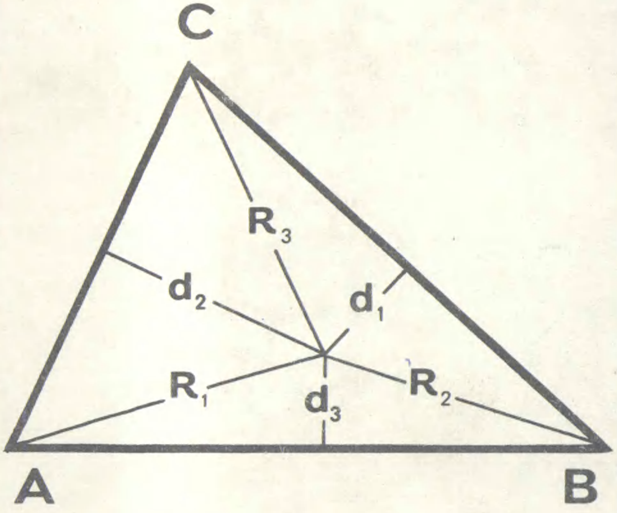
$$R_1+R_2+R_3 \geq 2(d_1+d_2+d_3)$$

$$R_1+R_2+R_3 \geq 2(d_1+d_2+d_3)$$



$$R_1+R_2+R_3 \geq 2(d_1+d_2+d_3)$$

$$R_1+R_2+R_3 \geq 2(d_1+d_2+d_3)$$

Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 12

Д. О. ШКЛЯРСКИЙ, Н. Н. ЧЕНЦОВ,
И. М. ЯГЛОМ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

51
Ш 66
УДК 510

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой сборник задач с указаниями и подробными решениями. Все задачи посвящены оценкам геометрических величин, чаще всего связанных с треугольником и тетраэдром. Ряд задач заимствован из недавних научных работ; однако, в книге нет ни одной задачи, решение которой требовало бы знаний, выходящих за рамки школьной программы. Многие из задач предлагались на московских математических олимпиадах или разбирались на занятиях школьного математического кружка при МГУ.

Книга рассчитана в первую очередь на школьников старших классов; она может быть использована преподавателями математики для кружковых и факультативных занятий, а также студентами педагогических институтов.

Давид Оскарович Шклярский,
Николай Николаевич Ченцов,
Исаак Моисеевич Яглом

Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум

М., 1970 г., 336 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Головина*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 27/III 1970 г. Подп. к печати 17/VIII 1970 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 10,5. Условн. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 18,2. Тираж 75000 экз. Т-09865. Цена книги 70 коп. Заказ № 976.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28

$\frac{2-2-2}{240-69}$

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой четвертый из сборников задач, отражающих опыт работы школьного математического кружка при Московском государственном университете и математических олимпиад московских школьников[1]). Первый из сборников был посвящен арифметике и алгебре; в него, в частности, был включен раздел, посвященный неравенствам, и значительное место заняли алгебраические и арифметические задачи на отыскание наибольших и наименьших величин. Эта книга имела наиболее счастливую судьбу: она выдержала четыре издания, переводилась на языки национальных республик и на иностранные языки и, видимо, обрела свою читательскую аудиторию. Однако судьба двух последующих книг, посвященных геометрии, была совсем иной.

---

[1]) Вот предшествующие книги этого ряда:

1) Д. О. Шклярский, Г. М. Адельсон-Вельский, Н. Н. Ченцов, А. М. Яглом, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, Арифметика и алгебра, Гостехиздат, 1950, 296 стр.; Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы..., ч. 1, Арифметика и алгебра, изд. 2-е, переработанное и дополненное, Гостехиздат, 1954, 455 стр.; то же, изд. 3-е, стереотипное, Физматгиз, 1959; Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра), изд. 4-е, исправленное, «Наука», 1965, 455 стр.;

2) Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, Геометрия (планиметрия), Гостехиздат, 1952, 380 стр.; Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы планиметрии, изд. 2-е, переработанное и дополненное, «Наука», 1967, 336 стр.;

3) Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии, ч. 3, Геометрия (стереометрия), Гостехиздат, 1954, 267 стр.

Вторая книга серии была посвящена планиметрическим задачам. Впервые она вышла в свет в 1952 г. и до 1967 г. не переиздавалась. Подбор нешаблонных задач геометрического содержания, как о том свидетельствует весь опыт работы школьного математического кружка при МГУ и математических олимпиад, является гораздо более трудным делом, чем составление арифметических, алгебраических, комбинаторных или чисто логических задач, — и ч. 2 книги «Избранные задачи и теоремы...», особенно в ее первом издании 1952 г., была, в очень большой своей части, заполнена довольно стандартными задачами на построение и доказательство, решения которых достаточно далеки от тех приемов и методов, которые встречаются сегодня в математической науке. В 1967 г., в первую очередь благодаря помощи В. П. Паламодова, удалось выпустить новое, полностью переработанное издание этой книги; однако и в своем последнем варианте она в меньшей мере является «олимпиадским»[1]) задачником, чем первая книга серии «Библиотека математического кружка». Третья книга серии, посвященная стереометрии (ее основным составителем является Н. Н. Ченцов), вышла в свет в 1954 г.; она не переиздавалась ни разу, хотя работа над подготовкой нового ее издания ведется уже давно.

Работа над сборниками геометрических задач так затянулась еще и потому, что составители не захотели пойти по простейшему пути. В то время как геометрия в целом переживает в настоящее время определенный кризис, связанный с глубокой перестройкой всей математической науки, один довольно узкий раздел элементарной геометрии бесспорно находится сегодня на подъеме — это учение о так называемых «геометрических экстремальных[2]) задачах», т. е. о задачах, связанных с отысканием наибольших и наименьших значений геометрических величин и с нахождением численных

---

[1]) То есть отличающимся нестандартностью условий задач и методов их решения (составители предлагаемых на математических соревнованиях задач должны стремиться исключить возможность того, что кто-либо из участников соревнования уже раньше встречался со сходной задачей или с рассуждением, близким к рассуждению, приводящему к решению задачи).

[2]) Математический термин «экстремум» объединяет понятия наибольшего значения, или «максимума», и наименьшего значения, или «минимума»; поэтому «экстремальные задачи» — это задачи на отыскание максимумов и минимумов (т. е. наибольших и наименьших значений).

оценок, ставящих своей целью распознавание в каком-либо смысле «выгодных» или «экономичных» геометрических конфигураций. Тематика этого рода породила в послевоенные годы даже целые большие направления, своего рода науки, такие как «дискретная геометрия» (см. книги [21], [22])[1]) или «комбинаторная геометрия» (см. книги [23] — [27]), которую смело можно назвать «элементарной геометрией второй половины XX века». Интерес к геометрическим экстремальным задачам естественно связать с расцветом тех направлений математики, которые относятся к отысканию оптимальных или экономичных режимов работы определенных механизмов или сложных систем. В последние десятилетия оформился целый ряд научных направлений («линейное программирование», «динамическое планирование», «теория игр», «исследование операций», «оптимальное управление», «теория информации» и т. д.), которые специально занимаются задачами такого рода; в некоторых из них находит прямое применение дискретная геометрия.

Таким образом, сборники геометрических задач можно было сделать более яркими и даже, в определенном смысле, более научно актуальными, резко увеличив в них долю «экстремальных» задач. Однако при переработке 2-й части «Избранных задач и теорем» ряд «экстремальных» геометрических задач, содержавшихся в 1-м издании этой книги, был даже исключен из вышедшего в свет в 1967 г. ее 2-го издания[2]). Это обстоятельство тесно связано с возросшей ролью задач на оценки геометрических величин и геометрические неравенства: нам казалось, что таким задачам уместно посвятить отдельный сборник. Более того, при работе над настоящей книгой мы убедились, что количество заслуживающих внимания геометрических экстремальных задач таково, что их целесообразно разбить на два отдельных сборника, формально совершенно независимых и даже имеющих несколько разный характер: в то время как эта книга ориентирована, в первую очередь, на разбор некоторых «классических» геометрических задач на максимум и минимум (см. цикл задач 3) и непосредственно их продолжающих

[1]) Числа в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы на стр. 313—318.

[2]) Заметим, что, несмотря на это, книга [17] содержит все же немало задач, которые были бы вполне уместны в настоящей книге; такими являются, например, задачи 11—13, 16, 35—37, 44, 48—50 и целый ряд других.

экстремальных геометрических проблем (цикл задач 4), подготовляемая следующая книга той же серии в значительно большей степени будет порождена теми направлениями геометрии, которые принято именовать «дискретной геометрией» и «комбинаторной геометрией».

Эта книга представляет собой очередной выпуск серии, отражающей долголетний опыт школьного математического кружка при МГУ и московских математических олимпиад — преемственность здесь подчеркивается самим списком ее авторов. Формулировки некоторых задач сборника (например, задач 38—42) в какой-то степени навеяны новыми направлениями математики; однако наряду с этим здесь имеется большое число «классических задач на геометрические экстремумы», история которых восходит к XIX веку или является еще более древней (таковы, в частности, многие задачи цикла 3). Но еще важнее то, что решения собранных здесь задач, как правило, следуют традициям, сложившимся в школьной математике в начале этого века и очень сильным в течение того периода работы школьного математического кружка при МГУ, когда самой яркой фигурой кружка был студент механико-математического факультета Додик Шклярский[1]) — другими словами, «прямым методам» решения экстремальных задач здесь определенно отдается предпочтение перед «косвенными методами». Последнее обстоятельство представляется нам важным; поэтому мы позволим себе остановиться на нем подробнее.

Хорошо известно, что решения «экстремальных» задач, независимо от того, относятся ли они к арифметике, алгебре, геометрии или математическому анализу, могут строиться двумя принципиально различными путями. *Прямым* называется такое доказательство какого-либо экстремального свойства, в котором, скажем, определенная фигура непосредственно сравнивается с произвольной другой фигурой, удовлетворяющей всем условиям поставленной задачи, и показывается, что первая фигура лучше (или не хуже) каждой другой. Напротив, *косвенное* доказательство сводится к рассуждению,

---

[1]) Истории школьного математического кружка при МГУ и математических олимпиад московских школьников посвящена вводная статья (стр. 3—50) книги [15], из которой, в частности, читатель может узнать, почему на первое место в списке авторов первых книг серии «Библиотека математического кружка» поставлен Давид Оскарович Шклярский, в возрасте 23 лет погибший в партизанском отряде в 1942 г., т. е. задолго до начала работы над этими книгами.

показывающему, что все фигуры, кроме какой-то одной (или нескольких), не могут служить решением задачи, поскольку для каждой такой фигуры можно найти другую, лучшую, чем она, откуда уже и делается вывод о том, что решением задачи является та единственная фигура, которую мы не можем «улучшить» (или одна или большее число из тех нескольких фигур, которые не могут быть улучшены). Однако рассуждение такого рода содержит существенный пробел, заключающийся в том, что если наша задача вовсе не имеет решения, то полученный этим путем вывод может оказаться ошибочным; *доказательство* же *существования* решения задачи требует использования совсем других соображений, которые естественно отнести к топологии — «младшей сестре» геометрии, возникшей в XX веке и сегодня успешно конкурирующей с классической геометрией, из которой она выделилась.

Силу косвенных методов в геометрических экстремальных задачах впервые в полной мере оценил замечательный швейцарский геометр первой половины XIX века Якоб Штейнер; большое место занимали они и в творчестве современника Штейнера, выдающегося немецкого аналиста Лежена Дирихле.

Во второй половине XIX века с резкой критикой Штейнера и Дирихле выступил знаменитый Карл Вейерштрасс; его конструктивная критика и связанные с ней исследования явились тем зерном, из которого впоследствии выросла топология — но одновременно они настолько сильно скомпрометировали косвенные методы решения экстремальных геометрических проблем, что в первой половине нашего века последние повсеместно считались «ненаучными» (или, во всяком случае, недостаточно строгими). «Необходимо особо остановиться на задачах отыскания наибольшего или наименьшего значения..., — писал в 1947 г. составитель решений к последним изданиям «Элементарной геометрии» знаменитого Жака Адамара проф. Д. И. Перепелкин. — Дело в том, что в более трудных задачах такого рода автор прямо рекомендует решать задачу, исходя из *предположения*, что существует фигура, для которой имеет место экстремум. Такой путь решения, более или менее естественный в ту эпоху, когда составлялась книга Адамара [1]), мы считаем в настоящее время неприемлемым...» (см. [13], стр. 13—14). Однако автор относящейся к следующему историческому периоду книги [21] при сопоставлении прямых и косвенных методов решения экстремальных геометрических задач проявляет уже несколько большую умеренность. «Если оставить в стороне соображения эстетического и дидактического порядка,— говорит он, — то косвенный метод представляется более естественным и, вообще говоря, вероятно, также и более целесообразным. Если иметь в виду лишь определение пока еще неизвестной экстре-

---

[1]) То есть в конце XIX века (*И. Я.*).

мальной фигуры, то естественно отложить на дальнейшее вопрос о ее существовании; прежде всего следует задаться вопросом о том, в каких случаях (и каким образом) заданная фигура может быть улучшена. При этом... косвенный метод доказательства не является вполне элементарным и чисто геометрическим...

Обратимся теперь к прямому методу доказательства, который уже в силу того, что он является прямым, представляется более убедительным. Здесь вопросы существования не приходится ставить отдельно, поскольку они автоматически решаются в процессе доказательства. Кроме того, прямое доказательство часто удается свести к самым простым предложениям элементарной геометрии, в то время как в косвенном методе это принципиально невозможно. Но зато прямое доказательство часто требует большего искусства; поэтому исторически такие доказательства находились, как правило, позднее, когда уже были известны менее изящные косвенные решения соответствующих задач» (см. [21], стр. 26—27).

Мы столь подробно воспроизвели разные мнения о соотношении прямых и косвенных методов решения задач на максимум и минимум, потому что считаем этот вопрос весьма принципиальным. При этом нам кажется, что если говорить о будущем, то оно бесспорно выскажется в пользу *косвенных* методов (значение которых в современной прикладной математике во много раз превосходит роль прямых методов). Те соображения эстетического порядка, в которых многие авторы видят дополнительные аргументы в пользу прямых методов, ни в коем случае не следует принимать во внимание: прямые методы «красивее» косвенных лишь в силу своей большей сложности, подобно тому как старинные, весьма изысканные методы нахождения площадей криволинейных фигур кажутся более красивыми, чем вытеснившая их автоматическая процедура решения соответствующих задач с помощью интегрального исчисления. Конечно, сложные методы, требующие отточенного мастерства, кажутся нам красивее простых приемов, связанных с использованием в решении задачи адекватного математического аппарата; однако они неизбежно уступают место этим простым приемам. Также и утверждение о «неэлементарности» косвенных методов, связанных с необходимостью давать здесь доказательство существования, имеет, быть может, чисто временный характер, поскольку трудно предсказать, как изменится за ближайшие десятилетия элементарная геометрия. Однако сегодня в задачнике для школьников приходится предпочесть *прямые* методы решения экстремальных задач, поскольку пока мы не имеем доступной литературы, на которую можно было бы сослаться в связи с теоремами существования[1]). По этой причине и в настоящей книге рассматриваются почти исключительно прямые методы решения задач на максимум и минимум; однако читателю хочется порекомендовать продумать полученные результаты также и с позиций статьи [1] (см. также Дополнение I к книге [30]), резко противоречащей традициям школьного математического кружка при МГУ, но отражающей некоторые важные методологические установки наших дней.

Эта книга содержит 120 задач, разбитых на 4 цикла, причем деление на циклы в значительной степени является условным: легко, например, усмотреть глубокое родство отнесенных к разным циклам задач 46 и 94а), 47 и 94в), 75 и 104а) или 81а) и 104б). Весь текст разбит на три части: «Задачи», «Решения» и напечатанные в конце книги «Ответы и указания» ко всем без исключения задачам. Предполагается, что читатель книги сначала попробует решить задачу самостоятельно; в случае неудачи рекомендуется посмотреть в последней части книги *указание* (или *ответ*, который тоже может подсказать решение задачи) и продолжать думать над задачей; *решение* же следует читать только после продолжительного раздумья над задачей или после того, как ее удалось решить[2]). Приложенный к книге список литературы (см. стр. 313—318), ни в какой мере не претендующий на полноту и не исчерпывающий все использованные автором источники, обращен более к преподавателю, чем к учащемуся; он может оказаться полезным в случае использования книги в работе (школьного или студенческого) математического кружка.

В работе над этой книгой автору существенно помогли ветераны школьного математического кружка при МГУ В.Г. Болтянский и Л. И. Головина, также как и он являющиеся учениками Д. О. Шклярского: они внимательно прочитали рукопись книги, и их замечания помогли устранить ряд дефектов изложения и улучшить решения некоторых задач. При подготовке книги было использовано первое издание 2-й части «Избран-

---

[1]) См., впрочем, книгу Н. *Стинрод*, У. *Чинн*, Первые понятия топологии, «Мир», 1967 — возможно, «первую ласточку» нового важного направления научно-популярной литературы по математике.

[2]) Этот порядок может быть изменен для более трудных задач, отмеченных одной звездочкой, и особенно для самых трудных задач, номера которых помечены двумя звездочками: здесь может оказаться разумным начинать с ознакомления с указанием или даже сразу читать решение задачи, игнорируя приданную книге форму задачника.

ных задач и теорем...», составленное в сотрудничестве с Н. Н. Ченцовым и другими работниками школьного математического кружка при МГУ; в переработке и дополнении материала 2-й части «Избранных задач» большое участие принял В. П. Паламодов. Несколько задач сообщили автору составители геометрического выпуска [14] «Библиотечки физико-математической школы» Н. Б. Васильев (явившийся также основным составителем использованных в настоящей книге обзоров задач последних олимпиад, напечатанных в журнале «Математика в школе» — см. № 3 и 5 за 1965 г., № 5 за 1966 г., № 1 и 5 за 1967 г. и № 4 за 1969 г.) и В. Л. Гутенмахер, а также В. Л. Рабинович (Петропавловск-Казахстанский) и Г. А. Тоноян (Ереван). Э. Г. Готман (Арзамас), В. Л. Гутенмахер, В. Л. Рабинович и З. А. Скопец (Ярославль) поделились с автором своими решениями некоторых задач. И. В. Летников принял значительное участие в подготовке эскизов чертежей; в этой работе ему помогал В. В. Фирсов. Мне приятно выразить здесь всем перечисленным лицам свою искреннюю признательность.

И. М. Яглом

СПИСОК ЗАДАЧ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ

Ниже перечислены номера всех задач настоящего сборника, предлагавшихся на различных математических олимпиадах [1]. До 1959 г., так сказать, «первой олимпиадой страны» являлась московская школьная математическая олимпиада, проводящаяся с 1935 г. [2]; однако затем система проведения олимпиад значительно усложнилась. Поводом к тому явились международные математические олимпиады, первая из которых была проведена в 1959 г. в Бухаресте (Румыния) [3]. Необходимость составления команды для участия в этих соревнованиях вызвала к жизни всероссийские математические олимпиады (проводятся с 1961 г.), которые начиная с 1967 г. называются всесоюзными. Фактически первой всероссийской или даже всесоюзной олимпиадой была XXIII московская олимпиада 1960 г., в которой принимали участие и школьники из других городов; также и рамки всех всероссийских олимпиад не ограничивались одной лишь Российской федерацией.

Московские математические олимпиады, как и олимпиады в других городах, проводились в два тура (которым иногда предшествовал еще предварительный тур, проводимый по

---

[1]) В приведенной на стр. 14 таблице представлены московские, всероссийские (всесоюзные) и международные олимпиады (а частично и заочные олимпиады). Ряд задач сборника заимствован из материалов других состязаний школьников: так, например, задача 10 предлагалась на телевизионной олимпиаде, проводившейся в октябре 1965 — январе 1966 г. центральным телевидением; задача 4 предлагалась в 1965 г. на традиционной олимпиаде им. Даниэля Араня венгерских школьников; задача 41а) заимствована из задач британской школьной математической олимпиады 1965 г., и т. д.

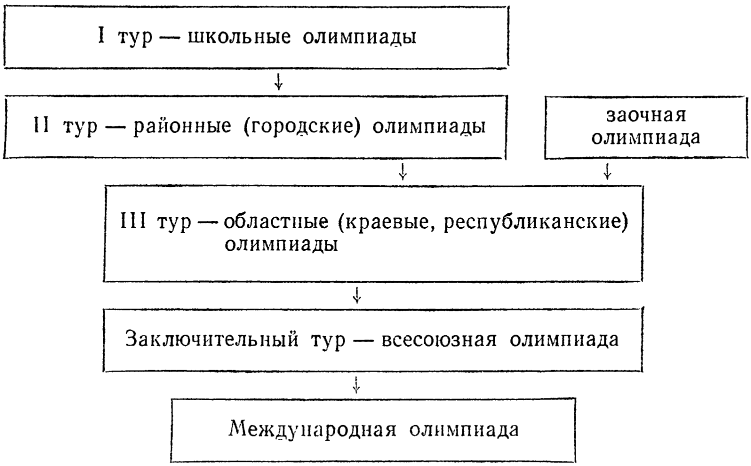
Формулировки некоторых из предлагавшихся на олимпиадах задач в этой книге несколько изменены.

[2]) Более старой является ленинградская математическая олимпиада, задачи которой, однако, остаются недоступными составителям сборников задач, входящих в «Библиотеку математического кружка».

[3]) См. книгу Е. А. Морозовой и И. С. Петракова [16].

школам); задачи I тура (отборочного) являлись обыкновенно (но не всегда) более простыми, чем задачи II тура, служившего основным этапом соревнования [1]). В противоположность этому, всероссийская (всесоюзная) и международная олимпиады, к участию в которых допускаются лишь победители предшествующих этапов соревнования, проходят в один тур.

Общую схему проведения олимпиад можно представить так:



Московская олимпиада играет в этой схеме роль III тура. Заочная олимпиада (задачи которой, предлагаемые для решения дома, естественно, несколько более трудны) приравнивается ко II туру; она также имеет всесоюзный характер (условия задач печатаются в «Комсомольской правде» и «Учительской газете»). На городских, областных (краевых, республиканских) олимпиадах и на всесоюзной (ранее — всероссийской) олимпиаде задачи предлагаются отдельно учащимся каждого из четырех старших классов средней школы; в международной олимпиаде участвуют, как правило, учащиеся старшего (выпускного) класса.

В приведенной ниже таблице записанное римскими (арабскими) цифрами число во второй колонке указывает номер московской (международной) олимпиады; если место проведения олимпиады не указывается, то этим местом была Москва.

---

[1]) См. вводную статью к книге А. А. Лемана [15].

№ задачи	Олимпиада	Год	Класс	Тур
1	XIII	1950	7—8	I
2	XIII	1950	7—8	II
3	XXI	1958	8	II
5	9, Цетинье (Югославия)	1967		
6	5, Вроцлав (Польша)	1963		
7	XXI	1958	8	I
8а)	XXVI	1963	10	II
9	XXVII	1964	11	II
10а)	I всесоюзная, Тбилиси	1967	8—9	
10б)	I всесоюзная, Тбилиси	1967	10	
12	I	1935	9—10	II
14	IV всероссийская, XXVII	1964	10—11	I
16	XXVI	1963	9	II
20а)	XIII	1950	7—8	II
20б)	XIII	1950	9—10	II
24а)	XXVI	1963	10	I
24б)	V всероссийская	1965	9	
26	VI всероссийская, Воронеж	1966	10—11	
27б)	XXV	1962	9	II
28	XXIV	1961	10	II
29	XXV	1962	9	I
30	XXV	1962	7	II
31	VI всероссийская, Воронеж	1966	10—11	
32	XXI	1958	9	II
35	XXIII	1960	9	II
37	Заочная	1966	8—10	
38	III всесоюзная, Киев	1969	8	
41а)	V всероссийская	1965	8	
42	Заочная	1966	8—10	
43а)	XX	1957	7	II
43б)	XX	1957	8	II
48	V	1939	9—10	I
49	I всесоюзная, Тбилиси	1967	9	
50	I всесоюзная, Тбилиси	1967	8	
56	2, Синая (Румыния)	1955		
57б)	9, Цетинье (Югославия)	1967		
60	XIX	1956	10	I
61	XXII	1959	9	II
62	XV	1952	9	I
65а)	IX	1946	9—10	I
67	V всероссийская	1965	9 и 11	
76б)	XXIII	1960	7	II
86	XXV	1962	9—10	I
87	VI всероссийская, Воронеж	1966	10—11	I
90	XIII	1950	7—8	I
91	XIII	1950	9—10	II
94	XI	1948	7—8	
102а)	3, Веспрем (Венгрия)	1961		

ЗАДАЧИ

1. ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО СОДЕРЖАНИЯ

1. Нарисуйте на шахматной доске с обычной раскраской полей окружность наибольшего возможного радиуса так, чтобы она не пересекала ни одного белого поля.

2. В треугольник вписана окружность, а вокруг нее описан квадрат (рис. 1). Докажите, что внутри треугольника находится более половины периметра квадрата.

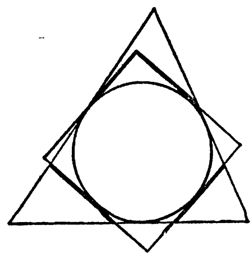


Рис. 1.

3. Из бумаги вырезан многоугольник. Две точки его границы соединяются отрезком, по которому многоугольник складывается. Докажите, что периметр многоугольника, являющегося контуром фигуры, получившейся после складывания, меньше периметра исходного многоугольника.

4. Докажите, что если три угла четырехугольника тупые, то диагональ, проходящая через вершину острого угла, больше второй диагонали.

5. Стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ равны соответственно 1 и a, $\angle BAD=\alpha$, треугольник ABD остроугольный. При каких a и α четыре круга радиуса 1 с центрами в вершинах параллелограмма полностью покроют параллелограмм?

6. Все углы n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ равны между собой; при этом

$$A_1A_2 \leqslant A_2A_3 \leqslant A_3A_4 \leqslant \ldots \leqslant A_{n-1}A_n \leqslant A_nA_1.$$

Какие значения может иметь отношение $\frac{A_1A_n}{A_1A_2}$?

7. Внутри треугольника ABC выбрана точка O; на лучах OA, OB и OC отложены векторы длины 1. Докажите, что длина суммы этих векторов меньше 1.

8. а) Как выбрать из 25 векторов $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}, \ldots, \overline{OA_{25}}$, где O — центр правильного 25-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_{25}$, некоторое число векторов так, чтобы длина суммы этих векторов была возможно большей?

б)* Чему равна эта длина, если все рассматриваемые векторы единичные?

9. Сумма длин нескольких векторов плоскости равна 4. Докажите, что из этих векторов можно выбрать некоторое число (может быть, один) так, что длина суммы выбранных векторов превзойдет 1.

Можно доказать, что *если сумма длин нескольких векторов плоскости не меньше* π ($\pi = 3{,}14159\ldots$), *то среди них можно выбрать какое-то число векторов, длина суммы которых превзойдет* 1 (причем число π здесь нельзя заменить меньшим; см. примечание в конце решения настоящей задачи). Аналогично этому можно показать, что *если сумма длин нескольких векторов пространства не меньше* 4, *то из них можно выбрать часть так, что длина суммы отобранных векторов будет превосходить* 1, причем здесь уже число 4 нельзя заменить меньшим [1]).

---

[1]) Плоскость иногда называют «двумерным пространством» (а прямую линию — «одномерным пространством»), приписывая обыкновенному пространству наименование «трехмерного». Можно также ввести понятие «k-мерного (евклидова) пространства», частными случаями которого (отвечающими значениям $k = 1$, 2 и 3) являются прямая, плоскость и (обычное) пространство. При этом в k-мерном евклидовом пространстве естественно определяются (k-мерные) *векторы* (более того, само понятие k-мерного пространства основано на понятии вектора; см., например, Б. А. Розенфельд и И. М. Яглом, Многомерные пространства, Энциклопедия элементарной математики, кн. V, «Наука», 1966, стр. 349—393); это позволяет рассмотреть и «k-мерный вариант» задачи 9. При этом оказывается, что *для возможности выбора из произвольной системы векторов k-мерного евклидова пространства такой подсистемы, длина суммы которых превосходит* 1, *достаточно, чтобы сумма длин исходных векторов была*

10. Прожектор освещает[1])

а) плоский угол в 90° (квадрант; рис. 2);

б) трехгранный угол, все плоские углы которого равны 90° (октант).

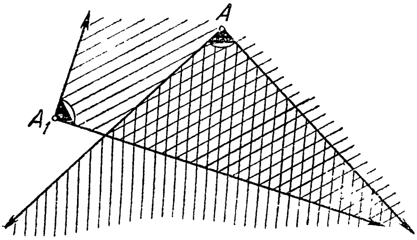


Рис. 2.

Какое наименьшее число прожекторов необходимо для того, чтобы осветить всю плоскость (все пространство)? Каковы расположения прожекторов такие, что, поместив их в заданных пунктах и направив прожекторы надлежащим образом, можно осветить всю плоскость (все пространство)?

11*. Шкаф, имеющий в плане форму прямоугольника со сторонами a и b, надо вынести из комнаты; коридор, в который из комнаты ведет дверь ширины h, имеет ширину d

---

не меньше

$$C_k = \begin{cases} \dfrac{(k-1)!}{2^{k-2}\left[\left(\dfrac{k}{2}-1\right)!\right]^2}\pi & \text{при } k \text{ четном}, \\[2ex] \dfrac{2^k\left[\left(\dfrac{k-1}{2}\right)!\right]^2}{(k-1)!} & \text{при } k \text{ нечетном}, \end{cases}$$

причем постоянная C_k не может быть здесь уменьшена (можно показать, что

$$C_k=(k-1)\frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}},$$

где σ_k — площадь поверхности шара в k-мерном евклидовом пространстве).

[1]) В обеих задачах а) и б) считается, что границы квадранта (соответственно октанта) прожектор не освещает.

(рис. 3). При каких размерах шкафа его можно, не разбирая, выдвинуть в коридор?

12. На поверхности куба найти точки, из которых его диагональ видна под наименьшим углом (концы самой диагонали при этом в расчет не принимаются).

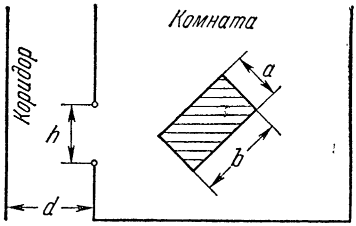


Рис. 3.

13.** Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

14. На какое наименьшее число треугольных пирамид (тетраэдров) можно разбить куб?

15. На плоскости даны (вообще говоря, невыпуклые) четырехугольник и пятиугольник, причем никакая вершина одного не принадлежит стороне другого. Каково наибольшее возможное число точек пересечения их сторон?

16. Каждые две соседние стороны плоского (самопересекающегося!) 14-угольника взаимно перпендикулярны; никакие две стороны его не принадлежат одной прямой. Каково наибольшее возможное число точек самопересечения сторон такого многоугольника?

17. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость:

а) два треугольника;

б) два прямоугольника;

в) два выпуклых n-угольника?

18. а) На какое число частей могут разбить плоскость две замкнутые линии, одна из которых является окружностью, а вторая — границей квадрата?

б)** На какое число частей могут разбить пространство две замкнутые поверхности, одна из которых является сферой, а вторая — поверхностью куба?

19. На какое наибольшее число треугольников можно разбить треугольник T так, чтобы в каждом узле полученной сети линий (эти узлы не должны разбивать на части стороны треугольника T) сходилось одинаковое число отрезков?

20. В выпуклом многоугольнике проведены все его диагонали. Они разбивают этот многоугольник на ряд более мелких многоугольников (рис. 4). Какое наибольшее число

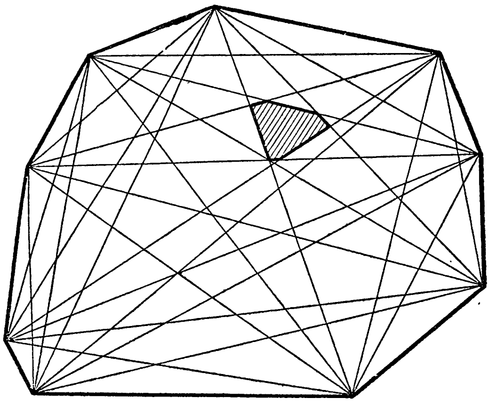


Рис. 4.

сторон может иметь многоугольник разбиения, если первоначальный многоугольник имеет

а) 13 сторон;

б)* 1950 сторон?

21. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из

а) 13 звеньев;

б)** 1950 звеньев?

22. а) Внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1 расположен выпуклый многоугольник M, площадь которого больше $^1/_2$. Докажите, что найдется прямая l, параллельная стороне AB квадрата и пересекающая многоугольник M по отрезку длины, большей $^1/_2$.

б)* Внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1 расположена самонепересекающаяся ломаная L, длина которой больше 1000. Докажите, что найдется прямая l, параллельная одной из сторон квадрата и пересекающая ломаную L больше чем в 350 точках.

23. Внутри квадрата со стороной 1 проведена такая ломаная, что каждая прямая, параллельная стороне квадрата, пересекает ее не более чем в одной точке. Докажите, что длина ломаной меньше 2; причем для каждого числа $l < 2$ существует ломаная длины l, удовлетворяющая требуемому условию.

24. Какое наибольшее число клеток может пересечь

а) отрезок прямой, проведенный на листке бумаги «в клетку» размером $m \times n$ клеток;

б) брошенная на лист бумаги «в клетку» игла длины 200 (за единицу длины принята сторона клетки)?

[Отрезок (или «игла») считается пересекающим клетку, если он проходит через ее внутреннюю точку.]

Аналогично решению задачи 24б) можно также оценить наибольшее число кубов пространственной [1]) сетки кубов со стороной 1, которые может пересечь «игла» (т. е. прямолинейный отрезок) данной длины L. Более сложный характер имеет оценка наибольшего возможного числа квадратов листа бумаги «в клетку» (или числа кубов пространственной [1]) кубической сети), которые может пересечь (произвольная) линия данной длины L (так, например, можно показать, что линия длины 200 не может пересечь больше 429 клеток листка бумаги «в клетку», но 429 клеток она пересечь может) — однако и эта оценка может быть получена средствами элементарной (школьной) математики (см. В. Л. Рабинович [39]).

25. Можно ли разместить 1600 точек в квадрате со стороной 1 так, чтобы любой заключающийся внутри квадрата прямоугольник площади 0,005, стороны которого параллельны сторонам квадрата, содержал внутри хотя бы одну из этих точек?

26. На плоскости задан треугольник ABC. Точка D пространства выбирается таким образом, что у тетраэдра (треугольной пирамиды) $ABCD$ высота DP является наименьшей из четырех его высот. Где может располагаться точка P?

27. Все стороны выпуклого многоугольника m периметра $p = 12$ и площади s сдвинуты во внешнюю сторону

---

[1]) И даже «k-мерной» (ср. подстрочное примечание [1]) на стр. 16).

на расстояние 1; периметр образованного сдвинутыми прямыми бо́льшего многоугольника M (рис. 5) обозначим через P, а его площадь — через S. Докажите, что

а) $P-p>6$;

б) $S-s>15$;

в)* если многоугольник m является четырехугольником, то $P-p\geqslant 8$ и $S-s\geqslant 16$;

г)* если все углы многоугольника m тупые, то $P-p<8$ и $S-s<16$.

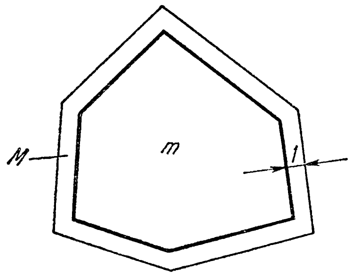


Рис. 5.

28. В прямоугольнике размером 20×25 расположено 120 квадратов со стороной 1. Докажите, что в прямоугольнике можно поместить круг диаметра 1, не пересекающий ни одного квадрата.

29. Можно ли в прямоугольник площади 1 поместить ряд непересекающихся кругов так, чтобы сумма их радиусов равнялась 1962?

30. На плоскости даны 25 точек; известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что среди этих точек найдутся 13, которые можно покрыть кругом радиуса 1.

31*. На плоскости даны 100 точек. Докажите, что их можно покрыть одним или несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше 100 и такими, что расстояние между любыми двумя точками разных кругов превосходит 1.

32. Пусть m — наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно покрыть выпуклый многоугольник M, n — наибольшее число кругов диаметра 1, которые можно расположить так, чтобы никакие два круга не пересекались и чтобы все их центры принадлежали многоугольнику M. Какое из чисел больше — m или n?

33. На круглом столе радиуса 25 лежат n монет радиуса 1. Докажите, что если $n>625$, то монеты наверное частично покрывают одна другую, а если $n < 144$, то на стол можно положить еще одну монету так, чтобы она не перекрывалась с положенными ранее.

Указанные в задаче 33 оценки (в общем случае стола радиуса R, на котором располагаются монеты радиуса 1, они имеют следующий вид: если число n монет больше R^2, то монеты наверное перекрываются, а если $n < 0{,}25(R-1)^2$, то на стол можно положить монету, не перекрывающуюся с положенными ранее) получаются сравнительно несложно; однако они являются весьма грубыми. Более тонкие рассуждения позволяют доказать, что при большом радиусе R стола число неперекрывающихся монет не может заметно превосходить $0{,}9 \cdot R^2$, а число монет, положенных таким образом, что больше на стол уже нельзя положить ни одной монеты, не перекрывающейся с положенными ранее, не может быть заметно меньше чем $0{,}3 \cdot R^2$ (ср. с гл. II книги Л. Фейеша Тота [21]).

34. Поливное поле имеет форму квадрата со стороной 12; от находящегося на территории поля источника J проведена система прямолинейных арыков так, что расстояние от каждой точки поля до ближайшего к этой точке арыка не превосходит 1. Докажите, что общая длина арыков больше 70 (шириной арыков мы пренебрегаем).

35. На квадратном участке со стороной 100 растут (цилиндрические) деревья радиуса 1. Докажите, что если на этом участке нельзя проложить (сколь угодно тонкую!) прямолинейную тропинку длины 10, не задевающую ни одного дерева, то число деревьев на участке не менее 400.

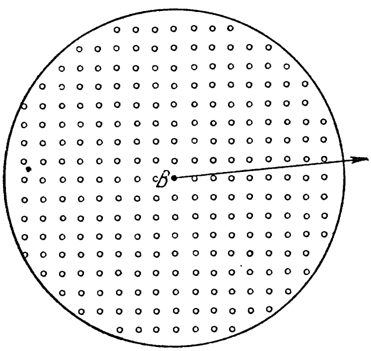


Рис. 6.

36.** В центре круглого сада радиуса 50 расположена беседка B; (цилиндрические) деревья растут в узлах сетки квадратов со стороной 1 (рис. 6). Докажите, что пока радиусы всех деревьев остаются меньше $\frac{1}{\sqrt{2501}} \approx \frac{1}{50{,}01}$ ($\approx 0{,}019996$), вид из беседки не будет полностью заслонен деревьями; однако как только радиус деревьев достигнет $\frac{1}{50} = 0{,}02$, человек, сидящий в беседке, не увидит просвета ни в каком направлении.

37*. Запорошенный снегом парк Π размером 300 *м*$\times$400 *м* разбит параллельными сторонам прямоугольника Π дорожками на квадраты 100 *м*$\times$100 *м*; по границе парка также идут дорожки (рис. 7). Путник может идти по дорожкам со скоростью v или прямо по снегу с меньшей скоростью u. Как должен он идти, чтобы пройти из одного угла парка в противоположный в кратчайшее время? Найдите это кратчайшее время (зависящее, очевидно, от величин u и v).

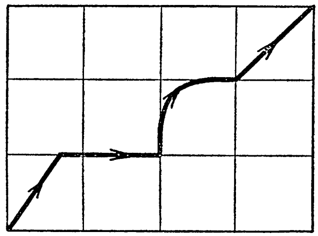


Рис. 7.

38. В центре поля, имеющего форму квадрата, находится волк, а в вершинах квадрата — четыре собаки. Волк может бегать по всему полю, а собаки — только по его периферии. Волк легко может справиться с собакой, но одолеть двух собак он не в состоянии. Докажите, что если собаки могут двигаться со скоростью, превышающей в 1,5 раза наибольшую возможную скорость волка, то они могут не выпустить волка из пределов поля.

39. Корабль K_1 замечает корабль K_2, находящийся на расстоянии d от K_1 и плывущий со скоростью v в направлении, перпендикулярном прямой K_1K_2 (рис. 8). Корабль K_1 нуждается в помощи и потому хочет обратить на себя внимание корабля K_2, который, однако, не замечает K_1 и продолжает идти тем же курсом. Насколько может приблизиться корабль K_1 к кораблю K_2, если

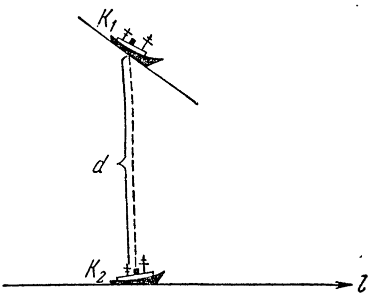


Рис. 8.

а) скорость K_2 также равна v и капитан корабля K_1 в каждый момент времени ведет его прямо по направлению K_1K_2 (которое, разумеется, все время меняется в процессе движения обоих кораблей);

б) скорость корабля K_1 равна $u < v$, а капитан K_1 сразу исходит из того, что направление движения корабля K_2 не изменится, и выбирает курс своего корабля в соответствии с этим предположением?

40. Турист заблудился в лесу; он знает форму леса, но не знает, где он находится.

а) Если лес представляет собой круг диаметра d, то двигаясь по прямой линии в каком-угодно фиксированном направлении, турист заведомо выйдет из леса, пройдя путь d: любой отрезок длины d, начинающийся внутри леса, пересечет его границу (рис. 9, *а*).

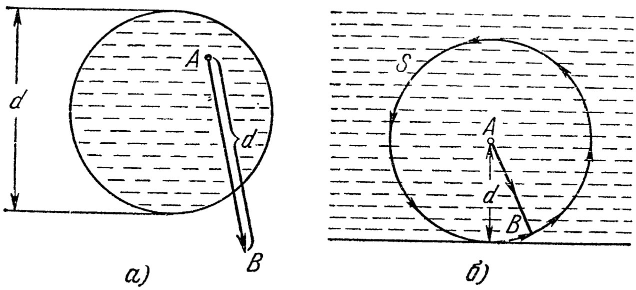


Рис. 9.

б) Если лес представляет собой полуплоскость и турист случайно запомнил, что он отошел от границы леса на расстояние d (но не знает, в каком направлении от него находится граница), то он может выйти из леса, пройдя в любом направлении отрезок AB длины d, а затем обойдя окружность S с центром в исходной точке A и радиусом d: этот путь длины $d+2\pi d$ ($\approx 7{,}28d$) наверное выведет его на границу леса, расположенную где-то на расстоянии d от точки A (рис. 9, *б*).

Может ли турист выбрать другой путь, который наверное выведет его из леса ранее того, как он пройдет расстояние d, соответственно $(1+2\pi)\,d$?

Задачи 40 а), б) идут от известного американского математика Р. Беллмана (см. стр. 161—162 книги [40] или указанную под тем же номером заметку). В случае задачи 40 а) нетрудно найти оптимальный путь, обеспечивающий выход из леса за кратчайшее время; однако при другой форме леса это вовсе не легко. В. А. Залгаллер [41] нашел самый выгодный путь в том случае, когда лес представляет собой достаточно вытянутый прямоугольник, отношение большей стороны которого к меньшей $> 2{,}278$ (и для того случая, когда лес представляет собой бесконечную полосу шириной d); однако какой путь следует выбрать в том случае, когда лес имеет форму прямоугольника с отношением сторон, меньшим 2,278 (например, форму квадрата), или, скажем, форму треугольника (например, правильного треугольника), видимо, пока еще неизвестно. По поводу задачи 40 б) см. Дж. Р. Исбелл [42].

41. На небольшом острове O (размерами острова мы в дальнейшем пренебрегаем) стоит прожектор, освещающий отрезок поверхности моря длиной в 1 *км*; этот прожектор вращается, совершая один оборот в минуту. Катер должен пробраться к острову O, не будучи обнаруженным (т. е. ни разу не попав в луч прожектора).

а) Докажите, что если скорость v катера меньше 800 *м/мин*, то он не сможет незаметно подойти к острову.

б) ** Выясните, при каких значениях скорости v катер сможет выполнить свою задачу и незаметно подойти к острову.

42. На краю круглого бассейна стоит Андрей, который не умеет плавать. В центре бассейна находится Виктор, который бегает быстрее Андрея.

а)* Сможет ли Виктор убежать от Андрея, если он плавает в 4 раза медленнее, чем бегает Андрей?

б)** Постарайтесь ответить на тот же вопрос, если Андрей бегает в k раз быстрее, чем Виктор плавает, где $k > 1$ — заданное число.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Бо́льшая часть задач этого цикла имеет следующий характер. Рассматривается определенная геометрическая фигура F (чаще всего — треугольник); одна или несколько из характеризующих эту фигуру F величин известны точно или (реже) известны пределы, в которых заключаются эти величины. Задача состоит в том, чтобы оценить некоторую другую величину a, связанную с фигурой F, т. е. доказать, что эта величина удовлетворяет неравенствам вида

$$u \leqslant a < U, \qquad (*)$$

где числа u и U, вообще говоря, зависят от условий задачи. При этом найденное двойное неравенство должно быть точным; это значит, что для *каждого* числа x, заключенного в найденных пределах (в нашем случае такого, что $u \leqslant x < U$), должна существовать удовлетворяющая условиям задачи фигура F, для которой величина a равна x; для *каждого* же числа x вне указанных пределов такой фигуры F существовать не должно. Таким образом, полное решение задачи требует доказательства того, что для каждого числа x в пределах (*) существует фигура F, для которой $a = x$; однако в решениях задач этого цикла последнее (как правило, принципиально несложное [1]) рассуждение обычно опускается: мы

[1]) Ср. с решением задачи 94 б) из цикла задач 4.

ограничиваемся доказательством того, что (в условиях обсуждаемой «типичной» задачи) величина a всегда меньше U и не может быть меньше u, причем она может быть равна u и может быть сколь угодно близка к U.

43. Две стороны треугольника ABC равны a и b. Какую величину может иметь

а) наибольший угол треугольника;

б) наименьший угол треугольника?

44*. Сторона AB треугольника ABC равна 1; стороны $AC=b$ и $BC=a$ не превосходят некоторой величины M и не меньше m. Какие значения может принимать величина α угла ACB треугольника?

45. а) Какие значения может принимать величина

1) угла A треугольника ABC;

2) угла B;

3) угла C,

если $A \leqslant B \leqslant C$?

б) Площадь треугольника со сторонами a, b и c, где $a \leqslant b \leqslant c$, равна 1. Какие значения может принимать

1) сторона a треугольника;

2) сторона b;

3) сторона c?

46. Треугольник ABC

а) описан вокруг окружности радиуса 1;

б)* вписан в окружность радиуса 1;

радиусы вневписанных окружностей треугольника (см. ниже рис. 21) обозначим через r_a, r_b и r_c, где $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$. Какие значения может принимать

1) радиус r_a вневписанной окружности;

2) радиус r_b;

3) радиус r_c?

В стереометрии роль треугольника ABC играет тетраэдр (произвольная треугольная пирамида) $ABCD$; вместо описанной и вписанной окружностей треугольника здесь выступают *описанная* и *вписанная сферы* тетраэдра (рис. 10, *а*, *б*) [1]), а роль вневписанных окружностей играют так называемые *вневписанные сферы* тетраэдра, касающиеся плоскостей всех его граней, причем хоть одной плоскости — в точке, принадлежащей не самой грани, а ее продолжению. Число вневписанных сфер тетраэдра не может превосходить семи: каждый тетраэдр $ABCD$ имеет четыре «*вневписанные сферы* 1-*го рода*»,

---

[1]) См., например, Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. II (стереометрия), Учпедгиз, 1958, п. 475 и решение задачи 701.

каждая из которых касается одной грани тетраэдра и продолжений трех других его граней (рис. 11, *а*); число же *«вневписанных сфер 2-го рода»*, касающихся продолжений двух граней Γ_1 и Γ_2 за их общее ребро r, а двух других граней Γ_3 и Γ_4 — за принадлежащие r

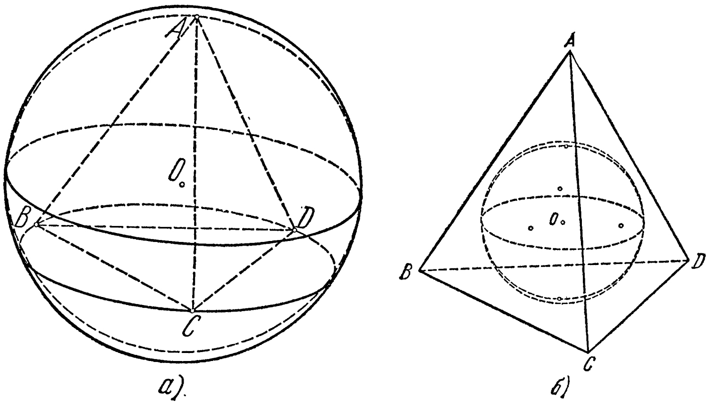
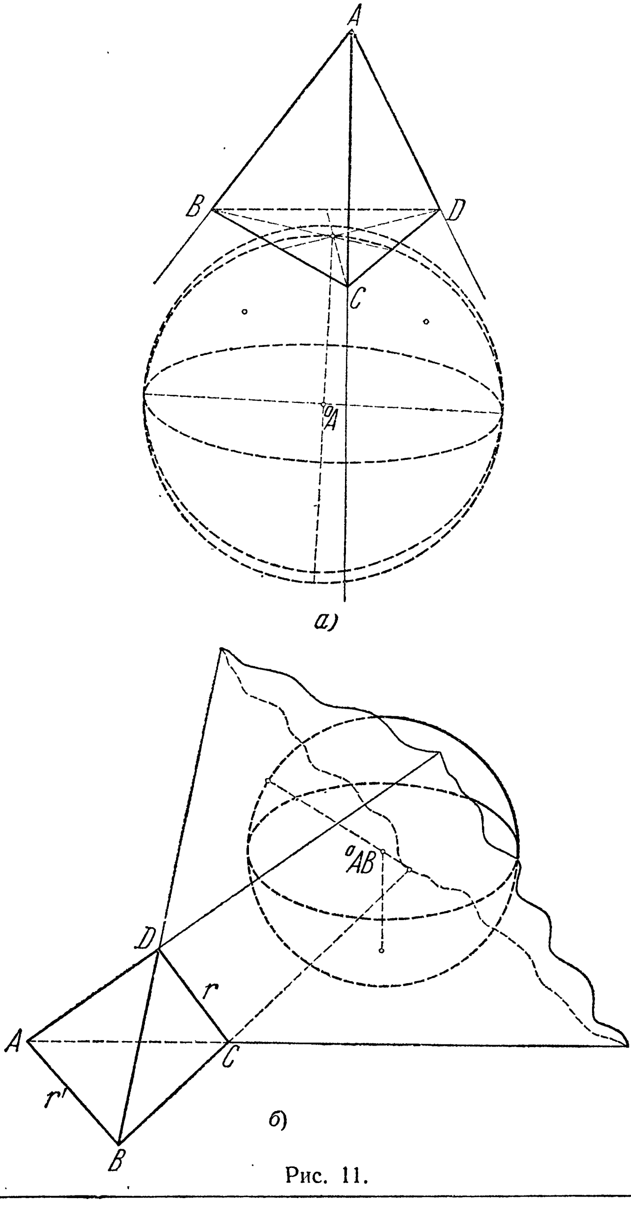


Рис. 10.

вершины (рис. 11, *б*), не больше трех, ибо из каждых двух «четырехскатных крыш», определяемых парой противоположных ребер r и r', вписать сферу можно не более чем в одну [1]).

---

[1]) См., например, Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. II (стереометрия), Учпедгиз, 1958, п. 475 и решение задачи 701. [Наличие у треугольника ABC четырех окружностей, касающихся всех его сторон AB, BC и CA (см. рис. 21 на стр. 40), может быть пояснено так: *две* биссектрисы углов, образованных сходящимися в точке A сторонами треугольника (угла A и внешнего угла треугольника при вершине A), попарно пересекаются с *двумя* биссектрисами углов, образованных сходящимися в вершине B сторонами, в *четырех* точках — центрах рассматриваемых окружностей (ибо каждая из этих четырех точек равноудалена от всех сторон треугольника). Аналогично может быть пояснено наличие у тетраэдра $ABCD$ восьми сфер, касающихся всех его граней ABC, ABD, ACD и BCD: *две* биссекториальные плоскости двугранных углов, образованных сходящимися по ребру AB гранями тетраэдра, попарно пересекаются с *двумя* биссекториальными плоскостями двугранных углов, образованных сходящимися по ребру AC гранями, по *четырем* прямым, совокупность которых представляет собой геометрическое место точек, *равноудаленных от плоскостей ABC, ABD и ACD*; далее эти *четыре* прямые пересекают *две* биссекториальные плоскости двугранных углов с ребром BC в *восьми* точках — центрах рассматриваемых сфер. (Заметим еще, что в противоположность случаю треугольника, реальное число сфер, касающихся всех граней тетраэдра, может оказаться и меньшим восьми — в силу параллельности некоторых из рассматриваемых плоскостей и прямых; это обстоятельство приходится учитывать при решении задачи 47.)]



a)
б)
Рис. 11.

47. Пусть радиус ρ вписанной сферы тетраэдра $ABCD$ (рис. 10, *б*) равен 1; радиусы его вневписанных сфер 1-го рода (рис. 11, *а*) обозначим через ρ_A, ρ_B, ρ_C и ρ_D (где, скажем, сфера радиуса ρ_A касается противоположной вершины A грани BCD тетраэдра и продолжений трех других граней), а радиусы вневписанных сфер 2-го рода (рис. 11, *б*) — через ρ_{AB}, ρ_{AC} и ρ_{AD} (где, например, сфера радиуса ρ_{AB} вписана в «четырехскатную крышу» с ребром AB или с ребром CD). Каким может быть

1) радиус ρ_A;
2) радиус ρ_B;
3) радиус ρ_C;
4) радиус ρ_D;
5) радиус ρ_{AB};
6) радиус ρ_{AC};
7) радиус ρ_{AD},

если $\rho_A \leqslant \rho_B \leqslant \rho_C \leqslant \rho_D$?

Задачу 47 можно, очевидно, рассматривать как «стереометрический аналог» (планиметрической) задачи 46а). Можно также аналогично задаче 46б) поставить вопрос об оценках для величин ρ_A, ρ_B, ρ_C, ρ_D; ρ_{AB}, ρ_{AC} и ρ_{AD} в том случае, когда *радиус описанной сферы тетраэдра равен* 1; однако этот вопрос является довольно сложным. Нетрудно убедиться, что *если радиус* R *описанной сферы тетраэдра равен* 1 *и* ρ_A — *радиус наименьшей вневписанной сферы, то*

$$\boxed{0 < \rho_A \leqslant \frac{2}{3} \ (\approx 0{,}6667)},$$

причем равенство $\rho_A = \frac{2}{3}$ достигается лишь для правильного тетраэдра $ABCD$, и что *радиусы вневписанных сфер 2-го рода в этом случае вовсе не ограничены:*

$$\boxed{0 < \rho_{AB}, \rho_{AC}, \rho_{AD} \leqslant \infty}$$

(см. примечание к решению задачи 47, 1)); однако нахождение точных оценок величин ρ_B, ρ_C и ρ_D (где положено $\rho_A \leqslant \rho_B \leqslant \rho_C \leqslant \rho_D$) требует уже гораздо бо́льших усилий. Г. И. Барон [43] показал, что *если радиус описанной сферы тетраэдра равен* 1, *то*

$$\boxed{\begin{gathered} 0 < \rho_B \leqslant \sqrt{2\sqrt{3}-3} \ (\approx 0{,}68125), \quad 0 < \rho_C < \frac{4\sqrt{3}}{9} \ (\approx 0{,}7698), \\ 0 < \rho_D < 1. \end{gathered}}$$

Здесь равенство $\rho_B = \sqrt{2\sqrt{3}-3} = k$ достигается для правильной пирамиды $ABCD$, двугранный угол φ при основании которой определяется из условия

$$\cos\varphi=\frac{k}{3-\frac{2k^2}{k+1}},$$

где число $k\approx 0{,}68125$ есть корень возникающего в решении соответствующей задачи биквадратного уравнения $x^4+6x^2-3=0$ $\left(\text{таким образом, } \cos\varphi\approx\frac{0{,}68125}{2{,}44791} \text{ и } \varphi\approx 73°50'30''\right)$ — и только для этой пирамиды. Величина ρ_C может быть сколь угодно близкой к значению $\frac{4\sqrt{3}}{9}$, если тетраэдр $ABCD$ будет близок по форме к (вписанному в единичную сферу!) «осевому сечению» ABM правильного тетраэдра ABC_1D_1 (т. е. если вершины C и D тетраэдра $ABCD$ принадлежат ребру C_1D_1 правильного тетраэдра ABC_1D_1, симметричны относительно середины M этого ребра и достаточно близки к точке M; см. рис. 12, *а*) — но значения $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ он достигать

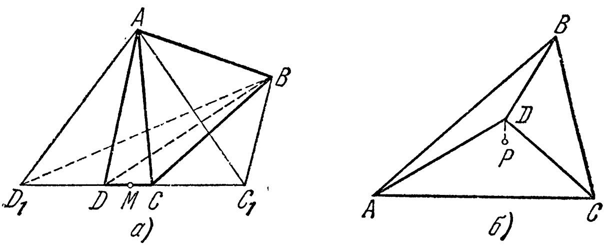


Рис. 12.

не может. Наконец, величина ρ_D может быть сколь угодно близка к 1, если тетраэдр $ABCD$ является правильной пирамидой с очень малой высотой $h_D=DP$ (рис. 12, *б*).

48. Какими могут быть три отрезка h_a, β_a и m_a, равные проведенным из одной вершины высоте AP, биссектрисе AK и медиане AD треугольника ABC?

49. Пусть $h_a=\beta_b=m_c$, где $h_a=AP$, $\beta_b=BL$ и $m_c=CF$ — проведенные из трех разных вершин некоторого треугольника ABC высота, биссектриса и медиана. Какое значение может иметь отношение наибольшей стороны треугольника ABC к его наименьшей стороне?

50. Пусть $h_a=m_b$, где $h_a=AP$ — наибольшая из высот остроугольного треугольника ABC, а $m_b=BE$ — медиана, проведенная из вершины B. Докажите, что $\angle B\leqslant 60°$.

51. Пусть $AP = h_a$, $AK = \beta_a$ и $AD = m_a$ — высота, биссектриса и медиана треугольника ABC со сторонами $AC = b$ и $AB = c$. Докажите, что

а) если $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{h_a}$, то $\angle A \leqslant 120°$;

б) если $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{\beta_a}$, то $\angle A = 120°$;

в) если $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m_a}$, то $\angle A \geqslant 120°$.

52. Основание BC треугольника ABC равно 1, а угол A равен α. Какие значения может принимать длина медианы $AD = m_a$ этого треугольника?

53. Медианы AD и BE треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Каким может быть угол C этого треугольника?

54. Какую величину может иметь отношение высоты h прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, к радиусу r вписанной в треугольник окружности?

55. Какими могут быть углы B_1AC_1 и C_1AD_1 между диагональю AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и диагоналями AB_1 и AD_1 его граней ABB_1A_1 и ADD_1A_1 (рис. 13)?

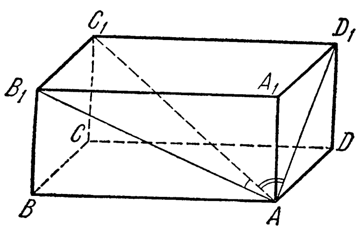


Рис. 13.

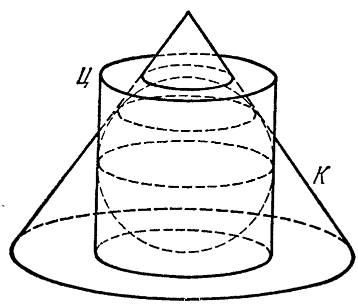


Рис. 14.

56. Вокруг шара описаны цилиндр $Ц$ и конус K (рис. 14); объемы цилиндра и конуса обозначим через V_1 и V_2. Какое наименьшее значение v может иметь V_2, если $V_1 = 1$? Чему равен угол при вершине осевого сечения описанного конуса K объема v?

57. В тетраэдре (треугольной пирамиде) $ABCD$ все ребра, кроме ребра AB, не превосходят 1. Какое значение может иметь объем тетраэдра, если

а)* также и $AB \leqslant 1$;

б) $AB \geqslant 1$.

58. Выпуклая ломаная длины d вращается вокруг прямой, соединяющей ее концы. Какой может быть площадь полученной таким путем поверхности вращения?

59. Площадь квадрата K равна 1, а площадь вписанного в него прямоугольника Π равняется s. Какую величину может иметь s, если

а) Π не является квадратом;

б) Π — квадрат?

60. Диаметр вписанной в треугольник ABC окружности равен 1. Чему может равняться сторона d вписанного в треугольник квадрата, две вершины которого лежат на основании AB треугольника (не на его продолжениях!), а две другие — на сторонах AC и BC?

61. n отрезков единичной длины пересекаются в одной точке; их концы последовательно соединены. Докажите, что хотя бы одна сторона полученного таким образом $2n$-угольника не меньше стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность диаметра 1.

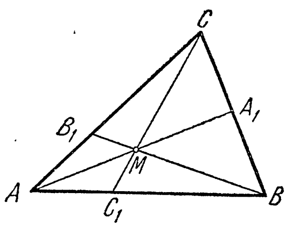


Рис. 15.

62. Треугольник ABC прямой BD разбит на два треугольника ABD и CBD. Докажите, что сумма радиусов r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD, больше радиуса r окружности, вписанной в треугольник ABC.

63. Пусть M — произвольная точка внутри треугольника ABC; точки пересечения AM, BM и CM с противоположными сторонами BC, AC и AB треугольника обозначим через A_1, B_1 и C_1 (рис. 15). Докажите, что сумма

$$MA_1 + MB_1 + MC_1$$

не превосходит большей стороны треугольника ABC.

64. Дан треугольник ABC и внутри него такая точка D, что

$$AC - AD \geqslant 1 \quad \text{и} \quad BC - BD \geqslant 1.$$

Докажите, что для любой точки E стороны AB имеет место неравенство

$$EC - ED \geqslant 1.$$

3. ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Центральными в этом цикле задач надо, видимо, считать классические задачи 70 б) и 75, которым посвящена довольно большая литература (см., например, §§ 4, 5 и 9 гл. VII книги Р. Куранта и Г. Роббинса [2], § 8 гл. I книги Г. С. М. Коксетера [12], § 2 статьи В. Г. Болтянского и И. М. Яглома [1]), или даже все связанные с этим кругом проблем задачи 69—80. Дальнейшее развитие некоторых тем, начатых собранными здесь задачами, можно найти в следующем цикле задач.

65. Дан угол и внутри него точка. Проведите через эту точку прямую так, чтобы были наименьшими

а) площадь треугольника, отсекаемого от угла проведенной прямой;

б) периметр этого треугольника.

66*. Внутри угла BAC выбрана точка M и через эту точку проведена прямая l так, что отрезок UV, высекаемый на этой прямой сторонами угла, имеет наименьшую возможную длину.

Докажите, что основание N перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую UV, симметрично точке M относительно середины S отрезка UV (рис. 16). [Это условие однозначно определяет прямую UV; однако задача построения этой прямой по углу BAC и точке M циркулем и линейкой, вообще говоря, решена быть не может.]

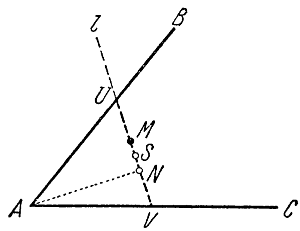


Рис. 16.

67. Периметр треугольника ABC равен $2p$. Какое наибольшее значение может иметь длина заключенного внутри треугольника и параллельного BC отрезка касательной к вписанной в ABC окружности? Для какого треугольника (каких треугольников) достигается это значение?

68. а) Даны отрезок MN и прямая l. Найдите на прямой l точку X, из которой отрезок MN виден под наибольшим углом.

б) Даны отрезок MN и окружность S. Найдите на окружности S точки X и Y, из которых отрезок MN виден под наибольшим и под наименьшим углами.

69. а) Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой l точку X, сумма расстояний которой до точек A и B имеет наименьшее возможное значение.

б) Дана прямая l и две точки A и B по разные стороны от нее. Найдите на прямой l точку X, разность расстояний которой до точек A и B имеет наибольшее (по абсолютной величине) значение.

70. а) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, одна сторона которого совпадает с заданной точкой P стороны AB и периметр которого имеет наименьшее возможное значение.

б)* Впишите в данный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра.

71. Найдите треугольник наименьшего возможного периметра, зная

а) две вершины A и B и прямую l, которой принадлежит третья вершина;

б) вершину A и прямые l и m, которым принадлежат две другие вершины;

в)* три прямые l, m и n, которым принадлежат три вершины треугольника.

Задача 71 в), разумеется, весьма близка к задаче 70 б), но не совпадает с ней: в то время как в первой задаче ищется треугольник, вершины которого принадлежат трем о т р е з к а м AB, BC и AC, во второй задаче вершины искомого треугольника могут принадлежать (бесконечным) п р я м ы м l, m и n.

72*. Впишите в данный четырехугольник $ABCD$ четырехугольник наименьшего возможного периметра. Докажите, что эта задача, вообще говоря, не имеет решения в собственном смысле слова (т. е. такого, чтобы этим решением служил настоящий четырехугольник, все четыре вершины которого различны). Однако если четырехугольник $ABCD$ может быть вписан в окружность, то решением задачи служит истинный четырехугольник, причем даже не один, а бесконечно много таких четырехугольников (в этом случае существует бесконечное семейство вписанных в $ABCD$ четырехугольников одинакового периметра, таких, что все остальные вписанные в $ABCD$ четырехугольники имеют уже больший периметр).

Аналогично задачам 70 б) и 72 можно поставить и следующую более общую задачу: *в данный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписать n-угольник $X_1X_2\ldots X_n$ наименьшего возможного периметра* (рис. 17). При этом оказывается, что если число n нечетно, то эта задача, аналогично задаче 70 б), во многих случаях имеет единственное («хорошее») решение. Однако если число n четно, то дело всегда обстоит так же «плохо», как и в случае задачи 72: как правило, здесь искомого (настоящего) n-угольника вообще не существует; если же он есть, то число решений задачи обязательно будет бесконечно большим: в n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ можно будет вписать бесконечно много различных n-угольников $X_1X_2\ldots X_n$ одного и того же периметра, таких, что все остальные n-угольники, вписанные в $A_1A_2\ldots A_n$, будут иметь больший периметр чем эти.

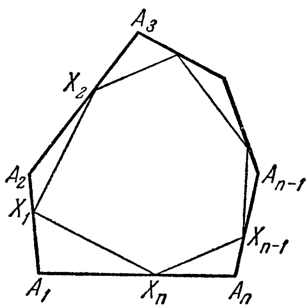


Рис. 17.

73. Впишите в данный треугольник ABC треугольник, стороны которого перпендикулярны радиусам OA, OB, OC описанной окружности. Выведите из этого построения еще одно решение задачи 70 б) для остроугольного треугольника.

74*. Впишите в данный треугольник ABC треугольник XYZ так, чтобы величина

$$m\cdot XY+n\cdot YZ+p\cdot ZX,$$

где m, n, p — заданные положительные числа, была наименьшей (т. е. чтобы был наименьшим из возможных «вес» вписанного в ABC «проволочного треугольника» XYZ, где «удельный вес»[1]) проволоки, из которой изготовляются стороны XY, YZ и ZX, равен соответственно m, n и p).

[1]) То есть вес единицы длины.

75*. Найдите

а) внутри треугольника ABC;

б) в плоскости этого треугольника

точку X, сумма расстояний которой от вершин треугольника является наименьшей.

76. Найдите

а) внутри четырехугольника $ABCD$;

б) в плоскости этого четырехугольника

точку X, сумма расстояний которой от вершин четырехугольника является наименьшей.

77. а) Опишите вокруг данного треугольника ABC равносторонний треугольник так, чтобы перпендикуляры, восставленные в точках A, B и C к сторонам этого равностороннего треугольника, пересекались в одной точке. Выведите из этого построения еще одно решение задачи 75.

б) Впишите в данный треугольник ABC равносторонний треугольник так, чтобы перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на стороны этого равностороннего треугольника, пересекались в одной точке. Выведите из этого построения еще одно решение задачи 75.

78. а) Пусть ABC — равносторонний треугольник, M — точка в его плоскости. Докажите, что всегда

$$MA \leqslant MB + MC.$$

В каком случае $MA = MB + MC$?

б) Выведите из результата задачи а) еще одно решение задачи 75.

79*. Найдите в плоскости треугольника ABC такую точку X, чтобы величина

$$m \cdot XA + n \cdot XB + p \cdot XC,$$

где m, n, p — данные положительные числа, имела наименьшее значение.

Задаче 79 можно придать следующую формулировку. Пусть A, B, C — три пункта, в которые должна поставляться продукция проектируемого завода; при этом доли продукции, доставляемые в пункты A, B и C, пусть будут m, n и p. Где надо построить завод для того, чтобы свести к минимуму предстоящие транспортные расходы (здесь мы пренебрегаем расходами на строительство дорог AX, BX и CX, соединяющих пункты A, B и C с заводом X, и считаем транспортные расходы прямо пропорциональными произведению количества доставленного груза на длину пути)?

80*. Пусть треугольник ABC равнобедренный: $AC = BC \geqslant AB$. Для какой точки M плоскости величина $MA + MB - MC$ будет наименьшей?

Задача 80 (некоторые моменты в решении которой явятся, надо думать, неожиданными для читателя) хорошо иллюстрирует те сложности, с которыми можно столкнуться при отказе от требования положительности чисел m, n, p в условии задачи 79: ведь положив в условии задачи 79 $m=n=1$ и $p=-1$, мы придем к задаче, несколько более общей, чем задача 80.

81. Найдите внутри треугольника ABC точку, сумма квадратов расстояний от которой

а) до вершин треугольника;

б) до сторон треугольника

была бы наименьшей.

82. Найдите

а) в плоскости четырехугольника $ABCD$;

б) внутри четырехугольника $ABCD$;

в) в трехмерном пространстве

точку, сумма квадратов расстояний которой от данных точек A, B, C и D (вершин четырехугольника в задачах а) и б) и вершин заданной треугольной пирамиды — тетраэдра $ABCD$ — в задаче в)) была бы наименьшей.

83. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, сумма квадратов сторон которого максимальна.

84. Из всех параллелограммов данной площади найти тот, у которого бо́льшая диагональ минимальна.

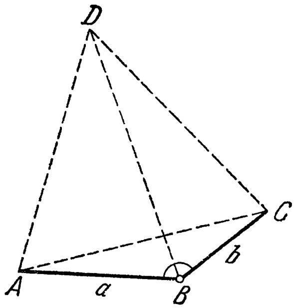


Рис. 18.

85. Два отрезка AB и BC длин a и b соединены шарниром в точке B; на отрезке AC построен равносторонний треугольник ACD (точки B и D расположены по разные стороны от прямой AC; рис. 18). При каком угле ABC длина отрезка BD будет

а) наибольшей;

б) наименьшей?

Чему равна наибольшая и наименьшая возможные длины отрезка BD?

86. По прямолинейным дорогам OA и OB из точек A и B в одно и то же время выходят два пешехода, движущихся с одинаковой скоростью v; расстояния $OA = a$ и $OB = b$, а также угол $AOB = \alpha$ нам известны. Через какое время t_0 после начала движения расстояние d между пешеходами станет наименьшим? Чему равно наименьшее расстояние d_0 между пешеходами?

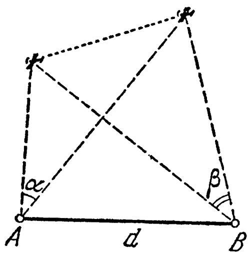


Рис. 19.

87. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми равно d *км*, одновременно в течение 1 *сек* наблюдают за самолетом, летящим по прямой с постоянной скоростью. Из пункта A сообщили, что за это время самолет сместился на угол α, а из пункта B — что он сместился на угол β (рис. 19). Какую наименьшую скорость может иметь самолет?

88. Даны две точки A и B и прямая PQ. Доказать, что сумма $b \cdot AM + a \cdot BM$, где a и b — данные положительные числа, имеет наименьшее значение для такой точки M прямой PQ, что

$$\frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{a}{b}.$$

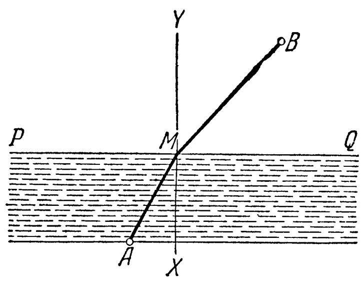


Рис. 20.

Задачу 88 можно пояснить следующим образом. Пусть требуется *найти наиболее выгодный путь из некоторого пункта A, расположенного на берегу реки, до пункта B, находящегося где-то по другую сторону реки* (рис. 20). Тогда, если скорость движения лодки равна a, а скорость движения человека на суше равна b, то задача сводится к нахождению такой точки M на противоположном A берегу реки, чтобы *сумма*

$$\frac{AM}{a} + \frac{BM}{b} = \frac{1}{ab}(b \cdot AM + a \cdot BM)$$

была наименьшей (здесь $\frac{AM}{a}$ есть время, за которое лодка проходит путь AM; $\frac{BM}{b}$ — время, нужное для того, чтобы дойти по суше от точки M до пункта B). Теорема задачи 88 указывает, как найти такую точку.

Результат этой задачи имеет важное значение для физики. Предположим, что ломаная AMB представляет собой путь светового луча из точки A в точку B, причем мы будем считать, что точки A и B находятся по разные стороны от прямой PQ и что PQ есть линия раздела двух различных оптических сред (например, воздуха и воды). Пусть XY есть перпендикуляр к прямой PQ в точке M. Угол AMX называется углом падения луча AM, а угол BMY — углом преломления луча MB. Если считать, что a — это скорость света в первой среде, а b — скорость света во второй среде, то выражение $\frac{AM}{a}+\frac{BM}{b}$ будет представлять собой время, необходимое лучу света для того, чтобы пройти из точки A в точку B. Теорема задачи 88 утверждает, что *это время будет кратчайшим в том случае, если*

$$\frac{\cos\angle AMP}{\cos\angle BMQ}=\frac{\sin\angle AMX}{\sin\angle BMY}=\frac{1/b}{1/a}=\frac{a}{b},$$

т. е. если *отношение синусов угла падения и угла преломления равно некоторой постоянной для данных сред величине* (равной отношению скоростей света в этих средах). Но хорошо известно из опыта, что именно таков закон преломления света. Сопоставив этот результат с тем, что закон отражения света от гладкой поверхности (например, от зеркала) — *угол падения равен углу отражения* — тоже соответствует тому, что луч света идет по кратчайшему пути (см. решение задачи 69 а) настоящей книги), мы сможем заключить, что *свет всегда избирает кратчайший (по времени) путь между двумя точками*. Этот принцип, называемый принципом Ферма, с некоторыми уточнениями оправдывается во всех случаях; он имеет также некоторые аналогии в механике (служащие основаниями весьма глубоких и важных для современной физики оптико-механических аналогий) и является одним из основных общих принципов физики.

4. ЗАДАЧИ О ТРЕУГОЛЬНИКЕ И ТЕТРАЭДРЕ

В этом цикле задач рассматриваются некоторые неравенства, связывающие элементы треугольника или тетраэдра (произвольной треугольной пирамиды — простейшего из всех многогранников, играющего в стереометрии ту же роль, какую в планиметрии играет треугольник [1]); некоторые из этих неравенств могут быть перенесены и на случай произвольного (выпуклого) многоугольника или (реже) много-

[1]) Относительно свойств тетраэдра, иногда в точности аналогичных свойствам плоского треугольника, а иногда весьма своеобразно преломляющих известные из планиметрии факты, см., например, задачи 28—40 книги Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, Геометрия (стереометрия), Гостехиздат, 1954.

гранника. При этом мы систематически будем использовать следующие (достаточно распространенные) обозначения: стороны треугольника ABC обозначаются буквами $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, а его углы — буквами A, B, C; высоты, медианы и биссектрисы треугольника ABC обозначаются так: h_a, h_b и h_c; β_a, β_b и β_c; m_a, m_b и m_c; радиусы описанной окружности, вписанной окружности и вневписанных окружностей обозначаются через R, r и r_a, r_b, r_c (рис. 21); площадь и периметр треугольника — через S и $2p$; при этом, конечно, A — это

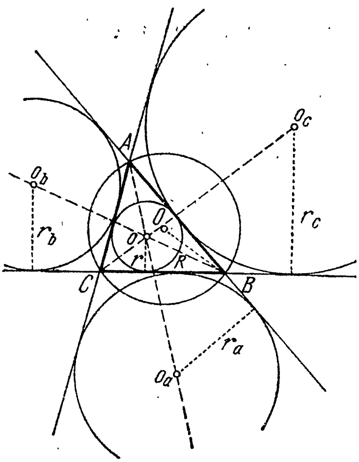


Рис. 21.

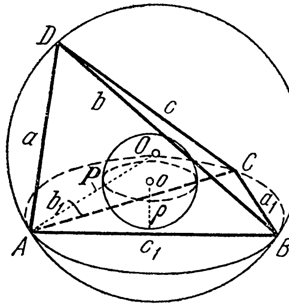


Рис. 22.

угол, противолежащий стороне длины a; h_b — высота, опущенная на сторону длины b; r_c — радиус окружности, касающейся стороны $AB=c$ треугольника и продолжений его сторон CA и CB. Длины ребер тетраэдра $ABCD$ мы условимся обозначать так:

$$AD=a,\quad BD=b,\quad CD=c,\quad AB=c_1,\quad BC=a_1,\quad CA=b_1$$

(рис. 22); радиусы его описанной сферы и вписанной сферы — через P и ρ; объем тетраэдра, его (полную) поверхность и периметр (сумму длин всех ребер) — через V, Δ и 2Π. (Дальнейшие обозначения будут введены ниже.)

89. Докажите, что сумма медиан произвольного треугольника ABC всегда меньше периметра треугольника и больше $3/4$ его периметра:

$$2p > m_a+m_b+m_c > \frac{3}{2}p, \quad \text{или} \quad 2 > \frac{m_a+m_b+m_c}{p} > 1^1/_2.$$

Может ли быть улучшено (двойное) неравенство

$$2 > \frac{m_a+m_b+m_c}{p} > 1^1/_2$$

(т. е. существует ли, например, такое число $M<2$, что для всех треугольников $\frac{m_a+m_b+m_c}{p} \leqslant M$)?

90. Докажите, что для любого треугольника

$$Aa+Bb+Cc \geqslant \frac{1}{2}(Ab+Ba+Ac+Ca+Bc+Cb).$$

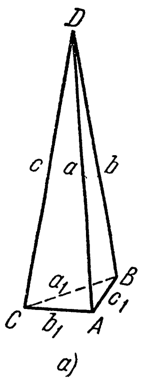
В каком случае это неравенство обращается в равенство?

91. Докажите, что для любого треугольника ABC

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$$

(углы треугольника измеряются в радианах!). Может ли быть улучшено это двойное неравенство?

Заметим, что для тетраэдра $ABCD$ с двугранными углами α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 при ребрах a, b, c, a_1, b_1, c_1 (углы измеряются в радианной мере!) имеет место (двойное) неравенство, аналогичное неравенству задачи 91:



$$\frac{\pi}{3} < \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1}{a+b+c+a_1+b_1+c_1} < \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

(нетрудно показать, что отношение

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1}{a+b+c+a_1+b_1+c_1}$$

неограниченно приближается к величине $\pi/_3$,

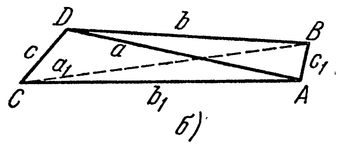


Рис. 23.

когда вершины B и C тетраэдра $ABCD$ стремятся к точке A и

$$DB=b\to a,\quad DC=c\to a,\ AB=c_1\to 0,$$
$$BC=a_1\to 0,\ CA=b_1\to 0,\ \text{а}\ \alpha+\beta+\gamma\to\pi;$$

это отношение неограниченно приближается к величине $\pi/_2$, когда вершина B тетраэдра стремится к точке A, а вершина D — к точке C и

$$DB=b\to a,\ DC=c\to 0,\ AB=c_1\to 0,$$

$$AC=b_1\to a,\ BC=a_1\to a,\ \text{а}\ \alpha+\beta+\alpha_1+\beta_1\to 2\pi$$

— см. рис. 23, *а* и *б*). Однако доказательство неравенств (*) (см. решение задачи 17 отдела IX книги Г. Полиа и Г. Сегё [46]) очень сложно.

92. а) Докажите, что если у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ основания BC и B_1C_1, так же как и углы A и A_1, равны, то тот из них имеет больший периметр, у которого меньше (по абсолютной величине) разность углов при основании.

б) Какой периметр может иметь треугольник ABC с известными стороной $BC=a$ и углом $\angle A=\alpha$?

93. Докажите, что если треугольник ABC остроугольный, то

$$p > 2R.$$

94*. а) Докажите, что радиус описанной окружности треугольника превосходит радиус его вписанной окружности не менее чем вдвое:

$$R \geqslant 2r. \tag{I}$$

В каком случае имеет место равенство $R=2r$?

б) Покажите, что для каждых двух отрезков R и r, где $R \geqslant 2r$, существует треугольник ABC, радиус описанной окружности которого равен R, а радиус вписанной окружности r.

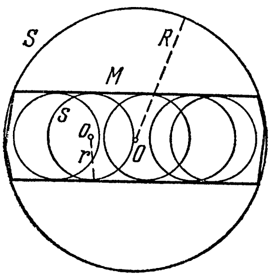


Рис. 24.

в) Докажите, что радиус P описанной сферы тетраэдра $ABCD$ превосходит радиус ρ его вписанной сферы не менее чем втрое:

$$\mathrm{P} \geqslant 3\rho.$$

В каком случае имеет место равенство $\mathrm{P}=3\rho$?

Описанной окружностью произвольного (выпуклого) многоугольника M называется наименьшая из всех окружностей, заключающих M внутри себя; вписанной окружностью выпуклого многоугольника M называется наибольшая из всех окружностей, содержащихся внутри M; при этом описанная окружность многоугольника обязательно единственна, а вписанных окружностей он может иметь и много (рис. 24) [1]). Можно доказать, что *радиус R описанной окружности S и радиус r вписанной окружности s произвольного выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ связаны неравенством*

$$R \geqslant \sec\frac{180^\circ}{n}\cdot r \tag{I'}$$

[1]) Ср., например, И. М. Яглом и В. Г. Болтянский [30], стр. 75—76.

(см., например, Фейеш Тот [21], стр. 27); так как $\sec\frac{180^\circ}{3}=$ $=\sec 60^\circ=2$, то при $n=3$ этот результат переходит в неравенство задачи 94 а).

Можно также доказать, что если число вершин произвольного многогранника M равно n_1, а число его граней n_2, причем [1]) $\min(n_1, n_2)=n$, то

$$P\geqslant\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ\cdot n}{6n-12}\cdot\rho, \qquad (!)$$

где P есть радиус описанной сферы Σ многогранника (наименьшая сфера, содержащая M внутри себя), а ρ — радиус его вписанной сферы σ (наибольшая сфера, содержащаяся внутри M). Так как для тетраэдра $n_1=n_2=n=4$, а $\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ\cdot 4}{6\cdot 4-12}=\mathrm{tg}\,60^\circ=\sqrt{3}$, то при $n=4$ (а $n=4$ только для тетраэдра) неравенство (!) (доказательство которого, впрочем, довольно сложно — см. § 6 гл. V книги [21]) обращается в неравенство задачи 94 в).

95. Докажите, что для каждого треугольника ABC

а) $9r\leqslant h_a+h_b+h_c\leqslant\beta_a+\beta_b+\beta_c\leqslant m_a+m_b+m_c\leqslant\frac{9}{2}R$;

б) $\beta_a+\beta_b+\beta_c\leqslant\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a}\leqslant p\sqrt{3}\leqslant$
$\leqslant r_a+r_b+r_c=r+4R$;

в) $27r^2\leqslant h_a^2+h_b^2+h_c^2\leqslant\beta_a^2+\beta_b^2+\beta_c^2\leqslant p^2\leqslant m_a^2+m_b^2+m_c^2=$
$=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\leqslant\frac{27}{4}R^2$;

г) $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geqslant\frac{1}{\beta_a}+\frac{1}{\beta_b}+\frac{1}{\beta_c}\geqslant$
$\geqslant\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geqslant\frac{2}{R}$.

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

Ясно, что «сложные» неравенства задач 95 а), в) и г) содержат, в частности, результат задачи 94 а): если $9r\leqslant\frac{9}{2}R$, или $27r^2\leqslant\frac{27}{4}R^2$, или $\frac{1}{r}\geqslant\frac{2}{R}$, то, разумеется, $r\leqslant\frac{1}{2}R$. Неравенства задач 95 а) и б) можно также записать в виде следующей «цепочки» неравенств:

$$9r\leqslant h_a+h_b+h_c\leqslant\beta_a+\beta_b+\beta_c\leqslant\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a}\leqslant p\sqrt{3}\leqslant$$
$$\leqslant r_a+r_b+r_c=r+4R,$$

---

[1]) Символом $\min(x, y)$ обозначается наименьшее из чисел x и y (и число, равное им обоим, если $x=y$).

включающей то же соотношение между r и R если $9r \leqslant r+4R$, то, конечно, $r \leqslant \frac{R}{2}$. [Напротив, учитывая неравенство $r \leqslant \frac{R}{2}$, последнюю цепочку неравенств можно записать еще и так:

$$9r \leqslant h_a+h_b+h_c \leqslant \beta_a+\beta_b+\beta_c \leqslant \sqrt{r_a r_b}+\sqrt{r_b r_c}+\sqrt{r_a r_c} \leqslant$$
$$\leqslant p\sqrt{3} \leqslant r_a+r_b+r_c = r+4R \leqslant \frac{9}{2} R.]$$

96*. Докажите, что для каждого треугольника ABC

а) $r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geqslant 27r^2$;

б) $4R < r_a+r_b+r_c \leqslant 4\frac{1}{2}R$.

Могут ли эти неравенства быть улучшены?

Задача 96 б) указывает, в каких пределах может меняться сумма $r_a+r_b+r_c$ радиусов вневписанных окружностей треугольника, если радиус его описанной окружности нам известен. Более глубокий характер имеют неравенства

$$\frac{r_a+r_b+r_c}{3} \leqslant \frac{3}{2} R \leqslant \sqrt{\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{3}},$$

вытекающие из результата задачи 96 б) и из неравенства

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geqslant \frac{27}{4} R^2$$

(где равенство имеет место лишь для равностороннего треугольника), доказательство которого, впрочем, довольно сложно (см. Г. Хайош [47]): оно показывает, что *величина* $\frac{3}{2}R$ *заключается между средним арифметическим и средним квадратичным* (между степенными средними порядков 1 и 2) *радиусов вневписанных окружностей треугольника* (ср. ниже, стр. 52 — 53).

97. Докажите, что для каждого треугольника ABC

$$r \leqslant \frac{\sqrt{\sqrt{3}\,S}}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9} p \leqslant \frac{1}{2} R. \qquad (*)$$

В каком случае неравенства этой задачи обращаются в равенства?

Результаты задачи 97 заслуживают того, чтобы остановиться на них подробнее. Отбросив средние члены неравенства (*), мы получаем зависимость

$$r \leqslant \frac{1}{2} R, \qquad \text{или} \qquad R \geqslant 2r \qquad (\text{I})$$

между радиусами описанной и вписанной окружностей треугольника, о которой уже говорилось выше (см. задачу 94 а)). Напротив, «среднее» неравенство задачи 97

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}\,S}}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}p, \quad \text{или} \quad S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{36}(2p)^2 \tag{II}$$

есть не что иное, как знаменитое «изопериметрическое неравенство» для треугольника, отвечающее на вопрос о том, *какую наибольшую величину может иметь площадь фигуры* (в нашем случае — треугольника) *заданного периметра* («какую наибольшую площадь можно отгородить треугольным забором, если строительный материал позволяет соорудить забор длиной $2p$?») или, наоборот, *какой наименьший периметр может иметь фигура* (треугольник) *заданной площади* (ср. специально посвященную этой задаче книгу Д. А. Крыжановского [28]). Из неравенства (II) следует, что *площадь треугольника единичного периметра не может быть больше* $\sqrt{3}/36$ $\left(\approx 0{,}048;\ \text{если } 2p=1, \text{ то неравенство (II) дает } S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{36}\right)$, и *периметр треугольника единичной площади не может быть меньше* $2\sqrt[4]{27}$ ($\approx 4{,}56$; если $S=1$, то неравенство (II) дает $2p \geqslant 2\sqrt[4]{27}$). Наконец, неравенства

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}\,S}}{3} \leqslant \frac{1}{2}R, \quad \text{или} \quad S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2; \tag{III}$$

и

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}\,S}}{3} \geqslant r, \quad \text{или} \quad S \geqslant 3\sqrt{3}\,r^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9}p \leqslant \frac{1}{2}R, \quad \text{или} \quad 2p \leqslant 3\sqrt{3}\,R; \quad \frac{\sqrt{3}}{9}p \geqslant r, \quad \text{или } 2p \geqslant 6\sqrt{3}\,r, \tag{IV}$$

устанавливают зависимости между площадью и периметром треугольника, с одной стороны, и радиусами его описанной или вписанной окружностей — с другой; из них следует, что *если треугольник ABC вписан в окружность радиуса* 1, *то*

$$S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}\ (\approx 1{,}30) \quad \text{и} \quad 2p \leqslant 3\sqrt{3}\ (\approx 5{,}20),$$

а если он *описан вокруг окружности радиуса* 1, *то*

$$S \geqslant 3\sqrt{3}\ (\approx 5{,}20) \quad \text{и} \quad 2p \geqslant 6\sqrt{3}\ (\approx 10{,}39).$$

Все эти результаты могут быть перенесены на произвольные (выпуклые!) многоугольники (см. §§ 3 и 4 гл. I книги Л. Фейеша Тота [21] или пп. 2.6 и 2.7 статьи В. Г. Болтянского и И. М. Яглома [29]). Относительно перенесения на случай произвольного выпуклого n-угольника неравенства (I) мы уже говорили выше; далее можно установить, что *радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности, периметр $2p$ и площадь S любого выпуклого n-угольника связаны неравенствами*

$$\frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360^\circ}{n} \geqslant S \geqslant nr^2 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}; \tag{III'}$$

$$2nR\sin\frac{180^\circ}{n} \geqslant 2p \geqslant 2nr \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \tag{IV'}$$

и, наконец,

$$(2p)^2 \geqslant 4n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}\cdot S, \quad \text{или} \quad S \leqslant \frac{1}{4n}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}(2p)^2 \qquad \text{(II')}$$

«изопериметрическое неравенство» для n-угольника!). [Равенства в (I′), (II′) (III′) и (IV′) достигаются для правильного n-угольника.]

98. Докажите, что для произвольного тетраэдра

$$V \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}\mathrm{P}^3.$$

В каком случае имеет место равенство $V = \frac{8\sqrt{3}}{27}\mathrm{P}^3$?

99.** Докажите, что для произвольного тетраэдра

а) $\Delta \geqslant 6\sqrt[3]{\sqrt{3}\,V^2}$;

б) $\Pi \geqslant 3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3V}$.

В каком случае неравенства а) и б) обращаются в равенства?

Задачи 98 и 99 (как и задача 94 в); см. также ниже задачи 101 а) и 106) иллюстрируют характер зависимостей между основными характеристиками V, Δ, Π, P и ρ тетраэдра $ABCD$; из них следует, что *для каждого тетраэдра, вписанного в сферу радиуса* 1,

$$V \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}$$

и *для каждого тетраэдра единичного объема*

$$\Delta \geqslant 6\sqrt[6]{3} \quad \text{и} \quad \Pi \geqslant 3\sqrt[6]{72}$$

$\left(\text{а } \textit{для тетраэдра единичной площади поверхности } V \leqslant \frac{\sqrt[4]{12}}{36}\right)$.

Полный ряд зависимостей между перечисленными характеристиками тетраэдра имеет вид

$$\rho \leqslant \frac{\sqrt[3]{9\sqrt{3}\,V}}{6} \leqslant \frac{\sqrt{2\sqrt{3}\,\Delta}}{12} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{36}\Pi \leqslant \frac{1}{3}\mathrm{P}; \qquad (**)$$

здесь все неравенства являются строгими, если тетраэдр $ABCD$ неправильный; для правильного же тетраэдра все они обращаются в равенства, поскольку, как легко подсчитать, если ребро правильного тетраэдра равно a, то

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}, \quad \Delta = a^2\sqrt{3}, \quad \Pi = 3a, \quad \mathrm{P} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Самым важным из этих неравенств является неравенство задачи 99 а), которое можно назвать «изопериметрическим неравенством для тетраэдра» (ср. со сказанным на стр. 45 об «изопериметрическом неравенстве для треугольника»). Все неравенства (**) могут быть установлены косвенными рассуждениями; однако прямое доказательство некоторых из них довольно утомительно (ср. со сказанным на стр. 7—9 предисловия к книге). Заметим еще, что если неравенства (*) (стр. 44), связывающие характеристики S, p, R и r треугольника, довольно легко переносятся на произвольный (выпуклый) многоугольник, то вопрос об обобщении неравенств (**) (о перенесении их на произвольный выпуклый многогранник) является гораздо более сложным (см. по этому поводу гл. V книги [21]).

Доказательство других зависимостей того же характера составляет содержание задачи 103.

100. а) Докажите, что для каждого треугольника ABC

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S,$$

где равенство имеет место лишь в случае равностороннего треугольника ABC.

б)* Докажите, что, более того,

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S,$$

где равенство также может иметь место лишь в том случае, когда $a=b=c$.

101*. а) Докажите, что для каждого тетраэдра $ABCD$

$$\Pi^2 \geqslant 3\sqrt{3}\,\Delta,$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда тетраэдр $ABCD$ правильный.

б) Докажите, что, более того,

$$\Pi^2 \geqslant 3\sqrt{3}\,\Delta+{}^1/_2\,[(a+a_1-b-b_1)^2+(a+a_1-c-c_1)^2+$$
$$+(b+b_1-c-c_1)^2]+{}^3/_4\,[(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2],$$

где, разумеется, равенство также имеет место лишь в том случае, когда $a=b=c=a_1=b_1=c_1$.

102. Докажите, что для каждого треугольника ABC

а) $${}^3/_2 r \leqslant \rho_a+\rho_b+\rho_c \leqslant {}^3/_4 R,$$

где ρ_a, ρ_b, ρ_c — радиусы трех окружностей, вписанных в сегменты BC, CA, AB описанного вокруг треугольника ABC круга K, отсекаемые от K сторонами треугольника (окружностей, касающихся описанной окружности и одной из сторон треугольника; рис. 25, *а*);

б)* $$4r \leqslant \mathrm{P}_a+\mathrm{P}_b+\mathrm{P}_c \leqslant 2R,$$

где P_a, P_b, P_c — радиусы трех окружностей, касающихся двух сторон треугольника (не их продолжений!) и описанной вокруг треугольника окружности (рис. 25, *б*).

В каком случае неравенства задач а) и б) обращаются в равенства?

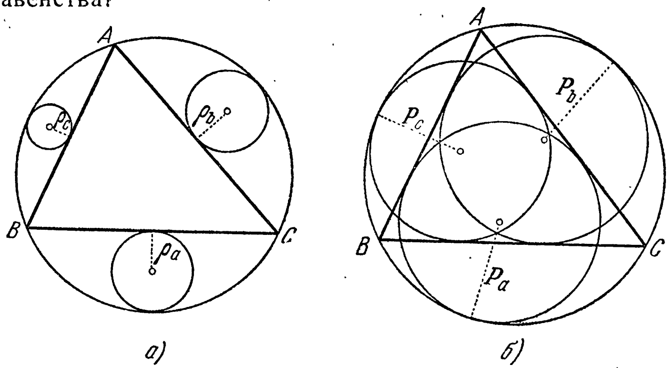


Рис. 25.

Ясно, что как из результата задачи 102 а), так и из результата задачи 102 б) снова следует неравенство задачи 94 а): $r \leqslant \frac{1}{2} R$.

103. Сумму

$$a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2$$

квадратов всех ребер тетраэдра $ABCD$ обозначим через δ. Докажите, что для каждого тетраэдра

а) $\Pi \leqslant \frac{\sqrt{6\delta}}{2}$;

б) $\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{6} \delta$.

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

В последующих задачах мы, кроме прежних, используем обозначения: расстояния MA, MB, MC произвольной точки M (которую мы часто будем считать расположенной внутри треугольника ABC) от вершин треугольника обозначим через R_a, R_b, R_c, а расстояния MU, MV, MW той же точки от сторон BC, CA, AB треугольника ABC — через d_a, d_b, d_c (рис. 26); в одной задаче (задача 112) мы также используем обозначения $MA_1=d_a'$, $MB_1=d_b'$, $MC_1=d_c'$, где A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения прямых AM, BM и CM со сторонами BC, CA и AB треугольника. Аналогично этому расстояния MA, MB и MC, MD произвольной точки M пространства (или про-

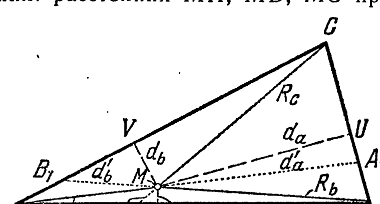


Рис. 26.

извольной точки, находящейся в н у т р и тетраэдра $ABCD$) от вершин тетраэдра и расстояния MU, MV, MW, MT той же точки от граней BCD, ACD, ABD, ABC тетраэдра $ABCD$ обозначим соответственно через R_A, R_B, R_C, R_D и d_A, d_B, d_C, d_D.

104*. а) Докажите, что для каждого треугольника ABC и любой точки M в его плоскости

$$R_a+R_b+R_c \geqslant 6r.$$

В каком случае $R_a+R_b+R_c=6r$?

б) Докажите, что для каждого треугольника ABC и любой точки M в его плоскости

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2 \geqslant 12r^2.$$

В каком случае $R_a^2+R_b^2+R_c^2=12r^2$?

Ясно, что если точка M совпадает с центром O описанной около треугольника окружности, то неравенства настоящей задачи перейдут в неравенства $3R \geqslant 6r$, или $R \geqslant 2r$, соответственно $3R^2 \geqslant 12r^2$, или $R \geqslant 2r$ задачи 94 а).

Результаты задач 104 а) и б) можно еще сформулировать так: с р е д н я я в е л и ч и н а $\dfrac{R_a+R_b+R_c}{3}$ расстояния точки M плоскости от вершин треугольника ABC всегда (т. е. для любой точки M и любого треугольника ABC) не меньше диаметра $2r$ вписанной в треугольник окружности: с р е д н я я в е л и ч и н а $\dfrac{R_a^2+R_b^2+R_c^2}{3}$ квадрата расстояния точки M от вершин треугольника ABC всегда не меньше квадрата $(2r)^2=4r^2$ диаметра вписанной окружности. [Заметим еще, что в силу сказанного в подстрочном примечании [2]) на стр. 52 результат задачи б) является следствием результата задачи а).]

Результат задачи 104 а) допускает естественное перенесение на пространство: *для каждого тетраэдра $ABCD$ и каждой точки M внутри него*

$$R_A+R_B+R_C+R_D \geqslant 12\rho$$

(где равенство имеет место, лишь когда тетраэдр $ABCD$ правильный и точка M совпадает с его центром); однако доказательство последнего неравенства (см., например, И. Б е р к е с [48]) довольно сложно.

105*. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$ и любой точки M

а) $R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2 \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\Delta$;

б) $R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2 \geqslant \dfrac{1}{6}\Pi^2$.

В каком случае каждое из этих неравенств обращается в равенство?

106. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$

а) $\mathrm{P} \geqslant \frac{\sqrt{2\sqrt{3}\Delta}}{4}$;

б) $\mathrm{P} \geqslant \frac{\sqrt{6}\,\Pi}{12}$.

В каких случаях эти неравенства обращаются в равенства?

107. Докажите, что для каждого треугольника ABC и любой точки M внутри него

а) $\min(h_a, h_b, h_c) \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant \max(h_a, h_b, h_c)$, где через $\min(h_a, h_b, h_c)$ обозначена наименьшая, а через $\max(h_a, h_b, h_c)$ — наибольшая из высот треугольника;

б) $d_a d_b d_c \leqslant \frac{8S^3}{27abc}$.

В каких случаях неравенства задач а) и б) обращаются в равенства?

Так как для равностороннего треугольника, очевидно, $\min(h_a, h_b, h_c) = \max(h_a, h_b, h_c)$ $(=h)$, то из результата задачи 107 а) вытекает, в частности, что для равностороннего треугольника сумма $d_a + d_b + d_c = h = \mathrm{const}$, т. е. эта сумма совсем не зависит от выбора точки M внутри треугольника.

108. Перенесите результат

а) задачи 107 а);

б) задачи 107 б)

с треугольника на тетраэдр.

109. Докажите, что для каждого треугольника ABC и для любой точки M внутри него

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geqslant 12\frac{r^4}{R^2}.$$

В каком случае $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12\frac{r^4}{R^2}$?

Если точка M совпадает с центром o вписанной окружности треугольника, то сумма $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$ становится равной $3r^2$, и результат задачи 109 обращается в результат задачи 94 а):

$$3r^2 \geqslant 12\frac{r^4}{R^2}, \quad \text{или} \quad R^2 \geqslant 4r^2, \quad \text{т. е.} \ R \geqslant 2r.$$

Перейдем теперь к неравенствам, связывающим величины R_a, R_b, R_c и d_a, d_b, d_c. Мы начнем со следующей простой задачи.

110. Докажите, что для любого треугольника ABC и любой точки M внутри него

$$aR_a + bR_b + cR_c \geqslant 2(ad_a + bd_b + cd_c).$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

111. Докажите, что для каждого треугольника ABC и каждой точки M внутри него[1])

а) $R_aR_bR_c \geqslant 8d_ad_bd_c$;

б)* $R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$;

в)** $\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c}\right)$.

В каких случаях эти неравенства обращаются в равенства?

Наиболее известным из неравенств, составляющих содержание задачи 111, является неравенство б), имеющее довольно длинную историю. Впервые сформулировано оно было в 1935 г. известным венгерским математиком П. Эрдёшем [49], который, однако, его не доказал. Первое доказательство неравенства Эрдёша принадлежит известному английскому математику, видному специалисту по геометрии чисел, Л. Дж. Морделлу (см. [50], [49] или стр. 33—35 книги [21]); однако доказательство Морделла, как и появившееся одновременно со второй его публикацией доказательство американца Д. Ф. Бэрроу [49], существенно использовало тригонометрию и было довольно сложным. По-видимому, первое чисто геометрическое доказательство неравенства Эрдёша—Морделла (оно составляет содержание нижеследующей задачи 114) дал в 1945 г. американский математик Д. К. Казаринов (см. опубликованную в 1957 г., после смерти автора, заметку [51] и книгу [5] его сына Н. Д. Казаринова). Другие иногда совсем несложные доказательства того же неравенства были предложены в конце 50-х годов американцем Л. Банковым [52], голландцем Г. Р. Фельдкампом [53], англичанином Г. Г. Эглстоном [54], голландцем Г. Бралантом [55], ярославским геометром З. А. Скопецом [56] (впрочем, доказательства последних трех авторов по существу совпадают) и снова Л. Дж. Морделлом (см. стр. 587 книги [12])[2]).

---

[1]) Здесь и далее под *внутренними* точками треугольника или тетраэдра понимаются точки, не принадлежащие его границе (и, следовательно, скажем, вершины треугольника ABC, для которых обе части неравенства задачи 111 а) обращаются в нуль, не учитываются среди точек, для которых это неравенство обращается в равенство).

[2]) Относительно перенесения результатов задачи 111 б) в *геометрию на сфере* см. А. Оппенгейм [58], где, в частности, доказано, что *для любого сферического треугольника* ABC (образованного тремя дугами AB, BC и CA больших окружностей—сечений сферы плоскостями, проходящими через ее центр) *и*

Неравенства задачи 111 можно сформулировать и по-другому. Средним арифметическим $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, их средним геометрическим $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и средним гармоническим $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют выражения [1])

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n};$$

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

и

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}};$$

ясно, что каждое из этих выражений не превосходит наибольшего из рассматриваемых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но не меньше самого маленького из них, с чем, собственно, и связано наименование «среднее» (арифметическое, геометрическое или гармоническое) n чисел. Задача 111 утверждает, что

а) $G(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2G(d_a, d_b, d_c)$;

б) $A(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2A(d_a, d_b, d_c)$;

в) $H(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2H(d_a, d_b, d_c)$.

Более общим чем средние G, A и H является так называемое степенное среднее порядка k [2]) n положительных чисел

любой точки M внутри этого треугольника

$$\operatorname{tg} R_a + \operatorname{tg} R_b + \operatorname{tg} R_c \geqslant 2(\operatorname{tg} d_a + \operatorname{tg} d_b + \operatorname{tg} d_c),$$

где R_a, R_b, R_c и d_a, d_b, d_c суть (измеренные по поверхности сферы!) расстояния от точки M до вершин A, B, C и до сторон BC, CA, AB треугольника ABC. [Относительно перенесения этих результатов в *неевклидову геометрию Лобачевского* пока, как будто, неизвестно ничего, хотя при том (совершенно непонятном для автора) интересе, который вызывает элементарное неравенство задачи 111 б), можно не сомневаться, что соответствующие публикации не заставят себя долго ждать.]

[1]) См., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом [11], стр. 65 и след. (где, в частности, доказано, что всегда

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant H(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причем равенства здесь имеют место лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$; нам эти неравенства не понадобятся).

[2]) Можно показать, что при $k > l$ имеет место неравенство

$$M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant M_l(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

обращающееся в равенство лишь в случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (см., например, задачу 283 книги [11]); нам, однако, это не будет нужно $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}} \left(=\left(\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}\right)^{1/k}\right),$$

т. е.

$$[M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^k = A(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k).$$

Ясно, что

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и

$$M_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = H(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

можно также доказать, что [1])

$$\lim_{k\to 0} M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

в силу чего среднее геометрическое $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ иногда называют их «степенным средним порядка 0»:

$$M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Таким образом, результаты задачи 111 можно еще переписать так:

а) $M_0(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_0(d_a, d_b, d_c)$;

б) $M_1(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_1(d_a, d_b, d_c)$;

в) $M_{-1}(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_{-1}(d_a, d_b, d_c)$.

---

[1]) Равенство $\lim\limits_{k\to 0} M_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = G(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ легко может быть установлено средствами дифференциального исчисления (см., например, книги Г. Л. Невяжского [7] или Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуда, Г. Полиа [8]); другое его доказательство дано в заметке В. И. Левина, Элементарное доказательство одной теоремы теории средних, сб. «Математическое просвещение», вып. 3, Физматгиз, 1958, стр. 171—181.

[Легко также установить, что

$$\lim_{k\to\infty} M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

соответственно

$$\lim_{k\to-\infty} M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где через $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначены наибольшее и наименьшее из n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; поэтому приняты также обозначения:

$$M_\infty(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } M_{-\infty}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n).]$$

112*. а) Докажите, что для каждого треугольника ABC и для любой точки M внутри него

$$R_aR_bR_c \geqslant 8d'_ad'_bd'_c.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

б) Докажите, что для каждого треугольника ABC и для любой точки M внутри него

$$R_a+R_b+R_c > d'_a+d'_b+d'_c.$$

Может ли это неравенство быть улучшено (т. е. существует ли такое число $\lambda > 1$, что

$$R_a+R_b+R_c > \lambda(d'_a+d'_b+d'_c)$$

для всех треугольников ABC и любой точки M внутри ABC)?

Ясно, что неравенство задачи 112 а) является усилением неравенства задачи 111 а). [Ср. также Л. Карлитц [57], где собрано много разнообразных неравенств, связывающих величины R_a, R_b, R_c и d'_a, d'_b, d'_c.]

113. а) Докажите, что для каждого треугольника ABC и любой точки M внутри него

$$\sqrt{R_a}+\sqrt{R_b}+\sqrt{R_c} \geqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}\right).$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

б) Докажите, что для каждого треугольника ABC и любой точки M внутри него

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2 > 2(d_a^2+d_b^2+d_c^2).$$

Может ли это неравенство быть улучшено (т. е. существует ли такое число $\lambda > 2$, что

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2 > \lambda(d_a^2+d_b^2+d_c^2)$$

для всех треугольников ABC и любой точки M внутри ABC)?

Неравенство задачи 113 а) можно переписать так:

$$M_{1/2}(R_a, R_b, R_c)=\left(\frac{\sqrt{R_a}+\sqrt{R_b}+\sqrt{R_c}}{3}\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 2\left(\frac{\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}}{3}\right)^2 = 2M_{1/2}(d_a, d_b, d_c).$$

Результаты задач 111 и 113 а) наводят на мысль, что *для каждого числа* k (во всяком случае *в пределах* $-1 \leqslant k \leqslant +1$), *для любого треугольника ABC и любой внутренней точки M этого треугольника справедливо неравенство*

$$M_k(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_k(d_a, d_b, d_c)$$

(обращающееся в равенство, если треугольник ABC равносторонний, а точка M совпадает с его центром, и только в этом случае). Последнее неравенство действительно справедливо; его доказал в 1958 г. австрийский геометр А. Флориан [59] (см. также А. Оппенгейм [60]).

