i}$, по модулю не превосходит числа

$$\left|\sum_{j=0}^{n}P(x_j)\prod_{i\neq j}\frac{1}{x_j-x_i}\right|<\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\prod_{i\neq j}\frac{1}{|x_j-x_i|}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\frac{1}{\prod\limits_{i<j}(j-i)}\,\frac{1}{\prod\limits_{i>j}(i-j)}=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!\,(n-j)!}=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}C_n^j=1.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

23.19. Согласно интерполяционной формуле Лагранжа имеем равенство (ниже подразумевается, что $-n\leqslant i\leqslant n$)

$$P(x)=\sum_{k=-n}^{n}P(k)\prod_{i\neq k}\frac{x-i}{k-i}.$$

Так как $|P(k)|\leqslant 1$ при $k=-n,\ -n+1,\ \ldots,\ n$, то

$$|P(x)|\leqslant\sum_{k=-n}^{n}|P(k)|\prod_{i\neq k}\frac{|x-i|}{|k-i|}\leqslant\sum_{k=-n}^{n}\prod_{i\neq k}\frac{|x-i|}{|k-i|}.$$

Для каждого действительного числа $x\in[-n,\ n]$ справедливо неравенство

$$\prod_{i\neq k}|x-i|\leqslant(2n)!.$$

Действительно, в случае $x\geqslant k$ имеем

$$\prod_{i\neq k}|x-i|=(|x-(k+1)|\ldots|x-n|)(|x-(k-1)|\ldots|x+n|)\leqslant$$

$$\leqslant(n-k)!\cdot((n-k+1)\ldots(2n))=(2n)!.$$

Аналогично рассматривается случай $x < k$. Таким образом, получаем

$$\prod_{i \neq k} \frac{|x-i|}{|k-i|} \leqslant (2n)! \prod_{i \neq k} \frac{1}{|k-i|} \leqslant (2n)! \frac{1}{(k+n)!\,(n-k)!},$$

$$|P(x)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \frac{(2n)!}{(k+n)!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!\,(2n-k)!} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} = 2^{2n},$$

что и требовалось доказать.

Глава 7

КОМБИНАТОРИКА

§ 24. Множества и подмножества

24.1. Найдем количество различных пар непересекающихся подмножеств при условии, что в паре выделены первое и второе подмножества. Для каждого из n элементов есть 3 возможности: его можно или включить в первое подмножество, или включить во второе подмножество, или не включать ни в одно из них. Поэтому количество указанных пар равно 3^n. Среди них есть одна пара, в которой оба подмножества пусты. Оставшиеся (3^n-1) пары в свою очередь разбиваются на двойки совпадающих пар, если разрешить переставлять в парах местами первое и второе подмножества. Таким образом, существует $(3^n-1)/2$ (неупорядоченных) пар подмножеств, из которых хотя бы одно не пусто. Всего же имеется $(3^n-1)/2+1=(3^n+1)/2$ различных пар подмножеств, удовлетворяющих условию задачи.

24.2. Так как существует всего 2^n различных подмножеств множества X, то различных упорядоченных пар подмножеств существует $(2^n)^2=4^n$. Разобьем все эти пары на 4^{n-1} четверок, включая каждую пару $(A_1;\ A_2)$ в одну четверку с парами $(\overline{A}_1;\ A_2)$, $(A_1;\ \overline{A}_2)$, $(\overline{A}_1;\ \overline{A}_2)$ (здесь через $\overline{A}$ обозначено дополнение $X \setminus A$ к подмножеству $A \subset X$). В результате получим разбиение множества всех пар на четверки. Действительно, пара $(\overline{A}_1;\ A_2)$, например, образует четверку $(\overline{A}_1;\ A_2)$, $(\overline{\overline{A}}_1;\ A_2)$, $(\overline{A}_1;\ \overline{A}_2)$, $(\overline{\overline{A}}_1;\ \overline{A}_2)$, которая совпадает с четверкой, образуемой парой $(A_1;\ A_2)$, ибо $\overline{\overline{A}}=A$. Аналогично проверяется, что пары $(A_1;\ \overline{A}_2)$, $(\overline{A}_1;\ \overline{A}_2)$ образуют ту же четверку. Далее, поскольку каждый элемент множества X принадлежит либо подмножеству A, либо его дополнению $\overline{A}$, то он входит в точности в одно из множеств четверки $A_1 \cap A_2$, $\overline{A}_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \overline{A}_2$, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$. Следовательно, суммарное количество элементов в любой четверке равно n. Так как всего четверок 4^{n-1}, то сумма количеств элементов всех множеств вида $A_1 \cap A_2$ равна $n \cdot 4^{n-1}$.

24.3. Докажем утверждение индукцией по $n>3$. При $n=4$, 5, 6, 7, 8, 9 возможные разбиения множества X_n на подмножества $A_1, \ldots, A_n$ указаны в таблице, где для каждого значения n и каждого из трех цветов указаны номера m тех множеств A_m, которые должны состоять из элементов соответствующего цвета (например,

Таблица 1

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	k	Синий	Красный	Белый
4	10	3	1; 2	3	4
5	15	5	1; 4	2; 3	5
6	21	7	1; 6	2; 5	3; 4
7	28	9	4; 5	3; 6	1; 2; 7
8	36	12	5; 7	4; 8	1; 2; 3; 6
9	45	15	6; 9	7; 8	1; 2; 3; 4; 5

при $n=6$ элементы множеств A_2 и A_5 должны быть красными). Пусть теперь $n \geqslant 10$ и для чисел, меньших n, в частности для числа $n-6$, утверждение доказано. Разбиение множества X_n построим следующим образом: множества $A_1, \ldots, A_{n-6}$ составим из элементов тех же цветов, что и в разбиении множества X_{n-6}. Множества A_{n-5}, A_n составим из элементов синего цвета, множества A_{n-3}, A_{n-2} — из элементов красного цвета, а множества A_{n-4}, A_{n-1} — из элементов белого цвета. Полученное разбиение удовлетворяет условию задачи, так как количество синих, красных и белых элементов (в отдельности) множества X_n больше количества соответствующих элементов множества X_{n-6} на одну и ту же величину, равную $2n-5$.

24.4. Зафиксируем элемент a_1 множества $X=\{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\}$ и будем рассматривать только подмножества, содержащие a_1. Число таких подмножеств равно числу подмножеств множества $\{a_2;\ \ldots;\ a_n\}$, т. е. числу 2^{n-1}. Следовательно, $k \geqslant 2^{n-1}$. С другой стороны, пусть выбрано более чем 2^{n-1} подмножеств множества X. Разобьем все возможные подмножества множества X на 2^{n-1} пар, объединяя в пару подмножество и его дополнение. Тогда по принципу Дирихле (теорема 1) хотя бы два выбранных подмножества обязательно составляют пару и, следовательно, не пересекаются. Таким образом, $k=2^{n-1}$.

24.5. Пусть количество элементов в множестве X равно n. Каждое из выбранных подмножеств $A_1, \ldots, A_{50}$ содержит более чем $n/2$ элементов, а значит, сумма количеств элементов всех этих множеств превышает $50 \cdot (n/2) = 25n$. По принципу Дирихле существует элемент множества X, принадлежащий не менее чем 26 выбранным подмножествам. Аналогично доказывается, что при любом значении $k < 50$ среди множеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ можно выбрать не менее $[k/2]+1$ множеств, содержащих общий элемент. Возьмем элемент множества X, который принадлежит не менее чем 26 множествам (этот элемент будет одним из пяти элементов множества B). Выбросим из рассмотрения какие-либо 26 множеств из числа тех, которым он принадлежит. Тогда найдется элемент, принадлежащий по крайней мере 13 из 24 оставшихся множеств. Выбросим из рассмотрения и эти 13 множеств. Тогда для оставшихся 11 множеств найдется элемент, принадлежащий по крайней мере шести из этих множеств. Для остальных пяти множеств существует элемент, принадлежащий по крайней мере трем из них. И, наконец, существует элемент, принадлежащий последним двум множествам. Таким образом, найдено не более пяти элементов множества X (возможно, менее пяти, так как некоторые из выбранных элементов могут совпадать), которые составляют множество B. При этом любое из множеств $A_1, \ldots, A_{50}$ содержит хотя бы один из этих элементов.

24.6. Рассмотрим любое множество A из данных 1978 множеств. Оно пересекается с каждым из остальных 1977 множеств, поэтому существует элемент $a \in A$, принадлежащий не менее чем 50 из этих множеств. (Действительно, если каждый из 40 элементов множества A принадлежит не более чем 49 множествам, то всего имеется не более $40 \cdot 49 = 1960$ множеств, отличных от A, что неверно.) Итак, пусть элемент a принадлежит множествам $A, A_1, A_2, \ldots, A_{50}$. Докажем, что тогда он принадлежит и любому другому множеству B из данных 1978 множеств. Действительно, никакие два из множеств $A, A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ не имеют общих элементов, отличных от a (так как любые два множества пересекаются ровно по одному элементу). Пусть $a \notin B$. Тогда множество B имеет с каждым из множеств $A, A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ общие элементы, которые отличны от a, а значит, различны. Поэтому множество B содержит не менее 51 элемента, что невозможно. Следовательно, элемент a принадлежит всем множествам.

24.7. Рассмотрим подмножества (если такие имеются), которые содержат нечетное количество элементов. Поскольку общее количество элементов четно, то количество множеств с нечетным числом элементов также четно. Разобьем эти множества на пары (произвольным образом). С множествами из каждой пары произведем операцию, указанную в условии задачи, т. е. из большего множества переведем в меньшее столько элементов, сколько содержит меньшее множество. После этого все множества будут содержать четное число элементов. Рассмотрим те множества, количество элементов в которых не делится на 4 (при $n \geqslant 2$, если же $n=1$, то элементов всего 2 и оба они уже содержатся в одном подмножестве). Поскольку общее количество элементов делится на 4, то количество таких подмножеств четно. Разобьем эти множества на пары произвольным образом и над каждой парой произведем операцию, указанную в условии задачи. После этого количество элементов в каждом множестве будет делиться на 4. Аналогично поступаем далее так, чтобы количество элементов в каждом множестве делилось (последовательно) на 8, 16, ... Когда количество элементов в каждом множестве будет делиться на 2^n, то все 2^n элементов будут содержаться в одном подмножестве.

24.8. Обозначим через A и B множества всех меньших и соответственно бо́льших чисел, из которых состоят пары множества M. Тогда по условию задачи ни один элемент из B не содержится в множестве A, а значит, $A \cap B = \varnothing$. Пусть количества элементов множеств A и B равны a и b соответственно. Тогда $a+b \leqslant n$, и в любой паре из M меньший элемент может принимать не более чем a значений, а больший — не более чем b значений. Поэтому число элементов в M не превосходит числа

$$ab \leqslant a(n-a) \leqslant ((a+n-a)/2)^2 = n^2/4.$$

Так как $ab \in \mathbf{Z}$, то $ab \leqslant [n^2/4]$. Если число n четное, то наибольшее количество элементов в множестве M достигается в случае

$$M = \{(j;\ l) \mid j \leqslant n/2;\ l > n/2\}$$

(тогда M состоит из $n^2/4$ элементов). Если же число n нечетное, то достаточно взять

$$M = \{(j;\ l) \mid j < n/2;\ l > n/2\}$$

(тогда M состоит из

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} = \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

элементов). Таким образом, и в случае четного, и в случае нечетного n наибольшее возможное количество элементов в множестве M равно $[n^2/4]$.

24.9. Обозначим искомое число через k_n. Предположим, что в множестве X выбраны k_n трехэлементных подмножеств, любые два из которых имеют ровно один общий элемент. Возможны три случая.

а) Никакой элемент множества X не входит более чем в два трехэлементных множества. Пусть одно из множеств есть $\{a;\ b;\ c\}$. Тогда любое из оставшихся множеств пересекается с множеством $\{a;\ b;\ c\}$, причем среди этих оставшихся множеств не более одного множества содержит элемент a, не более одного — элемент b и не более одного — элемент c. Поэтому всего множеств не более $1+3 \cdot 1=4$, т. е. $k_n \leqslant 4$.

б) Существует элемент множества X, входящий в три трехэлементных множества, но никакой элемент множества X не входит более чем в три трехэлементных множества. Тогда, если $\{a;\ b;\ c\}$ —

одно из множеств, то любое из оставшихся множеств пересекается с ним, причем не более двух из этих оставшихся множеств содержит элемент a, не более двух — элемент b и не более двух — элемент c. Поэтому всего множеств не более $1+3\cdot 2=7$, т. е. $k_n\leqslant 7$.

в) Существует элемент a множества X, принадлежащий по крайней мере четырем трехэлементным множествам. Тогда все остальные элементы этих четырех множеств различны, а любое из оставшихся множеств также должно содержать элемент a (иначе такое множество имело бы по одному различному общему элементу с каждым из четырех множеств, т. е. содержало бы по меньшей мере 4 элемента). Таким образом, в этом случае имеем $1+2\cdot k_n\leqslant n$, т. е. $k_n\leqslant[(n-1)/2]$.

Для $n=1$, 2, 3, 4, 5 имеем $k_1=k_2=0$, $k_3=k_4=1$, $k_5=2$. Пусть $n=6$. Тогда ни один элемент не принадлежит сразу трем множествам, иначе их обьединение состояло бы из 7 элементов. Поэтому имеет место случай а) и $k_6\leqslant 4$. С другой стороны, существует пример четырех множеств: если $X=\{a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f\}$, то трехэлементными подмножествами могут быть $\{a;\ b;\ c\}$, $\{c;\ d;\ e\}$, $\{e;\ f;\ a\}$, $\{b;\ d;\ f\}$. Таким образом, $k_6=4$. Пусть $n\in\{7;\ 8;\ \ldots;\ 16\}$. Тогда, если имеет место случай в), то количество множеств не превосходит $[(16-1)/2]=$ $=7$; если же имеет место случай а) или б), то это количество также не превосходит 7. С другой стороны, если множество X среди своих элементов содержит 7 элементов a, b, c, d, e, f, g, то существует пример семи трехэлементных подмножеств: $\{a;\ b;\ c\}$, $\{c;\ d;\ e\}$, $\{e;\ f;\ a\}$, $\{b;\ d;\ f\}$, $\{a;\ g;\ d\}$, $\{b;\ g;\ e\}$, $\{c;\ g;\ f\}$. Таким образом, $k_n=7$ при $n=7$, 8, ..., 16. Наконец, если $n\geqslant 17$, то в любом из случаев а), б), в) справедлива оценка $k_n\leqslant[(n-1)/2]$, причем эта оценка достигается при следующем выборе трехэлементных подмножеств: один из элементов является общим для всех множеств, а остальные элементы (кроме, быть может, одного в случае четного n) разбиваются на пары и образуют с общим элементом требуемые подмножества. Таким образом,

$$k_n=[(n-1)/2] \text{ при } n\geqslant 17.$$

24.10. Предположим противное. Тогда любые два из выбранных подмножеств либо не пересекаются, либо имеют ровно два общих элемента. Если подмножества A и B имеют ровно два общих элемента, то будем писать $A\sim B$. Пусть A, B, C — три подмножества. Докажем, что если $A\sim B$ и $B\sim C$, то $A\sim C$. Действительно, пусть $A=\{a;\ b;\ c\}$, $B=\{a;\ b;\ d\}$. Так как множество C должно иметь с множеством B два общих элемента, среди которых обязательно есть a или b, то C пересекается с A, а значит, $C\sim A$. Таким образом, все выбранные подмножества разбиваются на классы, в каждом из которых любые два разных множества имеют ровно два общих элемента, а множества из разных классов не пересекаются. Для каждого класса множеств возможны 3 случая:

1) класс охватывает ровно 3 элемента;

2) класс охватывает ровно 4 элемента;

3) класс охватывает больше 4 элементов.

В первом случае класс состоит ровно из одного множества, во втором — количество множеств не больше четырех (так как у множества из 4 элементов существует всего 4 различных трехэлементных подмножества). Рассмотрим третий случай. Пусть выбраны два множества из рассматриваемого класса: $A=\{a;\ b;\ c\}$ и $B=\{a;\ b;\ d\}$. Существует элемент e, отличный от a, b, c, d и принадлежащий некоторому множеству C из этого класса. Из условий $A\sim C$ и $B\sim C$ получаем, что $C=\{a;\ b;\ e\}$. Поэтому и любое множество D из этого класса в силу условий $A\sim D$, $B\sim D$, $C\sim D$ содержит элементы a и b. Тогда количество множеств в классе ровно на 2 меньше количества элементов в этом классе (каждому элементу, отличному от a, b, соответствует ровно одно множество, которому он принадлежит). Таким образом, в каждом классе количество множеств не больше количества элементов. Однако общее количество множеств больше общего количества элементов. Противоречие.

24.11. Пусть k — число элементов в том из множеств $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$, в котором оно наименьшее. Для определенности считаем, что множество A_1 содержит k элементов. Множества $B_1, \ldots, B_n$ между собой не пересекаются. Поэтому условие $A_1 \cap B_j \neq \varnothing$ выполнено не более чем для k из множеств $B_1, \ldots, B_n$. Пусть, например, это условие выполнено для множеств $B_1, \ldots, B_m$, где $m \leqslant k$. Число элементов в каждом из множеств $B_1, \ldots, B_m$ не меньше k (согласно выбору числа k), следовательно, их объединение содержит не менее mk элементов. Число же элементов в каждом из множеств $B_{m+1}, \ldots$ $\ldots, B_n$ не меньше $n-k$ (по условию, так как $A_1 \cap B_j=\varnothing$ при $j=$ $=m+1, \ldots, n$), а число таких множеств равно $n-m$. Поэтому всего в множестве $X=B_1 \cup \ldots \cup B_n$ не менее чем $l=km+(n-k)(n-m)$ элементов. Если $k \geqslant n/2$, то каждое из множеств $A_1, \ldots, A_n$ содержит не менее $n/2$ элементов, а всего элементов не менее $n\cdot(n/2)=$ $=n^2/2$. Если же $k<n/2$ (напомним, что $m \leqslant k$), то

$$l=n(n-k)-m(n-2k) \geqslant n(n-k)-k(n-2k)=$$
$$=2\left(\frac{n}{2}\right)^2+2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \geqslant \frac{n^2}{2}.$$

Теперь приведем пример, когда множество X содержит ровно $n^2/2$ элементов. Пусть n — четное число и $X=A_1 \cup \ldots \cup A_n$ — разбиение множества X на n подмножеств (попарно не пересекающихся), каждое из которых содержит ровно $n/2$ элементов. Положим $B_1=A_1, \ldots$ $\ldots, B_n=A_n$, тогда все условия задачи будут выполнены.

§ 25. Задачи с использованием графов

25.1. Предположим, что в множестве S найдутся три элемента a, b, c такие, что $a \longrightarrow b$ и $a \longrightarrow c$. Если $b \longrightarrow c$, то из $a \longrightarrow b$ и $b \longrightarrow c$ следует $c \longrightarrow a$, что противоречит условию $a \longrightarrow c$. Если же $c \longrightarrow b$, то из $a \longrightarrow c$ и $c \longrightarrow b$ следует $b \longrightarrow a$, что противоречит условию $a \longrightarrow b$. Аналогично доказывается, что в S нет элементов a, d, e таких, что $d \longrightarrow a$ и $e \longrightarrow a$. Если в множестве S имеется 4 или более элементов (один из которых обозначим через a), то из первого условия задачи следует, что в S найдутся или такие элементы b и c, что $a \longrightarrow b$ и $a \longrightarrow c$, или же такие элементы d и e, что $d \longrightarrow a$ и $e \longrightarrow a$. В обоих случаях получаем противоречие. Поэтому в множестве S не более трех элементов. Пример множества S с тремя элементами a, b, c, удовлетворяющего обоим условиям задачи, может быть таким: $a \longrightarrow b$, $b \longrightarrow c$, $c \longrightarrow a$.

25.2. Если незнакомых людей нет, то количество людей, которые знакомы со всеми, равно 1982. Пусть A и B не знакомы друг с другом. Тогда все остальные люди между собой знакомы (если C не знаком с D, то в группе A, B, C, D никто не знаком с остальными тремя). Если A и B знакомы со всеми остальными, то 1980 человек знакомы со всеми. Если же A не знаком также и с C, где $C \neq B$, то и A, и B, и C знакомы со всеми остальными 1979 людьми (так как в любой группе A, B, C, D только D может быть знакомым с остальными тремя), которые к тому же знакомы между собой. Таким образом, минимальное количество людей, знакомых со всеми, равно 1979.

25.3. Заметим, что каждый гость знает ровно двоих из остальных четырех гостей. В самом деле, допустим, что гость A имеет трех знакомых: B, C и D. Тогда если B и C знают друг друга, то среди A, B и C нет незнакомых. Поэтому B и C (аналогично B и D, C и D) незнакомы, и среди B, C, D нет знакомых. Аналогично рассматривается случай, когда A имеет трех незнакомых. Пусть теперь знакомые A — гости B и C. Тогда B и C не знакомы, и у B есть знакомый D ($D \neq A$, $D \neq C$). Если D знаком с C, то каждый из гостей A, B, C, D знаком с двумя гостями внутри этой четверки, поэтому пятый гость E не может быть ни с кем знаком. Таким образом, D не знаком с C, и так как он не знаком с A, а C не знаком с B, то C и D знакомы с E. Следовательно, гостей можно рассадить, например, в таком порядке: E, D, B, A, C.

25.4. Допустим, что никакие трое из математиков не говорят на одном и том же языке. Рассмотрим произвольного математика A. Он говорит не более чем на трех языках, причем на каждом из этих языков говорит еще не более чем один из математиков (иначе мы получили бы противоречие с допущением). Поэтому найдутся пять математиков, с которыми A не говорит на одном языке. Пусть один из этих пяти — математик B. По той же причине, что и A, математик B может говорить на одном языке не более чем с тремя математиками. Поэтому среди остальных четырех математиков, не говорящих на одном языке с A, найдется математик C, не говорящий на одном языке с B. Таким образом, в тройке A, B, C никакие двое не говорят на одном языке, что противоречит условию задачи.

25.5. а) Предположим, что среди любых четырех человек имеются двое незнакомых. Тогда, скажем, человек A не может иметь более трех незнакомых: если A имеет четырех незнакомых, то, согласно предположению, среди них найдутся двое незнакомых между собой, а они образуют вместе с A тройку попарно незнакомых людей. Итак, A имеет не более трех незнакомых, а значит, не менее шести знакомых. Пусть A знаком с B_1, B_2, ..., B_6. Тогда среди B_1, B_2, ..., B_6 нет тройки попарно знакомых людей (иначе эта тройка вместе с A образовывала бы четверку попарно знакомых людей, что противоречило бы предположению). Значит, среди любых трех человек из B_1, B_2, ..., B_6 есть двое незнакомых. Тогда B_1 не может иметь более двух незнакомых среди B_2, ..., B_6 (если B_1 не знаком, например, с B_2, B_3, B_4, то B_2, B_3 и B_4 попарно знакомы). Поэтому B_1 имеет по крайней мере троих знакомых среди B_2, ..., B_6. Тогда в этой тройке людей найдутся двое знакомых друг с другом, образующих вместе с B_1 и A четверку попарно знакомых, что противоречит предположению.

б) Докажем, что утверждение останется верным. Если какой-либо человек знаком по крайней мере с шестью людьми, то доказательство аналогично проведенному выше в п. а). Если же каждый человек знаком ровно с пятью людьми, то общее количество пар знакомых равно $9 \cdot 5/2$, т. е. не является целым, что невозможно. Наконец, если найдется человек, не знакомый по крайней мере с четырьмя людьми, то эти четверо попарно знакомы (иначе нашлась бы тройка попарно незнакомых людей), т. е. образуют искомую четверку людей. Утверждение доказано.

