НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Библиотека МАТЕМАТИЧЕСКОГО кружка

А. М. ЯГЛОМ и И. М. ЯГЛОМ

НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА
ВЫПУСК 5

А. М. ЯГЛОМ и И. М. ЯГЛОМ

НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ
И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
ЗАДАЧИ ИЗ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ
МАТЕМАТИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

11-3-1

А. М. Яглом и *И. М. Яглом*. Неэлементарные задачи
в элементарном изложении

Редактор *А. З. Рывкин*.

Технический редактор *С. Н. Ахламов*. Корректор *Е. А. Белицкая*.

Сдано в набор 7/IX 1954 г. Подписано к печати 25/XI 1954 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 17,0. Условн. печ. л. 27,88. Уч.-изд. л. 30,5. Тираж 35 000 экз.
Т08450. Цена книги 10 р. 15 к. Заказ № 1754.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР
Главное управление полиграфической промышленности
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАЧИ

РАЗДЕЛ I

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

РАЗДЕЛ II

ЗАДАЧИ ИЗ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга первоначально была задумана как последняя, заключительная часть сборника «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», составляющего первые три выпуска «Библиотеки математического кружка». Однако в процессе работы выяснилось, что новая книга значительно отличается от предыдущих и прежнее название к ней уже мало подходит.

Основное отличие этой книги от первых выпусков «Библиотеки» заключается в тематике задач. Если в первых выпусках темы задач, как правило, черпались из элементарных областей математики, изучаемых в средней школе (арифметика, алгебра, геометрия), то в настоящей книге бóльшая часть задач фактически относится к математическим дисциплинам, изучаемым только в высшей школе,— к теории вероятностей, проективной геометрии, топологии, интегральному исчислению, теории чисел. Назвать все эти задачи «задачами и теоремами элементарной математики» было бы уже очень большой натяжкой. В то же время ни одна из собранных здесь задач не требует для своего решения знаний, выходящих за пределы школьного курса математики (кроме кратких разъяснений, приведенных в отдельных местах книги перед условиями соответствующих задач), — и по формулировкам и по методам решения все эти задачи вполне элементарны. Иначе говоря, большинство собранных здесь предложений относится к элементарным вопросам высшей («неэлементарной») математики — это обстоятельство и имеет в виду название книги.

Главная цель настоящей книги — познакомить читателя с рядом новых математических фактов, идей и методов; форма задачника выбрана для того, чтобы стимулировать активную, творческую работу над всем этим материалом.

Перед чтением книги следует ознакомиться с «Указаниями к пользованию книгой» (стр. 8). Книга рассчитана на увлекающихся математикой школьников старших классов и студентов младших курсов вузов, на преподавателей математики и вообще на всех любителей этой науки; она может быть использована в работе школьных и студенческих математических кружков.

Два раздела книги объединяются общностью цели и обращены к одному и тому же читателю, но значительно различаются по своему характеру. В разделе первом «Задачи по комбинаторике и теории вероятностей» собрано 100 задач, которые при большом различии формулировок и методов решения объединены общей постановкой вопроса. Все эти задачи относятся к одной сравнительно узкой области математики — к комбинаторике, лишь слегка затрагиваемой в курсе средней школы. Задачи первого раздела, как правило, не очень сложны и довольно близки к школьным; исключение в этом отношении составляет лишь последний цикл «Задачи на подсчет вероятностей», содержащий ряд очень трудных задач.

В противоположность этому второй раздел «Задачи из разных областей математики» очень разнообразен по содержанию. Собранные здесь задачи заимствованы из различных областей математики, чаще всего высшей, — название книги имеет в виду в первую очередь именно этот раздел. Указания на то, к каким математическим дисциплинам относятся те или иные задачи, вместе с дополнительной литературой, по которой можно более подробно ознакомиться с этими дисциплинами, даны в кратких введениях к отдельным циклам. Сами циклы задач здесь чаще всего не связаны друг с другом. И если в первом разделе авторы стремились отразить элементарные методы комбинаторики с известной полнотой, то второй раздел по самому своему характеру, разумеется, не может претендовать ни на какую полноту.

Ряд задач книги посвящен классическим теоремам, играющим значительную роль в современной науке; так, например, предложения задач 132 и 166 относятся к числу наиболее глубоких результатов замечательного русского математика П. Л. Чебышева. Другие задачи заимствованы из серьезных математических журналов, иногда из самых свежих их номеров. Некоторые из приведенных в книге задач предлагались на занятиях школьного математического кружка при Московском государственном университете и на олимпиадах московских школьников (номера задач, предлагавшихся на олимпиадах, приведены на стр. 10).

Первый раздел книги составлен А. М. Ягломом, а второй — совместно обоими авторами; окончательное редактирование всей книги производилось авторами коллективно. Отдельные задачи были сообщены авторам В. Г. Болтянским, Е. Б. Дынкиным, М. И. Граевым, С. Л. Каменомостской, Н. И. Коробовым, Я. А. Смородинским, В. А. Успенским и Н. Н. Ченцовым; последний, а также Г. М. Адельсон-Вельский и М. М. Бонгард принимали участие также и в написании решений некоторых задач. Ряд замечаний, способствующих улучшению книги, был сделан сотрудниками редакции математики Гостехиздата А. З. Рывкиным и В. А. Солодковым. Авторы искренне благодарны всем, помогавшим им в той или иной форме в работе над книгой.

А. М. Яглом,
И. М. Яглом.

УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Книга состоит из условий задач, решений и ответов и указаний. В отношении большинства задач можно посоветовать читателю попытаться самостоятельно найти решение. После того как задача будет решена, следует проверить себя, посмотрев ответ задачи; если ответы не совпадают, то надо попытаться найти свою ошибку; если же ответы совпадают, то полезно сравнить найденное решение с приведенным в книге. Если решить задачу самостоятельно не удается, то следует посмотреть в конце книги указание (или ответ, который тоже может помочь прийти к верному решению). Если и это не поможет, то следует ознакомиться с решением. Надо иметь в виду, что попытка решить задачу, даже окончившаяся неудачно, все же приносит пользу: она позволяет лучше вникнуть в суть вопроса и более сознательно отнестись к приведенному в книге решению.

Впрочем, указанный выше порядок пользования книгой может быть рекомендован не во всех случаях. Книга содержит много трудных задач, обозначенных в порядке возрастающей трудности одной, двумя и тремя звездочками. Задачи, обозначенные двумя и тремя звездочками, зачастую представляют собой выдающиеся достижения крупнейших математиков (см., например, задачи 132 или 166); естественно, вряд ли можно рассчитывать, что читатель сможет получить эти результаты совершенно самостоятельно. Поэтому в случае более трудных задач можно посоветовать с самого начала ознакомиться с приведенным в конце книги указанием; даже и после этого решение задачи, как правило, будет представлять значительные трудности.

Книгой (особенно вторым ее разделом) можно пользоваться и не как задачником, а смотреть на нее как на собрание отдельных математических предложений, в среднем более сложных, чем те, которые собраны в превосходной книге С. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (М. — Л., Гостехиздат, 1949), и облеченных в форму задач, снабженных подробными решениями. При таком подходе к книге решения задач надо разбирать сразу после ознакомления с условием. Некоторые части книги написаны так, что их лучше всего читать именно таким образом (циклы 12—14 второго раздела, задачи 51—52, 81—82 первого раздела и вообще большинство задач, обозначенных тремя звездочками; в несколько меньшей мере — циклы 6Б и 6В первого раздела или цикл 10 второго раздела).

Курсивом набраны номера задач, не требующих для решения знаний, выходящих за пределы программы восьми классов средней школы.

Первый раздел книги проще второго, поэтому читателю-школьнику рекомендуется начинать с него. Задачи первого раздела естественно решать в той последовательности, в которой они расположены в книге, постепенно переходя от одного цикла к следующему (с возможными пропусками тех циклов, которые покажутся читателю менее интересными); при этом, разумеется, вовсе не необходимо решить все задачи какого-либо цикла, прежде чем перейти к следующему. В последнем цикле первого раздела имеется несколько задач, решения которых опираются на предложения, составляющие содержание задач второго раздела; все такие задачи отмечены тремя звездочками, и указания к ним содержат ссылки на используемые в их решении результаты. Первый раздел книги может быть положен в основу работы школьного или студенческого математического кружка, занимающегося комбинаторикой и ее приложениями к теории вероятностей. При этом может оказаться полезной дополнительная литература, указанная в тексте книги. Можно рекомендовать такой порядок работы кружка: более легкие задачи решаются участниками самостоятельно, а более трудные рассматриваются как «теория»: их решения разбираются по книге и докладываются на собраниях кружка.

Второй раздел книги построен по иному плану. Циклы здесь содержат, как правило, значительно меньше задач (иногда только одну); отдельные циклы чаще всего совершенно независимы один от другого. Также и внутри отдельного цикла задачи обычно не зависят одна от другой; лишь в циклах 10—14 решения задач весьма существенно опираются на результаты предыдущих задач. Ряд задач второго раздела (например, задачи 102—103, 105—107, 109, 111—112, 115—116, 117, 118, 122, 123—124, 128—129, 130—135, 142—145) может послужить хорошей темой доклада на студенческом математическом кружке; опытный руководитель сумеет воспользоваться этим материалом и в работе школьного кружка. В работе кружка будет полезной и дополнительная литература, указанная во введениях к отдельным циклам задач.

Особое место в книге занимают последние три цикла задач второго раздела. Они тесно связаны между собой: решения нескольких задач цикла 12 опираются на результаты задач цикла 13 (все такие задачи помечены одной звездочкой); все задачи цикла 13 решаются с применением геометрических методов, развитых в цикле 12; решения задач цикла 14 зачастую опираются на результаты задач двух предшествующих циклов. Таким образом, циклы 12—14 представляют собой единое целое. Они содержат большой и важный теоретический материал и относятся к числу труднейших в книге; их разбору можно посвятить работу специального математического кружка.

НОМЕРА ЗАДАЧ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ

Олимпиады проводятся в два тура: первый тур имеет отборочный характер, второй является основным этапом соревнования.

Олимпиада	I тур	II тур	Олимпиада	I тур	II тур
Для учащихся 7—8-го классов			**Для учащихся 9—10-го классов**		
VI (1940)	—	14, 33а)	I (1935)	—	4, 25
VIII (1945)	—	60а)	II (1936)	—	15
IX (1946)	—	102	III (1937)	—	45
X (1947)	18	—	IV (1938)	1	11а), 43а)
XIII (1950)	—	52а)	V (1939)	—	43б)[1]
			VI (1940)	2	13
			VIII (1945)	—	60б)
			IX (1946)	—	103б)
			X (1947)	47а)	108а), 113
			XI (1948)	—	24
			XII (1949)	—	88а)
			XIII (1950)	—	101

[1]) Для пяти сфер.

ЗАДАЧИ

РАЗДЕЛ I

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задачи, собранные в этом разделе, объединяются постановкой вопроса: почти во всех из них требуется ответить на вопрос «сколько?» или «сколькими способами?». Такие задачи часто называются *комбинаторными* (это задачи на подсчет числа различных комбинаций), а часть математики, занимающаяся решением подобных задач,— *комбинаторикой*. Некоторые сведения по комбинаторике входят в курс 10-го класса средней школы (решение задач о числе различных перестановок, размещений и сочетаний); в большей части приведенных ниже задач знание этого теоретического материала не предполагается (исключение составляют задачи 5—7, 29, 48, 49, 55—60, 66—71, 77—80).

Помимо задач, начинающихся словами «сколько» и «сколькими способами», в настоящий задачник включены также некоторые задачи, посвященные свойствам биномиальных коэффициентов C_n^m, определяющих число сочетаний из n элементов по m (эти задачи составляют цикл 5), и ряд задач на подсчет вероятностей (цикл 6). Последние задачи не претендуют на то, чтобы дать читателю представление о содержании и методах теории вероятностей, которая выступает в настоящей книге не как самостоятельная математическая дисциплина, а только как область, в которой комбинаторные расчеты находят наиболее значительные применения. По этой причине в цикл 6 включены только такие задачи, решения которых не используют никаких специальных теоретико-вероятностных методов. Некоторые более характерные для теории вероятностей вопросы разобраны в третьем разделе книги Е. Б. *Дынкина* и В. А. *Успенского* «Математические беседы», составляющей выпуск 6 «Библиотеки математического кружка» (М.— Л., Гостехиздат, 1952); приведенный там материал может рассматриваться как естественное продолжение цикла 6 настоящего раздела.

Чтобы не увеличивать чрезмерно объем книги, мы вынуждены были отказаться от включения сюда задач, использующих самый важный из общих методов комбинаторики — так называемый «метод производящих функций» (отметим, впрочем, что первые задачи цикла 5 подводят читателя вплотную к основной идее этого метода). По этому поводу см. очень интересную книгу Л. Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых», т. 1 (М.— Л., ОНТИ, 1936), особенно гл. XVI этой книги, а также первый параграф книги Г. Полиа и Г. Сеге «Задачи и теоремы из анализа», ч. 1 (М.— Л., ОНТИ, 1937). Применения метода производящих функций к теории вероятностей освещены в гл. 6 второй части книги С. Н. Бернштейна «Теория вероятностей» (М.— Л., Гостехиздат, 1946) и в книге В. Феллера «Теория вероятностей и ее применения» (М., ИЛ, 1952).

1. Вводные задачи

1. В пространстве даны 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести плоскостей, равноудаленных от этих точек?

2. В пространстве даны 5 точек, не лежащих ни в одной плоскости, ни на одной сфере. Сколько существует плоскостей или сфер, равноудаленных от этих 5 точек?

[*Расстоянием* от точки M до сферы Σ с центром O называется длина кратчайшего из двух отрезков MA и MB, где A и B — точки пересечения прямой MO со сферой Σ[1]).]

3. Сколько существует сфер, касающихся плоскостей всех граней данной трехгранной пирамиды T?

4. Сколькими различными способами можно раскрасить грани куба в шесть данных цветов (каждая грань должна быть закрашена целиком одной краской), если различными считаются лишь те раскраски, которые не могут быть совмещены вращением куба?

5. Сколькими различными способами можно из 30 рабочих создать 3 бригады по 10 человек в каждой?

6. Сколькими различными способами можно выбрать 6 одинаковых или различных пирожных в кондитерской, где имеется 11 различных сортов пирожных?

---

[1]) Можно доказать, что меньший из отрезков MA и MB является самым коротким из *всех* отрезков, соединяющих точку M со всевозможными точками сферы Σ.

7. Комиссия состоит из 11 человек. Материалы, над которыми работает комиссия, хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена комиссии для того, чтобы доступ к сейфу был возможен, когда соберется большинство членов комиссии, но не был возможен, если соберется лишь меньше половины ее членов?

8. Числа от 1 до 1000 выписаны подряд по кругу. Начиная с первого, вычеркивается каждое 15-е число (т. е. числа 1, 16, 31 и т. д.), причем при повторных оборотах учитываются также и уже зачеркнутые числа. Вычеркивание продолжается до тех пор, пока не окажется, что все вычеркиваемые числа уже были зачеркнуты ранее. Сколько чисел останутся незачеркнутыми?

9. Все числа от 1 до 10 000 000 000 выписаны подряд. Каких чисел среди них будет больше — таких, в записи которых встречается цифра 1, или таких, в записи которых 1 не встречается?

10. Все целые числа от 1 до 222 222 222 выписаны подряд. Сколько раз встречается в записи этих чисел цифра 0?

2. Разложение чисел в произведение сомножителей и на сумму слагаемых

При решении некоторых из последующих задач оказываются полезными следующие обозначения.

Знаком $[x]$ (читается «целая часть x») обозначается наибольшее из целых чисел, не превосходящих x. Так, например,

$$\left[\frac{3}{2}\right]=1, \quad [10{,}85]=10, \quad [5]=5, \quad [-8{,}2]=-9 \text{ и т. д.}$$

(отметим, впрочем, что нам знак $[x]$ будет нужен только в применении к положительным числам x).

Знаком (x) (читается «ближайшее целое к x») обозначается целое число, ближайшее к числу x. Так, например,

$$(5{,}4)=5, \quad (8{,}73)=9, \quad (6)=6, \quad (-2{,}8)=-3$$

и т. д.

Ясно, что (x) будет равно $[x]$ или $[x]+1$ в зависимости от того, будет ли разность $x-[x]$ меньше или больше половины. В случае, когда $x-[x]=\frac{1}{2}$, за (x) по смыслу можно принять и $[x]$ и $[x]+1$; в этом случае уславливаются считать, что $(x)=[x]$ (заметим, впрочем, что у нас знак (x) будет употребляться лишь в случаях, когда $x-[x]\neq\frac{1}{2}$, так что не будет возникать никаких сомнений относительно того, считать ли (x) равным $[x]$ или $[x]+1$).

Во всех дальнейших задачах, в условии которых упоминается число n, это число считается целым положительным.

11. а) Сколько существует целых чисел, меньших 1000, не делящихся ни на 5, ни на 7?

б) Сколько из этих чисел не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7?

12.* Сколько имеется целых чисел, меньших числа 56 700 000 и взаимно простых с ним?

13. Сколько существует целых положительных чисел x, меньших 10 000, для которых разность 2^x-x^2 не делится на 7?

14. Сколько существует различных пар целых чисел x, y, заключенных между 1 и 1000 и таких, что x^2+y^2 делится на 49?

15.* Сколькими способами можно разложить миллион на три множителя? Разложения, отличающиеся лишь порядком множителей, считаются совпадающими.

16.* Сколько различных делителей имеет число 86 400 000 (включая сюда единицу и само число 86 400 000)? Найдите сумму всех этих делителей.

17. Сколько существует различных пар целых чисел A, B, для которых наименьшее общее кратное равно 59 400 000?

18. Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1+x^5+x^7)^{20}.$$

19. Сколькими способами можно разменять 20 коп. на монеты достоинством в 5 коп., 2 коп. и 1 коп.?

20. Сколькими способами можно составить n копеек из монет достоинством в 1 коп. и 2 коп.?

*21***.* Сколькими способами можно составить n копеек из монет:

а) достоинством в 1 коп., 2 коп. и 3 коп.?

б) достоинством в 1 коп., 2 коп. и 5 коп.?

*22***.* Сколькими способами можно составить рубль из монет достоинством в 1, 2, 5, 10, 20 и 50 коп.?

23. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы двух целых положительных слагаемых, если представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считать одинаковыми?

24. Сколько решений в целых числах имеет неравенство

$$|x|+|y|<100?$$

Здесь при $x \neq y$ решения x, y и y, x следует считать различными.

25. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы трех целых положительных слагаемых, если представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать за различные.

*26***.* Сколькими способами можно представить число n в виде суммы трех целых положительных слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считать одинаковыми?

*27**.* Сколько существует целых положительных решений уравнения

$$x+y+z=n,$$

удовлетворяющих неравенствам

$$x \leqslant y+z, \quad y \leqslant x+z, \quad z \leqslant x+y?$$

*28***. Сколько существует различных треугольников периметра n, длины всех сторон которых выражаются целыми числами?

29*. а) Сколько существует различных целых положительных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n?$$

б) Сколько существует целых неотрицательных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n?$$

Примечание. Частным случаем задачи 29а) (отвечающим $m = 3$) является задача 25.

В заключение настоящего цикла задач приведем несколько общих теорем, касающихся разбиения чисел на слагаемые. Первые три из них принадлежат крупнейшему математику XVIII в., члену Российской академии наук Леонарду Эйлеру (1707—1783), получившему очень много важных результатов в самых разнообразных областях математики[1]. Ряд аналогичных теорем о разбиениях чисел на слагаемые (включающий и теоремы, составляющие содержание задач 30а), б) и 31а)) содержится в гл. XVI замечательной книги Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых», ОНТИ, М —Л., 1936. Эта книга довольно трудна, но не предполагает у читателя предварительных знаний, выходящих за пределы программы средней школы, так что чтение ее доступно достаточно настойчивому школьнику. Эйлер доказывает свои теоремы при помощи очень интересного общего метода («метод производящих функций»); эти доказательства отличны от более элементарных доказательств, приведенных в настоящей книге в качестве решений задач 30 и 31.

В задачах 30 и 31 представления числа в виде суммы слагаемых, отличающихся только порядком, считаются одинаковыми.

---

[1] Некоторые результаты Эйлера содержатся в задачах 51б), 143, 162.

30*. а) Доказать, что число представлений числа n в виде суммы m целых положительных одинаковых или различных слагаемых равно числу представлений числа $n-m$ в виде суммы слагаемых, принимающих значения $1, 2, \ldots, m$.

Так, например, число 8 может быть представлено в виде суммы трех слагаемых следующими пятью способами:

$$1+1+6,\quad 1+2+5,\quad 1+3+4,$$
$$2+2+4,\quad 2+3+3.$$

Существует также ровно пять представлений числа $5=8-3$ в виде суммы слагаемых, принимающих значения 1, 2 и 3, а именно:

$$1+1+1+1+1,\quad 1+1+1+2,$$
$$1+1+3,\quad 1+2+2,\quad 2+3.$$

б) Доказать, что число представлений числа n в виде суммы m различных целых положительных слагаемых равно числу представлений числа

$$n-\frac{m(m+1)}{2}$$

в виде суммы слагаемых, принимающих значения $1, 2, \ldots, m$.

Так, например, число 10 может быть представлено в виде суммы трех различных слагаемых следующими четырьмя способами:

$$1+2+7,\quad 1+3+6,\quad 1+4+5,\quad 2+3+5.$$

Существует также ровно четыре представления числа

$$4=10-\frac{3\cdot 4}{2}$$

в виде суммы слагаемых, принимающих значения 1, 2, и 3:

$$1+1+1+1,\quad 1+1+2,\quad 1+3,\quad 2+2.$$

Из теорем задач 30а) и б) следует, что *число представлений числа n в виде суммы m одинаковых или различных слагаемых равно числу представлений $n+\frac{m(m-1)}{2}$ в виде суммы m различных слагаемых* (оба эти числа равны числу представлений $n-m$ в виде суммы слагаемых, принимающих значения $1, 2, \ldots, m$).

31*. а) Доказать, что число представлений числа n в виде суммы различных целых положительных слагаемых равно числу представлений этого же числа в виде суммы одинаковых или различных целых положительных нечетных слагаемых.

Так, например, число 6 можно четырьмя способами представить в виде суммы не равных между собой слагаемых:

$$6,\ 1+5,\quad 2+4,\quad 1+2+3.$$

Столькими же способами можно представить число 6 в виде суммы нечетных равных или неравных слагаемых:

$$1+5,\ 3+3,\ 1+1+1+3,\ 1+1+1+1+1+1.$$

б) Доказать, что число представлений числа n в виде суммы целых положительных слагаемых, ни одно из которых не повторяется чаще чем $k-1$ раз, равно числу представлений того же числа в виде суммы слагаемых, ни одно из которых не делится на k.

Так, например, число 6 можно семью способами представить в виде суммы слагаемых, ни одно из которых не повторяется более чем дважды:

$$6,\quad 3+3,\quad 4+2,\quad 5+1,\quad 3+2+1,$$
$$2+2+1+1,\quad 4+1+1.$$

Столькими же способами можно представить число 6 в виде суммы слагаемых, не делящихся на 3:

$$5+1,\quad 4+2,\quad 4+1+1,$$
$$2+2+2,\quad 2+2+1+1,$$
$$2+1+1+1+1,\quad 1+1+1+1+1+1.$$

Отметим еще без доказательства следующие предложения, аналогичные теоремам задач 31а) и б) (из которых, очевидно, первая есть частный случай второй):

Число представлений числа n в виде суммы целых положительных слагаемых, в которой каждое число a встречается не чаще, чем $a-1$ раз (соответственно — *не чаще, чем $a^{k-1}-1$ раз*), *равно числу представлений того же числа в виде суммы слагае-*

мых, ни одно из которых не является полным квадратом (соответственно *k-й степенью*) *целого числа.*

Так, например, имеется восемь представлений числа 10 в виде суммы слагаемых, в которой 1 вовсе не встречается, 2 входит не более, чем один раз, 3 — не более, чем два раза, 4 — не более, чем три раза, и т. д.:

$$10,\quad 8+2,\quad 7+3,\quad 6+4,$$
$$5+5,\quad 5+3+2,\quad 4+4+2,\quad 4+3+3,$$

и столько же представлений этого числа в виде суммы слагаемых, среди которых отсутствуют 1 и 4 (квадраты):

$$10,\quad 8+2,\quad 7+3,\quad 6+2+2,\quad 5+5,$$
$$5+3+2,\quad 3+3+2+2,\quad 2+2+2+2+2.$$

3. Комбинаторные задачи на шахматной доске

Задачи данного цикла касаются различных расположений шахматных фигур на доске. При этом наряду с обычной шахматной доской, состоящей из 8 горизонтальных рядов клеток («горизонталей» доски) и 8 вертикальных рядов («вертикалей»), т. е. доски, содержащей 64 клетки («поля» доски), мы будем рассматривать также и шахматную доску из n^2 клеток, содержащую n горизонталей и n вертикалей. Для понимания этих задач нужно знать, что:

а) шахматная ладья держит под угрозой все поля доски, расположенные с этой ладьей на одной горизонтали или на одной вертикали[1]);

б) слон держит под угрозой все поля доски, расположенные с этим слоном на одной диагонали[1]);

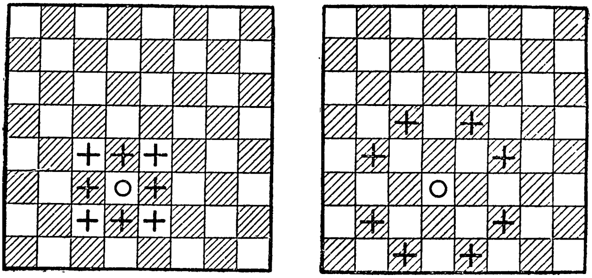
в) ферзь держит под угрозой все поля доски, расположенные с этим ферзем на одной горизонтали, одной вертикали или одной диагонали[1]);

---

[1]) Согласно сказанному мы причисляем к числу полей, которые держит под угрозой ладья, слон или ферзь, также и поле, занятое этой фигурой. В шахматной литературе принято занятое фигурой поле не причислять к числу находящихся под угрозой. При таком понимании в условиях задач 32б), 33б), 34б) и 36 выражение «все поля доски» пришлось бы заменить на «все свободные от фигур поля доски» (ср. с условием задачи 38).

г) король держит под угрозой поля доски, соседние с тем полем, на котором он стоит (см. черт. 1, *а*, где крестиками отмечены все поля, которые держит под угрозой король, стоящий на поле, отмеченном кружком);

д) конь держит под угрозой поля доски, расположенные на пересечении горизонтали, номер которой отличается от



а) *б)*

Черт. 1.

номера занятой конем горизонтали на 1 или на 2, и вертикали, номер которой отличается от номера занятой конем вертикали соответственно на 2 или на 1 (см. черт. 1, *б*, где крестиками отмечены все поля, которые держит под угрозой конь, стоящий на поле, отмеченном кружком).

Никакие другие сведения, относящиеся к шахматной игре (и даже умение играть в шахматы), не нужны для понимания и для решения этих задач.

32. а) Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске из n^2 клеток так, чтобы никакие две ладьи не угрожали друг другу? Сколькими различными способами можно это сделать?

б) Какое наименьшее число ладей можно расставить на шахматной доске из n^2 клеток так, чтобы эти ладьи держали под угрозой все поля доски? Сколькими различными способами это можно сделать?

33. а) Какое наибольшее число слонов можно расставить на обычной шахматной доске (в 64 клетки) так, чтобы никакие два слона не угрожали друг другу? Решить этот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

б) Какое наименьшее число слонов можно расставить на шахматной доске в 64 клетки так, чтобы они держали под угрозой все поля доски? Решить тот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

34. Доказать, что при четном n являются полными квадратами:

а) число различных расположений на шахматной доске из n^2 клеток наибольшего возможного числа слонов, никакие два из которых не угрожают друг другу;

б) число различных расположений на шахматной доске из n^2 клеток наименьшего возможного числа слонов, держащих под угрозой все поля доски.

35.* а) Доказать, что если на шахматной доске из n клеток расположено наибольшее возможное число слонов так что никакие два из этих слонов не угрожают друг другу, то все слоны обязательно размещаются на крайних полях доски.

б)** Определить число различных расположений на доске из n^2 клеток наибольшего возможного числа слонов, никакие два из которых не угрожают друг другу.

36.* а) Определить число различных таких расположений слонов на шахматной доске из 64 клеток, что эти слоны держат под угрозой все поля доски, а число слонов — наименьшее возможное.

б) Тот же вопрос для шахматной доски из 100 клеток.

в) Тот же вопрос для шахматной доски из 81 клетки.

г) Тот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

37. а) Какое наибольшее число королей можно расставить на шахматной доске из 64 клеток так, чтобы никакие два короля не угрожали друг другу?

б) Тот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

38. а) Какое наименьшее число королей можно расставить на шахматной доске из 64 клеток так, чтобы эти короли держали под угрозой все свободные от фигур поля доски?

б) Тот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

39. а) Какое наибольшее число ферзей можно расставить на шахматной доске из 64 клеток так, чтобы никакие два ферзя не угрожали друг другу?

б)*** Тот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

40. а) Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске из 64 клеток так, чтобы никакие два коня не угрожали друг другу?

б) ** Определить число различных расположений наибольшего возможного числа коней, никакие два из которых не угрожают друг другу.

Некоторые другие комбинаторные задачи, связанные с расположением шахматных фигур, можно найти в специальной книжке Л. Я. Окунева «Комбинаторные задачи на шахматной доске», М.—Л., ОНТИ, 1935.

4. Геометрические задачи по комбинаторике

41. а) Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с n точками, расположенными на боковой стороне, противоположной этой вершине. На сколько частей делят треугольник эти прямые?

б) Каждая из трех вершин треугольника соединена прямыми с n точками, расположенными на противоположной стороне треугольника. На сколько частей делят эти прямые треугольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

*42**. Каково наибольшее число частей, на которые могут разбить плоскость:

а) n прямых?

б) n окружностей?

*43***. Каково наибольшее число частей, на которые могут разделить пространство:

а) n плоскостей?

б) n сфер?

*44**. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

*45**. На сколько частей делят выпуклый n-угольник его диагонали, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

46. а) Сколько различных по величине или по расположению прямоугольников, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске в 64 клетки?

б) Тот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

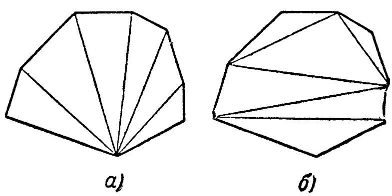
47. а) Сколько различных по величине или по расположению квадратов, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске в 64 клетки?

б) Тот же вопрос для шахматной доски из n^2 клеток.

48*. Никакие три диагонали некоторого выпуклого n-угольника не пересекаются в одной точке. Сколько треугольников, различных по величине или по расположению, можно начертить так, чтобы все их стороны были расположены на сторонах или на диагоналях этого n-угольника?

49**. Задача Кэли[1]). Сколько существует выпуклых k-угольников, все вершины которых совпадают с вершинами данного выпуклого n-угольника, а все стороны являются его диагоналями?

50. Выпуклый n-угольник может быть многими различными способами разбит на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри n-угольника (см. черт. 2, где указаны два способа разбиения восьмиугольника).



Черт. 2.

а) Докажите, что число треугольников, получающихся при таком разбиении, не зависит от способа разбиения, и найдите это число.

б) Докажите, что число диагоналей, участвующих в таком разбиении, не зависит от способа разбиения, и найдите это число.

---

[1]) Артур Кэли (1821—1895)—известный английский математик.

51*. а) Сколькими различными способами выпуклый восьмиугольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри восьмиугольника?

б)*** Задача Эйлера. Сколькими способами выпуклый n-угольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри n-угольника?

52*. а) На окружности нанесено 20 точек. Сколькими различными способами можно попарно соединить эти точки десятью хордами, не пересекающимися внутри окружности?

б)*** На окружности нанесено $2n$ точек. Сколькими различными способами можно попарно соединить эти точки n хордами, не пересекающимися внутри окружности?

В другой связи задачи 51б) и 52б) будут повторены ниже (см. задачу 82 а)). Там же будут приведены некоторые родственные задачи (задачи 82б) и в); более общие результаты см. в примечании в конце решения задачи 82в)).

---

53. а) Круг разделен на p равных секторов, где p — простое число. Сколькими различными способами можно раскрасить эти p секторов n красками, если допускается окраска нескольких (и даже всех) секторов одной и той же краской и две раскраски считаются различными лишь в том случае, если их нельзя совместить вращением круга?

б) Используйте результат задачи а) для доказательства следующей теоремы Ферма[1]: если p — простое число, то $n^p - n$ при любом n делится на p.

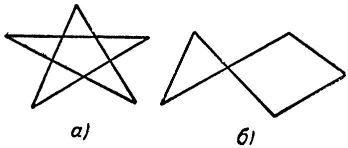
Другие доказательства теоремы Ферма см., например, в книгах Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1 («Библиотека математического кружка», вып. 1) и Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы («Библиотека математического кружка», вып. 6).

54*. а) Окружность разделена на p равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_p$ (p — нечетное простое число). Сколько су-

---

[1]) Пьер Ферма (1601—1665) — выдающийся французский математик, один из создателей аналитической геометрии; много занимался теорией чисел.

ществует различных звездчатых p-угольников, имеющих вершинами эти точки, если различными считаются лишь те p-угольники, которые нельзя совместить друг с другом вра-



Черт. 3.

щением окружности? (Звездчатым многоугольником называется многоугольник, отдельные стороны которого пересекаются между собой; см., например, многоугольники, изображенные на черт. 3.)

б) Используйте результат задачи а) для доказательства следующей теоремы Вильсона[1]): если p — простое число, то $(p-1)!+1$ делится на p.

Другие доказательства теоремы Вильсона см. в цитированных выше книгах Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома и Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского.

5. Задачи на биномиальные коэффициенты

Ряд последующих задач будет посвящен некоторым свойствам чисел

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,. \tag{*}$$

В курсе алгебры доказывается, что эти числа являются коэффициентами разложения

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

(теорема о биноме Ньютона). В связи с этим числа C_n^k называются биномиальными коэффициентами. Пользуясь теоремой о биноме Ньютона, можно доказать ряд соотношений, связывающих коэффициенты C_n^k; непосредственное доказательство этих соотношений при помощи формулы (*) обычно оказывается значительно более сложным, чем доказательство, использующее бином Ньютона.

---

[1]) Дж. Вильсон (1741—1793) — английский математик.

55. Примените теорему о биноме Ньютона к нахождению величины следующих сумм:

а) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n$,
б) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n$,
в) $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n$,
г) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$,
д) $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n$,
е) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^mC_n^m$,
ж) $C_n^k+C_{n+1}^k+C_{n+2}^k+\ldots+C_{n+m}^k$,
з) $C_{2n}^0-C_{2n-1}^1+C_{2n-2}^2-\ldots+(-1)^nC_n^n$,
и) $C_{2n}^n+2C_{2n-1}^n+4C_{2n-2}^n+\ldots+2^nC_n^n$,
к) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2$,
л) $(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2-\ldots+(-1)^n(C_n^n)^2$,
м) $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+C_n^2C_m^{k-2}+\ldots+C_n^kC_m^0$.

Некоторые из сумм, включенных в настоящую задачу, в другой связи встретятся ниже, иногда в более общем виде. Так, сумма задачи м) иным путем будет подсчитана в решении задач 58а), 59в) и 70б). Результат задачи д) будет значительно обобщен в решении задачи 79в). Сумма задачи и) иным путем будет определена в решении задачи 71б).

56. Примените теорему о биноме Ньютона к нахождению величин следующих сумм (многоточие в конце этих сумм означает, что ряд продолжается до тех пор, пока члены его не теряют смысла, т. е. пока верхний индекс не станет больше нижнего):

а) $C_n^0+C_n^2+C_n^4+C_n^6+\ldots$,
б) $C_n^1+C_n^3+C_n^5+C_n^7+\ldots$,
в) $C_n^0+C_n^4+C_n^8+C_n^{12}+\ldots$,
г) $C_n^1+C_n^5+C_n^9+C_n^{13}+\ldots$,
д) $C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+C_n^{14}+\ldots$,
е) $C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+C_n^{15}+\ldots$,
ж)* $C_n^0+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\ldots$,
з)* $C_n^1+C_n^4+C_n^7+C_n^{10}+\ldots$,
и)* $C_n^2+C_n^5+C_n^8+C_n^{11}+\ldots$

57. Факториальная биномиальная теорема. Введем обозначение:

$$a(a-h)(a-2h)\ldots[a-(n-1)h]=a^{n|h},$$

так что, в частности, $a^{n|0}=a^n$, $a^{1|h}=a$. Докажите, что в этих обозначениях имеет место равенство

$$(a+b)^{n|h}=a^{n|h}+C_n^1a^{n-1|h}b+C_n^2a^{n-2|h}b^{2|h}+\ldots+b^{n|h}.$$

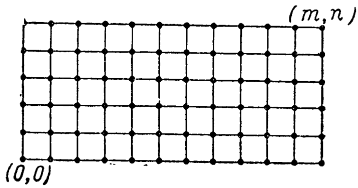
Теорема, выражаемая последним равенством, называется факториальной биномиальной теоремой. Ясно, что она содержит в качестве частного случая (при $h=0$) обыкновенную теорему о биноме Ньютона.

58. Примените факториальную биномиальную теорему к нахождению величины следующих сумм:

а) $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+C_n^2C_m^{k-2}+\ldots+C_n^kC_m^0$;

б) $C_m^0C_n^k-C_{m+1}^1C_n^{k-1}+C_{m+2}^2C_n^{k-2}-\ldots+(-1)^kC_{m+k}^kC_n^0$.

Иногда при выводе соотношений, связывающих биномиальные коэффициенты, очень полезно воспользоваться тем, что C_n^k равно *числу сочетаний из n элементов по k*. Для того чтобы придать бо́льшую наглядность подобным выводам, удобно воспользоваться следующей геометрической схемой. Предположим, что мы живем в городе, улицы которого идут по двум взаимно перпендикулярным направлениям (см. черт 4, где все улицы нашего города изображены в виде горизонтальных и вертикальных прямых). Будем нумеровать параллельные между собой улицы цифрами 0, 1, 2, 3 и т. д., а перекрестки будем обозначать парой «координат» (m, n), где m есть номер «вертикальной» улицы, проходящей через этот перекресток, а n — номер «горизонтальной» улицы (на черт. 4 перекрестки обозначены точками). Пусть теперь нам надо пройти из дома, находящегося на перекрестке (0, 0), в дом,



Черт. 4.

находящийся на перекрестке (m, n). В таком случае у нас будет C_{m+n}^{n} совершенно равноправных кратчайших путей, соединяющих эти два дома. Действительно, каждый из этих кратчайших путей содержит $m+n$ кварталов и из них — n кварталов «вертикальных». Эти n «вертикальных» кварталов можно разместить среди всех $m+n$ кварталов C_{m+n}^{n} способами. Разбив далее совокупность кратчайших путей на ряд классов по каким-либо признакам, мы можем при помощи этой схемы получить некоторые интересные соотношения, связывающие биномиальные коэффициенты.

59. а) Используйте описанную геометрическую схему для доказательства соотношения

$$C_{n}^{m}+C_{n-1}^{m-1}+C_{n-2}^{m-2}+\ldots+C_{n-m}^{0}=C_{n+1}^{m}.$$

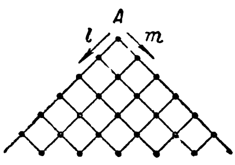
б) Докажите, что имеет место следующее обобщение предыдущего соотношения:

$$C_{n}^{m}C_{k}^{0}+C_{n-1}^{m-1}C_{k+1}^{1}+C_{n-2}^{m-2}C_{k+2}^{2}+\ldots+C_{n-m}^{0}C_{k+m}^{m}=C_{n+k+1}^{m}.$$

в) Найдите, чему равна сумма

$$C_{n}^{0}C_{m}^{k}+C_{n}^{1}C_{m}^{k-1}+C_{n}^{2}C_{m}^{k-2}+\ldots+C_{n}^{k}C_{m}^{0}.$$

60. а) Имеется сеть дорог (черт. 5). Из точки A выходят 2^{1000} человек. Половина идет по направлению l, половина — по направлению m. Дойдя до первого перекрестка, каждая группа разделяется: половина идет по направлению l, половина — по направлению m. Такое же разделение происходит на каждом перекрестке. Сколько людей придет в три крайних слева перекрестка B_1, B_2 и B_3 тысячного ряда перекрестков?



Черт. 5.

б) Решить эту задачу для всех перекрестков тысячного ряда.

Число задач на соотношения между биномиальными коэффициентами можно значительно увеличить (см., например, § 6 книги В. А. Кречмара «Задачник по алгебре», М.—Л., Гостехиздат, 1950). Ряд подобных задач смогут самостоятельно составить те из читателей, кто внимательно перерешал все задачи этого цикла.

Другие свойства биномиальных коэффициентов приведены в книгах Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского и Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, указанных на стр. 24.

Рассмотрим следующий числовой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

В верхней (нулевой) строке этого треугольника стоит одна единица, а числа в последующих строках выписываются по следующему закону: каждое число является суммой трех ближайших к нему чисел предыдущей строки (т. е. непосредственно над ним стоящего числа и двух соседей этого последнего); в том случае, когда некоторые из этих трех чисел отсутствуют (так будет для двух крайних чисел с обеих сторон каждой строки), соответствующие слагаемые считаются равными нулю. В n-й строке этого числового треугольника будет стоять $2n+1$ чисел; эти числа мы обозначим через B_n^0, B_n^1, B_n^2, ..., B_n^{2n}.

61*. Доказать, что

а) $B_n^0+B_n^1+B_n^2+\ldots+B_n^{2n}=3^n$;

б) $B_n^0-B_n^1+B_n^2-\ldots+B_n^{2n}=1$;

в) $(B_n^0)^2+(B_n^1)^2+(B_n^2)^2+\ldots+(B_n^{2n})^2=B_{2n}^{2n}$.

Решив задачу 61, каждый из читателей сможет составить еще ряд соотношений, связывающих числа B_n^k.

6. Задачи на подсчет вероятностей

Очень важным классом комбинаторных задач являются задачи на подсчет вероятностей. К подобным задачам мы сейчас и перейдем; предварительно, однако, нам придется изложить некоторые теоретические сведения, необходимые для понимания дальнейшего.

На практике очень часто приходится сталкиваться с опытами (иначе — испытаниями, наблюдениями, процессами), могущими давать различные результаты в зависимости от обстоятельств, которые мы либо не знаем, либо не умеем учесть. Так, например, при бросании игральной кости (кубика, грани которого занумерованы цифрами от 1 до 6) мы не можем заранее знать, какая из граней окажется сверху, так как это зависит от очень многих неизвестных нам обстоятельств (детали движения руки, кидающей кость, положение игральной кости в момент броска, особенности поверхности, на которую кость падает, и т. д.). Нельзя также предсказать, на какую из облигаций выпадет выигрыш в предстоящем займе (номера выигравших облигаций определяются путем извлечения нескольких бумажек с номерами из сосуда, в котором лежат тщательно перемешанные бумажки с номерами всех облигаций). При измерении любой физической величины мы всегда получаем результат с некоторой ошибкой, зависящей и от человека, производящего измерения, и от особенностей измерительного прибора; при массовом производстве каких-либо предметов отдельные предметы всегда несколько отличаются друг от друга (например, при производстве электрических лампочек продолжительность горения лампочки до момента перегорания различна для разных лампочек); при стрельбе по некоторой мишени пуля далеко не всегда попадает точно в центр мишени — во всех этих случаях мы также не можем заранее предсказать результат опыта (т. е. сказать заранее, какая будет ошибка в данном измерении; насколько быстро перегорит данная электрическая лампочка; насколько отклонится от центра мишени пуля). Число подобных примеров можно было бы, конечно, значительно увеличить.

Применение математики к изучению подобного рода явлений опирается на то, что во многих случаях *вероятность появления того или иного результата опыта может быть оценена количественно*, т. е. может быть охарактеризована некоторым числом p. Существование определенной вероятности p результата опыта проявляется в том, что при многократном повторении опыта в одних и тех же условиях частота появления рассматриваемого результата (т. е. отношение числа опытов, в которых этот результат наблюдался, к общему числу произведенных опытов) остается почти все время примерно одинаковой, близкой к некоторому постоянному числу p. Так, например, известно, что частота попадания в цель для данного стрелка в данных условиях стрельбы, как правило, почти всегда бывает примерно одинаковой, лишь изредка уклоняясь сколько-нибудь значительно от некоторой средней цифры (с течением времени эта средняя цифра может, разумеется, меняться, — в таких случаях говорят, что стрелок совершенствуется в стрельбе, или, наоборот, разучивается стрелять). Также и частота выпадения шестерки на игральной кости или процент бракованных изделий при данных условиях производства обыкновенно мало изменяются при массовом повторении соответствующих «опытов» (бросание кости, изготовление данных изделий). Исходя из этого, заключают, что степень возможности попадания в цель при стрельбе, выпадения шестерки при бросании кости, появления бракованного изделия в ряду вновь изготовленных и т. д. может быть охарактеризована некоторым числом. Это число называют вероятностью рассматриваемого события; к нему и будет близка средняя частота соответствующего результата в длинном ряду «опытов». Аналогично определяют вероятность и в ряде других вопросов, относящихся к самым разнообразным областям техники, механики, физики.

Из самого определения вероятности вытекает, что это есть положительное число, не превосходящее единицу. Вероятность достоверных событий принимают равной единице; так, можно сказать, что на следующий день после субботы будет воскресенье «с вероятностью единица». Вероятность невозможных событий принимают равной нулю; так, равна нулю вероятность того, что на следующий день после субботы будет понедельник.

Изучение задач, связанных с рассмотрением вероятностей различных событий, составляет содержание отдельной математической дисциплины — теории вероятностей. К сожалению, здесь невозможно дать представление (хотя бы даже в самых общих чертах) о содержании этой науки: это потребовало бы значительного увеличения объема книги, а кроме того, подавляющая часть задач из теории вероятностей требует для своего решения применения средств, выходящих за пределы элементарной математики (см., впрочем, литературу, указанную на стр. 51). Мы здесь остановимся только на самом простом вопросе, связанном с вероятностями,— вопросе о вычислении вероятности того или иного результата опыта.

Выше уже указывалось, что вероятность можно приближенно оценить по результатам длинной серии опытов. Естественно, однако, что само существование вероятности нисколько не зависит от того, производим ли мы опыты или нет. Так нельзя ли вычислять вероятности, не производя никаких испытаний? Оказывается, что в ряде случаев это можно сделать, исходя непосредственно из характера рассматриваемого опыта. Особенно часто удается непосредственный подсчет вероятности, если объекты опыта обладают определенной симметрией; в этих случаях вычисление вероятности обычно связано с комбинаторными рассмотрениями, часто довольно сложными и очень красивыми. Только такие примеры и будут разбираться в дальнейшем. Заметим еще, что в практических применениях теории вероятностей комбинаторные рассуждения чаще всего сочетаются с некоторыми рассуждениями неэлементарного характера; стремлением дать здесь только чисто комбинаторную часть задачи объясняется то, что многие последующие примеры носят несколько искусственный, зачастую даже «игрушечный» характер.

А. Случай конечного числа возможных исходов испытания

Рассмотрим в качестве первого примера простейший опыт, могущий давать тот или иной результат в зависимости от случая,— бросание игральной кости. Этот опыт может иметь шесть различных исходов: сверху может оказаться любая из шести граней кости. Исходя из симметрии кости, естественно думать, что в длинном ряду бросаний каждая грань будет оказываться сверху примерно столь же часто, как и любая другая, т. е. что каждая грань будет выпадать примерно в одной шестой части всех бросаний. И опыт действительно подтверждает это предположение (если, конечно, кость будет «правильной», т. е. будет иметь точно форму куба, и будет сделана из однородного материала). Таким образом, вероятность выпадения каждой грани «правильной» кости равна $^1/_6$.

Подобным же образом при бросании монеты выпадение сверху «герба» и «решетки» происходит примерно одинаково часто — это обстоятельство также можно было бы предвидеть заранее, исходя из симметрии монеты. В случае многократного повторения извлечения, не глядя, одного шара из урны, в которой лежат тщательно перемешанные 100 одинаковых шаров, каждый шар будет извлекаться примерно столь же часто, как и любой другой (т. е. примерно в одной сотой части всех извлечений),— здесь тоже объяснением может служить «симметричность» 100 различных результатов опыта.

Итак, мы видим, что в ряде случаев в силу определенной симметрии, имеющейся в условиях опыта, можно утверждать, что всевозможные исходы опыта будут повторяться примерно одинаково часто, т. е. что все эти исходы будут **равновероятными**. Если общее число таких равновероятных исходов равно n, то вероятность каждого исхода в отдельности будет характеризоваться числом $^1/_n$; этот вывод можно сделать, не производя длинного ряда испытаний.

Рассмотрим теперь немного более сложную задачу.

Пусть мы имеем урну, в которой лежат $n+m$ перемешанных шаров, отличающихся только цветом: n белых и m черных. Из урны, не глядя, извлекается один шар; какова вероятность того, что этот шар будет белым?

Здесь $n+m$ различных исходов опыта также будут равновероятными и каждый из них будет иметь вероятность $\frac{1}{n+m}$. Но интересующее нас событие — появление белого шара — будет иметь место при n исходах из этих $n+m$ равновероятных исходов. Отсюда ясно, что в длинном ряду повторений опыта это событие будет происходить примерно в $\frac{n}{n+m}$-й части всех извлечений: ведь извлечение каждого отдельного белого шара будет происходить примерно в $\frac{1}{n+m}$-й части всех опытов. Итак, вероятность извлечения белого шара в рассматриваемом опыте мы должны характеризовать числом $\frac{n}{n+m}$.

Ниже мы приводим ряд задач, относящихся к случаям, вполне аналогичным этому последнему примеру. А именно, во всех этих случаях мы будем иметь дело с опытами, могущими привести к конечному числу равновероятных исходов. При наличии такого разделения возможных исходов на равновероятные случаи *вероятность любого события, определяемого результатом опыта, будет равна отношению числа исходов, при появлении которых это событие осуществляется, к общему числу равновероятных исходов.* Иначе, это еще формулируют так: *вероятность некоторого события равна отношению числа равновероятных исходов, благоприятных для данного события, к общему числу равновероятных исходов.*

Для понимания условий и для решения последующих задач (задачи 62—82) не требуется никаких знаний по теории вероятностей, кроме знания приведенного курсивом определения вероятности. Заметим, однако, что отыскание полного числа равновероятных событий, фигурирующих в этом определении, далеко не всегда так просто, как в разобранном случае с извлечением шара из урны: часто оно само по себе может представлять значительные трудности. Приведем здесь один также еще очень простой, но поучительный пример.

Пример. Какова вероятность того, что при двух бросаниях монеты оба раза сверху окажется герб?

Решение. В этом случае опыт состоит в том, что мы два раза подбрасываем монету и оба раза отмечаем, какая сторона монеты оказывается сверху. Этот опыт может привести к следующим трем исходам: или оба раза сверху окажется герб, или оба раза сверху окажется решетка, или же один раз сверху окажется герб и один раз решетка. Число благоприятных исходов здесь, очевидно, равно 1; поэтому можно было бы думать, что искомая вероятность равна $^1/_3$. Однако это заключение оказывается неверным: можно проверить, что в длинной серии пар бросаний монеты частота появления оба раза герба будет близкой к $^1/_4$, а не к $^1/_3$. Ошибка здесь произошла из-за того, что выделенные нами три исхода не были равновероятны: лишь первые два из них были равновероятны, но для того, чтобы утверждать, что третий исход равновероятен с первыми двумя, у нас нет никаких оснований (третий исход отвечает выпадению разных сторон монеты в первом и во втором бросании, а первые два — выпадению одинаковых сторон). И, действительно, опыт показывает, что третий из этих исходов появляется в два раза чаще, чем первые два.

Правильным рассуждением в этом случае будет следующее. При первом бросании монеты сверху может оказаться или герб или решетка; оба эти исхода, очевидно, равновероятны в силу симметрии монеты. При втором бросании также сверху может оказаться герб или решетка. Комбинируя два возможных исхода первого бросания с двумя возможными исходами второго бросания, мы получим всего четыре различных исхода, а именно: герб-герб, герб-решетка, решетка-герб, решетка-решетка. Эти четыре исхода уже будут равновероятны: каждый из них соответствует одному определенному исходу первого бросания и одному определенному исходу второго бросания, а то, о каких именно исходах отдельных бросаний идет речь, конечно, не существенно в силу полной равноправности обеих сторон монеты. Отсюда и следует, что искомая вероятность равна $^1/_4$; ранее получился неверный результат из-за того, что мы не различали, в каком порядке выпадут герб и решетка, и объединили два равновероятных исхода (герб-решетка и решетка-герб) в один, что нарушило равновероятность исходов.

Таким образом, вероятность того, что при двух бросаниях оба раза сверху окажется герб, равна квадрату вероятности выпадения герба при одном бросании $\left(\text{ибо } \frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$. Этот результат является частным случаем одного общего правила, называемого правилом умножения вероятностей. Вот в чем состоит это правило. Пусть имеется два события A и B, каждое из которых определяется исходом некоторого опыта. Предположим, что события A и B являются независимыми, т. е. что исход каждого из опытов нисколько не отражается на условиях второго (опыты могут производиться одновременно или же один вслед за другим, — это, разумеется, безразлично). Спрашивается, какова вероятность того, что произойдут оба события и A и B?

Для ответа на этот вопрос предположим, что первый опыт может иметь n_1 равновероятных исходов, m_1 из которых благоприятствуют событию A; второй опыт может иметь n_2 равновероятных исходов, m_2 из которых благоприятствуют событию B. В этом случае вероятность события A равна $\frac{m_1}{n_1}$, вероятность B равна $\frac{m_2}{n_2}$. Рассмотрим теперь сложный опыт, состоящий в том, что производятся оба наши опыта. Очевидно, что этот сложный опыт будет иметь $n_1 \cdot n_2$ равновероятных исходов, получающихся комбинированием n_1 исходов первого опыта с n_2 исходами второго опыта. Из этих $n_1 \cdot n_2$ равновероятных исходов событию, состоящему в том, что происходят и A и B, будут благоприятствовать $m_1 \cdot m_2$ исходов (эти $m_1 \cdot m_2$ исходов получаются комбинированием m_1 исходов, благоприятствующих A, с m_2 исходами, благоприятными для B). Следовательно, вероятность того, что произойдут оба события A и B, равна $\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$, т. е. равна произведению вероятностей событий A и B $\left(\text{ибо } \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}\right)$. Иными словами, *вероятность того, что произойдут два независимых между собой события, равна произведению вероятностей этих двух событий*; это и есть правило умножения вероятностей.

Правило умножения вероятностей может быть еще обобщено; в частности, его можно перенести на случай более чем двух событий и на тот случай, когда события не являются независимыми (см., например, решение задачи 63). Мы здесь, однако, не будем увлекаться выводами общих правил, а сразу перейдем к конкретным примерам вычисления вероятностей. Возможно, что после ознакомления с этими примерами читатель сам сможет сформулировать некоторые из таких правил; если же он захочет более подробно познакомиться с ними, то ему можно порекомендовать литературу, указанную на стр. 51.

62. В городе имеется 10 000 велосипедов со всевозможными номерами от 1 до 10 000. Какова вероятность того, что номер первого встретившегося велосипеда не будет содержать цифры 8?

63. а) Слово «ремонт» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с отдельными буквами тщательно перемешиваются, после чего наудачу вытаскиваются четыре из них и раскладываются в ряд друг за другом в порядке вытаскивания. Какова вероятность получить при этом слово «море»?

б) Аналогичная операция производится с буквами, составлявшими первоначально слово «папаха». Какова вероятность получить при этом слово «папа»?

64*. В урне лежат билеты с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Вытаскиваются наудачу 5 билетов и раскладываются в ряд один за другим в порядке вытаскивания. Какова вероятность того, что образовавшееся число будет делиться на 396?

65. Пусть вы забыли одну цифру нужного вам номера телефона и набираете ее наудачу. Какова вероятность того, что вам придется сделать не более двух вызовов?

66. Вероятность того, что день рождения некоторого человека придется на определенный месяц года, приближенно можно считать одинаковой для всех 12 месяцев. Какова вероятность того, что:

а) в данной компании из 12 человек все 12 дней рождения придутся на разные месяцы?

б) в данной компании из 6 человек все дни рождения придутся на какие-то два месяца?

67. В три вагона трамвая вошло девять пассажиров. Каждый пассажир выбирает вагон наудачу. Какова вероятность того, что:

а) в первый вагон сядет три человека?

б) в каждый вагон сядет по три человека?

в) в один из вагонов сядут четверо, в другой — трое и в третий — двое?

68. При играх на кубок СССР по футболу футбольные команды после отборочных соревнований разбиваются по жребию на две равные по числу команд группы. В каждой группе отдельно определяется победитель этой группы и оба победителя встречаются в финале кубка. Пусть общее число команд, прошедших отборочные соревнования, равно 20.

а) Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды попадут в разные группы?

б) Какова вероятность того, что четыре самые сильные команды попадут в одну группу? Что два года подряд четыре самые сильные команды будут попадать в одну группу?

в) Какова вероятность того, что четыре самые сильные команды попадут по две в разные группы?

69. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?

70. а) Из ящика, в котором лежат n белых и m черных шаров, наудачу извлекается k шаров. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров будет ровно r белых?

б) Примените результат задачи а) к нахождению величины суммы

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_n^k C_m^0.$$

Примечание. Другие способы нахождения этой суммы см. в решениях задач 55м), 58а), 59в).

71*. а) Задача Банаха[1]). Некий человек одновременно купил две коробки спичек и положил их в карман. После этого каждый раз, когда ему было нужно зажечь спичку, он доставал наудачу ту или иную коробку. Через

---

[1]) Стефан Банах (1892—1945) — известный польский математик.

некоторое время, вытащив одну из коробок, человек обнаружил, что она пуста. Какова вероятность того, что во второй коробке в этот момент находилось еще k спичек, если число спичек в неначатой коробке равно n?

б) Воспользовавшись результатом задачи а), найдите, чему равна сумма

$$C_{2n}^{n}+2C_{2n-1}^{n}+4C_{2n-2}^{n}+\ldots+2^{n}C_{n}^{n}.$$

Примечание. Другой способ нахождения этой суммы см. в решении задачи 55и).

72*. Два охотника A и B отправились на охоту за утками. Предположим, что каждый из них обычно попадает во встретившуюся ему утку столь же часто, как и не попадает. Охотнику A за время охоты встретилось 50 уток, а охотнику B — 51 утка. Какова вероятность того, что добыча охотника B превзойдет добычу охотника A?

73. а) Два охотника одновременно увидели лису и одновременно выстрелили в нее. Предположим, что каждый из этих охотников на таком расстоянии обычно в одном случае из трех попадает в лису и убивает ее. Какова вероятность того, что лиса будет убита?

б) Решить ту же задачу для случая трех охотников, считая, что меткость всех этих охотников такова же, как и в задаче а).

в) Решить ту же задачу для случая n охотников.

74. Охотник первый раз стреляет в убегающую от него лису с расстояния 100 *м*; пусть для него вероятность попасть с этого расстояния равна $^1/_2$ (т. е. с расстояния 100 *м* охотник столь же часто попадает в бегущую лису, как и не попадает). В случае промаха охотник перезаряжает ружье и стреляет снова, но за это время лиса успевает удалиться от него еще на 50 *м*. В случае вторичного промаха он снова перезаряжает ружье и стреляет третий (и последний) раз; при этом лиса удаляется еще на 50 *м*. Полагая вероятность попадания обратно пропорциональной квадрату расстояния, определить вероятность того, что охотнику удастся попасть в лису.

75.** Задача о четырех лгунах. Известно, что каждый из четырех человек A, B, C и D говорит правду лишь в одном случае из трех. Если A заявляет, что B отрицает, что C утверждает, что D солгал, то какова вероятность, что D на самом деле сказал правду?

Примечание. В задаче, естественно, предполагается, что C точно знал, сказал ли D правду или солгал, и что если A или B говорят неправду, то это означает, что B, соответственно C, утверждал противоположное тому, что A или B ему приписывают.

Эту задачу можно также сформулировать следующим образом. Пусть D пишет на бумаге знак «плюс» или «минус» и издали показывает C; C переписывает знак и показывает B; B переписывает знак и показывает A; наконец, A переписывает знак у B. Известно, что D пишет знак «плюс» лишь в одном случае из трех; далее для C, B и A вероятность не ошибиться при переписывании равна $^1/_3$ (т. е. правильно переписывают они лишь в одном случае из трех). Пусть переписанный A знак оказался знаком «плюс», какова вероятность, что и D написал знак «плюс» [1])?

Близкие вопросы играют значительную роль в некоторых технических вопросах; они связаны также с важным разделом современной теории вероятностей (так называемая теория цепей Маркова; см. примечание в конце решения задачи).

76. а) В некоторых сельских местностях России существовало когда-то следующее гадание. Девушка зажимает в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывает эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказываются связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж. Спрашивается, какова вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо?

б) Решить тот же вопрос для случая $2n$ травинок.

77*. а) В урне лежат тщательно перемешанные между собой $2n$ шаров: n белых и n черных. Какова вероятность того, что каждый из n человек, извлекающих, не глядя, из

---

[1]) Задачу 75 можно переформулировать так: «Если A заявляет, что B утверждает, что C утверждает, что D сказал правду, то какова вероятность, что это на самом деле было так». Другими словами, в условии задачи говорится, что A, ссылаясь на B и C, утверждает, что D сказал правду; в нашей новой формулировке это означает, что A в результате последовательного переписывания написал знак «плюс».

урны по паре шаров, вытащит шары разного цвета (извлеченные шары обратно в урну не возвращаются)?

б) В условиях предыдущей задачи какова вероятность того, что каждый из n человек вытащит шары одного цвета?

78*.** а) Некто написал n писем и запечатал их в конверты, не надписав предварительно адресов. После этого он уже не знал, в каком конверте лежит какое письмо, и поэтому n адресов на конвертах написал наудачу. Какова вероятность того, что хотя бы один из адресатов получит предназначенное для него письмо?

б) К какому пределу стремится вероятность задачи а) при $n \to \infty$?

79.** а) Поезд состоит из n вагонов. Каждый из k пассажиров выбирает вагон наудачу. Какова вероятность того, что в каждом вагоне окажется хотя бы один пассажир?

б) В условиях задачи а) какова вероятность того, что занятыми окажутся ровно r вагонов поезда?

в) Воспользовавшись результатом задачи а), найти величину суммы

$$1^k C_n^1 - 2^k C_n^2 + 3^k C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^k C_n^n,$$

где k есть целое положительное число, не превосходящее n.

Примечание. Задача 79б) равносильна следующей задаче, представляющей интерес для физики: поток из k частиц улавливается системой из n расположенных рядом счетчиков — специальных физических приборов, регистрирующих частицы. Каждая частица с одинаковой вероятностью попадает в любой из счетчиков. Какова вероятность того, что присутствие частиц будет отмечено ровно r счетчиками? Решение этой задачи, сформулированной, как здесь указано, было помещено в 1951 г. в одном серьезном физическом журнале.

Вычисление суммы задачи 79в) для частного случая $k=1$ составляет содержание помещенной ранее задачи 55д).

80.** 20 букв а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к; А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К выписаны на отдельных билетиках; эти билетики расположены вдоль окружности в случайном порядке, но так, чтобы большие буквы все время чередовались с малыми. Какова вероятность того, что никакие две одинаковые буквы (большая и малая) не окажутся рядом?

81*.** а) У билетной кассы стоят в очереди $n+m$ человек; n из них имеют пятерки, а остальные m — только десятки. Билет стоит 5 рублей. В начале продажи в кассе нет денег. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи?

б) Решить ту же задачу в предположении, что в начале продажи в кассе было p пятерок.

в) У билетной кассы стоят в очереди $n+m$ человек; n из них имеют рубли, а остальные m — только деньги трехрублевого достоинства. Билет стоит 1 рубль. В начале продажи в кассе нет денег. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи?

Примечание. Задачи 81а) — в), несмотря на их искусственные формулировки, представляют значительный интерес для практики; к такого рода схемам сводятся некоторые вопросы, существенные для физики и для теории статистического контроля продукции.

82*.** а) Выведите из результатов задачи 81а) новое решение задачи 51б) и 52б).

б) На окружности нанесено $3n$ точек. Сколькими различными способами можно разбить их на n троек так, чтобы стороны n вписанных треугольников, имеющих вершинами эти n троек точек, не пересекались между собой?

в) Сколькими различными способами можно разбить на четырехугольники выпуклый $2n$-угольник [1]), проводя диагонали, не пересекающиеся внутри $2n$-угольника?

Б. Случай бесконечного числа возможных исходов испытания

В предыдущих задачах все время использовалось определение вероятности некоторого события, как отношения числа благоприятных для этого события исходов испытания к общему числу равновероятных исходов. Существуют, однако, случаи, когда нет конечного числа равновероятных исходов испытания и конечного числа благоприятных исходов, и, тем не менее, понятию вероятности можно придать определенный смысл, позволяющий подсчитывать ее с помощью комбинатор-

[1]) Нетрудно видеть, что многоугольник с нечетным числом сторон вовсе нельзя разбить на четырехугольники так, как указано в задаче.

ных соображений. Так, например, нельзя говорить о **числе** целых положительных чисел — таких чисел существует бесконечно много. Однако вопрос о том, какова вероятность того, что выбранное наудачу число будет делиться на 5, представляется разумным: вероятно, каждый из читателей ответил бы, что эта вероятность равна $\frac{1}{5}$, хотя определения вероятности, пригодного для этого случая, и не было до сих пор дано.

Для того чтобы сформулировать такое определение, рассмотрим более общую задачу. Пусть имеется некоторая последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

и ставится вопрос о вероятности того, что число, выбранное наудачу из этой последовательности, будет обладать каким-то определенным свойством. Естественно понятию вероятности здесь придать следующий смысл. Рассмотрим прежде всего N первых членов нашей последовательности:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N.$$

Выпишем эти N чисел на N билетиках, билетики тщательно перемешаем и вытянем наудачу один из них. Этот опыт имеет N равновероятных исходов; если через $q(N)$ мы обозначим число тех из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$, которые обладают интересующим нас свойством, то вероятность того, что на вытянутом билетике окажется написанным число, обладающее этим свойством, будет равна $\frac{q(N)}{N}$. *Пусть при $N \to \infty$ отношение $\frac{q(N)}{N}$ стремится к определенному пределу; в таком случае этот предел и называется вероятностью того, что число, выбранное наудачу из всей последовательности, обладает требуемым свойством.*

В случае, когда последовательность состоит из всех целых положительных чисел, а свойство, о котором идет речь, есть делимость числа на 5, приведенное здесь определение приводит, разумеется, к напрашивающемуся ответу $\frac{1}{5}$. В самом деле, здесь, очевидно, $q(N) = \left[\frac{N}{5}\right]$, т. е. равно целой части числа $\frac{N}{5}$ (см. стр. 13). Но любое число N можно представить в виде $N=5q+r$, где $q=\left[\frac{N}{5}\right]$, а r есть остаток от деления N на 5, равный 0, 1, 2, 3 или 4. Отсюда следует, что

$$\frac{\left[\frac{N}{5}\right]}{N}=\frac{q}{5q+r}=\frac{\left(q+\frac{r}{5}\right)-\frac{r}{5}}{5q+r}=\frac{1}{5}-\frac{r}{5(5q+r)}=\frac{1}{5}-\frac{r}{5N}$$

и, так как $0 \leqslant r \leqslant 4$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left[\frac{N}{5}\right]}{N}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{r}{5N}\right)=\frac{1}{5}.$$

Таким образом, вероятность того, что число, выбранное наудачу из числа первых N целых чисел (где N велико, но конечно), окажется делящимся на 5, всегда будет близка к $^1/_5$. Например, вероятность того, что номер выбранного наудачу рубля будет делиться на 5, вполне можно считать просто равной $^1/_5$ (ибо общее число рублей очень велико); точное число имеющихся рублей при этом вовсе не нужно знать. Подобный же смысл будут иметь ответы приведенных ниже задач 83—91. Условия всех этих задач носят искусственный характер; существуют, однако, некоторые более сложные задачи того же типа, решение которых имеет и прикладное значение.