Результат задачи 113 б) можно, очевидно, записать в виде

$$M_2(R_a, R_b, R_c)=\sqrt{\frac{R_a^2+R_b^2+R_c^2}{3}} > \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{d_a^2+d_b^2+d_c^2}{3}}= \\ =\sqrt{2}\, M_2(d_a, d_b, d_c),$$

где $M_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — так называемое среднее квадратичное n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$M_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

В 1958 г. А. Флориан [59] показал, что *при любом $k>1$ или $k<-1$*

$$M_k(R_a, R_b, R_c) > \sqrt[|k|]{2}\, M_k(d_a, d_b, d_c) \ (=2^{1/|k|} M_k(d_a, d_b, d_c)),$$

причем это неравенство не может быть улучшено.

Представляет интерес вопрос о перенесении результатов задач 111—113 на произвольные (выпуклые) многоугольники. Пусть M — точка внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$; расстояния $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ этой точки от вершин многоугольника обозначим через $R_1, R_2, \ldots, R_n$, а ее расстояния $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ от сторон n-угольника — через $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (рис. 27). В 1948 г. известный венгерский математик Л. Фейеш Тот доказал, что для *произвольного выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и любой точки M внутри него*

$$R_1R_2\ldots R_n \geqslant \sec^n\frac{180^\circ}{n}\, d_1d_2\ldots d_n,$$

т. е.

$$G(R_1, R_2, \ldots, R_n) \geqslant \sec\frac{180^\circ}{n}\, G(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

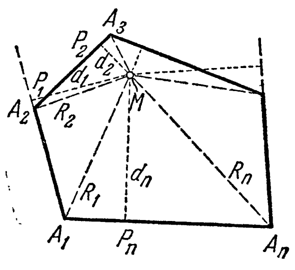


Рис. 27.

где равенство достигается лишь для правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и точки M, совпадающей с его центром (см. статью [61], а также стр. 63—64 книги [21]); при $n=3$ это неравенство обращается в неравенство задачи 111 а) $\left(\text{ибо } \sec\frac{180^\circ}{3}=\sec 60^\circ=2\right)$, а при $n=4$ — в неравенство

$$R_1R_2R_3R_4 \geqslant 4d_1d_2d_3d_4,$$

$\left(\text{ибо } \sec\frac{180^\circ}{4}=\sec 45^\circ=\sqrt{2}\right)$, относящееся к произвольному выпуклому четырехугольнику $A_1A_2A_3A_4$ и любой точке M внутри него. Тогда же Фейеш Тот высказал предположение о том, что всегда

$$R_1+R_2+\ldots+R_n \geqslant \sec\frac{180^\circ}{n}(d_1+d_2+\ldots+d_n),$$

или

$$A(R_1, R_2, \ldots, R_n) \geqslant \sec\frac{180^\circ}{n} A(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

а также, что

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n} \leqslant \cos\frac{180^\circ}{n}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_n}\right),$$

или

$$H(R_1, R_2, \ldots, R_n) \geqslant \sec\frac{180^\circ}{n} H(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

(где равенство, по гипотезе Фейеша Тота, достигается лишь для правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и его центра M); при $n=3$ эти неравенства обращаются в неравенства задач 111 б) и в). Справедливость первой из гипотез Фейеша Тота (и даже некоторого ее усиления) была для $n=4$ доказана А. Флорианом [59], а в общем случае—независимо Г.-Х. Ленаром [62] и Ф. Леуэнбергером [63] (ср. также Г. Фоглер [64]).

114. а) Докажите следующую теорему Паппа[1]: пусть на сторонах AB и AC треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_1 и ACC_1A_2, причем оба эти параллелограмма лежат вне треугольника ABC (рис. 28, *а*) или оба лежат по ту сторону от прямой AB, соответственно от AC, по какую расположен сам треугольник (рис. 28, *б*); D—точка пересечения прямых B_1A_1 и C_1A_2; BCC_2B_2—построенный на стороне BC параллелограмм, такой, что $BB_2 \# CC_2 \# AD$. Докажите, что площадь параллелограмма BCC_2B_2 равна сумме площадей параллелограммов ABB_1A_1 и ACC_1A_2. [Если угол A треугольника прямой и параллелограммы ABB_1A_1 и ACC_1A_2 представляют собой квадраты, то теорема Паппа обращается, очевидно, в теорему Пифагора; см. рис. 28, *в*.]

б)* Выведите из теоремы Паппа результат задачи 111 б).

Примечание. Теорема Паппа тесно связана с дистрибутивным (распределительным) свойством так называемого *косого* (или *псевдоскалярного*) *произведения векторов*, ибо в обозначениях рис. 28, *а*

$$S_{BAA_1B_1}=\overline{BA}\times\overline{BB}_1=\overline{BA}\times\overline{AA}_1,$$
$$S_{CAA_2C_1}=\overline{AC}\times\overline{AA}_2 \text{ и } S_{BCC_2B_2}=\overline{BC}\times BB_2=\overline{BC}\times\overline{AD}$$

---

[1]) Папп Александрийский—древнегреческий математик эпохи заката античной математики (конец III века нашей эры).

(см., например, § 4 статьи В. Г. Болтянского и И. М. Яглома, Векторы и их применения в геометрии, Энциклопедия элемен-

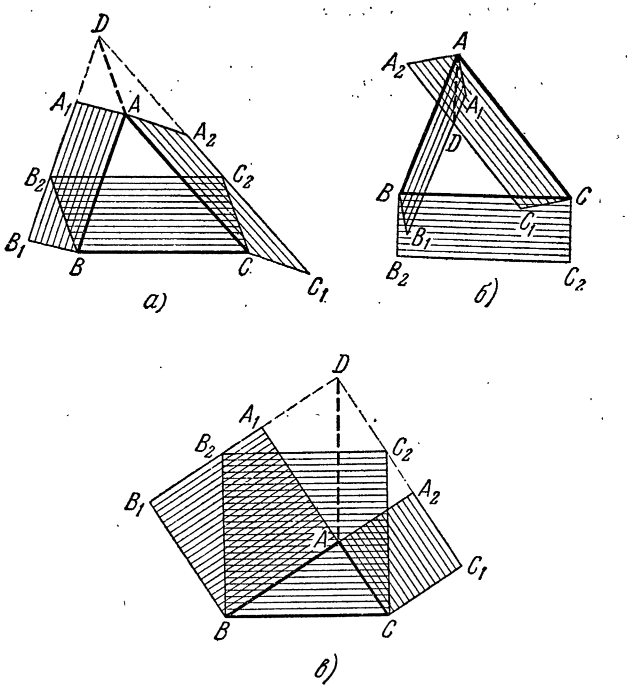


Рис. 28.

тарной математики, кн. IV, Физматгиз, 1963, стр. 338—350). Но так как

$\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\overline{BA}\times\overline{AA_1}=\overline{BA}\times\overline{AD}$, $\overline{AC}\times\overline{AA_2}=\overline{AC}\times\overline{AD}$ (ибо, например, $\overline{BA}\times\overline{AD}=\overline{BA}\times(\overline{AA_1}+\overline{A_1D})=\overline{BA}\times\overline{AA_1}+\overline{BA}\times\overline{A_1D}=$ $=\overline{BA}\times\overline{AA_1}$), то получаем

$$S_{BCC_2B_2}=\overline{BC}\times\overline{AD}=(\overline{BA}+\overline{AC})\times\overline{AD}=\overline{BA}\times\overline{AD}+\overline{AC}\times\overline{AD}=$$
$$=S_{BAA_1B_1}+S_{CAA_2C_1}.$$

115*. Докажите, что для каждого треугольника ABC и любой точки M внутри него

$$R_aR_bR_c\geqslant(d_a+d_b)(d_b+d_c)(d_c+d_a).$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

116*. Докажите, что для каждого треугольника ABC и каждой точки M внутри него

а) $d_aR_a+d_bR_b+d_cR_c \geqslant 2\,(d_ad_b+d_bd_c+d_cd_a)$;

б) $R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a \geqslant 2\,(d_aR_a+d_bR_b+d_cR_c)$;

в) $R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a \geqslant 4\,(d_ad_b+d_bd_c+d_cd_a)$;

г) $\dfrac{1}{d_a d_b}+\dfrac{1}{d_b d_c}+\dfrac{1}{d_c d_a} \geqslant 2\left(\dfrac{1}{d_a R_a}+\dfrac{1}{d_b R_b}+\dfrac{1}{d_c R_c}\right)$;

д) $\dfrac{1}{d_a R_a}+\dfrac{1}{d_b R_b}+\dfrac{1}{d_c R_c} \geqslant 2\left(\dfrac{1}{R_a R_b}+\dfrac{1}{R_b R_c}+\dfrac{1}{R_c R_a}\right)$;

е) $\dfrac{1}{d_a d_b}+\dfrac{1}{d_b d_c}+\dfrac{1}{d_c d_a} \geqslant 4\left(\dfrac{1}{R_a R_b}+\dfrac{1}{R_bR_c}+\dfrac{1}{R_c R_a}\right)$.

В каких случаях каждое из этих неравенств обращается в равенство?

Неравенство задачи 116 а) допускает следующее обобщение: *для всех k в интервале* $0 \leqslant k \leqslant 1$

$$(d_aR_a)^k+(d_bR_b)^k+(d_cR_c)^k \geqslant 2^k\,[(d_ad_b)^k+(d_bd_c)^k+(d_cd_a)^k]$$

или

$$M_k\,(d_aR_a,\ d_bR_b,\ d_cR_c) \geqslant 2M_k\,(d_ad_b,\ d_bd_c,\ d_cd_a),$$

причем при $k \neq 0$ (если $k=0$, то это неравенство обращается в тривиальное равенство) $M_k\,(d_aR_a,\ d_bR_b,\ d_cR_c)=2M_k\,(d_ad_b,\ d_bd_c,\ d_cd_a)$ лишь в том случае, когда треугольник ABC равносторонний, и точка M совпадает с его центром. Это было доказано А. Оппенгеймом [60], которому принадлежат и все неравенства задач 115 и 116. Оппенгейм же предположил, что справедливо следующее неравенство, родственное неравенству задачи 115 и более сильное, чем неравенство задачи 116 в):

$$R_aR_b+R_bR_c+R_cR_a \geqslant (d_a+d_b)\,(d_a+d_c)+(d_a+d_b)\,(d_b+d_c)+ \\ +(d_a+d_c)\,(d_b+d_c);$$

однако неравенство это, как будто, никем пока не доказано (и не опровергнуто).

117*. Докажите, что для каждого треугольника ABC и любой точки M внутри него

а) $(R_a+R_b+R_c)\left(\dfrac{1}{d_a}+\dfrac{1}{d_b}+\dfrac{1}{d_c}\right) \geqslant 18$;

б) $(R_a^2+R_b^2+R_c^2)\left(\dfrac{1}{d_a^2}+\dfrac{1}{d_b^2}+\dfrac{1}{d_c^2}\right) \geqslant 36$.

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

Результаты задачи 117 можно записать в виде следующих неравенств, выполняющихся тождественно (т. е. при любом треугольнике ABC и любой точке M внутри него):

а) $$A(R_a, R_b, R_c) = \frac{R_a + R_b + R_c}{3} \geqslant$$
$$\geqslant 2\frac{3}{1/d_a + 1/d_b + 1/d_c} = 2H(d_a, d_b, d_c)$$

(или $M_1(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_{-1}(d_a, d_b, d_c)$) и

б) $$M_2(R_a, R_b, R_c) = \sqrt{\frac{R_a^2 + R_b^2 + R_c^2}{3}} \geqslant$$
$$\geqslant 2\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1/d_a^2 + 1/d_b^2 + 1/d_c^2}{3}}} = 2M_{-2}(d_a, d_b, d_c).$$

Сравнение этих неравенств с результатом задачи 111 а) (который, как мы знаем, можно записать в виде $G(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2G(d_a, d_b, d_c)$, или $M_0(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_0(d_a, d_b, d_c)$) наталкивает на мысль о том, что *всегда* (т. е. *при любом* $k \geqslant 0$, *любом треугольнике* ABC *и любой точке* M *внутри него*)

$$M_k(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_{-k}(d_a, d_b, d_c);$$

этот результат был доказан в 1958 г. В. Л. Рабиновичем (см. [65]).

Перейдем теперь к стереометрическим аналогам результатов последних задач.

118. Докажите, что для каждого тетраэдра ABC и каждой точки M внутри него

а) $$S_AR_A + S_BR_B + S_CR_C + S_DR_D \geqslant$$
$$\geqslant 3(S_Ad_A + S_Bd_B + S_Cd_C + S_Dd_D),$$

где S_A, S_B, S_C и S_D — площади граней BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра;

б) $$d_AR_A + d_BR_B + d_CR_C + d_DR_D \geqslant$$
$$\geqslant 2(d_Ad_B + d_Ad_C + d_Ad_D + d_Bd_C + d_Bd_D + d_Cd_D).$$

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

119. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$ и любой точки M внутри него

$$R_AR_BR_CR_D \geqslant 81\, d_Ad_Bd_Cd_D.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

Сравнение результата

$$G(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3G(d_A, d_B, d_C, d_D)$$

задачи 119 с неравенством задачи 111 а) позволяет предположить, что справедлив также следующий пространственный аналог неравенства Эрдёша—Морделла (неравенства задачи 111 б)): для каждого тетраэдра $ABCD$ и любой точки M внутри него справедливо неравенство

$$R_A+R_B+R_C+R_D \geqslant 3(d_A+d_B+d_C+d_D),$$

или

$$A(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3A(d_A, d_B, d_C, d_D) \qquad (*)$$

(разумеется, обращающееся в равенство для правильного тетраэдра $ABCD$ и точки M, совпадающей с его центром), а, быть может, также и неравенство

$$M_k(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3M_k(d_A, d_B, d_C, d_D),$$

выполняющееся и для чисел k, отличных от 0 и от 1, например родственное результату задачи 111 в) неравенство

$$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_D} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{d_A}+\frac{1}{d_B}+\frac{1}{d_C}+\frac{1}{d_D}\right),$$

или

$$H(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3H(d_A, d_B, d_C, d_D)$$

(т. е. неравенство $M_{-1}(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3M_{-1}(d_A, d_B, d_C, d_D)$). Однако это оказалось неверным: упоминавшийся выше американский математик Д. К. Казаринов показал, что уже неравенство (*) может не иметь места — *можно так выбрать тетраэдр $ABCD$ и точку M внутри него, что отношение*

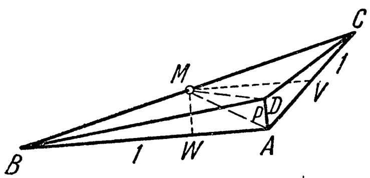


Рис. 29.

$$\frac{R_A+R_B+R_C+R_D}{d_A+d_B+d_C+d_D}$$

будет сколь угодно близким к $2\sqrt{2}$, а $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$, разумеется, м е н ь ш е, чем $3=\sqrt{9}$.

Вот пример Д. К. Казаринова. Предположим, что ребра AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$ попарно перпендикулярны; кроме того, пусть $AB=AC=1$, а $AD=p$, где p о ч е н ь м а л о (рис. 29). Если точка M совпадает с серединой ребра BC, то, очевидно,

$$R_A=MA=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad R_B=MB=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad R_C=MC=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и

$$R_D=MD \approx MA=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

причем R_D тем ближе к $\sqrt{2}/2$, чем меньше $AD=p$. С другой стороны, в этом случае (см. тот же рис. 29)

$$d_A=0, \quad d_D=0, \quad d_B=MV=\frac{1}{2} \text{ и } d_C=MW=\frac{1}{2},$$

так что

$$R_A+R_B+R_C+R_D \approx 4\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2},\quad d_A+d_B+d_C+d_D=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

и

$$(R_A+R_B+R_C+R_D):(d_A+d_B+d_C+d_D) \approx 2\sqrt{2}.$$

Ясно, что и в том случае, когда точка M расположена внутри тетраэдра $ABCD$, но достаточно близко к середине ребра BC, отношение $\frac{R_A+R_B+R_C+R_D}{d_A+d_B+d_C+d_D}$ может стать сколь угодно близким к $2\sqrt{2}$.

Д. К. Казаринову удалось далее доказать, что *всегда* (т. е. *при любом тетраэдре $ABCD$ и любой точке M внутри него*)

$$R_A+R_B+R_C+R_D > 2\sqrt{2}(d_A+d_B+d_C+d_D)$$

(но отношение $\frac{R_A+R_B+R_C+R_D}{d_A+d_B+d_C+d_D}$, как мы видели, может быть сколь угодно близким к $2\sqrt{2}$, так что последнее неравенство улучшить уже нельзя!); однако это совершенно элементарное по использованным средствам доказательство (опубликованное уже после смерти автора его сыном Н. Д. Казариновым [66]), является все же весьма сложным.

Далее, мы знаем, что для каждого треугольника и любой точки M внутри него

$$(R_a+R_b+R_c)\left(\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}\right) \geqslant 18,$$

т. е.

$$A(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2H(d_a, d_b, d_c)$$

(см. задачу 117 а)) [1]) и

$$(R_a^2+R_b^2+R_c^2)\left(\frac{1}{d_a^2}+\frac{1}{d_b^2}+\frac{1}{d_c^2}\right) \geqslant 36,$$

---

[1]) Так как $H(d_a, d_b, d_c) \leqslant A(d_a, d_b, d_c)$ (см. подстрочное примечание [1]) на стр. 52), то неравенство задачи 117 а)

$$A(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2H(d_a, d_b, d_c) \qquad \text{(А)}$$

слабее неравенства Эрдёша—Морделла

$$A(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2A(d_a, d_b, d_c) \qquad \text{(Б)}$$

(т. е. из справедливости неравенства (Б) вытекает справедливость неравенства (А), но не наоборот); именно поэтому, даже после того, как мы убедились, что неравенство (Б) на тетраэдр не переносится (т. е. что неравенство

$$A(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3A(d_A, d_B, d_C, d_D)$$

имеет место не всегда), у нас остается надежда на то, что более слабое неравенство (А) на тетраэдр перенести удастся.

т. е.

$$M_2(R_a, R_b, R_c) \geqslant 2M_{-2}(d_a, d_b, d_c)$$

(см. задачу 117 б)). Эти результаты удается распространить на тетраэдр.

120*. Докажите, что для каждого тетраэдра $ABCD$ и любой точки M внутри него

а) $$(R_A+R_B+R_C+R_D)\left(\frac{1}{d_A}+\frac{1}{d_B}+\frac{1}{d_C}+\frac{1}{d_D}\right) \geqslant 48;$$

б) $$(R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2)\left(\frac{1}{d_A^2}+\frac{1}{d_B^2}+\frac{1}{d_C^2}+\frac{1}{d_D^2}\right) \geqslant 144.$$

В каком случае эти неравенства обращаются в равенства?

Неравенства задачи 120 можно переписать так:

$$A(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3H(d_A, d_B, d_C, d_D),$$

т. е.

$$M_1(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3M_{-1}(d_A, d_B, d_C, d_D)$$

и

$$M_2(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3M_{-2}(d_A, d_B, d_C, d_D).$$

Сравнение этих результатов с неравенством задачи 119, которое можно переписать так:

$$G(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3G(d_A, d_B, d_C, d_D),$$

или

$$M_0(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3M_0(d_A, d_B, d_C, d_D),$$

дает основание предположить, что *всегда* (т. е. *при любом числе* $k \geqslant 0$, *любом тетраэдре $ABCD$ и любой точке M внутри него*)

$$M_k(R_A, R_B, R_C, R_D) \geqslant 3M_{-k}(d_A, d_B, d_C, d_D).$$

Этот результат действительно имеет место (см. В. Л. Рабинович и И. М. Яглом [65]).

Относительно дальнейших результатов, связанных с переходом от тетраэдра к произвольным выпуклым многогранникам, см. гл. V книги [21].

РЕШЕНИЯ

1. Легко видеть, что искомая окружность не может пересекать границу клетки где-нибудь между вершинами, так как в этом случае она проходила бы по белой клетке. Предположим теперь, что эта окружность проходит по черной клетке $ABCD$ и пересекает границу этой клетки в точках A и B (рис. 30). Границу черной клетки $AFGH$

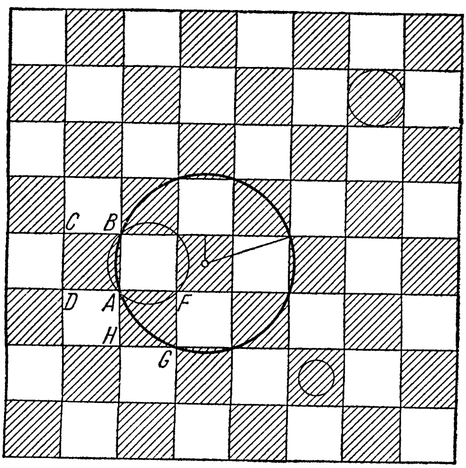


Рис. 30.

она может пересечь во второй раз либо в точке F, либо в точке G — и этими тремя точками (A, B, F или A, B, G) окружность полностью определяется. Ясно, что во втором случае окружность будет больше, чем в первом; следовательно, если искомая окружность проходит через точки A и B, то она пройдет и через точку G. Если же предположить, что искомая окружность пересекает границу клетки $ABCD$ в точках A и C, то она может пересечь границу клетки $AFGH$ либо в F, либо в H (ибо точки A, C и G лежат на одной прямой). Но легко видеть, что обе эти окружности равны окружности, проходящей через точки A, B и G. Отсюда следует, что наибольшей будет изображенная на рис. 30 окружность с центром в центре черной клетки, проходящая по восьми черным клеткам; радиус этой окружности равен $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$, где за единицу принята сторона клетки.

2. Треугольник имеет три точки касания со вписанной окружностью, а квадрат — четыре. Поэтому хотя бы между одной парой точек касания окружности с треугольником лежат две точки касания окружности с квадратом. Следовательно, хотя бы один «угол» квадрата[1]) лежит весь внутри треугольника. Рассмотрим теперь отдельно два возможных случая.

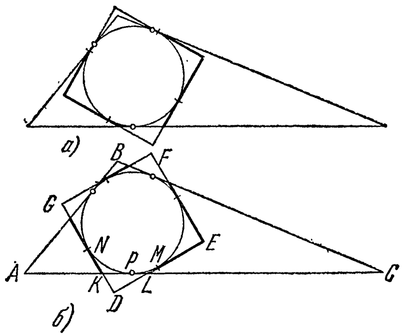


Рис. 31.

1°. Пусть внутри треугольника лежат два «угла» квадрата (рис. 31, *а*). В этом случае решение задачи очевидно — внутри квадрата лежит более $^1/_4+{}^1/_4={}^1/_2$ периметра треугольника.

2°. Пусть только один «угол» квадрата лежит внутри треугольника (рис. 31, *б*). Тогда остальные три «угла» частично лежат вне треугольника. Покажем, однако, что при этом более трети длины каждого «угла» лежит внутри треугольника. Очевидно, $DM=DN$, $\triangle DKL$ прямоугольный,

$$KL=KP+PL=KN+LM$$

(рис. 31, *б*). В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов; следовательно,

$$DK<KN+LM, \quad DL<LM+KN.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$2(LM+KN)>DL+DK, \quad LM+KN>\frac{DL+DK}{2}.$$

Но так как сумма $(LM+KN)+(DL+DK)$ равна длине «угла» квадрата, то из последнего неравенства следует, что сумма $LM+KN$ больше трети длины «угла».

Отсюда вытекает, что часть периметра квадрата, находящаяся внутри треугольника, больше чем $^1/_4+3\,(^1/_3\cdot{}^1/_4)={}^1/_2$ периметра квадрата, что и требовалось доказать.

3. Пусть AB — отрезок, по которому происходит складывание; L_1 и L_2 — ломаные, на которые разбивается граница исходного многоугольника точками A и B; L_2' — симметричная L_2 относительно AB

---

[1]) «Углом» квадрата мы условимся здесь для краткости называть совокупность отрезков двух соседних сторон квадрата от общей вершины до точек касания с окружностью. Очевидно, что длина каждого такого «угла» (т. е. сумма длин составляющих «угол» отрезков) равна $^1/_4$ периметра.

ломаная, получающаяся из L_2 при складывании многоугольника. Если ломаные L_1 и L_2' не имеют отличных от A и B общих точек (рис. 32, *а*), утверждение задачи очевидно; предположим поэтому, что эти ломаные пересекаются в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 32, *б*). Каждые две точки A и A_1, A_1 и $A_2, \ldots, A_{n-1}$ и A_n, A_n и B соединяются двумя

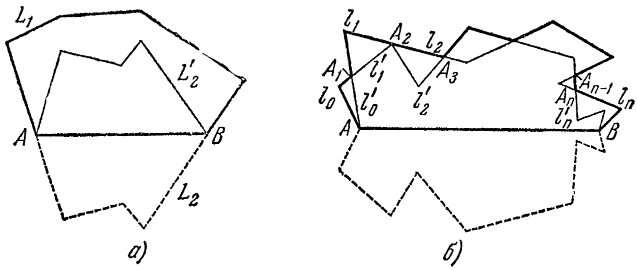


Рис. 32.

непересекающимися ломаными, являющимися частями ломаных L_1 и L_2; обозначим их через l_0 и l_0', l_1 и l_1', l_2 и $l_2', \ldots, l_n$ и l_n', где $l_0, l_1, \ldots, l_n$ — та из двух ломаных, которая является границей многоугольника, получившегося после складывания исходного многоугольника. Так как ломаные $l_0', l_1', \ldots, l_n'$ вместе составляют одну ломаную, соединяющую точки A и B, то (длины ломаных мы обозначаем так же, как и сами ломаные)

$$l_0'+l_1'+\ldots+l_n' > AB.$$

Отсюда имеем

$$L_1+L_2=l_0+l_1+\ldots+l_n+l_0'+l_1'+\ldots+l_n' > AB+l_0+l_1+\ldots+l_n,$$

что и доказывает утверждение задачи.

4. Пусть угол A четырехугольника $ABCD$ острый, а остальные три угла тупые. Построим на отрезке AC как на диаметре окружность (рис. 33). Так как $\angle B$ и $\angle D$ тупые, то точки B и D будут находиться внутри этой окружности, откуда вытекает, что расстояние BD между ними будет меньше диаметра окружности — отрезка AC.

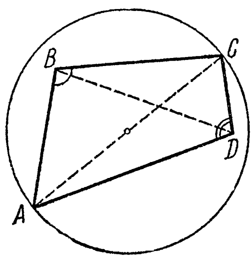


Рис. 33.

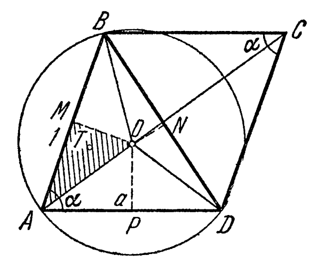


Рис. 34.

5. Опишем вокруг остроугольного треугольника ABD круг K; пусть O — центр этого круга (рис. 34). Покажем, что если радиус R

круга K больше 1, то точка O не будет покрыта ни одним из четырех кругов с центрами A, B, C, D и радиусом 1. В самом деле, $AO=BO=DO=R>1$, так что круги с центрами A, B и D не покроют точку O. Но и круг с центром C и радиусом 1 ее не покроет, ибо $CO>R>1$: в самом деле, если бы точка C располагалась внутри (или на границе) круга K, то (острый!) $\angle BCD=\alpha$ был бы не меньше половины дуги BAD, которая больше $180°$, ибо $\smile BD<180°$ (так как угол $BAD=\alpha$ острый). Таким образом, *для того чтобы четыре круга радиуса* 1 *с центрами в точках A, B, C и D полностью покрыли параллелограмм $ABCD$, необходимо, чтобы имело место неравенство $R\leqslant 1$.*

Докажем, что последнее условие является также и достаточным. Разобьем треугольник ABD радиусами OA, OB и OD круга K и пересекающимися в точке O перпендикулярами OM, ON, OP, восставленными к сторонам AB, BD и DA треугольника ABD в их серединах, на шесть прямоугольных треугольников. Ясно, что, скажем, расстояние от каждой точки T треугольника AMO до вершины A не превосходит гипотенузы $AO=R$ этого треугольника: в самом деле, если AT пересекает MO в точке T_1, то $AT\leqslant AT_1\leqslant AO$ (рис. 35). Поэтому весь треугольник AMO целиком покрывается кругом радиуса R (а значит, тем более кругом радиуса $1>R$) с центром в точке A. Аналогичным образом устанавливается, что и каждый из треугольников APO, BMO, BNO, DNO и DPO целиком покрывается кругом радиуса 1 с центром в одной из точек A, B или D. Таким образом, три круга радиуса 1 с центрами A, B и D покрывают весь треугольник ABD, откуда, в силу центральной симметрии параллелограмма, вытекает, что три круга радиуса 1 с центрами C, D и B полностью покроют треугольник BCD. Поэтому *для того, чтобы четыре круга радиуса* 1 *с центрами в вершинах параллелограмма полностью покрывали параллелограмм, необходимо и достаточно, чтобы радиус R круга K был не больше* 1.

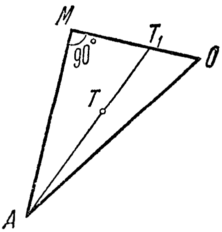


Рис. 35.

Заметим теперь, что в силу теоремы синусов, примененной к треугольнику ABD,

$$2R=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{BD}{\sin\alpha}.$$

Но по теореме косинусов $BD=\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}$, и, значит,

$$R=\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}.$$

Таким образом, условие того, что наши четыре круга покрывают параллелограмм, можно записать так:

$$\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\leqslant 1,$$

или

$$a^2-2a\cos\alpha+1-4\sin^2\alpha\leqslant 0.$$

А поскольку равенство $a^2-2a\cos\alpha+1-4\sin^2\alpha=0$ выполняется при

$$a=\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha-1+4\sin^2\alpha}=\cos\alpha\pm\sqrt{3}\sin\alpha,$$

то решение последнего неравенства имеет вид

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

Но так как $1\cdot\cos\alpha$ есть проекция стороны $AB=1$ треугольника ABD на сторону $AD=a$ и треугольник ABD остроугольный, то $\cos\alpha<a$ и тем более $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\leqslant a$.

Таким образом, *четыре единичных круга с центрами в вершинах параллелограмма $ABCD$ в том и только в том случае покрывают параллелограмм, если $a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$.*

6. Первое решение. Так как все углы n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ равны между собой, то, значит, они равны углам правильного

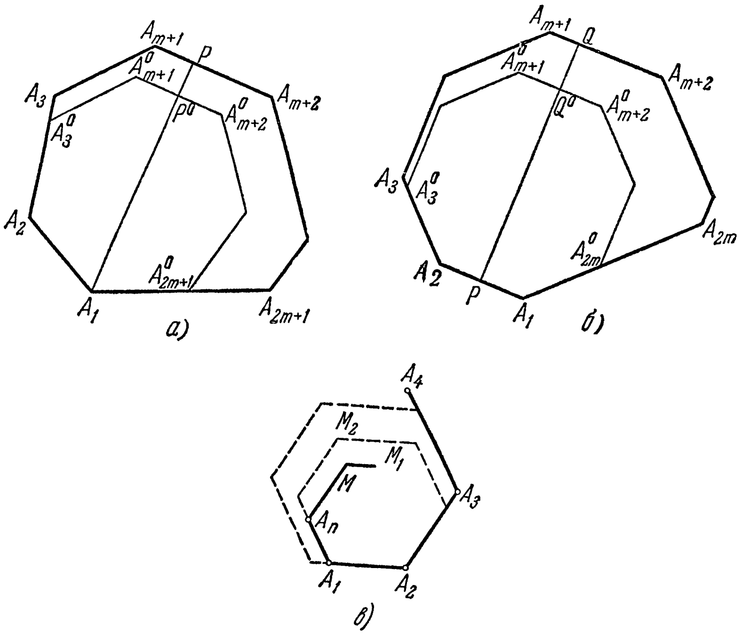


Рис. 36.

n-угольника (см. рис. 36, *а*, *б*, где стороны n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ параллельны сторонам правильного n-угольника $A_1A_2A_3^0\ldots A_n^0$). Далее возможны два случая.

1°. $n=2m+1$ — число нечетное. В этом случае биссектриса A_1P угла A_1 n-угольника перпендикулярна его стороне $A_{m+1}A_{m+2}$ (см. рис. 36, *а*, где ось симметрии A_1P^0 правильного $(2m+1)$-угольника $A_1A_2A_3^0\ldots A_{2m+1}^0$ перпендикулярна его стороне $A_{m+1}^0A_{m+2}^0$); поэтому проекции ломаных $A_1A_2\ldots A_mA_{m+1}$ и $A_{m+2}A_{m+3}\ldots A_{2m+1}A_1$

на прямую A_1P совпадают (они равны отрезку AP на рис. 36, *а*) Но так как стороны A_1A_2 и A_1A_{2m+1}, A_2A_3 и $A_{2m+1}A_{2m}$ и т. д. образуют с прямой AP одинаковые углы, и в силу условия задачи

$$A_1A_2 \leqslant A_1A_{2m+1},\ A_2A_3 \leqslant A_{2m+1}A_{2m} \text{ и т. д.},$$

то проекция $A_1A_2 \leqslant$ проекции A_1A_{2m+1}; проекция $A_2A_3 \leqslant$ проекции $A_{2m+1}A_{2m}$ и т. д. Поэтому проекция $A_1A_2\ldots A_mA_{m+1} \leqslant$ проекции $A_1A_{2m+1}A_{2m}\ldots A_{m+2}$, *причем равенство имеет место только в том случае*, когда $A_1A_2 = A_1A_{2m+1}$, $A_2A_3 = A_{2m+1}A_{2m}$ и т. д., т. е. *когда все стороны n-угольника* $A_1A_2\ldots A_{2m+1}$ *равны*, и этот n-угольник правильный. Таким образом, неизбежно

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_{2m}A_{2m+1} = A_{2m+1}A_1,$$

т. е.

$$\frac{A_1A_{2m+1}}{A_1A_2} = 1.$$

2°. $n = 2m$ — число четное. В этом случае прямая $PQ \perp A_1A_2$ перпендикулярна также и $A_{m+1}A_{m+2}$ (см. рис. 36, *б*, где прямая PQ^0 — ось симметрии правильного $(2m)$-угольника $A_1A_2A_3^0\ldots A_{2m}^0$ — перпендикулярна его сторонам A_1A_2 и $A_{m+1}^0A_{m+2}^0$). Далее рассуждаем аналогично случаю 1°: из того, что проекции ломаных $A_2A_3\ldots A_{m+1}$ и $A_{m+2}A_{m+3}\ldots A_{2m}A_1$ на прямую PQ совпадают и $A_2A_3 \leqslant A_1A_{2m}$, $A_3A_4 \leqslant A_{2m}A_{2m-1}$ и т. д. (причем отрезки A_2A_3 и A_1A_{2m}, A_3A_4 и $A_{2m}A_{2m-1}$ и т. д. образуют с PQ одинаковые углы), следует, что $A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_{2m-1}A_{2m} = A_{2m}A_1$, откуда уже вытекает, что $(2m)$-угольник $A_2A_3\ldots A_{2m}A_1$ правильный, т. е.

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_{2m-1}A_{2m} = A_{2m}A_1 \quad \text{и} \quad \frac{A_1A_{2m}}{A_1A_2} = 1.$$

Второе решение. Эту задачу можно решить и короче. Обозначим данный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ через M и рассмотрим n правильных n-угольников: пусть M_1 — правильный n-угольник со стороной A_1A_2, расположенный по ту же сторону от прямой A_1A_2, что и n-угольник M; M_2 — правильный n-угольник со стороной A_2A_3, расположенный по ту же сторону от A_2A_3, что и M; ...; M_{n-1} — правильный n-угольник со стороной $A_{n-1}A_n$, расположенный по ту же сторону от $A_{n-1}A_n$, что и M; наконец, M_n — правильный n-угольник со стороной A_nA_1, расположенный по ту же сторону от A_nA_1, что и M (см. рис. 36, *в*, на котором изображены многоугольники M_1 и M_2). Так как $A_1A_2 \leqslant A_2A_3$, то *многоугольник M_1 не выходит за пределы многоугольника M_2*; при этом, *если $A_1A_2 < A_2A_3$, то все вершины многоугольника M_1, кроме его вершины A_2, лежат внутри многоугольника M_2 или внутри одной из его сторон* (ясно, что точка A_1 принадлежит стороне многоугольника M_2). Но точно так же из неравенств

$$A_2A_3 \leqslant A_3A_4,\ A_3A_4 \leqslant A_4A_5, \ldots,\ A_{n-1}A_n < A_nA_1$$

следует, что многоугольник M_2 заключен внутри M_3; многоугольник M_3 заключен внутри M_4; ...; многоугольник M_{n-1} заключен внутри M_n; при этом, если хоть одно из неравенств $A_1A_2 \leqslant A_2A_3$, $A_2A_3 \leqslant A_3A_4$, ..., $A_{n-1}A_n \leqslant A_nA_1$ является строгим неравенством (т. е. не обращается в равенство), то вершина A_1 многоугольника M_1 (по доказанному целиком принадлежащего многоугольнику M_n) лежит *внутри* M_n, т. е. не совпадает ни с одной из вершин M_n. Но последнее противоречит определению многоугольника M_n, имеющего отрезок A_nA_1 своей стороной; поэтому все неравенства $A_1A_2 \leqslant A_2A_3$, $A_2A_3 \leqslant A_3A_4$, ..., $A_{n-1}A_n \leqslant A_nA_1$ на самом деле обращаются в равенства, т. е.

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_nA_1, \text{ и } \frac{A_1A_n}{A_1A_2} = 1.$$

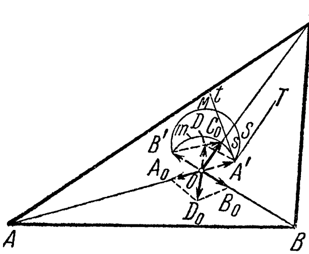


Рис. 37.

7. Так как лучи AO и BO пересекают стороны BC и AC треугольника ABC, то луч $OC = OC_0$ лежит внутри угла $A'OB'$, вертикального углу AOB (рис. 37). Построим два симметричных относительно точки O ромба $OA_0D_0B_0$ и $OA'DB'$ со стороной 1. Очевидно, что

$$\overline{OA}_0 + \overline{OB}_0 + \overline{OC}_0 = -\overline{OA'} - \overline{OB'} + \overline{OC}_0 = -\overline{OD} + \overline{OC}_0 = \\ = \overline{DO} + \overline{OC}_0 = \overline{DC}_0\,;$$

таким образом, нам остается только доказать, что *длина отрезка DC_0 меньше* 1. Но точка C_0 принадлежит высекаемой углом $A'OB'$ дуге $A'mB'$ окружности s с центром O и радиусом 1, в то время как высекаемая тем же углом дуга $A'MB'$ окружности S с центром D и радиусом 1 охватывает дугу $A'mB'$: это следует из того, что если $A't$ и $A'T$ — касательные к дугам $A'mB'$ и $A'MB'$ в точке A', то $\angle OA't = 90°$ и $\angle OA'T = \angle OA'D + \angle DA'T = \angle OA'D + 90° > 90°$ (см. рис. 37). Поэтому точка C_0 лежит внутри ограниченного окружностью S круга K, а следовательно,

$$DC_0 < 1,$$

что и требовалось доказать.

8. а) Пусть $\overline{OS}$ — искомая сумма, XY — прямая, проведенная через точку O перпендикулярно прямой OS. Если система отобранных векторов содержит вектор $\overline{OA_i}$ (где $i = 1, 2, 3, \ldots$, или 25), расположенный по прямой XY или по другую сторону от прямой XY, чем вектор $\overline{OS}$, то, исключив его из системы, мы вычтем из суммы $\overline{OS}$ вектор $\overline{OA_i}$, т. е. заменим вектор $\overline{OS}$ вектором $\overline{OS'} = \overline{OS} - \overline{OA_i} = \overline{A_iS}$; но $A_iS > OS$, ибо треугольник OA_iS прямоугольный или тупоугольный: $\angle A_iOS \geqslant 90°$ (рис. 38, *а*), и длина суммы отобранных векторов увеличится. С другой стороны, если система отобранных векторов не содержит какого-нибудь вектора $\overline{OA_j}$, расположенного по ту же сторону от прямой XY, что и вектор $\overline{OS}$, то, присоединив $\overline{OA_j}$ к этой системе, мы заменим вектор $\overline{OS}$ вектором $\overline{OS''} = \overline{OS} + \overline{OA_j}$, где $SS'' \# OA_j$; но в таком случае $OS'' > OS$, ибо треугольник OSS''

тупоугольный: $\angle OSS'' > 90^\circ$ (рис. 38, *б*), т. е. длина суммы отобранных векторов снова увеличится.

Таким образом, *отобранная система векторов должна содержать все векторы, лежащие по одну сторону от прямой XY, и только эти векторы.* Отсюда уже следует, что эта система может содержать лишь 12 или 13 соседних векторов, поскольку по одну сторону от произвольной прямой XY, проходящей через общее начало O всех векторов, лежит 12 векторов системы, а по другую сторону — 13 векторов.

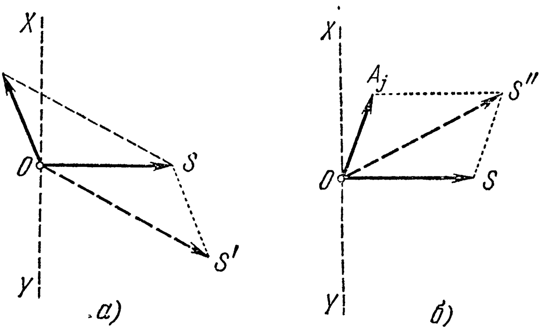


Рис. 38.

[Если прямая XY совпадает с одним из заданных векторов, то по любую сторону от нее лежат 12 векторов.] Но нетрудно показать, что сумма всех 25 векторов равна нулевому вектору (см. текст в квадратных скобках в конце решения задачи; ср. также решение задачи б)); поэтому *наша система векторов содержит либо* 12, *либо* 13 *соседних векторов*, причем в обоих случаях сумма всех отобранных векторов имеет одну и ту же длину: так как

$$\overline{OA}_1+\overline{OA}_2+\ldots+\overline{OA}_{25}=\overline{0}, \text{ то } \overline{OA}_1+\overline{OA}_2+\ldots+\overline{OA}_{12}=$$
$$=-(\overline{OA}_{13}+\overline{OA}_{14}+\ldots+\overline{OA}_{25}),$$

и, значит,

$$|\overline{OA}_1+\overline{OA}_2+\ldots+\overline{OA}_{12}|=|\overline{OA}_{13}+\overline{OA}_{14}+\ldots+\overline{OA}_{25}|.$$

[Докажем теперь, что сумма всех 25 векторов равна нулевому вектору. В самом деле, поворот на угол $\varphi=\frac{360^\circ}{25}=14^\circ 24'$ переводит вектор $\overline{OA}_1$ в вектор $\overline{OA}_2$, вектор $\overline{OA}_2$ — в $\overline{OA}_3$, вектор $\overline{OA}_3$ — в $\overline{OA}_4$, ..., вектор $\overline{OA}_{25}$ — в $\overline{OA}_1$, а следовательно, всю сумму $\overline{OA}_1+\overline{OA}_2+$ $+\overline{OA}_3+\ldots+\overline{OA}_{25}$ этот поворот переводит в себя (поскольку каждое слагаемое этой суммы переходит в другое слагаемое). Но только нулевой вектор может перейти в себя при повороте на угол, не кратный 360°!]

б) Будем рассматривать нашу плоскость как плоскость комплексного переменного, совместив начало 0 отсчета комплексных чисел с точкой O, а точку A_1 — с той, которая отвечает числу 1 (рис. 39).

При этом точке A_2 будет отвечать некоторое комплексное число $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi=\frac{360^\circ}{25}=14^\circ 24'$, а точкам $A_3, A_4, \ldots, A_{12}$ — комплексные числа $z^2, z^3, \ldots, z^{11}$. Таким образом, точке S — концу вектора $\overline{OS}=\overline{OA}_1+\overline{OA}_2+\ldots+\overline{OA}_{12}$ — отвечает комплексное число

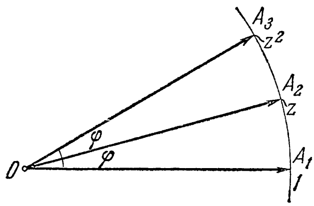


Рис. 39.

$$Z=1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{11}=\frac{1-z^{12}}{1-z}=$$

$$=\frac{1-\cos(12\varphi)-i\sin(12\varphi)}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}.$$

Модуль $|Z|$ этого числа Z — длина вектора OS — равен

$$\frac{\sqrt{[1-\cos(12\varphi)]^2+\sin^2(12\varphi)}}{\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}}=\frac{\sqrt{2-2\cos(12\varphi)}}{\sqrt{2-2\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{\sqrt{4\sin^2 6\varphi}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{\sin 6\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\approx 7,97.$$

9. Первое решение. Отложим все векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из одной точки O; проведем еще через O две взаимно перпендикулярные прямые xx_1 и yy_1, направления которых отличны от направлений любого из векторов (рис. 40). Сумма длин проекций векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на прямые xx_1 и yy_1 будет больше 4 (ибо сумма длин проекций вектора на две взаимно перпендикулярные прямые не может быть меньше длины вектора и равна его длине лишь для вектора, направление которого совпадает с направлением одной из этих прямых). Поэтому хотя бы для одного из четырех лучей Ox, Ox_1, Oy и Oy_1 сумма длин проекций на этот луч тех векторов, которые на него

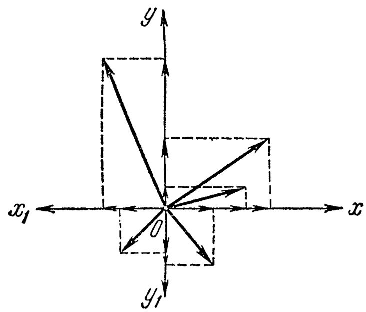


Рис. 40.

проектируются (т. е. тех векторов, направление проекций которых на соответствующую прямую совпадает именно с этим лучом, а не с противоположным) больше 1; пусть это будет, скажем, луч Ox. Рассмотрим теперь отобранную таким путем группу векторов — некоторые из векторов a_1. $a_2, \ldots, a_n$, сумма длин проекций которых на луч Ox больше 1; так как *проекция их суммы равна сумме длин их проекций* (вот здесь используется то, что проекции на прямую x_1x всех этих векторов направлены в одну сторону!) и не больше длины суммы этих векторов, то *длина суммы рассматриваемых векторов превосходит* 1. Это и доказывает утверждение задачи.

Второе решение. Дополним заданные векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (где n — число векторов) вектором $a_{n+1}=-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ (он может быть и нулевым!), с тем, чтобы сумма $n+1$ векторов $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, a_{n+1}$ равнялась нулевому вектору. Условимся еще нумеровать эти векторы так, чтобы, отложив их от одной точки O, мы наблюдали вращение (на не превосходящий $180°$ угол) от вектора a_1 к вектору a_2, от a_2 к a_3, ..., от a_n к a_{n+1}, от a_{n+1} к a_1 происходящим в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки (рис. 41, *а*). Рассмотрим теперь $(n+1)$-угольник [1]) $M \equiv A_0A_1\ldots A_n$,

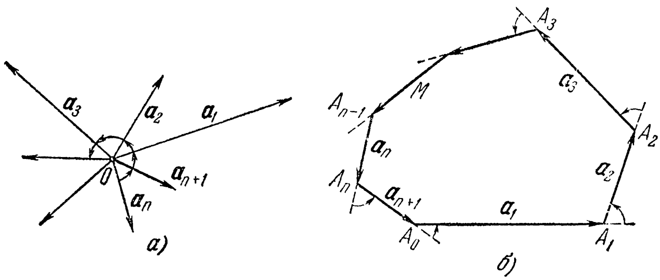


Рис. 41.

где $\overline{A_0A_1} = a_1$, $\overline{A_1A_2} = a_2$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n} = a_n$ и, наконец, $\overline{A_nA_0} =$ $= a_{n+1}$ $(= -a_1 - a_2 - \ldots - a_n)$. Так как

$$\angle A_0A_1A_2 = 180° - \angle(a_1,\ a_2),\ \angle A_1A_2A_3 = 180° - \angle(a_2,\ a_3),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \angle A_{n-1}A_nA_0 = 180° - \angle(a_n, a_{n+1}),\ \angle A_nA_0A_1 = 180° - \angle(a_{n+1}, a_1)$$

(здесь все углы между векторами отсчитываются против часовой стрелки; см. рис. 41, *б*), т. е. все углы многоугольника M не превосходят $180°$, то этот многоугольник в ы п у к л ы й. *П е р и м е т р многоугольника* M — сумма длин наших $n+1$ векторов — *не меньше* 4; отсюда следует, что *его д и а м е т р* d — самая большая по длине из всех сторон и всех диагоналей многоугольника — *превосходит* 1; доказательство этого мы отнесем на конец решения задачи.

Предположим теперь, что диаметр многоугольника M совпадает с его диагональю (или стороной) A_iA_j, где $i < j$. В таком случае

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j = \overline{A_iA_{i+1}} + \overline{A_{i+1}A_{i+2}} + \ldots + \overline{A_{j-1}A_j} = \overline{A_iA_j}$$

и

$$A_iA_j = d > 1,$$

что и доказывает требуемое утверждение: ведь если, например,

$$a_k = -a_1 - \ldots - a_{k-1} - a_{k+1} - \ldots - a_n - a_{n+1},$$

где $i+1 \leqslant k \leqslant j$, то

$$\overline{A_iA_j} = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j = -a_1 - \ldots - a_i - a_{j+1} - \ldots - a_{n+1}.$$

[1]) Многоугольник M может быть и «вырожденным» $(n+1)$-угольником», т. е. иметь меньше $n+1$ сторон — так будет обстоять дело, если направления каких-либо двух из векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ совпадают (в частности, если вектор a_{n+1} нулевой и, значит, ему можно приписать любое направление).

Теперь нам осталось лишь установить сформулированное выше утверждение, связывающее величину периметра (выпуклого) многоугольника с величиной его диаметра. Пусть диаметром многоугольника M является диагональ (или сторона) $AB = (d)$, и пусть $l_1 \| l_2 \perp AB$ — две прямые, проходящие через точки A и B (рис. 42). При этом все вершины M заключены между l_1 и l_2, ибо если бы A и C находились по разные стороны от l_2, то мы имели бы $AC > AB = d$, в то время как AB — н а и б о л ь ш а я из диагоналей и сторон многоугольника M. С другой стороны, пусть $m_1 \| m_2 \| AB$ — две в о з м о ж н о б о л е е б л и з к и е одна к другой прямые, между которыми заключен многоугольник M, и m_1 проходит через вершину A' многоугольника, а m_2 — через вершину B'. Так как по определению диаметра d имеем $A'B' \leqslant \leqslant d$, то и расстояние d' между m_1 и m_2 таково, что $d' \leqslant d$. Таким образом, *выпуклый многоугольник M лежит в н у т р и прямоугольника P со сторонами* l_1, m_1, l_2 и m_2, *периметра* $2d + 2d' \leqslant 4d$; поэтому $4d \geqslant 4$ (ибо периметр M не меньше, чем 4) и, значит, $d \geqslant 1$. При этом р а в е н с т в о $d = 1$ здесь исключено, ибо если $2d + 2d' = 4$, то многоугольник M периметра $\geqslant 4$ можно было бы заключить в квадрат со стороной 1 и периметром 4, и, значит, наш выпуклый многоугольник периметра 4 должен был бы совпасть с этим квадратом, что противоречит предположению о том, что диаметр M равен 1 (ибо диаметр квадрата со стороной 1 равен $\sqrt{2} > 1$).

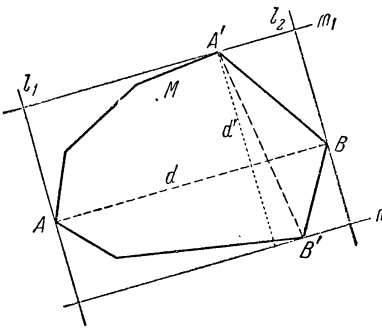


Рис. 42.

П р и м е ч а н и е. Можно доказать, что *из всех выпуклых линий* (не только многоугольников!) *периметра p наименьший диаметр p/π имеет окружность длины p* (и некоторые другие также к р и в о л и н е й н ы е линии того же диаметра; см., например, задачу 94 а) книги И. М. Я г л о м а и В. Г. Б о л т я н с к о г о [30]). Используя этот результат, можно, рассуждая в точности так же, как во втором решении задачи, показать, что *если сумма длин нескольких векторов* $\geqslant \pi$, *то из их числа можно выбрать часть* (может быть, один) *так, чтобы длина суммы отобранных векторов превосходила* 1. Если число n векторов нам не задано, то число $\pi\,(= 3{,}14159\ldots)$ здесь уменьшить нельзя (ибо периметр выпуклого многоугольника M диаметра 1 может быть с к о л ь у г о д н о б л и з к и м к π!); если же число n дано, то постоянную π можно еще уменьшить. Так, например, при $n = 3$, очевидно, достаточно потребовать, чтобы *сумма длин заданных векторов была больше* 3 (ибо в этом случае диаметр многоугольника M второго решения задачи будет > 1); если $n = 4$, то достаточно потребовать, чтобы *сумма длин векторов была больше* $2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}\,(= 3{,}0373\ldots)$ — это связано с тем, что, как можно доказать, периметр выпуклого четырехугольника диаметра 1 всегда $\leqslant 2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$, и т. д. Однако точная оценка соответствующего числа (суммы длин заданных векторов) в зависимости от n представляет собой очень трудную и еще не решенную задачу, которая тесно связана с (также пока еще не решенной!) задачей оценки в зависимости от n периметра выпуклого n-угольника диаметра 1.

10. а) Ясно, что если число прожекторов *меньше четырех*, то они не могут осветить всю плоскость. В самом деле, перенося прожекторы в одну точку O и направляя их в точности так же, как и раньше, мы получим 3 (или меньше) прямых угла, которые заведомо **не покрывают** всю плоскость (рис. 43). Поэтому существует такой луч l, исходящий из точки O, который не принадлежит ни одному из этих прямых углов; этот луч пересекает исходные «освещенные» углы, получаемые из углов с вершиной O параллельным переносом, не более чем по отрезкам [1]). Но сумма трех (или любого конечного числа!) отрезков не может покрыть весь луч, на котором, таким образом, заведомо найдутся неосвещенные участки.

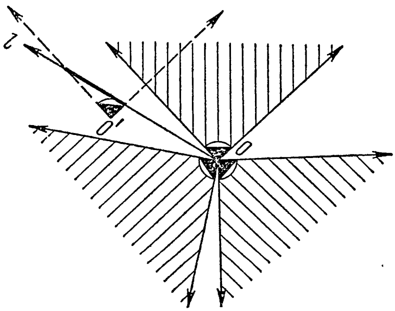


Рис. 43.

Четырех прожекторов уже достаточно для освещения всей плоскости: можно, например, расположить прожекторы в одной точке

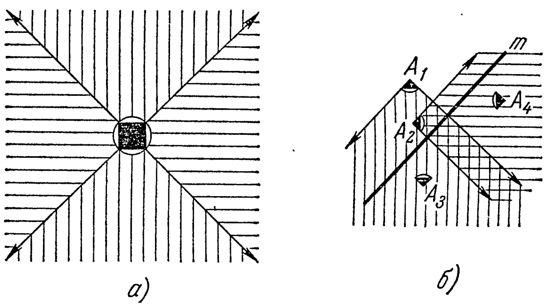


Рис. 44.

(рис. 44, *а*) [2]). Но замечательно, что всю плоскость можно также осветить четырьмя прожекторами, *расположенными в четырех* ***произвольно заданных*** *(различных) точках* A_1, A_2, A_3 и A_4 *плос-*

[1]) Он может и вовсе не пересекать этих углов.

[2]) Изображенное на рис. 44, *а* расположение четырех прожекторов «почти удовлетворяет» условиям задачи, ибо здесь освещенной оказывается вся плоскость *без четырех выходящих из рассматриваемой точки лучей.*

кости. В самом деле, проведем произвольную прямую m так, чтобы две из наших точек (скажем, точки A_1 и A_2) оказались по одну сторону от прямой m, а две другие (точки A_3 и A_4) — по другую (рис. 44, *б*). Направим установленные в точках A_1 и A_2 прожекторы так, чтобы стороны «освещенных» прямых углов были параллельны и перпендикулярны m; при этом перпендикулярные m стороны углов пусть представляют собой лучи, направленные в сторону полуплоскости, содержащей точки A_3 и A_4, а параллельные m стороны углов — лучи, направленные навстречу друг другу (причем так, чтобы освещенные лучи прямой m перекрывались и, следовательно, покрывали всю прямую; см. тот же рис. 44, *б*). При этом установленные в точках A_1 и A_2 прожекторы полностью осветят полуплоскость, содержащую точки A_3 и A_4. Точно так же полуплоскость, содержащую точки A_1 и A_2, можно полностью осветить прожекторами, установленными в точках A_3 и A_4.

б) Аналогично началу решения задачи а) устанавливаем, что для освещения всего пространства необходимо *не менее восьми* прожекторов (ибо 7 или менее «октантов» с вершиной в одной точке O не могут покрыть все пространство). Далее покажем, что 8 прожекторов, установленные в восьми произвольных точках $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8$ пространства, могут осветить все пространство. Проведем плоскость λ, разделяющую пространство на два полупространства так, чтобы в первом из них располагались 4 из наших точек — скажем, точки A_1, A_2, A_3 и A_4, — а во втором — остальные 4. Установленные в точках A_1, A_2, A_3 и A_4 прожекторы направим так, чтобы одно ребро освещенного октанта было перпендикулярно λ и было направлено в сторону полупространства, содержащего точки A_5, A_6, A_7, A_8. При этом освещенная каждым из этих прожекторов часть плоскости λ будет представлять собой прямой угол; вершинами этих прямых углов будут служить проекции A_1', A_2', A_3' и A_4' точек A_1, A_2, A_3 и A_4 на плоскость λ. В силу результата задачи а) прожекторы можно направить так, что они будут полностью освещать плоскость λ, а следовательно, и все полупространство, содержащее точки A_5, A_6, A_7 и A_8. Аналогично этому полупространство, содержащее точки A_1, A_2, A_3, A_4, можно полностью осветить прожекторами, расположенными в точках A_5, A_6, A_7 и A_8.

11. Пусть шкаф $ABCD$ находится в коридоре; выясним, в каком случае его можно внести в комнату. Условимся считать, что $a \leqslant b$; ясно, что если $a > d$, то шкаф в коридоре не поместится, а если $a > h$, то он не пройдет в дверь ширины h. Однако условия $a \leqslant d$ и $a \leqslant h$ являются лишь необходимыми; сами по себе они еще не обеспечивают возможности внести шкаф в комнату.

Будем считать, что $b > h$ (иначе шкаф в комнату, разумеется, внести можно). Вдвинем угол A шкафа в комнату и продвинем его так далеко, насколько нам позволит дверь KL (рис. 45, *а*). Затем начнем разворачивать шкаф, выдвигая вперед его меньшую сторону AB, т. е. увеличивая изображенный на рис. 45, *а* отрезок LA; другими словами, будем поворачивать шкаф $ABCD$ по часовой стрелке так, чтобы его стенки DA и AB все время упирались в края K и L двери. Для того чтобы шкаф можно было внести в комнату, его придется развернуть так, чтобы угол B шкафа совпал с точкой L (см. заштрихованное на рис. 45, *а* положение $A_0LC_0D_0$ шкафа); следовательно, вопрос заключается в том, чтобы установить условия, при которых противоположная двери KL стена l коридора не помешает таким образом повернуть шкаф.

Предположим, что шкаф внести в комнату м о ж н о. В этом случае и в его положении $A_0LC_0D_0$ расстояние d_0 от угла C_0 шкафа до стены KL не превзойдет ширины d коридора:

$$d_0 \leqslant d.$$

Обозначим через E четвертую вершину параллелограмма KLC_0E (см. рис. 45, *б*, на котором шкаф занимает то положение $A_0LC_0D_0$, о котором говорилось выше, и угол C_0 шкафа упирается в стену l коридора,

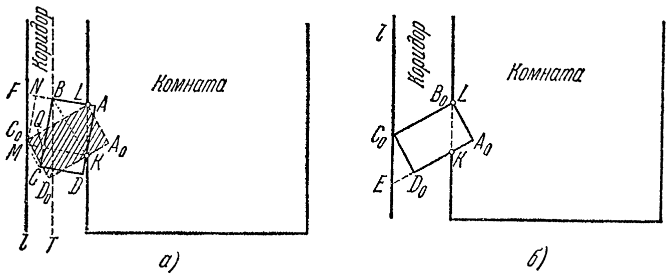


Рис. 45.

т. е. $d_0 = d$). Так как основание KL параллелограмма KLC_0E равно h, а высота d_0, опущенная на это основание $\leqslant d$, то $S_{KLC_0E} \leqslant dh$. Но, очевидно, $\triangle KLA_0 = \triangle EC_0D_0$; поэтому параллелограмм KL_0C_0E равновелик прямоугольнику $A_0LC_0D_0$, и, значит,

$$dh \geqslant S_{KLC_0E} = S_{A_0LC_0D_0} = ab.$$

Таким образом, *если шкаф можно внести в комнату, то*

$$a \leqslant d,\ a \leqslant h \text{ (где } a \leqslant b) \text{ и } ab \leqslant dh.$$

(Эти условия охватывают, очевидно, и случай $b \leqslant h$.)

Покажем теперь, что *если* $ab = dh$ (и $a \leqslant d$, $a \leqslant h$), *то шкаф внести в комнату можно*, т. е. стена l не сможет нам помешать развернуть шкаф так, чтобы он прошел в дверь. В самом деле, пусть F и M — точки пересечения прямых AB и $KM \| AB$ со стеной l коридора, N — четвертая вершина прямоугольника $AKMN$, а Q — точка пересечения прямых BC и KM (см. снова рис. 45, *а*). Так как, очевидно, $\triangle MNF = \triangle KAL$, то

$$S_{AKMN} = S_{LKMF} = h \cdot d,$$

и если $ab = dh$, то

$$ab = S_{ABCD} = S_{AKMN} \text{ и, значит, } S_{KDCQ} = S_{QBNM},$$

т. е.

$$QK \cdot QC = QB \cdot QM, \text{ или } \frac{QK}{QB} = \frac{QM}{QC}.$$

Но отсюда следует, что треугольники QKB и QMC подобны и $MC \| BK$ — а значит, точка C находится по ту же сторону от прямой l, по какую K лежит от прямой $BT \| l$, т. е. в н у т р и коридора. Таким образом, точка C попадет на прямую l лишь в тот момент, когда точка B совместится с краем L двери, и шкаф можно будет внести в комнату через дверь KL, не поворачивая его более.

Итак, *если* $a \leqslant d$, $a \leqslant h$ *и* $ab = dh$, *то шкаф можно внести в комнату* (или вынести из комнаты); тем более *это возможно*, если сторона $AB = a$ такова, как у изображенного на рис. 45, *а* шкафа, а сторона $AD = b$ м е н ь ш е, чем у него, т. е. *если* $ab < dh$ (и $a \leqslant d$, $a \leqslant h$).

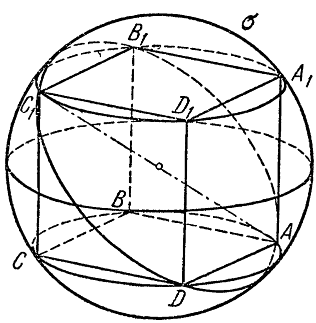


Рис. 46.

12. Опишем вокруг куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сферу σ (рис. 46); диаметром σ будет, очевидно, являться диагональ AC_1 куба. Из всех точек сферы σ эта диагональ видна под п р я м ы м углом (ибо если M — точка сферы, то плоскость AC_1M пересекает σ по окружности S, диаметром которой является отрезок AC_1; $\angle AMC_1 = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр); из любой же внутренней для сферы σ точки N диагональ AC_1 видна под т у п ы м углом (плоскость ANC_1 пересекает σ по окружности S_1, диаметром которой по-прежнему является AC_1; N — точка в н у т р и этой окружности). Но все точки куба, кроме его вершин, являются внутренними для сферы σ; поэтому из (отличных от A и C_1) *шести вершин куба диагональ* AC_1 *видна под п р я м ы м углом, а из всех остальных точек поверхности куба — под т у п ы м* (т. е. большим прямого!) *углом.*

13. Докажем сначала, что если в куб можно поместить окружность радиуса r, то ее можно расположить так, чтобы центр окружности совпал с центром куба.

Пусть O — центр куба и S_1 — лежащая внутри куба окружность радиуса r (рис. 47). Построим окружность S_2, центрально-симметричную окружности S_1 относительно точки O. В силу того, что O — центр симметрии куба, окружность S_2 тоже будет целиком лежать внутри куба, причем ее плоскость λ_2 будет параллельна плоскости λ_1 окружности S_1.

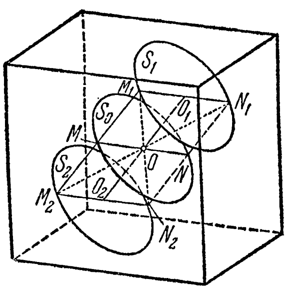


Рис. 47.

Покажем теперь, что *окружность* S_0 *радиуса* r *с центром в точке* O, *лежащая в плоскости* λ, *параллельной плоскостям* λ_1 *и* λ_2, *также будет лежать внутри куба.*

Действительно, пусть M — произвольная точка окружности S_0. Проведем плоскость O_1MO_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2. Эта плоскость содержит отрезок O_1O_2, а следовательно, и его середину — точку O. Она пересекается с плоскостями λ_1, λ и λ_2 по прямым, проходящим через центры соответствующих окружностей. Обозначим диаметры окружностей S_1, S_2 и S_0, лежащие в плоскости O_1MO_2, соответственно через M_1N_1, M_2N_2 и MN; пусть при этом точки M_1, M_2 и M лежат по одну сторону от O_1O_2. Очевидно, точка O — центр симметрии пар точек M_1 и N_2, M_2 и N_1. Значит, четырехугольник $M_1N_1N_2M_2$ — параллелограмм, и MN — его средняя линия. Поэтому M — середина отрезка M_1M_2, а N — середина N_1N_2; так как точки M_1 и M_2 лежат внутри куба, то и все точки отрезка M_1M_2, в том числе и точка M, лежат внутри него. Но M есть произвольная точка окружности S_0; следовательно, вся эта окружность лежит внутри куба. Этим наше утверждение доказано.

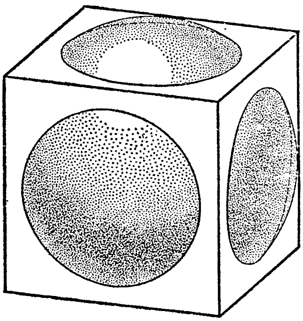


Рис. 48.

Теперь мы можем рассматривать только окружности с центром в центре куба. Пусть такая окружность радиуса r лежит внутри куба со стороной a. Построим на этой окружности как на экваторе сферу.

Если радиус окружности достаточно мал (меньше половины стороны куба), то вся сфера будет целиком лежать внутри куба. Поэтому любая другая окружность с тем же центром и того же радиуса также будет лежать внутри куба, так как она будет большой окружностью нашей сферы. Если же радиус окружности больше половины стороны (но меньше расстояния $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ от центра куба до его ребер), то вне куба окажется шесть равных сферических сегментов — «шапочек» (рис. 48).

Центрами окружностей, лежащих в основаниях шапочек, будут, очевидно, центры граней, а радиусы этих окружностей будут равны

$$\rho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

(ибо $a/2$ — это расстояние от центра куба до его граней). Отсюда следует, что ρ будет тем больше, чем больше радиус r сферы.

Построим шесть конусов, общей вершиной которых является центр O куба, а направляющими служат окружности, по которым грани куба пересекают нашу сферу (основания шапочек). Если плоскость какого-то большого круга нашей сферы пересекает хотя бы один конус, то сама окружность в некоторой части проходит по шапочке, и, значит, частично лежит вне куба. Поэтому для того, чтобы поместить в куб окружность радиуса r, надо суметь провести плоскость, не пересекающую ни один конус.

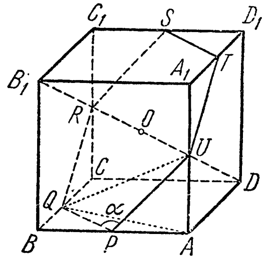


Рис. 49.

Покажем теперь, что *окружность радиуса* $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ *еще можно поместить в куб* (она будет принадлежать изображенному на рис. 49

сечению $PQRSTU$ куба, проходящему через середины P, Q, R, S, T и U ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 и A_1A), *а никакую окружность большего радиуса в куб поместить нельзя.* Заметим, что изображенная на рис. 49 плоскость λ перпендикулярна диагонали B_1D куба, ибо $B_1D \perp RU$ (так как $RU \perp$ пл. BDD_1B_1, содержащей B_1D); кроме того, $B_1D \perp PS$ (ибо $PS \perp$ пл. B_1A_1DC) и $B_1D \perp QT$. Шестиугольник $PQRSTU$ является правильным: все его стороны равны между собой (и равны $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ — половине диагонали грани куба) и все его углы равны между собой и равны 120° (ибо, скажем, $\angle UPQ = \alpha$ есть угол треугольника QPU, где $QP = PU = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и

$$QU^2 = QA^2 + AU^2 = QB^2 + BA^2 + AU^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{2};$$

поэтому

$$\frac{3a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - 2\frac{a^2}{2}\cos\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \cos\alpha = -\frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2},$$

и, значит, $\alpha = 120°$).

Ясно, что имеет смысл рассматривать только те окружности, плоскости которых не проходят через перпендикуляры к граням куба, — действительно, в последнем случае радиус окружности не может превышать расстояние $\frac{a}{2}$ от центра куба до его грани. Поэтому исключим из рассмотрения все такие плоскости. Каждая другая плоскость λ, проходящая через центр O куба, делит шестерку лучей — перпендикуляров к граням куба, проведенных через центр куба, — на две группы по три луча, образованные лучами, лежащими по какую-нибудь одну сторону от плоскости λ. (В самом деле, если какой-либо луч лежит по одну сторону от плоскости λ, то луч, ему противоположный, лежит по другую сторону λ; поэтому каждая плоскость λ делит шестерку перпендикуляров на две группы по три луча в каждой группе.) Пусть, например, $ABCD$, AA_1D_1D и CDD_1C_1 — грани куба, перпендикуляры OE, OF и OG к которым лежат по одну и ту же сторону плоскости λ (рис. 50).

Рассмотрим подробнее положение окружности S_0 радиуса $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, расположенной в плоскости λ, перпендикулярной к диагонали B_1D куба. Эта окружность вписана в правильный шестиугольник $PQRSTU$ и, значит, касается всех шести граней куба. Поэтому ее плоскость касается конусов, отвечающих шапочкам, построенным на окружностях с центрами E, F и G, по образующим OX, OY и OZ.

Предположим теперь, что в куб можно поместить окружность $\bar{S}$ радиуса $\bar{r}$, большего $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, и, как прежде, будем считать, что лучи OE, OF и OG лежат по одну сторону от плоскости $\bar{\lambda}$ окружности $\bar{S}$. Построим конусы, вырезающие соответствующие три шапочки. Радиус $\bar{r}$ окружности $\bar{S}$ больше радиуса r окружности S_0; следовательно, будут больше и радиусы направляющих окружностей (оснований шапочек). Поэтому лучи OX, OY и OZ должны лежать внутри построенных конусов, и, следовательно, по одну сторону от плоскости $\overline{\lambda}$, так как, по предположению, оси соответствующих конусов лежат по одну сторону от этой плоскости. Плоскость $\overline{\lambda}$ имеет

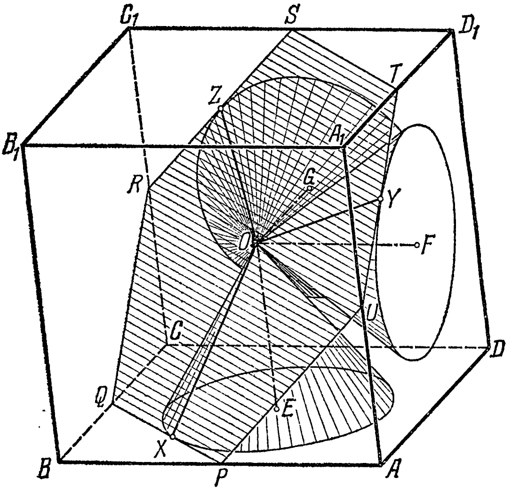


Рис. 50.

с λ общую точку O, и, следовательно, пересекает ее по некоторой прямой l.

Таким образом, одна полуплоскость плоскости λ лежит в одном ограниченном $\overline{\lambda}$ полупространстве, а другая — в другом; эти две полуплоскости разделяются проходящей через O прямой l. Но лучи OX, OY и OZ, как легко видеть, составляют друг с другом углы в 120°; поэтому *никакая прямая l не может разделить плоскость λ так, чтобы все эти лучи лежали в одной полуплоскости.* Это показывает, что любая плоскость $\overline{\lambda}$, отвечающая окружности $\overline{S}$ радиуса $\overline{r} > r$, пересекает хотя бы одну из образованных шаром радиуса $\overline{r}$ шапочек; поэтому окружность $\overline{S}$ пересечет поверхность куба и выйдет за его пределы.

До сих пор мы рассматривали случай, когда шар пересекается с плоскостью каждой грани по окружности, лежащей внутри самой грани. Если же радиус шара будет больше чем $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (но меньше радиуса $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ описанного вокруг куба шара), то шапочки пересекут друг друга, и наша модель (рис. 48) приобретет вид шара с восемью выступающими углами куба. Однако наши выводы и в этом случае останутся в силе, так как в доказательстве мы нигде не использовали того, что шапочки не пересекаются.

Итак, мы доказали, что в куб нельзя поместить окружность, радиус которой больше чем $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Заметим, что в куб можно поместить *четыре* разные окружности максимального возможного радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ (по числу диагоналей куба).

14. Легко видеть, что куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно разбить на *пять* тетраэдров: если отсечь от него тетраэдры $BACB_1$ и $DACD_1$, а также тетраэдры $A_1B_1D_1A$ и $C_1B_1D_1C$, то у нас останется еще (пятый) тетраэдр ACB_1D_1 (рис. 51; тетраэдр ACB_1D_1 является даже правильным). Труднее установить, что *меньше, чем на пять* тетраэдров куб разбить нельзя.

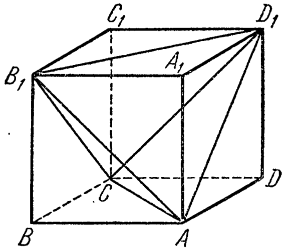


Рис. 51.

Действительно, предположим, что куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ разбит на некоторое число тетраэдров. При этом грань $ABCD$ куба разбивается на части, являющиеся гранями не менее чем двух тетраэдров (квадрат $ABCD$ может быть разбит на два или большее число треугольников), причем сумма площадей оснований этих тетраэдров равна a^2, а высота каждого из них не больше a; поэтому сумма объемов примыкающих к грани $ABCD$ тетраэдров разбиения не превосходит $\frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}$. Аналогично этому к грани $A_1B_1C_1D_1$ куба примыкают не менее двух тетраэдров, причем общий объем этих тетраэдров также не превосходит $\frac{a^3}{3}$. Так как ни один тетраэдр не может одновременно иметь граней, являющихся частью квадрата $ABCD$ и частью квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (ибо никакой тетраэдр не имеет параллельных граней!), то мы уже имеем не менее четырех тетраэдров, причем общее число тетраэдров разбиения этим еще не исчерпывается, поскольку общий объем указанных тетраэдров не превышает $\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3$, т. е. меньше объема a^3 куба. Отсюда и вытекает, что *число тетраэдров разбиения не может быть меньше пяти.*

15. Заметим, что никакая прямая не может пересекать стороны многоугольника в нечетном числе точек, поскольку иначе при движении по этой прямой в определенном направлении мы, зайдя последний раз внутрь многоугольника, не могли бы уже покинуть его пределы. Поэтому каждая сторона четырехугольника может иметь не более четырех точек пересечения с контуром пятиугольника. Отсюда следует, что общее число точек пересечения сторон четырехугольника и пятиугольника не может превосходить $4 \times 4 = 16$. То, что это число может равняться 16, следует из рис. 52.

16. Условимся считать, что все стороны 14-угольника «горизонтальны» или «вертикальны». Ясно, что при этом ровно 7 сторон являются горизонтальными (и 7—вертикальными): ведь из каждой вершины исходит одна горизонтальная (и одна вертикальная) сторона. Суммируя по всем 14 вершинам, мы насчитаем 14 горизонтальных сторон; но при этом каждая сторона будет сосчитана дважды

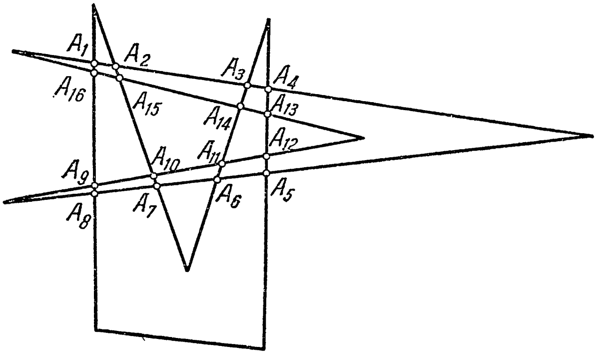


Рис. 52.

(соответственно двум ее вершинам). Далее, самая высокая и самая низкая из горизонтальных сторон 14-угольника вовсе не могут содержать точек самопересечения с другими сторонами (ибо выше, соответственно ниже, этих сторон нет вершин многоугольника); 2-я сверху и 2-я снизу стороны могут содержать лишь по две точки самопересечения сторон (ибо выше, соответственно ниже, этих сторон имеются лишь 2 вершины); 3-я сверху и 3-я снизу из горизонтальных сторон могут содержать по 4 точки самопересечения (выше и ниже этих сторон имеются по 4 вершины 14-угольника). Наконец, средняя по высоте горизонтальная сторона может содержать не более 6 точек самопересечения, ибо и выше и ниже ее лежат 6 вершин 14-угольника; однако на самом деле и число 6 здесь невозможно, ибо в противном случае каждая вершина, лежащая выше этой средней стороны, оказалась бы соединенной с одной из нижних вершин и наоборот, и, значит, вершины, принадлежащие само́й «средней» стороне, не были бы соединены ни с какими другими вершинами.

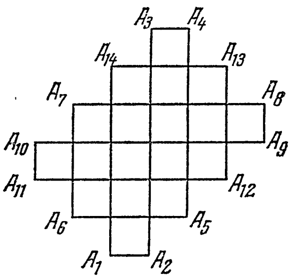


Рис. 53.

Итак, наибольшее возможное число точек самопересечения нашего 14-угольника равно

$$2+4+5+4+2=17;$$

то, что такое число точек самопересечения возможно, показывает пример (рис. 53).

17. Укажем сразу решение задачи в), а именно докажем, что *наибольшее число частей, на которые могут разбить плоскость два выпуклых n-угольника, равно* $2n+2$; отсюда уже будет следовать, что два треугольника могут разбить плоскость не более чем на 8 частей (задача а); см. рис. 54, *а*), а два прямоугольника — не более чем на 10 частей (задача б); см. рис. 54, *б*).

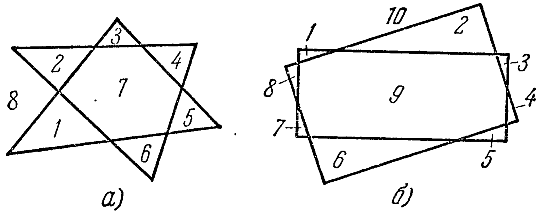


Рис. 54.

Части, на которые разбивают плоскость два выпуклых n-угольника, можно охарактеризовать следующим образом:

1) (одна) часть, расположенная внутри обоих многоугольников (если она имеется);

2) (одна) часть, расположенная вне обоих многоугольников;

3) части, расположенные внутри одного многоугольника и вне другого.

Задача, таким образом, состоит в том, чтобы определить наибольшее возможное число частей 3-го типа.

Каждая такая часть плоскости представляет собой многоугольник, наименьшее число сторон которого равно трем. С другой стороны, каждая сторона одного многоугольника в результате пересечения со вторым (выпуклым!) многоугольником может оказаться разбитой не больше чем на три части (рис. 55, *а*); поэтому общее число сторон

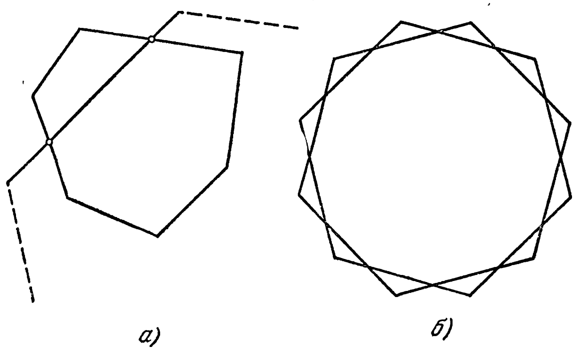


Рис. 55.

всех частей 3-го типа не превосходит $3n+3n$. Но никакой отрезок не может явиться границей сразу д в у х частей плоскости 3-го типа (ибо если по одну сторону от него лежит часть плоскости, внешняя для одного многоугольника и внутренняя для второго, то по другую сторону обязательно лежит часть плоскости либо внешняя, либо внутренняя для обоих многоугольников, т. е. часть плоскости 1-го или 2-го типа); следовательно, число частей 3-го типа не превосходит

$\frac{6n}{3}=2n$. Итак, общее число частей, на которые два выпуклых n-угольника делят плоскость, не превосходит

$$1+2n+1=2n+2.$$

То, что число частей может равняться $2n+2$, показывает пример двух правильных n угольников с общим центром, один из которых получается из другого поворотом на угол, не кратный $360°/n$ (рис. 55, *б*).

18. а) Граница квадрата и окружность могут делить плоскость на части следующих типов:

1) часть, расположенная вне квадрата и вне окружности; такая часть всегда *одна*;

2) часть, расположенная внутри квадрата и внутри окружности; если квадрат не пересекает окружность, то таких частей *нет*; в противном случае есть *одна* такая часть;

3) часть, расположенная вне окружности, но внутри квадрата; такая часть всегда содержит хоть один угол квадрата, и поэтому для краткости мы ее назовем «углом»; число «углов» не превышает числа углов квадрата, т. е. *четырех*;

4) часть, расположенная вне квадрата, но внутри окружности; если окружность и квадрат пересекаются, то в границу такой части («сегмента») входит отрезок хоть одной из четырех сторон квадрата; поэтому общее число «сегментов» не может превосходить числа сторон квадрата, т. е. *четырех*.

Таким образом, наибольшее число частей, на которые квадрат и окружность могут делить плоскость, равно

$$1+1+4+4=10$$

(рис. 56, *а*). Наименьшее число частей, на которое квадрат и окружность могут разбить плоскость, равно, очевидно, трем — каждая линия уже делит плоскость на 2 части, а поскольку они различные, то вторая линия увеличивает число частей не меньше чем на 1 (рис. 56, *б*, *в*). Нетрудно видеть, что число частей, на которые квадрат и окружность разбивают плоскость, может равняться любому числу N, где $3 \leqslant N \leqslant 10$ (рис. 56, *а*—*и*; в скобках всюду указаны число $У$ «углов» и число C «сегментов»).

б) Сфера и поверхность куба могут делить пространство на части четырех типов:

1) вне сферы и куба (всегда существует 1 такая часть);

2) внутри сферы и куба (может существовать 0 или 1 часть);

3) вне сферы, но внутри куба (в такую часть должен войти по меньшей мере один трехгранный угол куба — для краткости такую часть будем называть «углом»; число их не превышает числа вершин куба, т. е. 8);

4) вне куба, но внутри сферы (если сфера и куб пересекаются, то в границу такой части должна входить по меньшей мере одна плоская площадка — такую часть назовем «шапкой»; число их не превышает числа граней куба, т. е. 6).

Таким образом, *число всех частей не может превышать*

$$1+1+8+6=16.$$

На рис. 57 приведен случай взаимного положения шара и куба, когда число частей, на которые обе поверхности разбивают

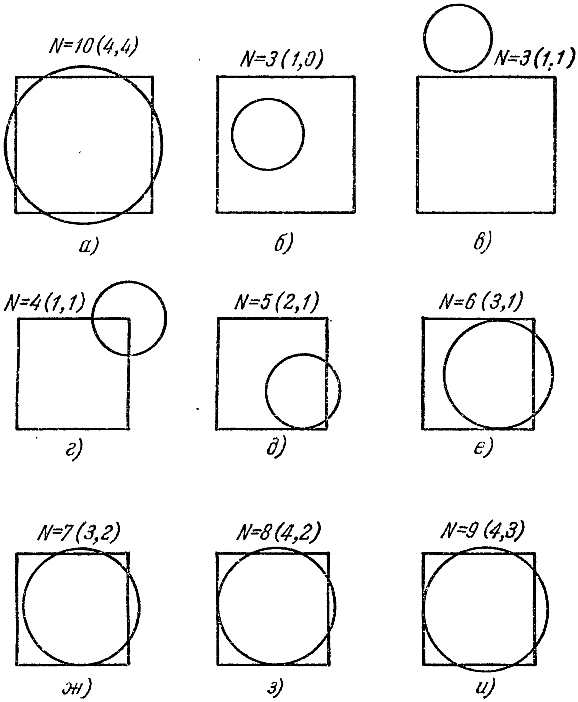


Рис. 56.

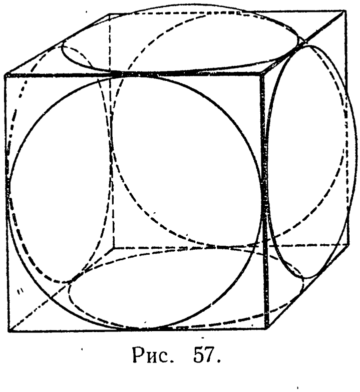


Рис. 57.

пространство, м а к с и м а л ь н о, т. е. равно 16 (шар касается всех *ребер* куба).

Н а и м е н ь ш е е число частей, на которые сфера и куб могут делить пространство, равно, очевидно, 3 (ср. решение задачи а)). Поэтому *общее число частей заключается между* 3 *и* 16.

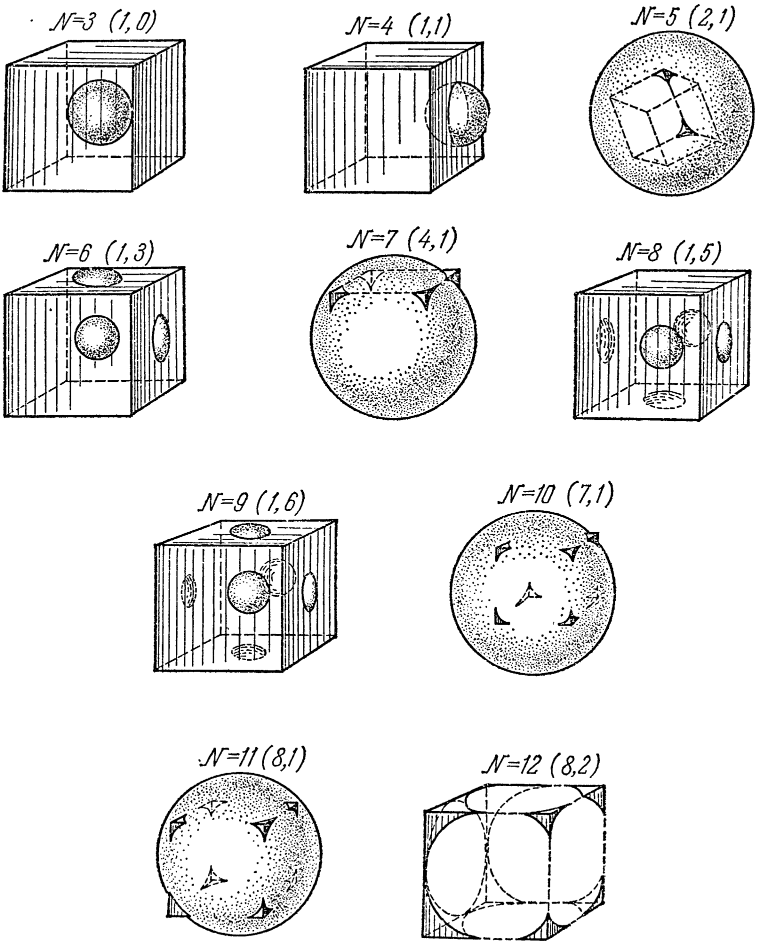


Рис. 57а.

На рис. 57а приводятся примеры, когда *число частей равно* 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (в скобках — число «углов» *У* и число «шапок» *Ш*). Докажем теперь, что *на* 13, 14 *или* 15 *частей сфера и поверхность куба делить пространство* *н е м о г у т*.

Разбиение пространства на 13, 14 или 15 частей может достигаться лишь при следующих значениях (*У*, *Ш*): (8, 3), (8, 4), (8, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (6, 5), (6, 6) и (5, 6); докажем, что ни одно из этих значений пара (*У*, *Ш*) принимать не может. Оставив пока без внимания «крайние» значения (8, 3) и (5, 6), заметим, что во всех остальных случаях $Ш \geqslant 4$, $У \geqslant 6$. Но если ребро AB куба целиком лежит внутри сферы, то плоскости четырех сходящихся в вершинах A и B граней куба отсекают от ограниченного нашей сферой шара четыре шаровых сегмента, которые все вместе образуют *одну* часть пространства, заключенную внутри сферы и вне куба; поэтому число *Ш* «шапок», в максимальном случае равное 6, здесь не может превосходить 3. Поэтому при $Ш \geqslant 4$ все 12 ребер куба должны пересекать сферу, касаться ее или лежать вне сферы, т. е. взаимное расположение сферы и куба должно охватываться следующей таблицей:

Число «шапок» / Число ребер	6	5	4	
пересекающих сферу	0	1	2	3
касающихся сферы или лежащих вне ее	12	11	10	9

(Число «шапок», в максимальном случае равное 6, может уменьшаться лишь за счет наличия у куба ребра, пересекающего сферу или лежащего внутри нее.)

Число касающихся сферы ребер не может превосходить 6. В самом деле, если бы их было 7 или больше, то по меньшей мере 3 из них принадлежали бы одной грани куба: ведь если бы среди четырех ребер, ограничивающих каждую грань куба, сферы касались бы не больше двух, то общее число ребер куба, касающихся сферы, не могло бы превзойти $\frac{1}{2}(2\cdot 6) = 6$. (Произведение $2\cdot 6$ мы делим на 2, ибо при подсчете ребер «по граням» каждое ребро засчитывается дважды.) Но если сферы касаются три ребра, принадлежащие одной грани α куба, то сфера пересекает плоскость α по вписанной в грань α окружности, и центр сферы находится на оси симметрии a куба, перпендикулярной грани α. Двигая центр сферы по прямой a, мы убеждаемся, что в этом случае пара (*У*, *Ш*) может принимать следующие значения: (1, 1), (1, 5), (1, 6) и (8, 6) (значение (8, 6), отвечающее максимальному числу 16 частей пространства, достигается тогда, когда сфера пересекает д в е грани α и β по вписанным в эти грани окружностям); но ни одно из этих значений (*У*, *Ш*) не совпадает с интересующими нас. Таким образом, из числа 9 или более касающихся сферы или лежащих вне ее ребер куба вне сферы лежат не менее трех, в силу чего число *У* «углов», в максимальном случае равное 8, уменьшается не меньше чем на 3 и не может превзойти 5. Этим доказана невозможность значений (8, 4), (8, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (6, 5) и (6, 6) пары (*У*, *Ш*).

Значение (5, 6) пары (*У*, *Ш*) невозможно потому, что при $Ш=6$ все 12 ребер куба касаются сферы или лежат вне ее (см. таблицу выше); но при этом вне сферы по доказанному должны лежать не меньше 6 ребер куба и, следовательно, число *У* «углов» никак не может равняться 5 (оно не может превосходить 2).

Рассмотрим, наконец, значение (8, 3) пары (*У*, *Ш*). Из равенства $У=8$ следует, что все 12 ребер куба пересекают сферу или касаются ее; но поскольку мы установили, что число касающихся сферы ребер не может превосходить 6, то по меньшей мере 6 ребер пересекают сферу. Но (фактически мы уже пользовались этим выше) наличие пересекающего сферу ребра AB куба приводит к уменьшению на единицу общего числа *Ш* «шапок», ибо и в этом случае плоскости примыкающих к AB граней α и β куба отсекают от ограниченного сферой шара сегменты, составляющие вместе одну часть пространства, заключенную внутри сферы и вне куба; поэтому при $У=8$ обязательно $Ш \leqslant 2$, что и доказывает невозможность случая $(У, Ш)=(8, 3)$.

[Заметим, что в задаче а) в случае наибольшего возможного числа $N=10$ частей плоскости, мы можем, задав квадрат, по-разному расположить окружность так, что N будет равно 10. Иной характер имеет случай наибольшего возможного числа $N=16$ частей пространства в задаче б): здесь для данного куба можно указать единственную («твердо скрепленную» с кубом) сферу, такую, что куб и сфера делят пространство на 16 частей.]

19. Первое решение. Предположим, что мы имеем какое-то разбиение треугольника T на части, удовлетворяющее условию задачи (см., например, рис. 58, где число сходящихся в одном узле отрезков $k=4$). Пусть A — один из узлов нашей сети линий; тогда сумма всех углов A примыкающих к точке A областей разбиения (включая сюда и «внешнюю» область T_1, так сказать, «океан», окружающий «остров» T, разбитый на некоторое число C треугольных «стран») равна 360°, так что общая сумма всех углов всех областей — C треугольников и области T_1, внешней к треугольнику T, — равна $360°\,У$, где через *У* обозначено общее число узлов (включая сюда и три вершины треугольника T). С другой стороны, общая сумма углов C треугольников и области T_1, очевидно, равна

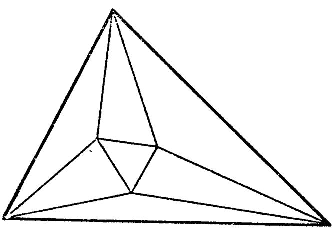


Рис. 58.

$$180°\cdot C+(3\cdot 360°-180°)=180°\cdot C+900°,$$

где последнее слагаемое выражает сумму углов области T_1. Таким образом, имеем

$$360°\cdot У=180°\cdot C+900°, \quad \text{или} \quad 2У=C+5. \qquad (*)$$

Воспользуемся теперь тем, что из каждого узла исходит одно и то же число k отрезков — «границ» между «странами» (к числу «стран» здесь причисляется и «океан» T_1). Суммируя отрезки, выходящие из каждого из *У* узлов, мы получим число $kУ$, равное, очевидно, удвоенному числу $Г$ границ, поскольку каждый отрезок засчитывается дважды в соответствии с двумя узлами, которые он соединяет:

$$kУ = 2Г.$$

А так как, с другой стороны, каждая из $C+1$ «стран» (включая сюда и «океан» T_1) имеет по 3 границы, причем каждая граница разделяет две «страны», то также получаем

$$3(C+1) = 2Г, \quad \text{т. е.} \quad C+1 = \frac{2Г}{3} = \frac{kУ}{3}, \quad \text{или} \quad C = \frac{k}{3}У - 1. \qquad (**)$$

Из равенств (*) и (**) следует

$$C = \frac{k}{3}У - 1 = \frac{k}{6}(2У) - 1 = \frac{k}{6}(C+5) - 1 = \frac{k}{6}C + \frac{5}{6}k - 1,$$

откуда без труда получаем

$$(6-k)C = 5k - 6, \quad \text{или} \quad C = \frac{5k-6}{6-k}.$$

Последнее выражение для C является положительным лишь при $k=2$, 3, 4 и 5; при этом $C=1$, 3, 7 и 19. Все эти значения C являются возможными (см. рис. 58 и 59, *а*—*в*); самое большое из них — значение $C=19$.

Итак, *наибольшее число треугольников, на которые можно разбить треугольник T с соблюдением условий задачи, равно* 19 (рис. 59, *в*).

Второе решение. Сохраним обозначения 1-го решения задачи. Заметим, что для любого разбиения «острова» T на области (для любой «карты» на «острове» T)

$$C - Г + У = 1 \qquad (Э)$$

(теорема Эйлера[1])). При этом в нашем случае

$$3(C+1) = 2Г, \quad \text{т. е.} \quad Г = \frac{3}{2}C + \frac{3}{2},$$

поскольку каждая «страна» (включая сюда и внешнюю область T_1 — «океан») имеет по 3 границы (является треугольником или внешностью треугольника) и по каждой границе соприкасаются 2 страны; далее

$$kУ = 2Г, \quad \text{т. е.} \quad У = \frac{1}{k}(2Г) = \frac{3}{k}C + \frac{3}{k},$$

ибо из каждого узла исходят k границ и каждая граница соединяет 2 узла. Подставив полученные выражения для $Г$ и для $У$ в основное соотношение (Э), получаем

$$C - \frac{3}{2}C - \frac{3}{2} + \frac{3}{k}C + \frac{3}{k} = 1, \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{k} - \frac{1}{2}\right)C = \frac{5}{2} - \frac{3}{k},$$

---

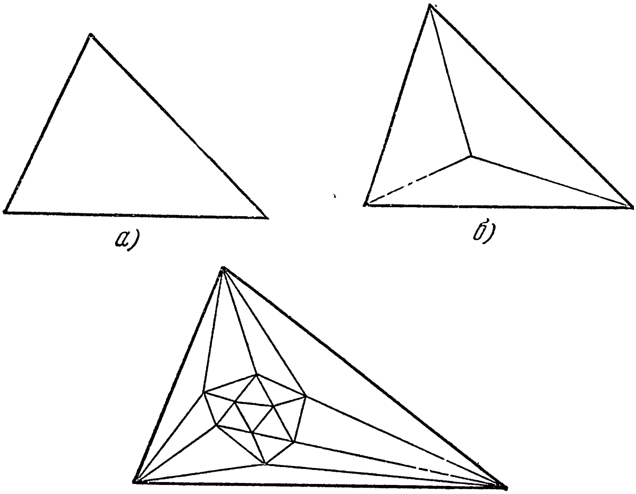
[1]) См., например, книги Р. Курант и Г. Роббинс [2]; Д. Пойя [3]; Г. С. М. Коксетер [12]; Л. Фейеш Тот [21]; И. М. Яглом [27] или Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, Физматгиз, 1965, тема 13; И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом, О математической индукции, «Наука», 1967; Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, Геометрия (стереометрия), Гостехиздат, 1954, задача 48.

откуда снова получаем

$$C=\frac{5k-6}{6-k},$$

и далее, рассуждаем как в 1-м решении задачи.

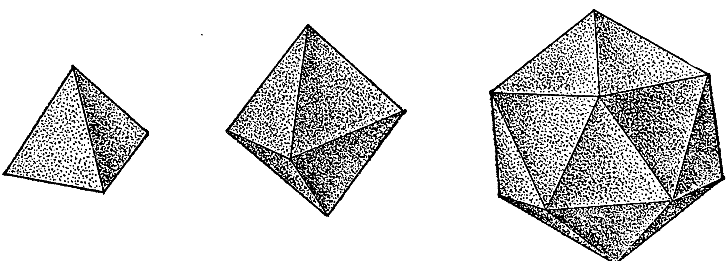
Примечание. Нетрудно пояснить происхождение разбиений треугольника T, изображенных на рис. 58 и 59, *а—в*. Рассмотрим



а) б) в)

Рис. 59.

(правильный) многогранник с треугольными гранями, в каждой вершине которого сходится k ребер; случаям $k=3$, 4 и 5 отвечают



а) б) в)

Рис. 60.

случаи тетраэдра (рис. 60, *а*), октаэдра (8-гранника; рис. 60, *б*) и икосаэдра (20-гранника; рис. 60, *в*). Спроектировав поверхность каждого из этих многогранников на грань T многогранника из точки, достаточно близкой к плоскости треугольника T, мы получим разбиение T на треугольники, удовлетворяющее условиям настоящей задачи.

20. а) Легко видеть, что в образовании каждого из многоугольников разбиения могут участвовать не более двух диагоналей, выходящих из одной вершины. Таким образом, через каждую вершину 13-угольника проходят не более чем две стороны многоугольника разбиения; при этом в произведении $13 \cdot 2$ каждая сторона многоугольника разбиения считается дважды, так как она проходит через две вершины 13-угольника. Следовательно, число сторон многоугольника разбиения не может быть больше

$$\frac{13 \cdot 2}{2} = 13.$$

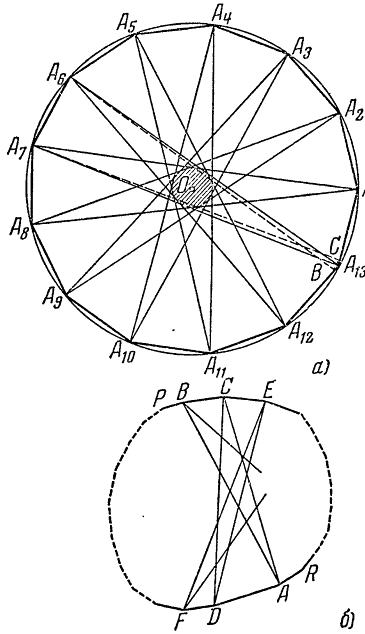


Рис. 61.

Легко показать, что существуют 13-угольники, у которых некоторые из образованных указанным способом многоугольников разбиения имеют ровно 13 сторон. Возьмем правильный 13-угольник и проведем все его диагонали (рис. 61, *а*). Ясно, что ни одна из них не проходит через центр O описанной окружности. Многоугольник, внутри которого лежит центр, должен иметь не менее 13 сторон, так как при повороте вокруг центра на $360°/13$ он совмещается сам с собой (при таком повороте самосовмещается сам исходный многоугольник, и, следовательно, каждая его диагональ переходит в другую диагональ).

Примечание. Нетрудно видеть, что если n — произвольное нечетное число, то наибольшее число сторон, которое может иметь многоугольник, полученный в результате разбиения выпуклого n-угольника на части всеми его диагоналями, равно n.

б) Выше для случая 13-угольника было показано, что никакой многоугольник разбиения не может иметь больше сторон, чем исходный n-угольник; это рассуждение сохраняет силу для любого n. Покажем теперь, что если исходный многоугольник имел 1950 сторон, то число сторон у многоугольника разбиения обязательно должно быть меньше 1950. Как и ранее, в образовании любого многоугольника разбиения могут участвовать не более двух выходящих из одной вершины диагоналей исходного многоугольника. Пусть теперь A есть некоторая вершина 1950-угольника, из которой исходят две диагонали AB и AC, участвующие в образовании многоугольника разбиения, имеющего наибольшее число сторон (рис. 61, *б*). Очевидно, что B и C — соседние вершины многоугольника, так как иначе из вершины A выходила бы диагональ, разбивающая наш многоугольник на две части. Рассматриваемый многоугольник разбиения заключен внутри угла BAC; поэтому сторонами его могут служить только диагонали, соединяющие какую-либо из вершин ломаной $ADF \ldots PB$ с вершинами ломаной $CE \ldots RA$. Но общее число вершин обеих этих ломаных, не считая концов A, B и C, равно $1950-3=1947$. Поэтому хотя бы одна из этих ломаных имеет не больше чем 973 вершины; пусть это будет, например, ломаная $ADF \ldots PB$. В таком случае в образовании рассматриваемого многоугольника разбиения участвуют не больше чем $2 \cdot 973$ диагоналей, выходящих из вершин D, F, $\ldots$, P этой ломаной, и, кроме этого, еще диагонали AB и AC исходного многоугольника и, быть может, еще одна отличная от BA диагональ многоугольника, проходящая через вершину B. Таким образом, число сторон многоугольника разбиения не может быть больше чем

$$2 \cdot 973+3=1949.$$

С другой стороны, нетрудно построить такой 1950-угольник, у которого найдется многоугольник разбиения, имеющий ровно 1949 сторон. Чтобы показать это, возьмем правильный 1949-угольник. У него имеется многоугольник разбиения с 1949 сторонами (сравните с решением задачи *а*)). Срежем теперь одну из вершин исходного многоугольника так, чтобы полученная сторона нового 1950-угольника была очень короткой. Вершины полученного 1950-угольника будут близки к вершинам правильного 1949-угольника. Поэтому центральный правильный 1949-угольник разбиения хотя и превратится в неправильный, однако число его сторон не уменьшится (ср. с рис. 61, *а*, на котором пунктиром изображено построение 14-угольника, у которого существует многоугольник разбиения, имеющий 13 сторон).

Примечание. Нетрудно видеть, что если n — произвольное четное число, то наибольшее число сторон, которое может иметь многоугольник, полученный в результате разбиения выпуклого n-угольника на части всеми его диагоналями, равно $n-1$.

21. а) Рассмотрим какое-нибудь звено нашей 13-звенной ломаной. На этом звене может лежать не больше 10 точек самопересечения — ведь всего ломаная имеет 13 звеньев, а 3 из них (само рассматриваемое звено и два соседних с ним) заведомо не пересекают его. Отсюда следует, что общее число точек самопересечения не может превосходить $\frac{13 \cdot 10}{2}=65$ (65 точек самопересечения будет в том случае, если каждое звено пересекает ровно 10 других звеньев; в произведении $13 \cdot 10$ каждая точка самопересечения считается дважды, так как в этой точке пересекаются два звена).

Нетрудно видеть, что 13-звенная ломаная может иметь 65 точек самопересечения. Примером такой ломаной может служить правильный звездчатый 13-угольник, который образуется, если точки, делящие окружность на 13 равных частей, соединять хордами, отсекающими $^6/_{13}$ частей окружности (см. рис. 62, где для большей ясности изображена не 13-звенная ломаная с 65 точками самопересечения, а семизвенная ломаная, имеющая $\frac{7 \cdot 4}{2}=14$ точек самопересечения).

Примечание. Совершенно аналогично показывается, что наибольшее возможное число точек самопересечения замкнутой n-звенной ломаной, где n — какое угодно нечетное число, равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

б) Как и в задаче 20 здесь очень существенна *четность* или *нечетность* числа звеньев ломаной. В случае, когда число

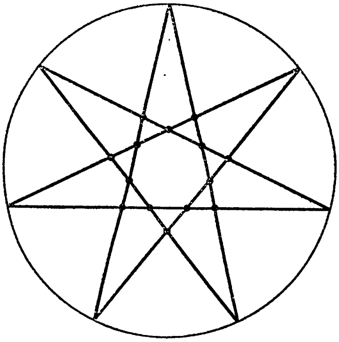


Рис. 62.

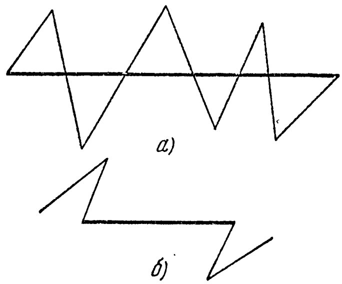


Рис. 63.

звеньев n четно, по-прежнему можно утверждать, что число точек самопересечения не превосходит $\frac{n(n-3)}{2}$ (ср. решение задачи а), в частности примечание к этому решению); однако в этом случае, как легко видеть, число точек самопересечения никогда не может быть равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Действительно, для того чтобы число точек самопересечения ломаной было равно $\frac{n(n-3)}{2}$, необходимо, чтобы каждое звено ломаной пересекалось со всеми $n-3$ звеньями, с ним не соседними. Но если звено замкнутой n-звенной ломаной, где n четно, пересекается с $n-3$ звеньями, то это значит, что два звена, соседние с данным, расположены по разные стороны от него (рис. 63, *а*). А если каждое звено ломаной обладает этим свойством, то два звена, расположенные через одно от данного, тоже не могут пересекать его (рис. 63, *б*).

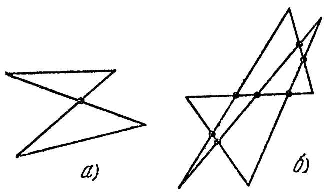


Рис. 64.