25.6. Предположим, что существуют пять городов, соединенных указанным в задаче образом. Докажем прежде всего, что ни из какого города не выходят три линии одного и того же вида транспорта. Пусть город A соединен с городами B, C и D, например, самолетом. Тогда по условию ни одна пара из городов B, C и D не может быть соединена самолетом. Пусть B и C соединены, например, поездом. Города C и D не могут быть соединены автобусом, так как иначе город C имел бы все три вида транспорта. Поэтому C и D соединены поездом. По тем же причинам города B и D также соединены поездом. Получили, что B, C и D попарно соединены поездом. Противоречие. Итак, из каждого города выходят две транспортные линии одного вида и две транспортные линии некоторого другого вида. Тогда каждый город обслуживается ровно двумя видами транспорта. Поэтому хотя бы один вид транспорта обслуживает не более чем три города (иначе всего городов было бы не менее чем $4 \cdot 3/2 = 6$). Если он обслуживает ровно два города, то из каждого из этих городов выходит только одна транспортная линия такого вида, что невозможно. Если же он обслуживает ровно три города, то они должны быть соединены попарно этим видом транспорта, что также невозможно. Таким образом, мы доказали, что для пяти городов условие задачи невыполнимо. Тем более оно невыполнимо для большего числа городов. Если же рассмотреть четыре города A, B, C и D, которые связаны следующим образом: A с B поездом, C с D автобусом, а все остальные пары самолетом, то все условия задачи будут выполнены. Следовательно, наибольшее число городов равно 4.

25.7. Докажем, во-первых, что любые два знакомых имеют одинаковое число знакомых. Действительно, пусть A и B знакомы, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — все знакомые A, отличные от B. Тогда, согласно условию задачи, никакие двое среди $B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ не знакомы между собой. Рассмотрим A_1. Поскольку A_1 не знаком с B, то он имеет с B двух общих знакомых: A и, например, B_1. Так как B_1 и A не знакомы друг с другом, то, кроме B и A_1, у них нет общих знакомых, а значит, B_1 не знаком с $A_2, \ldots, A_n$. Аналогично находим B_2 — общего знакомого A_2 и B (отличного от B_1, так как B_1 не знаком с A_2) и т. д. Таким образом, всем знакомым A (отличным от B) соответствуют разные знакомые B (отличные от A), а значит, число знакомых A не превосходит числа знакомых B. Аналогично доказывается, что число знакомых B не превосходит числа знакомых A. Поэтому A и B имеют одинаковое число знакомых. Во-вторых, если C и D не знакомы, то они имеют общего знакомого E. Тогда по доказанному выше C и E имеют одинаковое число знакомых, то же имеет место и для D и E. Следовательно, C и D также имеют одинаковое число знакомых, совпадающее с числом знакомых E.

25.8. Среди всех $3n$ учеников выберем такого ученика (точнее, одного из таких учеников), который имеет наибольшее число k знакомых в одной из двух других школ. Пусть для определенности им оказался ученик A первой школы, который знает k учеников, например, из второй школы. Тогда A знает $n+1-k$ учеников из третьей школы, причем $n+1-k \geqslant 1$, так как $k \leqslant n$. Рассмотрим ученика B третьей школы, знакомого с A. Если B знает хотя бы одного ученика C из k знакомых A во второй школе, то ученики A, B, C образуют искомую тройку. Если же B не знает никого из k знакомых A во второй школе, то в этой школе он знаком не более чем с $n-k$ учениками, а значит, в первой школе он знаком не менее чем с $n+1-(n-k)=k+1$ учениками, что противоречит выбору k. Утверждение доказано.

25.9. Докажем индукцией по $n \in \mathbb{N}$, что если в графе с $2n$ вершинами никакие три ребра не образуют треугольника, то число ребер не превосходит n^2. Для $n=1$ число ребер всегда не превосходит $1=n^2$. Пусть утверждение доказано для числа n. Докажем его для числа $n+1$. Пусть имеется граф с $2(n+1)$ вершинами, никакие три ребра которого не образуют треугольник. Выберем две вершины, соединенные ребром (если в графе нет ни одного ребра, то все доказано). Тогда каждая из оставшихся $2n$ вершин соединена ребром не более чем с одной из выбранных вершин. Эти $2n$ вершин соединены между собой, по предположению индукции, не более чем n^2 ребрами. Тогда общее число ребер не превосходит $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Утверждение доказано. Наконец, если $2n$ вершин разделить на два множества по n вершин, а затем любые две вершины, лежащие в разных множествах, соединить ребрами, то получится граф с n^2 ребрами, не содержащий ни одного треугольника.

25.10. Будем решать задачу индукцией по n — числу юношей. Для $n=1$ утверждение вытекает из того, что для одного юноши обязательно найдется знакомая девушка. Пусть утверждение доказано для всех чисел, меньших n. Докажем его для числа n. Рассмотрим два случая.

1) Найдется такая группа A из $k<n$ юношей, что общее число всех знакомых с ними девушек равно k. Пусть каждый юноша из этой группы танцует со знакомой девушкой (это возможно в силу предположения индукции). Тогда для оставшихся юношей и девушек условие задачи будет выполнено. Действительно, если имеется группа B из i не входящих в A юношей, то у юношей из объединения множества B с множеством A имеется не менее чем $i+k$ знакомых девушек. Юноши, входящие в A, знакомы в общей сложности не более чем с k девушками. Значит, i юношей из группы B знакомы по крайней мере с i из оставшихся девушек. Таким образом, по предположению индукции, каждый из юношей, не входящих в A, также может танцевать со знакомой ему девушкой.

2) У любой группы из любого количества $k<n$ юношей число знакомых девушек превышает k. Тогда, если один из юношей будет танцевать со знакомой ему девушкой, то множество оставшихся юношей и девушек будет по-прежнему удовлетворять условию задачи. Действительно, любая группа из $k\leqslant n-1$ оставшихся юношей знакома не менее чем с $k+1$ девушками (одна из которых, возможно, уже танцует). Значит, по предположению индукции, каждый из оставшихся юношей также сможет танцевать со знакомой ему девушкой.

25.11. Докажем индукцией по $n\in\mathrm{N}$, что если есть n компаний $A_1, \ldots, A_n$ и N городов $P_1, \ldots, P_N$, причем $N>2^n$ и любые два города соединены авиалиниями, то хотя бы одна компания сможет обеспечить круговое путешествие с нечетным числом авиалиний. Поскольку $1983>1024=2^{10}$, то требуемое в задаче утверждение будет доказано. Если $n=1$, то $N\geqslant 3$ и $P_1P_2P_3P_1$ — искомое путешествие.

Пусть утверждение доказано для числа $n-1$. Докажем его для числа n. Пусть все круговые путешествия компании A_n состоят из четного числа авиалиний (иначе утверждение можно считать доказанным). Тогда разобьем города на две группы

$$R=\{R_1; \ldots; R_k\} \quad \text{и} \quad Q=\{Q_1; \ldots; Q_m\}$$

следующим образом. Положим $P_1 \in R$. Далее, все города, в которые можно прилететь на самолетах компании A_n без пересадок из P_1, включим в группу Q. Все города, в которые можно прилететь на самолетах компании A_n из городов, лежащих в Q, без пересадок, включим в R, и т. д. При этом никогда не случится так, что два города из одной группы (R или Q) связаны авиалинией компании A_n (иначе появится круговое путешествие с нечетным числом авиалиний). Если мы исчерпали все города, в которые можно прилететь из P_1 на самолетах компании A_n, то включим в R любой из оставшихся городов и продолжим описанные действия (до тех пор, пока все города не будут распределены по группам). Хотя бы в одной из групп R или Q находится более чем 2^{n-1} городов (ибо $k+m= = N > 2^n$), а внутри каждой из этих групп все перелеты обеспечивают компании $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ (так как компания A_n соединяет только города из R с городами из Q). Остается применить предположение индукции.

§ 26. Различные комбинаторные задачи

26.1. Допустим, что после нескольких указанных в задаче операций получился набор из одних нулей. Пусть это в первый раз произошло после k-й операции. Тогда после $(k-1)$-й операции все цифры на окружности были одинаковые и не равные нулю, а следовательно, равные единице. Значит, после $(k-2)$-й операции любые две соседние цифры на окружности были различными. Поэтому нулей было столько же, сколько и единиц, а общее количество цифр было четным, что противоречит условию.

26.2. Разобьем всю плоскость на одинаковые квадраты, состоящие из четырех клеток каждый. Далее, в каждом из этих квадратов «левую верхнюю» клетку назовем черной, «правую верхнюю» — белой, «левую нижнюю» — красной, а «правую нижнюю» — синей. Тогда, с одной стороны, любые две клетки одного цвета не соприкасаются. С другой стороны, среди отмеченных клеток можно выбрать не менее четверти таких, которые имеют одинаковый цвет (в противном случае всего клеток было бы менее чем $4\cdot(n/4)=n$).

26.3. Каждый из 26 единичных кубиков, отличных от центрального, будем считать либо черным, либо белым в шахматном порядке: 12 кубиков, имеющих ровно по две грани на поверхности большого куба, назовем белыми, а остальные 14 кубиков — черными. Заметим, что в любой паре таких кубиков, имеющих общую грань, один кубик будет белым, а другой — черным. Указанные 26 кубиков мышка съесть не сможет, поскольку в противном случае их можно было бы разбить на 13 пар, каждая из которых состояла бы из белого и черного кубика, а тогда белых и черных кубиков было бы поровну.

26.4. Без ограничения общности считаем, что $A_1 < A_2 < \ldots < A_n$. Выберем наименьший номер i, для которого среди точек $A_1, \ldots, A_i$ присутствуют точки всех четырех цветов. Тогда цвет A_i отличен от цветов $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Теперь выберем наибольший номер $j < i$, для которого среди точек $A_j, \ldots, A_i$ присутствуют точки всех четырех цветов. Тогда цвет A_j отличен от цветов $A_{j+1}, \ldots, A_i$ и отрезок $[A_j; A_i]$ — искомый.

26.5. Пусть k — число отрицательных треугольников. Для каждого треугольника перемножим числа, соответствующие его сторонам, а затем перемножим все полученные произведения. В итоге получится число $(-1)^k$. Заметим, что число, соответствующее любому отрезку, входит в это произведение $n-2$ раза, так как любой отрезок принадлежит $n-2$ треугольникам. Следовательно, полученное произведение равно $(-1)^{(n-2)m}$, поэтому число k имеет ту же четность, что и число $(n-2)m \equiv nm \pmod 2$.

26.6. Предположим, что машина имеет запас бензина, достаточный для того, чтобы проехать всю дорогу без заправок. Пусть она начинает движение с любой станции (забирая по дороге весь бензин на каждой станции) и оканчивает движение в той же точке и с тем же количеством бензина. Обозначим через A станцию, подъезжая к которой, машина имела в баке наименьшее за все время движения количество бензина. Пусть в этот момент количество бензина в машине было равным x. Если машина с количеством бензина, равным x, начнет движение со станции A, то в баке всегда будет бензина не меньше x. Следовательно, если машину с пустым баком заправить на станции A, то она сможет, начиная движение с этой станции, совершить поездку по кругу (так как это количество x бензина можно с самого начала вылить и совершить путешествие без него).

26.7. Разобьем доску на четыре части по две вертикали в каждой. Пусть черные в ответ на ход белых в какой-либо части делают ход в той же части. Тогда, если черные лишат белых возможности ходить в каждой из частей, то белые не смогут ходить вообще. Итак, достаточно описать выигрышную стратегию черных для случая, когда игра происходит в пределах двух вертикалей. Если белые передвигают свою фишку на k клеток вперед, то черные передвигают свою фишку, стоящую в другой вертикали, на k клеток вперед. Если же белые передвигают свою фишку на k клеток назад, то черные передвигают свою фишку, стоящую в той же вертикали, на k клеток вперед. Тогда после каждого хода черных расстояния между фишками, стоящими в одной вертикали, и фишками, стоящими в другой вертикали, становятся одинаковыми. Поэтому на любой ход белых черные имеют ответный ход, а значит, черные не могут проиграть. С другой стороны, черные ходят только вперед, так что игра обязательно закончится через конечное число ходов. Таким образом, черные выигрывают.

26.8. Разобьем все целые числа, начиная с двух, на непересекающиеся пары вида $(2k;\ 2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда среди трех чисел n, $n-1$, $n-2$ два обязательно образуют пару. Начинающий должен первым ходом фишку, стоящую на поле с тем номером, который не попал в пару, переставить на поле с номером 1. После этого переставленная фишка двигаться уже не будет. Пусть другой игрок своим ходом переставил одну из фишек на некоторое поле m. Тогда первый игрок должен оставшуюся фишку поставить на поле $m-1$ или $m+1$ в зависимости от того, какое из этих чисел образует пару с номером m. Это всегда можно сделать, так как пары не пересекаются ни друг с другом, ни с числом 1. Действуя так же и далее, первый игрок не может проиграть. Поскольку игра обязательно закончится через конечное число ходов, то проиграет второй игрок.

26.9. Занумеруем горизонтали доски снизу вверх числами 0, 1, ..., 7 и вертикали доски слева направо теми же числами. Каждой клетке доски поставим в соответствие сумму номеров вертикали и горизонтали, на пересечении которых эта клетка находится. «Дельфин» начинает свой путь в клетке, которой соответствует число 0.

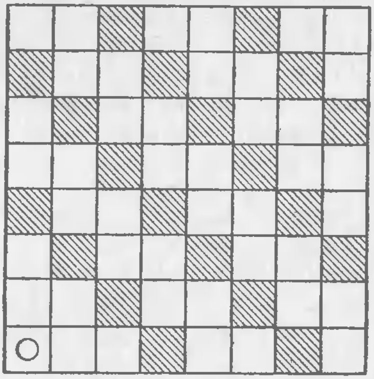


Рис. 128

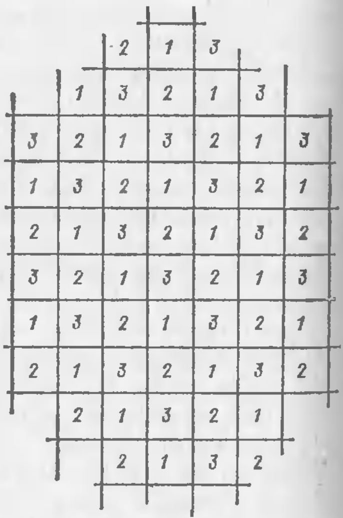


Рис. 129

При каждом ходе «дельфина» число x, соответствующее клетке, на которой он находится, либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 2, поэтому остаток от деления на 3 числа x изменяется в следующей последовательности: 0, 1, 2, 0, 1, 2, ... Предположим, что «дельфин» обошел всю доску, побывав в каждой клетке по одному разу. Разобьем оставшиеся (после отбрасывания начальной клетки) 63 клетки на 21 тройку клеток, подряд идущих по ходу «дельфина». Тогда в каждой тройке ровно одной клетке соответствует число, кратное 3. Однако таких клеток (заштрихованных на рис. 128) имеется лишь 20. Полученное противоречие доказывает, что «дельфин» не может обойти всю доску.

26.10. Разобьем все клетки бесконечной доски на 3 множества, как показано на рис. 129 (разными цифрами обозначены клетки разных множеств). Тогда при каждом ходе количество фишек в двух множествах уменьшается на единицу, а в одном — увеличивается на единицу. При этом четность количества фишек в каждом множестве меняется на противоположную. Если сначала фишки занимали прямоугольник $(3k)\times n$, то их количества в каждом множестве были равны. Следовательно, после каждого хода четности количеств фишек в каждом из трех множеств должны совпадать. Если бы после какого-то хода на доске осталась одна фишка, то в двух множествах количество фишек было бы четно, а в одном — нечетно. Поэтому такая ситуация возникнуть не может.

26.11. Докажем, что хотя бы одна из граней данного многогранника не является треугольником. Пусть, напротив, все n его грани — треугольники. Тогда у этого многогранника $3n/2$ ребер (ибо каждое из трех ребер любой грани принадлежит одновременно двум граням) и n вершин (ибо каждая из трех вершин любой грани принадлежит одновременно трем граням). По формуле Эйлера (теорема 93) имеем $n+n-3n/2=2$, т. е. $n=4$, что противоречит условию задачи. Покажем, как может играть первый игрок, чтобы наверняка выиграть. Первым ходом он должен занять грань A_1, не являющуюся треугольником. Вторым ходом он должен занять свободную грань A_2, прилежащую к грани A_1 и имеющую общие ребра с двумя свободными гранями A_3, A_4, также прилежащими к грани A_1 (это можно сделать, поскольку второй игрок мог занять лишь одну грань, прилежащую к грани A_1). Наконец, третьим ходом первый игрок может занять одну из граней A_3 или A_4, не занятую вторым игроком. Итак, первый игрок выигрывает на третьем ходу.

26.12. Докажем индукцией по $n\in\mathbf{Z}^+$, что в результате последовательного применения 2^n операций S получится набор из $m=2^n$ единиц. Для $n=0$ имеем $S(A)=(a_1a_1)=1$. Пусть утверждение уже доказано для числа $n-1$. Докажем его для числа n. Заметим, что в наборе

$$T(A)=S(S(A))=S(a_1a_2;\ a_2a_3;\ \ldots;\ a_ma_1)=$$
$$=(a_1a_3;\ a_2a_4;\ \ldots;\ a_{m-1}a_1;\ a_ma_2)$$

числа, стоящие на четных местах, совпадают соответственно с числами, которые получаются из набора $(a_2;\ a_4;\ \ldots;\ a_m)$ под действием операции S. Аналогично, числа, стоящие в наборе $T(A)$ на нечетных местах, образуют набор

$$S(a_1;\ a_3;\ \ldots;\ a_{m-1}).$$

По предположению индукции, после $m/2=2^{n-1}$ операций T как на четных, так и на нечетных местах будут стоять одни единицы. Следовательно, после m операций S весь набор будет состоять из единиц.

26.13. Заметим, что прямоугольник 3×2 можно покрыть тримино (рис. 130). Поэтому, если выкинутая клетка не лежит в фигуре, являющейся объедиинением полос шириной в шесть клеток, прилегающих к двум смежным сторонам квадрата, то мы можем покрыть

Рис. 130

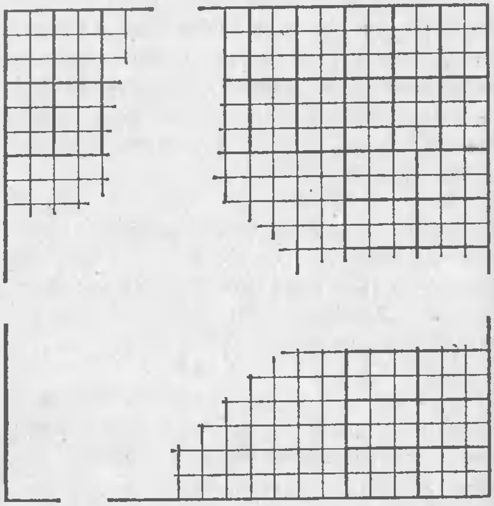


Рис. 131

эту фигуру прямоугольниками 3×2 (рис. 131) и перейти к оставшемуся квадрату $2(n-3)\times 2(n-3)$ с выкинутой клеткой. Так как такую операцию всегда можно проделать при $n\geqslant 7$, то без ограничения общности можно считать, что $n\leqslant 5$. Рассмотрим все возможные случаи.

1) $n=1$. Квадрат 2×2 без одной клетки покрывается одним тримино (см. определение тримино).

2) $n=2$. Выкинутая клетка лежит в одном из четырех квадратов 2×2, три оставшиеся клетки которого покрываются одним тримино (рис. 132).

3) $n=4$. Воспользуемся тем, что, как было показано в случае 2), квадрат 4×4 с любой выкинутой клеткой можно покрыть тримино (рис. 133).

4) $n=5$. Квадрат 10×10 с выкинутой клеткой всегда можно разбить на два прямоугольника 3×10 и один прямоугольник 4×10 так, чтобы выкинутая клетка лежала в прямоугольнике 4×10. Прямоугольник 3×10 покрыть тримино можно. Прямоугольник 4×10 можно

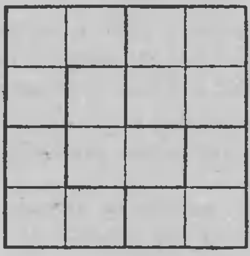


Рис. 132

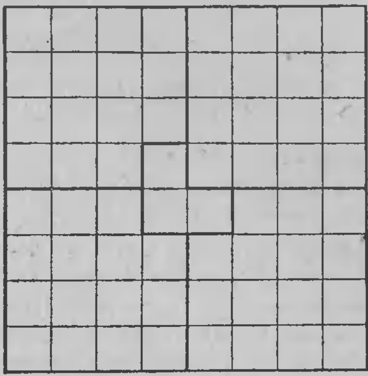


Рис. 133

разбить на два прямоугольника 3×4 и один квадрат 4×4 так, чтобы выкинутая клетка лежала в квадрате 4×4. И прямоугольник 3×4, и квадрат 4×4 с выкинутой клеткой можно покрыть тримино.

26.14. а) Рассмотрим всевозможные пары одноцветных клеток, расположенных в одном столбце (считаем, что столбцы имеют высоту 4, а строки — длину 7). В каждом столбце имеется не менее двух таких пар, а значит, всего на доске их по крайней мере 14. Следовательно, существует такой цвет, который имеют не менее 7 из рассматриваемых пар. Так как количество вариантов расположения пары клеток в столбце равно 6, то существуют два столбца с одноцветными одинаково расположенными парами, что и требовалось доказать.

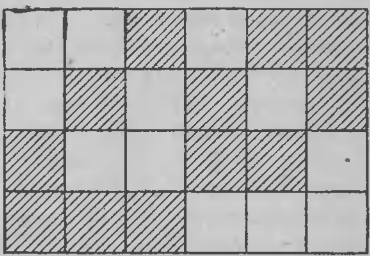


Рис. 134

б) См. рис. 134.

26.15. Естественным образом разобьем все точки из M на 12 строк (по первой координате) и на 12 столбцов (по второй координате). Существует цвет, в который окрашено не менее $144/3=48$ точек. Выберем из них ровно 48 точек. Число выбранных точек в столбце со второй координатой, равной 1, 2, ..., 12, обозначим через a_1, a_2, ..., a_{12} соответственно ($a_1+a_2+\ldots+a_{12}=48$). Тогда количество пар выбранных точек в i-м столбце равно $a_i(a_i-1)/2$, а общее количество пар точек, у которых вторые координаты совпадают, равно

$$A=\frac{a_1(a_1-1)}{2}+\frac{a_2(a_2-1)}{2}+\ldots+\frac{a_{12}(a_{12}-1)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(a_1^2+\ldots+a_{12}^2)-\frac{1}{2}(a_1+\ldots+a_{12}).$$

Пользуясь теоремой о средних (теорема 6), получаем оценку

$$A\geqslant\frac{1}{2}\frac{(a_1+\ldots+a_{12})^2}{12}-\frac{1}{2}(a_1+\ldots+a_{12})=\frac{1}{2}\cdot\frac{48^2}{12}-\frac{1}{2}\cdot 48=72.$$

Каждой паре выбранных точек, лежащих в одном столбце, соответствует пара строк, в которых эти точки находятся. Поскольку количество различных пар строк, равное $C_{12}^2=66$, меньше числа A, то найдутся две пары выбранных точек, которым соответствует одна и та же пара строк. Найденные 4 точки являются вершинами искомого прямоугольника.