83. Какова вероятность того, что выбранное наудачу целое положительное число окажется взаимно простым с 6? Что хотя бы одно из двух выбранных наудачу чисел окажется взаимно простым с 6?

84. а) Какова вероятность того, что квадрат выбранного наудачу целого числа будет оканчиваться цифрой 1? Что куб выбранного наудачу числа будет оканчиваться цифрами 11?

б) Какова вероятность того, что десятая степень выбранного наудачу целого числа оканчивается цифрой 6? Что двадцатая степень выбранного наудачу числа оканчивается цифрой 6?

85. Какова вероятность того, что C_n^7, где n — выбранное наудачу целое число, большее семи, делится на 7? Что C_n^7 делится на 12?

86. Какова вероятность того, что 2^n, где n — выбранное наудачу целое положительное число, оканчивается цифрой 2? Что 2^n оканчивается цифрами 12?

87*. Какова вероятность того, что 2^n будет начинаться с цифры 1?

88*.** а) Доказать, что 2^n может начинаться с любой комбинации цифр.

б) Пусть M — какое-то k-значное число. Какова вероятность того, что первые k цифр числа 2^n образуют число M?

Примечание. Задача 87, очевидно, является частным случаем задачи 88б).

89.** а) Подсчитать с точностью до 0,1 вероятность того, что два взятых наудачу целых числа окажутся взаимно простыми.

б) Подсчитать с точностью до 0,05 вероятность того, что четыре взятых наудачу целых числа будут иметь общий множитель.

90*.** а) Задача Чебышева[1]). Доказать, что вероятность того, что два взятых наудачу целых числа будут взаимно простыми, равна $\frac{6}{\pi^2}$, где $\pi \approx 3,14$ — отношение длины окружности к ее диаметру.

б) Доказать, что вероятность того, что четыре взятых наудачу целых числа будут иметь общий множитель, равна $1-\frac{90}{\pi^4}$.

91*.** Какова вероятность того, что выбранное наудачу целое число n будет иметь простой делитель, превосходящий корень квадратный из самого этого числа?

---

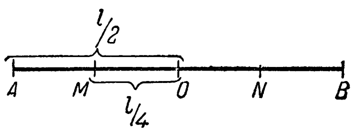
[1]) Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) — замечательный русский математик, основатель и наиболее блестящий представитель петербургской математической школы. Наиболее важные работы Чебышева относятся к теории чисел, теории вероятностей, теории приближения функций и теории механизмов. См. по этому поводу ниже задачи 132 и 166.

В. Случай непрерывного множества возможных исходов испытания

В заключение настоящего раздела рассмотрим еще несколько задач на подсчет вероятностей, относящихся к опытам, множество исходов которых может быть изображено в виде совокупности точек отрезка прямой, или некоторой плоской фигуры, или некоторого пространственного тела. Само собой разумеется, что в таких опытах также нельзя говорить о числе равновероятных исходов опыта и о числе благоприятных для данного события исходов; тем не менее вычисление вероятностей во многих подобных задачах вполне возможно и совсем несложно. Как производится такое вычисление, проще всего объяснить на конкретных примерах.

Пример 1. Стержень длины l обламывается в выбранной наудачу точке. Какова вероятность того, что меньший из двух образовавшихся при этом кусков стержня будет иметь длину, превосходящую $\frac{l}{4}$?

Всевозможные исходы опыта, рассматриваемого в этой задаче, определяются выбором точки излома на стержне, т. е. множество исходов здесь изображается совокупностью точек отрезка AB длины l (черт. 6).



Черт. 6.

При решении задачи прежде всего надо точно определить, что мы подразумеваем, говоря, что точка излома выбирается «наудачу». Здесь нельзя считать, что это слово означает, что все исходы, изображаемые различными точками отрезка AB, равновероятны: так как общее число исходов бесконечно, то последнее утверждение означает только то, что вероятность каждого отдельного исхода равна нулю, и ничего не дает для вычисления вероятностей. Вместо вероятности отдельного исхода здесь удобно рассматривать вероятность того, что точка излома попадает внутрь некоторого малого отрезка стержня; при этом слово «наудачу» мы будем понимать как указание на то, что вероятность попадания точки излома внутрь малого отрезка зависит лишь от длины этого отрезка, но не от того, где на стержне этот отрезок расположен. При таком понимании слова «наудачу» решение задачи легко может быть найдено.

Действительно, из того, что вероятность попадания точки излома внутрь некоторого отрезка одинакова для всех отрезков равной длины, следует, что вероятность попадания точки излома внутрь любого отрезка длины $\frac{l}{n}$ равна $\frac{1}{n}$ [1]). Но длина меньшего из двух кусков стержня будет превосходить $\frac{l}{4}$, если точка излома попадет внутрь отрезка MN, имеющего длину $\frac{l}{2}$ и расположенного симметрично относительно середины стержня (см. черт. 6); в противном же случае длина меньшего куска будет меньше чем $\frac{l}{4}$. Отсюда немедленно следует, что искомая вероятность равна

$$\frac{l}{2}:l=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. На паркетный пол наудачу бросается монета диаметра d. Паркет имеет форму квадратов со стороной $a>d$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадратов паркета?

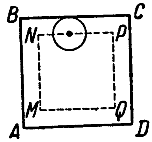
Всевозможные исходы опыта, рассматриваемого в этой задаче, определяются положением центра упавшей монеты. Так как все квадраты паркета совершенно равноправны, то можно рассматривать лишь тот квадрат, внутрь которого попал центр монеты; в таком случае множество всех исходов бу-

---

[1]) Так как любой отрезок, соизмеримый со всем стержнем, можно представить в виде суммы отрезков длины $\frac{l}{n}$, то отсюда вытекает, что вероятность попадания точки излома внутрь любого такого отрезка равна отношению длины этого отрезка к длине всего стержня. Так как каждый несоизмеримый со всем стержнем отрезок является пределом отрезков соизмеримых, то вероятность попадания точки излома внутрь любого отрезка тоже будет равна отношению длины отрезка к длине стержня. В связи с этим в дальнейшем в аналогичных задачах слово «наудачу» мы будем сразу понимать как указание на то, что вероятность попадания некоторой точки внутрь отрезка пропорциональна длине этого отрезка.

дет изображаться совокупностью точек квадрата $ABCD$ со стороной a.

Слово «наудачу» в формулировке настоящей задачи следует понимать как указание на то, что вероятность попадания центра монеты внутрь любого малого прямоугольника зависит только от площади этого прямоугольника, а не от того, где внутри квадрата $ABCD$ этот прямоугольник расположен. Иначе говоря, это слово указывает на то, что вероятность попадания центра монеты внутрь любой части квадрата равна отношению площади этой части к площади всего квадрата (ср. со сноской на предыдущей странице). Но легко видеть, что монета не будет пересекать сторон квадратов паркета, если ее центр окажется внутри квадрата $MNPQ$, сторона которого равна $a-d$, а центр совпадает с центром квадрата $ABCD$ (черт. 7). Отсюда вытекает, что искомая вероятность равна



Черт. 7.

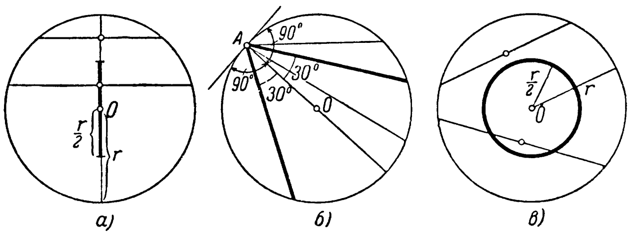
$$\frac{\text{пл. } MNPQ}{\text{пл. } ABCD}=\frac{(a-d)^2}{a^2}=\left(1-\frac{d}{a}\right)^2.$$

Заметим, что в обоих рассмотренных примерах решение задачи существенно зависело от понимания слова «наудачу». Во всех случаях, когда может возникнуть сомнение в смысле этого слова, необходимо в тексте задачи дать соответствующее разъяснение; без этого задача не может быть однозначно решена (см. ниже мелкий шрифт). В последующих задачах, однако, вряд ли может возникнуть такое сомнение, особенно после разбора двух приведенных выше примеров; в связи с этим в условиях этих задач слово «наудачу» будет употребляться без всяких разъяснений.

Классическим примером задачи, не имеющей смысла без точного разъяснения значения слова «наудачу», является следующая задача:

«Какова вероятность того, что хорда, выбранная наудачу в круге, окажется больше стороны правильного вписанного треугольника?»

Понимая слово «наудачу» по-разному, здесь можно получить совершенно различные ответы. Так, например, из соображений симметрии можно ограничиться лишь рассмотрением хорд, параллельных заданному направлению, и понимать «наудачу» в том смысле, что вероятность попадания точки пересечения хорды с перпендикулярным к ней диаметром внутрь некоторого отрезка этого диаметра будет пропорциональна длине отрезка; в таком случае для искомой вероятности мы получим значение $^1/_2$ (см. черт. 8, *а*). С другой стороны, опять же по соображениям симметрии можно рассматривать только хорды, проходящие через данную точку A окружности (черт. 8, *б*); так как все хорды заключены внутри одного из двух прямых углов, образованных касательной в точке A с радиусом, а хорды, бо́льшие стороны



Черт. 8.

правильного вписанного треугольника, должны лежать внутри одного из двух углов в 30°, то отсюда как будто бы следует, что искомая вероятность равна $\frac{30^\circ}{90^\circ} = \frac{1}{3}$. Наконец, можно также считать, что слово «наудачу» означает, что вероятность попадания середины хорды внутрь какой-либо части круга пропорциональна площади этой части; так как, вообще говоря, серединой хорды может быть любая точка круга, а середины хорд, превосходящих сторону правильного вписанного треугольника, заполняют круг вдвое меньшего радиуса $\frac{r}{2}$ (черт. 8, *в*), то при таком понимании слова «наудачу» для искомой вероятности получается значение $\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$.

Нетрудно понять, чем объясняется такая неопределенность ответа в рассматриваемой задаче. Дело в том, что слово «вероятность» по самому своему смыслу предполагает наличие некоторого определенного опыта, к которому это слово относится (см. общее введение к задачам на вычисление вероятностей на стр. 29). Слово «наудачу» надо понимать как указание на то, каким именно образом производится опыт, о котором идет речь. В разобранных выше примерах с изломом стержня и с бросанием монеты, так же как и в последующих задачах 92—100, смысл этого слова ясен из самого условия задачи. В случае же выбора «наудачу» хорды в круге без дальнейших разъяснений совсем не ясно, как осуществляется этот выбор, и слово «наудачу» само по себе здесь еще мало что объясняет. Так, если мы, начертив круг на большом листе бумаги, будем подкидывать над этим листом иголку и через точку падения острия иголки (в тех случаях, когда эта точка попадает внутрь круга) будем проводить хорды, перпендикулярные к радиусу, проходящему через точку, то верно будет третье из наших решений и искомая вероятность будет равна $^1/_4$. Если мы выберем точку на окружности, закрепим в этой точке стержень, раскрутим его вокруг точки закрепления и будем ждать, пока он не остановится, то для высекаемых стержнем хорд верно будет второе решение и искомая вероятность будет равна $^1/_3$. Наконец, нетрудно показать, что для большинства наиболее естественных приемов выбора хорды «наудачу» (бросание круглого диска на плоскость, расчерченную прямыми; бросание стержня над плоскостью, на которой начерчен круг; рассмотрение траекторий звезд, пересекающих диск Луны, или траекторий каких-либо движущихся прямолинейно частиц в круглом поле зрения лупы, микроскопа или телескопа) верным будет первое решение задачи, и искомая вероятность будет равна $^1/_2$; в этом смысле первое из приведенных трех решений «самое правильное».

92. Задача о встрече. Два человека условились встретиться в определенном месте между 12 часами и 1 часом дня. По условию, пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что встреча этих людей состоится, если каждый из них выбирает момент своего прихода в условленное место наудачу в интервале между 12 часами и 1 часом?

93. Стержень разломан на три части; две точки излома выбраны наудачу. Какова вероятность того, что из трех образовавшихся частей можно будет сложить треугольник?

94*. Стержень длины l разломан на три части в двух выбранных наудачу точках. Какова вероятность того, что длина ни одного из получившихся кусков не будет превосходить заданной величины a?

95. На окружности взяты наудачу три точки A, B и C. Какова вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным?

96*. От каждого из трех одинаковых стержней отломано по куску; точки излома всех трех стержней выбираются наудачу. Какова вероятность того, что из трех полученных кусков можно будет сложить треугольник?

97.** От каждого из трех одинаковых стержней наудачу отломано по куску. Какова вероятность того, что из этих трех кусков можно будет сложить остроугольный треугольник?

98*.** Стержень разломан на три части; две точки излома выбраны наудачу. Какова вероятность того, что из трех полученных частей можно будет сложить остроугольный треугольник?

99*.** Стержень сломан на две части в выбранной наудачу точке; затем бóльшая из двух образовавшихся частей снова сломана на две части в выбранной наудачу точке. Какова вероятность того, что из трех так полученных частей можно будет сложить треугольник?

100*.** Задача Бюффона[1]). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена тонкая игла, длина которой равна тоже $2a$. Доказать, что вероятность того, что игла пересечет одну из прямых, равна $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$ ($\pi = 3{,}14\ldots$ — отношение длины окружности к диаметру).

Примечание. Результат этой задачи позволяет экспериментально определять число π, бросая много раз иглу на разграфленную бумагу и подсчитывая число случаев, в которых игла пересечет начерченные линии (напомним, что частота появления данного события примерно равна его вероятности). Так, при помощи 5000-кратного бросания иглы было получено для π значение $\pi \approx 3{,}159$ (большей точности при этом способе определения π достигнуть трудно, так как для этого требуется произвести чрезвычайно много бросаний).

На этом мы заканчиваем цикл задач, посвященных вычислению вероятностей. Подчеркнем, что приведенные здесь задачи относятся собственно к «предистории» теории вероятностей: с решением подобного рода задач связано зарождение в XVII в. этой математической дисциплины в работах Паскаля, Ферма и Гюйгенса. Дальнейшее развитие теории вероятностей в XVIII в. и начале XIX в. связано с именами Я. Бернулли, Лапласа и Гаусса; в работах этих ученых было разобрано много теоретико-вероятностных задач и впервые были намечены пути приложения новой дисциплины к вопросам естествознания и техники. Однако окончательное оформление теории вероятностей в самостоятельную большую, глубокую и крайне

[1]) Жорж Бюффон (1707—1788) — знаменитый французский естествоиспытатель.

важную для практики науку со своеобразными методами исследования произошло только во второй половине XIX в. и начале XX в. благодаря трудам замечательных русских ученых — П. Л. Чебышева и его учеников А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. Развитие теории вероятностей не прекращается и по настоящее время; при этом и сейчас, как и ранее, ведущую роль в разработке этой науки играют ученые нашей страны — в первую очередь московские математики С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров и А. Я. Хинчин. Важные исследования по теории вероятностей ведутся также в ряде национальных республик Советского Союза: широкую известность имеют достижения в этой области, полученные В. И. Романовским и его учениками в Средней Азии и Б. В. Гнеденко и его учениками на Украине.

Дополнительная литература

Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин, Элементарное введение в теорию вероятностей, М.— Л., Гостехиздат, 1952.

Б. В. Гнеденко, Как математика изучает случайные явления, Киев, Изд. Украинской Академии наук, 1947.

Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, раздел III, М.— Л., Гостехиздат, 1952 («Библиотека математического кружка», вып. 6).

РАЗДЕЛ II

ЗАДАЧИ ИЗ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ МАТЕМАТИКИ

1. Задачи о взаимном расположении точек и прямых

Задачи 101—107 относятся к той части геометрии, в которой рассматриваются лишь вопросы взаимного расположения точек и прямых на плоскости, но не учитываются расстояния между точками или углы между прямыми. Эта часть геометрии в XIX в. развилась в большую науку, получившую название проективная геометрия. Вопросы, затронутые в задачах 101—107, относятся к одной сравнительно узкой области проективной геометрии, а именно к так называемой теории конфигураций; эта теория имеет большое значение в современной математике (сюда примыкает созданная в самое последнее время алгебраическая теория проективных плоскостей, в разработке которой активное участие принимают московские математики).

Читателю может показаться, что общий подзаголовок мало подходит к задачам 101—103. По этому поводу см. указанную ниже книгу О. А. Вольберга.

Литература

О. А. Вольберг, Основные идеи проективной геометрии, гл. IV, М.—Л., Учпедгиз, 1949.

Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, гл. III, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

101. Возможно ли спланировать автобусную сеть города, состоящую из 10 маршрутов, так, чтобы после закрытия любого из этих маршрутов оставалась бы возможность проехать с каждой из имеющихся автобусных остановок на любую другую (может быть, пересаживаясь по дороге), а после закрытия каких угодно двух маршрутов обязательно нашлись бы остановки, с одной из которых уже нельзя проехать на другую?

102. Показать, что автобусная сеть города может быть устроена таким образом, чтобы каждый автобусный маршрут имел ровно три остановки, каждые два маршрута имели общую остановку (на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой) и с любой из остановок можно было проехать на любую другую без пересадки.

103*. Автобусная сеть города, состоящая из нескольких (больше двух) маршрутов, устроена таким образом, что:

1° каждый маршрут имеет не менее трех остановок,

2° с любой остановки на любую другую можно проехать без пересадки и

3° для каждой пары маршрутов имеется одна (и только одна) остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой.

а) Доказать, что каждый автобусный маршрут имеет одно и то же число остановок и через каждую остановку проходит одно и то же число маршрутов (равное числу остановок каждого маршрута).

б) Найти число остановок каждого автобусного маршрута, если общее число маршрутов в городе равно 57.

104. а) Расположить на плоскости девять прямых и девять точек так, чтобы через каждую точку проходили ровно три прямые и на каждой прямой лежали ровно три точки.

б) Доказать, что семь прямых и семь точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую точку проходили три прямые и на каждой прямой лежали три точки.

105*. На плоскости дано n попарно непараллельных прямых, расположенных так, что через каждую точку пересечения двух из этих прямых проходит еще какая-то третья из них. Доказать, что все n прямых пересекаются в одной точке.

106**. На плоскости дано n точек, расположенных так, что на каждой прямой, соединяющей две из этих точек, лежит по крайней мере еще одна из них. Доказать, что все n точек лежат на одной прямой.

Примечание. Можно доказать, что предложения задач 105 и 106 представляют собой следствия одно другого. См. по этому поводу гл. II книги О. А. Вольберга, цитированной во введении к этому циклу задач.

107.** На плоскости даны n точек, не все из которых лежат на одной прямой. Доказать, что среди прямых, соединяющих всевозможные пары этих точек, обязательно будет не менее n различных.

2. Еще две задачи о расположении точек на плоскости

108. а) Найти все возможные расположения четырех точек на плоскости, при которых попарные расстояния между этими точками принимают только два различных значения a и b. Перечислить все значения отношения $\frac{b}{a}$, для которых возможны такие расположения.

б) Найти все расположения n точек на плоскости, такие, что все попарные расстояния между этими точками принимают одно из двух значений a или b. Для каких n такие расположения существуют?

109*. а) Доказать, что на плоскости можно найти как угодно много точек, не лежащих на одной прямой, для которых расстояния между любыми двумя из них будут выражаться целыми числами.

б)** Доказать, что на плоскости нельзя указать бесконечно много точек, удовлетворяющих условиям задачи а).

3. Плоские точечные решетки

Задачи 110 — 112 посвящены плоским точечным решеткам, т. е. системам точек, образованных вершинами сети квадратов на плоскости, подобным той, какая имеется на листах тетрадей «в клетку». Точечные решетки такого рода играют значительную роль в современной математике (теория чисел) и в математическом естествознании (кристаллография); особенно важна теорема Минковского (см. задачу 111), имеющая много приложений в теории чисел.

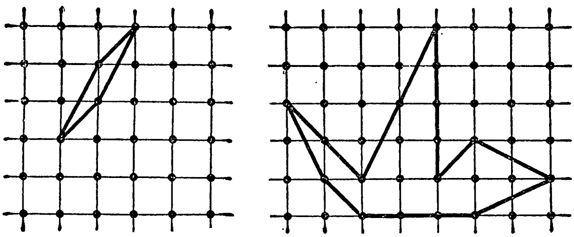
Литература

Л. А. Люстерник, Выпуклые тела, гл. IV, М.—Л., Гостехиздат, 1941.

Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, гл. II, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

*110**. а) На клетчатой бумаге нарисован параллелограмм, вершины которого находятся в узлах сетки квадратов, а на сторонах и внутри нет других узлов этой сетки (черт. 9, *а*). Доказать, что площадь параллелограмма равна площади квадрата сетки.

б) На клетчатой бумаге нарисован многоугольник, все вершины которого находятся в узлах сетки квадратов (черт. 9, *б*).



а) *б)*

Черт. 9.

Доказать, что площадь S этого многоугольника может быть подсчитана по формуле

$$S = N + \frac{k}{2} - 1,$$

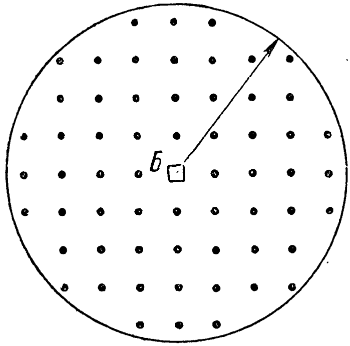
где N есть число узлов сетки квадратов, расположенных внутри многоугольника, а k — число узлов этой сетки, расположенных на его границе; за единицу площади здесь принимается площадь квадрата сетки (так, площадь изображенного на черт. 9, *б* многоугольника равна $4 + \frac{16}{2} - 1 = 11$).

Очевидно, что задача а) есть частный случай задачи б).

*111***. Теорема Минковского[1]). На клетчатой бумаге нарисован центрально-симметричный выпуклый многоугольник, центр симметрии которого совпадает с одним из узлов сетки квадратов. Доказать, что если кроме центра симметрии внутри многоугольника нет узлов сетки, то площадь многоугольника не может быть больше 4 (за единицу площади принимается площадь квадрата сетки).

[1]) Герман Минковский (1864—1909) — известный немецкий математик.

*112***. Имеется круглый сад радиуса 50, деревья в котором расположены в узлах сетки квадратов со стороной 1; в центре сада расположена беседка *Б* (черт. 10). Пока деревья (которые мы считаем круглыми и имеющими одинаковую толщину) достаточно тонки, они не заслоняют вида из беседки (т. е. будут существовать проведенные из центра сада лучи, не пересекающие ни одного дерева); однако, когда деревья вырастут, они полностью заслонят вид из беседки. Доказать, что пока радиус всех деревьев будет оставаться меньшим чем $\frac{1}{\sqrt{2501}} \approx \frac{1}{50{,}01}$, вид из беседки заслонен не будет, но когда этот радиус станет больше чем $^1/_{50}$, вид из беседки, наверное, окажется полностью заслоненным.



Черт. 10.

4. Задачи по топологии

Топологией называется часть математики, изучающая самые общие, чисто качественные свойства геометрических фигур (см. литературу, указанную ниже). Топология как самостоятельная наука возникла сравнительно недавно (уже в XX в.). В настоящее время — это одна из больших математических наук, имеющая важные приложения к многим другим разделам математики. В развитии топологии в последние десятилетия ведущую роль играет московская топологическая школа, созданная П. С. Урысоном (ум. в 1924 г.) и П. С. Александровым и возглавляемая ныне П. С. Александровым и Л. С. Понтрягиным; очень больших успехов в этой науке достигла в самые последние годы также молодая французская топологическая школа (Лерей, Серр и др.).

Литература

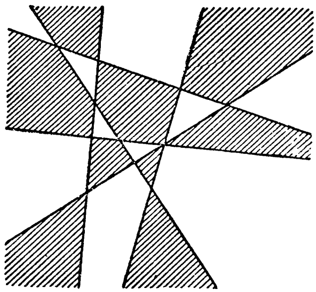
П. С. Александров и В. А. Ефремович, О простейших понятиях современной топологии, М.— Л., ОНТИ, 1935.

Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, гл. VI, М.— Л., Гостехиздат, 1951.

Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, раздел I, М.— Л., Гостехиздат, 1952 («Библиотека математического кружка», вып. 6).

113. На плоскости проведено n прямых линий. Доказать, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно закрасить двумя красками так, что никакие две соседние области (т. е. области, соприкасающиеся по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской (черт. 11).

Задачу 113 можно сформулировать следующим образом: географическую карту, образованную проведенными на плоскости n прямыми, можно раскрасить двумя красками так, что никакие две страны не будут закрашены одним цветом. В таком виде эта задача представляет собой частный случай следующей общей задачи: каково наименьшее число цветов, которыми можно закрасить любую географическую карту так, что никакие две соседние страны не будут закрашены одним цветом? Эта задача до сих пор еще не решена, хотя она вот уже больше 100 лет привлекает к себе внимание математиков. Задачи о раскрашивании линий сети (задача 114) и о раскрашивании узлов сети (см. примечание к задаче 116) тоже связаны с этой задачей о раскрашивании стран географической карты (см. указанную выше книгу Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского).

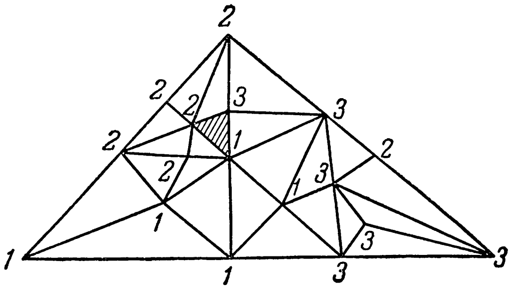


Черт. 11.

114.** На плоскости проведена сеть линий, в каждом узле которой сходится не более чем 10 из них (у з л о м называется точка, в которой сходится три или больше линий). Линии раскрашиваются разными красками так, чтобы никакие две соседние линии (линии, сходящиеся в одном узле) не были закрашены одной краской. Доказать, что такую раскраску всегда можно осуществить, если иметь 15 различных красок; однако 14 красок в некоторых случаях уже может нехватить.

Примечание. Раскраска сети линий, подобная той, о которой говорится в задаче, иногда встречается на практике. А именно, в случае сложных электрических цепей для того, чтобы при подключении не спутать проводов, удобно пользоваться разноцветными проводами (или проводами, концы которых отмечены разноцветными ленточками); при этом клеммы приборов окрашиваются теми же цветами, что и провода. Разумеется, при этом никакие два провода, подведенных к одному прибору, не должны быть одного цвета. Таким образом, электрические приборы в этом случае играют роль узлов сети нашей задачи, а провода — роль линий сети.

115.** а) Треугольник разбит на более мелкие неперекрывающиеся треугольники так, что любые два из треугольников разбиения или вовсе не имеют общих точек или имеют общую вершину, или имеют общую сторону (т. е. никакие два треугольника разбиения не соприкасаются по части стороны одного из них). Три вершины большого треугольника занумерованы цифрами *1*, *2* и *3*. Вершины треугольников разбиения



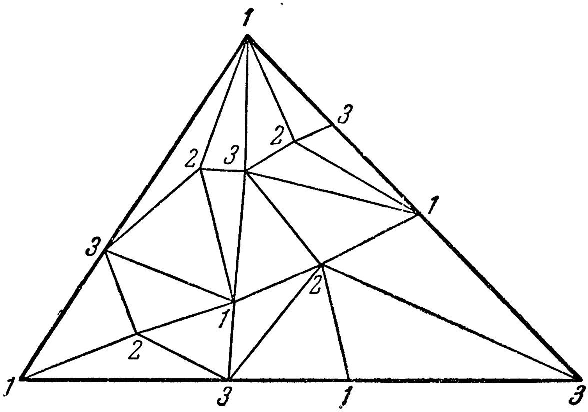
Черт. 12.

занумерованы теми же цифрами *1*, *2* и *3* так, что все вершины, расположенные на стороне *12* большого треугольника, занумерованы цифрами *1* или *2*; все вершины, расположенные на стороне *13*,— цифрами *1* или *3* и все вершины, расположенные на стороне *23*,— цифрами *2* или *3*, а в остальном совершенно произвольно (черт. 12). Доказать, что среди треугольников разбиения обязательно найдется хотя бы один, три вершины которого занумерованы тремя различными цифрами *1*, *2* и *3*.

б) Сформулировать и доказать теорему о разбиении тетраэдра на более мелкие тетраэдры, аналогичную теореме задачи а).

116*. Треугольник разбит на меньшие треугольники с соблюдением условий, указанных в задаче 115а). Доказать, что если в каждой вершине разбиения сходится четное число треугольников, то все вершины можно занумеровать цифрами *1*, *2* и *3* так, чтобы вершины каждого треугольника разбиения оказались занумерованными тремя различными цифрами (черт. 13).

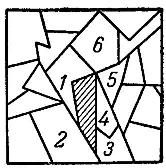
Существует предположение, что *во всех случаях* (т. е. если даже условие о четности числа треугольников, сходящихся в каждой вершине, не имеет места) вершины разбиения можно занумеровать *четырьмя* цифрами *1*, *2*, *3* и *4* так,



Черт. 13.

чтобы вершины каждого треугольника разбиения оказались занумерованными тремя разными цифрами. Однако это предположение до сих пор еще никем не доказано и не опровергнуто (оно оказывается тесно связанным с задачей о раскраске географических карт, о которой говорилось выше на стр. 57).

Заметим, что задачу 116 можно сформулировать следующим образом: если треугольник разбит на меньшие треугольники с соблюдением условий, указанных в условии задачи 115а), и в каждой вершине разбиения сходится четное число треугольников, то все вершины разбиения можно закрасить тремя красками так, что никакие две соседние вершины (т. е. вершины, принадлежащие одному треугольнику) не будут закрашены одним и тем же цветом (ср. с задачами 113 и 114).



Черт. 14.

117*.** *Задача о соседях.* Квадрат со стороной 1 разбит на более мелкие многоугольники (может быть, невыпуклые; черт. 14). Доказать, что если все эти многоугольники достаточно малы (например, если каждый из них помещается внутри круга диаметра $^1/_{30}$), то обязательно найдется хотя бы один многоугольник разбиения, имеющий не менее шести соседей (т. е. многоугольников, соприкасающихся с данными хотя бы в одной точке; см. черт. 14).

5. Одно свойство чисел, обратных целым

118*.** Пусть a — число, обратное целому: $a=\frac{1}{n}$, где n — целое положительное число. Доказать, что каждая непрерывная кривая, соединяющая точки A и B, расстояние между которыми равно 1, обязательно имеет параллельную AB хорду[1]) длины a. Если же число a не является обратным целому, то наверное найдется непрерывная кривая, соединяющая точки A и B, которая не имеет параллельной AB хорды длины a.

6. Три задачи о выпуклых многоугольниках

Задачи 119—121 представляют собой задачи на наибольшие и наименьшие значения, связанные с выпуклыми многоугольниками. Эти задачи можно еще обобщить, заменив в их условиях выпуклый многоугольник произвольной *выпуклой фигурой* (т. е. фигурой, через всякую граничную точку которой можно провести прямую, не пересекающую фигуру; это требование означает, что фигура не имеет «впадин»). При этом решение задач 119—121 почти не придется менять.

Теория выпуклых фигур является важным разделом геометрии, имеющим многочисленные применения в других разделах математики и в естествознании. Развитие ее не прекращается и в настоящее время; так, например, выдающихся успехов добился в этой области в последние годы ленинградский математик А. Д. Александров.

Литература

Л. А. Люстерник, Выпуклые тела, М.—Л., Гостехиздат, 1941.

А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М.—Л., Гостехиздат, 1951 («Библиотека математического кружка», вып. 4).

---

[1]) *Хордой* произвольной кривой называется любой отрезок прямой, оба конца которого принадлежат кривой.

119. а) Доказать, что всякий выпуклый многоугольник площади 1 можно заключить в параллелограмм площади 2.

б) Доказать, что треугольник площади 1 нельзя заключить в параллелограмм площади, меньшей 2.

120. а) Доказать, что всякий выпуклый многоугольник площади 1 можно заключить в треугольник площади 2.

б)** Доказать, что параллелограмм площади 1 нельзя заключить в треугольник площади, меньшей 2.

121.* а) Пусть M — выпуклый многоугольник и l — произвольная прямая. Доказать, что в M можно вписать треугольник, одна сторона которого параллельна l и площадь которого не меньше $^3/_8$ площади M.

б) Пусть M — правильный шестиугольник и l — прямая, параллельная одной из его сторон. Доказать, что в M нельзя вписать треугольник, одна сторона которого параллельна l и площадь которого больше $^3/_8$ площади M.

7. Несколько свойств числовых последовательностей

122.** а) Доказать, что если каждые две из заданных n бесконечных в обе стороны целочисленных арифметических прогрессий (т. е. арифметических прогрессий, все члены которых являются целыми числами) имеют общий член, то и все n прогрессий имеют общий член. Показать, что для нецелочисленных прогрессий это предложение может оказаться уже неверным.

б) Доказать, что если каждые три из заданных n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий имеют общий член, то и все n прогрессий имеют общий член.

Примечание. Любопытно отметить внешнее сходство условия этой задачи с условием следующей геометрической теоремы: «Если каждые три из заданных n выпуклых фигур имеют общую точку, то и все эти n фигур имеют общую точку» (по поводу этой теоремы см., например, § 2 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, указанной на стр. 60).

123. а) Доказать, что последовательность, составленная из некоторого (большего трех!) числа цифр 1 и 2, стоящих в произвольном порядке, обязательно содержит цифру или группу цифр, повторяющуюся подряд два раза.

б)** Доказать, что существуют сколь угодно длинные последовательности, составленные из цифр 1 и 2, в которых никакая цифра или группа цифр не повторяется подряд три раза.

124*.** а) Доказать, что существуют сколь угодно длинные последовательности, составленные из цифр 0, 1, 2 и 3, в которых никакая цифра или группа цифр не повторяется подряд два раза.

б) Доказать, что существуют сколь угодно длинные последовательности, составленные из цифр 1, 2 и 3, в которых никакая цифра или группа цифр не повторяется подряд два раза.

Примечание. Теорема задачи а) является следствием теоремы задачи б), ибо каждую последовательность, составленную из цифр 1, 2 и 3, можно рассматривать как последовательность, составленную из цифр 0, 1, 2 и 3, в которой цифра 0 вовсе не встречается. Однако мы здесь привели задачу а) отдельно, так как ее решение несколько проще, чем решение задачи б).

125.** Пусть T — какое-то целое положительное число, составленное из N нулей и единиц. Рассмотрим все n-значные числа (где $n < N$), образованные какими-либо n последовательными цифрами числа T; таких чисел будет $N - n + 1$ [они будут начинаться с 1-й, 2-й, 3-й, ..., $(N - n + 1)$-й цифры числа T[1])].

Доказать, что число цифр N и само число T можно выбрать так, чтобы полученные из T указанным способом n-значные числа были все различными и чтобы среди них были все возможные n-значные числа, составленные из нулей и единиц.

8. Задача о размещении предметов

Приведенная здесь задача имеет искусственную формулировку, однако поставленный в ней вопрос на самом деле относится к общим свойствам разбиений произвольных объектов («пирожных») по двум признакам («сорт» и «номер ящика»). Теорема задачи 126 и некоторые ее обобщения существенны для ряда вопросов современной математики.

126*. 20 сортов пирожных, по 10 пирожных каждого сорта, упакованы каким-то образом в 20 ящиков (по 10 пирожных в каждом ящике). Доказать, что каково бы ни было

---

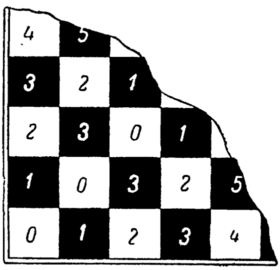
[1]) Так, например, из пятизначного числа 10 010 мы получим подобным образом следующие четыре двузначных числа: 10, 00, 01 и снова 10.

распределение пирожных по ящикам, всегда возможно выбрать 20 пирожных двадцати различных сортов, выбрав по одному пирожному из каждого ящика.

9. Задачи на недесятичные системы счисления

Следующие три задачи объединяются тем, что в их решениях используются недесятичные системы счисления.

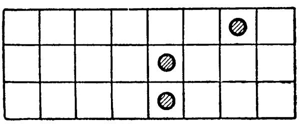
*127****. Клетки бесконечной шахматной доски последовательно нумеруются следующим образом: на первой угловой клетке ставится номер 0, а затем каждой клетке приписывается наименьший возможный номер, не использованный еще для нумерации каких-либо предшествующих клеток той же горизонтали или той же вертикали (черт. 15). Какой номер получит при этом клетка, стоящая в пересечении 100-й горизонтали и 1000-й вертикали?



Черт. 15.

*128***. Игра «ним». В каждой из трех кучек лежит некоторое число спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем при каждом ходе играющий может взять любое число спичек из любой (но только из одной) кучки. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Определить, при каких начальных положениях начинающий наверное может выиграть, а при каких нет, и найти метод правильной игры в первом случае.



Черт. 16.

Примечание. Вместо трех кучек спичек можно нарисовать доску из трех рядов полей и расставить в этих трех рядах три шашки (черт. 16). Играющие поочередно передвигают одну из этих шашек на любое число полей вправо и выигравшим считается тот из них, кто сделает последний ход. В таком виде в эту игру очень удобно играть на классной доске, имея мел и тряпку.

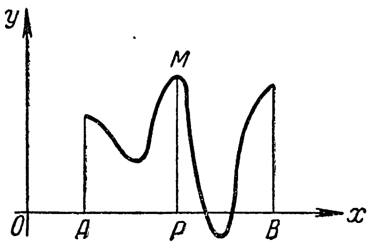
Аналогичное примечание можно сделать также и к следующей задаче.

*129****. Игра «цзяньшицзы»[1]). В каждой из двух кучек лежит некоторое количество спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем при каждом ходе играющий может взять или произвольное число спичек из одной кучки или же поровну из обеих. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Определить, при каких начальных положениях начинающий наверное может выиграть, а при каких нет, и найти метод правильной игры в первом случае.

10. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля (многочлены Чебышева)

Задачи 130—135 посвящены классической теореме П. Л. Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля (см. задачу 132), и примыкающим сюда результатам. Этот круг вопросов играет в современной математике весьма значительную роль.



Черт. 17.

Уклонением функции $f(x)$ от нуля на некотором отрезке называется наибольшее значение, которое принимает абсолютная величина функции на этом отрезке; так, отклонение от нуля на отрезке AB функции $y=f(x)$, график которой изображен на черт. 17, равно длине отрезка MP.

130. Многочлены Чебышева. Доказать, что при x, заключенном между -1 и $+1$, выражение

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

представляет собой многочлен относительно x степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}. Найти все корни уравнения $T_n(x)=0$ и все значения x между -1 и $+1$, при которых многочлен $T_n(x)$ принимает наибольшее и наименьшее значения.

---

[1]) И «ним» и «цзяньшицзы» — китайские народные игры («цзяньшицзы» в переводе на русский язык означает «выбирание камней»; разумеется, замена в условии игры спичек камнями нисколько ее не меняет).

131. Найти квадратный трехчлен

$$x^2+px+q,$$

уклонение от нуля которого на отрезке от -1 до $+1$ имеет наименьшее возможное значение.

132.** Доказать, что уклонение от нуля многочлена

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

степени n со старшим коэффициентом 1 на отрезке от -1 до $+1$ не может быть меньше $\frac{1}{2^{n-1}}$ и равно $\frac{1}{2^{n-1}}$ только для многочлена $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ (см. задачу 130).

133*. Найти все многочлены со старшим коэффициентом 1, уклонение которых от нуля на отрезке от -2 до $+2$ имеет наименьшее возможное значение.

134.** Найти многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, уклонение от нуля которого на системе $n+1$ точек $x=0, 1, 2, \ldots, n$ имеет наименьшее возможное значение (уклонением от нуля функции $f(x)$ на системе точек $x=a$, $x=b$, $x=c, \ldots, x=l$ называется наибольшая из абсолютных величин значений функции в этих точках, т. е. наибольшее из чисел $|f(a)|$, $|f(b)|, \ldots, |f(l)|$).

135*.** Пусть A_1, $A_2, \ldots, A_n$ — какие-то n точек плоскости. Доказать, что на каждом отрезке длины l можно найти такую точку M, что произведение

$$MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n$$

будет не меньше $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Как должны быть расположены точки A_1, $A_2, \ldots, A_n$ для того, чтобы на данном отрезке PQ длины l нельзя было найти такую точку M, чтобы произведение

$$MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n$$

было больше $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$?

11. Четыре формулы для числа π

Известно, что число π — отношение длины окружности к ее диаметру — не только не является рациональным, но, более того, не может быть представлено в виде какого-либо конечного алгебраического выражения, содержащего действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, производимые над целыми числами. Однако число π можно многими способами представить в виде бесконечного выражения (суммы бесконечного ряда или бесконечного произведения); первая подобная формула для числа π была получена еще в XVI столетии (см. задачу 142а)). В настоящем цикле задач приводятся некоторые классические формулы для π, позволяющие вычислять это число с любой степенью точности.

Литература

Сборник «О квадратуре круга», М. — Л., ГТТИ, 1934 (серия «Классики естествознания»).

Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, М.—Л., ОНТИ, 1936.

136. Доказать, что:

а) если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$;

б) если $0 < n\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin n\alpha}{n\alpha}$.

137. Упростить выражение

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

138. Доказать, что

а) $\sin n\alpha = C_n^1 \sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - C_n^3 \sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + {}$
$+ C_n^5 \sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots$;

так, например,

$$\sin 6\alpha = 6\sin\alpha\cos^5\alpha - 20\sin^3\alpha\cos^3\alpha + 6\sin^5\alpha\cos\alpha.$$

б) $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + C_n^4\sin^1\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots$;

так, например,

$$\cos 6\alpha = \cos^6\alpha - 15\sin^2\alpha\cos^4\alpha + 15\sin^4\alpha\cos^2\alpha - \sin^6\alpha.$$

в) $\operatorname{tg} n\alpha = \dfrac{C_n^1\operatorname{tg}\alpha - C_n^3\operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5\operatorname{tg}^5\alpha - \ldots}{1 - C_n^2\operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4\operatorname{tg}^4\alpha - \ldots}$;

так, например,

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{6\operatorname{tg}\alpha - 20\operatorname{tg}^3\alpha + 6\operatorname{tg}^5\alpha}{1 - 15\operatorname{tg}^2\alpha + 15\operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha}.$$

139. Составить уравнения, корнями которых являются числа:

а) $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}, \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1}, \ldots, \operatorname{ctg}^2 \frac{(m-1)\pi}{2m+1},$

$\operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1};$

б) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}, -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4n}, \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4n}, -\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4n}, \ldots, \operatorname{ctg} \frac{(2n-3)\pi}{4n},$

$-\operatorname{ctg} \frac{(2n-1)\pi}{4n}$ (n четно);

в) $\sin^2 \frac{\pi}{2m}, \sin^2 \frac{2\pi}{2m}, \sin^2 \frac{3\pi}{2m}, \ldots, \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m};$

г) $\sin^2 \frac{\pi}{4m}, \sin^2 \frac{3\pi}{4m}, \sin^2 \frac{5\pi}{4m}, \ldots, \sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m}.$

140. Доказать, что

а) $$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3};$$

б) $$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{cosec}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{m(2m+2)}{3};$$

в) при четном n

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4n} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4n} - \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4n} + \ldots + \operatorname{ctg} \frac{(2n-3)\pi}{4n} - \operatorname{ctg} \frac{(2n-1)\pi}{4n} = n.$$

141. Доказать, что

$$\sin \frac{\pi}{2m} \sin \frac{2\pi}{2m} \sin \frac{3\pi}{2m} \ldots \sin \frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$$

и

$$\sin \frac{\pi}{4m} \sin \frac{3\pi}{4m} \sin \frac{5\pi}{4m} \ldots \sin \frac{(2m-1)\pi}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{2^m}.$$

142. а) Вывести из результата задачи 137 формулу Виета [1])

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}\ ^{2)}$$

б) Чему равно бесконечное произведение

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}\cdots ?$$

143. а) Вывести из тождеств задач 140а) и б) формулу Эйлера

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

б) Чему равна сумма бесконечного ряда

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots ?$$

144. а) Вывести из тождества задачи 140в) формулу Лейбница [3])

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

---

[1]) Франсуа Виета (1540—1603) — известный французский математик, один из создателей современной алгебраической символики.

[2]) То-есть

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdots\times\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}_{n\ \text{радикалов}}\right]\right\}=\frac{\pi}{2}.$$

Аналогичный смысл имеют задачи 142б), 143, 144, 145.

[3]) Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — знаменитый немецкий математик, один из создателей дифференциального и интегрального исчисления.

б) Чему равна сумма бесконечного ряда

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots?$$

145*. Вывести из тождеств задачи 141 формулу Валлиса[1])

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

12. Вычисление площадей криволинейных фигур

Задачи 146—154 посвящены вычислению площадей некоторых криволинейных (т. е. ограниченных кривыми линиями) фигур. В курсе геометрии, проходимом в средней школе, вычисляются площади некоторых простейших криволинейных фигур — круга, сектора, сегмента. Однако при рассмотрении многих научных и технических вопросов приходится сталкиваться с вычислением площадей более сложных фигур, ограниченных кривыми линиями, отличными от дуг окружности. Значительная часть курса высшей математики, изучаемого в вузах, посвящена общим методам нахождения таких площадей. Эти общие методы (методы интегрирования функций) были созданы в основном в течение XVII—XVIII вв., когда развитие техники сделало необходимыми многочисленные вычисления такого рода. Однако отдельные задачи на вычисление площадей криволинейных фигур встречались в науке задолго до этого времени; ряд таких задач был решен ранее при помощи различных искусственных приемов, применение которых не требует знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Некоторые из таких задач и будут приведены ниже.

Центральное место среди задач этого цикла занимают задачи 149—152, содержащие геометрическую теорию натуральных логарифмов.

Решения последних двух задач этого цикла опираются на результат задачи 159в).

Литература

Д. Ю. Панов, Вычисление площадей, М.—Л., Гостехиздат, 1946.

А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы, М.—Л., Гостехиздат, 1952.

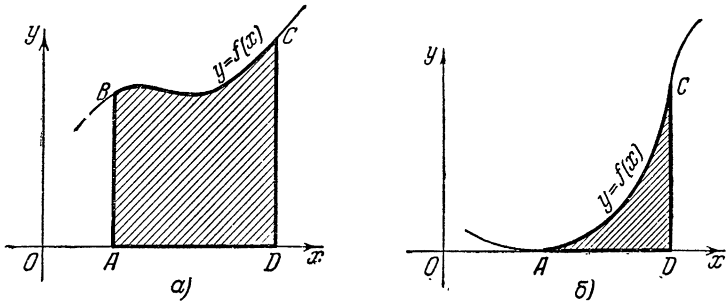
И. Б. Абельсон, Рождение логарифмов, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

В последующих задачах мы будем вычислять площади некоторых *криволинейных трапеций* $ABCD$, ограниченных кривой BC, задаваемой уравнением $y=f(x)$ (например,

---

[1]) Джон Валлис (1616—1703)—известный английский математик.

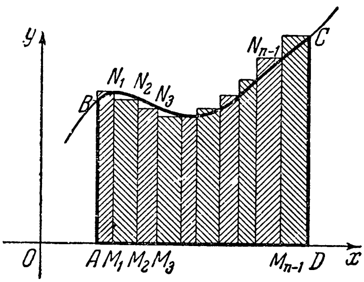
параболой $y=x^2$, синусоидой $y=\sin x$ и т. д.), отрезком AD оси абсцисс и двумя отрезками AB и CD прямых, параллельных оси ординат и отвечающих значениям $x=a$



Черт. 18.

и $x=b$ (черт. 18, a). В отдельных случаях сторона AB криволинейной трапеции $ABCD$ у нас будет обращаться в точку, так что вместо криволинейной трапеции $ABCD$ мы будем иметь **криволинейный треугольник** ACD (черт. 18, *б*).

При вычислении площади криволинейной трапеции $ABCD$ (так же, как и при вычислении площади круга) приходится пользоваться теорией пределов. Разделим основание AD этой трапеции на n частей точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ и пусть длины отрезков AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., $M_{n-1}D$ равны соответственно h_1, h_2, h_3, ..., h_n. Проведем далее через точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ прямые, параллельные оси ординат; эти прямые пересекут кривую $y=f(x)$ в точках $N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ (черт. 19).



Черт. 19.

Построим теперь n прямоугольников, имеющих основаниями отрезки AM_1, M_1M_2, $M_2M_3, \ldots, M_{n-1}D$, а высотами — отрезки M_1N_1, M_2N_2, $M_3N_3, \ldots, DC$.

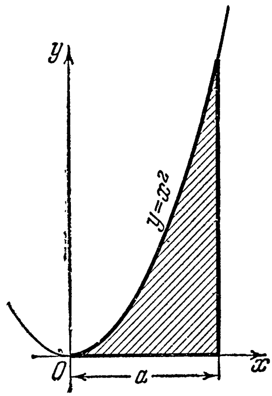
Обозначим абсциссы точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, D через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$; так как абсцисса точки A равна a, а абсцисса точки D равна b, то, очевидно, $x_1 = a + h_1$, $x_2 = a + h_1 + h_2, \ldots, x_{n-1} = a + h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-1} = b - h_n$, $x_n = b$. Длины отрезков M_1N_1, M_2N_2, $M_3N_3, \ldots, DC$ будут равны соответственно $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3), \ldots, f(x_n)$; следовательно, площадь ступенчатой фигуры, составленной из наших n прямоугольников, равна

$$S_n = f(x_1)\,h_1 + f(x_2)\,h_2 + f(x_3)h_3 + \ldots + f(x_n)\,h_n. \qquad (*)$$

Будем теперь безгранично увеличивать число n; если при этом все длины h_1, h_2, $h_3, \ldots, h_n$ отрезков AM_1, M_1M_2, $M_2M_3, \ldots, M_{n-1}D$ будут безгранично уменьшаться, то сумма площадей наших n прямоугольников будет стремиться к пределу, равному площади криволинейной трапеции $ABCD$ [1]). Следовательно, нам надо только так расположить $n-1$ точек M_1, $M_2, \ldots, M_{n-1}$ на отрезке AD, чтобы можно было подсчитать сумму (*); после этого, полагая в полученной формуле $n \to \infty$, мы найдем площадь трапеции $ABCD$ (конечно, при условии, что при $n \to \infty$ все расстояния между соседними из наших точек стремятся к нулю).

Площадь криволинейного треугольника ACD (см. черт. 18, *б*) естественно подсчитывается точно так же — ведь треугольник является частным случаем трапеции.

В последующих задачах всюду считается, что числа a и b положительны и $b > a$.



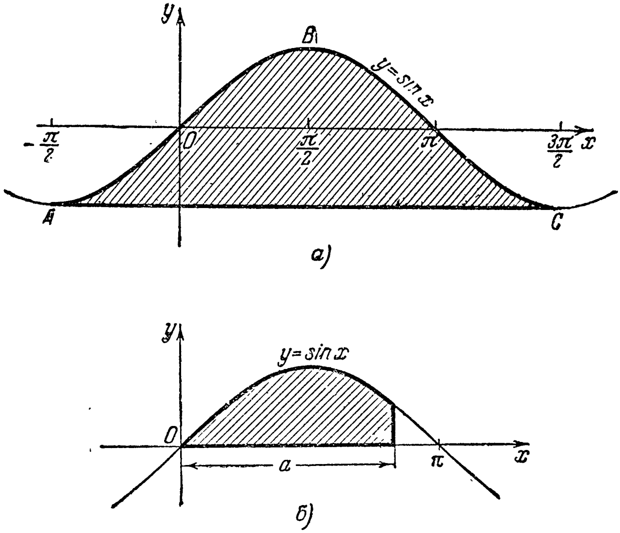
Черт. 20.

146. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = a$ (черт. 20).

---

[1]) Отметим, что за высоты наших n прямоугольников с одинаковым успехом можно было бы принять отрезки AB, M_1N_1, $M_2N_2, \ldots$ $\ldots, M_{n-1}N_{n-1}$ — во всех приведенных ниже задачах легко непосредственно проверить, что сумма площадей таких n прямоугольников при $n \to \infty$ стремится к тому же самому пределу, что и сумма (*). Этот общий предел и будет площадью криволинейной трапеции $ABCD$.

147. а) Найти площадь, ограниченную волной ABC синусоиды $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$ и прямой AC (черт. 21, *а*).



Черт. 21.

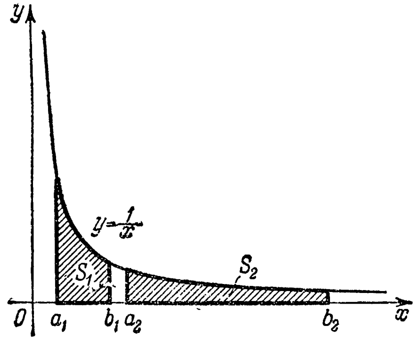
б) Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного синусоидой $y = \sin x$, осью абсцисс и прямой $x = a$, где $a \leqslant \pi$ (черт. 21, *б*).

148*. а) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой m-й степени $y = x^m$, где $m \neq -1$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$.

б) Воспользовавшись результатом задачи а), найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного параболой m-й степени $y = x^m$ $(m > 0)$, осью абсцисс и прямой $x = b$.

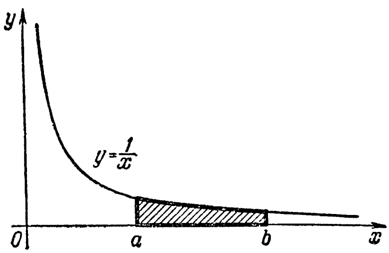
Последующие четыре задачи посвящены вычислению площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, т. е. случаю $m = -1$, исключенному из рассмотрения в условии задачи 148а).

149. Пусть S_1 и S_2 — площади криволинейных трапеций, ограниченных гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и соответственно прямыми $x=a_1$, $x=b_1$ и $x=a_2$, $x=b_2$ (черт. 22). Доказать, что если $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$, то $S_1=S_2$.



Черт. 22.

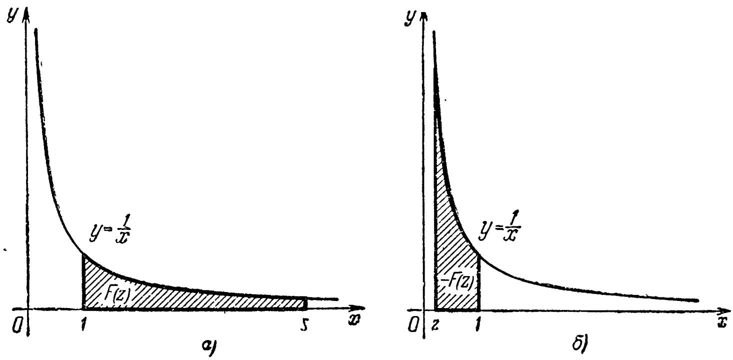
Определим теперь, чему равна площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$ (черт. 23). В силу результата за-



Черт. 23.

дачи 149 эта площадь зависит лишь от отношения $\frac{b}{a}=c$; трапеции, для которых это отношение одинаково, имеют одну и ту же площадь. Другими словами, рассматриваемая площадь является функцией числа $\frac{b}{a}=c$; обозначим ее через $F(c)$.

Очевидно, что для каждого числа z, большего 1, $F(z)$ равно площади криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=z$ (см. черт. 24, a, на котором эта площадь заштрихована). Естественно считать, что $F(1)=0$; так мы и будем поступать в дальнейшем. Что касается чисел z, меньших единицы,



Черт. 24.

то нам будет удобно считать, что для них $F(z)$ равно площади криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=z$ и $x=1$ (черт. 24, $б$), в з я т о й со з н а к о м м и н у с. Тем самым функция $F(z)$ определена уже для всех положительных значений z; согласно этому определению $F(z)>0$ при $z>1$, $F(1)=0$ и $F(z)<0$ при $z<1$.

Последующие три задачи посвящены изучению функции $F(z)$; они приводят к заключению, что эта функция совпадает с хорошо известной из школьного курса алгебры логарифмической функцией (при некотором специальном основании логарифмов, отличном от 10).

150. Доказать, что при любых положительных z_1 и z_2

$$F(z_1 z_2)=F(z_1)+F(z_2).$$

151. Доказать, что функция $F(z)$ принимает значение 1 в некоторой точке, расположенной между 2 и 3.

Значение z, для которого $F(z)=1$, мы будем далее всегда обозначать буквой e. Из задачи 151 вытекает, что $2<e<3$.

Число e играет в математике значительную роль и часто появляется в разнообразных вопросах, на первый взгляд никак не связанных с определением площади «под гиперболой» (см., например, задачи 156—158, 160—161 или 78).

152. Доказать, что

$$F(z)=\log_e z.$$

Итак, геометрические рассмотрения, связанные с вычислением площади «под гиперболой», неожиданно привели нас к известной из курса алгебры функции $\log z$. При этом основание системы логарифмов здесь не является произвольным, как это имеет место при введении логарифмов в школьном курсе алгебры: мы сразу приходим к определенной системе логарифмов, имеющей основанием некоторое число e, заключенное между 2 и 3 [1]). Это обстоятельство может пролить некоторый свет на то, каким образом создатели теории логарифмов Непер и Бюрги, которые независимо друг от друга примерно одновременно разработали эту теорию, оба приняли за основание системы логарифмов вовсе не число 10 (что, казалось бы, было наиболее просто), а одно и то же иррациональное число e. Непер и Бюрги не рассматривали площади под гиперболой, однако, по существу, их определения логарифмов довольно близки к нашему и также сразу приводят к логарифмам при основании e [2]).

Логарифмы при основании e обычно называются **натуральными логарифмами** и обозначаются символом $\ln z$:

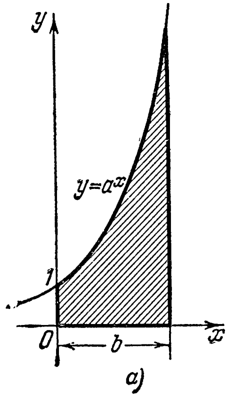
$$\ln z=\log_e z.$$

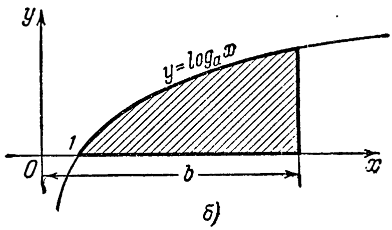
---

[1]) К логарифмам при основании, отличном от e, также можно придти геометрически: для этого надо только вместо гиперболы $y=\frac{1}{x}$ рассматривать гиперболу $y=\frac{c}{x}$, где число c отлично от единицы. Так, например, положив c равным некоторому иррациональному числу, равному приблизительно 0,4343, мы придем к десятичным логарифмам. Однако логарифмы при основании e при таком подходе появляются особенно просто и естественно (ибо из всех гипербол вида $y=\frac{c}{x}$ гипербола $y=\frac{1}{x}$ самая простая).

[2]) Истории теории логарифмов посвящена указанная на стр. 69 книга И. Б. Абельсона.

Таким образом, мы доказали, что $F(z) = \ln z$. Отсюда следует, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $b > a$, равна $\ln \frac{b}{a}$ (см. выше стр. 73). Этот результат имеет многочисленные применения; именно им объясняется то, что логарифмы (и как раз натуральные логарифмы) часто появляются в ответах многих задач, на первый взгляд не имеющих никакого отношения к логарифмической функции (см., например, задачи 159в), 162, 166, 169, 170 или задачи 91, 98, 99).

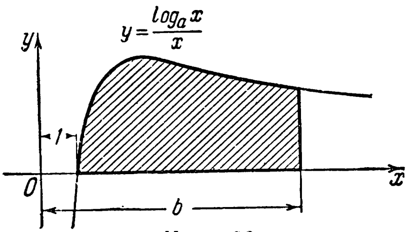




Черт. 25.

153*. а) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = a^x$, осью абсцисс, осью ординат и прямой $x = b$ (черт. 25, *а*).

б) Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \log_a x$, осью абсцисс и прямой $x = b$, где $b > 1$ (черт. 25, *б*).



Черт. 26.

154*. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = \frac{\log_a x}{x}$, осью абсцисс и прямой $x = b$, где $b > 1$ (черт. 26).

13. Несколько замечательных пределов

Собранные ниже задачи на нахождение пределов связаны с геометрическими задачами предыдущего цикла; решение всех этих задач опирается на результаты задач 146—154. В указанных ниже книгах В. А. Кречмара и Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома имеются также чисто алгебраические решения некоторых из этих задач.

Литература

В. А. Кречмар, Задачник по алгебре, гл. X, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, цикл 6, Гостехиздат, 1954 («Библиотека математического кружка», вып. 1).

155. Доказать, что при $k>-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Результат задачи 155 показывает, что при больших n сумма $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$, где $k>-1$, имеет величину порядка $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$. Эта же сумма при $k=-1$ и $k<-1$ будет рассмотрена в задачах 162 и 164.

Ниже мы еще неоднократно будем встречаться с приближенными оценками сумм или произведений в предположении, что число слагаемых (или сомножителей) велико. Получаемые при этом оценки будут двух различных типов. В некоторых случаях удается найти несложное выражение, такое, что *разность* суммы и этого выражения неограниченно уменьшается при возрастании n, т. е. стремится к нулю при $n\to\infty$. В этих случаях *абсолютная ошибка*, проистекающая от замены суммы нашим выражением, при большом n будет очень мала. Иначе говоря, сумма n членов здесь *приближенно равна* рассматриваемому выражению; в качестве знака приближенного равенства мы будем употреблять знак $\approx$.

Но иногда, как, например, в случае задачи 155, имеет место другое положение вещей. Здесь мы не можем утверждать, что разность $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k-\frac{1}{k+1}n^{k+1}$ при больших n становится очень малой. Однако *отношение* $\dfrac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{\frac{1}{k+1}n^{k+1}}$ при больших n очень близко к единице, т. е. заменяя сумму $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ выражением $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$, мы делаем ошибку, может быть значительную по абсолютной величине, но малую по сравнению с самой суммой $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ (т. е. относительная ошибка при этом будет мала). В подобных случаях в математике говорят об эквивалентности двух выражений и употребляют знак $\sim$; так, результат задачи 155 означает, что сумма $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ эквивалентна $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$:

$$1^k+2^k+3^k\ldots+n^k \sim \frac{1}{k+1}n^{k+1}.$$

156*. а) Доказать, что последовательность чисел

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

возрастающая.

б) Доказать, что последовательность чисел

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^4,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \ldots$$

убывающая.

Из результата задач 156а) и б) легко вытекает, что выписанные в условиях этих задач последовательности чисел стремятся к некоторому (одному и тому же!) пределу. Действительно, последовательность чисел

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots$$

по условиям задачи а) возрастает; кроме того, эти числа не могут расти неограниченно: все они меньше, чем $\left(1+\frac{1}{1}\right)^2=4$, так как

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{1}\right)^2$$

(в силу того, что последовательность задачи б) убывающая). Поэтому члены последовательности стремятся к определенному пределу. Точно так же показывается, что и члены последовательности $\left(1+\frac{1}{1}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^4,\ \ldots$ стремятся к некоторому пределу: эта последовательность убывающая и все составляющие ее числа больше, чем $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$, ибо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{1}\right)^n.$$

Так как, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

то пределы обеих последовательностей совпадают.

Общий предел последовательностей задач 156а) и б) заключен между 2 и 4; он совпадает с числом e, определенным геометрически на стр. 75:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

(см. решение задачи 156).

Из результата задач а) и б) следует, что при всяком целом положительном n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

это позволяет определить число e со сколь угодно большой степенью точности. Первые несколько десятичных знаков числа e таковы: $e=2{,}718281828459045\ldots$ Заметим еще, что при вычислении числа e обыкновенно пользуются не результатами задачи 156, а бесконечным рядом, приведенным ниже в условии задачи 158.

157*. Доказать, что при любом положительном или отрицательном z

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

где e — общий предел последовательностей задач 156а) и б).

Задачу 157 можно сформулировать еще так: доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^z.$$

158.** Доказать, что

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots;$$

в частности (при $z=+1$ и $z=-1$),

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots,$$
$$\frac{1}{e}=e^{-1}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots$$

159. Найти величину следующих пределов:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$.

160*.** Доказать, что при любом целом положительном n число $n!$ заключается в пределах

$$\sqrt{\frac{4}{5}e}\cdot\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\cdot\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

161*.** а) Доказать, что отношение

$$\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

при $n\to\infty$ стремится к определенному пределу C (заключенному в силу результата предыдущей задачи между $\sqrt{\frac{4}{5}e}$ и e, т. е. между 2,43 и 2,72).

б) Доказать, что число C задачи а) равно $\sqrt{2\pi}\approx 2{,}50$ (π есть отношение длины окружности к диаметру: $\pi\approx 3{,}14$).

Из результата задачи 161 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1,$$

т. е. что

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(относительно знака $\sim$ см. выше, стр. 78). Эта приближенная формула называется формулой Стирлинга[1]); она находит многочисленные применения в разных вопросах математики и физики. Оказывается, что уже при $n=10$ формула Стирлинга дает значение $n!$ с очень хорошей точностью (в действительности $10!=3\,628\,800$, а с помощью пятизначных таблиц логарифмов находим, что с точностью до пяти десятичных знаков $\sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10}\approx 3\,598\,700$; таким образом, если заменить $10!$ числом $\sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10}$, то ошибка будет менее 1%); при дальнейшем же росте n точность этой формулы быстро возрастает. В то же время именно при больших значениях n непосредственно вычисление $n!$ как произведения всех целых чисел от 1 до n становится очень громоздким. Некоторые применения формулы Стирлинга см. в примечаниях к решениям задач 76б), 77а) и б).

162. Обозначим

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n=\gamma_n.$$

Доказать, что:

а) при любом n число γ_n заключено между 0 и 1;

б) при $n\to\infty$ число γ_n стремится к определенному пределу γ (также, конечно, заключенному между 0 и 1).

Таким образом, при больших значениях n имеет место приближенное равенство

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln(n+1)+\gamma,$$

точность которого возрастает с ростом n. Поскольку при $n\to\infty$ разность

$$\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

стремится к нулю $\left(\text{ибо}\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1\right)$, то это равенство

[1]) Дж. Стирлинг (1692—1770) — шотландский математик.

можно записать также в более изящном виде:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx \ln n+\gamma$$

(ср. с результатом задачи 169).

Число

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n\right)$$

оказывается существенным для ряда задач высшей математики (см., например, ниже так называемую «третью теорему Мертенса», стр. 87—88); оно называется постоянной Эйлера. Первые несколько десятичных знаков этого числа таковы: $\gamma=0{,}57721566\ldots$

163*. а) Доказать, что существует такое число C, что разность

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg(n-1)}{(n-1)}-C\lg^2 n=\delta_n$$

при любом n заключается между $-\frac{1}{4}$ и $+\frac{1}{4}$. Найти это число C.

б) Доказать, что δ_n при $n\to\infty$ стремится к определенному пределу $\left(\text{также заключающемуся между} -\frac{1}{4} \text{ и } +\frac{1}{4}\right)$.

Таким образом, при больших значениях n имеет место приближенное равенство

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg(n-1)}{n-1}\approx C\lg^2 n+\delta,$$

или, что то же самое (ср. с задачей 162),

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg n}{n}\approx C\lg^2 n+\delta.$$

Точность этого равенства возрастает при возрастании n.

Результат настоящей задачи интересно сравнить с теоремой задачи 167.