Нетрудно видеть, что наибольшее число точек самопересечения четырехзвенной ломаной равно 1 (рис. 64, *а*); можно установить, что наибольшее число точек самопересечения шестизвенной ломаной равно 7 (рис. 64, *б*). Обращаясь теперь к случаю произвольного числа n звеньев ломаной, покажем прежде всего, что *для каждого четного n существует n-звенная замкнутая ломаная, имеющая* $\frac{n(n-4)}{2}+1$ *точек* *самопересечения.* Для того чтобы построить такую ломаную, разделим окружность на n равных частей и соединим точки деления хордами, отсекающими $\frac{n}{2}-1$ частей окружности (аналогично тому, как мы поступали в случае нечетного n). Мы получим ломаную, имеющую $\frac{n(n-4)}{2}$ точек самопересечения (каждое звено пересекается с $n-4$ другими звеньями). При этом, если n не делится на 4, го эта ломаная распадается на две не связанные между собой части (на рис. 65, *а*

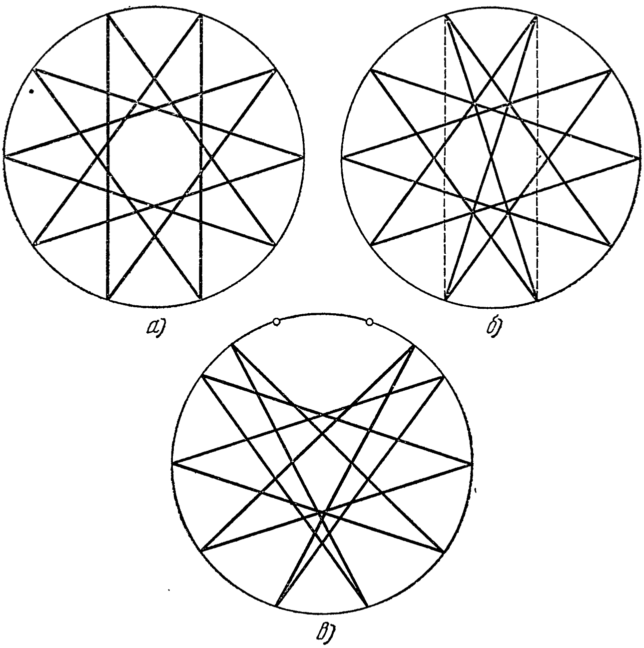


Рис. 65.

изображен именно такой случай, отвечающий значению $n=10$); для нас, однако, это не будет важно. Отбросим в нашей ломаной две параллельные хорды и заменим их диаметрами, соединяющими попарно те же четыре точки; при этом, если даже первоначальная ломаная распадалась на две части, новая ломаная не будет распадаться (рис. 65, *б*). При этом число точек самопересечения ломаной увеличивается на одну точку — центр окружности. Правда, если новые звенья ломаной пройдут через точки пересечения старых звеньев (рис. 65, *б*), то несколько точек самопересечения ломаной сольются в одну, и общее количество точек самопересечения уменьшится; однако, сдвинув один конец каждого из новых звеньев по окружности на малое расстояние, мы получим ломаную, никакие три звена которой уже не проходят через одну точку (рис. 65, *в*). Число точек самопересечения этой ломаной будет равно $\frac{n(n-4)}{2}+1$.

В частности, существует 1950-звенная замкнутая ломаная, имеющая

$$\frac{1950\cdot 1946}{2}+1=1\,897\,351$$

точку самопересечения.

Покажем теперь, что *n-звенная ломаная, где n четно, не может иметь больше чем* $\frac{n(n-4)}{2}+1$ *точек самопересечения.* Доказательство проведем методом математической индукции. Прежде всего совершенно очевидно, что замкнутая четырехзвенная ломаная не может иметь больше одной точки самопересечения. Теперь предположим, что мы уже показали, что n-звенная ломаная (где n четно) не может иметь больше $\frac{n(n-4)}{2}+1$ точек самопересечения; покажем, что в таком случае никакая $(n+2)$-звенная ломаная не может иметь больше $\frac{(n+2)(n-2)}{2}+1$ точек самопересечения.

Предположим, что это не так, т. е. что некоторая $(n+2)$-звенная ломаная имеет больше $\frac{n^2-4}{2}+1$ точек самопересечения. Пару соседних звеньев ломаной назовем «углом». Нетрудно видеть, что рассматриваемая ломаная должна иметь хоть один «угол», имеющий $2n-3$ или больше точек самопересечения; действительно, если бы каждый «угол» ломаной содержал не больше $2n-4$ точек самопересечения, то общее число таких точек не превосходило бы $\frac{(n+2)(2n-4)}{4}=\frac{n^2-4}{2}$ (в произведении $(n+2)\cdot(2n-4)$, где $n+2$ — число «углов», каждая точка самопересечения считается четыре раза, так как она принадлежит двум звеньям, а следовательно, четырем «углам»). Пусть AB и BC — звенья ломаной, образующие такой «угол»; CD и KA — звенья, соседние с этим «углом». Но так как $n+2$ четно, то звено ломаной может иметь $(n+2)-3=n-1$ точку самопересечения только в том случае, если соседние с ним звенья расположены по разные стороны от этого звена (см. выше рис. 63, *а*); при этом два соседних с данным звена должны располагаться каждый по одну сторону от своих соседних. Больше чем $n-1$ точек самопересечения никакое звено $(n+2)$-звенной ломаной иметь не может. Таким образом мы заключаем, что одно из двух звеньев AB и BC (пусть для определенности это будет звено AB) должно содержать $n-1$ точку самопересечения ломаной, а второе звено содержит $n-2$ такие точки, причем звенья KA, AB, BC и CD должны быть расположены так, как изображено на рис. 66; при этом все звенья ломаной, кроме KA и CD, должны пересекать и AB и BC. Далее рассмотрим два случая, которые изображены на рис. 66, *а* и *б*.

1°. *Прямая KA пересекает отрезок BC* (рис. 66, *а*). В этом случае KA пересекает отрезок CD в некоторой точке S.

Заменим нашу ломаную новой, отбросив звенья AB и BC, сократив звено CD до SD и продолжив звено KA до KS. Так как все звенья ломаной, кроме KA и CD, пересекают AB и BC, то каждое из этих звеньев, которое пересекает отрезок CS, пересекает также и отрезок SA. Поэтому число точек самопересечения нашей новой ломаной меньше числа точек самопересечения первоначальной ломаной

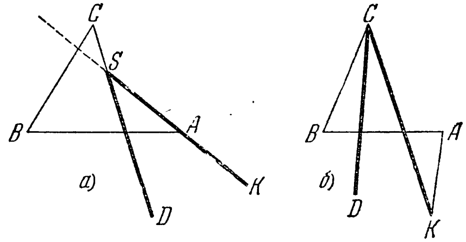


Рис. 66.

ровно на $(2n-3)$ — на число точек самопересечения, принадлежащих «углу» ABC. А так как первая ломаная имела не меньше $\frac{n^2-4}{2}+2$ точек самопересечения, то новая ломаная имеет не меньше чем

$$\frac{n^2-4}{2}+2-(2n-3)=\frac{n(n-4)}{2}+3$$

таких точек. Но это невозможно, ибо, по предположению, n-звенная ломаная не может иметь больше $\frac{n(n-4)}{2}+1$ точек самопересечения.

2°. *Прямая KA не пересекает отрезка BC* (рис. 65, *б*). В этом случае четырехугольник $KACB$ является выпуклым; поэтому каждый отрезок, который пересекает его стороны KA и CB, пересекает также его диагональ KC. В частности, каждое звено ломаной, кроме CD, которое пересекает звено KA, пересекает также и отрезок CK (ибо каждое звено ломаной, кроме CD, BA и AK, пересекает BC). Заменим теперь нашу ломаную новой, откинув звенья AB, BC и AK и прибавив новое звено CK. Число точек самопересечения новой ломаной меньше числа точек самопересечения старой ломаной на $2n-3$ точек, принадлежащих «углу» ABC, и еще, может быть, на одну точку пересечения CD и AK (если таковая имелась). Поэтому число ее точек самопересечения не меньше чем

$$\frac{n^2-4}{2}+2-(2n-3)-1=\frac{n(n-4)}{2}+2,$$

что также невозможно.

Полученное противоречие и показывает, что $(n+2)$-звенная ломаная, имеющая больше чем $\frac{n^2-4}{2}+1$ точек самопересечения, не может существовать.

Отсюда в силу принципа индукции следует, что наибольшее возможное число точек самопересечения n-звенной замкнутой ломаной, где n четно, равно $\frac{n(n-4)}{2}+1$. В частности, *1950-звенная ломаная не может иметь больше* 1 897 351 *точки самопересечения.*

22. а) Проведем через все вершины многоугольника M прямые, параллельные стороне AB. Тогда многоугольник разобьется на ряд треугольников и трапеций (рис. 67). Площадь каждого из этих треугольников и трапеций равна длине средней линии, умноженной на высоту. Если бы все средние линии были не больше $^1/_2$, то площадь каждого треугольника или трапеции была бы не больше половины высоты и, следовательно, площадь всего многоугольника M была бы не больше половины суммы всех высот рассматриваемых треугольников и трапеций, т. е. не больше $^1/_2$ (так как сумма всех высот не больше $AD=1$), что противоречит условию.

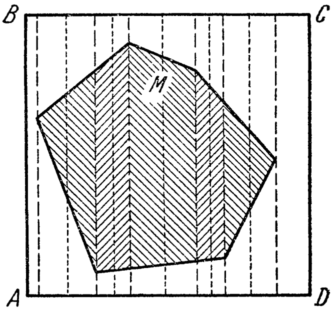


Рис. 67.

Таким образом, средняя линия какого-нибудь из треугольников или трапеций должна быть больше $^1/_2$.

Прямая, на которой лежит эта средняя линия, и будет искомой.

Примечание. Из доказательства видно, что если многоугольник M не предполагать выпуклым, то найдется прямая $l \parallel AB$, пересекающая многоугольник по отрезкам, *сумма длин которых* $> {}^1/_2$.

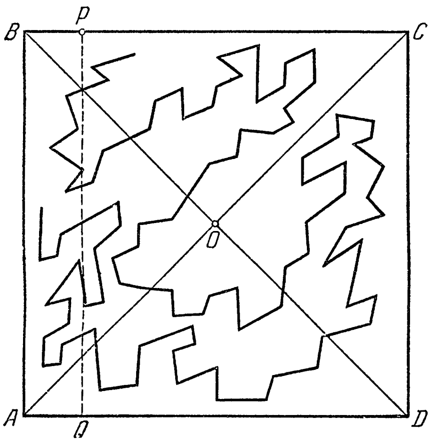


Рис. 68.

б) Пусть O есть центр квадрата $ABCD$ (рис. 68). Рассмотрим отдельно все звенья ломаной, имеющие направления лучей, расположенных внутри угла AOB, и все звенья ломаной, имеющие направления лучей, расположенных внутри угла BOC (звенья ломаной, имеющие направления OB, причисляются к обеим этим совокупностям звеньев). Хотя бы одна из двух рассматриваемых совокупностей звеньев будет иметь общую длину, не меньшую 500; пусть для определенности это будет совокупность звеньев, имеющих направления лучей, расположенных внутри угла AOB.

Спроектируем все звенья этой совокупности на сторону BC квадрата. Так как каждое из звеньев рассматриваемой совокупности образует со стороной BC острый угол, не больший 45°, то проекции каждого звена не меньше чем длина звена, умноженная на $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Следовательно, сумма длин всех проекций звеньев на сторону BC не короче чем $500\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\approx 353{,}5$. А так как длина стороны BC равна 1, то на этой стороне должны найтись участки, на которые падают проекции больше чем 353 различных звеньев ломаной.

Пусть P есть точка стороны BC квадрата, принадлежащая проекциям 354 (или больше) различных звеньев ломаной. В таком случае прямая $PQ \parallel AB$ пересекает исходную ломаную не меньше чем в 354 точках, т. е. заведомо больше, чем в 350 точках. Этим и завершается доказательство.

23. Пусть направления сторон квадрата совпадают с горизонтальным и вертикальным направлениями; последовательные звенья ломаной обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_n$, а их проекции на горизонтальную и вертикальную стороны квадрата — соответственно через $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ и через $l''_1, l''_2, \ldots, l''_n$. Ясно, что никакие два из отрезков $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ не перекрываются: в самом деле, если бы отрезки l'_i и l'_j (где $1\leqslant i<j\leqslant n$) имели общую (внутреннюю) точку P, то параллельная вертикальным сторонам квадрата прямая PQ пересекала бы и звено l_i и звено l_j (рис. 69), а это противоречит условию задачи. Поэтому [1])

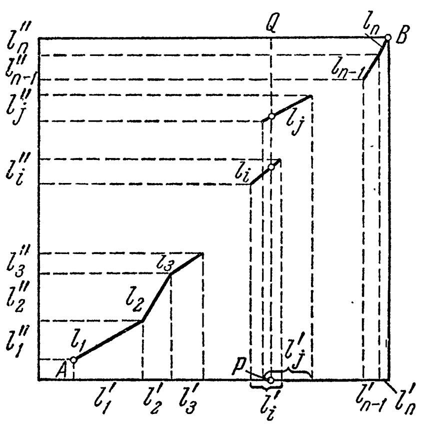


Рис. 69.

$$l'_1+l'_2+\ldots+l'_n\leqslant 1$$

(ибо справа стоит сумма длин неперекрывающихся отрезков, принадлежащих равной 1 горизонтальной стороне квадрата); аналогично доказывается, что и

$$l''_1+l''_2+\ldots+l''_n\leqslant 1.$$

Но ясно, что

$$l_i<l'_i+l''_i$$

(где $i=1, 2, \ldots, n$),

ибо отрезки l'_i и l''_i являются катетами прямоугольного треугольника с гипотенузой l_i (см. тот же рис. 69). Отсюда получаем

$$l_1+l_2+\ldots+l_n<(l'_1+l''_1)+(l'_2+l''_2)+\ldots+(l'_n+l''_n)=$$
$$=(l'_1+l'_2+\ldots+l'_n)+(l''_1+l''_2+\ldots+l''_n)\leqslant 1+1=2$$

— длина искомой ломаной заведомо не превосходит 2.

Далее остается лишь заметить, что если A_0 и B_0 — противоположные вершины единичного квадрата $A_0A'_0B_0B'_0$, а C — точка диа-

[1]) Здесь мы, как это принято в геометрии, обозначаем одним и тем же символом l'_i как сам отрезок, так и его длину.

гонали $A_0'B_0'$, удаленная от A_0' на расстояние $d\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (рис. 70), то длина ломаной A_0CB_0 равна

$$A_0C + CB_0 = \sqrt{(1-d)^2+d^2} + \sqrt{(1-d)^2+d^2} = 2\sqrt{1-2d+2d^2}.$$

Придавая d всевозможные значения в интервале $\frac{1}{2} \geqslant d > 0$, мы получим все значения длины l ломаной A_0CB в интервале $\sqrt{2} \leqslant l < 2$. Для любого же значения $l < \sqrt{2}$ мы можем принять за искомую ломаную отрезок A_0D, где D — точка диагонали A_0B_0, удаленная от A_0 на расстояние l.

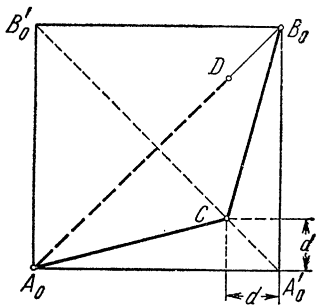


Рис. 70.

24. а) Пусть $\varkappa$ — какая-то «первая» из клеток, пересеченных нашим отрезком l. Так как на листке бумаги имеется $m-1$ горизонтальных линий (края листка мы не считаем) и $n-1$ вертикальных (или наоборот; листок мы считаем положенным перед собой, как обычно, что позволяет употреблять термины «горизонтальный» и «вертикальный»), то отрезок l может пересечь не более чем $(m-1)+(n-1) = m+n-2$ линий (ибо каждую вертикальную и каждую горизонтальную линию он пересекает не более одного раза), и, значит, максимум $m+n-2$ раза может перейти из одной клетки в другую. Присоединяя сюда и «начальную» клетку $\varkappa$, мы заключим, что *l может пересечь не более чем $m+n-1$ клеток.* С другой стороны, $m+n-1$ клеток отрезок пересечь *может*: для этого необходимо (и достаточно), чтобы он пересекал листок «по диагонали», встречая на своем пути все горизонтальные и все вертикальные линии. [Если m и n не взаимно просты, то диагональ прямоугольного листка пройдет через ряд узлов имеющейся на листке сети линий, пересекая в этих случаях горизонтальную и вертикальную линии одновременно, что уменьшит число пересеченных клеток; однако в этом случае мы можем сместить слегка конец отрезка l, оставляя его в той же угловой клетке $\varkappa$, что и раньше, с тем, чтобы сдвинутый отрезок l' по-прежнему пересекал все имеющиеся на листке линии, но ни разу не проходил через узел сети линий. Для этого, например, достаточно, чтобы отрезок l' начинался в точке, имеющей в системе координат, оси которой параллельны сторонам квадратов сетки, а единица длины равна стороне квадратов, рациональные координаты, а кончался в точке с иррациональными координатами (докажите это!).]

б) Обозначим через l_x и l_y длины проекций отрезка («иглы») l длины 200 на (совпадающие со сторонами квадратов) оси координат OX и OY, а через n_x и n_y — число «целочисленных точек» (узлов сети квадратов) на горизонтальном отрезке длины l_x и на вертикальном отрезке длины l_y (рис. 71). Тогда, очевидно,

$$l_x^2 + l_y^2 = 200^2 = 40\,000$$

и

$$n_x < l_x + 1, \quad n_y < l_y + 1.$$

Далее, сумма n_x+n_y указывает число пересечений «иглой» l горизонтальных и вертикальных прямых сети квадратов. Поэтому число n пересеченных отрезком l клеток равно

$$n=1+n_x+n_y.$$

Здесь мы считаем, что начальная точка A и конечная точка B отрезка $AB\equiv l$ являются внутренними точками клеток, поскольку, если бы это было не так, то число пересеченных отрезком l клеток можно было бы увеличить, сдвинув его слегка так, чтобы точки A и B попали внутрь клеток. С другой стороны мы считаем, что l не

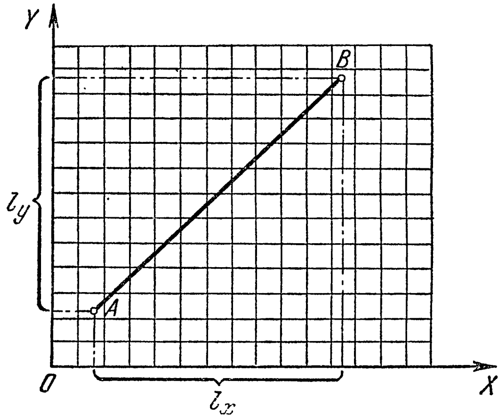


Рис. 71.

проходит ни через один узел сети квадратов, так как и здесь в противном случае можно было бы увеличить число пересеченных рассматриваемым отрезком клеток: для этого достаточно сдвинуть слегка l так, чтобы число пересечений отрезка с горизонтальными и вертикальными линиями сети квадратов не изменилось, но сдвинутый отрезок уже не проходил ни через один из узлов сети квадратов (ср. с решением задачи а)).

Далее имеем

$$n=n_x+n_y+1 < l_x+l_y+3=\sqrt{l_x^2+2l_xl_y+l_y^2}+3=$$
$$=\sqrt{2(l_x^2+l_y^2)-(l_x-l_y)^2}+3=\sqrt{2\cdot 40\,000-(l_x-l_y)^2}+3\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{80\,000}+3<283+3=286.$$

Покажем теперь, что *значение* $n=285$ *является возможным*. Для этого достаточно расположить отрезок l так, чтобы его начало A помещалось внутри клетки, находящейся слева и снизу от начала координат $O(0,\ 0)$, а конец B — внутри клетки, расположенной справа и сверху от точки M (141, 141); это можно сделать, ибо

$$OM=141\sqrt{2}<200.$$

Если при этом отрезок l не проходит ни через один узел сети квадратов, то

$$n_x=142, \quad n_y=142 \text{ и } n=n_x+n_y+1=285.$$

Примечание. Рассуждая точно так же, как при решении настоящей задачи, можно доказать, что *наибольшее число n клеток, которые может пересечь отрезок* («игла») *l длины L, таково*:

$$n=2k+3, \text{ если } \sqrt{2}k=\sqrt{k^2+k^2}<L\leqslant\sqrt{k^2+(k+1)^2};$$
$$n=2k+4, \text{ если } \sqrt{k^2+(k+1)^2}<L\leqslant\sqrt{(k+1)^2+(k+1)^2}=\sqrt{2}(k+1).$$

Более того, аналогичные рассуждения показывают, что *если пространство разбито на кубики со стороной 1, то отрезок l длины L может пересечь самое большее N кубиков, где*

$$N=3k+4, \text{ если } \sqrt{3}k=\sqrt{k^2+k^2+k^2}<L\leqslant\sqrt{k^2+k^2+(k+1)^2}=\sqrt{2k^2+(k+1)^2};$$
$$N=3k+5, \text{ если } \sqrt{2k^2+(k+1)^2}<L\leqslant\sqrt{k^2+(k+1)^2+(k+1)^2}=\sqrt{k^2+2(k+1)^2};$$
$$N=3k+6, \text{ если } \sqrt{k^2+2(k+1)^2}<L\leqslant\sqrt{(k+1)^2+(k+1)^2+(k+1)^2}=\sqrt{3}(k+1).$$

Близкий характер имеет и (более сложно выводимая) оценка *для наибольшего возможного числа n квадратов листка бумаги «в клетку»* (или *числа N кубов пространственной кубической решетки*; за единицу длины здесь принята сторона квадрата или куба), *которые может пересечь произвольная линия данной длины L*. А именно, для линии на плоскости очевидно, что

$$n=4 \quad \text{при} \quad 0<L\leqslant 1,$$

и можно показать, что *при $L>1$ число n выражается следующими формулами*:

$$n=3k+6, \quad \text{если} \quad \sqrt{2}\,k+1<L\leqslant\sqrt{2}(k+1);$$
$$n=3k+7, \quad \text{если} \quad \sqrt{2}(k+1)<L\leqslant\sqrt{2}\,k+2;$$
$$n=3k+8, \quad \text{если} \quad \sqrt{2}\,k+2<L\leqslant\sqrt{2}(k+1)+1.$$

Подобно этому, *если пространство разбито на кубики со стороной 1, то линия длины L пересекает самое большее N кубиков, где*

$$N=8 \quad \text{при} \quad 0<L\leqslant 1;$$
$$N=12 \quad \text{при} \quad 1<L\leqslant\sqrt{2};$$
$$N=14 \quad \text{при} \quad \sqrt{2}<L\leqslant\sqrt{3};$$
$$N=15 \quad \text{при} \quad \sqrt{3}<L\leqslant 2;$$
$$N=16 \quad \text{при} \quad 2<L\leqslant\sqrt{2}+1;$$

если же $L > \sqrt{2}+1$, *то*

$$N=6k+18 \quad \textit{при} \quad \sqrt{2}(k+1)+1 < L \leqslant \sqrt{2}k+\sqrt{3}+1;$$
$$N=6k+19 \quad \textit{при} \quad \sqrt{2}k+\sqrt{3}+1 < L \leqslant \sqrt{2}(k+2);$$
$$N=6k+20 \quad \textit{при} \quad \sqrt{2}(k+2) < L \leqslant \sqrt{2}(k+1)+\sqrt{3};$$
$$N=6k+21 \quad \textit{при} \quad \sqrt{2}(k+1)+\sqrt{3} < L \leqslant \sqrt{2}(k+1)+2;$$
$$N=6k+22 \quad \textit{при} \quad \sqrt{2}(k+1)+2 < L \leqslant \sqrt{2}k+\sqrt{3}+2;$$
$$N=6k+23 \quad \textit{при} \quad \sqrt{2}k+\sqrt{3}+2 < L \leqslant \sqrt{2}(k+2)+1.$$

(Относительно всех этих результатов см. В. Л. Рабинович [39]).

25. Можно. Будем поступать следующим образом: прежде всего проведем среднюю линию квадрата и разместим на ней 200 точек, разбивающих линию на 201 равную часть (см. рис. 72, где число 200 заменено на 20). Так как ширина «пробела» между двумя соседними точками равна $\frac{1}{201} < 0{,}005$ $\left(=\frac{1}{200}\right)$, то никакой прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата, расположенный между двумя соседними из наших точек, не может иметь площадь, равную 0,005; следовательно, прямоугольник такой площади, не содержащий ни одной из наших точек, должен располагаться в верхней или в нижней половине квадрата (нашу среднюю линию мы считаем горизонтальной).

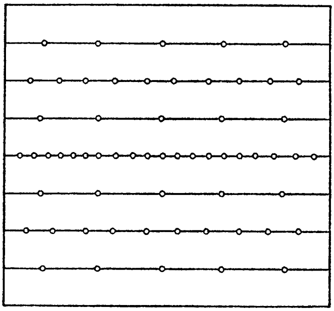


Рис. 72.

Разделим теперь пополам горизонтальными прямыми верхнюю и нижнюю половины квадрата и на каждой из этих прямых разместим на равных расстояниях друг от друга по 100 точек, делящих соответствующие отрезки на 101 отрезок длины $\frac{1}{101} < \frac{1}{100} = 2\cdot\frac{1}{200}$. Так как «высота» прямоугольника, располагающегося в верхней или в нижней половине основного квадрата, не превосходит $^1/_2$, то заключенный между двумя из вновь нанесенных точек прямоугольник, стороны которого параллельны сторонам квадрата, будет иметь площадь, меньшую $\frac{1}{200}=0{,}005$ (мы считаем, что прямоугольник не содержит также ни одной из первых 200 точек). Далее будем поступать так же: разделим каждую из четырех полос ширины $^1/_4$ горизонтальным отрезком пополам и разместим на каждом из четырех отрезков на равных расстояниях друг от друга по 50 точек, делящих отрезок на 51 часть длины $\frac{1}{51} < \frac{1}{50} = 4\cdot\frac{1}{200}$; при этом мы сможем быть уверены, что если площадь прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, не меньше $^1/_{200}$, и этот прямоугольник не содержит ни одной из имеющихся точек, то он целиком принадлежит одной из 8 горизонтальных полос, на которые делят квадрат проведенные ранее прямые. Далее точно так же разделим горизонтальными отрезками пополам каждую из этих 8 полос и на каждом из 8 отрезков разместим по 25 точек, делящих его на 26 равных частей длины $\frac{1}{26} < \frac{1}{25} = 8\cdot\frac{1}{200}$; затем каждую из получившихся теперь 16 полос ширины $^1/_{16}$ снова разделим пополам и на каждом из 16 новых отрезков разместим по 12 точек, делящих отрезок на части длины $\frac{1}{13} < \frac{2}{25} = 16\cdot\frac{1}{200}$; 32 средние линии получившихся 32 полос ширины $^1/_{32}$ разделим 6 точками на 7 отрезков длины $\frac{1}{7} < 32\cdot\frac{1}{200}$ каждая; 64 средние линии более узких полос ширины $^1/_{64}$ разделим 3 точками на 4 части длины $\frac{1}{4} < 64\cdot\frac{1}{200}$ каждая; наконец, каждую из 128 средних линий 128 полос ширины $^1/_{128}$ разобьем пополам на части длины $\frac{1}{2} < 128\cdot\frac{1}{200}$.

В точности, как выше, заключаем, что каждый прямоугольник площади $0{,}005 = \frac{1}{200}$, стороны которого параллельны сторонам квадрата, если только он не содержит ни одной из наших точек, должен располагаться между двумя соседними из имеющихся на чертеже $1+2+4+8+16+32+64+128=255$ горизонтальных линий (включая сюда и стороны квадрата); но полоса между соседними линиями имеет ширину $\frac{1}{256} < \frac{1}{200}$, и, значит, прямоугольник и в этом случае не может иметь площадь $0{,}005 = \frac{1}{200}$.

Общее число точек в квадрате, очевидно, равно

$$1\cdot 200 + 2\cdot 100 + 4\cdot 50 + 8\cdot 25 + 16\cdot 12 + 32\cdot 6 + 64\cdot 3 + 128\cdot 1 = \\ = 1504 < 1600.$$

Примечание. Легко понять, что на каждом из 2^k отрезков — средних линий 2^k полос ширины $1/2^k$ — мы располагаем $\left[\frac{200}{2^k}\right]$ точек (прямыми скобками обозначают целую часть числа), делящих отрезок на $\left[\frac{200}{2^k}\right]+1 > \frac{200}{2^k}$ равных частей; здесь $k=0$, $1, 2, \ldots, K$, где K — первое целое число, такое, что $\frac{1}{2^{K+1}} < \frac{1}{200}$ (т. е. $K=7$).

26. Пусть точка D выбрана в соответствии с условием задачи, P — основание высоты DP тетраэдра $ABCD$; Q — основание высоты CQ; M и N — основания высот CM и DN треугольников ABC и ABD (рис. 73). Так как $V_{ABCD} = \frac{1}{3} DP\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} CQ\cdot S_{\triangle ABD}$ и $DP < CQ$, то

$$\frac{1}{2} AB\cdot CM = S_{\triangle ABC} > S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB\cdot DN, \text{ т. е. } CM > DN$$

и тем более

$$CM > PN,$$

поскольку проекция PN отрезка DN на плоскость ABC короче самого этого отрезка. Таким образом, *точка P отстоит от стороны AB треугольника ABC на расстояние PN, меньшее расстояния CM от вершины C треугольника ABC до этой стороны.* Точно так же доказывается, что расстояние от точки P до сторон AC и BC треугольника ABC меньше расстояний от этих сторон вершин B, соответственно A, т. е. что *точка P принадлежит треугольнику $A_1B_1C_1$, образованному проходящими через вершины треугольника ABC прямыми, параллельными противоположным сторонам ABC* (рис. 74).

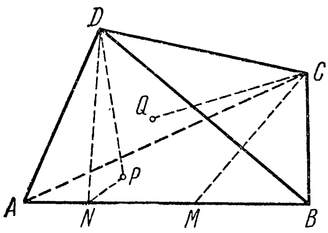


Рис. 73.

Докажем теперь, что *для каждой* (внутренней) *точки P треугольника $A_1B_1C_1$ можно так подобрать точку D пространства, что P будет являться основанием высоты тетраэдра $ABCD$, удовлетворяющего условиям задачи.* В самом деле, расстояния от P до сторон AB, AC, BC треугольника ABC меньше высот CM, BL и AK этого треугольника — это обеспечивается принадлежностью точки P

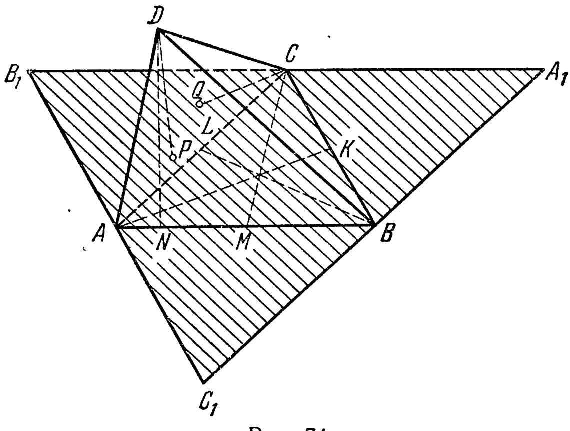


Рис. 74.

треугольнику $A_1B_1C_1$. Выберем теперь на восставленном в точке P перпендикуляре к плоскости ABC точку D так близко от P, что расстояния от D до прямых AB, AC и BC все еще остаются меньше отрезков CM, соответственно BL и AK. Но если высота DN треугольника ABD меньше высоты CM треугольника ABC, то $S_{\triangle ABD} < S_{\triangle ABC}$ и, значит, $CQ > DP$, где CQ — высота тетраэдра $ABCD$, опущенная из вершины C. Точно так же доказывается, что DP меньше и двух остальных высот построенного тетраэдра $ABCD$.

27. а), б) Пусть $abc \ldots kl$ — рассматриваемый многоугольник, $ABC \ldots KL$ — многоугольник, образованный прямыми, полученными из сторон многоугольника $abc \ldots kl$ сдвигом во внешнюю сторону на расстояние 1, Φ — фигура, образованная из многоугольника $abc \ldots kl$, построенных вне его на его сторонах прямоугольников abB_1A_2, bcC_1B_2, $\ldots$, klL_1K_2, laA_1L_2 ширины 1 и круговых секторов aA_1A_2, bB_1B_2, $\ldots$, kK_1K_2, lL_1L_2 радиуса 1 (дуги A_1A_2, B_1B_2, $\ldots$, L_1L_2 «спрямляют» отрезки L_2A_1 и A_2B_1, A_2B_1 и B_2C_1, $\ldots$, K_2L_1 и L_2A_1; рис. 75, *а*). Ясно, что длины дуг A_1A_2, B_1B_2, $\ldots$, K_1K_2, L_1L_2

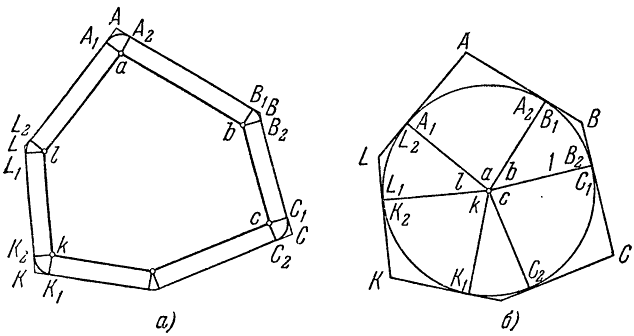


Рис. 75.

меньше длин «объемлющих» ломаных A_1AA_2, B_1BB_2, $\ldots$ K_1KK_2, L_1LL_2, а площади секторов aA_1A_2, bB_1B_2, $\ldots$, kK_1K_2, lL_1L_2 меньше площадей четырехугольников aA_1AA_2, bB_1BB_2, $\ldots$, kK_1KK_2, lL_1LL_2, в которых эти секторы содержатся. Поэтому, если Π и Σ — длина периметра и площадь фигуры Φ, то

$$P-p > \Pi - p \quad \text{и} \quad S-s > \Sigma - s.$$

Но, очевидно, дуги A_1A_2, B_1B_2, $\ldots$, K_1K_2, L_1L_2, которым отвечают центральные углы, равные внешним углам многоугольника $abc \ldots kl$, в сумме составляют полную окружность, а секторы aA_1A_2, bB_1B_2, $\ldots$, kK_1K_2, lL_1L_2 в совокупности составляют единичный круг (рис. 75, *б*). Поэтому

$$\Pi - p = 2\pi = 6{,}28\ldots > 6$$

и

$$\Sigma - s = S_{abB_1A_2} + S_{bcC_1B_2} + \ldots + S_{klL_1K_2} + S_{laA_1L_2} + \pi =$$
$$= ab + bc + \ldots + kl + la + \pi = p + \pi = 12 + 3{,}14\ldots > 15.$$

Отсюда и следуют утверждения задач а) и б).

в) Заметим, что четырехугольники aA_1AA_2, bB_1BB_2, $\ldots$, kK_1KK_2, lL_1LL_2 в совокупности образуют описанный вокруг единичного круга многоугольник, число вершин которого равно числу вершин многоугольника $abc \ldots kl$ (рис. 75, *б*). Но можно доказать, что *периметр и площадь описанного вокруг единичного круга четырехугольника не* *меньше периметра и площади описанного вокруг единичного круга квадрата*[1]). А так как периметр и площадь квадрата, описанного вокруг круга радиуса 1, равны соответственно 8 и 4, то

$$P-p \geqslant 8 \quad \text{и} \quad S-s \geqslant p+4=16,$$

что нам и требовалось доказать. Заметим еще, что, как следует из дальнейшего, $P-p=8$ и $S-s=16$ *в том и только в том случае, когда многоугольник $abc \ldots kl$ — квадрат.*

Таким образом, нам осталось доказать утверждение, выделенное выше курсивом. Заметим прежде всего, что поскольку периметр Π и площадь Σ описанного вокруг единичного круга многоугольника связаны очевидным соотношением

$$\Sigma=\frac{1}{2} \Pi \cdot 1=\frac{\Pi}{2}$$

(ибо такой n-угольник можно разбить на n треугольников одной и той же высоты 1, сумма оснований которых равна Π), то нам достаточно доказать одно из сформулированных выше утверждений, скажем, относящееся к периметру четырехугольника. Далее, если описанный вокруг единичной окружности четырехугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ — *параллелограмм*, то он является ромбом (описанный вокруг окружности

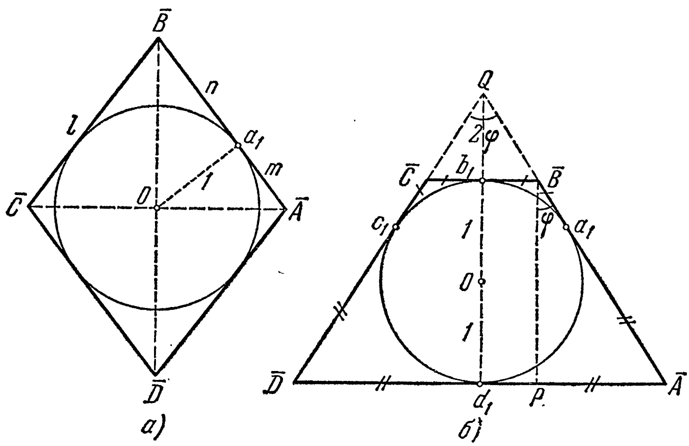


Рис. 76.

параллелограмм — обязательно ромб); точка a_1 соприкосновения его стороны $\bar{A}\bar{B}$ со вписанной окружностью разбивает отрезок $\bar{A}\bar{B}=l$ на два таких отрезка $\bar{A}a_1=m$ и $a_1\bar{B}=n$, что

$$mn=1^2=1$$

(рис. 76, *а*; заметьте, что треугольник $\bar{A}O\bar{B}$ прямоугольный). Отсюда

[1]) Ср. текст, напечатанный на стр. 45—46 мелким шрифтом, и указанную там литературу.

следует, что

$(m+n)^2-(m-n)^2=4mn=4$, т. е. $l^2=(m+n)^2=4+(m-n)^2 \geqslant 4$,

а значит,

$$l \geqslant 2 \quad \text{и} \quad \Pi \geqslant 8$$

($\Pi=8$, если ромб $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ — квадрат).

Предположим теперь, что четырехугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ — не параллелограмм, т. е. что его противоположные стороны $\bar{B}\bar{A}$ и $\bar{C}\bar{D}$ пересекаются в точке Q (рис. 77, a); обозначим еще через σ и σ_Q вписанную окружность треугольника $Q\bar{A}\bar{D}$ и вневписанную окружность

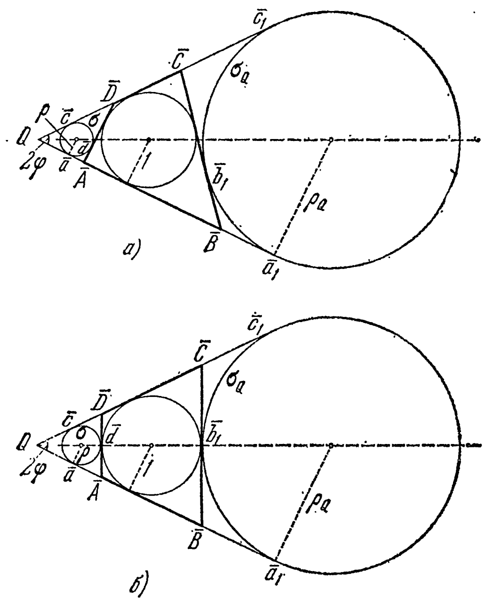


Рис. 77.

треугольника $Q\bar{B}\bar{C}$, а через ρ и ρ_Q — радиусы этих окружностей. Если окружность σ касается сторон треугольника $Q\bar{A}\bar{D}$ в точках $\bar{a}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$, то, очевидно,

$$Q\bar{a}=\frac{1}{2}(Q\bar{a}+Q\bar{c})=\frac{1}{2}(Q\bar{A}+Q\bar{D}-\bar{A}\bar{a}-\bar{D}\bar{c})=$$

$$=\frac{1}{2}(Q\bar{A}+Q\bar{D}-\bar{A}\bar{d}-\bar{D}\bar{d})=\frac{1}{2}(Q\bar{A}+Q\bar{D}-\bar{A}\bar{D});$$

поэтому, если периметр (большого) треугольника $Q\bar{B}\bar{C}$ равен U, то

$$\Pi=U-Q\bar{A}-Q\bar{D}+\bar{A}\bar{D}=U-2Q\bar{a}.$$

Таким образом, при фиксированном положении сторон $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ четырехугольника $\overline{ABCD}$ его периметр $\Pi = U - 2Q\overline{a}$ будет наименьшим тогда, когда наибольшее значение будет иметь величина $Q\overline{a} = \rho \operatorname{ctg} \varphi$ (где $\angle \overline{A}Q\overline{D} = 2\varphi$), т. е. когда радиус ρ окружности σ будет возможно большим — когда окружность σ будет касаться вписанной в треугольник $\overline{B}Q\overline{C}$ единичной окружности, и *сторона $\overline{AD}$ будет образовывать равные углы со сторонами $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ четырехугольника $\overline{ABCD}$* (рис. 77, *б*).

Аналогично этому, если окружность σ_Q касается сторон треугольника $Q\overline{BC}$ в точках $\overline{a}_1$, $\overline{b}_1$ и $\overline{c}_1$ (рис. 77, *а*), то

$$Q\overline{a}_1 = \frac{1}{2}(Q\overline{a}_1 + Q\overline{c}_1) = \frac{1}{2}(Q\overline{B} + Q\overline{C} + \overline{Ba}_1 + \overline{Cc}_1) =$$
$$= \frac{1}{2}(Q\overline{B} + Q\overline{C} + \overline{Bb}_1 + \overline{Cb}_1) = \frac{1}{2}(Q\overline{B} + Q\overline{C} + \overline{BC}),$$

и если величина $Q\overline{A} + Q\overline{D} - \overline{AD}$ равна u, то

$$\Pi = Q\overline{B} + Q\overline{C} + \overline{BC} - Q\overline{A} - Q\overline{D} + \overline{AD} = 2Q\overline{a}_1 - u.$$

Таким образом, при фиксированном положении сторон $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{AD}$ четырехугольника $\overline{ABCD}$ его периметр $\Pi = 2Q\overline{a}_1 - u$ будет наименьшим тогда, когда наименьшее возможное значение будет иметь величина $Q\overline{a}_1 = \rho_Q \operatorname{ctg} \varphi$, т. е. когда радиус ρ_Q окружности σ_Q будет возможно меньшим — когда окружность σ_Q будет касаться вписанной в $\overline{ABCD}$ единичной окружности, и сторона $\overline{BC}$ образует с $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равные углы (рис. 77, *б*). Таким образом, *при фиксированном положении сторон $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ описанного вокруг единичной окружности четырехугольника $\overline{ABCD}$*, пересекающихся в точке Q под углом 2φ, *периметр Π этого четырехугольника будет наименьшим в том случае, когда $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ и четырехугольник $\overline{ABCD}$ представляет собой (равнобочную) трапецию* (см. рис. 76, *б*).

Заметим теперь, что периметр Π описанной вокруг единичного круга (равнобочной) трапеции $\overline{ABCD}$ равен учетверенной боковой стороне $\overline{AB}$ (ибо на рис. 76, *б* $\overline{A}a_1 = \overline{A}d_1 = \overline{D}d_1 = \overline{D}c_1$ и $\overline{B}a_1 = \overline{B}b_1 = \overline{C}b_1 = \overline{C}c_1$), которая в свою очередь равна $2/\cos\varphi$ (ибо катет $\overline{B}P$ прямоугольного треугольника $\overline{AB}P$ с острым углом $\angle \overline{AB}P = \varphi$ равен 2). Таким образом, имеем

$$\Pi = 4 \cdot \frac{2}{\cos\varphi} = \frac{8}{\cos\varphi} > 8,$$

что и завершает доказательство утверждения в).

Примечание. Аналогично решению задачи в) можно доказать, что *если число сторон многоугольника $abc \ldots kl$ равно n, то*

$$P - p \geqslant 2n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \quad \text{и} \quad S - s \geqslant p + n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$\left(\text{заметьте, что } 2n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \text{ и } n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \text{ — это периметр и площадь опи}\right.$

$\left.\text{санного вокруг единичного круга правильного } n\text{-угольника!}\right)$.

г) Первое решение. Докажем прежде всего, что при $\alpha < \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{4}{\pi}$$

(здесь угол α измеряется в радианной мере). Для этого рассмотрим секторы OXY и OXZ единичного круга, где $\angle XOY = \alpha$ и $\angle XOZ = \frac{\pi}{4}$; пусть, далее, $VX = \operatorname{tg}\alpha$ и $WX = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ ($=1$; см. рис. 78). Ясно, что площадь криволинейного треугольника XVY

$$S_{XVY} = S_{\triangle\, OXV} - S_{\text{сект }OXY} = \frac{1}{2}OX \cdot XV - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)$$

меньше площади трапеции $XVYM$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha - \alpha < 2S_{XVYM}. \qquad (*)$$

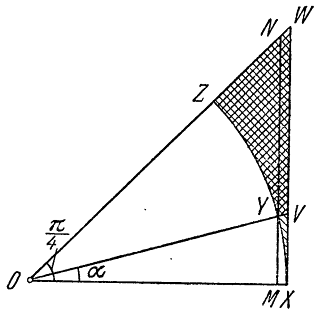


Рис. 78.

Далее, криволинейный четырехугольник $YVWZ$ имеет площадь

$$S_{YVWZ} = S_{\triangle\, OVW} - S_{\text{сект }OYZ} = (S_{\triangle OXW} - S_{\triangle\, OXV}) - (S_{\text{сект }OXZ} - S_{\text{сект }OXY}) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}OX \cdot XW\right) - \left(\frac{1}{2}OX \cdot XV\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\alpha\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right],$$

большую, очевидно, площади трапеции $YVWN$, откуда

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\alpha\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) > 2S_{YVWN}. \qquad (**)$$

Разделив неравенство (**) на неравенство (*) и замечая, что

$$S_{YVWN} : S_{XVYM} = YN : YM = VW : VX = (XW - XV) : XV = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\alpha\right) : \operatorname{tg}\alpha,$$

получаем

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha} - 1 = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\alpha\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha} >$$
$$> \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha} - 1,$$

откуда легко находим, что

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha-\alpha} > \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{или} \quad 1\cdot\operatorname{tg}\alpha-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha > 1\cdot\operatorname{tg}\alpha-1\cdot\alpha,$$

т. е.

$$\alpha > \frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{4}{\pi}.$$

Пусть теперь $\overline{A}$ — один из (тупых!) углов описанного вокруг единичной окружности многоугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$, a_1 и l_1 — точки касания с окружностью сходящихся в $\overline{A}$ сторон многоугольника

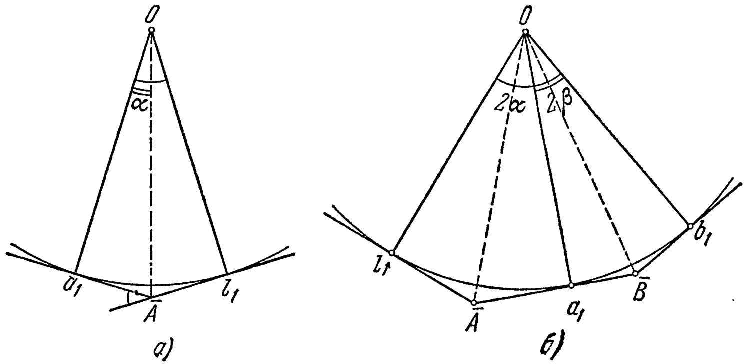


Рис. 79.

(рис. 79, *а*); тогда угол $2\alpha = \angle a_1Ol_1 = \pi - \angle\overline{A}$ — острый, а значит, $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Очевидно, $a_1\overline{A} = \overline{A}l_1 = \operatorname{tg}\alpha$, и следовательно,

$$a_1\overline{A} + \overline{A}l_1 = 2\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е.

$$\frac{a_1\overline{A}+\overline{A}l_1}{\alpha} = 2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{8}{\pi} \quad \text{и} \quad a_1\overline{A}+\overline{A}l_1 < \frac{8}{\pi}\alpha;$$

далее

$$S_{Oa_1\overline{A}l_1} = \frac{1}{2}(1\cdot a_1\overline{A}+1\cdot\overline{A}l_1) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \frac{S_{Oa_1\overline{A}l_1}}{\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{4}{\pi}$$

и

$$S_{Oa_1\overline{A}l_1} < \frac{4}{\pi}\alpha.$$

Суммируя теперь неравенства, отвечающие всем углам многоугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$, получаем

$$\Pi < \frac{8}{\pi}\cdot\pi = 8; \quad \Sigma < \frac{4}{\pi}\cdot\pi = 4,$$

где Π — периметр, а Σ — площадь многоугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$; поэтому (ср. с решением задач а), б))

$$P-p=\Pi<8, \quad S-s=p+\Sigma<12+4=16.$$

Второе решение. Пусть Ol_1a_1 и Oa_1b_1 — два «соседних» сектора единичного круга, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — точки пересечения касательных к кругу в точках l_1 и a_1, соответственно a_1 и b_1 (рис. 79,*б*). Обозначим (меньшие 90°!) центральные углы l_1Oa_1 и a_1Ob_1 через 2α и 2β; пусть еще, для определенности, $\alpha \geqslant \beta$. В таком случае площади четырехугольников $Ol_1\overline{A}a_1$ и $Oa_1\overline{B}b_1$ будут соответственно равны

$$S_{\triangle\, Ol_1\overline{A}}+S_{\triangle\, O\overline{A}a_1}=\frac{1}{2}\, l_1\overline{A}+\frac{1}{2}\, \overline{A}a_1=\operatorname{tg}\alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\beta;$$

поэтому

$$S_{Ol_1\overline{A}\overline{B}b_1}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}\,[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]}.$$

Отсюда вытекает, что *если суммарная дуга* $\smile l_1b_1=2(\alpha+\beta)$ *обоих секторов закреплена, то площадь пятиугольника* $Ol_1\overline{A}\overline{B}b_1$ (*и длина ломаной* $l_1\overline{A}\overline{B}b_1$, равная удвоенной этой площади) *будет тем больше, чем больше разность* $\alpha-\beta$.

Рассмотрим теперь описанный вокруг единичного круга многоугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$, периметр Π которого равен разности $P-p$, а площадь Σ — выражению $S-(s+p)$ (рис. 75, *б*; см. решение задач а) и б)). Если $a_1, b_1, c_1, \ldots, k_1, l_1$ — точки касания сторон этого многоугольника с окружностью, то центральные углы $l_1Oa_1, a_1Ob_1, \ldots$ $\ldots, k_1Ol_1$ равны внешним углам исходного многоугольника $abc\ldots kl$; поэтому по условию задачи все эти углы — острые. Рассмотрим теперь два соседних угла l_1Oa_1 и a_1Ob_1; пусть, для определенности $\angle l_1Oa_1 \geqslant \angle a_1Ob_1$. Если $\angle l_1Ob_1 \leqslant 90°$, то мы заменим точку a_1 точкой $a_1' \equiv b_1$; если же $\angle l_1Ob_1 \geqslant 90°$, то мы заменим точку a_1 такой точкой a_1', что $\angle l_1Oa_1'=90° > \angle l_1Oa_1$. При этом мы заменим многоугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$ либо многоугольником $\overline{A}'\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$, имеющим на единицу меньшее число сторон (рис. 80, *а*), либо многоугольником $\overline{A}'\overline{B}'\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$, угол A' которого прямой (рис. 80, *б*), причем в обоих случаях площадь (и периметр) нового многоугольника будет больше площади (соответственно периметра) первоначального многоугольника.

В случае многоугольника рис. 80, *а* мы далее будем рассматривать отвечающие ему два соседних центральных угла l_1Ob_1 и b_1Oc_1; в случае многоугольника рис. 80, *б* — отвечающие ему два соседних центральных угла $a_1'Ob_1$ и b_1Oc_1. Поступая каждый раз так же, как и в первом случае, мы в конце концов заменим многоугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$ описанным вокруг единичного круга квадратом (многоугольником, все углы которого прямые), причем в процессе изменения многоугольника $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\ldots\overline{K}\overline{L}$ его площадь и периметр все время будут только увеличиваться. Но периметр и площадь квадрата, описанного вокруг единичного круга, соответственно равны 8 и 4; поэтому

$$P-p=\Pi<8 \quad \text{и} \quad S-s-p=\Sigma<4,$$

что и требовалось доказать (заметим, что из последнего неравенства следует, что $S-s < p+4=16$).

28. Если круг диаметра 1 целиком лежит внутри прямоугольника со сторонами 20 и 25, то его центр удален от всех сторон

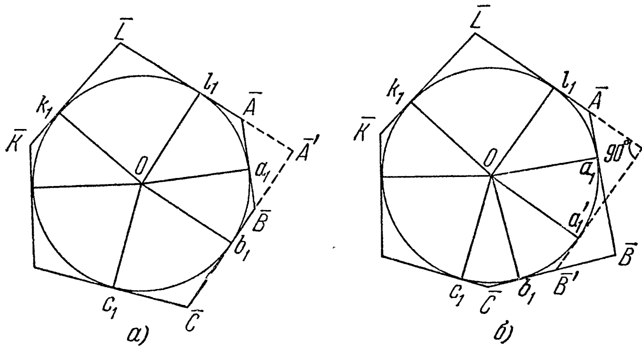


Рис. 80.

прямоугольника не менее чем на $^1/_2$, т. е. он расположен внутри (концентрического с первым) прямоугольника со сторонами 19 и 24 (рис. 81); площадь этого прямоугольника равна

$$19\cdot 24=456.$$

Далее, если круг диаметра 1 не пересекает квадрата со стороной 1, то его центр удален от всех точек квадрата не меньше чем на $^1/_2$; но множество точек, удаленных хоть от одной точки квадрата со стороной 1 меньше чем на $1/2$, представляет собой фигуру Ф, ограниченную четырьмя отрезками, удаленными от сторон квадрата на

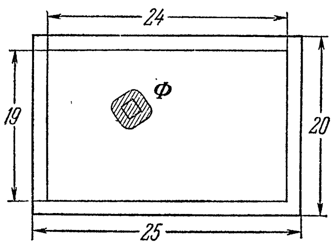


Рис. 81.

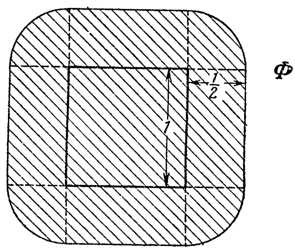


Рис. 81а.

расстояние $1/2$, и четырьмя дугами окружности радиуса $1/2$ с центрами в вершинах квадрата. Фигура Ф состоит из единичного квадрата, четырех прямоугольников размером $1\times 1/2$ и четырех секторов, составляющих вместе круг радиуса $1/2$ (рис. 81а); ее площадь равна

$$1+4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3+\frac{\pi}{4}<3+\frac{3,16}{4}=3,79.$$

Рассмотрим теперь все такие фигуры Ф, отвечающие 120 маленьким квадратикам; их общая площадь заведомо не больше чем 120-кратная площадь фигуры Ф (она меньше этой величины, если фигуры пересекаются), т. е. она меньше чем

$$120 \cdot 3{,}79 = 454{,}8 < 456.$$

Но это значит, что найдется точка O, расположенная внутри прямоугольника размером 19×24 и вне всех 120 фигур Ф; круг диаметра 1 с центром в этой точке O и будет удовлетворять условиям задачи.

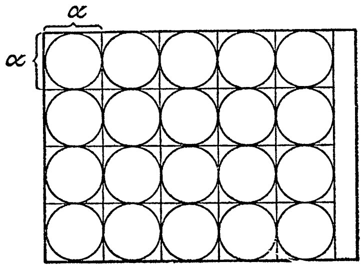


Рис. 82.

29. Можно. Разобьем меньшую сторону прямоугольника на большое число n равных отрезков малой длины α. Большую сторону также разобьем на m отрезков длины α; при этом мы можем получить остаток, который, во всяком случае, меньше α. Затем весь прямоугольник разобьем на mn квадратов со стороной α и (быть может) еще один вытянутый прямоугольник, одна сторона которого не превосходит 1 (она равна той стороне исходного прямоугольника, которая не больше другой), а вторая меньше α (рис. 82). Так как площадь прямоугольника равна 1, то

$$mn \cdot \alpha^2 + 1 \cdot \alpha > 1, \quad \text{т. е.} \quad mn > \frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}.$$

Впишем теперь в каждый из квадратов со стороной α окружность радиуса $\alpha/2$; тогда сумма радиусов всех этих окружностей будет равна

$$mn \cdot \frac{\alpha}{2} > \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}.$$

Выбрав α достаточно малым, мы сможем добиться того, чтобы эта сумма была *больше любого наперед заданного числа*, например больше 1962. Уменьшив затем радиусы окружностей до величины $\frac{1962}{mn}$, мы получим внутри прямоугольника mn непересекающихся окружностей, сумма радиусов которых точно равна 1962.

30. Пусть A — какая-то одна (безразлично какая!) из данных точек. Если все точки находятся от A на расстоянии < 1, то их в с е можно покрыть кругом радиуса 1 (с центром A); поэтому предположим, что существует среди наших точек такая точка B, что $AB \geqslant 1$. Для каждой третьей точки M из нашей системы точек по условию задачи либо $AM < 1$, либо $BM < 1$; поэтому все оставшиеся 23 точки можно разбить на два класса: такие точки C, что $AC < 1$, и такие точки D, что $AD \geqslant 1$, но $BD < 1$. Если мы имеем 12 (или больше) точек C, то круг радиуса 1 с центром A покрывает 13 (или больше) точек; если число точек C меньше 12, то мы имеем

12 (или больше) точек D — и круг с центром B и радиусом 1 покрывает 13 (или больше) точек.

31. Рассмотрим 100 кругов радиуса ½ с центрами в данных точках; тем самым мы покроем все точки 100 кругами (может быть, попарно пересекающимися!), сумма диаметров которых равна 100. Если какие-то два K_1 и K_2 из этих кругов пересекаются или касаются, мы заменим их бо́льшим кругом K, диаметр которого равен заключенному внутри K_1 и K_2 отрезку их линии центров, а центр O совпадает с серединой этого отрезка (рис. 83, *а*, *б*). Так как этот

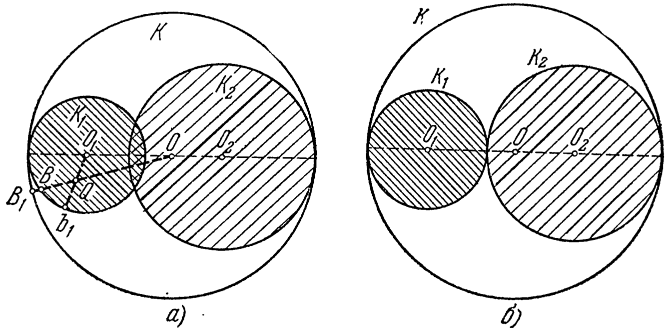


Рис. 83.

больший круг полностью покрывает два первоначальных, то новая система кругов по-прежнему покрывает все точки; число кругов на единицу уменьшилось; сумма диаметров кругов не увеличилась (ибо диаметр вновь построенного круга не больше суммы диаметров двух первоначальных; см. рис. 83, *а*, *б*, где два круга, заменяемые одним бо́льшим, не равны между собой). Если в новой системе кругов еще остаются пересекающиеся или касающиеся круги, то мы снова заменим два таких круга одним бо́льшим и т. д. При этом окончательно мы придем к *системе непересекающихся* (*и не касающихся*) *кругов* (может быть, к одному кругу), *покрывающих все наши точки*, причем сумма диаметров этих кругов не превосходит суммы диаметров первоначальных кругов, т. е. $\leqslant 100$.

Далее заметим, что *наименьшее расстояние между точками двух* (непересекающихся) *кругов K_1 и K_2* радиусов r_1 и r_2 (оно называется р а с с т о я н и е м м е ж д у к р у г а м и K_1 *и* K_2) *равно длине заключенного между кругами отрезка N_1N_2 их линии центров O_1O_2* (это следует из того, что если M_1 и M_2 — произвольные точки кругов радиусов r_1 и r_2, то

$$O_1O_2 \leqslant O_1M_1 + M_1M_2 + M_2O_2$$

и, следовательно,

$$M_1M_2 \geqslant O_1O_2 - O_1M_1 - O_2M_2 \geqslant O_1O_2 - r_1 - r_2 =$$
$$= O_1O_2 - O_1N_1 - O_2N_2 = N_1N_2$$

(рис. 84, *а*); *наименьшее расстояние от точки Q круга K до ограничивающей K окружности S с центром O и радиусом r* (оно называется расстоянием от точки Q до окружности S) *равно меньшему из заключенных внутри S отрезков QB_1 и QB_2 проходящего через Q диаметра B_1B_2 окружности S* (ибо если A — произвольная точка окружности S и $QB_1 \leqslant QB_2$, то $OA \leqslant OQ + QA$, и следовательно, $QA \geqslant OA - QO = OB_1 - OQ = OB_1$; см. рис. 84, *б*).

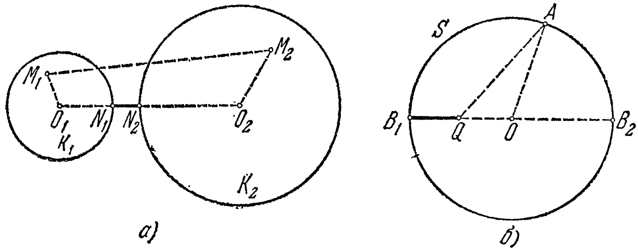


Рис. 84.

Далее, в первоначальной системе 100 кругов каждая из точек была удалена от окружности заключающего эту точку круга на расстояние ½ (она была центром круга радиуса ½); при замене же двух кругов K_1 и K_2 одним бо́льшим кругом K наименьшее расстояние от каждой из заданных точек Q до окружности покрывающего ее круга, во всяком случае, не уменьшится (ибо если QB_1 — наименьшее расстояние от точки Q до окружности круга K, Qb_1 — наименьшее расстояние от точки Q до окружности покрывающего ее круга K_1 и B — точка пересечения отрезка OB_1 с окружностью круга K_1, то, очевидно, $QB_1 \geqslant QB \geqslant Qb_1$; см., например, рис. 83, *а*). Таким образом, в полученной системе кругов, покрывающих наши точки, *каждая точка от окружности покрывающего ее круга находится на расстоянии, не меньшем* ½.

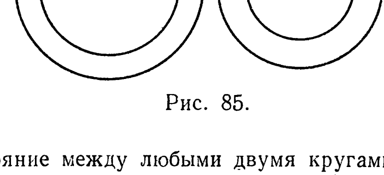


Рис. 85.

Если полученная система кругов состоит из единственного круга, то нам остается только слегка (на меньшую 1 величину!) уменьшить его диаметр, если этот диаметр оказался равным 100. Если же число кругов больше одного и расстояние между любыми двумя кругами > 1, то опять-таки нам достаточно лишь слегка уменьшить (менее чем на ½) радиус какого-либо одного круга, если сумма диаметров кругов оказалась точно равной 100. Наконец, если наименьшее из расстояний между двумя кругами системы (обозначим его через α) $\leqslant 1$, то уменьшим все круги, заменив круг радиуса R концентрическим с ним кругом радиуса $R - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3} < R$. При этом вновь полученные круги по-прежнему будут покрывать все 100 точек; сумма их диаметров будет < 100 (ибо у первоначальных кругов она была $\leqslant 100$), а расстояние между каждыми двумя кругами новой системы кругов будет $\geqslant 1+\frac{\alpha}{3} > 1$ (ибо расстояние между любыми двумя кругами системы ранее было $\geqslant \alpha$; см. рис. 85).

32. Рассмотрим n непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых принадлежат многоугольнику M. Заменим каждый круг концентрическим с ним кругом радиуса 1. Если полученные таким образом круги не покрывают какую-либо точку A многоугольника M, то эта точка будет удалена от центров всех кругов не меньше чем на 1; поэтому круг диаметра 1 с центром A не пересекается ни с одним из первоначальных кругов диаметра 1, и его можно прибавить к этим кругам, что однако противоречит определению числа n. Поэтому n рассматриваемых кругов радиуса 1 полностью покрывают многоугольник. А так как m — наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно покрыть многоугольник M, то

$$m \leqslant n.$$

33. Ясно, что если $n > 625$, то общая площадь всех монет больше

$$625 \cdot (\pi \cdot 1^2) = \pi \cdot 625 = \pi \cdot 25^2,$$

т. е. больше площади стола радиуса 25; поэтому монеты нельзя расположить на столе так, чтобы они не перекрывались. С другой стороны, если $n < 144$, то общая площадь концентрических с монетами кругов радиуса 2 меньше

$$144 \cdot (\pi \cdot 2^2) = \pi \cdot 576 = \pi \cdot 24^2,$$

т. е. эти круги не могут полностью покрывать часть Q стола, получаемую отсечением от него узкого «ободка» ширины 1 (рис. 86). Но если A — точка области Q, не покрытая ни одним кругом радиуса 2, то эта точка находится на расстоянии $\geqslant 2$ от центров всех монет и на расстоянии $\geqslant 1$ от края стола; поэтому монета с центром A целиком поместится на столе и не заденет ни одной из положенных ранее n монет.

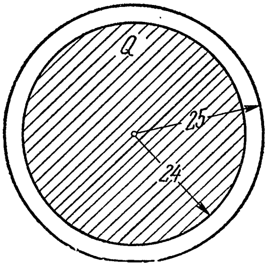


Рис. 86.

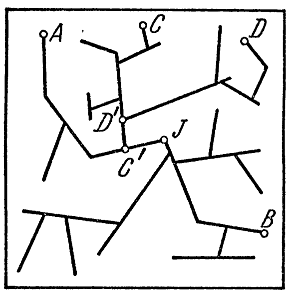


Рис. 87.

34. Сеть арыков представляет собой «разветвленную» ломаную линию (рис. 87), проходящую по территории поля; при этом рассматриваемая ломаная является «связной», т. е. состоит из одного куска, поскольку все арыки связаны с источником J. Выделим из системы арыков какой-либо «основной арык», т. е. «простую» (неразветвленную) ломаную AB. Если сеть арыков имеет еще отличный от A и B конец C, рассмотрим идущий от C «дополнительный арык», т. е. простую ломаную CC', в некоторой точке C' (быть может, совпадающей с источником J) вливающуюся в основной арык AB; далее, если ломаная имеет еще один отличный от A, B и C конец D, то рассмотрим ведущий от D «дополнительный арык» DD', вливающийся в некоторой точке D' в систему арыков AB и CC' и т. д.

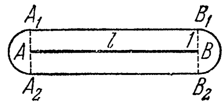


Рис. 88.

Рассмотрим теперь, что представляет собой «орошаемая площадь», т. е. множество точек, удаленных от ближайшего арыка не более чем на 1. Для прямолинейного арыка AB длины l орошаемая площадь представляет собой прямоугольную полосу $A_1B_1B_2A_2$ длины l и ширины 2, дополненную двумя полукругами радиуса 1 (рис. 88); площадь соответствующей фигуры равна $2l+\pi$. Если два прямолинейных арыка AM и MB смыкаются в точке M, образуя ломаную AMB (рис. 89, *а*, *б*), то отвечающие отрезкам AM и MB прямоугольники $A_1M_1M_2A_2$ и $M_1'B_1B_2M_2'$ дополняются круговым сектором

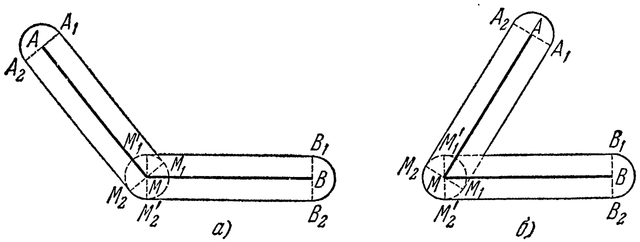


Рис. 89.

M_2MM_2' радиуса 1, центральный угол которого равен $180°-\angle AMB$; однако центрально симметричный M_2MM_2' относительно точки M сектор M_1MM_1' (и не только он!) оказывается покрыт дважды, так что площадь, орошаемая «ломаным арыком» AMB, и здесь не превосходит $2AM+2MB+\pi=2l+\pi$, где l — длина ломаной AMB. Точно так же показывается, что для «ломаного арыка» $AMN\ldots RB$ с любым числом «внутренних вершин» $M, N, \ldots, R$ орошаемая площадь (рис. 90) не превосходит $2l+\pi$, где l — длина ломаной $AMN\ldots RB$.

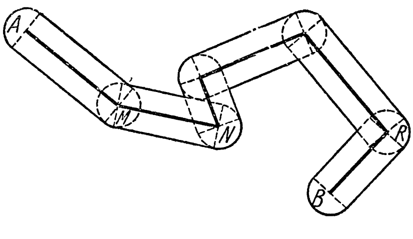
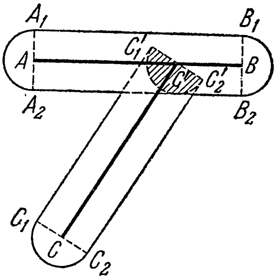


Рис. 90.

Рассмотрим теперь прямолинейный арык CC' длины m, «впадающий» в арык AB в точке C' (рис. 91, *а*). Присоединение арыка CC' к арыку AB увеличивает площадь, орошаемую арыком AB, на (перекрывающийся с площадью, орошаемой арыком AB!) прямоугольник $C_1C_1'C_2'C_2$ и на полукруг C_1C_2 радиуса 1 с центром C. Так как, однако, заштрихованный на рис. 91, *а* полукруг $C_1'C_2'$ с центром C' (и не только он!) оказывается покрытым дважды, то присоединение к арыку AB арыка CC' длины m увеличивает орошаемую площадь не более чем на $2m$. Это заключение остается справедливым и в том случае, если прямолинейные арыки AB и CC' заменить ломаными арыками $AMN\ldots RB$ и $CST\ldots UC'$, суммарная длина последнего из которых равна m (рис. 91, *б*).



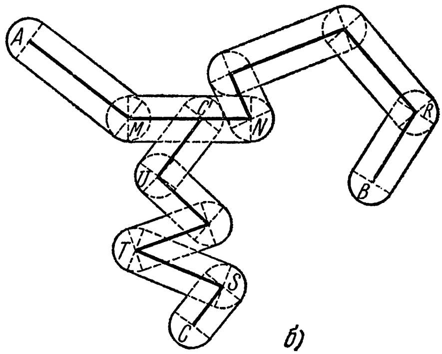
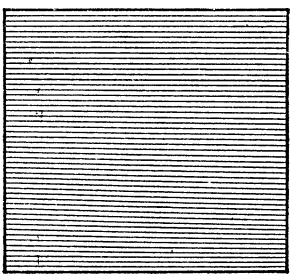


Рис. 91.

Из сказанного выше вытекает, что если **общая длина** арыков равна L, то величина орошаемой площади не превосходит $2L+\pi$. В частности, если общая длина арыков не превосходит 70, то орошаемая площадь не превосходит

$$2\cdot 70+\pi < 140+3{,}15 < 144=12^2,$$

откуда следует, что она не может совпадать со всем полем.



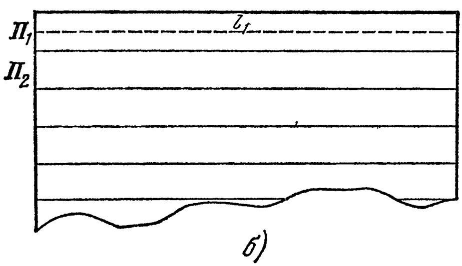


Рис. 92.

35. Разобьем наш участок на 50 полос $П_1$, $П_2$, ..., $П_{50}$ ширины 2 (рис. 92, *а*) и рассмотрим какую-либо одну из этих полос, скажем полосу Π_1 (рис. 92, *б*). Ясно, что если центр дерева расположен вне полосы Π_1 (в этом случае мы будем говорить, что «дерево растет вне полосы»), то дерево не задевает центральной линии l_1 полосы. А так как внутри участка нельзя проложить тропинки длины 10, не задевающей ни одного дерева, то вдоль линии l_1 нельзя указать свободного от деревьев отрезка длины 10, что было бы невозможно, если бы эта линия была разбита деревьями меньше чем на 9 частей: ведь даже восемь отрезков длины 10 + семь отрезков длины 2 (последнее слагаемое указывает максимум длины участков линии l_1, проходящих внутри 7 деревьев, разбивающих l_1 на 8 частей) не составят в сумме длину 100 линии l_1. Поэтому внутри полосы Π_1 растут минимум 8 деревьев (разбивающих линию l_1 на 9 частей). Аналогично этому внутри каждой из полос $\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{50}$ также растут не меньше 8 деревьев, в силу чего общее число деревьев на участке не может быть меньше чем $50 \cdot 8 = 400$.

36. Пусть l — проходящая через центр сада прямая сети квадратов, в узлах которой посажены деревья, T — точка пересечения этой прямой с границей сада, TU — отрезок касательной в точке T к границе сада, имеющий длину 1 (рис. 93). Покажем, что *если радиусы r всех деревьев сада меньше $1/\sqrt{2501}$, то вид из беседки в направлении BU ничем не будет заслонен.*

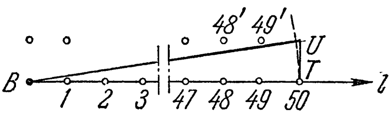


Рис. 93.

Ясно, что точка U лежит вне сада и является ближайшим к T узлом решетки квадратов; расстояние BU этой точки от беседки равно

$$BU = \sqrt{BT^2 + TU^2} = \sqrt{50^2 + 1^2} = \sqrt{2501}.$$

Но если ρ — радиус окружности с центром в ближайшем к B узле *1* луча BT, касающейся луча BU, то, в силу подобия прямоугольных треугольников с острым углом B и катетами ρ и TU, имеем

$$\frac{\rho}{B1} = \frac{TU}{BU},$$

т. е.

$$\rho = B1 \cdot \frac{TU}{BU} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2501}} = \frac{1}{\sqrt{2501}}.$$

Тому же равен радиус ρ' касающейся BU окружности с центром в ближайшем к U узле *49′* решетки, являющемся центром одного из деревьев (см. тот же рис. 93). Поэтому, если радиусы всех деревьев меньше $\rho = \rho' = 1/\sqrt{2501}$, то даже ближайшие к лучу BU деревья с центрами *1* и *49′* не заденут луча BU, откуда следует, что, смотря в этом направлении, наблюдатель в беседке увидит просвет.

Несколько труднее доказывается, что если *радиус r всех деревьев превосходит $1/50$, то вид из беседки будет полностью заслонен.* Пусть MN — произвольная прямая, проходящая через центр B сада и пересекающая границу сада в точках M и N (рис. 94); покажем, что ни в направлении BM, ни в направлении BN наблюдатель из беседки просвета не увидит. Рассмотрим прямоугольник $M_1N_1N_2M_2$ со средней линией MN и шириной $M_1M_2 = 2r$; площадь этого прямоугольника будет равна $MN \cdot M_1M_2 = 100 \cdot 2r = 200r$, т. е. будет больше 4 $\left(\text{ибо по условию } r > \frac{1}{50}\right)$. Если мы докажем, что внутри прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$ расположены по крайней мере два отличных от B и симметричных относительно B узла Q_1 и Q_2 решетки квадратов, то деревья с центрами в этих узлах будут пересекать среднюю линию MN прямоугольника (ибо радиус r дерева равен расстоянию от сторон M_1N_1 и M_2N_2 прямоугольника до прямой MN) и, значит, вид из беседки в направлении BM (и в направлении BN) будет заслонен [1]).

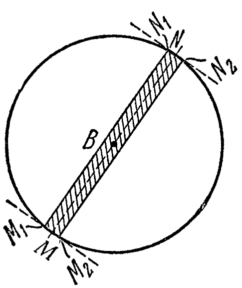


Рис. 94.

Предположим, что внутри $M_1N_1N_2M_2$ нет ни одного узла решетки [2]) и рассмотрим систему равных $M_1N_1N_2M_2$ и параллельно $M_1N_1N_2M_2$ расположенных прямоугольников, центрами которых являются все «четные» узлы сетки квадратов (т. е. узлы с четными координатами; ср. рис. 95). Ни один из этих прямоугольников не может иметь общих внутренних точек с прямоугольником $M_1N_1N_2M_2$. В самом деле, пусть прямоугольник Π_Z с центром в некотором «четном» узле Z сети квадратов пересекает прямоугольник $M_1N_1N_2M_2$ и A_1 — общая внутренняя точка этих прямоугольников, A' — точка прямоугольника Π_Z, симметричная его точке A_1 относительно центра Z этого прямоугольника, A_2 — точка прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$, получающаяся из точки A' прямоугольника Π_Z при параллельном переносе на вектор $\overline{ZB}$, переводящем Π_Z в $M_1N_1N_2M_2$ (рис. 96). Так как при этом (в силу свойств параллельного переноса) $ZA' \mathrel{\#} BA_2$, то четырехугольник $A'A_2BZ$ — параллелограмм; но в таком случае $ZA_1 \mathrel{\#} A_2B$, и потому четырехугольник ZA_2BA_1 — тоже параллелограмм; поэтому середина S его диагонали BZ является одновременно и серединой диагонали A_1A_2. Но середина отрезка BZ, соединяющего точку B с «четным» узлом Z, обязательно также является узлом сетки квадратов; середина отрезка A_1A_2, соединяющего точки A_1 и A_2 прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$, сама принадлежит этому

---

[1]) Для того чтобы сделать это рассуждение совсем точным, надо еще убедиться, что узлы Q_1 и Q_2 сетки квадратов не могут располагаться внутри прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$, но вне сада (в этом случае эти узлы уже не будут центрами деревьев). Но легко понять, что самый близкий к центру B сада «внешний» узел Q решетки квадратов расположен от B на таком расстоянии BQ, что $BQ^2 = BQ_1^2 + Q_1Q^2 = u^2 + v^2$, где u и v — целые числа и $BQ > 50$, т. е. $BQ^2 > 2500$; таким узлом является рассматривавшийся выше узел U (рис. 93), для которого $BU^2 = 2501$ (ибо 2501 — это наименьшее целое число, превышающее 2500). С другой стороны, самая далекая от B точка M_1 прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$ удалена от B на расстояние BM_1, где $BM_1^2 = BM^2 + MM_1^2 = 50^2 + r^2 < 2500 + \frac{1}{2500} < 2501$, откуда и следует, что внутри $M_1N_1N_2M_2$, но вне сада узлов решетки нет.

[2]) Ясно, что если прямоугольник $M_1N_1N_2M_2$ содержит один узел решетки квадратов, то он содержит и второй узел, симметричный первому относительно центра прямоугольника (центра сада) B.

прямоугольнику. Таким образом, если прямоугольники $M_1N_1N_2M_2$ и Π_Z пересекаются, то прямоугольник $M_1N_1N_2M_2$ содержит узел S сетки квадратов, что, однако, противоречит нашему предположению.

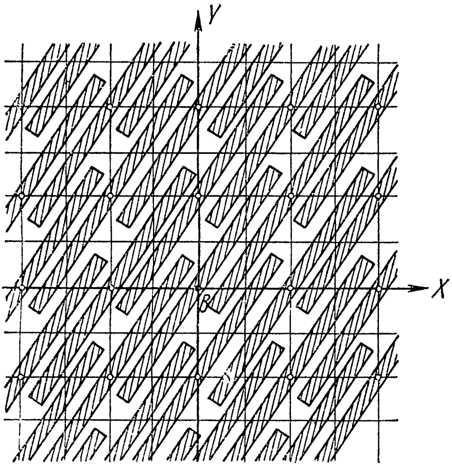


Рис. 95.

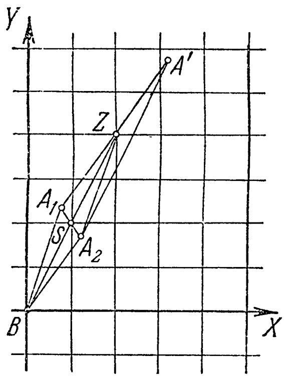


Рис. 96.

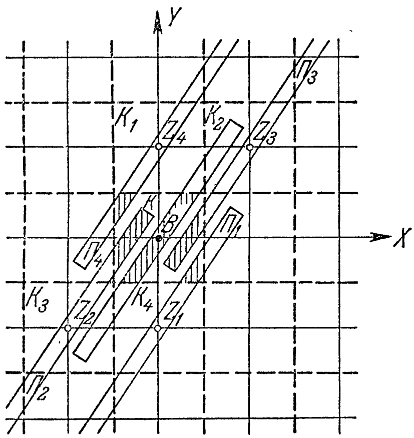


Рис. 97

Точно так же устанавливается, что никакие два из построенных нами прямоугольников не могут иметь общих точек.

Рассмотрим теперь квадрат К с центром B и стороной 2 и отметим части всех построенных прямоугольников Π_B, Π_{Z_1}, Π_{Z_2}, ... (где B, Z_1, Z_2, ... — всевозможные четные узлы решетки; в частности, прямоугольник $\Pi_B \equiv \Pi$ — сам прямоугольник $M_1N_1N_2M_2$), расположенные внутри квадрата К (рис. 97). Ясно, что, скажем, часть прямоугольника $\Pi_{Z_1} \equiv \Pi_1$ с центром Z_1, находящаяся внутри квадрата К, в точности равна части прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$, расположенной внутри квадрата $К_1$, который получается из квадрата К параллельным переносом на вектор $\overline{Z_1B}$ (этот перенос переводит прямоугольник Π_1 в прямоугольник $\Pi \equiv M_1N_1N_2M_2$). Таким образом, всевозможные части построенных прямоугольников Π, $\Pi_{Z_1} \equiv \Pi_1$, $\Pi_{Z_2} \equiv \Pi_2$, ..., расположенные внутри квадрата К, равны (разумеется, различным) частям прямоугольника $\Pi \equiv M_1N_1N_2M_2$, расположенным внутри (непересекающихся) квадратов К и $К_1$, $К_2$, ..., получаемым из квадрата К параллельными переносами на векторы $\overline{Z_1B}$, $\overline{Z_2B}$, ... Отсюда следует, что сумма площадей всех частей прямоугольников Π, Π_1, Π_2, ..., расположенных внутри К, равна площади прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$, т. е. больше 4. А так как площадь квадрата К, очевидно, равна 4, то последнее обстоятельство противоречит условию о том, что прямоугольники Π_B, Π_{Z_1}, Π_{Z_2}, ... попарно не пересекаются. Полученное противоречие и доказывает ошибочность предположения о том, что прямоугольник $M_1N_1N_2M_2$ не содержит внутри себя отличных от B узлов сетки квадратов.

37. Будем представлять себе парк в виде изображенного на рис. 7 прямоугольника, горизонтальная сторона которого равна 400 *м*, а вертикальная — 300 *м*; предположим, что путник выходит из левого нижнего угла A парка и проходит в направлении с юга на север $300 - y$ *м* по дорожкам, а остальные y *м* — по снегу; также с запада на восток он проходит $400 - x$ *м* по дорожкам, остальные x *м* — по снегу (рис. 7 мы рассматриваем как географическую карту, обычным образом ориентированную в отношении частей света). Переставим теперь участки движения путника таким образом, чтобы он сначала прошел $300 - y$ *м* с юга на север по границе парка, затем соберем все участки, которые путник проходил по снегу, и, наконец, $400 - x$ *м* пути по дорожкам (по границе парка) с запада на восток (рис. 98, *а*, *б*). Так как по снегу, очевидно, путнику целесообразно идти по прямой, то нам достаточно рассмотреть изображенный на рис. 98, *в* путь $AKLC$ (который можно заменить путем более сложным, но равноценным в отношении времени, переставив снова участки, проходимые по дорожкам и по снегу, в каком-либо ином порядке). При этом так как нас интересует лишь то, какой путь проделан по дорожкам, а какой по снегу, то мы можем считать, что на рис. 98, *в* $KB = y \leqslant x = BL$: в противном случае мы заменим треугольник KBL (не изображенным на рис. 98, *в*) симметричным ему относительно биссектрисы угла B треугольником $K'BL'$, что не изменит ни величину проходимого по дорожкам пути, ни величину пути, проходимого по снегу.

Обозначим величину $KL(=\sqrt{x^2+y^2})$ через a, а $\angle KLB$ — через α (где $\alpha \leqslant 45°$). Тогда $KB = y = a \sin\alpha$, $BL = x = a\cos\alpha$; поэтому путь по отрезку KL и по сторонам KB, BL треугольника KBL занимает соответственно время a/u мин. и

$$\frac{a\cos\alpha + a\sin\alpha}{v} = \frac{a\,[\sin(90°-\alpha)+\sin\alpha]}{v} =$$

$$= \frac{2a\sin 45°\cos(45°-\alpha)}{v} = \frac{a\sqrt{2}\sin(45°+\alpha)}{v} \text{ мин.}$$

(скорость измеряется в *м/мин*). Таким образом, выигрыш времени при замене ломаной KBL отрезком KL равен

$$\tau=\frac{a\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{v}-\frac{a}{u}=$$

$$=a\left[\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{v}-\frac{1}{u}\right]\text{мин.}\quad(*)$$

Так как $\sin(45^\circ+\alpha)\leqslant 1$, то при $\frac{1}{u}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{v}$, или $v:u\geqslant\sqrt{2}$, мы будем иметь $\tau\leqslant 0$, т. е. выгадать время, шагая по снегу, нельзя: самое целесообразное для путника — это *идти из A в C только по*

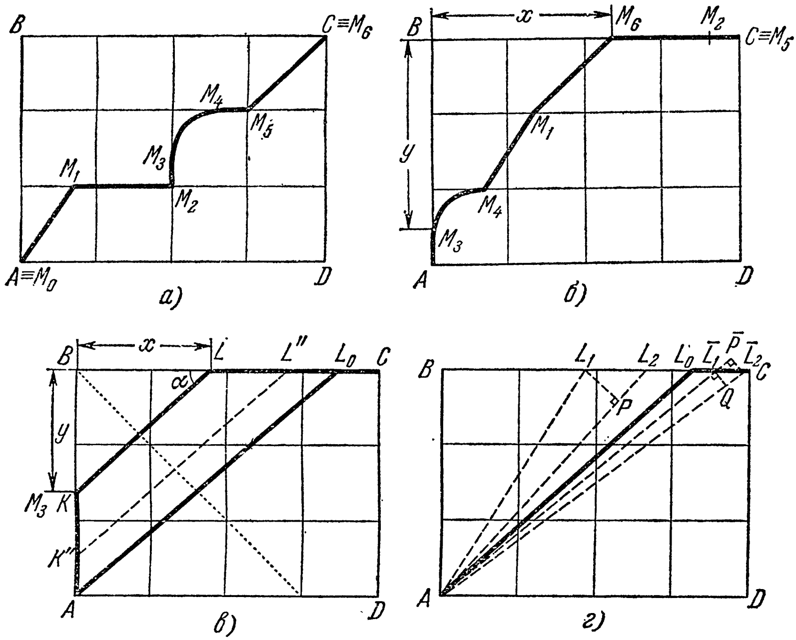


Рис. 98.

дорожкам, скажем по пути ABC. [Заметим, что если $v:u=\sqrt{2}$, то без проигрыша — но и без выигрыша! — времени можно «срезать» угол B, идя по л ю б о м у пути $AKLC$, где $KB=BL$ и $\angle BLK=45^\circ$.] Если же $\frac{1}{u}<\frac{\sqrt{2}}{v}$, т. е. $v:u<\sqrt{2}$, то угол $\alpha\leqslant 45^\circ$ можно подобрать так, что мы будем иметь $\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{v}>\frac{1}{u}$; при этом при замене ломаной KBL отрезком KL мы получим выигрыш (*) времени, причем (при фиксированном значении α!) этот выигрыш τ будет тем больше, чем больше длина a отрезка KL (ср. отрезки KL и $K''L''$ на рис. 98, *в*). Таким образом, наиболее выгодным из всех путей $AKLC$ будет изображенный на рис. 98, *в* путь AL_0C.

Перейдем теперь к сравнению всевозможных путей типа AL_0C. Пусть L_0 — такая точка луча BC, что $\frac{BL_0}{AL_0} = \cos \angle AL_0B = \frac{u}{v}$; разумеется, если $\frac{u}{v} > \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$, то эта точка будет располагаться не так, как это изображено на рис. 98, *г*, а на продолжении отрезка BC за точку C. Мы утверждаем, что *если L_1 и L_2 — любые точки отрезка BL_0, причем $BL_1 < BL_2$ $(\leqslant BL_0)$, то путь AL_2C будет выгоднее пути AL_1C; если же $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ — точки отрезка L_0C и $B\overline{L}_2 > B\overline{L}_1$ $(\geqslant BL_0)$, то путь $A\overline{L}_1C$ будет выгоднее пути $A\overline{L}_2C$.* В самом деле, опустим из точки L_1 перпендикуляр L_1P на прямую AL_2; тогда

$$AP < AL_1 \quad \text{и} \quad \frac{PL_2}{L_1L_2} = \cos \angle AL_2B \leqslant \cos \angle AL_0B = \frac{u}{v},$$

$$\text{т. е. } \frac{PL_2}{u} \leqslant \frac{L_1L_2}{v},$$

откуда и следует, что на путь APL_2C тратится меньше времени, чем на путь AL_1L_2C. Аналогично этому, если $\overline{L}_2\overline{P}$ — перпендикуляр, опущенный из точки $\overline{L}_2$ на прямую $A\overline{L}_1$, то

$$A\overline{P} < A\overline{L}_2 \quad \text{и} \quad \frac{\overline{L}_1\overline{P}}{\overline{L}_1\overline{L}_2} = \cos \angle \overline{L}_2\overline{L}_1\overline{P} = \cos \angle A\overline{L}_1B \geqslant$$

$$\geqslant \cos AL_0B = \frac{u}{v}, \text{ т. е. } \frac{\overline{L}_1\overline{P}}{u} \geqslant \frac{\overline{L}_1\overline{L}_2}{v};$$

с другой стороны, если Q — такая точка отрезка $A\overline{L}_2$, что $\overline{L}_2\overline{P} \parallel Q\overline{L}_1 \perp A\overline{L}_1$, то

$$A\overline{L}_1 < AQ \quad \text{и} \quad Q\overline{L}_2 > \overline{L}_1\overline{P}, \text{ а значит, } \frac{\overline{L}_1\overline{L}_2}{v} \leqslant \frac{\overline{L}_1\overline{P}}{u} < \frac{QL_2}{u},$$

откуда вытекает, что путь $A\overline{L}_1\overline{L}_2C$ проходится быстрее пути $AQ\overline{L}_2C$.

Окончательно имеем: *если* $\frac{v}{u} \geqslant \sqrt{2} = 1{,}41\ \ldots$, *то путнику следует идти только по дорожкам, и он затратит на путь*

$$\frac{AB + BC}{v} = \frac{700}{v} \text{ мин.};$$

если $1{,}41\ \ldots = \sqrt{2} \geqslant \frac{v}{u} \geqslant \frac{5}{4} = 1{,}25$, *то путнику выгоднее всего идти по изображенному на рис.* 98, *г пути* AL_0C, *где* $\cos \angle AL_0B = \frac{u}{v}$, т. е. $\sin \angle AL_0B = \frac{300}{AL_0} = \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{v}$, и, значит,

$$AL_0 = \frac{300\,v}{\sqrt{v^2 - u^2}}, \quad BL_0 = AL_0 \cos \angle ALB_0 = \frac{300u}{\sqrt{v^2 - u^2}},$$

$$L_0C = 400 - \frac{300u}{\sqrt{v^2 - u^2}},$$

а следовательно, *путник затратит на весь путь*

$$\frac{AL_0}{u}+\frac{L_0C}{v}=\frac{300\,v}{u\sqrt{v^2-u^2}}+\frac{400}{v}-\frac{300\,u}{v\sqrt{v^2-u^2}}=\frac{400}{v}+\frac{300\,(v^2-u^2)}{uv\sqrt{v^2-u^2}}=$$

$$=\frac{400}{v}+\frac{300\sqrt{v^2-u^2}}{uv}\ \text{мин.};$$

наконец, *если* $\frac{v}{u}\leqslant\frac{5}{4}=1{,}25$, *то путнику выгоднее всего идти по диагонали AC парка, и он затратит на путь*

$$\frac{AC}{u}=\frac{500}{u}\ \text{мин.}$$

[В частности, если $\frac{v}{u}=\sqrt{2}$, то путник может идти по любому пути $AKLC$ (рис. 98, *в*), где $\alpha=45°$; при этом (независимо от выбора точки K на отрезке AB!) он затратит на путь $\frac{700}{v}=\frac{300\sqrt{2}}{u}+\frac{100}{v}$ мин.]

Примечание. Эта задача допускает иное, более геометричное решение, которое мы здесь только наметим. Предположим, что выходящий из точки A путник может двигаться в направлении AB или AD с какой-то скоростью v (здесь мы отвлекаемся от положения дорожек на территории парка), а в любом другом направлении — с меньшей скоростью u. Тогда до точки $M(x,\ y)$ (где оси Ax и Ay совпадают со сторонами AD и AB прямоугольника $ABCD$) он может дойти за $\frac{|x|+|y|}{v}$ мин. по прямым, параллельным осям координат AD и AB, или за $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{u}$ мин. по отрезку AM; поэтому за

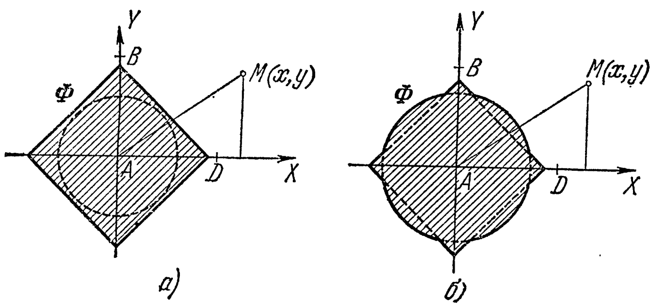


Рис. 99.

время 1 (мин.) он может достигнуть любой точки фигуры Ф, полученной объединением квадрата с центром A, образованного четырьмя прямыми $|x|+|y|=v$ (диагонали этого квадрата совпадают с осями координат и по величине равны $2v$) и круга с центром A и радиусом u; эта фигура изображена на рис. 99, *а*, *б* отдельно для случаев $u \leqslant \frac{v\sqrt{2}}{2}$ (когда круг целиком принадлежит квадрату) и $v \geqslant u > \frac{v\sqrt{2}}{2}$. За время t путник может достигнуть любой точки фигуры Φ_t, получаемой из Φ равномерным расширением (г о м о т е т и е й) с центром A и коэффициентом t. Задача состоит в выяснении того, при каком t фигура Φ впервые коснется точки C; здесь случай квадрата Φ (рис. 99, *а*) является более простым, а в случае фигуры Φ рис. 99, *б* надо еще дополнительно выяснить, коснется ли фигура Φ_t точки C «округлой» или «угловой» частью своей границы.

38. Обозначим (переменную) точку внутри квадрата, в которой в данный момент находится волк, буквой B, а точки пересечения с контуром квадрата проходящих через точку B прямых, параллельных диагоналям $C_1^0C_3^0$ и $C_2^0C_4^0$ квадрата — через C_1, C_2, C_3 и C_4 (рис. 100). Если B' — отличное от B (но близкое к B!) положение волка внутри квадрата, а C_1' — точка пересечения проходящей через B' прямой $C_1'C_3' \parallel C_1C_3$ с той стороны квадрата, которой принадлежит точка C_1, то из изображенного на рис. 100 треугольника $BB'C$ (где $B'C \#\, C_1C_1'$) имеем

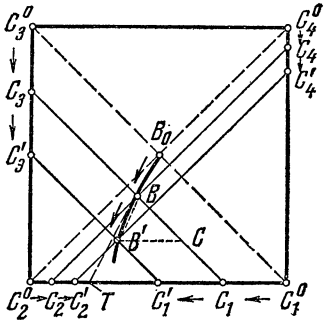


Рис. 100.

$$\frac{B'C}{BB'} = \frac{\sin\angle B'BC}{\sin 45^\circ} =$$

$$= \sqrt{2}\sin\angle B'BC \leqslant \sqrt{2} < 1{,}5,$$

а следовательно,

$$C_1C_1' = CB' < 1{,}5\cdot BB' \leqslant 1{,}5\cdot \smile BB'.$$

Поэтому за то время, в течение которого волк переместится из пункта B в пункт B', находящаяся в точке C_1 собака сумеет перебежать в точку C_1' [1]); значит, собаки, в начальный момент находящиеся в вершинах C_1^0, C_2^0, C_3^0 и C_4^0 квадрата, могут все время занимать положения C_1, C_2, C_3 и C_4. Следовательно, в тот момент когда волк добежит до границы поля, в той же точке обязательно окажутся *две* собаки, которые не выпустят волка из пределов поля.

---

1) Нетрудно видеть, что если T есть точка пересечения со стороной $C_2^0C_1^0$ квадрата проведенной в точке B к линии BB' касательной, а v_B и v_C — соответственно скорости перемещающейся по линии BB' точки B (волка) и двигающейся по стороне квадрата точки C_1 (собаки), то

$$v_C = \frac{\sin\angle TBC_1}{\sin\angle BC_1T}v_B = \sqrt{2}\sin\angle TBC_1\ v_B < 1{,}5\,v_B;$$

отсюда и вытекает, что собаки могут преследовать волка, не покидая соответствующих каждому положению B волка точек C_1, C_2, C_3 и C_4 периферии квадрата (поля).

39. а) Обозначим через α угол между курсом корабля K_1 и (постоянным) курсом корабля K_2 в какой-то момент времени t; ясно, что с течением времени угол α будет меняться. В момент t корабль K_1 приближается к K_2 со скоростью v; что же касается корабля K_2, то он удаляется от K_1 в направлении K_1K_2 со скоростью $v \cos\alpha$ (это есть проекция скорости $\overline{K_2T_2}$ корабля K_2 на направление K_1K_2; см. рис. 101); таким образом, сближение кораблей в момент t происходит со скоростью $v - v\cos\alpha = v(1 - \cos\alpha)$, и с течением времени, по мере того как угол α уменьшается, скорость сближения кораблей становится все меньше. Заметим теперь, что проекция P корабля K_1 на путь l корабля K_2 «преследует» корабль K_2 со скоростью $v\cos\alpha$ (это есть проекция скорости $\overline{K_1T_1}$ корабля K_1 на направление прямой l); корабль же K_2 удаляется от точки P со скоростью $K_2T_2 = v$. Таким образом, отрезок PK_2 увеличивается с той же скоростью $v - v\cos\alpha = v(1 - \cos\alpha)$, с какой уменьшается расстояние между кораблями, откуда следует, что *сумма* $K_1K_2 + PK_2$ *все время остается постоянной* — она равна d, ибо d равна эта сумма в первоначальный момент (рис. 8). Чем ближе подходит корабль K_1 к прямой l, тем более близкими друг к другу по величине становятся отрезки K_1K_2 и PK_2 (причем K_1K_2 всегда больше PK_2). Таким образом, *расстояние* K_1K_2 *все время остается бо́льшим* $d/2$; однако *с ростом* t *оно неограниченно приближается к* $d/2$.

б) Пусть K_1' и K_2' — положения кораблей в момент, когда расстояние между ними достигает *наименьшего* возможного значения (рис. 102, *а*). Ясно, что корабль K_1 приплыл в пункт K_1' по прямолинейному пути K_1K_1': в противном случае он мог бы сократить время пути, двигаясь по отрезку K_1K_1'. Более того, естественно считать, что корабль K_1 приплывает в пункт K_1' по прямой $K_1'K_2'$, поскольку если бы дело обстояло не так, то капитан корабля K_1 мог бы, выбрав с самого начала маршрут K_1K_2', приблизиться к K_2' ближе, чем это произошло на самом деле (см. рис. 102, *б*, где $K_1^0K_1'' = K_1^0K_1'$, и точка K_1'' ближе к K_2', чем точка K_1').

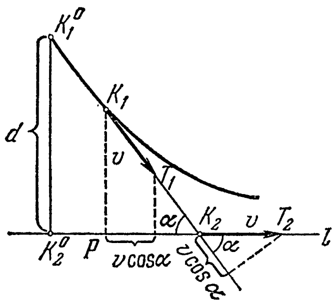


Рис. 101.

Обозначим угол между прямыми K_1K_1' и $K_2K_2' \equiv l$ через α; если угол между прямыми K_1K_2 и l равен α', где K_1 и K_2 — положения кораблей в какой-то момент времени t, то скорость $u\cos(\alpha' - \alpha)$, с которой корабль K_1 приближается в момент t ко второму кораблю, должна быть больше скорости $v\cos\alpha'$, с какой K_2 в тот же момент удаляется от K_1, причем так должно быть в любой момент времени до момента t_0 прихода кораблей в пункты K_1' и K_2' (корабли сближаются); она должна быть равна скорости $v\cos\alpha'$ в момент t_0, когда $\alpha' = \alpha$ (корабли перестали сближаться); наконец, скорость $u\cos(\alpha - \alpha')$ должна быть меньше скорости $v\cos\alpha'$ в момент t, следующий за t_0 (корабли начали удаляться один от другого).

Отсюда получаем (рис. 102, *а*):

$$u = v\cos\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \cos\alpha = \frac{u}{v},$$

что и определяет курс, который должен выбрать капитан корабля K_1. Так как пути $K_1^0K_1'$ и $K_2^0K_2'$ (где K_1^0 и K_2^0 — исходное положение

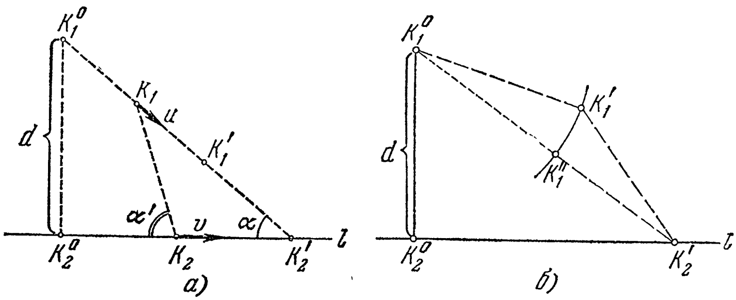


Рис. 102.

кораблей K_1 и K_2) корабли прошли в одинаковое время, то

$$\frac{K_1^0K_1'}{u} = \frac{K_2^0K_2'}{v}, \text{ т. е. } K_1^0K_1' = K_2^0K_2' \cdot \frac{u}{v} = K_2^0K_2'\cos\alpha.$$

А так как, очевидно, $K_1^0K_2' = \frac{d}{\sin\alpha}$ и $K_2^0K_2' = d\operatorname{ctg}\alpha$, то окончательно получаем

$$K_1'K_2' = K_1^0K_2' - K_1^0K_1' = \frac{d}{\sin\alpha} - d\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{d}{\sin\alpha}(1-\cos^2\alpha) =$$

$$= d\sin\alpha = d\sqrt{1-\cos^2\alpha} = d\sqrt{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2} = \frac{d\sqrt{v^2-u^2}}{v}.$$

40. а) Не может: л ю б о й путь AB протяженностью меньше d не гарантирует выхода из леса. В самом деле, предположим, что местонахождение туриста и выбранное направление движения в начале пути оказались таковы, что середина линии AB совпадает с центром O леса. В этом случае расстояние OM от любой точки M линии AB до центра O леса будет меньше радиуса $d/2$ леса (рис. 103) — и линия AB будет целиком проходить внутри леса, так что выхода из леса турист не найдет.

Рис. 103.

б) Может. Поступим, например, так: выйдя из точки A, пройдем прямолинейный путь $AB = d$; затем опишем дугу BC окружности S с центром A и радиусом d, равную $270°\left(=\frac{3}{2}\pi\right)$; после этого пройдем путь $CD = d$ по касательной к окружности S в точке C

(рис. 104, *а*). Нетрудно видеть, что этот путь обладает тем свойством, что все прямые, удаленные от точки A на расстояние d (все касательные окружности S с центром A и радиусом d) имеют с ним общие точки. Но границей леса является одна из этих последних

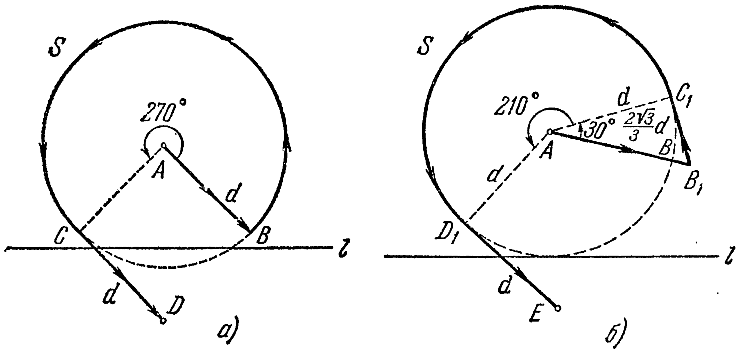


Рис. 104.

прямых, поэтому, двигаясь по пути $ABCD$ (рис. 104, *а*), мы наверное найдем выход их леса. Длина же пути $ABCD$ равна

$$AB + \smile BC + CD = d + \frac{3}{2}\pi d + d = \left(2 + \frac{3}{2}\pi\right) d \approx 6{,}71d < (1 + 2\pi)\, d$$
$$(\approx 7{,}28d).$$

Примечание. Указанный путь $ABCD$ можно заменить еще более коротким. Для этого пройдем сначала в любом направлении путь $AB_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} d$; затем по касательной B_1C_1 к окружности S с центром A и радиусом d выйдем на окружность S в такой точке C_1, что $\smile BC_1 = 30°$, где B — точка пересечения отрезка AB_1 с окружностью; затем пройдем дугу C_1D_1 окружности S, в градусном измерении равную $210°$ $\left(\text{или } \frac{7}{6}\pi\right)$; наконец, пройдем по отрезку $D_1E = d$ касательной окружности в точке D_1 (рис. 104, *б*). Нетрудно видеть, что путь $AB_1C_1D_1E$ также встречает все касательные к окружности S и, следовательно, обязательно выведет нас из леса; длина же этого пути

$$AB_1 + B_1C_1 + \smile C_1D_1 + D_1E = \frac{2\sqrt{3}}{3} d + \frac{\sqrt{3}}{3} d + \frac{7}{6}\pi d + d =$$
$$= \left(1 + \sqrt{3} + \frac{7}{6}\pi\right) d \approx 6{,}40d$$

меньше длины $\left(2 + \frac{3}{2}\pi\right) d$ изображенного на рис. 104, *а* пути $ABCD$.

Дж. Р. Исбелл [42] доказал, что изображенный на рис. 104, *б* путь $AB_1C_1D_1E$ является *кратчайшим* из всех путей, в условиях задачи 40 б) гарантирующих выход из леса.

41. а) Обозначим через K круг радиуса 1 (*км*) с центром O; лишь находясь в этом круге, катер должен опасаться прожектора.

Ясно, что катеру выгоднее всего пересечь границу S круга K в какой-то точке A непосредственно после того, как луч прожектора миновал точку A. Если $v < \frac{4}{5}$ (*км/мин*), то за $1^1/_4$ мин., которых достаточно для того, чтобы прожектор сделал полный поворот и дополнительно осветил еще один квадрант круга K, катер не успеет подойти к острову: он будет находиться где-то внутри круга k с центром A и радиусом $\frac{5}{4}v < 1$ (см. рис. 105, на котором заштрихована общая часть Φ кругов K и k). В тот период, когда луч прожектора повернется от положения OB до положения OC и «просмотрит» всю область Φ (рис. 105), катер будет обнаружен.

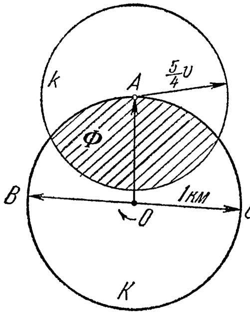


Рис. 105.

б) Заметим прежде всего, что если катер, имеющий скорость v, попадет внутрь круга $\varkappa$ с центром O и радиусом $\rho = \frac{v}{2\pi}$, то далее он может считать себя в безопасности: ведь луч прожектора перемещается по границе σ круга $\varkappa$ со скоростью $2\pi\rho = v$ (*км/мин*), т. е. скорость перемещения луча внутри круга $\varkappa$ м е н ь ш е скорости катера, который может, двигаясь все время впереди луча, одновременно приближаться к острову. Таким образом, задача катера состоит в том, чтобы успеть, оставаясь незамеченным, проникнуть в «круг безопасности» $\varkappa$. [Заодно мы получили, что если $\rho \geqslant 1$, т. е. $v \geqslant 2\pi$ ($\approx 6{,}28$ *км/мин*) и круг $\varkappa$ заключает в себе круг K, то катер сможет попасть на остров, не будучи обнаруженным.]

Пусть AT — та из двух проходящих через точку A касательных к окружности σ, для которой точка T ее касания с σ проходится двигающимся от положения OA лучом прожектора раньше, чем точка T_1, принадлежащая второй касательной AT_1 (рис. 106). Мы утверждаем, что *катеру выгоднее всего плыть к кругу $\varkappa$ по направлению AT*. В самом деле, если катер может незамеченным подойти к σ по изображенному на рис. 106 пути AP, то он может незамеченным добраться и до точки T, двигаясь сначала по пути AP,

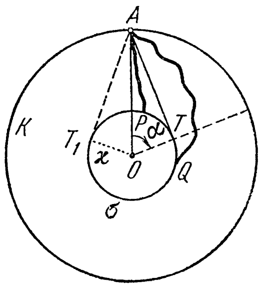


Рис. 106.

а затем по дуге PT окружности σ (напомним, что по окружности σ катер перемещается с той же скоростью, что и луч прожектора); но путь AT короче пути APT, так что, двигаясь по отрезку AT, катер придет в точку T быстрее, чем двигаясь по пути APT. Таким образом, и двигаясь по пути APT, и двигаясь по (прямолинейному) пути AT, катер придет в точку T в промежутке между первым моментом, когда эта точка будет освещена вращающимся, начиная с положения OA, лучом прожектора, и вторым моментом совпадения луча прожектора с OT. Но если луч прожектора, в первый момент «перегоняющий» находящийся в точке A катер (напомним, что вне круга $\varkappa$ угловая скорость движения прожектора превосходит угловую скорость катера), не успевает до прихода катера в точку T снова «догнать» его, то и на всем пути AT (каков бы ни был этот путь!) катер не будет освещен прожектором: в самом деле, поскольку вне $\varkappa$ угловая скорость прожектора больше угловой скорости катера, то, «перегнав» катер в какой-либо промежуточной точке U пути AT, прожектор далее на всем остатке UT пути будет находиться «впереди» катера, в то время как мы предположили, что в момент прихода катера в точку T прожектор находится «сзади» его. Аналогично, если катер может, оставаясь необнаруженным, добраться до окружности σ по изображенному на рис. 106 пути AQ, то он тем более сможет, не будучи освещенным, попасть в точку Q по более короткому пути ATQ, состоящему из отрезка AT и дуги TQ окружности σ [1]; но это значит, что и в точку T катер по отрезку AT придет необнаруженным.