26.16. а) Если $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$ — координаты вершин треугольника, то точка пересечения его медиан имеет координаты

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

Назовем точку $(x;\ y)$ точкой типа $(r_1;\ r_2)$, если r_1, r_2 — остатки от деления на 3 чисел x, y соответственно. Восемь точек, удовлетворяющих условию задачи, существуют. Достаточно взять эти точки такими: две точки типа (0; 0), две — типа (0; 1), две — типа (1; 0) и две — типа (1; 1). Кроме того, никакие три из них не должны лежать на одной прямой. Этим условиям удовлетворяют, например, следующие точки: (0; 0), (0; 3), (3; 1), (3; 4), (1; 0), (4; 3), (1; 1), (7; 4). Предположим теперь, что существуют 9 точек, удовлетворяющих условию задачи. Разобьем эти 9 точек на группы одного типа. Тогда ни в одной из групп не содержатся 3 точки (иначе они образовали бы треугольник, в котором медианы пересекаются в целой точке). Поэтому всего групп имеется не менее пяти, а значит, среди наших 9 точек найдется 5 точек разного типа. Разобьем эти 5 точек на 3 группы в зависимости от остатка от деления на 3 первой координаты. Ни в одной из этих групп не содержатся 3 точки (действительно, если бы такие 3 точки существовали, то они имели бы соответственно тип $(r;\ 0)$, $(r;\ 1)$, $(r;\ 2)$ для некоторого r, а значит, образовали бы треугольник с целой точкой пересечения медиан). Следовательно, в двух из этих групп находятся по две точки, а в третьей группе — одна точка. Без ограничения общности можно считать, что эта одна точка имеет тип (0; 0). Тогда среди наших 5 точек нет точек типа (0; 1) и (0; 2). Кроме того, среди них одновременно не может быть двух точек типа (1; 1) и (2; 2) (иначе они вместе с точкой типа (0; 0) образовали бы треугольник, в котором медианы пересекаются в целой точке). По той же причине среди них не может быть одновременно двух точек типа

(1; 2) и (2; 1), а также двух точек типа (1; 0) и (2; 0). Отсюда получаем, что всего у нас не более четырех выбранных точек. Противоречие.

б) Каждой целочисленной точке $(x; y; z)$ поставим в соответствие числа $g(x)$, $g(y)$, $g(z)$ — остатки от деления на 3 чисел x, y, z соответственно. Так как величина $g(x)$ принимает не более 3 значений, то по крайней мере 13 из рассматриваемых 37 точек имеют одинаковые значения $g(x)$ (иначе всего точек не больше $12 \cdot 3 = 36$). Аналогично, не менее 5 из этих 13 точек имеют одинаковые значения $g(y)$. Точка пересечения медиан треугольника с вершинами $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$ имеет координаты

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

При этом, если $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$ и $g(y_1) = g(y_2) = g(y_3)$, то числа x_0 и y_0 целые, а число z_0 является целым тогда и только тогда, когда $z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod 3$. В нашем случае отобраны 5 точек, для которых равны все числа $g(x)$ и равны все числа $g(y)$. Если среди этих точек найдутся три, для которых числа $g(z)$ принимают значения 0, 1, 2, то для этих точек

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv g(z_1) + g(z_2) + g(z_3) \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3.$$

Если же таких точек нет, то числа $g(z)$ для отобранных 5 точек принимают не более 2 значений, поэтому найдутся 3 точки, в которых величина $g(z)$ принимает одно и то же значение, и соответствующее им число z_0 является целым.

26.17. Пусть каждая ладья на доске находится под ударом не более одной из остальных. Тогда можно выделить несколько пар ладей так, что ладьи в каждой паре бьют друг друга и не бьют ни одной из остальных, а все ладьи, не объединенные в пары, вообще

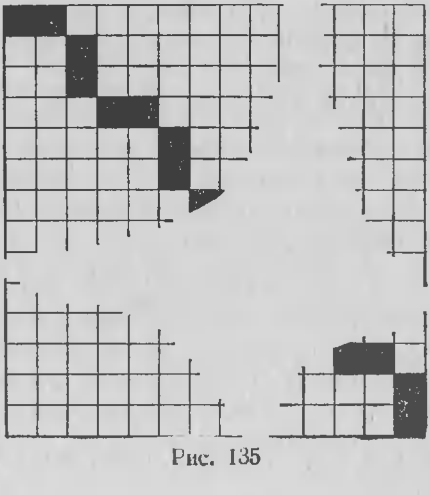


Рис. 135

ничего не бьют. Пусть количество указанных пар ладей равно A, а количество одиночных ладей равно B. Общее количество горизонталей и вертикалей на доске $3n\times3n$ равно $6n$. Из них каждая пара ладей, бьющих друг друга, занимает три линии (две горизонтали и вертикаль или две вертикали и горизонталь), на которых уже не могут стоять никакие другие ладьи, а каждая одиночная ладья занимает две линии (вертикаль и горизонталь), отсюда $3A+2B\leqslant6n$. Поэтому для количества ладей справедлива оценка:

$$2A+B\leqslant(2/3)\,(3A+2B)\leqslant(2/3)\cdot6n=4n.$$

С другой стороны, $4n$ ладей на доске расставить можно, например, так, как показано на рис. 135 (закрашены в черный цвет те клетки, в которых должны стоять ладьи). Таким образом, наибольшее количество ладей равно $4n$.

26.18. Заметим, что на доске размером $m\times m$ можно расставить m не бьющих друг друга ладей ровно $m!$ способами, поскольку на первой горизонтали ладью можно расположить m способами, затем на второй — $(m-1)$ способами и т. д., наконец, на последней — единственным способом. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда, если доска раскрашена, как указано в условии задачи, то для любой расстановки не бьющих друг друга ладей какие-то две из них стоят на клетках одного цвета. Следовательно, число $n!$ всех таких расстановок не превосходит $(n^2/2)\,(n-2)\,!$, поскольку пару ладей можно расставить на клетках одного цвета не более чем $n^2/2$ способами, а затем остальные $n-2$ ладьи — $(n-2)\,!$ способами. Итак, имеем оценку $n!\leqslant$ $\leqslant(n^2/2)\,(n-2)\,!$, откуда $n-1\leqslant n/2$, т. е. $n\leqslant2$, что противоречит условию.

26.19. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда для любого значения $i=1, 2, \ldots, n$ найдется пара строк, в которых различны только i-е элементы. Зафиксируем для каждого i по одной такой паре и построим следующий граф: каждую строку таблицы назовем вершиной графа, а пары вершин, соответствующие зафиксированным парам строк, назовем ребрами. Так как у полученного графа n вершин и n ребер, то, согласно теореме 94, в нем найдется цикл, проходящий через некоторые вершины (строки таблицы) a_1, $a_2, \ldots, a_k, a_1$. Тогда строки a_1 и a_2 отличаются только в i-м месте (для некоторого i), в то время как строки a_2 и a_3, a_3 и $a_4, \ldots, a_k$ и a_1 в i-м месте совпадают. Таким образом, i-е элементы строк a_1 и a_2 одновременно и различаются, и совпадают. Противоречие.

26.20. Докажем прежде всего, что раскраска точек множества E удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда любой прямоугольник с вершинами из E и сторонами, параллельными осям, имеет четное число красных вершин. Предположим, что число красных вершин некоторого прямоугольника Π_0 нечетно и равно, скажем, 1 (случай, когда их 3, рассматривается аналогично). Рассмотрим два разных параллелепипеда с одной гранью Π_0 и с противоположными гранями Π_1 и Π_2 соответственно. Тогда, если раскраска удовлетворяет условию задачи, то каждая из граней Π_1 и Π_2 имеет по 3 красных вершины, а параллелепипед с гранями Π_1, Π_2 имеет 6 красных вершин, что противоречит предположеиию. Пусть теперь любой прямоугольник имеет четное число красных вершин. Рассмотрим произвольный параллелепипед. Если все его вершины одноцветны, то число красных вершин делится на 4. Если же не все вершины одноцветны, то существует ребро с неодноцветными вершинами и все параллельные ему ребра также имеют неодноцветные вершины (ибо каждая грань имеет четное число красных вершин), а число красных вершин параллелепипеда равно 4. Утверждение доказано. Пусть заданы цвета $(1+3\cdot 1982)$ точек $(0; 0; 0)$, $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$, $(0; 0; z)$, где x, y, z пробегают все целые числа от 1 до 1982. Докажем, что существует единственная раскраска остальных точек из E, удовлетворяющая условию задачи. Для доказательства рассмотрим функцию

$$f(x, y, z)=\begin{cases} 0, \text{ если точка } (x; y; z) \text{ красная}, \\ 1, \text{ если точка } (x; y; z) \text{ синяя}; \end{cases}$$

по значению $f(x, y, z)$ однозначно восстанавливается цвет точки $(x; y; z)$. Зададим операцию $a \oplus b$ (сложение по модулю 2) следующим образом:

$$a \oplus b=\begin{cases} 0, \text{ если число } a+b \text{ четно}, \\ 1, \text{ если число } a+b \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Теперь положим

$$f(x, y, z)=f(x, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z).$$

Проверка показывает, что для ранее заданных точек эта формула также справедлива и любой прямоугольник с ребрами, параллельными осям, имеет четное число красных вершин (например,

$$f(x_1, y_1, z) \oplus f(x_2, y_1, z) \oplus f(x_1, y_2, z) \oplus f(x_2, y_2, z)=0),$$

т. е., согласно доказанному выше утверждению, полученная раскраска удовлетворяет условию задачи. В силу того же утверждения эта раскраска единственна, так как для нее необходимо выполнение следующих условий:

$$f(x, y, 0)=f(0, 0, 0) \oplus f(x, 0, 0) \oplus f(0, y, 0),$$
$$f(x, 0, z)=f(0, 0, 0) \oplus f(x, 0, 0) \oplus f(0, 0, z),$$
$$f(0, y, z)=f(0, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z),$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(0, 0, z) \oplus f(x, 0, z) \oplus f(0, y, z)= \\ &= f(0, 0, z) \oplus (f(0, 0, 0) \oplus f(x, 0, 0) \oplus f(0, 0, z)) \oplus \\ &\oplus (f(0, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z))= \\ &= f(x, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z). \end{aligned}$$

Таким образом, число искомых раскрасок равно

$$2^{1+3\cdot 1982}=2^{5947}.$$

§ 27. Элементы теории вероятностей

27.1. Пусть общее количество шаров в первой и второй урнах равно m_1 и m_2 соответственно (для определенности считаем $m_1 \leqslant m_2$), а количество белых шаров в этих урнах равно k_1 и k_2 соответственно. Тогда вероятность того, что оба вынутых шара белые, равна $(k_1/m_1)\cdot(k_2/m_2)$. Получаем соотношения:

$$\frac{k_1}{m_1}\cdot\frac{k_2}{m_2}=0,54=\frac{27}{50}, \qquad m_1+m_2=25.$$

Так как $27m_1m_2=50k_1k_2$, то хотя бы одно из чисел m_1, m_2 делится на 5. Но сумма m_1+m_2 тоже делится на 5, поэтому каждое из чисел m_1, m_2 делится на 5. Таким образом, имеем всего две возможности: либо $m_1=5$, $m_2=20$, либо $m_1=10$, $m_2=15$. В случае $m_1=5$, $m_2=20$ получаем

$$k_1k_2=54, \quad \text{где} \quad 0\leqslant k_1\leqslant 5, \quad 0\leqslant k_2\leqslant 20.$$

Перебрав все возможные значения k_1, найдем $k_1=3$, $k_2=18$. Тогда в первой урне 2 черных шара, во второй тоже 2 черных шара, и вероятность вытащить два черных шара равна $(2/5)\cdot(2/20)=0,04$. Аналогично, в случае $m_1=10$, $m_2=15$ находим $k_1=9$, $k_2=9$. Тогда в первой урне 1 черный шар, во второй — 6 черных шаров, и вероятность вытащить два черных шара снова равна $(1/10)\cdot(6/15)=0,04$ (в обоих случаях ответы одинаковы).

27.2. Обозначим через δ вероятность того, что случайно выбранный учащийся даст правильный ответ. Вероятность совпадения ответа случайно выбранного учащегося с ответом учителя равна сумме вероятности $\alpha\delta$ правильного ответа обоих и вероятности $(1-\alpha)(1-\delta)$ неправильного ответа обоих. Поэтому условие задачи можно записать в виде

$$\alpha\delta+(1-\alpha)(1-\delta)=1/2, \quad \text{или} \quad (\alpha-1/2)(\delta-1/2)=0.$$

Если $\alpha=1/2$, то это условие выполнено и отношение числа мальчиков к числу девочек в классе может быть любым. Предположим теперь, что $\alpha\neq 1/2$. Тогда $\delta=1/2$. Обозначим через x и y соответственно число мальчиков и девочек в классе. Вероятность δ правильного ответа случайно выбранного учащегося класса равна сумме вероятности $(x/(x+y))\beta$ того, что будет выбран мальчик и он даст правильный ответ, и вероятности $(y/(x+y))\gamma$ того, что будет выбрана девочка и она даст правильный ответ. Таким образом, условие задачи имеет вид

$$\frac{1}{2}=\frac{x}{x+y}\beta+\frac{y}{x+y}\gamma, \quad \text{или} \quad \left(\beta-\frac{1}{2}\right)x=\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)y.$$

Поэтому, если $\beta=\gamma=1/2$, то отношение числа мальчиков к числу девочек в классе может быть любым; если $\beta=1/2$, но $\gamma\neq 1/2$, то класс состоит только из одних мальчиков; если же $\beta \neq 1/2$, то отношение числа мальчиков к числу девочек в классе равно $(1-2\gamma)/(2\beta-1)$ (разумеется, при условии, что указанная дробь неотрицательна).

27.3. Разобьем все возможные пары троек вершин на C_n^6 групп, собирая в одной группе те и только те пары троек, которые образуют одинаковые шестерки вершин. С одной стороны, каждая такая группа содержит столько элементов, сколькими способами можно разбить шестерку фиксированных вершин на две тройки, т. е. $C_6^3=20$ элементов. С другой стороны, существует ровно 6 способов разбить шестерку на две тройки, удовлетворяющие требуемому в задаче условию. Поэтому искомая вероятность равна $6/20=0{,}3$.

27.4. Если из трех вершин две уже выбраны, то число способов, которыми можно выбрать третью вершину так, чтобы полученная тройка оказалась односторонней, зависит от углового расстояния l между двумя первыми вершинами. (Угловым расстоянием между вершинами A и B будем называть величину $l=\widehat{AOB}\cdot(n/\pi)$, где O — центр $2n$-угольника; при этом всегда $l\leqslant n$, а угловое расстояние между соседними вершинами равно 1.) Если $l<n$, то третью вершину можно выбрать $(l-1)+2(n-l)=2n-1-l$ способами; если же $l=n$, то ее можно выбрать произвольно, т. е. $2n-2$ способами. Далее, для каждого значения $l=1, 2, \ldots, n-1$ есть ровно $2n\cdot 2=4n$ способов выбрать сначала первую, а затем вторую вершину иа угловом расстоянии l от первой. Наконец, для $l=n$ есть только $2n$ таких способов. Поэтому общее количество способов последовательного выбора трех вершин равно

$$4n\cdot\sum_{l=1}^{n-1}(2n-1-l)+2n(2n-2)=$$

$$=4n(2n-1)(n-1)-4n\frac{(n-1)n}{2}+4n(n-1)=6n^2(n-1).$$

Мы сосчитали количество односторонних троек при условии, что в каждой тройке выделены первая, вторая и третья вершины. Если же вершины не упорядочивать, то количество троек будет в 6 раз меньше. Количество способов произвольным образом выбрать три вершины равно

$$C_{2n}^3=\frac{1}{6}\cdot 2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2),$$

поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{n^3-n^2}{\frac{1}{6}\cdot 2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)}=\frac{3n}{2(2n-1)}.$$

27.5. Поскольку четность числа белых шаров, содержащихся в урне, не меняется после каждой операцни, то последний шар будет белым тогда и только тогда, когда число n нечетно. Поэтому искомая вероятность равна либо 1 (если n нечетно), либо 0 (если n четно).

27.6. Пусть у игроков A и B выпадает m и k «орлов» соответственно. Тогда искомая вероятность p события $m > k$ равна вероятностя q события $(n+1)-m > n-k$, т. е. вероятности того, что у игрока A выпадает больше «решек», чем у игрока B (так как при каждом бросании монеты «орел» и «решка» выпадают с равной вероятностью). С другой стороны, событие $m > k$ имеет место тогда и только тогда, когда $n-m < n-k$, т. е. когда $(n+1)-m \leqslant n-k$ (поскольку $n-m$ и $n-k$ — целые числа). Поэтому $p=1-q$, откуда имеем $p=q=1/2$.

27.7. Найдем количество строк $(i_1; \ldots; i_n)$, для которых $i_k \geqslant k-3$ при $k=1, 2, \ldots, n$. Число i_n может принимать четыре значения: $n, n-1, n-2, n-3$. Число i_{n-1} может принимать пять значений: $n, n-1, n-2, n-3, n-4$, за исключением того значения, которое уже занято числом i_n. Таким образом, число i_{n-1} также может принимать 4 значения. Аналогично, каждое из чисел $i_{n-2}, \ldots, i_4$ может принимать 4 значения. Числа i_1, i_2, i_3 могут быть выбраны произвольным образом из трех значений, оставшихся после выбора чисел $i_n, \ldots, i_4$. Таким образом, среди всех $n!$ возможных строк имеется ровно $4^{n-3} \cdot 3!$ строк, удовлетворяющих требуемому условию. Следовательно, искомая вероятность равна $4^{n-3} \cdot 3!/n!$.

27.8. Разобьем все варианты распределения карт на пары взаимно «обратных» колод: если в какой-либо колоде карты расположены в некотором порядке, то в пару к ней подберем колоду карт, идущих в обратном порядке. Пусть теперь в какой-то колоде второй сверху туз имеет номер k. Тогда для того, чтобы вытащить второй туз из этой колоды, нужно снять k карт, а чтобы вытащить второй туз из «обратной» колоды (это будет тот же самый туз), нужно снять $n+1-k$ карт. Среднее арифметическое чисел k и $n+1-k$ равно $(n+1)/2$ для любой пары взаимно «обратных» колод. Поэтому среднее число карт, которое нужно снять до появления второго туза, также равно $(n+1)/2$.

27.9. Разобьем все строки на пары взаимно «обратных» строк: $(i_1; \ldots; i_n)$ и $(i_n; \ldots; i_1)$. Любые два натуральных числа $m > l$, не превосходящие n, образуют инверсию ровно в одной из строк каждой такой пары. Следовательно, в каждой такой паре строк имеется ровно $n(n-1)/2$ инверсий (столько, сколько существует способов выбрать в строке указанные числа m, l). Поэтому среднее число инверсий для каждой пары строк равно $n(n-1)/4$. Тому же значению равно и среднее число инверсий по всем строкам.

27.10. За первой буквой O (с момента начала наблюдения за мальчиком с вероятностью 1 буква O хотя бы один раз появится) с одинаковой вероятностью, равной $1/4$, может следовать одна из комбинаций:

$$PO,\quad OO,\quad PP,\ OP.$$

В первом случае выигрывает игрок B, во втором случае выигрывает игрок A, а если реализовался третий случай, то после этого игроки будут иметь такие же шансы, как и в начале игры. В четвертом случае с вероятностью $1/2$ последует буква O и выиграет игрок B, а с вероятностью $1/2$ последует буква P, после чего игроки будут иметь такие же шансы, как и в начале игры. Таким образом, с вероятностью $1/4$ выиграет A, с вероятностью $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ выиграет B и с вероятностью $3/8$ возникнет ситуация, когда игроки будут иметь такие же шансы, как в иачале игры. Поэтому игрок B имеет больше шансов выиграть, чем игрок A.

27.11. Рассмотрим три события, которые могут наступить после первого выстрела стрелка A.

1) Поражен C. Тогда с вероятностью 1 стрелок A будет поражен первым же выстрелом B.

2) Поражен B. Тогда: или с вероятностью 0,5 стрелок C поразит A своим первым выстрелом, или с вероятностью $0{,}5\cdot0{,}3$ стрелок A поразит C своим вторым выстрелом, или с вероятностью $0{,}5\cdot0{,}7\cdot0{,}5$ стрелок C поразит A своим вторым выстрелом, или с вероятностью $0{,}5\cdot0{,}7\cdot0{,}5\cdot0{,}3$ стрелок A поразит C своим третьим выстрелом и т. д. Следовательно, вероятность для A выиграть дуэль в этом случае равна

$$0{,}5\cdot0{,}3+0{,}5\cdot0{,}7\cdot0{,}5\cdot0{,}3+0{,}5\cdot0{,}7\cdot0{,}5\cdot0{,}7\cdot0{,}5\cdot0{,}3+\ldots=$$
$$=0{,}15\,(1+0{,}35+0{,}35^2+\ldots)=0{,}15\,\frac{1}{1-0{,}35}=\frac{15}{100}\cdot\frac{100}{65}=\frac{3}{13}.$$

3) Никто не поражен. После этого B будет стрелять в C (как в более меткого из своих противников) и поразит его. Затем A с вероятностью 0,3 поразит B, выиграв дуэль.

Таким образом, самой выгодной для стрелка A является ситуация, когда после его выстрела никто не поражен. Значит, он должен первый раз стрелять в воздух.

27.12. Заметим, что из любой вершины куба с вероятностью не меньшей чем $1/9$ точка попадет в одну из вершин B', C' (ибо для любой вершины куба, отличной от B' и C', существует маршрут, проходящий не более чем по двум ребрам и соединяющий ее с B' или C'). Поэтому вероятность того, что за два хода точка не попадет ни в B', ни в C', не больше чем $1-1/9=8/9$, а вероятность того, что за $2k$ ходов точка не попадет ни в B', ни в C', не больше чем $(8/9)^k$. Следовательно, вероятность того, что точка никогда не попадет ни в B', ни в C', не превосходит $(8/9)^k$ для любого $k\in\mathbb{N}$, а значит, равна 0. Итак, точка с вероятностью 1 попадет в B' или

C'. Далее, через p обозначим вероятность того, что из A точка попадет в B' (и, следовательно, с вероятностью $1-p$ точка попадет из A в C'), а через q — вероятность того, что из B точка попадет в B' (и, следовательно, с вероятностью $1-q$ точка попадет из B в C'). Из соображений симметрии вытекает, что вероятность того, что точка попадет из D в B', равна $(1-p)$, из A' в B' — q, а из C или из D' в B' — $(1-q)$. Если точка находится в A, то с вероятностью 1/3 она попадет в A', с вероятностью 1/3 она попадет в D и с вероятностью 1/3 оиа попадет в B. Поэтому вероятность p того, что точка попадет из A в B', равна

$$\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}q+\frac{1}{3}q,$$

т. е. $4p-2q=1$. Аналогично, вероятность q попадания точки из B в B' равна $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1-q)+\frac{1}{3}p$, т. е. $4q-p=2$. Таким образом, $p=4/7$, и искомая вероятность того, что точка остановится в вершине B', равна 4/7, а в вершине C' — 3/7.