164. Доказать, что при $l>1$ сумма

$$1+\frac{1}{2^l}+\frac{1}{3^l}+\ldots+\frac{1}{n^l}$$

при неограниченном росте n стремится к определенному пределу C, заключенному между $\frac{1}{l-1}$ и $\frac{l}{l-1}$.

Таким образом, при большом n имеет место приближенное равенство, точность которого возрастает с увеличением n:

$$1+\frac{1}{2^l}+\frac{1}{3^l}+\ldots+\frac{1}{n^l}\approx C;$$

здесь C — некоторое постоянное число, заключенное в пределах $\frac{1}{l-1}<C<\frac{l}{l-1}$.

Предложение задачи 164 можно сформулировать также следующим образом: сумма бесконечного ряда

$$1+\frac{1}{2^l}+\frac{1}{3^l}+\frac{1}{4^l}+\ldots+\frac{1}{n^l}+\ldots, \qquad (*)$$

где $l>1$, заключена между $\frac{1}{l-1}$ и $\frac{l}{l-1}$; так, например, при $l=2$ эта сумма заключена между 1 и 2, а при $l=4$ — между $\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{3}$. [Относительно точного выражения для сумм рядов $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ и $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ см. выше задачи 143а) и б). При $l\leqslant 1$ бесконечный ряд (*) не имеет конечной суммы; см. выше задачи 155 и 162.]

14. Несколько задач из теории простых чисел

Теория чисел — это часть математики, изучающая свойства целых чисел. Значительное место в теории чисел занимают вопросы, связанные с рассмотрением простых чисел (т. е. чисел, не имеющих делителей кроме самого себя и единицы); к этому кругу вопросов относятся и приведенные ниже задачи 165—170. Центральное место здесь занимает теорема П. Л. Чебышева (задача 166), относящаяся к числу наиболее глубоких предложений теории чисел.

Отметим, что при всей элементарности формулировок задачи теории простых чисел относятся к числу труднейших в математике; ряд из них был решен только в самое последнее время, а некоторые не решены и до настоящего времени. Очень больших успехов в теории простых чисел добились в последние десятилетия московские математики Л. Г. Шнирельман (ум. в 1938 г.) и особенно И. М. Виноградов. Элементарные методы этой теории в самое последнее время получили весьма значительное развитие в работах датского математика Сельберга.

Литература

Л. Г. Шнирельман, Простые числа, М.— Л., Гостехиздат, 1940.

И. М. Виноградов, Теория чисел, вопросы к гл. II, М.— Л., Гостехиздат, 1952.

И. В. Арнольд, Теория чисел, гл. III, М., Учпедгиз, 1939.

Число простых чисел, не превосходящих целого числа N, обозначается через $\pi(N)$; так,

$$\pi(1)=0,\ \pi(2)=1,\ \pi(3)=\pi(4)=2,\ \pi(5)=\pi(6)=3,$$
$$\pi(7)=\pi(8)=\pi(9)=\pi(10)=4,\ \pi(11)=\pi(12)=5,$$
$$\pi(13)=\pi(14)=\pi(15)=\pi(16)=6, \ldots$$

165.** Доказать, что при $n\to\infty$

$$\frac{\pi(N)}{N}\to 0.$$

166*.** Теорема Чебышева. Доказать, что можно найти два таких числа A и B, что для каждого N

$$A\frac{N}{\lg N}<\pi(N)<B\frac{N}{\lg N}.$$

Очевидно, что предложение задачи 165 вытекает из теоремы Чебышева: из неравенства $\pi(N)<B\frac{N}{\lg N}$ следует, что $\frac{\pi(N)}{N}\to 0$ при $N\to\infty$.

Теорема Чебышева утверждает, что число $\pi(N)$ простых чисел, не превосходящих N, имеет порядок $\frac{N}{\lg N}$; эта замечательная теорема явилась первым шагом в решении вопроса о распределении простых чисел.

Чебышев нашел довольно тесные границы, в которых может заключаться $\pi(N)$; именно, он показал, что

$$0{,}40\frac{N}{\lg N}<\pi(N)<0{,}48\frac{N}{\lg N}.$$

Этот результат приобретает более изящный вид, если перейти к натуральным логарифмам (логарифмы при основании $e=2{,}718\ldots$; см. задачи 149—152): $\pi(N)$ заключается в границах

$$0{,}92\frac{N}{\ln N}<\pi(N)<1{,}11\frac{N}{\ln N}.$$

Таким образом, мы видим, что ход функции $\pi(N)$ с большой точностью передается функцией $\frac{N}{\ln N}$ (числовые множители 0,92 и 1,11 мало отличаются от 1). Чебышев доказал также, что если отношение $\pi(N):\frac{N}{\ln N}$ при $N\to\infty$ стремится к какому-либо пределу, то этот предел наверное равен 1. То, что предел отношения $\pi(N):\frac{N}{\ln N}$ при $N\to\infty$ на самом деле существует (и, следовательно, равен 1), удалось доказать лишь в самом конце прошлого века, т. е. примерно через 50 лет после замечательных работ П. Л. Чебышева. При этом первое доказательство существования предела отношения $\pi(N):\frac{N}{\ln N}$ (принадлежащее французскому математику Ж. Адамару) потребовало привлечения весьма сложного аппарата, относящегося к высшей математике; элементарное (хотя и чрезвычайно сложное) доказательство этого впервые было найдено датским математиком Сельбергом лишь в наши дни.

Итак, окончательно имеем

$$\pi(N)\sim\frac{N}{\ln N}$$

(относительно знака $\sim$ см. выше, стр. 78).

167*.** Первая теорема Мертенса[1]). Пусть 2, 3, 5, 7, 11, ..., p — все простые числа, не превосходящие целого числа N. Доказать, что при любом N выражение

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\frac{\lg 7}{7}+\frac{\lg 11}{11}+\ldots+\frac{\lg p}{p}-\lg N$$

по абсолютной величине будет меньше некоторого числа R (в качестве числа R можно взять, например, число 4).

[1]) Ф. Мертенс — австрийский математик, специалист по теории чисел. Основные работы относятся к концу XIX в.

При неограниченном увеличении числа N логарифм этого числа также будет неограниченно расти: $\lg N$ будет больше любого наперед заданного числа K, если только N взять большим, чем 10^K. Сумма

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\frac{\lg 7}{7}+\frac{\lg 11}{11}+\ldots+\frac{\lg p}{p},$$

где 2, 3, 5, 7, 11, ..., p — все простые числа, не превосходящие N, при неограниченном увеличении N также неограниченно увеличивается. Первая теорема Мертенса утверждает, что разность этих двух неограниченно возрастающих выражений всегда будет сравнительно мала: по абсолютной величине эта разность меньше числа 4. Таким образом, сумму

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\frac{\lg 7}{7}+\frac{\lg 11}{11}+\ldots+\frac{\lg p}{p}$$

можно приближенно заменить простым выражением $\lg N$; ошибка при этом всегда будет меньше числа 4, так что при большом N относительная ошибка будет очень мала.

Из первой теоремы Мертенса, в частности, следует, что

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg p}{p}\sim\lg N$$

(относительно обозначений см. выше, стр. 78); действительно, при $N\longrightarrow\infty$

$$\frac{\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg p}{p}}{\lg N}-1=$$

$$=\frac{\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg p}{p}-\lg N}{\lg N}\longrightarrow 0.$$

168. а) Формула Абеля[1]). Пусть имеем сумму

$$S=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n,$$

где a_1, a_2, a_3, ..., a_n и b_1, b_2, b_3, ..., b_n — какие-то две последовательности чисел. Суммы b_1, b_1+b_2, $b_1+b_2+b_3$, ..., $b_1+b_2+\ldots+b_n$ обозначим соответственно через B_1,

[1]) Нильс Генрик Абель (1802—1829)— замечательный норвежский математик, сумевший за свою короткую жизнь получить ряд первоклассных результатов в алгебре и в математическом анализе.

B_2, $B_3, \ldots, B_n$. Доказать, что

$$S = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + (a_3 - a_4) B_3 + \ldots \\ \ldots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n.$$

б) С помощью формулы Абеля вычислить суммы

$$1)\ 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1};$$
$$2)\ 1 + 4q + 9q^2 + \ldots + n^2 q^{n-1}.$$

169*.** Вторая теорема Мертенса. а) Пусть 2, 3, 5, 7, 11, ..., p — все простые числа, не превосходящие целого числа N. Доказать, что при любом N выражение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{p} - \ln \ln N$$

($\ln N$ — натуральный логарифм N; см. выше, стр. 75) по абсолютной величине будет меньше некоторого числа T (в качестве числа T можно взять, например, число 15).

б) Доказать, что разность

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{p} - \ln \ln N$$

при $N \to \infty$ стремится к некоторому определенному пределу β[1]).

Таким образом, имеет место приближенное равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{p} \approx \ln \ln N + \beta,$$

точность которого неограниченно возрастает с ростом N.

170*.** Третья теорема Мертенса. Пусть 2, 3, 5, 7, 11, ..., p — все простые числа, не превосходящие целого числа N. Доказать, что существует число c, такое, что при $N \to \infty$ отношение произведения

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

к числу $\frac{c}{\ln N}$ стремится к единице.

---

[1]) Из результата задачи а) следует, что $\beta < 15$; на самом деле приближенное значение этого числа равно 0,25.

Третью теорему Мертенса можно записать также в следующем виде:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{c}{\ln N}$$

(относительно знака $\sim$ см. стр. 78). Используя методы высшей математики, можно доказать, что постоянное число c равно $e^{-\gamma}$, где $e \approx 2{,}718$ — основание системы натуральных логарифмов (см. стр. 75), а $\gamma \approx 0{,}577$ — так называемая постоянная Эйлера, определенная в условии задачи 162.

Отметим еще следующую любопытную формулу, близкую к третьей теореме Мертенса:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p}\right)\sim\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\ln N$$

(2, 3, 5, 7, ..., p — все простые числа, не превосходящие N); здесь, как и выше, e — основание натуральных логарифмов, γ — постоянная Эйлера, а $\pi \approx 3{,}142$ — отношение длины окружности к диаметру. Эта формула следует из того, что

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p}\right)=$$
$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

и

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\ln N}$$

(см. задачу 170), а

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\sim\frac{6}{\pi^2}$$

в силу формулы Эйлера, составляющей содержание задачи 143а) (ср. с решением задачи 90а)).

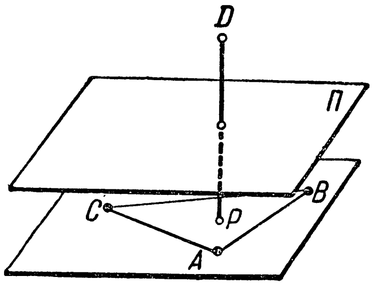
Три теоремы Мертенса (задачи 167, 169, 170), так же как и теорема Чебышева — Адамара (см. текст, относящийся к задаче 166), указывают на замечательную связь, существующую между распределением простых чисел в ряду всех целых чисел и натуральными логарифмами.

РЕШЕНИЯ

РАЗДЕЛ I

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

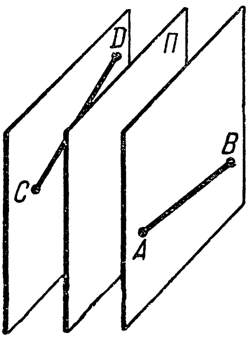
1. Так как четыре точки не лежат в одной плоскости, то плоскость, равноудаленная от этих точек, не может располагаться по одну сторону от всех их. Поэтому возможны лишь следующие два случая: 1) три точки лежат по одну сторону от рассматриваемой плоскости, а четвертая — по другую и 2) по каждую сторону от плоскости лежат по две точки.



Черт. 27.

Рассмотрим первый случай. Пусть точки A, B и C лежат по одну сторону от плоскости П, равноудаленной от точек A, B, C и D, а точка D — по другую сторону (черт. 27). Точки A, B и C не могут лежать на одной прямой — иначе все четыре точки лежали бы в одной плоскости. Так как плоскость П равноудалена от точек A, B и C, расположенных с одной и той же стороны от нее, то эта плоскость должна быть параллельна плоскости ABC. Для того чтобы расстояние от точки D до этой плоскости было равно расстоянию от нее до трех точек A, B и C, плоскость П должна проходить через середину перпендикуляра DP, опущенного из точки D на плоскость ABC (см. черт. 27). Итак, равноудаленная от точек A, B, C и D плоскость П, по одну сторону которой расположены точки A, B и C, а по другую — точка D, находится единственным образом.

Совершенно аналогично находится плоскость, равноудаленная от данных четырех точек, по одну сторону которой находится только точка C (или точка B, или точка A), а по другую — остальные три точки. Итого существуют ч е т ы р е плоскости, равноудаленные от данных четырех точек и такие, что по одну сторону от них расположена только одна точка, а по другую — остальные три.

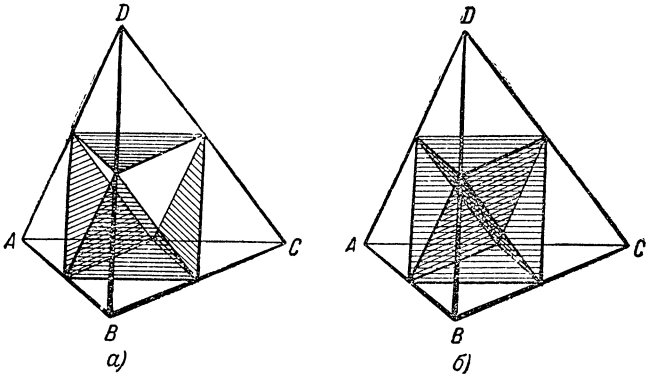


Черт. 28.

Рассмотрим второй случай. Пусть точки A и B лежат по одну сторону от плоскости П, равноудаленной от точек A, B, C и D, а точки C и D — по другую сторону (черт. 28). Так как плоскость П равноудалена от точек A и B, лежащих по одну сторону П, то она должна быть параллельна прямой AB. Точно так же доказывается, что эта плоскость должна быть параллельна прямой CD. Так как точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD должны быть скрещивающимися. Проведем через скрещивающиеся прямые AB и CD две параллельные плоскости; очевидно, что плоскость П должна быть параллельна этим плоскостям и равноудалена от них, т. е. должна проходить точно посредине между этими плоскостями (см. черт. 28). Таким образом, имеется единственная плоскость, равноудаленная от точек A, B, C и D и такая, что точки A и B лежат по одну сторону от нее, а точки C и D — по другую.

Точно так же существует единственная плоскость, равноудаленная от наших четырех точек и такая, что по ту же сторону, что и точка A, от нее находится только точка C (соответственно — точка D), а остальные две точки (B и D или B и C) находятся по другую сторону. Следовательно, всего существуют три плоскости, равноудаленные от данных четырех точек и такие, что по одну сторону от каждой из них находятся две из четырех точек, а по вторую — остальные две.

Итак, общее число плоскостей, равноудаленных от данных четырех точек пространства, равно $4+3=7$. [Если рассмотреть треугольную пирамиду (тетраэдр) с вершинами A, B, C и D,



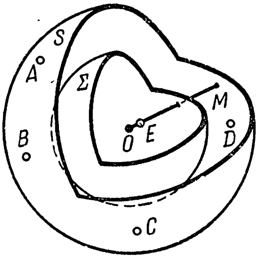
Черт. 29.

то четыре из этих семи плоскостей будут проходить параллельно граням пирамиды через середины соответствующих высот (черт. 29, *а*), а остальные три — параллельно парам противоположных ребер на равных расстояниях от них (черт. 29,*б*).]

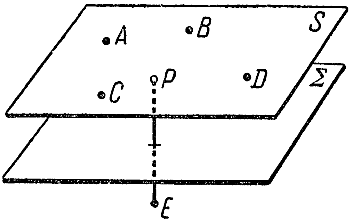
2. Решение этой задачи близко к решению задачи **1.** Так как данные точки A, B, C, D и E не все лежат на одной сфере (или в одной плоскости), то они не могут все лежать по одну сторону от сферы (т. е. все внутри или все вне сферы) или от плоскости, равноудаленной от этих точек. Следовательно, остается рассмотреть лишь два случая: 1) четыре точки лежат по одну сторону от рассматриваемой сферы (или плоскости) Σ, а пятая — по другую; 2) три точки лежат по одну сторону от сферы (плоскости) Σ, а остальные две — по другую.

Пусть точки A, B, C и D лежат по одну сторону от сферы (или плоскости) Σ, а точка E — по другую. Точки A, B, C и D не могут все лежать на одной окружности или на одной прямой, так как при этом все пять точек лежали бы на одной сфере или в одной плоскости. Поэтому через четыре точки A,

B, C и D можно провести единственную сферу (или плоскость) S. Если S — сфера (черт. 30), то сфера Σ должна быть равноудалена от сферы S и от точки E, т. е. должна быть концентрической с S и проходить через середину отрезка ME, где M — точка пересечения прямой OE (O — центр сферы S) со сферой S. Если S — плоскость (черт. 31), то Σ тоже будет плоскостью,



Черт. 30.

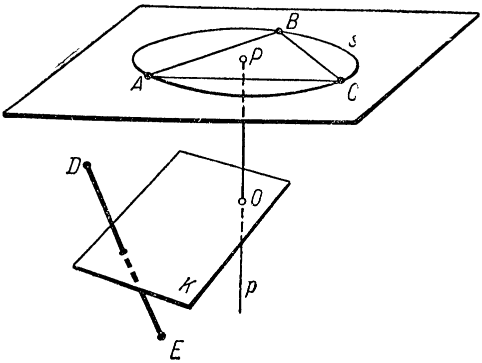


Черт. 31.

а именно — плоскостью, параллельной S и проходящей через середину перпендикуляра EP, опущенного из точки E на плоскость S. Итак, во всех случаях имеется единственная сфера (или плоскость) Σ, равноудаленная от точек A, B, C, D и E и такая, что по одну сторону Σ располагаются точки A, B, C и D, а по другую — точка E. Точно так же существует единственная сфера или плоскость, равноудаленная от этих пяти точек и такая, что по одну сторону от нее располагается точка D (или C, или B, или A), а по другую — остальные четыре точки. Следовательно, всего существует пять сфер (или плоскостей), равноудаленных от данных пяти точек и таких, что по одну сторону от каждой из них находится одна из пяти точек, а по другую — остальные четыре.

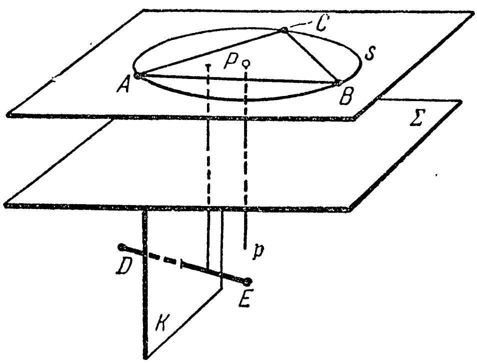
Пусть теперь точки A, B, C лежат по одну сторону от сферы (или плоскости) Σ, а точки D, E — по другую. Через точки A, B и C можно провести единственную окружность (или прямую) s. Предположим сначала, что s — окружность (черт. 32).

Если Σ есть сфера, то центр ее O должен быть равноудален от точек A, B и C; следовательно, проекция точки O на плоскость ABC должна совпасть с центром P окружности s, описанной около треугольника ABC. Итак, точка O должна лежать на перпендикуляре p, восставленном в точке P к плоскости ABC. С другой стороны, точка O должна быть равноудалена от точек E и D, т. е. должна лежать в плоскости K, проведенной через середину отрезка DE перпендикулярно к этому отрезку. Таким образом, центром сферы Σ может служить только точка O пересечения плоскости K с прямой p;



Черт. 32.

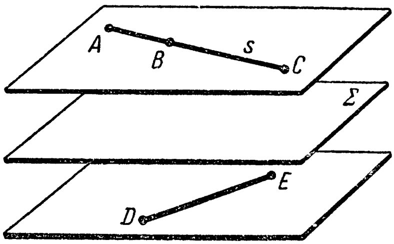
радиус этой сферы должен быть равен $\frac{OA+OD}{2}$ (сфера Σ должна проходить точно посредине между сферами Σ_1 и Σ_2, имеющими тот же центр O и проходящими соответственно через точки A, B и C и через точки D и E).



Черт. 33.

Если плоскость K не пересекается с p, т. е. параллельна этой прямой (черт. 33), то отрезок DE будет параллелен плоскости ABC; в этом случае равноудаленной от наших пяти точек будет плоскость Σ, параллельная плоскости ABC и проходящая через середину перпендикуляра, опущенного из какой-нибудь точки отрезка DE на эту плоскость. Случай, когда прямая p лежит в плоскости K, можно не рассматривать, ибо в этом случае, как легко видеть, через пять точек A, B, C, D и E можно провести сферу, что противоречит условию задачи.

Предположим теперь, что s есть прямая (черт. 34). В этом случае точки A, B и C не могут быть равноудалены от сферы,



Черт. 34.

если они все находятся с одной стороны от нее. Но в этом случае наши пять точек будут равноудалены от плоскости Σ, проходящей посредине между двумя параллельными плоскостями, содержащими скрещивающиеся прямые ABC и DE; точки A, B и C будут расположены с одной стороны от этой плоскости, а точки D и E — с другой.

Итак, во всех случаях существует единственная сфера или плоскость Σ, равноудаленная от точек A, B, C, D и E и такая, что точки A, B и C располагаются по одну сторону Σ, а точки D и E — по другую сторону. Точно так же имеется единственная сфера или плоскость, равноудаленная от этих пяти точек и такая, что по одну сторону от нее находятся точки E и C (или E и B, или E и A, или D и C, или D и B, или D и A, или C и B, или C и A, или B и A), а по другую сторону — остальные три точки. Следовательно, всегда имеется ровно д е с я т ь сфер или плоскостей, равноудаленных от данных пяти точек (не лежащих на одной сфере или в одной плоскости) и таких, что по одну сторону от каждой из них располагаются две из пяти точек, а по другую — остальные три.

Таким образом, общее число сфер или плоскостей, равноудаленных от наших пяти точек, равно $5+10=15$.

3. Задача сводится к тому, чтобы определить, сколько имеется точек (центров искомых сфер), равноудаленных от четырех граней пирамиды.

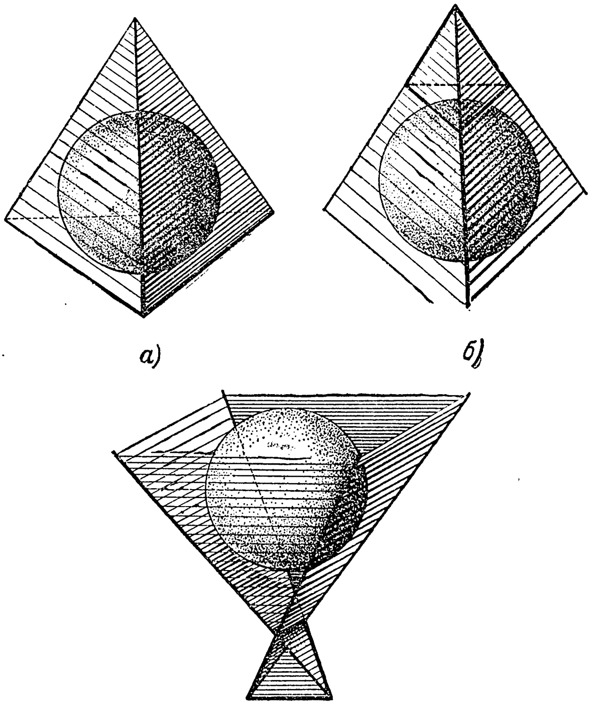
Геометрическим местом точек, равноудаленных от граней данного двугранного угла, является плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и делящая этот угол пополам — *биссекториальная плоскость двугранного угла*.

Так как две пересекающиеся плоскости образуют две пары вертикальных двугранных углов, то геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, состоит из двух плоскостей, проходящих через линию пересечения первых двух плоскостей.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от граней трехгранного угла, является прямая пересечения биссекториальных плоскостей трех двугранных углов трехгранного угла — *биссекториальная прямая трехгранного угла*.

Так как три пересекающиеся плоскости образуют четыре пары вертикальных трехгранных углов, то геометрическое место точек, равноудаленных от трех пересекающихся плоскостей, состоит из четырех прямых, проходящих через точку пересечения трех плоскостей.

Пусть теперь Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 — плоскости граней пирамиды. Рассмотрим трехгранный угол пирамиды, образованный плоскостями Π_1, Π_2 и Π_3. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех граней этого угла, состоит из четырех прямых β_1, β_2, β_3 и β_4. Далее, геометрическое место точек, равноудаленных от плоскостей Π_1 и Π_4, состоит из двух плоскостей B_1 и B_2. Очевидно, что каждая из точек пересечения одной из прямых β_1, β_2, β_3 и β_4 с одной из плоскостей B_1 и B_2 (и только эти точки) будет равноудалена от плоскостей Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Таким образом, всего мы получаем, вообще говоря, восемь точек, равноудаленных от плоскостей граней пирамиды, а следовательно, и восемь сфер, касающихся этих граней. Нетрудно видеть, что из этих восьми сфер одна заключена внутри пирамиды (вписанная сфера; черт. 35, *а*), четыре расположены вне пирамиды по одной внутри каждого из ее трехгранных углов («вневписанные» сферы; черт. 35, *б*) и три — по одной внутри двугранного угла пирамиды и внутри угла, вертикального к противоположному двугранному углу (черт. 35, *в*).



а) *б*) *в*)

Черт. 35.

Отметим, что в частных случаях трехгранная пирамида может иметь и меньше восьми сфер, касающихся плоскостей всех граней. Так, например, правильный тетраэдр имеет только пять таких сфер (сферы только такого типа, какие изображены на черт. 35, *а* и *б*). Это связано с тем, что в отдельных случаях некоторые из прямых β_1, β_2, β_3

и β_4 могут оказаться параллельными каким-либо из плоскостей B_1 и B_2.

Примечание. Можно показать, что если сумма площадей двух граней треугольной пирамиды равна сумме площадей двух других граней, то существует всего 7 сфер, касающихся плоскостей всех граней; если площади граней попарно равны, то существует 6 таких сфер; наконец, если все грани пирамиды равновелики (а следовательно, и равны; см., например, задачу 29 книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, «Библиотека математического кружка», вып. 3), то существует лишь 5 таких сфер. См. по этому поводу «Элементарную геометрию» Ж. Адамара, ч. 2 (Москва, Учпедгиз, 1951), решение задачи 701.

4. Предположим, что грани куба закрашиваются в зеленый, синий, красный, желтый, белый и черный цвета. Поместим куб так, чтобы зеленой была нижняя грань. При этом верхняя грань может оказаться закрашенной одним из пяти оставшихся цветов. Ясно, что никакие две раскраски, при которых верхняя (т. е. противоположная зеленой) грань будет закрашена различными цветами, нельзя совместить друг с другом при помощи вращения. Определим теперь число раскрасок, при которых верхняя грань оказывается закрашенной некоторым определенным цветом (скажем, синим); общее число раскрасок равно упятеренному этому числу (ибо верхняя грань может оказаться закрашенной любым из 5 оставшихся цветов).

Выберем один из четырех цветов, оставшихся после вычеркивания зеленого и синего (скажем, красный) и поместим наш куб так, чтобы красной гранью была задняя грань; этого всегда можно достигнуть поворотом куба около вертикальной оси. У нас остается еще 3 цвета — желтый, белый и черный, которыми мы должны закрасить 3 грани (переднюю и две боковые). Очевидно, что все получающиеся при этом раскраски нельзя совместить друг с другом при помощи вращения — при любом вращении или нижняя грань перестанет быть зеленой, или задняя грань перестанет быть красной. Три грани можно закрасить тремя цветами шестью различными способами (передняя грань может быть закрашена любым из трех цветов, и при каждой из таких раскрасок мы можем еще двумя способами выбрать цвет левой грани).

Следовательно, общее число раскрасок, не совмещающихся при вращениях куба, равно $5 \cdot 6 = 30$.

5. 10 рабочих, составляющих первую бригаду, можно выбрать из тридцати $C_{30}^{10} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 21}{10!}$ способами. После этого из оставшихся 20 рабочих можно $C_{20}^{10} = \frac{20 \cdot 19 \cdots 11}{10!}$ способами выбрать 10 рабочих, входящих во вторую бригаду. Комбинируя каждый из способов составления первой бригады с каждым из способов составления второй бригады, мы получим всего $\frac{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 11}{(10!)^2} = \frac{30!}{(10!)^3}$ способов распределения рабочих по трем бригадам. Однако здесь считаются различными распределения, получаемые одно из другого только переменой номеров бригад; поэтому полученное число надо разделить еще на $3!$ — число способов, каким можно приписать три номера трем бригадам. Итак, искомое число способов равно

$$\frac{30!}{3!\,(10!)^3} = 2\,775\,498\,395\,670.$$

Примечание. Совершенно аналогично можно заключить, что из nk рабочих можно $\frac{(nk)!}{(n!)^k k!}$ способами составить k бригад по n рабочих в каждой.

6. Обозначим 11 сортов пирожных через $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{11}$. Одно пирожное можно, очевидно, выбрать 11 способами. Рассмотрим теперь, сколькими способами можно выбрать в кондитерской два пирожных. Образуем всевозможные группы по два пирожных, приписав к пирожному каждого сорта последовательно по пирожному всех 11 сортов и затем отдельно снова тот же самый сорт, как это указано в нижеследующей таблице:

$$\begin{array}{c}
p_1p_1,\ p_1p_2,\ p_1p_3,\ \ldots,\ p_1p_{11};\ p_1p_1,\\
p_2p_1,\ p_2p_2,\ p_2p_3,\ \ldots,\ p_2p_{11};\ p_2p_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_{11}p_1,\ p_{11}p_2,\ p_{11}p_3,\ \ldots,\ p_{11}p_{11};\ p_{11}p_{11}.
\end{array}$$

Эта таблица содержит 11 строк и 12 столбцов. Каждая пара пирожных встречается в ней дважды: пары, составленные из разных пирожных, встречаются в разных строках таблицы;

пары, составленные из двух одинаковых пирожных, дважды встречаются в одной строке. Таким образом, общее число различных пар равно

$$\frac{11\cdot 12}{2}=66.$$

Рассмотрим теперь, сколько различных троек пирожных можно образовать. Составим таблицу, состоящую из 66 строк, соответствующих отдельным парам пирожных, приписав к каждой паре последовательно все 11 имеющихся сортов пирожных и затем отдельно снова пирожные, входящие в эту пару:

$$\begin{array}{l}
p_1p_1p_1,\ p_1p_1p_2,\ p_1p_1p_3,\ \ldots,\ p_1p_1p_{11};\ p_1p_1p_1,\ p_1p_1p_1,\\
p_1p_2p_1,\ p_1p_2p_2,\ p_1p_2p_3,\ \ldots,\ p_1p_2p_{11};\ p_1p_2p_1,\ p_1p_2p_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_{11}p_{11}p_1,\ p_{11}p_{11}p_2,\ p_{11}p_{11}p_3,\ \ldots,\ p_{11}p_{11}p_{11};\ p_{11}p_{11}p_{11},\ p_{11}p_{11}p_{11}.
\end{array}$$

При этом в таблицу, содержащую 66 строк и $11+2=13$ столбцов, каждая тройка пирожных входит трижды. Действительно, например, тройка $p_1p_2p_3$, составленная из трех различных пирожных, входит в строки таблицы, соответствующие парам p_1p_2, p_1p_3 и p_2p_3; тройка $p_1p_1p_2$ два раза входит в строку, соответствующую паре p_1p_2, и один раз — в строку, соответствующую паре p_1p_1; тройка $p_1p_1p_1$ три раза входит в строку, соответствующую паре p_1p_1. Таким образом, общее число возможных троек пирожных равно

$$\frac{66\cdot 13}{3}=286.$$

Дальше составляем таблицу из четверок пирожных, приписывая к каждой тройке последовательно все 11 сортов пирожных и затем отдельно снова пирожные, входящие в состав этой тройки; в этой таблице, состоящей из 286 строк и $11+3=14$ столбцов, каждая четверка пирожных встречается четыре раза. Продолжая далее рассуждать таким же образом, мы окончательно получим, что искомое число возможных шестерок пирожных равно

$$\frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=8008.$$

Примечание. Если бы общее число сортов пирожных было равно n, а число выбираемых пирожных m, то в качестве ответа на наш вопрос мы получили бы число

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}=C_{n+m-1}^{m}.$$

Это выражение называют иногда числом сочетаний с повторениями из n элементов по m.

7. По условию задачи для любых пяти членов комиссии должен найтись замок, ключ к которому отсутствует у всех этих членов комиссии (но есть у каждого из отсутствующих шести членов, поскольку присутствие каждого из этих шести членов уже делает возможным заседание комиссии). Таким образом, наименьшее возможное число замков равно числу способов, которыми можно выбрать из 11 членов комиссии пять ее членов, т. е. числу сочетаний из 11 элементов по 5:

$$C_{11}^{5}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=462.$$

Так как при этом к каждому замку должно быть шесть ключей, то общее число ключей будет равно

$$462\cdot 6=2772.$$

Каждый член комиссии будет иметь

$$2772:11=252$$

ключа.

При этом, для того чтобы поставленные в формулировке задачи условия выполнялись, надо раздать ключи определенным образом. А именно, надо чтобы шесть ключей каждого из C_{11}^{5} замков находились у определенной группы из шести членов комиссии и чтобы для каждой группы из шести членов был замок, ключ от которого имеется у этой шестерки членов комиссии, и только у них. Тогда заседание комиссии будет невозможным, если только отсутствуют 6 (или больше) членов комиссии.

Если бы число членов комиссии было равно n и требовалось бы, чтобы сейф можно было открыть при наличии m членов, то число замков у сейфа должно было бы быть равным

$$C_{n}^{m-1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)},$$

а число ключей у каждого члена комиссии

$$\frac{m}{n}C_n^{m-1}=\frac{m(n-1)\ldots(n-m-2)}{1\cdot2\cdot3\ldots(m-1)}.$$

Полученный ответ указывает, что подобный порядок хранения бумаг практически неосуществим (уже при сравнительно небольшом составе комиссии на открывание сейфа уходил бы целый день).

8. После первого оборота окажутся зачеркнутыми все числа, дающие при делении на 15 в остатке 1; последним таким числом будет 991. Первым числом, зачеркнутым при втором обороте, будет $991+15-1000=6$; далее, при втором обороте будут вычеркнуты все числа, дающие при делении на 15 в остатке 6 (последнее такое число 996). Первым числом, зачеркнутым при третьем обороте, будет $996+ +15-1000=11$; далее, при третьем обороте будут вычеркнуты все числа, дающие при делении на 15 в остатке 11 (последнее такое число 986). Первым числом, зачеркнутым при четвертом обороте, будет $986+15-1000=1$. Так как это число уже было вычеркнуто раньше, то в дальнейшем, отсчитывая промежутки в 15 чисел, мы все время будем попадать на уже вычеркнутые числа, так что новых зачеркнутых чисел больше не прибавится.

Таким образом, окончательно будут зачеркнуты все числа, дающие при делении на 15 в остатке 1, 6 или 11, и только эти числа. Но числа, дающие при делении на 15 в остатке 1, 6 или 11, совпадают со всеми числами, дающими при делении на 5 в остатке 1. Таких чисел среди первых 1000 будет $\frac{1000}{5}=200$ (числа 1, 6, 11, 16, ..., $996=5\cdot199+1$). Следовательно, незачеркнутыми останутся $1000-200= =800$ чисел.

9. П е р в о е р е ш е н и е. Подсчитаем число чисел нашего ряда, в записи которых н е в с т р е ч а е т с я цифра 1. Добавим в самом начале этого ряда еще число 0 (нуль) и откинем последнее число 10 000 000 000; мы получим ряд из 10^{10} чисел, содержащий на единицу больше чисел, в записи которых не встречается 1, чем первоначальный ряд. Условимся теперь приписывать ко всем менее чем десятизначным числам полученного ряда столько нулей впереди, чтобы они стали десятизначными. Новый ряд будет состоять из 10^{10} десятизначных чисел, начиная с 0 000 000 000 и кончая 9 999 999 999. Если число этого ряда не содержит цифры 1, то это значит, что на первом месте в этом числе стоит одна из девяти цифр 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На втором месте числа также должна стоять одна из тех же девяти цифр; комбинируя 9 возможных значений первой цифры с 9 значениями второй, мы получим всего 9^2 различных возможностей для первой пары цифр. Точно так же для первых трех цифр нашего числа получается 9^3 различных возможностей, для первых четырех цифр — 9^4 различных возможностей и т. д.; наконец, для первых десяти цифр мы получим 9^{10} различных возможностей. Но это означает, что в ряду чисел от 0 000 000 000 до 9 999 999 999 имеется 9^{10} различных чисел, в записи которых не встречается цифра 1. Следовательно, в ряду чисел от 1 до 10 000 000 000 таких чисел будет

$$9^{10}-1=3\,486\,784\,401-1=3\,486\,784\,400,$$

а чисел, в записи которых встречается цифра 1, будет

$$10\,000\,000\,000-3\,486\,784\,400=6\,513\,215\,600.$$

Итак, чисел, в записи которых встречается цифра 1, будет больше.

Второе решение. Подсчитаем число чисел нашего ряда, в записи которых *встречается* цифра 1. Условимся под *десятком* понимать десять соседних целых положительных чисел, начиная от числа, оканчивающегося нулем, и кончая числом, оканчивающимся цифрой 9; под *сотней* понимать сто соседних целых чисел, начиная от числа, оканчивающегося двумя нулями, и кончая числом, оканчивающимся двумя девятками; под *тысячей* понимать тысячу последовательных целых чисел, начиная от числа, оканчивающегося тремя нулями, и кончая числом, оканчивающимся тремя девятками и т. д. Для того чтобы первый десяток, первая сотня, первая тысяча и т. д. были полными, мы припишем еще в начале нашего ряда чисел число 0.

В первом десятке имеется единственное число, в записи которого участвует единица,— это число 1. Столько же чисел, содержащих цифру 1, будет включать и любой другой десяток первой сотни, кроме второго,— второй десяток (числа от 10 до 19) целиком состоит из чисел, содержащих 1.

Следовательно, первая сотня содержит

$$9\cdot 1+10$$

чисел, в записи которых встречается цифра 1.

Ровно столько же чисел, в записи которых встречается 1, содержит и любая другая сотня первой тысячи, кроме второй,— вторая сотня целиком состоит из чисел, содержащих 1. Следовательно, первая тысяча содержит

$$9(9\cdot 1+10)+100=9^2+9\cdot 10+10^2$$

чисел, в записи которых встречается цифра 1.

В каждой тысяче первых десяти тысяч, кроме второй, будет столько же чисел, в записи которых участвует 1, а вторая тысяча будет целиком состоять из таких чисел. Таким образом, среди первых 10 000 чисел будет

$$9(9^2+9\cdot 10+10^2)+1000=9^3+9^2\cdot 10+9\cdot 10^2+10^3$$

чисел, в записи которых встречается цифра 1.

Продолжая далее рассуждать таким же образом, мы легко покажем, что среди первых 10 000 000 000 чисел от 0 до 9 999 999 999 имеется

$$9^9+9^8\cdot 10+9^7\cdot 10^2+\ldots+9\cdot 10^8+10^9$$

чисел, в записи которых встречается цифра 1. Эта сумма легко подсчитывается по формуле для суммы членов геометрической прогрессии:

$$9^9+9^8\cdot 10+9^7\cdot 10^2+\ldots+9\cdot 10^8+10^9=$$

$$=\frac{10^9\cdot\frac{10}{9}-9^9}{\frac{10}{9}-1}=\frac{\frac{10^{10}}{9}-9^9}{\frac{1}{9}}=10^{10}-9^{10}.$$

В ряду же от 1 до 10 000 000 000 чисел, содержащих 1, будет на единицу больше, т. е.

$$10^{10}-9^{10}+1=6\,513\,215\,600.$$

Этот результат, естественно, совпадает с тем, который был получен при первом решении. Он показывает, что в этом ряду, чисел содержащих цифру 1, будет больше, чем чисел, не содержащих 1.

10. Очевидно, что среди первых 222 222 222 целых чисел будет 22 222 222 чисел, оканчивающихся нулем (числа 10, 20, 30, ..., 222 222 220). Далее, среди них будет 2 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 00 (числа 100, 200, 300, ..., 222 222 200); 2 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 01 (числа 101, 201, 301, ..., 222 222 201), 2 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 02; 2 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 03, и т. д., наконец, 2 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 09. Таким образом, в ряду всех чисел от 1 до 222 222 222 цифра 0 будет стоять на втором от конца месте $2\,222\,222+2\,222\,222+\ldots+2\,222\,222=$ $=10\cdot 2\,222\,222=22\,222\,220$ раз.

Аналогично этому среди первых 222 222 222 чисел будет 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 000; 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 001, и т. д., наконец, 222 222 чисел, оканчивающихся цифрами 099. Таким образом, на третьем от конца месте цифра 0 будет стоять $100\cdot 222\,222=22\,222\,200$ раз. Далее так же показывается, что на четвертом от конца месте цифра 0 будет стоять $1000\cdot 22\,222=22\,222\,000$ раз; на пятом от конца месте — $10\,000\cdot 2\,222=22\,220\,000$ раз; на шестом от конца месте — $100\,000\cdot 222=22\,200\,000$ раз; на седьмом от конца месте $1\,000\,000\cdot 22=22\,000\,000$ раз; наконец, на восьмом от конца месте — $10\,000\,000\cdot 2=20\,000\,000$ раз.

Таким образом, цифра 0 встречается всего

$$22\,222\,222+22\,222\,220+22\,222\,200+22\,222\,000+$$
$$+22\,220\,000+22\,200\,000+22\,000\,000+20\,000\,000=$$
$$=175\,308\,642$$

раза.

11. а) Всего имеется 999 чисел, меньших 1000 (числа 1, 2, 3, ..., 999). Вычеркнем теперь те из них, которые делятся на 5; таких чисел всего имеется $\left[\frac{999}{5}\right]=199$ (числа 5, 10, 15, 20, ..., $995=199\cdot 5$). Вычеркнем, далее, все числа, делящиеся на 7; таких чисел имеется $\left[\frac{999}{7}\right]=142$ (числа 7, 14, 21, 28, ..., $994=142\cdot 7$). Но среди чисел, делящихся на 7, имеется $\left[\frac{999}{35}\right]=28$ чисел, делящихся также и на 5 (т. е. делящихся на $5\cdot 7=35$); это числа 35, 70, 105, ..., $980=$ $=28\cdot 35$. Эти 28 чисел будут нами вычеркнуты дважды (и при вычеркивании чисел, делящихся на 5, и при вычеркивании чисел, делящихся на 7). Следовательно, всего нами будет вычеркнуто $199+142-28=313$ чисел. Таким образом, среди чисел, меньших 1000, останутся невычеркнутыми $999-313=686$ чисел; это и будут числа, не делящиеся ни на 5, ни на 7.

б) Вычеркнем опять все числа, делящиеся на 5, и все числа, делящиеся на 7; при этом нами будет вычеркнуто 313 чисел (задача 11а)). Вычеркнем теперь еще все числа, делящиеся на 3; таких чисел имеется $\left[\frac{999}{3}\right]=333$. Но среди этих чисел все числа, делящиеся, кроме того, еще и на 5 или на 7, т. е. все числа, делящиеся на 15 или на 21, были уже вычеркнуты ранее. Из чисел, меньших 1000, на 15 делится $\left[\frac{999}{15}\right]=66$ чисел, а на 21 делится $\left[\frac{999}{21}\right]=47$ чисел. Но $\left[\frac{999}{105}\right]=9$ из этих чисел делится и на 15 и на 21 (105 есть общее наименьшее кратное чисел 15 и 21) и, следовательно, среди 66 чисел, делящихся на 15, и 47 чисел, делящихся на 21, будет 9 общих. Поэтому среди 333 чисел, делящихся на 3, ранее было вычеркнуто $66+47-9=104$ числа, т. е. при последнем вычеркивании нами будет вычеркнуто еще $333-104=229$ чисел. Таким образом, общее число не вычеркнутых чисел (т. е. не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7) равно $686-229=457$.

Примечание. Рассуждая аналогично решению задачи 11, нетрудно показать, что число чисел, меньших некоторого N и не делящихся ни на одно из попарно взаимно простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$ $\ldots, p_{n-1}, p_n$, равно

$$N-\left[\frac{N}{p_1}\right]-\left[\frac{N}{p_2}\right]-\ldots-\left[\frac{N}{p_n}\right]+$$
$$+\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_{n-1}p_n}\right]-$$
$$-\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]-\ldots-\left[\frac{N}{p_{n-2}p_{n-1}p_n}\right]+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^n\left[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_n}\right]$$

(ср. с первым решением задачи 78а).

12. Задача очень близка к предыдущей. Разложение числа 56 700 000 на множители имеет вид $56\,700\,000 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7$; таким образом, задача сводится к тому, чтобы определить, сколько имеется чисел, меньших 56 700 000 и не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7.

Выпишем все числа от 1 до 56 700 000. Вычеркнем из них все числа, делящиеся на 2 $\left(\text{их число равно } \frac{1}{2} \cdot 56\,700\,000 = 28\,350\,000\right)$; все числа, делящиеся на 3 $\left(\text{их число равно } \frac{1}{3} \cdot 56\,700\,000 = 18\,900\,000\right)$; все числа, делящиеся на 5 $\left(\text{их число равно } \frac{1}{5} \cdot 56\,700\,000 = 11\,340\,000\right)$; все числа, делящиеся на 7 $\left(\text{их число равно } \frac{1}{7} \cdot 56\,700\,000 = 8\,100\,000\right)$. Общее число всех этих чисел равно

$$28\,350\,000 + 18\,900\,000 + 11\,340\,000 + 8\,100\,000 = 66\,690\,000.$$

Но из этих 66 690 000 чисел имеется:

$\frac{1}{2\cdot 3} \cdot 56\,700\,000 = 9\,450\,000$ чисел, делящихся на 2 и на 3;

$\frac{1}{2\cdot 5} \cdot 56\,700\,000 = 5\,670\,000$ чисел, делящихся на 2 и на 5;

$\frac{1}{2\cdot 7} \cdot 56\,700\,000 = 4\,050\,000$ чисел, делящихся на 2 и на 7;

$\frac{1}{3\cdot 5} \cdot 56\,700\,000 = 3\,780\,000$ чисел, делящихся на 3 и на 5;

$\frac{1}{3\cdot 7} \cdot 56\,700\,000 = 2\,700\,000$ чисел, делящихся на 3 и на 7;

$\frac{1}{5\cdot 7} \cdot 56\,700\,000 = 1\,620\,000$ чисел, делящихся на 5 и на 7.

Все эти числа входят по два раза в составленную нами сумму всех чисел, делящихся на 2, или на 3, или на 5, или на 7. Поэтому общее число этих чисел, равное

$$9\,450\,000 + 5\,670\,000 + 4\,050\,000 + 3\,780\,000 + 2\,700\,000 + 1\,620\,000 = 27\,270\,000,$$

надо вычесть из полученной выше суммы:

$$66\,690\,000 - 27\,270\,000 = 39\,420\,000.$$

В разность 66 690 000 — 27 270 000, очевидно, по одному разу входят все числа, делящиеся только на один из множителей 2, 3, 5 и 7, и по одному разу входят числа, делящиеся на два из этих множителей (первые учитываются один раз в уменьшаемом; вторые — два раза в уменьшаемом и один раз в вычитаемом). Выясним теперь, как учитывается в этой разности какое-либо число, делящееся на три из этих множителей, например на 2, на 3 и на 5. Это число три раза учтено в уменьшаемом (среди чисел, делящихся на 2, среди чисел, делящихся на 3, и среди чисел, делящихся на 5) и три раза учтено в вычитаемом (среди чисел, делящихся на 2 и на 3, среди чисел, делящихся на 2 и на 5, и среди чисел, делящихся на 3 и на 5). Поэтому все числа, делящиеся на какие-либо три из четырех множителей 2, 3, 5 и 7, совсем не учитываются в нашей разности и мы должны прибавить к разности общее число всех таких чисел. Общее число этих чисел (не превосходящих 56 700 000), очевидно, равно

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot5}\cdot 56\,700\,000+\frac{1}{2\cdot3\cdot7}\cdot 56\,700\,000+\frac{1}{2\cdot5\cdot7}\cdot 56\,700\,000+$$
$$+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\cdot 56\,700\,000=$$
$$=1\,890\,000+1\,350\,000+810\,000+540\,000=4\,590\,000;$$

таким образом, получаем:

$$66\,690\,000-27\,270\,000+4\,590\,000=44\,010\,000.$$

В выражении 66 690 000 — 27 270 000 + 4 590 000 по одному разу учитываются все числа, делящиеся на один из множителей 2, 3, 5 и 7; на два из этих множителей; на три из этих множителей. Выясним теперь, как учитываются в этом выражении числа, делящиеся одновременно на 2, на 3, на 5 и на 7. Они входят, очевидно, по четыре раза в первый член 66 690 000 (как делящиеся и на 2, и на 3, и на 5, и на 7); по шесть раз — во второй член 27 270 000 (как делящиеся на 2 и на 3; на 2 и на 5; на 2 и на 7; на 3 и на 5; на 3 и на 7; на 5 и на 7); по четыре раза — в последний член (как делящиеся на 2, на 3 и на 5; на 2, на 3 и на 7; на 2, на 5 и на 7; на 3, на 5 и на 7). Значит, всего эти числа учитываются в нашем выражении $4-6+4=2$ раза и поэтому их число, равное $\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\cdot 56\,700\,000 = 270\,000$, надо еще вычесть:

$$66\,690\,000 - 27\,270\,000 + 4\,590\,000 - 270\,000 = 43\,740\,000.$$

Таким образом, от 1 до 56 700 000 имеется 43 740 000 чисел, делящихся хотя бы на один из множителей 2, 3, 5 или 7. Поэтому чисел, не делящихся ни на один из этих множителей (взаимно простых с числом 56 700 000), будет

$$56\,700\,000 - 43\,740\,000 = 12\,960\,000.$$

Примечание. Точно так же показывается, что если разложение числа N на простые множители имеет вид

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

то число $\varphi(N)$ чисел, меньших N и взаимно простых с ним, равно

$$\varphi(N) = N - \frac{N}{p_1} - \frac{N}{p_2} - \ldots - \frac{N}{p_k} + \frac{N}{p_1 p_2} + \frac{N}{p_2 p_3} + \ldots + \frac{N}{p_{k-1} p_k} -$$

$$- \frac{N}{p_1 p_2 p_3} - \ldots - \frac{N}{p_{k-2} p_{k-1} p_k} + \ldots + (-1)^k \frac{N}{p_1 p_2 \ldots p_k} =$$

$$= N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

(ср. с примечанием к решению задачи 11б).

13. $2^0 = 1$ дает при делении на 7 остаток 1, $2^1 = 2$ дает остаток 2, $2^2 = 4$ — остаток 4, 2^3 дает снова остаток 1, 2^4 — снова остаток 2, 2^5 — снова остаток 4, 2^6 — в третий раз остаток 1 и т. д. Таким образом, при делении 2^x на 7 остатками могут быть только числа 1, 2 и 4, причем эти остатки периодически повторяются в следующем порядке: 1, 2, 4; 1, 2, 4; 1, 2, 4; ...

Представим теперь x в виде $x = 7t + s$, где $s < 7$. Тогда остатки от деления x^2 на 7 равны остаткам от деления s^2 на 7. Если s принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, то остатками от деления s^2 на 7 будут соответственно числа 0, 1, 4, 2, 2, 4 и 1. Следовательно, остатками от деления x^2 на 7 могут быть только числа 0, 1, 4 и 2, причем эти остатки периодически повторяются в следующем порядке: 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Так как остатки от деления 2^x на 7 периодически повторяются через 3 значения x, а остатки от деления x^2 на 7 периодически повторяются через 7 значений x, то остатки от деления $2^x - x^2$ на 7 будут периодически повторяться через 21 значение x. Выпишем первые 21 остаток от деления 2^x и x^2 на 7 друг под другом:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 1. \end{matrix}$$

Мы видим отсюда, что остатки от деления 2^x и x^2 на 7 для первых 21 значения x совпадают 6 раз (при $x=2$, 4, 5, 6, 10, 15). Следовательно, из чисел $2^x - x^2$, где $x=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, 20$, ровно 6 чисел делятся на 7 без остатка.

Так как $10\,000 = 21 \cdot 476 + 4$, то среди чисел, меньших 10 000, имеется 476 целых промежутка по 21 число. Отсюда следует, что для x, не превосходящих $9996 = 21 \cdot 476$, число $2^x - x^2$ делится на 7 ровно $476 \cdot 6 = 2856$ раз. Оставшиеся три числа, меньших 10 000, дают при делении на 21 остатки 1, 2 и 3; поэтому одно из этих чисел (а именно 9998) дает 2 857-е значение x, для которого $2^x - x^2$ делится на 7 без остатка. Итак, всего имеется $2856 + 1 = 2857$ чисел x, меньших 10 000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7. Для остальных $9999 - 2857 = 7142$ чисел x, меньших 10 000, выражение $2^x - x^2$ на 7 не делится.

14. Если $x^2 + y^2$ делится на 49, то $x^2 + y^2$ делится и на 7. Но x^2 при делении на 7 может давать только остатки 0, 1, 4 или 2 (см. решение задачи 13). Остаток от деления $x^2 + y^2$ на 7 равен сумме остатков от деления чисел x^2 и y^2 на 7. Но легко проверить, что из всех сумм каких-либо двух (одинаковых или различных) из чисел 0, 1, 4 и 2 делится на 7 только сумма $0 + 0 = 0$. Следовательно, $x^2 + y^2$ делится на 7 только тогда, когда и x^2 и y^2 делятся на 7, т. е. когда и x и y делятся на 7. С другой стороны, если x и y — два числа, делящихся на 7, то сумма $x^2 + y^2$ делится на 49. Таким образом, искомое число есть число различных пар целых положительных чисел x и y, меньших 1000, делящихся на 7.

Но $1000 = 7 \cdot 142 + 6$, следовательно, до 1000 есть 142 числа, кратных 7. Комбинируя каждое из 142 чисел x с каждым из 142 чисел y, мы получим всего 142^2 пары x, y. 142 из этих пар состоят из одинаковых чисел; все же остальные пары мы сосчитали по два раза: один раз как пару x, y и второй раз как пару y, x. Значит, число различных пар x, y равно

$$\frac{142^2-142}{2}+142=\frac{142\cdot 143}{2}=10\,153.$$

15. Так как миллион равен $2^6\cdot 5^6$, то всякий его делитель имеет вид $2^\alpha\cdot 5^\beta$, и разложение миллиона на 3 множителя имеет вид

$$1\,000\,000=(2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1})(2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2})(2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3});$$

здесь α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3 — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие равенствам

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=6,\quad \beta_1+\beta_2+\beta_3=6.$$

Сосчитаем, сколько может быть таких систем чисел α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3.

Если $\alpha_1=6$, то α_2 и α_3 должны быть равны 0; таким образом, в этом случае мы имеем единственную систему чисел α_1, α_2, α_3.

Если $\alpha_1=5$, то возможны две системы:

$$\alpha_1=5,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=0 \text{ и } \alpha_1=5,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=1.$$

Если $\alpha_1=4$, то возможны три системы:

$$\alpha_1=4,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=0;\ \alpha_1=4,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=1;$$
$$\alpha_1=4,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=2.$$

Точно так же показывается, что если $\alpha_1=3$, то возможны четыре системы; если $\alpha_1=2$, то пять систем; если $\alpha_1=1$, то шесть систем, и если $\alpha_1=0$, то семь систем. Поэтому общее число систем чисел α_1, α_2, α_3, удовлетворяющих равенству $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=6$, равно

$$1+2+3+4+5+6+7=28.$$

Точно так же имеется 28 различных систем чисел β_1, β_2, β_3, удовлетворяющих равенству $\beta_1+\beta_2+\beta_3=6$. Так как при разложении числа 1 000 000 на три множителя мы можем комбинировать любую тройку чисел α_1, α_2, α_3 с любой тройкой чисел β_1, β_2, β_3, то общее число разложений равно

$$28\cdot 28=784.$$

Однако при таком подсчете разложения, отличающиеся лишь порядком множителей, считаются различными, т. е. многие разложения считаются по нескольку раз.

Определим, сколько раз считается каждое разложение.

1) Только одно разложение, а именно

$$10^6 = (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2^2 \cdot 5^2),$$

считается один раз.

2) Если в разложении 10^6 на три множителя два из них равны между собой (а третий отличен), то такое разложение считается три раза: не равный остальным множитель может стоять в произведении на первом, втором или третьем месте.

Сосчитаем число таких разложений. Пусть множитель, встречающийся в разложении дважды, имеет вид $2^\alpha \cdot 5^\beta$ (т. е. разложение имеет вид $10^6 = (2^\alpha \cdot 5^\beta) \cdot (2^\alpha \cdot 5^\beta)(2^{6-2\alpha} \cdot 5^{6-2\beta})$; тогда α может быть равно 0, 1, 2 или 3, β также может быть равно 0, 1, 2 или 3. Так как любое α можно комбинировать с любым β, то общее число возможностей равно $4 \cdot 4 = 16$. Из них нужно откинуть одну возможность $\alpha = 2$, $\beta = 2$, так как в этом случае у нас получается разложение

$$10^6 = (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2^2 \cdot 5^2),$$

выделенное ранее. Таким образом, 15 разложений считаются три раза.

3) Остальные разложения считаются по шесть раз. Действительно, если все три множителя различны между собой, то следующие шесть разложений различаются лишь порядком множителей:

$$\begin{array}{ll}
(2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}); & (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}); \\
(2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}); & (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}); \\
(2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}); & (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}).
\end{array}$$

Поэтому общее число различных разложений миллиона на три множителя равно:

$$1 + 15 + \frac{784 - 15 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{6} = 1 + 15 + \frac{738}{6} = \\ = 1 + 15 + 123 = 139.$$

16. Разложение числа 86 400 000 на простые множители имеет вид

$$86\,400\,000 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^5.$$

Поэтому все его делители имеют вид $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, где α — целое неотрицательное число, не превосходящее 10, β — целое неотрицательное число, не превосходящее 3, а γ — целое неотрицательное число, не превосходящее 5. Следовательно, для α имеется 11 возможностей (а именно, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), для β имеется четыре возможности и для γ имеется шесть возможностей. Так как при составлении делителей мы можем все возможные значения показателей α, β и γ комбинировать между собой (в число делителей мы включаем и само число и 1), то число всех делителей равно

$$11\cdot 4\cdot 6=264.$$

Найдем теперь сумму всех делителей. Для этого определим сначала сумму s_1 всех делителей нашего числа, имеющих вид 2^α. Ясно, что s_1 равно

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{10}=\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1=2047.$$

Заметим теперь, что сумма делителей нашего числа, имеющих вид $2^\alpha\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$, где β_1 и γ_1 — фиксированные числа, а α пробегает все возможные значения, равна $s_1\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$ (ибо при суммировании мы можем $3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$ вынести за скобки). Поэтому сумма всех делителей числа 86 400 000 равна произведению 2047 на сумму всех делителей числа $3^3\cdot 5^5$ (так как все делители 86 400 000, имеющие вид $3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$, являются делителями числа $3^3\cdot 5^5$).

Аналогично можно доказать, что сумма всех делителей числа $3^3\cdot 5^5$ равна произведению суммы s_2 всех делителей этого числа, имеющих вид 3^β, на сумму s_3 всех делителей числа 5^5. Но

$$s_2=3^0+3^1+3^2+3^3=\frac{3^4-1}{3-1}=\frac{81-1}{2}=40,$$

$$s_3=5^0+5^1+\ldots+5^5=\frac{5^6-1}{5-1}=\frac{15\,625-1}{4}=3906.$$

Поэтому сумма всех делителей числа 86 400 000 равна

$$s_1\cdot s_2\cdot s_3=2047\cdot 40\cdot 3906=319\,823\,280.$$

Приведем еще один вариант того же решения. Пусть a и b — два взаимно простых числа. В этом случае, очевидно, каждый делитель числа $a\cdot b$ равен произведению некоторого делителя числа a на некоторый делитель числа b. Отсюда легко вывести, что число $n(N)$ всех делителей числа N и сумма $s(N)$ этих делителей обладают следующим свойством: если a и b — два взаимно простых числа, то

$$n(a \cdot b) = n(a) \cdot n(b) \quad \text{и} \quad s(a \cdot b) = s(a) \cdot s(b)$$

(в теории чисел $n(N)$ и $s(N)$, исходя из этого их свойства, называют мультипликативными функциями числа N[1])). Теперь, учитывая, что число делителей чисел 2^{10}, 3^3 и 5^5 соответственно равно 11, 4 и 6, а сумма всех делителей этих же чисел 2047, 40 и 3906, получим:

$$n(86\,400\,000) = 11 \cdot 4 \cdot 6 = 264;$$
$$s(86\,400\,000) = 2047 \cdot 40 \cdot 3906 = 319\,823\,280.$$

Примечание. Таким же образом доказывается, что если разложение числа n на простые множители имеет вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

то число его делителей равно

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

а сумма этих делителей равна

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right) \dots \left(\frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\right).$$

17. Разложение числа 59 400 000 на простые множители имеет вид

$$59\,400\,000 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 11.$$

Следовательно, если общее наименьшее кратное двух чисел A и B равно 59 400 000, то должно быть

$$A = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot 11^{\delta_1}, \quad B = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot 11^{\delta_2}.$$

При этом должно быть:

$$\alpha_1 \leqslant 6,\ \alpha_2 \leqslant 6,\ \max(\alpha_1, \alpha_2) = 6;\ \beta_1 \leqslant 3,\ \beta_2 \leqslant 3,\ \max(\beta_1, \beta_2) = 3;$$
$$\gamma_1 \leqslant 5,\ \gamma_2 \leqslant 5,\ \max(\gamma_1, \gamma_2) = 5;\ \delta_1 \leqslant 1,\ \delta_2 \leqslant 1,\ \max(\delta_1, \delta_2) = 1,$$

где $\max(a, b)$ обозначает наибольшее из двух чисел a и b.

Этим условиям удовлетворяют 13 возможных пар значений α_1, α_2 ($\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $\alpha_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $\alpha_2 = 6$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 6$); 7 возможных пар значений β_1, β_2 ($\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 0, 1, 2$; $\beta_1 = 0, 1, 2$, $\beta_2 = 3$; $\beta_1 = \beta_2 = 3$); 11 возможных

[1]) Еще один пример мультипликативной функции числа N представляет собой функция Эйлера $\varphi(N)$ — число чисел, меньших N и взаимно простых с N (см. примечание к решению задачи 12).

пар значений γ_1, γ_2 ($\gamma_1=5$, $\gamma_2=0$, 1, 2, 3, 4; $\gamma_1=0$, 1, 2, 3, 4, $\gamma_2=5$; $\gamma_1=\gamma_2=5$) и 3 возможные пары значений δ_1, δ_2 ($\delta_1=1$, $\delta_2=0$; $\delta_1=0$, $\delta_2=1$; $\delta_1=\delta_2=1$). Комбинируя все эти значения, мы получим всего

$$13\cdot 7\cdot 11\cdot 3=3003$$

пар чисел A, B.

Однако в нашем подсчете две пары чисел, отличающиеся только порядком, считаются различными. Поэтому каждая пара чисел, имеющих общим наименьшим кратным 59 400 000, кроме пары $A=B=59\,400\,000$, сосчитана по два раза. Поэтому число существенно различных пар чисел A, B будет равно

$$\frac{3003-1}{2}+1=1502.$$

Примечание. Точно так же показывается, что если разложение числа N на простые множители имеет вид

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k},$$

то число m всевозможных пар целых чисел, общее наименьшее кратное которых равно N, можно подсчитать по формуле

$$m=\frac{(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\ldots(2\alpha_k+1)-1}{2}+1.$$

18. Повторим 20 раз сомножителем трехчлен $1+x^5+x^7$ и произведем умножение по обычным правилам. Каждый член полученной при этом суммы будет представлять собой произведение 20 множителей, равных или 1, или x^5, или x^7. Существенно, что в этих произведениях двадцати множителей на каждом из 20 мест может стоять любое из трех выписанных выражений: в сумме будут слагаемые, являющиеся произведениями всевозможных комбинаций указанных множителей (т. е. произведение 20 единиц, произведение 19 единиц и одного множителя x^5, произведение 19 единиц и одного множителя x^7, произведение 18 единиц, множителя x^5 и множителя x^7 и т. д.), взятых во всевозможных порядках (так, например, мы будем иметь 20 различных членов, являющихся произведением 19 единиц на x^5, ибо множитель x^5 может стоять в таком произведении на первом, втором, третьем, ..., двадцатом местах, и все это будут разные члены нашей суммы).

Все такие произведения будут представлять собой x в какой-то степени, являющейся суммой некоторого числа пятерок и некоторого числа семерок. Но легко проверить, что число 18 никак нельзя представить в виде суммы слагаемых, принимающих значения 5 и 7; отсюда следует, что члена x^{18} в нашей сумме вовсе не будет (искомый коэффициент при x^{18} равен нулю).

Число 17 можно единственным образом представить в виде суммы пятерок и семерок: $17 = 5 + 5 + 7$. Следовательно, x^{17} будут равны те слагаемые нашей суммы, которые представляют собой произведение двух множителей x^5, одного множителя x^7 и 17 множителей 1. Нам надо определить число таких произведений в нашей сумме. Множитель x^7 может стоять в таком произведении на любом из 20 мест. Предположим для определенности, что он стоит на первом месте. После этого остается еще 19 свободных мест, два из которых должны занять множители x^5, а остальные 17 — единицы. Если один из множителей x^5 стоит на каком-либо определенном месте, то второй может стоять на любом из оставшихся 18 мест. Таким образом, мы получаем 18 слагаемых, в которых на первом не занятом множителем x^7 (т. е. на втором) месте стоит x^5, 18 слагаемых, в которых на втором из этих свободных мест стоит x^5, 18 слагаемых, в которых на третьем таком месте стоит x^5, и т. д., наконец, 18 слагаемых, в которых на последнем (девятнадцатом) свободном месте стоит x^5. На первый взгляд кажется, что всего имеется $19 \cdot 18$ слагаемых нужного нам вида, в которых множитель x^7 стоит на первом месте. Однако на самом деле их вдвое меньше. Действительно, в каждом из таких слагаемых множители x^5 стоят на двух местах (например, на i-м и на k-м), поэтому в нашем подсчете каждое из этих слагаемых учитывается дважды (в нашем примере рассматриваемое слагаемое учитывается среди 18 произведений, в которых на i-м месте стоит множитель x^5, и среди 18 произведений, в которых на k-м месте стоит множитель x^5). Итак, на самом деле число слагаемых нужного нам вида, в которых на первом месте стоит множитель x^7, равно $\frac{19 \cdot 18}{2} = 171$. Столько же будет таких слагаемых, в которых x^7 стоит на втором, третьем, ..., двадцатом месте. Таким образом, общее число таких слагаемых, равное коэффициенту при x^{17} в $(1 + x^5 + x^7)^{20}$, равно $20 \cdot 171 = 3420$.

19. Перечислим все способы, которыми можно разменять 20 коп. При таком размене мы можем использовать или четыре монеты достоинством в 5 коп., или три такие монеты, или две, или одну, или ни одной.

Существует только один способ размена, при котором мы используем четыре монеты достоинством в 5 коп. (так как четыре монеты по 5 коп. уже составляют 20 коп.).

Если мы используем три монеты по 5 коп., то нам нужно составить еще 5 коп. монетами другого достоинства. Это можно сделать тремя способами: взять две монеты по 2 коп. и одну по 1 коп., или же одну монету по 2 коп. и три по 1 коп., или, наконец, ни одной монеты по 2 коп. и пять монет по 1 коп.

Таким образом, мы указали еще три способа размена 20 коп.