Таким образом, если катер как-то может незаметно добраться до круга $\varkappa$ (а значит, и до острова O!), то он может незаметно добраться до $\varkappa$ и по отрезку AT. Но если путь AT займет у катера t_0 мин., то

$$AT = v_0 t_0,$$

где v_0 — скорость катера. С другой стороны, из рис. 106 имеем

$$OT = \rho_0 = \frac{v_0}{2\pi} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \angle AOT = \frac{AT}{OT} = \frac{v_0 t_0}{v_0/2\pi} = 2\pi t_0; \tag{1}$$

поэтому если луч прожектора попадает в точку T одновременно с катером, то

$$\frac{2\pi + \angle AOT}{2\pi} = t_0, \quad \text{или} \quad 2\pi + \angle AOT = 2\pi t_0. \tag{2}$$

(Напоминаем, что скорость вращения прожектора равна одному обороту в минуту, или 2π *рад/мин*.)

Обозначим угол AOT (в радианной мере!) через α. Сравнение равенств (1) и (2) приводит к следующему уравнению, исходя из которого можно определить угол α:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2\pi + \alpha \quad (= 2\pi t_0). \tag{*}$$

Решить это уравнение можно лишь приближенно, например с помощью таблиц; из него следует, что

$$\alpha \approx 0{,}97 \cdot \frac{\pi}{2},$$

откуда, поскольку $\frac{v_0}{2\pi} = OT = \cos \alpha$, получаем

$$v_0 = 2\pi \cos \alpha \approx 0{,}81 \textit{ км/мин} \approx 48{,}6 \textit{ км/час}.$$

[1] Для того чтобы убедиться в том, что путь ATQ короче любого другого пути AQ, проходящего целиком вне круга $\varkappa$, достаточно представить себе деформацию закрепленной в точке Q и имеющей форму линии AQ нити, которую «наматывают на катушку $\varkappa$», потянув нить за ее конец A!

Ясно, что если двигающийся со скоростью v_0 катер успевает достигнуть круга $\varkappa$, то тем более это возможно для катера, имеющего бо́льшую скорость; таким образом, *катер в том и только в том случае сможет достигнуть острова O, не будучи обнаруженным, если*

$$v \geqslant v_0 \approx 48{,}6 \text{ км/час.}$$

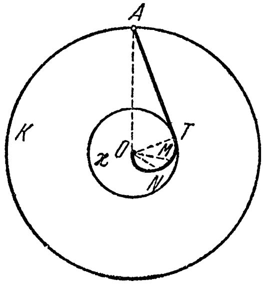


Рис. 107.

Примечание. Интересно установить, чему равно кратчайшее время T_0, в течение которого катер, двигающийся с (минимально возможной) скоростью v_0, сможет незамеченным подойти к острову. В точку T катер прибывает одновременно с лучом прожектора; ясно, что далее он должен двигаться так, чтобы прожектор его не «перегнал», т. е. чтобы его угловая скорость все время была такой же, как и у луча прожектора. Нетрудно понять, что при этом катер должен двигаться по окружности TO диаметра ρ_0 (рис. 107; заметьте, что вписанный угол MON этой окружности пропорционален длине дуги MN!); таким образом, он пройдет путь

$$ATO = AT + \smile TO = v_0 t_0 + \pi\frac{\rho_0}{2} = v_0\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\pi}\right) + \frac{\pi}{2}\frac{v_0}{2\pi} = v_0\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) + \frac{v_0}{4} = v_0\left(\frac{5}{4} + \frac{\alpha}{2\pi}\right),$$

откуда следует, что

$$T_0 = \frac{5}{4} + \frac{\alpha}{2\pi} \approx 1{,}5 \text{ мин.}$$

Подробный разбор задачи 41 проведен в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера [14].

42. а) Условимся обозначать Андрея и Виктора буквами A и B; центр бассейна обозначим буквой O, а его радиус примем за 1. Ясно, что B не может сразу плыть к берегу в направлении OC, противоположном исходному положению A_0 бегуна A (рис. 108, *а*): при этом B надо будет проплыть расстояние $OC = 1$, а A — пробежать путь $\smile A_0C = \pi \approx 3{,}14 < 4$; поэтому A сумеет прибежать в пункт C раньше того момента, когда туда приплывет B. Однако заметим, что внутри круга $\varkappa$ радиуса $\rho = \frac{1}{4}$ пловец B может перемещаться с большей угловой скоростью, чем A перемещается по границе S бассейна (ср. с решением задачи 41 б). Поэтому B может свободно выбирать место внутри $\varkappa$; в частности, он может добиться того, что на окружности s радиуса r, где $\rho = 0{,}25 > r > 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}22$, например, радиуса $r = 0{,}24$, он окажется в какой-то момент в точке B_1, диаметрально противоположной положению A_0 бегуна A на границе бассейна (см. тот же рис. 108, *а*). Теперь, для того чтобы добраться до самой далекой от A_0 точки C берега бассейна, B должен проплыть расстояние

$$B_1C = 1 - r < 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4},$$

а A, для того чтобы попасть в этот же пункт C, надо по-прежнему пробежать путь

$$\smile AC = \pi;$$

поэтому B попадет в пункт C раньше A, после чего он может выбраться на берег и убежать (ибо по суше B бегает быстрее A).

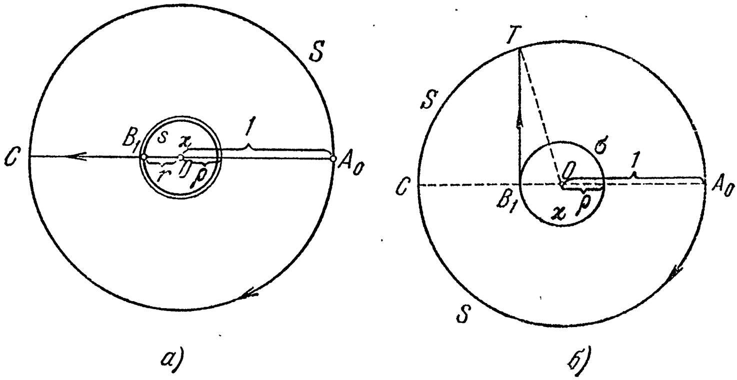


Рис. 108.

б) Ясно, что если отношение k скоростей A и Bтаково, что $\frac{1}{k} > 1 - \frac{\pi}{k}$, или $k < \pi + 1$, то использованные в решении задачи а) соображения полностью сохраняют силу, и, следовательно, A не может помешать B убежать. Однако аналогия между этой задачей и предыдущей (задачей 41) подсказывает B более выгодную стратегию, чем просто плыть прямо к берегу, начиная с наиболее удаленной от A_0 точки B_1 окружности σ круга $\varkappa$ радиуса $\rho = \frac{1}{k}$, — а именно плыть *по касательной* B_1T *к окружности* σ (ср. рис. 108, *б* и рис. 106 на стр. 130).

Пусть B плывет к берегу по касательной B_1T к окружности σ, а A бежит по берегу вдогонку B (а не навстречу B, т. е. пробегает бо́льшую 180° дугу A_0T окружности S). При этом путь B будет равен

$$B_1T = \sqrt{OT^2 - OB_1^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k};$$

путь же A равен

$$\smile A_0T = \pi + \smile CT = \pi + \arccos\frac{OB_1}{OT} = \pi + \arccos\frac{1}{k}.$$

Так как A бегает в k раз быстрее, чем плавает B, то если k таково, что

$$\pi+\arccos\frac{1}{k} > k\,\frac{\sqrt{k^2-1}}{k} \qquad (=\sqrt{k^2-1}), \tag{*}$$

то A не догонит B, а если

$$\pi+\arccos\frac{1}{k} \leqslant \sqrt{k^2-1}, \tag{**}$$

то догонит. Иными словами, здесь существенно отношение величины k к корню x_0 уравнения

$$\pi+\arccos\frac{1}{x} = \sqrt{x^2-1}; \tag{!}$$

если $k < x_0$, то имеет место неравенство (*), а если $k \geqslant x_0$,— то неравенство (**) [1]). Уравнение (!) можно приближенно решить с помощью таблиц или графиков (рис. 109); оно дает $x_0 \approx 4,6$. Таким

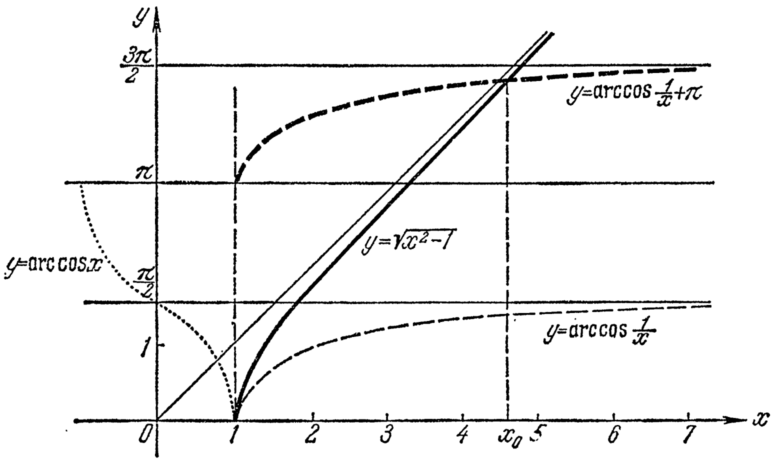


Рис. 109.

образом, *если* $k < x_0$ $(\approx 4,6)$, *то пловец* B *проплывет путь* B_1T *быстрее, чем* A *пробежит* $\smile A_0T$ $(>180°)$, *если же* $k \geqslant x_0$, *то, дви-*

---

[1]) Ср. рис. 109, на котором изображены графики функций $y=\sqrt{x^2-1}$ (гипербола; сплошная линия) и $y=\pi+\arccos\frac{1}{x}$ (пунктирная линия; точками на том же рисунке изображен график функции $y=\arccos x$, а тонким пунктиром — график функции $y=\arccos\frac{1}{x}$); из этого рисунка видно, что при $x < x_0$ мы имеем неравенство $\pi+\arccos\frac{1}{x} > \sqrt{x^2-1}$, в то время как при $x > x_0$, напротив, $\sqrt{x^2-1} > \pi+\arccos\frac{1}{x}$.

гаясь в направлении $\smile AT > 180°$, *бегун A прибудет в пункт T не позже пловца B, двигающегося по касательной B_1T.*

Стратегия A, преследующего B, совершенно ясна: A должен бежать «в сторону B», т. е. в направлении меньшей 180° (меньшей π) дуги AC, где C—точка пересечения луча OB с окружностью S; если же $\smile AC=\pi$, то A безразлично, в какую сторону бежать, и мы можем условиться, что он бежит, скажем, в направлении вращения часовой стрелки. Труднее установить, какой стратегии должен придерживаться B. Впрочем, первый пункт здесь совершенно ясен: поскольку внутри круга $\varkappa$ угловая скорость B больше угловой скорости двигающегося по окружности S бегуна A, то окружность σ пловец B, естественно, покинет в точке B_1, диаметрально противоположной положению A_0, которое занимает в этот момент бегун A (рис. 110, *а*, *б*); этого он м о ж е т д о б и т ь с я и, естественно, будет

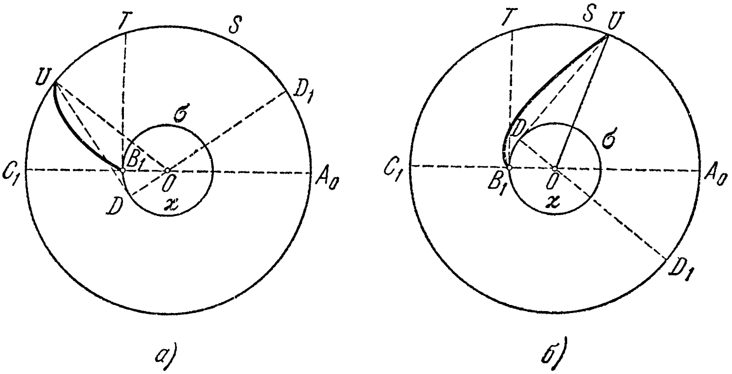


Рис. 110.

добиваться. Исходя из пункта B_1, пловец B проплывает некоторую траекторию B_1U; поскольку A «бежит за B» и угловая скорость A превосходит угловую скорость B, покинувшего круг $\varkappa$, то на всем пути B_1U пловца B дуга AC будет уменьшаться, и вопрос состоит лишь в том, сумеет ли A обратить эту дугу в 0 до выхода B на берег в точке U. Если это ему удастся, то далее A уже не сойдет с радиуса OB, преграждая B выход на берег (это возможно, поскольку угловая скорость A больше угловой скорости B); если же A не сумеет занять положение C до выхода B на берег, то B сможет убежать. Докажем теперь, что *B выгоднее всего плыть по касательной к окружности* σ и что *при $k < x_0$* ($\approx 4{,}6$) *B сумеет убежать от A, а при $k \geqslant x_0$—не сумеет.*

Положим сначала, что

$$k \geqslant x_0;$$

дугу C_1U (где C_1—точка пересечения радиуса OB_1 с границей S бассейна), указывающую угол, на который сместился B на пути B_1U, будем считать имеющей направление вращения часовой стрелки. Проведем из точки U касательную UD к окружности σ (причем такую, что направление угла DOU от OD к OU совпадает с направлением дуги CU) и рассмотрим отдельно два случая [1]):

1°. $\angle DOU \geqslant \angle B_1OU$ (рис. 110, *а*). Обозначим через D_1 точку окружности S, «диаметрально противоположную» точке D окружности σ. Ясно, что прямолинейный путь DU короче пути DB_1U, составленного из дуги DB_1 окружности σ и линии B_1U; поэтому отрезок DU пловец B проплывет быстрее, чем путь DB_1U. Но в силу неравенства $k \geqslant x_0$ (т. е. неравенства (**)!) бегун A пробежит путь $D_1A_0C_1U$ не медленнее, чем B проплывет отрезок DU, т. е. заведомо не медленнее, чем B проплывет путь DB_1U. А так как A пробегает дугу D_1A_0 в точности за то же время, за какое B проплывает дугу DB_1 (ибо на этих участках пути угловые скорости A и B равны), то A пробежит путь A_0U не медленнее, чем B проплывет путь B_1U, — и A помешает B выйти на берег.

2°. $\angle DOU \leqslant \angle B_1OU$ (рис. 110, *б*). Сохраним и здесь принятые в п. 1° обозначения. Ясно, что, каков бы ни был путь B_1U пловца B, он, во всяком случае, не меньше пути B_1DU, составленного из дуги B_1D окружности σ и отрезка DU (и имеет ту же длину, лишь если он совпадает с этим последним путем!); для того чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе, как натягивается на «катушку» $\varkappa$ закрепленная в точке B_1 «нить» B_1U, которую мы тянем за конец U [1]). Но мы знаем, что даже если B плывет по траектории B_1DU, то преследующий B бегун A прибудет в U не позже B: дугу A_0D_1 он пробежит за то же время, за которое пловец B проплывет дугу B_1D, а дугу D_1U бегун A пробежит не медленнее, чем B проплывет отрезок DU. Таким образом, и в этом случае B не удастся убежать.

Покажем теперь, что при

$$k < x_0$$

пловец B может убежать от A. Мы по-прежнему считаем, что B покидает круг $\varkappa$ в точке B_1 окружности σ, «диаметрально противоположной» точке A_0 окружности S, в которой в этот момент находится A. Условиться просто о том, что B плывет по касательной B_1T (см. выше рис. 110, *б*), мы не можем, ибо A может побежать «навстречу B» и прибыть в пункт A_0 раньше B; поэтому нам надо более полно охарактеризовать стратегию B. Пусть α — какое-то очень малое число — такое малое, что

$$\pi + \arccos\frac{1}{k} - \alpha > \sqrt{k^2 - 1}$$

(ср. с неравенством (*) на стр. 134). B покидает круг $\varkappa$ в тот момент, когда A находится на не превышающем α расстоянии от точки A_0 окружности S, «диаметрально противоположной» стартовой точке B_1 пловца B, и плывет по радиусу окружности S прямо к берегу, зорко следя за поведением A. До тех пор, пока (не превышающий π!) угол AOB остается больше $\pi - \alpha$, пловец B продолжает плыть прямо к берегу; но как только $\angle AOB$ сравнивается с $\pi - \alpha$, пловец B меняет направление и плывет по касательной к окружности σ, естественно, выбирая ту из проходящих через B касательных,

---

[1]) Ср. с решением задачи 41 б)!

которая «ведет подальше от A», т. е. во внешнюю область угла BOA. Если A меняет направление бега, то и B меняет свое направление: когда $\angle AOB > \pi - \alpha$, он плывет по радиусу окружности, а когда $\angle AOB \leqslant \pi - \alpha$, — по касательной к σ «в сторону от A»; таким образом, путь B, вообще говоря, представляет собой ломаную, состоящую из отрезков радиусов окружности S и отрезков касательных к окружности σ. Определяющее α неравенство обеспечивает для B возможность выйти на берег в том случае, если, начиная с позиции, характеризующейся условием $\angle AOB = \pi - \alpha$, бегун A преследует двигающегося по касательной к окружности σ пловца B, не меняя направления движения и тем самым почти повторяя ситуацию, отраженную на рис. 108, *б*. Если же A будет менять направление бега, то это только выгодно пловцу B, так как позволит ему еще больше опередить A. В самом деле, если последний из участков движения B — это *радиус $B'U$ окружности S*, то в силу предписанной B стратегии бегун A на всем протяжении времени, пока B проплывал этот участок пути, находился на «почти противоположном B» берегу S бассейна — где-то внутри изображенной на рис. 111, *а* дуги A_1A_2,

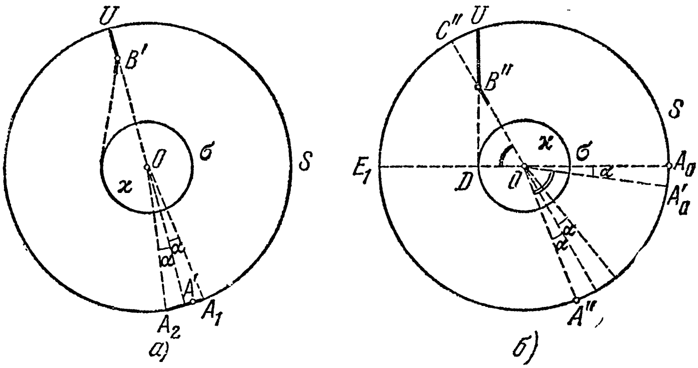


Рис. 111.

и он никак не сможет помешать B высадиться на берег. Если же последний участок пути B — это *отрезок $B''U$ касательной к окружности* σ в точке D (рис. 111, *б*), то в тот момент, когда B находился в точке B'', где он изменил направление движения, перейдя с «радиальной» части траектории OB'' на «тангенциальную» (совпадающую с касательной к окружности σ) часть $B''U$, бегун A находился в такой точке A'' берега S бассейна, что $\angle A''OB'' = \pi - \alpha$ (ибо такова стратегия B). Но если бы A сумел пробежать путь $A''U$ быстрее, чем B проплывет участок $B''U$, то A наверное сумел бы пробежать изображенный на рис. 111, *б* путь $A_0'U$ (где $\angle A_0'OD = \pi - \alpha$) быстрее, чем B проплывет путь DU (напоминаем, что вне $\varkappa$ — и, в частности, на прямолинейном участке DB'' — угловая скорость пловца B м е н ь ш е угловой скорости бегуна A!), что, однако, противоречит выбору k и неравенству для α. Поэтому и в изображенном на рис. 111, *б* случае пловец B доберется до точки U берега S раньше A, и A не сможет помешать ему выйти на берег и убежать.

43. а) Пусть, для определенности, $AC = b \geqslant a = CB$. Ясно, что наибольший угол треугольника ABC меньше $180°$ и может быть сколь угодно близок к $180°$ (см. треугольник $\bar{A}BC$ на рис. 112). Найдем теперь **наименьшее** возможное значение наибольшего угла. Закрепим отрезок $BC = a$; при этом точка A будет принадлежать окружности S радиуса b с центром C, скажем, верхней ее полуокружности MA_0N, если считать прямую BC горизонтальной; здесь M и N — точки пересечения с S лучей BC и CB. Пусть A_0 — такая точка окружности S, что треугольник BA_0C **равнобедренный**: $BA_0 = CA_0 = b$; так как $b \geqslant a$, то наибольшими углами треугольника BA_0C будут углы $\angle A_0BC = \angle A_0CB = \alpha$. Если теперь A' — произвольная точка дуги A_0M, то, очевидно, $\angle A'CB > \angle A_0CB = \alpha$, а если A'' — точка дуги A_0N, то $\angle A''BC > \angle A_0BC = \alpha$; поэтому наибольший угол и треугольника $A'BC$, и треугольника $A''BC$ заведомо больше α.

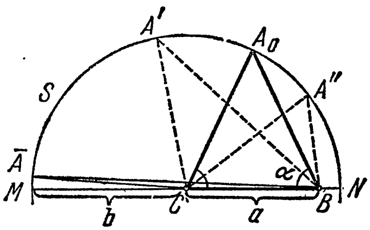


Рис. 112.

Итак, если наибольший угол треугольника ABC обозначить через x, то $\alpha \leqslant x < 180°$, где угол α определяется равенством

$$\cos\alpha = \frac{a}{2b}.$$

Легко видеть, что все указанные значения x являются возможными.

б) Ясно, что наименьший угол треугольника ABC может быть сколь угодно близок к нулю (см. треугольник $\bar{A}BC$ рис. 113); найдем **наибольшее** возможное значение наименьшего угла. По-прежнему будем считать, что $b \geqslant a$; так как $\angle B > \angle A$, то наименьший угол треугольника надо искать среди углов A и C. Закрепим отрезок $AC = b$; тогда $\angle A$ достигает наибольшей возможной величины, когда AB касается окружности S с центром C и радиусом a (рис. 113). При этом $\angle B = 90°$ и

$$AB = \sqrt{AC^2 - CB^2} = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Далее надо рассмотреть два случая.

1°. Если $b \geqslant a\sqrt{2}$ (рис. 113, *а*), то

$$AB = \sqrt{b^2 - a^2} \geqslant a = BC,$$

следовательно, $\angle C \geqslant \angle A$, и, значит, наименьший угол треугольника ABC — это $\angle A$. Отсюда вытекает, что при $b \geqslant a\sqrt{2}$ искомое значение β_1 наименьшего угла треугольника определяется равенством $\sin\beta_1 = \frac{a}{b}$, и наименьший угол y треугольника заключается в пределах

$$0 < y \leqslant \beta_1.$$

2°. Если $b \leqslant a\sqrt{2}$ (рис. 113, *б*), то $\angle C \leqslant \angle A$. Так как при увеличении угла C угол A будет уменьшаться, то наименьший из них примет наибольшее значение β_2 тогда, когда эти углы равны, т. е. когда $AB=CB=a$, и, значит, наименьший угол y треугольника заключается в пределах

$$0 < y \leqslant \beta_2,$$

где, как легко видеть, $\cos\beta_2=\frac{b}{2a}$. [Если $b=a\sqrt{2}$, то, очевидно, $\beta_1=\beta_2$.]

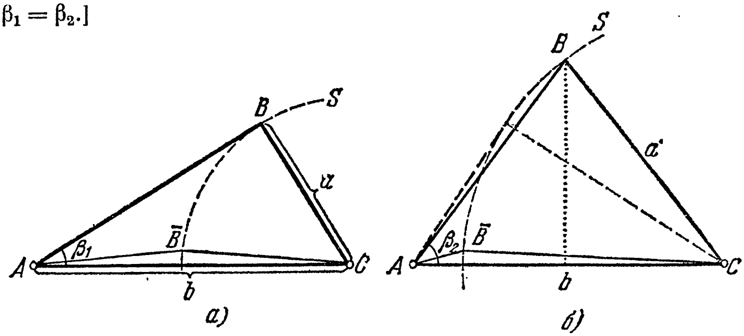


Рис. 113.

44. Эту задачу можно сформулировать еще и так: *внутри кольца, ограниченного двумя окружностями радиусов M и m с общим центром C, расположены две точки A и B; каково наименьшее и наибольшее возможные значения угла ACB, если $AB=1$.* При этом ясно, что задача имеет смысл, лишь если $M \geqslant \frac{1}{2}$ (и $M \geqslant m$).

Если $M-m \geqslant 1$, то *наименьшее* возможное значение угла $ACB=\alpha$, очевидно, равно нулю (рис. 114, *а*). Пусть теперь $M-m < 1$.

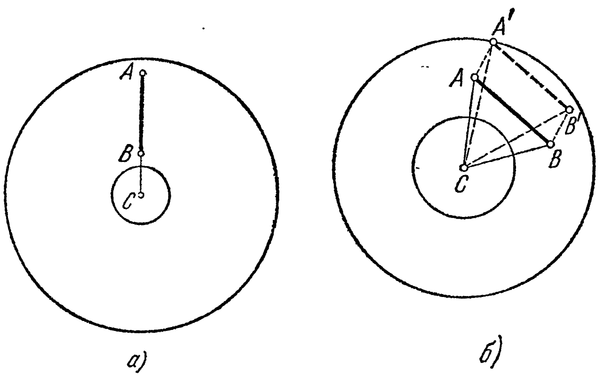


Рис. 114.

Заметим, что при отыскании наименьшего возможного значения угла α мы всегда можем считать один из концов отрезка AB (скажем, A) *принадлежащим большей окружности*: в противном случае сдвинем параллельно отрезок AB до положения, при котором конец отрезка попадет на эту окружность; $\angle ACB$ при этом только уменьшится (рис. 114, *б*). Если же точка A принадлежит большей окружности, то точка B будет принадлежать заключенной внутри кольца дуге B_1B_2 окружности S с центром A и радиусом 1 (рис. 115). Проведем из точки C касательную CB_0 к окружности S (точнее — к ограниченной диаметром CA полуокружности, которой принадлежит дуга B_1B_2). Если точка B_0 лежит вне дуги B_1B_2 (рис. 115, *а*) или

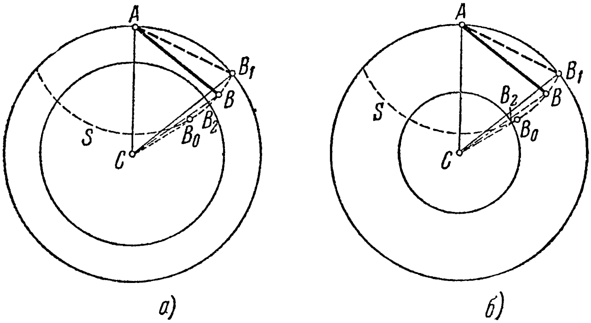


Рис. 115.

совпадает с ее концом B_2, то угол ACB при движении точки B по дуге B_1B_2 от точки B_1, лежащей на большей окружности, до B_2 все время увеличивается; следовательно, этот угол принимает наименьшее значение, когда B совпадает с B_1. Если же точка B_0 лежит внутри дуги B_1B_2 (рис. 115, *б*), то угол ACB увеличивается, когда точка B движется от B_1 к B_0, а затем начинает уменьшаться; следовательно, и в этом случае угол ACB принимает наименьшее значение, когда точка B совпадает с какой-то из точек B_1 или B_2. Итак, во всех случаях (острый, так как он не больше острого угла ACB_0!) угол $ACB=\alpha$ принимает наименьшее значение, когда B совпадает с одной из точек B_1 или B_2.

Отметим теперь, что

$$\cos\angle ACB_2=\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}$$

(это следует из рассмотрения треугольника CAB_2), и

$$\cos\angle ACB_1=\frac{M^2+M^2-1}{2M\cdot M}=1-\frac{1}{2M^2}.$$

Определим, в каком случае будет больше первый и в каком случае второй из этих углов.

Очевидно,

$$\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}-\frac{2M^2-1}{2M^2}=\frac{M^3+Mm^2-M-2M^2m+m}{2M^2m}=$$

$$=\frac{(M-m)(M^2-Mm-1)}{2M^2m}=\frac{(M-m)\left(M-m-\frac{1}{M}\right)}{2Mm}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{если } m \leqslant M - \frac{1}{M}, \text{ то } \cos \angle ACB_2 \geqslant \cos \angle ACB_1$$

и, следовательно, $\angle ACB_2 \leqslant \angle ACB_1$;

$$\text{если } m \geqslant M - \frac{1}{M}, \text{ то } \cos \angle ACB_2 \leqslant \cos \angle ACB_1,$$

и, следовательно, $\angle ACB_2 \geqslant \angle ACB_1$.

Окончательно получаем: *если* $m \geqslant M - \frac{1}{M}$, *то наименьший возможный угол* α *равен* $\arccos\left(1 - \frac{1}{2M^2}\right)$ $\left(= 2 \arcsin \frac{1}{2M}\right)$; *если* $m \leqslant M - \frac{1}{M}$ (*но* $m \geqslant M - 1$), *то наименьший возможный угол* α *равен* $\arccos \frac{M^2 + m^2 - 1}{2Mm}$ $\left(\text{если } m = M - \frac{1}{M}, \text{ то оба ответа совпадают}\right)$; *если* $m \leqslant M - 1$, *то угол* α *может быть сколь угодно близок к нулю.*

Обратимся теперь к вопросу об отыскании *наибольшего* возможного значения угла α. Ясно, что если $m \leqslant {}^1/_2$, то это наибольшее возможное значение α равно 180° (рис. 116, *а*); поэтому нам надо

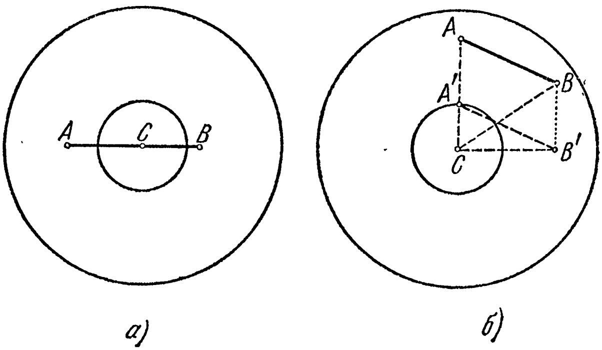


Рис. 116.

рассмотреть лишь случай, когда $m > {}^1/_2$. Далее, если ни одна из точек A и B не принадлежит меньшей из образующих кольцо концентрических окружностей, то мы можем сдвинуть отрезок параллельно так, чтобы один из его концов (скажем, точка A) попал на меньшую окружность и угол α увеличился (рис. 116, *б*); поэтому можно считать, что точка A *принадлежит меньшей окружности*. При этом точка B должна принадлежать заключенной внутри кольца дуге B_1B_2 окружности S радиуса 1 с центром A (рис. 117). Точка C может лежать как внутри окружности S (рис. 117, *а*, *б*), так и вне ее (рис. 117, *в*, *г*); при этом в последнем случае дуге B_1B_2 не может принадлежать точка B_0 соприкосновения S с проведенной к S из C

касательной (вернее—обе такие точки), ибо $CB_0 < CA = m$, значит, B_0 не принадлежит рассматриваемому кольцу. Поэтому при движении точки B по дуге B_1B_2 от точки B_1 меньшей окружности до точки B_2 угол

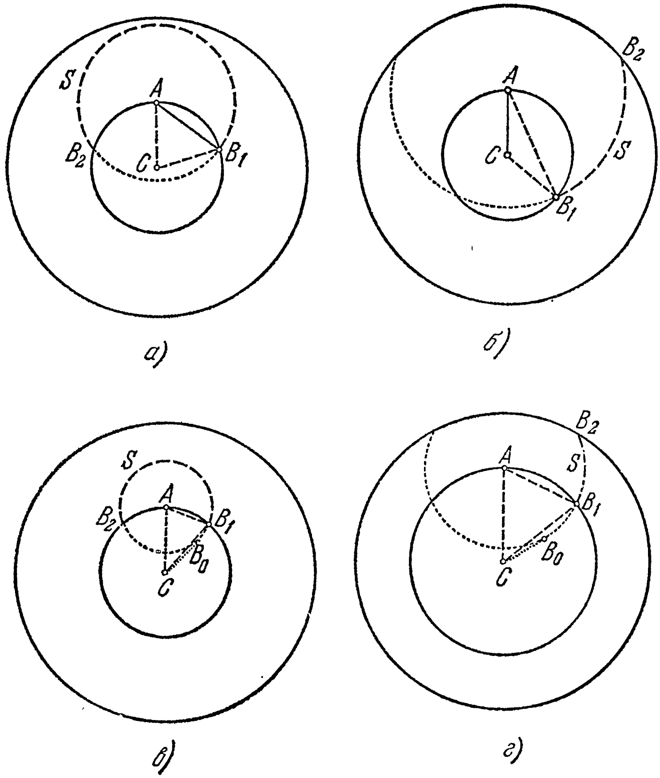


Рис. 117.

$ACB = \alpha$ либо уменьшается от значения $\angle ACB_1 \left(= 2\arcsin\frac{1}{2m} = \right.$ $\left. = \arccos\left(1 - \frac{1}{2m^2}\right)\right)$ до нуля, а потом растет до прежней величины $\angle ACB_1 = \angle ACB_2$ (рис. 117, *а, в*), либо все время уменьшается (рис. 117, *б, г*). Поэтому, если $m \geqslant \frac{1}{2}$, то наибольшее возможное значение угла α равно

$$2\arcsin\frac{1}{2m} \left(= \arccos\left(1 - \frac{1}{2m^2}\right)\right).$$

Заметим, наконец, что $M-\frac{1}{M}\geqslant\frac{1}{2}$ при $M\geqslant\frac{\sqrt{17}+1}{4}=1,28\ldots$ и $M-\frac{1}{M}\leqslant\frac{1}{2}$ при $M\leqslant\frac{\sqrt{17}+1}{4}$ $\left(\text{число } \frac{\sqrt{17}+1}{4}\right.$ является корнем квадратного уравнения $\left.x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\right)$. Поэтому

при $0,5\leqslant M\leqslant 1$ имеем:

$$2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha<180^\circ,\text{ если } m\leqslant 0,5,$$

$$2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m},\text{ если } 0,5\leqslant m\leqslant M;$$

при $1\leqslant M\leqslant\frac{\sqrt{17}+1}{4}=1,28\ldots$ имеем:

$$0<\alpha<180^\circ,\text{ если } m\leqslant M-1,$$

$$\arccos\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}\leqslant\alpha<180^\circ,\text{ если } M-1\leqslant m\leqslant M-\frac{1}{M},$$

$$2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha<180^\circ,\text{ если } M-\frac{1}{M}\leqslant m\leqslant 0,5,$$

$$2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m},\text{ если } 0,5\leqslant m\leqslant M;$$

при $1,28\ldots=\frac{\sqrt{17}+1}{4}\leqslant M\leqslant 1,5$ имеем:

$$0<\alpha<180^\circ,\text{ если } m\leqslant M-1,$$

$$\arccos\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}\leqslant\alpha<180^\circ,\text{ если } M-1\leqslant m\leqslant 0,5,$$

$$\arccos\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m},\text{ если } 0,5\leqslant m\leqslant M-\frac{1}{M},$$

$$2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m},\text{ если } M-\frac{1}{M}\leqslant m\leqslant M;$$

при $M\geqslant 1,5$ имеем:

$$0<\alpha<180^\circ,\text{ если } m\leqslant 0,5,$$

$$0<\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m},\text{ если } 0,5\leqslant m\leqslant M-1,$$

$$\arccos\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m},\text{ если } M-1\leqslant m\leqslant M-\frac{1}{M},$$

$$2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m},\text{ если } M-\frac{1}{M}\leqslant m\leqslant M.$$

45. а) Ясно, что

1) $0<A\leqslant 60^\circ$,

где A — наименьший угол треугольника ABC ($\angle A\leqslant 60^\circ$, ибо $A+B+C=180^\circ=3\cdot 60^\circ$ и $A\leqslant B\leqslant C$; $\angle A=60^\circ$, если треугольник ABC равносторонний);

2) $0<B<90^\circ$,

где B — средний по величине угол треугольника ABC [$\angle B$ сколь угодно мал, если треугольник ABC равнобедренный с очень большим углом C при вершине (рис. 118, *а*); $\angle B$ сколь угодно близок к 90°, если треугольник равнобедренный с очень малым углом A при вершине (рис. 118, *б*); $\angle B < 90°$, ибо $\angle B \leqslant \angle C$ и $\angle B + \angle C < 180°$];

3) $60° \leqslant C < 180°$,

где C — наибольший угол треугольника ABC ($\angle C \geqslant 60°$, ибо $A+B+C = 180° = 3 \cdot 60°$ и $C \geqslant B \geqslant A$; $\angle C = 60°$, если треугольник ABC равносторонний).

б) 1) Ясно, что наименьшая сторона a треугольника ABC площади 1 может быть *как угодно мала:* если катеты прямоугольного

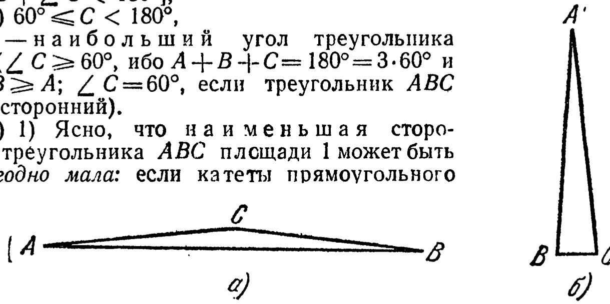


Рис. 118.

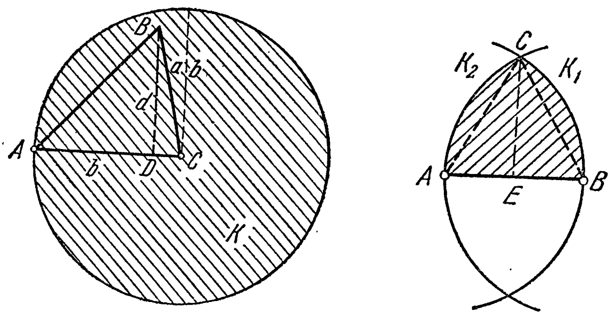
треугольника равны ε (здесь ε может быть сколь угодно малым числом!) и $2/\varepsilon$, то площадь треугольника равна 1. Сторона a может также быть *как угодно велика*: если две стороны треугольника равны M и $b \geqslant M$ (где M может быть как угодно велико!), а угол C между этими сторонами изменяется, начиная со значения 90° и стремясь к 180°, то третья сторона c все время остается самой большой, а площадь треугольника, начиная с большого значения $\frac{1}{2} bM$, уменьшается неограниченно, и потому, пробегая все значения между $\frac{1}{2} bM$ и 0, проходит и через значение 1.

2) Поскольку наименьшая сторона a треугольника ABC площади 1 может быть как угодно велика, то его средняя сторона $AC = b$ тем более может быть *сколь угодно большой*. Далее, если треугольник имеет (фиксированную!) сторону $AC = b$ и какую-то (произвольную) сторону $BC = a \leqslant b$, то вершина B треугольника принадлежит (заштрихованному на рис. 119, *а*) кругу K радиуса b с центром в точке C. Так как каждая точка этого круга удалена от прямой AC на расстояние $d \leqslant b$, то высота BD треугольника ABC не превосходит b, и его площадь не может быть больше $b^2/2$ (она равна $b^2/2$, если $BC = b$ и $BC \perp AC$). Поэтому средняя сторона b треугольника ABC площади 1 не может быть *меньше* $\sqrt{2}$ (ибо иначе было бы $b^2/2 < 1$).

3) Ясно, что наибольшая сторона c треугольника площади 1 может быть *сколь угодно большой*, но сколь угодно малой она быть не может. Если сторона $AB = c$ фиксирована и $AC = b \leqslant c$, $BC = a \leqslant c$, то вершина C треугольника принадлежит пересечению двух кругов K_1 и K_2 радиуса c с центрами B и A; поэтому высота CE треугольника, а следовательно, и его площадь, будут наибольшими, если C совпадает с вершиной заштрихованного на рис. 119, *б* криволинейного треугольника, т. е. когда ABC — равносторонний треугольник

со стороной c и площадью $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Отсюда следует, что если площадь треугольника ABC равна 1, то его наибольшая сторона c не может быть *меньше* $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}=\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$.

Таким образом, $0 < a < \infty$; $\sqrt{2}\leqslant b < \infty$; $\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}\leqslant c < \infty$.



а) б)

Рис. 119.

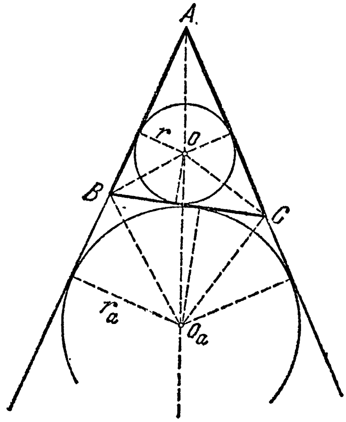


Рис. 120.

46. а) Разбив треугольник ABC на три меньших треугольника oAB, oBC и oCA с общей вершиной o (центр вписанной окружности, рис. 120) и одинаковой высотой 1 (радиус вписанной окружности), мы сразу получим, что

$$S=\frac{1}{2}a\cdot 1+\frac{1}{2}b\cdot 1+\frac{1}{2}c\cdot 1=\frac{1}{2}(a+b+c)=p,$$

где S — площадь треугольника ABC и p — его полупериметр. Далее, заметив, что

$$S=S_{\Delta o_a AB}+S_{\Delta o_a AC}-S_{\Delta o_a BC},$$

где o_a — центр вневписанной окружности радиуса r_a, так что все три треугольника o_aAB, o_aAC и o_aBC имеют одинаковую высоту r_a (см. тот же рис. 120), получаем

$$S=\frac{1}{2}r_a\cdot c+\frac{1}{2}r_a\cdot b-\frac{1}{2}r_a\cdot a=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)=$$

$$=\frac{1}{2}r_a(2p-2a)=r_a(p-a),$$

т. е.

$$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{p}{p-a};\quad \frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{p}=1-\frac{a}{p}.$$

Аналогично этому доказываются и равенства

$$r_b=\frac{p}{p-b},\quad \frac{1}{r_b}=1-\frac{b}{p};\quad r_c=\frac{p}{p-c},\quad \frac{1}{r_c}=1-\frac{c}{p}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что условие $r_a\leqslant r_b\leqslant r_c$ $\left(\text{т. е. } \frac{1}{r_a}\geqslant\frac{1}{r_b}\geqslant\frac{1}{r_c}\right)$ равносильно условию $a\leqslant b\leqslant c$.

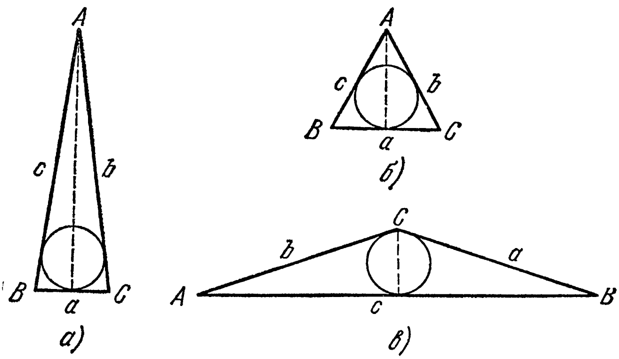


Рис. 121.

1) Ясно, что наименьшая сторона a треугольника может составлять как угодно малую часть всего периметра $2p$ (рис. 121, a); самую же большую часть периметра $a=\frac{2p}{3}=\frac{2}{3}p$ она составляет у равностороннего треугольника (рис. 121, $б$; напоминаем, что $a\leqslant b\leqslant c$).

Поэтому

$$\frac{1}{3}=1-\frac{{}^2/_3\,p}{p}\leqslant\frac{1}{r_a}<1-\frac{0}{p}=1,$$

т. е.

$$\boxed{1<r_a\leqslant 3}\,.$$

2) Средняя по величине сторона b треугольника не может быть меньше $p/2$ $\left(\text{ибо сумма } a+b \text{ двух сторон больше } \frac{2p}{2}=p, \text{ а } b>a\right)$, но может быть как угодно близка к $p/2$ (рис. 121, *в*). Далее, очевидно, $b\leqslant c<p$ (ибо $c<a+b$), причем сторона b может быть как угодно близка к p (рис. 121, *а*). Таким образом,

$$0=1-\frac{p}{p}<\frac{1}{r_b}<1-\frac{p/2}{p}=\frac{1}{2},$$

т. е.

$$\boxed{2<r_b<\infty}\,.$$

3) Наибольшая сторона c треугольника меньше суммы двух других сторон; поэтому $c<p$, хотя c может быть как угодно близка к p (рис. 121, *в*). С другой стороны, $c\geqslant\frac{2p}{3}=\frac{2}{3}p$, причем $c=\frac{2}{3}p$, если треугольник ABC равносторонний (рис. 121, *б*). Таким образом,

$$0=1-\frac{p}{p}<\frac{1}{r_c}\leqslant 1-\frac{{}^2/_3\,p}{p}=\frac{1}{3},$$

т. е.

$$\boxed{3\leqslant r_c<\infty}\,.$$

б) Заметим прежде всего, что точка X_1 пересечения биссектрисы Ao угла A треугольника с описанной окружностью S делит пополам отрезок oo_a между центрами вписанной и вневписанной окружностей (рис. 122) [1]). В самом деле, поскольку биссектрисы Bo и Bo_a смежных углов B и CBM, так же как и биссектрисы Co и Co_a смежных углов C и BCN, взаимно перпендикулярны, то окружность с центром в середине Q отрезка oo_a и радиусом $\frac{1}{2}oo_a$ проходит через точки B и C; поэтому центр Q этой окружности должен принадлежать перпендикуляру XX_1, восставленному к стороне BC треугольника ABC в ее середине D. Но (при $AB\neq AC$) X_1 есть единственная точка пересечения перпендикуляра XX_1 с отрезком oo_a!

Обозначим теперь длины перпендикуляров DX, EY и FZ, восставленных к сторонам треугольника в их серединах, считая от стороны треугольника до точки пересечения с описанной окружностью (с дугой описанной окружности, расположенной по ту же сторону

---

[1]) Ср. [17], решение задачи 73 в).

от соответствующей стороны треугольника, что и сам треугольник), через p_a, p_b и p_c (рис. 123). Опустив еще на сторону BC треугольника перпендикуляры $oU = r$ и $o_aV = r_a$ из центров o и o_a вписанной

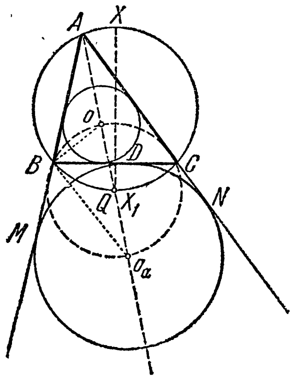


Рис. 122.

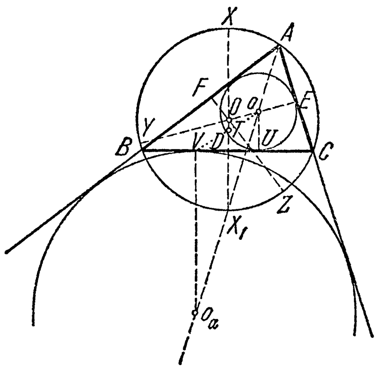


Рис. 123.

и вневписанной окружностей и воспользовавшись тем, что X_1 — середина отрезка oo_a, получаем из рис. 123

$$TX_1 = \frac{1}{2} o_aV = \frac{1}{2} r_a, \quad TD = \frac{1}{2} oU = \frac{1}{2} r$$

(где T — середина отрезка oV), откуда следует, что

$$DX_1 = TX_1 - TD = \frac{1}{2} r_a - \frac{1}{2} r$$

и

$$p_a = DX = XX_1 - DX_1 = 2 - \frac{1}{2}(r_a - r)$$

(ибо радиус R описанной окружности треугольника по условию равен 1, а $XX_1 = 2R$). Но (см. ниже задачу 95 б))

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r = 4 + r,$$

т. е.

$$2 - \frac{1}{2}(r_a - r) = 2 - \frac{1}{2}(4 - r_b - r_c) = \frac{1}{2}(r_b + r_c);$$

таким образом,

$$p_a = DX = \frac{1}{2}(r_b + r_c).$$

Аналогично доказываются и равенства

$$p_b = EY = \frac{1}{2}(r_a + r_c), \quad p_c = FZ = \frac{1}{2}(r_a + r_b).$$

После этих предварительных рассмотрений перейдем к решению задачи.

1) Наибольшая сторона c треугольника может быть как угодно мала (по сравнению с принятым за единицу радиусом R опи-

санной окружности); поэтому

$$FZ = p_c = \frac{1}{2} r_a + \frac{1}{2} r_b \geqslant \frac{1}{2} r_a$$

может быть сколь угодно мало (рис. 124, *а*); значит, и r_a может быть *сколь угодно мало*. С другой стороны, так как противолежащий

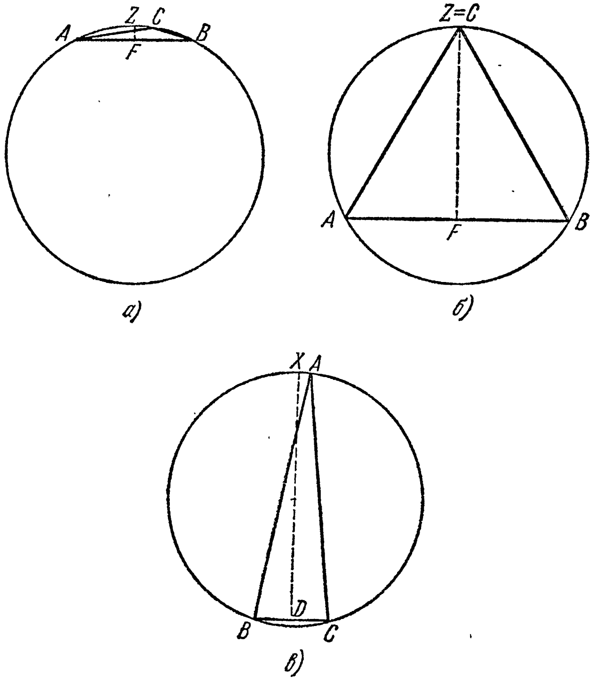


Рис. 124.

стороне c угол C (больший угол треугольника!) не меньше 60° (см. задачу 45 а), то $p_c \leqslant {}^3/_2$ (если $C = 60°$, то $p_c = {}^3/_2$). Таким образом,

$$p_c = \frac{1}{2} r_a + \frac{1}{2} r_b \leqslant \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad r_a \leqslant r_b;$$

следовательно,

$$r_a \leqslant \frac{3}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{0 < r_a \leqslant \frac{3}{2}}$$

$\left(r_a = \frac{3}{2}\right.$, если треугольник ABC — равносторонний; рис. 124, $\left.б\right)$.

П р и м е ч а н и е. Этот результат можно получить и без обращения к величинам p_a, p_b, p_c. Выше мы видели, что если $a = b \approx \frac{p}{2}$ и $c \approx p$, то $\frac{r_a}{r} \approx 2$, где r — радиус вписанной окружности (см. выше рис. 121, *в* и относящийся к нему текст); с другой стороны, в этом случае, очевидно, отношение r/R (где R — радиус описанной окружности) будет очень мало. Отсюда следует, что отношение $\frac{r_a}{R}\left(=\frac{r_a}{r}\cdot\frac{r}{R}\right)$ может быть *сколь угодно малым*. Далее, из результатов задачи 46 а) и задачи 94 следует, что

$$\frac{r_a}{r} \leqslant 3 \quad \text{и} \quad \frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2},$$

и значит,

$$\frac{r_a}{R} = \frac{r_a}{r}\cdot\frac{r}{R} \leqslant \frac{3}{2},$$

причем $\frac{r_a}{R} = \frac{3}{2}$, лишь если $\frac{r_a}{r} = 3$ и $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, т. е. если треугольник ABC равносторонний.

2) При разборе случая 1) мы уже убедились, что величина $p_c = \frac{1}{2} r_a + \frac{1}{2} r_b \geqslant \frac{1}{2} r_b$ может быть сколь угодно малой; поэтому и r_b может быть *сколь угодно малым* (рис. 124, *а*). С другой стороны, так как наименьшая сторона a треугольника может быть сколь угодно малой, то $p_a = DX$ может быть сколь угодно близко к диаметру 2 описанной окружности (рис. 124, *в*). Однако

$$p_a = \frac{1}{2} r_b + \frac{1}{2} r_c < 2,$$

и так как $r_b \leqslant r_c$, то

$$\frac{1}{2} r_b < 1, \quad \text{т. е.} \quad r_b < 2.$$

Итак,

$$\boxed{0 < r_b < 2}$$

(причем r_b может быть сколь угодно близко к 2; ср. выше, рис. 124, *а*).

3) Поскольку (ср. со случаем 2))

$$p_a = \frac{1}{2} r_b + \frac{1}{2} r_c < 2,$$

то

$$\frac{1}{2} r_c < 2, \text{ т. е. } \quad r_c < 4;$$

однако r_c может быть *сколь угодно близко к* 4 (ср. выше, рис. 124, *в*). С другой стороны, так как наименьший угол A треугольника $\leqslant 60°$ (см. задачу 45а)), то

$$p_a = \frac{1}{2} r_b + \frac{1}{2} r_c \geqslant \frac{3}{2}$$

$\left(\text{причем } p_a=\frac{3}{2}, \text{ если } A=60^\circ\right)$; а так как, кроме того, $r_b \leqslant r_c$, то

$$r_c \geqslant \frac{3}{2}.$$

Итак,

$$\boxed{\frac{3}{2} \leqslant r_c < 4}$$

$\left(r_c=\frac{3}{2}, \text{ если треугольник } ABC \text{ равносторонний; рис. } 124, б\right)$.

47. Соединив центр o вписанной сферы тетраэдра (см. рис. 10, a в тексте) со всеми вершинами тетраэдра, мы без труда найдем, что

$$V=V_{oABC}+V_{oABD}+V_{oACD}+V_{oBCD},$$

где V — объем тетраэдра. С другой стороны, треугольные пирамиды $oABC$, $oABD$, $oACD$ и $oBCD$ имеют одинаковую высоту 1 (радиус вписанной сферы тетраэдра) и площади оснований $S_{ABC}=S_D$, $S_{ABD}=S_C$, $S_{ACD}=S_B$ и $S_{BCD}=S_A$; поэтому

$$V=\frac{1}{3}(S_A+S_B+S_C+S_D), \quad \text{т. е.} \quad 3V=S_A+S_B+S_C+S_D.$$

Совершенно аналогично, соединяя со всеми вершинами тетраэдра центр o_A вневписанной сферы 1-го рода (см. рис. 11, a в тексте), получим

$$V=V_{o_A ABC}+V_{o_A ABD}+V_{o_A ACD}-V_{o_A BCD},$$

или, поскольку пирамиды o_AABC, o_AACD, o_AABD и o_ABCD имеют одинаковую высоту ρ_A,

$$V=\frac{1}{3}\rho_A(S_D+S_C+S_B-S_A),$$

$$\text{т. е.} \quad \rho_A=\frac{3V}{S_B+S_C+S_D-S_A}=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{S_B+S_C+S_D-S_A}.$$

Точно так же получаются и формулы

$$\rho_B=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{S_A+S_C+S_D-S_B}, \quad \rho_C=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{S_A+S_B+S_D-S_C}$$

$$\text{и } \rho_D=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{S_A+S_B+S_C-S_D}.$$

Соединим теперь со всеми вершинами тетраэдра центр o_{AB} вневписанной сферы 2-го рода (см. рис. 11, $б$ в тексте, где предположено, что $S_C+S_D > S_A+S_B$); тогда получим

$$V=V_{o_{AB}ABC}+V_{o_{AB}ABD}-V_{o_{AB}ACD}-V_{o_{AB}BCD},$$

откуда имеем

$$V=\frac{1}{3}\rho_{AB}(S_D+S_C-S_B-S_A),$$

$$\text{т. е.} \quad \rho_{AB}=\frac{3V}{S_C+S_D-S_A-S_B}=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{S_C+S_D-S_A-S_B}.$$

Аналогично выводятся и формулы

$$\rho_{AC}=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{S_B+S_D-S_A-S_C},\quad \rho_{AD}=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{S_B+S_C-S_A-S_D}$$

(здесь мы считаем, что $S_B+S_D>S_A+S_C$ и $S_B+S_C>S_A+S_D$).

Полную поверхность $S_A+S_B+S_C+S_D$ тетраэдра обозначим через 2Σ. Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{\rho_A}=\frac{S_B+S_C+S_D-S_A}{S_A+S_B+S_C+S_D}=\frac{2\Sigma-2S_A}{2\Sigma}=1-\frac{S_A}{\Sigma},$$

и аналогично

$$\frac{1}{\rho_B}=1-\frac{S_B}{\Sigma},\quad \frac{1}{\rho_C}=1-\frac{S_C}{\Sigma},\quad \frac{1}{\rho_D}=1-\frac{S_D}{\Sigma}.$$

Поэтому, если $\rho_A\leqslant\rho_B\leqslant\rho_C\leqslant\rho_D$, т. е. $\frac{1}{\rho_A}\geqslant\frac{1}{\rho_B}\geqslant\frac{1}{\rho_C}\geqslant\frac{1}{\rho_D}$, то

$$S_A\leqslant S_B\leqslant S_C\leqslant S_D.$$

Далее

$$\frac{1}{\rho_{AB}}=\frac{S_C+S_D-S_A-S_B}{S_A+S_B+S_C+S_D}=\frac{2\Sigma-2S_A-2S_B}{2\Sigma}=1-\frac{S_A}{\Sigma}-\frac{S_B}{\Sigma};$$

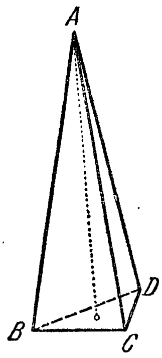
и аналогично

$$\frac{1}{\rho_{AC}}=1-\frac{S_A}{\Sigma}-\frac{S_C}{\Sigma} \text{ и } \frac{1}{\rho_{AD}}=1-\frac{S_A}{\Sigma}-\frac{S_D}{\Sigma} \text{ или } \frac{1}{\rho_{AD}}=1-\frac{S_B}{\Sigma}-\frac{S_C}{\Sigma},$$

причем, так как $S_A\leqslant S_B\leqslant S_C\leqslant S_D$, то $\rho_{AB}\leqslant\rho_{AC}\leqslant\rho_{AD}$.

Перейдем теперь к решению задачи.

1) Ясно, что наименьшая грань S_A тетраэдра $ABCD$ может быть сколь угодно малой (по сравнению с его полной поверхностью 2Σ, которую мы здесь считаем фиксированной; см. рис. 125, *а* на котором изображена правильная пирамида с очень маленьким осно-



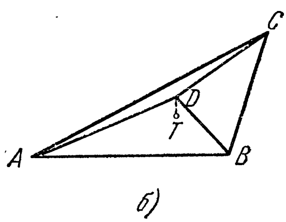


Рис. 125.

ванием BCD); с другой стороны $S_A\leqslant\frac{2\Sigma}{4}=\frac{\Sigma}{2}$, где $S_A=\frac{\Sigma}{2}$ лишь в том случае, если $S_A=S_B=S_C=S_D$, т. е. если все грани тетраэдра равновелики (например, в случае правильного тетраэдра[1])). Таким образом,

$$1=1-\frac{0}{\Sigma}>\frac{1}{\rho_A}\geqslant 1-\frac{\frac{1}{2}\Sigma}{\Sigma}=\frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\boxed{1<\rho_A\leqslant 2}\,.$$

Примечание. Нетрудно установить также, *в каких пределах может заключаться радиус* ρ_A *вневписанной сферы тетраэдра* $ABCD$, *если радиус* P *его описанной сферы равен* 1[2]). Рассмотрим, прежде всего, вписанную в единичную сферу правильную пирамиду $ABCD$, высота $H_D=DT$ которой очень мала (рис. 125, *б*). Так как в этом случае $S_A=S_B=S_C\approx\frac{1}{3}S_D$, то

$$S_B+S_C+S_D-S_A\approx\frac{4}{3}S_D, \quad \text{и} \quad \rho_A=\frac{3V}{S_B+S_C+S_D-S_A}\approx$$

$$\approx\frac{3}{4}\frac{3V}{S_D}=\frac{3}{4}H_D,$$

т. е. ρ_A очень мало: *для вписанного в единичную сферу тетраэдра* $ABCD$ *величина* ρ_A *(а также и* ρ_B, ρ_C*) может быть сколь угодно малой*[3]). [Несколько труднее установить, что и *величина*

---

[1]) Можно доказать, что *если все грани тетраэдра равновелики, то все они равны* (см., например, задачу 29 из книги Д. О. Шклярского и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, Гостехиздат, 1954); нам, однако, это не будет важно.

[2]) Относительно пределов

$$\boxed{0<\rho\leqslant\frac{1}{3}}\,,$$

в которых может изменяться радиус *вписанной* сферы тетраэдра, описанная сфера которого имеет радиус 1, см. задачу 94 в) цикла задач 4.

[3]) Сходные рассуждения показывают, что для изображенной на рис. 125, *б* пирамиды

$$\rho_{AB}=\rho_{AC}=\rho_{AD}\approx\frac{3}{2}H_D$$

очень малы. А так как правильный тетраэдр доставляет нам пример вписанной в единичную сферу треугольной пирамиды, для которой $\rho_{AB}=\rho_{AC}=\rho_{AD}=\infty$ (по поводу смысла последнего утверждения см. п. 5 на стр. 156), то *значения* ρ_{AB}, ρ_{AC} *и* ρ_{AD} *для вписанного в единичную сферу тетраэдра не ограничены*:

$$\boxed{0<\rho_{AB},\ \rho_{AC},\ \rho_{AD}\leqslant\infty}\,.$$

ρ_D *может быть* *сколь угодно малой*; однако и этот результат может быть получен сходным путем. Пусть $ABCD$—треугольная пирамида, основанием которой служит равнобедренный треугольник ABD, где $AD=BD$ и угол ADB очень близок к 180°, а вершина C расположена над D на очень малом расстоянии от D (рис. 126, *а*). Тогда $S_D \approx S_C$ и

$$S_A+S_B+S_C-S_D \approx S_A+S_B=2S_A,$$

т. е.

$$\rho_D=\frac{3V}{S_A+S_B+S_C-S_D} \approx \frac{1}{2}\frac{3V}{S_A}=\frac{1}{2}H_A,$$

где H_A—опущенная из вершины A высота тетраэдра $ABCD$, являющаяся также высотой треугольника ABD—т. е. ρ_D очень мало.]

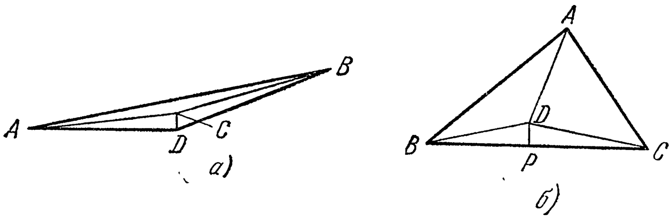


Рис. 126.

А так как, с другой стороны, $\rho \leqslant \frac{1}{3}$ (где ρ—радиус вписанной сферы тетраэдра), если радиус P описанной сферы равен 1 (см. ниже задачу 94 в)), и в п. 1) мы показали, что $\rho_A \leqslant 2\rho$, то

$$\rho_A \leqslant 2\rho \leqslant \frac{2}{3}.$$

Таким образом, окончательно получаем, что *если* $P=1$, *то*

$$\boxed{0<\rho_A \leqslant \frac{2}{3}}.$$

2) Ясно, что и вторая по величине грань S_B может быть сколь угодно малой по сравнению со всей поверхностью тетраэдра (см., например, рис. 126, *а*, на котором изображен тетраэдр с очень малым ребром CD); поэтому можно лишь утверждать, что

$$1-\frac{0}{\Sigma}=1>\frac{1}{\rho_B}, \quad \text{т. е. } \rho_B>1.$$

С другой стороны, так как $S_B \leqslant S_C \leqslant S_D$, то

$$S_B \leqslant \frac{1}{3}\left(S_B+S_C+S_D\right) < \frac{1}{3}\left(S_A+S_B+S_C+S_D\right)=\frac{2\Sigma}{3}=\frac{2}{3}\Sigma,$$

причем площадь грани S_B может быть сколь угодно близка к трети всей поверхности тетраэдра (см. рис. 125, *а*, на котором изображена правильная пирамида $ABCD$ с очень малой по сравнению с высотой стороной основания). Поэтому

$$\frac{1}{\rho_B} > 1 - \frac{\frac{2}{3}\Sigma}{\Sigma} = \frac{1}{3}, \text{ т. е. } \rho_B < 3.$$

Итак,

$$\boxed{1 < \rho_B < 3}\,.$$

3) Третья по величине грань S_C тетраэдра уже не может быть сколь угодно малой. Это следует из того, что *каждая грань тетраэдра по площади меньше суммы площадей трех других граней*: ведь уже сумма ортогональных проекций граней DAB, DBC и DCA на плоскость грани ABC никак не может быть меньше площади S_D грани ABC (рассматриваемая сумма равна S_D, если основание P высоты DP тетраэдра принадлежит треугольнику ABC, и больше S_D в противном случае!), а эта сумма, очевидно, меньше суммы $S_A + S_B + S_C$. Поэтому

$$S_A + S_B + S_C > \frac{1}{2}(S_A + S_B + S_C + S_D) = \frac{1}{2}(2\Sigma) = \Sigma,$$

а так как $S_C \geqslant S_B \geqslant S_A$, то

$$S_C \geqslant \frac{1}{3}(S_A + S_B + S_C) > \frac{\Sigma}{3}.$$

Однако площадь S_C может быть сколь угодно близка по величине к $\Sigma/3$ (см. рис. 125, *б*, на котором изображена правильная пирамида $ABCD$ с очень малой по сравнению со стороной основания высотой). Таким образом,

$$\frac{1}{\rho_C} < 1 - \frac{\frac{1}{3}\Sigma}{\Sigma} = \frac{2}{3}, \quad \text{т. е.} \quad \rho_C > \frac{3}{2}.$$

С другой стороны, так как $S_C \leqslant S_D$, то

$$S_C \leqslant \frac{1}{2}(S_C + S_D) < \frac{1}{2}(S_A + S_B + S_C + S_D) = \frac{1}{2}(2\Sigma) = \Sigma,$$

но S_C может быть сколь угодно близко к Σ (см., например, рис. 126, *а*); поэтому

$$\frac{1}{\rho_C} > 1 - \frac{\Sigma}{\Sigma} = 0, \text{ т. е. } \rho_C < \infty.$$

Таким образом,

$$\boxed{\frac{3}{2} < \rho_C < \infty}\,.$$

4) Наконец, самая большая грань S_D тетраэдра меньше суммы всех остальных его граней, т. е. меньше Σ (хотя S_D и может быть сколь угодно близко к Σ — см., например, рис. 126, *б*). С другой

стороны, так как $S_D \geqslant S_C \geqslant S_B \geqslant S_A$, то

$$S_D \geqslant \frac{1}{4}(S_A+S_B+S_C+S_D)=\frac{1}{4}(2\Sigma)=\frac{\Sigma}{2}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\frac{1}{2}=1-\frac{\frac{1}{2}\Sigma}{\Sigma} \geqslant \frac{1}{\rho_D} > 1-\frac{\Sigma}{\Sigma}=0,$$

т. е.

$$\boxed{2 \leqslant \rho_D < \infty}$$

($\rho_D=2$, когда $S_D=\frac{1}{2}\Sigma$, например, когда тетраэдр $ABCD$ правильный).

5) Выше мы уже видели, что сумма S_A+S_B двух самых маленьких граней тетраэдра может быть с к о л ь у г о д н о м а л о й (см. рис. 126, *а*); поэтому можно утверждать лишь, что

$$1=1-\frac{0}{\Sigma} > 1-\frac{S_A+S_B}{\Sigma}=\frac{1}{\rho_{AB}}, \quad \text{т. е.} \quad \rho_{AB} > 1$$

(но ρ_{AB} может быть сколь угодно близким к 1). С другой стороны, $S_A+S_B \leqslant \frac{1}{2}(2\Sigma)=\Sigma$, и если $S_A=S_B=S_C=S_D$, то, очевидно,

$$S_A+S_B=\frac{1}{2}(S_A+S_B+S_C+S_D)=\frac{1}{2}(2\Sigma)=\Sigma.$$

Таким образом,

$$0=1-\frac{\Sigma}{\Sigma} \leqslant \frac{1}{\rho_{AB}},$$

и следовательно,

$$\boxed{1 < \rho_{AB} \leqslant \infty},$$

где значение $\rho_{AB}=\infty$ считается возможным: «равенство» $\rho_{AB}=\infty$ означает, что $S_A+S_B=\Sigma$, и соответствующей вневписанной сферы тетраэдра не существует [1]).

6) Так как $S_A \leqslant S_B$ и $S_C \leqslant S_D$, то $S_A+S_C \leqslant S_B+S_D$; при этом возможно, что $S_A+S_C=S_B+S_D=\Sigma$ (если $S_A=S_B$ и $S_C=S_D$, например, когда $S_A=S_B=S_C=S_D$). Поэтому

$$0=1-\frac{\Sigma}{\Sigma} \leqslant 1-\frac{S_A+S_C}{\Sigma}=\frac{1}{\rho_{AC}}, \quad \text{т. е.} \quad \rho_{AC} \leqslant \infty,$$

где «равенство» $\rho_{AC}=\infty$ означает, что сфера радиуса ρ_{AC} не существует [1]). С другой стороны, так как $S_B \leqslant S_C \leqslant S_D$, то

$$S_B \leqslant \frac{1}{2}(S_B+S_C) < \frac{1}{2}(S_A+S_B+S_C)=\frac{1}{2}(2\Sigma-S_D)=\Sigma-\frac{1}{2}S_D;$$

---

[1]) Ср. с подстрочным примечанием на стр. 27.

поэтому

$$S_B+S_D < \left(\Sigma-\frac{1}{2}S_D\right)+S_D=\Sigma+\frac{1}{2}S_D.$$

Но так как $S_D < \Sigma$, то

$$S_B+S_D < \Sigma+\frac{1}{2}\Sigma=\frac{3}{2}\Sigma,$$

и значит,

$$S_A+S_C > \frac{1}{2}\Sigma$$

(причем S_A+S_C может быть сколь угодно близким к $\frac{1}{2}\Sigma$; см. рис. 126, *б*, где высота DP тетраэдра $ABCD$ очень мала, и точка P совпадает с серединой стороны BC). Итак,

$$\frac{1}{\rho_{AC}}=1-\frac{S_A+S_C}{\Sigma} < 1-\frac{{}^1/_2\,\Sigma}{\Sigma}=\frac{1}{2}, \quad \text{т. е. } \rho_{AC} > 2.$$

Таким образом, всегда

$$\boxed{2 < \rho_{AC} \leqslant \infty}\,.$$

7) Конечно, и случай, когда $S_A+S_D=S_B+S_C=\Sigma$, означающий, что

$$\frac{1}{\rho_{AD}}=1-\frac{\Sigma}{\Sigma}=0, \quad \text{т. е.} \quad \rho_{AD}=\infty,$$

другими словами, что сфера радиуса ρ_{AD} не существует, является вполне возможным (например, так обстоит дело, если $S_A=S_B=S_C=S_D$). С другой стороны, поскольку $S_B \leqslant S_C \leqslant S_D$, то

$$S_A+S_C \leqslant \frac{2}{3}(S_B+S_C+S_D) < \frac{2}{3}(S_A+S_B+S_C+S_D)=$$

$$=\frac{2}{3}(2\Sigma)=\frac{4}{3}\Sigma,$$

причем сумма S_B+S_C может быть сколь угодно близка к $\frac{4}{3}\Sigma$ (см. выше, рис. 125, *а*). Отсюда следует, что $S_A+S_D > \frac{2}{3}\Sigma$ (причем S_A+S_D может быть сколь угодно близка к $\frac{2}{3}\Sigma$); поэтому

$$\frac{1}{\rho_{AD}} < 1-\frac{{}^2/_3\,\Sigma}{\Sigma}=\frac{1}{3}, \quad \text{т. е.} \quad \rho_{AD} > 3.$$

Таким образом, всегда

$$\boxed{3 < \rho_{AD} \leqslant \infty}\,.$$

48. Если $AC=b$ и $AB=c > b$, то исходящие из вершины A стороны AC и AB, высота AP, биссектриса AK и медиана AD следуют одна за другой в таком порядке: AC, AP, AK, AD и AB (рис. 127; это следует из того, что $\angle C > \angle B$, $\angle CAP < \angle BAP$ — и значит, $\angle CAP < \angle CAK = \frac{\angle A}{2}$, т. е. точка P принадлежит отрезку CK; далее, поскольку $\frac{CK}{BK} = \frac{b}{c} < 1$, т. е. $CK < CD = \frac{a}{2}$, то точка K принадлежит отрезку CD[1]); если же $b = c$, то точки P, K и D совпадают. Поэтому либо $h_a < \beta_a < m_a$, либо $h_a = \beta_a = m_a$.

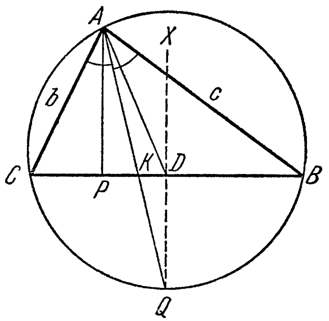


Рис. 127.

То, что **все** удовлетворяющие этим условиям тройки отрезков h_a, β_a и m_a служат соответственно высотой, медианой и биссектрисой некоторого треугольника, следует из разрешимости соответствующей задачи на построение (задачи о построении треугольника ABC по высоте h_a, биссектрисе β_a и медиане m_a, где $h_a < \beta_a < m_a$; для построения $\triangle ABC$ достаточно построить сначала прямоугольные треугольники APK и APD; затем построить окружность S, центр которой принадлежит прямой $DX \perp PD$, проходящую через A и через точку Q пересечения AK и DX; точки пересечения S с прямой PD и будут вершинами B и C искомого треугольника — см. тот же рис. 127).

49. Заметим прежде всего, что если для треугольника ABC справедливо неравенство $m_a < m_b$, где $m_a = AD$ и $m_b = BE$ — медианы, проведенные из вершин A и B, то $BC = a > b = CA$. Это сразу следует из известной формулы[2]) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, но может быть доказано и без вычислений. Перенесем параллельно треугольник ABC на вектор $\overline{ED}$ в положение $A'B'C'$ (рис. 128). Так как $B'D = BE$, то по условию $B'D = BE > AD$; поэтому $B'P > AP$, где P — проекция точки D на AB. А так как $AA' = BB'$, то $BP > A'P$, и следовательно,

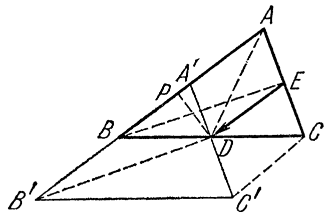


Рис. 128.

$$\frac{a}{2} = BD > A'D = \frac{b}{2}, \quad \text{или} \quad a > b.$$

Пусть теперь треугольник ABC таков, что $h_a = \beta_b = m_c$. Так как, в силу результата задачи 48, $h_a = \beta_b \geqslant h_b$ и $h_a = m_c \geqslant h_c$, то высота h_a

---

[1]) Это вытекает также из того, что при любом другом расположении точек P, K и D будет неразрешима задача построения треугольника ABC по трем отрезкам h_a, β_a и m_a, о которой говорится дальше (ср. с задачей 112 из книги [17]).

[2]) См., например, Адамар [13], стр. 124.

наибольшая; поэтому из равенства $h_a = m_c$ следует, что $\angle C \leqslant 60°$ (см. ниже задачу 50). С другой стороны, медиана m_c — самая меньшая в треугольнике ABC, ибо $m_c = h_a \leqslant m_a$ и $m_c = \beta_b \leqslant m_b$ (см. задачу 48); поэтому, по только что доказанному, c — наибольшая сторона треугольника ABC, и C — его наибольший угол. А так как сумма трех углов треугольника равна $180° = 3 \cdot 60°$, то, поскольку $\angle C \leqslant 60°$, все углы треугольника равны $60°$, треугольник ABC является равносторонним, и *отношение его наибольшей стороны к наименьшей равно* 1.

50. Опустим из середины E стороны AC треугольника ABC перпендикуляры EQ и EQ_1 на стороны BC и AB (рис. 129). Так как $EQ = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} h_a$ и $BE = m_b = h_a$, то $\angle EBC = 30°$. С другой стороны, $EQ_1 = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} h_c \leqslant \frac{1}{2} h_a$ (ибо высота h_a наибольшая), а $BE = m_b = h_a$; поэтому $\angle EBA \leqslant 30°$, и значит, $\angle CBA \leqslant 60°$.

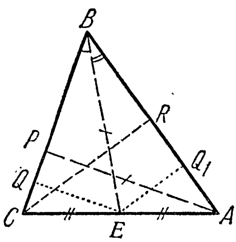


Рис. 129.

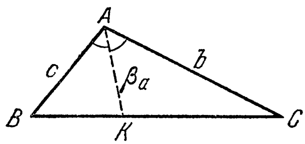


Рис. 130.

51. Если $AK = \beta_a$ — биссектриса треугольника ABC (рис. 130), то, очевидно,

$$S_{\triangle BAK} + S_{\triangle CAK} = S_{\triangle ABC},$$

или

$$\frac{1}{2} c\beta_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} b\beta_a \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Поэтому

$$\beta_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c},$$

т. е.

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{\beta_a}.$$

Далее воспользуемся тем, что в силу результата задачи 48 $h_a \leqslant \beta_a \leqslant m_a$, т. е. $\frac{1}{h_a} \geqslant \frac{1}{\beta_a} \geqslant \frac{1}{m_a}$; поэтому

а) если $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{h_a}$, то

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\beta_a} \geqslant \frac{1}{\beta_a},$$

т. е.

$$\cos\frac{A}{2} \geqslant \frac{1}{2},$$

а следовательно, $\frac{A}{2} \leqslant 60^\circ$, $\angle A \leqslant 120^\circ$;

б) если $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\beta_a}$, то

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\beta_a} = \frac{1}{\beta_a},$$

т. е.

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2},$$

а следовательно, $\frac{A}{2}=60^\circ$, $\angle A=120^\circ$;

в) если $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{m_a}$, то

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\beta_a} \leqslant \frac{1}{\beta_a}, \text{ т. е. } \cos\frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

а следовательно, $\frac{A}{2} \geqslant 60^\circ$, $\angle A \geqslant 120^\circ$.

52. Зафиксируем основание BC треугольника; при этом вершина A будет принадлежать дуге BEC построенного на BC сегмента, вмещающего угол α (рис. 131). В случае $\alpha < 90^\circ$ центр O этой дуги расположен на перпендикуляре DE, восставленном к отрезку BC в его середине D, выше хорды BC, если считать, что дуга BEC расположена над горизонтальной прямой BC (рис. 131, *а*); поэтому, если A_1 и A_2 — две точки правой полудуги CE и A_1 ближе к C, чем A_2, то $\angle A_1OD < \angle A_2OD$, и значит, по известной теореме о треугольниках с одинаковыми парами сторон и неравными углами, заключенными между этими сторонами, $A_2D > A_1D > DC = \frac{1}{2}$. Если $\alpha=90^\circ$, то точки O и D совпадают и $DA_1=DA_2=\frac{1}{2}$ (рис. 131, *б*); если же $\alpha > 90^\circ$, то O лежит под хордой BC, и для изображенных на рис. 131, *в* точек A_1 и A_2 имеем $\angle A_1OD > \angle A_2OD$, откуда следует, что в этом случае $A_2D < A_1D < DC = \frac{1}{2}$. Учитывая еще, что при совпадении точки A с серединой E дуги BE отрезок AD — медиана треугольника

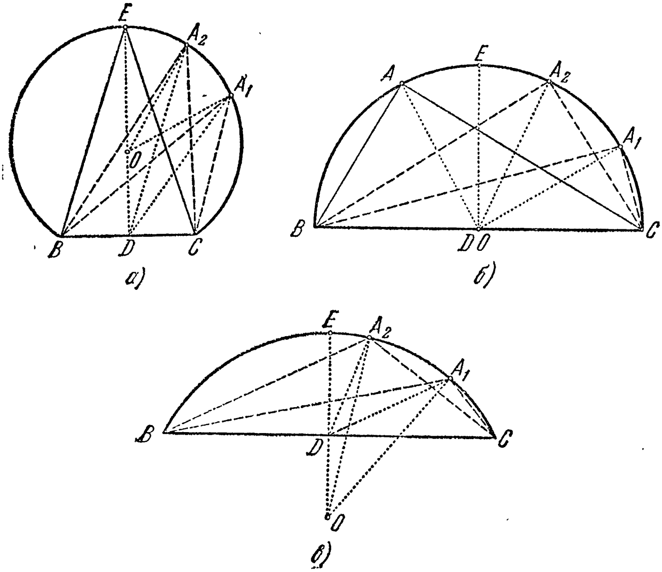


Рис. 131.

ABC — становится равным $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{ибо } DC = \frac{1}{2} \text{ и } \angle CED = \frac{\alpha}{2}\right)$, заключаем, что

$$\frac{1}{2} < m_a \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \text{ если } \alpha < 90^\circ; \qquad m_a = \frac{1}{2}, \text{ если } \alpha = 90^\circ,$$

и

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \leqslant m_a < \frac{1}{2}, \text{ если } \alpha > 90^\circ.$$

53. Первое решение. Эта задача легко может быть решена алгебраически. Обозначим, как обычно, стороны треугольника ABC через a, b, c, а его (перпендикулярные по условию задачи) медианы AD и BE — через m_a и m_b (рис. 132, a). Так как [1])

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad \text{и} \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

---

[1]) См. подстрочное примечание [2]) на стр. 158.

то (если M — точка пересечения медиан)

$$AM^2 = \left(\frac{2}{3} m_a\right)^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$$

и

$$BM^2 = \left(\frac{2}{3} m_b\right)^2 = \frac{1}{9}(2a^2+2c^2-b^2).$$

Применяя к прямоугольному треугольнику ABM теорему Пифагора, получаем

$$c^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2) + \frac{1}{9}(2a^2+2c^2-b^2) = \frac{a^2+b^2+4c^2}{9},$$

откуда следует, что

$$c^2 = \frac{1}{5}(a^2+b^2).$$

Заметим теперь, что в силу теоремы косинусов

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C, \quad \text{т. е.} \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4}{5}\,\frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

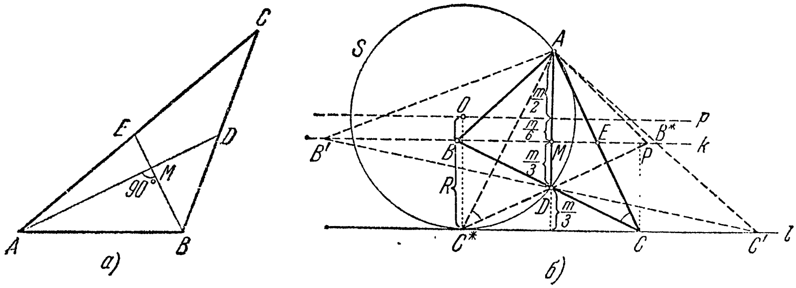


Рис. 132.

Но так как $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geqslant 0$ и, следовательно, $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, т. е. $\frac{a^2+b^2}{2ab} \geqslant 1$, то

$$\cos C \geqslant \frac{4}{5}, \quad \text{т. е.} \quad C \leqslant \arccos\frac{4}{5} \approx 36°52'.$$

С другой стороны, для каждого числа k, где $1 > k \geqslant \frac{4}{5}$, можно подобрать стороны a и b треугольника так, что $\frac{a^2+b^2}{2ab} = \frac{5}{4}k = \alpha \geqslant 1$, т. е. $a^2-2ab\alpha+b^2=0$, или

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{a}{b} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1}.$$

Построив треугольник ABC, у которого отношение сторон $a:b$ имеет одно из этих двух значений и $\cos C = k$, можно убедиться, что медианы AD и BE этого треугольника взаимно перпендикулярны.

Второе решение. Можно решить эту задачу и чисто геометрически, без использования формулы для длины медианы треугольника. Пусть $AD = m$ и BE (взаимно перпендикулярные по условию задачи!) — медианы треугольника ABC, M — точка их пересечения, так что $AM:MD = 2:1$ (рис. 132, *б*). Опустим из вершины C треугольника перпендикуляр CP на прямую BE. Так как $AE = EC$, то $CP = AM = \frac{2}{3}m$, т. е. точка C принадлежит прямой l, параллельной BE и удаленной от BE на расстояние $\frac{2}{3}m$.

Предположим теперь, что точки A и D нам известны, т. е. что отрезок AD имеет фиксированное положение на плоскости (а следовательно, и фиксированную длину m); это допустимо, ибо в настоящей задаче требуется определить величину угла C, и поэтому можно считать, что треугольник ABC задан «с точностью до подобия», т. е., например, что его медиана AD имеет заданную длину m. Если C — произвольная точка прямой l (перпендикулярной AD и удаленной от точки A на расстояние $\frac{4}{3}m$), а B и E — точки пересечения прямых CD и CA с прямой $k \perp AD$ (или $k \parallel l$), проходящей через такую точку M отрезка AD, что $AM:MD = 2:1$, то ABC — (искомый) треугольник с взаимно перпендикулярными медианами AD и BE (почему?). Таким образом, наша задача сводится к следующей: *даны отрезок AD и прямая $l \perp AD$* (рис. 132, *б*); *каким может быть угол ACD, где C — точка прямой l*, т. е. к задаче 68 а). Удаляя неограниченно далеко точку C по прямой l, мы убеждаемся, что угол C *может быть сколь угодно малым*; наибольшее же его значение, в соответствии с решением задачи 68 а), получается при совпадении C с точкой C^* касания прямой l с проходящей через A и D окружностью S. Так как центр O окружности S принадлежит прямой $p \parallel k$, перпендикулярной AD и проходящей через середину AD, а следовательно, удаленной от k на расстояние $\frac{1}{6}m$, а от l — на расстояние $\frac{5}{6}m$, то радиус R окружности S равен

$$R = \frac{1}{6}m + \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}m = \frac{5}{6}m.$$

А поскольку вписанный угол AC^*D окружности S опирается на хорду $AD = m$, то по (примененной к треугольнику ADC^*) теореме синусов имеем

$$\sin \angle C^* = \frac{AD}{2R} = \frac{m}{\frac{5}{3}m} = \frac{3}{5}, \quad C^* = \arcsin\frac{3}{5}.$$

Таким образом, искомый угол C заключается в пределах $0 < C \leqslant \arcsin\frac{3}{5} \approx 36°52'$ (или $0 < C \leqslant \arccos\frac{4}{5}$, поскольку $\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{4}{5}\Big)$.

54. Так как площадь прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c равна $\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}(a+b+c)r$, то $ch=(a+b+c)r$, и значит,

$$\frac{h}{r}=\frac{a+b+c}{c}=1+\frac{a+b}{c}.$$

Таким образом, нам надо лишь оценить отношение $\frac{a+b}{c}$ суммы катетов прямоугольного треугольника к его гипотенузе. Но, очевидно, $a+b>c$, т. е. $\frac{a+b}{c}>1$ (причем это отношение может быть сколь угодно близко к 1, если только отношение длин катетов треугольника достаточно велико; рис. 133, *а*). С другой стороны, поскольку $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\geqslant 0$, и следовательно, $a^2+b^2\geqslant 2ab$, то

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant a^2+b^2+(a^2+b^2)=2(a^2+b^2)=2c^2,$$

и значит,

$$\frac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{2},$$

где равенство достигается при $a=b$ (рис. 133, *б*). Таким образом, окончательно

$$1+1=2<\frac{h}{r}\leqslant 1+\sqrt{2}=2,41\ldots$$

55. Обозначим ребра прямоугольного параллелепипеда

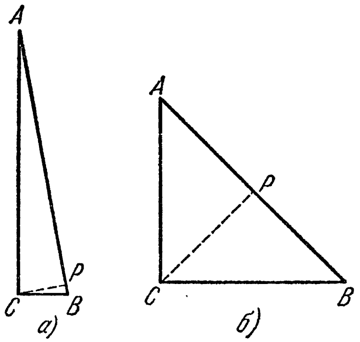


Рис. 133.

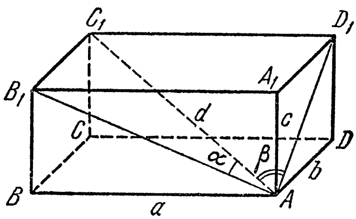


Рис. 134.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 134) через $AB=a$, $AD=b$ и $AA_1=c$, а диагональ AC_1 — через d; углы B_1AC_1 и D_1AC_1 обозначим через α и β. Из прямоугольных треугольников B_1AC_1 и C_1AD_1 имеем

$$b=d\sin\alpha \qquad \text{и} \qquad a=d\sin\beta.$$

Далее

$$d^2=AC_1^2=AB_1^2+B_1C_1^2=(a^2+c^2)+b^2;$$

поэтому, кроме очевидных неравенств $0<\alpha<90°$, $0<\beta<90°$, должно быть

$$a^2+b^2=d^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)=d^2-c^2<d^2,$$

т. е.

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta<1,$$

или

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=(1-2\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\beta)=$$
$$=2(1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta)>0.$$

Но так как

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta),$$

то неравенство $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<1$, или $\cos 2\alpha+\cos 2\beta>0$, равносильно условию $0<\alpha+\beta<90°$.

Итак, углы α и β должны быть такими, что $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<90°$, причем все удовлетворяющие этим неравенствам значения углов α и β возможны (прямоугольный параллелепипед имеет ребра $a=\sin\beta$, $b=\sin\alpha$, $c=\sqrt{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}$).

56. Пусть $\alpha=2\beta$ — угол при вершине осевого сечения конуса К, описанного (как и цилиндр Ц) вокруг шара радиуса r (см. рис. 135, на котором изображена плоскость осевого сечения ABS). Тогда

$$V_2=\frac{1}{3}\pi R^2H,$$

где $R=QA$ и $H=SQ$; но поскольку

$$H=SQ=SO+OQ=\frac{OP}{\sin\beta}+OQ=$$
$$=\frac{r}{\sin\beta}+r=\frac{1+\sin\beta}{\sin\beta}r$$

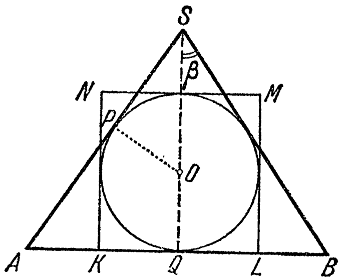


Рис. 135.

и

$$R=QA=H\operatorname{tg}\beta=\frac{1+\sin\beta}{\sin\beta}r\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}r,$$

то

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\frac{(1+\sin\beta)^2r^2}{\cos^2\beta}\cdot\frac{(1+\sin\beta)r}{\sin\beta}=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{(1+\sin\beta)^3}{\sin\beta\cos^2\beta}=$$
$$=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{(1+\sin\beta)^3}{\sin\beta(1-\sin^2\beta)}=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{(1+\sin\beta)^2}{\sin\beta(1-\sin\beta)}.$$

С другой стороны,

$$V_1=\pi r^2\cdot h,$$

где $r=QK$ — радиус основания цилиндра (совпадающий, очевидно, с радиусом шара) и $h=KN=2r$ — высота цилиндра (совпадающая с диаметром шара); поэтому, если $V_2=1$, то

$$2\pi r^3=1,\quad \text{т. е.}\quad \pi r^3=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$V_2=\frac{1}{6}\frac{(1+\sin\beta)^2}{\sin\beta(1-\sin\beta)}.$$

Выразим теперь $\sin\beta$ через V_2. Мы имеем квадратное уравнение

$$\sin^2\beta(6V_2+1)+2\sin\beta(1-3V_2)+1=0,$$

из которого получаем

$$\sin\beta=\frac{3V_2-1\pm\sqrt{(1-3V_2)^2-(6V_2+1)}}{6V_2+1}=\frac{3V_2-1\pm\sqrt{9V_2^2-12V_2}}{6V_2+1}=$$
$$=\frac{3V_2-1\pm\sqrt{3V_2(3V_2-4)}}{6V_2+1}.$$

Так как V_2—число положительное, а $\sin\beta$, разумеется, число вещественное, то должно быть $3V_2-4\geqslant 0$, т. е. $V_2\geqslant v=\frac{4}{3}$.

Итак, наименьшее возможное значение v объема V_2 равно $\frac{4}{3}$; это значение достигается, если $\sin\beta=\frac{3v-1}{6v+1}=\frac{1}{3}$, т. е. если $\alpha=2\beta=$ $=2\arcsin\frac{1}{3}$ ($\approx 38°56'$).

57. а) Ясно, что объем V рассматриваемого тетраэдра может быть сколь угодно мал. С другой стороны, так как «периметр» (сумма длин всех ребер) 2Π нашего тетраэдра не превосходит 6, то в силу результата задачи 99 б),

$$V\leqslant\frac{\Pi^3}{162\sqrt{2}}\leqslant\frac{27}{162\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\ (\approx 0{,}118);$$

равенство здесь достигается лишь для правильного тетраэдра с ребром 1. Таким образом,

$$0<V\leqslant\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

б) В этой задаче объем рассматриваемого тетраэдра тоже может быть сколь угодно малым: если $AB=1$, $AC=AD=BC=BD\approx\frac{1}{2}$ и $CD\approx 0$ (рис. 136, *а*), то $V\approx 0$. С другой стороны, обозначим длину (противоположного ребру AB длины $\geqslant 1$) ребра CD через a (рис. 136, *б*).

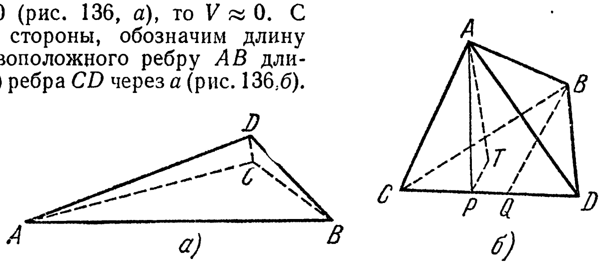


Рис. 136.

Если высота $AP=h_a$ *треугольника* ACD делит ребро CD на отрезки CP и PD, то хотя бы один из них $\geqslant\frac{a}{2}$. С другой стороны, так как $AC\leqslant 1$ и $AD\leqslant 1$, то

$$h_a=\sqrt{AC^2-CP^2}=\sqrt{AD^2-DP^2}\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

и, значит,

$$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}a\cdot h_a\leqslant\frac{1}{2}a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

Точно так же устанавливается, что $BQ=h_b\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, где $BQ=h_b$ — опущенная из вершины B высота *треугольника* BCD; а так как $H_B\leqslant h_b$, где H_B — опущенная из вершины B высота *тетраэдра* $ABCD$, то

$$H_B\leqslant\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

Таким образом, имеем

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot H_B\leqslant\frac{1}{3}\frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}=$$

$$=\frac{1}{6}a\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{1}{24}a\,(4-a^2).$$

Если $a=1$, то последнее выражение обращается в $\frac{1}{24}\cdot1\cdot3=\frac{1}{8}$. Нетрудно показать, что если $a<1$, то оно $<\frac{1}{8}$. В самом деле, если $0<a<1$, то

$$\frac{1}{24}a\,(4-a^2)-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}(4a-a^3-3)=\frac{1}{24}(1-a)(a^2+a-3)<0,$$

ибо $1-a>0$ и $a^2+a-3<0$; поэтому во всех случаях

$$V\leqslant\frac{1}{24}a\,(4-a^2)\leqslant\frac{1}{8}.$$

Таким образом, объем V тетраэдра не превосходит $\frac{1}{8}$; он равен $\frac{1}{8}$ для тетраэдра $ABCD$, у которого грани ACD и BCD — правильные треугольники со стороной 1 $\left(\text{так что } S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ и } h_b=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и двугранный угол между этими гранями равен 90° $\left(\text{так что } H_B=h_b=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. [Нетрудно видеть, что в таком тетраэдре $AB=\sqrt{h_a^2+h_b^2}=\sqrt{2\cdot\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}>1$.]

Итак, $0<V\leqslant\frac{1}{8}$ $(=0{,}125)$.

58. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — данная ломаная, A_1A_n — прямая, проходящая через ее концы, B — точка, делящая пополам периметр ломаной (рис. 137). Отрезок, которому принадлежит точка B, пусть будет A_iA_{i+1}.

Поверхность, полученная от вращения ломаной вокруг прямой A_1A_n, будет состоять из конусов, усеченных конусов и, может быть, цилиндров (конусы и усеченные конусы в частном случае могут вырождиться в круги и кольца; см. рис. 138). Если S_j есть площадь боковой поверхности тела, образованного вращением отрезка A_jA_{j+1}, то $S_j=\pi l_j(r_j+r_{j+1})$, где l_j — длина образующей A_jA_{j+1}, а r_j и

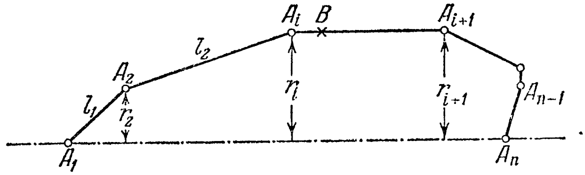


Рис. 137.

r_{j+1} — расстояния точек A_j и A_{j+1} от оси вращения. Обозначим через ρ_j длину ломаной $A_1A_2\ldots A_j$; тогда, очевидно, $\rho_j > r_j$. Так как

$$l_j=\rho_{j+1}-\rho_j,$$

то

$$S_j=\pi l_j(r_j+r_{j+1}) < \pi(\rho_{j+1}-\rho_j)(\rho_j+\rho_{j+1})=\pi\left(\rho_{j+1}^2-\rho_j^2\right). \qquad (*)$$

Рассмотрим площадь поверхности, полученной вращением ломаной A_1B вокруг A_1A_n. Она равна сумме площадей $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$

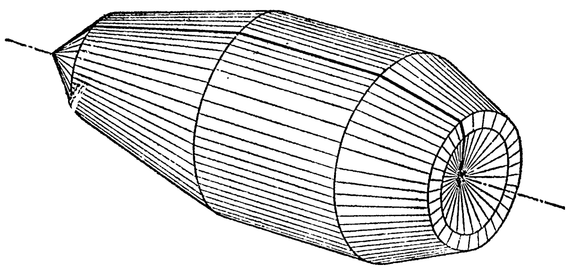


Рис. 138.

и площади, получаемой при вращении отрезка A_iB. Сложим почленно неравенства (*), отвечающие $j=1, 2, \ldots, i-1$. Выражения, стоящие в правых частях этих неравенств, суть площади круговых колец, внутренний и внешний радиусы которых соответственно равны ρ_j и ρ_{j+1}. Поэтому площадь рассматриваемой части поверхности не превосходит площади круга радиуса $d/2$ (рис. 139), которая равна $\pi d^2/4$. Точно так же находим, что площадь поверхности, полученной вращением ломаной $BA_{i+1}A_{i+2}\ldots A_{n-1}A_n$, тоже не превосходит $\pi d^2/4$; поэтому *площадь всей поверхности не превосходит* $\pi d^2/2$.

Площадь всей поверхности **равна** $\pi d^2/2$ только в том случае, когда вся ломаная лежит на прямой, перпендикулярной к оси вращения (тогда все неравенства превращаются в равенства); но в таком случае сама ломаная вырождается в дважды покрытый отрезок.

Однако, рассматривая ломаные вида $A_1A_2A_3$, где $A_1A_2 = A_2A_3$ и A_1A_3 достаточно мало (рис. 140), мы можем получить поверхность рассматриваемого вида, площадь которой сколь угодно мало отличается от $\pi d^2/2$.

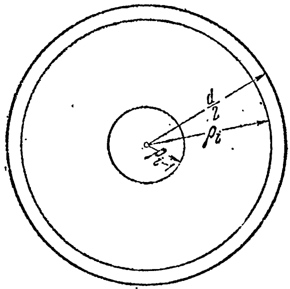


Рис. 139.

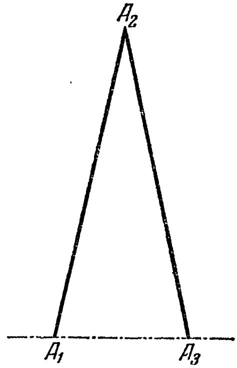


Рис. 140.

59. Если $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник, вписанный в квадрат $ABCD$ со стороной 1 (рис. 141), то

$$\angle BA_1B_1 = 90° - \angle BB_1A_1 = 180° - 90° - \angle BB_1A_1 = \angle CB_1C_1$$

и аналогично

$$\angle BA_1B_1 = \angle CB_1C_1 = \angle DC_1D_1 = \angle AD_1A_1.$$

Поэтому прямоугольные треугольники BA_1B_1, CB_1C_1, DC_1D_1 и AD_1A_1

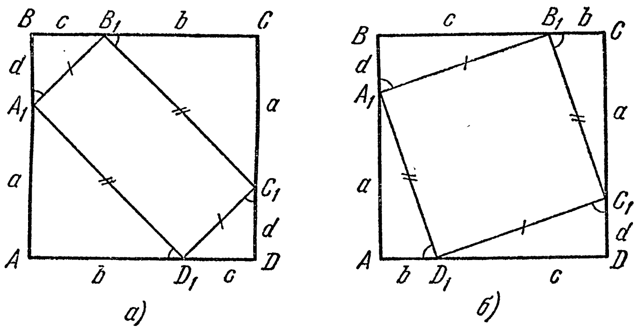


Рис. 141.

подобны между собой, а треугольники BA_1B_1 и DC_1D_1, CB_1C_1 и AD_1A_1, кроме того, еще и равны (ибо $A_1B_1 = C_1D_1$ и $B_1C_1 = D_1A_1$).

Обозначим катеты этих прямоугольных треугольников через a, b, c и d, как указано на рис. 141. При этом

$$a + d = b + c \quad (=1)$$

и, кроме того, в силу подобия треугольников BA_1B_1 и CB_1C_1,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \text{т. е.} \quad ad=bc.$$

Но сумма σ и произведение p двух величин полностью определяют эти величины (равные корням квадратного уравнения $x^2-\sigma x+p=0$); поэтому равенства $a+d=b+c$ и $ad=bc$ могут иметь место, лишь если $a=b$ и $c=d$ (рис. 141, *а*) или $a=c$ и $b=d$ (рис. 141, *б*). Во втором случае все четыре прямоугольных треугольника BA_1B_1, CB_1C_1, DC_1D_1 и AD_1A_1 равны между собой, т. е. $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1A_1$, и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат; в первом же случае, если $a=b>d$, т. е. точки A_1, B_1, C_1 и D_1 не совпадают с *серединами* сторон квадрата $ABCD$, прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ — не квадрат. [Если точки A_1, B_1, C_1, D_1 совпадают с серединами сторон квадрата $ABCD$, то $a=b=c=d$; это расположение точек A_1, B_1, C_1, D_1 относится одновременно и к первому случаю и ко второму.]

Теперь имеем:

а) Если $A_1B_1C_1D_1$ не квадрат (рис. 141, *а*), то его площадь s равна

$$s=A_1B_1\cdot A_1D_1=\sqrt{2}\,a\cdot\sqrt{2}\,d=2ad=\frac{1}{2}[(a+d)^2-(a-d)^2]=$$
$$=\frac{1}{2}[1-(a-d)^2]\leqslant\frac{1}{2},$$

точнее,

$$0<s<\frac{1}{2},$$

причем в квадрат может быть вписан прямоугольник (не квадрат!) как сколь угодно малой площади, так и площади, сколь угодно близкой к $1/2$.

б) Если $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат (рис. 141, *б*), то его площадь s равна

$$s=A_1B_1^2=a^2+b^2=a^2+d^2=\frac{1}{2}[(a+d)^2+(a-d)^2]=$$
$$=\frac{1}{2}[1+(a-d)^2]\geqslant\frac{1}{2};$$

точнее,

$$\frac{1}{2}\leqslant s<1,$$

причем в квадрат $ABCD$ можно вписать квадрат $A_1B_1C_1D_1$, площадь которого сколь угодно близка к 1.

Примечание. Вот еще один вариант той же задачи: *в квадрат K со стороной 1 вписан прямоугольник Π известной площади s. Является ли Π квадратом?* [Ответ. Π не квадрат (соответственно квадрат), если $s<\frac{1}{2}$ $\left(\text{если } s\geqslant\frac{1}{2}\right)$.]

60. Так как углы A и C при основании треугольника должны быть острыми (иначе одна из вершин квадрата попала бы на продолжение основания), то точки D и E касания боковых сторон AB и BC со вписанной окружностью s расположены на «верхней» полуокружности (рис. 142, *а*), и следовательно, заключенный внутри треугольника отрезок $MN \| AC$ касательной к s будет меньше диаметра 1 окружности s. Вписав в треугольник прямоугольник $MNQP$ со стороной MN, мы убедимся, что у него сторона $MP=1$, а $MN<1$; отсюда следует, что *сторона d вписанного в $\triangle ABC$ квадрата $M_0N_0P_0Q_0$ меньше* 1. С другой стороны, d может быть сколь угодно близко к 1; для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть описанный вокруг окружности s диаметра 1 равнобедренный треугольник с очень малым углом при вершине B.

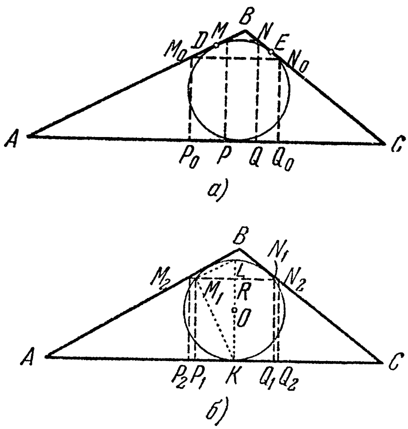


Рис. 142.

Пусть, далее, $M_1N_1 \| AC$ — такая хорда окружности s, что прямоугольник $M_1N_1P_1Q_1$ — квадрат (рис. 142, *б*); в таком случае для соответствующего вписанного в треугольник прямоугольника $M_2N_2Q_2P_2$ имеем $M_2N_2 \geqslant M_1N_1 = M_1P_1 = M_2P_2$, откуда вытекает, что $d \geqslant M_1P_1 = M_1N_1$, ибо сторона $M_0N_0 = d$ вписанного в ABC квадрата проходит выше отрезка M_2N_2 (т. е. дальше от основания AB) и, значит, $M_0P_0 = d \geqslant M_1P_1$. Таким образом, для того чтобы оценить величину d снизу, достаточно найти, чему равно M_1N_1; но обозначив $M_1N_1 = x$, найдем из изображенного на рис. 142, *б* прямоугольного треугольника KM_1L, что

$$M_1R^2 = KR \cdot RL,$$

или

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x(1-x), \quad \text{т. е.} \quad 5x^2 - 4x = 0$$

$\left(\text{ибо в обозначениях рис. 142, } б \text{ имеем } RM_1 = \frac{x}{2},\ KR = M_1P_1 = x,\ KL = 1\right)$ и

$$x = \frac{4}{5}.$$

При этом равенство $d = M_1N_1 = \frac{4}{5}$ возможно: оно выполняется, например, в случае, когда стороны AB и BC касаются вписанной в треугольник ABC окружности s в точках M_1 и N_1.

Итак,

$$\frac{4}{5} \leqslant d < 1.$$

61. Обозначим n отрезков, пересекающихся в точке O, через A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, A_nB_n, а (не меньшие 1!) отношения, в которых они делятся точкой O, через $\frac{A_1O}{OB_1}=\alpha_1$, $\frac{A_2O}{OB_2}=\alpha_2$, $\ldots$, $\frac{A_nO}{OB_n}=\alpha_n$. Предположим, что среди чисел α_1, α_2, $\ldots$, α_n есть о д н о н а и б о л ь ш е е, а именно число $\frac{A_1O}{OB_1}$; следующим за ним по величине пусть будет какое-то число $\alpha_i=\frac{A_iO}{OB_i}$ (где $i=2, 3, \ldots$ или n). Сдвинем теперь отрезок A_1B_1 вдоль прямой A_1B_1 в такое положение $A_1'B_1'$, что $\frac{A_1'O}{OB_1'}=\alpha_i$. Мы утверждаем, что *наибольшая сторона $2n$-угольника M, вершинами которого служат концы наших n отрезков, при такой операции может только уменьшиться.*

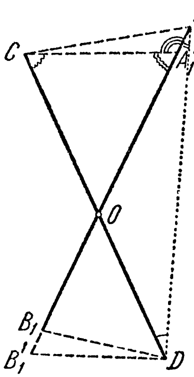


Рис. 143.