27.13. Назовем особой такую шоколадку, на которой изображен портрет, ранее не встречавшийся. Пусть среди купленных шоколадок имеется ровно k различных. Обозначим через M_k среднее количество шоколадок, которое надо купить после этого, чтобы последняя из них оказалась особой. Тогда с вероятностью $(n-k)/n$ очередиая шоколадка будет особой, а с вероятностью k/n будет куплена неособая шоколадка, после чего среднее количество шоколадок, которые последуют до особой, снова равно M_k. Согласно теореме 100 получаем уравнение

$$M_k=\frac{n-k}{n}\cdot 1+\frac{k}{n}(1+M_k),$$

откуда $M_k=n/(n-k)$. Тогда в силу теоремы 99 среднее число шоколадок, которые надо купить, равно

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n-k}=n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

КОММЕНТАРИИ К УСЛОВИЯМ ЗАДАЧ

1.3. В задаче олимпиады ЧССР предполагалось, что в первой строке стоят 3 нечетных числа, и требовалось доказать, что в каждой строке, начиная со второй, есть четное число.

1.6. В условии явно указывалась требуемая тройка чисел.

1.9. Требовалось указать 5 чисел n, обладающих указанным в задаче свойством.

2.2. Задача формулировалась в геометрических терминах. Так, первая часть выглядела следующим образом: доказать, что на кривой $(x+ay+c)(x+by+d)=2$ существует не более четырех различных точек с целыми координатами.

2.7. Требовалось найти все решения в неотрицательных целых числах. При этом решения, отличающиеся перестановкой чисел x_1, x_2, ..., x_{14}, считались одинаковыми.

2.9. Требовалось найти какие-нибудь рациональные числа X и Y, удовлетворяющие равенству $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=X^{1/4}-Y^{1/4}$. Заметим, что решение задачи, приведенной в книге, позволяет дать ответ на этот вопрос, так как $\sqrt{x\sqrt{3}}=X^{1/4}$, $\sqrt{y\sqrt{3}}=Y^{1/4}$ при $X=3x^2$, $Y=3y^2$.

2.16. Задача формулировалась в геометрических терминах. Значение a_n определялось как число различных прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами и наименьшим катетом, равным n. В п. а) требовалось найти формулу для a_n. Пункты б) и в) по существу соответствовали приведенным в книге пп. а) и б).

2.27. В задаче олимпиады НРБ требовалось доказать утверждение «только тогда».

3.14. Требовалось доказать, что последовательность цифр h_1, h_2, ... непериодична.

4.21. б) Это утверждение, усиливающее п. а), доказано участником международной олимпиады 1985 г. Л. А. Ивановым.

5.14. Задача формулировалась следующим образом. Пусть K — круг с центром в начале координат. Доказать, что для любого вектора $\boldsymbol{u}$ существует натуральное число n такое, что образ круга K при переносе на вектор $n\boldsymbol{u}$ содержит точку с целыми координатами. По существу эта формулировка равносильна приведенной в книге.

7.3. Числа предполагались положительными.

7.5. Требовалось доказать утверждение задачи и в случае $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$.

7.13. Предполагалось, что $0<x\leqslant 1$, $0<a<\infty$, и требовалось доказать нестрогое неравенство.

7.14. На α налагалось дополнительное несущественное условие $\alpha \geqslant 0$.

7.17. Требовалось доказать утверждение для произвольных комплексных чисел $a_1, \ldots, a_n$.

9.9. Требовалось найти условия, которые надо наложить на стороны треугольника и при которых центр тяжести треугольника совпадает с центром тяжести его границы.

10.18. На олимпиаде ГДР предлагался только п. а) задачи со следующей формулировкой. Пусть K и K' — две различные окружности, проходящие через вершины A и B треугольника ABC, центры M и M' которых лежат на окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на K или на K'.

11.13. Задача была предложена Бельгией со следующей формулировкой. На сторонах треугольника KLM построены подобные равнобедренные треугольники KPL ($KP = PL$), LQM ($LQ = QM$) и KRM ($KR = RM$), причем треугольники KPL и KLM лежат по разные стороны от прямой KL, треугольники LQM и KLM — по разные стороны от прямой LM, а треугольник KRM лежит по ту же сторону от прямой KM, что и треугольник KLM. Доказать, что $LPRQ$ — параллелограмм. Условие равнобедренности треугольников KPL, LQM и KRM здесь на самом деле излишне.

12.1. Данные в условии задачи 15 точек определялись как центры соответствующим образом расположенных биллиардных шаров.

12.5. Носит название задачи Сильвестра. На олимпиаде предлагалась для значений $n \leqslant 8$ и допускала решения, использующие тот или иной перебор различных случаев расположения малого числа точек.

12.7. Соответствующее утверждение не формулировалось, а задавался вопрос: что можно сказать о множестве центров симметрии при условии, что оно содержит более одной точки? Кроме этого, требовалось привести пример множества, имеющего более одного центра симметрии.

12.8. Требовалось также найти L в случаях, когда M — квадрат или правильный треугольник.

12.17. Требовалось доказать, что длина ломаной не меньше 1248.

13.12. Пункты 6) и 7) предложены в 1977 г., пп. 1)—5) — в 1978 г. (с исправлениями — в 1979 г.).

14.7. Требовалось определить вид треугольника.

14.8. Условие задачи предполагало, что на каждой стороне большего многоугольника лежит вершина меньшего. При этом не требовалось, что $n > 3$.

15.5. Был дан правильный тетраэдр с ребром a.

15.19. Предполагалось, что линия пересечения плоскостей α и β пересекается с прямой CD.

16.8. На R и r налагалось условие $R > 2r$.

16.14. Предлагалось решить задачу для треугольной пирамиды.

18.3. В задаче олимпиады ЧССР требовалось найти только минимум функции f.

19.1. Задача состояла из двух пунктов. Условие п. б) отличалось от приведенного в книге тем, что в нем вместо соотношения $f'(x_2) = 0$ предполагалось, что функция f имеет экстремум в точке x_2, а также предполагалось, что $x_2 < x_1$. Пункт а) являлся частным случаем п. б), соответствовавшим значениям $x_2 = 1$, $x_1 = \sqrt{2}$.

19.5. Задача формулировалась для многочленов.

19.9. Требовалось найти соответствующие числа a, b из отрезка $[0;\ 1]$.

20.8. На функции g и h накладывались излишние ограничения. Требовалось, чтобы обе они не принимали никакого значения более чем в одной точке $n \in \mathbf{N}$ и чтобы множество их значений совпадало с $\mathbf{N}$.

20.20. Требовалось доказать также, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} f(l) = \frac{1}{1-f(1)}, \text{ если } f(1) < 1.$$

Кроме того, задача содержала второй пункт, в котором требовалось решить функциональное уравнение

$$f(x)\,f(y) \equiv f(x-y), \qquad x,\ y \in \mathbf{R}.$$

Эта часть задачи приведена в книге [3].

21.4. На числа α и β накладывалось несущественное условие $\alpha \neq \beta$.

22.2. В задаче требовалось найти частное $R(x)$ от деления $P(x)$ на $Q(x)$ и решить пп. б) и в):

б) Пусть через $E(t)$ обозначено выражение, которое получается из $R(x)$ заменой x^k на $\cos kt$ $(k=1, 2, \ldots, n-2)$. Решить уравнение $E(t)=0$.

в) Определить сумму квадратов коэффициентов многочлена $R(x)$.

23.19. Требовалось доказать оценку

$$|P(x)| \leqslant (2n+1)\,C_{2n}^{n}.$$

Приведенное в книге утверждение является более сильным, так как

$$C_{2n}^{k} = C_{2n}^{n}\,\frac{n}{n+1}\cdots\frac{(k+1)}{2n-k} < C_{2n}^{n} \text{ при } k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

$$C_{2n}^{k} = C_{2n}^{2n-k} < C_{2n}^{n} \text{ при } k=n+1,\ \ldots,\ 2n,$$

а значит,

$$(2n+1)\,C_{2n}^{n} > C_{2n}^{0} + C_{2n}^{1} + \ldots + C_{2n}^{n} + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$$

(см. теорему 17).

27.3. Предполагалось, что шесть точек распределены на окружности равномерно и независимо. Условие такой задачи требовало бы от читателя существенно большей теоретико-вероятностной подготовки, чем решение задач, приведенных в настоящей книге.

Приложение Б

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ В РАЗНЫХ СТРАНАХ

I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ В ЗАРУБЕЖНЫХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ СТРАНАХ

Венгрия (ВНР)

История математических олимпиад Венгрии берет свое начало еще в прошлом веке, когда в 1894 г. Венгерское физико-математическое общество приняло решение о проведении математических олимпиад для выпускников гимназий. Эти олимпиады, получившие название соревнований Этвеша по имени президента общества физики Лоренца Этвеша, проводились ежегодно (с трехлетним перерывом) до 1943 г. С 1947 г. по инициативе венгерского Математического общества олимпиады возобновились. В 1949 г. им было присвоено имя профессора Будапештского университета Йожефа Кюршака. Олимпиады имени Кюршака проходят в Венгрии ежегодно по настоящее время. Участникам соревнований Кюршака предлагаются три задачи, на решение которых отводится 4 часа. В настоящее время к участию в олимпиадах имени Кюршака допускаются не только выпускники средних школ, но и учащиеся младших классов. Кроме соревнований Кюршака, в Венгрии ежегодно проводятся еще 3 олимпиады по математике, из которых можно выделить так называемые национальные соревнования имени Д. Араньи — основателя математического журнала «Közepiskolai Matematikai Lapok» для средних школ, издается с 1894 г. Эти соревнования впервые были организованы в 1923 г. В настоящее время они проходят в 2 тура для 9—10 классов и в 4 тура для 7—8 классов. К участию в последнем туре для 7 класса допускаются шестиклассники.

Задачи всех венгерских математических олимпиад регулярно публикуются в журнале «Közepiskolai Matematikai Lapok».

Румыния (СРР)

Первый математический конкурс для учащихся последних классов лицеев в Румынии был организован в 1889 г. С 1902 г. такие конкурсы проводились регулярно журналом «Gazeta Matematică», Ser. A, рассчитанным на учителей математики средних школ (издается с 1895 г.). Форма проведения конкурсов с течением времени менялась. До 1948 г. они, как правило, проходили в 2 тура. С 1950 г. начался второй период проведения математических олимпиад Румынии. С 1961 г. математическими олимпиадами руководит Министерство просвещения Румынии. В настоящее время олимпиады проходят в 3 тура. В них участвуют лишь учащиеся 11 класса средней школы. Задачи олимпиад регулярно публикуются в журнале «Gazeta Matematică».

Польша (ПНР)

Математические олимпиады в Польше проводятся ежегодно с 1949 г. Польским математическим обществом. Олимпиады проходят в 3 тура. Первый тур продолжается 3 месяца и носит заочный характер: в начале каждого месяца участники получают по 4 задачи, которые они должны решить дома в течение месяца. Второй тур (уже очный) проводится в течение 2 дней. В каждый из этих дней участникам дается по 3 задачи на 5 часов. Третий тур, который проводится в Варшаве, организуется так же, как второй. Таким образом, во время первого тура участникам предлагается 12 задач на 3 месяца, а во время второго и третьего туров — по 6 задач на 10 часов. Задачи и решения польских математических олимпиад публикуются в журнале «Matematyka», который издается с 1948 г.

Задачи 3 тура олимпиады ПНР 1986 г. (2 день)

1. Найти все значения $n \in \mathbf{N}$, для каждого из которых существует многочлен степени n с действительными коэффициентами, удовлетворяющий неравенству $f(x) \geq f'(x)$ при $x \in \mathbf{R}$.

2. В шахматном турнире участвуют $2n$ ($n > 1$) игроков, причем любые два из них играют между собой не более одной партии. Доказать, что при этих условиях турнир, в котором ни одна тройка игроков не сыграла между собой три партии, возможен в том и только в том случае, если число всех партий, сыгранных в турнире, не превосходит n^2.

3. Доказать, что если AK, BL, CM — высоты треугольника ABC, а точка N — середина стороны BC, то четыре точки K, L, M, N лежат на одной окружности.

Болгария (НРБ)

Математические олимпиады в Болгарии проводятся ежегодно, начиная с 1950 г. В настоящее время олимпиада проводится в 3 тура для учащихся 8—11 классов общеобразовательных школ и 3—5 курсов техникумов и в 2 тура для учащихся 5—7 классов школ и 1—2 курсов техникумов. Для отбора членов команды на международную математическую олимпиаду для учащихся 11 класса школы и последнего курса техникумов организуется дополнительный тур. Большую роль в проведении школьных олимпиад в Болгарии играют журналы «Обучението по математика» (основан в 1958 г.) и «Математика» (основан в 1962 г.).

Задачи олимпиады НРБ 1986 г.

1. Найти наименьшее значение $n \in \mathbf{N}$, для которого число $n^2 - n + 11$ разлагается в произведение четырех простых чисел (не обязательно различных).

2. Доказать, что если корни многочлена $P(x)$ второй степени принадлежат отрезку $[-1; 1]$, причем $\max\limits_{|x| \leq 1} |P(x)| = 1$, то справедливо неравенство $\max\limits_{|x| \leq 1} |P'(x)| \geq 1$.

3. Найти наибольшее значение объема куба, который можно разместить в правильном тетраэдре с ребром 1 так, чтобы одна из диагоналей куба лежала на высоте тетраэдра.

4. Найти наименьшее значение $n \in \mathbf{N}$, большее 2, для которого существует такой n-угольник с точкой A внутри него, что на каждой стороне этого n-угольника можно выбрать точку, которая не видна из точки A. Доказать, что найденное значение n обладает следующим свойством: внутри любого n-угольника найдутся такие две точки B и C, что любая точка n-угольника видна из точки B или C.

5. Для заданных значений $a > 0$, $\varphi \in (0; 180°)$ и точки A, не лежащей на заданной окружности, найти геометрическое место точек M, для каждой из которых на окружности можно выбрать точку B, удовлетворяющую условиям $AM/AB = a$, $\angle BAM = \varphi$.

6. Доказать, что в последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющей при некотором значении $b \in (0; 1)$ неравенствам

$$a_{n+1} \leq (1 + b/n)\, a_n - 1, \quad n \in \mathbf{N},$$

существует хотя бы одно отрицательное число.

Чехословакия (ЧССР)

Математические олимпиады в Чехословакии проходят ежегодно, начиная с 1951 г. В настоящее время участники олимпиады разбиваются на 4 возрастные группы, так называемые категории A, B, C, D (18-летние, 17-летние, 16-летние, 14—15-летние учащиеся соответственно). Для категории A олимпиада проходит в 3 тура, а для остальных трех категорий — в 2 тура. Первый тур является заочным: его участники дома решают задачи, напечатанные в периодических изданиях. Второй и третий (для категории A) туры очные. Начиная с 1951 г. в ЧССР выходит журнал «Matematika ve škole» для учителей математики средних школ. Кроме того, в Чехословакии издается математический журнал для учащихся «Rozledy matematičko—fyzikolni».

Задачи олимпиады ЧССР 1986 г.

1. Для каждого значения $n \in \mathbf{N}$ найти наибольшее возможное число элементов множества A, состоящего из подмножеств множества $\{1; 2; \ldots; n\}$ и обладающего следующим свойством: для любых двух множеств $B \in A$, $C \in A$ множество $(B \cup C) \setminus (B \cap C)$ имеет четное число элементов.

2. Доказать, что если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами степени $n \geqslant 3$ удовлетворяет для некоторых $m \geqslant 3$ различных чисел $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{Z}$ равенствам

$$P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_m) = 1,$$

то он не имеет целых корней.

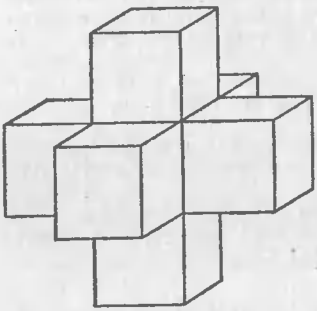


Рис. 136

3. Доказать, что все пространство можно разбить на «кресты», состоящие из семи единичных кубиков, расположенных, как указано на рис. 136.

4. В выпуклом ограниченном множестве M на плоскости выбраны три точки C_1, C_2, C_3. Непересекающиеся лучи l_1, l_2, l_3 с вершинами в точках C_1, C_2, C_3 соответственно разбивают дополнение к множеству $M \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ на три области D_1, D_2, D_3. Доказать, что если выпуклые множества A и B удовлетворяют условиям

$$A \cap l_j = \varnothing = B \cap l_j, \quad A \cap D_j \neq \varnothing \neq B \cap D_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

то $A \cap B \neq \varnothing$.

5. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет условиям $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ при $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что для любого значения $n \in \mathbf{N}$ существует такое число $m \in \mathbf{N}$, что $a_n a_{n+1} = a_m$.

6. Для любых чисел m, n из некоторого множества $M \subset \mathbf{N}$ справедливо неравенство $|m - n| \geqslant mn/25$. Доказать, что множество M содержит не более 9 элементов. Определить, может ли такое множество M состоять из 9 элементов.

Китай (КНР)

Математические соревнования школьников в Китае впервые проводились в 1956 г. в 4 городах: Пекине, Шанхае, Тяньцзине и Инкоу. В следующем году они были организованы и во многих других городах. Типичными примерами этих соревнований могут служить шанхайские олимпиады 1956—57 г. Они проводились по двум возрастным группам: для предпоследнего и соответственно для выпускного классов средней школы (полный срок обучения в средней школе в КНР — 12 лет). На каждом уровне олимпиада проходила в 3 тура. В последние годы в Китае организуются общенациональные математические олимпиады. Содержание задач на этих олимпиадах весьма своеобразно, и оцениваются они по сложной системе баллов. В Китае существует рассчитанный на учителей математики и интересующихся математикой школьников журнал «SHUXUE TONGXUN». Этот журнал проводит систематический конкурс по решению задач.

Германская Демократическая Республика (ГДР)

Отдельные математические соревнования школьников в пределах одного города в ГДР проводились, начиная с 1956 г. В 1960 г. была проведена первая олимпиада в Лейпциге, в 1961 г. — первая массовая олимпиада в Берлине. Первая математическая олимпиада в масштабах всей страны была организована в 1962 г. С тех пор математические олимпиады школьников в ГДР проходят в 4 тура (школьный, районный, окружной и заключительный) для учащихся 11—12 классов, в 3 тура для учащихся 7—10 классов и в 2 тура для учащихся 5—6 классов. На районных олимпиадах участникам предлагаются 4 задачи, а на окружных — 6 задач. Задачи математических олимпиад ГДР и международных математических олимпиад, а также их решения регулярно публикуются в рассчитанном на учащихся 11—12 классов журнале «Alpha», который издается с 1967 г. Кроме того, журнал «Alpha» проводит конкурс по решению задач, знакомит читателей с победителями олимпиад. В ГДР также выходит предназначенный для учителей средних школ журнал «Mathematik in der Schule».

Югославия (СФРЮ)

Математические олимпиады в Югославии в пределах одного города, района или республики проводятся, начиная с 1950 г. С 1960 г. проводятся Всеюгославские математические соревнования, которые проходят в 4 тура: школьный, районный, республиканский и всеюгославский. Для формирования национальной команды на международную олимпиаду с 1963 г. проводится дополнительный отборочный тур. Задачи математических олимпиад СФРЮ регулярно публикуются в журнале «Matematičko fizički list», который рассчитан на учащихся и учителей средних школ.

Задачи олимпиады СФРЮ 1986 г.

(Школьникам в зависимости от класса, в котором они обучались, предлагается один из трех наборов задач: с № 1 по № 4, с № 5 по № 8 или с № 9 по № 12.)

1. Доказать, что существует бесконечно много значений $n \in \mathbf{N}$, для которых каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел.

2. Доказать, что если для выпуклого четырехугольника $ABCD$ справедливо неравенство $AB+BD \leqslant AC+CD$, то $AB \leqslant AC$.

3. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны по 40°. На продолжении стороны AB за вершину A взята точка D так, что $AD=BC$. Найти углы треугольника ADC.

4. В каждой клетке доски размером 5×5 лежит по монете. Разрешается несколько раз проделывать следующую операцию: выбирать любые две монеты и каждую из них передвигать в любую из соседних клеток (имеющих с исходной общую сторону). Можно ли в итоге добиться того, чтобы все 25 монет лежали в одной наперед заданной клетке?

5. Доказать, что если числа $m, n\in\mathbf{N}$ удовлетворяют равенству $2m^2+m=3n^2+n$, то числа $m-n$, $2m+2n+1$, $3m+3n+1$ являются квадратами целых чисел.

6. Доказать, что для любых чисел $a,b,c\in\mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$a^3/(a^2+ab+b^2)+b^3/(b^2+bc+c^2)+c^3/(c^2+ca+a^2)\leqslant(a+b+c)/3.$$

7. На окружности с диаметром AD выбрана точка B, а на диаметре AD — точка C так, что $AB=CD$. Доказать, что в треугольнике ABC биссектриса, медиана и высота, выходящие соответственно из вершин A, B и C, пересекаются в одной точке.

8. Доказать, что из любых пяти различных положительных чисел можно выбрать два числа, ни сумма, ни разность которых не равны ни одному из трех оставшихся чисел.

9. Найти все возрастающие функции $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f(x+f(y))=f(x+y)+1,\qquad x,\ y\in\mathbf{R}.$$

10. Доказать, что если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbf{R}$ удовлетворяют равенству

$$(n-1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)=(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2,$$

то они либо все неотрицательны, либо все неположительны.

11. Из середины каждой стороны вписанного четырехугольника опущен перпендикуляр на противоположную сторону. Доказать, что все четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

12. Найти наибольшее число $n\in\mathbf{N}$, обладающее следующим свойством: для любой нумерации клеток шахматной доски числами 1, 2, ..., 64 существуют две соседние клетки (имеющие общую сторону), разность номеров которых не меньше n.

Вьетнам (СРВ)

Первая математическая олимпиада в СРВ состоялась в 1962 г. для учащихся 7- и 10-летних школ. С тех пор олимпиады в СРВ организовывались ежегодно, а после объединения страны в 1975 г. они стали проводиться на всей территории Вьетнама. Средняя школа в СРВ делится на 3 ступени: 1—5 классы, 6—9 классы, 10—12 классы. Математические олимпиады во Вьетнаме проходят в последнее время в 4 тура: школьный, уездный, провинциальный и заключительный. В уездном и провинциальном турах олимпиады участвуют школьники всех классов, начиная с пятого. На заключительный (общевьетнамский) тур приглашаются только учащиеся последнего класса каждой ступени, т. е. 5-, 9- и 12-классники (на олимпиаду для 12 класса допускаются и 11-классники). Заключительный тур проходит в два дня. Каждый день участникам предлагаются 3—4 задачи на 4 часа. Учащиеся 11 и 12 классов — победители заключительного этапа олимпиады (около 20 человек) — приглашаются на отборочные соревнования, по результатам которых формируется команда страны на международную олимпиаду. Эти соревнования организуются так же, как и заключительный тур олимпиады.

Монголия (МНР)

Математическая олимпиада школьников в Монголии проводится, начиная с 1963 г., в 4 тура для учащихся 10 классов, в 3 тура для школьников 7—9 классов и в 2 тура для учеников 1—6 классов. Из числа 14 десятиклассников — победителей четвертого тура — формируется команда страны на Международную олимпиаду.

Куба

Отдельные математические соревнования школьников проводились на Кубе, начиная с 1962 г. Первая общенациональная математическая олимпиада была организована в 1970 г. Математические олимпиады в стране проводятся в 3 тура. На каждом туре участникам предлагается за 4 часа решить: на первых двух турах по 3 задачи, на третьем — 4 задачи.

II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ В КАПИТАЛИСТИЧЕСКИХ И РАЗВИВАЮЩИХСЯ СТРАНАХ

США

Каждый год в США организуется очень большое число разных по характеру и целям математических соревнований для учащихся средних школ. В 1955 г., например, было проведено не менее 60 соревнований.