Если мы используем две монеты по 5 коп., то нам нужно составить еще 10 коп. монетами достоинством в 2 коп. и 1 коп. Это можно сделать шестью способами. Можно взять:

1)	5	монет	по	2	коп.,	0	монет	по	1	коп.
2)	4	»	»	2	»	2	»	»	1	»
3)	3	»	»	2	»	4	»	»	1	»
4)	2	»	»	2	»	6	»	»	1	»
5)	1	»	»	2	»	8	»	»	1	»
6)	0	»	»	2	»	10	»	»	1	»

Таким образом, мы указали еще шесть способов размена 20 коп.

Если мы используем одну монету по 5 коп., то монетами другого достоинства нам нужно составить еще 15 коп. Это можно сделать следующими способами:

1)	7	монет	по	2	коп.,	1	монета	по	1	коп.
2)	6	»	»	2	»	3	»	»	1	»
3)	5	»	»	2	»	5	»	»	1	»
4)	4	»	»	2	»	7	»	»	1	»
5)	3	»	»	2	»	9	»	»	1	»
6)	2	»	»	2	»	11	»	»	1	»
7)	1	»	»	2	»	13	»	»	1	»
8)	0	»	»	2	»	15	»	»	1	»

Таким образом, мы указали еще восемь способов размена.

Наконец, если при размене пятикопеечные монеты совсем не употребляются, то возможны следующие способы размена:

1)	10	монет	по	2	коп.,	0	монет	по	1	коп.
2)	9	»	»	2	»	2	»	»	1	»
3)	8	»	»	2	»	4	»	»	1	»
4)	7	»	»	2	»	6	»	»	1	»
5)	6	»	»	2	»	8	»	»	1	»
6)	5	»	»	2	»	10	»	»	1	»
7)	4	»	»	2	»	12	»	»	1	»
8)	3	»	»	2	»	14	»	»	1	»
9)	2	»	»	2	»	16	»	»	1	»
10)	1	»	»	2	»	18	»	»	1	»
11)	0	»	»	2	»	20	»	»	1	»

т. е. еще 11 способов.

Все указанные способы размена различны, и других способов на существует. Поэтому общее число способов размена равно

$$1+3+6+8+11=29.$$

20. При составлении n копеек из монет достоинством в 1 коп. и 2 коп. мы не можем использовать больше чем $\frac{n}{2}$ монет достоинством в 2 коп. Если же мы возьмем меньше чем $\frac{n}{2}$ или ровно $\frac{n}{2}$ таких монет, то тем самым способ составления уже будет однозначно определен (если мы возьмем q монет по 2 коп., где $q \leqslant \frac{n}{2}$, то для получения n копеек нужно будет добавить еще $n-2q$ однокопеечных монет). Таким образом, всего имеется столько способов составления n копеек монетами достоинством в 1 и 2 коп., сколько есть целых неотрицательных чисел, не превосходящих $\frac{n}{2}$ (0 также нужно считать среди этих чисел, так как n копеек можно составить, в частности, только однокопеечными монетами). Если n — число четное, то $\frac{n}{2}$ целое, и общее число способов равно $\frac{n}{2}+1$ (можно взять $0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ двухкопеечных монет); если же n нечетно, то $\frac{n}{2}$ не есть уже целое число, и общее число способов равно $\frac{n-1}{2}+1$ (можно взять $0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ двухкопеечных монет). Воспользовавшись знаком $[x]$ (см. стр. 13), можно дать единую формулу для числа способов составления n копеек из монет достоинством в 1 и 2 коп.: во всех случаях это число равно

$$\left[\frac{n}{2}\right]+1.$$

21. а) При составлении n копеек из монет достоинством в 1 коп., 2 коп. и 3 коп. мы можем вовсе не использовать монет достоинством в 3 коп., можем использовать одну такую монету, можем использовать их две, три и т. д. до $\left[\frac{n}{3}\right]$ монет. В первом случае нам надо будет составить из монет достоинством в 1 коп. и в 2 коп. n копеек (это возможно $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ способами; см. задачу 20); во втором случае из таких монет надо будет составить $n-3$ копейки (это возможно $\left[\frac{n-3}{2}\right]+1$ способами); в третьем случае $n-6$ копеек (это возможно $\left[\frac{n-6}{2}\right]+1$ способами) и т. д. В последнем случае нам из монет в 1 коп. и в 2 коп. надо будет составить k копеек, где k — остаток от деления n на 3, который может быть равен 0, 1 или 2 (k копеек можно составить $\left[\frac{k}{2}\right]+1$ способами). Таким образом, общее число способов равно

$$\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{n-3}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{n-6}{2}\right]+1\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right).$$

Обозначим через l частное от деления n на 3; тогда $n=3l+k$ и искомое число способов можно представить в виде

$$\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{k+3}{2}\right]+1\right)+\ldots+\left(\left[\frac{k+3l-3}{2}\right]+1\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{k+3l}{2}\right]+1\right).$$

Докажем, что для каждого целого числа m

$$\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^m}{4}.$$

Действительно, если m четно, то и в правой и в левой части равенства стоит $\frac{m}{2}$, а если m нечетно, то и справа и слева стоит $\frac{m-1}{2}$.

Преобразуем теперь выражение для числа способов, которыми можно составить n копеек из монет достоинством в 1, 2 и 3 коп. Его можно переписать так:

$$\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}+\frac{(-1)^k}{4}\right)+\left(\frac{k+3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{(-1)^{k+3}}{3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{k+3l}{2}+\frac{3}{4}+\frac{(-1)^{k+3l}}{4}\right).$$

Для вычисления этой суммы ее удобно переписать в другом порядке: сначала выпишем все слагаемые, равные $\frac{3}{4}$, затем $\frac{(-1)^k}{4}$; $\frac{(-1)^{k+3}}{4}$; ... ; $\frac{(-1)^{k+3l}}{4}$ и, наконец, — все остальные члены. Тогда получим сумму

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{(-1)^k}{4}+\frac{(-1)^{k+3}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{k+3l}}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{k}{2}+\frac{k+3}{2}+\ldots+\frac{k+3l}{2}\right).$$

Здесь в первых скобках стоит слагаемое $\frac{3}{4}$, повторенное $l+1$ раз; это дает $\frac{3(l+1)}{4}$. В последних скобках стоят $l+1$ членов арифметической прогрессии с разностью $\frac{3}{2}$, первым членом $\frac{k}{2}$ и последним членом $\frac{k}{2}+\frac{3}{2}l$; сумма этой прогрессии равна $\dfrac{\frac{k}{2}+\frac{3l+k}{2}}{2}(l+1)$. Наконец, в средних скобках стоит сумма $l+1$ членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{(-1)^k}{4}$ и знаменателем $(-1)^3=-1$, т. е.

$$\left[\frac{(-1)^{k+3l+3}}{4}-\frac{(-1)^k}{4}\right]:\left[(-1)-1\right]=\frac{(-1)^k}{8}\left[1-(-1)^{3l+3}\right];$$

эту сумму, которая может быть равна $\frac{1}{4}$, 0 или $-\frac{1}{4}$, мы обозначим через ε.

Таким образом, для искомого числа способов мы получаем выражение

$$\frac{3(l+1)}{4}+\frac{(3l+2k)(l+1)}{4}+\varepsilon.$$

Но

$$\frac{3(l+1)}{4}+\frac{(3l+2k)(l+1)}{4}+\varepsilon=\frac{(l+1)(3+3l+2k)}{4}+\varepsilon=$$
$$=\frac{(3l+3)(3l+3+2k)}{12}+\varepsilon=\frac{(n+3-k)(n+3+k)}{12}+\varepsilon=$$
$$=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{k^2}{12}+\varepsilon.$$

Заметим теперь, что если k равно 0, то $\frac{k^2}{12}=0$, а

$$\varepsilon=\frac{1}{8}\left[1-(-1)^{3l+3}\right]$$

может быть равно 0 или $+\frac{1}{4}$; если $k=1$, то $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{12}$, а ε может быть равно 0 или $-\frac{1}{4}$, и если $k=2$, то $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{3}$, а ε может быть равно 0 или $\frac{1}{4}$. Поэтому $-\frac{k^2}{12}+\varepsilon$ может принимать лишь значения, лежащие между $-\frac{1}{3}$ и $+\frac{1}{4}$, т. е. это выражение всегда меньше $\frac{1}{2}$ по абсолютной величине. Так как число способов, которыми можно составить n копеек, есть число целое, то из наших вычислений следует, что это — целое число, ближайшее к $\frac{(n+3)^2}{12}$. Таким образом, число способов дается формулой

$$\left(\frac{(n+3)^2}{12}\right).$$

б) Аналогично доказывается, что число способов, которыми можно составить n копеек из монет достоинством в 1, 2 и 5 коп., равно

$$\left(\frac{(n+4)^2}{20}\right).$$

22. Так как из монет достоинством в 10, 20 и 50 коп. можно составить лишь целое число десятков копеек, то из одно-, двух- и пятикопеечных монет должно быть составлено также целое число десятков копеек. Поэтому возможны следующие случаи:

1) рубль составлен из монет достоинством в 10, 20 и 50 коп.,

2) из монет достоинством в 10, 20 и 50 коп. составлено 90 коп.

	из	монет	в	1,	2	и	5	коп.	составлено	10	коп.
3)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	80	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	20	»
4)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	70	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	30	»
5)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	60	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	40	»
6)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	50	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	50	»
7)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	40	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	60	»
8)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	30	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	70	»
9)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	20	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	80	»
10)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	10	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	90	»
11)	»	»	»	10,	20	»	50	»	»	0	»
	»	»	»	1,	2	»	5	»	»	1	рубль.

Рассмотрим отдельно все эти возможности.

1) Один рубль можно составить из монет в 10, 20 и 50 коп. таким же числом способов, что и 10 коп. — из монет достоинством в 1, 2 и 5 коп. Согласно задаче 21б) это число равно

$$\left(\frac{(10+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{196}{20}\right)=(9{,}8)=10.$$

2) 90 коп. можно составить из монет в 10, 20 и 50 коп. тем же числом способов, что и 9 коп. — из монет достоинством в 1, 2 и 5 коп., т. е. $\left(\frac{(9+4)^2}{20}\right)$ способами. Это

число равно

$$\left(\frac{169}{20}\right)=(8{,}45)=8\,.$$

При этом нам остается составить 10 коп. монетами достоинством в 1, 2 и 5 коп. Число различных способов, которыми это можно сделать, равно

$$\left(\frac{(10+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{196}{20}\right)=10\,.$$

Следовательно, общее число различных способов, при помощи которых можно составить 90 коп. монетами в 10, 20 и 50 коп., а 10 коп. — монетами в 1, 2 и 5 коп., равно $8\cdot 10=80$.

3) Аналогичными рассуждениями можно показать, что общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(8+4)^2}{20}\right)\cdot\left(\frac{(20+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{144}{20}\right)\cdot\left(\frac{576}{20}\right)=$$
$$=(7{,}2)\cdot(28{,}8)=7\cdot 29=203.$$

4) Общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(7+4)^2}{20}\right)\cdot\left(\frac{(30+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{121}{20}\right)\cdot\left(\frac{1156}{20}\right)=$$
$$=(6{,}05)\cdot(57{,}8)=6\cdot 58=348.$$

5) Общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(6+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(40+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{100}{20}\right)\cdot\left(\frac{1936}{20}\right)=$$
$$=(5)\,(96{,}8)=5\cdot 97=485.$$

6) Общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(5+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(50+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{81}{20}\right)\left(\frac{2916}{20}\right)=$$
$$=(4{,}05)\,(145{,}8)=4\cdot 146=584.$$

7) Общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(4+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(60+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{64}{20}\right)\left(\frac{4096}{20}\right)=$$
$$=(3{,}2)\,(204{,}8)=3\cdot 205=615.$$

8) Общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(3+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(70+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{49}{20}\right)\left(\frac{5476}{20}\right)=$$
$$=(2{,}45)\cdot(273{,}8)=2\cdot 274=548.$$

9) Общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(2+4)^2}{20}\right)\cdot\left(\frac{(80+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{36}{20}\right)\cdot\left(\frac{7056}{20}\right)=$$
$$=(1{,}8)\cdot(352{,}8)=2\cdot 353=706.$$

10) Общее число различных способов равно

$$\left(\frac{(1+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(90+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{25}{20}\right)\left(\frac{8836}{20}\right)=$$
$$=(1{,}25)\,(441{,}8)=1\cdot 442=442.$$

11) Общее число всех различных способов равно

$$\left(\frac{(0+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(100+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{16}{20}\right)\left(\frac{10\,816}{20}\right)=$$
$$=(0{,}8)\,(540{,}8)=1\cdot 541=541.$$

Таким образом, окончательно общее число способов, которыми можно составить рубль монетами достоинством в 1, 2, 5, 10, 20 и 50 коп., равно:

$$10+80+203+348+485+584+615+$$
$$+548+706+442+541=4562.$$

23. Если число n представлено в виде суммы двух слагаемых

$$n=x+y,$$

то одно из этих слагаемых будет не больше чем $\frac{n}{2}$. Это слагаемое может принимать значения $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$; все эти случаи различны, так как второе слагаемое при этом будет не меньше $\frac{n}{2}$. Поэтому число различных способов равно $\left[\frac{n}{2}\right]$.

24. Нам надо найти число пар целых чисел x, y, таких, что $|x|+|y|$ равно или 0, или 1, или 2, или 3, ..., или 99. Подсчитаем число пар x, y, для которых $|x|+|y|=k$. Здесь $|x|$ может принимать $k+1$ различных значений, а именно $0, 1, 2, \ldots k-1, k$; при этом $|y|$ будет равен соответственно $k, k-1, k-2, \ldots, 1, 0$. Но если $|x|=l$, $|y|=k-l$, где ни l, ни $k-l$ не равно 0, то сами x и y могут еще принимать два значения, отличающихся знаком; следовательно, мы получаем при этом четыре различных решения уравнения $|x|+|y|=k$, а именно: $(l, k-l)$, $(-l, k-l)$, $(l, -k+l)$ и $(-l, -k+l)$. Если же $l=0$ или $l=k$, то мы получаем лишь два решения уравнения $|x|+|y|=k$, а именно: $(0, k)$ и $(0, -k)$ или соответственно $(k, 0)$ и $(-k, 0)$. Таким образом, при $k \neq 0$ уравнение $|x|+|y|=k$ имеет $2+4(k-1)+2=4k$ различных решений. Если же $k=0$, то уравнение $|x|+|y|=k$ (т. е. уравнение $|x|+|y|=0$) имеет одно единственное решение: $x=0$, $y=0$. Отсюда вытекает, что число различных целочисленных решений неравенства $|x|+|y|<100$ равно

$$1+4(1+2+3+\ldots+99)=1+4\cdot\frac{99\cdot 100}{2}= \\ = 1+19\,800=19\,801.$$

25. Задача сводится к отысканию числа целых положительных решений уравнения $x+y+z=n$.

Заметим прежде всего, что уравнение $x+y=l$ (l — целое положительное число) имеет $l-1$ целых положительных решений. Действительно, в этом случае x может быть равен $1, 2, \ldots, l-1$ (x не может быть равен l, так как тогда y не был бы положителен); y определяется из уравнения и будет в этих случаях тоже целым положительным числом.

Перейдем теперь к нашему уравнению:

$$x+y+z=n.$$

Очевидно, x может быть равен $1, 2, 3, \ldots, n-2$ (но не может быть равен $n-1$, так как y и z не меньше 1, а $n-1+1+1>n$); y и z удовлетворяют уравнению

$$y+z=n-x;$$

поэтому при фиксированном значении x у нас есть $n-x-1$ возможностей для значений y и z. Отсюда следует, что общее число различных решений равно

$$(n-2)+(n-3)+\ldots+[n-(n-2)-1]= \\ =(n-2)+(n-3)+\ldots+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

26. Расположим слагаемые этой суммы в порядке возрастания. Ясно, что первое (наименьшее) слагаемое может изменяться от 1 до $\left[\frac{n}{3}\right]$, т. е. для него имеются $\left[\frac{n}{3}\right]$ возможности.

Если первое слагаемое равно x, то второе не может быть меньше x и больше $\left[\frac{n-x}{2}\right]$ (так как оно не меньше первого и не больше третьего). Таким образом, для второго слагаемого имеется $\left[\frac{n-x}{2}\right]-(x-1)$ возможности. Третье же слагаемое определяется однозначно первыми двумя. Так как x может принимать значения $1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{3}\right]-1, \left[\frac{n}{3}\right]$, то искомое число способов равно

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left(\left[\frac{n-2}{2}\right]-1\right)+ \\ +\left(\left[\frac{n-3}{2}\right]-2\right)+\ldots+\left\{\left[\frac{n-\left[\frac{n}{3}\right]}{2}\right]-\left(\left[\frac{n}{3}\right]-1\right)\right\}.$$

Преобразуем теперь это выражение. Пусть остаток от деления n на 3 равен k (k может быть равно 0, 1 или 2); тогда $n=3l+k$, и наше выражение равно следующему:

$$\left[\frac{3l+k-1}{2}\right]+\left[\frac{3l+k-2}{2}\right]+\left[\frac{3l+k-3}{2}\right]+\ldots \\ \ldots+\left[\frac{3l+k-l}{2}\right]-\{1+2+\ldots+(l-1)\}.$$

Выражение в фигурных скобках равно $\frac{l(l-1)}{2}$. Сосчитаем теперь сумму S остальных членов. Перепишем ее в обратном порядке; тогда она примет вид

$$S=\left[\frac{2l+k}{2}\right]+\left[\frac{2l+k+1}{2}\right]+\ldots \\ \ldots+\left[\frac{2l+k+(l-2)}{2}\right]+\left[\frac{2l+k+(l-1)}{2}\right].$$

Эта сумма состоит из l членов. Пользуясь формулой

$$\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^m}{4}$$

(см. решение задачи 21а)), мы можем записать эту сумму так:

$$S=\left(\frac{2l+k}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^k}{4}\right)+\left(\frac{2l+k}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{2l+k}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^{k+2}}{4}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{2l+k}{2}+\frac{l-1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^{k+l-1}}{4}\right).$$

Переставив слагаемые в другом порядке, получим:

$$S=\frac{l(2l+k)}{2}-\frac{l}{4}+\left(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{l-1}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{(-1)^k}{4}+\frac{(-1)^{k+1}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{k+l-1}}{4}\right).$$

Обозначим сумму $\frac{(-1)^k}{4}+\frac{(-1)^{k+1}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{k+l-1}}{4}$ через ε. Ясно, что ε может быть равно $+\frac{1}{4}$, 0 или $-\frac{1}{4}$ (ср. с решением задачи 21а)). Далее,

$$\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{l-1}{2}=\frac{l(l-1)}{4}$$

(это сумма членов арифметической прогрессии).

Таким образом, окончательно

$$S=\frac{l(2l+k)}{2}-\frac{l}{4}+\frac{l(l-1)}{4}+\varepsilon$$

и, значит, число способов, которыми можно представить число n в виде суммы трех целых положительных слагаемых, равно

$$S-\frac{l(l-1)}{2}=\frac{l(2l+k)}{2}-\frac{l}{4}+\frac{l(l-1)}{4}+\varepsilon-\frac{l(l-1)}{2}=$$
$$=\frac{l(4l+2k-1-l+1)}{4}+\varepsilon=\frac{l(3l+2k)}{4}+\varepsilon.$$

Но

$$\frac{l(3l+2k)}{4}+\varepsilon=\frac{3l(3l+2k)}{12}+\varepsilon=\frac{(3l+k-k)(3l+k+k)}{12}+\varepsilon=$$
$$=\frac{(n-k)(n+k)}{12}+\varepsilon=\frac{n^2-k^2}{12}+\varepsilon=\frac{n^2}{12}-\frac{k^2}{12}+\varepsilon.$$

Заметим, что если $k=0$, то $\frac{k^2}{12}=0$, а ε может быть равно 0 или $+\frac{1}{4}$; если $k=1$, то $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{12}$, а ε может быть равно 0 или $-\frac{1}{4}$; наконец, если $k=2$, то $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{3}$, а ε может быть равно 0 или $-\frac{1}{4}$. Поэтому $-\frac{k^2}{12}+\varepsilon$ заключено между $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$; следовательно, число способов, которыми можно представить число n в виде суммы трех целых положительных слагаемых, равно ближайшему к $\frac{n^2}{12}$ целому числу, т. е. $\left(\frac{n^2}{12}\right)$.

27. Так как $z=n-x-y$, то решение будет полностью определено, если нам будут известны x и y. Подставим вместо z в наши неравенства $n-x-y$:

1) Неравенство $z \leqslant x+y$ дает

$$n-x-y \leqslant x+y;$$

отсюда

$$n \leqslant 2(x+y); \quad x+y \geqslant \frac{n}{2},$$

т. е.

$$y \geqslant \frac{n}{2}-x.$$

2) Неравенство $y \leqslant x+z$ дает

$$y \leqslant x+n-x-y;$$

отсюда

$$2y \leqslant n, \quad y \leqslant \frac{n}{2}.$$

Из 1) и 2) следует, что при каждом фиксированном значении x имеется столько различных решений, сколько есть целых положительных чисел, заключенных между $\frac{n}{2}-x$ и $\frac{n}{2}$.

3) Неравенство $x \leqslant y+z$ дает

$$x \leqslant y+n-x-y;$$

отсюда

$$2x \leqslant n, \quad x \leqslant \frac{n}{2}.$$

Следовательно, x может изменяться от 1 до $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Помимо этих неравенств x и y должны удовлетворять еще неравенству $x+y<n$, так как $z>0$.

Рассмотрим теперь два возможных случая: n нечетно и n четно.

1) n нечетно. Тогда x может принимать значения

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}, \ \frac{n-1}{2}-1, \ \frac{n-1}{2}-2, \ \ldots, \ 1,$$

и при каждом из этих значений x число целых положительных чисел, заключенных между $\frac{n}{2}-x$ и $\frac{n}{2}$, равно x (этим условиям удовлетворяют числа $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}-1$, … …, $\frac{n-1}{2}-(x-1)$). Следовательно, при

$$x=\frac{n-1}{2}$$

имеется $\frac{n-1}{2}$ разных решений (y может равняться $\frac{n-1}{2}$; $\frac{n-3}{2}$; …; 1); при

$$x=\frac{n-1}{2}-1$$

имеется $\frac{n-1}{2}-1$ разных решений (y может равняться $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-1}{2}-1, \ldots, 2$), и т. д.; при $x=1$ имеется одно единственное решение $\left(y \text{ должен равняться } \frac{n-1}{2}\right)$. Ясно, что условие $x+y<n$ выполняется для всех этих решений. Окончательно общее число различных целых положительных решений уравнения $x+y+z=n$, удовлетворяющих указанным неравенствам, в этом случае равно

$$\frac{n-1}{2}+\frac{n-3}{2}+\ldots+1=\frac{\frac{(n-1)}{2}\cdot\left[\frac{n-1}{2}+1\right]}{2}=\frac{n^2-1}{8}.$$

2) n четно. Здесь x может принимать значения $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}-2$, …, 1. При $x=\frac{n}{2}$ число целых положи-

тельных чисел, заключенных между $\frac{n}{2}-x=0$ и $\frac{n}{2}$, равно $\frac{n}{2}=x$ $\left(\text{этим условиям удовлетворяют числа } \frac{n}{2},\ \frac{n}{2}-1, \ldots, 1\right)$, а при $x<\frac{n}{2}$ число целых положительных чисел, заключенных между $\frac{n}{2}-x$ и $\frac{n}{2}$, равно $x+1$ (этим условиям удовлетворяют числа $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}-1$, ..., $\frac{n}{2}-x$; при $x=\frac{n}{2}$ число решений равно только x, так как число $\frac{n}{2}-x=0$ не положительно и должно быть откинуто). Таким образом, при $x=\frac{n}{2}$ имеется $\frac{n}{2}$ разных решений $\left(y \text{ может равняться } \frac{n}{2},\ \frac{n}{2}-1, \ldots, 1\right)$; при $x=\frac{n}{2}-1$ имеется тоже $\frac{n}{2}$ разных решений $\left(y \text{ может равняться } \frac{n}{2},\ \frac{n}{2}-1, \ldots, 1\right)$, и т. д.; наконец, при $x=1$ существуют два разных решения $\left(y \text{ может равняться } \frac{n}{2} \text{ или } \frac{n}{2}-1\right)$. Из всех этих решений одно $\left(\text{а именно, } x=\frac{n}{2},\ y=\frac{n}{2}\right)$ мы должны отбросить, так как оно не удовлетворяет условию $x+y<n$. Таким образом, в этом случае общее число различных целых положительных решений уравнения $x+y+z=n$, удовлетворяющих указанным в условии задачи неравенствам, равно

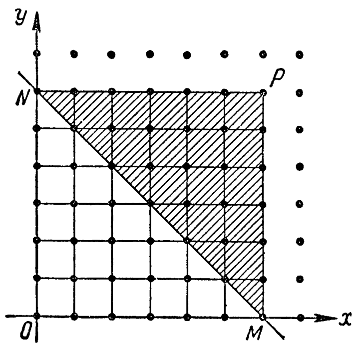
$$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-2\right)+\ldots+2-1=$$

$$=\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-2\right)+\ldots+2+1-3=$$

$$=\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)}{2}-3=\frac{(n+2)(n+4)}{8}-3=$$

$$=\frac{n^2+6n-16}{8}=\frac{(n+8)(n-2)}{8}.$$

Заметим еще, что условие нашей задачи может быть истолковано также и геометрически. Каждое целочисленное решение уравнения $x+y+z=n$ полностью определяется двумя целыми числами x и y (ибо $z=n-x-y$ однозначно определяется по x и y). Зададимся на плоскости декартовой системой координат и отметим все точки с целочисленными координатами x и y, являющиеся решением нашей задачи (черт. 36). Мы видели, что для таких решений должно быть $y \leqslant \frac{n}{2}$; поэтому все точки, отвечающие этим условиям, должны лежать под прямой $NP\left(ON = MP = \frac{n}{2}\right)$ или же на ней. В силу неравенства $x \leqslant \frac{n}{2}$ все эти точки должны лежать левее прямой $PM\left(OM = NP = \frac{n}{2}\right)$ или же на ней. Наконец, неравенство $x + y \geqslant \frac{n}{2}$ показывает, что все эти точки лежат над прямой NM или на ней. Таким образом, все искомые точки должны быть расположены внутри или на сторонах треугольника NPM, заштрихованного на черт. 36; вершины N, P и M треугольника при этом не подходят (даже если их координаты и целые), ибо для них одно из чисел x, y, z обращается в нуль.



Черт. 36.

Легко видеть, что и обратно — всем точкам треугольника NPM, имеющим целочисленные координаты (кроме вершин), отвечают целые положительные решения уравнения $x + y + z = n$, удовлетворяющие неравенствам $x + y \geqslant z$, $x + z \geqslant y$, $y + z \geqslant x$. Таким образом, наша задача допускает также следующую формулировку:

На плоскости, на которой задана декартова система координат, проведены прямые $x = \frac{n}{2}$, $y = \frac{n}{2}$ и $x + y = \frac{n}{2}$. Сколько точек с целочисленными координатами расположено внутри и на сторонах треугольника, ограниченного этими прямыми (вершины не считаются)?

28. Обозначим длины сторон треугольника через x, y и z. Тогда должно выполняться равенство

$$x + y + z = n.$$

Кроме того, величины x, y и z должны удовлетворять неравенствам

$$x < y + z, \quad y < x + z, \quad z < x + y$$

(длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон). Обратно, любые величины x, y и z, удовлетворяющие написанным выше формулам, являются сторонами треугольника, имеющего периметр n. Таким образом, задача очень похожа на предыдущую, но различие состоит в том, что если в предыдущей задаче, например, при перемене местами значений x и y мы получали другое решение (при условии, что $x \neq y$), то здесь при такой перестановке x и y мы получим тот же треугольник. Кроме того, в условиях, которым должны удовлетворять решения, вместо знаков $\leqslant$ теперь стоят знаки $<$. Это значит, что нужно отбросить решения, которым соответствуют точки на сторонах треугольника MPN (см. черт. 36). Заметим теперь, что при n нечетном на сторонах треугольника MPN нет точек с обеими целыми координатами, а при n четном на каждой из сторон этого треугольника MPN, кроме вершин, есть еще по $\frac{n}{2}-1$ точек с обеими целыми координатами. Значит, если бы мы в задаче 27 заменили неравенства $x \leqslant y+z$, $y \leqslant x+z$, $z \leqslant x+y$ неравенствами $x<y+z$, $y<x+z$, $z<x+y$, то при n нечетном количество решений осталось бы равным $\frac{n^2-1}{8}$, а при n четном оно стало бы равно

$$\frac{(n+8)(n-2)}{8}-3\left(\frac{n}{2}-1\right)=(n-2)\frac{n+8-12}{8}=\frac{(n-2)(n-4)}{8}.$$

Посмотрим теперь, сколько различных решений уравнения $x+y+z=n$ соответствует одному и тому же треугольнику периметра n.

Разностороннему треугольнику соответствует шесть разных решений уравнения. Действительно, обозначим длины сторон буквами p, q и r. Тогда имеем следующие шесть решений, отвечающие этому треугольнику:

1) $x=p,\ y=q,\ z=r$;	4) $x=q,\ y=r,\ z=p$;
2) $x=p,\ y=r,\ z=q$;	5) $x=r,\ y=p,\ z=q$;
3) $x=q,\ y=p,\ z=r$;	6) $x=r,\ y=q,\ z=p$.

Так как p, q и r различны, то все эти решения разные.

Равнобедренному треугольнику (стороны которого равны p, p и q, где $p \neq q$) отвечают три разных решения:

1) $x=p,\ y=p,\ z=q$; 2) $x=p,\ y=q,\ z=p$;
3) $x=q,\ y=p,\ z=p$.

Наконец, равностороннему треугольнику отвечает единственное решение. Таким образом, вычисленное нами число N целых положительных решений уравнения $x+y+z=n$, удовлетворяющих неравенствам $x<y+z$, $y<x+z$, $z<x+y$, равно

$$N=6P+3R+S,$$

где P — число разносторонних треугольников периметра n со сторонами, длины которых выражаются целыми числами, R — число равнобедренных, но не равносторонних треугольников, а S — число равносторонних треугольников.

Отсюда следует, что

$$N=6T-3Q-2S,$$

где $T=P+R+S$ — число всех треугольников периметра n, длины сторон которых выражаются целыми числами, $Q=R+S$ — число всех равнобедренных треугольников периметра n, длины сторон которых выражаются целыми числами, а S имеет то же значение, что и прежде.

Так как N мы уже вычислили, то для определения T нам нужно еще вычислить Q и S. Ясно, что $S=1$, если n делится на 3 (в этом случае равносторонний треугольник со сторонами, равными $\frac{n}{3}$, имеет целочисленные длины сторон), и равно 0, если n не делится на 3. Вычислим теперь Q. Число равнобедренных треугольников периметра n, длины сторон которых выражаются целыми числами, очевидно, равно числу целых положительных решений уравнения $2x+y=n$, удовлетворяющих условию $2x>y$. Но это последнее условие равносильно условию $x>\frac{n}{4}$. Действительно, так как $y=n-2x$, то неравенство $2x>y$ можно переписать в виде $2x>n-2x$, откуда $4x>n$, или, иначе, $x>\frac{n}{4}$. В решении задачи 20 мы, по существу, нашли число целых неотрицательных решений уравнения $2x+y=n$. Так как здесь нам надо найти число целых положительных решений этого уравнения и выяснить, сколько из них удовлетворяют неравенству $x>\frac{n}{4}$, то мы произведем снова этот подсчет. Ясно, что всякое целое положительное значение x, меньшее $\frac{n}{2}$, порождает целое положительное решение нашего уравнения, так как при целом $x<\frac{n}{2}$ и $y=n-2x>0$ является целым числом. Если n нечетное, то имеется ровно $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$ решений этого уравнения $\left(x=1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]\right)$; если же n четно, то решений будет $\left[\frac{n}{2}\right]-1=\frac{n-2}{2}$ (значение $x=\frac{n}{2}$ не годится, так как в этом случае $y=0$). Неравенству $x>\frac{n}{4}$ в обоих случаях, очевидно, не будут удовлетворять $\left[\frac{n}{4}\right]$ решений $\left(\text{а именно, } x=1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{4}\right]\right)$. Таким образом, если n нечетно, то

$$Q=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right],$$

а если n четно, то

$$Q=\left[\frac{n}{2}\right]-1-\left[\frac{n}{4}\right].$$

Теперь уже легко вычислить T — число всех треугольников периметра n, длины сторон которых выражаются целыми числами. Из формулы $N=6T-3Q-2S$ следует

$$T=\frac{N}{6}+\frac{Q}{2}+\frac{S}{3}.$$

Так как формулы, выражающие N, Q и S, зависят от остатков при делении n на 2, на 3 и на 4, то вместо единой формулы для T мы будем иметь разные формулы в зависимости от величины остатка r, получаемого при делении n на 12.

1) Если $r=0$, то

$$N=\frac{n^2-6n+8}{8},$$

$$Q=\left[\frac{n}{2}\right]-1-\left[\frac{n}{4}\right]=\frac{n}{2}-1-\frac{n}{4}=\frac{n-4}{4},$$

$$S=1;$$

$$T=\frac{N}{6}+\frac{Q}{2}+\frac{S}{3}=\frac{n^2-6n+8}{48}+\frac{n-4}{8}+\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{n^2-6n+8+6n-24+16}{48}=\frac{n^2}{48}.$$

2) Если $r=1$, то

$$N=\frac{n^2-1}{8},$$

$$Q=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]=\frac{n-1}{2}-\frac{n-1}{4}=\frac{n-1}{4},$$

$$S=0;$$

$$T=\frac{N}{6}+\frac{Q}{2}+\frac{S}{3}=\frac{n^2-1}{48}+\frac{n-1}{8}=$$

$$=\frac{n^2-1+6n-6}{48}=\frac{n^2+6n-7}{48}.$$

3) Если $r=2$, то

$$N=\frac{n^2-6n+8}{8},$$

$$Q=\left[\frac{n}{2}\right]-1-\left[\frac{n}{4}\right]=\frac{n}{2}-1-\frac{n-2}{4}=\frac{n-2}{4},$$

$$S=0;$$

$$T=\frac{N}{6}+\frac{Q}{2}+\frac{S}{3}=\frac{n^2-6n+8}{48}+\frac{n-2}{8}=$$

$$=\frac{n^2-6n+8+6n-12}{48}=\frac{n^2-4}{48}.$$

4) Если $r=3$, то

$$N=\frac{n^2-1}{8},$$

$$Q=\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]=\frac{n-1}{2}-\frac{n-3}{4}=\frac{n+1}{4},$$

$$S=1;$$

$$T=\frac{N}{6}+\frac{Q}{2}+\frac{S}{3}=\frac{n^2-1}{48}+\frac{n+1}{8}+\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{n^2-1+6n+6+16}{48}=\frac{n^2+6n+21}{48}.$$

Таким же образом получаем табличку:

5) Если $r=4$, то $T=\frac{n^2-16}{48}$.

6) » $r=5$, то $T=\frac{n^2+6n-7}{48}$.

7) » $r=6$, то $T=\frac{n^2+12}{48}$.

8) Если $r=7$, то $T=\frac{n^2+6n+5}{48}$.

9) » $r=8$, то $T=\frac{n^2-16}{48}$.

10) » $r=9$, то $T=\frac{n^2+6n+9}{48}$.

11) » $r=10$, то $T=\frac{n^2-4}{48}$.

12) » $r=11$, то $T=\frac{n^2+6n+5}{48}$.

Заметим, что во всех случаях свободные члены многочленов, стоящих в числителях, меньше половины знаменателя. Поэтому мы можем сформулировать ответ еще так:

Если n нечетно, то число треугольников периметра n, длины сторон которых выражаются целыми числами, равно

$$\left(\frac{n^2+6n}{48}\right);$$

если же n четно, то число треугольников периметра n, длины сторон которых выражаются целыми числами, равно

$$\left(\frac{n^2}{48}\right).$$

29. П е р в о е р е ш е н и е з а д а ч а) и б). Отметим прежде всего, что *число целых положительных* (*соответственно целых неотрицательных*) *решений уравнения*

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=n \qquad (*)$$

равно разности числа целых положительных (*неотрицательных*) *решений неравенства*

$$x_1+x_2+\ldots+x_m\leqslant n \qquad (**)$$

и числа целых положительных (*неотрицательных*) *решений неравенства*

$$x_1+x_2+\ldots+x_m\leqslant n-1.$$

Далее, очевидно, если

$$x_1+x_2+\ldots+x_m\leqslant n,$$

то

$$(x_1-1)+(x_2-1)+\ldots+(x_m-1)\leqslant n-m,$$

откуда следует, что *число целых положительных решений неравенства*

$$x_1+x_2+\ldots+x_m \leqslant n$$

равно числу целых неотрицательных решений неравенства

$$y_1+y_2+\ldots+y_m \leqslant n-m$$

(если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — целые положительные числа, то $x_1-1, x_2-1, \ldots, x_m-1$ — целые неотрицательные числа [1])). Таким образом, решение задач а) и б) сводится к тому, чтобы определить число $N(n, m)$ решений неравенства

$$x_1+x_2+\ldots+x_m \leqslant n \qquad (**)$$

в целых неотрицательных числах.

Заметим теперь, что если

$$x_1+x_2+\ldots+x_m \leqslant n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — целые неотрицательные числа, то наибольшее число t_m из следующего ряда возрастающих положительных чисел

$$t_1=x_1+1,\ t_2=x_1+x_2+2,$$
$$t_3=x_1+x_2+x_3+3, \ldots,\ t_m=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m+m$$

не превосходит $n+m$. С другой стороны, если мы имеем m различных целых положительных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$, не превосходящих $n+m$, то мы можем по этим числам построить решение $x_1, x_2, \ldots, x_m$ неравенства (**) в целых неотрицательных числах: для этого достаточно считать, что числа $t_1, t_2, \ldots, t_m$ расположены в возрастающем порядке и положить

$$x_1=t_1-1,\ x_2=t_2-t_1-1,$$
$$x_3=t_3-t_2-1, \ldots,\ x_m=t_m-t_{m-1}-1.$$

Эти рассуждения показывают, что *число* $N(n, m)$ *неотрицательных решений нашего неравенства* (**) *равно числу способов выбора из* $n+m$ *чисел* $1, 2, 3, \ldots, n+m$ *каких-либо* m *чисел, т. е. равно* C_{n+m}^m.

---

[1]) Отметим, что в задаче об отыскании числа целых положительных решений уравнения (*), разумеется, следует считать $n > m$.

Теперь уже легко выписать ответы задач а) и б). А именно, согласно показанному выше:

а) Число целых положительных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

равно

$$N(n - m, m) - N(n - 1 - m, m) = C_n^m - C_{n-1}^m = C_{n-1}^{m-1}$$

(ибо по известному свойству сочетаний $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = C_n^m$).

б) Число целых неотрицательных решений этого уравнения равно

$$N(n, m) - N(n - 1, m) = C_{n+m}^m - C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{m-1}$$

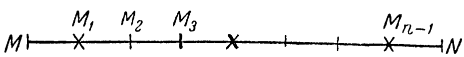
(ибо $C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$).

Второе решение задач а) и б). Рассмотрим отрезок MN длины n. Каждое решение уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

в целых положительных (соответственно в целых неотрицательных) числах соответствует разбиению этого отрезка на m меньших отрезков, длины которых выражаются целыми положительными (неотрицательными) числами. Это позволяет дать новое решение наших задач.

а) Число решений нашего уравнения в целых положительных числах равно числу способов разбиения отрезка MN на m меньших отрезков. Если $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_{n-1}$ — такие точки нашего отрезка, что $MM_1 =$ $= M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}N = 1$ (черт. 37), то число способов



Черт. 37.

разбиения отрезка MN на m отрезков равно, очевидно, числу способов выбора из $n - 1$ точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ каких-то $m - 1$ точек деления, т. е. равно числу C_{n-1}^{m-1} сочетаний из $n - 1$ элементов по $m - 1$.

б) Аналогично, число решений нашего уравнения в целых неотрицательных числах равно числу способов выбора из $n + 1$ точек $M, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, N$

(концы отрезка здесь также могут быть точками деления) $m-1$ точек (некоторые из них могут совпадать между собой). Другими словами, это число равно числу C_{n+m-1}^{m-1} сочетаний с повторениями из $n+1$ элементов по $m-1$ (см. решение задачи 6 и примечание к решению этой задачи).

Примечание. Сравнивая между собой два решения задачи, можно отметить, что второе решение задачи а) является значительно более простым, чем первое решение. Что же касается задачи б), то тут, пожалуй, первое решение даже проще второго.

30. а) Пусть $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ и пусть наибольшие среди слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_m$ равны l (здесь употреблено множественное число, ибо среди $x_1, x_2, \ldots, x_m$ может быть несколько равных между собой и больших всех остальных чисел). В таком случае слагаемые $x_1, x_2, \ldots, x_m$ могут быть равны либо 1, либо 2, либо 3, ..., либо l. Обозначим через k_1 число слагаемых, равных 1, через k_2 — число слагаемых, равных 2, через k_3 — число слагаемых, равных 3, ..., через k_l — число слагаемых, равных l (при этом некоторые из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_l$ могут оказаться равными нулю). Тогда справедливо равенство

$$n=x_1+x_2+\ldots+x_m=k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3+\ldots+k_l l=\\=(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_l)+(k_2+k_3+\ldots+k_l)+\\+(k_3+\ldots+k_l)+\ldots+k_l.$$

Но $k_1+k_2+\ldots+k_l$ равно числу всех слагаемых в нашей сумме, т. е. m, поэтому можно записать:

$$(k_2+k_3+\ldots+k_l)+(k_3+\ldots+k_l)+\ldots+k_l=n-m.$$

Обозначим теперь

$$k_2+k_3+\ldots+k_l=y_1,\quad k_3+\ldots+k_l=y_2,\ \ldots,\ k_l=y_{l-1},$$

тогда из написанного выше равенства следует

$$y_1+y_2+\ldots+y_{l-1}=n-m.$$

Здесь все слагаемые $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ — целые положительные числа, не превосходящие m, так как

$$m=k_1+k_2+\ldots+k_l\geqslant k_2+k_3+\ldots+k_l\geqslant\\\geqslant k_3+\ldots+k_l\geqslant\ldots\geqslant k_l,$$

т. е.

$$m\geqslant y_1\geqslant y_2\geqslant\ldots\geqslant y_{l-1}.$$

Таким образом, *каждому представлению числа n в виде суммы m целых положительных слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно сопоставить определенное представление числа $n-m$ в виде суммы целых положительных слагаемых $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$, каждое из которых не превосходит m.*

Покажем теперь, что, обратно, *каждое представление числа $n-m$ в виде суммы целых положительных слагаемых $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$, не превосходящих m, сопоставляется указанным здесь способом одному определенному представлению числа n в виде суммы m слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_m$.* С этой целью покажем, что, зная $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$, можно восстановить числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Действительно, предположим, что слагаемые $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ расположены в невозрастающем порядке (этого всегда можно добиться, изменив, если нужно, порядок нумерации чисел $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$). Зная $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$, определим далее $k_1, k_2, \ldots, k_{l-1}, k_l$ по формулам

$$k_l = y_{l-1} > 0,\ k_{l-1} = y_{l-2} - y_{l-1} \geqslant 0,$$
$$k_{l-2} = y_{l-3} - y_{l-2} \geqslant 0,\ \ldots,\ k_2 = y_1 - y_2 \geqslant 0,$$
$$k_1 = m - y_1 \geqslant 0$$

и возьмем k_1 слагаемых, равных 1, k_2 слагаемых, равных 2, ..., k_l слагаемых, равных l. При этом общее число слагаемых будет равно

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_l = m;$$

сумма же их, как легко проверить, воспользовавшись выражением чисел $k_1, k_2, \ldots, k_l$ через $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$, будет равна

$$m + y_1 + y_2 + \ldots + y_{l-1} = m + n - m = n.$$

Легко видеть, что именно этой сумме m слагаемых будет сопоставлено представление числа $n-m$ в виде суммы не превосходящих m слагаемых: $y_1 + y_2 + \ldots + y_{l-1} = n - m$.

Отсюда следует, что число представлений числа n в виде суммы m целых положительных слагаемых равно числу представлений числа $n-m$ в виде суммы целых положительных, не превышающих m слагаемых (см. также примечание после решения задачи б)).

При $m = 3$ доказанная нами теорема гласит: ч и с л о п р е д с т а в л е н и й ч и с л а n в в и д е с у м м ы т р е х с л а г а е м ы х равно числу представлений числа $n-3$ в виде суммы слагаемых, равных 1, 2 и 3. Сравнив ответы задач 26 и 21а), легко убедиться, что это действительно будет так. Если бы мы знали эту теорему ранее, то могли бы ограничиться решением только одной из двух задач 21а) и 26 (ибо их ответы должны совпасть).

б) Пусть $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ есть разложение числа n на m неравных целых положительных слагаемых, расположенных в порядке возрастания; в таком случае

$$x_1 \geqslant 1,\quad x_2>x_1\geqslant 2,\quad x_3>x_2\geqslant 3,\ldots,\quad x_m>x_{m-1}\geqslant m.$$

Поэтому мы можем составить следующее разложение числа

$$n-(1+2+3+\ldots+m)=n-\frac{m(m+1)}{2}$$

на m не обязательно различных целых неотрицательных слагаемых:

$$n-\frac{m(m+1)}{2}=$$
$$=(x_1-1)+(x_2-2)+(x_3-3)+\ldots+(x_m-m)$$

(часть из них может равняться нулю!).

Предположим теперь, что наибольшие из чисел x_1-1, $x_2-2,\ldots,x_m-m$ равны l и что среди них имеется k_0 чисел 0, k_1 чисел 1, k_2 чисел 2, k_3 чисел 3, $\ldots$, k_l чисел l. В таком случае мы будем иметь

$$n-\frac{m(m+1)}{2}=k_0\cdot 0+k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3+\ldots+k_l\cdot l=$$
$$=(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_l)+(k_2+k_3+\ldots+k_l)+$$
$$+(k_3+\ldots+k_l)+\ldots+k_l.$$

Обозначив

$$k_1+k_2+k_3+\ldots+k_l=y_1,\quad k_2+k_3+\ldots+k_l=y_2,$$
$$k_3+\ldots+k_l=y_3,\ldots,k_l=y_l,$$

получим

$$y_1+y_2+y_3+\ldots+y_l=n-\frac{m(m+1)}{2},$$

где все слагаемые y_1, y_2, $\ldots$, y_l — целые положительные числа, не превосходящие m, так как

$$k_0+k_1+k_2+k_3+\ldots+k_l\geqslant k_1+k_2+k_3+\ldots+k_l\geqslant$$
$$\geqslant k_2+k_3+\ldots+k_l\geqslant k_3+\ldots+k_l\geqslant\ldots\geqslant k_l$$

и
$$k_0+k_1+k_2+k_3+\ldots+k_l=m,$$

т. е. равно числу слагаемых $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$.

Итак, мы показали, что *каждому представлению числа n в виде суммы m различных целых положительных слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно сопоставить представление числа $n-\frac{m(m+1)}{2}$ в виде суммы слагаемых $y_1, y_2, \ldots, y_l$, не превосходящих m.*

Покажем теперь, что и, обратно, *по числам $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_l$ можно однозначно восстановить первоначальные слагаемые $x_1, x_2, \ldots, x_m$.* Для этого, расположив числа $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_l$ в невозрастающем порядке, определим $k_1, k_2, \ldots, k_l$ и k_0 по формулам

$$k_l=y_l>0, \quad k_{l-1}=y_{l-1}-y_l\geqslant 0,$$
$$k_{l-2}=y_{l-2}-y_{l-1}\geqslant 0, \ldots, \quad k_1=y_1-y_2\geqslant 0, \quad k_0=m-y_1$$

и возьмем $m=k_0+k_1+k_2+\ldots+k_l$ слагаемых $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$, k_0 из которых равны 0, k_1 — равны 1, k_2 — равны 2, ..., k_l — равны l. Положив теперь

$$x_1=\bar{x}_1+1, \quad x_2=\bar{x}_2+2, \quad x_3=\bar{x}_3+3, \ldots, \quad x_m=\bar{x}_m+m$$

(где числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$ считаются расположенными в порядке возрастания), мы придем к разложению числа $\left(n-\frac{m(m+1)}{2}\right)+(1+2+3+\ldots+m)=n$ на сумму m неравных слагаемых

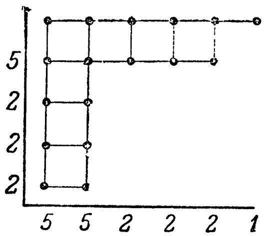
$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m=n,$$

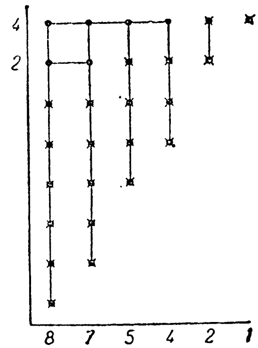
которой сопоставляется представление

$$y_1+y_2+\ldots+y_l=n-\frac{m(m+1)}{2}$$

числа $n-\frac{m(m+1)}{2}$ в виде суммы слагаемых, не превосходящих m.

Примечание. Решение задачи 30а) можно пояснить следующей геометрической фигурой (черт. 38, *а*). Изобразим представление числа n в виде суммы m целых положительных слагаемых следующим образом: расположим на плоскости в m столбцах n точек, причем в первом столбце поставим столько точек, сколько единиц в наибольшем из слагаемых, во втором — столько, сколько единиц в следующем по величине слагаемом (если среди слагаемых имеется два или больше равных между собой наибольших слагаемых, то во втором столбце будет стоять столько же точек, сколько в первом), в третьем столько, сколько единиц в третьем слагаемом, ..., в последнем — столько, сколько единиц в наименьшем слагаемом (на черт. 38, *а* изображено





Черт. 38.

представление числа 17 в виде суммы шести слагаемых: $5+5+$ $+2+2+2+1$).

Будем располагать наши столбцы таким образом, чтобы верхние точки каждого столбца находились на одной горизонтальной прямой; в таком случае число точек в верхнем ряду будет точно равно числу слагаемых, т. е. m. Отбросим теперь верхний ряд, а остальные $n-m$ точек будем пересчитывать по строкам; тогда числа $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ точек в отдельных строках определят разложение числа $n-m$ на сумму слагаемых, не превосходящих m (в случае, изображенном на черт. 38, *а*, мы получим $11=5+2+2+2$).

Обратно, если нам дано представление числа $n-m$ в виде суммы не превосходящих m слагаемых $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$, то, расположив в $l-1$ горизонтальных строках по $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ точек и добавив еще верхний ряд из m точек, мы получим m столбцов, определяющих разложение числа n на m слагаемых.

Аналогично можно пояснить и решение задачи 30б). Если изобразить точечной диаграммой, аналогичной черт. 38, *а*, представление числа n в виде суммы m различных слагаемых, то в каждом столбце будет стоять разное число точек; при этом в последнем столбце будет не меньше одной точки, в предпоследнем — не меньше двух, ..., в первом — не меньше m точек. Зачеркнем теперь нижнюю точку последнего столбца, две нижние точки предпоследнего столбца, ..., m нижних точек первого столбца (в рассуждении, относящемся к задаче 30а), тоже можно не отбрасывать верхнюю строку точек, а зачеркивать нижнюю точку в каждом столбце). Если теперь пересчитать точки по строкам, то мы получим разложение числа

$$n-(1+2+3+\ldots+m)=n-\frac{m(m+1)}{2}$$

на сумму слагаемых, не превосходящих m.

Так, на черт. 38, *б* изображены представление числа 27 в виде суммы шести различных слагаемых $8+7+5+4+2+1$ и отвечающее ему представление числа $27-\frac{7\cdot 6}{2}=6$ в виде суммы слагаемых, не превосходящих 6, т. е. $4+2$.

31. Первое решение задач а) и б). а) Каждое целое положительное число можно представить в виде произведения некоторой степени 2 на нечетное число. Пусть у нас имеется представление числа n в виде суммы различных целых положительных чисел. Расположим эти числа в следующем порядке: сначала расположим в возрастающем порядке имеющиеся среди них степени 2 (в число степеней 2 включается и $2^0=1$), затем в том же порядке расположим слагаемые, являющиеся произведениями степеней 2 на 3, за ними — произведения степеней 2 на 5 и т. д.

Таким образом, имеем

$$n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_p}+2^{l_1}\cdot 3+2^{l_2}\cdot 3+\ldots+2^{l_q}\cdot 3+ \\ +2^{m_1}\cdot 5+2^{m_2}\cdot 5+\ldots+2^{m_r}\cdot 5+\ldots$$

Этому представлению числа n можно сопоставить представление числа n в виде суммы целых положительных нечетных чисел, состоящее из $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_p}$ единиц, $2^{l_1}+2^{l_2}+\ldots$ $\ldots+2^{l_q}$ троек, $2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots 2^{m_r}$ пятерок и т. д.

Обратно, по представлению n в виде суммы нечетных слагаемых можно определить представление n в виде суммы различных слагаемых, с которым оно сопоставлено. Пусть в представлении n в виде суммы нечетных слагаемых s_1 слагаемых равно 1, s_3 слагаемых равно 3, s_5 слагаемых равно 5 и т. д. Запишем теперь числа $s_1, s_3, s_5, \ldots$ в двоичной системе счисления, т. е. представим их в виде суммы различных степеней 2:

$$s_1=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_p},\quad s_3=2^{l_1}+2^{l_2}+\ldots+2^{l_q}, \\ s_5=2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_r} \text{ и т. д.}$$

Тогда легко убедиться, что наше разложение числа n в сумму нечетных слагаемых сопоставлено со следующим представлением числа n в виде суммы различных слагаемых:

$$n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_p}+2^{l_1}\cdot 3+2^{l_2}\cdot 3+\ldots+2^{l_q}\cdot 3+\\+2^{m_1}\cdot 5+2^{m_2}\cdot 5+\ldots+2^{m_r}\cdot 5+\ldots$$

Следовательно, число представлений числа n в виде суммы различных целых положительных чисел равно числу представлений числа n в виде суммы нечетных целых положительных слагаемых (некоторые из них могут быть и одинаковыми).

б) Эта задача является обобщением задачи а) и может быть решена аналогично. Пусть мы имеем представление числа n в виде суммы слагаемых, не кратных k; в этом представлении слагаемое 1 встречается s_1 раз, ..., слагаемое $k-1$ встречается s_{k-1} раз, слагаемое $k+1$ встречается s_{k+1} раз и т. д.: $n=s_1\cdot 1+\ldots+s_{k-1}(k-1)+s_{k+1}(k+1)+\ldots$ Запишем теперь каждое из чисел $s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots$ по системе счисления с основанием k:

$$s_1=q_0^{(1)}+q_1^{(1)}\cdot k+q_2^{(1)}\cdot k^2+q_3^{(1)}\cdot k^3+\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{k-1}=q_0^{(k-1)}+q_1^{(k-1)}k+q_2^{(k-1)}k^2+q_3^{(k-1)}k^3+\ldots,$$

$$s_{k+1}=q_0^{(k+1)}+q_1^{(k+1)}k+q_2^{(k+1)}k^2+q_3^{(k+1)}k^3+\ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где «цифры» $q_0^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_3^{(1)}, \ldots$, и т. д. могут принимать значения $0, 1, 2, \ldots, k-1$. В таком случае мы сможем сопоставить нашему представлению числа n в виде суммы слагаемых другое представление, в котором ни одно слагаемое не повторяется чаще, чем $k-1$ раз:

$$n=\underbrace{1+\ldots+1}_{q_0^{(1)}\text{ раз}}+\underbrace{k+\ldots+k}_{q_1^{(1)}\text{ раз}}+\underbrace{k^2+\ldots+k^2}_{q_2^{(1)}\text{ раз}}+\ldots$$

$$\ldots+\underbrace{2+\ldots+2}_{q_0^{(2)}\text{ раз}}+\underbrace{2k+\ldots+2k}_{q_1^{(2)}\text{ раз}}+\underbrace{2k^2+\ldots+2k^2}_{q_2^{(2)}\text{ раз}}+\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ldots+\underbrace{(k+1)+\ldots+(k+1)}_{q_0^{(k+1)}\text{ раз}}+\underbrace{(k+1)k+\ldots+(k+1)k}_{q_1^{(k+1)}\text{ раз}}+\\+\underbrace{(k+1)k^2+\ldots+(k+1)k^2}_{q_2^{(k+1)}\text{ раз}}+\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Обратно, по последнему представлению числа n в виде суммы слагаемых, ни одно из которых не повторяется k или больше раз, можно восстановить первоначальное представление того же числа в виде суммы слагаемых, ни одно из которых не делится на k. Отсюда и следует, что число тех и других представлений одинаково.

Второе решение задач а) и б). Приведем здесь еще одно существенно иное доказательство теорем задач а) и б); при этом мы ограничимся теоремой задачи б), так как теорема задачи а) представляет ее частный случай.

Обозначим число представлений n в виде суммы целых положительных слагаемых через $p(n)$, а число таких представлений, в которых m_1 слагаемых равны a_1, m_2 слагаемых равны a_2, ..., m_k слагаемых равны a_k, а остальные слагаемые какие угодно,— через $p(n;\ a_1, a_2, \ldots, a_k;\ m_1, m_2, \ldots, m_k)$. Очевидно, что представления последнего рода существуют только в том случае, если $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_ka_k < n$ и при этом

$$p(n;\ a_1, a_2, \ldots, a_k;\ m_1, m_2, \ldots, m_k) = \\ = p[n - (m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_ka_k)].$$

Пусть A есть число представлений n в виде суммы слагаемых, ни одно из которых не делится на k. Для того чтобы получить число A, надо из $p(n)$ вычесть число тех представлений n в виде суммы слагаемых, в которых хотя бы одно слагаемое делится на k:

$$p(n) - [p(n;\ k;\ 1) + p(n;\ 2k;\ 1) + p(n;\ 3k;\ 1) + \ldots].$$

Однако в выписанном выражении каждое представление числа n в виде суммы слагаемых, два из которых делятся на k, вычитается из числа $p(n)$ дважды; поэтому это выражение следует дополнить общей суммой всех таких представлений:

$$p(n) - [p(n;\ k;\ 1) + p(n;\ 2k;\ 1) + p(n;\ 3k;\ 1) + \ldots] + \\ + [p(n;\ k, 2k;\ 1, 1) + p(n;\ k, 3k;\ 1, 1) + \\ + p(n;\ 2k, 3k;\ 1, 1) + \ldots].$$

Но и это выражение для A не является окончательным. Здесь каждое представление числа n в виде суммы слагаемых, три из которых, ak, bk, ck, делятся на k, сначала три раза вычитается из $p(n)$ [оно учитывается в выражениях $p(n;\ ak;\ 1)$, $p(n;\ bk;\ 1)$, $p(n;\ ck;\ 1)$], а затем три раза прибавляется к

$p(n)$ [ибо оно учитывается также в следующих выражениях: $p(n;\ ak;\ bk;\ 1,\ 1)$, $p(n;\ ak,\ ck;\ 1,\ 1)$, $p(n;\ bk;\ ck;\ 1,\ 1)$]. Так как из числа $p(n)$ это представление надо вычесть, то мы приходим к выражению:

$$p(n)-[p(n;\ k;\ 1)+p(n;\ 2k;\ 1)+p(n;\ 3k;\ 1)+\ldots]+\\+[p(n;k,2k;1,1)+p(n;k,3k;1,1)+p(n;2k,3k;1,1)+\ldots]-\\-[p(n;k,2k,3k;\ 1,\ 1,\ 1)+p(n;k,\ 2k,\ 4k;\ 1,\ 1,\ 1)+\ldots].$$

Продолжая рассуждать таким же образом, мы окончательно приходим к формуле (ср. с первым решением задачи 78а)):

$$A=p(n)-[p(n;\ k;\ 1)+p(n;\ 2k;\ 1)+p(n;\ 3k;\ 1)+\ldots]+\\+[p(n;k,2k;1,1)+p(n;k,3k;1,1)+p(n;\ 2k,3k;\ 1,1)+\ldots]-\\-[p(n;\ k,\ 2k,\ 3k;\ 1,\ 1,\ 1)+p(n;k,2k,4k;\ 1,1,1)+\ldots]+\\+[p(n;k,2k,3k,4k;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)+\ldots]-\ldots=\\=p(n)-\{p(n-k)+p(n-2k)+p(n-3k)+\ldots\}+\\+\{p[n-(1+2)k]+p[n-(1+3)k]+p[n-(2+3)k]+\ldots\}-\\-\{p[n-(1+2+3)k]+p[n-(1+2+4)k]+\ldots\}+\\+\{p[n-(1+2+3+4)k]+\ldots\}-\ldots$$

Точно так же число B представлений n в виде суммы слагаемых, никакие k из которых не равны, получается, если вычесть из $p(n)$ все те представления, в которых какое-либо слагаемое встречается k раз:

$$p(n)-[p(n;\ 1;\ k)+p(n;\ 2;\ k)+p(n;\ 3;\ k)+\ldots].$$

Однако в последнем выражении все представления числа n в виде суммы слагаемых, в которой два различных слагаемых повторяются k раз, вычитаются из $p(n)$ дважды. Рассуждая, как выше, мы в конце концов придем к следующей формуле для числа B:

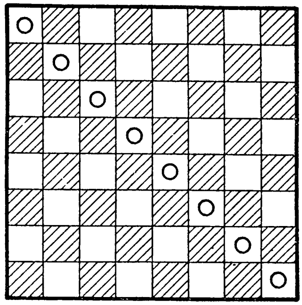
$$B=p(n)-[p(n;\ 1;\ k)+p(n;\ 2;\ k)+p(n;\ 3;\ k)+\ldots]+\\+[p(n;1,\ 2;\ k,\ k)+p(n;1,3;k,k)+p(n;\ 2,\ 3;\ k,\ k)+\ldots]-\\-[p(n;\ 1,\ 2,\ 3;\ k,k,k)+p(n;\ 1,\ 2,\ 4;\ k,\ k,\ k)+\ldots]+\\+[p(n;\ 1,2,3,4;\ k,k,k,k)+\ldots]-\ldots=\\=p(n)-\{p(n-k)+p(n-2k)+p(n-3k)+\ldots\}+\\+\{p[n-(1+2)k]+p[n-(1+3)k]+\\+p[n-(2+3)k]+\ldots\}-\\-\{p[n-(1+2+3)k]+p[n-(1+2+4)k]+\ldots\}+\\+\{p[n-(1+2+3+4)k]+\ldots\}-\ldots$$

Сравнивая выражения для A и B, мы убеждаемся, что

$$A = B,$$

что и требовалось доказать.

32. а) Шахматная доска из n^2 клеток (см. черт. 39, где изображен случай $n=8$) содержит n горизонталей и n вертикалей. Для того чтобы никакие две из расставленных на этой доске ладей не угрожали друг другу, необходимо, чтобы никакие две ладьи не стояли на одной и той же горизонтали или на одной и той же вертикали. Отсюда ясно, что общее число ладей не может превосходить n, причем n ладей можно расставить так, чтобы никакие две из них не угрожали друг другу: для этого достаточно, например, расставить эти ладьи вдоль какой-либо из главных диагоналей шахматной доски.



Черт. 39.

Выясним теперь, сколько существует различных расположений n ладей, удовлетворяющих нашим условиям. Будем называть первой ладью, стоящую на первой вертикали, второй — стоящую на второй вертикали и т. д., вплоть до n-й ладьи, стоящей на n-й вертикали. Первую ладью мы можем поместить на любую из n горизонталей, после этого вторую можно будет поместить на любую из $n-1$ оставшихся горизонталей (горизонталь, занятая первой ладьей, исключается, так как никакие две ладьи не должны угрожать друг другу), третью ладью — на любую из $n-2$ оставшихся не занятыми горизонталей и т. д., вплоть до $(n-1)$-й ладьи, для которой можно будет выбрать одну из двух не занятых предшествующими $n-2$ ладьями горизонталей, и последней ладьи, для которой остается одна единственная не занятая еще горизонталь. Комбинируя n различных расположений первой ладьи с $n-1$ различными расположениями второй ладьи, мы получим $n(n-1)$ возможных расположений первых двух ладей; точно так же получается $n(n-1)(n-2)$ возможных расположений первых трех ладей, $n(n-1)(n-2)(n-3)$ расположений первых четырех ладей, ..., $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$

различных расположений всех n ладей. Итак, искомое число различных расположений равно

$$1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-1)\,n=n!$$

В частности, для обыкновенной шахматной доски, для которой $n=8$, мы получаем:

$$8!=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40\,320$$

различных расположений.

б) Все поля шахматной доски из n^2 клеток не могут находиться под угрозой, если на доске стоит меньше n ладей. Действительно, в этом случае имеется хотя бы одна вертикаль, на которой не стоит ни одной ладьи; n клеток этой вертикали не могут все находиться под угрозой расставленных ладей, так как число ладей меньше n и ни одна из них не может угрожать одновременно двум клеткам рассматриваемой вертикали; n ладей, удовлетворяющих условию задачи, расставить, очевидно, возможно (см., например, черт. 39).

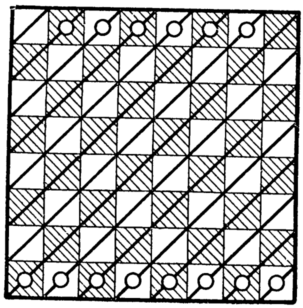
Если n ладей, расставленных на шахматной доске из n^2 клеток, угрожают всем полям доски, то либо на каждой вертикали доски стоит по одной ладье, либо на каждой горизонтали стоит по одной ладье. Действительно, если бы существовали и вертикаль и горизонталь, свободные от ладей, то поле, находящееся в пересечении этих вертикали и горизонтали, не находилось бы под угрозой. Но число способов расстановки ладей по одной на каждую из n вертикалей равно n^n (первую ладью можно n способами поставить на одно из полей первой вертикали; вторую, независимо от первой, n способами на одно из полей второй вертикали и т. д.). Число способов расстановки n ладей по одной на каждую из n горизонталей, очевидно, также равно n^n. На первый взгляд может показаться, что общее число расположений n ладей, при которых они держат под угрозой все поля доски, равно $n^n+n^n=2n^n$. Однако при таком подсчете мы по два раза считаем каждое расположение, при котором на каждой вертикали стоит по одной ладье и одновременно на каждой горизонтали стоит по одной ладье. Так как общее число этих последних расположений равно $n!$ (см. решение задачи а)), то правильным ответом на поставленный вопрос является $2n^n-n!$.

В частности, для обыкновенной шахматной доски ($n=8$) мы получаем:

$$2\cdot 8^8 - 8! = 33\,514\,312$$

различных расположений.

33. а) Рассмотрим на обыкновенной шахматной доске из 64 клеток диагонали, идущие слева вверх направо. Таких диагоналей будет 15: 8 диагоналей, начинающихся клетками первой вертикали, и 7 диагоналей, начинающихся клетками первой горизонтали, не принадлежащими первой вертикали



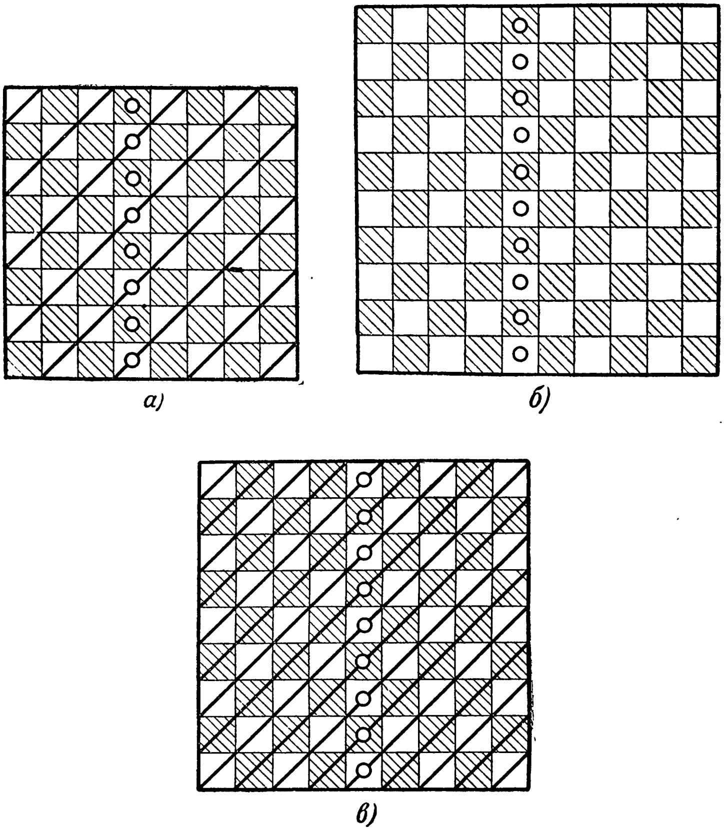
Черт. 40.