В самом деле, рассмотрим соседний с A_1B_1 отрезок (отрезок A_2B_2 или отрезок A_nB_n) и обозначим тот из его концов, который в процессе построения многоугольника M соединяется с A_1, через C, а второй конец — через D (рис. 143; таким образом, точки C и D — это суть точки A_2 и B_2 или точки A_n и B_n). Докажем сперва, что *бо́льшим из отрезков A_1C и B_1D является отрезок A_1C.* В самом деле, так как OA_1 — это вообще с а м ы й б о л ь ш о й из отрезков диагоналей $2n$-угольника M, на которые они делятся точкой O (а соответственно OB_1 — самый маленький из этих отрезков), то $OA_1 > OD$ и, значит, $\angle ODA_1 > \angle OA_1D$. А теперь из рассмотрения двух треугольников A_1DC и A_1DB_1 с общей стороной A_1D и равными сторонами $DC=A_1B_1$ $(=1)$ заключаем, что

$$A_1C > B_1D.$$

Заметим еще, что поскольку в преобразованном $2n$-угольнике M', получаемом из многоугольника M заменой отрезка A_1B_1 отрезком $A_1'B_1'$, часть OA_1' диагонали $A_1'B_1'$ все еще остается бо́льшей из всех частей, на которые делятся диагонали $A_1'B_1'$, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$, A_nB_n этого $2n$-угольника точкой O (точнее — не меньшей всех других частей), то также и

$$A_1'C \geqslant B_1'D.$$

Но, поскольку $OA_1' \geqslant OC$, имеем $\angle OCA_1' \geqslant \angle OA_1'C$, откуда следует, что $\angle OA_1'C$ острый, и, следовательно, $\angle A_1A_1'C$ — тупой, а значит,

$$A_1C > A_1'C.$$

Таким образом, в процессе замены сторон A_1C и B_1D рассматриваемого $2n$-угольника M сторонами $A_1'C$ и $B_1'D$ нового многоугольника M' б о́ л ь ш а я из двух изменившихся сторон многоугольника уменьшилась (оставаясь по-прежнему большей из сторон $A_1'C$ и B_1D!).

Так как это рассуждение сохраняет силу и для второй пары противоположных сторон $2n$-угольника M, изменивших свою длину при переходе от M к M' (эти стороны получаются при соединении вершин A_1 и B_1 многоугольника M с концами второй соседней с A_1B_1 диагонали), то мы можем заключить, что *наибольшая сторона многоугольника M' заведомо не больше наибольшей стороны многоугольника M.*

Мы до сих пор считали, что лишь о д н о отношение $\frac{A_1O}{OB_1}$ достигает наибольшего значения α_1, а остальные отношения $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ все меньше α_1. Но в доказательстве почти ничего не изменилось бы, если предположить, что наибольшей величины α_1 достигают сразу н е с к о л ь к о отношений из ряда чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, например какие-то числа $\alpha_1, \alpha_k, \alpha_l, \ldots$ (где $1 < k < l \ldots$): в этом случае нам пришлось бы только о д н о в р е м е н н о сдвинуть все отрезки $A_1B_1, A_kB_k, A_lB_l, \ldots$ в положения $A_1'B_1', A_k'B_k', A_l'B_l', \ldots$ так, чтобы отношения $\frac{A_1'O}{OB_1'}, \frac{A_k'O}{OB_k'}, \frac{A_l'O}{OB_l'}, \ldots$ все были равны между собой и равнялись наибольшему по величине из меньших α_1 чисел последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Применим теперь к $2n$-угольнику M', полученному описанным выше способом из исходного $2n$-угольника M, то же преобразование, что и раньше; при этом мы придем к новому $2n$-угольнику M'', у которого наибольшая сторона может быть только м е н ь ш е наибольшей стороны многоугольника M', и для которого наибольшее из отношений $\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n''$, в котором делит точка O его «главные» (т. е. соединяющие противоположные вершины) диагонали, меньше наибольшего из отношений $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$, отвечающих многоугольнику M'. Повторяя эту операцию конечное число раз, мы в конце концов придем к $2n$-угольнику M_0, *все главные диагонали которого равны* 1, *пересекаются в одной точке O и делятся в этой точке в о д н о м и т о м ж е отношении* $\alpha_0 \geqslant 1$ (равном н а и м е н ь ш е м у из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$).

Сдвинем теперь все диагонали $2n$-угольника M_0 так, чтобы они в точке пересечения делились п о п о л а м. Легко видеть, что и при этом также *наибольшая сторона $2n$-угольника может лишь уменьшиться.* В самом деле, пусть EF и GH — две соседние диагонали многоугольника M_0, а $E'F'$ и $G'H'$ — полученные из них диагонали преобразованного многоугольника M_0' (рис. 144). Предположим сначала, что в многоугольнике M_0 вершина E соединена с такой вершиной G, что $OE > OF$ и $OG > OH$ (а вершина F соединена с вершиной H; рис. 144, *а*). Ясно, что в этом случае при переходе от многоугольника M_0 к многоугольнику M_0', все диагонали которого в точке пересечения делятся пополам, сторона EG многоугольника M_0 — бóльшая из сторон EG и FH — заменяется м е н ь ш е й по величине стороной $E'G'$ многоугольника M (а сторона FH многоугольника M_0 — стороной $F'H' = E'G'$ многоугольника M_0'), так что в результате этого наибольшая из сторон многоугольника M_0 не может увеличиться. Несколько сложнее устанавливается то же самое в предположении, что $OE > OF$, а $OG < OH$ (рис. 144, *б*). В этом последнем случае, очевидно, как треугольники $OE'G'$ и $OF'H'$, так и треугольники OEG и OFH равны между собой, а следовательно, не только $E'G'=F'H'$, но и $EG=FH$. Построим на отрезке EG равнобедренный треугольник EGO', угол при вершине O' которого равен углу O треугольника EGO. В силу результата задачи 92 а), сумма боковых сторон треугольника EGO' больше суммы

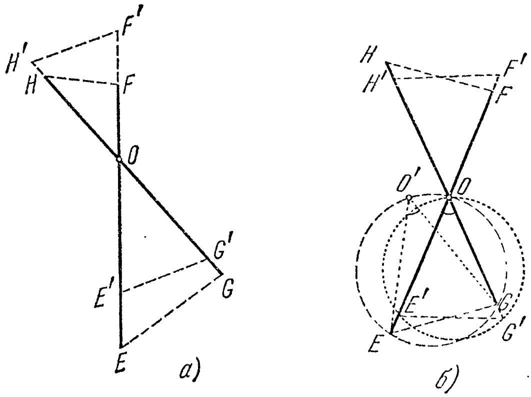


Рис. 144.

боковых сторон треугольника EGO, равной сумме боковых сторон (равнобедренного!) треугольника $E'G'O$, *подобного* EGO'; поэтому

$$EG > E'G',$$

что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, исходя из $2n$-угольника M, мы окончательно пришли к центрально-симметричному $2n$-угольнику M_0', вписанному в окружность диаметра 1 (ибо все «главные диагонали» этого многоугольника M_0', соединяющие его противоположные вершины, имеют длину 1, пересекаются в одной точке O и делятся в этой точке пополам); при этом наибольшая сторона многоугольника M_0' заведомо не больше наибольшей стороны многоугольника M. Но ясно, что наибольшая сторона многоугольника M_0' — эта та, которая отвечает наибольшему центральному углу описанной вокруг M_0' окружности; эта сторона никак не может быть меньше стороны $\sin\frac{90^\circ}{n}$ *правильного* $2n$-угольника, вписанного в окружность диаметра 1.

Нетрудно видеть, что ни одна сторона исходного $2n$-угольника M *не больше* $\sin\frac{90^\circ}{n}$ лишь в том случае, когда сам многоугольник M — правильный.

62. Пусть O, P, Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ABD и BCD; O', P', Q' — точки касания этих окружностей с прямой AC (рис. 145). Проведем еще прямую $PK \parallel AC$ (K — точка отрезка OO'); нам надо доказать, что $PP'+QQ' > OO'$, или что $QQ' > OK$.

Сравним прямоугольные треугольники POK и DQQ' с катетами OK и QQ' и гипотенузами PO и DQ. Заметим, что наверное

$$PO^2+QO^2 < PD^2+QD^2.$$

В самом деле, так как AO и CO — биссектрисы треугольника ABC, то

$$\angle AOC = 180° - \frac{\angle A + \angle C}{2} = 180° - \frac{180° - \angle B}{2} = 90° + \frac{\angle B}{2} > 90°;$$

поэтому треугольник OPQ тупоугольный, и значит,

$$PO^2+QO^2 < PQ^2.$$

С другой стороны, так как DP и DQ — биссектрисы смежных углов

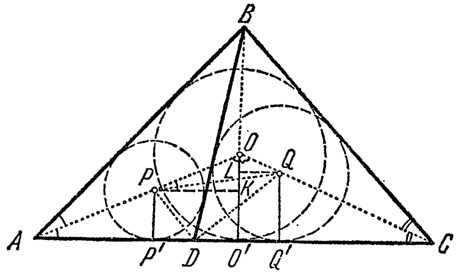


Рис. 145.

ADB и CDB, то треугольник DPQ — прямоугольный и, следовательно,

$$PD^2+QD^2=PQ^2.$$

Таким образом, имеем

$$PO^2+QO^2 < PD^2+QD^2;$$

поэтому, если, скажем, $QD \leqslant PO$, то наверное $PD > QO$. В силу этого мы имеем право считать, что

$$QD > PO,$$

ибо в противном случае мы заменили бы треугольник POK треугольником QOL, где $QL \parallel AC$ и L — точка отрезка OO', и воспользовались бы неравенством $PD > QO$.

Далее $\angle KPO = \angle CAO = \frac{1}{2}\angle A$ и $Q'DQ = \frac{1}{2}\angle CDB$; следовательно,

$$\angle KPO < \angle Q'DQ,$$

так как $\angle CDB$ — внешний для треугольника DAB и поэтому больше $\angle A$. Но если гипотенуза треугольника KPO меньше гипотенузы треугольника $Q'DQ$ и противолежащий катету OK угол треугольника KPO меньше противолежащего катету QQ' угла треугольника $Q'DQ$, то

$$OK < QQ',$$

что и доказывает утверждение задачи.

63. Первое решение. Пусть

$$a=BC \geqslant b=AC \geqslant c=AB;$$

тогда $BC=a$ есть наибольшее расстояние между точками треугольника ABC: ведь если M и N — две точки треугольника ABC и M_1, N_1 — точки пересечения отрезка MN с границей треугольника, то

$$MN \leqslant M_1N_1 \leqslant BC,$$

ибо мы можем увеличить отрезок M_1N_1, сдвинув сначала один, а затем и другой его конец до совмещения с вершинами треугольника (рис. 146; мы считаем, что $\angle M_1N_1A$ не острый, так что $M_1A > M_1N_1$,

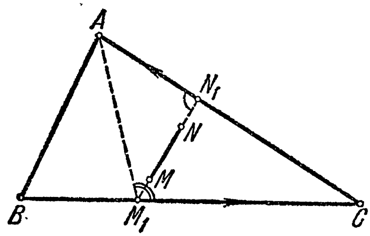


Рис. 146.

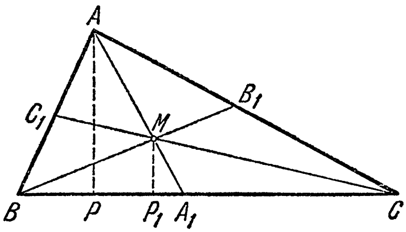


Рис. 147.

и $\angle AM_1C$ не острый, так что $AC > AM_1$; заметьте, что BC — наибольшая сторона, и значит, $BC \geqslant AC$). Далее, если AP и MP_1 — высоты треугольников ABC и MBC (рис. 147), то

$$\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{MP_1}{AP}=\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}},$$

и следовательно,

$$MA_1=\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}}\,AA_1 < \frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}}\,a.$$

Точно так же показывается, что

$$MB_1 < \frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle BAC}}\,a \text{ и } MC_1 < \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle CAB}}\,a.$$

Поэтому

$$MA_1+MB_1+MC_1 < \frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}}\,a+\frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}}\,a+\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}}\,a=$$

$$=\frac{S_{\triangle MBC}+S_{\triangle MAC}+S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}}\,a=a,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Вот еще одно решение задачи, установление связи которого с первым решением предоставляется читателю. Проведем через точку M параллельные сторонам треугольника отрезки $A'B''$, $A''C'$ и $B'C''$, как указано на рис. 148. Тогда треугольники $MA''B'$, $MB''C'$ и $MC''A'$ будут подобны ABC; их наибольшими сторонами будут отрезки $B'M=BB''$, $B''C'$ и $MC''=C'C$. Но сумма

$$B'M+B''C'+MC''=BB''+B''C'+C'C=BC=a.$$

С другой стороны, поскольку наибольшее расстояние между точками треугольника равно его наибольшей стороне (см. первое решение задачи), то

$$MA_1 \leqslant B''C', \quad MB_1 \leqslant MC'' \quad \text{и} \quad MC_1 \leqslant B'M.$$

Поэтому

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 \leqslant B''C' + MC'' + B'M = a,$$

где равенство не может иметь места, если точка M лежит внутри треугольника ABC.

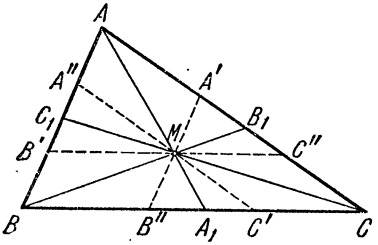


Рис. 148.

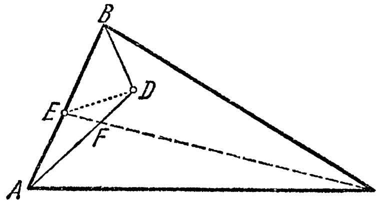


Рис. 149.

64. Очевидно, что отрезок EC пересекает либо BD, либо AD; пусть, например, он пересекает AD в некоторой точке F (рис. 149; точка F может и совпасть с D). В силу известного свойства треугольника

$$EF + DF \geqslant ED, \quad AF + CF \geqslant AC.$$

Складывая эти два неравенства, получим

$$EF + DF + AF + CF = EC + AD \geqslant ED + AC.$$

Вычитая сумму $ED + AD$ из обеих частей последнего неравенства, получаем

$$EC - ED \geqslant AC - AD \geqslant 1,$$

что и требовалось доказать.

65. а) Докажем, что искомая прямая обладает следующим свойством: *отрезок LN этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится данной точкой A пополам.* В самом деле, пусть $AL = AN$ (рис. 150)[1]. Докажем, что треугольник LMN имеет наименьшую возможную площадь. Проведем через точку A какую-либо другую прямую; пусть, например, она пересекает ML в точке L' и продолжение MN — в точке N'. Тогда

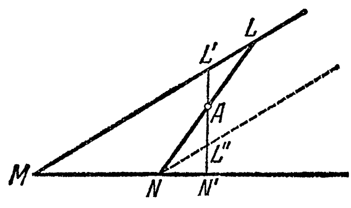


Рис. 150.

[1]) Через данную точку A внутри угла можно провести единственную прямую l такую, что заключенный внутри угла отрезок прямой l делится в точке A пополам. Для построения прямой l достаточно, например, отложить $AL'' = AL'$ (см. рис. 150) и провести через L'' прямую $L''N \parallel L'M$; тогда AN — искомая прямая.

$L'A < AN'$, ибо проведенная через N прямая, параллельная ML, пересечет отрезок AN' в точке L'' такой, что $L'A = AL''$. Из равенства треугольников ANL'' и ALL' вытекает, что

$$S_{\triangle MN'L'} = S_{MNAL'} + S_{\triangle ANL''} + S_{\triangle NN'L''} > \\ > S_{MNAL'} + S_{\triangle AL'L} = S_{\triangle MNL},$$

— а это нам и требовалось доказать.

б) Пусть LMN — данный угол и A — данная точка; проведем через A секущую $B'C'$ (где B' и C' — точки на сторонах угла), и пусть S' — окружность, касающаяся лучей $B'N$ и $C'L$ в точках P и Q и прямой $B'C'$ в точке R (рис. 151, *а*). Очевидно, $B'P = B'R$

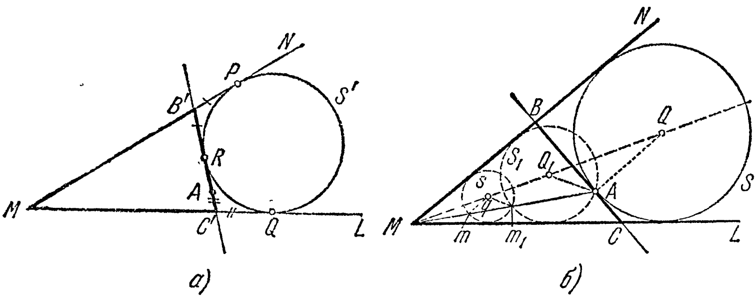


Рис. 151

и $C'Q = C'R$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки. Отсюда

$$MB' + B'C' + C'M = MB' + B'R + C'R + MC' = \\ = MB' + B'P + C'Q + C'M = MP + MQ,$$

т. е. периметр треугольника $MB'C'$ равен $MP + MQ = 2MP = 2MQ$.

Проведем теперь через точку A окружность S (бо́льшую из двух возможных), касающуюся обеих сторон угла, и проведем в точке A касательную к окружности S (см. рис. 151, *б*)[1]. Точки пересечения этой касательной со сторонами угла обозначим B и C. Треугольник MBC искомый. Для доказательства заметим, что, как мы только что убедились, периметр треугольника MBC равен двойному расстоянию от точки M до точки касания окружности S со стороной угла. Проведем через A любую другую прямую, пересекающую стороны угла в точках B' и C', и построим окружность S', вневписанную в треугольник $B'MC'$ (см. снова рис. 151, *а*). Точка R касания

[1]) Существуют две окружности S и S_1, проходящие через точку A и касающиеся сторон угла; для их построения достаточно вписать в угол LMN произвольную окружность s с центром q, найти точки m и m_1 ее пересечения с прямой AM и через A провести прямые $AQ \parallel mq$ и $AQ_1 \parallel m_1q$; точки Q и Q_1 их пересечения с биссектрисой угла M и будут центрами окружностей S и S_1 (см. тот же рис. 151, *б*).

$B'C'$ с S' отлична от A, причем A лежит вне S', откуда следует, что S' больше, чем S. Значит, расстояние от M до точки касания окружности S' со стороной угла, равное полупериметру треугольника $B'MC'$, больше соответствующей величины для треугольника BMC, что и требовалось доказать.

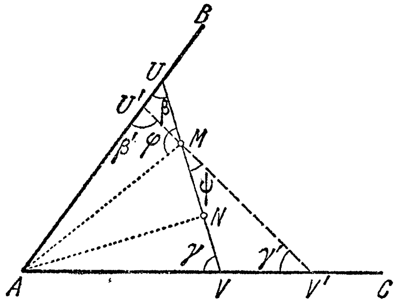


Рис. 152.

66. Пусть UV — некоторая прямая, проходящая через точку M и пересекающая стороны угла в точках U и V, а $U'V'$ — близкая к ней прямая (рис. 152); обозначим еще $MU=u$, $MV=v$, $\angle MUA=\beta$, $\angle MVA=\gamma$, $MU'=u'$, $MV'=v'$, $\angle MU'A=\beta'$, $\angle MV'A=\gamma'$, наконец, $\angle AMU=\varphi$, $\angle AMU'=\varphi'$ и $\angle U'MU=\psi$. Очевидно, что в изображенном на рис. 152 случае $\beta'=\beta+\psi$ и $\gamma'=\gamma-\psi$ (где разность $\psi=\varphi-\varphi'$ может быть как положительной, так и отрицательной). Применяя к треугольникам MUU' и MVV' теорему синусов, получаем

$$\frac{u'}{u}=\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}=\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\psi)} \quad \text{и} \quad \frac{v'}{v}=\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}=\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\psi)}.$$

Таким образом,

$$u'=u\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\psi)}, \quad v'=v\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\psi)};$$

следовательно,

$$UV-U'V'=(u+v)-(u'+v')=(u-u')+(v-v')=$$
$$=u\left(1-\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\psi)}\right)+v\left(1-\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\psi)}\right)=$$
$$=u\frac{\sin(\beta+\psi)-\sin\beta}{\sin(\beta+\psi)}-v\frac{\sin\gamma-\sin(\gamma-\psi)}{\sin(\gamma-\psi)}=$$
$$=2u\frac{\cos\left(\beta+\frac{\psi}{2}\right)\sin\frac{\psi}{2}}{\sin(\beta+\psi)}-2v\frac{\cos\left(\gamma-\frac{\psi}{2}\right)\sin\frac{\psi}{2}}{\sin(\gamma-\psi)}=$$
$$=2\sin\frac{\psi}{2}\left[u\frac{\cos\left(\beta+\frac{\psi}{2}\right)}{\sin(\beta+\psi)}-v\frac{\cos\left(\gamma-\frac{\psi}{2}\right)}{\sin(\gamma-\psi)}\right].$$

Заметим теперь, что если ψ очень мало, то стоящее в квадратных скобках выражение весьма мало отличается от

$$w=u\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-v\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}=u\operatorname{ctg}\beta-v\operatorname{ctg}\gamma,$$

а $2\sin\frac{\psi}{2}$ мало отличается от ψ [1]). Таким образом, при очень малом ψ

$$UV - U'V' \approx w\cdot\psi,$$

откуда следует, что если $w > 0$, то эта разность положительна при положительном ψ и отрицательна при отрицательном ψ, а если $w < 0$, то, напротив, разность $UV - U'V'$ положительна при отрицательном ψ и отрицательна при положительном ψ.

Итак, мы видим, что *и при* $w > 0$ *и при* $w < 0$ (малое) *значение* ψ *можно выбрать так, что разность* $UV - U'V'$ *будет положительной*, и поэтому, если UV имеет наименьшее возможное значение и разность $UV - U'V'$ всегда отрицательна, то неизбежно [2])

$$w = u\operatorname{ctg}\beta - v\operatorname{ctg}\gamma = 0,\ \text{ или }\ u\operatorname{ctg}\beta = v\operatorname{ctg}\gamma,$$

т. е.

$$u\operatorname{tg}\gamma = v\operatorname{tg}\beta.$$

Выберем теперь на отрезке UV такую точку N, что $UN = v$ и $VN = u$, т. е. точку, *симметричную M относительно середины S отрезка UV*; в этой точке N восставим перпендикуляр NQP к прямой UV, пересекающий стороны угла в точках P и Q (рис. 153). Из рассмотрения прямоугольных треугольников NPU и NQV следует, что

$$NP = NU\operatorname{tg}\beta = v\operatorname{tg}\beta\ \text{ и }\ NQ = NV\operatorname{tg}\gamma = u\operatorname{tg}\gamma,$$

---

[1]) Так как при $\psi \to 0$, как известно, $\lim\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\psi/2} = 1$, то при малых ψ имеем $\sin\frac{\psi}{2} \approx \frac{\psi}{2}$, и значит, $2\sin\frac{\psi}{2} \approx \psi$. Точно так же утверждение о том, что при малых ψ имеем $u\frac{\cos\left(\beta+\frac{\psi}{2}\right)}{\sin(\beta+\psi)} - v\frac{\cos\left(\gamma-\frac{\psi}{2}\right)}{\sin(\gamma-\psi)} \approx u\operatorname{ctg}\beta - v\operatorname{ctg}\gamma = w$ вытекает из того, что

$$\lim_{\psi\to 0}\left[u\frac{\cos\left(\beta+\frac{\psi}{2}\right)}{\sin(\beta+\psi)} - v\frac{\cos\left(\gamma-\frac{\psi}{2}\right)}{\sin(\gamma-\psi)}\right] = w.$$

[2]) Таким образом, мы установили, что для того, чтобы отрезок UV был кратчайшим, необходимо, чтобы имело место условие $w = 0$ (или $u\operatorname{tg}\gamma = v\operatorname{tg}\beta$). То, что это условие является также и достаточным, т. е. что в этом случае разность $UV - U'V'$ (при малых ψ являющаяся, как говорят математики, «бесконечно малой более высокого порядка чем ψ», т. е. являющаяся очень малой даже по сравнению с ψ) всегда будет отрицательна, наши рассуждения не доказывают (это может быть выведено, например, из «теоремы существования» для кратчайшего отрезка; ср. со сказанным на стр. 7—10 предисловия).

откуда

$$v \operatorname{tg} \beta - u \operatorname{tg} \gamma = NP - NQ = PQ.$$

Таким образом, если отрезок UV является *кратчайшим* из всех отрезков, высекаемых сторонами угла на проходящих через точку M прямых, и $w=0$, то $PQ=0$, т. е. точки P и Q совпадают с точкой A, что и требовалось доказать.

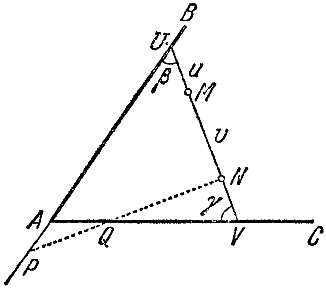


Рис. 153.

67. Пусть вписанная окружность s треугольника касается его

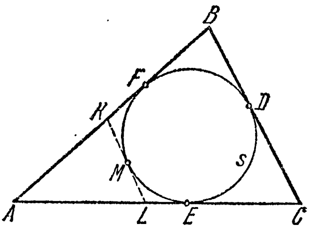


Рис. 154.

сторон BC, AC и AB длин a, b и c в точках D, E и F, а прямой KL (где K и L — точки сторон AB и AC) — в точке M (рис. 154). Из равенства длин касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что

$$KM = KF, \ LM = LE \text{ и } BF = BD, \ CE = CD;$$

таким образом, периметр $2p'$ треугольника AKL равен

$$\begin{aligned} 2p' &= AK + AL + KL = AK + AL + (KM + LM) = AK + AL + KF + LE = \\ &= (AK + KF) + (AL + LE) = AF + AE = (AB - BF) + (AC - CE) = \\ &= (AB - BD) + (AC - CD) = AB + AC - (BD + CD) = \\ &= c + b - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a). \end{aligned}$$

А так как полупериметры p и p' подобных треугольников ABC и AKL относятся как их основания $BC = a$ и $KL = m$ (новое обозначение!), то

$$\frac{p}{p-a} = \frac{a}{m},$$

и следовательно,

$$m = \frac{a(p-a)}{p} = \frac{ap - a^2}{p} = \frac{\frac{p^2}{4} - \left(\frac{p}{2} - a\right)^2}{p}.$$

Из последней формулы вытекает, что *наибольшее возможное значение длины m отрезка KL достигается для в с е х треугольников ABC с основанием $BC = a = \frac{p}{2}$* (т. е. таких, что $b + c = 3a$); *это значение равно* $\frac{p^2}{4} : p = \frac{p}{4}$.

68. а) Обозначим прямую, на которой лежит отрезок MN, через k. Пусть прямые k и l п е р е с е к а ю т с я. При этом возможны три случая.

1°. *Точка O пересечения прямых k и l лежит в н у т р и отрезка MN.* Тогда, чем ближе находится точка X прямой l к точке O, тем больше делается угол MXN (рис. 155). *Наибольшее* свое значение

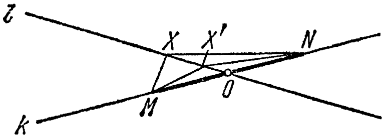


Рис. 155.

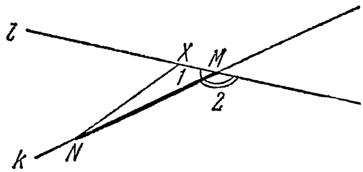


Рис. 156.

он примет, когда его вершина X совпадет с точкой пореcечения k и l. Тогда треугольник MXN выродится в отрезок и угол MXN станет равным 180°.

2°. *Точка пересечения прямых k и l совпадает с одним из концов отрезка MN*, например, с точкой M (рис. 156). Обозначим через $\angle 1$ и $\angle 2$ соответственно острый и тупой углы между прямыми k и l (так что $\angle 1 + \angle 2 = 180°$). При приближении точки X к точке M угол MNX стремится к нулю. Поэтому угол MXN все время увеличивается и стремится к углу $180° - \angle 1 = \angle 2$, если X приближается к M со стороны острого угла, или к углу $180° - \angle 2 = \angle 1$, если X приближается к M со стороны тупого угла. Однако, когда точка X совпадает с N, угол NXM вовсе не существует. Поэтому в этом случае задача *не имеет решения.*

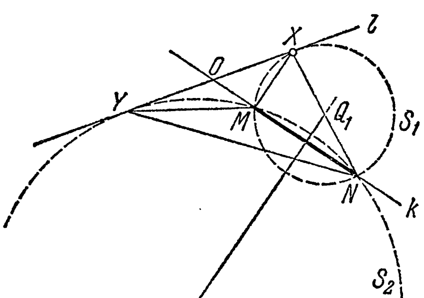


Рис. 157.

3°. *Точка O пересечения прямых k и l лежит в н е отрезка MN* (рис. 157). Проведем через точки M и N окружность, касающуюся прямой l. Таких окружностей будет две (точки X и Y касания этих окружностей с прямой l определяются из равенства $OM \cdot ON = OX^2 = OY^2$). Обозначим эти окружности через S_1 и S_2. Так как все точки луча OX, кроме X, лежат вне окружности S_1, то из точки X отрезок MN виден под бо́льшим углом, чем из всех других точек луча OX; точно так же из точки Y отрезок MN виден под бо́льшим углом, чем из других точек луча OY.

Сравним теперь между собой углы MYN и MXN. Пусть радиус окружности S_2 больше, чем радиус окружности S_1; тогда $\angle MQ_1N > \angle MQ_2N$ (здесь Q_1 и Q_2 — ц е н т р ы окружностей S_1 и S_2). Но

$\angle MXN = \frac{1}{2} \angle MQ_1N$ и $\angle MYN = \frac{1}{2} \angle MQ_2N$. Следовательно, $\angle MXN > \angle MYN$.

Отсюда следует, что искомой точкой будет *точка X касания окружности меньшего радиуса с прямой l*, — а если окружности S_1 и S_2 равны, то искомым свойством будут обладать д в е точки прямой l.

4°. Аналогично решается задача и в том случае, когда прямые k и l *параллельны* (рис. 158); только в этом случае существует единственная окружность S, проходящая через точки M и N и касающаяся l.

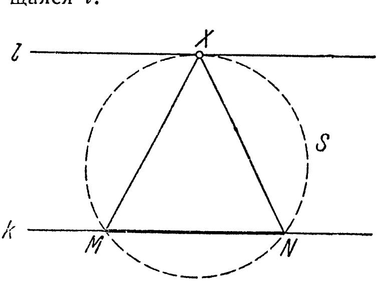


Рис. 158.

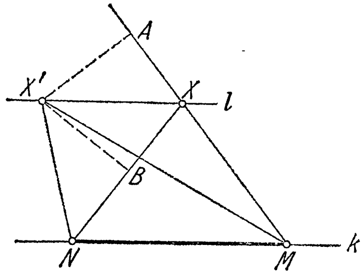


Рис. 159.

П р и м е ч а н и е. Укажем еще одно решение задачи, относящееся к тому случаю, когда $k \parallel l$. Докажем, что точка X прямой l, из которой отрезок MN виден под наибольшим углом, такова, что треугольник MXN р а в н о б е д р е н н ы й (рис. 159). Пусть X — такая точка, а X' — любая другая точка прямой l; докажем, что $\angle MXN > \angle MX'N$. Треугольники $MX'X$ и $NX'X$ имеют равные площади, так как у них есть общее основание XX' и высоты, опущенные на XX', одинаковы. Сторона MX одного треугольника равна стороне NX другого. Следовательно, высоты $X'A$ и $X'B$, опущенные на эти стороны, равны между собой. Пусть $MX' > NX'$, тогда угол XMX' треугольника $X'MA$ меньше угла XNX' треугольника $X'NB$. Поэтому

$$\angle XMN + \angle MNX < \angle X'MN + \angle MNX',$$

а значит, $\angle MXN > \angle MX'N$, что и требовалось доказать.

б) Обозначим прямую, на которой лежит отрезок MN, через k и рассмотрим все случаи взаимного расположения отрезка MN и окружности S.

1°. *Прямая k н е п е р е с е к а е т окружности S* (рис. 160). В этом случае можно провести д в е окружности s_1 и s_2, проходящие через M и N и касающиеся S соответственно внешне и внутренне (см. примечание в конце этого пункта). Обозначим точки касания этих окружностей с S через K_1 и K_2 (рис. 160); докажем, что они и будут *искомыми*. Если X есть какая угодно отличная от K_1 точка окружности S, то

$$\angle MXN < \angle MK_1N$$

(угол MK_1N — вписанный и опирающийся на дугу MN окружности s_1, а MXN — угол с вершиной вне круга, опирающийся на ту же дугу). Аналогично, если точка X отлична от K_2, то

$$\angle MXN > \angle MK_2N.$$

Примечание. Укажем построение окружности s, проходящей через две данные точки M и N и касающейся данной окружности S.

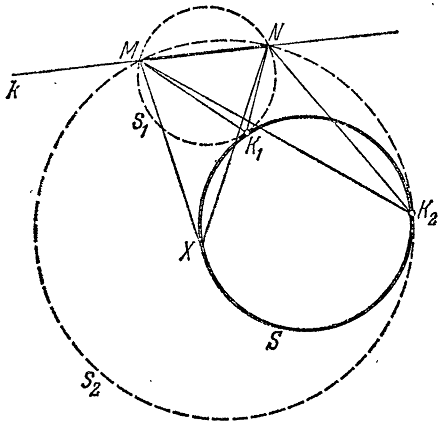


Рис. 160.

Предположим, что эта задача решена. Пусть общая касательная к окружностям S и s в их точке касания K пересекается с прямой MN в точке Q (рис. 161). В таком случае $QK^2 = QM \cdot QN$. Обратно, если Q есть такая точка прямой MN, что квадрат касательной QK, проведенной из точки Q к окружности S, равен произведению расстояний от точки Q до точек M и N, то окружность s, проходящая через точки M, N и K, коснется в точке K прямой QK, а следовательно, и окружности S. Таким образом, нам достаточно найти на прямой MN точку Q, удовлетворяющую условию $QM \cdot QN = QK^2$ (где K — неизвестная точка соприкосновения окружности S с касательной, проведенной из искомой точки Q к этой окружности).

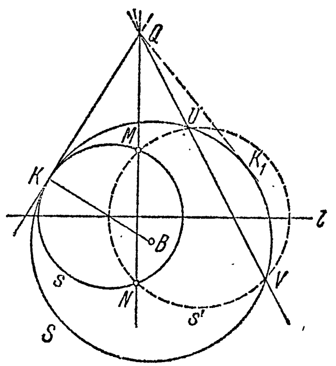


Рис. 161.

Пусть s' — произвольная окружность, проходящая через точки M и N и пересекающая окружность S в точках U и V. Обозначим через Q точку пересечения прямых MN и UV и покажем, что эта точка Q удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, если QK есть касательная, проведенная из точки Q к окружности S (где K — точка касания), то

$$QM \cdot QN = QU \cdot QV$$

по свойству секущих к окружности s' и

$$QU \cdot QV = QK^2$$

по свойству секущих к окружности S.

Поскольку из точки Q к окружности S можно провести д в е касательные QK и QK_1, задача имеет *два* решения.

2°. *Прямая k к а с а е т с я S, и точка касания P лежит в н е MN* (рис. 162). В этом случае существует е д и н с т в е н н а я окружность

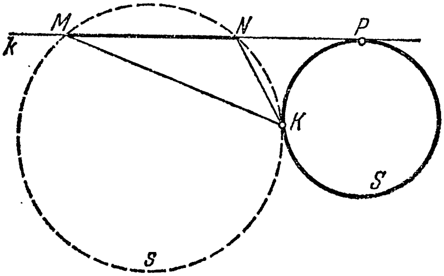


Рис. 162.

s, проходящая через M и N и касающаяся S (внешне). Из точки K касания этой окружности с S отрезок MN виден под *наибольшим* возможным углом; под *наименьшим* возможным углом (нулевым) этот отрезок виден из точки P.

3°. *Прямая k к а с а е т с я S, и точка касания P лежит в н у т р и*

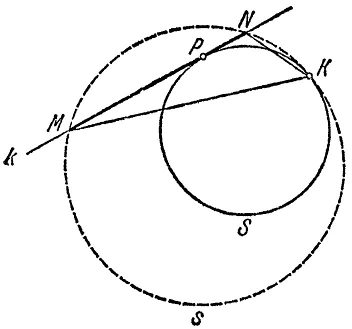


Рис. 163.

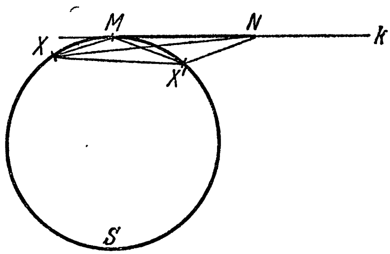


Рис. 164.

отрезка MN (рис. 163). В этом случае тоже существует е д и н с т в е н н а я окружность s, проходящая через M и N и касающаяся S (внутренним образом). Из точки K касания этой окружности с S отрезок MN виден под *наименьшим* возможным углом; под *наибольшим* возможным углом (равным 180°) этот отрезок виден из точки P.

4°. *Прямая k к а с а е т с я S в точке M* (рис. 164). Угол MXN, где X — точка окружности S, стремится к нулю, если точка X приближается к M с одной стороны окружности, и к 180°, когда X приближается к M с другой стороны окружности. Однако когда точка X совпадает с M, угол MXN не существует; поэтому в этом случае задача *не имеет решения.*

5°. *Прямая k пересекает окружность S в точках P_1 и P_2, лежащих вне отрезка MN.* В этом случае существуют две окружности s_1 и s_2, проходящие через M и N и касающиеся S обе внешне (рис. 165 а) или обе внутренне (рис. 165 б). Если K_1 и K_2 — точки касания, то, как легко видеть, $\angle MXN$, где X — точка окружности S, не превосходит по крайней мере одного из углов MK_1N и MK_2N, а именно того, который отвечает точке касания, лежащей по ту же сторону k, что и X. Поэтому отрезок MN будет виден под *наибольшим* возможным углом либо из точки K_1, либо из точки K_2 (в зависимости от того, какой из углов MK_1N и MK_2N больше, другими словами — от того, какая из окружностей s_1 и s_2 меньше), либо из обеих точек K_1 и K_2 (если $\angle MK_1N = \angle MK_2N$). Под *наименьшим* возможным углом (нулевым) отрезок виден из точек P_1 и P_2 пересечения k с S.

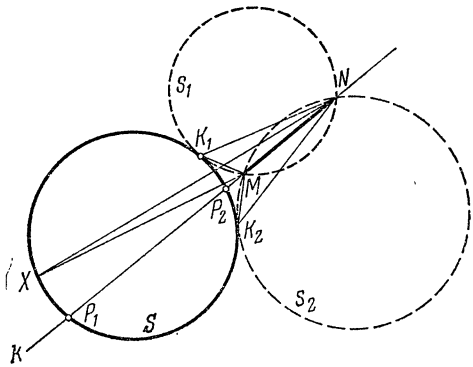


Рис. 165 а.

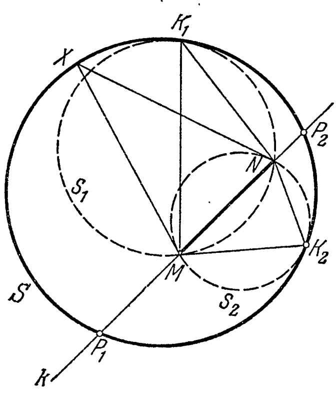


Рис. 165 б.

6°. *Отрезок MN пересекает окружность S в двух точках P_1 и P_2, отличных от точек M и N* (рис. 166). Здесь тоже существуют две окружности s_1 и s_2, проходящие через точки M и N и касающиеся S в точках K_1 и K_2 (обе внутренним образом). В этом случае $\angle MXN$, где X — произвольная точка окружности S, будет не меньше, чем по крайней мере один из углов MK_1N и MK_2N (а именно тот, который отвечает точке касания, лежащей с той же стороны k, что и X). Поэтому отрезок MN будет виден под *наименьшим* углом из одной из двух точек K_1, K_2 (или из о б е и х, если $\angle MK_1N = \angle MK_2N$, т. е. если $s_1 = s_2$). Под *наибольшим* возможным углом (180°) отрезок MN будет виден из точек P_1 и P_2.

7°. *Отрезок* MN *п е р е с е к а е т окружность* S *в о д н о й точке, отличной от* M *и* N (рис 167). В этом случае отрезок MN будет виден

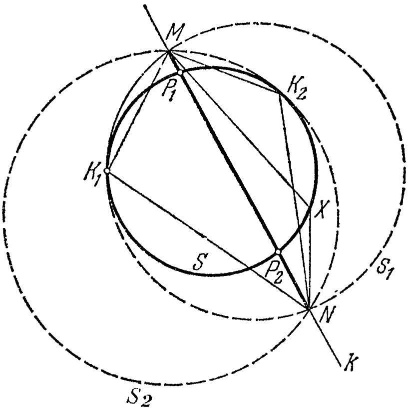


Рис. 166.

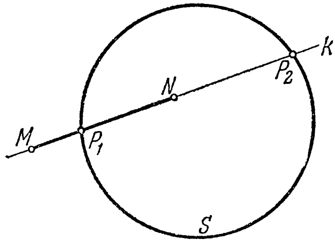


Рис. 167.

под *наибольшим* возможным углом (в 180°) из точки его пересечения с окружностью S и под *наименьшим* возможным углом (нулевым) из второй точки пересечения прямой k с S.

8°. *Прямая* k *п е р е с е к а е т окружность* S *в точке* M, *и вторая точка* P *пересечения* k *с* S *лежит в н е отрезка* MN (рис. 168, *а*, *б*).

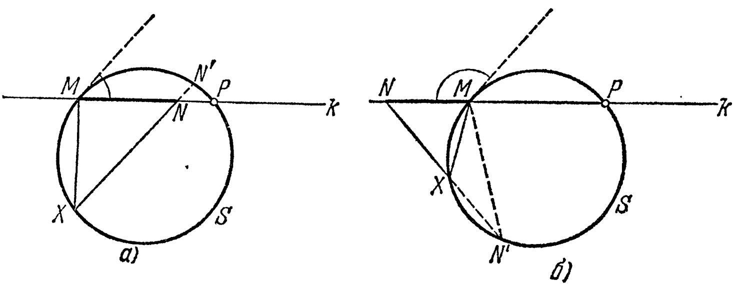


Рис. 168.

Отрезок MN виден под *наименьшим* углом (нулевым) из точки P. Далее, если точка X отлична от M, то $\angle MXN$, измеряющийся половиной дуги MN' (рис. 168), меньше угла между NM и касательной к окружности в точке M, измеряющегося половиной дуги $MN'P$; если X неограниченно приближается к M, то $\angle MXN$ стремится к этому углу. Однако если X совпадает с M, то угол MXN не существует; таким образом, в этом случае на окружности н е т точки, из которой отрезок MN виден под *наибольшим* углом.

9°. *Прямая k пересекает окружность S в точке M, и вторая точка P пересечения k с MN лежит внутри MN* (рис. 169). Отрезок MN виден под *наибольшим* углом (равным 180°) из точки P. Далее, если X есть отличная от M точка окружности S, то $\angle MXN$ (измеряющийся дугой MN'; см. рис. 169) больше угла между k и касательной к окружности S в точке M; если X неограниченно приближается к M, то $\angle MXN$ стремится к этому углу. Однако если X совпадает с M, то угол MXN не существует; таким образом, в этом случае на окружности S нет точки, из которой отрезок MN виден под *наименьшим* углом.

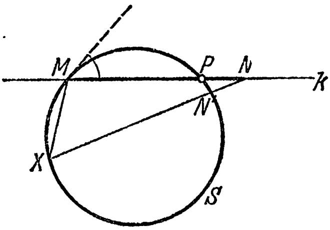


Рис. 169.

10°. Наконец, если *точки M и N обе лежат на окружности S* (рис. 170), то угол MXN, где X — точка окружности, может иметь только два значения, зависящие от того, с какой стороны от k расположена точка X. Поэтому в этом случае отрезок MN виден под *наибольшим* возможным углом из всех точек одной дуги MN окружности S и под *наименьшим* возможным углом из всех точек второй дуги. Особо следует отметить случай, когда MN есть диаметр S; в этом случае отрезок MN виден из всех точек окружности S под одним и тем же углом (равным 90°).

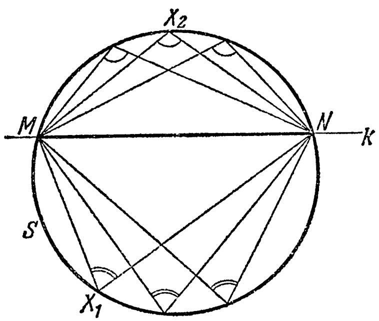


Рис. 170.

69. а) Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно прямой l (рис. 171). Если X' — произвольная точка прямой l, то $AX'+X'B=AX'+X'B'$. Следовательно, сумма $AX'+X'B$ будет *наименьшей*, когда сумма $AX'+X'B'$ наименьшая, т. е. когда X' совпадает с точкой X пересечения прямой AB' с l.

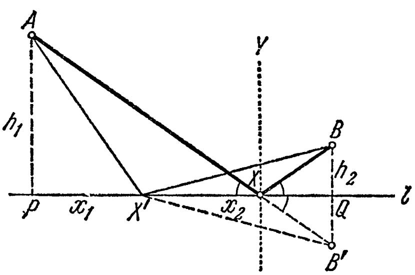


Рис. 171.

Примечание 1. Из рис. 171 следует, что прямые AX и BX образуют с l равные углы (или, если назвать образованные прямыми AX и BX с перпендикуляром XY к прямой l углы AXY и BXY «углом падения» и «углом отражения», что *«угол падения равен углу отражения»*). Таким образом, правило, определяющее положение на прямой l такой точки X, что сумма $AX+XB$ достигает наименьшего возможного значения, совпадает с известным правилом отражения от плоского зеркала луча, посланного из точки A в точку B—ср. со сказанным на стр. 38—39 по поводу задачи 88.

Примечание 2. Если обозначить расстояния AP и BQ точек A и B от прямой l через h_1 и h_2, а расстояния PX' и QX' точки X' прямой l от проекций P и Q точек A и B на прямую l через x_1 и x_2, то, очевидно,

$$AX'+BX'=\sqrt{h_1^2+x_1^2}+\sqrt{h_2^2+x_2^2}.$$

Таким образом, из решения настоящей задачи следует, что *при* $x_1+x_2=\text{const}\ (=PQ)$ *выражение* $\sqrt{h_1^2+x_1^2}+\sqrt{h_2^2+x_2^2}$ *достигает наименьшего возможного значения при* $\frac{x_1}{x_2}=\frac{h_1}{h_2}$ (ибо треугольники APX и BQX рис. 171 подобны).

б) Пусть B'—точка, симметричная B относительно l (рис. 172). Если X'—произвольная точка прямой l, то $AX'-B'X'\leqslant AB'$. А так как $AX'-BX'=AX'-B'X'$, то разность $AX'-BX'$ будет *наибольшей*, когда X' совпадает с точкой X пересечения AB' с l, для которой $AX-BX=AX-B'X=AB'$.

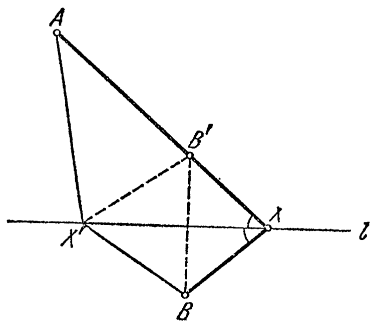


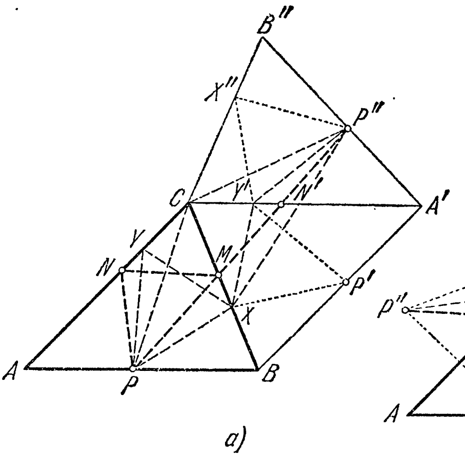
Рис. 172.

[Если точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от l и $AB'\parallel l$, то задача *не имеет решения*; если A и B симметричны относительно l и B' совпадает с A, то разность $AX'-BX'$ имеет одно и то же (нулевое) значение для *всех* точек X' прямой l.]

70. а) Первое решение. Пусть PXY—произвольный треугольник, вписанный в ABC, одна из вершин которого совпадает с точкой P. Отразим симметрично треугольник ABC вместе с треугольником PXY от прямой BC; полученный треугольник $A'BC$ и вписанный в него треугольник $P'XY'$ отразим от прямой CA' (рис. 173, *а*). Так как $XY=XY'$ и $YP=Y'P'=Y'P''$, то периметр треугольника PXY равен длине ломаной $PXY'P''$. Поэтому периметр треугольника PXY будет наименьшим в том случае, когда наименьшей будет длина ломаной $PXY'P''$.

Далее могут представиться две возможности. Если *отрезок* PP'' *пересекает прямую* BC *между точками* B *и* C (а следовательно, и прямую CA' между точками C и A'), то он будет короче любой ломаной $PXY'P''$, и искомый треугольник будет определен (треугольник PMN на рис. 173, *а*; M—точка пересечения PP'' с BC, N—точка, симметричная точке N' пересечения PP'' с CA' относительно BC). Если же *отрезок* PP'' *пересечет прямую* BC *вне отрезка* BC, то кратчайшей из ломаных $PXY'P''$ будет та, для которой точки X и Y' совпадут с точкой C. В этом случае искомый треугольник вырождается в дважды взятый отрезок PC.

Остается выяснить, когда будет иметь место тот или иной случай. Для этого заметим, что треугольник $A'B''C$ получается из треугольника ABC вращением вокруг точки C на угол, равный удвоенному углу C треугольника, ибо *последовательность двух симметрий относительно образующих угол α прямых равносильна вращению вокруг точки пересечения этих прямых на угол 2α*: см. рис. 174, где, очевидно, $OA=OA_1=OA'$ и $\angle AOA_1=2\angle POA_1$, $\angle A_1OA'=2\angle A_1OQ$, и значит, $\angle AOA'=2\angle POA_1+2\angle A_1OQ=$



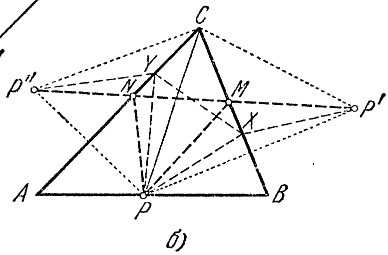


Рис. 173.

$=2\angle POQ=2\alpha$. Поэтому $\angle PCP''=2\angle C$, откуда сразу следует, что если $\angle C<90°$, то прямая PP'' пересечет сторону BC треугольника; если же $\angle C\geqslant 90°$, то PP'' пересечет прямую BC либо в самой точке C, либо в точке, лежащей на продолжении отрезка BC за точку C.

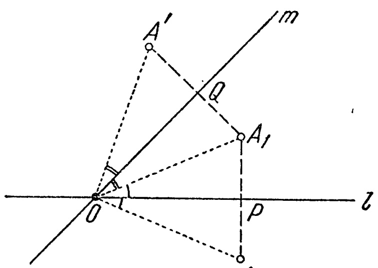


Рис. 174.

Второе решение. Пусть снова PXY — произвольный треугольник, вписанный в треугольник ABC; P' и P'' — точки, симметричные точке P относительно прямых BC и CA (рис. 173, *б*). Так как $PX=P'X$ и $PY=P''Y$, то периметр треугольника PXY равен длине ломаной $P'XYP''$. Поэтому, если $P'P''$ пересечет боковые стороны AC и BC треугольника ABC в точках M и N, то треугольник PMN и есть искомый. Если же $P'P''$ не пересечет отрезки AC и BC, то искомый треугольник выродится в дважды взятый отрезок PC. Аналогично первому решению можно показать, что первый случай имеет место, когда угол C треугольника меньше 90°, а второй — когда $\angle C\geqslant 90°$.

Отметим, что принципиально второе решение мало отличается от первого (ср. рис. 173, *а* и *б*).

б) Первое решение. Будем считать, что угол при вершине C заданного треугольника острый. Пусть P — произвольная точка стороны AB; построим согласно первому решению задачи а) вписанный в ABC треугольник PMN наименьшего возможного периметра, равного длине отрезка PP'' (см. рис. 173, *а*). Остается только выбрать точку P так, чтобы соответствующий ей отрезок PP'' был наименьшим. Вспомним, что $\angle PCP''=2\angle C$, т. е. не зависит от выбора точки P; поэтому основание PP'' равнобедренного треугольника PCP'' с данным углом $\angle PCP''=2\angle C$ при вершине будет наименьшим, если будет наименьшей боковая сторона CP. Далее надо рассмотреть отдельно два случая.

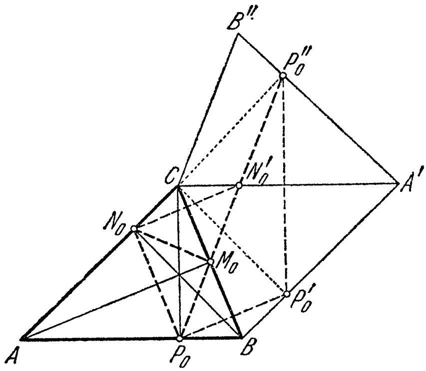


Рис. 175.

1°. *Углы при вершинах A и B треугольника ABC острые (треугольник остроугольный).* В этом случае отрезок CP имеет наименьшую величину, когда точка P совпадает с основанием P_0 высоты CP_0 треугольника ABC (рис. 175). Легко показать, что и вершины M_0 и N_0 треугольника $P_0M_0N_0$, получаемого при таком выборе точки P, являются основаниями высот треугольника ABC [1]). Действительно, из рис. 175 следует, что

$$\angle N_0P_0A=\angle CP_0A-\angle CP_0N_0=90^\circ-\angle CP_0''N_0'=$$
$$=90^\circ-\frac{180^\circ-2\angle C}{2}=\angle C,$$

значит, вокруг четырехугольника BCN_0P_0 можно описать окружность, и $\angle BN_0C=\angle BP_0C=90^\circ$. Так же доказывается, что $AM_0\perp BC$.

2°. *Если*, например, *угол A прямой или тупой*, то отрезок CP является наименьшим, когда точка P совпадает с вершиной A треугольника. Отсюда следует, что искомый треугольник вырождается в дважды взятую высоту AM_0 треугольника.

Второе решение. При решении задачи б) можно также исходить и из второго решения задачи а). Так как периметр треугольника MNP (рис. 173, *б*) равен PP'', $CP'=CP''=CP$ и $\angle P'CP''=2\angle C$, то задача сводится к отысканию такой точки P,

---

[1]) На самом деле последующая часть доказательства является излишней: из равноправия всех сторон треугольника ABC следует, что если вершина P_0 искомого треугольника $P_0M_0N_0$ является основанием опущенной на сторону AB высоты, то точки M_0 и N_0 должны совпадать с основаниями двух других высот.

что CP имеет наименьшее значение. Далее см. первое решение задачи.

71. а) Рассмотрим следующие случаи:

1°. *Вершины A и B лежат по разные стороны прямой l* (рис. 176, *а*). Пусть C — точка пересечения отрезка AB с прямой l,

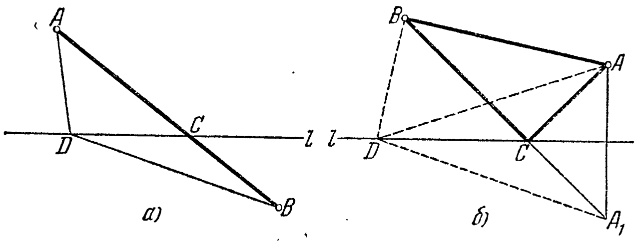


Рис. 176.

а D — любая точка прямой l, отличная от C. Так как $AD+DB > AB$, то периметр треугольника ADB

$$AB+AD+DB > 2\,AB.$$

С другой стороны, очевидно, что если точку D брать достаточно близко к C, то периметр треугольника ADB можно сделать как угодно близким к удвоенной длине отрезка AB. Таким образом, *треугольник наименьшего периметра вырождается* в «треугольник» ABC, т. е. *в дважды взятый отрезок AB*; периметр этого «треугольника» равен $2\,AB$:

$$AB+BC+AC=2\,AB.$$

2°. *Точки A и B лежат по одну сторону прямой l* (рис. 176, *б*; ср. с задачей 69 а)). Пусть точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l.

Как следует из решения задачи 69 а), *искомым треугольником с наименьшим периметром будет треугольник ACB, где C — точка пересечения отрезка A_1B с прямой l*; периметр этого треугольника равен $AB+A_1B$.

б) Рассмотрим следующие случаи:

1°. *Прямые l и m параллельны* (рис. 177)[1]. Опустим из A перпендикуляр на эти прямые; пусть B и C — точки пересечения этого перпендикуляра с прямыми l и m, а B_1 и C_1 — любые другие две точки, расположенные соответственно на l и m. Тогда, очевидно, $AB_1 \geqslant AB$, $AC_1 \geqslant AC$ и $B_1C_1 \geqslant BC$. Следовательно,

$$AB+BC+AC \leqslant AB_1+B_1C_1+AC_1;$$

поэтому *искомый треугольник вырождается в дважды взятый отрезок ABC.*

---

[1]) На рис. 177 точка A лежит вне образованной прямыми l и m полосы; предоставляем читателю самому рассмотреть вопрос о том, какие изменения внесет в рассуждение предположение о том, что A лежит внутри этой полосы или принадлежит одной из прямых l, m.

2°. *Прямые l и m пересекаются.*

А. Рассмотрим сначала случай, когда *вершина A лежит внутри острого угла, образованного этими прямыми* (рис. 178) [1]. Пусть O — точка пересечения прямых l и m и ABC — какой-нибудь треугольник, вершины B и C которого лежат соответственно на прямых l и m. Если хотя бы одна из вершин, например B, лежит не

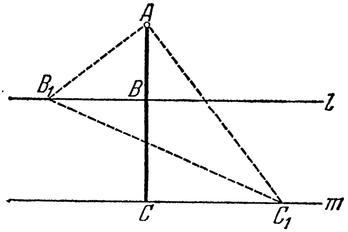


Рис. 177.

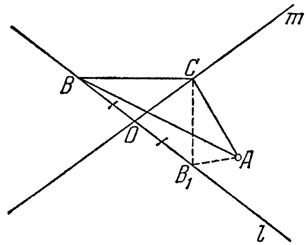


Рис. 178.

на луче, ограничивающем угол, содержащий точку A, то такой треугольник можно заменить треугольником AB_1C, имеющим меньший периметр и таким, у которого вершина B_1 лежит на втором луче прямой l (если $OB_1 = OB$, то $CB_1 = CB$, $AB_1 < AB$).

Пусть теперь $AB'C'$ — произвольный треугольник, вершины B' и C' которого лежат на лучах Ol и Om таких, что точка A лежит внутри острого угла lOm. Обозначим через A_1 и A_2 точки, симметричные точке A относительно прямых l и m (рис. 179). Как следует из решения задачи 70 а), *вершины B и C искомого треугольника наименьшего периметра совпадают с точками пересечения отрезка A_1A_2 с прямыми l_1 и l_2.*

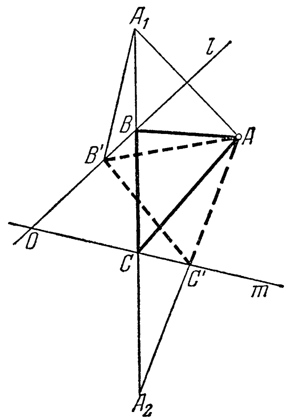


Рис. 179.

Б. *Прямые l и m взаимно перпендикулярны.* Тогда отрезок A_1A_2 (см. случай А) проходит через точку O (рис. 180); точки B и C пересечения отрезка A_1A_2 с l и m совпадают между собой и с точкой O. Треугольник ABC наименьшего периметра вырождается в *«треугольник»* AO периметра $2AO$ *с двумя совпавшими с точкой O вершинами.*

В. *Точка A лежит внутри тупого угла, образованного прямыми l и m.* Проведем через точку O прямую l', перпендикулярную к l,

---

[1]) Мы считаем далее, что точка A не принадлежит ни одной из прямых l и m; предоставляем читателю самому рассмотреть случай, когда дело обстоит не так (этот случай можно считать предельным для рассмотренных).

и прямую m', перпендикулярную к m. Пусть A лежит внутри (острого) угла $m'Ol'$ (рис. 181, *а*). Тогда искомым треугольником будет *дважды взятый отрезок AO* (вершины B и C треугольника совпадают с точкой O). Для доказательства рассмотрим произвольный треугольник ABC, вершины B и C которого лежат на l и на m. Если B и C принадлежат лучам Ol и Om (рис. 181, *а*) и B' — точка пересечения отрезка CB с прямой m', то

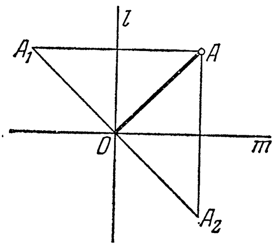


Рис. 180.

$$AB+BC+AC=AB+BB'+B'C+AC>$$
$$>AB'+B'C+AC>2\,AO$$

(см. случай Б). Если же, скажем, вершина C не принадлежит лучу Om (рис. 181, *б*), то $AC>AO$ (так как в треугольнике AOC угол O тупой) и

$$AB+BC+AC>2\,AC>2\,AO.$$

Пусть, наконец, точка A не лежит внутри острого угла $l'Om'$; например, A лежит внутри угла $l'Om$ (рис. 182). Опустим из A

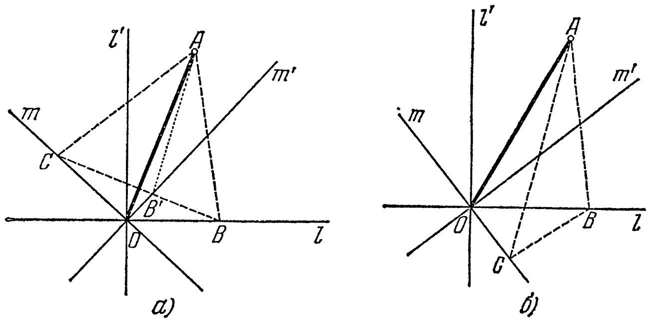


Рис. 181.

перпендикуляр на l; пусть D и E — точки пересечения этого перпендикуляра с прямыми l и m. Тогда для любого треугольника ABC будем иметь

$$AC+CB+AB>2\,AB>2\,AD=AD+DE+AE;$$

следовательно, *искомым треугольником будет служить дважды взятый отрезок AED.*

Таким образом, *когда точка A лежит внутри тупого угла, образованного прямыми l и m, то треугольником наименьшего возможного периметра будет или дважды взятый отрезок AO, или дважды взятый перпендикуляр, опущенный из A на l, или дважды взятый перпендикуляр, опущенный из A на m* (в зависимости от того, в каком из трех углов $l'Om'$, $l'Om$ и lOm' лежит точка A).

в) Рассмотрим следующие случаи:

1°. *Все три прямые параллельны между собой* (рис. 183). В этом случае *искомым «треугольником» будет*, очевидно, *общий перпенди-*

куляр DEF этих трех прямых. Задача имеет бесчисленное множество решений.

2°. *l параллельно m; n пересекает l и m* в точках D_1 и E (рис. 184). Решений будет бесчисленное множество, а именно, тако-

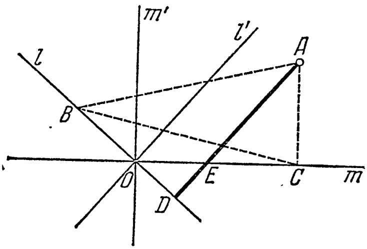


Рис. 182.

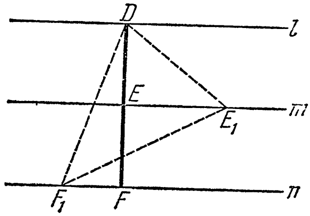


Рис. 183.

вым будет *любой дважды взятый перпендикуляр к прямым l и m, заключенный между перпендикулярами DE и D_1E_1 к l и m* (включая сюда также DE и D_1E_1: ведь если A, B и C—три точки, принадлежащие прямым l, m и n, то $AB+AC+CB \geqslant 2AB \geqslant \geqslant 2DE$).

3°. *Прямые l, m и n пересекаются и образуют тупоугольный треугольник LMN* с тупым углом L (рис. 185). Каждой точке A прямой l

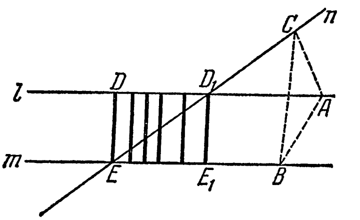


Рис. 184.

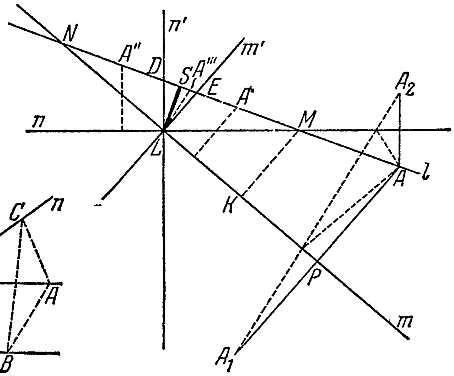


Рис. 185.

соответствует определенный треугольник, имеющий наименьший периметр среди всех треугольников с одной из вершин в A и двумя другими на прямых m и n (см. задачу б)). Если теперь выбрать треугольник наименьшего периметра среди всех треугольников, соответствующих разным точкам A прямой l, то этот треугольник, очевидно, и будет искомым. Если A лежит в н е отрезка MN, то периметр минимального треугольника, соответствующего точке A, равен A_1A_2, где A_1 и A_2 симметричны A относительно m и n. Ясно, что в этом случае $A_1A_2 > AA_1$ (см. рис. 185): так как $AA_1=2AP > 2MK$, где P и K—проекции точек A и M на прямую $m \equiv NL$, то

$A_1A_2 > 2MK$. Но дважды взятый отрезок MK есть вырожденный треугольник с вершинами на прямых l, m и n; поэтому точка A, лежащая вне отрезка MN, не может быть вершиной искомого треугольника.

Пусть, далее, прямые m' и n', проведенные через точку L перпендикулярно соответственно к m и n, пересекают отрезок MN в точках E и D. Треугольником наименьшего периметра, соответствующим точке A' отрезка ME, будет дважды взятый перпендикуляр, опущенный из точки A' на прямую m; наименьшим из таких перпендикуляров является EL. «Треугольником» наименьшего периметра, соответствующим точке A'' отрезка DN, будет дважды взятый перпендикуляр, опущенный из точки A'' на прямую n; наименьшим из таких перпендикуляров будет DL. Наконец, точке A''' отрезка DE в качестве «треугольника» наименьшего периметра будет соответствовать дважды взятый отрезок $A'''L$; наименьшим из таких отрезков будет высота SL треугольника NLM. Но и DL и EL, очевидно, больше высоты SL. Следовательно, *искомым «треугольником» будет дважды взятая высота LS треугольника LMN, опущенная из вершины L тупого угла.*

4°. *Прямые l, m, n пересекаются и образуют остроугольный треугольник MLN* (рис. 186).

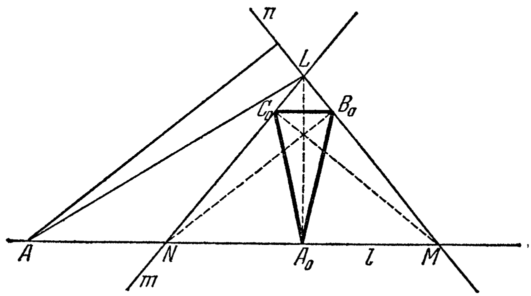


Рис. 186.

Мы уже знаем, что из всех треугольников, вписанных в треугольник MLN (т. е. таких, у которых вершины лежат на сторонах треугольника MLN, а не на их продолжениях), наименьший периметр имеет *треугольник $A_0B_0C_0$, вершинами которого служат основания высот треугольника MNL* (см. решение задачи 70 б)). Покажем, что этот треугольник будет иметь наименьший периметр из всех вообще треугольников, вершины которых лежат на прямых l, m, n. Для этого нам остается сравнить его периметр с периметром минимального треугольника, две вершины которого принадлежат прямым m и n, а третья совпадает с фиксированной точкой A прямой l, не принадлежащей отрезку MN (рис. 186). Если A лежит, например, на продолжении отрезка MN за точку N, то минимальным треугольником для нее будет или дважды взятый отрезок LA, или дважды взятый перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую LM. Но LA больше высоты LA_0 треугольника MNL, а перпендикуляр, опущенный на ML из какой-либо точки, лежащей на продолжении отрезка MN за точку N, больше чем высота NB_0.

Таким образом, периметр минимального треугольника, соответствующего точке A прямой l, лежащей вне отрезка MN, больше одной из высот LA_0 или MC_0 треугольника LMN, взятой дважды. Но каждая высота (взятая дважды) есть вырожденный вписанный в LMN треугольник. А из всех вписанных треугольников наименьший периметр имеет треугольник $A_0B_0C_0$.

Итак, в рассматриваемом случае искомым *треугольником наименьшего периметра будет треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника LMN.*

5°. *Прямые l, m и n образуют прямоугольный треугольник LMN*, где $\angle L = 90°$ (рис. 187). Если мы будем рассматривать треугольник LMN как предельный случай тупоугольного треугольника, то получим, что *искомым треугольником наименьшего периметра будет взятая дважды высота LK, опущенная на вершины прямого угла.* Тот же результат мы получим, если будем рассматривать треугольник LMN как предельный случай остроугольного треугольника. (Докажите это непосредственно, без ссылки на случаи 3° и 4°!)

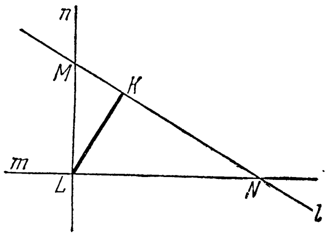


Рис. 187.

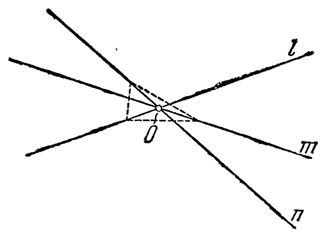


Рис. 188.

6°. *Прямые l, m и n проходят через одну точку O* (рис. 188). В этом случае *искомый «треугольник» наименьшего периметра*, очевидно, *вырождается в одну точку O* (в «треугольник» нулевого периметра).

72. Начнем с решения задачи, аналогичной задаче 70 а), а именно предположим, что на стороне AD четырехугольника $ABCD$ задана точка P, и поставим своей целью найти *вписанный в $ABCD$ четырехугольник наименьшего возможного периметра, одна вершина которого совпадает с точкой P.* Эта задача допускает решение, близкое к первому решению задачи 70 а). Отразим четырехугольник $ABCD$ от стороны AB; затем отразим полученный четырехугольник $ABC'D'$ от стороны BC'; наконец, отразим полученный четырехугольник $A'BC'D''$ от стороны $C'D''$; пусть при этом четырехугольник окончательно займет положение $C'D''A''B'$ (рис. 189). Рассмотрим еще произвольный вписанный в $ABCD$ четырехугольник $PXYZ$; его последовательные положения мы обозначим через $P'XY'Z'$, $P''X'Y'Z''$ и $P'''X''Y''Z''$. Периметр четырехугольника $PXYZ$ равен, очевидно, длине ломаной $PXY'Z''P'''$. Отсюда следует, что *если прямая PP''' пересекает стороны AB, BC' и $C'D''$ построенных четырехугольников, то точки пересечения определят вершины искомого четырехугольника; если же PP''' не пересекает все эти три отрезка, то искомый четырехугольник будет вырожденным* (т. е. треугольником, одна из

вершин которого совпадает с вершиной четырехугольника $ABCD$ или дважды взятой диагональю четырехугольника $ABCD$).

Теперь перейдем к решению исходной задачи. Нам надо найти такую точку P на стороне AD четырехугольника $ABCD$, чтобы отрезок PP''', где P''' — соответствующая P точка на стороне $A''D''$

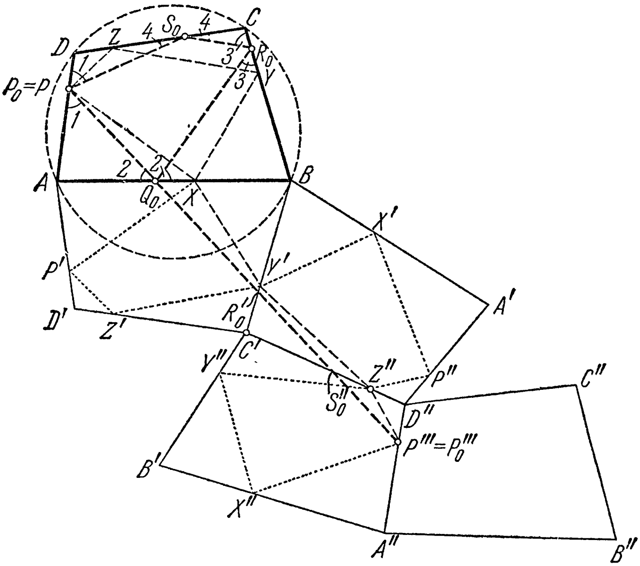


Рис. 189.

четырехугольника $A''B'C'D''$, был кратчайшим (ср. с решением задачи 70 б)). Как можно усмотреть из решения задачи 70 б) (см. также рис. 190, *а*, *б*), если отрезки AD и $A''D''$ не являются параллельными и одинаково направленными, то такой точкой будет основание перпендикуляра, опущенного на прямую AD из центра вращения, переводящего отрезок AD в отрезок $A''D''$ [1]) (если это основание принадлежит отрезку AD) или ближайший к основанию этого перпендикуляра конец отрезка AD (если основание рассматриваемого перпендикуляра лежит вне AD) [2]). Если же отрезки AD

---

[1]) В задаче 70 б) такой точкой являлась вершина C треугольника ABC.

[2]) Если равные отрезки AD и $A''D''$ не являются параллельными и одинаково направленными, то существует единственное вращение, переводящее A в A'' и D в D''; центр O этого вращения (он называется ц е н т р о м в р а щ е н и я отрезков AD и $A''D''$) совпадает с точкой пересечения перпендикуляров, восставленных к отрезкам AA'' и DD'' в их серединах (рис. 190, *а*) или с точкой пересечения AD и $A''D''$, если указанные перпендикуляры совпадают (рис. 190, *б*; ср. с § 2 гл. I первой части книги: И. М. Я г л о м, Геометрические преобразования, I, Гостехиздат, 1955).

и $A''D''$ параллельны и одинаково направлены (рис. 190, *в*), то величина расстояния от любой точки P отрезка AD до соответствующей ей точки P''' отрезка $A''D''$ не зависит, очевидно, от выбора точки P.

Задача будет иметь единственное решение в собственном смысле слова (т. е. этим решением будет служить невырожденный четырехугольник) только в первом случае, если при этом основание P_0 перпендикуляра, опущенного из центра O вращения отрезков AD и

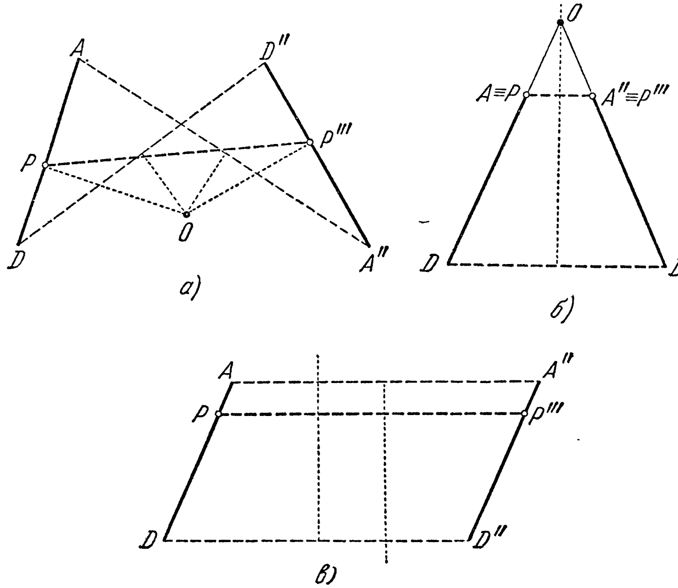


Рис. 190.

$A''D''$ на прямую AD, принадлежит отрезку AD (стороне четырехугольника) и прямая P_0P_0''', где P_0 есть основание перпендикуляра, опущенного из O на AD, пересекает отрезки AB, BC' и $C'D''$. В последнем случае точки пересечения отрезка P_0P_0''' с отрезками AB, BC', $C'D''$ определяют искомый четырехугольник $P_0Q_0R_0S_0$ (рис. 189). Пусть теперь $P_0Q_0R_0S_0$ — (невырожденный) четырехугольник наименьшего возможного периметра, вписанный в четырехугольник $ABCD$. При этом, как нетрудно видеть, $\angle P_0'''P_0A = \angle P_0P_0'''D''$ (рис 191), откуда следует, что стороны P_0Q_0 и P_0S_0 искомого четырехугольника образуют одинаковые углы со стороной AD четырехугольника $ABCD$. Далее из равенства вертикальных углов, образованных прямой P_0P_0''' с прямыми AB, BC' и $C'D''$ следует, что стороны P_0Q_0 и Q_0R_0 четырехугольника $P_0Q_0R_0S_0$ образуют равные углы со стороной AB четырехугольника $ABCD$, стороны Q_0R_0 и R_0S_0 образуют равные углы со стороной BC, и стороны R_0S_0 и S_0P_0 образуют равные углы со стороной CD[1]). Далее имеем в обозначениях рис. 189

$$\angle A+\angle C=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)+180^\circ-(\angle 3+\angle 4)=$$
$$=360^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4);$$
$$\angle B+\angle D=180^\circ-(\angle 2+\angle 3)+180^\circ-(\angle 4+\angle 1)=$$
$$=360^\circ-(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4),$$

и, значит,

$$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D \quad (=180^\circ).$$

Таким образом, поставленная задача имеет решения в собственном смысле слова только в том случае, если *четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.*

Пусть теперь четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность (т. е. $\angle B+\angle D=180^\circ$); $D''A''B''C''$ — четырехугольник, симметричный $D''A''B'C'$ относительно прямой $D''A''$. Четырехугольник $BC'D''A'$ получается из $ABCD$ вращением вокруг точки B на угол $2\angle B$ (ср. с решением задачи 70 а)); аналогично четырехугольник $D''A''B''C''$ получается из $D''A'BC'$ вращением вокруг D'' на угол, равный $2\angle D$. Но $2\angle B+2\angle D=2\cdot 180^\circ=360^\circ$; таким образом, четырехугольник $A''B''C''D''$ получается из $ABCD$ при помощи двух последовательных вращений на углы $2\angle B$ и $2\angle D$, дающие в сумме 360°. Но если отрезок $X'Y'$ получается из отрезка XY вращением вокруг точки O на угол α, то угол между XY и $X'Y'$ равен α (по равенству углов с перпендикулярными сторонами: ведь опущенные из O на XY и $X'Y'$ перпендикуляры образуют угол α — ср. с рис. 190, *а*). Поэтому угол между отвечающими друг другу в четырехугольниках $ABCD$ и $A''B''C''D''$ отрезками равен $2\angle B+2\angle D=360^\circ$, т. е. эти отрезки *параллельны и одинаково направлены.*

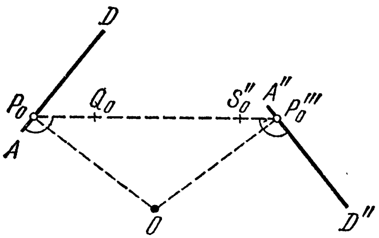


Рис. 191.

Таким образом, если четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то *отрезок $A''D''$ параллелен отрезку AD и одинаково направлен с ним.* Но в таком случае расстояние между произвольной точкой P отрезка AD и соответствующей ей точкой P''' отрезка $A''D''$ не зависит от положения точки P (см. рис. 190, *в*), а значит, наша задача допускает бесчисленное множество решений, отвечающих всем таким положениям точки P, что отре-

---

[1]) Таким образом, доказано, что если $PQRS$ — вписанный в $ABCD$ четырехугольник наименьшего возможного периметра, то *любые две его соседние стороны образуют одинаковые углы с той стороной четырехугольника $ABCD$, которой принадлежит их общая вершина.* Это предложение можно доказать и более просто. Действительно, если, например, $\angle SPD \neq \angle QPA$, то мы можем, не меняя положения вершин Q, R и S четырехугольника $PQRS$, так изменить положение вершины P, что периметр четырехугольника $PQRS$ уменьшится (см. решение задачи 69 а)).

зок PP''' пересекает отрезки AB, BC' и CD''. Легко видеть, что стороны всех вписанных в четырехугольник $ABCD$ четырехугольников, периметр которых имеет наименьшее возможное значение, будут параллельны между собой (рис. 192).

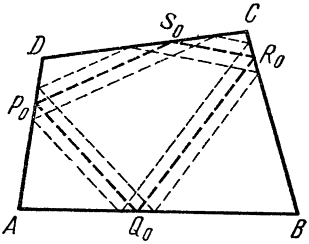


Рис. 192.

73. Если D, E, F — основания высот треугольника ABC, то $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ (рис. 193, *а*); поэтому $\frac{CE}{CD}=\frac{CB}{CA}$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ и $\angle CED = \angle CBA$. Пусть теперь MN — касательная, проведенная в точке C к описанной вокруг треугольника ABC окружности с центром O. Тогда $\angle MCA = \angle CBA$ $\left(=\frac{1}{2}\smile AC\right)$. Таким образом, $\angle MCE = \angle CED$, т. е. $ED \parallel MN \perp OC$. Точно так же показывается, что $EF \perp OA$, т. е. что треугольник DEF искомый. (То, что никакой другой треугольник не может обладать тем же свойством, т. е. иметь те же направления сторон, что и треугольник DEF, видно из рис. 193, *б*, *в*.)

Если треугольник ABC остроугольный, то центр O описанной окружности лежит внутри него (рис. 193, *а*); поэтому

$$S_{\triangle ABC} = S_{ODCE} + S_{OEAF} + S_{OFBD}.$$

Но диагонали последних трех четырехугольников взаимно перпендикулярны; следовательно, их площади равны половине произведения диагоналей — это верно независимо от того, является ли рассматриваемый четырехугольник выпуклым, как $OEAF$ на рис. 193, *а* или невыпуклым, как $OFBD$ на том же рисунке. Таким образом,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} OC\cdot DE + \frac{1}{2} OA\cdot EF + \frac{1}{2} OB\cdot FD = \\ = \frac{1}{2} R\,(DE+EF+FD), \qquad (*)$$

где R — радиус описанной окружности.

Если теперь $F'D'E'$ — какой угодно треугольник, вписанный в треугольник ABC, то

$$S_{\triangle ABC} = S_{OD'CE'} + S_{OE'AF'} + S_{OF'BD'} = \\ = \frac{1}{2} OC\cdot D'E' \sin\gamma + \frac{1}{2} OA\cdot E'F' \sin\alpha + \frac{1}{2} OB\cdot F'D' \sin\beta,$$

где γ, α и β — углы между диагоналями четырехугольников $OD'CE'$, $OE'AF'$ и $OF'BD'$; поэтому

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} R\,(\sin\gamma\cdot D'E' + \sin\alpha\cdot E'F' + \sin\beta\cdot F'D') \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} R\,(D'E' + E'F' + F'D'),$$

где знак равенства имеет место лишь если $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$, т. е. если треугольник $D'E'F'$ совпадает с треугольником DEF. Сравнивая последнее соотношение с равенством (*), найдем, что

$$DE+EF+FD < D'E'+E'F'+F'D',$$

где считается, что треугольник $D'E'F'$ отличен от DEF.

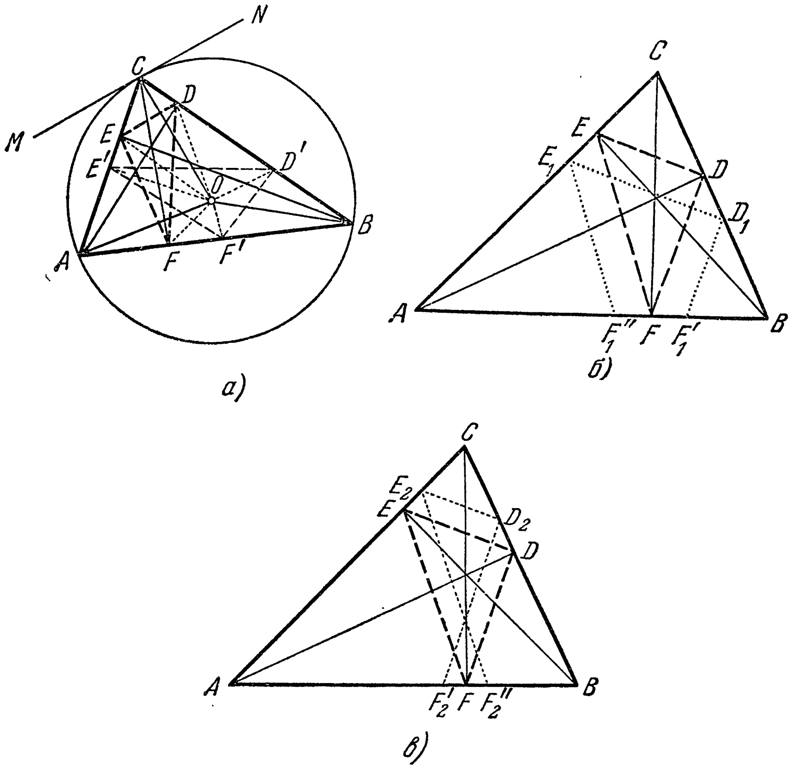


Рис. 193.

Таким образом, мы снова доказали, что *из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет тот, вершинами которого служат основания высот заданного треугольника.*

74. Прежде всего найдем точку, расстояния которой до вершин A, B и C треугольника относятся как числа m, n и p (здесь мы считаем, что вершина X искомого треугольника принадлежит стороне AC, вершина Y — стороне AB и вершина Z — стороне BC). Построение такой точки легко осуществить, если воспользоваться тем, что *множество точек, отношение расстояний которых до двух*

данных точек известно, представляет собой окружность[1]). Можно показать, что таких точек, вообще говоря, имеется две, причем одна из них находится вне, а другая — внутри окружности, описанной вокруг заданного треугольника. Следовательно, одна из этих двух точек обязательно находится вне треугольника ABC. Затем следует рассмотреть два случая.

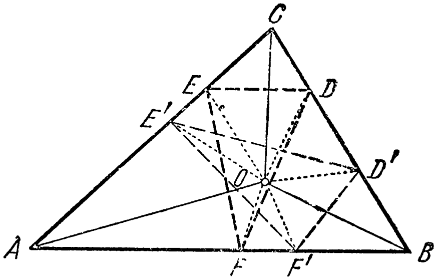


Рис. 194.

1° *Одна из построенных точек* (обозначим ее через O) *находится* *в н у т р и* *треугольника* ABC (рис. 194). Мы имеем по построению

$$AO:BO:CO = m:n:p,$$

и значит,

$$AO = \lambda m,\ BO = \lambda n,\ CO = \lambda p,$$

где λ — какое-то число (множитель пропорциональности). Впишем в ABC треугольник DEF, стороны которого перпендикулярны к отрезкам OA, OB и OC; это легко сделать, построив сначала треугольник $D_1E_1F_1$, стороны которого перпендикулярны OA, OB и OC, причем две вершины D_1 и E_1 принадлежат BC и AC, а затем найдя точку F пересечения CF_1 и AB и проведя $FD \parallel F_1D_1$, и т. д. (рис. 195). Так как

$$S_{\triangle ABC} = S_{OEAF} + S_{OFBD} + S_{ODCE},$$

---

[1]) См., например, § 49 или § 75 книги: Д. И. П е р е п е л к и н, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948. [Вот одно из самых простых доказательств этого утверждения. Пусть координаты точек A и B в какой-то (декартовой, прямоугольной) системе координат $(0, 0)$ и $(a, 0)$; тогда квадраты расстояний от этих точек до точки $M(x, y)$ равны соответственно

$$x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad (x-a)^2 + y^2 = x^2 - 2ax + y^2 + a^2.$$

Если $MA:MB = \frac{1}{k}$, или $k^2 \cdot MA^2 = MB^2$, то при $k \neq 1$ имеем

$$k^2x^2 + k^2y^2 = x^2 - 2ax + y^2 + a^2,$$

или

$$x^2 + y^2 + \frac{2a}{k^2-1}x = \frac{a^2}{k^2-1},$$

т. е.

$$\left(x + \frac{a}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{k^2-1} + \frac{a^2}{(k^2-1)^2} = \frac{k^2a^2}{(k^2-1)^2}.$$

Но это есть уравнение о к р у ж н о с т и с центром в точке $Q\left(\frac{-a}{k^2-1}, 0\right)$ и радиусом $\frac{ka}{k^2-1}$.]

то, поскольку $OA \perp EF$, $OB \perp ED$, $OC \perp DE$ и $OA = \lambda m$, $OB = \lambda n$, $OC = \lambda p$, имеем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot EF + \frac{1}{2} OB \cdot FD + \frac{1}{2} OC \cdot DE =$$
$$= \frac{1}{2} \lambda (m \cdot EF + n \cdot FD + p \cdot DE). \qquad (*)$$

Пусть теперь $D'E'F'$ — произвольный треугольник, вписанный в ABC; α, β, γ — углы между диагоналями четырехугольников $OE'AF'$, $OF'BD'$, $OD'CE'$. В таком случае (ср. с решением задачи 73)

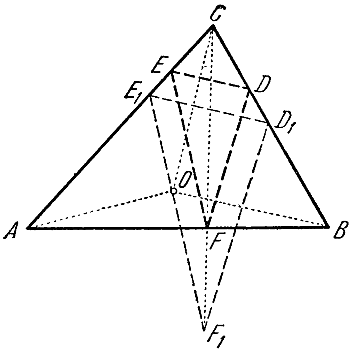


Рис. 195.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot E'F' \sin\alpha + \frac{1}{2} OB \cdot F'D' \sin\beta + \frac{1}{2} OC \cdot D'E' \sin\gamma = \frac{1}{2} \lambda (m \cdot E'F' \sin\alpha + n \cdot F'D' \sin\beta + p \cdot D'E' \sin\gamma)$$

и, значит,

$$m \cdot EF + n \cdot FD + p \cdot DE = m \cdot E'F' \sin\alpha + n \cdot F'D' \sin\beta + p \cdot D'E' \sin\gamma \leqslant m \cdot E'F' + n \cdot F'D' + p \cdot D'E',$$

где знак равенства относится только к тому случаю, когда точки D', E' и F' совпадают соответственно с D, E и F. Таким образом, DEF и есть *искомый* треугольник XYZ.

2°. Если *точка O* лежит, например, *на стороне AB треугольника ABC*, то искомый треугольник вырождается в дважды взятую высоту треугольника ABC, опущенную на сторону AB; если *точка O находится вне* треугольника ABC, то искомый треугольник вырождается в дважды взятую высоту треугольника ABC, опущенную на ту сторону треугольника, по отношению к которой точка O и треугольник ABC находятся по разные стороны [1]). Доказательство этого мы предоставим читателю.

75. а) Пусть X — произвольная точка внутри треугольника ABC (рис. 196). Повернем треугольник ACX вокруг точки A на 60° в направлении от AB к AC; пусть после этого он займет положение $AC'X'$. Так как $AX = XX'$ (треугольник AXX' равносторонний!) и $CX = C'X'$, то сумма $AX + BX + CX$ расстояний от точки X до вершин треугольника ABC равна длине ломаной $BXX'C'$. Остается выбрать точку X так, чтобы длина ломаной $BXX'C'$ была наименьшей; это положение точки X назовем M.

---

[1]) Можно показать, что если точка O находится вне треугольника ABC, то она лежит по другую сторону, чем треугольник ABC, лишь от одной стороны треугольника.

Рассмотрим отдельно два случая.

1°. *Отрезок $C'B$ пересекает сторону AC треугольника ABC*; этот случай имеет место, когда $\angle BCC' < 180°$ и $\angle BAC' < 180°$, или, так как $\angle BCC' = \angle BCA + \angle ACC' = \angle BCA + 60°$ и $\angle BAC' = \angle BAC + \angle CAC' = \angle BAC + 60°$, когда углы C и A треугольника ABC меньше 120°. В этом случае, если на отрезке $C'B$ можно найти такую точку M, что $\angle AMC' = 60°$, то для этой

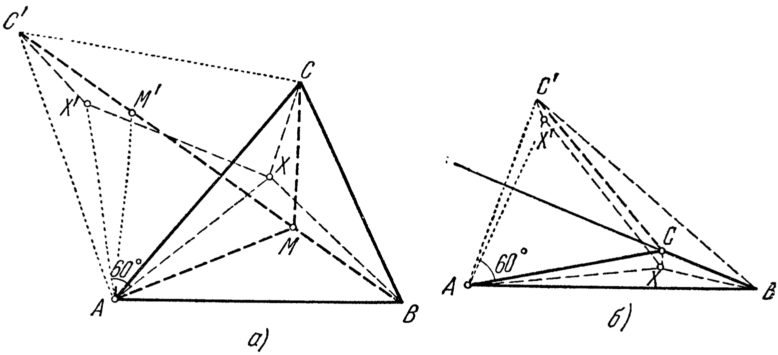


Рис. 196.

точки M (рис. 196, *а*) $MA = AM' = MM'$, $MC = M'C'$, и следовательно,

$$AM + MC + MB = BM + MM' + M'C' = BC',$$

поэтому точка M и будет *искомой*. При этом, очевидно, $\angle AMB = \angle CMB = \angle AMC = 120°$, т. е. M — точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под равными углами; для того чтобы на отрезке $C'B$ была такая точка M, нужно, чтобы $\angle CBA$ был меньше 120°. Если же $\angle CBA \geqslant 120°$, то искомой точкой будет вершина B треугольника ABC.

2°. *Отрезок $C'B$ не пересекает сторону AC треугольника ABC*; например, точка C' расположена по другую сторону от прямой BC, чем треугольник ABC, т. е. $\angle C \geqslant 120°$ (рис. 196, *б*). В этом случае кратчайшей ломаной $C'X'XB$ будет ломаная $C'CB$, и искомой точкой будет вершина C треугольника ABC. Точно так же, если $\angle A \geqslant 120°$, то искомой точкой будет вершина A.

б) Если X — какая угодно точка в н е треугольника ABC, то нетрудно указать такую точку X_1 на границе треугольника, что

$$X_1A + X_1B + X_1C < XA + XB + XC,$$

— если точка X принадлежит углу, вертикальному с одним из углов треугольника, например с углом C, то роль точки X_1 будет играть вершина C этого угла (рис. 197, *а*; в самом деле, $AC + BC < XA + XB$, ибо ломаная AXB объемлет выпуклую ломаную ACB, и $CC = 0 < XC$); если же X принадлежит, скажем, углу C треугольника, но находится по другую сторону от стороны AB, чем точка C, то роль точки X_1 будет играть точка пересечения прямой CX со стороной AB (рис. 197, *б*; в самом деле, в этом случае $X_1A + X_1B = AB <$

$< XA+XB$ и $X_1C < XC$). Поэтому при отыскании в плоскости треугольника ABC точки, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей, мы можем ограничиться рассмотрением лишь внутренних (и граничных) точек треугольника, чем настоящая задача сводится к задаче а).

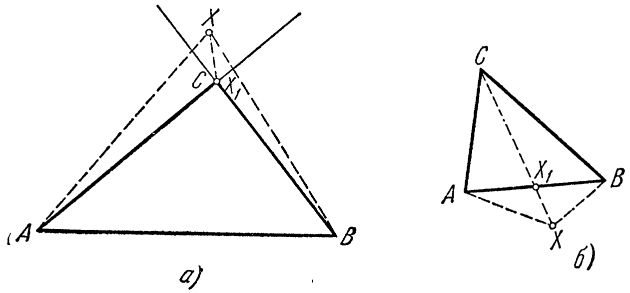


Рис. 197.

Примечание. Задача 75 тесно связана с проблемой определения *кратчайшей сети линий, соединяющей данную систему точек плоскости* (например, кратчайшей сети дорог, соединяющей данные населенные пункты; по поводу этой задачи см., например, §§ 5 и 11 гл. VII книги Р. Куранта и Г. Роббинса [2], а также статью В. М. Прокофьева [44]). Пусть, например, мы имеем три точки A, B и C, которые надо соединить сетью линий. Прежде всего, ясно, что рассматриваемая сеть будет состоять из отрезков прямых, соединяющих между собой заданные точки, а также (возможно) какие-то «узлы» сети, в которых сходятся три и больше линий (прямолинейных отрезков): ведь любой «путь», соединяющий точки U и V (принадлежащие к числу заданных точек или «узлов» сети линий, соединяющей эти точки), можно заменить (более коротким) отрезком UV. Далее понятно, что если стороны $BC=a$, $CA=b$ и $AB=c$ треугольника ABC таковы, что $a \leqslant b \leqslant c$, то кратчайшая сеть линий, не имеющая «разветвлений» (узлов) и, следовательно, состоящая из сторон треугольника ABC, совпадает с ломаной ACB; длина этой ломаной (рис. 198, *а*) равна $a+b$. Если же наша сеть линий содержит единственный (отличный от A, B и C) «узел», то за этот узел M, разумеется, выгоднее всего принять ту точку, нахождению которой посвящена задача 75; в этом случае сеть линий будет образована тремя отрезками AM, BM и CM (рис. 198, *б*). При этом, если $\angle C \geqslant 120°$, т. е. если

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \geqslant a^2+b^2-2ab\cos 120° =$$
$$= a^2+b^2-2ab\left(-\frac{1}{2}\right) = a^2+b^2+ab,$$

то в соответствии с решением задачи 75 точка M совпадает с C; поэтому здесь изображенная на рис. 198, *б* сеть обращается в сеть рис. 198, *а*, длина d которой равна $a+b$ (на рис. 198, *а* изображен именно тот случай, когда $\angle C > 120°$). Если же $\angle C < 120°$, т. е.

если

$$c^2 < a^2+b^2+ab,$$

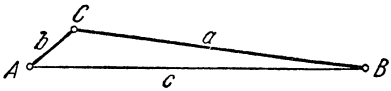
то точка M отлична от C; при этом сумма d длин трех отрезков MA, MB и MC будет равна длине отрезка BC' рис. 196, a, т. е. квадрат величины d равен (мы здесь применяем теорему косинусов к треугольнику ABC' и используем формулы

$$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$$

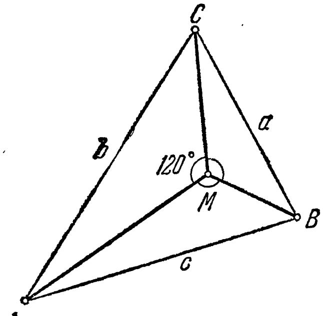
и $$\frac{1}{2}bc\sin A=S,$$

где

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad —$$



а)



б)

Рис. 198.

площадь треугольника ABC и p — его полупериметр)

$$\begin{aligned}
d^2&=c^2+b^2-2bc\cos(60^\circ+A)=\\
&=c^2+b^2-2bc(\cos 60^\circ\cos A-\sin 60^\circ\sin A)=\\
&=c^2+b^2-2bc\left(\frac{1}{2}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)=\\
&=c^2+b^2-bc\cos A+\sqrt{3}\,bc\sin A=\\
&=\frac{1}{2}(b^2+c^2)+\frac{1}{2}(b^2+c^2-2bc\cos A)+2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)=\\
&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,S).
\end{aligned}$$

Ясно, что если $\angle C<120^\circ$, т. е. если $c^2<a^2+b^2+ab$ и $S<\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$, то

$$d^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,S)<$$

$$<\frac{1}{2}\left[a^2+b^2+(a^2+b^2+ab)+4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right]=$$

$$=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

и

$$d<a+b,$$

т. е. в этом случае длина d изображенной на рис. 198, б сети короче длины $a+b$ ломаной ACB; поэтому *при* $\angle C<120^\circ$ *кратчайшей будет изображенная на рис.* 198, *б сеть линий длины*

$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3}\,ab\sin C)}$, *а при* $\angle C \geqslant 120°$ — *изображенная на рис.* 198, *а сеть линий длины* $a+b$ (можно доказать, что дальнейшее увеличение числа узлов уже не может уменьшить длину соединяющей точки A, B и C сети линий).

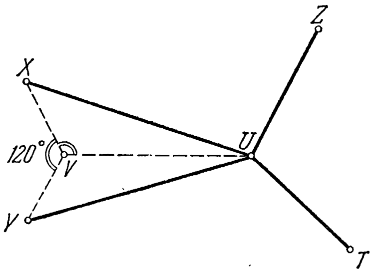


Рис. 199.

Заметим, что в узле U кратчайшей сети линий, соединяющих какие-то заданные на плоскости n ($\geqslant 3$) точек A_1, A_2, ..., A_n, не могут сходиться более трех отрезков, ибо если бы в точке U сходились отрезки XU, YU, ZU и TU (рис. 199), то один из образованных этими отрезками углов, скажем угол XUY, был бы меньше 120°, и в силу только что сказанного мы могли бы заменить отрезки XU и YU нашей сети изображенными на рис. 199 отрезками XV, YV и UV, причем общая длина всей сети линий только сократилась бы. Это рассуждение не только показывает, что в каждом (отличном от точек A_1, A_2, ..., A_n) *узле* U *сети линий обязательно должны сходиться три отрезка*, но и то, что *эти отрезки должны попарно образовывать углы в* 120° — ведь иначе один из образованных этими отрезками углов был бы меньше 120°, и сходящиеся в U отрезки, образующие меньший 120° угол, можно было бы заменить тремя другими отрезками, сократив таким образом общую длину сети линий.

Эти рассуждения могут быть использованы при решении (вообще говоря, довольно трудных) задач о кратчайших сетях линий, соединяющих те или иные конкретные системы точек, например при

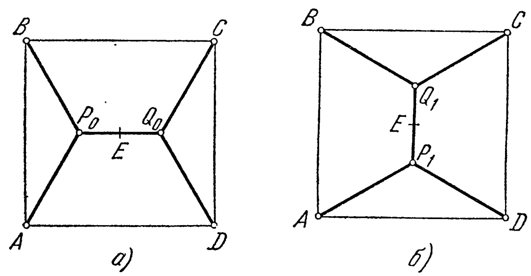


Рис. 200.

решении популярной задачи о кратчайшей системе линий, соединяющих вершины A, B, C, D квадрата (см., например, Г. Штейнгауз, [45], задача 75). В этом последнем случае решение задачи доставляется двумя (имеющими одну и ту же длину и даже равными в обычном смысле этого слова) сетями линий, изображенными на рис. 200, *а* и *б*; если сторона квадрата равна a, то длина изображенных на этих рисунках сетей линий равна $(1+\sqrt{3})\,a \approx 2{,}732a$. (Как видно из рис. 220, *а*, *б*, решение задачи о кратчайшей сети линий, соединяющей заданную систему точек, может быть и н е е д и н с т в е н н ы м.)

76. Нам будет удобно начать с решения задачи б).

б) Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, X — какая угодно другая точка плоскости (рис. 201, *а*, *б*). Ясно, что

$$XA+XC \geqslant AC = MA+MC \quad \text{и} \quad XB+XD \geqslant BD = MB+MD,$$

так что

$$XA+XB+XC+XD \geqslant MA+MB+MC+MD,$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда точка X совпадает с M. Таким образом, искомой точкой является *точка M пересечения диагоналей* четырехугольника.

а) Если четырехугольник $ABCD$ выпуклый (рис. 201, *а*), то точка M пересечения диагоналей четырехугольника ему принадлежит

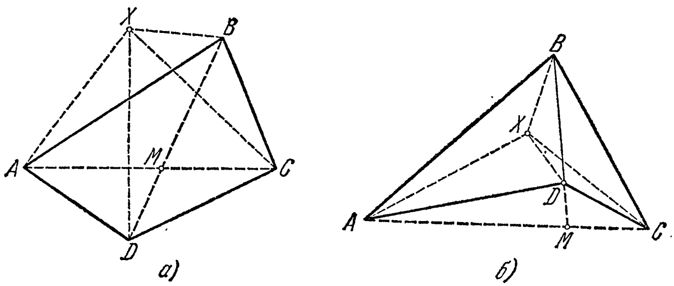


Рис. 201.

и, как показывает решение задачи б), является искомой. Если же четырехугольник $ABCD$ невыпуклый и $\angle D > 180^\circ$ (рис. 201, *б*), то искомой точкой является вершина D этого «сверхтупого» угла: в самом деле, если X — любая точка внутри четырехугольника, то, очевидно, $XB+XD \geqslant BD = DB+DD$ и $XA+XC > DA+DC$, так как ломаная AXC объемлет (выпуклую) ломаную ADC; поэтому

$$XA+XB+XC+XD > DA+DB+DC$$

(слагаемое $DD=0$ можно и не писать).

77. а) Если DEF — правильный треугольник, описанный вокруг треугольника ABC, и AM, BM, CM — перпендикуляры к сторонам треугольника DEF, то, очевидно, $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$ (рис. 202). Отсюда следует, что M — точка пересечения дуг окружностей, построенных на сторонах треугольника ABC и вмещающих углы в 120°. Найдя точку M, мы без труда построим треугольник DEF. Точка M лежит внутри треугольника ABC, если ни один из его углов не превышает 120°; если же, например, $\angle C = 120^\circ$, то точка M совпадает с вершиной C, а если $\angle C > 120^\circ$, то точка M лежит вне ABC. Выведем теперь отсюда решение задачи 75.

Рассмотрим сначала первый случай (рис. 202). Пусть M' — какая угодно внутренняя точка треугольника ABC, $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$ — перпендикуляры, опущенные из нее на стороны треугольника DEF. Имеем

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle FDM'} + S_{\triangle DEM'} + S_{\triangle EFM'},$$

или, если a и h — сторона и высота правильного треугольника DEF,

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot M'A' + \frac{1}{2}a \cdot M'B' + \frac{1}{2}a \cdot M'C',$$

т. е.

$$M'A' + M'B' + M'C' = h.$$

Но $M'A \geqslant M'A'$, $M'B \geqslant M'B'$ и $M'C \geqslant M'C'$; поэтому

$$M'A + M'B + M'C \geqslant h,$$

причем равенство достигается только в том случае, когда точка M' совпадает с M. Таким образом, точка M — искомая.

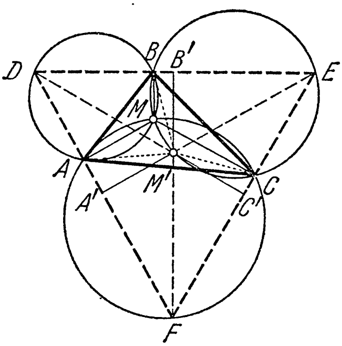


Рис. 202.

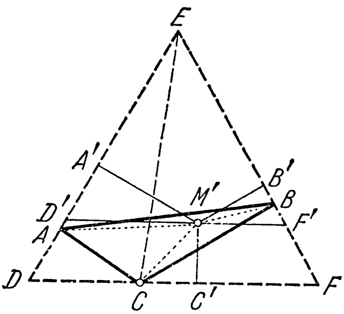


Рис. 203.

Если точка M совпадает с C, то точка C — искомая. Наконец, если $\angle C > 120°$, то опять сумма расстояний от точки C до вершин треугольника будет меньше, чем сумма расстояний до вершин треугольника от любой другой точки. Для доказательства опишем вокруг ABC равнобедренный треугольник DEF так, чтобы было $CA \perp DE$, $CB \perp EF$ (рис. 203; проходящая через C прямая DF должна быть перпендикулярна биссектрисе угла AEB). Пусть M' — произвольная внутренняя точка треугольника ABC, A', B', C' — основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны треугольника DEF, $D'EF'$ — треугольник, подобный DEF, основание $D'F'$ которого проходит через точку M'. В таком случае имеем

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle CDE} + S_{\triangle CEF},$$

откуда

$$CA + CB = h,$$

где h — высота треугольника DEF, опущенная на боковую сторону. Аналогично получаем

$$M'A' + M'B' = h',$$

где $h' = \lambda h$ — высота треугольника $D'EF'$ (здесь $\lambda < 1$ — коэффициент подобия треугольников $D'EF'$ и DEF).

Обозначим высоты треугольников DEF и $D'EF'$, опущенные на основания DF и $D'F'$, через H и $H' = \lambda H$. Так как $\angle E = 180° - \angle C$, то $\angle E < 60°$, и значит, $DF < DE = EF$, т. е. $H > h$. Теперь имеем

$$(M'A' + M'B') + M'C' = h' + (H - H') = H - (H' - h') =$$
$$= H - \lambda(H - h) > H - (H - h) = h = CA + CB.$$

А так как, очевидно,

$$M'A' + M'B' + M'C' \leqslant M'A + M'B + M'C,$$

то

$$M'A + M'B + M'C > CA + CB \ (= CA + CB + CC),$$

что и требовалось доказать.

б) Если AM, BM и CM — перпендикуляры к сторонам равностороннего треугольника DEF, вписанного в треугольник ABC, то, очевидно, $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$ (рис. 204). Поэтому для решения задачи надо найти точку M, из которой все стороны треугольника ABC видны под углом 120°, и затем вписать в треугольник ABC треугольник DEF, стороны которого перпендикулярны к AM, BM и CM (ср. с решением задачи 74). При этом вершины DEF будут лежать на сторонах треугольника ABC (а не на их продолжениях!) в том и только в том случае, когда все углы треугольника ABC меньше 120°.