Многие из этих соревнований организуются университетами, заинтересованными в выявлении талантливых ребят как потенциальных студентов. Наиболее значительные из таких состязаний — математические конкурсы Стэнфордского университета, которые проводятся ежегодно начиная с 1946 г. Эти конкурсы были организованы по инициативе профессора Стэнфордского университета Дж. Пойя. Они очень похожи на венгерские соревнования Этвеша, в которых в свое время добился успеха учащийся одной из средних школ Будапешта Дьердь (Джордж) Пойя.

Другие соревнования организуются Американским математическим обществом (The American Mathematical Society — AMS) и Математической Ассоциацией Америки (The Mathematical Association of America — MAA).

Каждый год, начиная с 1958 г., в США проводятся организуемые MAA и Страховой компанией США так называемые национальные состязания, в которых участвуют также учащиеся из Канады. На этих состязаниях школьникам отводится 80 минут на 50 задач, многие из которых носят характер вопросов.

Нельзя не упомянуть организованное Нью-Йоркским отделением MAA в 1950 г. состязание «Нью-Йорк метрополитен» — самое массовое соревнование этого года, в котором приняли участие школьники не только из штата Нью-Йорка, но и из ряда других штатов.

С 1972 г. в США проводятся так называемые национальные математические олимпиады, организуемые AMS. К участию в олимпиаде допускаются старшеклассники, успешно сдавшие экзамены в конце учебного года, а также победители школьных математических олимпиад. Число участников не превышает 100 человек. Каждый участник пишет олимпиаду в своей школе. На олимпиаде даются 5 задач, на решение которых отводится 3 часа. Проверка решений организуется централизованно. Из числа победителей национальной математической олимпиады формируется команда США на международную олимпиаду.

Большой популярностью в стране пользуются математические соревнования отдельных штатов. Например, математические состязания штата Висконсин проводятся, начиная с 1965 г. На них основное внимание уделяется скорости решения задач.

В последнее время в США широко известны так называемые конкурсы Двухлетнего Колледжа.

Вопросы организации математических соревнований в стране обсуждаются на страницах журналов «The Mathematics Teacher», «American Mathematical Monthly», «Mathematics Magazine».

Швеция

С 1961 г. Шведское математическое общество и газета «Svenska Dagbladet» ежегодно проводят математические соревнования для учащихся старших классов шведских гимназий. Эти соревнования проходят в 2 тура: аттестационный тур, в котором участвуют 300 гимназистов, и заключительный тур для 12—15 лучших участников.

Задачи олимпиады Швеции 1985 г. (ноябрь)

1. Доказать, что для любых значений $a > b > 0$ справедливы неравенства

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

2. Найти наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: если первую цифру его десятичной записи переставить в конец, то это число увеличится в 7/2 раза.

3. Точки A, B, C на окружности радиуса r и точка D внутри ограничиваемого ею круга расположены так, что $AB = BC$, а треугольник BCD равносторонний. Луч AD пересекает окружность в точке E. Доказать, что $DE = r$.

4. Многочлен $P(x)$ степени n с действительными коэффициентами удовлетворяет условию $P(x) \geqslant 0$ при всех значениях $x \in \mathbf{R}$. Доказать, что справедливо неравенство

$$P(x) + P'(x) + P''(x) + \ldots + P^{(n)}(x) \geqslant 0, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

5. В прямоугольной системе координат на плоскости вершины треугольника ABC имеют соответственно координаты $(a;\ 0)$, $(0;\ b)$ и $(c;\ d)$, где a, b, c, d положительны. Доказать, что справедливо неравенство

$$AB + BC + CA \geqslant 2 \cdot CO,$$

где O — начало координат.

6. В городе организовано несколько обществ, каждое из которых объединяет не менее 3 человек. Для любой пары жителей города есть

ровно одно общество, в которое они оба входят. Для любых двух обществ есть ровно один житель, который входит в каждое из них. По крайней мере одно общество имеет ровно 17 членов. Сколько человек живет в городе?

Нидерланды

В Голландии математические олимпиады проводятся с 1962 г. Они проходят в 2 тура. К участию в первом туре допускаются старшеклассники из нескольких привилегированных школ. Около 60 победителей первого тура проходят на второй тур. Математические соревнования в стране организуются также журналом «Pythagoras», рассчитанным на учащихся средних школ. С 1925 г. в Голландии издается журнал «Euclid». Отдел задач по элементарной математике и математическому анализу имеется в журнале «Nieuw tijdschrift voor Wiskunde», основанном в 1913 г.

Италия

Итальянское математическое общество в 1962—1968 гг. проводило местные соревнования (в пределах одного города) и в 1963—1967 гг.— национальные соревнования школьников. Характер задач, предлагавшихся на этих соревнованиях, колебался от ограниченных школьной программой задач на олимпиадах гор. Турина до в высшей степени оригинальных и эксцентричных задач римских олимпиад. Целесообразность продолжения математических соревнований в стране обсуждается в журнале «Archimedes».

Испания

С 1964 г. в Испании регулярно проводятся школьные математические олимпиады в 2 тура. На каждом туре участникам в течение 2 дней предлагается по 8 задач. По сложности задачи колеблются от простейших до довольно сложных, включающих в себя и элементы математического анализа.

Великобритания

В начале 60-х годов примерно в 300 британских школах проводились математические тесты, задания для которых заимствовались с национальных состязаний США, проводимых МАА. В 1965 г. была организована первая британская математическая олимпиада, задачи для которой составил ее инициатор профессор Лондонского университета У. К. Хейман вместе с М. Хейман. На решение задач учащимся было дано 3 часа. С тех пор британские математические олимпиады проводились регулярно. Проблему математического образования в стране освещают журналы «The Mathematical Gazette», «Mathematics in School», «Mathematical Teacher».

Задачи британской математической олимпиады 1986 г.

1. Привести к несократимому виду дробь m/n, где

$$m = 2244851485148514627,$$
$$n = 8118811881188118000.$$

2. К окружности S проведены две параллельные касательные l_1 и l_2. Окружность S_1 радиуса r_1 касается окружности S и прямой l_1. Окружность S_2 радиуса r_2 касается окружностей S, S_1 и прямой l_2. Все окружности касаются друг друга внешним образом. Найти радиус окружности S.

3. Доказать, что если числа $m, n, k \in \mathbf{N}$ удовлетворяют равенству

$$1+m+n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{2k-1},$$

то число m является квадратом целого числа.

4. Найти наибольшее значение $D \in \mathbf{R}$, осуществляющее оценку

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}>D$$

для сторон a, b, c любого тупоугольного треугольника.

5. Найти количество перестановок $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ набора $(1; 2; \ldots; n)$, удовлетворяющих условиям

$$a_i < a_{i+2} \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n-2,$$
$$a_i < a_{i+3} \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n-3.$$

6. Пусть AB, AC и AD — три ребра куба. Точка E взята на луче AC так, что $AE=2AC$, а точка F взята на луче AD так, что $AF=3AD$. Доказать, что площадь сечения куба любой плоскостью, параллельной плоскости BCD, равна площади сечения тетраэдра $ABEF$ той же плоскостью.

Канада

Учащиеся канадских школ принимают участие в национальных состязаниях США, организуемых МАА, начиная с 1958 г. Собственные математические олимпиады Канады проводятся с 1969 г. Олимпиадные задачи публикуются в журнале «Crux Mathematicorum».

Задачи олимпиады Канады 1986 г.

1. На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $CD=AB=1$, $\angle ABD=90°$, $\angle CBD=30°$. Найти AD.

2. Чемпионат между тремя участниками A, B и C состоит из n спортивных соревнований. В каждом соревновании за первое место начисляется m_1 очков, за второе — m_2, а за третье — m_3, где $m_1, m_2, m_3 \in \mathbf{N}$ и $m_1 > m_2 > m_3$. В результате чемпионата участник A набрал 22 очка, а участники B и C — по 9 очков. Участник B выиграл забег на 100 метров. Найти значение n и определить, кто был вторым по прыжкам в высоту.

3. Хорда CD полуокружности с диаметром AB имеет заданную длину. Точка M является серединой хорды CD, а точка H — основанием перпендикуляра, опущенного из точки C на диаметр AB. Доказать, что величина $\angle CHM$ не зависит от положения хорды CD.

4. Для чисел $m, n \in \mathbf{N}$ обозначено

$$f(m, n)=\sum_{k=1}^{m} k^{2n-1}.$$

Доказать, что для любых значений $m, n \in \mathbf{N}$ число $f(m, n)$ делится на число $f(m, 1)$.

5. Доказать, что если последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет равенствам $a_1=39$, $a_2=45$ и $a_{n+2}=a_{n+1}^2-a_n$ при $n\in\mathbf{N}$, то бесконечно много ее членов делятся на 1986.

Австрия

Школьные математические олимпиады проводятся в Австрии с 1970 г. Организация этих олимпиад очень своеобразна: к участию в олимпиаде (даже в 1 туре) допускаются только школьники, посещающие специальные подготовительные курсы. Эти курсы разбиваются на два уровня:

1) курсы для начинающих, которые школьник имеет право посещать лишь 1 год. На них принимаются все желающие из 9—11 классов (австрийская средняя школа 12-летняя), а в порядке исключения и отдельные школьники младших классов;

2) курсы второй ступени — для учащихся, успешно окончивших курсы для начинающих. На курсы второй ступени зачисляются после вступительной беседы и другие учащиеся 11—12 классов.

С 1975 г. австрийские олимпиады проводятся в 2 тура для курсов первой ступени и в 3 тура для курсов второй ступени. Роль первого тура играют курсовые испытания, в которых участвуют все слушатели подготовительных курсов. Победители курсовых соревнований допускаются на второй тур олимпиады — земельные соревнования для первой ступени и областные для второй (Австрия делится на 9 земель, которые в свою очередь делятся на области). Победившие в областных соревнованиях слушатели курсов второй ступени (около 30 школьников) допускаются до участия в заключительном (всеавстрийском) туре олимпиады. Вопросы физико-математического образования в стране обсуждаются в журнале «Mathematisch-physikalische Semesterberichte».

Задачи австрийской олимпиады 1986 г.

1 день

1. Доказать, что для любого значения $n\in\mathbf{N}$, большего 2, в правильный n-угольник можно вписать квадрат.

2. На координатной плоскости для заданных значений $k, l\in\mathbf{N}$ найти количество ромбов, вершины которых имеют координаты $x, y\in\mathbf{N}$, удовлетворяющие неравенствам $x\leqslant k$, $y\leqslant l$, а диагонали параллельны координатным осям.

3. Найти все значения $a_0, a_1\in\mathbf{R}$, для которых последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая равенствам

$$a_{n+1}=\frac{a_n a_{n-1}}{3a_{n-1}-2a_n} \text{ при } n\in\mathbf{N},$$

содержит бесконечно много членов, являющихся целыми числами.

2 день

4. Найти наибольшее значение $n\in\mathbf{N}$, для которого существует n-значное (в десятичной записи) число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, все цифры которого различны, и при каждом значении $i=1, \ldots, n$ число $\overline{a_1a_2\ldots a_i}$ делится на i. Для найденного значения n указать все такие n-значные числа.

5. Доказать, что при каждом значении $n \in \mathbf{N}$, большем 3, среднее арифметическое длин всех сторон любого выпуклого n-угольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

6. Для заданного значения $n \in \mathbf{N}$ найти все функции f: $\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющие тождеству

$$f(m+k) \equiv f(mk-n), \qquad m, k \in \mathbf{N}, \ mk > n.$$

Федеративная Республика Германии (ФРГ)

Математический конкурс в ФРГ был впервые организован Немецкой научной ассоциацией в 1970 г. К конкурсу допускались все учащиеся 11—13 классов. Он состоял из 3 туров. В первых 2 турах предлагалось решить в качестве домашней работы по 4 задачи. Третий тур носил характер коллоквиума. Вопросы математического образования в ФРГ широко обсуждаются в журналах «Praxis der Mathematik», «Archimedes», «Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht».

Бельгия

В начале 60-х годов в Бельгии для математических соревнований школьников использовались задачи, предлагаемые в США на состязаниях, организуемых МАА. С 1965 г. в стране для этих соревнований используются также контрольные вопросы журнала «L'enseignement». Собственные бельгийские математические олимпиады проводятся ежегодно с 1976 г. С 1982 г. олимпиада проводится в 3 тура (школьный тур, полуфинал, заключительный тур) отдельно для 2 возрастных групп. Организация школьного тура олимпиады весьма своеобразна: он проходит в виде контрольной работы, где на каждую задачу дается несколько возможных ответов, из которых нужно выбрать правильный. В Бельгии выходят два рассчитанных на школьников и учителей математики журнала «Mathesis» и «Nico» (от «Nicolas Bourbaki»). В стране издается также журнал по методике преподавания математики «Les mathématiques et la pedagogie».

Люксембург

В Люксембурге собственные национальные олимпиады не проводятся. С 1963 г. ежегодно около 85 учащихся 11—13 классов участвуют в соревнованиях, на которых предлагаются задачи с национальных состязаний США, организуемых МАА.

Франция

Математические олимпиады учащихся во Франции не проводятся. Однако в стране уже в течение столетия организуются заочные соревнования «Concours général», а в последние годы Франция участвует в международных математических олимпиадах. Вопросы преподавания математики в стране обсуждаются в «Bulletin association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public». С 1875 г. издается ученический математический журнал «Journal de mathématiques elémentaires», а с 1890 г.— учебно-методический журнал «Revue de mathematiques spécialies». С 1887 г. выходит также журнал «L'education mathématique».

Задачи соревнований «Concours général» 1986 г.

1. Дан тетраэдр $ABCD$.

а) Доказать, что середины ребер AB, AC, BD и CD лежат в одной плоскости.

б) Найти в этой плоскости точку, сумма расстояний от которой до прямых AD и BC минимальна.

2. На плоскости расположены точки A, B, C и M.

а) Пусть D — точка плоскости, для которой $DA \leqslant CA$ и $DB \leqslant CB$. Доказать, что существует точка N, удовлетворяющая неравенствам $NA \leqslant MA$, $NB \leqslant MB$ и $ND \leqslant MC$.

б) Пусть A', B', C' — точки плоскости, для которых $A'B' \leqslant AB$, $A'C' \leqslant AC$, $B'C' \leqslant BC$. Существует ли точка M', удовлетворяющая неравенствам $M'A' \leqslant MA$, $M'B' \leqslant MB$, $M'C' \leqslant MC$?

3. а) Для любых ли чисел $z, w \in \mathbf{C}$ справедливо неравенство

$$|z|+|w| \leqslant |z+w|+|z-w|?$$

б) Доказать, что для любых значений $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} |z_i+z_j|.$$

Задачи исследовательского характера

1. Для любой последовательности $\{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ определим последовательности $\{\Delta a_n\}$ и $\{\Delta^2 a_n\}$ следующими формулами:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,$$
$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n.$$

Кроме того, при всех значениях $n \in \mathbf{N}$, для которых $\Delta^2 a_n \neq 0$, положим

$$a'_n = a_n - \frac{(\Delta a_n)^2}{\Delta^2 a_n}.$$

1. Для каких последовательностей $\{a_n\}$ последовательность $\{\Delta^2 a_n\}$ постоянна?

2. Найти все последовательности $\{a_n\}$, для которых числа a'_n определены при всех значениях $n \in \mathbf{N}$ и последовательность $\{a'_n\}$ постоянна (отдельно рассмотреть случай $a'_n \equiv 0$).

3. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу $a=0$, причем $a_n \neq a$ при всех значениях $n \in \mathbf{N}$ и последовательность $\left\{\dfrac{a_{n+1}-a}{a_n-a}\right\}$ сходится к числу $\lambda \neq 1$.

а) Доказать, что $\lambda \in [-1;\ 1)$.

б) Доказать, что при всех значениях $n \in \mathbf{N}$, начиная с некоторого номера n_0, справедливо неравенство $\Delta^2 a_n \neq 0$.

в) Пусть $\lambda \neq 0$. Для каждого значения $k \in \mathbf{Z}^+$ исследовать последовательность $\left\{\dfrac{a'_n}{a_{n+k}}\right\}$ на сходимость (отдельно рассмотреть случай $k=0$).

г) Пусть $\lambda = 0$. Доказать, что последовательности $\{a'_n/a_n\}$ и $\{a'_n/a_{n+1}\}$ сходятся к нулю. Привести пример последовательности $\{a_n\}$, для которой последовательность $\{a'_n/a_{n+2}\}$ имеет ненулевой предел.

4. Как изменятся результаты п. 3, если снять условие $a=0$?

II. Функции f, g: $[0; 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ заданы формулами

$$f(x)=\sqrt[4]{1-x}, \quad g(x)=f(f(x)),$$

а через c обозначен какой-либо корень уравнения $x=f(x)$.

1. а) Исследовать функцию $f(x)$ и нарисовать ее график. Доказать, что уравнение $x=f(x)$ имеет единственный корень, причем $c\in[0{,}72;\ 0{,}73]$.

б) Исследовать функцию $f'(x)$. Пусть M_1 и M_2 — точки на графике функции $f(x)$, имеющие разные абсциссы. Как расположена дуга M_1M_2 этого графика относительно отрезка M_1M_2?

в) Исследовать функцию $g(x)$ и нарисовать ее график. Как расположен график этой функции относительно прямой $y=x$? Найти касательные к графику в точках с абсциссами 0 и 1.

г) Доказать, что любая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая условиям $a_1\in(0;\ 1)$ и $a_{n+1}=f(a_n)$ при $n\in\mathbf{N}$, сходится (рассмотреть подпоследовательности $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$ $(n\in\mathbf{N})$ и функцию $g(x)$, придумать графическую иллюстрацию).

2. На графике функции $f(x)$ рассматриваются точки M и M' с абсциссами x и $f(x)$, где $x\neq c$.

а) Доказать, что прямая MM' пересекается с прямой $y=x$ в точке с абсциссой

$$h(x)=x-\frac{(f(x)-x)^2}{g(x)+x-2f(x)}.$$

б) Доказать, что если $x\in(0;\ c)$, то $h(x)\in(x;\ c)$.

в) Исследовать любую последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющую условиям $a_1\in(0;c)$ и $a_{n+1}=h(a_n)$ при $n\in\mathbf{N}$, на сходимость. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{a_{n+1}-c}{a_n-c}\right\}$ сходится и найти ее предел.

3. Пусть калькулятор округляет каждое число $b\in[-2;\ 2]$ до значения $\tilde{b}$, имеющего p десятичных знаков после запятой. Выполнить на этом калькуляторе следующую последовательность операций:

1) положить $a=0{,}72$;

2) вычислить $\delta(a)=\widetilde{f(a)}-a$;

3) если $|\delta(a)|>0{,}5\cdot10^{-p}$, то вычислить $\widetilde{h(a)}$ и перейти к операции 2), придав числу a значение $\widetilde{h(a)}$;

4) если $|\delta(a)|\leqslant0{,}5\cdot10^{-p}$, то закончить вычисление.

Пусть $\tilde{c}$ — последнее из вычисленных значений $\widetilde{h(a)}$. Пользуясь тем, что для любого значения $x\in[0{,}72;\ 0{,}73]$ справедлива оценка $|\widetilde{f(x)}-f(x)|<\varepsilon$, определить по величине $\delta(\tilde{c})$, с какой точностью (зависящей от ε) значение $\tilde{c}$ представляет число c.

4. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям $a_1=0{,}72$ и $a_{n+1}=f(a_n)$ при $n\in\mathbf{N}$. Найти наименьший номер $n_0\in\mathbf{N}$, начиная с которого при всех значениях $n\in\mathbf{N}$ справедливо неравенство $|a_n-c|<$ $<10^{-6}$.

Индия

В Индии проводятся ежегодные заочные олимпиады среди абитуриентов математических отделений университетов. В ряде штатов организуются олимпиады для учащихся старших классов школ (первая такая олимпиада была проведена в 1958 г. в Бенгалии). В стране также выходит журнал «The mathematical student», который проводит конкурс по решению задач.

Австралия

Первый математический конкурс в Австралии был проведен в 1976 г. в рамках столицы страны Канберры. Он охватил 33 школы и 1300 учащихся. Конкурс проходил в виде письменного экзамена по обычному школьному курсу математики. К 1978 г. этот конкурс перерос в Австралийский математический конкурс на приз Уэлса, который проводится в масштабах всей страны. В 1981 г. состоялась первая Австралийская математическая олимпиада.

Аргентина

Математические олимпиады в Аргентине не проводятся, но с 1965 г. Кордобский университет организует соревнования под названием «Feria de ciencios» («Торжество науки»). В этот университет ежегодно присылаются оригинальные научные работы, выполненные учащимися школ страны. Принимаются работы как отдельных учащихся, так и коллективные. В стране выходит журнал «Buletin matemáticó», основанный в 1928 г.

III

РЕГИОНАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Австро-польская олимпиада

Австро-польские математические олимпиады проходят с 1982 г. От каждой страны в олимпиаде принимают участие 6 школьников. Соревнования продолжаются 3 дня. В первые 2 дня проходит личное первенство, а в третий день — командное.

Балканская олимпиада

Первая Балканская математическая олимпиада (так называемая Балканиада) состоялась в 1984 г. В ней приняли участие Болгария, Греция и Румыния. Организаторами олимпиады являлись Греческое математическое общество и Министерство спорта Греции. Команда каждой страны состояла из 6 школьников — учащихся 10 и 11 классов. Участникам было предложено 4 задачи.

III Балканская математическая олимпиада Бухарест, 1986 г.

1. (Греция). Прямая, проходящая через центр O окружности радиуса r, вписанной в треугольник ABC, пересекает эту окружность в точках D и E, а описанную около треугольника ABC окружность — в точках F и G, причем точка D лежит между точками O и F. Доказать, что $DF \cdot EG \geqslant r^2$. Определить, когда достигается равенство.

2. (НРБ). На ребрах AB, BC, AC, AD, BD, CD тетраэдра $ABCD$ выбраны точки E, F, G, H, K, L соответственно. Доказать, что если справедливы равенства

$$AE \cdot BE = BF \cdot CF = AG \cdot CG = AH \cdot DH = BK \cdot DK = CL \cdot DL,$$

то точки E, F, G, H, K, L лежат на одной сфере.

3. (НРБ). Доказать, что все члены последовательности $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющей для некоторых значениий $a, b, c \in \mathbf{R}$, $ab \neq 0$, $c > 0$, равенствам

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + c}{a_n} \text{ при } n \in \mathbf{N},$$

являются целыми числами тогда и только тогда, когда числа a, b и $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ целые.

4. (СРР). Точка M в плоскости треугольника ABC расположена так, что треугольники MAB, MBC и MAC имеют одинаковые периметры и одинаковые площади. Доказать, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то этот треугольник равносторонний, а в противном случае — прямоугольный.

Олимпиада Скандинавских стран

В последние годы проводится заочный математический конкурс решения задач для учащихся Скандинавских стран. В нем участвуют школьники Дании, Исландии, Норвегии, Финляндии и Швеции.

Олимпиада стран Магриба

Магриб — арабское название территории Африки, расположенной к западу от Египта (где в настоящее время находятся страны Ливия, Тунис, Алжир, Марокко). Эти северо-африканские страны в начале 80-х годов провели первую математическую олимпиаду учащихся.

Задачи олимпиады стран Магриба 1986 г.

1 день

1. Найти все тройки цифр x, y, z, для которых при любом значении $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{\overline{yy\ldots y}}_{n \text{ цифр}}} = \underbrace{\overline{zz\ldots z}}_{n \text{ цифр}}.$$

2. Прямая, параллельная диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ и проходящая через середину диагонали BD, пересекается в точке O с прямой, проходящей через середину AC параллельно BD. Доказать, что четырехугольники $OABC$, $OBCD$, $OCDA$, $ODAB$ имеют равные площади.