(черт. 40). Если никакие два из расставленных слонов не угрожают друг другу, то на каждой диагонали может стоять не более одного слона; следовательно, общее число слонов не может быть более 15. Но ровно 15 слонов также нельзя расставить: крайние из наших 15 диагоналей обе состоят из одной единственной клетки, причем эти две клетки расположены на одной диагонали, идущей справа вверх налево (на главной диагонали; см. черт. 40); следовательно, мы не можем поместить слонов на обе эти клетки. Таким образом, искомое наибольшее число слонов не превосходит 14.

14 слонов можно расставить требуемым образом, что показывает, например, черт. 40. Это и есть наибольшее число слонов, которое можно расставить на шахматной доске в 64 клетки так, чтобы никакие два слона не угрожали друг другу.

В более общем случае доски из n^2 клеток точно такие же рассуждения показывают, что наибольшее число слонов равно $2n-2$.

б) Покажем, что все клетки шахматной доски из 64 клеток не могут находиться под угрозой, если на доске стоит меньше восьми слонов. Действительно, эта шахматная доска имеет восемь «белых» диагоналей (диагоналей из белых клеток), идущих



Черт. 41.

слева вверх направо (черт. 41, *а*). Если на доске стоит менее четырех «белых» (т. е. расположенных на белых полях) слонов, то по крайней мере пять из этих диагоналей будут свободны от слонов, причем, как легко видеть, хотя бы одна из свободных диагоналей будет состоять более чем из трех клеток. Так как ни один из слонов не может угрожать более чем одному полю такой свободной диагонали и так как общее число «белых» слонов на доске по предположению не превосходит трех, то все поля наибольшей из свободных белых диагоналей не могут оказаться под угрозой. Таким образом, для того чтобы все поля находились под угрозой, общее число «белых» слонов должно быть не менее четырех. Точно так же доказывается, что если все поля шахматной доски находятся под угрозой, то на доске должно стоять не менее четырех «черных» слонов; в этом случае придется рассматривать восемь черных диагоналей, идущих справа вверх налево.

Восемь слонов на шахматной доске из 64 клеток можно расположить так, чтобы все поля доски находились под угрозой (см., например, черт. 41, *а*).

Аналогично показывается, что наименьшее число слонов, которое можно расставить на шахматной доске из n^2 клеток, где n — любое четное число, так, чтобы все поля доски находились под угрозой, равно n. Для примера на черт. 41, *б* указано расположение 10 слонов на шахматной доске из 100 клеток, при котором все поля доски оказываются под угрозой.

В случае нечетного n положение несколько отличается тем, что здесь доска имеет разное число белых и черных полей. Однако и в этом случае задача может быть решена при помощи почти таких же рассуждений, как и в случае доски из 64 клеток. Для примера рассмотрим доску из 81 клетки, изображенную на черт. 41, *в*. Эта доска имеет девять «белых» диагоналей, идущих слева вверх направо. Если на доске расположено меньше, чем пять «белых» слонов, то по крайней мере пять из этих белых диагоналей окажутся свободными от слонов, причем хотя бы одна из таких «свободных» диагоналей будет иметь больше четырех клеток. Отсюда вытекает, что для того, чтобы все поля доски были под угрозой, на доске из 81 клетки должно стоять не меньше пяти «белых» слонов. Далее, наша доска имеет восемь «черных» диагоналей, идущих слева вверх направо, и для того, чтобы все поля были под угрозой, на этих диагоналях должно стоять не менее четырех «черных» слонов. Итого, общее число слонов, угрожающих всем полям доски из 81 клетки, не может быть меньше девяти; девять слонов, очевидно, можно расставить так, чтобы они угрожали всем полям доски (см., например, черт. 41, *в*).

Приведенные рассуждения применимы и к случаю любого нечетного n; и в этом случае наименьшее число слонов, которых можно расставить так, чтобы все поля оказались под угрозой, равно n.

34. а) Так как слон, стоящий на белом поле («белый» слон), угрожает лишь белым полям, а слон, стоящий на черном поле («черный» слон), угрожает лишь черным полям, то задачу о расстановке наибольшего возможного числа не угрожающих друг другу слонов можно рассматривать как совокупность следующих двух независимых задач: расставить наибольшее число «белых» слонов так, чтобы они не угрожали друг другу, и расставить таким же образом наибольшее число «черных» слонов. Но в случае четного n совокупность всех белых полей доски и совокупность всех черных полей доски совершенно одинаковы: они переходят друг в друга при повороте доски на 90° вокруг ее центра. Таким образом, в этом случае искомое наибольшее число «белых» слонов будет равно соответствующему наибольшему числу «черных» слонов (в силу результата задачи 33а) оба эти числа равны $n-1$). $n-1$ «белых» слонов можно расставить так, чтобы они не угрожали друг другу, столькими же различными способами, сколькими и $n-1$ «черных» слонов. Общее число способов расстановки $2n-2$ слонов мы получим, комбинируя каждый из способов расстановки $n-1$ «белых» слонов с каждым из способов расстановки $n-1$ «черных» слонов; следовательно, это общее число равно квадрату числа способов расстановки $n-1$ слонов одного цвета.

б) Решение задачи совершенно аналогично решению задачи а).

35. а) Слон, расположенный на одном из крайних полей доски, всегда угрожает ровно n полям (включая поле, занятое слоном): так, например, если слон стоит на самой верхней или на самой нижней горизонтали, то на каждой вертикали имеется ровно одно поле, находящееся под угрозой. Легко проверить далее, что слон, стоящий не на крайнем поле, всегда угрожает большему чем n числу полей.

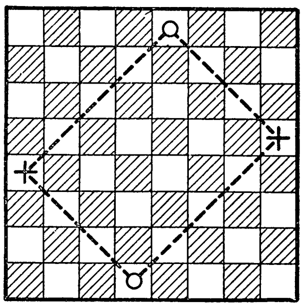
Пусть теперь на шахматной доске из n^2 клеток расставлено $2n-2$ слонов так, что никакие два из них не угрожают друг другу (см. задачу 33а)). При этом каждое из полей, не занятых этими слонами, может находиться под угрозой самое большее двух из наших слонов (по двум диагоналям, проходящим через это поле); исключение составляют угловые поля, которым может угрожать самое большее один из слонов (через угловые поля проходит лишь одна диагональ). Но из четырех угловых полей доски лишь два могут быть заняты слонами; иначе среди слонов имелись бы два, угрожающих друг другу. Таким образом, наши $2n-2$ слона могут угрожать два раза самое большее

$$n^2-(2n-2)-2=n^2-2n$$

полям и остальным $2n$ полям ($2n-2$ полям, занятым слонами, и двум угловым) угрожать один раз, т. е. сумма числа полей, которым угрожает первый слон, числа полей, которым угрожает второй слон, ..., числа полей, которым угрожает $(2n-2)$-й слон, не может быть больше чем

$$(n^2-2n)\cdot 2+2n\cdot 1=2n^2-2n=(2n-2)\cdot n.$$

В том случае, когда все $2n-2$ слонов расположены на крайних полях доски, каждый из них угрожает n полям, и поэтому сумма числа полей, которым угрожает первый слон, числа полей, которым угрожает второй слон и т. д., равна $(2n-2)\cdot n$. В случае же, когда хотя бы один из слонов расположен не на крайнем поле, эта сумма будет больше, чем $(2n-2)\cdot n$, что, как мы показали выше, невозможно. Следовательно, все слоны обязаны располагаться на крайних полях доски.



Черт. 42.

б) Рассмотрим произвольное крайнее (но не угловое) поле доски (например, поле на нижней горизонтали, отмеченное кружком на черт. 42). Проведем две диагонали, проходящие через это поле; эти диагонали заканчиваются двумя другими крайними полями, отмеченными крестиками на черт. 42. Проведем теперь вторые диагонали через поля, отмеченные крестиками; эти диагонали будут иметь вторым концом одно и то же крайнее поле, центрально-симметричное полю, с которого мы начинали (на черт. 42 это последнее поле также отмечено кружком).

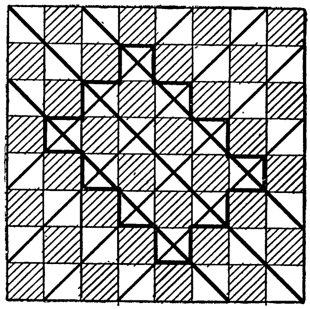
Рассмотрим теперь какое-либо расположение $2n-2$ слонов на доске, при котором никакие два слона не угрожают друг другу. В силу результата задачи а) все наши слоны должны быть расположены на крайних полях доски. Если один из слонов расположен на нижнем поле, отмеченном кружком на черт. 42, то поля, отмеченные крестиками, должны оставаться свободными (они находятся под угрозой нижнего слона); при этом на верхнем поле, отмеченном кружком, также должен будет стоять слон, так как иначе две верхние изображенные на чертеже диагонали оставались бы незанятыми. Наоборот, если хотя бы на одном из полей, отмеченных крестиками, стоит слон, то слон обязан стоять и на втором из этих полей, а поля, отмеченные кружками, должны оставаться свободными. Таким образом, мы имеем две возможности расстановки слонов на четырех отмеченных на чертеже крайних полях — слоны могут стоять или на полях, отмеченных кружками, или на полях, отмеченных крестиками. Ясно, что одна из этих возможностей обязательно должна осуществляться: если бы все четыре поля оставались свободными, то мы могли бы добавить к уже расставленным слонам еще два.

В качестве первого поля, отмеченного кружком, мы можем выбрать любое из $n-2$ полей нижней строки, не являющихся угловыми; при этом мы получим $n-2$ различных прямоугольника из диагоналей, аналогичных изображенному на нашем чертеже. Во всех этих прямоугольниках мы обязаны поместить пару слонов в одну из двух пар противоположных вершин, причем в какую именно из этих пар, безразлично, и мы можем выбрать эту пару вершин совершенно произвольно. Ясно, что выбор соответствующей пары вершин для каждого прямоугольника можно делать независимо от выбора этих пар в остальных прямоугольниках. Комбинируя два возможных выбора для первого прямоугольника с двумя возможными выборами для второго, двумя возможными выборами для третьего и т. д. вплоть до двух возможных выборов для $(n-2)$-го, мы получим всего 2^{n-2} различных возможностей. После этого нам остается еще лишь рассмотреть угловые поля — на крайних, но не угловых, полях мы уже расставили наибольшее возможное число слонов [а именно, $2(n-2)$]. На четырех угловых полях можно, очевидно, расставить два слона так, чтобы они не угрожали друг другу, причем это можно сделать четырьмя различными способами (на каждой из двух главных диагоналей мы можем поставить по слону в любой из двух концов этой диагонали). Комбинируя четыре способа расстановки угловых слонов с 2^{n-2} способами расстановки остальных, мы получим всего $4\cdot 2^{n-2}=2^n$ различных расположений наших $2n-2$ слонов. Итак, искомое число расположений равно 2^n.

В частности, при $n=8$ мы получим всего $2^8=256$ различных расположений.

Примечание. Из результата настоящей задачи вытекает, конечно, и предложение задачи 34а): при n четном $2^n=(2^{\frac{n}{2}})^2$.

36. а). Шахматная доска из 64 клеток имеет восемь «белых» диагоналей, идущих слева вверх направо (см. черт. 41, *а*, стр. 150). На этих восьми диагоналях надо расставить четыре слона так, чтобы все белые поля оказались под угрозой (см. решение задачи 33б)). Эти четыре слона должны занимать четыре центральные «белые» диагонали: иначе у нас осталась бы свободная от слонов «белая» диагональ, состоящая более чем из четырех полей и все поля не могли бы оказаться под угрозой. Заметим еще, что для того, чтобы все поля четырех свободных от слонов «белых» диагоналей, идущих слева вверх направо, были под угрозой, слоны должны занимать три центральные «белые» диагонали, идущие справа вверх налево (черт. 43).



Черт. 43.

Исходя из сказанного, нетрудно подсчитать число таких расположений четырех «белых» слонов на доске, что все белые поля оказываются под угрозой. Три центральные белые диагонали, идущие справа вверх налево, можно занять тремя слонами, расположенными одновременно на четырех средних диагоналях, идущих слева вверх направо, $4\cdot 3\cdot 2=24$ способами: первую из центральных диагоналей, идущих справа вверх налево, можно занять слоном, стоящим на любой из четырех центральных диагоналей, идущих слева вверх направо; вторую — слоном, стоящим на любой из оставшихся трех диагоналей, идущих слева вверх направо, и третью — слоном, стоящим на какой-либо из оставшихся двух диагоналей, идущих слева вверх направо. Далее, из этих 24 способов половина, т. е. 12, оставляет незанятой одну из двух центральных диагоналей, идущих слева вверх направо; на этой диагонали последнего слона можно поставить на любое из семи полей. 12 способов расстановки оставляют свободной одну из двух диагоналей, состоящих из пяти полей, на любое из которых можно поставить оставшегося слона. Таким образом, общее число способов расстановки белых слонов равно

$$12 \cdot 7 + 12 \cdot 5 = 84 + 60 = 144.$$

Точно так же число способов расстановки «черных» слонов, при которых все черные поля доски оказываются под угрозой, равно 144. Комбинируя каждый из способов расстановки «белых» слонов с каждым из способов расстановки «черных» слонов, мы всего получаем

$$144 \cdot 144 = 20\,736$$

способов, какими можно расставить восемь слонов так, чтобы все поля доски оказались под угрозой (см. задачу 34б)).

б) Рассмотрим шахматную доску из 100 клеток (см. черт. 41, *б* на стр. 150). Эта доска имеет 10 «белых» диагоналей, идущих в направлении слева вверх направо. Пять «белых» слонов должны занять пять из этих диагоналей, причем четыре центральные диагонали, содержащие больше пяти клеток каждая, обязательно должны быть заняты. Далее должны быть заняты пять центральных диагоналей, идущих справа вверх налево; эти диагонали оканчиваются полями, принадлежащими шести крайним «белым» диагоналям, идущим слева вверх направо.

Четыре центральные «белые» диагонали, идущие слева вверх направо, можно занять $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ способами: первую из этих диагоналей можно занять слоном, стоящим на любой из пяти центральных «белых» диагоналей, идущих справа вверх налево; вторую — слоном, стоящим на любой из четырех оставшихся диагоналей, и т. д. При этом $\frac{120}{5} = 24$ из этих способов оставляют свободной центральную диагональ, идущую справа вверх налево, на которой последнего слона можно поставить 10 способами; $2 \cdot \frac{120}{5} = 48$ из этих способов оставляют свободной одну из двух «белых» диагоналей, идущих справа вверх налево, которые состоят из восьми клеток, и $2\cdot\frac{120}{5}=48$ способов расстановки оставляют свободными одну из «белых» диагоналей, идущих справа вверх налево, состоящих из шести клеток. Таким образом, общее число возможных расстановок пяти «белых» слонов, при которых все белые клетки доски оказываются под угрозой, равно

$$24\cdot 10+48\cdot 8+48\cdot 6=912.$$

Точно так же число способов расстановки «черных» слонов, при которых все черные поля доски оказываются под угрозой, равно 912. Комбинируя каждый из способов расстановки «белых» слонов с каждым из способов расстановки «черных» слонов, мы всего получаем

$$912\cdot 912=831\,744$$

способов расстановки 10 слонов таким образом, чтобы все поля доски оказались под угрозой.

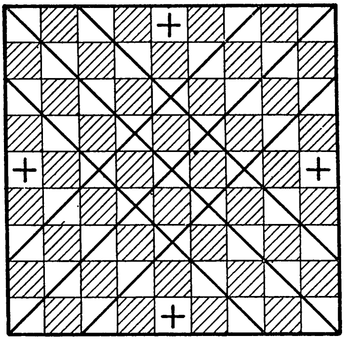
в) Рассмотрим шахматную доску из 81 клетки (см. черт. 41, *в* на стр. 150). Эта доска содержит восемь «черных» диагоналей, идущих в направлении слева вверх направо. Нам надо расставить на этих диагоналях четыре слона так, чтобы все черные поля доски оказались под угрозой (см. решение задачи 33б)). Нетрудно видеть, что центральные из этих восьми диагоналей должны оказаться занятыми, так как каждая из этих диагоналей содержит более четырех полей, которые не могут все оказаться под угрозой четырех слонов, расставленных на других диагоналях. При этом расстановка слонов должна быть такова, чтобы оказались под угрозой и все остальные черные поля доски. Но эти поля принадлежат четырем центральным «черным» диагоналям, направленным справа вверх налево.

Отсюда следует, что число способов расстановки «черных» слонов равно

$$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$$

(первую из идущих справа вверх налево центральных «черных» диагоналей можно занять слоном, стоящим на любой из четырех центральных «черных» диагоналей, идущих слева вверх направо, вторую слоном, стоящим на любой из оставшихся трех диагоналей, идущих слева вверх направо, и т. д.).

Несколько по-другому подсчитывается число способов расстановки «белых» слонов. Наша доска имеет девять «белых» диагоналей, направленных слева вверх направо. На полях этих диагоналей нам надо расставить пять слонов. При этом, очевидно, надо занять три центральные из этих диагоналей, так как эти диагонали содержат более пяти полей. Точно так же надо занять три центральные «белые» диагонали, идущие в в направлении справа вверх налево. Но кроме белых полей, принадлежащих этим девяти диагоналям, у нас остается только четыре свободных поля, отмеченных крестиками на черт. 44. Для того чтобы держать под угрозой эти четыре поля, нужно, очевидно, не менее двух слонов, причем эти два слона можно поставить на любые два из отмеченных черных полей. Поставить два слона на два из четырех отмеченных полей можно, очевидно,



Черт. 44.

$$4\cdot 3 = 12$$

различными способами. После этого нам остается использовать три свободных слона для того, чтобы занять три центральные «белые» диагонали, идущие слева вверх направо, и три центральные «белые» диагонали, идущие справа вверх налево. Следовательно, каждый слон должен занимать одновременно одну из диагоналей, идущих слева вверх направо, и одну из диагоналей, идущих справа вверх налево. Число способов, которыми можно расставить эти три слона, очевидно, равно

$$3\cdot 2\cdot 1 = 6.$$

Всего общее число способов, какими можно расставить девять слонов на доске из 81 клетки так, чтобы эти слоны угрожали всем полям доски, равно

$$24\cdot 12\cdot 6 = 1728.$$

г) Совершенно аналогично решениям задач а) — в) можно показать, что искомое число равно:

при $n=4k$

$$\left\{\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots 2}{k}[(4k-1)+(4k-3)+\ldots+(2k+1)]\right\}^2=$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{k}\cdot\frac{(4k-1)+(2k+1)}{2}(k-1)\right]^2=\left[\frac{3n-12}{4}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2;$$

при $n=4k+2$

$$\left\{\frac{(2k+1)(2k)(2k-1)\ldots 2}{2k+1}[(4k+2)+2(4k)+2(4k-2)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+2(2k+2)]\right\}^2=\left\{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\cdot\left[(4k+2)+2\,\frac{4k+(2k+2)}{2}\cdot k\right]\right\}^2=$$

$$=\left[\frac{3n^2+4}{8}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)!\right]^2;$$

при $n=2k+1$

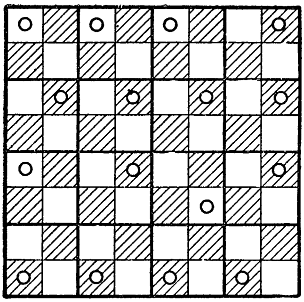
$$[k(k-1)(k-2)\ldots\cdot 1][12(k-1)(k-2)(k-3)\ldots\cdot 1]=$$

$$=(6n-6)\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right]^2.$$

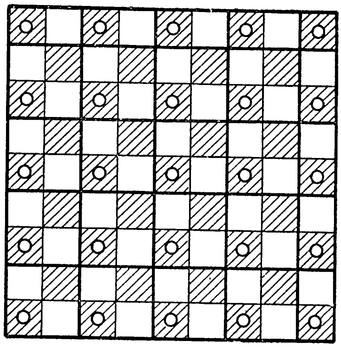
Примечание. Из результата этой задачи следует, в частности, справедливость утверждения задачи 34б): при $n=4k$ и $n=4k+2$ искомое число является полным квадратом.

37. а) Разобьем шахматную доску на 16 квадратов, каждый из которых состоит из четырех клеток, как это показано на черт. 45, *а*. При расстановке королей так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу, в каждом из этих 16 квадратов может стоять не более одного короля. Отсюда вытекает, что больше чем 16 королей невозможно расставить так, чтобы они не угрожали друг другу. Но 16 королей, никакие два из которых не угрожают друг другу, на шахматной доске из 64 клеток расставить можно: это видно, например, из черт. 45, *а*. Следовательно, искомое наибольшее число королей равно 16.

б) Если число n четно: $n = 2k$, то задача решается точно так же, как и задача а). А именно, доска разбивается в этом случае на $\left(\frac{n}{2}\right)^2 = k^2$ мелких квадратов из четырех клеток. Из того, что в каждом из этих квадратов нельзя поместить два короля, не угрожающих друг другу, выводится, что искомое число королей не может превосходить k^2. Но k^2 королей,



а)



б)

Черт. 45.

не угрожающих друг другу, на доске из $(2k)^2$ клеток разместить, конечно, можно; для этого достаточно, например, расположить их подобно тому, как это указано на черт. 45, *а* для случая $n = 8$. Отсюда следует, что при n четном искомое наибольшее число королей равно $\frac{n^2}{4}$.

Пусть теперь число n нечетно: $n = 2k + 1$. Разобьем доску на

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (k+1)^2$$

меньших частей так, как это указано на черт. 45, *б* (при таком разбиении мы получаем k^2 квадратов, состоящих из четырех клеток, $2k$ прямоугольников, состоящих из двух клеток, и один маленький квадрат из одной клетки, т. е. всего $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ частей). Ясно, что в каждой из этих частей может разместиться не более одного короля (если требовать, чтобы короли не угрожали друг другу). Следовательно, общее число королей не может превзойти $(k+1)^2$. Но

$(k+1)^2$ королей разместить можно, как видно из черт. 45, *б*, где $k=4$. Значит, искомое наибольшее число королей равно

$$(k+1)^2=\frac{(n+1)^2}{4}.$$

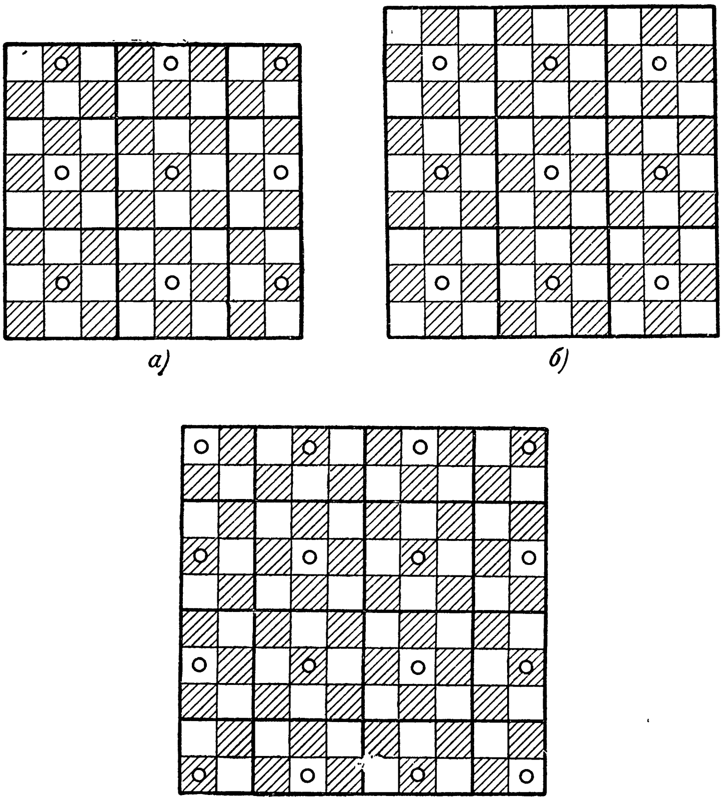
Используя знак целой части, введенный на стр. 13, полученные результаты для случаев четного и нечетного n можно объединить: наибольшее число королей, которое можно расставить на доске из n^2 клеток так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу, равно $\left[\frac{n+1}{2}\right]^2$.

Примечание. Из рассмотрения черт. 45, *б* нетрудно вывести, что при n нечетном существует единственное расположение $\frac{(n+1)^2}{4}$ королей на n^2-клеточной доске, при котором никакие два короля не угрожают друг другу. При четном n (в частности, при $n=8$) наибольшее возможное число королей, не угрожающих друг другу, можно расставить на доске многими различными способами. Подсчет этого числа способов мы предоставляем читателю.

38. а) Разобьем доску на девять частей так, как это указано на черт. 46, *а*. В каждой из этих частей имеется клетка (отмеченная на черт. 46, *а* кружком), которой могут угрожать лишь короли, стоящие на клетках той же самой части. Следовательно, для того чтобы все поля доски находились под угрозой, в каждой из девяти частей должен стоять по крайней мере один король. Отсюда видно, что искомое число королей не может быть меньше 9. Но девять королей можно расставить так, чтобы они угрожали всем полям доски: такая расстановка указана, например, кружками на черт. 46, *а*. Таким образом, искомое наименьшее число королей равно 9.

б) Задача решается аналогично задаче а); только здесь надо отдельно рассмотреть три случая: случай n, делящегося на 3, случай n, дающего при делении на 3 остаток 2, и случай n, дающего при делении на 3 остаток 1.

Если n делится на 3, т. е. $n=3k$, то доску можно разбить на $k^2=\left(\frac{n}{3}\right)^2$ квадратов из девяти клеток (см. черт. 46, *б*, где $n=9$); в каждом из этих квадратов должен стоять по крайней мере один король, ибо иначе не все центры таких квадратов будут под угрозой. Так как $k^2=\frac{n^2}{9}$ королей на доске из $n^2 = (3k)^2$ клеток всегда можно расставить так, чтобы они угрожали всем полям доски (для этого достаточно расставить их в центры квадратов из девяти клеток, на которые разби-



а) *б)* *в)*

Черт. 46.

вается доска; см. черт. 46, *б*), то искомое наименьшее число королей при $n = 3k$ равно $k^2 = \frac{n^2}{9}$.

Если n дает при делении на 3 остаток 2, т. е. $n = 3k + 2$, то доска разбивается на $(k+1)^2 = \left(\frac{n+1}{3}\right)^2$ меньших частей совершенно так же, как это мы делали в случае $n=8$, $k=2$ (см. черт. 46, *а*). Из рассмотрения этого разбиения вытекает, что при $n=3k+2$ искомое наименьшее число королей равно

$$(k+1)^2=\frac{(n+1)^2}{9}.$$

Наконец, если n дает при делении на 3 остаток 1, т. е. $n=3k+4$ [1]), то доска разбивается на

$$(k+2)^2=\left(\frac{n+2}{3}\right)^2$$

меньших частей так, как это показано на черт. 46, *в* (где $n=10$, $k=2$). Из рассмотрения этого чертежа легко выводится, что при $n=3k+4$ искомое наименьшее число королей равно

$$(k+2)^2=\frac{(n+2)^2}{9}.$$

Единственный случай, когда n не может быть представлено в виде $3k$, $3k+2$ или $3k+4$, — это случай $n=1$; но в этом случае совершенно очевидно, что искомое число королей равно 1, т. е. также равно $\frac{(n+2)^2}{9}$.

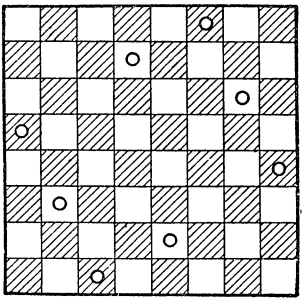
Используя знак целой части, полученные результаты можно объединить следующим образом: наименьшее число королей, которых можно расставить на шахматной доске из n^2 клеток так, чтобы они угрожали всем полям доски, равно $\left[\frac{n+2}{3}\right]^2$.

Примечание. Из рассмотрения черт. 46, *б* нетрудно видеть, что при n, делящемся на 3, существует единственное расположение $\left(\frac{n}{3}\right)^2$ королей на n^2-клеточной доске, такое, что все поля доски оказываются под угрозой. При n, дающем при делении на 3 остаток 1 или 2, наименьшее возможное число королей, угрожающих всем полям доски, можно расставить на доске многими различными способами; подсчет этого числа способов мы предоставляем читателю.

---

[1]) Любое целое положительное число n, кроме $n=1$, дающее при делении на 3 остаток 1, можно представить в виде $n=3k+4$, где k — целое неотрицательное. Случай $n=1$ мы ниже разберем отдельно.

39. а) На каждой вертикали шахматной доски может стоять не больше одного ферзя, поэтому больше восьми ферзей, никакие два из которых не угрожают друг другу, расставить на шахматной доске из 64 клеток нельзя. Восемь ферзей, никакие два из которых не угрожают друг другу, расставить возможно (одно из таких расположений изображено, например, на черт. 47).

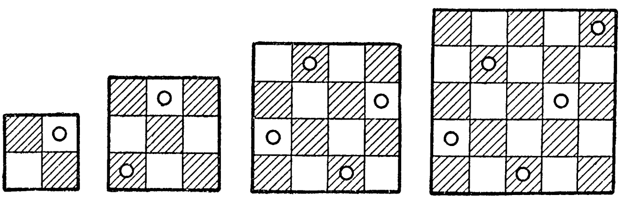


Черт. 47.

Можно показать, что всего на обыкновенной шахматной доске имеется 92 существенно различных расположения восьми ферзей, удовлетворяющих поставленному условию (см., например, книгу Л. Я. Окунева, цитированную на стр. 22).

б) На каждой вертикали шахматной доски может стоять не более одного ферзя (иначе два ферзя угрожали бы друг другу), поэтому нельзя расставить на доске из n^2 клеток больше n ферзей, удовлетворяющих условию задачи.

Нетрудно проверить, что если поставить на шахматной доске из четырех клеток одного ферзя, то все поля доски будут находиться под угрозой и второго ферзя уже нельзя будет поставить (черт. 48, *а*). На шахматной доске из девяти



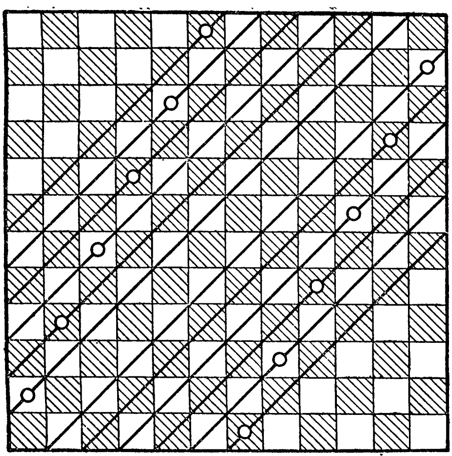
а) *б)* *в)* *г)*

Черт. 48.

клеток можно поставить два ферзя, удовлетворяющих условию задачи (черт. 48, *б*), но трех таких ферзей расставить уже нельзя. На шахматных досках из 16 и 25 клеток можно расставить четыре, соответственно пять ферзей, ни один из которых не угрожает другому (черт. 48, *в* и *г*).

Покажем теперь, что при $n=1$ и всяком $n \geqslant 4$ возможно расставить на шахматной доске из n^2 клеток n ферзей, не угрожающих друг другу (при $n=1$ этот результат очевиден).

Рассмотрим прежде всего случай четного n. На соседних вертикалях нельзя ставить ферзей на одну и ту же или на соседние горизонтали (иначе эти ферзи будут угрожать друг другу), поэтому на соседних вертикалях попробуем поставить



Черт. 49.

ферзей на горизонтали, следующие через одну. При этом на первой вертикали поставим ферзя на вторую горизонталь, на второй вертикали — на четвертую горизонталь и т. д., пока не дойдем до самой верхней горизонтали, а затем опять перейдем на первую и т. д. (черт. 49). Так как при этом никакие два ферзя не будут стоять на одной вертикали или горизонтали, то остается только проверить, не окажутся ли два ферзя на одной диагонали.

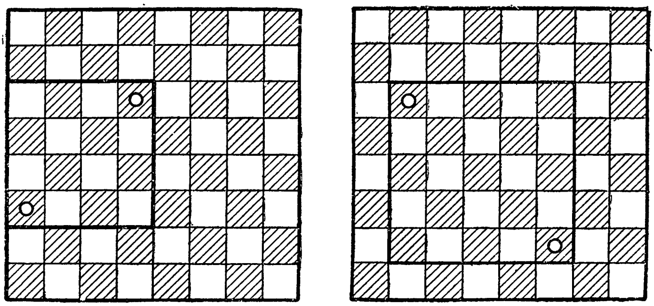
Если два поля доски принадлежат одной диагонали, то это значит, что разность номеров горизонталей, на которых находятся эти поля, равна разности номеров соответствующих вертикалей. При этом поле, имеющее больший номер вертикали, может иметь и больший и меньший номер горизонтали (черт. 50, *а* и *б*). Если первое поле находится на пересечении i-й вертикали и j-й горизонтали, а второе — на пересечении k-й вертикали и l-й горизонтали, то соответственно этим двум случаям

$$i-k=j-l, \tag{*}$$

или

$$i-k=l-j. \tag{**}$$

В первом случае рассматриваемые два поля находятся на одной диагонали, идущей слева вверх направо, во втором — на одной диагонали, идущей справа вверх налево.



а) б)

Черт. 50.

Очевидно, что если два ферзя нашей схемы оба находятся на левой или оба на правой половине доски, то разность номеров их горизонталей вдвое больше разности номеров их вертикалей (ибо на обеих половинах доски при переходе от одного ферзя к следующему номер вертикали увеличивается на 1, а номер горизонтали — на 2). Таким образом, остается только проверить, не могут ли стоять на одной диагонали два ферзя, один из которых расположен на левой половине доски, а второй на правой.

Прежде всего отметим, что никакие два из наших ферзей, один из которых стоит на левой половине доски, а другой — на правой, не могут расположиться на одной диагонали, идущей слева вверх направо: действительно, ферзи, стоящие на левой половине доски, расположены на идущих слева вверх направо диагоналях, которые находятся в верхнем левом треугольнике доски, а стоящие справа ферзи — на таких диагоналях, которые находятся в нижнем правом треугольнике (см. черт. 49, где проведены соответствующие диагонали). Поэтому остается только выяснить, не могут ли два из наших ферзей, стоящие на разных половинах доски, располагаться на одной диагонали, идущей справа вверх налево.

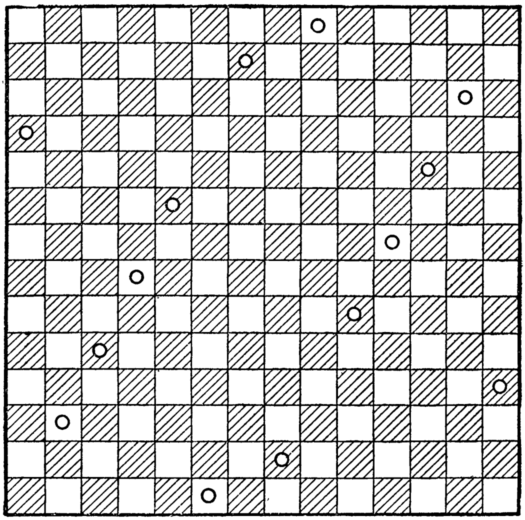
Пусть левый ферзь расположен на i-й вертикали; в таком случае он находится на $2i$-й горизонтали. Пусть, далее, правый ферзь расположен на $\left(\frac{n}{2}+j\right)$-й вертикали и, следовательно, на $(2j-1)$-й горизонтали. Если бы эти ферзи были расположены на одной диагонали, идущей справа вверх налево, то выполнялось бы равенство

$$\left(\frac{n}{2}+j\right)-i=2i-(2j-1); \qquad 6(i-j)+2=n,$$

что, очевидно, возможно только, если n при делении на 6 дает остаток 2. Таким образом, при четном n, имеющем вид $6k$ или $6k+4$, черт. 49 указывает расположение n ферзей на шахматной доске, никакие два из которых не угрожают друг другу.

При $n=6k+2$ черт. 49 приводит к расположению, при котором два ферзя угрожают друг другу. Однако и в этом случае можно указать расположение n ферзей, удовлетворяющее условию задачи, но это расположение будет значительно сложнее предыдущего. Одно из таких расположений указано на черт. 51, где положено $n=14$ (ср. также черт. 47). Здесь на $\left(\frac{n}{2}-3\right)$-х вертикалях левой половины доски, от 2-й до $\left(\frac{n}{2}-2\right)$-й, ферзи ставятся на горизонталях, следующих через одну, начиная с 3-й (т. е. на горизонтали с номерами 3, 5, 7, ..., $n-5$). На $\left(\frac{n}{2}-3\right)$-х вертикалях, начиная с $\left(\frac{n}{2}+3\right)$-й и кончая $(n-1)$-й, ферзи ставятся на горизонталях, следующих через одну, начиная с 6-й (т. е. на горизонталях с номерами 6, 8, 10, ..., $n-2$). После этого остаются незанятыми вертикали с номерами $1, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1,$

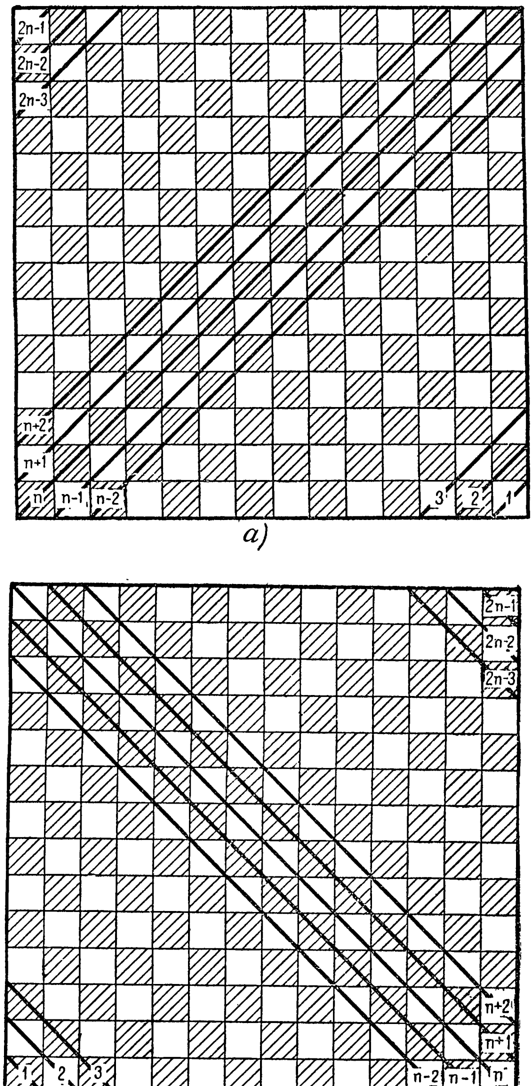
$\frac{n}{2}+2$, n и горизонтали с номерами $1, 2, 4, n-3, n-1, n$. На 1-й, $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-й, $\frac{n}{2}$-й, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-й, $\left(\frac{n}{2}+2\right)$-й и n-й вертикалях ферзи ставятся соответственно на горизонтали с номерами $n-3$, 1, $n-1$, 2, n и 4. Ясно, что при этом никакие два ферзя не будут стоять на одной и той же вертикали или одной и той же горизонтали; нам остается только



Черт. 51.

проверить, что и на каждой диагонали доски будет стоять не больше одного ферзя.

Перенумеруем все диагонали доски, идущие слева вверх направо, приписав крайним полям доски, расположенным на нижней горизонтали и на левой вертикали, номера от 1 до $2n-1$, как указано на черт. 52, *а*, и считая, что каждая диагональ имеет номер принадлежащего ей нумерованного поля. Аналогично этому занумеруем диагонали, идущие справа вверх налево, приписав номера полям нижней горизонтали и правой вертикали, как указано на черт. 52, *б*. Если считать первым ферзя, расположенного на первой вертикали, вторым — ферзя,



Черт. 52.

расположенного на второй вертикали, и т. д., то ферзи последовательно займут идущие слева вверх направо диагонали с номерами

$$2n-4,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ldots,\ \frac{3n}{2}-3,\ \frac{n}{2}+2,\ \frac{3n}{2}-1,$$
$$\frac{n}{2}+1,\ \frac{3n}{2}-2,\ \frac{n}{2}+3,\ \frac{n}{2}+4,\ \frac{n}{2}+5,\ \ldots,\ n-1,\ 4;$$

среди этих номеров ни один не встречается дважды, если только

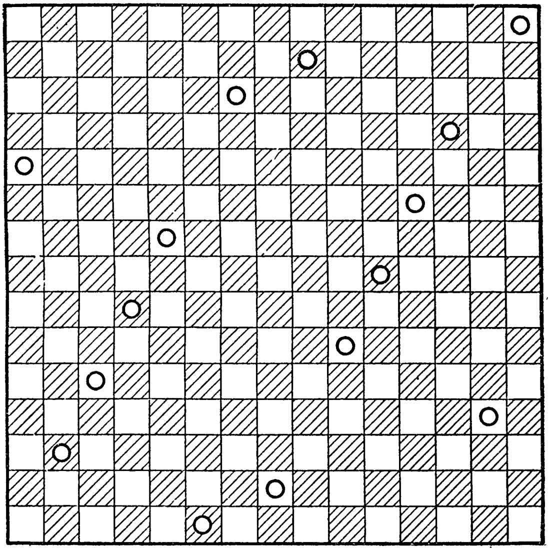
$$4<\frac{n}{2}+1,\quad 2n-4>\frac{3n}{2}-1,$$

т. е. если $n>6$. Аналогично этому ферзи последовательно займут идущие справа вверх налево диагонали с номерами

$$n-3,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots,\ \frac{3n}{2}-8,\ \frac{n}{2}-1,\ \frac{3n}{2}-2,$$
$$\frac{n}{2}+2,\ \frac{3n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+8,\ \frac{n}{2}+11,\ \frac{n}{2}+14,$$
$$\frac{n}{2}+17,\ \ldots,\ 2n-4,\ n+3,$$

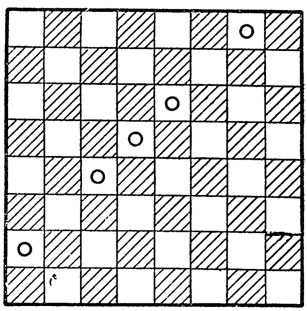
где точками обозначены не выписанные члены арифметических прогрессий с разностью 3. Из этих номеров 4, 7, 10, 13, ..., $\frac{3n}{2}-8$, $\frac{3n}{2}-2$, $\frac{3n}{2}+1$ дают при делении на 3 остаток 1; $\frac{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}+2$, $\frac{n}{2}+8$, $\frac{n}{2}+11$, $\frac{n}{2}+14$, $\frac{n}{2}+17$, ..., $2n-4$ делятся на 3 (напоминаем, что у нас n имеет вид $6k+2$); $n-3$ и $n+3$ дают при делении на 3 остаток 2. Отсюда сразу видно, что ни один номер не встречается среди выписанных два раза.

Теперь осталось только показать, что и на доске из n^2 клеток, где число n нечетно, тоже можно расставить n ферзей, никакие два из которых не угрожают друг другу. Но это становится совершенно очевидным, если заметить, что во всех приведенных выше расположениях, пригодных для четного n, главная диагональ, идущая слева вверх направо, оставалась свободной от ферзей. Благодаря этому, если расположить на доске из n^2 клеток (n нечетно) n ферзей следующим образом: на $n-1$ первых горизонталях и $n-1$ первых вертикалях расставить $n-1$ ферзей так, как это делается на доске из $(n-1)^2$ клеток ($n-1$ четно), и, кроме того, поставить еще одного



Черт. 53.

ферзя на угловое поле в правом верхнем углу доски, то эти n ферзей будут удовлетворять условию задачи (см., например, черт. 53, где изображено расположение 15 ферзей на доске из 225 клеток).

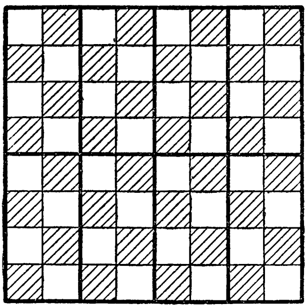


Черт. 54.

Что же касается числа различных расположений n ферзей на n^2-клеточной доске, удовлетворяющих условию задачи, то определить это число очень трудно и это до сих пор еще никому не удалось сделать.

Не решен также до сих пор и вопрос о наименьшем числе ферзей, которые можно расставить на n^2-клеточной доске так, чтобы все поля доски находились под угрозой. Для обыкновенной шахматной доски из 64 клеток это число равно 5 (см., например, черт. 54); число различных расположений пяти ферзей на доске из 64 клеток, при котором все клетки доски оказываются под угрозой, равно 4860.

40. а) Так как конь, стоящий на белом поле, угрожает только черным полям, то очевидно, что можно расставить 32 коня так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу: с этой целью достаточно расставить их все на белые поля доски $\left(\text{таких полей имеется } \frac{64}{2}=32\right)$. Покажем теперь, что больше чем 32 коня нельзя расставить нужным образом. С этой целью разобьем все поля шахматной доски на восемь равных частей, имеющих форму прямоугольников с основанием в две клетки и высотой в четыре клетки (черт. 55). Легко видеть, что конь, помещенный в одном из таких прямоугольников, угрожает ровно одному полю того же прямоугольника, причем для любых двух таких коней поля, которым они угрожают, различны. Отсюда следует, что внутри каждого из этих прямоугольников (состоящих из восьми клеток) можно расставить не более четырех коней так, чтобы они не угрожали друг другу. Таким образом, общее число коней, которое можно расставить на всей шахматной доске, не превосходит $4 \cdot 8 = 32$.



Черт. 55.

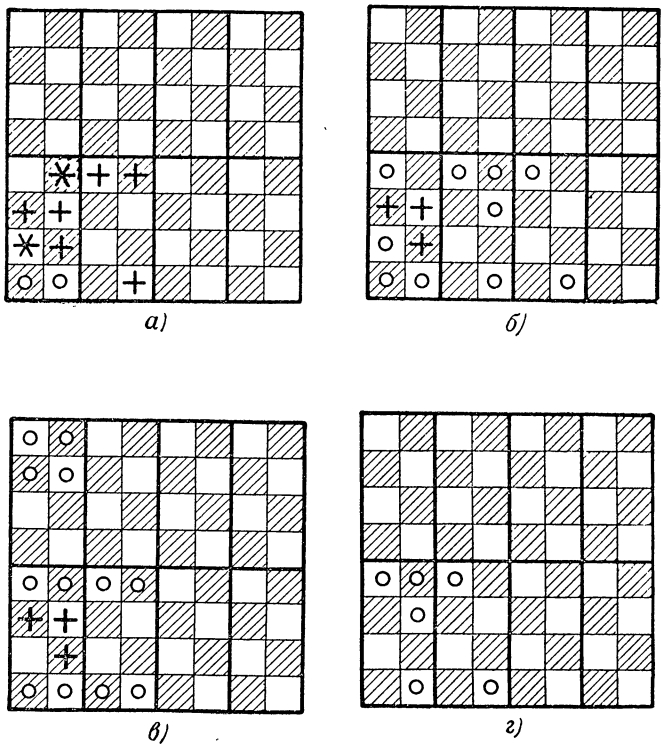
б) Нам надо определить, сколько существует различных расположений 32 коней на шахматной доске, при которых никакие два из этих коней не угрожают друг другу. Два таких различных расположения представляются очевидными: мы можем расположить 32 коня на всех белых полях доски (первое расположение) или на всех черных полях доски (второе расположение). Докажем, что никаких других расположений не существует.

Разобьем опять нашу доску на восемь равных частей, как указано на черт. 55. При этом на каждой из этих частей мы должны будем расставить ровно четыре коня (см. решение задачи а)). Рассмотрим теперь, как можно расставить четыре коня в левом нижнем прямоугольнике (этот прямоугольник мы будем называть первым).

Попробуем сначала занять оба нижние поля этого прямоугольника (эти поля отмечены кружками на черт. 56, *а*). При этом поля первого прямоугольника, отмеченные на чертеже крестиками, мы должны оставить свободными: поля третьей горизонтали находятся под угрозой поставленных коней, а поле второй горизонтали, отмеченное крестиком, нельзя занять, так как тогда под угрозой трех поставленных коней будут находиться пять полей во втором слева нижнем прямоугольнике, и следовательно, в этом прямоугольнике нельзя будет расставить четыре коня. Если мы поставим еще два коня на поля, отмеченные звездочками на черт. 56, *а*, то опять нельзя будет расставить четыре коня во втором слева нижнем прямоугольнике (ибо при этом не будут под угрозой лишь три поля этого прямоугольника, отмеченные крестиками на черт. 56, *а*); следовательно, такая расстановка тоже отпадает. Если мы поставим коней на поля первого прямоугольника, отмеченные кружками на черт. 56, *б*, то во втором слева нижнем прямоугольнике мы вынуждены будем занять поля, отмеченные кружками на этом же чертеже (остальные поля указанного прямоугольника находятся под угрозой коней первого прямоугольника); при этом в третьем слева нижнем прямоугольнике можно будет поставить только двух коней (на поля, отмеченные кружками). Следовательно, и эта возможность отпадает. Наконец, если мы в первом прямоугольнике займем поля первой и четвертой горизонталей (черт. 56, *в*), то во втором слева нижнем прямоугольнике также придется занять поля тех же горизонталей; при этом в верхнем левом прямоугольнике коней можно будет расставить только на поля седьмой и восьмой горизонталей и во втором слева верхнем прямоугольнике нельзя будет расположить ни одного коня. Итак, мы видим, что оба нижние поля первого прямоугольника одновременно не могут быть заняты.

Если в нижней строке первого прямоугольника не стоит ни один конь, то должны будут стоять кони на обоих полях третьей горизонтали. Но эти два коня угрожают пяти полям соседнего слева прямоугольника; следовательно, это положение тоже невозможно.

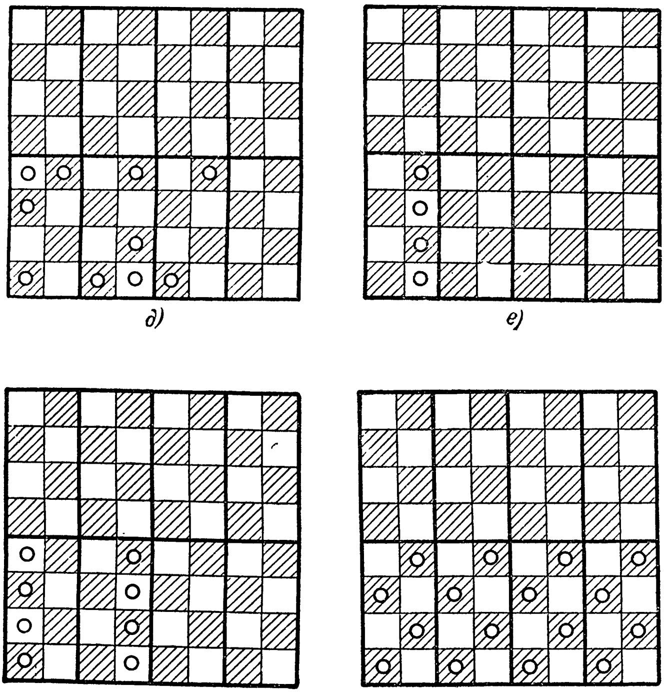
Таким образом, остается считать, что в нижней горизонтали первого прямоугольника обязательно стоит ровно один конь. На верхней (четвертой) горизонтали первого прямоугольника также стоит ровно один конь. Действительно, если бы на этой горизонтали не стоял ни один конь, то на второй горизонтали должны были бы стоять два коня, а эти кони угрожают пяти полям второго нижнего прямоугольника. Если бы на четвертой горизонтали стояли два коня, то либо нельзя было бы расставить четырех коней во втором слева нижнем прямоугольнике (черт. 56, *г*), либо во втором прямоугольнике



Черт. 56.

можно было бы расставить четырех коней, а в третьем — нет (черт. 56, *д*).

Легко видеть, что конь на нижней горизонтали и конь на верхней горизонтали первого прямоугольника должны стоять в различных вертикалях — иначе опять не удается расставить по четыре коня во втором слева и в третьем слева прямоугольниках (см. черт. 56, *е* и *ж*). Но если эти два коня стоят на разных вертикалях (т. е. на полях одного цвета, см. черт. 56, *з*), то два коня на второй и третьей горизонталях приходится поставить на два поля того же цвета — только такие поля не оказываются под угрозой. Далее во втором прямоугольнике также оказываются не под угрозой только поля

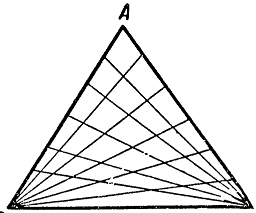


д) *е)* *ж)* *з)*

Черт. 56.

того же цвета, затем в третьем и т. д., т. е. на всей нижней половине доски. Эти же рассуждения применимы и к верхней половине доски, где также все кони должны быть расставлены на поля одного цвета. При этом ясно, что если в нижней половине мы выберем один цвет, а в верхней — другой, то ряд коней будет угрожать друг другу. Таким образом, остаются только две возможности: расставить всех коней на все белые или на все черные поля.

41. а) Проведем сначала n прямых, соединяющих вершину B с n точками, расположенными на стороне AC,— эти прямые разделят треугольник на $n+1$ частей. Будем теперь проводить прямые, соединяющие вершину C с точками, расположенными на стороне AB (черт. 57). Каждая из этих прямых (число которых равно n) пересечется проведенными ранее n прямыми и, следовательно, разобьется точками пересечения на $n+1$ частей. Но каждая из таких частей проведенной прямой разбивает одну из уже имевшихся частей треугольника надвое, т. е. увеличивает число частей треугольника на единицу. Отсюда вытекает, что все прямые разбивают треугольник на $(n+1)+(n+1)n=$ $=(n+1)^2$ частей [1]).



Черт. 57.

б) Прямые, выходящие из вершин B и C, делят треугольник на $(n+1)^2$ частей (задача а)). Каждая из прямых, выходящих из вершины A, пересекается со всеми $2n$ прямыми, выходящими из вершин B и C в $2n$ точках (все точки пересечения различны, ибо никакие три из наших прямых не пересекаются в одной точке). Таким образом, каждая из прямых, выходящих из вершины A, делится остальными прямыми на $2n+1$ частей и, следовательно, увеличивает общее число частей на $2n+1$. Отсюда вытекает, что общее число частей равно

$$(n+1)^2+n(2n+1)=3n^2+3n+1.$$

42. а) Ясно, что n прямых будут делить плоскость на наибольшее число частей, если все эти прямые будут пересекаться (т. е. никакие две из них не будут параллельны) и никакие три из них не будут пересекаться в одной точке. Следовательно, нам надо только определить, на сколько частей разбивают плоскость n попарно непараллельных

---

[1]) Этот результат можно вывести также и из того, что n прямых, выходящих из вершины B, разбивают каждую из полученных ранее $n+1$ частей треугольника на $n+1$ более мелких частей. Однако рассуждение, приведенное в тексте, более удобно тем, что оно применимо также и в ряде последующих задач.

прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке [1]).

Предположим, что на плоскости уже проведены k прямых; проведем $(k+1)$-ю прямую и посмотрим, насколько увеличится при этом число частей, на которые прямые разбивают плоскость. $(k+1)$-я прямая пересекается с уже имеющимися k прямыми в k точках, которые делят ее на $k+1$ частей. Следовательно, $(k+1)$-я прямая рассечет ровно $k+1$ частей из всех имевшихся ранее частей плоскости. Так как каждую из этих частей она разбивает на две части, то после проведения $(k+1)$-й прямой общее число частей увеличивается на $k+1$. Но если проведена только одна прямая, то плоскость разбивается ею на две части. Отсюда вытекает, что после проведения n прямых плоскость будет разбита на

$$2+2+3+4+\ldots+n$$

частей (от проведения второй прямой прибавится еще две части, от проведения третьей — еще три, от проведения четвертой — еще четыре и т. д.). Следовательно, наибольшее число частей, на которое n прямых могут разбить плоскость, равно

$$2+2+3+\ldots+n=(1+2+3+\ldots+n)+1=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

б) n окружностей будут разбивать плоскость на наибольшее число частей, если все эти окружности будут пересекаться между собой (т. е. никакие две из них не будут касаться и не будут расположены одна целиком вне другой или внутри другой) и никакие три из них не будут пересекаться в одной точке.

Рассуждая так же, как и в задаче а), мы докажем, что $(k+1)$-я окружность увеличивает число уже имевшихся частей плоскости на $2k$ [$(k+1)$-я окружность пересекается с уже проведенными k окружностями в $2k$ точках; эти $2k$ точек делят ее на $2k$ частей]. Так как одна окружность делит плоскость

---

[1]) Можно было бы думать, что при соблюдении всех этих условий число частей все еще зависит от расположения прямых. Однако из нашего решения будет следовать, что это число однозначно определяется значением n и, следовательно, от расположения прямых не зависит.

на две части, то общее число частей после проведения n окружностей будет равно

$$\begin{aligned}2+2+4+6+8+\ldots+2(n-1)&=\\ =2+2[1+2+3+\ldots+(n-1)]&=\\ =2+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+2.\end{aligned}$$

43. а) n плоскостей разделят пространство на наибольшее число частей, если никакие две из них не параллельны, никакие три не проходят через одну прямую и не параллельны одной прямой и никакие четыре не проходят через одну точку.

Предположим, что пространство уже разделено на части k плоскостями, и посмотрим, насколько увеличится число частей от проведения $(k+1)$-й плоскости. Эта плоскость пересечется с уже имеющимися k плоскостями по k прямым (так как никакие две плоскости не параллельны и никакие три не проходят через одну прямую), причем никакие две из этих k прямых не будут параллельны (так как никакие три плоскости не параллельны одной прямой) и никакие три из них не будут пересекаться в одной точке (так как никакие четыре из наших плоскостей не проходят через одну точку). Такие k прямых делят плоскость на $\frac{k^2+k+2}{2}$ частей (см. решение задачи 42а)), каждая из которых получается в результате пересечения $(k+1)$-й плоскости с одной из уже имевшихся частей пространства. Таким образом, $(k+1)$-я плоскость пересечется с $\frac{k^2+k+2}{2}$ частями пространства, каждую из которых она разделит надвое; следовательно, от проведения $(k+1)$-й плоскости общее число частей увеличится на $\frac{k^2+k+2}{2}$. Так как одна плоскость делит пространство на две части, то отсюда вытекает, что n плоскостей будут делить пространство на

$$\begin{aligned}2+\frac{1^2+1+2}{2}+\frac{2^2+2+2}{2}&+\\ +\frac{3^2+3+2}{2}+\ldots+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}&=\\ =2+\frac{[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+[1+2+\ldots+(n-1)]+2+\ldots+2}{2}&\end{aligned}$$

частей. Так как

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

а[1])

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

то общее число частей равно

$$2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}+\frac{n(n-1)}{4}+(n-1)=$$

$$=2+\frac{(n-1)(2n^2-n+3n+12)}{12}=\frac{n^3+5n+6}{6}.$$

б) Задача решается аналогично предыдущей. Предположим, что k сфер уже проведено, и посмотрим, насколько увеличится число частей от проведения $(k+1)$-й сферы. $(k+1)$-я сфера может пересечься с уже проведенными сферами по k окружностям; эти k окружностей разделят поверхность сферы самое большее на k^2-k+2 частей (см. задачу 42б); то, что здесь мы рассматриваем деление на части окружностями не плоскости, а сферы, ничего не меняет в рассуждениях, приведших к решению задачи 42б)). Таким образом, $(k+1)$-я сфера

---

[1]) Выпишем ряд формул:

$$\begin{aligned}
1^3&=1^3,\\
2^3&=(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1,\\
3^3&=(2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1,\\
4^3&=(3+1)^3=3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^3&=[(n-1)+1]^3=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1.
\end{aligned}$$

Складывая все эти формулы, получим:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=1^3+1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+$$
$$+3[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+3[1+2+\ldots+(n-1)]+(n-1)$$

и, следовательно,

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n^3-1^3-3[1+2+\ldots+(n-1)]-(n-1)}{3}=$$
$$=\frac{2n^3-3n(n-1)-2n}{6}=\frac{n(2n^2-3n+3-2)}{6}=$$
$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6},$$

что и требовалось доказать.

увеличивает число частей на k^2-k+2 и, следовательно, общее число частей равно

$$2+(1^2-1+2)+(2^2-2+2)+(3^2-3+2)+\ldots$$
$$\ldots+[(n-1)^2-(n-1)+2]=$$
$$=2+[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]-$$
$$-[1+2+3+\ldots+(n-1)]+(2+2+2+\ldots+2)=$$
$$=2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)=$$
$$=2+\frac{(n-1)(2n^2-n-3n+12)}{6}=\frac{n(n^2-3n+8)}{3}.$$

Так, например, пять сфер могут разделить пространство самое большее на $\frac{5(25-15+8)}{3}=30$ частей.

44. Первое решение. Рассмотрим диагональ A_1A_k n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$. По одну и по другую стороны от этой диагонали располагаются соответственно $k-2$ вершины n-угольника (вершины A_2, A_3, $A_4, \ldots, A_{k-1}$) и $n-k$ вершин (вершины A_{k+1}, $A_{k+2}, \ldots, A_n$). Диагональ A_1A_k будет пересекаться со всеми диагоналями, соединяющими любую из $k-2$ вершин первой группы с любой из $n-k$ вершин второй группы, т. е. всего с $(k-2)(n-k)$ диагоналями. Следовательно, все диагонали, выходящие из вершины A_1 (диагонали A_1A_3, A_1A_4, $\ldots$, A_1A_{n-1}), будут пересекаться с прочими диагоналями в

$$1\cdot(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\ldots+(n-3)\cdot 1$$

точках. Но

$$1(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\ldots+(n-3)\cdot 1=$$
$$=1[(n-1)-2]+2[(n-1)-3]+$$
$$+3[(n-1)-4]+\ldots+(n-3)[(n-1)-(n-2)]=$$
$$=(n-1)[1+2+3+\ldots+(n-3)]-$$
$$-[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-3)(n-2)]=$$
$$=(n-1)\frac{(n-2)(n-3)}{2}-[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-3)(n-2)].$$

А так как [1])

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-3)(n-2)=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{3},$$

то

$$1\cdot(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\ldots+(n-3)\cdot 1=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

Итак, диагонали, выходящие из вершины A_1, будут пересекаться с прочими диагоналями в $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ точках. В таком же числе точек будут пересекаться с остальными диагоналями и диагонали, выходящие из любой другой вершины n-угольника. Однако, умножив $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ на число вершин n-угольника (равное n), мы учтем каждую точку пересечения ровно четыре раза (в каждой из этих точек пересекаются точно две диагонали, каждая из которых имеет два

---

[1]) При помощи метода математической индукции легко доказать, что

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots k+2\cdot 3\cdot 4\ldots(k+1)+3\cdot 4\cdot 5\ldots(k+2)+\ldots$$
$$\ldots+n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{k+1}$$

(см., например, задачу 133 в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, «Библиотека математического кружка», вып. 1, М., Гостехиздат, 1954). Этот же результат следует из формулы задачи 55ж) настоящей книги.

Можно также воспользоваться тем, что

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=$$
$$=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\ldots+n(n+1)=$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots+n);$$

далее см. подстрочное примечание на стр. 179.

Аналогично

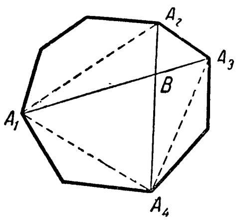
$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=$$
$$=1(1+1)(2+2)+2(2+1)(2+2)+\ldots+n(n+1)(n+2)=$$
$$=(1^3+2^3+\ldots+n^3)+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+2(1+2+\ldots+n);$$

далее см. подстрочное примечание на стр. 179 и 188.

конца в двух вершинах). Окончательно искомое число точек пересечения равно

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot\frac{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

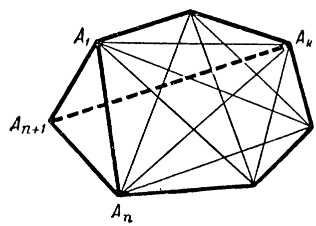
Второе решение. Эту задачу можно решить гораздо проще, если знать формулу для числа сочетаний. Действительно, рассмотрим какую-либо точку пересечения диагоналей. Каждая точка пересечения принадлежит двум диагоналям. Точке B пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4 отвечает четверка вершин A_1, A_2, A_3 и A_4 нашего n-угольника (точка B является точкой пересечения диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, черт. 58). Обратно, каждой четверке A_1, A_2, A_3 и A_4 вершин n-угольника отвечает единственная точка пересечения диагоналей, имеющих концами эти четыре вершины, а именно, точка пересечения диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$. Отсюда следует, что число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника равно числу сочетаний из n элементов по 4, т. е. равно



Черт. 58.

$$C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

45. Первое решение. Обозначим искомое число для выпуклого n-угольника через f_n. Выведем соотношение, связывающее f_n с f_{n+1}. Рассмотрим какой-нибудь выпуклый $(n+1)$-угольник; обозначим все его вершины, взятые в определенном порядке, буквами A_1, A_2, A_3, ..., A_n, A_{n+1} (черт. 59). Проведем диагональ A_1A_n. Многоугольник с вершинами A_1, A_2, ..., A_n есть выпуклый n-угольник. Проведем в нем все диагонали; они будут одновременно и диагоналями $(n+1)$-угольника. Для того чтобы получить все диагонали $(n+1)$-угольника, надо соединить еще $(n+1)$-ю вершину с остальными вершинами $n-2$ диагоналями. Рассмотрим диагональ, соеди-



Черт. 59.

няющую $(n+1)$-ю вершину с k-й $(k=2, 3, 4, \ldots, n-1)$. По одну ее сторону будут лежать $k-1$ вершин (вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$), а по другую $n-k$ вершин (вершины $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$). Следовательно, диагональ $A_{n+1}A_k$ пересечет $(k-1)(n-k)$ диагоналей $(n+1)$-угольника. Точки пересечения разобьют эту диагональ на $(k-1)(n-k)+1$ частей. Поэтому она прибавит к $(n+1)$-угольнику ёще $(k-1)(n-k)+1$ частей. Диагонали, не проходящие через A_{n+1}, разбивают $(n+1)$-угольник на f_n+1 частей (f_n частей n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и (f_n+1)-я часть — треугольник $A_{n+1}A_1A_n$). После проведения диагоналей из A_{n+1} к этим f_n+1 частям $(n+1)$-угольника прибавится еще

$$[(2-1)(n-2)+1]+[(3-1)(n-3)+1]+\ldots$$
$$\ldots+[((n-1)-1)(n-(n-1))+1]$$

частей. Таким образом, имеем:

$$f_{n+1}=f_n+(2-1)(n-2)+(3-1)(n-3)+\ldots$$
$$\ldots+[(n-1)-1][n-(n-1)]+n-1.$$

Но[1])

$$(2-1)(n-2)+(3-1)(n-3)+\ldots$$
$$\ldots+[(n-1)-1][n-(n-1)]=$$
$$=1\cdot(n-2)+2(n-3)+\ldots+(n-2)(n-(n-1))=$$
$$=n+2n+\ldots+(n-2)n-$$
$$-[1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-2)(n-1)]=$$
$$=n\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-2)(n-1)n}{3}=\frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

Следовательно,

$$f_{n+1}=f_n+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}+n-1$$

и аналогично

$$f_n=f_{n-1}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}+n-2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_4=f_3+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}+2,$$
$$f_3=1.$$

[1]) См. сноску на стр. 181.