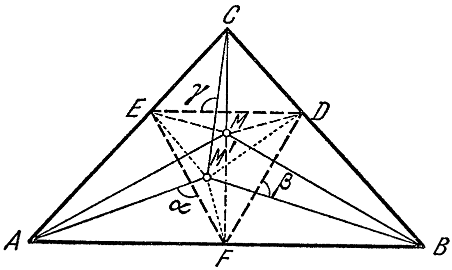


Рис. 204.

Предположим, что имеет место именно этот случай. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = S_{MEAF} + S_{MFBD} + S_{MDCE} =$$
$$= \frac{1}{2} EF \cdot MA + \frac{1}{2} FD \cdot MB + \frac{1}{2} DE \cdot MC =$$
$$= \frac{1}{2} a (MA + MB + MC),$$

где a — сторона правильного треугольника DEF. Пусть теперь M' — произвольная точка внутри треугольника ABC, α, β и γ — углы, которые прямые $M'A$, $M'B$ и $M'C$ образуют с соответствующими сторонами треугольника DEF. В таком случае

$$S_{\triangle ABC} = S_{M'EAF} + S_{M'FBD} + S_{M'DCE} =$$
$$= \frac{1}{2} EF \cdot M'A \sin\alpha + \frac{1}{2} FD \cdot M'B \sin\beta + \frac{1}{2} DE \cdot M'C \sin\gamma =$$
$$= \frac{1}{2} a (M'A \sin\alpha + M'B \sin\beta + M'C \sin\gamma) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} a (M'A + M'B + M'C).$$

Отсюда следует, что

$$MA+MB+MC \leqslant M'A+M'B+M'C$$

(где равенство имеет место, лишь если точка M' совпадает с M), что и требовалось доказать (ср. с решением задачи 73).

78. а) Первое решение. Повернем треугольник ACM вокруг точки A на $60°$ в положение ABM' (рис. 205, *а*). Тогда $MM' = AM' = AM$, $CM = BM'$. Но $BM \leqslant BM' + MM'$, и следовательно,

$$BM \leqslant AM + CM.$$

При этом $BM = BM' + M'M$, лишь если M' принадлежит отрезку BM. Так как $\angle AMM' = 60°$, то в этом случае $\angle AMB = 60°$; это

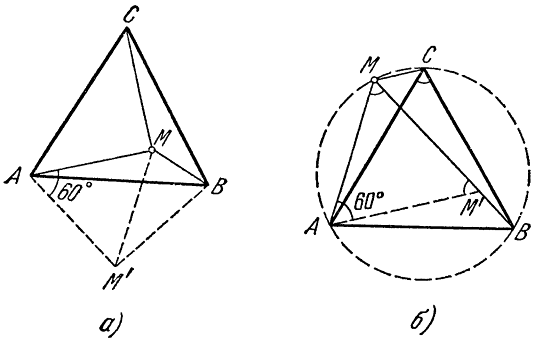


Рис. 205.

означает, что точка M принадлежит дуге AC описанной около треугольника ABC окружности (рис. 205, *б*).

Второе решение. Проведем через точку M прямые MP, MQ и MR параллельно сторонам AC, AB и BC треугольника ABC (рис. 206, *а*). Четырехугольники $MQAR$, $MPBR$ и $MPCQ$, как нетрудно видеть, будут равнобедренными трапециями; следовательно, $MA = QR$, $MB = PR$, $MC = PQ$. Таким образом, расстояния MA, MB и MC равны сторонам треугольника PQR, откуда следует, что $MA + MC \geqslant MB$.

Равенство $MA + MC = MB$ имеет место только в том случае, когда $PQ + QR = PR$, т. е. когда точка Q принадлежит отрезку PR (рис. 206, *б*). В этом случае $\angle RMA = \angle RQA$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу описанной вокруг трапеции $AMQR$ окружности. По аналогичной причине $\angle PMC = \angle PQR$; кроме того, $\angle RQA = \angle PQC$, как вертикальные углы. Поэтому $\angle RMA = \angle CMP$, и значит, $\angle AMC = \angle RMP = 120°$; следовательно, точка M принадлежит дуге AC описанной около треугольника ABC окружности.

Третье решение. Опустим из точки M перпендикуляры MA_1, MB_1 и MC_1 на стороны треугольника ABC (рис. 207, *а*). Вокруг четырехугольника AC_1MB_1 можно описать окружность с диаметром AM; так как $\angle B_1AC_1 = 60°$, то B_1C_1 — сторона равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность. Поэтому

$B_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} MA$; аналогично $A_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} MC$ и $A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$. Но из треугольника $A_1B_1C_1$ имеем

$$A_1C_1 \leqslant A_1B_1 + B_1C_1,$$

откуда

$$MB \leqslant MA + MC.$$

При этом $MB = MA + MC$, если точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой, причем точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1

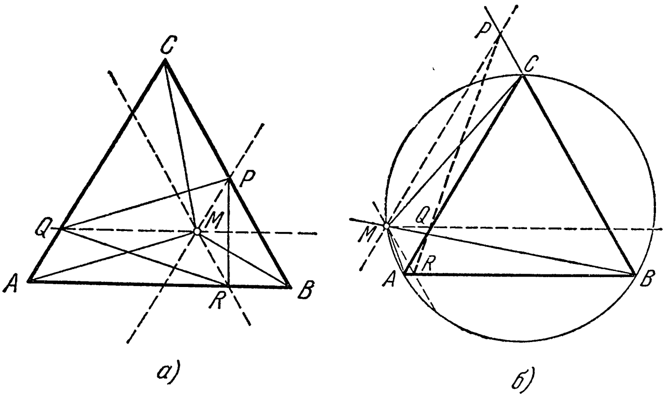


Рис. 206.

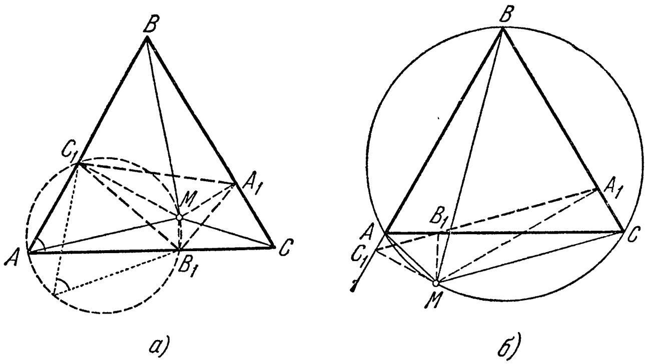


Рис. 207.

(рис. 207, *б*). Мы утверждаем, что в этом случае M принадлежит дуге AC окружности, описанной около треугольника ABC. В самом деле, $\angle C_1MA = \angle C_1B_1A$, $\angle A_1MC = \angle A_1B_1C$. Но так как в рассматриваемом случае $\angle C_1B_1A = \angle A_1B_1C$, то $\angle C_1MA = \angle A_1MC$ и $\angle AMC = \angle C_1MA_1 = 120°$, что и доказывает наше утверждение.

Примечание. Заметим, что для того, чтобы основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки на стороны произвольного треугольника, лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы заданная точка принадлежала окружности, описанной около этого треугольника (см., например, решение задачи 100 из книги Д. О. Шклярского и др. [17]).

Четвертое решение. Применяя к четырехугольнику $MABC$ теорему Птолемея (см., например, задачу 136 из книги [17]), получим

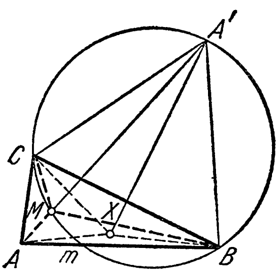


Рис. 208.

$$MB \cdot AC \leqslant MA \cdot CB + MC \cdot AB,$$

где знак равенства имеет место лишь в том случае, когда вокруг четырехугольника $MABC$ можно описать окружность, т. е. когда точка M принадлежит дуге AC описанной вокруг ABC окружности. Но $AC = CB = AB$ и, следовательно,

$$MB \leqslant MA + MC,$$

что и требовалось доказать.

б) Построим на стороне BC заданного треугольника ABC вне его правильный треугольник BCA' (рис. 208). Пусть X — произвольная точка плоскости; тогда

$$AA' \leqslant XA + XA',$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда точка X принадлежит отрезку AA'. Далее, в силу результата задачи а)

$$XA' \leqslant XB + XC,$$

где равенство имеет место лишь тогда, когда точка X принадлежит дуге CB окружности, описанной вокруг треугольника BCA'.

Из полученных соотношений следует

$$AA' \leqslant XA + XB + XC.$$

Если M есть точка пересечения AA' с описанной окружностью треугольника $A'BC$, то

$$AA' = MA + MB + MC;$$

поэтому

$$MA + MB + MC \leqslant XA + XB + XC$$

(где равенство имеет место лишь если точка X совпадает с M), и, следовательно, точка M удовлетворяет условию задачи 75.

При помощи простого подсчета нетрудно убедиться, что если один из углов треугольника ABC равен 120°, то отрезок AA' и дуга CB пересекутся в вершине этого угла, а если один из углов заданного треугольника больше чем 120°, то они вовсе не пересекутся. В этом последнем случае, как можно доказать, минимальным свойством также будет обладать вершина тупого угла.

79. Рассмотрим прежде всего тот случай, когда числа m, n и p таковы, что *сумма двух меньших из них не больше третьего*; пусть, например, $m \geqslant n + p$. В этом случае для любой точки X

плоскости имеем

$$m\cdot XA+n\cdot XB+p\cdot XC\geqslant(n+p)\cdot XA+n\cdot XB+p\cdot XC=$$
$$=n(XA+XB)+p(XA+XC)\geqslant$$
$$\geqslant n\cdot AB+p\cdot AC\ (=m\cdot AA+n\cdot AB+p\cdot AC),$$

ибо $XA+XB\geqslant AB$, $XA+XC\geqslant AC$; поэтому сумма $m\cdot XA+n\cdot XB+$ $+p\cdot XC$ принимает наименьшее значение, когда точка X совпадает с точкой A.

Таким образом, остается рассмотреть только тот случай, когда наибольший из отрезков m, n, p не превосходит суммы двух других, т. е. когда *существует* (может быть, вырожденный) *треугольник,*

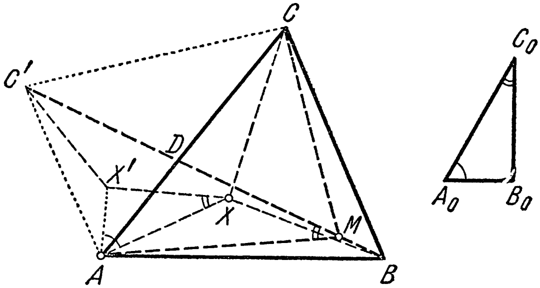


Рис. 209.

стороны которого равны m, n и p. При рассмотрении этого случая можно идти четырьмя путями, аналогичными решениям задач 75, 77 а), 77 б) и 78.

Первое решение. Пусть $A_0B_0C_0$ — треугольник со сторонами

$$A_0B_0=p,\qquad A_0C_0=n,\qquad B_0C_0=m.$$

Положим $\frac{m}{n}=\alpha$, $\frac{p}{n}=\gamma$, и пусть X — произвольная точка плоскости. Гомотетия с центром A и коэффициентом подобия γ, сопровождаемая поворотом вокруг A на угол, равный углу A_0 треугольника $A_0B_0C_0$ (вращение производится в направлении от AB к AC)[1]), переводит треугольник AXC в треугольник $AX'C'$ (рис. 209). Треугольники $AX'X$ и $A_0B_0C_0$ подобны, ибо по условию $\frac{AX'}{AX}=\gamma=$ $=\frac{A_0B_0}{A_0C_0}$, $\angle XAX'=\angle B_0A_0C_0$. Из их подобия следует, что $\frac{XX'}{AX}=$ $=\frac{m}{n}=\alpha$, $XX'=\alpha\cdot AX$; кроме того, по построению $C'X'=\gamma\cdot CX$.

---

[1]) Преобразование, складывающееся из гомотетии с центром в некоторой точке O и коэффициентом k и вращения вокруг O на угол φ (эти преобразования можно производить в любом порядке!) называют *центрально-подобным вращением* (с центром O, коэффициентом k и углом поворота φ).

Следовательно,

$$C'X' + X'X + XB = \gamma \cdot CX + \alpha \cdot AX + BX = \\ = \frac{p \cdot CX + m \cdot AX + n \cdot BX}{n},$$

и, значит, величина $m \cdot AX + n \cdot BX + p \cdot CX$ имеет наименьшее значение тогда, когда ломаная $BXX'C'$ имеет наименьшую длину. Здесь возможны следующие случаи.

1°. *Прямая BC' пересекает сторону AC заданного треугольника в некоторой точке D.* В таком случае кратчайшей из всех ломаных, соединяющих точки B и C' и пересекающей отрезок AC, является отрезок BC'. Пользуясь тем, что угол AXX' равен углу C_0 треугольника $A_0B_0C_0$, легко найти точку M. Для этого построим на отрезке AD дугу, вмещающую угол C_0 и расположенную по ту же сторону от прямой AC, что и точка B. Если эта дуга пересечется с отрезком BC', то точка пересечения и будет искомой точкой M. Если же построенная дуга не пересечется с отрезком BC', то искомая точка M должна совпасть с вершиной B треугольника ABC.

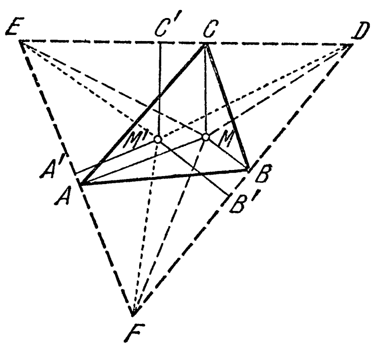


Рис. 210.

2°. Если *прямая BC' не пересечет сторону AC треугольника ABC*, то кратчайшей из ломаных $BXX'C'$, пересекающих сторону AC, будет либо ломаная BCC', либо ломаная BAC'. Ясно, что в первом случае искомая точка M совпадет с вершиной C заданного треугольника, а во втором — с его вершиной A.

Второе решение. Если отношение сторон треугольника DEF таково: $EF:FD:DE = m:n:p$, то сумма расстояний от любой внутренней точки M до сторон треугольника DEF, умноженных соответственно на числа m, n и p, постоянна. Действительно, из рис. 210 имеем

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle MEF} + S_{\triangle MFD} + S_{\triangle MDE},$$

или, если $EF = \lambda m$, $FD = \lambda n$, $DF = \lambda p$ и A, B, C — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны EF, FD, DE треугольника DEF,

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}\lambda m \cdot MA + \frac{1}{2}\lambda n \cdot MB + \frac{1}{2}\lambda p \cdot MC,$$

т. е.

$$m \cdot MA + n \cdot MB + p \cdot MC = \frac{2S_{\triangle DEF}}{\lambda} = \text{const}.$$

Опишем теперь вокруг заданного треугольника ABC треугольник DEF, стороны которого относятся, как $m:n:p$, так, чтобы перпендикуляры к сторонам DEF, восставленные в точках A, B и C, пересекались в одной точке M (построение аналогично построению в задаче 77 а)). Если точка M лежит внутри треугольника ABC, то она удовлетворяет нашему условию минимальности; доказательство этого проводится как в решении задачи 77 а). Если же точка M лежит вне треугольника ABC, то условию задачи удовлетворяет одна из вершин треугольника.

Третье решение. *Впишем* в данный треугольник DEF треугольник ABC, стороны которого относятся, как $m:n:p$, так, чтобы перпендикуляры, опущенные из вершин A, B, C исходного треугольника на стороны треугольника DEF, пересекались в одной точке M (построение аналогично построению задачи 77 б)).

В случае, когда треугольник DEF оказывается вписанным в треугольник ABC в обычном смысле (т. е. все его вершины лежат на сторонах треугольника ABC, но не на их продолжениях), аналогично решению задачи 77 б) показывается, что искомой точкой является точка M. В противном случае ответом задачи служит одна из вершин треугольника ABC.

Четвертое решение. Воспользуемся следующим предложением, обобщающим результат задачи 78 а): *если в треугольнике ABC имеем $BC:CA:AB = m:n:p$, то для любой точки M плоскости*

$$n \cdot MB \leqslant m \cdot MA + p \cdot MC,$$

причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда точка M лежит на соответствующей дуге окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Доказательство этого предложения (которое можно получить несколькими способами аналогично решениям задачи 78 а)), мы предоставляем читателю.

Построим теперь на стороне BC данного треугольника ABC треугольник BCA' такой, что $BC:CA':A'B = m:n:p$, и опишем окружность вокруг этого треугольника. Если X — любая точка плоскости, то из треугольника XAA' следует, что

$$AA' \leqslant XA + XA',$$

где равенство имеет место лишь для точек отрезка AA'. Кроме того,

$$m \cdot XA' \leqslant n \cdot XB + p \cdot XC,$$

где равенство выполняется лишь для точек дуги BC описанной вокруг BCA' окружности.

Умножив первое из полученных соотношений на m и пользуясь вторым, получим

$$m \cdot AA' \leqslant m \cdot XA + n \cdot XB + p \cdot XC,$$

где равенство имеет место лишь для точки M пересечения дуги BC с отрезком AA':

$$m \cdot AA' = m \cdot MA + n \cdot MB + p \cdot MC.$$

Таким образом,

$$m \cdot MA + n \cdot MB + p \cdot MC \leqslant m \cdot XA + n \cdot XB + p \cdot XC,$$

где равенство имеет место лишь при $X \equiv M$, т. е. точка M удовлетворяет условию задачи.

Если дуга BC не пересечется с отрезком AA', то, как можно показать, решением задачи является одна из вершин треугольника ABC.

Примечание. Решение задачи 79 допускает изящную физическую иллюстрацию, иногда упоминаемую в связи с этой задачей. Предположим, что поверхность стола просверлена в трех точках A, B и C; через отверстия стола продеты три шнура, связанные одним узлом X. Если к концам шнуров привязать гири, причем так, что отношение весов трех гирь, отвечающих точкам A, B и C, равно $m:n:p$ (рис. 211), то под влиянием силы тяжести (при условии отсутствия трения) узел X переместится, заняв такое положение M, что сумма $m \cdot XA + n \cdot XB + p \cdot XC$ будет минимальной при $X \equiv M$.

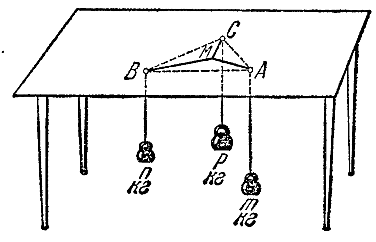


Рис. 211.

80. Заметим прежде всего, что искомая точка M обязательно лежит *внутри угла ACB, но вне треугольника ABC*. В самом деле, если M — внутренняя точка треугольника ABC и M_1 — точка

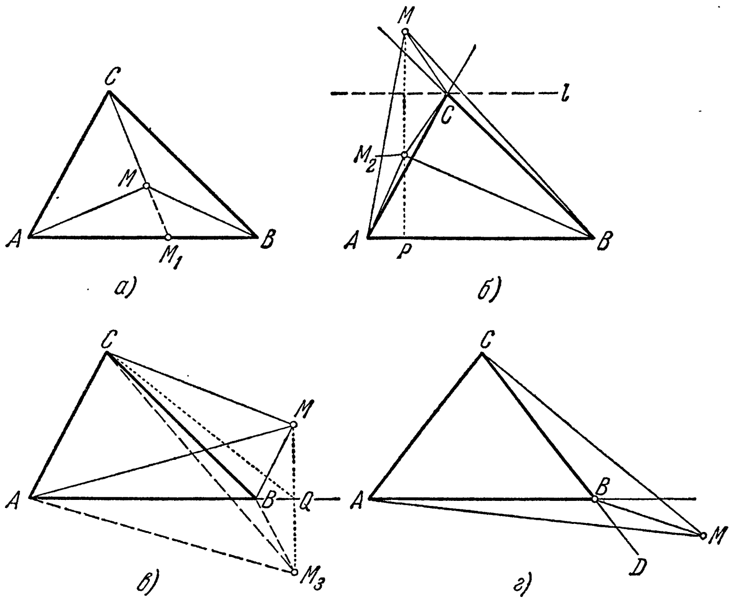


Рис. 212.

пересечения прямой CM со стороной AB треугольника (рис. 212, *а*), то $AM_1 + BM_1 < AM + BM$ и $CM_1 > CM$, так что

$$AM_1 + BM_1 - CM_1 < AM + BM - CM.$$

Если, далее, точка M принадлежит углу, вертикальному к углу ACB, и точка M_2 симметрична M относительно проходящей через C прямой $l \parallel AB$ (рис. 212, б), то $M_2C = MC$ и $M_2A < MA$, $M_2B < MB$ (оба эти неравенства следуют из того, что в обозначениях рис. 212, *б* $M_2P < MP$), и значит,

$$AM_2 + BM_2 - CM_2 < AM + BM - CM.$$

Если точка M принадлежит углу CAB (но не прямой AB!) и не принадлежит треугольнику ABC, и M_3 — точка, симметричная точке M относительно прямой AB (рис. 212, *в*), то $AM_3 = AM$, $BM_3 = BM$ и $CM_3 > CM$ (последнее следует из сравнения изображенных на рис. 212, *в* треугольников MCQ и M_3CQ, у которых сторона CQ общая, $MQ = M_3Q$ и $\angle CQM_3 > \angle CQM$), так что здесь

$$AM_3 + BM_3 - CM_3 < AM + BM - CM;$$

аналогично доказывается, что точка M не может принадлежать углу CBA. Наконец, если точка M принадлежит углу, вертикальному к углу ABC (может быть, прямой AB), то $MC - MB < BC$ и $MA > BA$ (последнее следует из того, что $\angle MBA > \angle DBA > 90°$ [1]); рис. 212, *г*), так что

$$BA + BB - BC = BA - BC < MA - (MC - MB) = MA + MB - MC;$$

аналогично доказывается, что искомая точка M не может принадлежать углу, вертикальному к углу BAC.

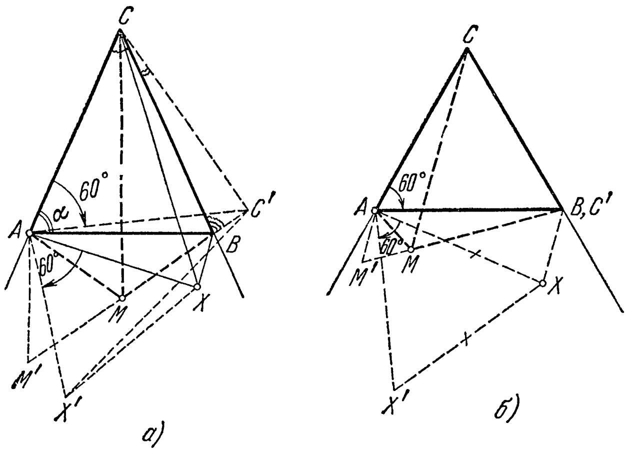


Рис. 213.

Пусть теперь X — произвольная точка угла ACB, не принадлежащая треугольнику ABC. Повернем треугольник ACX вокруг точки A на $60°$ в направлении от AC к AB в положение $AC'X'$ (рис. 213). Так как $AX = XX'$ (ибо треугольник AXX' равносторонний)

[1]) Здесь (и только здесь из всех пунктов этого вводного рассуждения) используется то, что треугольник ABC равнобедренный, и, значит, углы A и B острые.

и $CX = C'X'$, то $AX + BX - CX = X'X + BX - C'X'$; таким образом, нам остается выбрать точку X так, чтобы величина $BX + XX' - X'C'$ принимала наименьшее возможное значение. Но так как

$$C'B + BX + XX' \geqslant C'X',$$

то

$$BX + XX' - C'X' \geqslant -C'B;$$

поэтому, если мы сумеем найти такую точку M, что

$$C'B + BM + MM' = C'M', \text{ т. е. } BM + MM' - C'M' = -C'B \quad (*)$$

(где точка M' получается из M, как X' из X), то эта точка и будет искомой.

Так как по условию $AC = BC \geqslant AB$, то далее надо рассмотреть отдельно два случая:

1°. $\angle A = \alpha > 60°$, т. е. $AC = BC > AB$ и треугольник ABC не равносторонний. В этом случае точка C' не совпадает с точкой B и равенства (*) имеют место, если B и M — две последовательные точки отрезка $C'M'$ (рис. 213, a). Так как угол C треугольника ABC равен $180° - 2\alpha$, то угол при вершине C равнобедренного треугольника BCC' равен

$$60° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 120°,$$

и значит,

$$\angle CC'B = \angle CBC' = \frac{1}{2}[180° - (2\alpha - 120°)] = 150° - \alpha;$$

$$\angle C'BA = \angle C'BC + \alpha = 150°.$$

Поэтому, если точка М такова, что $\angle C'BM = 180°$, то $\angle ABM = 30°$; если же, кроме того, $\angle BMM' = \angle BMA + 60° = 180°$, то

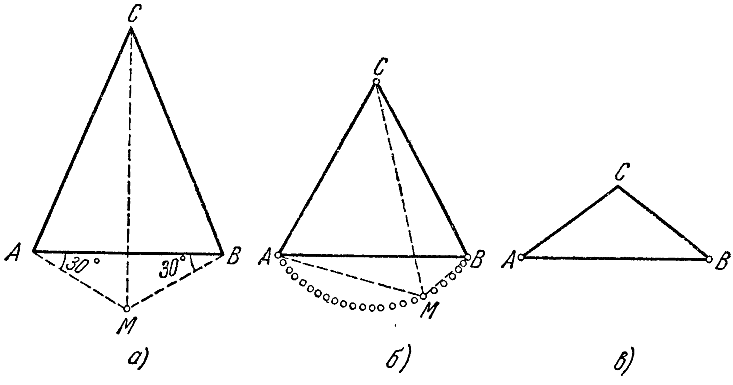


Рис. 214.

$\angle BMA = 120°$. Отсюда следует, что имеется единственная точка M такая, что точки B и M принадлежат отрезку $C'M'$ и

$$AM + BM - CM = BM + MM' - C'M' = -C'B;$$

эта точка характеризуется условиями $\angle MBA = \angle MAB = 30°$ (рис. 214, a).

2°. $\angle A=60°$, т. е. треугольник ABC равносторонний; в этом случае точка C' совпадает с B (рис. 214, *б*). При этом равенство (*)

$$BM+MM'-C'M'=-C'B \quad (=0)$$

имеет место, если ломаная BMM' представляет собой отрезок прямой, и следовательно, $\angle BMA=120°$ (поскольку $\angle AMM'=60°$). Все такие точки M принадлежат дуге AB описанной вокруг треугольника ABC окружности (рис. 214, *б*); *каждая* из них удовлетворяет условию задачи (ср. с задачей 78 а)).

Примечание. Указанное решение задачи не годится в том случае, когда $AC=BC<AB$ и $\angle A=\alpha<60°$. В этом случае, как можно показать, минимум выражения $AM+BM-CM$ достигается для точки M, совпадающей с одной из вершин A или B треугольника ABC (рис. 214, *в*; ср. обсуждение этой задачи в п. 22 статьи [1]).

81. а) Первое решение. Пусть AD, BE и CF — медианы треугольника ABC, I — точка пересечения его медиан, P — основание перпендикуляра, опущенного из произвольной точки M на медиану AD (рис. 215). Соединим точку M с точками A, B, C, D и I. Пусть для определенности $\angle MIA \leqslant 90°$, $\angle MID \geqslant 90°$. Из треугольников MAI и MID получаем

$$MA^2=MI^2+AI^2-2AI\cdot IP,$$

$$MD^2=MI^2+ID^2+2ID\cdot IP.$$

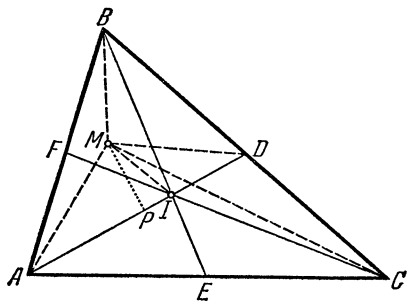


Рис. 215.

Умножая второе из этих равенств на 2 и складывая с первым, получаем (учитывая, что $2ID=AI$)

$$MA^2+2MD^2=3MI^2+AI^2+2ID^2.$$

Но MD есть медиана треугольника BMC, а ID — медиана треугольника BIC. Отсюда по известной формуле для длины медианы треугольника [1]) имеем

$$MD^2=\frac{1}{2}(MB^2+MC^2)-\frac{1}{4}BC^2,$$

$$ID^2=\frac{1}{2}(IB^2+IC^2)-\frac{1}{4}BC^2,$$

и, следовательно,

$$MA^2+MB^2+MC^2-\frac{1}{2}BC^2=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2-\frac{1}{2}BC^2,$$

[1]) Ср. подстрочное примечание [2]) на стр. 158.

т. е.

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2. \qquad (*)$$

Из последней формулы сразу следует, что *искомой точкой является точка I пересечения медиан треугольника ABC.*

Второе решение. Приведем еще одно изящное решение задачи, требующее меньше вычислений, чем первое.

Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC со сторонами a, b, c; M — произвольная точка плоскости (рис. 216).

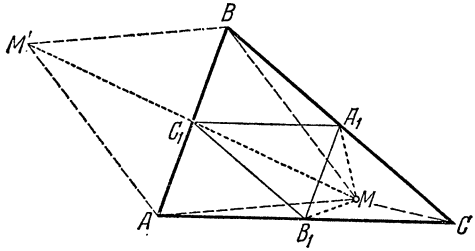


Рис. 216.

Дополнив треугольник AMB до параллелограмма $AMBM'$, будем иметь

$$2MA^2+2MB^2=MM'^2+AB^2$$

(ибо сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон), или

$$2MA^2+2MB^2=4MC_1^2+c^2.$$

Точно так же доказывается, что

$$2MA^2+2MC^2=4MB_1^2+b^2; \quad 2MB^2+2MC^2=4MA_1^2+a^2.$$

Складывая эти три равенства, получаем

$$4MA^2+4MB^2+4MC^2=4MA_1^2+4MB_1^2+4MC_1^2+a^2+b^2+c^2,$$

или

$$MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2=MA^2+MB^2+MC^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Таким образом, сумма квадратов расстояний произвольной точки U плоскости от точек A_1, B_1, C_1 отличается от суммы квадратов расстояний этой же точки от вершин треугольника ABC лишь на постоянное слагаемое. Отсюда следует, что *сумма квадратов расстояний от точки M до вершин треугольника ABC будет наименьшей для той же точки, для которой является наименьшей сумма квадратов ее расстояний до вершин треугольника $A_1B_1C_1$.*

Точно так же сумма квадратов расстояний от точки M до точек A_1, B_1 и C_1 будет наименьшей для той точки, для которой является наименьшей сумма квадратов расстояний до середин A_2, B_2, C_2 сторон треугольника $A_1B_1C_1$; сумма квадратов расстояний от точки M до точек A_2, B_2, C_2 будет наименьшей для той точки, для которой является наименьшей сумма квадратов расстояний до середин A_3,

B_3 и C_3 сторон треугольника $A_2B_2C_2$ и т. д. Так мы получаем систему треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ и т. д., каждый из которых составлен из средних линий предыдущего; для того чтобы найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин первого треугольника является наименьшей, достаточно найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин какого-нибудь из этих треугольников наименьшая. Но все треугольники ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и т. д. подобны между собой, и стороны каждого из них в два раза меньше соответствующих сторон предыдущего; таким образом, стороны треугольника $A_1B_1C_1$ меньше сторон треугольника ABC в два раза, стороны $A_2B_2C_2$ меньше их в четыре раза, стороны $A_3B_3C_3$ меньше их в восемь раз и т. д. Отсюда следует, что треугольники $A_nB_nC_n$ при $n \to \infty$ «стягиваются к точке», т. е. что все вершины этих треугольников все более приближаются к одной и той же точке I плоскости (рис. 217).

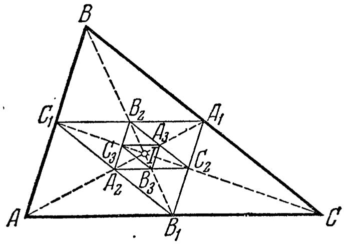


Рис. 217.

Таким образом, если n достаточно велико, то расстояния MA_n, MB_n, MC_n, где M — произвольная точка плоскости, будут очень мало отличаться от расстояния MI; следовательно, сумма $MA_n^2 + MB_n^2 + MC_n^2$ будет сколь угодно мало отличаться от $3MI^2$. Поэтому точка, сумма квадратов расстояний которой от вершин каждого из треугольников $A_nB_nC_n$ (где $n=1, 2, 3, \ldots$) является наименьшей, должна совпадать с точкой, утроенный квадрат расстояния которой от точки I является наименьшим. А такой точкой, очевидно, является сама точка I.

Теперь нам осталось только выяснить, что это за точка I. Проведем медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC (см. рис. 217). Они будут одновременно являться и медианами треугольника $A_1B_1C_1$; следовательно, *точка пересечения медиан треугольника ABC совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$*. Точно так же точка пересечения медиан треугольника $A_2B_2C_2$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. с точкой пересечения медиан треугольника ABC; точка пересечения медиан треугольника $A_3B_3C_3$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC и т. д. Следовательно, точка пересечения медиан треугольника ABC является одновременно точкой пересечения медиан всех треугольников $A_nB_nC_n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). А значит, эта точка лежит внутри всех треугольников $A_nB_nC_n$; следовательно, она должна совпасть с той точкой I, к которой стягиваются все эти треугольники.

Примечание. Выше мы имели формулу

$$MA^2+MB^2+MC^2=MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Совершенно аналогично получаем

$$MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2=MA_2^2+MB_2^2+MC_2^2+\frac{1}{4}(a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

где $a_1=\frac{a}{2}$, $b_1=\frac{b}{2}$, $c_1=\frac{c}{2}$ — стороны треугольника $A_1B_1C_1$, или

$$MA_1^2+MB_1^2+MC_1^2=MA_2^2+MB_2^2+MC_2^2+\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2).$$

Далее, также имеем

$$MA_2^2+MB_2^2+MC_2^2=MA_3^2+MB_3^2+MC_3^2+\frac{1}{64}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$MA_{n-1}^2+MB_{n-1}^2+MC_{n-1}^2=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+\frac{1}{4^n}(a^2+b^2+c^2).$$

Складывая все эти формулы, получим

$$MA^2+MB^2+MC^2=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+$$
$$+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{64}(a^2+b^2+c^2)+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{4^n}(a^2+b^2+c^2)=$$
$$=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}}(a^2+b^2+c^2)=$$
$$=MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2+\frac{1-\frac{1}{4^n}}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Переходя теперь к пределу при $n\to\infty$ и замечая, что при этом $MA_n^2+MB_n^2+MC_n^2\to 3MI^2$ (см. выше), получаем

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MI^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

что равносильно формуле (*) первого решения задачи.

б) Стороны треугольника ABC обозначим, как обычно, через a, b, c; перпендикуляры, опущенные из точки M треугольника на его стороны, пусть будут $MP=x$, $MQ=y$, $MR=z$ (рис. 218). Очевидно,

$$a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=2S_{\triangle MBC}+2S_{\triangle MAC}+2S_{\triangle MAB}=2S_{\triangle ABC}=\text{const}.$$

Покажем, что *сумма* $x^2+y^2+z^2$ *достигает своего минимума в такой точке* M_0, *что* $x:y:z=a:b:c$. В самом деле, нетрудно проверить, что

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+$$
$$+(cx-az)^2,$$

т. е.

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

откуда вытекает, что значение суммы $x^2+y^2+z^2$ будет минимальным, если $ay-bx=bz-cy=cx-az=0$, т. е. если $x:y:z=a:b:c$.

Для построения искомой точки M_0 достаточно разделить стороны AB и AC точками K и L в отношениях $\frac{AK}{KB}=\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{AL}{LC}=\frac{c^2}{a^2}$ (т. е. в отношениях, в которых основание высоты делит гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами b и a, соответственно c и a); тогда M_0 — точка пересечения CK и BL (рис. 219). В самом деле,

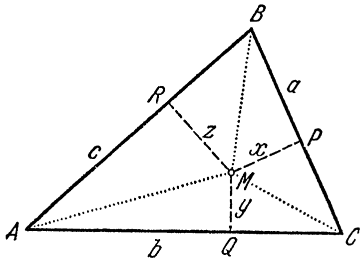


Рис. 218.

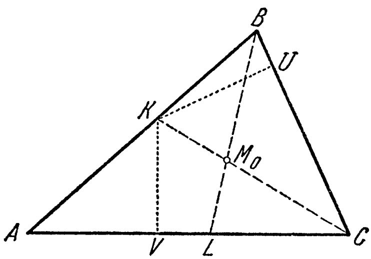


Рис. 219.

если KU и KV — перпендикуляры, опущенные из точки K на стороны BC и AC, то, очевидно,

$$\frac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle KAC}}=\frac{2KU\cdot a}{2KV\cdot b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{KU}{KV}.$$

Но, с другой стороны, $\frac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle KAC}}=\frac{KB}{KA}=\frac{a^2}{b^2}$, откуда следует, что $KU:KV=a:b$, и значит, отношение расстояний любой точки луча CK от сторон CB и CA угла ACB равно $a:b$. Точно так же показывается, что отношение расстояний любой точки луча BL от сторон BC и BA угла ABC равно $a:c$, откуда и вытекает, что точка пересечения этих лучей — искомая.

82. а), в). Для решения этой задачи несущественно, расположены ли точки A, B, C и D в одной плоскости или нет. Эта задача очень близка к задаче 81 а) и может быть решена аналогично первому или второму ее решениям. Мы изложим здесь решение, родственное первому решению задачи 81 а), используя при этом векторы [1]).

Выберем на плоскости (или в пространстве) некоторую точку O и условимся характеризовать все точки их радиусами-векторами; радиусы-векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ точек A, B, C и D обозначим через $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ и $\boldsymbol{r}_4$ (рис. 220). Покажем, что начало O отсчета векторов можно выбрать так, чтобы было

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4=\mathbf{0}.$$

Так как при этом

$$\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}=-\frac{\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4}{2},\quad \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3}{2}=-\frac{\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_4}{2}\quad\text{и}\quad \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_4}{2}=-\frac{\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3}{2},$$

[1]) Читатель может попытаться самостоятельно изложить это решение без использования векторов или, наоборот, переделать первое решение задачи 81 а), использовав в нем векторы (соответственно можно изменить и второе решение задачи 81 а)).

то, очевидно, радиусы-векторы $\overline{OU}_1=\frac{r_1+r_2}{2}$ и $\overline{OU}_2=\frac{r_3+r_4}{2}$ середин U_1 и U_2 отрезков AB и CD будут взаимно противоположны, т. е. точка O совпадает с серединой отрезка U_1U_2; точно так же будут противоположны радиусы-векторы $\overline{OV}_1=\frac{r_1+r_3}{2}$ и $\overline{OV}_2=\frac{r_2+r_4}{2}$, $\overline{OW}_1=\frac{r_1+r_4}{2}$ и $\overline{OW}_2=\frac{r_2+r_3}{2}$ середин V_1 и V_2, W_1 и W_2 отрезков AC и BD, AD и BC. Таким образом, точка O совпадает с общей серединой отрезков U_1U_2, V_1V_2 и W_1W_2, соединяющих середины противоположных сторон и середины диагоналей (плоского) четырехугольника $ABCD$ (рис. 221, *а*) или середины противоположных ребер тетраэдра $ABCD$ (рис. 221, *б*). (Совпадение середин отрезков U_1U_2, V_1V_2 и W_1W_2 вытекает из того, что при **любом** выборе начала O_1 отсчета векторов, очевидно,

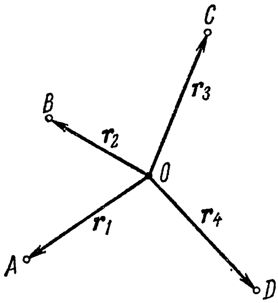


Рис. 220.

$$\frac{r_1+r_2}{2}+\frac{r_3+r_4}{2}=\frac{r_1+r_3}{2}+\frac{r_2+r_4}{2}=\frac{r_1+r_4}{2}+\frac{r_2+r_3}{2};$$

но $\frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_2}{2}+\frac{r_3+r_4}{2}\right)=\frac{1}{2}(\overline{O_1U_1}+\overline{O_1U_2})$, $\frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_3}{2}+\frac{r_2+r_4}{2}\right)=$ $=\frac{1}{2}(\overline{O_1V_1}+\overline{O_1V_2})$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{r_1+r_4}{2}+\frac{r_2+r_3}{2}\right)=\frac{1}{2}(\overline{O_1W_1}+\overline{O_1W_2})$ — это радиусы-векторы середин отрезков U_1U_2, V_1V_2 и W_1W_2.)

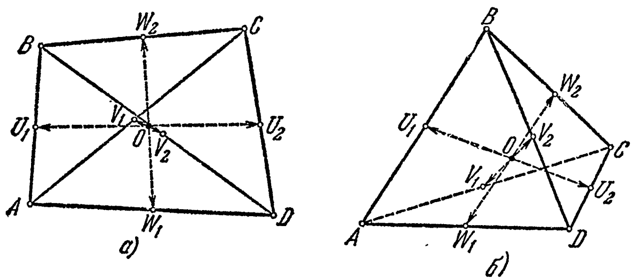


Рис. 221.

Обозначая теперь радиус-вектор $\overline{OM}$ точки M через r, имеем

$$AM^2+BM^2+CM^2+DM^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2+\overline{DM}^2=$$
$$=(r-r_1)^2+(r-r_2)^2+(r-r_3)^2+(r-r_4)^2=$$
$$=4r^2-2rr_1-2rr_2-2rr_3-2rr_4+r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2=$$
$$=4r^2-2r(r_1+r_2+r_3+r_4)+r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2=$$
$$=4r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2$$

(напоминаем, что $\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4=0$). А так как

$$\mathbf{r}^2=\overline{OM}^2=OM^2 \text{ и } \mathbf{r}_1^2=OA^2,\ \mathbf{r}_2^2=OB^2,\ \mathbf{r}_3^2=OC^2, \mathbf{r}_4=OD^2,$$

то последнюю формулу можно переписать так:

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4OM^2+OA^2+OB^2+OC^2+OD^2 \quad (**)$$

(ср. с формулой (*) первого решения задачи а), стр. 222), откуда сразу следует, что искомой точкой как раз и будет точка O (рис. 221, *а*, *б*).

Примечание 1. Так как, очевидно,

$$\mathbf{r}_1=-3\frac{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{3},\ \mathbf{r}_2=-3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{3},\ \mathbf{r}_3=-3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4}{3}$$

$$\text{и } \mathbf{r}_4=-3\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3},$$

то точку O (центроид четырех точек A, B, C и D) можно определить так же, как точку пересечения отрезков AP, BQ, CR и DS, соединяющих каждую вершину четырехугольника или тетраэдра $ABCD$ с точкой пересечения медиан треугольника, образованного тремя

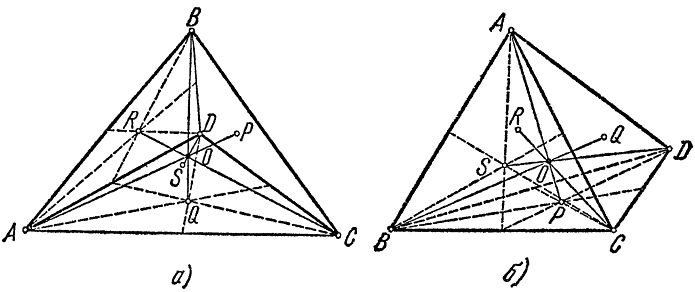


Рис. 222.

остальными вершинами (рис. 222, *а*, *б*; в случае тетраэдра надо соединить каждую вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани); действительно, векторы

$$\frac{\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{3},\quad \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{3},\quad \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}$$

суть радиусы-векторы точек P, Q, R и S пересечения медиан треугольников BCD, ACD, ABD и ABC. (Нетрудно показать, что отрезки AP, BQ, CR и DS делятся в точке O в одном и том же отношении:

$$AO:OP=BO:OQ=CO:OR=DO:OS=3:1.)$$

Примечание 2. Из формулы (**) следует, что наименьшее значение Σ суммы квадратов расстояний от точки M плоскости или пространства до вершин четырехугольника или тетраэдра $ABCD$ равно

$$\Sigma=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=\mathbf{r}_1^2+\mathbf{r}_2^2+\mathbf{r}_3^2+\mathbf{r}_4^2.$$

С другой стороны, сумма квадратов всех сторон и диагоналей четырехгольника или всех ребер тетраэдра равна

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2=$$
$$=(r_2-r_1)^2+(r_3-r_1)^2+(r_4-r_1)^2+(r_3-r_2)^2+(r_4-r_2)^2+(r_4-r_3)^2=$$
$$=3(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2)-2(r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4)=$$
$$=4(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2),$$

ибо в силу того, что $r_1+r_2+r_3+r_4=0$, имеем

$$(r_1+r_2+r_3+r_4)^2=$$
$$=r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2+2(r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4)=0,$$

и значит,

$$2(r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4)=-(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2).$$

Таким образом,

$$\Sigma=\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2),$$

т. е.

$$\Sigma=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2),$$

где a, b, c и d — стороны четырехугольника $ABCD$, а e и f — его диагонали, или

$$\Sigma=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

где a, a_1, b, b_1, c и c_1 — ребра тетраэдра $ABCD$ (см. рис. 22 на стр. 40).

Примечание 3. Совершенно аналогично решению настоящей задачи можно показать, что если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — какие угодно n точек плоскости или пространства, то

$$MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2=n\cdot MO^2+OA_1^2+OA_2^2+\ldots+OA_n^2,$$

где M — произвольная точка плоскости (пространства), а O — такая точка, что

$$\overline{OA}_1+\overline{OA}_2+\ldots+\overline{OA}_n=0.$$

(Точка O называется центроидом системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$[1].) Отсюда следует, что минимальное значение суммы квадратов расстояний переменной точки M плоскости (пространства) от точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ достигается для точки O (которую легко построить[1]). Нетрудно также показать, что этот минимум Σ равен деленной на n сумме квадратов всевозможных попарных расстояний между рассматриваемыми точками.

---

[1]) При произвольном начале O_1 отсчета радиусов-векторов $\overline{O_1A_1}=r_1$, $\overline{O_1A_2}=r_2$, $\ldots$, $\overline{O_1A_n}=r_n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ центроид O этой системы точек определяется формулой

$$r_0=\frac{r_1+r_2+\ldots+r_n}{n},$$

где $r_0=\overline{O_1O}$ — радиус-вектор центроида O.

б) Если четырехугольник $ABCD$ выпуклый (рис. 223, *а*), то точка O решения задачи а) обязательно принадлежит четырехугольнику,— а значит, она является решением и задачи б). Однако если четырехугольник $ABCD$ не выпуклый, скажем, если его угол $D > 180°$, то точка O может как принадлежать четырехугольнику $ABCD$, так и не принадлежать ему. В первом случае (рис. 223, *б*) решением задачи

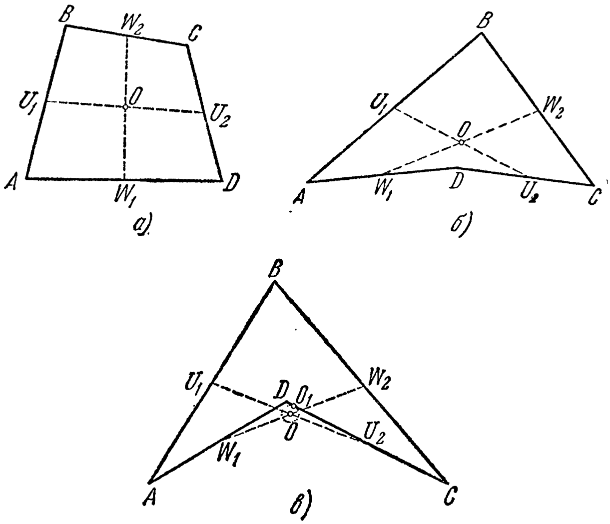


Рис. 223.

по-прежнему служит точка O; во втором же случае решением задачи служит н а и б о л е е б л и з к а я к O точка O_1 четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 223, *в*; ср. формулу (**) на стр. 227).

83. Пусть ABC — произвольный треугольник, вписанный в данную окружность, BK — его медиана. Тогда

$$BK^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2\right),$$

(ср. выше, стр. 158), и следовательно,

$$AB^2 + BC^2 = 2BK^2 + \frac{1}{2}AC^2. \qquad (*)$$

Поэтому *при фиксированной стороне AC сумма $AB^2 + BC^2$ будет тем больше, чем больше медиана BK треугольника ABC.*

Пусть $\angle A$ наименьший, $\angle C$ — наибольший углы треугольника; $\angle C \geqslant 60°$; $\angle A \leqslant 60°$; $\angle B < 90°$ (B — «средний» угол треугольника; ср. выше задачу 45 а)).

На дуге ABC описанной вокруг треугольника окружности S найдем точку B' такую, что $\angle B'CA = 60°$ (рис. 224). При этом точка B'

будет расположена не дальше от середины L дуги ABC, чем точка B, ибо

$$\smile ABC = 2\angle A + 2\angle C;\quad \smile LC = \angle A + \angle C;$$
$$\smile LB' = |\angle A + \angle C - 120°|,$$
$$\smile LB = \angle A + \angle C - 2\angle A = 2\angle C - (\angle A + \angle C);$$

но так как $\angle A \leqslant 60° \leqslant \angle C$, то и при $\angle A + \angle C \geqslant 120°$ и при $\angle A + \angle C \leqslant 120°$ будем иметь $\smile LB' \leqslant \smile LB$. Отсюда вытекает, что $KB' \geqslant KB$, а значит (в силу (*)),

$$AB'^2 + B'C^2 + AC^2 \geqslant AB^2 + BC^2 + AC^2.$$

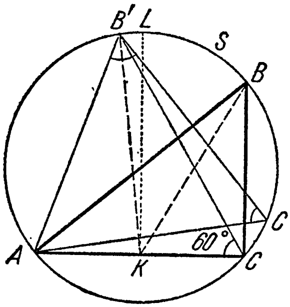


Рис. 224.

Таким образом, мы заменили треугольник ABC новым треугольником $AB'C$, сумма квадратов сторон которого больше суммы квадратов сторон исходного треугольника и один из углов которого ($\angle C$) равен 60°.

Повторим теперь то же построение в применении к $\triangle AB'C$: на дуге $B'CA$ найдем такую точку C', что $\angle AB'C' = 60°$, и следовательно, треугольник $A'B'C'$ равносторонний. В точности так же, как и выше, показывается, что

$$AB'^2 + B'C'^2 + C'A^2 \geqslant$$
$$\geqslant AB'^2 + B'C^2 + CA^2.$$

Следовательно, *сумма квадратов сторон у равностороннего треугольника* $AB'C'$ не меньше, чем у треугольника $AB'C$, а следовательно, и подавно *не меньше, чем у исходного треугольника* ABC.

Из решения задачи видно, что если треугольник ABC не равносторонний, то сумма квадратов его сторон меньше (а не только не больше), чем сумма квадратов сторон вписанного в ту же окружность равностороннего треугольника.

84. Пусть $ABCD$ — произвольный параллелограмм с острым углом A и большей диагональю $AC = d$; AE и CF — его высоты (рис. 225, *а*).

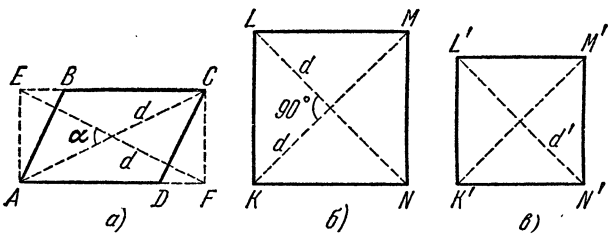


Рис. 225.

У прямоугольника $AECF$ диагональ $AC (= EF)$ имеет ту же величину d, а его площадь больше площади параллелограмма (точнее, не меньше; она равна площади $ABCD$, если $ABCD$ — прямоугольник и $AECF$ с ним совпадает). Рассмотрим теперь квадрат $KLMN$ с диагональю $KM = d$ (рис. 225, *б*); так как площадь прямоугольника $AECF$ равна $AC \cdot EF \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями, то квадрат $KLMN$ (диагонали которого взаимно перпендикулярны) имеет бо́льшую площадь, чем прямоугольник $AECF$ (точнее, не меньшую; $S_{KLMN} = S_{AECF}$, если $AECF$ — квадрат и $KLMN$ совпадает с $AECF$). Поэтому квадрат $K'L'M'N'$ той же площади, что и параллелограмм $ABCD$ (рис. 225, *в*) будет иметь меньшую чем d диагональ d'.

Из доказательства видно, что из всех параллелограммов данной площади бо́льшая диагональ будет меньше всего у квадрата $K'L'M'N'$.

85. Пусть $AB = a \geqslant b = BC$. Построим на отрезке AB равносторонний треугольник ABE, расположенный по другую сторону от AB, чем треугольник ABC (рис. 226). Поворот на $60°$ вокруг точки A переводит интересующий нас отрезок DB в отрезок CE, и нам остается только выяснить, *при каком положении точки C* (отрезок AB мы закрепляем) *отрезок CE будет наибольшим или наименьшим.* Но ясно, что наибольшим отрезок CE будет, если $\angle ABC = 120°$; в этом случае ломаная CBE превращается в отрезок прямой и

$$DB = CE = CB + BE = a + b.$$

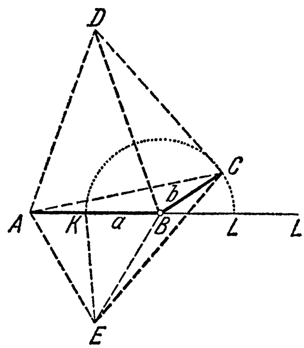


Рис. 226.

Далее, при вращении отрезка BC вокруг точки B точка C опишет полуокружность KL с центром B и радиусом b (K — точка отрезка AB, L лежит на продолжении этого отрезка за точку B); расстояние EC от (фиксированной!) точки E до точки C этой полуокружности будет наименьшим тогда, когда точка C совпадает с K, т. е. $\angle ABC = 0$ (докажите!); в этом последнем случае

$$DB = KE = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

(это следует из рассмотрения треугольника BKE).

86. Предположим сначала, что *оба пешехода двигаются по дорогам AO и BO по направлению к точке O*; пусть еще $a \geqslant b$ (рис. 227, *а*). Через время t после начала движения пешеходы пройдут по дорогам AO и BO пути AM и BN, где $AM = BN = vt$. Проведем через точку M прямую $MX \parallel OB$ и отложим на ней отрезок $MP = AM$; точку P соединим с точками A и B. Так как $BN = AM = MP$, то треугольник AMP равнобедренный (с углом α при вершине M); если прямая AP пересекает OB в точке C, то равнобедренным будет и подобный AMP треугольник AOC, в котором $AO = OC$ и $\angle ACO = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

С другой стороны, четырехугольник $MNBP$ — параллелограмм (ибо $MP \mathrel{\#} NB$); поэтому расстояние MN между пешеходами в момент времени t равно расстоянию BP от точки B до точки P прямой AC.

Нам надо так выбрать точки M и N, чтобы расстояние $MN = BP$ было возможно меньше. Но ясно, что это будет в том случае, когда $BP \perp AC$; соответствующую точку P обозначим через P_0, а отвечающие ей точки M и N — через M_0 и N_0. Из прямоугольного треугольника BP_0C с гипотенузой $BC=OC-OB=a-b$ и острым углом $\angle P_0BC=\frac{\alpha}{2}$ находим

$$d_0=BP_0=N_0M_0=(a-b)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Далее, пусть P_0D—медиана прямоугольного треугольника BP_0C; тогда $P_0D \parallel AO$ (ибо $BD=DC=DP_0$ и $\angle P_0DC=2\angle P_0BC=\alpha$), и значит,

$$P_0M_0=OD=OB+\frac{BC}{2}=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

А так как $P_0M_0=AM_0=BN_0=vt_0$, где t_0—время, прошедшее от

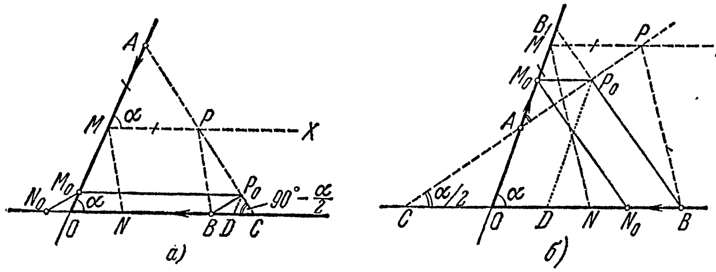


Рис. 227.

начала движения до того момента, когда пешеходы будут ближе всего друг к другу, то

$$t_0=\frac{a+b}{2v}.$$

Откажемся теперь от предположения о том, что оба пешехода двигаются по дорогам AO и BO по направлению к точке O. Ясно, что если *они оба удаляются от* O, то расстояние между ними все время возрастает; минимальным (имеющим величину $d_0=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$) оно будет в начальный момент времени $t_0=0$. Пусть теперь *первый пешеход удаляется от точки* O, *а второй приближается к* O; при этом мы теперь уже не имеем права считать, что $a \geqslant b$, поскольку удаляться от O может как более далекий от этой точки пешеход, так и более близкий к ней. Сохраняя первоначальные обозначения, проведем через точку M прямой OA, отвечающую положению первого пешехода в момент времени t, прямую $MX \parallel OB$ и отложим на ней отрезок $MP=AM$ $(=vt$; см. рис. 227, *б*). Из равнобедренного треугольника AMP заключаем: $\angle AMP=180°-\alpha$; $\angle MAP=\frac{\alpha}{2}$. Прямая PA пересечет продолжение отрезка BO за точку O в такой точке C, что $OC=OA=a$. Если положение второго пешехода в момент t задается точкой N, то четырехугольник $MNBP$—параллелограмм; поэтому расстояние MN между пешеходами равно расстоянию BP от точки B до точки P прямой AC (оно будет наименьшим, если $BP \perp AC$). Отложим теперь на луче OA отрезок $OB_1=OB$ $(=b)$;

при этом $\angle OB_1B = 90° - \frac{\alpha}{2}$ и $B_1B \perp AC$. Если $b \leqslant a$, то точка P_0 пересечения AC и BB_1 принадлежит отрезку AC (а не его продолжению); поэтому при движении пешеходов по дорогам OA и BO точка P, отвечающая положению пешехода в момент t, с увеличением t будет удаляться от основания P_0 перпендикуляра BP_0, и наименьшее расстояние

$$d_0 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$$

между пешеходами будет при $t_0 = 0$. Если же $b > a$ (рис. 227, *б*), то точка P_0 пересечения AC и BB_1 принадлежит лучу AP; наименьшее расстояние между пешеходами будет равно расстоянию $d_0 = BP_0$ от точки B до прямой AC; из прямоугольного треугольника CBP_0, где $CB = CO + OB = a + b$, следует, что в этом случае

$$d_0 = (a+b)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Далее, поскольку для медианы P_0D прямоугольного треугольника P_0BC имеем $\angle P_0DB = 2\angle P_0CB = \alpha$, то $P_0D \parallel AO$; поэтому пройденный до момента наибольшего сближения пешеходов путь

$$AM_0 = N_0B = M_0P_0 = OD = CD - CO = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2},$$

и следовательно, время t_0 от начала движения до момента наибольшего сближения пешеходов равно

$$t_0 = \frac{b-a}{2v}.$$

87. Пусть самолет прошел за время наблюдения путь MN длиной в l *км* (ср. рис. 19 на стр. 38); в таком случае его скорость v равна l *км/сек*. Нам надо определить наименьшее возможное значение (при данных углах α и β!) величины l, т. е. наименьшее возможное значение отношения $\frac{l}{d} = \frac{l}{d_0}$ (где отрезок AB имеет заранее известную длину, которую мы здесь будем обозначать не через d, а через d_0; величина же l неизвестна). Предположим теперь, наоборот, что мы знаем $l = l_0$ и не знаем d; другими словами, подвергнем рис. 19 преобразованию подобия с неизвестным нам пока коэффициентом подобия k с тем, чтобы пройденный самолетом путь MN принял какое-то наперед заданное значение l_0, и будем искать наибольшее возможное значение отрезка $AB = d$, совместное с условиями задачи.

Поставленный таким образом вопрос допускает уже несложное решение. Так как $\angle MAN = \alpha$ и $\angle MBN = \beta$, то при фиксированном отрезке $MN = l_0$ точка A должна лежать на поверхности, получаемой вращением построенного на отрезке MN сегмента, вмещающего угол α, вокруг его хорды MN; аналогично этому точка B должна лежать на поверхности, полученной вращением вокруг прямой MN построенного на MN сегмента, вмещающего угол β (рис. 228, *а*). Но наибольшее расстояние между этими поверхностями равно длине отрезка A_0B_0, соединяющего «диаметрально противоположные» точки этих поверхностей: в самом деле, если S — середина отрезка MN и U, U_0, соответственно V, V_0 — центры дуг окружностей, образованных в сечении первой из наших поверхностей плоскостями MNA и MNA_0 и второй поверхности плоскостями MNB и MNB_0, где A и B — какие угодно точки первой, соответственно второй, поверхности, то

$$AB \leqslant AS+BS \leqslant (AU+US)+(BV+VS)=(A_0U_0+U_0S)+$$
$$+(B_0V_0+V_0S)=A_0S+B_0S=A_0B_0,$$

ибо, очевидно, $AU=A_0U_0$, $US=U_0S$ и $BV=B_0V_0$, $VS=V_0S$

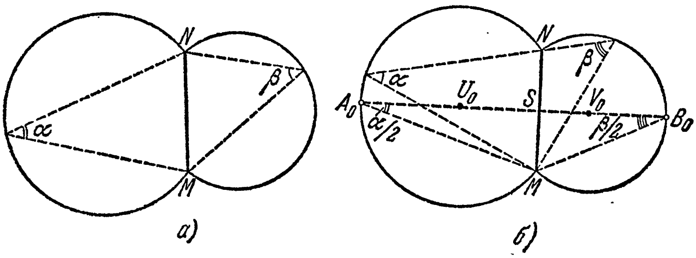


Рис. 228.

(рис. 228, *б*, на котором изображено сечение наших поверхностей проходящей через MN плоскостью A_0MNB_0 и не изображены точки A и B, которые могут этой плоскости не принадлежать [1])).

Теперь из того же рис. 228, *б* без труда находим

$$\frac{d_{max}}{l_0/2}=\frac{A_0B_0}{MN/2}=\frac{A_0S}{SM}+\frac{B_0S}{SM}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

а значит, минимально возможное значение отношения l/d равно

$$\frac{l_{min}}{d_0}=1:\left(\frac{d_{max}}{l_0}\right)=1:\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)=\frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}},$$

и следовательно, наименьшее возможное значение скорости v есть

$$v_{min}=l_{min}=\frac{2d}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}\ \textit{км/сек},$$

где мы снова пишем d вместо d_0.

88. Предположим сначала, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой PQ, и пусть M — такая точка этой прямой, что

$$\frac{\cos\angle AMP}{\cos\angle BMQ}=\frac{^1/_b}{^1/_a}=\frac{a}{b}.$$

---

[1]) На рис. 228, *б* изображен случай, когда $\alpha \leqslant 90°$ и $\beta \leqslant 90°$ предоставляем читателю самому разобраться в том, как видоизменяются приведенные рассуждения в иных случаях.

Обозначим для простоты $\angle AMP = \alpha$, $\angle BMQ = \beta$ (рис. 229). Пусть теперь X — произвольная точка прямой, отличная от M. Докажем, что

$$\frac{AM}{a} + \frac{BM}{b} < \frac{AX}{a} + \frac{BX}{b}.$$

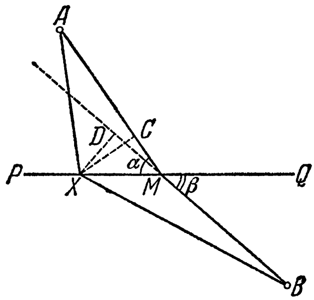


Рис. 229.

Опустим из точки X перпендикуляры XC и XD на прямые AM и BM. Легко видеть, что

$$MC = MX \cdot \cos\alpha,$$
$$MD = MX \cdot \cos\beta$$

и

$$\frac{MC}{MD} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{a}{b},$$

т. е.

$$\frac{MC}{a} = \frac{MD}{b}.$$

Теперь уже легко прийти к требуемому результату:

$$\frac{AM}{a} + \frac{BM}{b} = \frac{AC + CM}{a} + \frac{BM}{b} = \frac{AC}{a} + \frac{CM}{a} + \frac{BM}{b} =$$
$$= \frac{AC}{a} + \frac{MD}{b} + \frac{BM}{b} = \frac{AC}{a} + \frac{BD}{b}.$$

Но $AX > AC$ и $BX > BD$. Следовательно,

$$\frac{AM}{a} + \frac{BM}{b} = \frac{AC}{a} + \frac{BD}{b} < \frac{AX}{a} + \frac{BX}{b},$$

откуда

$$b \cdot AM + a \cdot BM < b \cdot AX + a \cdot BX,$$

что и требовалось доказать.

Если точки A и B лежат по одну сторону от прямой PQ, то, отразив одну из них относительно этой прямой, мы сможем применить приведенное выше рассуждение.

89. Пусть M — точка пересечения медиан $AD = m_a$, $BE = m_b$ и $CF = m_c$ треугольника ABC (рис. 230); тогда $AM = \frac{2}{3} m_a$, $BM = \frac{2}{3} m_b$, $CM = \frac{2}{3} m_c$; $MD = \frac{1}{3} m_a$, $ME = \frac{1}{3} m_b$, $MF = \frac{1}{3} m_c$. Из рассмотрения треугольников BMC, CMA и AMB следует, что

$$\frac{2}{3} m_b + \frac{2}{3} m_c > a, \quad \frac{2}{3} m_c + \frac{2}{3} m_a > b, \quad \frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b > c;$$

складывая эти три неравенства, получаем

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c = 2p, \text{ т. е. } m_a + m_b + m_c > \frac{3}{2} p.$$

С другой стороны, откладывая на продолжении AD за точку D отрезок $DA_1 = AD$ и замечая, что $BA_1 = AC = b$ (ибо четырехугольник ABA_1C — параллелограмм), находим из треугольника ABA_1

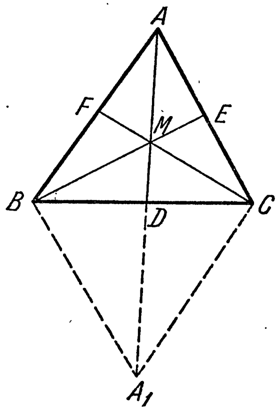


Рис. 230.

$$b + c > 2m_a;$$

аналогично доказывается, что

$$a + c > 2m_b \quad \text{и} \quad a + b > 2m_c.$$

Складывая последние три неравенства, будем иметь

$$2(a+b+c) > 2(m_a + m_b + m_c),$$

т. е. $2p = a + b + c > m_a + m_b + m_c$.

Полученные неравенства улучшить *нельзя*, ибо сумма $m_a + m_b + m_c$ медиан треугольника может быть с к о л ь у г о д н о б л и з к а как к величине $\frac{3}{2}p$, так и к величине $2p$. В самом деле, если вершина A треугольника очень близка к стороне BC (рис. 231, *а*), то

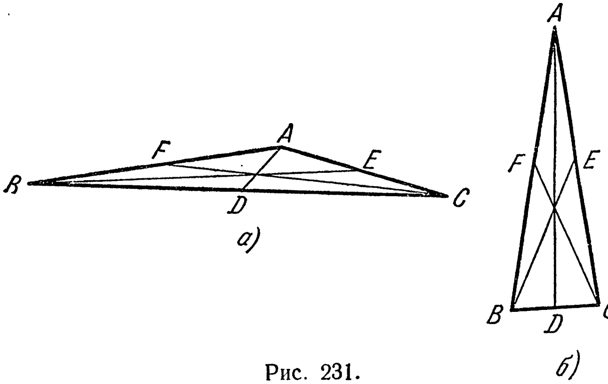


Рис. 231.

$BC = a \approx b + c$, $m_a \approx 0$, $m_b \approx c + \frac{b}{2}$ и $m_c \approx b + \frac{c}{2}$, так что

$$m_a + m_b + m_c \approx 0 + \left(c + \frac{b}{2}\right) + \left(b + \frac{c}{2}\right) = \frac{3}{2}(b+c) =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{b+c+b+c}{2} \approx \frac{3}{2}\,\frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}p,$$

и

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{p} \approx \frac{3}{2}.$$

С другой стороны, если вершины B и C треугольника очень близки одна к другой (рис. 231, *б*), то $a \approx 0$, $b \approx c$, $m_a \approx b (\approx c)$, $m_b \approx \frac{b}{2}$, $m_c \approx \frac{c}{2}$, и

$$m_a + m_b + m_c \approx b + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{3}{2} b + \frac{1}{2} c \approx 2 \frac{b+c+0}{2} \approx 2p,$$

т. е. $\frac{m_a + m_b + m_c}{p} \approx 2$.

90. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$; тогда, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, $A \geqslant B \geqslant C$. Поэтому

$$(a-b)(A-B) + (b-c)(B-C) + (c-a)(C-A) \geqslant 0$$

поскольку каждое слагаемое левой части неотрицательно.

Раскроем скобки и перенесем отрицательные слагаемые вправо; получим

$$2Aa + 2Bb + 2Cc \geqslant Ab + Ba + Bc + Cb + Ac + Ca.$$

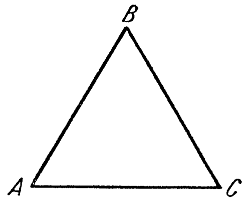


Рис. 232.

Разделив обе части на 2, получим требуемое неравенство.

Легко видеть, что знак равенства здесь имеет место в том и только в том случае, когда $a = b = c$, т. е. если рассматриваемый треугольник *равносторонний* и $A = B = C$ (рис. 232).

91. 1°. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то произведение $(A-B)(a-b) \geqslant 0$ (оба сомножителя имеют один знак) и равно нулю, только если $A = B$, $a = b$, т. е. если треугольник ABC равнобедренный. Отсюда следует, что

$$(A-B)(a-b) + (B-C)(b-c) + (C-A)(c-a) \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, если треугольник ABC равносторонний. Преобразовывая это неравенство, получим $(2A-B-C)a + (2B-A-C)b + (2C-A-B)c \geqslant 0$, а принимая во внимание, что $A + B + C = \pi$, будем иметь

$$(3A-\pi)a + (3B-\pi)b + (3C-\pi)c \geqslant 0,$$

или

$$3(Aa + Bb + Cc) \geqslant \pi(a+b+c),$$

откуда и вытекает, что

$$\frac{Aa + Bb + Cc}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3},$$

где равенство имеет место только в случае *равностороннего* треугольника.

2°. Так как сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны, то $A(b+c-a) > 0$. Поэтому

$$A(b+c-a) + B(a+c-b) + C(a+b-c) > 0.$$

Преобразуя это неравенство, получим

$$a(B+C-A) + b(A+C-B) + c(A+B-C) > 0,$$

т. е. $a(\pi-2A)+b(\pi-2B)+c(\pi-2C)>0$, или

$$\pi(a+b+c)>2(Aa+Bb+Cc),$$

и значит,

$$\frac{Aa+Bb+Cc}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

При этом отношение $\frac{Aa+Bb+Cc}{a+b+c}$ может быть сколь угодно близким к $\frac{\pi}{2}$. Действительно, пусть ABC — равнобедренный тре-

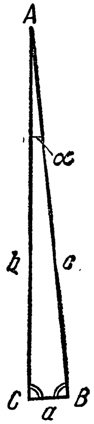


Рис. 233.

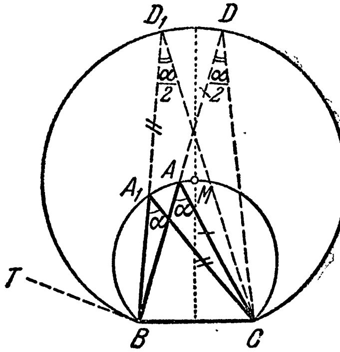


Рис. 234.

угольник с очень малым углом α при вершине A (рис. 233). В таком случае a и A очень малы, $b=c$, $B=C\approx\frac{\pi}{2}$, и значит,

$$\frac{Aa+Bb+Cc}{a+b+c}\approx\frac{Bb+Cc}{b+c}=\frac{2Bb}{2b}=B\approx\frac{\pi}{2}.$$

92. а) Совместим основания BC и B_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$; далее продолжим их стороны BA и BA_1 на отрезки $AD=AC$ и $A_1D_1=A_1C$ (здесь мы считаем, что $AB\leqslant AC$ и $A_1B\leqslant A_1C$; см. рис. 234). Из равнобедренных треугольников ACD и A_1CD_1 имеем: $\angle ADC=\frac{\angle A}{2}$ и $\angle A_1D_1C=\frac{\angle A}{2}$; поэтому, в то время как точки A и A_1 (которые мы считаем расположенными по одну сторону от прямой BC) принадлежат дуге построенного на отрезке BC сегмента, вмещающего угол A, точки D и D_1 принадлежат дуге построенного на том же отрезке BC сегмента, вмещающего угол $A/2$. Поскольку AB и A_1B — меньшие из боковых сторон треугольников ABC и A_1BC, то точки A и A_1 принадлежат одной половине BM дуги сегмента, вмещающего угол A, а значит, $\angle ACB<90°-\frac{A}{2}$ и $\angle A_1CB<90°-\frac{A}{2}$; поэтому $\angle DCB=\angle ACB+\frac{A}{2}<90°$ и

$\angle D_1CB < 90°$. Следовательно, если $\angle \beta = \angle ABC < \angle A_1BC = \angle \beta_1$ (другими словами, $\angle ABT > \angle A_1BT$, где BT — касательная к рассматриваемой дуге в точке B, т. е. $\smile BD > \smile BD_1$), то

$$BA + AC = BD > BD_1 = BA_1 + A_1C$$

(заметьте, что, поскольку $\angle BCD = \angle BCA + \frac{\alpha}{2} \geqslant 90°$, то $\smile BD$ меньше полуокружности). Отсюда и следует утверждение задачи.

Рис. 235.

б) *Из результата задачи* а) вытекает, что периметр $2p$ треугольника ABC заключен между $2a$ (случай, когда $\beta = 0$; рис. 235) и $a + 2 \cdot \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} = a\left(1 + \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}\right)$ $\left(\text{случай, когда } \beta = \frac{180° - \alpha}{2}, \text{ и треугольник } ABC \text{ равнобедренный}\right)$ и может, очевидно, принимать любые значения в интервале $2a < 2p \leqslant a\left(1 + \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}\right)$.

93. Пусть AB — наибольшая сторона остроугольного треугольника ABC, вписанного в окружность S радиуса R. На продолжении стороны AB отложим отрезок $AD = AC$; тогда $BD = AB + AC$ и, так как $\angle BAC$ — внешний угол равнобедренного треугольника CAD, то $\angle BDC = \frac{\angle A}{2}$ (рис. 236). При этом, так как $\angle C$ — наибольший угол треугольника ABC, то $\angle C + \frac{\angle A}{2} \geqslant \angle B + \frac{\angle A}{2}$, и значит, $\angle BCD = \angle C + \frac{\angle A}{2} \geqslant \frac{180°}{2} = 90°$. Заменим теперь треугольник ABC вписанным в ту же окружность S прямоугольным треугольником A_1BC с прямым углом C; так как треугольник ABC остроугольный, то диаметр BA_1 окружности S проходит внутри угла ABC. Если отложить на продолжении отрезка A_1B отрезок $A_1D_1 = A_1C$, то точка D_1 будет лежать на той же дуге BDC, вмещающей угол $A/2$, что и точка D (ибо $\angle BA_1C = \angle BAC$, как опирающиеся на одну дугу). А так как угол BCD тупой (или прямой) и BD_1 проходит внутри угла DBC, то $BD_1 < BD$, т. е. $A_1B + A_1C < AB + AC$. Отсюда и следует, что *прямоугольный треугольник* A_1BC *имеет меньший периметр, чем остроугольный треугольник* ABC и, следовательно,

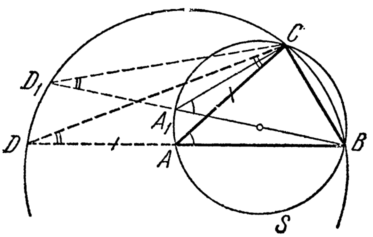


Рис. 236.

$$2p = AB + BC + CA > A_1B + BC + CA_1 = A_1B + (BC + CA_1) > A_1B + A_1B = 4R,$$

т. е.

$$p > 2R.$$

Ясно, что если точки C и B очень близки одна к другой и «почти диаметрально противоположны» точке A (рис. 237, *а*), то

$$AB \approx 2R, \ AC \approx 2R, \ BC \approx 0,$$

и

$$2p = AB + BC + AC \approx 4R,$$

причем величина $2p$ может быть сколь угодно близкой к $4R$, поэтому неравенство $p > 2R$ нельзя улучшить.

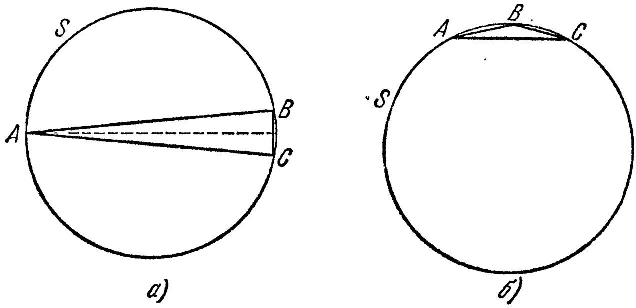


Рис. 237.

Примечание. Ясно, что тупоугольный треугольник, вписанный в окружность S радиуса R, может иметь *сколь угодно малый* периметр (рис. 237, *б*).

94. а) Первое решение. Пусть S и s — соответственно описанная и вписанная окружности треугольника ABC (рис. 238, *а*). Проведем через каждую вершину $\triangle ABC$ прямую, параллельную противоположной стороне; получим $\triangle A_1B_1C_1$, подобный $\triangle ABC$ и имеющий вдвое бо́льшие стороны. Каждая сторона $\triangle A_1B_1C_1$ заведомо имеет по одной общей точке с окружностью S (а именно, точки A, B и C). Проведем касательные к окружности S, параллельные сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Эти касательные определяют $\triangle A_2B_2C_2$ (на рис. 238, *а* он изображен пунктиром), подобный $\triangle A_1B_1C_1$, а следовательно, и $\triangle ABC$. Стороны треугольника $A_2B_2C_2$ не меньше соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (второй из этих треугольников целиком заключен внутри первого). Так как окружности S и s вписаны в подобные треугольники ABC и $A_2B_2C_2$, то из того, что $A_2B_2 \geqslant A_1B_1 = 2AB$, следует

$$R \geqslant 2r,$$

что и требовалось доказать.

Равенство $R = 2r$ достигается, очевидно, только в том случае, если все стороны треугольника $A_1B_1C_1$ касаются окружности S (треугольник $A_2B_2C_2$ совпадает с треугольником $A_1B_1C_1$; см. рис. 238, *б*)). Так как $\angle A = \angle A_1$, в этом случае

$$\smile BC = \smile BAC - \smile BC = 360° - 2 \smile BC,$$

откуда

$$3 \smile BC = 360°,$$

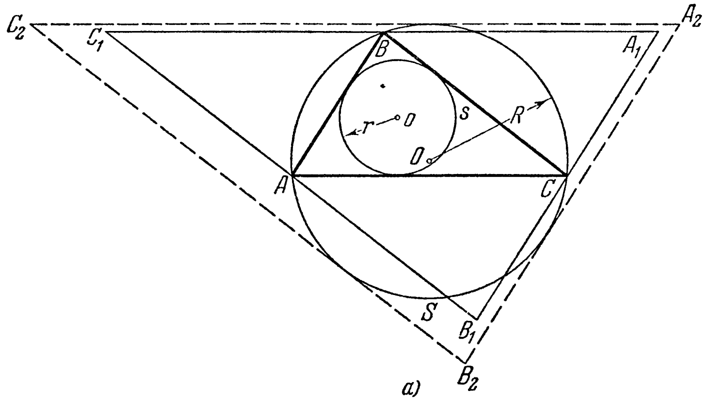
и следовательно,

$$\angle A = 60°.$$

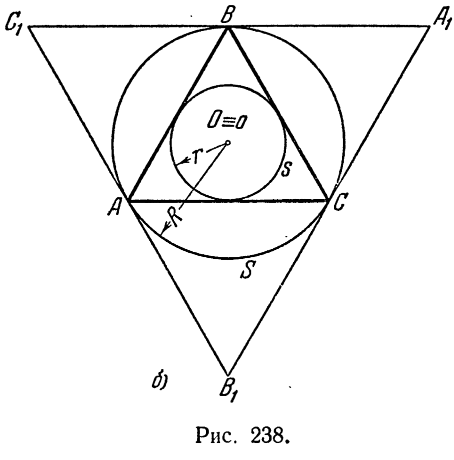
Точно так же доказывается, что

$$\angle B = \angle C = 60°;$$

в этом случае треугольник ABC *равносторонний*.



а)



б)

Рис. 238.

Второе решение. Воспользуемся известным соотношением

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2},$$

вытекающим из формул

$$r = \frac{S}{p},$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=R(\sin A+\sin B+\sin C)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(где теперь через S обозначена *площадь* треугольника ABC; формула $p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ вытекает из теоремы синусов: $a=2R\sin A$ и т. д. и из элементарных преобразований суммы $\sin A+\sin B+\sin C$, где $C=180°-A-B$) и

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\cdot\sin C.$$

А поскольку, как известно [1]),

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

то

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Третье решение. Результат настоящей задачи следует также из известной формулы, выражающей расстояние $Oo=d$ между

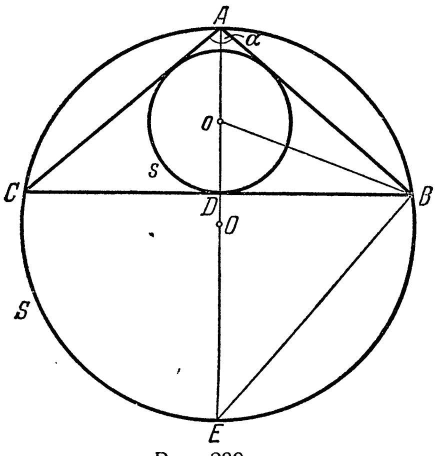


Рис. 239.

центрами O и o описанной и вписанной окружностей произвольного треугольника. Эта формула («формула Эйлера»; см., например, задачу 107 из книги: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии, ч. 2, Гостехиздат, 1952 или § 74 книги: Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948) имеет вид

$$d^2=R^2-2Rr.$$

---

[1]) См., например, решение задачи 19 из § 8 книги В. А. Кречмара [10].

А так как, разумеется,

$$d^2=R(R-2r)\geqslant 0,$$

то

$$R-2r\geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad R\geqslant 2r,$$

причем равенство здесь имеет место только в том случае, когда точки O и o совпадают, т. е. когда $\triangle ABC$ является *правильным*.

б) Пусть в окружность S радиуса R с центром O вписан равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине (рис. 239). Вычислим радиус r вписанной в треугольник ABC окружности s с центром o. Если AD — высота треугольника ABC, то так как точка o принадлежит биссектрисе угла ABC, из $\triangle ABC$ по известному свойству биссектрисы треугольника получаем

$$\frac{Do}{oA}=\frac{DB}{AB},$$

откуда

$$\frac{Do+oA}{Do}=\frac{DB+AB}{DB},$$

и, следовательно,

$$r=oD=\frac{AD\cdot DB}{DB+AB}. \qquad (*)$$

Продолжив AD до пересечения с описанной окружностью в точке E, из прямоугольного треугольника ABE найдем

$$AB=2R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Далее из треугольника ADB имеем

$$AD=AB\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2R\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad DB=AB\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в равенство (*), находим, что

$$r=\frac{2R\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2R\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2R\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+1}=$$

$$=\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Пусть теперь дано произвольное значение r такое, что $r\leqslant\frac{R}{2}$. Будем искать такой угол α, чтобы радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник с углом α при вершине, равнялся данной величине r. Имеем

$$r=2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

откуда

$$2R\sin^2\frac{\alpha}{2}-2R\sin\frac{\alpha}{2}+r=0,$$

т. е.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R\pm\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}.$$

Так как $2r\leqslant R$, то подкоренное выражение $R^2-2Rr\geqslant 0$; при этом $0<\frac{R\pm\sqrt{R^2-2Rr}}{2R}<1$. Следовательно, искомый угол α существует $\left(\text{при } r\neq\frac{R}{2}\text{ существуют даже два таких угла}\right)$. Таким образом, для любых двух отрезков R и r таких, что $2r\leqslant R$, существует треугольник, для которого радиусы описанного и вписанного кругов равны соответственно R и r, что и требовалось доказать.

Примечание. Это довольно громоздкое рассуждение можно заменить следующим более коротким, которое, правда, не позволяет указать вид треугольника ABC, для которого отношение $R:r$ имеет заданную величину k, но показывает существование такого треугольника для любого $k\geqslant 2$. Зададимся числом k и рассмотрим равнобедренный треугольник $A_0B_0C_0$ с очень малым углом α при вершине — таким малым, что для этого треугольника $R:r=k_0<k$ (это, очевидно, возможно, ибо если $\alpha\longrightarrow 0$, то отношение $R:r$ неограниченно возрастает; см. рис. 240). Затем начнем деформировать треугольник $A_0B_0C_0$, непрерывно увеличивая угол α. При этом отношение $R:r$, непрерывно зависящее от угла α, будет изменяться (возрастать), обращаясь в 2 при $\alpha=60°$ (треугольник $A_1B_0C_0$ на рис. 240). [При дальнейшем увеличении угла α отношение $R:r$ будет снова убывать, стремясь к нулю при $\alpha\longrightarrow 180°$; нам, однако, это совсем неважно.] Изменяясь непрерывно, отношение $R:r$ будет в процессе деформации треугольника принимать *все* значения между k_0 и 2, в том числе и значение k,— чем и завершается доказательство.

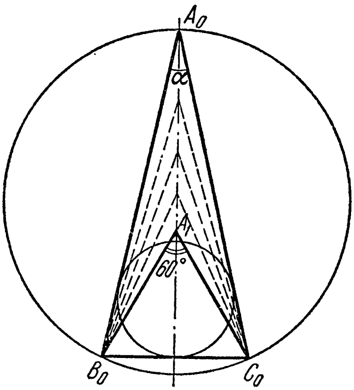


Рис. 240.

в) Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения медиан треугольников BCD, ACD, ADB, ABC — граней тетраэдра $ABCD$ (рис. 241). Нетрудно видеть, что *отрезки* AA_1, BB_1, CC_1 *и* DD_1 *пересекаются в одной точке* Q *и делятся в ней в отношении* $AQ:QA_1=BQ:QB_1=$ $=CQ:QC_1=DQ:QD_1=3:1$. В самом деле, обозначим через Q точку пересечения отрезков AA_1 и BB_1 (принадлежащих одной плоскости ABM, где M — середина ребра CD тетраэдра, и значит, AM и BM — медианы граней ACD и BCD; см. рис. 241а). Так как $MA:MB_1=$ $=MB:MA_1=3:1$, то треугольники MB_1A_1 и MAB подобны; отсюда следует, что $B_1A_1 \parallel AB$ и $AB:B_1A_1=3:1$. А теперь легко убедиться, что треугольники AQB и A_1QB_1 подобны и что $AQ:QA_1=BQ:QB_1=$ $=AB:A_1B_1=3:1$. Точно так же устанавливается, что и отрезки CC_1 и DD_1 пересекают AA_1 в той же точке Q, такой, что $AQ:QA_1=3:1$.

Из доказанного следует, что тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ подобен тетраэдру $ABCD$ с коэффициентом подобия $1/3$; поэтому, если ρ_1 есть радиус описанной сферы σ_1 тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$, то $\rho_1 = \frac{1}{3}$ P. С другой стороны, параллельные граням тетраэдра $ABCD$ плоскости, касающиеся сферы σ_1 (причем параллельная BCD плоскость касается сферы σ_1 снизу, если считать плоскость BCD рис. 241 горизонтальной и

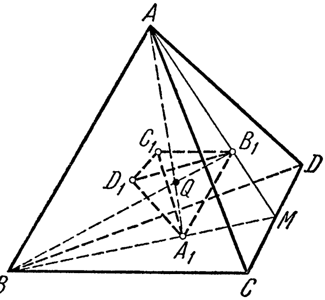


Рис. 241.

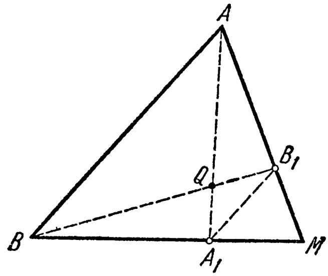


Рис 241а.

точку A лежащей над этой плоскостью), образуют тетраэдр $A_2B_2C_2D_2$, подобный $ABCD$ и не меньший его; поэтому радиус ρ_1 вписанной сферы σ_1 этого тетраэдра не меньше радиуса ρ вписанной сферы σ тетраэдра $ABCD$. Таким образом, имеем

$$\rho \leqslant \rho_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{P}, \quad \text{т. е.} \quad \mathrm{P} \geqslant 3\rho,$$

что и требовалось доказать.

Равенство $\mathrm{P} = 3\rho$ имеет место только в том случае, когда тетраэдры $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$ совпадают, т. е. когда сфера σ_1 совпадает с σ; так обстоит дело в том случае, когда сфера σ касается граней BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$ в их центрах тяжести (точках пересечения медиан) A_1, B_1, C_1 и D_1. Мы предоставим читателю самостоятельно доказать, что в этом случае *тетраэдр $ABCD$ обязательно правильный.*

95. а) Поскольку, в силу результата задачи 48,

$$h_a \leqslant \beta_a \leqslant m_a, \quad h_b \leqslant \beta_b \leqslant m_b \quad \text{и} \quad h_c \leqslant \beta_c \leqslant m_c,$$

то

$$h_a + h_b + h_c \leqslant \beta_a + \beta_b + \beta_c \leqslant m_a + m_b + m_c,$$

где равенства имеют место лишь в том случае, когда треугольник ABC *равносторонний* и $h_a = h_b = h_c = \beta_a = \beta_b = \beta_c = m_a = m_b = m_c$. Поэтому остается лишь показать, что

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r \qquad (*)$$

и

$$m_a + m_b + m_c \leqslant \frac{9}{2} R. \qquad (**)$$

1°. Так как, очевидно,

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}(a+b+c)r,$$

то

$$\frac{1}{r}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Покажем, что при любых положительных x, y, z [1])

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}\geqslant\frac{3}{1/x+1/y+1/z}, \qquad (A)$$

где равенства имеют место лишь при $x=y=z$. В самом деле, нетрудно проверить, что при любых α, β и γ

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma).$$

Поэтому

$$x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}=(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3+(\sqrt[3]{z})^3-$$
$$-3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})\times$$
$$\times(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{xz}-\sqrt[3]{yz})=$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})\left[(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+\right.$$
$$\left.+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2\right]\geqslant 0,$$

где равенство имеет место лишь при $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$, т. е. при $x=y=z$, а следовательно,

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}. \qquad (1)$$

Применив затем неравенство (1) к числам $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, получим

$$\frac{1/x+1/y+1/z}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}=\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}},$$

т. е.

$$\sqrt[3]{xyz}\geqslant\frac{3}{1/x+1/y+1/z}, \qquad (2)$$

где также равенство имеет место лишь при $x=y=z$. Неравенства (1) и (2) вместе и образуют двойное неравенство (A).

---

[1]) Эти неравенства связывают среднее арифметическое $\frac{1}{3}(x+y+z)$ трех чисел x, y, z, их среднее геометрическое $\sqrt[3]{xyz}$ и среднее гармоническое $\dfrac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$ тех же чисел; см. по этому поводу задачи 268, 270, 272 и 282—283 книги Д. О. Шклярского и др. [11].

А теперь без труда получаем

$$\frac{h_a+h_b+h_c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = \frac{3}{1/r} = 3r,$$

откуда следует, что

$$h_a+h_b+h_c \geqslant 9r,$$

причем равенство здесь может иметь место лишь при $h_a=h_b=h_c$, т. е. при $a=b=c$.

2°. Рассмотрим треугольник OAD, где O — центр описанной окружности треугольника ABC и AD — медиана, и в нем отрезок OM, соединяющий вершину O этого треугольника с точкой M, делящей основание AD в отношении $AM:MD=2:1$, т. е. с *точкой пересечения медиан* треугольника ABC (рис. 242). Покажем, что

$$OM^2 = \frac{DM}{AD}\cdot OA^2 + \frac{AM}{AD}\cdot OD^2 - \frac{DM}{AD}\cdot\frac{AM}{AD}\cdot AD^2. \qquad (C)$$

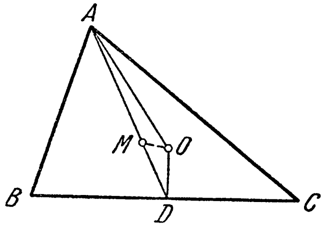


Рис. 242.

(Это равенство составляет содержание так называемой теоремы Стюарта[1]).) Для доказательства применим к треугольникам OAM и ODM теорему косинусов:

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 - 2\,OM\cdot AM\cos\angle AMO;$$
$$OD^2 = OM^2 + DM^2 - 2\,OM\cdot MD\cos\angle DMO.$$

Умножая затем первое из этих равенств на DM/AD, а второе — на AM/AD и складывая результаты, получим, учитывая, что $\cos\angle AMO = -\cos\angle DMO$:

$$\frac{DM}{AD}OA^2 + \frac{AM}{AD}OD^2 = OM^2\left(\frac{DM}{AD}+\frac{AM}{AD}\right) + \frac{AM^2\cdot DM}{AD} + \frac{DM^2\cdot AM}{AD} =$$
$$= OM^2 + \frac{AM\cdot DM}{AD}(AM+DM) =$$
$$= OM^2 + \frac{AM\cdot DM}{AD^2}AD^2 = OM^2 + \frac{AM}{AD}\frac{DM}{AD}\cdot AD^2,$$

откуда и следует равенство (С). А так как в нашем случае

$$OA^2 = R^2,\ OD^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,\ AD^2 = m_a^2 \text{ и } \frac{AM}{AD} = \frac{2}{3},\ \frac{DM}{AD} = \frac{1}{3},$$

то

$$OM^2 = \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}m_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{2}{9}m_a^2.$$

---

[1]) См., например, § 71 книги: Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948.

Аналогично доказывается, что

$$OM^2 = R^2 - \frac{b^2}{6} - \frac{2}{9} m_b^2 \quad \text{и} \quad OM^2 = R^2 - \frac{c^2}{6} - \frac{2}{9} m_c^2.$$

Складывая три последних равенства, получаем

$$3OM^2 = 3R^2 - \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) - \frac{2}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2),$$

откуда вытекает неравенство

$$3R^2 - \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) - \frac{2}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2) \geqslant 0,$$

или

$$3R^2 \geqslant \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2),$$

где равенство может иметь место лишь при совпадении точек O и M, т. е. в том случае, когда треугольник ABC *равносторонний.* Но (см. ниже задачу в))

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2);$$

следовательно,

$$3R^2 \geqslant \frac{2}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2) + \frac{2}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2) = \frac{4}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2).$$

Теперь нам придется воспользоваться еще одним замечательным неравенством, связывающим три произвольных положительных числа x, y и z [1]):

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqslant (x+y+z)^2. \qquad \text{(Б)}$$

Это вытекает из того, что

$$3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 =$$
$$= 3(x^2+y^2+z^2) - (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz) =$$
$$= 2x^2+2y^2+2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0;$$

равенство в (Б) также имеет место лишь в том случае, когда $x=y=z$. Из неравенства (Б) следует, что

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geqslant \frac{1}{3}(m_a+m_b+m_c)^2;$$

таким образом, мы имеем

$$3R^2 \geqslant \frac{4}{27}(m_a+m_b+m_c)^2, \quad \text{или} \quad \frac{81}{4}R^2 \geqslant (m_a+m_b+m_c)^2,$$

т. е.

$$m_a+m_b+m_c \leqslant \frac{9}{2}R, \qquad (**)$$

что нам и надо было доказать.

---

[1]) Теорема о среднем арифметическом и среднем квадратичном трех чисел; ср. с задачами 281—283 книги Д. О. Шклярского и др. [11].

Ясно, что все неравенства настоящей задачи обращаются в равенства в том и только в том случае, когда треугольник ABC *равносторонний*.

б) Пусть o_a — центр, а r_a — радиус вневписанной окружности s_a треугольника ABC (рис. 243). Из рассмотрения треугольников o_aAB, o_aBC и o_aCA с общей высотой r_a без труда получаем

$$S = S_{\triangle o_aAB} + S_{\triangle o_aAC} - S_{\triangle o_aBC} = \frac{1}{2} r_a \cdot c + \frac{1}{2} r_a \cdot b - \frac{1}{2} r_a \cdot a =$$

$$= \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a = \frac{(b+c+a)-2a}{2} r_a = \frac{2p-2a}{2} r_a = (p-a)\cdot r_a,$$

где S — площадь треугольника, т. е.

$$r_a = \frac{S}{p-a}.$$

Аналогично доказывается, что

$$r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

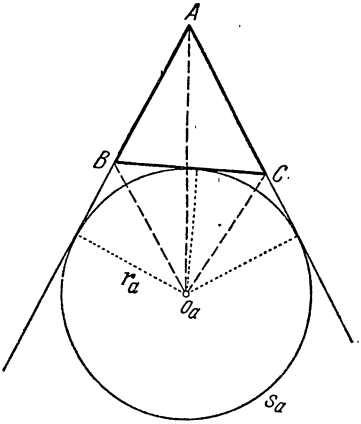


Рис. 243.

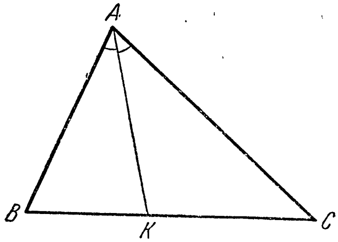


Рис. 244.

С другой стороны, применяя теорему Стюарта (С) (стр. 247) к треугольнику ABC и его биссектрисе $AK = \beta_a$ (рис. 244) и учитывая, что $\frac{BK}{CK} = \frac{c}{b}$, т. е. $\frac{BK}{BC} = \frac{c}{b+c}$ и $\frac{CK}{BC} = \frac{b}{b+c}$, получаем

$$\beta_a^2 = AK^2 = \frac{CK}{BC} \cdot AB^2 + \frac{BK}{BC} \cdot AC^2 - \frac{CK}{BC} \cdot \frac{BK}{BC} \cdot BC^2 =$$

$$= \frac{b}{b+c} c^2 + \frac{c}{b+c} b^2 - \frac{b}{b+c} \frac{c}{b+c} a^2 =$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2} \left[c(b+c) + b(b+c) - a^2\right] = \frac{bc}{(b+c)^2} \left[(b+c)^2 - a^2\right] =$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c+a)(b+c-a) = \frac{bc}{(b+c)^2} 2p \cdot 2(p-a) = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$

откуда следует, что

$$\beta_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

А так как, очевидно,

$$\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\leqslant 1,\text{ ибо } b+c-2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\geqslant 0,$$

и $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона), то

$$\beta_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}\leqslant\sqrt{p(p-a)}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{S^2}{(p-b)(p-c)}}=\sqrt{\frac{S}{p-b}}\cdot\sqrt{\frac{S}{p-c}}=\sqrt{r_br_c},$$

где равенство достигается лишь в том случае, когда $b=c$. Точно так же доказываются неравенства

$$\beta_b\leqslant\sqrt{r_ar_c}\text{ и }\beta_c\leqslant\sqrt{r_ar_b},$$

в которых равенства достигаются, лишь если $a=c$, соответственно $a=b$. Поэтому

$$\beta_a+\beta_b+\beta_c\leqslant\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_ar_c};$$

равенство здесь достигается, лишь если $a=b=c$, т. е. когда треугольник *ABC равносторонний.*

Далее заметим, что

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=\frac{S}{p-a}\,\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-b}\,\frac{S}{p-c}+\frac{S}{p-c}\,\frac{S}{p-a}=$$

$$=\frac{S^2}{(p-a)(p-b)}+\frac{S^2}{(p-b)(p-c)}+\frac{S^2}{(p-c)(p-a)}=$$

$$=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)}+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)}+$$

$$+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-c)(p-a)}=p(p-c)+p(p-a)+p(p-b)=$$

$$=p[(p-a)+(p-b)+(p-c)]=p[3p-(a+b+c)]=p(3p-2p)=p^2.$$

Применяя теперь неравенство (Б) (стр. 248) к числам $x=\sqrt{r_ar_b}$, $y=\sqrt{r_br_c}$, $z=\sqrt{r_ar_c}$, получим

$$3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)\geqslant(\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a})^2,$$

или

$$\sqrt{r_ar_b}+\sqrt{r_br_c}+\sqrt{r_cr_a}\leqslant\sqrt{3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)}=\sqrt{3p^2}=\sqrt{3}p,$$

где равенство имеет место, лишь если $r_a=r_b=r_c$, т. е. если $a=b=c$.

Из уже доказанного равенства

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2,$$

используя то обстоятельство, что для любых x, y, z [1])

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz \tag{В}$$

---

[1] Неравенство (В) можно усилить так (ср. с неравенством (Б), стр. 248):

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\geqslant xy+xz+yz,$$

(это вытекает из очевидного неравенства

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0,$$

где равенство имеет место лишь при $x=y=z$), получаем

$$p^2=r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=\frac{1}{3}[(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)+$$

$$+2(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)]\leqslant\frac{1}{3}[r_a^2+r_b^2+r_c^2+2r_ar_b+2r_br_c+2r_cr_a]=$$

$$=\frac{1}{3}(r_a+r_b+r_c)^2,$$

и значит,

$$\sqrt{3}p\leqslant r_a+r_b+r_c,$$

где также равенство имеет место только в том случае, если треугольник ABC *равносторонний.*

Наконец, равенство

$$r_a+r_b+r_c=r+4R$$

вытекает из следующих преобразований:

$$r_a+r_b+r_c-r=\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}-\frac{S}{p}=$$

$$=S\left[\frac{(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)}+\frac{p-(p-c)}{p(p-c)}\right]=S\left[\frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)}+\frac{c}{p(p-c)}\right]=$$

$$=cS\left[\frac{p(p-c)+(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right]=\frac{cS}{S^2}[p^2-cp+p^2-ap-bp+ab]=$$

$$=\frac{c}{S}[2p^2-p(a+b+c)+ab]=\frac{c}{S}(2p^2-2p^2+ab)=\frac{abc}{S}.$$

С другой стороны, продолжив радиус AO описанной вокруг треугольника окружности до пересечения с окружностью во второй точке A_1 (рис. 245) и рассмотрев подобные прямоугольные треугольники AA_1B и ACP, где AP — высота треугольника, получим

$$\frac{c}{2R}=\frac{h_a}{b},\quad \text{или}\quad R=\frac{bc}{2h_a}=\frac{abc}{2ah_a}=\frac{abc}{4S},$$

откуда следует, что

$$4R=\frac{abc}{S}=r_a+r_b+r_c-r,$$

— а это нам и требовалось доказать.

что вытекает из общих теорем о симметрических средних $\left(\text{к их числу принадлежат «средние» } \frac{x+y+z}{3} \text{ и } \sqrt{\frac{xy+xz+yz}{3}}\right)$ и степенных средних $\left(\text{как } \frac{x+y+z}{3} \text{ или } \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\right)$ трех или нескольких чисел. По этому поводу см. задачи 281—283 и 285—286 книги [11].

в) Из уже использованных в решении задачи а) неравенств, связывающих проведенные из одного угла высоту, биссектрису и медиану (ср. выше задачу 48), сразу получаем

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \leqslant \beta_a^2+\beta_b^2+\beta_c^2 \leqslant m_a^2+m_b^2+m_c^2,$$

где равенства имеют место только для *равностороннего* треугольника; таким образом, нам осталось лишь доказать, что

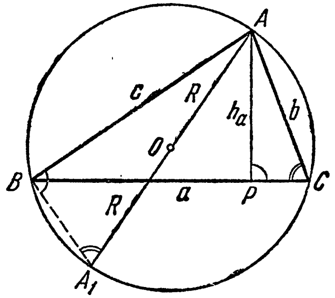


Рис. 245.

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \geqslant 27r^2;$$

$$\beta_a^2+\beta_b^2+\beta_c^2 \leqslant p^2;$$

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geqslant p^2;$$

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

и

$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \leqslant \frac{27}{4}R^2,$$

т. е. $a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2$.

Четвертое равенство непосредственно вытекает из известных формул

$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}, \quad m_b^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}, \quad m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

(ср. выше, стр. 158). Первое, второе, третье и пятое неравенства мы будем доказывать последовательно.

1°. Из основных неравенств (Б) (стр. 248) и (А) (стр. 246) получаем

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2 \geqslant \frac{1}{3}\left(h_a+h_b+h_c\right)^2=3\left(\frac{h_a+h_b+h_c}{3}\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant 3\left(\frac{3}{1/h_a+1/h_b+1/h_c}\right)^2=3\left(\frac{3}{1/r}\right)^2=27r^2$$

(см. выше, стр. 246); равенство здесь имеет место, лишь если $h_a=h_b=$ $=h_c$, т. е. $a=b=c$.

2°. Выше мы уже видели (ср. стр. 249—250), что

$$\beta_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)} \leqslant \sqrt{p(p-a)}$$

и аналогично

$$\beta_b \leqslant \sqrt{p(p-b)}, \quad \beta_c \leqslant \sqrt{p(p-c)};$$

равенства здесь достигаются при $b=c$, соответственно при $a=c$ и при $a=b$. Поэтому

$$\beta_a^2+\beta_b^2+\beta_c^2 \leqslant p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)=$$

$$=p[p-a+p-b+p-c]=p[3p-2p]=p^2$$

— и здесь равенство имеет место лишь при $a=b=c$.

3°. Из равенства $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, используя неравенство (Б) (стр. 248), получаем

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\geqslant\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(2p)^2=p^2$$

(и здесь равенство достигается лишь для правильного треугольника!).

4°. Выше (стр. 248) мы уже видели, что

$$3R^2\geqslant\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+\frac{2}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)+$$
$$+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

(где равенство имеет место лишь при $a=b=c$); поэтому

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2.$$

г) Как и выше, из неравенств типа $h_a\leqslant\beta_a\leqslant m_a$ сразу получаем

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geqslant\frac{1}{\beta_a}+\frac{1}{\beta_b}+\frac{1}{\beta_c}\geqslant\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c},$$

где равенства имеют место только для равностороннего треугольника. С другой стороны, выше (стр. 246) мы уже видели, что

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r};$$

кроме того, очевидно (см. стр. 249),

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}=$$
$$=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

Таким образом, нам надо лишь показать, что

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geqslant\frac{2}{R}.$$

Но используя неравенства (А) (стр. 246) и (Б) (стр. 248) [1]) и результат задачи в), получаем

$$\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geqslant\frac{9}{m_a+m_b+m_c}=$$
$$=\frac{9}{\sqrt{(m_a+m_b+m_c)^2}}\geqslant\frac{9}{\sqrt{3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}}\geqslant\frac{9}{\sqrt{3\,\frac{27}{4}R^2}}=\frac{2}{R},$$

[1]) Здесь, по существу, используется неравенство (ср. с задачей 283 книги [11]) $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geqslant\frac{1}{1/3\,(1/x+1/y+1/z)}$.

где также равенство имеет место лишь при $m_a=m_b=m_c$, т. е. при $a=b=c$.

96. а) Выше (стр. 250) мы уже видели, что

$$r_ar_b+r_br_c+r_ar_c=p^2;$$

поэтому, используя неравенство (В) (стр. 250) и вытекающее из результатов задачи 95 а), б) неравенство

$$9r\leqslant p\sqrt{3}, \text{ или } p^2\geqslant 27r^2$$

(см. также ниже задачу 97), получаем

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2\geqslant r_ar_b+r_ar_c+r_br_c=p^2\geqslant 27r^2,$$

где также равенство может иметь место лишь в случае *равностороннего* треугольника.

б) Из того, что $r_a+r_b+r_c=4R+r$ (задача 95 б)) и $R\geqslant 2r$ (задача 94 а)), непосредственно следует, что

$$r_a+r_b+r_c\leqslant 4R+\frac{1}{2}R=\frac{9}{2}R,$$

где равенство имеет место при $R=2r$, т. е. для *равностороннего* треугольника. С другой стороны, очевидно,

$$4R<4R+r=r_a+r_b+r_c,$$

причем отношение $\dfrac{r_a+r_b+r_c}{R}$ будет тем ближе к 4, чем меньше отношение r/R.

Ясно, что неравенства задач а) и б) улучшены быть не могут.