3. Доказать, что существует и при том единственная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющая условиям

$$-2 < a_n < -1, \quad n \ln\left(1 + \frac{a_n}{n+1}\right) = a_n \quad \text{при} \quad n \in \mathbf{N}.$$

2 день

4. Доказать, что для любых положительных чисел a_1, a_2, a_3 справедливо неравенство

$$3\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_1}\right) \geqslant 4\left(\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_3+a_1}\right)^2.$$

5. Две окружности имеют общий центр O. Две прямые, пересекающиеся в точке O, пересекают окружность большего радиуса в точках A, B и окружность меньшего радиуса в точках C, D, причем точка O лежит между точками A и C, а точка D — между точками B и O. Доказать, что окружность, описанная около треугольника AOB, окружность, описанная около треугольника COD, окружность с диаметром AC и окружность с диаметром BD пересекаются в одной точке.

6. Решить уравнение

$$5^{2x}-3\cdot 2^{2y}+5^x\cdot 2^{y-1}-2^{y-1}-2\cdot 5^x+1=0$$

в целых числах.

IV

МЕЖДУНАРОДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Международные математические олимпиады школьников проводятся с 1959 г. Об их истории и особенностях подробно рассказано в [3].

Задачи международной математической олимпиады 1986 г.

1 день

1. (ФРГ). Пусть d — натуральное число, отличное от 2, 5 и 13. Докажите, что во множестве $\{2;\ 5;\ 13;\ d\}$ можно найти два различных числа a и b такие, что число $ab-1$ не является квадратом целого числа.

2. (КНР). На плоскости даны треугольник $A_1A_2A_3$ и точка P_0. Положим $A_s=A_{s-3}$ для любого целого $s\geqslant 4$. Строим последовательность точек P_0, P_1, P_2, ... так, что точка P_{k+1} есть образ P_k при повороте вокруг точки A_{k+1} на угол $120°$ по часовой стрелке ($k=0$, 1, ...). Докажите, что если $P_{1986}=P_0$, то треугольник $A_1A_2A_3$ — равносторонний.

3. (ГДР). Каждой вершине правильного пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Если трем последовательным вершинам соответствуют числа x, y, z и $y<0$, то разрешается следующая операция: числа x, y, z заменяются соответственно на $x+y$, $-y$, $z+y$. Такие операции последовательно совершаются, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Определите, обязательно ли этот процесс закончится за конечное число шагов.

2 день

4. (Исландия). Пусть A и B — соседние вершины данного правильного n-угольника ($n\geqslant 5$) с центром O. Треугольник XYZ, равный треугольнику OAB, вначале совпадает с ним, потом движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на границе, а точка X — внутри данного n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда точки Y и Z вместе совершат полный оборот?

5. (Англия). Найти все функции $f(x)$, определенные на множестве неотрицательных действительных чисел, принимающие значения в том же множестве и удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f(xf(y))\cdot f(y)=f(x+y)$ для всех неотрицательных чисел x, y;

2) $f(2)=0$;

3) $f(x)\neq 0$ для всех $0\leqslant x\leqslant 2$.

6. (ГДР). Пусть M — произвольное конечное множество целочисленных точек на координатной плоскости. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные в красный так, чтобы для каждой прямой l, параллельной любой из координатных осей, абсолютная величина разности между числом белых и красных точек на l не превосходила бы единицы? Ответ обосновать.

Приложение В

ОСНОВНЫЕ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ

[1] *Будуров С. Т.* Математически олимпиади.— София: Народна просвета, 1972.

[2] *Давидов Л., Тонов И.* Републиканска олимпиада по математика за 1977 г. // Математика.— 1977.— Г. 16, № 4. —С. 17—21.

[3] Министерство на народната просвета, Централна комисия за олимпиадата по математика. Първите три британски математически олимпиади.— София, 1983.

[4] *Петков В., Тонов И.* Републиканска олимпиада по математика за 1976 г. // Математика.— 1976. — Г. 15, № 4. — С. 16—20.

[5] *Табов Й.* Четвърти кръг на олимпиадата по математика // Математика.— 1982.— Г. 21, № 7.— С. 22—27.

[6] *Табов Й.* IV кръг на XXVIII национална олимпиада по математика 1979 година // Математика.— 1979.— Г. 18, № 4.— С. 24—30.

[7] *Тонов И.* XXX национална олимпиада по математика.— 1981 г. // Математика.— 1981.— Г. 20, № 8.— С. 28—34.

[8] Централна комисия за провеждане на олимпиадата по математика. Решения на задачите от първия и втория ден на подборния кръг на XXXII национална олимпиада по математика за средношколци — 14 и 15 май 1983 година.— София, 1983.

[9] *Auswahl E.* Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band 1. — Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1972.

[10] *Auswahl E.* Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band 2. — Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1975.

[11] *Auswahl E.* Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Klassen 5—8. — Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1983.

[12] *Chiriţă M., Maftei I. V.* Rezolvarea problemelor date la olimpiada de matematică, etapa finală, Piteşti, 6—9 april 1979 // Gazeta matematică. — 1980. — V. LXXXV, № 4. — P. 168—177.

[13] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 21 // Crux Mathematicorum.— 1981. — V. 7, № 1. — P. 11—17.

[14] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 22 // Crux Mathematicorum.— 1981. — V. 7, № 2.— P. 42—47.

[15] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 25 // Crux Mathematicorum.— 1981.— V. 7, № 5.— P. 139—144.

[16] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 26 // Crux Mathematicorum.— 1981.— V. 7, № 6.— P. 171—177.

[17] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 28 // Crux Mathematicorum.— 1981.— V, 7, № 8.— P. 235—237.

[18] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 29 // Crux Mathematicorum.— 1981.— V. 7, № 9.— P. 267—273.
[19] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 31 // Crux Mathematicorum.— 1982.— V. 8, № 1.— P. 12—14.
[20] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 35 // Crux Mathematicorum.— 1982.—V. 8, № 5.— P. 133—135.
[21] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 36 // Crux Mathematicorum.— 1982.— V. 8, № 6.— P. 164—172.
[22] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 38 // Crux Mathematicorum.— 1982.— V. 8, № 8.— P. 237—244.
[23] *Klamkin M. S.* The Olympiad Corner: 39 // Crux Mathematicorum.— 1982.— V. 8, № 9.— P. 269—275
[24] Matematická Olympiáda, 1951—1981, Jednota Československých matematiků a fyziků ústřední výbor matematiké olympiády — Praha, 1983.
[25] Ministerstwo Oświaty i Wychowania. Dwudziesta Dziewiata Olympiada Matematyczna (1977/1978).— Warszawa: Wydawnictwa szkolne i pedagogiczne, 1978.
[26] Ministerstwo Oświaty i Wychowania. Trzydziesta Olympiada Matematyczna (1978/1979).— Warszawa: Wydawnictwa szkolne i pedagogiczne, 1979.
[27] Romania Ministry of Education. 43 problems (Romanian Mathematical Olympiad — 1978).— Bucharest, 1978.
[28] Savezno takmičenje mladih matematičara // Matematičko-fizički list.— 1972—73.— G. XXIII, № 1.— S. 21—23.
[29] Savezno takmičenje mladih matematičara // Matematičko-fizički list.— 1973—74.— G. XXIV, № 1.— S. 20—22.
[30] Savezno takmičenje mladih matematičara // Matematičko-fizički list.— 1975—76.— G. XXVI, № 1.— S. 19—21.
[31] Soluţiile unor probleme date la concursul de matematică, 1975 // Gazeta matematică.— 1976.— V. LXXXI, № 7.— P. 367—372.
[32] VIII Olympiade Junger Mathematiker der DDR. DDR-Olympiade (28.3 bis 1.4.1969). Aufgaben // Alpha.— 1969.— V. 3, № 3.— P. 60.
[33] IX Olympiade Junger Mathematiker der DDR. DDR-Olympiade (22.3 bis 26.3. 1970). Aufgaben // Alpha.— 1970.— V. 4, № 4.— P. 60.
[34] XI Olympiade Junger Mathematiker der DDR. DDR-Olympiade (28.3. bis 30.3. 1972). Aufgaben // Alpha.— 1972.— V. 6, № 4.— P. 85.
[35] XIII Olympiade Junger Mathematiker der DDR. DDR-Olympiade (8.4 bis 10.4.1974). Aufgaben // Alpha.— 1974.— V. 8, № 3.— P. 59.
[36] XVI Olympiade Junger Mathematiker der DDR. 4. Stufe (DDR-Olympiade) // Alpha.— 1977.— V. 11, № 4.— P. 84.
[37] XVIII Olympiade Junger Mathematiker der DDR. 4. Stufe (DDR-Olympiade) // Alpha.— 1979.— V. 13, № 5.— P. 113.
[38] XIX Olympiade Junger Mathematiker der DDR. 4. Stufe (DDR-Olympiade) // Alpha.— 1980.— V. 14, № 5.— P. 114—117.
[39] XXI Olympiade Junger Mathematiker der DDR. 4. Stufe (DDR-Olympiade) // Alpha.— 1982.— V. 16, № 5.— P. 114—115.
[40] XXII Olympiade Junger Mathematiker der DDR. 4. Stufe (DDR-Olympiade) // Alpha.— 1983.— V. 17, № 5.— P. 114—115.
[41] XVII savezno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola // Matematičko-fizički list.— 1976—77.— G. XXVII, № 2.— S. 66—68.
[42] XVIII savezno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola // Matematičko-fizički list.— 1977—78.— G. XXVIII, № 1.— S. 28—31.

Приложение Г

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящем приложении собраны наиболее важные для решения задач понятия и факты (из различных областей математики), иногда выходящие за рамки школьной программы. Доказательства здесь не приводятся, но большинство из них заинтересованный читатель может найти в тех книгах, которые перечислены в списке литературы (приложение Д). Например, ссылка [19], [20] означает, что доказательство данной теоремы можно прочесть в учебниках [19] или [20]. Доказательства некоторых утверждений содержатся в решениях задач из сборников [3] и [4], доказательства некоторых других утверждений содержатся в разделе III сборника [1] (теоретические примечания к решениям задач). При ссылке на эти сборники в скобках указан номер задачи, в решении которой (или в примечании к решению которой, если ссылка делается на [1]) приведено доказательство данной теоремы. Например, выражение [3 (83)] означает, что имеется в виду решение задачи № 83 в сборнике [3]. Отдельные теоремы из приведенных ниже представляют собой несложные упражнения для читателя. В приложении Е дан перечень наиболее часто встречающихся в книге обозначений, смысл которых, как правило, разъяснен в определениях (номера определений в этих случаях указаны в скобках).

* * *

Определение 1. *Множество* A называется *подмножеством множества* B (обозначение $A \subset B$), если каждый элемент множества A принадлежит множеству B.

Определение 2. *Объединением* $A \cup B$ *множеств* A *и* B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих по крайней мере одному из множеств A и B. *Пересечением* $A \cap B$ *множеств* A *и* B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B.

Аналогично определяется объединение и пересечение нескольких множеств.

Определение 3. *Разностью* $A \setminus B$ *множеств* A *и* B называется подмножество множества A, состоящее из всех его элементов, не принадлежащих множеству B. Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением к множеству* B *в множестве* A.

Наборы, состоящие из одних и тех же элементов, но различающиеся их порядком, представляют собой одно и то же множество (например $\{1; 2; 3\} = \{2; 3; 1\}$). Если возникает необходимость не смешивать также наборы, различающиеся только порядком входящих в них элементов, то в этом случае наборы называют *упорядоченными*.

Определение 4. *Декартовым произведением* $A \times B$ *множеств* A *и* B называется множество всех упорядоченных пар $(x; y)$, где $x \in A$ и $y \in B$.

Аналогично определяется декартово произведение нескольких множеств.

Теорема 1 (принцип Дирихле). *Если множество, содержащее* n *элементов, представлено в виде объединения* k *подмножеств, то хотя бы одно из этих подмножеств содержит не менее* n/k *элементов.*

Эта теорема обычно используется в ситуации, когда $k < n$, а подмножества попарно не пересекаются.

Теорема 2 (принцип математической индукции). *Пусть для некоторого утверждения* $U(n)$, *зависящего от параметра* n, *справедливо следующее:*

а) *утверждение* $U(1)$ *истинно;*

б) *если при некотором значении* $n \in \mathbf{N}$ *утверждения* $U(1), \ldots, U(n)$ *истинны, то утверждение* $U(n+1)$ *также истинно.*

Тогда утверждение $U(n)$ *истинно для любого значения* $n \in \mathbf{N}$.

Через $f: A \longrightarrow B$ обозначается функция с областью определения A и областью значений B.

Определение 5. Пусть задана функция $f: A \longrightarrow B$. *Функция* $g: B \longrightarrow A$ называется *обратной к функции* f (обозначение: $g = f^{-1}$), если справедливы тождества

$$g(f(x)) \equiv x, \quad f(g(y)) \equiv y, \quad x \in A, \ y \in B.$$

Теорема 3. *Функция* $f: A \longrightarrow B$ *имеет обратную функцию тогда и только тогда, когда для любого элемента* $y \in B$ *существует элемент* $x \in A$, *удовлетворяющий условию* $f(x) = y$, *и для любых двух различных элементов* $x_1, x_2 \in A$ *значения* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$ *также различны.*

Определение 6. *Суперпозицией* двух функций $f: A \longrightarrow B$ и $g: B \longrightarrow C$ называется функция $h: A \longrightarrow C$, определенная тождеством

$$h(x) \equiv g(f(x)), \qquad x \in A.$$

Аналогично определяется суперпозиция нескольких функций

$$f_1: A_1 \longrightarrow A_2, \quad f_2: A_2 \longrightarrow A_3, \ \ldots, \ f_n: A_n \longrightarrow A_{n+1}.$$

Суперпозиция n *совпадающих функций* $f: A \longrightarrow A$ обозначается через f^n. Если задана функция $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, то суперпозицию

$$f^n(x) = f(f(f(\ldots(x)\ldots)))$$

или обратную функцию $f^{-1}(x)$ не следует смешивать с функцией, значение которой в каждой точке x равно $(f(x))^n$ или $(f(x))^{-1}$ соответственно. Исключение составляют логарифмическая и тригонометрические функции (например, выражение $\sin^2 x$ равно $\sin x \cdot \sin x$, а не $\sin(\sin(x))$).

* * *

Определение 7. Функция $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$ называется:

— *ограниченной сверху*, если некоторое число $M \in \mathbf{R}$ осуществляет оценку $f(x) < M$ при всех $x \in A$;

— *ограниченной снизу*, если некоторое число $m \in \mathbf{R}$ осуществляет оценку $f(x) > m$ при всех $x \in A$.

Функция $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$, ограниченная одновременно как сверху, так и снизу, называется *ограниченной*.

Определение 8. Пусть $A \subset \mathbf{R}$. Функция $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$ называется:

возрастающей, если $f(x_1) < f(x_2)$,

убывающей, если $f(x_1) > f(x_2)$,

невозрастающей, если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,

неубывающей, если $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

где каждое из условий выполнено для любых чисел $x_1, x_2 \in A$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$. Функция $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$, обладающая одним из этих четырех свойств, называется *монотонной*. Функция, являющаяся либо возрастающей, либо убывающей, называется *строго монотонной*.

Частным случаем функций $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$, область определения которых есть подмножество множества $\mathbf{R}$, являются числовые последовательности, т. е. отображения $a\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ или $a\colon \mathbf{Z}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$, значения которых обозначаются через a_n. В соответствии с определениями 7 и 8 говорят об *ограниченных сверху* или *снизу*, *ограниченных*, *возрастающих*, *убывающих*, *невозрастающих*, *неубывающих*, *монотонных* и *строго монотонных последовательностях*.

* * *

Теорема 4. *Для любых значений $a, b \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ справедливы равенства:*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}),$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$\text{при } a \geqslant \sqrt{b},\ b > 0.$$

* * *

Теорема 5 (неравенство Бернулли) ([1 (35)], [9], [21]). *Для любых значений a, $b \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям $a > -1$,*

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ b \neq 1$, *справедливы неравенства*

$$(1+a)^b < 1+ab, \quad \text{если} \quad 0 < b < 1$$
$$(1+a)^b > 1+ab, \quad \text{если} \quad b \notin [0;\ 1].$$

Определение 9. *Средним арифметическим чисел* $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{R}$ называется число

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Средним геометрическим неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Средним гармоническим положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Средним квадратическим чисел $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{R}$ называется число

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Теорема 6 (теорема о средних) ([1 (68, 115)], [9], [21]). *Любые положительные числа* $a_1, \ldots, a_n$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

причем если среди этих чисел имеются хотя бы два различных, то все неравенства строгие.

Наиболее употребительным является неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, верное также и для неотрицательных чисел.

Теорема 7 ([4 (224, 225)], [9], [19], [20], [21]). *Последовательность чисел* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ *является возрастающей и имеет предел, обозначаемый через* e, *который удовлетворяет неравенству*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

для любого значения $n \in \mathbf{N}$.

Логарифм по основанию e называется *натуральным* и обозначается через $\ln$ ($\log_e x = \ln x,\ x > 0$).

* * *

Определение 10. Функция

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad x>0, \\ 0, & \text{если} \quad x=0, \\ -1, & \text{если} \quad x<0, \end{cases}$$

называется *функцией знака.*

Определение 11. *Целой частью* $[x]$ *числа* $x \in \mathrm{R}$ называется наибольшее целое значение, не превосходящее числа x. *Дробной частью числа* $x \in \mathrm{R}$ называется число $\{x\}=x-[x]$.

Теорема 8. *Целая часть является неубывающей функцией, а дробная часть — периодической функцией с периодом, равным* 1.

* * *

Определение 12. Пусть даны числа $a, b \in \mathbf{Z}$, причем $b \neq 0$. Тогда числа $q \in \mathbf{Z}$ и $r \in \{0, 1, \ldots, |b|-1\}$ называются соответственно *частным и остатком от деления числа a на число b*, если выполнено равенство

$$a=qb+r.$$

При этом, если $r=0$, то говорят, что число *a делится на b*, или что число *a кратно* числу b, или что число b является *делителем* числа a (обозначение $a \,\vdots\, b$).

Определение 13. *Наименьшим общим кратным* ненулевых чисел $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из этих чисел (обозначение $[a_1, \ldots, a_n]$).

Определение 14. *Наибольшим общим делителем* чисел $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из этих чисел (обозначение $(a_1, \ldots, a_n)$).

Теорема 9. *Для любых двух натуральных чисел a и b имеет место равенство*

$$(a, b)\cdot[a, b]=ab.$$

Определение 15. Числа $a, b \in \mathbf{Z}$ называются *взаимно простыми*, если $(a, b)=1$.

Определение 16. Пусть даны числа $a, b, c \in \mathbf{Z}$, причем $c \neq 0$. Говорят, что *число a сравнимо с числом b по модулю c* (обозначение: $a \equiv b \pmod{c}$), если $(a-b) \,\vdots\, c$; в противном случае говорят, что число a не сравнимо с числом b по модулю c (обозначение: $a \not\equiv b \pmod{c}$).

Теорема 10. *Пусть заданы числа* $a, b, c, d, m, k \in \mathbf{Z}$, *причем* $m \neq 0$, $k \neq 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если* $a \equiv b \pmod{m}$ *и* $b \equiv c \pmod{m}$, *то* $a \equiv c \pmod{m}$;

б) *если* $a \equiv b \pmod{m}$ *и* $c \equiv d \pmod{m}$, *то* $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ *и* $ac \equiv bd \pmod{m}$;

в) *если* $a \equiv b \pmod{m}$, *то* $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ *для любого значения* $n \in \mathbf{N}$;

г) *если* $a \equiv b \pmod{m}$, *то* $ak \equiv bk \pmod{mk}$;

д) *если* $a \equiv b \pmod{m}$ *и* $a \vdots k$, $b \vdots k$, $m \vdots k$, *то*

$$a/k \equiv b/k \pmod{m/k}.$$

Теорема 11. *Для любых значений* $a, b \in \mathbf{Z}$ *и* $n \in \mathbf{N}$ *имеют место следующие утверждения*:

а) *если* $a \neq b$, *то* $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$;

б) *если* $a \neq -b$, *то* $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) \vdots (a + b)$;

в) *если* $a \neq -b$, *то* $(a^{2n} - b^{2n}) \vdots (a + b)$.

Эта теорема вытекает из теоремы 4 или из теоремы 10 в).

Пусть m — произвольное натуральное число, большее 2. Различные целые числа при делении на m могут давать любой из остатков $0, 1, \ldots, m-1$. Однако степени целых чисел с фиксированным натуральным показателем $n > 1$ не обязательно снова могут давать при делении на m любой из этих остатков.

Теорема 12. *При делении на* m $(3 \leqslant m \leqslant 10)$ n*-е степени целых чисел* $(2 \leqslant n \leqslant 5)$ *могут давать те и только те остатки, которые указаны в таблице* 2.

Таблица 2

m \ n	2	3	4	5
3	0; 1	0; 1; 2	0; 1	0; 1; 2
4	0; 1	0; 1; 3	0; 1	0; 1; 3
5	0; 1; 4	0; 1; 2; 3; 4	0; 1	0; 1; [illegible]; 3; 4
6	0; 1; 3; 4	0; 1; 2; 3; 4; 5	0; 1; 3; 4	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	0; 1; 2; 4	0; 1; 6	0; 1; 2; 4	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	0; 1; 4	0; 1; 3; 5; 7	0; 1	0; 1; 3; 5; 7
9	0; 1; 4; 7	0; 1; 8	0; 1; 4; 7	0; 1; 2; 4; 5; 7; 8
10	0; 1; 4; 5; 6; 9	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9	0; 1; 5; 6	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

Обычно числа записываются в десятичной системе счисления, которая допускает следующее обобщение.

Определение 17. Говорят, что число $n \in \mathbf{N}$ имеет запись $\overline{a_1 \ldots a_m}$ в *k-ичной системе счисления* $(k \in \mathbf{N},\ k > 1)$, если справедливо равенство

$$n = a_1 k^{m-1} + \ldots + a_{m-1} k^1 + a_m k^0,$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — целые неотрицательные числа, меньшие k, причем $a_1 > 0$.

Теорема 13 [14]. *Для заданного значения $k \in \mathbf{N}$, большего 1, любое число $n \in \mathbf{N}$ имеет запись в k-ичной системе счисления, причем единственную.*

Теорема 14. *Любое натуральное число сравнимо с суммой своих цифр в десятичной системе счисления по модулю 9.*

Доказательства теорем 10—12 и 14 и другие свойства сравнений можно найти, например, в [1 (13)], [11], [18], [21], [22].

Определение 18. Пусть $m, n \in \mathbf{Z}$; $n \geqslant m \geqslant 0$. *Биномиальным коэффициентом* C_n^m называется число

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

где обозначено

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \ldots n & \text{при } n \in \mathbf{N}, \\ 1 & \text{при } n = 0 \end{cases}$$

($n!$ читается «эн — факториал»).

Теорема 15. *Для любых значений $m, n \in \mathbf{Z}^+$ справедливы следующие соотношения:*

а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

б) $C_n^m = C_n^{n-m}$, *если* $n \geqslant m \geqslant 0$;

в) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, *если* $n > m > 0$.

Теорема 16 (бином Ньютона) ([1 (25)], [12], [18], [21], [25], [28]). *Для любых значений $a, b \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 17. *Все биномиальные коэффициенты являются натуральными числами, причем справедливы равенства:*

а) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Соотношение 17 а) получается из тождества теоремы 16 при подстановке $a = b = 1$, а соотношение 17 б) — при $a = -b = 1$.