Сложив все эти равенства, получим:

$$f_{n+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{6}+\ldots+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}+ \\ +(1+2+3+\ldots+(n-1)).$$

Так как [1])

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+(n-2)(n-1)n= \\ =\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4},$$

то окончательно

$$f_{n+1}=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно,

$$f_n=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}= \\ =\frac{(n-1)(n-2)}{24}[n^2-3n+12].$$

Таким образом,

$$f_n=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

Полагая в этой формуле $n=3,\ 4,\ 5\ ,\ \ldots,$ получим:

$$f_3=1,\ f_4=4,\ f_5=11,\ f_6=25,\ f_7=50,\ f_8=82,\ \ldots$$

Из полученного результата, в частности, следует, что если никакие три из диагоналей выпуклого многоугольника не пересекаются в одной точке, то число частей, на которые делится многоугольник своими диагоналями, не зависит от формы многоугольника, а зависит только от числа его вершин.

Второе решение. Диагонали n-угольника делят его на части, каждая из которых является, очевидно, многоугольником. Обозначим число имеющихся среди них треугольников через r_3, число четырехугольников через r_4, число пятиугольников через r_5 и т. д., наконец, число m-угольников через r_m (здесь m — наибольшее число сторон у многоугольников, обра-

---

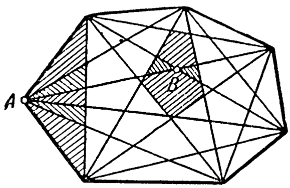
[1]) См. сноску на стр. 181.

зованных диагоналями n-угольника). Нам надо подсчитать, чему равна сумма

$$f_n = r_3 + r_4 + r_5 + \ldots + r_m.$$

Найдем сумму числа вершин всех многоугольников, на которые делится n-угольник своими диагоналями. С одной стороны, эта сумма, очевидно, равна

$$3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \ldots + mr_m.$$



Черт. 60.

С другой стороны, каждая из точек пересечения диагоналей n-угольника является вершиной четырех многоугольников, примыкающих к этой точке, а каждая из вершин n-угольника является вершиной $n-2$ многоугольников, примыкающих к этой вершине (черт. 60). Но так как число точек пересечения диагоналей n-угольника равно $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ (см. задачу 44), а число вершин n-угольника равно n, то сумма числа вершин всех многоугольников, на которые делится n-угольник своими диагоналями, равна

$$4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + (n-2)\,n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n(n-2).$$

Таким образом, мы имеем:

$$3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \ldots + mr_m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n(n-2).$$

Определим теперь сумму углов всех многоугольников, на которые делится n-угольник. Так как сумма углов k-угольника равна $(k-2)\,180^\circ$, то искомая сумма равна

$$[r_3 + 2r_4 + 3r_5 + \ldots + (m-2)\,r_m]\,180^\circ.$$

С другой стороны, сумма углов, примыкающих к каждой из $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ точек пересечения диагоналей n-угольника, равна 360° (эти углы заполняют полный угол вокруг точки пересечения), а сумма всех углов, примыкающих ко всем вершинам n-угольника, равна сумме углов n-угольника, т. е. равна $(n-2)\,180°$. Отсюда вытекает, что

$$[r_3+2r_4+3r_5+\ldots+(m-2)\,r_m]\,180° = \\ = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\,360° + (n-2)\,180°,$$

т. е.

$$r_3+2r_4+3r_5+\ldots+(m-2)\,r_m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + (n-2).$$

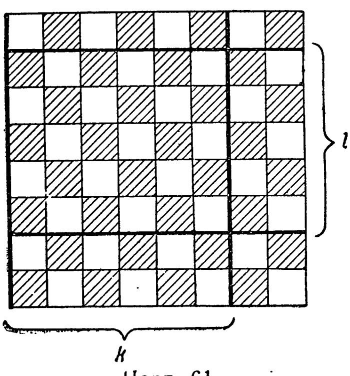
Вычитая выражение для $r_3+2r_4+3r_5+\ldots+(m-2)\,r_m$ из выражения для $3r_3+4r_4+5r_5+\ldots+mr_m$, мы получим:

$$2(r_3+r_4+r_5+\ldots+r_m) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + (n-1)(n-2),$$

откуда

$$f_n = r_3+r_4+r_5+\ldots+r_m = \\ = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \\ = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

46. а) Выясним сначала, сколько можно найти на шахматной доске прямоугольников, составленных из целого числа клеток и имеющих данную ширину k и данную высоту l. Каждый такой прямоугольник получается, если выделить на доске k последовательных вертикалей и l последовательных горизонталей (черт. 61). Группу из k последовательных вертикалей можно выбрать $8-k+1=9-k$ различными способами (первой вертикалью группы может быть 1-я, 2-я, 3-я, $\ldots$, $(8-k+1)$-я вертикаль доски); аналогично l последовательных горизонталей можно выбрать $8-l+1=9-l$ способами. Отсюда следует, что прямоугольник ширины k и высоты l можно выбрать



Черт. 61.

$(9-k)(9-l)$ различными способами, т. е. что на доске существует всего $(9-k)(9-l)$ таких прямоугольников.

Теперь подсчитаем, сколько существует на шахматной доске различных прямоугольников данной ширины k. Высота l прямоугольника может меняться от 1 до 8; поэтому число таких прямоугольников равно

$$(9-k)(9-1)+(9-k)(9-2)+\ldots+(9-k)(9-8)=$$
$$=(9-k)(8+7+6+5+4+3+2+1)=36(9-k).$$

Учитывая теперь, что ширина k прямоугольника тоже может меняться от 1 до 8, мы найдем, что общее число различных прямоугольников равно

$$36(9-1)+36(9-2)+\ldots+36(9-8)=$$
$$=36(8+7+6+5+4+3+2+1)=36\cdot 36=1296.$$

б) Совершенно аналогично решению задачи а) заключаем, что число всевозможных прямоугольников ширины k и высоты l на n^2-клеточной доске равно $(n+1-k)(n+1-l)$. Число всевозможных прямоугольников данной ширины k равно

$$(n+1-k)(1+2+\ldots+n)=(n+1-k)\frac{n(n+1)}{2},$$

а число всех возможных различных прямоугольников равно

$$\frac{n(n+1)}{2}(1+2+\ldots+n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

47. а) Эта задача близка к предыдущей. Число всевозможных квадратов из k^2 клеток, которые можно выбрать на шахматной доске в 64 клетки, равно $(9-k)^2$ (см. решение задачи 46 а)). Отсюда следует, что число всех квадратов равно

$$8^2+7^2+6^2+\ldots+1^2=$$
$$=64+49+36+25+16+9+4+1=204.$$

б) Аналогично решению задачи а) заключаем, что искомое число равно

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(см., например, формулу, выведенную в сноске на стр. 179; эта формула отличается от нужной нам лишь заменой n на $n-1$).

Примечание. Так как по известной формуле (эту формулу нетрудно вывести методом математической индукции или доказать аналогично подстрочному примечанию на стр. 179[1]))

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

то результатам задач а) и б) можно придать следующую симметричную форму:

Число различных квадратов, состоящих из целого числа клеток, которые можно начертить на n^2-клеточной доске, равно

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2;$$

число различных прямоугольников, состоящих из целого числа клеток, которые можно начертить на n^2-клеточной доске, равно

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

48. Очевидно, что вершинами искомых треугольников являются или вершины или точки пересечения диагоналей исходного n-угольника. Рассмотрим отдельно четыре возможных случая:

1°. Все три вершины треугольника являются вершинами n-угольника.

2°. Две вершины треугольника являются вершинами n-угольника, а третья является точкой пересечения диагоналей.

3°. Одна вершина треугольника является вершиной n-угольника, а две являются точками пересечения диагоналей.

4°. Все три вершины треугольника являются точками пересечения диагоналей.

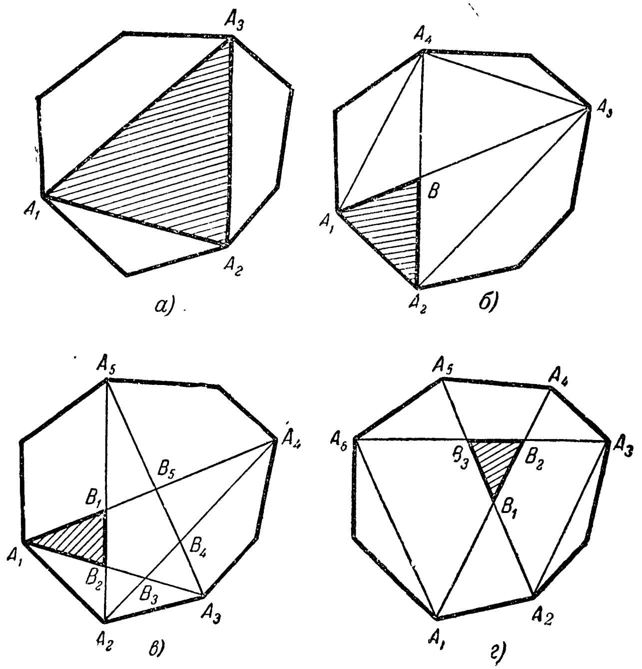
1°. Число треугольников, все вершины которых совпадают с вершинами n-угольника (черт. 62, *а*), очевидно, равно C_n^3.

2°. Рассмотрим какой-либо треугольник A_1A_2B, где A_1 и A_2 — вершины n-угольника, а B — точка пересечения диагоналей (черт. 62, *б*). Стороны A_1B и A_2B этого треугольника принадлежат диагоналям A_1A_3 и A_2A_4 n-угольника; наш треугольник является одним из четырех треугольников, на которые делится диагоналями четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$. При этом каждой четверке вершин A_1, A_2, A_3 и A_4 исходного n-угольника отвечают четыре треугольника, имеющих две вершины

---

[1]) См., например, задачу 134б) книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., Гостехиздат, 1954, «Библиотека математического кружка», вып. 1.

в вершинах n-угольника и одну в точке пересечения его диагоналей (такими будут четыре треугольника, на которые делится четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ своими диагоналями). Следовательно, общее число треугольников типа 2° равно $4C_n^4$.



Черт. 62.

3°. Рассмотрим какой-либо треугольник $A_1B_1B_2$, где A_1 — вершина n-угольника, а B_1 и B_2 — точки пересечения диагоналей (черт. 62, *в*). Стороны A_1B_1, A_1B_2 и B_1B_2 этого треугольника принадлежат диагоналям A_1A_4, A_1A_3, A_2A_5 n-угольника; наш треугольник $A_1B_1B_2$ является одним из пяти треугольников, получающихся при вершинах пятиугольной звезды $A_1B_2A_2B_3A_3B_4A_4B_5A_5B_1$. При этом каждой пятерке вершин A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 отвечает определенная «пятиугольная звезда», содержащая пять треугольников типа 3°. Следовательно, общее число треугольников типа 3° равно $5C_n^5$.

4°. Рассмотрим какой-либо треугольник $B_1B_2B_3$, где B_1, B_2, B_3 — точки пересечения диагоналей n-угольника (черт. 62, *г*). Стороны B_1B_2, B_2B_3 и B_3B_1 этого треугольника принадлежат диагоналям A_1A_4, A_3A_6 и A_2A_5 n-угольника. При этом, очевидно, каждой шестерке вершин A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 нашего n-угольника отвечает единственный треугольник типа 4°, образованный диагоналями, соединяющими противоположные вершины выпуклого шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Следовательно, общее число треугольников типа 4° равно C_n^6.

Таким образом, общее число T_n всех искомых треугольников, получающееся сложением чисел треугольников типов 1°, 2°, 3° и 4°, равно

$$T_n = C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + C_n^6 =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left[1 + (n-3) + \frac{(n-3)(n-4)}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{120}\right] =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n^3+18n^2-43n+60)}{720}.$$

Подставляя в эту формулу $n=3, 4, 5$ и т. д., будем иметь:

$$T_3 = 1,\ T_4 = 8,\ T_5 = 35,\ T_6 = 111 \text{ и т. д.}$$

49. Для того чтобы существовал хотя бы один такой k-угольник, n должно быть не меньше $2k$ (так как каждые две вершины k-угольника должны разделяться по крайней мере одной вершиной n-угольника).

Обозначим вершины n-угольника буквами $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ и подсчитаем, сколько существует k-угольников, удовлетворяющих условиям задачи и имеющих одной из своих вершин вершину A_{n-1}. Пусть остальными $k-1$ вершинами какого-либо такого k-угольника будут точки $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{k-1}}$. Числа $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ все заключены между 1 и $n-3$ и должны удовлетворять условию

$$i_2 - i_1 \geqslant 2,\ i_3 - i_2 \geqslant 2,\ \ldots,\ i_{k-1} - i_{k-2} \geqslant 2.$$

Рассмотрим теперь $k-1$ чисел

$$j_1 = i_1,\ j_2 = i_2 - 1,\ j_3 = i_3 - 2,\ \ldots,\ j_{k-1} = i_{k-1} - (k-2).$$

Из неравенств, которым должны удовлетворять числа i_1,

$i_2, \ldots, i_{k-1}$, следует, что для чисел $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ будут выполняться неравенства

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{k-1} \leqslant (n-3)-(k-2) = n-k-1.$$

Обратно, если $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ — произвольные не равные между собой числа, заключающиеся между 1 и $n-k-1$ и расположенные в возрастающем порядке, то числа $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2+1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1}+(k-2)$ будут удовлетворять неравенствам

$$i_1 \geqslant 1,\ i_2 - i_1 \geqslant 2,\ \ldots,\ i_{k-1} - i_{k-2} \geqslant 2,\ i_{k-1} \leqslant n-3$$

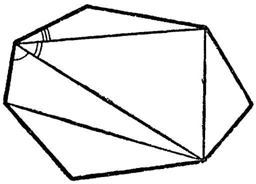
и, следовательно, k-угольник $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{k-1}}A_{n-1}$ будет одним из искомых k-угольников, имеющих одной из вершин точку A_{n-1}. Отсюда вытекает, что число искомых k-угольников, имеющих одной из вершин точку A_{n-1}, равно числу групп из $k-1$ положительных целых чисел, не превосходящих $n-k-1$, т. е. равно C_{n-k-1}^{k-1}.

Теперь уже легко подсчитать, чему равно общее число k-угольников, удовлетворяющих условиям нашей задачи. Так как число n-угольников, имеющих одной из вершин одну определенную вершину n-угольника, одинаково для всех вершин, то, умножив C_{n-k-1}^{k-1} на n (т. е. просуммировав число k-угольников, имеющих одной из вершин определенную вершину n-угольника, по всем n вершинам), мы сосчитаем каждый из k-угольников, удовлетворяющих условиям задачи, ровно k раз (k-угольник имеет k вершин). Следовательно, искомое число различных k-угольников равно

$$\frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1} = \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}.$$

50. а) Пусть n-угольник разбит диагоналями, не пересекающимися внутри него, на k треугольников. Тогда сумма всех внутренних углов всех этих треугольников равна $180° k$. Сосчитаем теперь эту сумму другим способом. Так как наши диагонали не пересекаются внутри n-угольника, то все вершины треугольников лежат в вершинах n-угольника. Сумма углов при всех вершинах треугольников разбиения, совпадающих с данной вершиной n-угольника, равна внутреннему углу

n-угольника при этой вершине (черт. 63). Поэтому сумма всех внутренних углов всех треугольников равна сумме всех внутренних углов n-угольника, т. е. равна $(n-2)\cdot 180^\circ$. Отсюда следует, что $k\cdot 180^\circ = (n-2)\cdot 180^\circ$, т. е. что



Черт. 63.

$$k = n - 2.$$

Таким образом, число треугольников, на которые разбит n-угольник диагоналями, равно $n-2$ и не зависит от способа разбиения.

б) Сосчитаем теперь число l диагоналей, участвующих в таком разбиении. Каждый треугольник имеет три стороны, следовательно, общее число сторон всех наших треугольников равно $3\cdot(n-2)$. Но каждая диагональ n-угольника является стороной двух треугольников, а каждая сторона n-угольника является стороной одного треугольника. Следовательно,

$$3(n-2) = 2l + n.$$

Отсюда

$$3n - 6 - n = 2l,\quad l = \frac{2n-6}{2} = n - 3.$$

Таким образом, число диагоналей равно $n-3$ и не зависит от способа разбиения.

51. а) Обозначим через T_n число способов, которыми можно разбить n-угольник на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Покажем, что если числа T_1, $T_2, \ldots, T_n$ нам известны, то можно определить и число T_{n+1}.

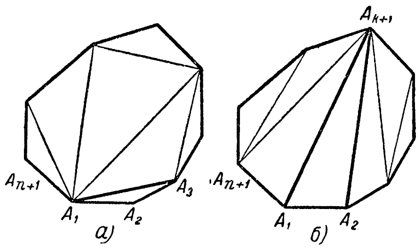
Зафиксируем какую-либо сторону $(n+1)$-угольника, например A_1A_2. При этом возможны следующие случаи разбиения $(n+1)$-угольника на треугольники:

1°. В разбиение входит $\triangle A_1A_2A_3$ (черт. 64, *a*). Так как наш $(n+1)$-угольник выпуклый, то диагональ A_1A_3 отделяет от него выпуклый n-угольник, который можно разбить на треугольники T_n способами. Следовательно, имеется T_n способов разбиения $(n+1)$-угольника на треугольники, в которые входит треугольник $A_1A_2A_3$.

2°. Точно так же имеется T_n способов разбиения, при которых в разбиение входит $\triangle A_1A_2A_{n+1}$.

3°. В разбиение входит $\triangle A_1A_2A_{k+1}$, где $2<k<n$ (черт. 64, *б*).

Сосчитаем, сколько имеется разбиений при фиксированном k. Диагональ $A_{k+1}A_2$ отсекает от $(n+1)$-угольника k-угольник $A_2A_3 \ldots A_{k+1}$, а диагональ A_1A_{k+1} отсечет от $(n+1)$-угольника $(n-k+2)$-угольник $A_{k+1}A_{k+2} \ldots A_nA_{n+1}A_1$. k-угольник можно разбить на треугольники T_k способами, а $(n+2-k)$-угольник — T_{n+2-k} способами. Так как мы можем при разбиении



Черт. 64.

$(n+1)$-угольника комбинировать произвольное разбиение k-угольника с произвольным разбиением $(n+2-k)$-угольника, то число всех разбиений $(n+1)$-угольника, в которые входит треугольник $A_1A_2A_{k+1}$, равно T_kT_{n+2-k}.

Придавая k различные значения $2, 3, 4, \ldots, n$, получим соотношение

$$T_{n+1} = 2T_n + T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3.$$

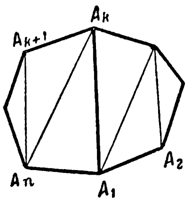
Следует считать, что $T_3 = 1$ (имеется единственное «разбиение» на треугольники); четырехугольник же можно двумя способами разбить на треугольники (каждой из двух диагоналей), так что $T_4 = 2$.

Дальше можно провести вычисления по нашей формуле:

$$T_5 = 2T_4 + T_3T_3 = 2\cdot 2 + 1 = 5,$$
$$T_6 = 2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 = 2\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 14,$$
$$T_7 = 2T_6 + T_3T_5 + T_4T_4 + T_5T_3 = \\ = 2\cdot 14 + 1\cdot 5 + 2\cdot 2 + 5\cdot 1 = 42,$$
$$T_8 = 2T_1 + T_3T_6 + T_4T_5 + T_5T_4 + T_6T_3 = \\ = 2\cdot 42 + 1\cdot 14 + 2\cdot 5 + 5\cdot 2 + 14\cdot 1 = 132.$$

Итак, выпуклый восьмиугольник 132 различными способами можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него.

б) Пользуясь только формулой, выведенной в задаче а), трудно установить, чему равно в общем случае число T_n. Поэтому мы сейчас выведем еще одно соотношение, позволяющее определить T_n, если известны T_3, T_4, ..., T_{n-1}. Воспользовавшись затем обоими полученными соотношениями, мы уже без труда найдем формулу для T_n.



Черт. 65.

Сосчитаем, сколько существует разбиений выпуклого n-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, в которых участвует диагональ A_1A_k. Эта диагональ разбивает n-угольник на k-угольник $A_1A_2 \ldots A_k$ и $(n-k+2)$-угольник $A_kA_{k+1} \ldots A_nA_1$ (черт. 65). Так как первый из этих многоугольников может быть разбит на треугольники T_k способами, а второй — T_{n-k+2} способами, то число разбиений n-угольника, в которых участвует диагональ A_1A_k, равно T_kT_{n-k+2}.

Число разбиений, в которых участвует одна определенная диагональ, мы можем теперь суммировать по всем диагоналям n-угольника следующим способом: сначала составим сумму из $n-2$ членов, отвечающих $n-2$ диагоналям, выходящим из вершины A_1. Затем умножим эту сумму на число вершин n и полученное произведение разделим на 2 (ибо каждая диагональ выходит из двух вершин). Сумма, отвечающая диагоналям, выходящим из вершины A_1, очевидно, равна

$$T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+ \ldots +T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3.$$

После умножения этого выражения на $\frac{n}{2}$ получим:

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+ \ldots +T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3).$$

Но при суммировании числа разбиений, в которых участвует данная диагональ, по всем диагоналям каждое разбиение, очевидно, будет сосчитано столько раз, сколько диагоналей участвует в этом разбиении. Согласно задаче 50б) число диагоналей, участвующих в каждом разбиении, равно $n-3$. Следовательно,

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3)= \\ =(n-3)T_n. \qquad (*)$$

Это и есть формула, которую мы хотели получить.

Заметим теперь, что выражение, стоящее в скобках в левой части равенства (*), фигурирует также в выведенной в решении задачи а) формуле

$$T_{n+1}=2T_n+T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3.$$

Поэтому

$$T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-2}T_4+T_{n-1}T_3=T_{n+1}-2T_n.$$

Подставляя это выражение в формулу (*), имеем:

$$\frac{n}{2}(T_{n+1}-2T_n)=(n-3)\,T_n,$$

откуда

$$T_{n+1}-2T_n=\frac{2(n-3)}{n}T_n,$$

$$T_{n+1}=2T_n+\frac{2(n-3)}{n}T_n=\frac{4n-6}{n}T_n=\frac{2(2n-3)}{n}T_n.$$

Теперь можно без труда вывести общую формулу:

$$T_{n+1}=\frac{2(2n-3)}{n}T_n=\frac{2(2n-3)\,2(2n-5)}{n(n-1)}T_{n-1}=$$

$$=\frac{2(2n-3)\,2(2n-5)\,2(2n-7)}{n(n-1)(n-2)}T_{n-2}=$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{2(2n-3)\,2(2n-5)\ldots 2[2n-3-2(n-3)]}{n(n-1)\ldots[n-(n-3)]}T_3=$$

$$=2^{n-2}\frac{3\cdot5\ldots(2n-3)}{3\cdot4\cdot5\ldots n}\cdot1=2^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{n!},$$

или, если мы заменим $n+1$ на n:

$$T_n=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-5)}{(n-1)!}\,2^{n-2}.$$

Используя формулу для числа сочетаний из m элементов по k, эту формулу можно переписать в следующем виде:

$$T_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-6)(2n-5)}{(n-1)!\,2\cdot 4\ldots(2n-6)}2^{n-2}=\frac{(2n-5)!\,2^{n-2}}{(n-1)!\,2^{n-3}(n-3)!}=$$
$$=\frac{2}{n-1}\frac{(2n-5)!}{(n-2)!\,(n-3)!}=\frac{2}{n-1}C_{2n-5}^{n-3}=\frac{2}{n-3}C_{2n-5}^{n-1},$$

или еще иначе:

$$T_n=\frac{(2n-5)!\,2}{(n-1)!\,(n-3)!}=\frac{(2n-4)!}{(n-2)\,(n-1)!\,(n-3)!}=\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!}=$$
$$=\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{[(n-2)!]^2}=\frac{1}{n-1}C_{2n-4}^{n-2}=\frac{1}{n-2}\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-3)!}=$$
$$=\frac{1}{n-2}C_{2n-4}^{n-3},$$

или

$$T_n=\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!}=\frac{1}{2n-3}\frac{(2n-3)!}{(n-1)!\,(n-2)!}=\frac{1}{2n-3}C_{2n-3}^{n-2}.$$

Заметим еще, что при больших значениях n подсчет числа T_n по любой из приведенных формул требует затраты большого труда (из-за необходимости определения произведения большого числа сомножителей). Воспользовавшись, однако, формулой Стирлинга

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(см. задачи 160 — 161 и относящийся к ним текст), можно без труда получить приближенную формулу для T_n, годную как раз в случае больших n:

$$T_n=\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{[(n-2)!]^2}\approx$$
$$\approx\frac{\sqrt{2\pi\,2(n-2)}\,[2(n-2)]^{2(n-2)}e^{-2(n-2)}}{(n-1)\left[\sqrt{2\pi(n-2)}\,(n-2)^{(n-2)}e^{-(n-2)}\right]^2}=$$
$$=\frac{2^{2(n-2)}}{(n-1)\sqrt{\pi(n-2)}};$$

эта формула позволяет при помощи таблиц логарифмов легко подсчитать T_n со сравнительно большой точностью для сколь угодно больших значений n (заметим, что точность нашей приближенной формулы тем больше, чем больше n).

52. а) Обозначим через Φ_n число способов, которыми можно соединить попарно какие-либо $2n$ точек окружности n хордами, не пересекающимися внутри окружности. Покажем, что, зная $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, можно определить Φ_n.

Обозначим наши $2n$ точек в порядке их следования на окружности буквами $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$. Точка A_1 может оказаться соединенной с точками $A_2, A_4, A_6, \ldots, A_{2n}$, иначе по обе стороны от хорды, выходящей из точки A_1, было бы расположено по нечетному числу точек и, следовательно, при попарном соединении точек между собой хотя бы одна хорда должна была бы пересечь хорду, выходящую из A_1.

Подсчитаем теперь, сколько существует различных способов соединения точек, при которых A_1 соединена с A_{2k}. При этом с одной стороны хорды A_1A_{2k} расположено $2(k-1)$ точек (точки $A_2, A_3, \ldots, A_{2k-1}$), а с другой $2(n-k)$ точек (точки $A_{2k+1}, A_{2k+2}, \ldots, A_{2n}$). Очевидно, что первые $2(k-1)$ точек мы можем соединить попарно между собой Φ_{k-1} способами, а оставшиеся $2(n-k)$ точек — Φ_{n-k} способами. Все возможные, удовлетворяющие условию задачи способы соединения попарно всех $2n$ точек, при которых A_1 соединяется с A_{2k}, мы получим, комбинируя все Φ_{k-1} различные соединения между собой точек $A_2, A_3, \ldots, A_{2k-1}$ со всеми Φ_{n-k} различными соединениями между собой точек $A_{2k+1}, A_{2k+2}, \ldots, A_{2n}$; таким образом, число таких способов равно $\Phi_{k-1}\Phi_{n-k}$. Учитывая теперь, что точка A_1 может быть соединена с точками $A_2, A_4, A_6, \ldots, A_{2n-2}, A_{2n}$, мы получаем общую формулу:

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_1\Phi_{n-2} + \Phi_2\Phi_{n-3} + \ldots + \Phi_{n-2}\Phi_1 + \Phi_{n-1}.$$

С помощью этой формулы мы можем без труда определить любое Φ_n. Нам надо подсчитать, чему равно Φ_{10}; отметим, что Φ_1, очевидно, равно 1 (две точки можно соединить единственным способом) и будем далее считать последовательно:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_1 = 1 + 1 = 2,$$
$$\Phi_3 = \Phi_2 + \Phi_1\Phi_1 + \Phi_2 = 2 + 1\cdot 1 + 2 = 5,$$
$$\Phi_4 = \Phi_3 + \Phi_1\Phi_2 + \Phi_2\Phi_1 + \Phi_3 = 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5 = 14,$$
$$\Phi_5 = \Phi_4 + \Phi_1\Phi_3 + \Phi_2\Phi_2 + \Phi_3\Phi_1 + \Phi_4 =$$
$$= 14 + 1\cdot 5 + 2\cdot 2 + 5\cdot 1 + 14 = 42,$$
$$\Phi_6 = \Phi_5 + \Phi_1\Phi_4 + \Phi_2\Phi_3 + \Phi_3\Phi_2 + \Phi_4\Phi_1 + \Phi_5 =$$
$$= 42 + 1\cdot 14 + 2\cdot 5 + 5\cdot 2 + 14\cdot 1 + 42 = 132,$$
$$\Phi_7 = \Phi_6 + \Phi_1\Phi_5 + \Phi_2\Phi_4 + \Phi_3\Phi_3 + \Phi_4\Phi_2 + \Phi_5\Phi_1 + \Phi_6 =$$
$$= 132 + 1\cdot 42 + 2\cdot 14 + 5\cdot 5 + 14\cdot 2 + 42\cdot 1 + 132 = 429,$$

$$\Phi_8 = \Phi_7 + \Phi_1\Phi_6 + \Phi_2\Phi_5 + \Phi_3\Phi_4 + \Phi_4\Phi_3 + \Phi_5\Phi_2 + \Phi_6\Phi_1 + \Phi_7 = 429 + 1\cdot 132 + 2\cdot 42 + 5\cdot 14 + 14\cdot 5 + 42\cdot 2 + 132\cdot 1 + 429 = 1430,$$

$$\Phi_9 = \Phi_8 + \Phi_1\Phi_7 + \Phi_2\Phi_6 + \Phi_3\Phi_5 + \Phi_4\Phi_4 + \Phi_5\Phi_3 + \Phi_6\Phi_2 + \Phi_7\Phi_1 + \Phi_8 = 1430 + 1\cdot 429 + 2\cdot 132 + 5\cdot 42 + 14\cdot 14 + 42\cdot 5 + 132\cdot 2 + 1430 = 4862,$$

$$\Phi_{10} = \Phi_9 + \Phi_1\Phi_8 + \Phi_2\Phi_7 + \Phi_3\Phi_6 + \Phi_4\Phi_5 + \Phi_5\Phi_4 + \Phi_6\Phi_3 + \Phi_7\Phi_2 + \Phi_8\Phi_1 + \Phi_9 = 4862 + 1\cdot 1430 + 2\cdot 429 + 5\cdot 132 + 14\cdot 42 + 42\cdot 14 + 132\cdot 5 + 429\cdot 2 + 1430\cdot 1 + 4862 = 16\,796.$$

Итак, искомое число способов есть 16 796.

б) Обозначим искомое число способов через Φ_n. В решении предыдущей задачи было доказано, что Φ_n удовлетворяет соотношению

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_1\Phi_{n-2} + \Phi_2\Phi_{n-3} + \ldots + \Phi_{n-2}\Phi_1 + \Phi_{n-1}.$$

Это соотношение позволяет определить Φ_n, если известны $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_{n-1}$, и с его помощью мы можем последовательно подсчитывать Φ_n для всех n (см. решение задачи а)); но общую формулу для Φ_n из одного этого соотношения вывести трудно. Можно было бы аналогично решению задачи 51б) попытаться найти еще одно соотношение, связывающее Φ_n с $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, однако значительно проще вместо этого сразу воспользоваться готовым результатом задачи 51б). Действительно, при решении этой задачи было показано, что числа T_n удовлетворяют соотношению

$$T_{n+1} = T_n + T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3 + T_n,$$

очень похожему на соотношение, которому удовлетворяет Φ_n. Обозначим T_{n+2} через R_n; тогда R_n уже будет удовлетворять точно тому же соотношению, что и Φ_n:

$$R_{n-1} = R_{n-2} + R_1R_{n-3} + R_2R_{n-4} + \ldots + R_{n-4}R_2 + R_{n-3}R_1 + R_{n-2},$$

или, если мы заменим $n-1$ на n:

$$R_n = R_{n-1} + R_1R_{n-2} + R_2R_{n-3} + \ldots + R_{n-3}R_2 + \\ + R_{n-2}R_1 + R_{n-1}.$$

При этом $R_1 = T_3 = 1 = \Phi_1$; поэтому последовательное вычисление R_n по этой формуле для $n = 1, 2, 3, \ldots$ приводит к тому же результату, что и последовательное вычисление Φ_n по формуле, приведенной выше (ср. решения задач 51а) и 52а): вычисления в обоих случаях в точности совпадают).

Следовательно, при любом n

$$\Phi_n = R_n = T_{n+2} = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{(n+1)!}\,2^n,$$

или, используя выражение для числа сочетаний из n элементов по m:

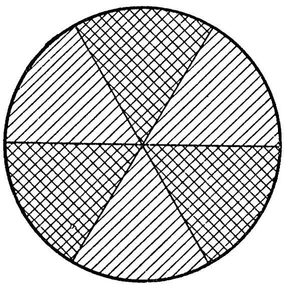
$$\Phi_n = \frac{2}{n+1}C_{2n-1}^{n-1} = \frac{2}{n-1}C_{2n-1}^{n+1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n} = \frac{1}{n}C_{2n}^{n-1} = \\ = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{n}.$$

53. а) Каждый из p секторов может быть закрашен n красками. Следовательно, два сектора могут быть раскрашены n^2 различными способами (каждый из n способов окраски одного сектора можно комбинировать с каждым из n способов окраски второго сектора), три сектора могут быть раскрашены n^3 различными способами (каждый из n^2 способов окраски двух секторов можно комбинировать с каждым из способов окраски третьего) и т. д.; p секторов могут быть раскрашены n^p различными способами. Здесь, однако, различными считаются любые две окраски, при которых хотя бы один из секторов окрашен различно. Некоторые из таких «различных» окрасок могут быть совмещены вращением круга и, следовательно, должны приниматься за одну.

Подсчитаем теперь, сколько таких «различных» окрасок получается при вращении одной определенной окраски. Прежде всего ясно, что если все p секторов закрашены одним цветом (таких окрасок будет столько, сколько есть разных красок, т. е. n), то ни при каком вращении круга новой окраски не получится. Если же некоторые секторы окрашены различно, то новые окраски смогут получаться при вращении круга на углы

$$\frac{360^\circ}{p},\ \frac{360^\circ}{p}\cdot 2,\ \frac{360^\circ}{p}\cdot 3, \ldots,\ \frac{360^\circ}{p}(p-1)$$

(при таких вращениях секторы будут переходить друг в друга). Покажем, что при любой окраске, при которой хотя бы два сектора окрашены различно, никакие две из p окрасок, получающихся из первоначальной при вращении круга на 0° (это есть первоначальная окраска), $\frac{360^\circ}{p}$, $\frac{360^\circ}{p}\cdot 2, \ldots, \frac{360^\circ}{p}(p-1)$, не будут совпадать. (Заметим, что при p составном это неверно: при вращении, например, окраски, изображенной на черт. 66, на угол $\frac{360^\circ}{6}\cdot 2 = \frac{360^\circ}{3}$ мы получим ту же окраску.) Действительно, пусть, например, при вращении на углы $\frac{360^\circ}{p}k$ и $\frac{360^\circ}{p}m$, где $0 \leqslant k \leqslant (p-1)$, $0 \leqslant m \leqslant (p-1)$, $k < m$, мы получим одну и ту же окраску. Повернув круг на угол $\frac{360^\circ}{p}m$ и затем на угол $\frac{360^\circ}{p}k$ в обратном направлении, мы убедимся, что первоначальная окраска переходит сама в себя при повороте на угол $\frac{360^\circ}{p}(m-k)$. Следовательно, эта окраска переходит сама в себя также и при вращениях круга на углы



Черт. 66.

$$\frac{360^\circ}{p}\cdot 2(m-k),\ \frac{360^\circ}{p}\cdot 3(m-k), \ldots,\ \frac{360^\circ}{p}\cdot(p-1)(m-k).$$

Но легко видеть, что при вращениях на углы

$$0^\circ,\ \frac{360^\circ}{p}(m-k),\ \frac{360^\circ}{p}\cdot 2(m-k), \ldots,\ \frac{360^\circ}{p}\cdot(p-1)(m-k)$$

(всего p углов!) первый сектор будет совмещаться по очереди со всеми секторами. В противном случае при каких-нибудь двух вращениях, например при вращениях на углы $\frac{360^\circ}{p}\cdot q(m-k)$ и $\frac{360^\circ}{p}\cdot l(m-k)$, первый сектор должен был бы занять одно и то же положение (ибо всего имеется p различных возможных положений, т. е. столько же, сколько вращений), что невозможно, так как разность

$$\frac{360^\circ}{p} l(m-k) - \frac{360^\circ}{p} q(m-k) = \frac{360^\circ}{p}(l-q)(m-k)$$

некратна 360° (p — простое число, а $l-q$ и $m-k$ меньше p). Таким образом, для того чтобы окраски, получаемые из первоначальной окраски при вращении на углы $\frac{360^\circ}{p} m$ и $\frac{360^\circ}{p} k$, могли совпасть, все секторы должны быть окрашены тем же цветом, что и первый сектор, т. е. все одним и тем же цветом.

Итак, среди n^p окрасок n одноцветных окрасок считаются по одному разу, а каждая из остальных окрасок считается по p раз. Следовательно, общее число различных окрасок равно

$$\frac{n^p - n}{p} + n.$$

б) Так как число различных окрасок есть всегда число целое, то отсюда следует, что если p простое, то при любом n число $n^p - n$ делится на p. Это и есть теорема Ферма.

54. а) Найдем предварительно, сколько существует различных по форме или по расположению звездчатых p-угольников, имеющих вершинами точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Будем считать, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ расположены вдоль окружности в последовательном порядке. Всевозможные p-угольники, имеющие вершинами эти точки, мы получим, соединив точку A_1 с произвольной точкой A_{i_1} из числа $p-1$ точек $A_2, A_3, \ldots, A_p$, точку A_{i_1} — с произвольной точкой A_{i_2} из числа $p-2$ точек, отличных от A_1 и от A_{i_1}, точку A_{i_2} — с произвольной точкой A_{i_3} из числа оставшихся $p-3$ точек и т. д., пока не исчерпаем всех точек $A_2, A_3, \ldots, A_p$; последняя из этих точек (точка $A_{i_{p-1}}$) снова соединяется с A_1. Точку A_{i_1} можно выбрать $p-1$ различными способами, точку A_{i_2} после этого можно выбрать $p-2$ различными способами, точку A_{i_3} можно выбрать $p-3$ способами и т. д. Комбинируя всевозможные способы выбора точек A_{i_1}, A_{i_2}, $A_{i_3}, \ldots, A_{i_{p-1}}$, мы получим всего

$$(p-1)(p-2)(p-3)\ldots 1=(p-1)!$$

способов выбора последовательности A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, $\ldots$, $A_{i_{p-1}}$ (число всевозможных перестановок чисел $2, 3, \ldots, p-1, p$). Заметим, однако, что каждый многоугольник, имеющий вершинами точки A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_p, мы получим нашим способом ровно два раза: один раз, когда мы соединяем A_1 с A_{i_1}, A_{i_1} с A_{i_2}, A_{i_2} с A_{i_3}, $\ldots$, $A_{i_{p-2}}$ с $A_{i_{p-1}}$ и $A_{i_{p-1}}$ с A_1, и второй раз, когда мы соединяем A_1 с $A_{i_{p-1}}$, $A_{i_{p-1}}$ с $A_{i_{p-2}}$, $\ldots$ $\ldots$, A_{i_3} с A_{i_2}, A_{i_2} с A_{i_1} и A_{i_1} с A_1 (например, при $p=7$ семиугольники $A_1A_4A_5A_3A_7A_2A_6$ и $A_1A_6A_2A_7A_3A_5A_4$ будут совпадать друг с другом, а все остальные семиугольники $A_1A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}A_{i_6}$ будут отличны от них). Таким образом, общее число p-угольников, имеющих вершинами точки A_1, A_2, $\ldots$, A_p, равно $\frac{(p-1)!}{2}$.

Легко видеть, что из этих $\frac{(p-1)!}{2}$ p-угольников только один p-угольник $A_1A_2A_3\ldots A_p$ не будет звездчатым, остальные же многоугольники все будут содержать хотя бы одно самопересечение. Таким образом, общее число различных по форме или по расположению **звездчатых** p-угольников, имеющих вершинами точки A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_p, равно $\frac{1}{2}(p-1)!-1$.

Определим теперь, насколько уменьшится это число, если считать различными лишь те p-угольники, которые не совмещаются друг с другом при вращениях окружности. С этой целью надо подсчитать, сколько различных p-угольников получается из одного p-угольника при вращениях окружности, переводящих совокупность точек A_1, A_2, $\ldots$, A_p саму в себя, т. е. при вращениях на углы 0°, $\frac{360^\circ}{p}$, $\frac{360^\circ}{p}\cdot 2, \ldots$ $\ldots$, $\frac{360^\circ}{p}(p-1)$. Рассмотрим p p-угольников, которые получаются из одного этими вращениями. Рассуждая так же, как и при решении задачи 53а), легко показать, что если какие-либо два из них совпадут между собой, то обязательно совпадут и все эти p-угольники (при доказательстве этого используется, что p есть число простое). Но в таком случае, очевидно, должны быть равны между собой все стороны и все углы исходного звездчатого p-угольника, т. е. этот p-угольник — правильный. Следовательно, из каждого правильного звездчатого p-угольника можно получить при помощи вращений лишь один p-угольник, а из каждого из остальных (неправильных) p-угольников можно получить таким образом p отличающихся расположением p-угольников.

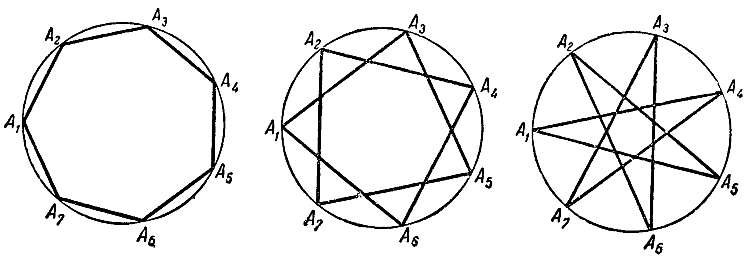
Найдем теперь, чему равно число правильных звездчатых p-угольников, имеющих вершинами данные точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Все правильные p-угольники, имеющие вершинами эти точки, мы, очевидно, получим, соединив точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ сначала подряд (т. е. A_1 с A_2, A_2 с A_3 и т. д.), затем через одну (т. е. A_1 с A_3, A_3 с A_5 и т. д.), затем через две (A_1 с A_4, A_4 с A_7 и т. д.), затем через три и т. д. В качестве последней возможности мы соединим все вершины через $p-2$ (A_1 с A_p и т. д.). [Отметим, что при p составном не все полученные многоугольники оказываются p-угольниками: так, при $p=6$, соединяя вершины через одну, мы получим треугольник $A_1A_3A_5$, а соединяя через две,— двуугольник (т. е. диаметр) A_1A_4. Однако при p простом этого быть не может. Действительно, номера последовательных p вершин k-го из наших многоугольников равны остаткам от деления на p чисел $1,\ 1+k,\ 1+2k,\ 1+3k, \ldots,\ 1+(p-1)k$. Но при простом p все эти остатки различны между собой (ибо разность $(1+mk)-(1+nk)=(m-n)k$ при $m \neq n$, $m \leqslant p-1$ и $n \leqslant p-1$ не может делиться на p). Поэтому две вершины k-го из наших p-угольников различны и, следовательно, мы имеем действительно p-угольники.]

Итак, соединяя точки $A_1, A_2, \ldots, A_p$ подряд, через одну, через две, ..., через $p-2$, мы получим $p-1$ правильных p-угольников. Но эти $p-1$ правильных p-угольников будут попарно совпадать друг с другом (соединяя вершины через k и через $p-2-k$, мы, очевидно, получим один и тот же правильный p-угольник).

Итак, общее число правильных p-угольников с вершинами в точках $A_1, A_2, \ldots, A_p$ равно $\frac{p-1}{2}$ (так, например, при $p=7$ мы будем иметь три правильных семиугольника:

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $A_1A_3A_5A_7A_2A_4A_6$ и $A_1A_4A_7A_3A_6A_2A_5$; черт. 67). Число же звездчатых правильных p-угольников равно $\frac{p-1}{2}-1=\frac{p-3}{2}$ (все наши правильные p-угольники, кроме p-угольника $A_1A_2\ldots A_p$, звездчатые).

Теперь уже легко найти ответ нашей задачи. Так как среди $\frac{1}{2}(p-1)!-1$ различных по форме или по расположению звездчатых p-угольников каждый из $\frac{p-3}{2}$ правильных p-угольников встречается один раз, а каждый из остальных (неправильных) p-угольников встречается p раз, то общее число различных звездчатых p-угольников, не совмещающихся друг с другом при вращениях окружности, равно



Черт. 67.

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)!-1-\frac{1}{2}(p-3)}{p}+\frac{1}{2}(p-3)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(p-1)!+1}{p}+p-4\right\}.$$

б) Так как число различных звездчатых p-угольников есть, конечно, число целое, то из результата предыдущей задачи сразу следует, что при любом простом p число $(p-1)!+1$ делится на p. [Здесь мы считаем, что $p\geqslant 3$, так как иначе задача а) не имеет смысла; но и при $p=2$ число $(p-1)!+1=2$ делится на $p=2$.]

Если число p не простое, то $(p-1)!+1$ заведомо не делится на p, ибо в этом случае существует делитель p, меньший $p-1$, и $(p-1)!$ делится на этот делитель, а $(p-1)!+1$ не делится на него.

55. а) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

б) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n=(1-1)^n=0$.

в) Воспользуемся тем, что

$$\frac{n+1}{k+1}C_n^k=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(k+1)}=C_{n+1}^{k+1}.$$

Следовательно,

$$(n+1)\left\{C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n\right\}=$$
$$=C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+1}^{n+1}=(1+1)^{n+1}-1=2^{n+1}-1$$

и

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

г) Воспользуемся тем, что

$$kC_n^k=n\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots(k-1)}=nC_{n-1}^{k-1}.$$

Следовательно,

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=$$
$$=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1})=$$
$$=n(1+1)^{n-1}=2^{n-1}n.$$

д) Аналогично решению задачи г) получим:

$$C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n=$$
$$=n[C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-\ldots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}]=$$
$$=n(1-1)^{n-1}=0.$$

е) Искомая сумма равна коэффициенту при x^n в следующем многочлене:

$$x^n(1-x)^n+x^{n-1}(1-x)^n+\ldots+x^{n-m}(1-x)^n.$$

Преобразуя этот многочлен, получим:

$$x^n(1-x)^n+x^{n-1}(1-x)^n+$$
$$+x^{n-2}(1-x)^n+\ldots+x^{n-m}(1-x)^n=$$
$$=(1-x)^n(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^{n-m})=$$
$$=(1-x)^n\frac{x^{n+1}-x^{n-m}}{x-1}=-(1-x)^{n-1}\{x^{n+1}-x^{n-m}\}=$$
$$=x^{n-m}(1-x)^{n-1}-x^{n+1}(1-x)^n.$$

Следовательно, искомый коэффициент при x^n равен $(-1)^m C_{n-1}^m$ при $m \leqslant n-1$ и равен 0 при $m=n$ (ср. с результатом задачи б)).

ж) Искомая сумма равна коэффициенту при x^k в многочлене

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+(1+x)^{n+2}+\ldots+(1+x)^{n+m}.$$

Преобразуя этот многочлен при помощи формулы для суммы членов геометрической прогрессии, получим:

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+\ldots+(1+x)^{n+m}=$$
$$=\frac{(1+x)^{n+m+1}-(1+x)^n}{(1+x)-1}=\frac{1}{x}\{(1+x)^{n+m+1}-(1+x)^n\}.$$

Отсюда ясно, что искомый коэффициент при x^k равен

$$C_{n+m+1}^{k+1}-C_n^{k+1} \text{ при } k \leqslant n-1 \text{ и } C_{n+m+1}^{n+1} \text{ при } k=n.$$

з) Искомое выражение равно коэффициенту при x^{2n} в многочлене

$$x^{2n}(1-x)^{2n}+x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}+$$
$$+x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}+\ldots+x^n(1-x)^n.$$

Прежде чем преобразовывать этот многочлен, добавим к нему еще следующие члены, не содержащие x^{2n}:

$$x^{n-1}(1-x)^{n-1}+x^{n-2}(1-x)^{n-2}+\ldots+x(1+x)+1;$$

прибавление этих членов, конечно, не повлияет на коэффициент при x^{2n}. Полученная сумма равна

$$(x-x^2)^{2n}+(x-x^2)^{2n-1}+(x-x^2)^{2n-2}+\ldots+(x-x^2)+1=$$
$$=\frac{(x-x^2)^{2n+1}-1}{(x-x^2)-1}=\frac{x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}-1}{-x^2+x-1}=\frac{1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}}{x^2-x+1}.$$

Следовательно, нам надо только определить коэффициент при x^{2n} в выражении

$$\left[1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}\right]\frac{1}{1-x+x^2}=\left[1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}\right]\frac{1+x}{1+x^3}.$$

В силу формулы для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1+x}{1+x^3}=(1+x)\frac{1}{1+x^3}=(1+x)\,(1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-\ldots)$$

(эта формула, разумеется, имеет смысл лишь, если x по абсолютной величине меньше единицы, что мы и будем считать).

Так как $x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}$ содержит лишь высшие чем $2n$-я степени x, то искомая сумма равна коэффициенту при x^{2n} в последнем произведении. Отсюда следует, что

$$C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n =$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ при } 2n=6k, & \text{т. е. при } n=3k, \\ 0 \text{ при } 2n=6k+2, & \text{т. е. при } n=3k+1, \\ -1 \text{ при } 2n=6k-2, & \text{т. е. при } n=3k-1. \end{cases}$$

и) Искомое выражение равно коэффициенту при x^n в многочлене

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \ldots + 2^n(1+x)^n.$$

Преобразуем этот многочлен, воспользовавшись формулой для суммы членов геометрической прогрессии:

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \ldots + 2^n(1+x)^n =$$
$$= (1+x)^{2n}\left[1 + \frac{2}{1+x} + \frac{2^2}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{2^n}{(1+x)^n}\right] =$$
$$= (1+x)^{2n}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} - 1}{\dfrac{2}{1+x} - 1} = (1+x)^{2n}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(1+x)^n} - (1+x)}{2-(1+x)} =$$
$$= [2^{n+1}(1+x)^n - (1+x)^{2n+1}]\frac{1}{1-x}.$$

Но (при $|x| < 1$)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Следовательно, искомая сумма равна коэффициенту при x^n в выражении

$$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+\ldots) - (1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+\ldots).$$

Если мы умножим произвольный многочлен относительно x на $1+x+x^2+\ldots$, то коэффициент при x^n в этом произведении будет, очевидно, равен сумме коэффициентов исходного многочлена при степенях x, не превосходящих n. Действительно, члены с x^n в произведении будут получаться при умножении членов многочлена с x^k, где $k \leqslant n$, соответственно на члены x^{n-k} суммы $1+x+x^2+\ldots$ Таким образом, произведение $2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+\ldots)$ после раскрытия скобок будет содержать член с x^n с коэффициентом, равным сумме всех коэффициентов многочлена $2^{n+1}(1+x)^n$, т. е. с коэффициентом, равным $2^{n+1}2^n=2^{2n+1}$ (ср. задачу а)). Коэффициент же при x^n в произведении $(1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+\ldots)$ будет равен сумме коэффициентов многочлена $(1+x)^{2n+1}$, стоящих при $x^0=1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$, т. е. сумме первой половины коэффициентов многочлена $(1+x)^{2n+1}$. Но так как $C_{2n}^k=C_{2n}^{2n-k}$, то эта сумма равна точно половине суммы всех коэффициентов $(1+x)^{2n+1}$, т. е. равна $\frac{1}{2}2^{2n+1}=2^{2n}$. Отсюда вытекает, что коэффициент при x^n в выражении

$$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+\ldots)-(1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+\ldots)$$

равен $2^{2n+1}-2^{2n}=2^{2n}$.

к) Искомое выражение равно коэффициенту при x^n в следующем произведении:

$$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)\times$$
$$\times(C_n^n+C_n^{n-1}x+C_n^{n-2}x^2+\ldots+C_n^0x^n).$$

Но $C_n^{n-k}=C_n^k$ и, следовательно,

$$C_n^n+C_n^{n-1}x+C_n^{n-2}x^2+\ldots+C_n^0x^n=$$
$$=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n=(1+x)^n.$$

Таким образом, нам надо только найти коэффициент при x^n в произведении

$$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}.$$

Этот коэффициент, очевидно, равен C_{2n}^n.

л) Здесь надо определить коэффициент при x^n в произведении

$$(C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\ldots+(-1)^nC_n^nx^n)\times$$
$$\times(C_n^n+C_n^{n-1}x+C_n^{n-2}x^2+\ldots+C_n^0x^n),$$

равном

$$(1-x)^n(1+x)^n=(1-x^2)^n.$$

Этот коэффициент, очевидно, при $n=2m$ (четном) равен $(-1)^m C_{2m}^m$, а при $n=2m+1$ (нечетном) равен нулю.

м) Из тождества

$$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$$

немедленно следует, что это выражение равно C_{n+m}^k (ср. с решениями задач к) и л)).

56. а), б) Согласно решению задач 55а) и б)

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n=(1+1)^n=2^n,$$
$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n=(1-1)^n=0.$$

Складывая эти два равенства и разделив сумму на 2, получим:

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=\frac{2^n+0}{2}=2^{n-1},$$

что дает решение задачи а).

Вычитая второе равенство из первого и разделив разность на 2, будем иметь:

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=\frac{2^n-0}{2}=2^{n-1},$$

т. е. решение задачи б).

в), г), д), е). Выпишем разложения по теореме о биноме Ньютона биномов $(1+1)^n$, $(1-1)^n$, $(1+i)^n$ и $(1-i)^n$:

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n,$$
$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n,$$
$$(1+i)^n=C_n^0+iC_n^1+i^2C_n^2+i^3C_n^3+\ldots+i^nC_n^n,$$
$$(1-i)^n=C_n^0-iC_n^1+i^2C_n^2-i^3C_n^3+\ldots+(-1)^ni^nC_n^n.$$

Отметим теперь, что при k, дающем при делении на 4 остаток 1,

$$1+(-1)^k+i^k+(-1)^ki^k=1-1+i-i=0;$$

при k, дающем при делении на 4 остаток 2,

$$1+(-1)^k+i^k+(-1)^ki^k=1+1-1-1=0;$$

при k, дающем при делении на 4 остаток 3,

$$1+(-1)^k+i^k+(-1)^k i^k=1-1-i+i=0,$$

а при k, делящемся на 4 без остатка,

$$1+(-1)^k+i^k+(-1)^k i^k=1+1+1+1=4.$$

Соответственно этому, если мы сложим четыре выписанных выше равенства, то получим:

$$2^n+(1+i)^n+(1-i)^n=4\{C_n^0+C_n^4+C_n^8+C_n^{12}+\dots\},$$

т. е.

$$C_n^0+C_n^4+C_n^8+C_n^{12}+\dots=\frac{2^n+(1+i)^n+(1-i)^n}{4}.$$

Тем самым задача в) решена; мы, однако, еще упростим полученный ответ, преобразовав правую часть последней формулы.

Воспользуемся тригонометрической формой комплексных чисел:

$$1+i=\sqrt{2}\ (\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ),$$
$$1-i=\sqrt{2}\,[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]=$$
$$=\sqrt{2}\ (\cos 45^\circ-i\sin 45^\circ).$$

В силу формулы Муавра[1]) отсюда следует, что

$$(1+i)^n=\sqrt{2^n}\ (\cos n\,45^\circ+i\sin n\,45^\circ),$$
$$(1-i)^n=\sqrt{2^n}\ (\cos n\,45^\circ-i\sin n\,45^\circ).$$

Таким образом,

$$2^n+(1+i)^n+(1-i)^n=2^n+2\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cos n\cdot 45^\circ,$$

[1]) Так называется формула $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$. Для ее доказательства надо лишь n раз применить равенство

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta),$$

непосредственно вытекающее из правила умножения комплексных чисел.

т. е.

$$C_n^0+C_n^4+C_n^8+C_n^{12}+\ldots=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\cos n\,45^\circ=$$

$$=\begin{cases} 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k,\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k\pm 1,\\ 2^{n-2} & \text{при } n=8k\pm 2,\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k\pm 3,\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k+4.\end{cases}$$

Это и есть окончательный ответ задачи в).

Для решения задачи г) рассмотрим сумму

$$(1+1)^n-(1-1)^n-i(1+i)^n+i(1-i)^n,$$

где все скобки раскрываются по теореме о биноме Ньютона. Нетрудно проверить, что $1-(-1)^k-i\cdot i^k+i(-1)^k i^k=0$ при k, дающем при делении на 4 остаток 0, 2 или 3, и $1-(-1)^k-i\cdot i^k+i(-1)^k i^k=1+1+1+1=4$ при k, дающем при делении на 4 остаток 1, поэтому

$$2^n-i(1+i)^n+i(1-i)^n=4\{C_n^1+C_n^5+C_n^9+C_n^{13}+\ldots\}.$$

Воспользовавшись опять тригонометрической формой чисел $1+i$ и $1-i$, без труда получим:

$$C_n^1+C_n^5+C_n^9+C_n^{13}+\ldots=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}\sin n\,45^\circ=$$

$$=\begin{cases} 2^{n-2} & \text{при } n=8k \text{ или } n=8k+4,\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k+1 \text{ или } n=8k+3,\\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k+2,\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k-1 \text{ или } n=8k-3,\\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k-2.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь сумму

$$(1+1)^n+(1-1)^n-(1+i)^n-(1-i)^n;$$

аналогично предыдущему легко показать, что эта сумма равна

$$2^n-(1+i)^n-(1-i)^n=4\{C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+C_n^{14}+\ldots\}.$$

Отсюда

$$C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+C_n^{14}+\ldots=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos n\,45^\circ=$$

$$=\begin{cases} 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k, \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k\pm1, \\ 2^{n-2} & \text{при } n=8k\pm2, \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k\pm3, \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k+4. \end{cases}$$

Наконец, рассмотрим сумму

$$(1+1)^n+(1-1)^n+i(1+i)^n-i(1-i)^n.$$

Эта сумма будет равна

$$2^n+i(1+i)^n-i(1-i)^n=4\{C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+C_n^{15}+\ldots\},$$

откуда вытекает, что

$$C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+C_n^{15}+\ldots=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\sin n\,45^\circ=$$

$$=\begin{cases} 2^{n-2} & \text{при } n=8k \text{ или } n=8k+4, \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k+1 \text{ или } n=8k+3, \\ 2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k+2, \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}} & \text{при } n=8k-1 \text{ или } n=8k-3, \\ 2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}} & \text{при } n=8k-2. \end{cases}$$

Тем самым задачи в), г), д) и е) полностью решены.

Примечание. Ясно, что ответ задач д), е) можно было бы немедленно получить и из результатов предшествующих задач а) — г).

ж), з), и). Эти задачи решаются аналогично четырем предшествующим; только вместо чисел $1, -1, i$ и $-i$, являющихся четырьмя значениями $\sqrt[4]{1}$ (т. е. четырьмя корнями уравнения $x^4-1=0$), здесь привлекаются три значения $\sqrt[3]{1}$ (три корня уравнения $x^3-1=0$), равные соответственно

$$1,\ \varepsilon_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\ \text{и}\ \varepsilon_2\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, то числа ε_1 и ε_2, очевидно, являются двумя корнями квадратного уравнения $x^2+x+1=0$; отметим еще, что

$$\varepsilon_1^2=\varepsilon_2,\ \varepsilon_2^2=\varepsilon_1,\ \varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=1,$$
$$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^2=1+\varepsilon_2+\varepsilon_2^2=0.$$

Согласно теореме о биноме Ньютона имеем:

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n,$$
$$(1+\varepsilon_1)^n=C_n^0+\varepsilon_1C_n^1+\varepsilon_1^2C_n^2+\varepsilon_1^3C_n^3+\ldots+\varepsilon_1^nC_n^n,$$
$$(1+\varepsilon_2)^n=C_n^0+\varepsilon_2C_n^1+\varepsilon_2^2C_n^2+\varepsilon_2^3C_n^3+\ldots+\varepsilon_2^nC_n^n.$$

В силу выписанных выше свойств чисел ε_1 и ε_2 сумма $1+\varepsilon_1^k+\varepsilon_2^k$ равна нулю при k, не делящемся на 3, и равна $1+1+1=3$ при k, делящемся на 3. Следовательно, сложив три выписанные равенства, мы получим:

$$2^n+(1+\varepsilon_1)^n+(1+\varepsilon_2)^n=3\{C_n^0+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\ldots\}.$$

Перейдем теперь к тригонометрической форме комплексных чисел:

$$\varepsilon_1=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ,\ \varepsilon_2=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ,$$
$$1+\varepsilon_1=-\varepsilon_2=-\cos 240^\circ-i\sin 240^\circ=$$
$$=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ,$$
$$1+\varepsilon_2=-\varepsilon_1=-\cos 120^\circ-i\sin 120^\circ=\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ.$$

Применяя формулу Муавра, получим:

$$(1+\varepsilon_1)^n=\cos n\,60^\circ+i\sin n\,60^\circ,$$
$$(1+\varepsilon_2)^n=\cos n\,60^\circ-i\sin n\,60^\circ,$$

откуда

$$2^n+(1+\varepsilon_1)^n+(1+\varepsilon_2)^n=2^n+2\cos n\,60^\circ.$$

Итак,

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\ldots=\frac{1}{3}(2^n+2\cos n\,60^\circ)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n+2) & \text{при } n=6k,\\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{при } n=6k\pm1,\\ \frac{1}{3}(2^n-1) & \text{при } n=6k\pm2,\\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{при } n=6k+3.\end{cases}$$

Это и есть решение задачи ж).

Рассмотрим теперь сумму

$$(1+1)^n+\varepsilon_2(1+\varepsilon_1)^n+\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)^n.$$

Нетрудно видеть, что эта сумма равна

$$2^n+\varepsilon_2(1+\varepsilon_1)^n+\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)^n=$$
$$=3\{C_n^1+C_n^4+C_n^7+C_n^{10}+\ldots\}.$$

Воспользовавшись опять тригонометрической формой комплексных чисел, будем иметь:

$$\varepsilon_2(1+\varepsilon_1)^n=(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)(\cos n\,60^\circ+i\sin n\,60^\circ)=$$
$$=\cos(n+4)\,60^\circ+i\sin(n+4)\,60^\circ,$$
$$\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)^n=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)(\cos n\,60^\circ-i\sin n\,60^\circ)=$$
$$=(\cos 240^\circ-i\sin 240^\circ)(\cos n\,60^\circ-i\sin n\,60^\circ)=$$
$$=\cos(n+4)\,60^\circ-i\sin(n+4)\,60^\circ.$$

Отсюда

$$C_n^1+C_n^4+C_n^7+C_n^{10}+\ldots=\frac{1}{3}[2^n+2\cos(n+4)\,60^\circ]=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n-1) & \text{при } n=6k \text{ или } n=6k-2,\\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{при } n=6k+1 \text{ или } n=6k+3,\\ \frac{1}{3}(2^n+2) & \text{при } n=6k+2,\\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{при } n=6k-1.\end{cases}$$

Точно так же, если мы рассмотрим сумму

$$(1+1)^n+\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)^n+\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)^n,$$

равную

$$2^n+\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)^n+\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)^n=\\ =3\{C_n^2+C_n^5+C_n^8+C_n^{11}+\ldots\},$$

то легко найдем, что

$$C_n^2+C_n^5+C_n^8+C_n^{11}+\ldots=\frac{1}{3}[2^n+2\cos(n+2)60^\circ]=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^n-1) \text{ при } n=6k \text{ или } n=6k+2,\\ \frac{1}{3}(2^n-2) \text{ при } n=6k+1,\\ \frac{1}{3}(2^n+1) \text{ при } n=6k+3 \text{ или } n=6k-1,\\ \frac{1}{3}(2^n+2) \text{ при } n=6k-2.\end{cases}$$

Этот же результат следует из ответов задач а), ж) и з).

57. Теорема доказывается методом математической индукции совершенно аналогично обычному доказательству формулы бинома Ньютона. Легко проверить, что при n, равном 1 и 2, факториальная биномиальная теорема верна[1]). Предположим теперь, что эта теорема верна для показателя n, т. е. что

$$(a+b)^{n|h}=a^{n|h}+C_n^1a^{n-1|h}b+C_n^2a^{n-2|h}b^{2|h}+\ldots+b^{n|h},$$

и покажем, что в таком случае теорема будет выполняться и для показателя $n+1$. Действительно, умножим обе части равенства, выражающего нашу теорему для показателя n, на $a+b+nh$. В левой части при этом, очевидно, получится $(a+b)^{n+1|h}$. В правой части у нас ранее стояла сумма, i-м членом которой являлся член $C_n^ia^{n-i|h}b^{i|h}$; после умножения

[1]) Отметим, что мы указываем здесь также и показатель $n=2$ лишь в качестве иллюстрации нашей теоремы. Для возможности применения метода математической индукции вполне достаточно убедиться, что теорема верна при $n=1$, и затем сразу рассмотреть переход от n к $n+1$.

этого члена на $a+b-nh$ мы получим:

$$C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}(a+b-nh)=$$
$$=C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}[(a-(n-i)h)+(b-ih)]=$$
$$=C_n^i a^{n-i|h}(a-(n-i)h)\,b^{i|h}+C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}(b-ih)=$$
$$=C_n^i a^{n-i+1|h} b^{i|h}+C_n^i a^{n-i|h} b^{i+1|h}.$$

В силу известного соотношения $C_n^{i-1}+C_n^i=C_{n+1}^i$, отсюда точно так же, как и в случае обыкновенной теоремы о биноме Ньютона, следует, что после умножения правой части на $(a+b-nh)$ мы получим сумму членов вида $C_{n+1}^i a^{n+1-i|h} b^{i|h}$. Тем самым доказано, что если только факториальная биномиальная теорема верна для показателя n, то она верна и для показателя $n+1$. А так как при $n=1$ она верна, то отсюда вытекает ее справедливость для любого n.

58. а) Воспользовавшись тем, что

$$C_n^i=\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}=\frac{n^{i|1}}{i!},$$

мы получим:

$$C_n^i C_m^{k-i}=$$
$$=\frac{n^{i|1}}{i!}\,\frac{m^{k-i|1}}{(k-i)!}=\frac{1}{k!}\,\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\,n^{i|1}m^{k-i|1}=$$
$$=\frac{1}{k!}\,C_k^i n^{i|1}m^{k-i|1}.$$

Следовательно, искомая сумма равна

$$\frac{1}{k!}\{C_k^0 m^{k|1}+C_k^1 m^{k-1|1}n+C_k^2 m^{k-2|1}n^{2|1}+\dots+C_k^k n^{k|1}\}=$$
$$=\frac{(m+n)^{k|1}}{k!}=C_{m+n}^k.$$

Раньше это соотношение было получено нами другим путем (см. решение задачи 55м)).