97. В задаче 95 в) уже было показано, что

$$27r^2\leqslant p^2\leqslant\frac{27}{4}R^2,$$

откуда

$$r\leqslant\frac{\sqrt{3}\,p}{9}\leqslant\frac{1}{2}R,$$

причем равенство имеет место лишь для *равностороннего* треугольника. Таким образом, нам остается доказать, что

$$r\leqslant\frac{\sqrt{\sqrt{3}\,S}}{3}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}p.$$

Но это очевидным образом вытекает из неравенства

$$r\leqslant\frac{\sqrt{3}\,p}{9} \qquad (*)$$

и из того, что $pr=S$: умножив обе части неравенства (*) сначала на r, а затем на p, получаем $r^2 \leqslant \frac{\sqrt{3}\,pr}{9} = \frac{\sqrt{3}\,S}{9}$, т. е. $r \leqslant \frac{\sqrt{\sqrt{3}\,S}}{3}$ и $S = pr \leqslant \frac{\sqrt{3}\,p^2}{9}$, т. е. $\frac{\sqrt{3}\,S}{9} \leqslant \frac{3p^2}{81}$, или $\frac{\sqrt{\sqrt{3}\,S}}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}\,p}{9}$, где равенство достигается в том случае, когда $r = \frac{1}{2}R$, т. е. когда рассматриваемый треугольник ABC *равносторонний*.

98. Первое решение. Пусть тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу Σ радиуса P. Если основание BCD этого тетраэдра принадлежит фиксированной плоскости π, удаленной от центра O сферы Σ на расстояние d, то объем V тетраэдра не превосходит $\frac{1}{3}S(\mathrm{P}+d)$, где S — площадь треугольника BCD, — ведь высота AP тетраэдра не может превзойти расстояния $A_0Q = \mathrm{P}+d$ наиболее удаленной от π точки A_0 сферы Σ до плоскости π (рис. 246). С другой стороны, радиус $QB = r$ описанной вокруг треугольника ABC окружности s — сечения сферы Σ плоскостью π, — очевидно, равен

$$r = \sqrt{OB^2 - OQ^2} = \sqrt{\mathrm{P}^2 - d^2};$$

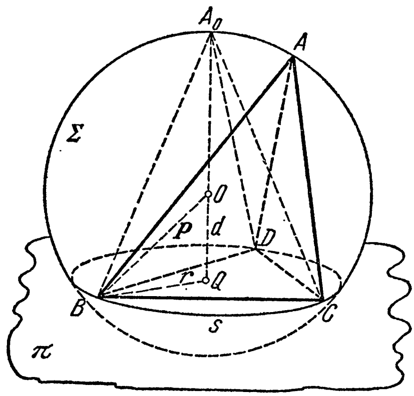


Рис. 246.

поэтому площадь S треугольника BCD удовлетворяет неравенству

$$S \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}(\mathrm{P}^2 - d^2)$$

(см. задачу 97).

Таким образом, мы имеем

$$V \leqslant \frac{1}{3}S(\mathrm{P}+d) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(\mathrm{P}^2 - d^2)(\mathrm{P}+d),$$

и нам остается только выяснить, *при каком* d (удовлетворяющем неравенству $0 \leqslant d \leqslant \mathrm{P}$) *произведение*

$$(\mathrm{P}^2 - d^2)(\mathrm{P}+d) = (\mathrm{P}-d)(\mathrm{P}+d)(\mathrm{P}+d) = \frac{1}{2}(2\mathrm{P}-2d)(\mathrm{P}+d)(\mathrm{P}+d)$$

принимает наибольшее возможное значение.

Но в силу неравенства (А), стр. 246

$$(2\mathrm{P}-2d)(\mathrm{P}+d)(\mathrm{P}+d) \leqslant \left[\frac{(2\mathrm{P}-2d)+(\mathrm{P}+d)+(\mathrm{P}+d)}{3}\right]^3 = \left(\frac{4}{3}\mathrm{P}\right)^3 = \frac{64}{27}\mathrm{P}^3,$$

где равенство имеет место, лишь если

$$2P-2d=P+d, \quad \text{т. е.} \quad d=\frac{P}{3}.$$

Отсюда и следует, что

$$V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(P^2-d^2)\,(P+d)=\frac{\sqrt{3}}{8}[\,(2P-2d)\,(P+d)^2] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{64}{27}P^3=\frac{8\sqrt{3}}{27}P^3,$$

что и требовалось доказать.

Равенство $V=\frac{8\sqrt{3}}{27}P^3$ имеет место, если треугольник BCD правильный и вершина A тетраэдра $ABCD$ проектируется на плоскость π грани BCD в центр Q описанной вокруг BCD окружности s (т. е. если треугольная пирамида $ABCD$—правильная) и если, кроме того расстояние d от центра O описанной вокруг $ABCD$ сферы до плоскости π равно 1/3 радиуса P описанной сферы. Но в этом случае квадрат радиуса r окружности s равен

$$r^2=P^2-d^2=P^2-\left(\frac{P}{3}\right)^2=\frac{8}{9}P^2,$$

и боковые ребра AB, AC, AD тетраэдра (треугольной пирамиды) $ABCD$ равны

$$AB=\sqrt{AQ^2+QB^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}P\right)^2+\frac{8}{9}P^2}=\sqrt{\frac{16}{9}P^2+\frac{8}{9}P^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}P,$$

т. е. равны стороне BC (или CD, или DB) вписанного в окружность s радиуса $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}P$ правильного треугольника (эта сторона равна $r\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}P$), т. е. если тетраэдр $ABCD$ *правильный*.

Второе решение. Результат настоящей задачи нетрудно получить также из неравенств задач 106 а) и 94 в). В самом деле, разбив тетраэдр $ABCD$ на четыре меньших тетраэдра $oBCD$, $oACD$, $oABD$ и $oABC$ с общей высотой ρ (здесь o—центр вписанной сферы тетраэдра), без труда получаем, что

$$V=\frac{1}{3}\Delta\cdot\rho.$$

Поэтому из неравенства $P \geqslant \frac{\sqrt{2\sqrt{3}\Delta}}{4}$, или $\Delta \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{3}P^2$, задачи 106 а) и неравенства $\rho \leqslant \frac{1}{3}P$ задачи 94 в) следует, что

$$V=\frac{1}{3}\rho\cdot\Delta \leqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}P\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}P^2=\frac{8\sqrt{3}}{27}P^3,$$

где равенство имеет место, лишь если $\Delta=\frac{8\sqrt{3}}{27}P^2$ и $\rho=\frac{1}{3}P$, т. е. если тетраэдр $ABCD$ *правильный*.

99. Докажем сперва, что

$$V=\frac{1}{6}aa_1h_a\sin\alpha, \qquad (*)$$

где V — объем тетраэдра $ABCD$, h_a — расстояние между его ребрами $AD=a$ и $BC=a_1$, а α — угол между прямыми AD и BC. В самом деле, из рис. 247, где $BB_1 \# CC_1 \# AD$, видно, что объем V тетраэдра $ABCD$ равен разности между объемом v_1 «клина» (треугольной призмы) ADB_1BCC_1 и объемом v_2 четырехугольной пирамиды DBB_1C_1C. Но

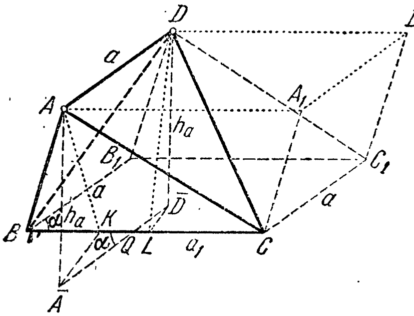


Рис. 247.

$$v_2=\frac{1}{3}h_a\cdot S_{BB_1C_1C}=$$

$$=\frac{1}{3}h_a\cdot(aa_1\sin\alpha)$$

и (поскольку объем v_1 «клина» ADB_1BCC_1 равен половине объема V_1 параллелепипеда $BB_1C_1CADD_1A_1$, где $AA_1 \# DD_1 \# BC$)

$$v_1=\frac{1}{2}V_1=\frac{1}{2}h_a\cdot S_{BB_1C_1C}=\frac{1}{2}h_a\cdot(aa_1\sin\alpha).$$

Поэтому

$$V=v_1-v_2=\frac{1}{2}h_aaa_1\sin\alpha-\frac{1}{3}h_aaa_1\sin\alpha=\frac{1}{6}aa_1h_a\sin\alpha.$$

Далее будем решать задачи а) и б) раздельно.

а) Пусть $\bar{A}D$ — ортогональная проекция ребра AD тетраэдра $ABCD$ на плоскость BB_1C_1C, а AK и DL — высоты треугольников ABC и DBC (см. тот же рис. 247). В таком случае

$$S_{\Delta ABC}+S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}a_1\cdot AK+\frac{1}{2}a_1\cdot DL=\frac{1}{2}a_1(AK+DL)=$$

$$=\frac{1}{2}a_1\left(\sqrt{h_a^2+(\bar{A}K)^2}+\sqrt{h_a^2+(\bar{D}L)^2}\right).$$

Но если отрезок $\bar{A}\bar{D}$ пересекает прямую BC в точке Q, то

$$\bar{A}K=AQ\sin\alpha;\ \bar{D}L=DQ\sin\alpha \text{ и } \bar{A}K+\bar{D}L=\bar{A}\bar{D}\sin\alpha=a\sin\alpha.$$

Поэтому, *сдвинув отрезок AD вдоль прямой AD так, чтобы точка Q стала серединой отрезка* $\bar{A}\bar{D}$, т. е. так, чтобы имело место равенство $\bar{A}K=\bar{D}L$, мы *не изменим объем* $V\left(=\frac{1}{6}aa_1h_a\sin\alpha\right)$ тетраэдра

$ABCD$, и не изменим сумму $\overline{A}K+\overline{D}L\,(=a\sin\alpha)$, но уменьшим сумму

$$S_{\Delta ABC}+S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}a_1\left(\sqrt{h_a^2+(\overline{A}K)^2}+\sqrt{h_a^2+(\overline{D}L)^2}\right) \qquad (**)$$

(см. примечание к решению задачи 69 а)). А так как площади граней BAD и CAD тетраэдра при этом его преобразовании не меняются, то *площадь* Δ *поверхности тетраэдра* только *уменьшится* (точнее — не увеличится). Если же отрезок $\overline{A}\overline{D}$ не пересекает прямую BC, то на первом шаге преобразования тетраэдра $ABCD$ мы сдвинем отрезок AD по прямой AD так, чтобы ближайший к BC конец отрезка $\overline{A}\overline{D}$ попал на прямую BC. При этом оба отрезка $\overline{A}K$ и $\overline{D}L$ уменьшатся — т. е. в силу формулы (**) уменьшится также и сумма $S_{\Delta ABC}+S_{\Delta DBC}$, в то время как сумма $S_{\Delta BAD}+S_{\Delta CAD}$ не изменится и, значит, величина Δ уменьшится; далее же поступим, как описано выше. Наконец, сдвинем также и отрезок BC вдоль прямой BC так, чтобы проекция $\overline{B}\overline{C}$ отрезка BC на проходящую через AD плоскость $\pi\|BC$ делилась пополам прямой AD; это преобразование также *не меняет объема* V тетраэдра и может только *уменьшить величину* Δ его поверхности.

Таким образом, мы заменили исходный тетраэдр $ABCD$ новым тетраэдром $A'B'C'D'$, имеющим тот же объем и не бо́льшую площадь поверхности; при этом *отрезок, соединяющий середины противоположных ребер* $A'D'$ *и* $B'C'$ *тетраэдра* $A'B'C'D'$, *перпендикулярен обоим ребрам.* Проведем далее через каждую пару противоположных ребер тетраэдра $ABCD$ и (преобразованного) тетраэдра $A'B'C'D'$ параллельные плоскости и рассмотрим (описанный вокруг тетраэдра!) параллелепипед, грани которого лежат в этих плоскостях (рис. 248, *а*, *б*); этот параллелепипед представляет собой пересечение шести полупространств, ограниченных шестью рассматриваемыми плоскостями и содержащих исходный тетраэдр. Гранями такого параллелепипеда будут служить шесть параллелограммов, каждый из которых имеет своими диагоналями ребро тетраэдра и параллельную проекцию противоположного ребра тетраэдра на плоскость грани; направление проектирования задается четырьмя другими ребрами параллелепипеда. Заметим теперь, что преобразованный тетраэдр $A'B'C'D'$ характеризуется тем, что описанный вокруг него параллелепипед $\overline{A}'B'\overline{D}'C'A'\overline{B}'D'\overline{C}'$ является прямым, в то время как отвечающий исходному тетраэдру $ABCD$ параллелепипед $\overline{A}_1B\overline{D}_1C A\overline{B}_1D\overline{C}_1$ (грани $\overline{A}_1B\overline{D}_1C$ и $A\overline{B}_1D\overline{C}_1$ которого равны граням $\overline{A}'B'\overline{D}'C'$ и $A'\overline{B}'D'\overline{C}'$ преобразованного параллелепипеда и лежат в тех же плоскостях!), вообще говоря, будет наклонным.

Примем, наконец, за «основания» (прямого) параллелепипеда $\overline{A}'B'\overline{D}'C'A'\overline{B}'D'\overline{C}'$ его грани $A'\overline{B}'B'\overline{A}'$ и $\overline{C}'D'\overline{D}'C'$; в таком случае наш параллелепипед обратится в «наклонный» (отличающийся от общего параллелепипеда лишь тем, что основания $A'\overline{B}'B'\overline{A}'$ и $\overline{C}'D'\overline{D}'C'$ параллелепипеда $\overline{A}'B'\overline{D}'C'A'\overline{B}'D'\overline{C}'$, так же как и его грани $\overline{B}'D'\overline{D}'B'$ и $A'\overline{C}'C'\overline{A}'$, являются прямоугольниками). Затем преобразуем тетраэдр $A'B'C'D'$ аналогично тому, как мы поступили ранее с тетраэдром $ABCD$, с тем, чтобы описанный вокруг него параллелепипед стал прямым — для этого нам придется сдвинуть ребро $A'B'$ тетраэдра $A'B'C'D'$ вдоль прямой $A'B'$ в такое положение $A''B''$, чтобы (ортогональная!) проекция $\bar{A}''\bar{B}''$ отрезка $A''B''$ на плоскость $\bar{C}'D'\bar{D}'C'$ делилась ребром $C'D'$ пополам, а затем сдвинуть также и ребро $C'D'$ вдоль прямой $C'D'$ в новое положение $C''D''$. В результате мы придем к новому тетраэдру $A''B''C''D''$, вписанному в прямоугольный параллелепипед $\bar{A}''B''\bar{D}''C''A''\bar{B}''D''\bar{C}''$ (рис. 248, *в*); этот последний тетраэдр имеет

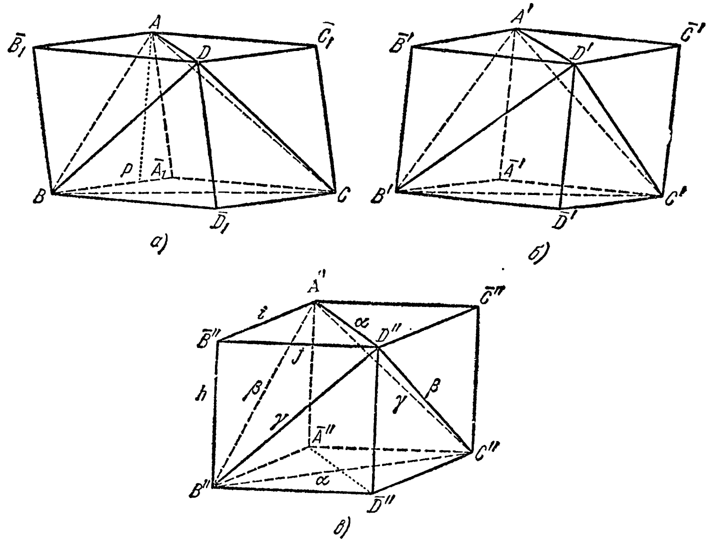


Рис. 248.

тот же объем V, что и исходный тетраэдр $ABCD$, и *не бóльшую чем* $ABCD$ *площадь* Δ'' *боковой поверхности.*

Обозначим ребра прямоугольного параллелепипеда $\bar{A}''B''\bar{D}''C''A''\bar{B}''D''\bar{C}''$ (рис. 248, *в*) через $A''\bar{B}''=i$, $\bar{B}''D''=j$ и $\bar{B}''B''=h$. Так как площадь $S_{\bar{A}''B''\bar{D}''C''}=ij$ основания параллелепипеда, очевидно, равна $\frac{1}{2}B''C''\cdot\bar{A}''\bar{D}''\sin\angle(B''C'',\ \bar{A}''\bar{D}'')$, а высота $\bar{B}''B''=h$ равна расстоянию между ребрами $B''C''$ и $A''D''$ тетраэдра $A''B''C''D''$, то объем ijh параллелепипеда равен утроенному объему V тетраэдра $A''B''C''D''$ (см. формулу (*) на стр. 257). С другой стороны, каждая грань тетраэдра $A''B''C''D''$ представляет собой треугольник со сторонами

$$\alpha=\sqrt{i^2+j^2},\quad \beta=\sqrt{i^2+h^2}\quad\text{и}\quad\gamma=\sqrt{j^2+h^2},$$

равными диагоналям граней параллелепипеда $\bar{A}''B''\bar{D}''C''A''\bar{B}''D''\bar{C}''$. Но площадь треугольника со сторонами α, β и γ, в силу формулы

Герона, равна

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cdot\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2][\gamma^2-(\alpha-\beta)^2]}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[2\alpha\beta+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)][2\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)]}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4};$$

поэтому площадь Δ'' поверхности тетраэдра $A''B''C''D''$ равна

$$\Delta''=\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}=$$
$$=[2(i^2+j^2)(i^2+h^2)+2(i^2+j^2)(j^2+h^2)+2(i^2+h^2)(j^2+h^2)-$$
$$-(i^2+j^2)^2-(i^2+h^2)^2-(j^2+h^2)^2]^{1/2}=2\sqrt{i^2j^2+i^2h^2+j^2h^2}.$$

А так как в силу неравенства (А) (стр. 246)

$$i^2j^2+i^2h^2+j^2h^2\geqslant 3\sqrt[3]{i^2j^2\cdot i^2h^2\cdot j^2h^2}=$$
$$=3\sqrt[3]{(ijh)^4}=3\sqrt[3]{(3V)^4}=9\sqrt[3]{3V^4},$$

то

$$\Delta''\geqslant 2\sqrt{9\sqrt[3]{3V^4}}=6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\Delta\geqslant\Delta''\geqslant 6\sqrt[3]{\sqrt{3}\cdot V^2},$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что доказанное неравенство обращается в равенство в том и только в том случае, если исходный тетраэдр $ABCD$ вписан в прямоугольный параллелепипед $A\bar{B}_1D\bar{C}_1\bar{A}_1B\bar{D}_1C$ с равными ребрами i, j и h, т. е. в куб; но в этом случае тетраэдр $ABCD$, ребра которого служат диагоналями шести граней куба $A\bar{B}_1D\bar{C}_1\bar{A}_1B\bar{D}_1C$ *правильный.*

б) Покажем, что описанные выше преобразования, не меняющие объема V тетраэдра $ABCD$, не могут *увеличить его периметр* 2Π. В самом деле, у изображенных на рис. 248, *а*, *б* тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$, очевидно,

$$BC=B'C' \text{ и } AD=A'D';$$

далее, ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ равны диагоналям параллелограмма $A\bar{B}_1B\bar{A}_1$, а ребра $A'B'$ и $C'D'$ тетраэдра $A'B'C'D'$ — диагоналям прямоугольника $A'\bar{B}'B'\bar{A}'$. Но сторона $\bar{A}_1B$ параллелограмма равна стороне $\bar{A}'B'$ прямоугольника (ибо основания $\bar{A}_1B\bar{D}_1C$ и $\bar{A}'B'\bar{D}'C'$ изображенных на рис. 248, *а*, *б* параллелепипедов одинаковы); с другой стороны, высота $\bar{B}'B' = h_a$ прямоугольника $A'\bar{B}'B'\bar{A}'$, равная расстоянию между плоскостями $A'\bar{B}'D'\bar{C}'$ и $\bar{A}'B'\bar{D}'C'$, или, что то же самое, расстоянию между плоскостями $A\bar{B}_1D\bar{C}_1$ и $\bar{A}_1B\bar{D}_1C$, не больше опущенной на $\bar{A}_1B$ высоты AP параллелограмма $A\bar{B}_1B\bar{A}_1$. Далее, из рис. 248 и 249 без труда получаем

$$AB+CD = AB+\bar{A}_1\bar{B}_1 = 2\,(BQ+\bar{A}_1Q) \geqslant 2\,(BQ_1+\bar{A}_1Q_1) \geqslant$$
$$\geqslant 2\,(BQ'+\bar{A}_1Q') = (B'A'+\bar{A}'\bar{B}') = A'B'+C'D',$$

где обозначения ясны из рис. 249, и неравенство $BQ+\bar{A}_1Q \geqslant \geqslant BQ_1+\bar{A}_1Q_1$ следует из результата задачи 69 а). Точно так же доказывается, что

$$BD+AC \geqslant B'D'+A'C',$$

и поскольку $AD = A'D'$ и $BC = B'C'$, то

$$2\Pi = AB+AC+AD+CD+ +BD+BC \geqslant A'B'+A'C'+ +A'D'+C'D'+B'D'+B'C' = 2\Pi'$$

— *периметр* $2\Pi'$ *тетраэдра* $A'B'C'D'$ *не больше периметра* 2Π *тетраэдра* $ABCD$. Наконец, совершенно аналогично устанавливается, что *периметр* $2\Pi''$ изображенного на рис. 248, *в тетраэдра* $A''B''C''D''$ не больше периметра $2\Pi'$ тетраэдра $A'B'C'D'$, а следовательно, тем более, *не больше периметра* 2Π исходного *тетраэдра* $ABCD$.

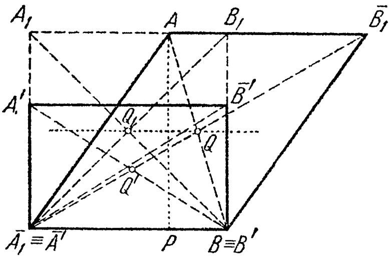


Рис. 249.

А теперь, используя обозначения решения задачи а), имеем

$$\Pi'' = \alpha+\beta+\gamma = \sqrt{i^2+j^2}+\sqrt{i^2+h^2}+\sqrt{j^2+h^2},$$

откуда, поскольку

$$x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy$$

и

$$X+Y+Z \geqslant 3\sqrt[3]{XYZ}$$

(неравенство (А), стр. 246), получаем

$$\Pi'' = \sqrt{i^2+j^2}+\sqrt{i^2+h^2}+\sqrt{j^2+h^2} \geqslant \sqrt{2ij}+\sqrt{2ih}+\sqrt{2jh} \geqslant$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{\sqrt{8\,(ij)\,(ih)\,(jh)}} = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{ijh} = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}.$$

Окончательно мы получаем требуемое неравенство:

$$\Pi \geqslant \Pi'' \geqslant 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}.$$

В равенство это неравенство обращается при тех же условиях, что и неравенство задачи а), т. е. если тетраэдр $ABCD$ *правильный*.

Примечание 1. Другое доказательство неравенства

$$\Delta \geqslant 6 \sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}$$

имеется в книге Г. Хадвигера [4] (стр. 366—367); несмотря на нарочито общую форму, в какую это доказательство облечено (у Хадвигера доказывается «n-мерный аналог» рассматриваемого неравенства), его можно изложить и вполне элементарно.

Примечание 2. Из нашего доказательства нетрудно также усмотреть, что *объем V, площадь поверхности Δ и сумма длин ребер* 2Π *произвольного* (не обязательно прямого!) *параллелепипеда связаны неравенствами*

$$\Delta \geqslant 6 \sqrt[3]{V^2} \quad \text{и} \quad \Pi \geqslant 6 \sqrt[3]{V},$$

обращающимися в равенство только для куба; мы предоставим сделать это читателю.

100. а) Первое решение. В силу результатов задач 95 в) и 97 площадь S, полупериметр p и сумма δ квадратов сторон произвольного треугольника ABC связаны неравенствами

$$\delta \geqslant \frac{4}{3} p^2 \geqslant 4\sqrt{3}\, S,$$

что и требовалось доказать.

Равенство здесь имеет место лишь для *равностороннего* треугольника.

Второе решение. Используя неравенства (А) (стр. 246) и (Б) (стр. 246), получаем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p}\cdot\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{p}\cdot\sqrt{\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3} = \sqrt{p}\cdot\sqrt{\left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3} =$$

$$= \sqrt{p}\sqrt{\left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3} = \sqrt{p}\cdot\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{\sqrt{p^4}}{3\sqrt{3}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2 \leqslant \frac{1}{12\sqrt{3}}\cdot 3(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2),$$

что и требовалось доказать.

Равенство здесь имеет место, лишь если $a=b=c$, т. е. когда треугольник ABC *правильный*.

Третье решение. Пусть ABC_1, BCA_1, CAB_1 — равносторонние треугольники, построенные на сторонах треугольника ABC; при этом нам здесь будет удобно считать, что точки A и A_1 расположены по одну сторону от прямой BC, точки B и B_1 расположены по одну сторону от AC и точки C и C_1 расположены по одну сторону от AB (рис. 250, *а*). Докажем, что *отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны между собой*:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

(Прямые AA_1, BB_1 и CC_1, кроме того, пересекаются в одной точке и образуют друг с другом одинаковые углы, что впрочем, нам сейчас совершенно неважно [1].)

Вычислим квадрат отрезка AA_1. Из рис. 250, *а* видно, что $\angle ACA_1 = \pm(60^\circ - C)$; кроме того, $CA = b$ и $CA_1 = CB = a$. Поэтому,

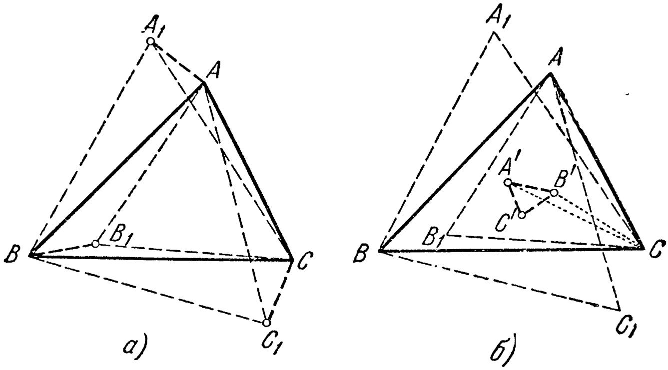


Рис. 250.

применяя дважды теорему косинусов, получаем

$$
\begin{aligned}
AA_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^\circ - C) = \\
&= a^2 + b^2 - 2ab(\cos 60^\circ \cos C + \sin 60^\circ \sin C) = \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) = \\
&= a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(2ab\cos C) - 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right) = \\
&= a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2\sqrt{3}S = \\
&= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2\sqrt{3}S = \frac{1}{2}[(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S].
\end{aligned}
$$

Из того, что выражение для AA_1^2 оказалось симметричным относительно длин сторон a, b, c треугольника, и следует, что $BB_1^2 = CC_1^2 = AA_1^2 = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S]$; однако важно нам сейчас не это. Интерес для нас представляет само выражение, стоящее

---

[1]) Аналогичными свойствами обладают и отрезки $A\bar{A}_1$, $B\bar{B}_1$, $C\bar{C}_1$, где $AB\bar{C}_1$, $BC\bar{A}_1$ и $CB\bar{A}_1$ — равносторонние треугольники, построенные на сторонах треугольника ABC вне его (см., например, решение задачи 71 б) книги Д. О. Шклярского и др. [17]); в этом случае

$$A\bar{A}_1 = B\bar{B}_1 = C\bar{C}_1 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S).$$

в правой части последней формулы,— ведь поскольку $AA_1 \geqslant 0$, то

$$(a^2+b^2+c^2)-4\sqrt{3}\,S \geqslant 0, \text{ т. е. } a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S,$$

что нам и требовалось доказать.

Равенство $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}\,S$ имеет место, лишь если $AA_1=BB_1=CC_1=0$, т. е. если все треугольники ABC_1, B_1CA и CBA_1 совпадают с исходным треугольником ABC, и следовательно, этот треугольник *правильный*.

Четвертое решение. Это решение очень близко к предыдущему. Рассмотрим те же три равносторонних треугольника ABC_1, BCA_1 и CAB_1, которые фигурировали в третьем решении задачи; пусть C', A' и B' — центры этих треугольников (рис. 250. *б*). Докажем, что *треугольник $A'B'C'$ равносторонний* [1]). В самом деле, вычислим длину отрезка $A'B'$. Из рис. 250, *б* следует, что $CA'=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (радиус окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника BCA_1 со стороной $BC=a$), $CB'=\frac{b\sqrt{3}}{3}$ (по аналогичной причине); далее $\angle BCA'=30^\circ$, $\angle ACB'=30^\circ$, и значит, $\angle A'CB'=\pm(60^\circ-C)$. Поэтому по теореме косинусов

$$A'B'^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\,\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{3}\cos(60^\circ-C)=$$
$$=\frac{1}{3}(a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ-C)),$$

откуда легко получить (ср. с третьим решением задачи), что

$$A'B'=\frac{1}{6}\,[(a^2+b^2+c^2)-4\sqrt{3}\,S].$$

$\left(\text{Точно так же показывается, что } B'C'=C'A'=\frac{1}{6}\,[a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S].\right)$ Таким образом, имеем

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S \geqslant 0, \text{ т. е. } a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

Равенство здесь имеет место, лишь если точки A', B' и C' совпадают, т. е. если треугольник ABC *правильный*.

б) Первое решение. Заметим, что при любых положительных числах x, y, z

$$xy+xz+yz \geqslant \sqrt{3xyz\,(x+y+z)}, \tag{Г}$$

где равенство имеет место лишь при $x=y=z$.

---

[1]) Аналогичным свойством обладают и центры $\bar{A}'$, $\bar{B}'$, $\bar{C}'$ равносторонних треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC вне его, причем здесь

$$\bar{A}'\bar{B}'=\bar{B}'\bar{C}'=\bar{C}'\bar{A}'=\frac{1}{6}\,(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\,S)$$

(см., например, второе решение задачи 110 а) книги [17]).

В самом деле,

$$(xy+xz+yz)^2=x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2.$$

Далее, используя неравенства (ср. выше, стр. 261)

$$2xy\leqslant x^2+y^2,\quad 2xz\leqslant x^2+z^2,\quad 2yz\leqslant y^2+z^2,$$

получаем

$$2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2=x^2\cdot 2yz+y^2\cdot 2xz+z^2\cdot 2xy\leqslant$$
$$\leqslant x^2(y^2+z^2)+y^2(x^2+z^2)+z^2(x^2+y^2)=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2,$$

т. е.

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\geqslant x^2yz+xy^2z+xyz^2.$$

Следовательно,

$$(xy+xz+yz)^2=(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+$$
$$+2(x^2yz+xy^2z+xyz^2)\geqslant 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)=3xyz(x+y+z),$$

что равносильно неравенству (Г). Равенство здесь имеет место лишь в том случае, когда $x-y=0$, $x-z=0$, $y-z=0$, т. е. когда $x=y=z$.

Заметим теперь, что

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)=3p-(a+b+c)=p$$

(и $p-a>0$, $p-b>0$, $p-c>0$). Поэтому в силу формулы Герона

$$\sqrt{3}S=\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\sqrt{3(p-a)(p-b)(p-c)[(p-a)+(p-b)+(p-c)]}\leqslant$$
$$\leqslant(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)=$$
$$=3p^2-p(2a+2b+2c)+(ab+ac+bc)=$$
$$=3p^2-p\cdot 4p+(ab+ac+bc)=ab+ac+bc-p^2=$$
$$=\frac{1}{4}[4(ab+ac+bc)-(a+b+c)^2]=\frac{1}{4}[2ab+2bc+2ac-a^2-b^2-c^2]=$$
$$=\frac{1}{4}[(a^2+b^2+c^2)-(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)]=$$
$$=\frac{1}{4}[(a^2+b^2+c^2)-[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]],$$

что и требовалось доказать. Равенство здесь имеет место, лишь если $p-a=p-b=p-c$, т. е. если $a=b=c$, и треугольник ABC *равносторонний*.

Второе решение. По теореме косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

или

$$a^2=(b-c)^2+2bc(1-\cos A)=$$
$$=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}=(b-c)^2+8\,\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin A}\cdot\frac{1}{2}\,bc\sin A=$$
$$=(b-c)^2+8\,\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\,S=(b-c)^2+4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Аналогично выводим, что

$$b^2=(a-c)^2+4S\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad c^2=(a-b)^2+4S\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Поэтому

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=4S\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{C}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right),$$

и нам остается только доказать, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.\qquad (*)$$

Последнее неравенство можно получить с помощью несложных преобразований выражения $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{C}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ $\left(\text{где}\ \frac{C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)$; нам, однако, будет проще сослаться на полученные ранее результаты.

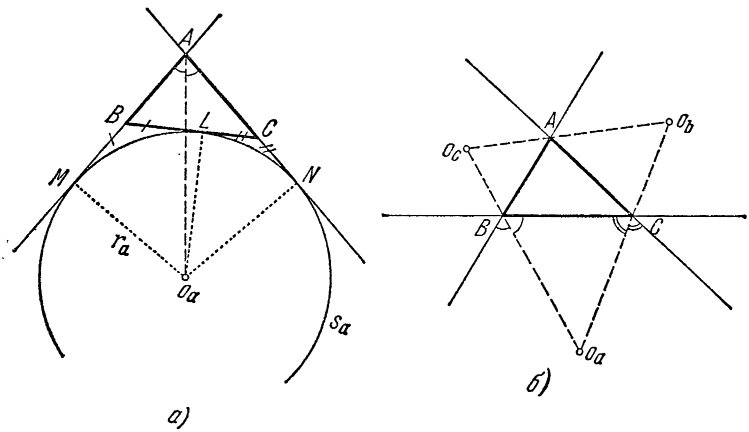


Рис. 251.

Из рис. 251, a, где L, M, N — точки касания со сторонами треугольника вневписанной окружности s_a с центром o_a и радиусом r_a, без труда выводим

$$AM+AN=AB+BM+AC+CN=c+b+(BM+CN)=$$
$$=c+b+(BL+CL)=c+b+BC=c+b+a=2p.$$

А так как $AM=AN$, то

$$AM=AN=p.$$

Таким образом, из прямоугольного треугольника Ao_aM находим

$$r_a=AM\operatorname{tg}\frac{A}{2}=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Аналогично устанавливается, что

$$r_b=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}\quad\text{и}\quad r_c=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

А теперь, в силу результата задачи 95 б), имеем

$$p\operatorname{tg}\frac{A}{2}+p\operatorname{tg}\frac{B}{2}+p\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant p\sqrt{3},$$

что и завершает доказательство требуемого неравенства:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}. \qquad (*)$$

Равенство здесь имеет место лишь в том случае, когда $r_a+r_b+r_c=p\sqrt{3}$, т. е. когда треугольник ABC *равносторонний*.

Примечание. Вот еще одно, тоже геометрическое, доказательство неравенства (*). Пусть o_a, o_b, o_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, o_ao_b, o_ao_c, o_bo_c — биссектрисы его внешних углов (рис. 251, *б*). Тогда

$$\angle o_a=\angle Bo_aC=180^\circ-\angle o_aBC-\angle o_aCB=$$
$$=180^\circ-\left(\frac{180^\circ-B}{2}\right)-\left(\frac{180^\circ-C}{2}\right)=\frac{B+C}{2}=\frac{180^\circ-A}{2}=90^\circ-\frac{A}{2};$$

аналогично устанавливается, что

$$\angle o_b=90^\circ-\frac{B}{2}, \quad \angle o_c=90^\circ-\frac{C}{2}.$$

Заметим теперь, что для произвольного треугольника ABC

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\sin A\cdot\operatorname{ctg}A=b^2+c^2-4S\operatorname{ctg}A,$$

т. е.

$$b^2+c^2-a^2=4S\operatorname{ctg}A.$$

Сложив это равенство с аналогичными ему

$$a^2+c^2-b^2=4S\operatorname{ctg}B \quad \text{и} \quad a^2+b^2-c^2=4S\operatorname{ctg}C,$$

получим

$$a^2+b^2+c^2=4S(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C).$$

Поэтому неравенство задачи а) можно переписать так:

$$4S(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)\geqslant 4\sqrt{3}S,$$

или

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\geqslant\sqrt{3}. \qquad (**)$$

Применяя затем неравенство (**) к треугольнику $o_ao_bo_c$ с углами $90^\circ-\frac{A}{2}$, $90^\circ-\frac{B}{2}$, $90^\circ-\frac{C}{2}$, мы получим неравенство (*) (обращающееся в равенство, очевидно, тогда и только тогда, когда для треугольника $o_ao_bo_c$ неравенство задачи а) обращается в равенство, т. е. когда $o_ao_bo_c$, а значит, и ABC — *равносторонние* треугольники).

Попутно мы установили, что *результат задачи* а) *равносилен неравенству* (**); это открывает еще один (и притом сравнительно несложный!) путь решения задачи а) — через доказательство неравенства (**), справедливость которого можно установить и без обращения к чертежу, с помощью несложных преобразований суммы $\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$ (где $C=180^\circ-A-B$).

Третье решение. Эквивалентность результата настоящей задачи неравенству (*) можно установить и более формально. Воспользуемся тем, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{1}{\sin A}-\operatorname{ctg} A.$$

Подставляя это значение $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ (и аналогичные выражения для $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$) в неравенство (*), получим

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} C \geqslant \sqrt{3}.$$

Но в конце второго решения настоящей задачи (см. стр. 267) мы установили, что

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

С другой стороны, известно, что

$$2S=ab\sin C=ac\sin B=bc\sin A;$$

поэтому

$$\frac{1}{\sin A}=\frac{bc}{2S},\quad \frac{1}{\sin B}=\frac{ac}{2S},\quad \frac{1}{\sin C}=\frac{ab}{2S}.$$

Таким образом, последнее неравенство можно переписать так:

$$\frac{bc+ac+ab}{2S}-\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\geqslant \sqrt{3},$$

откуда имеем

$$2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2\geqslant 4S\sqrt{3},$$

или

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-$$
$$-(b-c)^2-(c-a)^2\geqslant 4S\sqrt{3},$$

где равенство имеет место, лишь если треугольник ABC *правильный*.

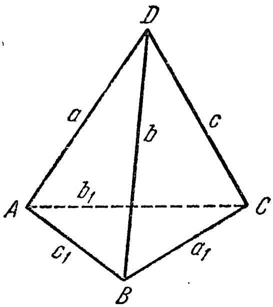


Рис. 252.

Но это нам и требовалось доказать.

101. Так как неравенство задачи а) вытекает, очевидно, из более сильного неравенства задачи б), то мы ограничимся доказательством последнего. Применим к каждой грани тетраэдра $ABCD$ (рис. 252) неравенство задачи 100 б):

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2-(a_1-b_1)^2-(b_1-c_1)^2-(c_1-a_1)^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$$

. . . .

или

$$2a_1b_1+2b_1c_1+2c_1a_1-a_1^2-b_1^2-c_1^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$$

. . . .

Сложив эти четыре неравенства, получим

$$\Sigma'(2ab)-2\Sigma a^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta, \qquad (*)$$

где Σa^2 означает сумму квадратов шести ребер тетраэдра $ABCD$, а

$\Sigma'(2ab)$ — сумму двенадцати удвоенных произведений ребер, *не включающую произведений aa_1, bb_1 и cc_1 противоположных ребер тетраэдра.*

Рассмотрим теперь выражение

$$\Pi^2-\frac{3}{2}\Sigma'(ab)+\frac{3}{2}\Sigma(a^2)=\frac{1}{4}[(a+b+c+a_1+b_1+c_1)^2-3\Sigma'(2ab)+$$
$$+6\Sigma a^2]=\frac{1}{4}[7\Sigma a^2-2\Sigma'(2ab)+2aa_1+2bb_1+2cc_1]=$$
$$=\frac{1}{4}[2(a+a_1-b-b_1)^2+2(a+a_1-c-c_1)^2+2(b+b_1-c-c_1)^2+$$
$$+3(a-a_1)^2+3(b-b_1)^2+3(c-c_1)^2].$$

Таким образом, имеем

$$\Pi^2=\frac{3}{4}[\Sigma'(2ab)-2\Sigma a^2]+\frac{1}{2}[(a+a_1-b-b_1)^2+(a+a_1-c-c_1)^2+$$
$$+(b+b_1-c-c_1)^2]+\frac{3}{4}[(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2],$$

откуда в силу (*) и следует, что

$$\Pi^2\geqslant 3\sqrt{3}\Delta+\frac{1}{2}[(a+a_1-b-b_1)^2+(a+a_1-c-c_1)^2+$$
$$+(b+b_1-c-c_1)^2]+\frac{3}{4}[(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2].$$

Это неравенство обращается в равенство лишь в том случае, когда обращается в равенство каждое из примененных к четырем граням тетраэдра $ABCD$ неравенств задачи 100 б), т. е. если все грани ABC — правильные треугольники и, значит, этот тетраэдр *правильный*. Поэтому и неравенство задачи а) обращается в равенство лишь в том случае, когда рассматриваемый тетраэдр $ABCD$ *правильный*.

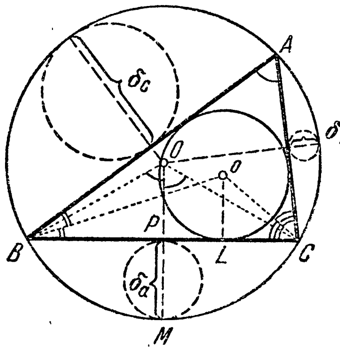


Рис. 253.

102. а) Обозначим диаметры рассматриваемых окружностей через δ_a, δ_b и δ_c. Из рис. 253, где $\angle BOC=2A$ (центральный угол, опирающийся на хорду, которой отвечает вписанный угол A!), имеем

$$\delta_a=OM-OP=R-R\cos A=$$
$$=R(1-\cos A),$$

и, так как $\frac{a}{2}=R\sin A$, т. е. $R=\frac{a}{2\sin A}$ $\Big($см. тот же рис. 253, где $BP=\frac{a}{2}$, $BO=R$ и $\angle BOP=A\Big)$,

$$\delta_a=\frac{a}{2}\,\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{a}{2}\,\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Но $\left(\right.$см. рис. 253, где L—точка касания вписанной окружности со стороной BC и $\angle CBo=\frac{B}{2}$, $\angle BCo=\frac{C}{2}\left.\right)$

$$a=BC=BL+CL=r\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right);$$

поэтому

$$\delta_a=\frac{r}{2}\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\right)=\frac{r}{2}\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\right).$$

Разумеется, так же

$$\delta_b=R(1-\cos B)=\frac{r}{2}\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}\right),$$

$$\delta_c=R(1-\cos C)=\frac{r}{2}\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}\right).$$

Докажем теперь отдельно два неравенства, составляющих содержание настоящей задачи.

1°. Очевидно,

$$\rho_a+\rho_b+\rho_c=\frac{1}{2}(\delta_a+\delta_b+\delta_c)=$$

$$=\frac{r}{4}\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}\right)+\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}\right)+\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}+\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}\right).$$

Но так как при любых положительных x и y,

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2,\ \text{ибо}\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geqslant 0,\ \text{то}$$

$$\rho_a+\rho_b+\rho_c\geqslant\frac{r}{4}(2+2+2)\geqslant\frac{3}{2}r.$$

Равенство здесь имеет место лишь в том случае, когда $x=y=z$, т. е. если $\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}$, и треугольник ABC *правильный*.

2°. Поскольку

$$\rho_a+\rho_b+\rho_c=\frac{1}{2}(\delta_a+\delta_b+\delta_c)=\frac{R}{2}(3-\cos A-\cos B-\cos C)=$$
$$=R\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)\right],$$

то нам надо лишь показать, что

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Неравенство (*) можно доказать многими путями[1]); мы его выведем из неравенства $r\leqslant\frac{1}{2}R$ (см. задачу 94 а)). Для этого заметим прежде всего, что

$$\cos A+\cos B+\cos C-1=(\cos A+\cos B)-(1-\cos C)=$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-$$
$$-2\cos^2\frac{A+B}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]=$$
$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2},$$

и

$$\sin A+\sin B+\sin C=(\sin A+\sin B)+\sin C=$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+$$
$$+2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2}=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

А так как $a=2R\sin A$ (ср. стр. 269), $b=2R\sin B$ и $C=2R\sin C$, то

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

и

$$p=\frac{a+b+c}{2}=R(\sin A+\sin B+\sin C)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$r=\frac{S}{p}=\frac{1}{2}R\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$
$$=\frac{1}{2}R\frac{8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

---

[1]) См., например, решение задачи 20, 1° из § 8 книги В. А. Кречмара [10].

В силу неравенства $r \leqslant \frac{1}{2} R$ из последнего равенства вытекает, что

$$4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2} R,$$

откуда

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

а это неравенство равносильно неравенству (*).

Равенство в (*) достигается лишь в том случае, когда $r = \frac{1}{2} R$, т. е. если треугольник ABC *правильный*.

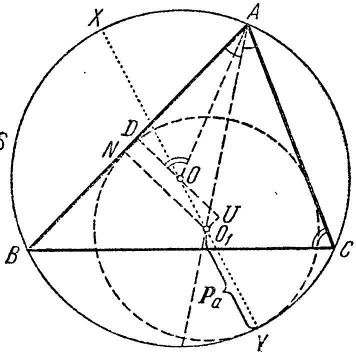


Рис. 254.

б) Пусть O_1 — центр окружности радиуса P_a, касающейся сторон AB и AC треугольника ABC и описанной вокруг него окружности S. Рассмотрим (прямоугольный) треугольник OO_1U, где O — центр S, $OD \| O_1N \perp AB$, а $O_1U \| AB$ (рис. 254); в нем, очевидно,

$$OO_1 = OY - O_1Y = R - \mathrm{P}_a,$$

$$O_1U = ND = AN - AD = \mathrm{P}_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} - \frac{c}{2}$$

$\left(\text{равенство } AN = \mathrm{P}_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \text{ сразу усматривается из } \triangle AO_1N\right)$ и

$$OU = O_1N - OD = \mathrm{P}_a - R\cos C$$

(равенство $OD = R\cos C$ усматривается из треугольника AOD, в котором $\angle AOD = C$; ср. рис. 253). Поэтому

$$(R - \mathrm{P}_a)^2 = (\mathrm{P}_a - R\cos C)^2 + \left(\mathrm{P}_a \operatorname{ctg}\frac{A}{2} - \frac{c}{2}\right)^2,$$

или

$$R^2 - 2R\mathrm{P}_a + \mathrm{P}_a^2 =$$

$$= \mathrm{P}_a^2 - 2R\mathrm{P}_a \cos C + R^2\cos^2 C + \mathrm{P}_a^2 \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} - \mathrm{P}_a c \operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \frac{c^2}{4} =$$

$$= \left(R^2\cos^2 C + \frac{c^2}{4}\right) - \mathrm{P}_a\left(2R\cos C + c\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right) + \mathrm{P}_a^2 + \mathrm{P}_a^2 \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2}.$$

Но поскольку

$$c = 2R\sin C \quad \text{и} \quad R^2\cos^2 C + \frac{c^2}{4} = R^2\cos^2 C + R^2\sin^2 C = R^2,$$

то полученное равенство можно переписать так:

$$\mathrm{P}_a^2 \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} - \mathrm{P}_a\left[c\operatorname{ctg}\frac{A}{2} - 2R(1 - \cos C)\right] = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\mathrm{P}_a = c\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} - 2R\,(1-\cos C)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}.$$

Используя равенство $c = 2R\sin C$, последнее выражение можно упростить так:

$$\mathrm{P}_a = 2R\sin C\operatorname{tg}\frac{A}{2} - 2R\,(1-\cos C)\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} =$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} - 4R\sin^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} =$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) =$$

$$= 4R\,\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\left(\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) =$$

$$= 4R\,\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\cos\frac{A+C}{2} =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sec^2\frac{A}{2}.$$

А так как (см. решение задачи а))

$$4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = r,$$

то

$$\mathrm{P}_a = r\sec^2\frac{A}{2} = r\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right),$$

и аналогично

$$\mathrm{P}_b = r\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right), \qquad \mathrm{P}_c = r\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right);$$

поэтому

$$\mathrm{P}_a + \mathrm{P}_b + \mathrm{P}_c = r\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right).$$

Но (см. выше, стр. 266)

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \qquad r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \qquad r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

так что

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{p^2}.$$

А поскольку

$$r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2$$

(см. стр. 250), то в силу неравенства (В) (стр. 250) имеем

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geqslant r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{p^2}\geqslant 1.$$

Отсюда и следует, что

$$P_a+P_b+P_c=r\left[3+\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right)\right]\geqslant r(3+1)=4r,$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда $r_a=r_b=r_c$ или $\frac{S}{p-a}=\frac{S}{p-b}=\frac{S}{p-c}$, или, наконец, когда $a=b=c$, и треугольник ABC *правильный.*

С другой стороны, из того же рис. 254 видно, что

$$AO_1\leqslant AO+OO_1$$

и, значит,

$$AO_1+O_1Y\leqslant AO+OO_1+O_1Y=AO+OY=XO+OY=XY=2R.$$

Но $AO_1=P_a\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ (см. треугольник AO_1N на рис. 254), а $O_1Y=P_a$; поэтому

$$P_a\left(\operatorname{cosec}\frac{A}{2}+1\right)=$$

$$=P_a\operatorname{cosec}\frac{A}{2}+P_a\leqslant 2R,$$

т. е.

$$P_a\leqslant\frac{2R}{\operatorname{cosec}\frac{A}{2}+1}.$$

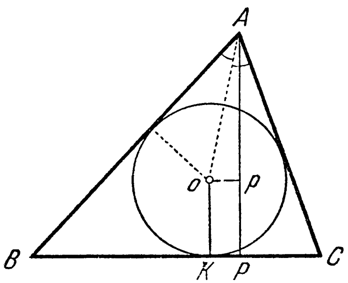


Рис. 255.

Далее из рис. 255, на котором буквой o обозначен центр вписанной окружности треугольника и $oK\|AP\perp BC$, а $op\|BC$, имеем

$$Ao+oK\geqslant Ap+pP=h_a,$$

или, поскольку $Ao=r\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$ и $oK=r$,

$$r\operatorname{cosec}\frac{A}{2}+r=r\left(\operatorname{cosec}\frac{A}{2}+1\right)\geqslant h_a,\text{ т. е. }\operatorname{cosec}\frac{A}{2}+1\geqslant\frac{h_a}{r}.$$

Таким образом, получаем

$$P_a\leqslant\frac{2R}{\operatorname{cosec}\frac{A}{2}+1}\leqslant\frac{2R}{h_a/r}=2R\frac{r}{h_a},$$

и аналогично

$$P_b\leqslant 2R\frac{r}{h_b},\qquad P_c\leqslant 2R\frac{r}{h_c}.$$

Поэтому

$$P_a+P_b+P_c \leqslant 2R\left(\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}\right)=$$
$$=2R\cdot r\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=2\,R\cdot r\cdot\frac{1}{r}=2R$$

(см. задачу 95 г)), — что и требовалось доказать.

Ясно, что р а в е н с т в а $AO_1=AO+OO_1$ (рис. 254) и $Ao+oK=h_a$ (рис. 255) имеют место в том и только в том случае, если треугольник ABC равнобедренный: $b=c$. Поэтому $P_a+P_b+P_c=2R$ в том и только в том случае, если треугольник ABC *равносторонний*.

103. а) П е р в о е р е ш е н и е. Пусть, например, $a^2+b^2+c^2=\delta_1$ и $a_1^2+b_1^2+c_1^2=\delta_2$. В таком случае, в силу неравенства (Б), стр. 248

$$2\Pi_1=a+b+c\leqslant\sqrt{3\delta_1}\ \text{ и }\ 2\Pi_2=a_1+b_1+c_1\leqslant\sqrt{3\delta_2}.$$

Поэтому

$$2\Pi=a+b+c+a_1+b_1+c_1\leqslant\sqrt{3}\,(\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2}),$$

т. е. $\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\,\Pi.$

Далее имеем

$$\delta=\delta_1+\delta_2=\frac{1}{2}\,[(\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2})^2+(\sqrt{\delta_1}-\sqrt{\delta_2})^2]\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\,(\sqrt{\delta_1}+\sqrt{\delta_2})^2\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2\Pi}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}\,\Pi^2,$$

откуда и следует, что

$$\Pi\leqslant\frac{\sqrt{6\delta}}{2}.$$

Р а в е н с т в о здесь имеет место, лишь если $a=b=c$, $a_1=b_1=c_1$ и $\sqrt{\delta_1}=\sqrt{\delta_2}$, или $\delta_1=\delta_2$, т. е. если $a=b=c=a_1=b_1=c_1$, и тетраэдр $ABCD$ *правильный*.

В т о р о е р е ш е н и е. Докажем сначала справедливость неравенства

$$(a+b+c+a_1+b_1+c_1)^2\leqslant 6\,(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2), \qquad (*)$$

(ср. с подстрочным примечанием на стр. 248), из которого уже и будет следовать, что

$$(2\Pi)^2\leqslant 6\delta,\ \text{ или }\ \Pi\leqslant\frac{\sqrt{6\delta}}{2}.$$

В самом деле, по формуле квадрата многочлена

$$(a+b+c+a_1+b_1+c_1)^2=\Sigma a^2+\Sigma\,(2ab),$$

где Σa^2 означает сумму шести квадратов ребер тетраэдра, а $\Sigma\,(2ab)$ — сумму $C_6^2=15$ удвоенных попарных произведений ребер. Но так как (ср. выше, стр. 261)

$$2ab\leqslant a^2+b^2,$$

то (в понятных обозначениях)

$$\Sigma (2ab) \leqslant \Sigma (a^2+b^2) = 5 \Sigma a^2,$$

ибо в выражении $\Sigma (a^2+b^2)$ каждый член, скажем a^2, фигурирует пять раз (в комбинациях (a^2+b^2), (a^2+c^2), $(a^2+a_1^2)$, $(a^2+b_1^2)$ и $(a^2+c_1^2)$). Следовательно,

$$(a+b+c+a_1+b_1+c_1)^2 \leqslant \Sigma a^2 + 5 \Sigma a^2 = 6 \Sigma a^2 = \\ = 6 (a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

что и требовалось доказать.

Равенство

$$a+b+c+a_1+b_1+c_1 = 6 (a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

— а значит, и равенство $\Pi = \frac{\sqrt{6\delta}}{2}$ — имеет место в том и только в том случае, когда все ребра тетраэдра равны между собой, т. е. если тетраэдр *ABCD правильный*.

Примечание. Вот еще одно доказательство неравенства (*). Рассмотрим сумму Σ, составленную из $C_6^3 = 20$ слагаемых вида $(\pm a \pm b \pm c \pm a_1 \pm b_1 \pm c_1)^2$, где из шести знаков $\pm$ ровно три означают плюс. Так как выражение $(\pm a \pm b \pm c \pm a_1 \pm b_1 \pm c_1)^2$ содержит (помимо шести квадратов длин ребер тетраэдра) $C_6^2 = 15$ удвоенных произведений ребер, причем в нашем случае 6 произведений, взятых со знаком плюс, и 9 произведений, взятых со знаком минус, то в сумму Σ каждое удвоенное произведение 8 раз войдет со знаком плюс и 12 раз — со знаком минус, т. е.

$$\Sigma = 20 (a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2) - 4 (2ab+2ac+\ldots+2b_1c_1).$$

Поэтому

$$4 (a+b+c+a_1+b_1+c_1)^2 + \Sigma = 24 (a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

или, поскольку $\Sigma \geqslant 0$,

$$4 (a+b+c+a_1+b_1+c_1)^2 \leqslant 24 (a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

что равносильно неравенству (*).

Равенство в (*) $\left(\text{а следовательно, и в неравенстве } \Pi \leqslant \frac{\sqrt{6\delta}}{2}\right)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Sigma = 0$, т. е. когда тетраэдр *ABCD правильный*.

б) Эта задача легко сводится к задаче 100 а). В самом деле, если S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади четырех граней тетраэдра $ABCD$, а δ_1, δ_2, δ_3 и δ_4 — суммы квадратов сторон этих граней, то в силу результата задачи 100 а)

$$S_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}\delta_1, \quad S_2 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}\delta_2, \quad S_3 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}\delta_3 \quad \text{и} \quad S_4 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}\delta_4$$

(ибо, например, $\delta_1 \geqslant 4\sqrt{3}\, S_1$). Отсюда имеем

$$\Delta = S_1+S_2+S_3+S_4 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}(2\delta) = \frac{\sqrt{3}}{6}\delta_1,$$

что и требовалось доказать.

Равенство $\Delta=\frac{\sqrt{3}}{6}\delta$ имеет место в том и только в том случае, когда все грани тетраэдра ABC — равносторонние треугольники, т. е. когда этот тетраэдр *правильный*.

104. а) Первое решение. Если все углы треугольника ABC меньше 120°, то сумма $R_a+R_b+R_c$ достигает минимума для той точки M внутри ABC, из которой и AB, и BC, и AC видны под углом 120°, причем в этом случае

$$R_a+R_b+R_c=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\,S};$$

если же, скажем, $\angle C \geqslant 120°$, то

$$R_a+R_b+R_c \geqslant CA+CB=b+a$$

(см. выше задачи 75 и 80). Но в первом случае, в силу результатов задач 95 в) и 97,

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{4}{3}\cdot 27\cdot r^2=36r^2$$

и

$$2\sqrt{3}\,S \geqslant 2\cdot(3r)^2=18r^2,$$

так что

$$R_a+R_b+R_c \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 36r^2+18r^2}=6r.$$

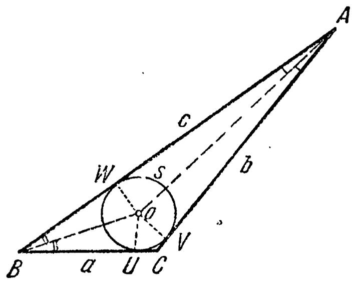


Рис. 256.

С другой стороны, если $\angle C \geqslant 120°$ и вписанная окружность s треугольника ABC с центром o касается сторон AB, BC и CA в точках W, U и V (рис. 256), то

$$R_a+R_b+R_c \geqslant a+b > BU+AV=2r\operatorname{ctg}\angle CBo+2r\operatorname{ctg}\angle CAo=$$

$$=r\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)=r\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=$$

$$=r\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{B-A}{2}-\cos\frac{B+A}{2}\right]} \geqslant r\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)}=$$

$$=r\frac{2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A+B}{4}}{\sin^2\frac{A+B}{4}}=2r\operatorname{ctg}\frac{A+B}{4} \geqslant 2r\operatorname{ctg}15° > 6r,$$

так как $\operatorname{ctg}15° \approx 3{,}732 > 3$.

Таким образом, во всех случаях

$$R_a+R_b+R_c \geqslant 6r.$$

Равенство $R_a+R_b+R_c=6r$ имеет место в том и только в том случае, если

$$R_a+R_b+R_c=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\,S}$$

и, кроме того,

$$a^2+b^2+c^2=36r^2 \quad \text{и} \quad 2\sqrt{3}\,S=18r^2,$$

т. е. если треугольник ABC *равносторонний* и точка M совпадает с его *центром.*

Второе решение. Заметим прежде всего, что если точка M внешняя по отношению к треугольнику ABC, то найдется такая точка M' внутри треугольника (или на его границе), что

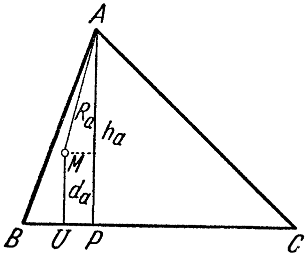


Рис. 257.

$$R'_a+R'_b+R'_c < R_a+R_b+R_c,$$

где обозначено $M'A=R'_a$ и т. д. (см. решение задачи 75 б), стр. 205); поэтому достаточно ограничиться случаем, когда M — внутренняя точка треугольника. Далее воспользуемся результатами задач 95 а), 111 б) (неравенство Эрдёша) и тем, что

$$R_a+d_a \geqslant h_a, \quad R_b+d_b \geqslant h_b, \quad R_c+d_c \geqslant h_c$$

(ибо, например, $R_a+d_a=AM+MU$, $h_a=AP$; см. рис. 257).

Далее, поскольку $9r \leqslant h_a+h_b+h_c$ (задача 95 а)) и $d_a+d_b+d_c \leqslant \frac{1}{2}(R_a+R_b+R_c)$ (задача 111 б)), имеем

$$9r \leqslant h_a+h_b+h_c \leqslant (R_a+d_a)+(R_b+d_b)+(R_c+d_c)=$$
$$=(R_a+R_b+R_c)+(d_a+d_b+d_c) \leqslant (R_a+R_b+R_c)+$$
$$+\frac{1}{2}(R_a+R_b+R_c)=\frac{3}{2}(R_a+R_b+R_c),$$

и следовательно,

$$6r \leqslant R_a+R_b+R_c,$$

где равенство имеет место лишь в том случае, когда обращаются в равенства неравенства задач 95 а), 111 б) и неравенства $R_a+d_a \geqslant h_a, \ldots$, т. е. если треугольник ABC *правильный* и точка M совпадает с его *центром.*

Третье решение. Снова ограничимся тем случаем, когда M — внутренняя точка треугольника (см. начало второго решения задачи). Пусть точка M_1 симметрична M относительно AB, точка M_2 симметрична M относительно BC и точка M_3 симметрична M относительно CA (рис. 258). Легко видеть, что периметр шестиугольника $AM_1BM_2CM_3$ равен

$$(M_1A+M_1B)+(M_2B+M_2C)+(M_3C+M_3A)=$$
$$=(MA+MB)+(MB+MC)+(MC+MA)=2R_a+2R_b+2R_c.$$

А так как, очевидно, $S_{\triangle M_1AB}=S_{\triangle MAB}$, $S_{\triangle M_2BC}=S_{\triangle MBC}$ и $S_{\triangle M_3CA}=S_{\triangle MCA}$, то площадь этого шестиугольника равна

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle M_1AB}+S_{\triangle M_2BC}+S_{\triangle M_3CA}=$$
$$=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle MAB}+S_{\triangle MBC}+S_{\triangle MCA}=2S,$$

где $S=S_{\triangle ABC}$ — площадь треугольника ABC. Поэтому в силу сказанного на стр. 45—46 (см. указанную там литературу)

$$2(R_a+R_b+R_c)\geqslant\sqrt{4\cdot 6\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}\cdot 2S}=\sqrt{48\operatorname{tg}30^\circ\cdot S}=$$
$$=4\sqrt{\frac{3}{\sqrt{3}}S}=4\sqrt{\sqrt{3}\,S},\text{ т. е. } R_a+R_b+R_c\geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}\,S}.$$

Но мы знаем также, что $\sqrt{\sqrt{3}\,S}\geqslant 3r$ (см. задачу 97); поэтому $R_a+R_b+R_c\geqslant 2\cdot 3r=6r$, что и требовалось доказать.

Равенство $R_a+R_b+R_c=6r$ имеет место только в том случае, когда $\sqrt{\sqrt{3}\,S}=3r$, т. е. треугольник ABC *равносторонний*, и $(2R_a+2R_b+2R_c)^2=48\operatorname{tg}30^\circ\cdot S$, т. е. шестиугольник $AM_1BM_2CM_3$ правильный; но последнее требование означает, что $R_a=R_b=R_c$ и $\angle AM_1B=\angle M_1BM_2=\angle BM_2C=\ldots=\angle M_3AM_1$, т. е. $R_a+R_b+R_c=6r$ в том и только в том случае, когда треугольник ABC *равносторонний* и точка M совпадает с его *центром*.

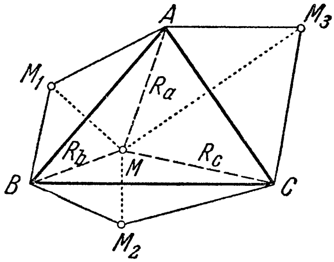


Рис. 258.

Примечание. Полученные при решении этой задачи неравенства $R_a+R_b+R_c\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\,S}$ и $R_a+R_b+R_c\geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}\,S}$ усиливают неравенство $R_a+R_b+R_c\geqslant 6r$ (ср. с задачами 98 и 95 в)).

б) В силу результата задачи 81 а) сумма

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2$$

будет иметь наименьшее значение

$$IA^2+IB^2+IC^2=\frac{4}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

(см. выше задачу 95 в)) в том случае, когда M совпадает с точкой I пересечения медиан треугольника ABC. Но в силу задачи 95 в),

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\geqslant 12r^2,$$

откуда и следует, что

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2 \geqslant 12r^2.$$

Равенство здесь достигается в том и только в том случае, когда $\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)=12r^2$, т. е. треугольник ABC *равносторонний*, и $R_a^2+R_b^2+R_c^2=\frac{4}{9}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$, т. е. точка M совпадает с точкой I пересечения медиан треугольника ABC — с *центром* этого треугольника.

105. В силу результата задачи 82 в) сумма

$$R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$$

достигает своего минимума в том случае, когда точка M совпадает с точкой I пересечения «медиан» тетраэдра (т. е. отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней); этот минимум равен

$$IA^2+IB^2+IC^2+ID^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2)=\frac{1}{4}\delta$$

(здесь мы используем обозначения задачи 103). А теперь, применяя результаты задачи 103 б) и а), получаем:

а) $R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2 \geqslant \frac{1}{4}\delta \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta;$

б) $R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2 \geqslant \frac{1}{4}\delta \geqslant \frac{1}{6}\Pi^2.$

Ясно, что равенства здесь достигаются, когда $\delta=2\sqrt{3}\,\Delta$, соответственно $\delta=\frac{2}{3}\Pi^2$, т. е. когда тетраэдр $ABCD$ *правильный* и точка M совпадает с точкой пересечения «медиан» этого тетраэдра, т. е. с его *центром*.

106. Применяя неравенства предыдущей задачи к случаю, когда точка M совпадает с центром O описанной сферы тетраэдра, и следовательно $R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=4\mathrm{P}^2$, сразу получаем

а) $4\mathrm{P}^2 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta$, т. е. $\mathrm{P} \geqslant \frac{\sqrt{2\sqrt{3}\,\Delta}}{4}$;

б) $4\mathrm{P}^2 \geqslant \frac{1}{6}\Pi$, т. е. $\mathrm{P} \geqslant \frac{\sqrt{6}\,\Pi}{12}$.

Равенство в обоих случаях достигается тогда, когда тетраэдр $ABCD$ *правильный*.

107. Из рассмотрения треугольников MBC, MAC и MAB (см. рис. 26 на стр. 48) без труда получаем

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ad_a+\frac{1}{2}bd_b+\frac{1}{2}cd_c, \text{ т. е. } ad_a+bd_b+cd_c=2S.$$

Отсюда следует:

а) если $a \geqslant b \geqslant c$, то

$$2S = ad_a + bd_b + cd_c \leqslant ad_a + ad_b + ad_c = a(d_a + d_b + d_c)$$

и

$$2S = ad_a + bd_b + cd_c \geqslant cd_a + cd_b + cd_c = c(d_a + d_b + d_c),$$

т. е.

$$\min(h_a, h_b, h_c) = h_a = \frac{2S}{a} \leqslant d_a + d_b + d_c \leqslant \frac{2S}{c} = h_c = \max(h_a, h_b, h_c).$$

Равенство $d_a + d_b + d_c = h_a = \min(h_a, h_b, h_c)$ при $a > b \geqslant c$ имеет место лишь в том случае, когда в равенстве $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$ слева отсутствуют члены с отличными от a коэффициентами, т. е. когда $d_b = d_c = 0$, и точка M совпадает с вершиной A треугольника; при $a = b > c$ равенство имеет место в том случае, когда $d_c = 0$, и точка M принадлежит стороне AB; при $a = b = c$, т. е. в том случае, когда треугольник ABC равносторонний, оно имеет место для любой точки M (внутри ABC). Точно так же равенство $d_a + d_b + d_c = \max(h_a + h_b + h_c)$ при $a \geqslant b > c$ имеет место лишь тогда, когда точка M совпадает с вершиной C треугольника; при $a > b = c$ оно имеет место, когда точка M принадлежит стороне BC; при $a = b = c$, т. е. если треугольник ABC равносторонний, оно имеет место для любой точки M внутри ABC.

б) Из равенства

$$ad_a + bd_b + cd_c = 2S$$

в силу неравенства (А) (стр. 246) получаем

$$(ad_a)(bd_b)(cd_c) \leqslant \left(\frac{ad_a + bd_b + cd_c}{3}\right)^3 = \left(\frac{2S}{3}\right)^3,$$

т. е.

$$d_a d_b d_c \leqslant \frac{8S^3}{27abc}.$$

Равенство здесь достигается лишь в том случае, когда

$$ad_a = bd_b = cd_c, \text{ т. е. } d_a : d_b : d_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

108. Пусть S_A, S_B, S_C и S_D — площади граней BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$, а V — его объем. Разбивая тетраэдр $ABCD$ на четыре пирамиды $MBCD$, $MACD$, $MABD$ и $MABC$ (где M — произвольная точка внутри $ABCD$), без труда получаем

$$V = \frac{1}{3} S_A d_A + \frac{1}{3} S_B d_B + \frac{1}{3} S_C d_C + \frac{1}{3} S_D d_D,$$

т. е.

$$S_A d_A + S_B d_B + S_C d_C + S_D d_D = 3V.$$

Отсюда аналогично решению задачи 107 выводим:

а) $\min(h_A, h_B, h_C, h_D) \leqslant d_A + d_B + d_C + d_D \leqslant$
$\leqslant \max(h_A, h_B, h_C, h_D)$,

где $\max(h_A, h_B, h_C, h_D)$ — наибольшая из высот h_A, h_B, h_C, h_D тетраэдра (перпендикуляров, опущенных из вершин тетраэдра на противолежащие грани), а $\min(h_A,\ h_B,\ h_C,\ h_D)$ — наименьшая из высот. При этом равенство

$$d_A+d_B+d_C+d_D=\min(h_A,\ h_B,\ h_C,\ h_D)$$

выполняется лишь для вершины A тетраэдра, если $S_A > S_B \geqslant S_C \geqslant S_D$; для любой точки M ребра AB, если $S_A=S_B > S_C \geqslant S_D$; для любой точки M грани ABC, если $S_A=S_B=S_C > S_D$; для любой точки M внутри тетраэдра (или на его границе), если все грани тетраэдра равновелики [1]). Аналогично этому устанавливается и то, в каком случае имеет место равенство

$$d_A+d_B+d_C+d_D=\max(h_A,\ h_B,\ h_C,\ h_D).$$

б) Из равенства

$$S_Ad_A+S_Bd_B+S_Cd_C+S_Dd_D=3V$$

и *справедливого для любых четырех положительных чисел* $x,\ y,\ z,\ t$ *неравенства*

$$xyzt \leqslant \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4, \tag{A'}$$

обращающегося в равенство лишь при $x=y=z=t$ [2]), без труда

---

[1]) См. подстрочное примечание [1]) на стр. 153.

[2]) Это неравенство можно также записать в виде $\frac{x+y+z+t}{4} \geqslant \sqrt[4]{xyzt}$, или $A(x,\ y,\ z,\ t) \geqslant G(x,\ y,\ z,\ t)$, где A и G — среднее арифметическое и среднее геометрическое четырех чисел (см. стр. 52; ср. с задачами 267 и 268 книги Д. О. Шклярского и др. [11]). [Вот доказательство неравенства (A'). Очевидно, что

$$(x+y)^2 \geqslant (x+y)^2-(x-y)^2=4xy,$$

т. е.

$$xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2; \tag{I}$$

аналогично

$$zt \leqslant \frac{(z+t)^2}{4}=\left(\frac{z+t}{2}\right)^2, \tag{II}$$

причем неравенство (I) обращается в равенство лишь когда $x=y$, а неравенство (II) — когда $z=t$. А теперь, применяя снова неравенство (I) к числам $\frac{x+y}{2}$ и $\frac{z+t}{2}$ и используя неравенства (I) и (II), получаем

$$\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4=\left[\left(\frac{\frac{x+2}{2}+\frac{z+t}{2}}{2}\right)^2\right]^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{x+y}{2}\cdot\frac{z+t}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\frac{z+t}{2}\right)^2 \geqslant xy\cdot zt=xyzt,$$

т. е. неравенство (A'). Равенство в (A') имеет место в том и только в том случае, когда $x=y$, $z=t$ и $\frac{x+y}{2}=\frac{z+t}{2}$, т. е. когда $x=y=z=t$.]

находим

$$(S_Ad_A)(S_Bd_B)(S_Cd_C)(S_Dd_D)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{S_Ad_A+S_Bd_B+S_Cd_C+S_Dd_D}{4}\right)^4=\left(\frac{3V}{4}\right)^4,$$

т. е.

$$d_Ad_Bd_Cd_D\leqslant\frac{81V^4}{256S_AS_BS_CS_D}.$$

Это неравенство обращается в равенство лишь при $S_Ad_A=$ $=S_Bd_B=S_Cd_C=S_Dd_D$, т. е. в том случае, когда

$$d_A:d_B:d_C:d_D=\frac{1}{S_A}:\frac{1}{S_B}:\frac{1}{S_C}:\frac{1}{S_D}.$$

109. Из результата задачи 81 б) следует, что сумма $d_a^2+d_b^2+d_c^2$ достигает наименьшего значения для такой точки M внутри треугольника ABC, для которой $d_a:d_b:d_c=a:b:c$, и что это значение равно $\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$. А так как в силу результатов задач 97 и 95 в), $S\geqslant 3\sqrt{3}r^2$ и $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$, то

$$d_a^2+d_b^2+d_c^2\geqslant\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{4\cdot 27r^4}{9R^2}=12\frac{r^4}{R^2},$$

что и требовалось доказать.

Равенство $d_a^2+d_b^2+d_c^2=12\frac{r^4}{R^2}$ достигается лишь в том случае, когда $S=3\sqrt{3}r^2$ и $a^2+b^2+c^2=9R^2$, т. е. когда треугольник ABC *равносторонний*, и $d_a:d_b:d_c=a:b:c=1:1:1$, т. е. если точка M совпадает с центром вписанной в треугольник ABC окружности (с *центром* треугольника ABC).

Примечание. Полученное при решении этой задачи неравенство

$$d_a^2+d_b^2+d_c^2\geqslant\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$$

(из которого, в частности, вытекает, что

$$r^2\geqslant\frac{4}{3}\frac{S^2}{a^2+b^2+c^2};$$

этот результат получается, если предположить, что точка M совпадает с центром вписанной в треугольник ABC окружности) можно рассматривать как усиление неравенства

$$d_a^2+d_b^2+d_c^2\geqslant 12\frac{r^4}{R^2}$$

(ср. с задачами 97 и 95 в)).

110. Так как, очевидно (ср. с началом решения задачи 107),

$$ad_a+bd_b+cd_c=2S=ah_a,$$

то

$$a(h_a-d_a)=bd_b+cd_c.$$

Аналогично имеем

$$b(h_b - d_b) = ad_a + cd_c \quad \text{и} \quad c(h_c - d_c) = ad_a + bd_b.$$

Складывая три последние равенства, получаем

$$a(h_a - d_a) + b(h_b - d_b) + c(h_c - d_c) = 2ad_a + 2bd_b + 2cd_c.$$

Но, очевидно (рис. 259),

$$h_a - d_a = AH - MH_1 = AH - KH = AK \leqslant AM = R_a$$

и аналогично

$$h_b - d_b \leqslant R_b, \qquad h_c - d_c \leqslant R_c.$$

Отсюда и вытекает требуемое неравенство

$$aR_a + bR_b + cR_c \geqslant 2(ad_a + bd_b + cd_c).$$

Равенство здесь достигается, когда $h_a - d_a = AK = AM = R_a$, т. е. когда $AM \perp BC$ и аналогично $BM \perp AC$, $CM \perp AB$, т. е. когда точка M совпадает с *ортоцентром* (точкой пересечения высот) треугольника. (При этом треугольник ABC не должен быть тупоугольным, ибо иначе его ортоцентр M лежал бы вне треугольника.)

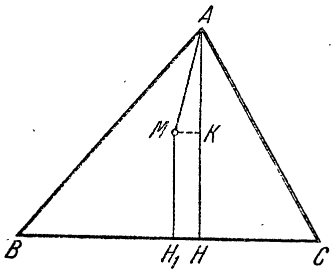


Рис. 259.

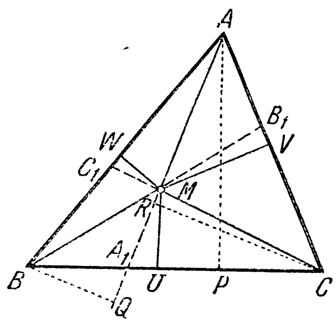


Рис. 260.

111. а) Обозначим точку пересечения прямой AM со стороной BC через A_1; опустим еще из вершин B и C перпендикуляры BQ и CR на прямую AM (рис. 260). Очевидно,

$$a = BC = BA_1 + A_1C \geqslant BQ + CR,$$

и значит,

$$aR_a = BC \cdot AM \geqslant BQ \cdot AM + CR \cdot AM = 2S_{\triangle AMB} + 2S_{\triangle AMC} = \\ = cd_c + bd_b. \qquad (!)$$

Аналогично доказывается, что

$$bR_b \geqslant ad_a + cd_c \quad \text{и} \quad cR_c \geqslant ad_a + bd_b. \qquad (!!)$$

Перемножив три неравенства (!)—(!!), получаем

$$aR_a \cdot bR_b \cdot cR_c \geqslant (cd_c + bd_b)(ad_a + cd_c)(ad_a + bd_b).$$

Но

$$cd_c + bd_b - 2\sqrt{cd_c \cdot bd_b} = (\sqrt{cd_c} - \sqrt{bd_b})^2 \geqslant 0,$$

и следовательно,

$$cd_c+bd_b \geqslant 2\sqrt{cd_c\cdot bd_b}.$$

Аналогично

$$ad_a+cd_c \geqslant 2\sqrt{ad_a\cdot cd_c} \quad \text{и} \quad ad_a+bd_b \geqslant \sqrt{ad_a\cdot bd_b}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$aR_a\cdot bR_b\cdot cR_c \geqslant 2\sqrt{cd_c\cdot bd_b}\cdot 2\sqrt{ad_a\cdot cd_c}\cdot 2\sqrt{ad_a\cdot bd_b}=8abcd_ad_bd_c,$$

откуда и следует требуемое неравенство

$$R_aR_bR_c \geqslant 8d_ad_bd_c.$$

Знак равенства здесь имеет место, если $BC=BA_1+A_1C=BQ+CR$, т. е. если $AM \perp BC$ и также $BM \perp AC$, $CM \perp AB$, т. е. если M является *ортоцентром* (точкой пересечения высот) треугольника ABC и, кроме того, $ad_a=bd_b=cd_c$, или $S_{\triangle MBC}=S_{\triangle MAC}=S_{\triangle MAB}$, т. е. точка M является *центром тяжести* (точкой пересечения медиан) треугольника ABC. Но если ортоцентр и центр тяжести треугольника ABC совпадают, то треугольник ABC *равносторонний* (и точка M совпадает с его *центром*).

б) Первое решение. Соединим между собой проекции U, V и W точки M на стороны BC, CA и AB треугольника ABC (рис. 261). Так как построенная на отрезке MA как на диаметре окружность радиуса $R_a/2$ проходит через точки V и W, и в этой окружности хорде длины VW отвечает вписанный угол $VAW=A$, то

$$VW=R_a\sin A.$$

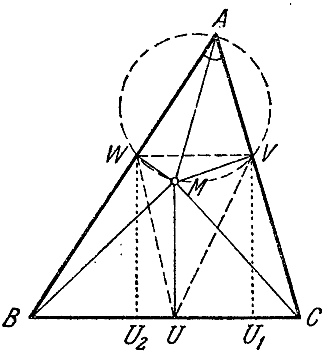


Рис. 261.

Заметим теперь, что проекция U_1U_2 отрезка VW на сторону BC треугольника равна сумме проекций U_1U и UU_2 на BC отрезков MV и MW, т. е. равна

$$MV\cos(90^\circ-C)+MW\cos(90^\circ-B)=d_b\sin C+d_c\sin B$$

(ибо отрезки $MV \perp AC$ и $MW \perp AB$ образуют с BC углы $|90^\circ-C|$ и $|90^\circ-B|$). Таким образом, имеем

$$\text{пр}_{BC}\, VW=d_b\sin C+d_c\sin B,$$

и значит,

$$R_a\sin A=VW \geqslant d_b\sin C+d_c\sin B,$$

т. е.

$$R_a \geqslant d_b\frac{\sin C}{\sin A}+d_c\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Аналогично доказывается, что

$$R_b \geqslant d_a\frac{\sin C}{\sin B}+d_c\frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{и} \quad R_c \geqslant d_a\frac{\sin B}{\sin C}+d_b\frac{\sin A}{\sin C}.$$

Складывая эти три неравенства, получаем

$$R_a+R_b+R_c \geqslant d_a\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+d_b\left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)+ \\ +d_c\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right).$$

Заметим теперь, что поскольку при любом $a>0$

$$a+\frac{1}{a}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+2\geqslant 2, \qquad (**)$$

причем равенство имеет место лишь при $a=\frac{1}{a}=1$, то

$$\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\geqslant 2;\quad \frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\geqslant 2 \quad \text{и} \quad \frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\geqslant 2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2\,(d_a+d_b+d_c),$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы последнее неравенство обратилось в р а в е н с т в о, прежде всего необходимо, чтобы было $\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}=2$, т. е. чтобы имело место равенство $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin C}{\sin B}$, означающее, что $\sin B=\sin C$, т. е. $B=C$; аналогично должны иметь место равенства $A=C$ и $A=B$, т. е. треугольник ABC должен быть *равносторонним*. Кроме того, надо, чтобы было

$$\text{пр}_{BC}\, VW=VW, \quad \text{т. е.} \quad VW \parallel BC,$$

и также

$$UW \parallel AC, \quad UV \parallel AB.$$

Но три соотношения

$$UV \parallel AB, \quad UW \parallel AC, \quad VW \parallel BC$$

означают, что UV, UW и VW — с р е д н и е л и н и и треугольника ABC, т. е. что точка M совпадает с центром описанной окружности этого треугольника, или, другими словами, с *центром* (правильного) треугольника ABC.

В т о р о е р е ш е н и е. Послужившее основой первого решения неравенство

$$\text{пр}_{BC}\, VW=U_1U_2\leqslant VW$$

может быть использовано еще и по-другому. По-прежнему запишем, что

$$U_1U_2=U_1U+UU_2$$

и попытаемся выразить величины UU_1 и UU_2 через другие, более удобные нам. Обозначим для краткости VW, UW и UV через a_1, b_1 и c_1; затем снова воспользуемся тем, что окружность, построенная, скажем, на отрезке MC как на диаметре, проходит через точки U и V (рис. 262); поэтому $\angle VUC=\angle VMC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, прямоугольные треугольники VUU_1 и CVM подобны и

$$\frac{UU_1}{MV}=\frac{UV}{MC}, \quad \text{т. е.} \quad UU_1=\frac{UV\cdot MV}{MC}=\frac{c_1\cdot d_b}{R_c}.$$

Аналогично этому из подобия треугольников WUU_2 и BWM имеем

$$UU_2=\frac{b_1 d_c}{R_b}.$$

Теперь мы можем написать

$$R_a\leqslant\frac{U_1U_2}{VW}R_a=$$
$$=\frac{U_1U}{VW}R_a+\frac{UU_2}{VW}R_a=$$
$$=\frac{c_1d_b}{a_1R_c}R_a+\frac{b_1d_c}{a_1R_b}R_a=$$
$$=\frac{c_1R_a}{a_1R_c}d_b+\frac{b_1R_a}{a_1R_b}d_c.$$

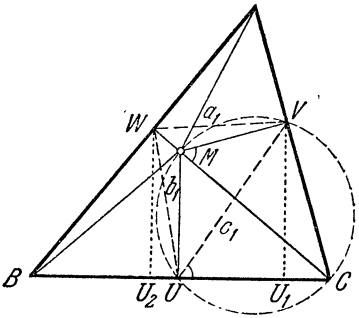


Рис. 262.

Точно так же доказывается, что

$$R_b\leqslant\frac{a_1R_b}{b_1R_a}d_c+\frac{c_1R_b}{b_1R_c}d_a \quad \text{и} \quad R_c\leqslant\frac{a_1R_c}{c_1R_a}d_b+\frac{b_1R_c}{c_1R_b}d_a.$$

Складывая последние три неравенства, получаем

$$R_a+R_b+R_c\leqslant\left(\frac{c_1R_b}{b_1R_c}+\frac{b_1R_c}{c_1R_b}\right)d_a+\left(\frac{c_1R_a}{a_1R_c}+\frac{a_1R_c}{c_1R_a}\right)d_b+$$
$$+\left(\frac{b_1R_a}{a_1R_b}+\frac{a_1R_b}{b_1R_a}\right)d_c,$$

откуда, учитывая, что в силу неравенства (**) (стр. 286)

$$\frac{c_1R_b}{b_1R_c}+\frac{b_1R_c}{c_1R_b}\geqslant 2, \quad \frac{c_1R_a}{a_1R_c}+\frac{a_1R_c}{c_1R_a}\geqslant 2 \quad \text{и} \quad \frac{b_1R_a}{a_1R_b}+\frac{a_1R_b}{b_1R_a}\geqslant 2,$$

получаем

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2d_a+2d_b+2d_c=2(d_a+d_b+d_c),$$

что и требовалось доказать.

Равенство здесь достигается, когда

$$\text{пр}_{BC}\,VW=VW, \quad \text{пр}_{AC}\,UW=UW, \quad \text{пр}_{AB}\,UV=UV,$$

т. е. $UV \parallel AB$, $UW \parallel AC$ и $VW \parallel BC$ — средние линии треугольника, и значит, точка M совпадает с *центром описанной около ABC окружности*, т. е. $R_a=R_b=R_c=R$ и $a_1=\frac{a}{2}$, $b_1=\frac{b}{2}$, $c_1=\frac{c}{2}$, а кроме того, скажем,

$$\frac{c_1R_b}{b_1R_c}+\frac{b_1R_c}{c_1R_b}=2, \text{ т. е. } \frac{c_1R_b}{b_1R_c}=1, \text{ откуда } \frac{c}{2}R=\frac{b}{2}R, \text{ т. е. } b=c;$$

и аналогично $a=c, a=b$, т. е. когда треугольник ABC *равносторонний*.

Третье решение. Заметим, что неравенство

$$aR_a \geqslant cd_c + bd_b$$

(см. решение задачи а)) имеет место всегда, когда точка M лежит внутри угла BAC (но не обязательно внутри треугольника BAC). Заменим теперь точку M точкой M', симметричной M относительно биссектрисы угла ABC. Так как эта точка тоже лежит внутри угла BAC, то

$$aR'_a \geqslant cd'_c + bd'_b,$$

где $R'_a = AM'$ — расстояние точки M' от вершины A, d'_c и d'_b — ее расстояния от прямых AB и AC (см. пунктирные линии на рис. 263; не спутайте d'_b и d'_c с отрезками MB_1 и MC_1 на рис. 26). Но так как, очевидно, $R'_a = R_a$, $d'_c = d_b$, $d'_b = d_c$, то

$$aR_a \geqslant cd_b + bd_c,$$

или

$$R_a \geqslant \frac{c}{a} d_b + \frac{b}{a} d_c.$$

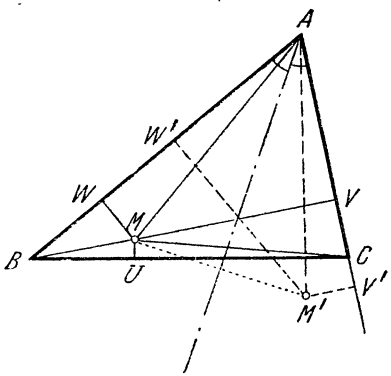


Рис. 263.

Аналогично доказываются неравенства

$$R_b \geqslant \frac{a}{b} d_c + \frac{c}{b} d_a \quad \text{и} \quad R_c \geqslant \frac{b}{c} d_a + \frac{a}{c} d_b.$$

Складывая теперь три последние неравенства, получаем

$$R_a + R_b + R_c \geqslant \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) d_c.$$

Но так как каждая скобка в правой части последнего неравенства не меньше 2 (ср. с неравенством (**), стр. 286), то окончательно получаем

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2d_a + 2d_b + 2d_c = 2(d_a + d_b + d_c),$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место лишь в том случае, если $b=c$, $a=c$ и $a=b$, т. е. если треугольник ABC *равносторонний* и если, кроме того, $AM \perp BC$, $BM \perp AC$ (ср. с решением задачи а)), т. е. M совпадает с *центром* (правильного) треугольника ABC.

Четвертое решение. Неравенство

$$R_a \geqslant \frac{c}{a} d_b + \frac{b}{a} d_c$$

(см. третье решение задачи) можно получить и другим путем. Пусть M — какая угодно точка внутри угла BAC треугольника ABC, d_b

и d_c — ее расстояния от сторон AC, AB, N — точка пересечения прямой AM с описанной окружностью S треугольника ABC, δ_b и δ_c — расстояния точки N от сторон AB и AC; обозначим еще $AM = R_a$ и $AN = \mathrm{P}_a$ (рис. 264, *а*)). Применяя к вписанному в окружность S четырехугольнику $ABNC$ теорему Птолемея (см., например, задачу 136 а) из книги Д. О. Шклярского и др. [17]), получим

$$AB \cdot NC + AC \cdot NB = BC \cdot AN,$$

т. е.

$$c \cdot NC + b \cdot NB = a \cdot \mathrm{P}_a.$$

Но поскольку $NC \geqslant \delta_b$, $NB \geqslant \delta_c$, то отсюда имеем

$$a\mathrm{P}_a \geqslant c\delta_b + b\delta_c,$$

откуда, так как, очевидно, $\frac{\mathrm{P}_a}{R_a} = \frac{\delta_b}{d_b} = \frac{\delta_c}{d_c}$, получаем

$$aR_a \geqslant cd_b + bd_c, \quad \text{или} \quad R_a \geqslant \frac{c}{a} d_b + \frac{b}{a} d_c$$

(заметим еще, что равенство здесь достигается лишь в том случае, если $\angle NBA = \angle NCA = 90°$, т. е. прямая AM проходит через центр

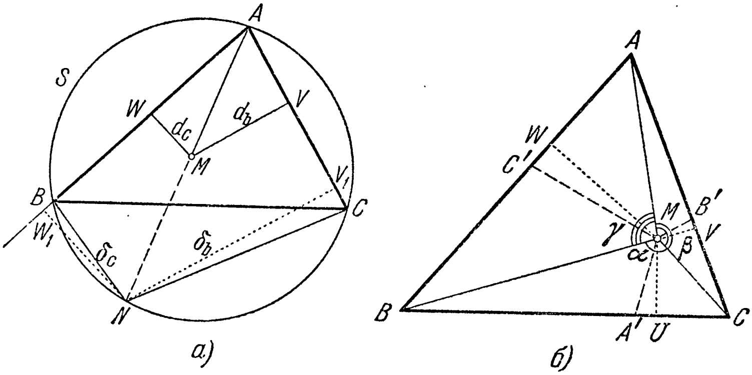


Рис. 264.

описанной вокруг ABC окружности S). Далее можно рассуждать, как в третьем решении задачи.

Пятое решение. Обозначим $\angle BMC = \alpha$, $\angle CMA = \beta$, $\angle AMB = \gamma$; далее длины MA', MB' и MC' биссектрис треугольников BMC, CMA и AMB обозначим через $\bar{d}_a$, $\bar{d}_b$ и $\bar{d}_c$ (рис. 264, *б*). Так как, очевидно,

$$S_{\triangle BMC} = S_{\triangle BMA'} + S_{\triangle CMA'},$$

то, пользуясь известной формулой для площади треугольника, получим

$$\frac{1}{2} MB \cdot MC \sin\alpha = \frac{1}{2} MB \cdot MA' \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} MC \cdot MA' \sin\frac{\alpha}{2},$$

или

$$\frac{1}{2} R_b R_c \sin\alpha = \frac{1}{2}(R_b+R_c)\,\overline{d}_a \sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\overline{d}_a = \frac{R_b R_c \sin\alpha}{(R_b+R_c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2R_b R_c}{R_b+R_c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

А так как (ср. выше, стр. 261)

$$R_b+R_c \geqslant 2\sqrt{R_b}\cdot\sqrt{R_c},$$

то

$$\overline{d}_a \leqslant \frac{2R_b R_c}{2\sqrt{R_b}\cdot\sqrt{R_c}}\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{R_b R_c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Точно так же доказывается, что

$$\overline{d}_b \leqslant \sqrt{R_a R_c}\cos\frac{\beta}{2} \quad \text{и} \quad \overline{d}_c \leqslant \sqrt{R_a R_b}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

А теперь имеем

$$R_a R_b R_c - 2(\overline{d}_a+\overline{d}_b+\overline{d}_c) \geqslant R_a+R_b+R_c-2\sqrt{R_b R_c}\cos\frac{\alpha}{2}-$$
$$-2\sqrt{R_a R_c}\cos\frac{\beta}{2}-2\sqrt{R_a R_b}\cos\frac{\gamma}{2}, \qquad (***)$$

где $\alpha+\beta+\gamma=360°$, т. е. $\frac{\gamma}{2}=180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$ и

$$\cos\frac{\gamma}{2} = -\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Воспользовавшись последним равенством, можно правую часть неравенства (***) представить так:

$$R_a+R_b+R_c-2\sqrt{R_b R_c}\cos\frac{\alpha}{2}-2\sqrt{R_a R_c}\cos\frac{\beta}{2}+$$
$$+2\sqrt{R_a R_b}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-2\sqrt{R_a R_b}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=$$
$$=R_a\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right)+R_b\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+R_c-$$
$$-2\sqrt{R_b R_c}\cos\frac{\alpha}{2}-2\sqrt{R_a R_c}\cos\frac{\beta}{2}+2\sqrt{R_a R_b}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-$$
$$-2\sqrt{R_a R_b}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=$$
$$=\left(\sqrt{R_a}\cos\frac{\beta}{2}+\sqrt{R_b}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{R_c}\right)^2+$$
$$+\left(\sqrt{R_a}\sin\frac{\beta}{2}-\sqrt{R_b}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

откуда сразу видно, что

$$R_a+R_b+R_c-2\sqrt{R_b R_c}\cos\frac{\alpha}{2}-2\sqrt{R_a R_c}\cos\frac{\beta}{2}-$$
$$-2\sqrt{R_a R_b}\cos\frac{\gamma}{2}\geqslant 0.$$

Таким образом,

$$R_a+R_b+R_c-2(\overline{d_a}+\overline{d_b}+\overline{d_c})\geqslant 0,$$

т. е.

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2(\overline{d_a}+\overline{d_b}+\overline{d_c}),$$

а значит, тем более,

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2(d_a+d_b+d_c).$$

Равенство $R_a+R_b+R_c=2(\overline{d_a}+\overline{d_b}+\overline{d_c})$ имеет место только в том случае, если

$$R_a+R_b=2\sqrt{R_aR_b},\quad R_a+R_c=2\sqrt{R_aR_c},\quad R_b+R_c=2\sqrt{R_bR_c},$$

т. е. если $R_a=R_b=R_c$ и, значит, точка M совпадает с *центром описанной вокруг треугольника ABC окружности*, и, если, кроме того,

$$\sqrt{R_a}\sin\frac{\beta}{2}-\sqrt{R_b}\sin\frac{\alpha}{2}=0,\quad \text{т. е.}\quad \sin\frac{\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2},\quad \text{или}\quad \alpha=\beta,$$

и

$$\sqrt{R_a}\cos\frac{\beta}{2}+\sqrt{R_b}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{R_c}=0,\quad \text{т. е.}\quad \cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1,$$

$$\text{или}\quad \frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}=60^\circ,$$

что возможно лишь тогда, когда треугольник ABC *правильный*; в этом последнем случае также $R_a+R_b+R_c=2(d_a+d_b+d_c)$, ибо $\overline{d_a}=d_a$, $\overline{d_b}=d_b$ и $\overline{d_c}=d_c$.

Примечание. Установленное в последнем решении неравенство

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2(\overline{d_a}+\overline{d_b}+\overline{d_c})$$

является, очевидно, усилением неравенства Эрдёша $R_a+R_b+R_c\geqslant 2(d_a+d_b+d_c)$.

в) Пусть M — точка внутри треугольника ABC, $MU=d_a$, $MV=d_b$ и $MW=d_c$ — перпендикуляры, опущенные из точки M на стороны BC, CA и AB треугольника; A', B', C' и U', V', W' — такие точки лучей MU, MV, MW и MA, MB, MC соответственно, что

$$R_a'=MA'=\frac{1}{MU}=\frac{1}{d_a},\quad R_b'=MB'=\frac{1}{MV}=\frac{1}{d_b},\quad R_c'=MC'=\frac{1}{MW}=\frac{1}{d_c}$$

и

$$d_a'=MU'=\frac{1}{MA}=\frac{1}{R_a},\quad d_b'=MV'=\frac{1}{MB}=\frac{1}{R_b},\quad d_c'=MW'=\frac{1}{MC}=\frac{1}{R_c}$$

(не путать с обозначениями d_a', d_b', d_c' на рис. 26). Соединив попарно точки A', B', C', как показано на рис. 265, мы получим *треугольник $A'B'C'$, на стороны $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ которого опущены из точки M перпендикуляры MU', MV' и MW'*. В самом деле, из подобия, скажем, треугольников MVA и $MU'B'$, имеющих общий угол M и пропорциональные стороны:

$$MV:MA=d_b:R_A=\frac{1}{R_b'}:\frac{1}{d_a'}=d_a':R_b'=MU':MB',$$

вытекает, что $\angle MU'B' = \angle MVA = 90^\circ$. Точно так же доказывается и что $\angle MU'C' = \angle MWA = 90^\circ$; поэтому $C'U'B'$ — это одна прямая, а MU' — перпендикуляр, опущенный из точки M на эту прямую.

Применим теперь к треугольнику $A'B'C'$ и заключенной внутри него точке M неравенство задачи б):

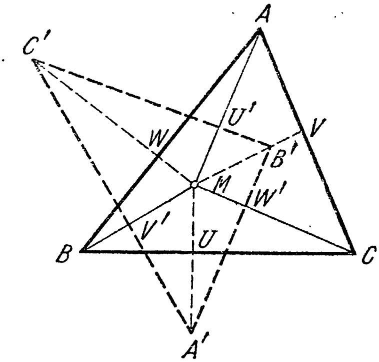


Рис. 265.

$$R'_a + R'_b + R'_c \geq 2(d'_a + d'_b + d'_c).$$

Это неравенство можно переписать так:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \geq 2\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}\right),$$

или

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c}\right),$$

а это нам и требовалось доказать.

Равенство $\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c}\right)$ имеет место лишь в том случае, когда $R'_a + R'_b + R'_c = 2(d'_a + d'_b + d'_c)$, т. е. когда треугольник $A'B'C'$ равносторонний и точка M совпадает с его центром. Но в этом случае и треугольник ABC будет, очевидно, *равносторонним*, а точка M будет являться *центром* и этого треугольника.

Примечание. Переход от треугольника ABC к треугольнику $A'B'C'$ называется *полярным преобразованием* (с центром M и степенью 1)[1]; при этом расстояния R_a, R_b, R_c, d_a, d_b, d_c и R'_a, R'_b, R'_c, d'_a, d'_b, d'_c точки M от вершин и от сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ связаны, как мы видели, соотношениями

$$R'_a = \frac{1}{d_a}, \quad R'_b = \frac{1}{d_b}, \quad R'_c = \frac{1}{d_c}, \quad d'_a = \frac{1}{R_a}, \quad d'_b = \frac{1}{R_b}, \quad d'_c = \frac{1}{R_c}.$$

Отсюда следует, что *любое тождественно верное соотношение* (равенство или неравенство!), *связывающее величины* R_a, R_b, R_c; d_a, d_b, d_c *подстановкой*

$$R_a \to \frac{1}{d_a}, \quad R_b \to \frac{1}{d_b}, \quad R_c \to \frac{1}{d_c}, \quad d_a \to \frac{1}{R_a}, \quad d_b \to \frac{1}{R_b}, \quad d_c \to \frac{1}{R_c}, \quad (\Pi)$$

переводится в новое, также верное, соотношение между теми же величинами, которое, однако, иногда может и не отличаться от старого[2] (ср. А. Оппенгейм [60]).

[1]) См., например, пп. 8.3 и 9.4 статьи И. М. Яглом и Л. С. Атанасян, Геометрические преобразования, Энциклопедия элементарной математики, кн. IV, Физматгиз, 1963 или § 4 гл. I книги И. М. Яглом, Геометрические преобразования, II, Гостехиздат, 1956.

[2]) Попробуйте, например, применить подстановку (П) к неравенству задачи 112 и последующих задач!

112. а) Пусть

$$d'_a = MA_1,\quad d'_b = MB_1,\qquad d'_c = MC_1,$$

где A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения прямых AM, BM и CM с противоположными сторонами треугольника (см. рис. 26 на стр. 48 или рис. 260 на стр. 284). Ясно, что высоты AP и MU треугольников ABC и MBC относятся, как отрезки AA_1 и MA_1, поэтому

$$\frac{d'_a}{d'_a + R_a} = \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}};$$

аналогично

$$\frac{d'_b}{d'_b + R_b} = \frac{S_{\triangle MAC}}{S_{\triangle ABC}} \quad \text{и} \quad \frac{d'_c}{d'_c + R_c} = \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}}.$$

Поэтому

$$\frac{d'_a}{d'_a + R_a} + \frac{d'_b}{d'_b + R_b} + \frac{d'_c}{d'_c + R_c} = \frac{S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC} + S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}} = 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{1 + R_a/d'_a} + \frac{1}{1 + R_b/d'_b} + \frac{1}{1 + R_c/d'_c} = 1,$$

или

$$\frac{1}{1+x_a} + \frac{1}{1+x_b} + \frac{1}{1+x_c} = 1, \tag{*}$$

где для краткости обозначено $\frac{R_a}{d'_a} = x_a$, $\frac{R_b}{d'_b} = x_b$ и $\frac{R_c}{d'_c} = x_c$.

Приведя все фигурирующие в равенстве (*) дроби к общему знаменателю, получим

$$(1+x_b)(1+x_c) + (1+x_a)(1+x_c) + (1+x_a)(1+x_b) = \\ = (1+x_a)(1+x_b)(1+x_c).$$

Раскрывая скобки и перенося все члены равенства в одну часть, будем иметь

$$2 + (x_a + x_b + x_c) - x_a x_b x_c = 0.$$

Далее из неравенства (А) (стр. 246)

$$x_a + x_b + x_c \geqslant 3\sqrt[3]{x_a x_b x_c}$$

вытекает, что

$$2 + 3\sqrt[3]{x_a x_b x_c} - x_a x_b x_c \leqslant 0,$$

или

$$2 + 3Z - Z^3 \leqslant 0,$$

где $Z = \sqrt[3]{x_a x_b x_c}$.

Разложив левую часть последнего неравенства на множители, получим

$$(2 - Z)(1 + Z)^2 \leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$2 - Z \leqslant 0,$$

т. е.

$$Z=\sqrt[3]{x_a x_b x_c}=\sqrt[3]{\frac{R_a}{d'_a}\,\frac{R_b}{d'_b}\,\frac{R_c}{d'_c}}\geqslant 2, \quad \text{или} \quad \frac{R_a R_b R_c}{d'_a d'_b d'_c}\geqslant 8,$$

другими словами, что

$$R_a R_b R_c \geqslant 8 d'_a d'_b d'_c.$$

Ясно, что равенство $R_a R_b R_c = 8 d'_a d'_b d'_c$ имеет место только в том случае, когда

$$\frac{R_a}{d'_a}=\frac{R_b}{d'_b}=\frac{R_c}{d'_c} \quad (=2),$$

другими словами, в том случае, когда точка M совпадает с *центром тяжести* (точкой пересечения медиан) треугольника ABC.

б) Обозначим стороны треугольника ABC буквами a, b, c, как обычно; тогда, очевидно (ср., например, рис. 26 на стр. 48),

$$R_a+R_b > c, \quad R_b+R_c > a, \quad R_c+R_a > b,$$

и поэтому

$$R_a+R_b+R_c > \frac{a+b+c}{2}=p.$$

С другой стороны (см. задачу 63),

$$d'_a+d'_b+d'_c < c,$$

где мы считаем, что $a \leqslant b \leqslant c$. Поэтому

$$\frac{R_a+R_b+R_c}{d'_a+d'_b+d'_c} > \frac{p}{c} > 1,$$

ибо $a+b > c$, и значит, $2p=a+b+c > 2c$.

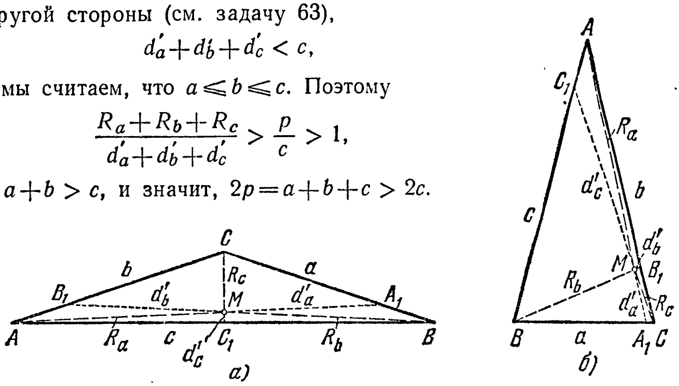


Рис. 266.

Неравенство задачи улучшено быть не может, ибо если ABC — равнобедренный треугольник с очень большим углом при вершине C и точка M очень близка к середине стороны AB (рис. 266, a), то

$$R_a \approx \frac{c}{2}, \quad R_b \approx \frac{c}{2}, \quad R_c \approx 0; \quad d'_a \approx \frac{c}{2}, \quad d'_b \approx \frac{c}{2}, \quad d'_c \approx 0$$

и

$$R_a+R_b+R_c \approx d'_a+d'_b+d'_c$$

$\Big($причем отношение $\dfrac{R_a+R_b+R_c}{d'_a+d'_b+d'_c}$ может быть сделано сколь угодно близким к 1$\Big)$. Также и если ABC — равнобедренный треугольник с очень малым углом при вершине A и M — точка, очень близкая к стороне AC и к вершине C этого треугольника (рис. 266, *б*), то

$$R_a \approx c, \quad R_b \approx 0, \quad R_c \approx 0; \quad d'_a \approx 0, \quad d'_b \approx 0, \quad d'_c \approx c,$$

и

$$R_a + R_b + R_c \approx d'_a + d'_b + d'_c,$$

где отношение $\dfrac{R_a+R_b+R_c}{d'_a+d'_b+d'_c}$ может быть сколь угодно близким к 1.]

113. а) В первом решении задачи 111 б) было показано, что

$$R_a \geqslant \frac{1}{\sin A}(d_b \sin C + d_c \sin B), \quad R_b \geqslant \frac{1}{\sin B}(d_a \sin C + d_c \sin A),$$

$$R_c \geqslant \frac{1}{\sin C}(d_a \sin B + d_b \sin A) \qquad \text{(I)}$$

(см. стр. 285); в третьем и четвертом решениях той же задачи использовались неравенства

$$R_a \geqslant \frac{1}{a}(cd_b + bd_c), \quad R_b \geqslant \frac{1}{b}(cd_a + ad_c), \quad R_c \geqslant \frac{1}{c}(bd_a + ad_b) \quad \text{(II)}$$

(см. стр. 288 и 289). Любая из этих двух систем неравенств без труда приводит к нужному результату; мы здесь будем исходить из несколько более простых неравенств (II).

Заметим, что

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2a}}(\sqrt{cd_b} + \sqrt{bd_c})\right]^2 = \frac{1}{2a}(cd_b + bd_c + 2\sqrt{cd_b}\cdot\sqrt{bd_c}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{a}(cd_b + bd_c),$$

поскольку (ср. выше, стр. 290)

$$2\sqrt{cd_b}\cdot\sqrt{bd_c} \leqslant cd_b + bd_c.$$

Поэтому в силу (II) имеем

$$\sqrt{R_a} \geqslant \sqrt{\frac{1}{a}(cd_b + bd_c)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2a}}(\sqrt{cd_b} + \sqrt{bd_c}),$$

и аналогично

$$\sqrt{R_b} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2b}}(\sqrt{cd_a} + \sqrt{ad_c}), \qquad \sqrt{R_c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2c}}(\sqrt{bd_a} + \sqrt{ad_b}).$$

Складывая эти три неравенства, получаем

$$\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b} + \sqrt{R_c} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{cd_b} + \sqrt{bd_c}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{cd_a} + \sqrt{ad_c}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{bd_a} + \sqrt{ad_b}}{\sqrt{c}}\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{d_a} + \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{d_b} + \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)\sqrt{d_c}\right].$$

А так как в силу неравенства (**) (стр. 286)

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\geqslant 2,\quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 2,\quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\geqslant 2,$$

то

$$\sqrt{R_a}+\sqrt{R_b}+\sqrt{R_c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{d_a}+2\sqrt{d_b}+2\sqrt{d_c})=$$
$$=\sqrt{2}(\sqrt{d_a}+\sqrt{d_b}+\sqrt{d_c}),$$

что нам и требовалось доказать.

Последнее неравенство обращается в равенство, лишь если

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=2,$$

т. е. если $a=b=c$, и треугольник ABC *равносторонний*, причем

$$R_a=\frac{1}{a}(cd_b+bd_c)=d_b+d_c,\quad R_b=d_a+d_c,\quad R_c=d_a+d_b,$$

что возможно только в том случае, когда точка M совпадает с *центром* (равностороннего) треугольника ABC.