Определение 19. Натуральное число, большее 1 и не имеющее натуральных делителей, отличных от 1 и самого себя, называется *простым*. Остальные натуральные числа, большие 1, называются *составными*. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Теорема 18 (основная теорема арифметики) ([1 (7)], [13], [18], [21], [22]). *Каждое составное число разлагается в произведение нескольких простых чисел, не обязательно различных, причем такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.*

Теорема 19 ([4 (349)], [11], [18], [21], [29]). *Простых чисел бесконечно много.*

Теорема 20 (теорема Лежандра) ([1 (86)], [3 (83)], [4 (75)], [18], [22]). *Простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители в степени*

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

$\left(\text{при достаточно больших значениях } k \text{ имеем } \left[\frac{n}{p^k}\right]=0\right)$.

Следующие 3 теоремы описывают свойства взаимно простых чисел.

Теорема 21 ([1 (24)], [18], [22]). *Пусть a, b, $c \in \mathbf{Z}$ и $c \neq 0$. Если $ab \vdots c$ и $(b, c)=1$, то $a \vdots c$.*

Теорема 22 ([3 (241)], [21]). *Пусть $a, b, c, m \in \mathbf{N}$. Если $ab=c^m$ и $(a, b)=1$, то $a=a_1^m$ и $b=b_1^m$, где $a_1, b_1 \in \mathbf{N}$, причем $(a_1, b_1)=1$ и $a_1b_1=c$.*

Теорема 23 (китайская теорема об остатках) ([18]). *Если целые числа $m_1, \ldots, m_k$ отличны от нуля и попарно взаимно просты, то для любых целых чисел $a_1, \ldots, a_k$ существует целое число x, удовлетворяющее условиям $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ при всех $i=1, \ldots, k$. При этом число x можно считать принадлежащим любому наперед заданному полуинтервалу длины $m_1m_2 \ldots m_k$.*

Теорема 24 ([11], [13], [18], [22]). *Для любых двух чисел a, $b \in \mathbf{Z}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, существуют числа p, $q \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющие равенству $pa+qb=(a, b)$.*

Теорема 25 (малая теорема Ферма) ([1 (22)], [4 (340)], [11], [18], [21], [22]). *Если число $a \in \mathbf{Z}$ не делится на простое число p, то число $a^{p-1}-1$ делится на p.*

Непосредственным следствием малой теоремы Ферма является теорема 26.

Теорема 26. *Пусть p — простое число. Тогда для любого значения $a \in \mathbf{Z}$ имеет место сравнение*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

* * *

Теорема 27 (о промежуточном значении непрерывной функции) ([19], [20], [21]). *Пусть функция $f\colon [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем $A=f(a)<f(b)=B$. Тогда для любого числа $C \in (A; B)$ найдется точка $c \in (a; b)$, для которой выполнено равенство $f(c)=C$.*

Частным случаем теоремы 27 является следующее утверждение.

Теорема 28 (об обращении в нуль). *Если функция $f\colon [a; b] \longrightarrow \mathbf{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах ненулевые значения разных знаков, то существует точка $c \in (a; b)$, для которой выполнено равенство $f(c)=0$.*

Теорема 29 ([19], [20], [21]). *Если функция f: $[a;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то существуют такие числа $c,\ d \in [a;\ b]$, что для всех значений $x \in [a;\ b]$ выполнены неравенства $f(c) \leqslant \leqslant f(x) \leqslant f(d)$.*

Из теоремы 29 вытекает следующее утверждение.

Теорема 30. *Любая непрерывная на отрезке функция ограничена.*

Ниже через I обозначается некоторый интервал числовой прямой $\mathbb{R}$.

Рассмотрим некоторую функцию f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что эта функция в каждой точке $x \in I$ дифференцируема, т. е. имеет производную $f'(x)$. Тогда возникает новая функция f': $I \longrightarrow \mathbb{R}$, значением которой в каждой точке $x \in I$ является число $f'(x)$. Эта функция называется *первой производной функции* f и может в свою очередь также оказаться дифференцируемой в каждой точке интервала I. Тогда ее производная называется *второй производной исходной функции* f. Аналогичным образом можно определить *n-ю производную функции* f (обозначение: $f^{(n)}$) при каждом следующем значении $n=3,\ 4,\ 5,\ \ldots$ Первую, вторую и третью производные функции обычно обозначают через f', f'' и f''' соответственно, а иногда записи f^{IV}, f^{V}, ... используют и для обозначения следующих по порядку производных функции f.

Определение 20. Функция f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ называется:

n раз дифференцируемой, если $n \in \mathbb{N}$ и функция f имеет n-ю производную в каждой точке интервала I;

n раз непрерывно дифференцируемой, если она n раз дифференцируема и функция $f^{(n)}$ непрерывна на интервале I;

бесконечно дифференцируемой, если она имеет n-ю производную для любого значения $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 31 (признак монотонности) ([19], [20], [21]). *Пусть функция f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале I. Тогда функция f является неубывающей (соответственно невозрастающей) тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in I$ выполнено неравенство $f'(x) \geqslant 0$ (соответственно $f'(x) \leqslant 0$). Если в каждой точке $x \in I$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$ (соответственно $f'(x) < 0$), то функция f является возрастающей (соответственно убывающей).*

Определение 21. Функция f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз на интервале I*, если для любых чисел $x, y \in I$ и $\alpha \in [0;\ 1]$ справедливо неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Функция f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой вверх на интервале I*, если функция $g(x) = -f(x)$ является выпуклой вниз на этом интервале.

Теорема 32 (признак выпуклости) ([19], [20]). *Пусть функция f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на интервале $[a;\ b]$.*

Тогда функция f является выпуклой вниз (соответственно вверх) на этом интервале в том и только в том случае, если в каждой точке $x \in I$ выполнено неравенство $f''(x) \geqslant 0$ (соответственно $f''(x) \leqslant 0$).

Теорема 33 (теорема Лагранжа) ([19], [20]). *Пусть функция $f: [a;\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\ b)$. Тогда существует число $c \in (a;\ b)$, удовлетворяющее равенству*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Частным случаем теоремы Лагранжа является следующее утверждение.

Теорема 34 (теорема Ролля). *Пусть функция $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда существует число $c \in (a;\ b)$, для которого $f'(c) = 0$.*

* * *

Материал о комплексных числах подробно изложен в [10], [15], [16], [17], [20], [21], [23], [24].

Определение 22. *Множеством* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел* называется множество упорядоченных пар действительных чисел, на котором введены операции сложения и умножения следующим образом:

$$(a;\ b) + (c;\ d) = (a + c;\ b + d),$$
$$(a;\ b)(c;\ d) = (ac - bd;\ ad + bc),$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Отметим, что $(a;\ 0) + (b;\ 0) = (a + b;\ 0)$ и $(a;\ 0)(b;\ 0) = (ab;\ 0)$. Поэтому комплексное число вида $(a;\ 0)$ обычно *отождествляют с действительным числом* a. Комплексное число $(0;\ 1)$ называют *мнимой единицей* и обозначают через i. Мнимая единица удовлетворяет соотношению

$$i^2 = -1.$$

Для любого комплексного числа $(a;\ b)$ справедливо равенство $(a; b) = (a;\ 0) + (b;\ 0)(0;\ 1)$. Поэтому комплексное число $(a;\ b)$ обычно записывают как $a + bi$.

Определение 23. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *действительной частью* комплексного числа $z = a + bi$ (обозначение: $a = \operatorname{Re} z$), а число $b \in \mathbb{R}$ — его *мнимой частью* (обозначение: $b = \operatorname{Im} z$). Комплексные числа с нулевой действительной частью (т. е. числа вида bi) называются *мнимыми*.

Действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и над действительными числами: коммутативному и ассоциативному для сложения и умножения, а также дистрибутивному для умножения относительно сложения.

Комплексные числа можно изображать точками на плоскости, считая абсциссой действительную часть, а ординатой — мнимую часть комплексного числа.

Определение 24. *Модулем комплексного числа* $z=a+bi$ называется число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Теорема 35. *Для любого числа* $z\in\mathbf{C}$ *справедливо неравенство* $|z|\geqslant 0$, *причем равенство* $|z|=0$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $z=0$. *Для любых чисел* $z, w\in\mathbf{C}$ *справедливо равенство*

$$|zw|=|z|\cdot|w|.$$

Теорема 36 (неравенство треугольника). *Для любых двух чисел* $z, w\in\mathbf{C}$ *справедливо неравенство*

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда либо $z=0$, *либо* $w=kz$, *где* $k\geqslant 0$.

Определение 25. *Аргументом ненулевого комплексного числа* $z=a+bi$ называется определенный с точностью до слагаемого $2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$ угол φ, удовлетворяющий соотношениям

$$\cos\varphi=a/r,\ \sin\varphi=b/r, \text{ где } r=|z|.$$

Значение угла φ из промежутка $(-\pi;\ \pi]$, определенное однозначно, называется *главным значением аргумента* (запись: $\varphi=\arg z$).

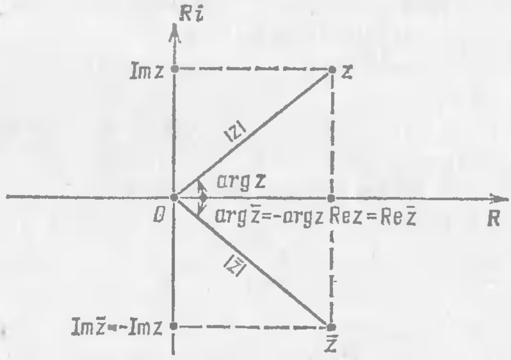


Рис. 137

Модуль и аргумент комплексного числа, изображенного на координатной плоскости, показаны на рис. 137.

Теорема 37 (тригонометрическая форма записи комплексного числа). *Любое ненулевое число* $z\in\mathbf{C}$ *можно представить в виде*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \text{ где } r=|z|,\ \varphi=\arg z.$$

Определение 26. Комплексное число $\bar{z}=a-bi$ называется *сопряженным комплексному числу* $z=a+bi$.

Теорема 38. *Для любого числа $z \in \mathbf{C}$ справедливы равенства*

$$\operatorname{Re}\bar{z}=\operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im}\bar{z}=-\operatorname{Im} z, \quad \overline{(\bar{z})}=z.$$

Число z является:

а) *действительным тогда и только тогда, когда $\bar{z}=z$;*

б) *мнимым тогда и только тогда, когда $\bar{z}=-z$.*

На координатной плоскости сопряженные комплексные числа расположены симметрично относительно действительной оси (см. рис. 137).

Теорема 39. *Для любых чисел $z, w \in \mathbf{C}$ справедливы равенства*

$$|\bar{z}|=|z|, \quad z\bar{z}=|z|^2, \quad \overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}, \quad \overline{zw}=\bar{z}\bar{w},$$

а если $z \neq 0$, то $\arg\bar{z}=-\arg z$ или если $z<0$ $\arg\bar{z}=\arg z=\pi$.

Вычитание и деление комплексных чисел определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению.

Теорема 40. *Если $z=a+bi$, $w=c+di$ — произвольные комплексные числа, то уравнение $z+x=w$ имеет в комплексных числах единственное решение (называемое разностью чисел w и z)*

$$x=c-a+(d-b)\,i.$$

Теорема 41. *Если $z=a+bi$, $w=c+di$ — произвольные комплексные числа, причем $z \neq 0$, то уравнение $zx=w$ имеет в комплексных числах единственное решение (называемое частным чисел w и z):*

$$x=\frac{w\cdot\bar{z}}{|z|^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\,i.$$

Теорема 42. *Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, производятся по следующим формулам:*

$$(r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2))=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Из этой теоремы вытекают следующие два утверждения.

Теорема 43 (формула Муавра). *Возведение в n-ю степень ($n \in \mathbf{N}$) комплексного числа производится по формуле*

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Теорема 44. *Для любого ненулевого числа $z \in \mathbf{C}$ и любого значения $n \in \mathbf{N}$ уравнение $x^n=z$ в комплексных числах имеет ровно n различных решений, называемых корнями n-й степени из числа z. Корнями n-й степени из единицы являются числа*

$$x_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Определение 27. Числовая функция f действительного или комплексного аргумента x называется *четной* (*нечетной*), если она удовлетворяет тождеству $f(-x) \equiv f(x)$ (соответственно $f(-x) \equiv -f(x)$), $x \in \mathrm{R}$ или $x \in \mathrm{C}$.

* * *

Определение 28. *Многочленом* (от одной переменной) называется функция действительного или комплексного аргумента x, которую можно представить в виде

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $n \in \mathrm{Z}^+$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{C}$, причем, если $n \geqslant 1$, то $a_n \neq 0$.

Теорема 45. *Два многочлена*

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$$

равны (*т. е. совпадают как функции*) *тогда и только тогда, когда*

$$n = m \text{ и } a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n.$$

Определение 29. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами многочлена*

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Число a_0 называется *свободным членом*, а число a_n — *старшим коэффициентом* (или *коэффициентом при старшем члене*) этого многочлена. Если $n \geqslant 1$, то число n называется *степенью* многочлена $P(x)$ (обозначение $\deg P$). Степень многочлена $P(x) = a_0$ равна 0, если $a_0 \neq 0$, и равна -1, если $a_0 = 0$.

Теорема 46. *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные многочлены. Тогда:*

а) *функция $T(x) = P(x) + Q(x)$ также является многочленом, причем*

$$\deg T \leqslant \max(\deg P, \deg Q),$$

а если $\deg P \neq \deg Q$, *то*

$$\deg T = \max(\deg P, \deg Q);$$

б) *функция $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$ также является многочленом, причем, если $P(x) \not\equiv 0$ и $Q(x) \not\equiv 0$, то $W(x) \not\equiv 0$ и*

$$\deg W = \deg P + \deg Q.$$

Определение 30. *Корнем* многочлена $P(x)$ называется решение уравнения $P(x) = 0$.

Многочлены, так же как и целые числа, можно делить друг на друга с остатком. Здесь мы изложим основные определения и теоремы, доказательства которых и более подробные сведения можно найти в [1 (16)], [16], [17], [23], [24].

Теорема 47. *Пусть даны два произвольных многочлена $P(x)$ и $Q(x)$, причем $Q(x) \not\equiv 0$. Тогда существуют единственные многочлены $S(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющие двум условиям:*

а) $P(x) \equiv S(x)Q(x) + R(x)$;

б) $\deg R < \deg Q$.

Определение 31. В условиях теоремы 47 многочлен $R(x)$ называется *остатком* от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$. Если $R(x) \equiv 0$, то говорят, что *многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$*.

Теорема 48. *Если коэффициенты многочленов P и Q в условиях теоремы 47 действительны, то коэффициенты многочленов S и R также действительны. Если коэффициенты многочленов P и Q рациональны, то коэффициенты многочленов S и R также рациональны. Если коэффициенты многочленов P и Q — целые числа, причем коэффициент многочлена Q при старшем члене равен 1 или -1, то коэффициенты многочленов S и R — также целые числа.*

Теорема 49 (теорема Безу). *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x - x_0$ равен числу $P(x_0)$.*

Из теоремы Безу вытекает следующее утверждение.

Теорема 50. *Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $x - x_0$ тогда и только тогда, когда число x_0 является его корнем.*

Определение 32. Число x_0 называется *корнем многочлена $P(x)$ кратности k* ($k \in \mathbb{N}$), если многочлен $P(x)$ делится на многочлен $(x - x_0)^k$, но не делится на многочлен $(x - x_0)^{k+1}$.

Говорят, что многочлен $P(x)$ имеет корни $x_1, \ldots, x_n$, если каждый из корней многочлена $P(x)$ повторяется в наборе $(x_1; \ldots; x_n)$ столько раз, какова его кратность, и никакое число, отсутствующее в наборе, корнем не является.

Теорема 51 (основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет ровно n комплексных корней.*

В качестве следствий получаем теоремы 52—54.

Теорема 52. *Если значения двух многочленов степени не выше n совпадают в $n+1$ различных точках, то эти многочлены равны.*

Теорема 53. *Любой многочлен $P(x)$ степени $n \geq 0$ единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) представим в виде*

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где a_n — старший коэффициент многочлена $P(x)$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — его корни.

Теорема 54. *Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x) \not\equiv 0$ тогда и только тогда, когда каждый корень многочлена $Q(x)$ является корнем многочлена $P(x)$, причем не меньшей кратности.*

Теорема 55 (теорема Виета) ([1 (80)], [23], [24]). *Пусть многочлен*

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_{n-1}/a_n, \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=a_{n-2}/a_n, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-a_{n-3}/a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n a_0/a_n. \end{cases}$$

Верна и обратная теорема.

Теорема 56. *Числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие системе из теоремы 55, являются корнями многочлена*

$$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0.$$

Теорема 57 ([16], [17], [23], [24]). *Если $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами и комплексное число z с ненулевой мнимой частью является его корнем, то сопряженное комплексное число $\bar{z}$ также является его корнем, причем той же кратности. В частности, многочлен $P(x)$ делится на многочлен*

$$(x-z)^k\cdot(x-\bar{z})^k=(x^2-2x\cdot\operatorname{Re}z+|z|^2)^k,$$

где k — кратность корней z и $\bar{z}$.

В качестве следствия получаем аналог теоремы 53 для многочленов с действительными коэффициентами.

Теорема 58. *Любой многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами степени n единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) представим в виде*

$$P(x)=a_n(x-x_1)\ldots(x-x_m)(x^2+2b_1x+c_1)\ldots(x^2+2b_lx+c_l),$$

где $m, l\geqslant 0$, $m+2l=n$, a_n — старший коэффициент многочлена $P(x)$, $x_1, \ldots, x_m\in\mathbb{R}$ — действительные корни $P(x)$ с учетом их кратностей, $b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_l\in\mathbb{R}$, причем квадратные трехчлены

$$x^2+2b_1x+c_1, \ \ldots, \ x^2+2b_lx+c_l$$

не имеют действительных корней (т. е. $b_1^2<c_1, \ldots, b_l^2<c_l$).

Теорема 59 ([24]). *Если рациональное число p/q, где $(p, q)=1$, является корнем многочлена $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами, то $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$.*

Из этой теоремы вытекают следующие два утверждения.

Теорема 60 ([1 (40)], [4 (317)], [22], [23], [24]). *Каждый корень многочлена*

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

с целыми коэффициентами есть либо целое число, либо иррациональное.

Теорема 61. *Если $a, n\in\mathbb{N}$, то число $\sqrt[n]{a}$ является либо целым, либо иррациональным.*

Теорема 62 (интерполяционная формула Лагранжа) ([23]). *Пусть заданы различные числа $b_0, b_1, \ldots, b_n\in\mathbb{C}$*

и произвольные значения $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$. Тогда существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий равенствам

$$P(b_0)=c_0,\ P(b_1)=c_1,\ \ldots,\ P(b_n)=c_n.$$

Этот многочлен имеет следующий вид:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{x-b_j}{b_i-b_j}.$$

Укажем связь между коэффициентами многочлена и его производными.

Теорема 63. *Пусть дан многочлен*

$$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0.$$

Тогда

$$P(0)=a_0,\qquad P'(0)=a_1,\qquad P''(0)=2a_2,\ \ldots,\ P^{(n)}(0)=n!\,a_n,$$

и исходный многочлен можно записать в виде

$$P(x)=\frac{P(0)}{0!}+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Определение 33. Пусть $n \in \mathbf{N}$. *Многочленом от n переменных* называется конечная сумма функций действительных или комплексных аргументов $x_1, \ldots, x_n$, каждая иэ которых имеет вид

$$ax_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n},\quad \text{где } a\in\mathbf{C},\ k_1,\ldots,k_n\in\mathbf{Z}^+.$$

* * *

Доказательства изложенных ниже теорем, относящихся к планиметрии и стереометрии, можно найти в [31], [32], [33], [34]. В качестве дополнительной литературы можно рекомендовать сборники задач [5], [6], [7], [8].

Теорема 64 (неравенство треугольника). *Для любых точек A, B, C справедливо неравенство*

$$AB\leqslant AC+BC.$$

При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда точка C лежит на отрезке AB или все три точки совпадают.

В следующих двух определениях под множеством понимается произвольное множество точек.

Определение 34. *Диаметром множества* называется отрезок наибольшей длины, концы которого принадлежат этому множеству.

Отметим, что произвольное множество может иметь более одного диаметра или не иметь их вообще.

Определение 35. *Множество* называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок с концами в этих точках.

Под *многоугольником* в настоящей книге понимается произвольный (не обязательно выпуклый) многоугольник. Всякий раз, когда рассматриваются только выпуклые многоугольники, это требование специально оговаривается.

Теорема 65. *Сумма углов любого n-угольника ($n \geq 3$) равна* $180° (n-2)$.

Определение 36. Пусть A, B, C — три последовательные вершины выпуклого многоугольника, а D и E — произвольные точки на продолжениях сторон AB и BC соответственно за точку B. Тогда углы ABE и CBD (рис. 138) называются *внешними углами* этого многоугольника при вершине B (в отличие от угла ABC, часто называемого *внутренним углом* многоугольника).

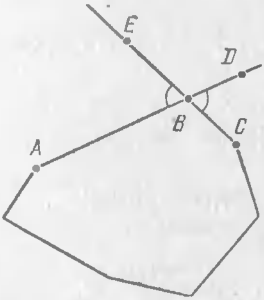


Рис. 138

Теорема 66. *Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна* $360°$.

Определение 37. Говорят, что многоугольник M *разбит на многоугольники* $M_1, \ldots, M_n$, если $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$, причем многоугольники M_i и M_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек.

Определение 38. Многоугольник m называется *вписанным в многоугольник* M, если все вершины многоугольника m лежат на сторонах многоугольника M.

Теорема 67. *Выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда*

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle BAD + \angle DCB = 180°.$$

Теорема 68. *В выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда*

$$AB + CD = BC + AD.$$

Теорема 69 (теорема Птолемея). *Если четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то*

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Пусть A и B — две соседние вершины многоугольника, вписанного в окружность. Тогда под *дугой* AB понимается (если не оговорено противное) та из двух дуг с концами в точках A и B, на которой не лежат другие вершины многоугольника.

Теорема 70 (теорема о вписанном угле). *Для любого треугольника ABC, вписанного в окружность, справедливо равенство*

$$\angle ABC = \frac{\smile{AC}}{2}.$$

Теорема 71. *Пусть диагонали четырехугольника* $A_1A_2B_1B_2$, *вписанного в окружность, пересекаются в точке* P. *Тогда* (рис. 139) *справедливы равенства:*

а) $A_1P\cdot B_1P=A_2P\cdot B_2P$;

б) $\angle A_1PA_2=\frac{1}{2}(\smile A_1A_2+\smile B_1B_2)$.

Теорема 72. *Пусть четырехугольник* $A_1B_1B_2A_2$ *вписан в окружность. Тогда:*

1) *прямые* A_1B_1 *и* A_2B_2 *параллельны в том и только в том случае, если* $\smile A_1A_2=\smile B_1B_2$;

2) *прямые* A_1B_1 *и* A_2B_2 *пересекаются в точке* P, *лежащей в той же полуплоскости относительно прямой* A_1A_2, *что и отрезок* B_1B_2,

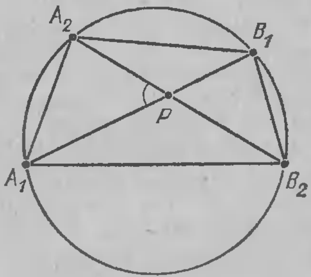


Рис. 139

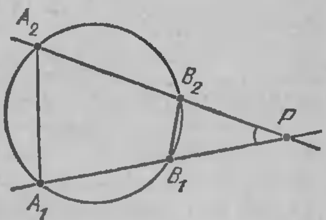


Рис. 140

в том и только в том случае, если $\smile A_1A_2>\smile B_1B_2$. *При этом* (рис. 140) *справедливы равенства:*

а) $A_1P\cdot B_1P=A_2P\cdot B_2P$;

б) $\angle A_1PA_2=\frac{1}{2}(\smile A_1A_2-\smile B_1B_2)$.