б) i-й член суммы можно преобразовать следующим образом:

$$(-1)^i C_{m+i}^i C_n^{k-i}=(-1)^i\frac{(m+i)^{i|1}}{i!}\,\frac{n^{k-i|1}}{(k-i)!}=$$
$$=\frac{1}{k!}\,C_k^i(-1)^i(m+i)^{i|1}n^{k-i|1}.$$

Но, как легко видеть,

$$(-1)^i(m+i)^{i|1}=(-1)^i(m+i)(m+i-1)\dots(m+1)=$$
$$=(-m-1)(-m-2)\dots(-m-i+1)(-m-i)=(-m-1)^{i|1}.$$

Следовательно,

$$(-1)^i C^i_{m+i} C^{k-i}_n = \frac{1}{k!} C^i_k (-m-1)^{i|1} n^{k-i|1}.$$

Таким образом, наша сумма равна

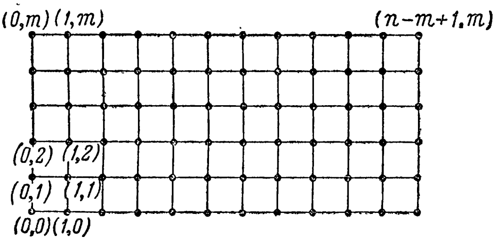
$$\frac{1}{k!}\{C^0_k n^{k|1} + C^1_k n^{k-1|1}(-m-1) + \\ + C^2_k n^{k-2|1}(-m-1)^{2|1} + \ldots + C^k_k (-m-1)^{k|1}\} = \\ = \frac{(n-m-1)^{k|1}}{k!} = \frac{(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-m-k)}{k!}.$$

При $n-m-1 \geqslant k$ это выражение, очевидно, равно C^k_{n-m-1}.

Отметим еще, что, воспользовавшись равенством $C^i_{m+i} = C^m_{m+i}$, мы можем переписать полученное соотношение (при $n-m-1 \geqslant k$) в виде

$$C^m_m C^k_n - C^m_{m+1} C^{k-1}_n + C^m_{m+2} C^{k-2}_n - \ldots + (-1)^k C^m_{m+k} C^0_n = C^k_{n-m-1}.$$

59. а) Рассмотрим кратчайшие пути, ведущие от перекрестка (0, 0) к перекрестку $(n-m+1, m)$ (черт. 68). Число



Черт. 68.

таких путей, очевидно, равно C^m_{n+1}. Разобьем теперь эти пути на следующие не пересекающиеся между собой классы. Во-первых, можно с самого начала пойти по «горизонтальной» улице — таких путей будет столько же, сколько есть путей, соединяющих перекресток (1, 0) с перекрестком $(n-m+1, m)$, т. е. C^m_n. Во-вторых, можно сначала пройти один квартал по «вертикальной» улице и лишь в точке (0, 1) повернуть направо; число таких путей равно числу путей, соединяющих перекресток (1, 1) с перекрестком $(n-m+1, m)$, т. е. C^{m-1}_{n-1}. В-третьих, можно сначала пройти из точки (0, 0) в точку

(0, 2) и там повернуть направо — число таких путей, очевидно, равно числу путей, соединяющих точки (1, 2) и $(n-m+1, m)$, т. е. C_{n-2}^{m-2}. В-четвертых, можно сначала пройти три квартала по нулевой вертикальной улице и там повернуть направо (всего C_{n-3}^{m-3} путей), в-пятых, пройти в точку (0, 4) и там повернуть направо (всего C_{n-4}^{m-4} путей) и т. д. Последняя возможность — это с самого начала пройти все m кварталов «вверх» и лишь там повернуть направо ($C_{n-m}^{0}=1$ путь). Так как общее число путей равно C_{n+1}^{m} и каждый путь принадлежит точно к одному из рассмотренных нами классов, то отсюда сразу следует соотношение, которое нам надо доказать.

Отметим еще, что полученное соотношение легко может быть выведено также и из результата задачи 55ж). Действительно, так как $C_n^m=C_n^{n-m}$, то это соотношение может быть переписано в виде

$$C_n^{n-m}+C_{n-1}^{n-m}+C_{n-2}^{n-m}+\ldots+C_{n-m}^{n-m}=C_{n+1}^{m}.$$

Полагая здесь $n=m+k$ и выписывая слагаемые стоящей слева суммы в обратном порядке, мы получим:

$$C_k^k+C_{k+1}^k+C_{k+2}^k+\ldots+C_{k+m}^k=C_{m+k+1}^m=C_{m+k+1}^{k+1}.$$

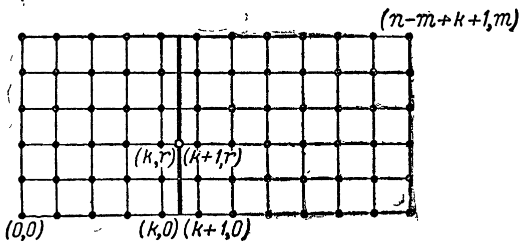
Но это есть частный случай результата задачи 55ж).

Нетрудно также и непосредственно вывести при помощи теоремы о биноме Ньютона требуемое соотношение: эта задача сводится к определению коэффициента при x^m в многочлене

$$(1+x)^n+x(1+x)^{n-1}+x^2(1+x)^{n-2}+\ldots+x^m(1+x)^{n-m},$$

являющемся суммой $m+1$ членов геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{x}{(1+x)}$.

б) Рассмотрим все кратчайшие пути, ведущие из точки (0, 0) в точку $(n-m+k+1, m)$. Число таких путей, очевидно, равно C_{n+k+1}^{m}. Разобьем эти пути на непересекающиеся классы. Для этого проведем на «карте города» вертикальную черту, проходящую между k-й и $(k+1)$-й вертикальными линиями (черт. 69). Каждый из наших путей пересечет эту линию в единственной точке. Число путей, пересекающих проведенную линию в точке, расположенной на r-й горизонтальной улице, очевидно, равно произведению числа путей, соединяющих точку (0, 0) с точкой (k, r), на число путей, соединяющих точку $(k+1, r)$ с точкой $(n-m+k+1, m)$. Таким образом, это число равно $C_{k+r}^{r}C_{n-r}^{m-r}$. Полагая в последнем выражении $r=0, 1, 2, \ldots, m$ и суммируя все полученные выраже-



Черт. 69.

ния, мы убедимся в том, что сумма

$$C_{k}^{0}C_{n}^{m}+C_{k+1}^{1}C_{n-1}^{m-1}+C_{k+2}^{2}C_{n-2}^{m-2}+\ldots+C_{k+m}^{m}C_{n-m}^{0}$$

равна C_{n+k+1}^{m}, что и требовалось доказать.

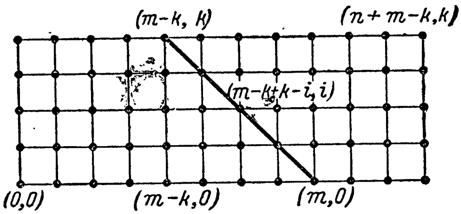
В частном случае при $k=0$ мы получаем:

$$C_{n}^{m}+C_{n-1}^{m-1}+\ldots+C_{n-m}^{0}=C_{n+1}^{m},$$

т. е. результат задачи а). При $k=1$ получается следующее простое соотношение:

$$C_{n}^{m}+2C_{n-1}^{m-1}+\ldots+(m+1)C_{n-m}^{0}=C_{n+2}^{m}.$$

в) Рассмотрим опять нашу геометрическую схему. $C_{m}^{k}C_{n}^{0}$ есть произведение числа кратчайших путей, ведущих из точки



Черт. 70.

(0, 0) в точку $(m-k, k)$, на число кратчайших путей, ведущих из точки $(m-k, k)$ в точку $(n+m-k, k)$, т. е. это есть число кратчайших путей, ведущих из точки (0, 0) в точку $(n+m-k, k)$ и проходящих через точку $(m-k, k)$ (черт. 70). Точно так же $C_{m}^{k-1}C_{n}^{1}$ есть число кратчайших путей, ведущих из точки (0, 0) в точку $(n+m-k, k)$ и проходящих через точку $(m-k+1, \quad k-1)$; $C_m^{k-2}C_n^2$ — число кратчайших путей, ведущих из точки (0, 0) в точку $(n+m-k, k)$ и проходящих через точку $(m-k+2, k-2)$, и т. д.; $C_m^0C_n^k$ — число кратчайших путей, ведущих из точки (0, 0) в точку $(n+m-k, k)$ и проходящих через точку $(m-k+k, 0) = (m, 0)$. Но так как каждый из кратчайших путей, ведущих из точки (0, 0) в точку $(n+m-k, k)$, обязательно пересекает прямую, проведенную на черт. 70, в одной единственной точке, то сумма, фигурирующая в задаче 59в), равна общему числу кратчайших путей, соединяющих точки (0, 0) и $(n+m-k, k)$, т. е. равна C_{n+m}^k.

Другие применения использованного здесь метода см. ниже, в решениях задач 81а) — в).

60. Будем решать сразу более общую задачу б). Выделим какой-то один путь, принадлежащий нашей сети дорог, начинающийся в точке A и кончающийся в одном из перекрестков тысячного ряда перекрестков, и выясним, сколько людей пройдет по этому пути. Рассматриваемый путь состоит из 1000 отдельных «кварталов», причем на каждом перекрестке группа людей, идущая по этому пути, делится пополам: половина продолжает идти по выделенному нами пути, а половина сворачивает с него. Ясно, что из $2^{1000}:2=2^{999}$ человек, начинающих движение по выделенному пути, до конца дойдет лишь $2^0=1$ человек. Итак, по каждому пути, принадлежащему нашей сети дорог, пройдет ровно один человек из 2^{1000}. Отсюда следует, что общее число путей равно 2^{1000} (что нетрудно проверить и непосредственным подсчетом). Таким образом, задача сводится к определению того, сколько различных путей ведет в каждый из перекрестков тысячного ряда. Но сеть дорог, изображенная на черт. 5 (см. стр. 28), совершенно одинакова с сетью дорог, изображенной на черт. 4; только на черт. 4 «улицы» проходят в горизонтальном и в вертикальном направлениях, а на черт. 5 — в направлениях l и m. Для того чтобы попасть в k-й перекресток (считая слева направо, начиная с нулевого) тысячного ряда, человек должен пройти всего 1000 кварталов и из них k кварталов по направлению m (а остальные — по направлению l). Следовательно, общее число путей, ведущих в k-й перекресток, равно C_{1000}^k. Итак, в k-й перекресток тысячного ряда, где $0 \leqslant k \leqslant 1000$, придет $C_{1000}^k = \frac{1000!}{k!(1000-k)!}$ человек.

Из этого результата, в частности, вытекает, что в три крайних перекрестка B_1, B_2 и B_3 придет соответственно $C_{1000}^0 = 1$, $C_{1000}^1 = 1000$ и $C_{1000}^2 = \frac{1000 \cdot 999}{2} = 499\,500$ человек. Этот же результат можно было бы получить и прямым подсчетом.

61. Все три собранные в этой задаче соотношения легко выводятся из того факта, что числа B_n^k являются коэффициентами при x^k в разложении выражения $(1+x+x^2)^n$:

$$(1+x+x^2)^n = B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n}. \qquad (*)$$

Докажем прежде всего эту формулу.

При $n=1$

$$(1+x+x^2)^1 = 1 + x + x^2,$$

т. е. наша формула действительно имеет место (ибо $B_1^0 = B_1^1 = B_1^2 = 1$). Предположим теперь, что эта формула уже доказана для показателя n, и покажем, что в таком случае она будет верна также и для показателя $n+1$. С этой целью умножим обе части формулы (*) на $(1+x+x^2)$. В левой части мы, очевидно, получим $(1+x+x^2)^{n+1}$, а в правой будем иметь:

$$\begin{aligned}(B_n^0 &+ B_n^1 x + B_n^2 x^2 + B_n^3 x^3 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n})(1+x+x^2) = \\ &= B_n^0 + (B_n^0 + B_n^1)\,x + (B_n^0 + B_n^1 + B_n^2)\,x^2 + \\ &+ (B_n^1 + B_n^2 + B_n^3)\,x^3 + \ldots + (B_n^{2n-1} + B_n^{2n})\,x^{2n+1} + B_n^{2n} x^{2n+2}.\end{aligned}$$

Но в силу правила составления чисел B_{n+1}^k последнее выражение равно

$$B_{n+1}^0 + B_{n+1}^1 x + B_{n+1}^2 x^2 + B_{n+1}^3 x^3 + \ldots + B_{n+1}^{2n+2} x^{2n+2}.$$

Таким образом, действительно, если наша формула верна для показателя n, то она верна и для показателя $n+1$. А так как при $n=1$ эта формула верна, то, следовательно, она верна и для любого n.

Отметим еще, что из симметричности нашего числового треугольника следует, что $B_n^k = B_n^{2n-k}$ при любом n.

Теперь нужные нам соотношения могут быть сразу доказаны вполне аналогично доказательству соотношений задач 55а), б) и к).

а) $B_n^0 + B_n^1 + B_n^2 + \ldots + B_n^{2n} = (1+1+1)^n = 3^n$.
б) $B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \ldots + B_n^{2n} = (1-1+1)^n = 1$.

в) Искомая сумма равна коэффициенту при x^{2n} в многочлене

$$(B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n}) \times$$
$$\times (B_n^{2n} + B_n^{2n-1} x + B_n^{2n-2} x^2 + \ldots + B_n^0 x^{2n}).$$

Но так как $B_n^{2n-k} = B_n^k$, то этот многочлен равен

$$(B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n})^2 = (1 + x + x^2)^{2n},$$

откуда сразу следует требуемое соотношение.

62. Так как первый встреченный нами велосипедист может с одинаковой вероятностью оказаться каждым из 10 000 велосипедистов города, то общее число равновероятных исходов испытания здесь равно 10 000. Остается подсчитать число «благоприятных исходов», т. е. число номеров, не содержащих цифры 8. Это число можно определить при помощи следующего приема. Будем условно приписывать всем номерам, содержащим меньше четырех цифр, несколько нулей впереди с тем, чтобы они стали четырехзначными (так, например, вместо номера 26 мы будем писать 0026), и заменим номер 10 000 на номер 0000. При этом число номеров, не содержащих цифры 8, очевидно, останется прежним. Но теперь номера 0000, 0001, 0002, ..., 9999 представляют собой всевозможные четырехзначные числа, где, в частности, на первом месте может стоять нуль или несколько нулей. Если такое число не содержит цифры 8, то на первом месте у него может стоять любая из девяти цифр 0,1, 2, ..., 7, 9; точно так же и на втором, третьем и четвертом месте может стоять любая из этих девяти цифр. Комбинируя девять возможных значений первой цифры с девятью значениями второй, третьей и четвертой цифр, мы получим, очевидно, всего 9^4 четырехзначных чисел, не содержащих цифры 8 (ср. с решением задачи 9).

Таким образом, из 10 000 равновероятных исходов (встреча любого из велосипедистов) благоприятными для нас будут 9^4 исходов, откуда следует, что искомая вероятность равна $\frac{9^4}{10\,000}=(0,9)^4=0,6561$.

63. а) Рассматриваемый опыт заключается в том, что мы вытаскиваем наудачу последовательно какие-то четыре карточки из группы в шесть карточек. При этом первое вытаскивание может дать шесть различных исходов (первой может быть вытащена любая из шести карточек), второе — пять различных исходов (второй может быть вытащена любая из пяти карточек, оставшихся после первого извлечения), третье — четыре различных исхода, четвертое — три различных исхода. Комбинируя шесть возможных результатов первого вытаскивания с пятью возможными исходами второго вытаскивания, получим $6\cdot 5=30$ возможных исходов последовательности двух вытаскиваний; точно так же для последовательности трех вытаскиваний получается $4\cdot 30=120$ возможных исходов и для последовательности четырех вытаскиваний $3\cdot 120=360$ возможных исходов. Итак, наш опыт может привести к 360 различным результатам; все эти результаты являются равновероятными.

Благоприятным для нас будет единственный исход, а именно тот, когда в первый раз будет вытащена карточка с буквой M, во второй раз — карточка с буквой O, в третий раз — карточка с буквой P и, наконец, в четвертый раз — карточка с буквой E. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{360}\approx 0,003$.

б) Здесь опять рассматриваемый опыт состоит в последовательном вытаскивании четырех карточек из группы в шесть одинаковых карточек и, следовательно, может иметь 360 равновероятных исходов. Однако подсчет числа благоприятных исходов здесь сложнее, чем в случае задачи а), из-за наличия в слове «папаха» одинаковых букв. Благоприятными здесь будут все те исходы, при которых первой будет извлечена любая из двух имеющихся карточек с буквой п, второй —

любая из трех карточек с буквой а, третьей — вторая карточка с буквой п (напомним, что одна такая карточка уже была извлечена первой), четвертой — любая из двух, оставшихся после второго вытаскивания карточек с буквой а. Комбинируя два возможных исхода первого вытаскивания с тремя возможными исходами второго, одним возможным исходом третьего и двумя возможными исходами четвертого, мы получим всего $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ различных благоприятных исходов. Следовательно, здесь искомая вероятность равна $\frac{12}{360} = \frac{1}{30} \approx 0,033$.

64. Пусть последовательно вытянутыми цифрами будут x, y, z, t, u; полученное число N имеет вид $\overline{xyztu}$ (черта сверху означает, что x, y, z, t, u — цифры числа N). Совершенно аналогично решению предыдущей задачи заключаем, что общее число различных исходов опыта, состоящего в вытаскивании наудачу пяти из имеющихся 10 цифр, равно $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$. Выясним число благоприятных исходов.

Для того чтобы число N делилось на $396 = 4 \cdot 9 \cdot 11$, надо, чтобы оно удовлетворяло признакам делимости на 4, на 9 и на 11, т. е. чтобы двузначное число $\overline{tu}$ делилось на 4; чтобы сумма $x+y+z+t+u$ делилась на 9 и чтобы разность $(x+z+u)-(y+t)$ делилась на 11 — последний признак делимости вытекает из того, что разность

$$\begin{aligned} &\overline{xyztu} - [(x+z+u)-(y+t)] = \\ &= 10\,000x + 1000y + 100z + 10t + u - (x+z+u) + (y+t) = \\ &= 9999x + 1001y + 99z + 11t = 11\,(909x + 91y + 9z + t) \end{aligned}$$

всегда делится на 11 (см., например, решение задачи 36 из книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., Гостехиздат, 1954, «Библиотека математического кружка», вып. 1). Так как $x+y+z+t+u \geqslant 0+1+2+3+4 = 10$ и $x+y+z+t+u \leqslant 9+8+7+6+5 = 35$, то сумма $x+y+z+t+u$ может делиться на 9 только в том случае, если она равна 18 или 27. Рассмотрим оба эти случая в отдельности.

1°. Пусть $x+y+z+t+u = 18$. Здесь разность $(x+z+u)-(y+t)$ будет четной и она будет делиться на 11 **только**, если $x+z+u = y+t = 9$. Таким образом, парой цифр (y, t) в этом случае может быть только или пара (0, 9), или пара (1, 8), или (2, 7), или (3, 6), или (4, 5).

Если (y, t) это (0, 9), то равенство $x+z+u=9$ возможно только в следующих трех случаях:

$$x+z+u=1+2+6;\quad x+z+u=1+3+5;$$
$$x+z+u=2+3+4.$$

Второй из этих случаев нам не подходит (цифра u обязательно должна быть четной, так как $\overline{xyztu}$ делится на 4), а первый и третий дают по четыре числа N, делящихся на 396 (ибо если выбрать цифры x, z и u так, чтобы цифра u была четна, то всегда точно одно из двух чисел $\overline{x9z0u}$ или $\overline{x0z9u}$ делится на 4 — эти два числа оба четны и дают при делении на 4 разные остатки, так как разность $\overline{x9z0u}-\overline{x0z9u}=8910$ не делится на 4). Итого мы получаем $4+4=8$ благоприятных исходов.

Если (y, t) это (1, 8), то возможны следующие случаи:

$$x+z+u=0+2+7;\quad x+z+u=0+3+6;$$
$$x+z+u=0+4+5;\quad x+z+u=2+3+4,$$

которым аналогично предыдущему отвечают еще $4+4+4+$ $+4=16$ благоприятных исходов.

Если (y, t) это (2, 7), то возможны следующие случаи:

$$x+z+u=0+1+8;\quad x+z+u=0+3+6;$$
$$x+z+u=0+4+5;\quad x+z+u=1+3+5,$$

которым отвечают еще $4+4+4+0=12$ благоприятных исходов (случай $x+z+u=1+3+5$ таких исходов вовсе не дает).

Если (y, t) это (3, 6), то возможны следующие случаи:

$$x+z+u=0+1+8;\quad x+z+u=0+2+7;$$
$$x+z+u=0+4+5,$$

которым отвечают еще $4+4+4=12$ благоприятных исходов.

Наконец, если (y, t) это (4, 5), то возможны следующие случаи:

$$x+z+u=0+1+8;\quad x+z+u=0+2+7;$$
$$x+z+u=0+3+6;\quad x+z+u=1+2+6,$$

которым отвечает еще $4+4+4+4=16$ благоприятных исходов.

Таким образом, имеется всего $8+16+12+12+16=64$, делящихся на 396 чисел $N=\overline{xyztu}$, таких, что $x+y+z+$ $+t+u=18$.

2°. Пусть $x+y+z+t+u=27$. В этом случае разность $(x+z+u)-(y+t)$ нечетна и может делиться на 11 только в том случае, если $x+z+u=19$, $y+t=8$. Таким образом, парой цифр (y, t) здесь может быть или пара $(0, 8)$, или $(1, 7)$, или $(2, 6)$, или $(3, 5)$.

Если цифры (y, t) это $(0, 8)$, то сумма $x+z+u$ может равняться 19 только в следующих случаях:

$$x+z+u=9+7+3; \quad x+z+u=9+6+4;$$

первому из этих случаев не отвечает никакое число $N=\overline{xyztu}$, делящееся на 4, а второму — четыре таких числа (если $t=0$ или $t=8$, то для того, чтобы N делилось на 4, необходимо, чтобы u делилось на 4).

Если (y, t) это $(1, 7)$, то возможны случаи:

$$x+z+u=9+8+2; \quad x+z+u=9+6+4;$$
$$x+z+u=8+6+5;$$

этим случаям отвечают еще $4+4+4=12$ благоприятных исходов (если $t=1$ или $t=7$, то для того, чтобы число $N=\overline{xyztu}$ делилось на 4, необходимо, чтобы u было четной цифрой, не делящейся на 4).

Если (y, t) это $(2, 6)$, то возможны случаи:

$$x+z+u=9+7+3; \quad x+z+u=8+7+4;$$

этим случаям отвечают еще $0+8=8$ благоприятных исходов.

Наконец, если (y, t) это $(3, 5)$, то возможны случаи:

$$x+z+u=9+8+2; \quad x+z+u=9+6+4;$$
$$x+z+u=8+7+4;$$

этим случаям отвечают еще $4+4+0=8$ благоприятных исходов.

Итого, тем случаям, когда $x+y+z+t+u=27$, отвечают $4+12+8+8=32$ благоприятных исхода.

Отсюда следует, что искомая вероятность равна

$$\frac{64+32}{30\,240}=\frac{96}{30\,240}=\frac{1}{630}\approx 0{,}0015.$$

65. Рассматриваемый опыт состоит в том, что забытая цифра набирается наудачу; если при этом попадают не туда куда нужно, то наудачу набирается какая-то другая цифра. Таким образом, здесь возможны исходы двух различных типов: либо набирается два номера, либо только один (последнее будет в случае, если уже в первый раз номер был набран верно). При этом у нас нет никаких оснований считать равновероятными какой-либо исход первого типа и исход второго типа. Для того чтобы получить систему равновероятных исходов, здесь удобно считать условно, что во всех случаях набираются два номера, т. е. что даже в том случае, когда первый раз попадают куда нужно, вслед затем набирают наудачу какой-то другой номер и спрашивают, туда ли попали (конечно, фактически совершенно не необходимо действительно звонить второй раз).

Общее число возможных равновероятных исходов последовательности двух телефонных вызывов равно $10 \cdot 9 = 90$ (в первый раз можно набрать любую из 10 цифр, а во второй раз — любую из оставшихся 9 цифр). Благоприятными здесь, очевидно, будут девять исходов, при которых в первый раз оказывается набранной нужная цифра, а во второй раз—любая из девяти оставшихся цифр, и девять исходов, при которых в первый раз оказывается набранной какая-то из девяти неверных цифр, а во второй раз — верная цифра. Итак, общее число благоприятных исходов равно $9+9=18$. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{18}{90}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

66. а) Здесь опыт состоит в том, что мы опрашиваем данные 12 человек и узнаем, на какой месяц приходятся их дни рождения. При этом день рождения первого из этих людей может прийтись на любой из 12 месяцев — это будут 12 различных равновероятных исходов опроса первого человека. После этого день рождения второго человека может опять же прийтись на любой из 12 месяцев; комбинируя эти 12 возможностей с 12 исходами опроса первого человека, мы получим $12 \cdot 12 = 12^2$ равновероятных исходов опроса двух человек. Точно так же при опросе трех человек мы будем иметь 12^3 равновероятных исходов опроса и т. д.; при опросе 12 человек мы будем иметь 12^{12} равновероятных исходов опроса.

Подсчитаем теперь, сколько из этих исходов будет благоприятных, т. е. таких, при которых дни рождения приходятся все на разные месяцы. День рождения первого человека при этом, очевидно, может приходиться на любой месяц, но день рождения второго человека должен уже приходиться обязательно на один из 11 еще не занятых месяцев, день рождения третьего человека — на один из 10 оставшихся месяцев и т. д. вплоть до последнего человека, день рождения которого обязательно должен прийтись на тот единственный месяц, который еще не занят днями рождения остальных. Комбинируя здесь 12 возможностей для первого человека с 11 возможностями для второго, 10 — для третьего и т. д., мы получим всего $12 \cdot 11 \cdot 10 \ldots 1 = 12!$ благоприятных исходов. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{12!}{12^{12}} \approx 0{,}000054$.

б) Общее число равновероятных исходов здесь подсчитывается так же, как и в задаче а), — оно равно 12^6. Подсчитаем теперь число благоприятных исходов. Число исходов, при которых дни рождения всех 6 человек придутся на два определенных месяца (например, на январь и апрель), равно 2^6 — это число получается из тех же рассуждений, что и число 12^6 для общего числа исходов. Из этих 2^6 исходов мы должны откинуть два, при которых все 6 дней рождения приходятся или на первый или на второй из наших двух месяцев — эти два исхода нельзя считать благоприятными, так как здесь все 6 дней рождения приходятся не на два месяца, а на один. Итак, число благоприятных исходов, при которых все дни рождения приходятся на два определенных месяца, равно $2^6 - 2$. Так как 2 месяца из 12 можно выбрать $C_{12}^2 = 66$ различными способами, то общее число благоприятных исходов будет равно $66 \cdot (2^6 - 2) = 66 \cdot 62$. Отсюда следует, что искомая вероятность равна $\frac{66 \cdot 62}{12^6} \approx 0{,}00137$.

67. Первый пассажир может выбрать любой из трех вагонов. После этого второй пассажир может выбрать также один из трех вагонов, так что общее число способов размещения по вагонам двух пассажиров равно $3 \cdot 3 = 3^2$; аналогично число способов размещения девяти пассажиров по трем вагонам трамвая равно 3^9. Итак, общее число равновероятных исходов равно 3^9. Рассмотрим теперь, каково будет число благоприятных исходов для задач а), б) и в).

а) Трех пассажиров, севших в первый вагон, можно выбрать из имеющихся девяти пассажиров $C_9^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$ различными способами. Число способов размещения остальных шести пассажиров по двум оставшимся вагонам равно 2^6 (аналогично тому, как число способов размещения девяти пассажиров по трем вагонам равно 3^9). Комбинируя C_9^3 способов выбора трех пассажиров, севших в первый вагон, с 2^6 способами размещения остальных пассажиров, мы получим всего $C_9^3\cdot 2^6=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 2^6}{1\cdot 2\cdot 3}$ благоприятных исходов. Отсюда следует, что искомая вероятность равна

$$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^9}=\frac{1792}{6561}\approx 0{,}273.$$

б) Число способов выбора трех пассажиров, севших в первый вагон, равно числу сочетаний из 9 по 3, т. е. равно $C_9^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$ (см. решение задачи а)). Во второй вагон могут сесть любые три из оставшихся шести пассажиров; выбрать этих трех пассажиров из шести можно $C_6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}$ способами. Комбинируя C_9^3 способов выбора трех пассажиров, севших в первый вагон, с C_6^3 способами выбора трех пассажиров, севших во второй вагон, мы получим всего $C_9^3C_6^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}=\frac{9\,!}{(3\,!)^3}$ благоприятных исходов.

Итак, искомая вероятность равна

$$\frac{9\,!}{(3\,!)^3 3^9}=\frac{560}{6561}\approx 0{,}085.$$

в) Точно так же, как в задаче б), показывается, что число случаев, когда в первый вагон сядут два пассажира, а во второй — три, равно

$$C_9^2\,C_{9-2}^3=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{9!}{2!\,3!\,4!}.$$

Таково же число случаев, когда в первый вагон сядут два пассажира, а в третий три, или во второй сядут два пассажира, а в первый три, или во второй сядут два пассажира, а в третий три, или в третий вагон сядут два пассажира, а в первый три, или в третий вагон сядут два пассажира, а во второй три. Таким образом, общее число благоприятных исходов здесь равно $6\cdot C_9^2C_7^3=\frac{9!}{2\cdot 4!}$. Искомая вероятность равна $\frac{9!}{2\cdot 4!\cdot 3^9}=\frac{280}{729}\approx 0,384$. (Эта вероятность в $4^1/_2$ раза больше вероятности размещения задачи б).)

68. Рассматриваемый в этой задаче опыт состоит в том или ином разделении 20 команд на две группы. Общее число способов выбора 10 команд (одна группа) из 20 равно $C_{20}^{10}=\frac{20!}{(10!)^2}$; при этом выбор каких-то 10 команд и выбор оставшихся 10 команд приводят к одному и тому же разделению команд на две группы. Следовательно, общее число равновероятных исходов, т. е. разбиений всех команд на две группы по 10 команд в каждой, равно в этом случае $\frac{1}{2}C_{20}^{10}=$ $=\frac{20!}{2(10!)^2}$. Рассмотрим теперь, каково число благоприятных исходов в задачах а), б) и в).

а) Число исходов, при которых две данные команды A и B (то, что эти команды являются самыми сильными, разумеется, не имеет значения) попадут в разные группы, равно числу способов, при помощи которых можно из 18 команд, оставшихся, если исключить команды A и B, выбрать девять, попавших в одну группу с командой A. Число таких способов равно, очевидно, числу сочетаний из 18 по 9. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{C_{18}^9}{\frac{1}{2}C_{20}^{10}}=$$

$$=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}:\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{10}{19}.$$

Можно решить задачу а) и не подсчитывая общего числа всех исходов. Для этого достаточно сообразить, что если команда A находится в одной из двух групп, то команда B может занять или одно из 9 свободных мест в той же группе, или же одно из 10 свободных мест во второй группе (10 благоприятных и 9 неблагоприятных исходов).

б) Число исходов, при которых четыре команды A, B, C и D попадут в одну группу, равно числу сочетаний из $20-4=16$ (число оставшихся команд) по $10-4=6$ (число оставшихся мест в той группе, куда попали команды A, B, C и D). Искомая вероятность равна

$$\frac{C_{16}^{6}}{\frac{1}{2}C_{20}^{10}}=\frac{2\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}=\frac{28}{323}\approx 0{,}08.$$

Если рассматривать возможные распределения команд в течение двух лет, то каждое возможное распределение команд в первом году может комбинироваться с любым распределением в следующем году, т. е. число возможных исходов здесь возводится в квадрат и равно $\left(\frac{1}{2}C_{20}^{10}\right)^2$. Число же благоприятных исходов тоже возводится в квадрат и равно $(C_{16}^{6})^2$.

Таким образом, вероятность того, что два года подряд четыре наиболее сильные команды попадут в одну группу, равна $\left(\frac{28}{323}\right)^2\approx 0{,}0064$.

в) Число исходов, при которых команды A и B попадут в одну группу, а команды C и D — в другую, равно числу сочетаний из $20-4=16$ (число оставшихся за вычетом A, B, C и D команд) по $10-2=8$ (число оставшихся мест в группе, куда попали команды A и B). Таково же число случаев, когда в одну группу попали A и C, а в другую B и D или в одну группу попали A и D, а в другую B и C. Общее число благоприятных случаев равно $3\cdot C_{16}^{8}=\frac{3\cdot 16!}{(8!)^2}$, а искомая вероятность равна

$$\frac{3C_{16}^{8}}{\frac{1}{2}C_{20}^{10}}=\frac{2\cdot 3\,(10\cdot 9)^2}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}=\frac{135}{323}\approx 0{,}42.$$

69. Общее число возможных исходов последовательности четырех партий мы получим, комбинируя выигрыш или проигрыш в первой партии с выигрышем или проигрышем во второй, третьей и четвертой партиях. Это число равно $2^4=16$. Все эти исходы являются равновероятными, так как по условию задачи противники равносильны, и для каждой отдельной партии вероятность выигрыша одна и та же для каждого из противников. Благоприятными исходами здесь являются исходы, в которых первый из противников выигрывает в трех случаях из четырех; число таких исходов равно, очевидно, 4 (эти четыре случая отвечают проигрышу первой, второй, третьей или четвертой партии и выигрышу остальных). Искомая вероятность равна, таким образом, $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$. Точно так же в случае восьми партий общее число исходов равно $2^8=256$. Число благоприятных исходов здесь равно числу способов, каким можно выделить из восьми партий пять выигранных, т. е. равно $C_8^5=$ $=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56$. Итак, вероятность выиграть пять партий из восьми равна $\frac{56}{256}=\frac{7}{32}<\frac{1}{4}$.

Ответ: выиграть у равносильного противника три партии из четырех вероятнее, чем выиграть пять партий из восьми [1].

70. а) Здесь рассматривается опыт, состоящий в извлечении k шаров из ящика, содержащего $n+m$ шаров. Выбрать из $n+m$ шаров какие-то k можно C_{n+m}^k различными способами. Это и будет числом равновероятных исходов нашего опыта. Благоприятными исходами будут те, при которых среди k извлеченных шаров окажется ровно r белых и, следовательно, $k-r$ черных. Ясно, что при этом должно быть $r\leqslant k$, $r\leqslant n$ и $k-r\leqslant m$; в противном случае благоприятных исходов не будет вовсе и вероятность будет равна нулю. При выполнении же указанных неравенств число благоприятных исходов мы получим, комбинируя C_n^r способов извлечения r белых шаров из n имеющихся белых шаров с C_m^{k-r} способами извлечения $k-r$ черных шаров из m таких шаров. Таким образом, число

[1] Этот ответ сначала кажется парадоксальным, ибо $\frac{3}{4}>\frac{5}{8}$ и кажется, что поэтому выиграть у равносильного противника три партии из четырех должно быть труднее, чем выиграть пять партий из восьми. Однако такое рассуждение не учитывает того, что при увеличении общего числа партий вероятность одного определенного исхода, вообще говоря, значительно падает за счет увеличения числа возможностей. В действительности следует отличать вероятность выиграть точно пять партий из восьми, о которой шла речь в условии задачи, от вероятности выиграть *не менее* пяти партий из восьми. Выиграть у равносильного противника *не менее* пяти партий из восьми действительно легче, чем выиграть *не менее* трех партий из четырех, но для выигрыша не менее пяти партий из восьми имеется четыре различных возможности (выигрыш пяти, шести, семи и восьми партий), а для выигрыша не менее трех партий из четырех — только две (выигрыш трех или четырех партий).

благоприятных исходов здесь равно $C_k^r C_m^{k-r}$ и искомая вероятность есть $\frac{C_n^r C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k}$.

б) Пусть $k \leqslant n$ и $k \leqslant m$. При извлечении k шаров из ящика, содержащего n белых и m черных шаров, число извлеченных белых шаров может быть равно или 0, или 1, или 2,..., или k. Согласно задаче а) вероятность того, что это число будет равно 0, равна $\frac{C_n^0 C_m^k}{C_{n+m}^k}$; вероятность того, что оно равно 1, равна $\frac{C_n^1 C_m^{k-1}}{C_{n+m}^k}$; вероятность того, что оно равно 2, равна $\frac{C_n^2 C_m^{k-2}}{C_{n+m}^k}$; ...; вероятность того, что оно равно k, равна $\frac{C_n^k C_m^0}{C_{n+m}^k}$. Но сумма всех этих вероятностей должна равняться единице: действительно, сложив их все, мы получим дробь, и в числителе и в знаменателе которой стоит общее число равновероятных исходов испытания. Итак,

$$\frac{C_n^0 C_m^k}{C_{n+m}^k} + \frac{C_n^1 C_m^{k-1}}{C_{n+m}^k} + \frac{C_n^2 C_m^{k-2}}{C_{n+m}^k} + \ldots + \frac{C_n^k C_m^0}{C_{n+m}^k} = 1$$

и, следовательно,

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

Примечание. Использованный в задаче 70б) метод вывода соотношений, связывающих биномиальные коэффициенты, по идее близок к «геометрическому» методу, разобранному в задаче 59. В обоих случаях мы разбиваем некоторую совокупность объектов (кратчайших путей в «геометрическом» методе и всевозможных исходов испытания в решении задачи 70б)), число которых может быть подсчитано, на частичные совокупности без общих элементов и приравниваем затем общее число наших объектов сумме чисел объектов в частичных совокупностях. Заметим, что общее число результатов испытания в отличие от числа кратчайших путей не обязано само выражаться биномиальным коэффициентом, в связи с чем метод задачи 70б) применим к выводу ряда соотношений, которые принципиально нельзя получить из геометрической схемы задачи 59 (см., например, задачу 71).

71. а) В тот момент, когда человек обнаружил, что вынутая им из кармана спичечная коробка пуста, вторая коробка может содержать 0 спичек (т. е. быть тоже пустой), 1 спичку, 2 спички, 3 спички и т. д. до n спичек включительно. Рассматриваемый опыт состоит в том, что человек много раз извлекает по одной спичке наудачу из первой или из второй коробки, пока одна из коробок не окажется пустой. При этом общее число извлеченных спичек в различных исходах опыта, конечно, будет различным; поэтому разные исходы не будут равновероятными и не могут использоваться для подсчета вероятностей. Это затруднение можно устранить при помощи приема, аналогичного использованному нами выше при решении задачи 65: будем считать, что в тот момент, когда вынутая коробка оказывается пустой, человек наполняет ее снова (практически это можно осуществить, например, заменив пустую коробку новой полной) и продолжает и далее брать спички наудачу из той или иной коробки. Условимся считать, что это последовательное извлечение спичек прекращается после извлечения $(2n+1)$-й спички; так как первоначально в обеих коробках было всего $2n$ спичек, то ясно, что к этому моменту хотя бы одна из коробок будет найдена пустой (и будет заполнена снова). Теперь мы можем так переформулировать поставленную задачу: некий человек $2n+1$ раз подряд извлекает по одной спичке из одной из двух коробок, причем каждый раз вероятность взять спичку из той или из другой коробки одинакова. Число спичек в каждой коробке можно считать неограниченным (так как мы условились пустую коробку наполнять снова). В какой-то момент человек в первый раз извлек $(n+1)$-ю спичку из одной из коробок (в первоначальной формулировке это означало бы, что он нашел коробку пустой); какова вероятность того, что из второй коробки к этому моменту было извлечено $n-k$ спичек?

В новой постановке задача решается совсем просто. Каждое отдельное извлечение может, очевидно, иметь два исхода (спичка может оказаться извлеченной из первой или из второй коробки); $2n+1$ последовательных извлечений могут иметь 2^{2n+1} разных исходов. Это и есть общее число равновероятных исходов рассматриваемого опыта. Благоприятными будут те исходы, при которых из первых $2n-k$ извлечений n спичек будет вынуто из первой коробки и $n-k$ — из второй, а $(2n-k+1)$-я спичка опять же будет извлечена из первой коробки, или, наоборот, из первых $2n-k$ извлечений n будет сделано из второй коробки, $n-k$ — из первой, а $(2n-k+1)$-е извлечение — тоже из второй; результаты последних k извлечений при этом могут быть какими угодно. Но число исходов $2n-k$ извлечений, при которых n спичек оказываются вынутыми из первой коробки, а $n-k$ — из второй, равно числу сочетаний C_{2n-k}^{n} из $2n-k$ элементов по n. Комбинируя эти исходы с 2^k возможными исходами последних k испытаний, мы найдем, что число исходов, при которых $n+1$ спичек впервые оказываются извлеченными из первой коробки, причем из второй коробки к этому моменту оказывается извлечено $n-k$ спичек, равно $C_{2n-k}^{n}\cdot 2^k$. Ровно столько же будет исходов, при которых $(n+1)$-я спичка впервые извлекается из второй коробки, а из первой к этому моменту оказывается извлечено $n-k$ спичек. Итак, общее число благоприятных исходов опыта здесь равно $2C_{2n-k}^{n}\cdot 2^k = 2^{k+1}C_{2n-k}^{n}$. Отсюда для искомой вероятности получаем формулу

$$p = \frac{2^{k+1}C_{2n-k}^{n}}{2^{2n+1}} = \frac{C_{2n-k}^{n}}{2^{2n-k}}.$$

б) В тот момент, когда человек, о котором говорится в условии задачи а), обнаружил, что вынутая им спичечная коробка пуста, во второй коробке может находиться любое число спичек от 0 до n. Сумма вероятностей того, что это число равно 0, того, что это число равно 1, того, что это число равно 2, и т. д. вплоть до того, что это число равно n, очевидно, должна равняться единице: сложив все эти вероятности, мы получим дробь, и в числителе и в знаменателе которой стоит общее число равновероятных исходов опыта. Итак,

$$\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} + \frac{C_{2n-1}^{n}}{2^{2n-1}} + \frac{C_{2n-2}^{n}}{2^{2n-2}} + \ldots + \frac{C_{n}^{n}}{2^{n}} = 1$$

и, следовательно,

$$C_{2n}^{n} + 2C_{2n-1}^{n} + 2^2C_{2n-2}^{n} + \ldots + 2^nC_{n}^{n} = 2^{2n}.$$

72. Так как каждый из охотников A и B попадает в утку и убивает ее столь же часто, как и не попадает, то при каждом отдельном выстреле вероятность убить утку для каждого из этих охотников равна $^1/_2$, т. е. равна вероятности выпадения герба при бросании монеты. Таким образом, наша задача равносильна следующей: A бросает монету 50 раз, а B бросает 51 раз; какова вероятность того, что у B герб выпадет большее число раз, чем у A? Нетрудно подсчитать для этой задачи число равновероятных исходов опыта; однако подсчет числа благоприятных исходов здесь сравнительно сложен. Мы не будем производить этого подсчета, а воспользуемся вместо этого следующим несложным искусственным рассуждением.

Множество всех исходов опыта, состоящего в том, что A бросает монету 50 раз, а B бросает 51 раз, разобьем на следующие две части: 1) множество всех исходов, при которых у B герб выпадает большее число раз, чем у A, и 2) множество всех исходов, при которых у B герб выпадает не большее число (т. е. меньшее число или столько же) раз. Заметим теперь, что если у B герб выпал столько же раз, сколько у A или еще меньше, то, значит, решетка у B выпала больше раз, чем у A, и, наоборот, если решетка у B выпала больше раз, чем у A, то, значит, герб у B выпал или столько же раз, сколько у A, или еще меньше (ибо B бросает всего на одну монету больше, чем A). Следовательно, множество исходов, при которых у B герб выпадает не большее число раз, чем у A, совпадает с множеством исходов, при которых у B решетка выпадает большее число раз, чем у A. Но в силу полной равноправности герба и решетки у монеты число исходов опыта, при которых у B герб выпадает большее число раз, чем у A, должно быть равно числу исходов, при которых у B решетка выпадает большее число раз, чем у A. Итак, в нашей задаче число благоприятных исходов опыта равно числу неблагоприятных исходов, откуда сразу вытекает, что искомая вероятность равна $^1/_2$.

Таким образом, вероятность того, что добыча B превзойдет добычу A, равна $^1/_2$.

Примечание. Приведенное решение полностью остается в силе в том случае, когда A за время охоты встречает n уток, а B встречает $n+1$ утку. И в этом более общем случае вероятность того, что добыча B превзойдет добычу A, также равна $^1/_2$.

73. а) Опыт, о котором идет речь в задаче, состоит в том, что два охотника одновременно стреляют в лису. При этом частота попаданий и промахов одного из охотников, разумеется, не зависит от результатов одновременного выстрела второго: если они будут много раз стрелять в лису одновременно, то первый будет попадать в цель при одной трети выстрелов, а второй будет попадать в цель как при удачных для первого охотника выстрелах, так и при неудачных. При подсчете вероятностей можно этих двух охотников заменить двумя людьми, каждый из которых независимо от второго вытаскивает билетик из ящика, содержащего два билетика с надписью Пр. (т. е. «промах») и один билетик с надписью П. («попадание»). Число вытащенных билетиков с надписью П. и указывает число попаданий в лису.

Комбинируя три исхода извлечения билетика первым человеком с тремя такими же исходами извлечения, выполненного вторым человеком, мы получим следующие девять равновероятных исходов нашего опыта:

Пр. — Пр.	Пр. — Пр.	Пр. — П.
Пр. — Пр.	Пр. — Пр.	Пр. — П.
П. — Пр.	П. — Пр.	П. — П.

(первым указан результат первого извлечения билетика). Из этих девяти исходов благоприятными, т. е. такими, при которых хотя бы один человек вытащил билетик П., будут пять исходов (в нашей таблице это будут исходы, стоящие в третьем столбце или в третьей строке). Таким образом, искомая вероятность того, что охотники убьют лису, равна $\frac{5}{9}$.

б) Комбинируя каждый из девяти исходов предыдущей задачи с независимыми от них двумя промахами и одним попаданием третьего охотника, мы получим 27 равновероятных результатов одновременных выстрелов трех охотников. Из этих 27 исходов хотя бы один из первых двух охотников попадет в лису в $5 \cdot 3 = 15$ случаях (напомним, что в предыдущей задаче попадания были в пяти случаях из девяти); в остальных 12 случаях и первый и второй охотники промахнутся, но в одной трети из них (т. е. в четырех случаях) попадет в лису третий охотник. Таким образом, хотя бы одно попадание будет в $15+4=19$ из 27 равновероятных исходов и искомая вероятность равна $\frac{19}{27}$.

в) В случае одновременных выстрелов n охотников мы аналогично случаям а) и б) получим 3^n равновероятных исходов испытания. Однако подсчет числа исходов, отвечающих попаданию хотя бы одного охотника, здесь значительно сложнее, чем в рассмотренных выше простейших случаях. Тем не менее такой подсчет может быть произведен (он аналогичен подсчету, проводимому в первом решении задачи 78а)). Однако здесь мы его приводить не будем, так как задача может быть решена проще при помощи следующего рассуждения. Будем подсчитывать число исходов, отвечающих промахам всех n охотников. Число исходов, отвечающих попаданию хотя бы одного из них, будет равно разности полного числа равновероятных исходов и этого числа. Но число исходов, отвечающих промахам всех охотников, подсчитать уже просто: первый охотник, очевидно, из 3^n выстрелов промахнется в $\frac{2}{3}\cdot 3^n = 2\cdot 3^{n-1}$ случаях. Из этих $2\cdot 3^{n-1}$ неудачных для первого охотника выстрелов второй охотник промахнется в $\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 3^{n-1} = 2^2\cdot 3^{n-2}$ случаях. Из этих $2^2\cdot 3^{n-2}$ неудачных для первых двух охотников выстрелов третий охотник промахнется в $\frac{2}{3}\cdot 2^2\cdot 3^{n-2} = 2^3\cdot 3^{n-3}$ случаях. Продолжая рассуждать подобным же образом, мы придем к выводу, что одновременно все n охотников промахнутся в 2^n случаях из 3^n. Таким образом, число исходов, отвечающих попаданию хотя бы одного охотника, равно $3^n - 2^n$ и искомая в этой задаче вероятность равна $\frac{3^n-2^n}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

74. Прежде всего подсчитаем вероятность попадания при втором и третьем выстрелах. Второй раз охотник стреляет с расстояния 150 *м*, а третий раз — с расстояния 200 *м*. Так как по условию вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния и вероятность попадания с расстояния 100 *м* равна $\frac{1}{2}$, то вероятность попадания при втором выстреле будет равна $\frac{1}{2}\left(\frac{100}{150}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$, а при третьем — равна $\frac{1}{2}\left(\frac{100}{200}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

Отсюда вытекает, что наша задача равносильна следующей. Некий человек наудачу вытаскивает шар из ящика, в котором находится один белый и один черный шар. Если вынутый шар черный, то он вторично извлекает шар из другого ящика, содержащего два белых и $9-2=7$ черных шаров. Наконец, если и этот шар окажется черным, то он в третий раз тащит шар из ящика, в котором лежат один белый и $8-1=7$ черных шаров. Какова вероятность того, что этот человек хотя бы один раз вытащит белый шар? Эта вероятность будет точно равна вероятности того, что охотник подстрелит лису.

Будем считать, что вне зависимости от результата первого и второго извлечений человек все равно вытаскивает по шару из всех трех ящиков (это предположение аналогично тем, которые делались выше при решении задач 65 и 71, и преследует ту же цель). Извлечение шара из первого ящика может иметь два равновероятных исхода, при одном из которых извлекается белый шар, а при втором — черный. Извлечение из второго ящика — девять равновероятных исходов, при двух из которых извлекается белый шар и при семи — черный. Извлечение из третьего ящика — восемь равновероятных исходов, только при одном из которых извлеченный шар оказывается белым. Комбинируя два исхода первого извлечения с девятью исходами второго и с восемью исходами третьего, мы получим всего $2\cdot9\cdot8=144$ равновероятных исхода опыта. Неблагоприятными из них будут те $1\cdot7\cdot7=49$ исходов, при которых и из первого, и из второго, и из третьего ящика извлекаются черные шары. Остальные $144-49=95$ исходов будут благоприятными. Следовательно, искомая в задаче вероятность равна

$$\frac{95}{144}\approx 0{,}66.$$

75. Первое решение. Рассмотрим опыт, состоящий в том, что каждый из четырех человек A, B, C и D произносит некоторое утверждение и затем проверяется, кто из них сказал правду, а кто нет. Каждый из этих четырех человек говорит правду один раз из трех, подобно тому как каждый из охотников задачи 73 попадал в цель один раз из трех. Рассуждая так же, как и при решении этой задачи, мы убедимся, что рассматриваемый опыт можно считать имеющим 81 равновероятных исходов; эти 81 равновероятных исходов можно свести в следующую таблицу (П означает правду, Л—ложь; четыре последовательные буквы относятся к утверждениям, сделанным соответственно A, B, C и D):

П — П — П — П;
1 раз

П — П — П — Л; П — П — Л — П;
2 раза 2 раза

П — Л — П — П; Л — П — П — П;
2 раза 2 раза

П — П — Л — Л; П — Л — П — Л; П — Л — Л — П;
4 раза 4 раза 4 раза

Л — П — П — Л; Л — П — Л — П; Л — Л — П — П;
4 раза 4 раза 4 раза

П — Л — Л — Л; Л — П — Л — Л;
8 раз 8 раз

Л — Л — П — Л; Л — Л — Л — П;
8 раз 8 раз

Л — Л — Л — Л
16 раз

(здесь один исход повторяется один раз, четыре исхода повторяются по два раза, шесть исходов повторяются по четыре раза, еще четыре исхода повторяются восемь раз и последний исход повторяется 16 раз, так что всего мы имеем действительно $1+4\cdot2+6\cdot4+4\cdot8+16=81$ равновероятный исход).

Отметим теперь, что эти 81 равновероятных случаев имеют место тогда, когда высказывания, сделанные A, B, C и D, совершенно не связаны одно с другим. В нашем случае, однако, в силу специального характера этих высказываний некоторые из этих возможностей оказываются исключенными. Для того чтобы понять, в чем дело, рассмотрим простейший случай, когда высказываются только два из указанных четырех человек (скажем, A и D). Вообще говоря, здесь будет девять равновероятных исходов (этот случай вполне аналогичен случаю, рассмотренному в задаче 73а)); если, однако, D сделал какое-то утверждение и A заявляет, что D сказал правду, то ясно, что число возможностей сокращается: возможными оказываются лишь схемы, в которых либо и A и D сказали правду, либо и A и D сказали неправду. Точно так же, если A заявляет, что C утверждает, что D сказал правду, то очевидно, что или и A, и C, и D говорят правду, или же двое из них говорят неправду, а третий говорит правду. В нашем случае

A заявляет, что B отрицает, что C утверждает, что D сказал неправду; иначе эту цепь высказываний можно выразить следующим образом: A заявляет, что B утверждает, что C утверждает, что D сказал правду (см. подстрочное примечание на стр. 39). Ясно, что в таком случае неправду могут сказать лишь четное число людей, т. е. или все четверо, или какие-либо двое из них, или же никто[1]). Таким образом, здесь по самому смыслу задачи оказываются возможными лишь исходы, собранные в первой, четвертой, пятой и восьмой строках нашей таблицы исходов, т. е. всего имеется $1+6\cdot4+1\cdot16=41$ равновероятный исход.

Теперь нам остается только подсчитать, сколько из этих исходов отвечают случаям, когда D сказал правду, т. е. подсчитать число тех из оставшихся схем, которые оканчиваются буквой П. Такими, очевидно, будут схемы

П — П — П — П;
1 раз

П — Л — Л — П;	Л — П — Л — П;	Л — Л — П — П.
4 раза	4 раза	4 раза

Итак, число благоприятных исходов в нашей задаче равно $1+3\cdot4=13$ и, следовательно, искомая вероятность равна $\frac{13}{41}$.

Второе решение. Эту задачу можно также решить и не выписывая полной таблицы всех исходов. Будем решать ее в той формулировке, которая приведена в примечании к условию. Пусть D написал знак «плюс». Согласно условию задачи в таком случае мы будем иметь три равновероятных исхода опыта, состоящего в том, что C списывает знак у D: в одном случае C спишет знак «плюс» и в двух случаях — знак «минус» (ср. с решением задачи 73). Пусть, далее, B списывает знак у C; каждому случаю, когда C написал знак

[1]) То, что остальные возможности исключаются, а эти остаются, легко проверить непосредственно. Так, например, если D на самом деле сказал неправду, то остальные трое заведомо не могли все сказать правду (иначе A должен был бы сказать, что B подтверждает, что C утверждает, что D сказал неправду); аналогично проверяется, что невозможны и все другие исходы, в которых неправду сказал кто-то один или же трое.

«плюс», отвечают один исход, при котором B пишет знак «плюс», и два исхода, при которых B пишет «минус»; случаю, когда C написал «минус», отвечают два исхода, при которых B пишет «плюс», и один исход, при котором B пишет «минус». Пусть D написал знак «плюс»; C списал знак у D и B списал знак у C. При этом мы будем иметь всего $3 \cdot 3 = 9$ равновероятных исходов опыта; в $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$ из этих исходов B пишет знак «плюс», в $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$ из этих исходов B пишет знак «минус». Пусть, наконец, A списывает знак у B. Каждому случаю, когда B пишет «плюс», отвечает один исход, при котором A списывает знак «плюс», и два исхода, при которых A списывает знак «минус»; каждому случаю, когда B пишет «минус», отвечают два исхода, при которых A списывает «плюс», и один исход, при котором A списывает «минус». Таким образом, мы получаем всего $9 \cdot 3 = 27$ равновероятных исходов опыта, состоящих в том, что A списывает знак у B (B списал знак у C; C списал знак у D; D написал знак «плюс»); в $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$ из этих исходов A пишет знак «плюс», в $5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$ из этих исходов A пишет знак «минус».

Точно так же, если известно, что D написал знак «минус», то мы будем иметь 27 равновероятных исходов опыта; в 13 из этих исходов A пишет знак «минус» и в 14 исходах — знак «плюс». Так как D пишет «плюс» в одном случае из трех, то всего имеется, очевидно, $27 \cdot 3 = 81$ равновероятный исход нашего опыта; в $13 + 2 \cdot 14 = 41$ из этих исходов A пишет «плюс», а в $14 + 2 \cdot 13 = 40$ исходах A пишет «минус». Если заранее известно, что A написал знак «плюс», то только первый 41 исход является возможным. В 13 из этого 41 исхода D писал «плюс», а в $2 \cdot 14 = 28$ исходах D писал «минус». Поэтому если известно, что A в результате последовательного списывания написал «плюс», то вероятность того, что D написал знак «плюс», равна $\frac{13}{41}$.

Примечание. Второе решение задачи интересно тем, что оно предоставляет широкие возможности для дальнейших обобщений. Пусть у нас имеется $n+1$ лиц; первое лицо A_0 пишет знак «плюс» или «минус» и показывает A_1; A_1 списывает этот знак и показывает A_2; A_2 списывает знак у A_1 и показывает A_3 и т. д. до последнего лица A_n, которое списывает знак у A_{n-1}. Пусть известно, что вероятность того, что A_0 напишет знак «плюс», равна $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (иными словами, A_0 пишет «плюс» в α случаях из $\alpha+\beta$); вероятность для каждого из лиц A_1, A_2, ..., A_n не ошибиться при списывании равна $\frac{p}{p+q}$ (решение задачи мало изменится и в том случае, если считать вероятности ошибиться различными для лиц A_1, A_2, ..., A_n). Пусть известно, что лицо A_n написало знак «плюс»; спрашивается, какова вероятность, что лицо A_0 тоже написало знак «плюс»? (Предоставляем читателю самому сформулировать эту задачу как «задачу о $n+1$ лжецах».)

Будем рассуждать, как во втором решении задачи. Пусть известно, что лицо A_0 написало знак «плюс». В таком случае опыт, состоящий в том, что A_1 переписывает знак у A_0, будет иметь $p+q$ равновероятных исходов; в p из этих исходов A_1 пишет «плюс» и в q исходах — знак «минус». Опыт, состоящий в том, что A_2 переписывает знак у A_1, будет иметь $(p+q)^2$ равновероятных исходов; в $p\cdot p+q\cdot q=p^2+q^2$ из этих исходов A_2 пишет знак «плюс», в $p\cdot q+q\cdot p=2pq$ из этих исходов A_2 пишет знак «минус». Опыт, состоящий в том, что A_3 переписывает знак у A_2, будет уже иметь $(p+q)^3$ равновероятных исходов; в $(p^2+q^2)\cdot p+2pq\cdot q=p^3+3pq^2$ из этих исходов A_3 пишет «плюс», в $(p^2+q^2)\cdot q+2pq\cdot p=3p^2q+q^3$ из этих исходов A_3 пишет «минус». Продолжая рассуждать точно таким же образом, мы получим, что опыт, состоящий в том, что A_n переписывает знак у A_{n-1}, будет иметь $(p+q)^n$ равновероятных исходов; в

$$p^n+C_n^2\,p^{n-2}q^2+C_n^4\,p^{n-4}q^4+\ldots$$

из этих исходов A_n пишет знак «плюс», в

$$C_n^1\,p^{n-1}q+C_n^3\,p^{n-3}q^3+\ldots$$

из этих исходов A_n пишет «минус» (многоточие в конце сумм означает, что члены сумм выписываются по тому же закону до тех пор, пока они имеют смысл; доказательство последнего результата легко получить методом математической индукции).

Так же доказывается, что если A_0 написал знак «минус», то опыт, заключающийся в том, что A_1 переписывает знак у A_0; A_2 переписывает знак у A_1; ...; наконец, A_n переписывает знак у A_{n-1}, будет иметь тоже $(p+q)^n$ равновероятных исходов; в

$$p^n+C_n^2\,p^{n-2}q^2+C_n^4\,p^{n-4}q^4+\ldots$$

из этих исходов A_n пишет знак «минус», в

$$C_n^1\,p^{n-1}q+C_n^3\,p^{n-3}q^3+\ldots$$

из этих исходов A_n пишет «плюс». Учитывая теперь, что A_0 в α случаях пишет знак «плюс» и в β случаях — знак «минус», мы получим всего $(\alpha+\beta)(p+q)^n$ равновероятных исходов нашего опыта; в

$$\alpha\,(p^n+C_n^2\,p^{n-2}q^2+C_n^4p^{n-4}q^4+\ldots)+\beta(C_n^1\,p^{n-1}q+C_n^3p^{n-3}q^3+\ldots)$$

из этих исходов A_n пишет знак «плюс»; в

$$\alpha\,(C_n^1\,p^{n-1}q+C_n^3\,p^{n-3}q^3+\ldots)+\beta\,(p^n+C_n^2p^{n-2}q^2+C_n^4p^{n-4}q^4+\ldots)$$

исходах — знак «минус». Если заранее известно, что A_n написал знак «плюс», то только первые

$$\alpha\,(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \ldots) + \beta\,(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \ldots)$$

из этих исходов являются возможными. В

$$\alpha\,(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \ldots)$$

из этих исходов A_0 писал «плюс», а в остальных

$$\beta\,(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \ldots)$$

исходах писал «минус». Таким образом, мы заключаем, что если известно, что A_n в результате последовательного списывания написал знак «плюс», то вероятность того, что A_0 написал «плюс», равна

$$\frac{\alpha\,(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \ldots)}{\alpha\,(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \ldots) + \beta\,(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \ldots)}.$$

Этот ответ можно написать и в более удобном виде. Действительно, воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \ldots) + (C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \ldots) &= \\ = p^n + C_n^1 p^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^3 p^{n-3}q^3 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \ldots &= \\ = (p+q)^n&,\\ (p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \ldots) - (C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \ldots) &= \\ = p^n - C_n^1 p^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 - C_n^3 p^{n-3}q^3 + C_n^4 p^{n-4}q^4 - \ldots &= \\ = (p-q)^n&.\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4\, p^{n-4}q^4 + \ldots = \frac{1}{2}\,[(p+q]^n + (p-q)^n],$$

$$C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \ldots = \frac{1}{2}\,[(p+q)^n - (p-q)^n],$$

что позволяет представить полученный ответ в следующем виде:

$$\frac{\alpha\,(p+q)^n + \alpha\,(p-q)^n}{(\alpha+\beta)(p+q)^n + (\alpha-\beta)\,(p-q)^n}.$$

Обозначив $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \alpha_1$, $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \beta_1$ $(\alpha_1 + \beta_1 = 1)$, $\frac{p}{p+q} = p_1$, $\frac{q}{p+q} = q_1$ $(p_1 + q_1 = 1)$, окончательно получим

$$\frac{\alpha_1\,[1 + (p_1 - q_1)^n]}{1 + (\alpha_1 - \beta_1)\,(p_1 - q_1)^n}.$$

Положив в последней формуле $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $p_1 = \frac{1}{3}$, $n = 3$, получим $\frac{13}{41}$, т. е. ответ задачи 75.

Рассуждения, использованные в настоящем примечании, носят общий характер и применимы в большом числе теоретико-вероятностных задач (случай так называемых цепей Маркова; см. задачу 190 из раздела III книги Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского, цитированной на стр. 51, и текст на стр. 163—165 той же книги, относящийся к задаче 190).

76. а) Шесть концов травинок можно попарно связать между собой $5\cdot 3\cdot 1=15$ различными способами (первый конец можно связать с любым из пяти остальных; после этого один из четырех оставшихся — с любым из трех других; после этого только одним способом можно будет связать два оставшихся конца). Так как верхние и нижние концы независимо можно связать 15 различными способами, то общее число равновероятных исходов опыта равно $15\cdot 15=225$.

Подсчитаем теперь число благоприятных исходов. Пусть верхние концы связаны попарно каким-то одним из пятнадцати возможных способов; пусть, например, конец первой травинки связан с концом второй, конец третьей — с концом четвертой и конец пятой — с концом шестой. При этом для того, чтобы получилось одно кольцо, нижний конец первой травинки должен быть связан с нижним концом третьей, четвертой, пятой или шестой травинки, так что, связывая нижний конец первой травинки, мы имеем четыре возможности. Далее, если, например, нижний конец первой травинки связан с концом третьей, то нижний конец второй травинки надо будет связать с концом или пятой или шестой травинки — здесь мы имеем уже лишь две возможности. После этого останется только связать два еще не связанных конца. Комбинируя все возможности, мы видим, что при каждом из 15 способов связывания верхних концов у нас будет ровно $4\cdot 2=8$ способов связывания нижних концов, приводящих к благоприятному исходу опыта; отсюда вытекает, что общее число благоприятных исходов равно $15\cdot 8=120$.

Итак, искомая вероятность равна $\frac{15\cdot 8}{15\cdot 15}=\frac{8}{15}\approx 0{,}53$.

б) Рассуждая так же, как и при решении задачи а), найдем, что при наличии $2n$ травинок общее число исходов опыта равно $[(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 1]^2$, а число благоприятных исходов равно

$$[(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 1]\ [(2n-2)(2n-4)\ldots 2].$$

Таким образом, в этом случае для вероятности получаем выражение

$$p_n = \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1} = \frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}.$$

Примечание. Следует отметить, что простой на вид ответ задачи 76б) при больших значениях n становится очень неудобен, так как в этом случае приходится перемножать много дробей. Однако, воспользовавшись формулой Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

(см. задачи 160—161 и следующий за ними текст на стр. 80—81), можно получить для этой вероятности простое приближенное выражение, очень точное именно в случае больших n. Действительно, замечая, что $(2n-2)(2n-4)\ldots 2 = 2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 1 = 2^{n-1}(n-1)!$, и умножая числитель и знаменатель ответа задачи 76б) на это выражение, найдем, что

$$p_n = \frac{[2^{n-1}(n-1)!]^2}{(2n-1)(2n-2)!} \approx \frac{[2^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}\,(n-1)^{n-1}e^{-(n-1)}]^2}{(2n-1)\sqrt{2\pi\cdot 2(n-1)}\,[2(n-1)^{2(n-1)}e^{-2(n-1)}]} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi(n-1)}}{2n-1} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$

ибо при больших n

$$\frac{\sqrt{n-1}}{2n-1} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)} \approx \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Здесь π, как обычно, есть отношение длины окружности к диаметру: $\pi \approx 3{,}14$. Ошибка приближенной формулы

$$p_n \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

будет тем меньше, чем больше n.

77. а) Подсчитаем общее число равновероятных исходов опыта, рассматриваемого в условии задачи. Первый человек может вытащить любую из $C_{2n}^2 = \frac{2n(2n-1)}{2}$ пар шаров (число пар равно числу сочетаний из $2n$ по 2). После этого второй может вытащить любую из $C_{2n-2}^2 = \frac{(2n-2)(2n-3)}{2}$ пар, которые можно составить из оставшихся $2n-2$ шаров. Третий может вытянуть любую из $C_{2n-4}^2 = \frac{(2n-4)(2n-5)}{2}$ пар и т. д.

вплоть до предпоследнего, могущего вытянуть одну из $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ пар (ибо в урне ко времени подхода предпоследнего человека остается еще четыре шара), и последнего, забирающего последние два шара без всякого выбора. Комбинируя C_{2n}^2 возможных исходов извлечения первой пары шаров с C_{2n-2}^2 возможными исходами извлечения второй пары, с C_{2n-4}^2 возможными исходами извлечения третьей пары, ..., с C_4^2 возможными исходами извлечения $(n-1)$-й пары и с $C_2^2 = 1$ исходом извлечения последней пары, получим всего

$$C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 \dots C_4^2 C_2^2 =$$
$$= \frac{2n(2n-1)}{2} \cdot \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} \dots \frac{4\cdot 3}{2} \cdot \frac{2\cdot 1}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

равновероятных исходов опыта. Теперь остается только подсчитать, сколько из этих исходов будут благоприятными.