б) Мы снова можем исходить из тех же неравенств (I) или (II), что и в решении предыдущей задачи; здесь мы опять воспользуемся неравенствами (II). Так как, очевидно,

$$\left(\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c\right)^2=\frac{c^2}{a^2}d_b^2+\frac{b^2}{a^2}d_c^2+2\frac{bc}{a^2}d_bd_c>\frac{c^2}{a^2}d_b^2+\frac{b^2}{a^2}d_c^2,$$

то в силу (II) имеем

$$R_a^2\geqslant\left(\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c\right)^2>\frac{c^2}{a^2}d_b^2+\frac{b^2}{a^2}d_c^2,$$

а также

$$R_b^2>\frac{c^2}{b^2}d_a^2+\frac{a^2}{b^2}d_c^2\quad\text{и}\quad R_c^2>\frac{b^2}{c^2}d_a^2+\frac{a^2}{c^2}d_b^2.$$

Складывая эти три неравенства, получаем

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2>\left(\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)d_a^2+\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\right)d_b^2+\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)d_c^2,$$

откуда, используя то, что

$$\frac{c^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geqslant 2,\quad \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}\geqslant 2\quad\text{и}\quad\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geqslant 2$$

(ср. с неравенством (**) на стр. 286), имеем

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2>2(d_a^2+d_b^2+d_c^2),$$

что и требовалось доказать.

Последнее неравенство, очевидно, имеет место всегда, т. е. при любом треугольнике ABC и любой точке M внутри него, ибо $\frac{c^2}{a^2}d_b^2+\frac{b^2}{a^2}d_c^2<\left(\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c\right)^2$ при любых $d_a>0$, $d_b>0$, $d_c>0$. Однако если представить себе, что треугольник ABC равнобедренный

($b=c$) с очень малым основанием a, и точка M весьма близка к его вершине A (рис. 267), то мы будем иметь

$$R_a \approx 0, \quad R_b \approx c, \quad R_c \approx b \quad \text{и} \quad d_b \approx 0, \quad d_c \approx 0, \quad d_a \approx h_a \approx b=c,$$

так что

$$R_a^2+R_b^2+R_c^2 \approx 2b^2 \quad \text{и} \quad d_a^2+d_b^2+d_c^2 \approx b^2.$$

Поэтому отношение

$$\frac{R_a^2+R_b^2+R_c^2}{d_a^2+d_b^2+d_c^2}$$

может быть сделано *сколь угодно близким* к 2, откуда следует, что улучшить неравенство настоящей задачи невозможно.

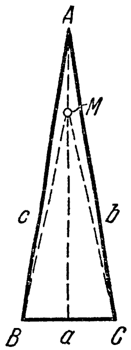


Рис. 267.

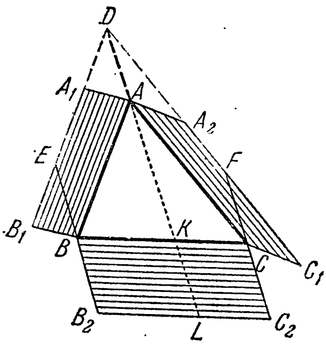


Рис. 268.

114. а) Пусть прямая AD пересекает стороны BC и B_2C_2 параллелограмма BCC_2B_2 в точках K и L; кроме того, пусть E и F — точки пересечения прямых BB_2 и A_1B_1, CC_2 и A_2C_1. (См. отвечающий случаю рис. 28, *а*, рис. 268, на котором, однако, для наглядности параллелограмм BCC_2B_2 расположен вне треугольника ABC; для случая рис. 28, *б* доказательство аналогично.) Очевидно, что

$$S_{BCC_2B_2}=S_{BKLB_2}+S_{CKLC_2}=S_{BADE}+S_{CADF}=S_{BAA_1B_1}+S_{CAA_2C_1},$$

ибо, скажем, параллелограммы $BKLB_2$ и $BADE$ равновелики, поскольку они имеют одинаковые «основания» $KL \# DA$ и равные высоты, опущенные на эти основания (перпендикуляр, опущенный из B на прямую DL); параллелограммы $BADE$ и BAA_1B_1 равновелики, ибо они имеют общее основание BA и равные высоты, опущенные на это основание. Но это нам и требовалось доказать.

б) Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку M внутри него (рис. 269, *а*). Заменим этот треугольник новым треугольником $AB'C'$, где точки B' и C' симметричны точкам B и C относительно биссектрисы угла A, так что $AB'=AB=c$ и $AC'=AC=b$ (рис. 269, *б*); точку M мы оставим без изменения. Применим теперь теорему Паппа к треугольнику $AB'C'$ и параллелограммам $AB'B_1A_1$ и $AC'C_1A_2$, построенным на его сторонах AB' и AC' по ту же сторону от AB', соответственно AC', по какую расположен сам треугольник (ср.

рис. 269, *б* с рис. 28, *б* в тексте), стороны B_1A_1 и C_1A_2 которых *проходят через точку* M; сумма площадей этих параллелограммов равна площади параллелограмма $B'C'C_2B_2$, где $B'B_2 \# AM$. Но очевидно,

$$S_{B'AA_1B_1} = AB' \cdot MV = cd_b \text{ и } S_{C'AA_2C_1} = AC' \cdot MW = bd_c.$$

С другой стороны, $B'C' = BC = a$ (ибо отрезок $B'C'$ симметричен BC

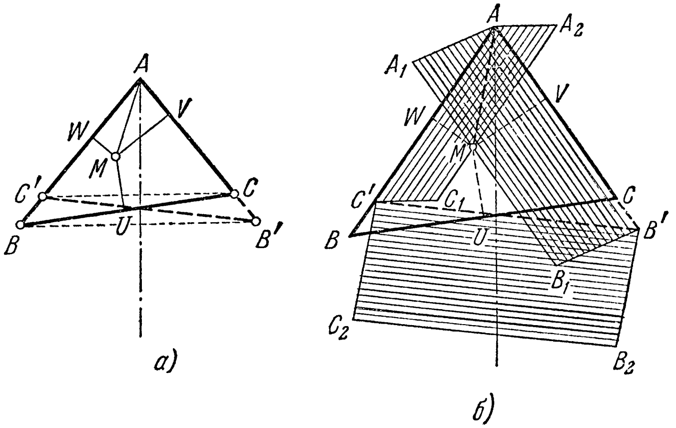


Рис. 269.

относительно биссектрисы угла A) и $B'B_2 = AM = R_a$; поэтому

$$cd_b + bd_c = S_{B'C'C_2B_2} \leqslant aR_a,$$

где равенство имеет место, лишь если $B'B_2 \| AM \perp B'C'$. Таким образом, имеем

$$aR_a \geqslant cd_b + bd_c, \text{ откуда } R_a \geqslant \frac{c}{a} d_b + \frac{b}{a} d_c.$$

Аналогично устанавливаются неравенства

$$R_b \geqslant \frac{a}{b} d_c + \frac{c}{b} d_a \quad \text{и} \quad R_c \geqslant \frac{a}{c} d_b + \frac{b}{c} d_a,$$

в силу которых, как в третьем решении задачи 111 а), получаем

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c).$$

Для того чтобы имело место равенство $R_a + R_b + R_c = 2(d_a + d_b + d_c)$, необходимо, чтобы было $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = 2$, что равносильно равенству $a = b = c$ трех сторон треугольника. Но ясно, что при $b = c$ биссектриса угла A перпендикулярна отрезку $B'C'$ (совпадающему в этом случае с BC); поэтому $AM \perp B'C'$ в том и только в том случае, когда точка M принадлежит биссектрисе угла A. Точно так же устанавливается, что точка M должна принадлежать и двум другим биссектрисам треугольника; таким образом, треугольник ABC должен быть *равносторонним*, и точка M должна совпадать с центром вписанной в этот треугольник окружности, т. е. с *центром* (правильного) треугольника ABC.

115. Применив неравенство

$$aR_a \geqslant bd_b + cd_c \qquad (!)$$

(стр. 284), справедливое для любой точки M угла BAC, к точке M', симметричной M относительно биссектрисы угла A, получим (ср. с третьим решением задачи 111 б))

$$aR_a \geqslant bd_c + cd_b.$$

Складывая последнее неравенство с неравенством (!), будем иметь

$$2aR_a \geqslant bd_b + cd_c + bd_c + cd_b = (b+c)(d_b+d_c).$$

Аналогично этому устанавливается, что

$$2bR_b \geqslant (a+c)(d_a+d_c) \text{ и } 2cR_c \geqslant (a+b)(d_a+d_b).$$

Перемножим последние три неравенства:

$$8abcR_aR_bR_c \geqslant (a+b)(a+c)(b+c)(d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c).$$

Но, поскольку

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad a+c \geqslant 2\sqrt{ac}, \quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$$

(ср. выше, стр. 250), то тем более

$$8abcR_aR_bR_c \geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{bc}\,(d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c) =$$
$$= 8abc\,(d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c),$$

и значит,

$$R_aR_bR_c \geqslant (d_a+d_b)(d_a+d_c)(d_b+d_c),$$

что и требовалось доказать.

Равенство здесь имеет место, лишь если $a+b=2\sqrt{ab}$, $a+c=2\sqrt{ac}$ и $b+c=2\sqrt{bc}$, т. е. если $a=b=c$, а значит, треугольник ABC — *правильный*, и, кроме того, если $R_a+d_a=h_a$, $R_b+d_b=h_b$ и $R_c+d_c=h_c$, т. е. если точка M совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC, т. е. с *центром* этого треугольника.

116. а) Первое решение. Мы будем исходить из неоднократно уже использованного неравенства

$$aR_a \geqslant bd_b + cd_c \qquad (!)$$

(ср. выше, стр. 284), которое можно также переписать следующим образом:

$$d_aR_a \geqslant \frac{b}{a}d_ad_b + \frac{c}{a}d_ad_c.$$

Аналогично имеем

$$d_b R_b \geqslant \frac{a}{b} d_a d_b + \frac{c}{b} d_b d_c, \qquad d_c R_c \geqslant \frac{a}{c} d_a d_c + \frac{b}{c} d_b d_c.$$

Складывая последние три неравенства, получаем

$$d_a R_a + d_b R_b + d_c R_c \geqslant \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) d_a d_b + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) d_b d_c + \\ + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) d_a d_c,$$

или, поскольку $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2$, $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geqslant 2$ (ср. выше, стр. 286),

$$d_a R_a + d_b R_b + d_c R_c \geqslant 2 (d_a d_b + d_b d_c + d_a d_c),$$

что и требовалось доказать.

Равенство здесь имеет место, лишь если $a = b = c$ (треугольник ABC *равносторонний*) и если точка M совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC, т. е. с его *центром* (ср. первое решение задачи 111 а)).

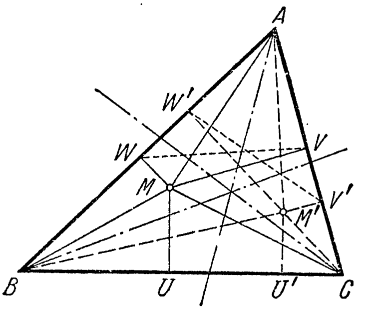


Рис. 270.

Второе решение. Заметим прежде всего, что в силу известной теоремы Чева[1]) из того, что прямые AM, BM и CM пересекаются в одной точке M, следует, что и *симметричные AM, BM и CM относительно биссектрис соответствующих углов треугольника прямые AM', BM' и CM' пересекаются в одной точке M'* (рис. 270; см., например, задачу 139 б) из книги: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии, ч. 2, Геометрия (планиметрия), Гостехиздат, 1952). Обозначим расстояния от (внутренней, если точка M внутренняя!) точки M' до вершин и до сторон треугольника ABC через R'_a, R'_b, R'_c; d'_a, d'_b, d'_c. Очевидно, что $\frac{d_a}{d_b} = \frac{d'_b}{d'_a}$, $\frac{d_b}{d_c} = \frac{d'_c}{d'_b}$ и $\frac{d_c}{d_a} = \frac{d'_a}{d'_c}$, т. е. $\frac{d'_a}{1/d_a} = \frac{d'_b}{1/d_b} = \frac{d'_c}{1/d_c}$ $(= k)$. Но поскольку треугольник ABC можно разбить на три треугольника MBC, MCA, MAB и на три треугольника $M'BC$, $M'CA$, $M'AB$, то

$$2S = a d_a + b d_b + c d_c = a d'_a + b d'_b + c d'_c = k \left(\frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c}\right),$$

[1]) См., например, задачу 146 книги [17].

откуда получаем

$$k=2S:\left(\frac{a}{d_a}+\frac{b}{d_b}+\frac{c}{d_c}\right)=\frac{2d_ad_bd_cS}{ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b},$$

и следовательно,

$$d_a'=\frac{2Sd_bd_c}{ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b},\qquad d_b'=\frac{2Sd_ad_c}{ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b},$$

$$d_c'=\frac{2Sd_ad_b}{ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b}. \qquad (*)$$

Заметим далее, что в треугольнике MVW (рис. 270) угол VMW равен $180°-A$; поэтому, применяя к треугольнику MVW теорему косинусов и обозначая отрезок VW через a_1 (а UV и WU — через c_1 и b_1), получим

$$a_1=VW=\sqrt{d_b^2+d_c^2+2d_bd_c\cos A}.$$

А теперь, применяя теорему синусов к треугольнику AVW, сторона $VW=a_1$ которого противолежит углу A, а диаметр описанной окружности (проходящей, очевидно, через точку M) равен R_a, имеем

$$\frac{a_1}{\sin A}=R_a.$$

Аналогично, обозначая $V'W'$ через a_1', имеем

$$R_a'=\frac{a_1'}{\sin A}=\frac{\sqrt{d_b'^2+d_c'^2+2d_b'd_c'\cos A}}{\sin A}=$$

$$=\frac{k}{\sin A}\sqrt{\frac{1}{d_b^2}+\frac{1}{d_c^2}+\frac{2\cos A}{d_bd_c}}=\frac{k}{d_bd_c\sin A}\sqrt{d_c^2+d_b^2+2d_cd_b\cos A}=$$

$$=\frac{ka_1}{d_bd_c\sin A}=\frac{k}{d_bd_c}\,\frac{a_1}{\sin A}=\frac{kR_a}{d_bd_c}.$$

Но так как $k=2d_ad_bd_cS:(ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b)$, то

$$R_a'=\frac{2Sd_aR_a}{ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b}$$

и аналогично

$$R_b'=\frac{2Sd_bR_b}{ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b},\quad R_c'=\frac{2Sd_cR_c}{ad_bd_c+bd_ad_c+cd_ad_b}. \qquad (**)$$

Применяя теперь неравенство Эрдёша (задача 111 б)) к треугольнику ABC и точке M', получим

$$R_a'+R_b'+R_c'\geqslant 2(d_a'+d_b'+d_c'),$$

что в силу формул (*) и (**) равносильно требуемому неравенству

$$d_aR_a+d_bR_b+d_cR_c\geqslant 2(d_ad_b+d_bd_c+d_cd_a).$$

Равенство здесь имеет место лишь если треугольник ABC *равносторонний* и точка M' (а значит, и точка M!) — его *центр*.

Примечание. Соответствие, сопоставляющее точке M треугольника ABC точку M' (см. рис. 270), называется *изогональным* *соответствием*[1]). Использование изогонального соответствия позволяет утверждать, что *всякое тождественно верное соотношение* (равенство или неравенство!), *связывающее величины* R_a, R_b, R_c; d_a, d_b, d_c, *переводится подстановкой*

$$\begin{matrix} R_a \to d_aR_a, & R_b \to d_bR_b, & R_c \to d_cR_c; \\ d_a \to d_bd_c, & d_b \to d_cd_a, & d_c \to d_ad_b \end{matrix} \qquad \text{(И)}$$

также в тождественно верное соотношение (ср. с примечанием к решению задачи 111 в); см. А. Оппенгейм [60]). В частности, неравенство Эрдёша эта подстановка переводит в неравенство задачи 116 а) (а неравенство задачи 116 а) — в неравенство Эрдёша).

б) Пусть A', B', C' — такие точки на лучах MA, MB, MC (где M — внутренняя точка треугольника ABC; рис. 271), что

$$MA' = \frac{1}{MA}, \quad MB' = \frac{1}{MB}, \quad MC' = \frac{1}{MC}.$$

Обозначим расстояния точки M от вершин и от сторон треугольника ABC по-прежнему через R_a, R_b, R_c; d_a, d_b, d_c, а расстояния этой же точки от вершин и от сторон треугольника $A'B'C'$ — через R'_a, R'_b, R'_c; d'_a, d'_b, d'_c; тогда, очевидно,

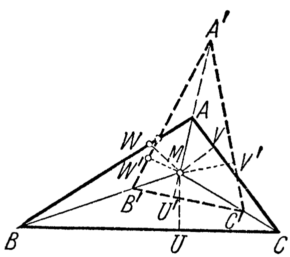


Рис. 271.

$$R'_a = \frac{1}{R_a} = \frac{R_bR_c}{R_aR_bR_c}, \quad R'_b = \frac{R_aR_c}{R_aR_bR_c},$$

$$R'_c = \frac{R_aR_b}{R_aR_bR_c}. \qquad (*)$$

Далее, поскольку треугольники MBC и $MB'C'$ с общим углом M и пропорциональными сторонами $\left(\frac{MB}{MC} = \frac{MC'}{MB'}, \text{ ибо } MB \cdot MB' = MC \cdot MC' = 1\right)$ подобны, и коэффициент K подобия этих треугольников равен

$$K = \frac{MB'}{MC} = \frac{1/R_b}{R_c} = \frac{1}{R_bR_c},$$

то отношение высот $d_{a'}$ и d_a этих треугольников также равно K; таким образом,

$$d'_a = Kd_a = \frac{d_a}{R_bR_c} = \frac{d_aR_a}{R_aR_bR_c},$$

и аналогично

$$d'_b = \frac{d_bR_b}{R_aR_bR_c}, \quad d'_c = \frac{d_cR_c}{R_aR_bR_c}. \qquad (**)$$

[1]) Ср. с п. 3.5 названной в подстрочном примечании [1]) на стр. 292 статьи И. М. Яглома и Л. С. Атанасяна.

Применим теперь неравенство Эрдёша (задача 111 б)) к треугольнику $A'B'C'$ и точке M внутри него; мы получим

$$R'_a+R'_b+R'_c \geqslant 2(d'_a+d'_b+d'_c),$$

или, в силу формул (*) и (**),

$$R_aR_b+R_bR_c+R_aR_c \geqslant 2(d_aR_a+d_bR_b+d_cR_c),$$

что нам и требовалось доказать.

Равенство здесь имеет место лишь в том случае, если треугольник $A'B'C'$ правильный, и точка M — его центр; но в этом случае и треугольник ABC будет *правильным*, а точка M совпадет с его *центром*.

Примечание. Преобразование, переводящее вершины A, B, C треугольника ABC в точки A', B', C' (рис. 271), называется *инверсией* (с центром M и степенью 1)[1]). Использование инверсии позволяет утверждать, что *каждое тождественно верное соотношение, связывающее величины* R_a, R_b, R_c; d_a, d_b, d_c, *подстановка*

$$\begin{aligned} &R_a \to R_bR_c,\ R_b \to R_cR_a,\ R_c \to R_aR_b; \\ &d_a \to d_aR_a,\ \ d_b \to d_bR_b,\ \ d_c \to d_cR_c \end{aligned} \tag{I}$$

переводит в новое соотношение, также являющееся тождественно верным (ср. с примечанием ко второму решению задачи а); см. А. Оппенгейм [60]). В частности, неравенство Эрдёша подстановка (I) переводит в неравенство настоящей задачи, а это последнее неравенство — в неравенство Эрдёша.

в) Сразу следует из результатов задач а) и б). (Здесь также равенство имеет место лишь в том случае, когда треугольник *ABC равносторонний*, а точка M — его *центр*.)

г) Применяя неравенство задачи а) к треугольнику $A'B'C'$ рис. 271 и используя формулы (*) и (**) решения задачи б), получаем

$$d'_aR'_a+d'_bR'_b+d'_cR'_c \geqslant 2(d'_a d'_b+d'_b d'_c+d'_c d'_a),$$

или

$$\frac{d_a}{R_aR_bR_c}+\frac{d_b}{R_aR_bR_c}+\frac{d_c}{R_aR_bR_c} \geqslant 2\left(\frac{d_ad_b}{R_aR_bR_c^2}+\frac{d_bd_c}{R_a^2R_bR_c}+\frac{d_cd_a}{R_aR_b^2R_c}\right).$$

Умножив обе части этого неравенства на $\frac{R_aR_bR_c}{d_ad_bd_c}$, мы и получим требуемый результат. Равенство здесь также имеет место лишь в том случае, когда треугольник *ABC равносторонний* и точка M — его *центр*.

д) Применяя неравенство задачи а) к треугольнику $A'B'C'$ рис. 265 (стр. 292) и используя формулы решения задачи 111 в), получим

$$d'_aR'_a+d'_bR'_b+d'_cR'_c \geqslant 2(d'_a d'_b+d'_b d'_c+d'_c d'_a),$$

---

[1]) См. пп. 1.1 и 9.3 названной в подстрочном примечании на стр. 292 статьи И. М. Яглома и Л. С. Атанасяна или §§ 1 и 4 гл. II указанной там же книги И. М. Яглома.

или

$$\frac{1}{d_aR_a}+\frac{1}{d_bR_b}+\frac{1}{d_cR_c}\geqslant 2\left(\frac{1}{R_aR_b}+\frac{1}{R_bR_c}+\frac{1}{R_cR_a}\right),$$

что и требовалось доказать. (Равенство и здесь имеет место лишь в том случае, когда треугольник *ABC равносторонний* и точка M — его *центр*.)

е) Следует из неравенств задач г) и д) (условия равенства — те же, что и раньше).

117. а) Так как в силу задачи 111 б)

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2(d_a+d_b+d_c),$$

и, кроме того (см. неравенство (А), стр. 246),

$$\frac{d_a+d_b+d_c}{3}\geqslant\frac{3}{1/d_a+1/d_b+1/d_c},$$

то

$$\frac{1}{3}(R_a+R_b+R_c)\geqslant\frac{2}{3}(d_a+d_b+d_c)\geqslant 2\frac{3}{1/d_a+1/d_b+1/d_c}=$$

$$=6\frac{1}{1/d_a+1/d_b+1/d_c},$$

что равносильно неравенству, которое нам надо доказать.

Равенство здесь имеет место только в том случае, когда треугольник *ABC правильный* и точка M — его *центр*.

б) Заметим прежде всего, что при любых положительных числах x, y, z и x_1, y_1, z_1 имеет место неравенство[1])

$$(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\geqslant(xx_1+yy_1+zz_1)^2. \qquad (Д)$$

В самом деле, нетрудно проверить, что

$$(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(xx_1+yy_1+zz_1)^2=$$
$$=x^2y_1^2+x^2z_1^2+y^2x_1^2+y^2z_1^2+z^2x_1^2+z^2y_1^2-2xyx_1y_1-2xzx_1z_1-2yzy_1z_1=$$
$$=(xy_1-yx_1)^2+(xz_1-zx_1)^2+(yz_1-zy_1)^2,$$

а следовательно,

$$(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-(xx_1+yy_1+zz_1)^2\geqslant 0,$$

где равенство может иметь место лишь в том случае, когда

$$xy_1-yx_1=xz_1-zx_1=yz_1-zy_1=0,$$

т. е. когда

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}.$$

Из неравенства (Д) следует

$$(R_a^2+R_b^2+R_c^2)\left(\frac{1}{d_a^2}+\frac{1}{d_b^2}+\frac{1}{d_c^2}\right)\geqslant\left(\frac{R_a}{d_a}+\frac{R_b}{d_b}+\frac{R_c}{d_c}\right)^2.$$

---

[1]) Ср. с задачей 289 книги Д. О. Шклярского и др. [11].

Но в силу неравенства (А) (стр. 246)

$$\frac{R_a}{d_a}+\frac{R_b}{d_b}+\frac{R_c}{d_c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{R_a}{d_a}\cdot\frac{R_b}{d_b}\cdot\frac{R_c}{d_c}},$$

и значит,

$$(R_a^2+R_b^2+R_c^2)\left(\frac{1}{d_a^2}+\frac{1}{d_b^2}+\frac{1}{d_c^2}\right)\geqslant 9\sqrt[3]{\left(\frac{R_aR_bR_c}{d_ad_bd_c}\right)^2}.$$

А так как в силу результата задачи 111 а)

$$\frac{R_aR_bR_c}{d_ad_bd_c}\geqslant 8,\quad \text{т. е.}\quad \sqrt[3]{\left(\frac{R_aR_bR_c}{d_ad_bd_c}\right)^2}\geqslant\sqrt[3]{8^2}=4,$$

то окончательно получаем

$$(R_a^2+R_b^2+R_c^2)\left(\frac{1}{d_a^2}+\frac{1}{d_b^2}+\frac{1}{d_c^2}\right)\geqslant 9\cdot 4=36,$$

что и требовалось доказать.

Так как неравенство задачи 111 а) обращается в равенство лишь в том случае, когда треугольник ABC *равносторонний* и точка M совпадает с его *центром*, то и равенство

$$(R_a^2+R_b^2+R_c^2)\left(\frac{1}{d_a^2}+\frac{1}{d_b^2}+\frac{1}{d_c^2}\right)=36 \qquad (*)$$

возможно лишь в этом последнем случае; то, что в этом случае равенство (*) действительно имеет место, легко проверить непосредственно.

Примечание. Можно показать, что результаты настоящей задачи допускают следующее усиление:

$$\text{а)}\quad (R_a+R_b+R_c)\left(\frac{1}{d'_a}+\frac{1}{d'_b}+\frac{1}{d'_c}\right)\geqslant 18$$

и

$$\text{б)}\quad (R_a^2+R_b^2+R_c^2)\left(\frac{1}{d'^2_a}+\frac{1}{d'^2_b}+\frac{1}{d'^2_c}\right)\geqslant 36,$$

где $d'_a=MA_1$, $d'_b=MB_1$, $d'_c=MC_1$ и A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых MA, MB и MC со сторонами BC, CA и AB треугольника ABC (ср. с вторым решением задачи 116 а)). Так как, очевидно, $d'_a\geqslant d_a$, $d'_b\geqslant d_b$ и $d'_c\geqslant d_c$, а следовательно,

$$\frac{1}{d'_a}+\frac{1}{d'_b}+\frac{1}{d'_c}\leqslant\frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c}$$

и

$$\frac{1}{d'^2_a}+\frac{1}{d'^2_b}+\frac{1}{d'^2_c}\leqslant\frac{1}{d_a^2}+\frac{1}{d_b^2}+\frac{1}{d_c^2},$$

то эти неравенства (обращающиеся в равенства, лишь если точка M совпадает с точкой пересечения медиан треугольника) сильнее тех, доказательство которых составляет содержание задач а) и б).

118. а) Так как, очевидно,

$$S_A h_A = 3V = 3V_{MBCD} + 3V_{MACD} + 3V_{MABD} + 3V_{MABC} =$$
$$= S_A d_A + S_B d_B + S_C d_C + S_D d_D,$$

где $h_A = AP$ — высота, опущенная из вершины A тетраэдра на грань BCD, и (рис. 272)

$$h_A = AP = AK + KP \leqslant AM + MU = R_A + d_A,$$

то

$$S_A R_A \geqslant S_B d_B + S_C d_C + S_D d_D; \qquad \text{(I)}$$

равенство здесь имеет место лишь в том случае, когда точка M принадлежит высоте AP тетраэдра.

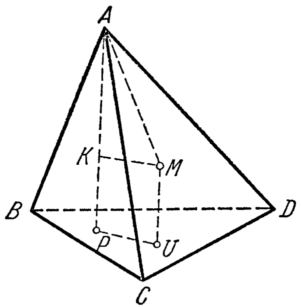


Рис. 272.

Складывая это неравенство с аналогичными неравенствами

$$S_B R_B \geqslant S_A d_A + S_C d_C + S_D d_D,$$
$$S_C R_C \geqslant S_A d_A + S_B d_B + S_D d_D,$$
$$S_D R_D \geqslant S_A d_A + S_B d_B + S_C d_C,$$

получаем

$$S_A R_A + S_B R_B + S_C R_C + S_D R_D \geqslant$$
$$\geqslant 3\,(S_A d_A + S_B d_B + S_C d_C + S_D d_D).$$

Равенство здесь имеет место только в том случае, если высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке H[1]), и M совпадает с *точкой H пересечения высот* тетраэдра.

б) Неравенство (I) решения задачи а) можно переписать так:

$$R_A d_A \geqslant \frac{S_B}{S_A} d_A d_B + \frac{S_C}{S_A} d_A d_C + \frac{S_D}{S_A} d_A d_D.$$

Складывая это неравенство с тремя аналогичными ему, получаем

$$R_A d_A + R_B d_B + R_C d_C + R_D d_D \geqslant \left(\frac{S_A}{S_B} + \frac{S_B}{S_A}\right) d_A d_B +$$
$$+ \left(\frac{S_A}{S_C} + \frac{S_C}{S_A}\right) d_A d_C + \left(\frac{S_A}{S_D} + \frac{S_D}{S_A}\right) d_A d_D + \left(\frac{S_B}{S_C} + \frac{S_C}{S_B}\right) d_B d_C +$$
$$+ \left(\frac{S_B}{S_D} + \frac{S_D}{S_B}\right) d_B d_D + \left(\frac{S_C}{S_D} + \frac{S_D}{S_C}\right) d_C d_D,$$

откуда, поскольку $\frac{S_A}{S_B} + \frac{S_B}{S_A} \geqslant 2$ и т. д. (ср. неравенство (**) на

---

[1]) Последнее обстоятельство имеет место далеко не для каждого тетраэдра (см., например, задачу 34 из книги Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, Геометрия (стереометрия), Гостехиздат, 1954); нам, однако, это здесь совершенно неважно.

стр. 286), имеем

$$R_Ad_A+R_Bd_B+R_Cd_C+R_Dd_D \geqslant$$
$$\geqslant 2(d_Ad_B+d_Ad_C+d_Ad_D+d_Bd_C+d_Bd_D+d_Cd_D).$$

Равенство здесь имеет место, лишь если $S_A=S_B=S_C=S_D$, т. е. если все грани тетраэдра $ABCD$ равновелики[1]), и точка M совпадает с точкой пересечения высот этого тетраэдра, т. е. если тетраэдр $ABCD$ *правильный*[2]) и точка M совпадает с его *центром*.

119. Первое решение. Применив к правой части неравенства (I) решения задачи 118 а) неравенство (А) (стр. 246), получим

$$S_AR_A \geqslant S_Bd_B+S_Cd_C+S_Dd_D \geqslant 3\sqrt[3]{S_BS_CS_Dd_Bd_Cd_D}.$$

Аналогично устанавливаются неравенства

$$S_BR_B \geqslant 3\sqrt[3]{S_AS_CS_Dd_Ad_Cd_D},$$
$$S_CR_C \geqslant 3\sqrt[3]{S_AS_BS_Dd_Ad_Bd_D}$$

и

$$S_DR_D \geqslant 3\sqrt[3]{S_AS_BS_Cd_Ad_Bd_C}.$$

Наконец, перемножая последние четыре неравенства, получим

$$S_AS_BS_CS_DR_AR_BR_CR_D \geqslant 81\sqrt[3]{S_A^3S_B^3S_C^3S_D^3d_A^3d_B^3d_C^3d_D^3}=$$
$$=81\,S_AS_BS_CS_Dd_Ad_Bd_Cd_D,$$

или

$$R_AR_BR_CR_D \geqslant 81d_Ad_Bd_Cd_D,$$

что нам и требовалось доказать.

Равенство здесь имеет место, лишь если $S_Ad_A=S_Bd_B=S_Cd_C=S_Dd_D$, т. е. если $V_{MBCD}=V_{MACD}=V_{MABD}=V_{MABC}$ (это означает, что точка M является точкой пересечения «медиан» тетраэдра, соединяющих его вершины с центрами тяжестей противоположных граней) и если

$$h_A=R_A+d_A,\quad h_B=R_B+d_B,\quad h_C=R_C+d_C,\quad h_D=R_D+d_D,$$

т. е. если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке[3]) и M совпадает с этой точкой. Но если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке и эта точка совпадает с точкой пересечения его «медиан», то этот тетраэдр *правильный* (и точка M является его *центром*).

Второе решение. Обозначим точки пересечения прямых AM, BM, CM и DM с противоположными гранями тетраэдра $ABCD$

---

[1]) И значит, равны (см., например, задачу 29 из книги, названной в подстрочном примечании на стр. 306).

[2]) Если все грани тетраэдра равновелики, то каждые два противоположных ребра его равны: $a=a_1$, $b=b_1$ и $c=c_1$ (см. подстрочное примечание [1])); если высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то суммы квадратов его противоположных ребер равны: $a^2+a_1^2=b^2+b_1^2=c^2+c_1^2$ (см. подстрочное примечание на стр. 306); поэтому, если $S_A=S_B=S_C=S_D$ и высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке, то $a=a_1=b=b_1=c=c_1$ и тетраэдр $ABCD$ — правильный.

[3]) См. подстрочное примечание на стр. 306.

через A_1, B_1, C_1 и D_1; пусть, далее, $MA_1=d'_A$, $MB_1=d'_B$, $MC_1=d'_C$ и $MD_1=d'_D$. Мы докажем сначала неравенство

$$R_AR_BR_CR_D \geqslant 81d'_Ad'_Bd'_Cd'_D, \qquad (*)$$

являющееся даже усилением требуемого неравенства

$$R_AR_BR_CR_D \geqslant 81d_Ad_Bd_Cd_D \qquad (**)$$

(ибо $d'_A \geqslant d_A$, $d'_B \geqslant d_B$, $d'_C \geqslant d_C$ и $d'_D \geqslant d_D$).

Ясно, что высоты AP и MU тетраэдров $ABCD$ и $MBCD$ с общим основанием BCD относятся, как $AA_1:MA_1$, или как $(R_A+d'_A):d'_A$ (рис. 273). Поэтому

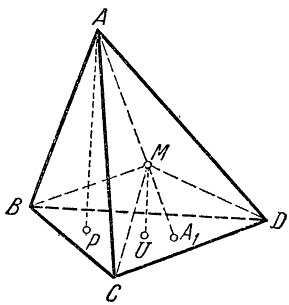


Рис. 273.

$$\frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}}=\frac{d'_A}{d'_A+R_A}=\frac{1}{1+R_A/d'_A}$$

и аналогично

$$\frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{1+R_B/d'_B},\quad \frac{V_{MABD}}{V_{ABCD}}=$$

$$=\frac{1}{1+R_C/d'_C} \text{ и } \frac{V_{MABC}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{1+R_D/d'_D}.$$

А так как

$$V_{MBCD}+V_{MACD}+V_{MABD}+V_{MABC}=$$
$$=V_{ABCD},$$

то

$$\frac{1}{1+x_A}+\frac{1}{1+x_B}+\frac{1}{1+x_C}+\frac{1}{1+x_D}=1,$$

где для краткости обозначено $\frac{R_A}{d'_A}=x_A$, $\frac{R_B}{d'_B}=x_B$, $\frac{R_C}{d'_C}=x_C$ и $\frac{R_D}{d'_D}=x_D$.

Приводя все дроби к общему знаменателю, получим

$$(1+x_B)(1+x_C)(1+x_D)+(1+x_A)(1+x_C)(1+x_D)+$$
$$+(1+x_A)(1+x_B)(1+x_D)+(1+x_A)(1+x_B)(1+x_C)=$$
$$=(1+x_A)(1+x_B)(1+x_C)(1+x_D).$$

Раскрывая далее скобки и перенося все члены равенства в одну часть, будем иметь

$$3+2(x_A+x_B+x_C+x_D)+(x_Ax_B+x_Ax_C+x_Ax_D+x_Bx_C+x_Bx_D+x_Cx_D)-$$
$$-x_Ax_Bx_Cx_D=0. \qquad (***)$$

Воспользуемся теперь неравенством (A′) (стр. 282). Применив его к числам x_A, x_B, x_C и x_D, получим

$$x_Ax_Bx_Cx_D \leqslant \left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}\right)^4, \quad \text{или} \quad x_A+x_B+x_C+x_D \geqslant \geqslant 4\sqrt[4]{x_Ax_Bx_Cx_D}.$$

Далее, в силу неравенства (A) (стр. 246)

$$x_Ax_B+x_Ax_C+x_Ax_D \geqslant 3\sqrt[3]{x_Ax_B\cdot x_Ax_C\cdot x_Ax_D} = 3\sqrt[3]{x_A^3x_Bx_Cx_D}$$

и

$$x_Bx_C+x_Bx_D+x_Cx_D \geqslant 3\sqrt[3]{x_Bx_C\cdot x_Bx_D\cdot x_Cx_D} = 3\sqrt[3]{x_B^2x_C^2x_D^2},$$

так что

$$x_Ax_B+x_Ax_C+x_Ax_D+x_Bx_C+x_Bx_D+x_Cx_D \geqslant \geqslant 3\left(\sqrt[3]{x_A^3x_Bx_Cx_D}+\sqrt[3]{x_B^2x_C^2x_D^2}\right).$$

Применим теперь к числам $\sqrt[3]{x_A^3x_Bx_Cx_D}$ и $\sqrt[3]{x_B^2x_C^2x_D^2}$ неравенство $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$ (см. выше, стр. 250 [1])):

$$x_Ax_B+x_Ax_C+x_Ax_D+x_Bx_C+x_Bx_D+x_Cx_D \geqslant$$
$$\geqslant 3\left(\sqrt[3]{x_A^3x_Bx_Cx_D}+\sqrt[3]{x_B^2x_C^2x_D^2}\right) \geqslant 6\sqrt{\sqrt[3]{x_A^3x_Bx_Cx_D}\cdot\sqrt[3]{x_B^2x_C^2x_D^2}} = 6\sqrt{x_Ax_Bx_Cx_D}.$$

Таким образом, из равенства (***) вытекает неравенство

$$3+2\cdot 4\sqrt[4]{x_Ax_Bx_Cx_D}+6\sqrt{x_Ax_Bx_Cx_D}-x_Ax_Bx_Cx_D \leqslant 0,$$

или, если обозначить $\sqrt[4]{x_Ax_Bx_Cx_D}=Z$,— неравенство

$$3+8Z+6Z^2-Z^4 \leqslant 0.$$

Разложив левую часть последнего неравенства на множители, получим

$$(3-Z)(1+3Z+3Z^2+Z^3)=(3-Z)(1+Z)^3 \leqslant 0,$$

откуда, поскольку $(1+Z)^3>0$, имеем

$$3-Z \leqslant 0, \text{ т. е. } Z=\sqrt[4]{x_Ax_Bx_Cx_D}=\sqrt[4]{\frac{R_A}{d'_A}\frac{R_B}{d'_B}\frac{R_C}{d'_C}\frac{R_D}{d'_D}} \geqslant 3,$$

или

$$R_AR_BR_CR_D \geqslant 81d'_Ad'_Bd'_Cd'_D.$$

Но это и есть наше неравенство (*)!

Равенство в (*) имеет место лишь тогда, когда $x_A=x_B=$ $=x_C=x_D$, откуда, поскольку

$$\frac{1}{1+x_A}+\frac{1}{1+x_B}+\frac{1}{1+x_C}+\frac{1}{1+x_D}=1,$$

1) Ср. с неравенством (1) подстрочного примечания 2) на стр. 282.

находим

$$x_A = x_B = x_C = x_D = 3.$$

Но это означает, что M — точка пересечения «медиан» тетраэдра $ABCD$ (ср. выше, стр. 307). Если же мы хотим, чтобы дополнительно имело место и равенство $R_A R_B R_C R_D = 81 d_A d_B d_C d_D$, то надо еще потребовать, чтобы было $d'_A = d_A$, $d'_B = d_B$, $d'_C = d_C$ и $d'_D = d_D$, т. е. чтобы все высоты тетраэдра $ABCD$ проходили через точку M пересечения его медиан; другими словами, чтобы тетраэдр $ABCD$ был *правильным* и точка M совпадала с его *центром* (ср. стр. 307).

120. Нам будет удобнее изменить порядок решения задач а) и б).

б) Воспользуемся тем, что *при любых x, y, z, t и x_1, y_1, z_1, t_1 имеет место неравенство* [1])

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2) \geqslant (xx_1+yy_1+zz_1+tt_1)^2, \qquad (Д')$$

обращающееся в равенство, лишь если $\dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{z_1}=\dfrac{t}{t_1}$. В самом деле, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2+t^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)-(xx_1+yy_1+zz_1+tt_1)^2=\\
&=x^2y_1^2+x^2z_1^2+x^2t_1^2+y^2x_1^2+y^2z_1^2+y^2t_1^2+z^2x_1^2+z^2y_1^2+z^2t_1^2+t^2x_1^2+\\
&+t^2y_1^2+t^2z_1^2-2xyx_1y_1-2xzx_1z_1-2xtx_1t_1-2yzy_1z_1-2yty_1t_1-2ztz_1t_1=\\
&\qquad=(xy_1-yx_1)^2+(xz_1-zx_1)^2+(xt_1-tx_1)^2+(yz_1-zy_1)^2+\\
&\qquad\qquad+(yt_1-ty_1)^2+(zt_1-tz_1)^2 \geqslant 0,
\end{aligned}$$

где равенство достигается, лишь если

$$xy_1-yx_1=xz_1-zx_1=xt_1-tx_1=yz_1-zy_1=yt_1-ty_1=zt_1-tz_1=0,$$

т. е. если

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}=\frac{t}{t_1}.$$

Таким образом, имеем

$$\left(R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2\right)\left(\frac{1}{d_A^2}+\frac{1}{d_B^2}+\frac{1}{d_C^2}+\frac{1}{d_D^2}\right) \geqslant \\ \geqslant \left(\frac{R_A}{d_A}+\frac{R_B}{d_B}+\frac{R_C}{d_C}+\frac{R_D}{d_D}\right)^2.$$

Но в силу неравенства (А') (стр. 282)

$$\frac{R_A}{d_A}+\frac{R_B}{d_B}+\frac{R_C}{d_C}+\frac{R_D}{d_D} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{R_A}{d_A}\cdot\frac{R_B}{d_B}\cdot\frac{R_C}{d_C}\cdot\frac{R_D}{d_D}},$$

откуда следует, что

$$\left(R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2\right)\left(\frac{1}{d_A^2}+\frac{1}{d_B^2}+\frac{1}{d_C^2}+\frac{1}{d_D^2}\right) \geqslant \\ \geqslant 16\sqrt{\frac{R_A}{d_A}\frac{R_B}{d_B}\frac{R_C}{d_C}\frac{R_D}{d_D}}.$$

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 304.

А так как в силу результата задачи 119

$$\frac{R_A R_B R_C R_D}{d_A d_B d_C d_D} \geqslant 81,$$

то окончательно получаем требуемое неравенство

$$(R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2)\left(\frac{1}{d_A^2}+\frac{1}{d_B^2}+\frac{1}{d_C^2}+\frac{1}{d_D^2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant 16\cdot\sqrt{81}=16\cdot 9=144.$$

Так как использованное нами неравенство задачи 119 обращается в равенство лишь для *правильного* тетраэдра $ABCD$ и точки M, совпадающей с его *центром*, то и неравенство настоящей задачи может обращаться в равенство лишь в том же случае. Нетрудно проверить, что в этом случае оно действительно в равенство обращается.

а) Решение задачи а) очень близко к решению задачи б). Воспользовавшись тем же неравенством (Д′), получим

$$(R_A+R_B+R_C+R_D)\left(\frac{1}{d_A}+\frac{1}{d_B}+\frac{1}{d_C}+\frac{1}{d_D}\right)=$$
$$=[(\sqrt{R_A})^2+(\sqrt{R_B})^2+(\sqrt{R_C})^2+(\sqrt{R_D})^2]\left[\frac{1}{(\sqrt{d_A})^2}+\frac{1}{(\sqrt{d_B})^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(\sqrt{d_C})^2}+\frac{1}{(\sqrt{d_D})^2}\right] \geqslant \left(\sqrt{\frac{R_A}{d_A}}+\sqrt{\frac{R_B}{d_B}}+\sqrt{\frac{R_C}{d_C}}+\sqrt{\frac{R_D}{d_D}}\right)^2.$$

Но в силу неравенства (А′) (стр. 282)

$$\sqrt{\frac{R_A}{d_A}}+\sqrt{\frac{R_B}{d_B}}+\sqrt{\frac{R_C}{d_C}}+\sqrt{\frac{R_D}{d_D}} \geqslant$$
$$\geqslant 4\sqrt[4]{\sqrt{\frac{R_A}{d_A}\cdot\frac{R_B}{d_B}\cdot\frac{R_C}{d_C}\cdot\frac{R_D}{d_D}}} \quad \left(=4\sqrt[8]{\frac{R_A R_B R_C R_D}{d_A d_B d_C d_D}}\right);$$

поэтому

$$(R_A+R_B+R_C+R_D)\left(\frac{1}{d_A}+\frac{1}{d_B}+\frac{1}{d_C}+\frac{1}{d_D}\right) \geqslant 16\sqrt[4]{\frac{R_A R_B R_C R_D}{d_A d_B d_C d_D}}.$$

А так как

$$\frac{R_A R_B R_C R_D}{d_A d_B d_C d_D} \geqslant 81$$

(см. задачу 119), то окончательно имеем

$$(R_A+R_B+R_C+R_D)\left(\frac{1}{d_A}+\frac{1}{d_B}+\frac{1}{d_C}+\frac{1}{d_D}\right) \geqslant 16\sqrt[4]{81}=16\cdot 3=48,$$

что и требовалось доказать.

Неравенство этой задачи также обращается в равенство лишь в случае *правильного* тетраэдра $ABCD$ и точки M, совпадающей с его *центром* (т. е. в том случае, когда обращается в равенство и неравенство задачи 119).

Примечание. Неравенства настоящей задачи можно еще усилить так:

$$\text{а}')\qquad (R_A+R_B+R_C+R_D)\left(\frac{1}{d'_A}+\frac{1}{d'_B}+\frac{1}{d'_C}+\frac{1}{d'_D}\right)\geqslant 48$$

и

$$\text{б}')\qquad (R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2)\left(\frac{1}{d'^2_A}+\frac{1}{d'^2_B}+\frac{1}{d'^2_C}+\frac{1}{d'^2_D}\right)\geqslant 144,$$

где $d'_A=MA_1$, $d'_B=MB_1$, $d'_C=MC_1$, $d'_D=MD_1$, а A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки пересечения прямых AM, BM, CM и DM с гранями BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра. (Ясно, что $d'_A\geqslant d_A$, $d'_B\geqslant d_B$, $d'_C\geqslant d_C$ и $d'_D\geqslant d_D$.) При этом выписанные неравенства а′) и б′) обращаются в равенства в том и только в том случае, когда точка M совпадает с *точкой пересечения «медиан»* (вообще говоря, неправильного!) тетраэдра $ABCD$ (см. выше, стр. 307).

ЛИТЕРАТУРА

А. Книги и статьи общего характера

1. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Геометрические задачи на максимум и минимум, Энциклопедия элементарной математики, кн. V, «Наука», 1966, стр. 270—348.
2. Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика?, «Просвещение», 1968.

   Геометрическим задачам на максимум и минимум посвящена большая гл. VII «Maxima и minima» этой обстоятельной и очень интересной книги.
3. Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, 1957.

   Эта книга имеет методологический характер; она посвящена обсуждению некоторых общих принципов математического творчества (которое может заключаться, в частности, и просто в решении задач). С содержанием настоящего сборника задач тесно соприкасаются гл. VIII «Максимумы и минимумы» и гл. X «Изопериметрическая задача» книги Д. Пойа, а в несколько меньшей степени — и гл. IX «Физическая математика».
4. Г. Хадвигер, Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, «Наука», 1966.

   Серьезная монография, содержащая обстоятельное обсуждение самого смысла понятий «объем» и «площадь поверхности» со специальным выделением относящихся к этим понятиям экстремальных задач.
5. Н. Д. Казаринов (N. D. Kazarinoff), Геометрические неравенства (Geometric inequalities), New York—Toronto, 1961.

   Книга входит в серию «Новая математическая библиотека», издаваемую высокоавторитетной «Исследовательской группой по школьной математике» (School Mathematics Study Group, сокращенно—SMSG), объединяющей многих крупных американских математиков и инициативных педагогов. Эта серия рассчитана на начинающих математиков, в первую очередь — на интересующихся математикой учащихся старших классов средней школы.

Б. Книги, посвященные алгебраическим неравенствам

(некоторые из которых используются в решениях собранных здесь задач)

6. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Введение в неравенства, «Мир», 1965.

   Элементарное введение в учение о неравенствах, рассчитанное на учащихся средней школы.
7. Г. Л. Невяжский, Неравенства, Учпедгиз, 1947.

   Небольшая книжка, рассчитанная в первую очередь на учителей средней школы и студентов педагогических институтов.
8. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948.

9. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, «Мир», 1965.

Книги [8] и [9] представляют собой серьезные монографии, рассчитанные на специалиста, но доступные и начинающему математику; они содержат очень большой и разнообразный материал.

10. В. О. Кречмар, Задачник по алгебре, «Наука», 1964.

11. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра), «Наука», 1965.

Задачники [10] и [11] содержат большие разделы, специально посвященные алгебраическим неравенствам.

В. Учебники и задачники, уделяющие место геометрическим задачам на максимум и минимум

12. Г. С. М. Кокстер, Введение в геометрию, «Наука», 1966.

13. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1957.

В тексте этого подробного курса элементарной геометрии задачам на максимум и минимум уделяется мало внимания; однако среди приложенных к книге задач (сопровождаемых подробными решениями) имеется немало таких, которые примыкают к теме настоящей книги.

14. Н. Б. Васильев и В. Л. Гутенмахер, Прямые и кривые, «Наука», 1970.

Эта небольшая книжка входит в серию «Библиотечка физико-математической школы», рассчитанную на интересующихся математикой учащихся старших классов; в ней много места уделено геометрическим задачам на максимум и минимум.

15. А. А. Леман (составитель), Сборник задач московских математических олимпиад, «Просвещение», 1965.

16. Е. А. Морозова и И. С. Петраков, Международные математические олимпиады, «Просвещение», 1968.

17. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы планиметрии, «Наука», 1967.

18. З. А. Скопец и В. А. Жаров, Задачи и теоремы по геометрии, Учпедгиз, 1962.

19. И. Х. Сивашинский, Неравенства в задачах, «Наука», 1967.

20. Э. Г. Готман. Уравнения, тождества, неравенства при решении геометрических задач, «Просвещение», 1965.

Г. Книги по теории выпуклых тел, дискретной геометрии и комбинаторной геометрии

21. Л. Фейеш Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, Физматгиз, 1958.

22. К. А. Роджерс, Упаковки и покрытия, «Мир», 1968.

Книги [21] и [22] посвящены так называемой «дискретной геометрии», изучающей «оптимальные» (или «экономичные») в том или ином смысле расположения геометрических фигур и тел или отдельных точек. Обе книги содержат очень большой материал; при этом книга [21], в которой внимание сконцентрировано на задачах дискретной геометрии на плоскости и в обыкновенном («трехмерном») пространстве, несколько элементарнее книги [22], ориентированной в первую очередь на разбор задач «n-мерной» дискретной геометрии. (Впрочем, и книга [21] рассчитана скорее на студента-математика или на преподавателя средней школы, чем на школьника.)

23. Г. Хадвигер и Г. Дебруннер, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, «Наука», 1966.

24. В. Г. Болтянский и И. Ц. Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, «Наука», 1966.

25. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, Теорема Хелли, «Мир», 1968.

26. В. Дж. Д. Бастон (V. J. D. Baston), Некоторые свойства многогранников в евклидовом пространстве (Some properties of polyhedra in euclidean space), Oxford, 1965.

27. И. М. Яглом, Как разрезать квадрат?, «Наука», 1968.

Книги [23] – [27] (самой простой из которых является, видимо, книга [23], а самой содержательной—книга [25]) посвящены так называемой «комбинаторной геометрии», исследующей определенный тип экстремальных геометрических задач, связанных с комбинаторными рассмотрениями, относящимися к изучению конечных систем точек или (главным образом выпуклых!) фигур и тел. Для комбинаторной геометрии характерна связь ее задач с определением некоторых целых чисел, возникающих в связи с рассматриваемыми системами тел или точек. Достаточно типичным примером задачи комбинаторной геометрии является старинная (и весьма трудная!) проблема *определения наибольшего возможного числа материальных* (непересекающихся!) *шаров, которые можно приложить к равному им шару* (этой задаче уделено много места в книге [21] [1]).

28. Д. А. Крыжановский, Изопериметры, Физматгиз, 1959.

Эта небольшая книжка содержит элементарное изложение круга вопросов, связанных со следующей знаменитой задачей (изопериметрическая задача): *среди всех выпуклых фигур* (или *тел*) *данного периметра* (или *площади поверхности*) *найти фигуру (тело) наибольшей площади (объема).*

29. В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Выпуклые фигуры и тела, Энциклопедия элементарной математики, кн. V, стр. 181—269.

30. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, Гостехиздат, 1951.

31. В. Бляшке, Круг и шар, «Наука», 1967.

Статья [29] и книги [30], [31] посвящены теории выпуклых тел; в них много места уделено связанным с выпуклыми фигурами и телами задачам на максимум и минимум. Книга [30] представляет собой сборник задач, сопровождаемых необходимыми пояснениями и (собранными в конце книги) подробными решениями (сходную форму имеет и книга [23]). В классической книге [31], значительная часть которой посвящена задачам на максимум и минимум, используется дифференциальная геометрия. Эта книга рассчитана, в первую очередь, на студентов-математиков.

32. Т. Боннезен и В. Фенхель (T. Bonnesen, W. Fenchel), Теория выпуклых тел (Theorie der konvexen Körper), Berlin, 1934.

33. Г. Хадвигер (H. Hadwiger), Старое и новое о выпуклых телах (Altes und neues über konvexe Körper), Basel—Stuttgart, 1965.

34. Г. Г. Эглстон (H. G. Eggleston), Выпуклость (Convexity), Cambridge, 1958.

---

[1]) Комбинаторная геометрия имеет много точек соприкосновения с дискретной геометрией (которой в основном посвящена книга [21]); многие экстремальные геометрические задачи могут быть с полным основанием одновременно отнесены как к комбинаторной геометрии, так и к дискретной геометрии.

35. Г. Г. Эглстон, Проблемы в евклидовом пространстве; приложения выпуклости (Problems in Euclidean Space; Applications of Convexity), London, 1957.

36. Р. В. Бенсон (R. V. Benson), Евклидова геометрия и выпуклость (Euclidean Geometry and Convexity), New York, 1966.

37. Ф. А. Валентин (F. A. Valentine), Выпуклые множества (Convex sets), New York, 1964.

Все книги [32] – [37] (они рассчитаны на сравнительно квалифицированного читателя) много внимания уделяют экстремальным задачам, связанным с выпуклыми телами.

38. В. Л. Кли (V. L. Klee, редактор), Выпуклость (Convexity), Providence, 1963.

Этот обширный том содержит труды состоявшегося в США в 1961 г. симпозиума по проблемам выпуклости. Наряду с достаточно частными заметками (многие из которых посвящены конкретным экстремальным задачам о выпуклых телах) он содержит несколько больших обзоров, из числа которых следует в первую очередь отметить весьма обстоятельный обзор [25], два обзора Б. Грюнбаума, посвященных задачам комбинаторной геометрии, и интересный обзор Г. С. М. Коксгера по проблемам дискретной геометрии.

Д. Литература к отдельным циклам задач

1. Разные задачи

39. В. Л. Рабинович, О линиях в квадратной сети и в кубической решетке, Ученые записки Мордовского гос. университета, № 41 (1964), стр. 73—86; Об отрезках в гиперкубической решетке, Труды II Казахстанской научной конференции по математике и механике, Алма-Ата, 1968, стр. 175—178; Экстремальная задача о расположении линий в n-мерной целочисленной решетке, там же, стр. 178—180.

40. Р. Беллман (R. Bellman), Динамическое программирование, ИЛ, 1960; Проблема минимизации (Minimisation problem), Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), стр. 27 или РЖ Математика, 1960, № 2, стр. 156.

41. В. А. Залгаллер, Как выйти из леса?, Математическое просвещение (новая серия), вып. 6 (1961), стр. 191—195.

42. Дж. Р. Исбелл (J. R. Isbell), Метод оптимальных поисков (An optimal search pattern), Naveb. Res. Logist. Quart. 4, 1957, стр. 357—359.

2. Геометрические оценки

43. Г. И. Барон (H. J. Baron), Вписанные сферы тетраэдра в их отношении к описанной (Die Ankugeln des Tetraeders in Beziehung zur Umkugell), Tôhoku Math. Journ. 48 (1941), стр. 185—192.

3. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений геометрических величин

44. В. М. Прокофьев, Некоторые свойства кратчайшей линии, соединяющей любое число данных точек плоскости, Учен. зап.

Моск. гос. пед. института им. Ленина **51**, вып. 3 (1957), стр. 63—84.

45. Г. Штейнгауз, Сто задач, Физматгиз, 1959.

4. Задачи о треугольнике и тетраэдре

46. Г. Полиа и Г. Сегё, Задачи и теоремы из анализа, ч. 2, Физматгиз, 1956.

47. Г. Хайош (G. Hajós), Решение задачи 8, Matematikai Lapok **1** (1950), стр. 313—316.

48. И. Беркес (J. Berkes), Простое доказательство и обобщение одного неравенства для треугольника (Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung), Elemente der Mathematik 22, № 6 (1967), стр. 135—136.

49. П. Эрдёш (P. Erdös), Задача 3740, Amer. Math. Monthly **42** (1935), стр. 396; Л. Дж. Морделл (L. J. Mordell), Д. Ф. Бэрроу (D. F. Barrow), Решение задачи 3740, там же, **44** (1937), стр. 252—254.

50. Л. Дж. Морделл, Решение одной геометрической задачи (Lösung eines geometrischen Problems), Középiskolai Matematikai Lapok **11** (1935), стр. 146—148.

51. Д. К. Казаринов (D. K. Kazarinoff), Простое доказательство неравенства Эрдёша—Морделла для треугольников (A simple proof of the Erdös—Mordell inequality for triangles), Michigan Math. Journ. **4** (1957), стр. 97—98.

52. Л. Банков (L. Bankoff), Элементарное доказательство теоремы Эрдёша—Морделла (An elementary proof of the Erdös—Mordell theorem), Amer. Math. Monthly **65** (1958), стр. 521.

53. Г. Р. Фельдкамп (G. R. Veldkamp), Неравенство Эрдёша—Морделла (De ongelijkheid van Erdös—Mordell), Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde **45** (1958), стр. 193—196.

54. Г. Г. Эглстон, Неравенство для треугольника (A triangle inequality), Mathematical Gazette, № 339, 1958, стр. 54—55.

55. Г. Бралант (H. Bralant), Снова о неравенстве Эрдёша—Морделла (Nog eens de ongelijkheid van Erdös—Mordell), Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde **46** (1959), стр. 87.

56. З. А. Скопец, Элементарное доказательство одной теоремы Эрдёша, Математическое просвещение, вып. 5, 1960, стр. 151—152.

57. Л. Карлитц (L. Karlitz), Несколько неравенств для треугольника (Some inequalities for a triangle), Amer. Math. Monthly **71** (1964), стр. 881—885.

58. А. Оппенгейм (A. Oppenheim), Некоторые неравенства для сферического треугольника и внутренней точки (Some inequalities for a spherical triangle and an internal point), Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu, Ser. Math. i fiz., № 200—209, 1967, стр. 13—16.

59. А. Флориан (A. Florian), К одной теореме П. Эрдёша (Zu einem Satz von P. Erdös), Elemente der Mathematik **13**, № 3 (1958), стр. 55—58.

60. А. Оппенгейм, Неравенство Эрдёша и другие неравенства для треугольника (The Erdös inequality and other inequalities for a triangle), Amer. Math. Monthly **68** (1961), стр. 226—230.

61. Л. Фейеш Тот (L. Fejes Tóth), Неравенства, связанные с многоугольниками и многогранниками (Inequalities concerning Polygons and Polyhedra), Duke math. Journ. **15** (1948), стр. 817—822.

62. Г.-Х. Ленар (H.-Chr. Lenhard), Обобщение и усиление теоремы Эрдёша—Морделла для многоугольников (Verallgemeinerung und Verschärfung der Erdös—Mordellschen Satz für Polygone), Archiv der Mathematik **12** (1961), стр. 311—314.

63. Ф. Леуэнбергер (F. Leuenberger), К доказательству Морделла неравенства Эрдёша (Zum Mordellschen Beweis einer Ungleichung von Erdös), Elemente der Mathematik **17** (1962), стр. 15—17.

64. Г. Фоглер (H. Vogler), Замечание к теореме Эрдёша—Морделла для многоугольников (Eine Bemerkung zum Erdös—Mordellschen Satz für Polygone), Anz. Österr. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, **103** (1966), стр. 241—251.

65. В. Л. Рабинович, И. М. Яглом, О неравенствах, родственных неравенству Эрдёша—Морделла для треугольника, Вопросы неевклидовой геометрии (Ученые записки Мос. гос. пед. института им. Ленина), 1970, стр. 121—126.

66. Н. Д. Казаринов, Неравенство Д. К. Казаринова для тетраэдра (D. K. Kazarinoff's inequality for tetrahedra), Michigan math. Journ. **4** (1957), стр. 99—104.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Наибольшая окружность проходит по восьми черным клеткам.

2. Рассмотрите отдельно случаи, когда две вершины квадрата лежат внутри треугольника и когда внутрь треугольника попадает лишь одна вершина квадрата.

3. Периметр полученного после складывания многоугольника M' состоит из отрезка AB, по которому был сложен исходный многоугольник M, и части p_1 периметра M; сравните не входящую в состав периметра M' часть p_2 периметра многоугольника M с длиной отрезка AB.

4. Рассмотрите окружность, диаметром которой служит диагональ четырехугольника, проходящая через вершину острого угла.

5. Четыре единичных круга с центрами в вершинах параллелограмма $ABCD$ полностью покроют параллелограмм в том и только в том случае, когда $a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

6. $\dfrac{A_1A_n}{A_1A_2} = 1$.

7. Пусть $\overline{OA_0}$, $\overline{OB_0}$, $\overline{OC_0}$ — векторы единичной длины, о которых говорится в условии задачи, и $\overline{OD} = -\overline{OA_0} - \overline{OB_0}$; докажите, что точка C_0 лежит внутри окружности с центром D и радиусом 1.

8. а) Отобранная система векторов должна содержать 12 или 13 соседних из числа наших 25 векторов.

б) Длина суммы отобранных векторов равна $\dfrac{\sin 6\varphi}{\sin \varphi/2}$, где $\varphi = \dfrac{360^\circ}{25}$ $(= 14^\circ 24')$. Указание. Примите плоскость, на которой расположены векторы, за плоскость комплексного переменного, отождествив точку O с числом 0, а точку A_1 — с числом 1.

9. Первое решение. Отложите все векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ от одной точки O и рассмотрите их проекции на лучи OX, OX_1, OY, OY_1, где XX_1 и YY_1 — проходящие через O взаимно перпендикулярные прямые, не совпадающие с направлением ни одного из векторов; при этом хоть для одного из четырех лучей сумма проекций проектирующихся на него векторов будет больше 1.

Второе решение. Дополните заданную систему векторов еще одним с тем, чтобы сумма всех векторов равнялась нулевому вектору; далее рассмотрите выпуклый многоугольник, стороны которого по длине и направлению совпадают с этими векторами, и оцените диаметр этого многоугольника, т. е. длину той из его диагоналей и сторон, которая является наибольшей.

10. а) Наименьшее число прожекторов равно 4; их можно расположить в четырех п р о и з в о л ь н ы х точках плоскости.

б) Наименьшее число прожекторов равно 8.

11. Если $a \leqslant b$, то необходимые и достаточные условия возможности выноса шкафа в коридор таковы: $a \leqslant d$, $a \leqslant h$ и $ab \leqslant dh$.

12. 6 вершин куба, не являющихся концами рассматриваемой диагонали.

13. Окружность наибольшего радиуса имеет своим центром центр куба и расположена в плоскости, перпендикулярной диагонали куба; ее радиус равен $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, где a—ребро куба.

Прежде всего докажите, что центр искомой окружности совпадает с центром O куба. Затем рассмотрите сферу, для которой искомая окружность является экватором, и шесть сферических сегментов, отсекаемых от нее гранями куба; докажите, что если радиус сферы σ с центром O превышает $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, то любая плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает хотя бы один из шести сферических сегментов, отсекаемых от сферы σ гранями куба (эти сегменты могут и пересекаться между собой).

14. На 5 тетраэдров.

15. 16.

16. 17.

17. а) на 8 частей;

б) на 10 частей;

в) на $2n+2$ части.

18. а) На любое число n частей, где $3 \leqslant n \leqslant 10$.

б) На любое число N частей, где $3 \leqslant N \leqslant 12$ или $N=16$. У к а з а н и е. Обозначим через $У$ (первая буква слова «угол») число частей пространства, заключенных вне сферы и внутри куба, и через $Ш$ («шапка») число частей, расположенных внутри сферы и вне куба; выясните, какие значения могут принимать числа $У$ и $Ш$.

19. На 19 частей. У к а з а н и е. Подсчитайте сумму углов всех треугольников разбиения, выразив ее как через число C треугольников разбиения («стран» той «географической карты треугольного острова», за которую можно принять наше разбиение треугольника), так и через число $У$ «узлов» имеющейся сети линий, или воспользуйтесь т е о р е м о й Э й л е р а, в силу которой

$$C-Г+У=1,$$

где $Г$—число отдельных отрезков нашей сети линий («границ между странами»).

20. а) 13.

б) 1949.

21. а) $65\left(=\frac{13\cdot 10}{2}\right)$.

б) 1 897 351. У к а з а н и е. Пользуясь методом математической индукции, докажите, что наибольшее возможное число точек самопересечения n-звенной ломаной при n ч е т н о м равно $\frac{n(n-4)}{2}+1$.

22. а) Воспользуйтесь тем, что как площадь треугольника, так и площадь трапеции равны длине средней линии, умноженной на высоту.

б) Докажите, что сумма длин проекций всех звеньев ломаной хотя бы на одну сторону квадрата не меньше $\frac{500}{\sqrt{2}} > 350$.

23. Проектируя рассматриваемую ломаную на стороны квадрата, докажите, что ее длина меньше суммы длин двух сторон квадрата.

24. а) $m+n-1$.

б) 285. Указание. Оцените возможное число точек пересечения «иглы» длины l с линиями сети квадратов (связанное с длинами проекций «иглы» на «горизонтальные» и «вертикальные» линии сети).

25. Можно. Указание. Точки удобно располагать на средней линии l квадрата, на средних линиях l_1 и l_2 двух прямоугольников, на которые l делит квадрат; на средних линиях четырех более узких прямоугольников, на которые делят квадрат линии l, l_1 и l_2 и т. д.

26. P может располагаться внутри треугольника $A_1B_1C_1$, образованного прямыми, параллельными сторонам треугольника ABC и проходящими через его вершины.

27. а), б) Замените многоугольник M фигурой Ф, образованной всеми точками, удаленными от многоугольника m не более чем на 1 (т. е. такой фигурой Ф, что для каждой точки A этой фигуры найдется такая точка B многоугольника m, что $AB \leqslant 1$).

в) Воспользуйтесь тем, что периметр и площадь любого описанного вокруг единичной окружности S четырехугольника $\overline{ABCD}$ не меньше периметра и площади описанного вокруг S квадрата. Указание. Пусть стороны $\overline{BA}$ и $\overline{CD}$ описанного вокруг S четырехугольника $\overline{ABCD}$ пересекаются в точке Q; докажите, что при замене сторон $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ перпендикулярными биссектрисе угла Q касательными окружности S периметр четырехугольника не увеличится.

г) Докажите, что периметр и площадь описанного вокруг единичного круга многоугольника, все углы которого тупые, меньше периметра и площади квадрата со стороной 1. Указание. Воспользуйтесь, например, тем, что $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} < \frac{4}{\pi}$ при $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

28. Найдите площадь фигуры Ф, образованной центрами всех кругов диаметра 1, пересекающими данный квадрат со стороной 1.

29. В прямоугольник можно поместить ряд непересекающихся окружностей со сколь угодно большой суммой радиусов.

30. Пусть A — произвольная из данных точек; рассмотрите отдельно случаи, когда все точки системы удалены от A на расстояние < 1, и когда существует такая точка B, что $AB \geqslant 1$.

31. Каждую точку системы покройте кругом радиуса $1/2$; затем замените каждые два пересекающихся или касающихся круга одним; после того как получится система непересекающихся кругов, покрывающих все заданные точки, сумма диаметров которых $\leqslant 100$, уменьшите круги системы так, чтобы сумма их диаметров была < 100 и чтобы расстояние между двумя точками любых двух разных кругов было > 1.

32. $m \leqslant n$.

33. Подсчитайте общую площадь всех монет, а также площадь фигуры, образованной всеми теми точками стола, каждая из которых является центром круга единичного радиуса, пересекающего хоть одну монету.

34. Докажите, что площадь, орошаемая сетью арыков общей длины L, не превосходит $2L+\pi$.

35. Разбейте участок на 50 «полос» ширины 2 и докажите, что если на участке нельзя проложить тропинку длины 10, то внутри каждой полосы растет не меньше 8 деревьев.

36. Пусть $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2501}}$, где r — радиус деревьев; тогда, если l — проходящая через центр сада прямая, которой принадлежат стороны ряда квадратов «квадратной решетки», в узлах которой растут деревья, T — точка пересечения прямой l с границей сада, $TU=1$ — отрезок касательной к границе сада, то вид из беседки B в направлении BU ничем не будет заслонен. С другой стороны, если $r \geqslant \frac{1}{50}$, то вид будет заслонен в любом направлении MN (где M и N — точки пересечения проходящей через B прямой с границей сада); другими словами, внутри узкого прямоугольника П со средней линией MN и с шириной $2r$ всегда найдутся узлы решетки; посаженные в соответствующих точках деревья и заслонят вид в направлении MN. Для доказательства существования узлов решетки внутри прямоугольника П надо установить, что внутри любого прямоугольника с центром B и площадью $\geqslant 4$ всегда найдутся по крайней мере два (центрально-симметричные относительно B) узла решетки квадратов со стороной 1.

37. $\frac{700}{v}$ мин., если $\frac{v}{u} \geqslant \sqrt{2}$; $\frac{400}{v}+\frac{300\sqrt{v^2-u^2}}{uv}$ мин., если $\sqrt{2} \geqslant \frac{v}{u} \geqslant \frac{5}{4}$; $\frac{500}{u}$ мин., если $\frac{v}{u} < \frac{5}{4}$. Указание. Длительность пути зависит лишь от того, какой путь пройдет путник по дорожкам и какой — по снегу; при этом можно считать, что сначала он проходит по границе парка весь путь, проходимый в одном направлении («с юга на север»), потом идет по снегу (причем эту часть пути также естественно считать прямолинейной) и, наконец, проходит по границе парка участок, проходимый по дорожкам в другом направлении («с запада на восток»).

38. Пусть C_1, C_2, C_3 и C_4 — точки пересечения с периферией квадрата проведенных через местонахождение B волка прямых, параллельных диагоналям квадрата; докажите, что собаки могут перемещаться по границе поля, все время занимая положение C_1, C_2, C_3 и C_4.

39. а) Корабль K_1 не может приблизиться к кораблю K_2 на расстояние $\leqslant \frac{d}{2}$; однако если считать время преследования неограниченным, то расстояние между K_1 и K_2 может стать сколь угодно близким к $d/2$.

б) На расстояние $\frac{d\sqrt{v^2-u^2}}{v}$.

40. а) Не может.

б) Может.

41. а) Сравните область точек, которых может достигнуть за 5/4 мин. катер, начавший движение в некоторой точке границы круга радиуса 1 *км* с центром O, и область точек, освещенных за тот же период времени прожектором.

б) Для того чтобы катер мог незаметно подойти к острову, надо, чтобы его скорость была не меньше величины $v_0 = 2\pi \cos \alpha$, где угол α определяется из уравнения $\operatorname{tg} \alpha = 2\pi + \alpha$ (которое можно решить лишь приближенно; из него получается $\alpha \approx 0{,}97 \dfrac{\pi}{2}$ и $v_0 \approx 0{,}81$ *км/мин*. Указание. Воспользуйтесь тем, что если скорость катера равна v, то внутри круга радиуса $\rho = \dfrac{v}{2\pi}$ с центром O катер может свободно двигаться к острову так, чтобы прожектор не смог его обнаружить; до круга радиуса ρ катеру выгоднее всего двигаться по касательной к окружности этого круга.

42. а) Сможет. Указание. Воспользуйтесь тем, что внутри круга радиуса $r = \dfrac{1}{4}$ Виктор может перемещаться с большей угловой скоростью, чем Андрей.

б) Виктор сумеет убежать от Андрея, если отношение k их скоростей меньше корня x_0 уравнения $\pi + \arccos \dfrac{1}{x} = \sqrt{x^2 - 1}$ (это уравнение можно решить лишь приближенно; $x_0 \approx 4{,}6$), и не сумеет, если $k \geqslant x_0$. Указание. Сравните эту задачу с задачей 41.

43. а) Если $b \geqslant a$ и наибольший угол треугольника ABC равен x, то $180° > x \geqslant \alpha$, где $\alpha = \arccos \dfrac{a}{2b}$.

б) Если $b \geqslant a$ и наименьший угол треугольника ABC равен y, то $0 < y \leqslant \beta$, где $\beta = \arcsin \dfrac{a}{b}$ при $b \geqslant a\sqrt{2}$ и $\beta = \arccos \dfrac{b}{2a}$ при $b \leqslant a\sqrt{2}$.

44. Обозначим $\angle ACB = \alpha$; тогда при $0{,}5 \leqslant M \leqslant 1$ имеем: $2 \arcsin \dfrac{1}{2M} \leqslant \alpha \leqslant 180°$, если $m \leqslant 0{,}5$ и $2 \arcsin \dfrac{1}{2M} \leqslant \alpha \leqslant 2 \arcsin \dfrac{1}{2m}$, если $0{,}5 \leqslant m \leqslant M$;

при $1 \leqslant M \leqslant \dfrac{\sqrt{17}+1}{4}$ имеем: $0 < \alpha < 180°$, если $m \leqslant M - 1$; $\arccos \dfrac{M^2 + m^2 - 1}{2Mm} \leqslant \alpha < 180°$, если $M - 1 \leqslant m \leqslant M - \dfrac{1}{M}$; $2 \arcsin \dfrac{1}{2M} \leqslant \alpha < 180°$, если $M - \dfrac{1}{m} \leqslant m \leqslant 0{,}5$ и $2 \arcsin \dfrac{1}{2M} \leqslant$ $\leqslant \alpha \leqslant 2 \arcsin \dfrac{1}{2m}$, если $0{,}5 \leqslant m \leqslant M$;

при $\dfrac{\sqrt{17}+1}{4} \leqslant M \leqslant 1{,}5$ имеем: $0 < \alpha < 180°$, если $m \leqslant M - 1$; $\arccos \dfrac{M^2 + m^2 - 1}{2Mm} \leqslant \alpha < 180°$, если $M - 1 \leqslant m \leqslant 0{,}5$;

$\arccos\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m}$, если $0{,}5\leqslant m\leqslant M-\frac{1}{M}$ и $2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m}$, если $M-\frac{1}{M}\leqslant m\leqslant M$;

при $M\geqslant 1{,}5$ имеем: $0<\alpha<180°$, если $m\leqslant 0{,}5$; $0<\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m}$, если $0{,}5\leqslant m\leqslant M-1$; $\arccos\frac{M^2+m^2-1}{2Mm}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m}$, если $M-1\leqslant m\leqslant M-\frac{1}{M}$ и $2\arcsin\frac{1}{2M}\leqslant\alpha\leqslant 2\arcsin\frac{1}{2m}$, если $M-\frac{1}{M}\leqslant m\leqslant M$ (число $x=\frac{\sqrt{17}+1}{4}$ есть корень квадратного уравнения $x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$).

45. а) 1) $0<A\leqslant 60°$; 2) $0<B<90°$; 3) $60°\leqslant C<180°$.

б) 1) $0<a<\infty$; 2) $\sqrt{2}\leqslant b<\infty$; 3) $\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}\leqslant c<\infty$.

46. а) 1) $1<r_a\leqslant 3$; 2) $2<r_b<\infty$; 3) $3\leqslant r_c<\infty$. Указание. Воспользуйтесь формулами $r=\frac{S}{p}$; $r_a=\frac{S}{p-a}$, где S — площадь треугольника ABC со сторонами a, b, c; r и r_a — радиусы вписанной, соответственно вневписанной окружности этого треугольника и p — его полупериметр.

б) 1) $0<r_a\leqslant\frac{3}{2}$; 2) $0<r_b<2$; 3) $\frac{3}{2}\leqslant r_c<4$. Указание. Пусть $DX=p_a$, $EY=p_b$, $FZ=p_c$ — длины перпендикуляров, восставленных в серединах D, E и F сторон BC, CA и AB к этим сторонам, считая от точек D, E и F до точек пересечения с описанной вокруг треугольника окружностью (причем точка X лежит по ту же сторону от прямой BC, что и точка A; точки Y и Z определяются аналогично); тогда

$$p_a=\frac{1}{2}(r_b+r_c),\quad p_b=\frac{1}{2}(r_a+r_c)\ \text{и}\ p_c=\frac{1}{2}(r_a+r_b).$$

47. 1) $1<\rho_A\leqslant 2$; 2) $1<\rho_B<3$; 3) $\frac{3}{2}<\rho_C<\infty$; 4) $2\leqslant\rho_D<\infty$; 5) $1<\rho_{AB}\leqslant\infty$; 6) $2<\rho_{AC}\leqslant\infty$; 7) $3<\rho_{AD}\leqslant\infty$. Указание. Если $S_A=S_{\triangle BCD}$, $S_B=S_{\triangle ACD}$, $S_C=S_{\triangle ABD}$ и $S_D=S_{\triangle ABC}$ — площади граней тетраэдра $ABCD$ и $S_A\leqslant S_B\leqslant S_C\leqslant S_D$, то $\rho_A\leqslant\rho_B\leqslant\rho_C\leqslant\rho_D$; далее, радиус ρ вписанной сферы тетраэдра находится по формуле $\rho=\frac{3V}{2\Sigma}$, где V — объем тетраэдра, а $\Sigma=\frac{S_A+S_B+S_C+S_D}{2}$ — половина площади поверхности; аналогично радиусы вневписанных сфер тетраэдра определяются из формул

$$\rho_A=\frac{3V}{2(\Sigma-S_A)},\ \rho_B=\frac{3V}{2(\Sigma-S_B)},\ \rho_C=\frac{3V}{2(\Sigma-S_C)},\ \rho_D=\frac{3V}{2(\Sigma-S_D)};$$

$$\rho_{AB}=\frac{3V}{2(\Sigma-S_A-S_B)},\quad \rho_{AC}=\frac{3V}{2(\Sigma-S_A-S_C)}\ \text{и}$$

$$\rho_{AD}=\frac{3V}{2(\Sigma-S_A-S_D)}\ \text{или}\ \frac{3V}{2(\Sigma-S_B-S_C)}.$$

48. Либо $h_a < \beta_a < m_a$, либо $h_a = \beta_a = m_a$.

49. 1.

50. Опустите из середины стороны AC треугольника перпендикуляры на стороны BC и AB.

51. Воспользуйтесь результатом задачи 48 и тем, что $\beta_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

52. Если $\alpha \leqslant 90°$, то $\frac{1}{2} \leqslant m_a \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; если $\alpha \geqslant 90°$, то $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \leqslant m_a \leqslant \frac{1}{2}$.

53. $\cos C \geqslant \frac{4}{5}$. Указание. Воспользуйтесь формулой, выражающей длину медианы треугольника через длины его сторон или результатом задачи 68 а).

54. $2 < \frac{h}{r} \leqslant 1 + \sqrt{2}$.

55. $\angle B_1AC_1 + \angle D_1AC_1 < 90°$.

56. $v = \frac{4}{3}$; этому значению v отвечает конус K, угол α при вершине осевого сечения которого определяется условием $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

57. а) $0 \leqslant V \leqslant \frac{\sqrt{2}}{12}$, где V — объем тетраэдра. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 99 б).

б) $0 < V \leqslant \frac{1}{8}$; $V = \frac{1}{8}$, если грани ACD и BCD тетраэдра — правильные треугольники со сторонами длины 1 и плоскости этих граней перпендикулярны.

58. $0 < S < \pi\frac{d^2}{2}$, где S — площадь поверхности вращения.

59. а) $0 < s < \frac{1}{2}$.

б) $\frac{1}{2} \leqslant s < 1$.

60. $\frac{4}{5} \leqslant d < 1$.

61. Пусть A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — рассматриваемые отрезки, пересекающиеся в точке 0, и $1 \leqslant \frac{A_1O}{OB_1} \leqslant \frac{A_iO}{OB_i} \leqslant \frac{A_jO}{OB_j} \leqslant \ldots \leqslant \frac{A_pO}{OB_p}$, где i, j, ..., p — какая-то перестановка номеров 2, 3, ..., n. Докажите, что если сдвинуть каждый из отрезков A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n вдоль содержащей его прямой в положение $A_2'B_2'$, $A_3'B_3'$, ..., $A_n'B_n'$ так, чтобы было $\frac{A_1O}{OB_1} = \frac{A_2'O}{OB_2'} = \frac{A_3'O}{OB_3'} = \ldots = \frac{A_n'O}{OB_n'}$, то наибольшая сторона

$2n$-угольника, вершинами которого служат концы отрезков, не увеличится; не увеличится она и при дальнейшем сдвиге всех отрезков в положение $A_1''B_1''$, $A_2''B_2''$, ..., $A_n''B_n''$, где $\frac{A_1''O}{OB_1''}=\frac{A_2''O}{OB_2''}=\ldots=\frac{A_n''O}{OB_n''}=1$.

62. Пусть O, P, Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ABD и BCD, O', P' и Q' — проекции этих центров на основание AC и $PK \parallel QL \parallel AC$, где K и L — точки отрезка OO'; надо доказать, что $QQ' > OK$ или что $PP' > OL$.

63. Воспользуйтесь тем, что наибольшая сторона треугольника является наибольшим из всех отрезков, соединяющих какие-либо две точки треугольника.

64. Воспользуйтесь тем, что для любых трех точек X, Y и Z всегда $XY+YZ \geqslant XZ$.

65. а) Докажите, что отрезок искомой прямой, заключенный между сторонами угла, делится данной точкой пополам.

б) Воспользуйтесь тем, что отрезок, заключенный между вершиной треугольника и точкой касания исходящей из этой вершины стороны с вневписанной окружностью, равен полупериметру треугольника.

66. Найдите условие, при котором проходящую через точку M прямую нельзя слегка повернуть вокруг M так, чтобы отрезок высекаемый на этой прямой сторонами угла, уменьшился.

67. Это значение равно $\frac{p}{4}$; оно достигается для треугольников с основанием $a=\frac{p}{2}\left(=\frac{a+b+c}{4}\right)$.

68. а) Рассмотрите отдельно случаи, когда прямая l пересекает отрезок MN; проходит через один из его концов; пересекает продолжение отрезка MN; параллельна прямой MN.

б) Рассмотрите отдельно всевозможные случаи взаимного расположения отрезка MN и окружности S.

69. Замените точку B точкой B', симметричной B относительно l.

70. а) П е р в о е р е ш е н и е. Отразите симметрично треугольник ABC вместе со вписанным в него треугольником относительно прямой BC; полученный треугольник $A'BC$ отразите относительно прямой CA'.

В т о р о е р е ш е н и е. Отразите точку P от сторон CB и CA треугольника ABC.

б) Используйте (первое или второе) решение задачи а). О т в е т. Если треугольник ABC о с т р о у г о л ь н ы й, то вершины искомого треугольника совпадают с основаниями высот ABC; в противном случае искомый треугольник вырождается в дважды взятую высоту треугольника ABC, опущенную на бóльшую сторону треугольника.

71. а) Воспользуйтесь результатом задачи 69 а).

б) Рассмотрите отдельно случаи, когда $l \parallel m$ и когда l и m пересекаются. Если прямые l и m пересекаются, надо еще различать случаи, когда A лежит внутри образованного ими острого угла и когда это не так (в последнем случае искомый треугольник вырождается в дважды взятый отрезок).

в) Рассмотрите отдельно все возможные случаи взаимного расположения прямых l, m и n; если эти три прямые являются сторонами остроугольного треугольника (лишь в этом случае искомый треугольник не вырождается в дважды взятый отрезок!), воспользуйтесь результатом задачи 70 б).

72. Рассмотрите сначала следующую задачу, аналогичную задаче 70 а) (эта задача допускает решение, близкое к первому решению 70 а)): на стороне AD четырехугольника $ABCD$ задана точка P; найти вписанный в $ABCD$ четырехугольник наименьшего возможного периметра, одна вершина которого совпадает с точкой P.

73. Вершинами искомого треугольника будут являться основания высот треугольника ABC; если треугольник ABC остроугольный (а лишь в этом случае построенный треугольник будет вписан в ABC в собственном смысле слова, т. е. его вершины будут лежать на сторонах ABC, а не на их продолжениях), то периметр построенного треугольника будет меньше периметра любого другого вписанного в ABC треугольника (это устанавливается с использованием выражения для площади ABC в виде суммы площадей четырехугольников $ODCE$, $OEAF$ и $OFBD$; здесь D, E и F — вершины вписанного в ABC треугольника).

74. Рассмотрите отдельно случай, когда внутри треугольника ABC имеется точка O, расстояния от которой до вершин треугольника пропорциональны числам m, n и p (в этом случае решение задачи аналогично решению задачи 73), и случай, когда внутри треугольника ABC нет такой точки.

75. а) Поверните треугольник ACX (где X — произвольная точка внутри треугольника ABC) вокруг точки A на $60°$ в направлении от AB к AC. Ответ. Искомая точка есть та, из которой все стороны треугольника видны под углом в $120°$, если все углы треугольника ABC меньше $120°$; в противном случае искомая точка совпадает с вершиной тупого угла.

б) Эта точка совпадает с точкой, полученной в решении задачи а).

76. а) Искомая точка совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, если четырехугольник $ABCD$ выпуклый, и с вершиной большего $180°$ угла, если $ABCD$ — невыпуклый четырехугольник.

б) Искомая точка совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника.

77. а) Если все углы треугольника ABC меньше $120°$, то точка, отыскание которой составляет содержание задачи 75, совпадает с точкой пересечения перпендикуляров, восставленных в точках A, B и C к сторонам описанного вокруг ABC правильного треугольника (это следует из того, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного треугольника до его сторон имеет одно и то же значение); в случае, когда, например, $\angle C \geqslant 120°$, эта точка совпадает с вершиной C.

б) Если все углы треугольника ABC меньше $120°$, то точка пересечения перпендикуляров, опущенных из вершин треугольника ABC на стороны вписанного в него правильного треугольника (в этом случае она лежит внутри ABC), совпадает с той, нахождение которой составляет содержание задачи 75; доказательство этого близко к решению задачи 73.

78. а) Первое решение. Поверните треугольник CAM вокруг A на $60°$.

Второе решение. Проведите через точку M три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC, и рассмотрите три четырехугольника с диагоналями AM, BM и CM.

Третье решение. Опустите из точки M перпендикуляры на стороны треугольника ABC и рассмотрите треугольник, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров.

Четвертое решение. Воспользуйтесь теоремой Птолемея (см., например, задачу 136 из книги Д. О. Шклярского и др. [17]).

б) Примените результат задачи а) к правильному треугольнику, построенному на стороне BC треугольника ABC вне ABC.

79. Рассмотрите отдельно случай, когда большее из чисел m, n, p не меньше суммы двух других чисел (при этом искомая точка совпадает с одной из вершин треугольника ABC) и противоположный случай (когда задача может быть решена разными способами, например аналогично решениям задач 75, 77 а), 77 б) и 78).

80. Если $AB < AC$, то искомая точка M принадлежит оси симметрии треугольника и такова, что $\angle MAB = \angle MBA = 30^\circ$ (причем M лежит вне треугольника ABC); если же $AB = AC$ $(= BC)$, то M — любая точка дуги AB описанной вокруг треугольника ABC окружности. Указание. Выполните построение, описанное в указании к решению задачи 75 а), приняв за X произвольную точку, лежащую внутри угла ACB, но вне треугольника ABC.

81. а) Первое решение. Выразите сумму квадратов расстояний произвольной точки M плоскости от вершин треугольника ABC через квадрат расстояния точки M от точки пересечения медиан (центра тяжести) треугольника ABC (в полученную формулу могут еще входить величины, зависящие от выбора треугольника ABC, но не от точки M).

Второе решение. Сравните сумму квадратов расстояний произвольной точки M плоскости от вершин треугольника ABC с суммой квадратов расстояний от той же точки до середин сторон треугольника.

Ответ. Искомой точкой является точка пересечения медиан треугольника.

б) Расстояния искомой точки от сторон треугольника пропорциональны длинам сторон.

82. а), в). Задача может быть решена аналогично первому или (что несколько труднее) второму решению задачи 81 а).

Ответ. Искомая точка O обладает тем свойством, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \mathbf{0}$ (здесь черточками над буквами обозначены векторы; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор).

б) Решением задачи служит либо точка O решения задачи а) (если она принадлежит четырехугольнику, в частности, если четырехугольник $ABCD$ выпуклый), либо ближайшая к этой точке O точка четырехугольника.

83. Наименьшую сумму квадратов сторон имеет равносторонний треугольник.

84. Минимальную бóльшую диагональ имеет квадрат.

85. а) При $\angle ABC = 120^\circ$; в этом случае $BD = a + b$.

б) При $\angle ABC = 0$; в этом случае $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

86. Если оба пешехода удаляются от точки O, то искомое время t_0, очевидно, дается формулой $t_0 = 0$; если оба пешехода приближаются к точке O, то $t_0=\frac{a+b}{2}$; если первый пешеход приближается к точке O, а второй от нее удаляется, то $t_0=\frac{a-b}{2v}$ при $a>b$ и $t_0=0$ в противном случае.

87. В задаче требуется определить наименьшее возможное значение (при данных углах α и β) смещения l самолета за наблюдаемый отрезок времени, или наименьшее возможное значение отношения l/d; при этом удобно временно предположить, что величину l мы знаем, а отрезок d, напротив, может меняться. Ответ. $v_{\min}=l_{\min}=$
$=\dfrac{2d}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$ *км/сек*.

88. Сравните величины $\frac{AM}{a}+\frac{BM}{b}$ и $\frac{AX}{a}+\frac{BX}{b}$, где M — точка прямой PQ, удовлетворяющая условиям задачи, X — произвольная другая точка прямой PQ.

89. Рассматриваемое двойное неравенство не может быть улучшено.

90. Воспользуйтесь тем, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. (Неравенство задачи обращается в равенство лишь в том случае, когда треугольник ABC равносторонний.)

91. Воспользуйтесь тем, что сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны и что против большей стороны треугольника лежит больший угол. Рассматриваемое двойное неравенство улучшено быть не может.

92. а) Отложите на продолжении стороны BA за точку A и на продолжении стороны BA_1 за точку A_1 отрезок $AD=AC$, соответственно отрезок $A_1D_1=A_1C$.

б) Воспользуйтесь результатом задачи а). Ответ. $2a<2p\leqslant$
$\leqslant a\left(1+\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\right)$.

93. Докажите, что вписанный в ту же окружность прямоугольный треугольник A_1BC с прямым углом C имеет меньший периметр, чем остроугольный треугольник ABC.

94. а) Первое решение. Рассмотрите треугольник $A_1B_1C_1$, для которого точки A, B и C являются серединами сторон, а также (больший $A_1B_1C_1$!) треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC и касаются описанной вокруг ABC окружности S.

Второе решение. Выразите радиус r вписанной окружности треугольника ABC через радиус R описанной окружности и тригонометрические функции углов A, B и C.

Третье решение. Выразите расстояние между центрами окружностей S и s через радиусы R и r этих окружностей.

Равенство $R=2r$ имеет место лишь для равностороннего треугольника.

б) Рассмотрите всевозможные равнобедренные треугольники. и определите, как меняется отношение $R:r$ с изменением угла α при вершине треугольника.

в) Наряду с тетраэдром $ABCD$ рассмотрите еще два подобных ему тетраэдра: $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого служат точки пересечения медиан граней тетраэдра $ABCD$, и $A_2B_2C_2D_2$, грани которого параллельны граням $ABCD$ и касаются описанной вокруг $A_1B_1C_1D_1$ сферы σ_1 (ср. с. первым решением задачи а)). Равенство $\mathrm{P}=3\rho$ имеет место лишь для правильного тетраэдра.

95. а) Воспользуйтесь результатом задачи 48, известными неравенствами

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \geqslant \frac{3}{1/x+1/y+1/z} \qquad \text{(A)}$$

и

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}(x+y+z)^2, \qquad \text{(Б)}$$

связывающими три произвольных положительных числа x, y и z, а также так называемой теоремой Стюарта, в силу которой

$$AM^2=\frac{CM}{BC}\cdot AB^2+\frac{BM}{BC}\cdot AC^2-\frac{BM}{BC}\cdot\frac{CM}{BC}\cdot BC^2$$

(где M — точка стороны BC треугольника ABC); эта теорема позволяет выразить расстояние OM между центром описанной окружности и точкой пересечения медиан треугольника ABC через величины a, b, c; m_a, m_b, m_c; R.

б) Используйте формулы, выражающие величины r, r_a, r_b, r_c и R через площадь S треугольника ABC и его стороны a, b и c; формулу, выражающую длину биссектрисы треугольника через длины его сторон (эту формулу легко получить, используя теорему Стюарта; см. указание к задаче а)), а также неравенства (Б) (см. указание к задаче а)) и

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz. \qquad \text{(В)}$$

в) Используйте результат задачи 48, формулу, выражающую расстояние OM между центром описанной окружности и точкой пересечения медиан треугольника ABC через радиус R описанной окружности и длины сторон треугольника (см. указание к задаче б)), а также неравенства (А) и (Б) (см. указание к задаче а)).

г) Используйте результат задачи 48, выражения для r; r_a, r_b, r_c; h_a, h_b, h_c через площадь S треугольника ABC и длины его сторон, а также неравенства (А) и (Б) (см. указание к задаче а)) и результат задачи в).

Все неравенства задач а) — г) обращаются в равенства лишь для равностороннего треугольника ABC

96. а) Выразите сумму попарных произведений радиусов вневписанных окружностей треугольника через его периметр; воспользуйтесь также неравенством (В) (см указание к задаче 95 б)) и неравенством, связывающем радиус r вписанной окружности и периметр p треугольника (задачи 95 а) и б) или задача 97).

б) Воспользуйтесь результатами задач 95 б) и 94 а).

Улучшены неравенства задач а) и б) быть не могут.

97. См задачу 95 а). (Все неравенства задачи 97 обращаются в равенства лишь для равностороннего треугольника ABC.)

98. П е р в о е р е ш е н и е. Определите наибольшее значение $V(d)$, которое может иметь объем V вписанного в заданную сферу Σ тетраэдра, одна грань которого удалена от центра O сферы Σ на фиксированное расстояние d; затем выясните, при каком d выражение $V(d)$ является наибольшим.

Второе решение. Воспользуйтесь результатами задач 106 а) и 94 в).

Неравенство задачи 98 обращается в равенство лишь в том случае, когда тетраэдр $ABCD$ правильный.

99. Воспользуйтесь тем, что объем тетраэдра $ABCD$ однозначно определяется длинами a и a_1 противоположных ребер AD и BC, а также расстоянием и углом между (скрещивающимися) прямыми AD и BC; затем выясните, при каком положении отрезков AD и BC заданных длин a и a_1 на (фиксированных!) прямых AD и BC площадь Δ поверхности тетраэдра $ABCD$ и его «периметр» 2Π будут наименьшими. Сдвинув затем аналогичным образом и другие пары противоположных ребер, мы заменим исходный тетраэдр $ABCD$ новым тетраэдром $A''B''C''D''$ того же объема V, что и исходный, но меньшей (точнее — не большей) площади поверхности Δ и меньшего (не большего) периметра 2Π. После этого для оценки величин Δ и Π в зависимости от объема V следует выразить величины V, Δ и Π через длины ребер (в данном случае прямоугольного!) параллелепипеда, описанного вокруг тетраэдра $A''B''C''D''$ и такого, что шесть ребер тетраэдра являются диагоналями шести граней параллелепипеда.

Неравенства задач а) и б) обращаются в равенства лишь в том случае, когда тетраэдр $ABCD$ правильный.

100. а) Первое решение. Воспользуйтесь результатами задач 95 в) и 97.

Второе решение. Используйте формулу Герона, выражающую площадь S треугольника ABC через длины его сторон, и неравенства (А) и (Б) (см. указание к задаче 95 а)).

Третье решение. Постройте на сторонах треугольника ABC равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1, расположенные по ту же сторону от прямых AB, BC и CA, что и сам треугольник ABC; далее выразите расстояния AA_1, BB_1 и CC_1 через площадь треугольника ABC и длины его сторон.

Четвертое решение. Пусть C', A' и B' — центры треугольников ABC_1, BCA_1 и CAB_1, фигурирующих в третьем решении задачи; выразите длины сторон треугольника $A'B'C'$ через площадь и длины сторон треугольника ABC.

б) Первое решение. Воспользуйтесь формулой Герона для площади треугольника и неравенством

$$xy+xz+yz \geqslant \sqrt{3xyz(x+y+z)}, \tag{Г}$$

связывающим три произвольных положительных числа x, y и z.

Второе решение. Воспользуйтесь тем, что, например,

$$a^2=(b-c)^2+4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Третье решение. Докажите, что требуемое неравенство равносильно следующему:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.$$

101. а) Следует из результата задачи б).

б) Примените к каждой грани тетраэдра $ABCD$ неравенство задачи 100 б).

102. а) Докажите, что, например, $\rho_a = \frac{r}{4} \frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}$.

б) Докажите, что, например, $P_a = r\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)$; используйте также неравенство $P_a \leqslant 2R\frac{r}{h_a}$ и два других аналогичных этому неравенства.

Все неравенства задач а) и б) обращаются в равенства лишь в том случае, когда треугольник ABC равносторонний.

103. а) Первое решение. Представьте величину δ в виде суммы $\delta_1 + \delta_2$, где, скажем, $\delta_1 = a^2 + b^2 + c^2$ и $\delta_2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$; для оценки величин δ_1 и δ_2 воспользуйтесь неравенством (Б) (см. указание к задаче 95 а)).

Второе решение. Воспользуйтесь (аналогичным (Б)) неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2 \geqslant \frac{1}{6}(x + y + z + t + u + v)^2,$$

связывающим произвольные шесть положительных чисел x, y, z, t, u и v.

б) Воспользуйтесь результатом задачи 101 а).

Равенство в задачах а) и б) имеет место лишь в том случае, когда тетраэдр $ABCD$ правильный.

104. а) Первое решение. Используйте результаты задач 75 и 80.

Второе решение. Заметьте, что достаточно ограничиться тем случаем, когда M — внутренняя точка треугольника ABC; далее воспользуйтесь тем, что, например, $R_a + d_a \geqslant h_a$, а также результатами задач 95 а) и 111 б).

Третье решение. Отразите (внутреннюю) точку M от всех сторон треугольника ABC и воспользуйтесь «изопериметрическим неравенством для шестиугольника» (см. стр. 45—46).

б) Используйте результат задачи 81 а).

Неравенства задач а) и б) обращаются в равенства лишь в том случае, когда треугольник ABC правильный и точка M совпадает с его центром.

105. Используйте результаты задач 82 в), 100 б) и 100 а). (Условия равенства здесь аналогичны тем, какие имеют место в задаче 104.)

106. Используйте результаты задач 105 а) и б).

107. а) Воспользуйтесь очевидным равенством

$$S = \frac{1}{2}(ad_a + bd_b + cd_c).$$

Случаи обращения неравенств задачи в равенства будут разными для разностороннего, равнобедренного и равностороннего треугольников.

б) Воспользуйтесь равенством $S = \frac{1}{2}(ad_a + bd_b + cd_c)$ и неравенством (А) (см. указание к задаче 95 а)). (Неравенство задачи обращается в равенство, если $d_a : d_b : d_c = 1/a : 1/b : 1/c$).

108. а) $\min(h_A, h_B, h_C, h_D) \leqslant d_A + d_B + d_C + d_D \leqslant \max(h_A, h_B, h_C, h_D)$, где, например, $h_A = AP$ — высота тетраэдра $ABCD$, опущенная из вершины A на грань BCD. (При разборе случаев обращения неравенств задачи в равенства следует особо отметить, имеет или не имеет тетраэдр $ABCD$ равновеликие грани, превосходящие по площади остальные грани тетраэдра или, напротив, меньшие по площади других граней.)

б) $d_A d_B d_C d_D \leqslant 81 V^4 : (256 S_A S_B S_C S_D)$; это неравенство (где, скажем, $S_A = S_{\triangle BCD}$) обращается в равенство, если $d_A : d_B : d_C : d_D = 1/S_A : 1/S_B : 1/S_C : 1/S_D$.

109. Воспользуйтесь результатами задач 81 б), 97 и 95 в). (Условия равенства здесь те же, что и в задаче 104.)

110. Воспользуйтесь тем, что, например, $h_a - d_a \leqslant R_a$. Неравенство этой задачи обращается в равенство лишь в том случае, когда M совпадает с точкой пересечения высот (ортоцентром) треугольника ABC.

111. а) Докажите, что, например,

$$aR_a \geqslant bd_b + cd_c. \qquad (*)$$

б) Первое решение. Сравнив длину отрезка VW (см. рис. 26 на стр. 48) с суммой длин проекций отрезков MV и MW на сторону BC треугольника ABC, докажите, что $R_a \geqslant d_b \frac{\sin C}{\sin A} + d_c \frac{\sin B}{\sin A}$; из этого неравенства и двух других, аналогичных ему, легко выводится требуемый результат.

Второе решение. Из неравенства $VW \geqslant \text{пр}_{BC} MV + \text{пр}_{BC} MW$ (ср. с указанием к первому решению задачи) можно вывести неравенство $R_a \leqslant \frac{c_1 R_a}{a_1 R_c} d_b + \frac{b_1 R_a}{a_1 R_b} d_c$, где a_1, b_1, c_1 — стороны треугольника UVW; это неравенство вместе с двумя другими, аналогичными ему, также приводит к требуемому результату.

Третье решение. Примените неравенство (*) (см. указание к первому решению задачи а)) к точке M', симметричной M относительно биссектрисы угла A.

Четвертое решение. Примените к четырехугольнику $ABNC$ и двум другим аналогичным $ABNC$ четырехугольникам (где N — точка пересечения прямой AM с описанной вокруг треугольника ABC окружностью S) теорему Птолемея (см., например, задачу 136 а) из книги [17]).

Пятое решение. Докажите, что, например, $\bar{d}_a = \frac{R_b R_c}{R_b + R_c} \cos \frac{\alpha}{2}$,

где $\bar{d}_A = MA'$ — длина биссектрисы угла M треугольника MBC и $\alpha = \angle BMC$; далее докажите, что

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2(\bar{d}_a + \bar{d}_b + \bar{d}_c).$$

в) Примените неравенство задачи б) к точке M и треугольнику $A'B'C'$, где A', B', C' — такие точки лучей MU, MV и MW, что $MA' = \frac{1}{d_a}$, $MB' = \frac{1}{d_b}$ и $MC' = \frac{1}{d_c}$.

Неравенства задач а) — в) обращаются в равенства лишь в том случае, если треугольник ABC равносторонний и точка M — его центр.

112. а) Составьте равенство, связывающее три величины $x_a = \frac{R_a}{d'_a}$, $x_b = \frac{R_b}{d'_b}$ и $x_c = \frac{R_c}{d'_c}$, где, например, $d'_a = MA_1$ — расстояние от точки M до точки A_1 пересечения прямой AM со стороной BC треугольника ABC; затем с помощью неравенства (А) (см. указание к задаче 95 а)) преобразуйте это равенство в неравенство, в которое входит величина $\sqrt[3]{x_a x_b x_c}$ и степени этой величины; исходя из этого неравенства, оцените выражение $x_a x_b x_c = \frac{R_a R_b R_c}{d'_a d'_b d'_c}$.

б) Воспользуйтесь тем, что $R_a + R_b + R_c > \frac{a+b+c}{2} = p$ и $d'_a + d'_b + d'_c > c$ ($\geqslant b \geqslant a$; ср. выше задачу 63). Улучшить неравенство задачи б) нельзя.

113. а) Воспользуйтесь неравенствами $R_a \geqslant d_b \frac{\sin C}{\sin A} + d_c \frac{\sin B}{\sin A}$ и т. д. (см. первое решение задачи 111 б)) или неравенствами $R_a \geqslant \frac{c}{a} d_b + \frac{b}{a} d_c$ и т. д. (см. третье и четвертое решения той же задачи). (Условия равенства — те же, что и в задаче 111.)

б) См. указание к задаче 113 а). (Улучшить неравенство задачи б) нельзя.)

114. а) Разбейте параллелограмм BCC_2B_2 на два меньших параллелограмма, равновеликих соответственно параллелограммам ABB_1A_1 и ACC_1A_2.

б) Замените треугольник ABC треугольником $AB'C'$, симметричным ABC относительно биссектрисы угла A, и примените теорему Паппа к треугольнику $AB'C'$ и построенным на его сторонах AB' и AC' параллелограммам, противоположные AB', соответственно AC' стороны которых проходят через точку M.

115. См. указание к третьему решению задачи 111 б). (Условия равенства — те же, что в задаче 111.)

116. а) Первое решение. См. указание к задаче 111 а).

Второе решение. Докажите, что три прямые, симметричные прямым AM, BM и CM соответственно относительно биссектрис углов A, B и C треугольника ABC, пересекаются в одной точке M'; примените результат задачи 111 б) к треугольнику ABC и точке M'.

б) Примените неравенство задачи 111 б) к точке M и треугольнику $A'B'C'$, где A', B', C' — такие точки лучей MA, MB и MC, что

$$MA' = \frac{1}{MA} \left(= \frac{1}{R_a} \right), \quad MB' = \frac{1}{MB}, \quad MC' = \frac{1}{MC}.$$

в) Воспользуйтесь результатами задач а) и б).

г) Примените результат задачи а) к точке M и треугольнику $A'B'C'$ второго решения задачи б).

д) Примените неравенство задачи а) к точке M и треугольнику $A'B'C'$ решения задачи 111 в).

е) Воспользуйтесь результатами задач г) и д).

Все неравенства задач а) — е) обращаются в равенства в тех же случаях, что и в задачах 111 а) — в).

117. а) Воспользуйтесь результатом задачи 111 б) и неравенством (А) (см. указание к задаче 95 а)).

б) Воспользуйтесь результатом задачи 111 а), неравенством (А) (см. указание к задаче 95 а)) и неравенством

$$(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\geqslant(xx_1+yy_1+zz_1), \qquad (Д)$$

справедливым для любых шести положительных чисел x, y, z, x_1, y_1 и z_1.

Неравенства задач а) и б) обращаются в равенства в том же случае, что и в задачах 104 а) и б).

118. а) Решение задачи аналогично решению задачи 110; неравенство этой задачи обращается в равенство лишь в том случае, когда высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке и M совпадает с этой точкой.

б) Покажите, что, например,

$$R_A d_A \geqslant \frac{S_B}{S_A} d_A d_B + \frac{S_C}{S_A} d_A d_C + \frac{S_D}{S_A} d_A d_D.$$

Неравенство задачи б) обращается в равенство, лишь если тетраэдр $ABCD$ правильный, и точка M совпадает с его центром.

119. Первое решение. С помощью неравенства (А) (см. указание к задаче 95 а)) покажите, что, например,

$$S_A R_A \geqslant 3\sqrt[3]{S_B S_C S_D d_B d_C d_D}.$$

Второе решение аналогично второму решению задачи 111 а).

Неравенство задачи 119 обращается в равенство в том же случае, что и в задаче 118 б).

120. Воспользуйтесь неравенствами

$$\frac{x+y+z+t}{4} \geqslant \sqrt[4]{xyzt} \qquad (А')$$

и

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2) \geqslant (xx_1+yy_1+zz_1+tt_1)^2, \qquad (Д')$$

справедливыми для любых четырех положительных чисел x, y, z и t, соответственно для любых восьми положительных чисел x, y, z и t, x_1, y_1, z_1 и t_1.

Неравенства задач а) и б) обращаются в равенства, лишь если тетраэдр $ABCD$ правильный и точка M совпадает с его центром.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Вып. 1. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.

Вып. 2. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы планиметрии.

Вып. 3. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия).

Вып. 4. **И. М. Яглом** и **В. Г. Болтянский,** Выпуклые фигуры.

Вып. 5. **А. М. Яглом** и **И. М. Яглом,** Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

Вып. 6. **Е. Б. Дынкин** и **В. А. Успенский,** Математические беседы.

Вып. 7. **И. М. Яглом,** Геометрические преобразования, I. Движения и преобразования подобия.

Вып. 8. **И. М. Яглом,** Геометрические преобразования, II. Линейные и круговые преобразования.

Вып. 9. **М. Б. Балк,** Геометрические приложения понятия о центре тяжести.

Вып. 10. **Г. Радемахер** и **О. Теплиц,** Числа и фигуры. Опыты математического мышления.

Вып. 11. **И. М. Яглом,** Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.

Вып. 12. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.

Цена 70 коп.