Под *длиной* касательной, проведенной из точки P к окружности, понимается расстояние от точки P до точки касания. Рассматривая по теореме 72 касательную как предельное положение секущей, у которой две точки пересечения с окружностью сливаются в одну точку касания, можно получить следующее утверждение.

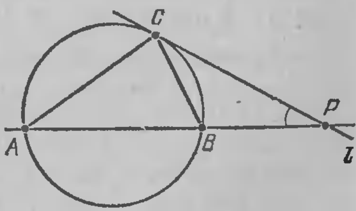


Рис. 141

Теорема 73. *Пусть треугольник* ABC *вписан в окружность, а прямая* l *касается окружности в точке* C. *Тогда:*

1) *прямые* l *и* AB *параллельны в том и только в том случае, если* $\smile AC=\smile BC$;

2) *прямые* l *и* AB *пересекаются в точке* P, *лежащей в той же полуплоскости относительно прямой* AC, *что и точка* B, *в том и*

только в том случае, если $\smile{AC} > \smile{BC}$. *При этом* (рис. 141) *справедливы равенства:*

а) $AP \cdot BP = CP^2$;

б) $\angle APC = \frac{1}{2}(\smile{AC} - \smile{BC})$.

Из теорем 70, 71 б), 72.2 б), 73. 2 б) вытекает следующее утверждение.

Теорема 74. *Пусть дан отрезок AB, а α — одна из двух полуплоскостей относительно прямой AB. Тогда, если φ — значение из интервала (0°; 180°), то множество точек M полуплоскости α, для которых* $\angle AMB = \varphi$, *есть дуга некоторой окружности с концами A и B. Если точка* $N \in \alpha$ *лежит внутри круга, ограниченного этой окружностью, то* $\angle ANB > \varphi$, *а если вне — то* $\angle ANB < \varphi$.

Теорема 75. *Пусть в треугольнике ABC*

$$a = BC,\ b = AC,\ c = AB$$

— длины сторон,

$$\alpha = \angle BAC,\ \beta = \angle ABC,\ \gamma = \angle ACB$$

— углы, $p = (a + b + c)/2$ *— полупериметр, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности,* h_a *— длина высоты, опущенной на сторону BC,* r_a *— радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Тогда площадь S треугольника ABC можно вычислить по любой из следующих формул:*

а) $S = \frac{ah_a}{2}$;

б) $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$;

в) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*);

г) $S = \frac{abc}{4R}$;

д) $S = rp$;

е) $S = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$;

ж) $S = \frac{1}{2} R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$.

Формула д) *справедлива для площади S любого многоугольника с полупериметром p, описанного около окружности радиуса r.*

Теорема 76. *Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, r — радиус вписанной окружности, а R — радиус описанной окружности, то*

$$r = (1/2)(a + b - c),\ R = c/2.$$

Теорема 77. *Если AL — биссектриса треугольника ABC, то справедливо равенство*

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}.$$

Теорема 78 (равенство параллелограмма). *Для любого параллелограмма $ABCD$ справедливо равенство*

$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2.$$

Теорема 79. *Для любой точки P и любого прямоугольника $ABCD$ справедливо равенство*

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

Все проекции на прямые в настоящей книге предполагаются *ортогональными.*

Теорема 80. *Если A_1B_1 — проекция отрезка AB на прямую, пересекающуюся с прямой AB под (нетупым) углом φ, то*

$$A_1B_1=AB\cos\varphi.$$

Теорема 81. *Пусть $\mathbf{a}$ — ненулевой вектор на плоскости, а O — точка этой плоскости. Тогда для любого значения $k\in\mathrm{R}$ множество точек X плоскости, удовлетворяющих равенству $\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{OX}=k$, есть прямая.*

Теорема 82. *Для любого набора точек $A_1, \ldots, A_n$ и любого набора чисел $k_1, \ldots, k_n\in\mathrm{R}$, сумма которых не равна нулю, существует единственная точка O, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\overrightarrow{OA_i}=0.$$

При этом для любой точки P справедливо равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)\cdot\overrightarrow{PO}=\sum_{i=1}^{n}\left(k_i\overrightarrow{PA_i}\right).$$

На этой теореме основаны следующие три определения.

Определение 39. *Центром тяжести* системы точек $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$ называется точка O, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=0.$$

Определение 40. *Центром тяжести системы отрезков* $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ называется точка O, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^{n} l_i\overrightarrow{OM_i}=0,$$

где l_i $(i=1, \ldots, n)$ — длина отрезка A_iB_i, а M_i — его середина.

Определение 41. *Центром тяжести системы треугольников* $A_1B_1C_1, \ldots, A_nB_nC_n$ называется точка O, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^{n} S_i\overrightarrow{OM_i}=0,$$

где S_i ($i=1, \ldots, n$) — площадь треугольника $A_iB_iC_i$, а M_i — точка пересечения его медиан.

Теорема 83. *Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то для любой точки P (не обязательно лежащей в плоскости ABC) справедливо равенство*

$$\overrightarrow{PM}=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)/3.$$

Для плоских углов двугранного угла имеет место следующий аналог неравенства треугольника.

Теорема 84. *Плоские углы φ, ψ, χ любого трехгранного угла удовлетворяют неравенствам $\varphi<\psi+\chi$.*

Теорема 85. *Сумма плоских углов произвольного выпуклого многогранного угла меньше $360°$.*

Определение 42. Многогранник m называется *вписанным* в многогранник M, если все вершины многогранника m лежат на гранях многогранника M.

Теорема 86. *Пусть три прямые, не лежащие в одной плоскости, проходят через точку A. Пусть B_1 и B_2 — две отличные от A точки на одной прямой, C_1 и C_2 — на другой, D_1 и D_2 — на третьей. Тогда для отношения объемов V_1 и V_2 тетраэдров $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$ имеет место равенство*

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{AB_1\cdot AC_1\cdot AD_1}{AB_2\cdot AC_2\cdot AD_2}.$$

Теорема 87. *Пусть S_1 и S_2 — площади двух граней произвольного тетраэдра, φ — величина двугранного угла между ними, a — длина их общего ребра, b — длина противоположного ребра, d — расстояние, а ψ — угол между этими ребрами. Тогда для объема V тетраэдра справедливы равенства*

$$V=\frac{2S_1S_2\sin\varphi}{3a}=\frac{1}{6}abd\sin\psi.$$

Пусть в тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G, H — середины ребер AB, BC, CD, DA соответственно, S — площадь параллелограмма $EFGH$, d — расстояние между ребрами AC и BD. Тогда объем этого тетраэдра равен

$$V=\frac{2}{3}Sd.$$

Теорема 88. *Объем V пирамиды равен*

$$V=\frac{1}{3}hS_0,$$

где S_0 — площадь основания пирамиды, а h — ее высота. Если существует сфера, касающаяся основания пирамиды и продолжений боковых граней, то объем такой пирамиды есть

$$V=\frac{1}{3}r_0(Q-S_0),$$

где r_0 — радиус этой сферы, а Q — площадь боковой поверхности пирамиды.

Теорема 89. *Объем V многогранника, описанного около сферы радиуса r, равен*

$$V = \frac{1}{3} rS,$$

где S — площадь поверхности этого многогранника.

В частности, все формулы теорем 88 и 89 справедливы для тетраэдра.

Все проекции на плоскости в настоящей книге предполагаются *ортогональными.*

Теорема 90. *Пусть плоскости α и β пересекаются под углом φ и в плоскости α расположена фигура площади S. Тогда площадь проекции этой фигуры на плоскость β равна $S \cos \varphi$.*

Теорема 91. *Пусть $\mathbf{a}$ — ненулевой вектор в пространстве, а O — произвольная точка. Тогда для любого значения $k \in \mathbf{R}$ множество точек X пространства, удовлетворяющих равенству $\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{OX} = k$, есть плоскость.*

Теорема 92. *Три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер любого тетраэдра $ABCD$, пересекаются в одной точке M, являющейся серединой каждого из этих отрезков, причем для любой точки P справедливо равенство*

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \right).$$

Теорема 93 (формула Эйлера) ([21]). *Пусть l — число вершин выпуклого многогранника, m — число его ребер, а n — число его граней. Тогда имеет место равенство*

$$l - m + n = 2.$$

* * *

Определение 43. Говорят, что задан *граф*, если, во-первых, фиксировано некоторое множество $A = \{a_1; \ldots; a_n\}$, элементы которого называются *вершинами*, а, во-вторых, выделено произвольное множество пар, составленных из элементов множества A и называемых *ребрами.* Граф называется *ориентированным*, если его ребра представляют собой упорядоченные пары вершин.

Примером неориентированного графа может служить граф, множеством вершин которого является некоторая группа людей, а ребрами являются пары людей, знакомых друг с другом. При этом считается, что отношение знакомства симметрично, т. е. если некто a знаком с b, то и b знаком с a.

При работе с графом удобно пользоваться его геометрической моделью, которая строится так: каждой вершине графа сопоставляется точка на плоскости или в пространстве, а каждому ребру — отрезок или кривая с концами в соответствующих точках (в случае ориентированного графа на этих линиях фиксируется направление).

Определение 44. *Циклом длины* $k \geqslant 2$ в графе с вершинами $a_1, \ldots, a_n$ называется последовательность различных ребер вида

$$(a_{i_1}; a_{i_2}),\ (a_{i_2}; a_{i_3}),\ \ldots,\ (a_{i_{k-1}}; a_{i_k}),\ (a_{i_k}; a_{i_1}).$$

Теорема 94. *В графе, имеющем ровно n вершин и n ребер, существует по крайней мере один цикл.*

Теория графов изложена в [30].

* * *

Основы комбинаторного анализа изложены в [28]. Свойства перестановок, разбиений и сочетаний изложены также в [12], [25], [26], [29].

Определение 45. Если два набора элементов $(a_1; \ldots; a_n)$ и $(b_1; \ldots; b_n)$ состоят из одних и тех же элементов и, возможно, различаются только порядком, то один из них называется *перестановкой* другого.

Теорема 95. *Число перестановок набора, состоящего из n различных элементов, равно $n!$*

Теорема 96. *Число m-элементных подмножеств n-элементного множества (где $0 \leqslant m \leqslant n$) равно C_n^m.*

Число C_n^m называют также числом *сочетаний из n по m.*

Из теоремы 17 а) и теоремы 96 вытекает следующее утверждение.

Теорема 97. *Число всех подмножеств n-элементного множества равно 2^n.*

* * *

Ниже на наивном уровне определяется, что такое вероятность и случайная величина. Начала теории вероятностей изложены в [25], [26], [29].

В качестве сборника задач по «интуитивной» теории вероятностей можно рекомендовать [27].

Определение 46. Пусть производится эксперимент, в результате которого из множества $A = \{a_1; \ldots; a_n\}$ выбирается наугад, или *случайно*, один элемент. Рассматривается событие, заключающееся в том, что выбранный элемент является элементом подмножества $B \subset A$, содержащего ровно m элементов. Тогда *вероятность* $\mathbf{P}(B)$ этого события считается равной m/n.

Например, результатом подбрасывания монеты является выбор элемента из множества $A = \{$«герб»; «решка»$\}$, а вероятность выпадения, скажем, «герба» при этом равна 1/2. Другими примерами могут служить вытаскивание шара из урны, выбор тройки точек из множества всевозможных троек данных точек, перестановка элементов набора (точнее, выбор такой перестановки из множества всех перестановок элементов данного набора) и т. д.

Если производится серия (конечная или бесконечная) экспериментов, то результат очередного эксперимента может зависеть или не зависеть от результатов предыдущих. В любом случае понятие вероятности определяется так, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 98. *Вероятность любого события B удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \mathbf{P}(B) \leqslant 1$. Вероятность того, что событие B не произойдет, равна $1-\mathbf{P}(B)$. Если события B и C не могут произойти одновременно, то вероятность того, что произойдет одно из событий B или C, равна $\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)$. Если событие B не зависит от события C, то вероятность того, что произойдут оба события B и C, равна $\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.*

С экспериментом, описанным в определении 46, может быть связана некоторая функция $X\colon A \longrightarrow \mathbf{R}$, значения которой фактически зависят от того, какой из элементов множества A выбран в результате этого эксперимента. Такая функция называется *случайной*, а среднее арифметическое чисел $X(a_i)$ ($i=1, \ldots, n$) называется *средним* (или *математическим ожиданием*) *этой функции*. Например, если производятся k бросаний монеты, то число выпавших в итоге «гербов» есть случайная функция, принимающая значения $0, 1, \ldots, k$ в зависимости от результатов бросаний.

Определение 47. *Случайной величиной* называется величина, все возможные значения которой образуют конечное или бесконечное множество чисел, причем принятие ею каждого из этих значений есть *случайное событие с определенной вероятностью.*

Определение 48. Пусть случайная величина X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда *средним* величины X называется число

$$\mathbf{M}(X)=\sum_{k=1}^{n} p_k x_k.$$

Определение 49. Пусть случайная величина X принимает бесконечное множество неотрицательных значений $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$ соответственно. Тогда *средним* величины X называется число $\mathbf{M}(X)$, равное пределу

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k,$$

если этот предел существует.

Теорема 99. *Среднее суммы случайных величин равно сумме их средних*

$$\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)=\sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}(X_i).$$

Предположим, что из всех событий выделено некоторое событие B. Тогда можно рассматривать вероятность любого другого события при условии, что произошло событие B. Совсем не обязательно эта вероятность сохранится прежней (если в урне было, скажем, l белых шаров и m черных, то вероятность вытащить наугад черный шар равнялась $m/(l+m)$, если же 1 черный шар вынут из урны, то эта вероятность равна $(m-1)/(l+m-1)$).

Наравне с другими событиями можно рассматривать и событие, состоящее в принятии случайной величиной X какого-либо из своих значений при условии, что произошло событие B. При этом получится, вообще говоря, другая случайная величина, обозначаемая через X_B.

Теорема 100. *Пусть два события B и C не могут произойти одновременно, но одно из них непременно происходит. Тогда для любой случайной величины X справедливо равенство*

$$\mathbf{M}(X)=\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{M}(X_B)+\mathbf{P}(C)\,\mathbf{M}(X_C).$$

Приложение Д

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани.* Венгерские математические олимпиады.— М.: Мир, 1976.
2. *С. Страшевич, Е. Бровкин.* Польские математические олимпиады.— М.: Мир, 1978.
3. *Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов.* Международные математические олимпиады.— М.: Просвещение, 1976.
4. *Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики; арифметика и алгебра.— М.: Наука, 1976.
5. *Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.* Избранные задачи и теоремы планиметрии.—М.: Наука, 1967.
6. *Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики; геометрия (стереометрия).— М.: Гостехиздат, 1954.
7. *Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.— М.: Наука, 1970.
8. *Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.* Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.— М.: Наука, 1974.
9. *П. П. Коровкин.* Неравенства.— М.: Наука, 1974.
10. *А. И. Маркушевич.* Комплексные числа и конформные отображения.— М.: Наука, 1979.
11. *Н. Н. Воробьев.* Признаки делимости.— М.: Наука, 1974.
12. *В. А. Успенский.* Треугольник Паскаля.— М.: Наука, 1979.
13. *Л. А. Калужнин.* Основная теорема арифметики.— М.: Наука, 1969.
14. *С. В. Фомин.* Системы счисления.— М.: Наука, 1980.
15. *Л. С. Понтрягин.* Комплексные числа.— Квант, 1983, № 2, с. 16—19.
16. *Л. С. Понтрягин.* Основная теорема алгебры.— Квант, 1982, № 4, с. 3—9.
17. *Л. С. Понтрягин.* Обобщения чисел.— Квант, 1985, № 2, с. 6—12.
18. *Л. Я. Савельев* (отв. редактор). Олимпиады. Алгебра. Комбинаторика (сборник).— Новосибирск, Наука, 1979.

19. *О. С. Ивашев-Мусатов.* Начала математического анализа.— М.: Наука, 1976.
20. *Л. Д. Кудрявцев.* Математический анализ. Т. 1.— М.: Высшая школа, 1981.
21. *Р. Курант, Г. Роббинс.* Что такое математика?— М.: Просвещение, 1968.
22. *А. А. Бухштаб.* Теория чисел.— М.: Просвещение, 1966.
23. *А. Г. Курош.* Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1975.
24. *Д. К. Фаддеев.* Лекции по алгебре.— М.: Наука, 1984.
25. *А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров.* Введение в теорию вероятностей.— М.: Наука, 1982.
26. *Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин.* Элементарное введение в теорию вероятностей.—М.: Наука, 1976.
27. *Ф. Мостеллер.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.— М.: Наука, 1985.
28. *Н. Я. Виленкин.* Популярная комбинаторика.— М.: Наука, 1975.
29. *Б. А. Кордемский.* Математика изучает случайности.— М.: Просвещение, 1975.
30. *О. Оре.* Теория графов.—М.: Наука, 1968.
31. *И. Ф. Шарыгин.* Задачи по геометрии: Планиметрия.— М.: Наука, 1986 (Б-чка «Квант», вып. 17).
32. *И. Ф. Шарыгин.* Задачи по геометрии: Стереометрия — М.: Наука, 1984 (Б-чка «Квант», вып. 31).
33. *В. В. Прасолов.* Задачи по планиметрии. Часть I.— М.: Наука, 1986.
34. *В. В. Прасолов.* Задачи по планиметрии. Часть II.— М.: Наука, 1986.

Приложение Е

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\varnothing$ — пустое множество

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел

$\mathbf{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел

$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел

$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел

∞ — символ бесконечности

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A

$a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A

$\{a_1; \ldots; a_n\}$ — множество, состоящее из элементов $a_1, \ldots, a_n$

$(a_1; \ldots; a_n)$ — строка (упорядоченный набор) элементов $a_1, \ldots, a_n$

$\{a_n\}$ — последовательность чисел a_n при $n \in \mathbf{N}$ или $n \in \mathbf{Z}^+$

$\{a \mid \alpha\}$ — множество всех элементов a, обладающих свойством α

$B \subset A$ — множество B является подмножеством множества A (определение 1)

$A \cup B$ — объединение множеств A и B (определение 2)

$\bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$ — объединение всех множеств B_α при $\alpha \in A$

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B (определение 2)

$\bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$ — пересечение всех множеств B_α при $\alpha \in A$

$A \setminus B$ — разность множеств A и B (определение 3)

$A \times B$ — (декартово) произведение множеств A и B (определение 4)

$[a;\ b]$ — отрезок числовой прямой с концами a и b

$(a;\ b)$ — интервал числовой прямой с концами a и b

$[a;\ b)$ — числовой промежуток $\{x \mid a \leqslant x < b\}$

$(a;\ b]$ — числовой промежуток $\{x \mid a < x \leqslant b\}$

$f\colon A \longrightarrow B$ — функция f с областью определения A и областью значений B

f^{-1} — функция, обратная к функции f (определение 6)

f^n — суперпозиция n функций f (определение 6)

f' — (первая) производная функции f

f'' — вторая производная функции f

f''' — третья производная функции f

$f^{(n)}$ — n-я производная функции f

$\deg P$ — степень многочлена P

i — мнимая единица (определение 22, только в главе 6)

π — длина полуокружности радиуса 1

e — основание натуральных логарифмов (теорема 7)

$\ln$ — натуральный логарифм (теорема 7)

sign — функция знака (определение 10)

$[x]$ — целая часть числа x (определение 11)

$\{x\}$ — дробная часть числа x (определение 11)

$\operatorname{Re} z$ — действительная часть числа z (определение 23)

$\operatorname{Im} z$ — мнимая часть числа z (определение 23)

$|z|$ — модуль числа z (определение 24)

$\arg z$ — аргумент числа z (определение 25)

$\bar{z}$ — число, (комплексно) сопряженное числу z (определение 26)

$\max\{x_1;\ \ldots;\ x_n\}$ — наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_n$

$\max\limits_{\alpha\in A}\{x_\alpha\}$ — наибольшее из всех чисел x_α при $\alpha \in A$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ — сумма чисел $x_1, \ldots, x_n$

$\sum\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ — сумма всех чисел x_α при $\alpha \in A$

$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ — произведение чисел $x_1, \ldots, x_n$.

$\prod\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ — произведение всех чисел x_α при $\alpha \in A$

$n!$ — факториал числа (определение 18)

C_n^m — биномиальный коэффициент (определение 18)

$\overline{a_1\ldots a_n}$ — запись n-значного числа в какой-либо системе счисления (определение 17)

$a \vdots b$ — число a делится на число b (определение 12)

$a \equiv b \pmod{c}$ — число a сравнимо с числом b по модулю c (определение 16)

$a \not\equiv b \pmod{c}$ — число a не сравнимо с числом b по модулю c (определение 16)

$[a_1, \ldots, a_n]$ — наименьшее общее кратное чисел $a_1, \ldots, a_n$ (определение 13)

$(a_1, \ldots, a_n)$ — наибольший общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_n$ (определение 14)

AB — отрезок с концами A и B или его длина

AB — прямая, проходящая через точки A и B

AB — луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B

$\overset{\smile}{AB}$ — дуга с концами A и B или ее величина

ABC — плоскость, проходящая через точки A, B и C

$\overset{\frown}{ABC}$ — дуга с концами A и C, содержащая точку B

$\angle A$ — угол с вершиной A или его величина

$\angle ABC$ — угол с вершиной B и сторонами BA, BC или его величина

$\triangle ABC$ — треугольник с вершинами A, B и C

$A_1 \ldots A_n$ — многоугольник с вершинами $A_1, \ldots, A_n$

P_M — периметр многоугольника M

S_M — площадь многоугольника M

V_M — объем многогранника M

$M_1 = M_2$ — многоугольники M_1 и M_2 равны (конгруэнтны)

$M_1 \backsim M_2$ — многоугольники M_1 и M_2 подобны

$\overrightarrow{AB}$ — вектор с началом A и концом B

$|\boldsymbol{a}|$ — длина вектора $\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A (определение 46)

$\mathbf{M}(X)$ — среднее случайной величины X (определение 48)

Сергей Владимирович *Конягин*, Гарник Агасиевич *Тоноян*, Игорь Федорович *Шарыгин*, Игорь Анатольевич *Копылов*, Михаил Борисович *Севрюк*, Михаил Леонидович *Ситников*, Олег Аркадьевич *Байбородин*, Владимир Петрович *Буриченко*, Григорий Викторович *Головин*, Дмитрий Олегович *Орлов*, Леонид Борисович *Парновский*, Татьяна Анатольевна *Сокова*, Инна Вячеславовна *Стеценко*, Владимир Викторович *Титенко*, Сергей Анатольевич *Филиппов*

ЗАРУБЕЖНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Под редакцией *И. Н. Сергеева*

Серия «Библиотечка математического кружка», выпуск 17

Редактор *А. Ф. Лапко*

Художественный редактор *Г. М. Коровина*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 32455

Сдано в набор 23.12.86. Подписано к печати 30.06.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 21,84. Усл. кр.-отт. 22,05. Уч.-изд. л. 24,52. Тираж 163000 экз. Заказ 19. Цена 1 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» им. А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054 Москва М-54, Валовая, 28