Благоприятными исходами являются те, при которых каждый из тянущих вытягивает один белый и один черный шар. Первый человек при этом, очевидно, может вытащить любой из n белых шаров и любой из n черных, т. е. может вытащить любую из n^2 пар шаров, состоящих из одного белого и одного черного шара. Второй человек после этого может выбрать уже лишь одну из $(n-1)^2$ таких оставшихся пар (после первого вытаскивания остаются еще $n-1$ белых и $n-1$ черных шаров), третий — одну из $(n-2)^2$ таких пар, ..., предпоследний — одну из $2^2 = 4$ пар, последний — единственную оставшуюся пару. Комбинируя все эти возможности, мы получим всего

$$n^2(n-1)^2(n-2)^2 \dots 2^2 \cdot 1^2 = (n!)^2$$

благоприятных исходов. Следовательно, искомая вероятность p_n равна

$$p_n = \frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Примечание. Полученный здесь как будто бы очень простой ответ на самом деле оказывается очень неудобным, как только приходится иметь дело со сколько-нибудь значительными числами n (например, порядка 8 или более). Действительно, вычисление факториалов больших чисел требует затраты очень большого труда, а без такого вычисления формула $p_n=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$ не дает никакого представления о величине интересующей нас вероятности p_n. В этом случае, как и во многих других аналогичных ему, очень большую ценность представляют приближенные формулы, позволяющие оценить величину $n!$. Наиболее важной из таких формул является формула Стирлинга

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n},$$

применимая как раз в случае больших значений n (см. задачи 160—161 и следующий за формулировками этих задач текст на стр. 80—81). Воспользовавшись этой формулой, мы получим следующую очень удобную приближенную формулу для p_n:

$$p_n=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\approx\frac{2^n(2\pi n)\,n^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{2\pi\cdot 2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}=\frac{\sqrt{\pi n}}{2^n},$$

т. е.

$$p_n\approx\frac{\sqrt{\pi n}}{2^n};$$

при большом n точность этой формулы будет весьма велика.

б) Общее число равновероятных исходов здесь равно $\frac{(2n)!}{2^n}$, поскольку рассматриваемый опыт тот же, что и в условии задачи а) (см. решение этой задачи). Таким образом, нам остается только найти число благоприятных исходов.

Прежде всего совершенно ясно, что при n нечетном число благоприятных исходов (а следовательно, и искомая вероятность p_n) равно нулю: если общее число белых шаров нечетно, то хотя бы один из них обязательно будет извлечен в паре с черным шаром (ибо каждый человек извлекает два шара). Поэтому нам достаточно рассмотреть случай четного $n=2k$; при этом общее число равновероятных исходов будет равно $\frac{(4k)!}{2^{2k}}$.

Подсчитаем прежде всего число благоприятных исходов, при которых некоторые определенные k человек из $2k$ тянувших вытягивают по паре белых шаров (и, следовательно, остальные k вытягивают по паре черных шаров). k человек могут вытянуть по паре белых шаров из общего числа $2k$ таких шаров $\frac{(2k)!}{2^k}$ различными способами (ибо это число способов получается из общего числа всех возможных исходов заменой n на k). Остальные k человек могут вытянуть по паре черных шаров тоже $\frac{(2k)!}{2^k}$ различными способами. Комбинируя эти возможности, мы получим, что число исходов, при которых данные k человек вытягивают белые шары, равно $\frac{[(2k)!]^2}{2^{2k}}$. Но, кроме того, из общего числа $2k$ человек k человек, вытягивающие именно белые шары, могут быть выбраны $C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ различными способами. Общее число благоприятных исходов получается при умножении числа исходов, подсчитанного в предположении, что эти k человек уже выбраны, на $\frac{(2k)!}{(k!)^2}$. Итак, окончательно общее число благоприятных исходов равно $\frac{[(2k)!]^2}{2^{2k}} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{[(2k)!]^3}{2^{2k}(k!)^2}$ и, следовательно, искомая вероятность p_{2k} равна

$$p_{2k} = \frac{[(2k)!]^3}{2^{2k}(k!)^2} : \frac{(4k)!}{2^{2k}} = \frac{[(2k)!]^3}{(4k)!\,(k!)^2}.$$

Примечание. Как и в случае задачи а), при больших значениях k удобно преобразовать полученный ответ, воспользовавшись формулой Стирлинга:

$$p_{2k} = \frac{[(2k)!]^3}{(4k)!\,(k!)^2} \approx \frac{(2\pi\cdot 2k)^{3/2}\,(2k)^{6k}\,e^{-6k}}{\sqrt{2\pi\cdot 4k}\,(4k)^{4k}\,e^{-4k}\,(2\pi k)\,k^{2k}e^{-2k}} =$$

$$= \frac{(2\pi k)^{3/2}\cdot 2^{3/2}\cdot 2^{6k}k^{6k}e^{-6k}}{(2\pi k)^{3/2}2\cdot 4^{4k}k^{6k}e^{-6k}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2k}},$$

т. е.

$$p_{2k} \approx \frac{\sqrt{2}}{2^{2k}}.$$

78. а) Первое решение. Опыт, о котором идет речь в этой задаче, заключается в том, что на каждом из n конвертов пишется один из n адресов. При этом на первом конверте можно надписать любой из n адресов; на втором — любой из $n-1$ оставшихся адресов; на третьем — любой из $n-2$ оставшихся и т. д. Комбинируя эти возможности, мы найдем, что всего наш опыт может иметь $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ различных равновероятных исходов (как и следовало ожидать, это число равно числу перестановок из n элементов). Таким образом, остается только подсчитать число благоприятных исходов.

Благоприятными здесь будут те исходы, при которых хотя бы на одном конверте будет надписан правильный адрес. Число исходов, при которых на первом конверте будет надписан правильный адрес, равно, очевидно, числу способов, которыми можно надписать остальные $n-1$ конвертов, т. е. равно $(n-1)!$. Точно так же равно $(n-1)!$ число исходов, при которых правильный адрес будет надписан на втором конверте, на третьем конверте, ..., на n-м конверте. Суммируя все исходы, при которых правильный адрес будет надписан на первом, втором, третьем, ..., n-м конверте, мы получим:

$$(n-1)!+(n-1)!+\ldots+(n-1)!=n(n-1)!=n!$$

благоприятных исходов. Однако при таком подсчете мы допускаем ту ошибку, что несколько раз учитываем все исходы, при которых сразу на н е с к о л ь к и х конвертах написаны верные адреса (именно из-за этой ошибки у нас число благоприятных исходов оказалось совпадающим с общим числом всех исходов). Постараемся теперь исправить эту ошибку.

Все исходы, при которых на каких-то двух конвертах (например, на первом и на втором) были надписаны верные адреса, учитываются в выражении $n(n-1)!$ дважды: один раз среди $(n-1)!$ исходов, при которых на первом конверте написан правильный адрес, и второй раз среди $(n-1)!$ исходов, при которых на втором конверте написан правильный адрес. Число исходов, при которых и на первом и на втором конвертах написаны верные адреса, очевидно, равно числу способов, которыми можно надписать оставшиеся $n-2$ конвертов, т. е. равно $(n-2)!$. Таково же, очевидно, число исходов, при которых любые другие два конверта будут надписаны правильно. Так как из n конвертов можно составить $C_n^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ различных пар, то, суммируя все исходы, при которых будет правильно написана первая пара конвертов, вторая пара, третья пара, ..., $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$-я пара, мы получим всего

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)!=\frac{n!}{1\cdot 2}$$

исходов. Каждый из этих исходов в выражении $n(n-1)!=n!$ учитывался дважды. Следовательно, полученное число надо вычесть из $n!$; при этом мы получим в качестве числа благоприятных исходов выражение

$$n!-\frac{n!}{1\cdot 2}.$$

Однако при таком подсчете мы все еще допускаем ошибку: в выражении $n!-\frac{n!}{1\cdot 2}$ ровно один раз учитывается каждый исход, при котором только один конверт оказывается надписанным правильно (все такие случаи входят в первое слагаемое), и ровно один раз учитывается каждый исход, при котором точно два конверта надписаны правильно (каждый из этих случаев два раза учитывается в слагаемом $n!$ и один раз в слагаемом $\frac{n!}{1\cdot 2}$); однако те исходы, при которых были правильно надписаны больше чем два конверта, здесь учитываются неверно. Рассмотрим, например, исход, при котором были правильно надписаны сразу три конверта: первый, второй и третий. В первом слагаемом $n!$ этот исход учитывается трижды: он фигурирует среди $(n-1)!$ исходов, при которых первый конверт оказывается надписанным правильно, среди $(n-1)!$ исходов, при которых второй конверт оказывается надписанным правильно, и среди $(n-1)!$ исходов, при которых третий конверт оказывается надписанным правильно. Во втором слагаемом $\frac{n!}{1\cdot 2}$ этот случай также учитывается трижды: он фигурирует среди $(n-2)!$ исходов, при которых первый и второй конверты оказываются надписанными правильно, среди $(n-2)!$ исходов, при которых первый и третий конверты оказываются надписанными правильно, и среди $(n-2)!$ исходов, при которых второй и третий конверты оказываются надписанными правильно. Таким образом, в разности $n!-\frac{n!}{1\cdot 2}$ случай, когда все три конверта одновременно надписаны верно, вовсе не учитывается. Поскольку все такие случаи также являются благоприятными, то мы должны добавить к $n!-\frac{n!}{1\cdot 2}$ общее число таких исходов. Число исходов, при которых первый, второй и третий конверты оказываются правильно надписанными, равно числу способов, которыми можно надписать оставшиеся $n-3$ конверта, т. е. равно $(n-3)!$. Так как из n конвертов можно выделить $C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}$ троек конвертов, то, суммируя выражение $(n-3)!$ по всем таким тройкам, мы получим всего

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}(n-3)!=\frac{n!}{1\cdot2\cdot3}$$

не учтенных в выражении $n!-\frac{n!}{1\cdot2}$ исходов. Таким образом, исправленное число благоприятных исходов теперь станет равно

$$n!-\frac{n!}{1\cdot2}+\frac{n!}{1\cdot2\cdot3}.$$

После всего сказанного уже ясно, что последнее выражение для числа благоприятных исходов также не является окончательным. Действительно, в этом выражении точно учитываются все исходы, при которых оказываются правильно надписанными один, два или три конверта; однако исходы, при которых правильно надписаны более трех конвертов, здесь учитываются неверно. Рассмотрим еще случай, когда оказались правильно надписанными четыре конверта, например первый, второй, третий и четвертый. Этот случай учитывается четыре раза в слагаемом $n(n-1)!=n!$, шесть раз в слагаемом $\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(n-2)!=\frac{n!}{1\cdot2}$ (из наших четырех конвертов можно составить $C_4^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=$ шесть пар конвертов) и четыре раза в слагаемом $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}(n-3)!=\frac{n!}{1\cdot2\cdot3}$ (из четырех конвертов можно составить $C_4^3=4$ тройки конвертов). Таким образом, этот исход учитывается в выражении $n!-\frac{n!}{1\cdot2}+\frac{n!}{1\cdot2\cdot3}$ всего $4-6+4=2$ раза. Следовательно, для того чтобы правильно учесть все такие исходы, надо из $n!-\frac{n!}{1\cdot2}+\frac{n!}{1\cdot2\cdot3}$ вычесть полное число их. Но число исходов, при которых первый, второй, третий и четвертый конверты оказались правильно надписанными, равно $(n-4)!$. Умножив это выражение на число $C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$, определяющее количество четверок конвертов, мы получим выражение

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(n-4)! = \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Таким образом, следующее приближение к искомому числу благоприятных исходов дает выражение

$$n! - \frac{n!}{1\cdot 2} + \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Разумеется, и это выражение не является точным. Однако приведенные рассуждения показывают, что все последовательные поправки, которые приходится вносить, вычисляются по определенному простому закону. Нам остается только проверить справедливость этого закона в общем случае. Эту проверку можно осуществить методом математической индукции.

Предположим, что после k подобных шагов мы пришли к выражению

$$C_n^1(n-1)! - C_n^2(n-2)! + \cdots - (-1)^k C_n^k(n-k)! =$$
$$= n(n-1)! - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)! + \ldots$$
$$\cdots - (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}(n-k)! =$$
$$= n! - \frac{n!}{1\cdot 2} + \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots - (-1)^k \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k},$$

в котором правильно учитываются все исходы, при которых не более чем k конвертов оказались правильно надписанными (мы считаем, что $k < n$). Постараемся теперь правильно учесть также и те исходы, при которых $k+1$ конвертов были правильно надписаны. Каждый из таких случаев в первом слагаемом $C_n^1(n-1)!$ учитывается $C_{k+1}^1 = k+1$ раз, во втором слагаемом $C_n^2(n-2)!$, стоящем со знаком минус, он учитывается C_{k+1}^2 раз (ибо из $k+1$ конвертов можно составить C_{k+1}^2 пар), в третьем слагаемом $C_n^3(n-3)!$ он учитывается C_{k+1}^3 раз и т. д.; наконец, в последнем слагаемом $C_n^k(n-k)!$ он учитывается $C_{k+1}^k = k+1$ раз. Следовательно, во всей сумме этот случай учитывается

$$C_{k+1}^1 - C_{k+1}^2 + C_{k+1}^3 - \cdots - (-1)^k C_{k+1}^k$$

раз. Но так как

$$1 - (C_{k+1}^1 - C_{k+1}^2 + C_{k+1}^3 - \cdots - (-1)^k C_{k+1}^k) + (-1)^{k+1} = \\ = (1-1)^{k+1} = 0$$

(см. выше задачу 55б)), то

$$C_{k+1}^1 - C_{k+1}^2 + C_{k+1}^3 - \cdots - (-1)^k C_{k+1}^k = 1 + (-1)^{k+1},$$

т. е. эта сумма равна 2 при $k+1$ четном и равна 0 при $k+1$ нечетном. Так как все такие случаи мы должны учесть один раз, то при $k+1$ четном полное число таких случаев мы должны вычесть из полученного ранее выражения, а при $k+1$ нечетном — добавить к полученному ранее выражению. Но число исходов, в которых некоторые определенные $k+1$ конвертов оказались правильно надписанными, равно $(n-k-1)!$. Умножив этот результат на число $C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots(k+1)}$, выражающее число групп из $k+1$ конвертов, которые можно составить из всех n конвертов, мы получим в качестве члена, который надо отнять или добавить к имевшемуся ранее выражению в зависимости от четности или нечетности $k+1$, член

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots(k+1)}(n-k-1)! = \frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k+1)}.$$

Таким образом, выражение, в котором правильно учтены все исходы, в которых не более $k+1$ конвертов оказываются правильно надписанными, имеет вид

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots - (-1)^k \frac{n!}{k!} - (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!}.$$

Итак, предположив, что после k шагов мы будем иметь выражение

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots - (-1)^k \frac{n!}{k!},$$

мы доказали, что после $k+1$ шагов мы получим выражение

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots - (-1)^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!},$$

что в силу принципа математической индукции подтверждает подмеченное нами общее правило.

Все благоприятные случаи будут, очевидно, учтены после n шагов, когда будут верно учтены все исходы, при которых оказываются правильно надписанными не более чем n конвертов (т. е. любое число, ибо всего у нас имеется n конвертов). Следовательно, полное число благоприятных исходов равно

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots - (-1)^n\frac{n!}{n!}.$$

Так как общее число равновероятных исходов в нашем случае есть $n!$, то искомая вероятность равна

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - (-1)^n\frac{1}{n!}.$$

Это и есть требуемый ответ.

Второе решение. Как и в задаче с лисой (задача 73в)), искомую вероятность можно найти несколько быстрее, если подсчитывать не общее число благоприятных исходов, а общее число неблагоприятных исходов, т. е. число исходов, при которых ни один из конвертов не будет надписан правильно. Обозначим число таких исходов, зависящее, конечно, от числа n, через A_n. Перенумеруем как-нибудь все наши конверты от 1-го до n-го; адрес, который следовало надписать на k-м конверте, будем называть k-м адресом.

В случае неблагоприятного исхода на 1-м конверте может оказаться надписанным 2-й, 3-й, 4-й, ... , n-й адрес. Рассмотрим те из неблагоприятных исходов, при которых на 1-м конверте оказывается надписанным 2-й адрес. При этом на 2-м конверте может быть надписан или 1-й адрес или один из адресов от 3-го до 4-го. Оба эти случая мы рассмотрим отдельно.

Если на 2-м конверте надписан 1-й адрес, то для того, чтобы исход был неблагоприятным, необходимо только, чтобы ни на одном из $n-2$ оставшихся конвертов (от 3-го до n-го) не был надписан правильный адрес. Число таких исходов, очевидно, равно числу неблагоприятных исходов при числе конвертов, равном $n-2$, т. е. равно A_{n-2}.

Рассмотрим теперь те исходы, при которых на 2-м конверте надписан адрес, отличный от 1-го. Число таких исходов, очевидно, равно числу способов, которым можно надписать 2-й, 3-й, 4-й, ..., n-й конверты, проставив на них 1-й, 3-й, 4-й, ..., n-й адрес, притом так, чтобы на 2-м конверте не был надписан 1-й адрес, на 3-м конверте не был надписан 3-й адрес, на 4-м конверте — 4-й адрес, ..., на n-м конверте — n-й адрес. Это число, очевидно, равно числу неблагоприятных исходов в случае $n-1$ конвертов, т. е. A_{n-1} (то, что здесь на 2-м конверте не должен быть надписан 1-й адрес, а не 2-й, разумеется, совершенно несущественно).

Итак, общее число неблагоприятных случаев, при которых на 1-м конверте оказывается надписанным 2-й адрес, равно $A_{n-1}+A_{n-2}$. Такое же выражение мы получим для числа тех неблагоприятных случаев, при которых на 1-м конверте оказывается надписанным 3-й, 4-й, ..., n-й адрес. Так как всего в неблагоприятных случаях на 1-м конверте может оказаться надписанным $n-1$ различных адресов, то мы получаем формулу

$$A_n=(n-1)(A_{n-1}+A_{n-2}). \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь вероятность p_n того, что ни один из n конвертов не будет надписан правильно. Так как общее число равноправных исходов испытания в нашем случае равно $n!$ (см. начало первого решения), а число исходов, при которых ни один конверт не оказывается надписанным правильно, равно A_n, то

$$p_n=\frac{A_n}{n!}.$$

Формула (*) теперь дает

$$\frac{A_n}{n!}=(n-1)\left[\frac{A_{n-1}}{n!}+\frac{A_{n-2}}{n!}\right]=$$

$$=(n-1)\left[\frac{1}{n}\frac{A_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n(n-1)}\frac{A_{n-2}}{(n-2)!}\right]$$

или

$$p_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)p_{n-1}+\frac{1}{n}p_{n-2}; \quad p_n=p_{n-1}-\frac{1}{n}(p_{n-1}-p_{n-2}).$$

При $n=1$ будет единственный исход, являющийся благоприятным, так как $A_1=0$ и $p_1=0$; при $n=2$ из двух равновероятных исходов один будет благоприятным и один нет, так что $p_2=\frac{1}{2}$. Пользуясь полученной формулой, можно последовательно вычислять

$$p_3=p_2-\frac{1}{3}(p_2-p_1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3},$$

$$p_4=p_3-\frac{1}{4}(p_3-p_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\cdot3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4},$$

$$p_5=p_4-\frac{1}{5}(p_4-p_3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5},$$

. . . .

$$p_n=p_{n-1}-\frac{1}{n}(p_{n-1}-p_{n-2})=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)}-\frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)}=$$
$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Так как общее число благоприятных исходов равно $n!-A_n$, то искомая в задаче вероятность того, что хотя бы один конверт будет надписан правильно, равна

$$\frac{n!-A_n}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots-\frac{(-1)^n}{n!}.$$

б) При n большом сумма

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

очень близка к сумме бесконечного ряда

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots$$

В задаче 158 указывается, что сумма этого ряда равна $\frac{1}{e}$, где $e=2{,}71828182\ldots$ есть предел выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

при $n \to \infty$ (e — основание системы натуральных логарифмов; оно может быть определено как некоторая площадь, ограниченная гиперболой; см. задачи 151 и 156). Таким образом, найденная в этой задаче вероятность близка к $1 - \frac{1}{e} \approx$ $\approx 0{,}63212056$ $\left(\text{т. е. несколько меньше } \frac{2}{3}\right)$. (Заметим, что уже при $n = 10$ наша вероятность отличается от $1 - \frac{1}{e}$ только в восьмом десятичном знаке.)

79. а) Эта задача решается аналогично первому решению задачи 78а). Здесь рассматривается опыт, состоящий в том, что каждый из k пассажиров независимо от остальных выбирает наудачу один из n вагонов поезда. При этом один пассажир имеет n различных возможностей для выбора вагона, два пассажира n^2 возможностей, три пассажира n^3 возможностей, ... , k пассажиров n^k возможностей. Таким образом, общее число равновероятных исходов опыта здесь равно n^k.

Подсчитаем теперь число *неблагоприятных* исходов, т. е. таких исходов, при которых не все вагоны поезда оказываются заполненными. Число исходов, при которых первый вагон окажется пустым, равно числу способов размещения k пассажиров в остальных $n-1$ вагонах, т. е. равно $(n-1)^k$. Точно так же равно $(n-1)^k$ число исходов, при которых свободным оказывается второй, третий, ... , n-й вагон. Суммируя все исходы, при которых оказывается пустым первый, второй, третий, ... , n-й вагон, мы получим:

$$(n-1)^k + (n-1)^k + \ldots + (n-1)^k = n(n-1)^k$$

неблагоприятных исходов; однако при этом подсчете те исходы, при которых сразу несколько вагонов оказываются свободными, учитываются несколько раз так, что число $n(n-1)^k$ превосходит действительное число неблагоприятных исходов.

Постараемся подсчитать, на сколько преувеличивается при таком подсчете истинное число неблагоприятных исходов. Те исходы, при которых два вагона (например, i-й и j-й) оказываются пустыми, учитываются в сумме, давшей нам число $n(n-1)^k$, дважды: один раз в слагаемом, определяющем число исходов, при которых пуст i-й вагон, и второй раз в слагаемом, определяющем число исходов, при которых остается пустым j-й вагон. Но число исходов, при которых и i-й и j-й вагоны остаются свободными, равно числу способов размещения k пассажиров в остальных $n-2$ вагонах, т. е. равно $(n-2)^k$. Таково же будет число исходов, при которых незаполненными останутся любые два других вагона. Так как два вагона из общего числа n можно выбрать C_n^2 различными способами, то, суммируя все исходы, при которых пустыми оказываются различные пары вагонов, мы получим всего $C_n^2(n-2)^k$ исходов, учитываемых в выражении $n(n-1)^k$ дважды. Таким образом, более точно число неблагоприятных исходов можно представить как

$$n(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k = C_n^1(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k.$$

В последнем выражении все исходы, при которых свободными оказываются только один или же только два вагона, учитываются правильно (т. е. по одному разу каждый), но те исходы, при которых оказываются свободными сразу три вагона, здесь вовсе не учитываются (ср. первое решение задачи 78а)). Число исходов, при которых какие-то определенные три вагона оказываются свободными, равно числу способов размещения k пассажиров в $n-3$ вагонах, т. е. равно $(n-3)^k$. Так как три вагона из n можно выбрать C_n^3 различными способами, то, суммируя $(n-3)^k$ по всем возможным тройкам вагонов, мы получим всего $C_n^3(n-3)^k$ не учтенных в выражении $C_n^1(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k$ исходов. Таким образом, еще более точным выражением числа неблагоприятных исходов будет

$$C_n^1(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k + C_n^3(n-3)^k.$$

Продолжая далее рассуждать таким же образом (т. е. последовательно исправляя это выражение так, чтобы правильно учесть те исходы, при которых свободными оказываются $4, 5, \ldots, n-1$ вагонов), мы окончательно получим для истинного числа неблагоприятных исходов формулу

$$C_n^1(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k + C_n^3(n-3)^k - \ldots + (-1)^n C_n^{n-1}\cdot 1^k.$$

Точное доказательство этой формулы очень близко к доказательству формулы для числа благоприятных исходов, полученной в первом решении задачи 78а); оно предоставляется читателю.

Учитывая, что общее число всех равновероятных исходов опыта здесь равно $n^k = C_n^0 n^k$, мы для числа благоприятных исходов получаем формулу

$$C_n^0 n^k - C_n^1 (n-1)^k + C_n^2 (n-2)^k - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^k.$$

Отсюда вытекает, что искомая в задаче вероятность равна

$$P = \frac{C_n^0 n^k - C_n^1 (n-1)^k + C_n^2 (n-2)^k - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^k}{n^k} =$$

$$= C_n^0 \cdot 1^k - C_n^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + C_n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k.$$

б) Первое решение. Общее число равновероятных исходов опыта, состоящего в том, что k пассажиров как-то рассаживаются по n вагонам, равно n^k (см. решение задачи а)). При этом k пассажиров могут разместиться по каким-либо определенным r вагонам так, что ни один из этих вагонов не останется свободным,

$$C_r^0 r^k - C_r^1 (r-1)^k + C_r^2 (r-2)^k - \ldots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} \cdot 1^k$$

способами (этот результат был получен в решении задачи а)). А так как r вагонов из общего числа n можно выбрать C_n^r равными способами, то число благоприятных исходов нашего опыта, очевидно, равно

$$C_n^r \left[C_r^0 r^k - C_r^1 (r-1)^k + C_r^2 (r-2)^k - \ldots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} \cdot 1^k\right].$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$p = \frac{C_n^r \left[C_r^0 r^k - C_r^1 (r-1)^k + C_r^2 (r-2)^k - \ldots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} \cdot 1^k\right]}{n^k}.$$

Второе решение. Задачу б) можно решить и независимо от задачи а). Обозначим число способов, каким k пассажиров могут разместиться в n вагонах так, чтобы занятыми оказались ровно r вагонов, через $p(k, r)$ (число n мы считаем фиксированным). Подсчитаем, чему равно $p(k+1, r)$. Из каждого из $p(k, r)$ размещений k пассажиров, при которых занятыми оказываются r вагонов, можно получить r таких же размещений $k+1$ пассажиров, так как $(k+1)$-го пассажира можно поместить в каждый из r уже занятых вагонов. Аналогично из каждого из $p(k, r-1)$ размещений k пассажиров, при которых занятыми оказываются $r-1$ вагонов, можно получить $n-r+1$ размещений $k+1$ пассажиров, при которых занятыми оказываются r вагонов: для этого надо только поместить последнего пассажира в один из $n-(r-1)=n-r+1$ еще свободных вагонов. Отсюда вытекает, что

$$p(k+1, r) = rp(k, r) + (n-r+1)\,p(k, r-1).$$

Для того чтобы исключить n из последнего равенства, введем обозначение

$$\frac{p(k, r)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)} = A_k^r,$$

воспользовавшись которым, можно переписать равенство в виде:

$$A_{k+1}^r = rA_k^r + A_k^{r-1}. \qquad (*)$$

При этом еще надо иметь в виду, что

$$p(1, r) = \begin{cases} n & \text{при } r=1, \\ 0 & \text{при } r>1; \end{cases}$$

отсюда $A_1^1=1$ и $A_1^r=0$ при $r>1$. Теперь формула (*) дает нам возможность последовательно вычислять коэффициенты A_k^r наподобие того, как вычисляются биномиальные коэффициенты с помощью «арифметического треугольника». А именно, составим таблицу

1					
1	1				
1	3	1			
1	7	6	1		
1	15	25	10	1	
1	31	90	65	15	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

где каждое число равно сумме стоящего над ним числа, умноженного на номер столбца, и числа, стоящего в верхней строке в соседнем слева столбце; если какого-либо из этих чисел нет в таблице, оно заменяется нулем. Число, стоящее на пересечении k-й строки и r-го столбца, и будет равно A_k^r.

Теперь можно считать задачу решенной: полученные результаты позволяют вычислить число $p(k, r)$ для любых k и r, а следовательно, найти и искомую вероятность

$$p=\frac{p(k, r)}{n^k}$$

(общее число равновероятных исходов опыта равно n^k; см. решение задачи а)). Можно также найти и явное выражение для вероятности p при помощи метода математической индукции. А именно, с помощью соотношения (*) можно проверить, что если

$$A_k^r=\begin{cases}\dfrac{C_r^0 r^k-C_r^1(r-1)^k+\ldots+(-1)^{r-1}C_r^{r-1}\cdot 1^k}{r!} & \text{при } k\geqslant 1,\ 1\leqslant r\leqslant k,\\ 0 & \text{при } r>k,\end{cases}$$

то и A_{k+1}^r будет определяться такой же формулой с заменой k на $k+1$; кроме того, при $k=1$ эта формула дает верный результат

$$A_1^r=\begin{cases}1 & \text{при } r=1,\\ 0 & \text{при } r>1.\end{cases}$$

Полученное выражение для A_k^r приводит к тому же значению искомой вероятности, что и первое решение задачи (при вычислении вероятности приходится пользоваться тем, что

$$p(k, r)=A_k^r n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \text{ и } p=\frac{p(k, r)}{n^k}\Bigg).$$

Примечание. Из второго решения задачи б) можно, разумеется, получить новое решение задачи а) (поскольку задача а) представляет собой частный случай задачи б), отвечающий значению $r=n$).

в) Если число пассажиров меньше, чем число вагонов, то вероятность того, что в каждом из вагонов окажется хотя бы один пассажир, будет равна нулю. Если же число пассажиров совпадает с числом вагонов (и то и другое равно n), то все вагоны окажутся заполненными, лишь если в каждый вагон сядет один пассажир. При этом первый пассажир может занять любой из n вагонов, второй — любой из $n-1$ вагонов, оставшихся свободными после посадки первого, третий — любой из $n-2$ вагонов, оставшихся свободными после первых двух пассажиров, и т. д.; таким образом, здесь всего будет $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ исходов, при которых все вагоны оказываются заполненными. Так как общее число способов размещения n пассажиров в n вагонах равно n^n, то вероятность того, что n пассажиров заполнят n вагонов поезда, равна $\frac{n!}{n^n}$.

Воспользовавшись теперь формулой, выведенной в решении задачи а), получим:

$$C_n^0 n^k - C_n^1 (n-1)^n + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^k = 0 \quad \text{при} \quad k < n$$

и

$$C_n^0 n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^n = n!$$

Заменяя здесь биномиальные коэффициенты по формуле $C_n^k = C_n^{n-k}$ и переписывая члены в левой части равенств в обратном порядке, придем к соотношениям

$$1^k C_n^1 - 2^k C_n^2 + 3^k C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^k C_n^n = 0 \quad \text{при} \quad k < n$$

и

$$1^n C_n^1 - 2^n C_n^2 + 3^n C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^n C_n^n = (-1)^{n-1} n!.$$

Эти соотношения и требовалось доказать.

80. Подсчитаем прежде всего, сколько существует равновероятных исходов опыта, т. е. сколькими различными способами можно выписать по кругу наши 20 букв так, чтобы большие и малые буквы чередовались. Число различных способов, какими можно выписать 10 больших букв на 10 данных местах, равно числу перестановок из 10 элементов, т. е. 10!. Так как здесь нас интересует только п о р я д о к, в котором выписаны буквы, то расположения, получаемые одно из другого поворотом вокруг центра круга всех букв на k мест вправо, надо считать одинаковыми. Здесь k может равняться 1, 2, 3, ..., 10; поэтому число существенно различных расположений 10 больших букв равно $\frac{10!}{10} = 9!$. После этого 10 малых букв можно вписать на 10 мест между большими буквами 10! способами. Таким образом, мы получаем всего $10! \cdot 9!$ различных расположений, при которых большие и малые буквы чередуются; это число и следует принять за общее число равновероятных исходов.

Подсчитаем теперь число неблагоприятных исходов, т. е. таких, при которых хотя бы две одинаковые буквы оказываются соседними. Пусть a_1 есть число размещений, при которых данная большая буква расположена рядом с такой же малой буквой. Так как всего мы имеем 10 больших букв, то как будто общее число неблагоприятных исходов равно $10a_1$. Однако это заключение является неверным, так как при этом все расположения, при которых сразу несколько больших букв расположены каждая рядом с такой же малой буквой, учитываются по нескольку раз (ср. с первым решением задачи 78а) или с решением задачи 79). Так, например, все расположения, при которых две большие буквы расположены рядом с такими же малыми, учитываются в выражении $10a_1$ дважды. Поэтому если обозначить число расположений, при которых две данные большие буквы расположены каждая рядом с такой же малой буквой через a_2, то из числа $10a_1$ надо вычесть число $C_{10}^2 a_2$ (C_{10}^2 — число способов, каким можно выбрать две большие буквы из 10 таких букв).

В разности $10a_1 - C_{10}^2 a_2 = C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2$ правильно учитываются все расположения, при которых одна большая буква или две большие буквы расположены рядом с такими же малыми буквами, но все расположения, при которых больше двух больших букв расположены рядом каждая с такой же малой буквой, учитываются неправильно. Так, например, каждое расположение, при котором три большие буквы расположены рядом с такими же малыми буквами, учитывается три раза в члене $10a_1$ и три раза в члене $C_{10}^2 a_2$, так что из разности $C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2$ это расположение вовсе выпадает. Поэтому к этой разности следует прибавить еще член $C_{10}^3 a_3$, где a_3 — число расположений, при которых три данные большие буквы расположены каждая рядом с такой же малой буквой, C_{10}^3 — число способов, какими можно выбрать три большие буквы из 10 таких букв.

В выражении $C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2 + C_{10}^3 a_3$ точно один раз учитываются все расположения, при которых одна, две или три большие буквы расположены каждая рядом с такой же малой буквой, но расположения, при которых более трех больших букв расположены рядом с такими же малыми, учитываются неправильно; поэтому это выражение нуждается в дальнейшем уточнении. Аналогично доказывается (ср. с первым решением задачи 78а)), что истинное число расположений, при которых хотя бы одна большая буква расположена рядом с такой же малой буквой, выражается формулой

$$C_{10}^1a_1-C_{10}^2a_2+C_{10}^3a_3-C_{10}^4a_4+C_{10}^5a_5-C_{10}^6a_6+C_{10}^7a_7-\\-C_{10}^8a_8+C_{10}^9a_9-C_{10}^{10}a_{10},$$

где a_k ($k=1, 2, 3, \ldots, 9, 10$) — число расположений, при которых данные k больших букв расположены рядом с такими же малыми буквами.

Теперь нам осталось только определить числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Число a_1 расположений, при которых данная большая буква расположена рядом с такой же малой, например A и a выписаны рядом, определяется следующим образом. Выпишем каким-либо образом по кругу 18 букв без A и a так, чтобы большие и малые буквы чередовались; очевидно, это можно сделать $9!\cdot 8!$ различными способами (ср. с доказательством того, что общее число возможных расположений равно $10!\cdot 9!$). Затем выпишем где-то между двумя из уже написанных букв букву A; это можно сделать 18 различными способами, так как между 18 буквами есть 18 промежутков. Наконец, выпишем букву a рядом с A, а именно, между A и соседней с A большой буквой. Отсюда следует, что

$$a_1=9!\cdot 8!\cdot 18; \qquad C_{10}^1a_1=10!\cdot 9!\cdot 2.$$

Аналогично, чтобы определить число a_2, выпишем по кругу 16 букв без A, $Б$, a и $б$; это можно сделать $8!\cdot 7!$ различными способами. После этого можно будет вставить A в 16 различных мест, а затем $Б$ — в 17 различных мест. Наконец, впишем a и $б$ соответственно рядом с A и $Б$, причем так, чтобы большие и малые буквы чередовались; нетрудно видеть, что это можно сделать единственным способом (если A и $Б$ расположены не рядом, то a и $б$ надо вписать между этими буквами и соседними большими; если A и $Б$ расположены рядом и, например, A расположена между двумя большими буквами, то букву a надо вписать между A и соседней с A большой буквой, а букву $б$ — между A и $Б$). Отсюда следует, что

$$a_2=8!\cdot 7!\cdot 16\cdot 17; \quad C_{10}^2a_2=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}8!\cdot 7!\cdot 16\cdot 17=10!\cdot 8!\cdot 17.$$

Так же определяются все числа a_k, где $k=1, 2, \ldots, 9$. Для того чтобы найти число a_k, выпишем по кругу $20-2k$ букв без k больших букв и таких же малых; это можно сделать $(10-k)!\,(10-k-1)!$ способами. Затем впишем между этими буквами исключенные вначале k больших букв; это можно сделать $(20-2k)\,(20-2k+1)\ldots(20-2k+k-1)$ способами. Наконец, впишем оставшиеся k малых букв рядом с соответствующими большими так, чтобы большие и малые буквы чередовались; нетрудно видеть, что это возможно сделать единственным способом. Таким образом, окончательно получаем:

$$a_k=(10-k)!\,(10-k-1)!\times$$
$$\times(20-2k)\,(20-2k+1)\ldots(20-k-1).$$

Итак,

$$a_3=7!\cdot 6!\cdot 14\cdot 15\cdot 16;$$
$$C_{10}^3a_3=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 7!\cdot 6!\cdot 14\cdot 15\cdot 16=10!\cdot 8!\cdot 10;$$
$$a_4=6!\cdot 5!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15;$$
$$C_{10}^4a_4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6!\cdot 5!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15=10!\cdot 7!\cdot\frac{65}{2};$$
$$a_5=5!\cdot 4!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14;$$
$$C_{10}^5a_5=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 5!\cdot 4!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14=10!\cdot 7!\,\frac{143}{15};$$
$$a_6=4!\cdot 3!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13;$$
$$C_{10}^6a_6=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 4!\cdot 3!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13=10!\cdot 4!\cdot 429;$$
$$a_7=3!\cdot 2!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12;$$
$$C_{10}^7a_7=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot 3!\cdot 2!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12=10!\cdot 4!\cdot 66;$$
$$a_8=2!\cdot 1!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11;$$
$$C_{10}^8a_8=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot 2!\cdot 1!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11=10!\cdot 165;$$
$$a_9=1!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10;$$
$$C_{10}^9a_9=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot 1!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=10!\cdot 10.$$

Для определения числа a_{10} — числа расположений, при которых все большие буквы расположены рядом с такими же малыми, поступим следующим образом. Выпишем прежде всего 10 больших букв; как было показано выше, это можно сделать 9! существенно различными способами. После этого все малые буквы можно вписать рядом с соответствующими большими буквами двумя способами (так, чтобы каждая малая буква была расположена слева или справа от соответствующей большой). Таким образом,

$$a_{10} = 2 \cdot 9!; \quad C_{10}^{10} a_{10} = 2 \cdot 9!.$$

Окончательно для числа благоприятных случаев мы получаем:

$$10! \cdot 9! - 10! \cdot 9! \cdot 2 + 10! \cdot 8! \cdot 17 - 10! \cdot 8! \cdot 10 + 10! \cdot 7! \frac{65}{2} -$$

$$- 10! \cdot 7! \frac{143}{15} + 10! \cdot 4! \cdot 429 - 10! \cdot 4! \cdot 66 + 10! \cdot 165 -$$

$$- 10! \cdot 10 + 2 \cdot 9! =$$

$$= 10!\left(-9! + 8! \cdot 7 + 7! \cdot \frac{689}{30} + 4! \cdot 363 + 155\right) + 2 \cdot 9! =$$

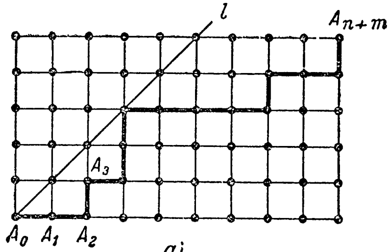
$$= 9! \cdot 439\,792,$$

и значит, искомая вероятность равна

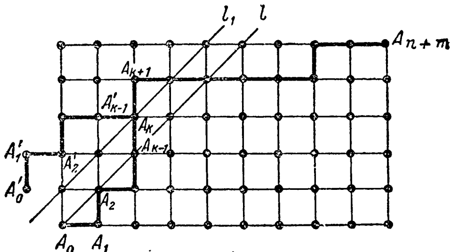
$$\frac{9! \cdot 439\,792}{10! \cdot 9!} = \frac{439\,792}{10!} = \frac{439\,792}{3\,628\,800} \approx 0{,}12.$$

81. а) Первое решение. Рассматриваемый в задаче опыт состоит в том, что $n+m$ покупателей, n из которых имеют пятерки, а m — только десятки, каким-то образом выстраиваются в очередь за билетами. Общее число равновероятных исходов этого опыта, очевидно, равно числу способов размещения m покупателей, имеющих только десятки в очереди из $n+m$ человек, т. е. равно C_{n+m}^{m}. Будем изображать эти C_{n+m}^{m} возможностей при помощи C_{n+m}^{m} кратчайших путей, соединяющих перекрестки $(0, 0)$ и (n, m) города, подобно тому, как мы это делали выше (см. стр. 27). А именно, отложим на плоскости, начиная от точки $A_0 = (0, 0)$, отрезок A_0A_1 длины 1, горизонтальный (направленный слева направо) или вертикальный (направленный снизу вверх) в зависимости от того, имел ли первый покупатель пятерку или только десятку. От точки A_1 отложим отрезок A_1A_2 длины 1, горизонтальный или вертикальный в зависимости от того, имел или не имел пятерку второй покупатель. От точки A_2 отложим отрезок A_2A_3

длины 1, горизонтальный или вертикальный в зависимости от того, имел или не имел пятерку третий покупатель, и т. д. (черт. 71, *а*). При этом каждой из C_{n+m}^{m} возможных расстановок $n+m$ покупателей в очереди будет соответствовать своя ломаная линия $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$, состоящая из



а)



б)

Черт. 71.

n горизонтальных отрезков и m вертикальных отрезков. Все эти ломаные будут заканчиваться в точке $A_{n+m}=(n, m)$, расположенной на n единиц правее и на m единиц выше точки A_0, и будут задавать всевозможные кратчайшие пути, соединяющие «перекрестки» $A_0=(0, 0)$ и $A_{n+m}=(n, m)$.

Найдем теперь, каково будет число случаев, при которых никому из покупателей не придется ожидать сдачи. Для того чтобы это обстоятельство имело место, очевидно, необходимо, чтобы впереди каждого из покупателей стояло не меньшее число покупателей, имеющих пятерки, чем покупателей, имеющих только десятки. Геометрически это означает, что каждому благоприятному исходу отвечает ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$, которая целиком лежит ниже прямой l, проходящей через точку A_0 под углом 45° к горизонтали (см. черт. 71, *а*); в частности, первый отрезок такой ломаной должен быть горизонтален.

Отсюда следует, что каждая ломаная линия, отвечающая неблагоприятному исходу, должна пересекать прямую l, или, что то же самое, должна иметь вершины, лежащие на прямой l_1, параллельной прямой l и полученной из l сдвигом на расстояние 1 вверх (черт. 71, *б*). При $m > n$ все наши ломаные обязательно будут иметь вершины на прямой l_1: в этом случае точка A_{n+m} расположена выше прямой l. Предположим теперь, что $m \leqslant n$ и найдем число ломаных, имеющих вершины на прямой l_1. Пусть A_k есть первая вершина такой ломаной $A_0A_1A_2 \ldots A_{n+m}$, принадлежащая прямой l_1. Отразим часть $A_0A_1 \ldots A_k$ этой ломаной относительно прямой l_1. Мы получим при этом новую ломаную $A_0'A_1' \ldots A_{k-1}'A_kA_{k+1} \ldots A_{n+m}$, соединяющую точку A_{n+m} с точкой A_0', симметричной A_0 относительно l_1, т. е. расположенной на единицу левее и на единицу выше точки A_0 (черт. 71, *б*). Далее, при $m \leqslant n$ каждая кратчайшая ломаная, соединяющая точки A_0' и A_{n+m}, обязательно пересечет прямую l_1. Если A_k — первая точка пересечения какой-либо ломаной $A_0'A_1' \ldots A_{k-1}'A_kA_{k+1} \ldots A_{n+m}$ с прямой l_1, то, отразив часть $A_0'A_1' \ldots A_{k-1}'A_k$ этой ломаной относительно l_1, мы получим ломаную $A_0A_1 \ldots A_kA_{k+1} \ldots A_{n+m}$, соединяющую A_0 с A_{n+m} и имеющую вершины на прямой l_1. Таким образом, при $m \leqslant n$ число ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и имеющих вершины на прямой l_1, совпадает с числом всех ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m}. Но эти последние ломаные составлены из $n+1$ горизонтальных и $m-1$ вертикальных отрезков; их число равно C_{n+m}^{m-1}.

Итак, в рассматриваемой задаче общее число равновероятных исходов равно C_{n+m}^m, а число неблагоприятных исходов равно общему числу исходов при $m > n$ и равно C_{n+m}^{m-1} при $m \leqslant n$. Отсюда следует, что число благоприятных исходов соответственно равно или нулю, или

$$C_{n+m}^m - C_{n+m}^{m-1} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} - \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} =$$
$$= \frac{(n+m)!}{n!\,(m-1)!}\left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}\right\} = \frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{(n+1)!\,m!}.$$

Значит, искомая вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи, равна нулю при $m>n$ (что ясно по самому смыслу вопроса) и равна

$$\frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{(n+1)!\,m!}:C_{n+m}^{m}=\frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{(n+1)!\,m!}:\frac{(n+m)!}{n!\,m!}=\frac{n-m+1}{n+1}$$

при $m\leqslant n$.

Второе решение. Зная ответ задачи (этот ответ можно угадать после непосредственного подсчета числа благоприятных исходов для нескольких простейших случаев с небольшими значениями n и m), справедливость его в общем случае проще всего доказывать методом математической индукции. Действительно, пусть $0<m\leqslant n$ (при $m=0$ и при $m>n$ ответ задачи очевиден). Пусть известно, что число кратчайших ломаных, соединяющих точку A_0 с точкой $A^{(1)}_{n+m-1}=(n,\ m-1)$, расположенной на n единиц правее и на $m-1$ единиц выше A_0, и не имеющих вершин на прямой l_1 (см. черт. 71, *б* и первое решение задачи), равно $\frac{n-(m-1)+1}{n+1}C_{n+m-1}^{m-1}$ и что число кратчайших ломаных, соединяющих точку A_0 с точкой $A^{(2)}_{n+m-1}=(n-1,\ m)$, расположенной на $n-1$ единиц правее и на m единиц выше A_0, и не имеющих вершин на l_1, равно $\frac{(n-1)-m+1}{(n-1)+1}C_{n+m-1}^{m}$. Так как каждая кратчайшая ломаная, соединяющая A_0 с $A_{n+m}=(n,\ m)$, обязательно проходит или через точку $A^{(1)}_{n+m-1}$, или через точку $A^{(2)}_{n+m-1}$, то отсюда следует, что число таких ломаных, не имеющих вершин на l_1, равно

$$\frac{n-(m-1)+1}{n+1}C_{n+m-1}^{m-1}+\frac{(n-1)-m+1}{(n-1)+1}C_{n+m-1}^{m}=$$
$$=\frac{n-m+2}{n+1}\,\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}=$$
$$=\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}\left[\frac{n-m+2}{n+1}+\frac{n-m}{m}\right]=$$
$$=\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}\cdot\frac{(n+m)\,(n-m+1)}{(n+1)\,m}=\frac{n-m+1}{n+1}C_{n+m}^{m}.$$

Поскольку при $m=0$, n любом и при $m=n+1$, n любом полученное выражение для числа кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и не имеющих вершин на l_1, заведомо верно (в первом из этих случаев оно обращается в $C_n^n=1$, а во втором в нуль), то согласно принципу математической индукции отсюда последовательно можно вывести, что эта же формула верна при $m=1$, n любом; $m=2$, n любом; $m=3$, n любом и т. д., т. е. что она верна при всех m и n, $0\leqslant m\leqslant n+1$.

Третье решение[1]). Нам надо найти вероятность того, что впереди каждого из покупателей в очереди будет стоять не меньше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих лишь десятки. Решим предварительно следующую задачу, близкую к этой, но не совпадающую с ней: найти вероятность того, что впереди каждого из покупателей будет стоять больше людей, имеющих пятерки, чем не имеющих их. Далее будет показано, что из решения этой новой задачи легко можно получить также и решение интересующей нас задачи[2]).

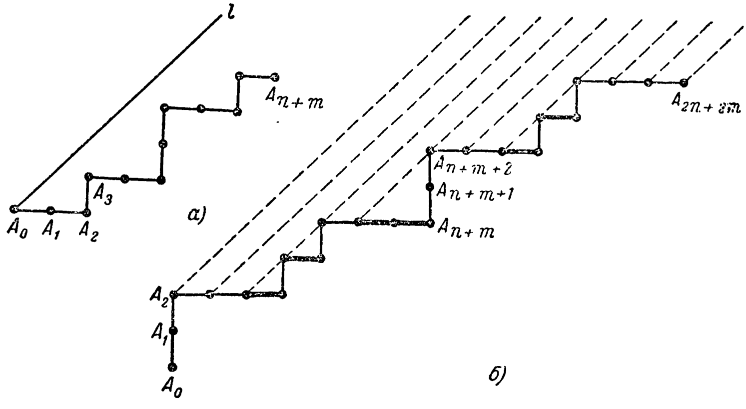
Ясно, что при $n\leqslant m$ искомая в задаче вероятность равна нулю. Будем теперь считать, что $n>m$, и рассмотрим одно какое-нибудь расположение $n+m$ покупателей (n имеющих пятерки и m — только десятки) в очереди. Из этого расположения можно получить $n+m-1$ новых расположений следующим образом: сначала переставим покупателя, стоящего в очереди первым, на последнее место (первое новое расположение), затем в новой очереди переставим первого покупателя (т. е. покупателя, ранее бывшего вторым) на последнее место (второе новое расположение) и т. д. до тех пор, пока на первом месте не окажется покупатель, первоначально стоявший последним [$(n+m-1)$-е новое расположение]. Итого, включая исходное расположение, мы получаем $n+m$ расположений покупателей в очереди. Сейчас будет показано, что из этих $n+m$ расположений ровно $n-m$ обладают тем свойством, что для них впереди каждого покупателя стоит

[1]) Это решение несколько длиннее предшествующих, но оно более элементарно (не предполагает никаких знаний, выходящих за пределы восьмого класса средней школы). Кроме того, это решение очень удобно для обобщений (см. первое решение задачи в)).

[2]) Верно, конечно, и обратное: из решения задачи 81а) легко следует и решение сформулированной здесь задачи (ср. заключительную часть настоящего решения).

больше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих лишь десятки.

Воспользуемся тем же наглядным изображением различных расположений $n+m$ человек в очереди при помощи ломаных, что и в первом решении задачи (см. стр. 267—268 и черт. 71, *а*). При этом каждому расположению будет отвечать своя ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m-1}A_{n+m}$, состоящая из n горизонтальных и m вертикальных отрезков (черт. 72, *а*). Очередям, в которых впереди каждого покупателя стоит больше покупателей, имеющих пятерки, чем покупателей, имеющих только десятки, будут отвечать ломаные, в которых впереди каждого отрезка расположено более горизонтальных, чем вертикальных отрезков, т. е. ломаные, лежащие целиком под прямой l, проходящей через точку A_0 под углом 45° к горизонтали, и не имеющие на этой прямой других вершин кроме A_0. Удобно представлять себе ломаную $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$ как лестницу, ведущую из точки A_0 в точку A_{n+m} и состоящую из некоторого числа ступенек различной ширины и различной высоты (общая ширина всех ступенек лестницы равна n единицам, а общая высота — m единицам). Если мы осветим эту лестницу сверху пучком параллельных лучей, падающих под углом 45° к горизонтали, то благоприятным с точки зрения условий задачи расположениям покупателей будут отвечать лестницы, у которых основание A_0 окажется осве-



Черт. 72.

щенным (не будет лежать в тени, отбрасываемой ступеньками лестницы).

Для изображения всех $n+m$ расположений, получающихся из одного последовательной перестановкой первого покупателя в конец очереди, пристроим к концу A_{n+m} ломаной $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$ ломаную $A_{n+m}A_{n+m+1}A_{n+m+2}\ldots A_{2n+2m}$, точно повторяющую $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$ (черт. 72, *б*). В таком случае нашим $n+m$ расположениям будут отвечать ломаные, состоящие из $n+m$ отрезков длины 1 и начинающиеся соответственно в точках $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n+m-1}$ (следовательно, оканчивающиеся в точках $A_{n+m}, A_{n+m+1}, A_{n+m+2}, \ldots, A_{2n+2m-1}$). Если теперь осветить полученную ломаную $A_0A_1A_2\ldots A_{2n+2m}$ сверху пучком параллельных лучей, падающих под углом 45° к горизонтали, то расположениям покупателей, при которых впереди каждого из них стоит больше покупателей, имеющих пятерки, чем покупателей, имеющих только десятки, будут отвечать ломаные $A_kA_{k+1}A_{k+2}\ldots A_{n+m+k}$, начинающиеся в освещенных (не находящихся в тени) точках A_k[1]). Таким образом, нам надо только подсчитать, сколько из точек $A_0, A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_{n+m-1}$ не будет находиться в тени.

Освещенными могут оказаться только лишь те из точек $A_0, A_1, \ldots, A_{n+m-1}$, для которых следующий за ними отрезок A_kA_{k+1} горизонтален, — таких точек будет столько же, сколько горизонтальных отрезков, т. е. n. Но не все эти n точек будут освещенными. На некоторые горизонтальные звенья ломаной $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$ будут отбрасывать тень вертикальные отрезки. Такую тень будут отбрасывать возможно не все m вертикальных отрезков длины 1, входящих в состав $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$, — некоторые из них могут отбрасывать тень левее точки A_0 (например, на черт. 72, *б* такими будут отрезки A_0A_1 и A_1A_2). Но так как ломаная $A_{n+m}A_{n+m+1}A_{n+m+2}\ldots A_{2n+2m}$ точно повторяет $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$, то ровно столько же вертикальных отрезков ломаной $A_{n+m}A_{n+m+1}A_{n+m+2}\ldots A_{2n+2m}$ будут отбрасывать тень левее точки A_{n+m}, т. е. на горизонтальные

---

[1]) Если тень от ступенек ломаной $A_kA_{k+1}A_{k+2}\ldots A_{n+m+k}$ не покроет точку A_k (это означает, что ломаная $A_kA_{k+1}A_{k+2}\ldots A_{n+m+k}$ отвечает благоприятному с точки зрения условий задачи расположению покупателей), то и тень от ступенек, расположенных между точками A_{n+m+k} и A_{2n+2m}, не сможет покрыть A_k. Это следует из того, что ломаная $A_{n+m+k}A_{n+m+k+1}\ldots A_{2n+2m}$ одинакова с ломаной $A_kA_{k+1}\ldots A_{n+m}$.

звенья ломаной $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$. Следовательно, всего на горизонтальные звенья ломаной $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$ отбрасывают тень ровно m вертикальных отрезков длины 1. А так как лучи падают под углом в 45°, то тень от m вертикальных отрезков покроет ровно m горизонтальных отрезков длины 1, т. е. ровно m из тех n точек из числа $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n+m-1}$, вслед за которыми идут горизонтальные отрезки. (Так, на черт. 72, *б* $n=7$, $m=4$ и освещенными оказываются лишь $7-4=3$ точки.) Тем самым полностью доказано, что при $n>m$ из $n+m$ расположений покупателей в очереди, получающихся из какого-либо одного расположения последовательной перестановкой первого покупателя в конец, ровно $n-m$ обладают тем свойством, что для них впереди каждого из покупателей стоит больше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих лишь десятки.

Заметим, что $n+m$ расположений, получающиеся из одного перемещением первого покупателя на последнее место, не обязательно будут все различными. Если n и m не взаимно простые, то может случиться, что очередь из $n+m$ человек состоит из нескольких частей, точно повторяющих друг друга (например, шесть покупателей, имеющих пятерки, и три покупателя, имеющих лишь десятки, могут расположиться в следующем порядке: 5 10 5 5 10 5 5 10 5; числа 5 и 10 здесь обозначают покупателей, имеющих пятерки и имеющих лишь десятки); в таком случае, переставив меньше чем $n+m$ раз (в нашем примере три раза) первого покупателя в конец, мы придем к расположению, не отличающемуся от первоначального. Однако легко видеть, что в этом случае среди $n+m$ расположений каждое из различных расположений (таких будет меньше, чем $n+m$) повторяется одинаковое число раз (в нашем примере $n+m=9$ и среди девяти расположений имеется три различных, каждое из которых повторяется трижды).

Таким образом, отношение числа благоприятных с точки зрения рассматриваемой задачи расположений к общему их числу для различных расположений будет тем же, что и для всех $n+m$ расположений, т. е. равно $\frac{n-m}{n+m}$. Итак, при $n>m$ все возможные расположения $n+m$ покупателей в очереди всегда можно разбить на группы, для каждой из которых отношение числа благоприятных расположений к общему числу их равно $\frac{n-m}{n+m}$. Отсюда вытекает, что при случайной расстановке в очередь n покупателей, имеющих пятерки, и m покупателей, имеющих только десятки, вероятность того, что впереди каждого человека будет стоять больше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих лишь десятки, будет равна $\frac{n-m}{n+m}$ (здесь считается, что $n>m$; при $n \leqslant m$ эта вероятность равна нулю). Тем самым сформулированная в начале настоящего решения вспомогательная задача полностью решена.

Перейдем теперь к решению основной задачи, т. е. к отысканию вероятности того, что впереди каждого человека в очереди стоит не меньше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих только десятки. Рассмотрим с этой целью всевозможные расстановки в очередь $n+1$ человек, имеющих пятерки, и m человек, имеющих только десятки. Общее число таких различных расстановок мы обозначим через $N_{n+1, m}$. Число тех из этих расстановок, при которых на первом месте в очереди оказывается покупатель, имеющий пятерку, равно числу способов расстановки в очередь n оставшихся покупателей, имеющих пятерки, и m покупателей, не имеющих их, — это число естественно обозначить через $N_{n, m}$. Отношение $\frac{N_{n, m}}{N_{n+1, m}}$ равно вероятности того, что на первом месте в очереди окажется покупатель, имеющий пятерку. А так как на первом месте с одинаковой вероятностью может оказаться любой из покупателей, то эта последняя вероятность равна отношению числа покупателей, имеющих пятерку, к общему числу их; следовательно, $\frac{N_{n, m}}{N_{n+1, m}}=\frac{n+1}{n+m+1}$ [1]. Обозначим теперь через $M_{n+1, m}$ число расстановок в очередь наших $n+m+1$ покупателей, при которых впереди каждого покупателя оказывается больше

[1]) Этот вывод немедленно следует также из формулы для числа сочетаний. Действительно, очевидно, $N_{n+1, m}=C_{n+m+1}^{m}=\frac{(n+m+1)!}{(n+1)!\, m!}$ (см. начало первого решения) и $N_{n, m}=C_{n+m}^{m}=\frac{(n+m)!}{n!\, m!}$; значит, $\frac{N_{n, m}}{N_{n+1, m}}=\frac{n+1}{n+m+1}$.

людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих только десятки; тогда, как было доказано выше,

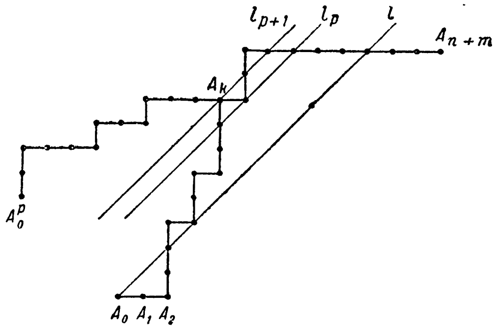
$$\frac{M_{n+1,\,m}}{N_{n+m,m}}=\begin{cases}\dfrac{n-m+1}{n+m+1} & \text{при } n+1>m,\\ 0 & \text{при } n+1\leqslant m.\end{cases}$$

Но для того чтобы в очереди из $n+m+1$ человек впереди каждого покупателя стояло больше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих только десятки, необходимо, чтобы на первом месте в очереди оказался человек, имеющий пятерку, и чтобы в остальной части очереди (состоящей из $n+m$ человек) впереди каждого из покупателей стояло не меньше людей, имеющих пятерки, чем не имеющих их. Таким образом, $M_{n+1,\,m}$ точно равно числу расстановок в очередь n покупателей, имеющих пятерки, и m покупателей, имеющих лишь десятки, при которых впереди каждого из покупателей стоит не меньше людей, имеющих пятерки, чем не имеющих их. Следовательно, искомая в задаче а) вероятность равна

$$\frac{M_{n+1,\,m}}{N_{n,\,m}}=\frac{M_{n+1,\,m}}{N_{n+1,\,m}}\cdot\frac{N_{n+1,\,m}}{N_{n,\,m}}=\frac{M_{n+1,\,m}}{N_{n+1,\,m}}\cdot\frac{n+m+1}{n+1}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{n-m+1}{n+1} & \text{при } n\geqslant m,\\ 0 & \text{при } n<m.\end{cases}$$

Примечание. Для частного случая $n=m$ еще одно (четвертое) решение этой задачи будет указано в примечании в конце решения задачи 82а).

б) Первое решение. Задачу б) можно решить аналогично первому решению задачи а). Наличие до начала продажи билетов в кассе p пятерок делает возможной выдачу сдачи во всех тех случаях, когда перед каждым покупателем в очереди число покупателей, имеющих только десятки, превосходит число покупателей, имеющих пятерки, не больше чем на p. Геометрически это значит, что ломаные, отвечающие благоприятным исходам, лежат целиком под прямой l_p, параллельной прямой l и полученной из нее сдвигом на p единиц вверх (черт. 73). Иначе говоря, ломаные, отвечающие неблагоприятным исходам, должны иметь точки, лежащие на прямой l_{p+1}, параллельной l_p и полученной из l_p сдвигом на расстояние 1 вверх, т. е. на прямой, полученной из l сдвигом на $p+1$ единиц вверх (см. черт. 73, где положено $p=3$). Ясно, что при $m>n+p$ все ломаные, отвечающие различным равновероятным исходам опыта, будут иметь вершины, лежащие на l_{p+1}, так что в этом случае искомая вероятность будет



Черт. 73.

равна нулю. Наоборот, при $m \leqslant p$ все исходы будут благоприятными и искомая вероятность будет равна единице.

Будем теперь считать, что $m \leqslant n+p$, но $m \geqslant p+1$. Так же, как и в решении задачи 81а), доказывается, что число ломаных, отвечающих неблагоприятным исходам, будет в этом случае равно числу ломаных, соединяющих точку A_{n+m} с точкой A_0^p, симметричной точке A_0 относительно прямой l_{p+1} (т. е. расположенной на $p+1$ единиц левее и на $p+1$ единиц выше точки A_0). Отсюда следует, что общее число неблагоприятных исходов здесь равно C_{n+m}^{m-p-1}, а общее число благоприятных исходов равно $C_{n+m}^m - C_{n+m}^{m-p-1}$. Таким образом, при $n+p \geqslant m \geqslant p+1$ вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи, равна

$$\frac{C_{n+m}^m - C_{n+m}^{m-p-1}}{C_{n+m}^m} = 1 - \frac{(m+n)!}{(m-p-1)!\,(n+p+1)!} : \frac{(m+n)!}{m!\;n!} =$$
$$= 1 - \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}.$$

Второе решение. Угадав ответ настоящей задачи, справедливость этого ответа можно доказать методом математической индукции совершенно аналогично второму решению задачи а). Действительно, пусть $n+p \geqslant m \geqslant p+1$ и пусть уже доказано, что число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с $A^{(1)}_{n+m-1}$ (см. второе решение задачи а)) и не имеющих вершин на l_{p+1}, равно $\left[1-\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}\right]C^{m-1}_{n+m-1}$ и что число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с $A^{(2)}_{n+m-1}$ и не имеющих вершин на l_{p+1}, равно $\left[1-\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{n(n+1)\ldots(n+p)}\right]C^{m}_{n+m-1}$. Тогда для числа кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и не имеющих вершин на l_{p+1}, мы получим формулу

$$\left[1-\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}\right]C^{m-1}_{n+m-1}+$$
$$+\left[1-\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{n(n+1)\ldots(n+p)}\right]C^{m}_{n+m-1}=$$
$$=\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}+\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}-$$
$$-\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}\cdot\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}-$$
$$-\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{n(n+1)\ldots(n+p)}\cdot\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!}=$$
$$=\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,(m-1)!}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right]-$$
$$-\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\cdot\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}\left[\frac{m-p-1}{n+p+1}+1\right]=$$
$$=\frac{(n+m)!}{n!\,m!}-\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\,\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}\cdot\frac{n+m}{n+p+1}=$$
$$=\left[1-\frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}\right]C^{m}_{n+m}.$$

Так как при $m=p$, n любом и при $m=n+p+1$, n любом полученная формула, очевидно, справедлива, то, воспользовавшись принципом математической индукции, отсюда легко вывести, что она справедлива при любых n и m, $p \leqslant m \leqslant n+p+1$.

Примечание. В частном случае $p=1$ решение этой задачи немедленно следует также из третьего решения задачи а). Действительно, рассмотрим всевозможные расстановки в очередь $n+2$ человек, имеющих пятерки, и m человек, имеющих лишь десятки, — общее число таких различных расстановок мы обозначим через $N_{n+2,m}$. Число тех из расстановок, при которых и на первом и на втором местах стоят покупатели, имеющие пятерки, равно, очевидно, числу различных расположений в очереди оставшихся n покупателей, имеющих пятерки, и m покупателей, имеющих только десятки, т. е. равно $N_{n,m}$. Отношение $\frac{N_{n,m}}{N_{n+2,m}}$ равно вероятности того, что в очереди из $n+m+2$ человек на первых двух местах окажутся покупатели, имеющие пятерки; так как вообще на первом месте может с одинаковой вероятностью оказаться любой из $n+m+2$ человек, а на втором — любой из остальных $n+m+1$ человек, а благоприятными здесь будут те расположения, при которых на первом месте стоит один из $n+2$ покупателей, имеющих пятерки, а на втором — один из $n+1$ оставшихся таких покупателей, то

$$\frac{N_{n,m}}{N_{n+2,m}}=\frac{(n+1)(n+2)}{(n+m+1)(n+m+2)}\ ^{1)}.$$

Пусть теперь $M_{n+2,m}$ — число расположений наших $n+m+2$ покупателей, при которых впереди каждого из них оказывается больше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих лишь десятки; тогда согласно доказанному в третьем решении задачи 81а)

$$\frac{M_{n+2,m}}{N_{n+2,m}}=\begin{cases}\dfrac{n-m+2}{n+m+2} & \text{при } n+2>m,\\ 0 & \text{при } n+2\leqslant m.\end{cases}$$

Но для того чтобы в очереди из $n+m+2$ человек впереди каждого стояло больше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих лишь десятки, необходимо, чтобы на первых двух местах стояли люди, имеющие пятерки (иначе наше условие будет не выполнено уже для третьего покупателя), и чтобы в оставшейся части очереди (состоящей из $n+m$ человек) впереди каждого покупателя число покупателей, имеющих лишь десятки, превосходило число покупателей, имеющих пятерки, не больше чем на единицу. Следовательно, $M_{n+2,m}$ равно числу благоприятных с точки зрения условий задачи 81б) (при $p=1$) расположений в очереди n покупателей, имеющих пятерки, и

---

[1]) Этот же результат вытекает из формулы для числа сочетаний:

$$N_{n+2,m}=C^m_{n+m+2}=\frac{(n+m+2)!}{(n+2)!\,m!},\quad N_{n,m}=C^m_{n+m}=\frac{(n+m)!}{n!\,m!};$$

следовательно,

$$\frac{N_{n,m}}{N_{n+2,m}}=\frac{(n+2)(n+1)}{(n+m+2)(n+m+1)}.$$

m покупателей, имеющих лишь десятки. Отсюда вытекает, что при $p=1$ искомая вероятность равна

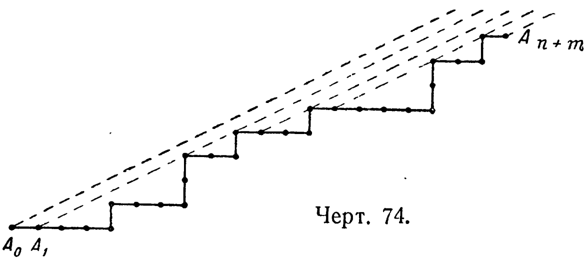
$$\frac{M_{n+2,m}}{N_{n,m}}=\frac{M_{n+2,m}}{N_{n+2,m}}\cdot\frac{N_{n+2,m}}{N_{n,m}}=\frac{M_{n+2,m}}{N_{n+2,m}}\cdot\frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(n+2)(n+1)},$$

т. е. равна

$$\frac{n-m+2}{n+m+2}\cdot\frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(n+2)(n+1)}=\frac{(n-m+2)(n+m+1)}{(n+2)(n+1)}=$$
$$=1-\frac{m(m-1)}{(n+2)(n+1)}$$

при $n\geqslant m-1$ и равна нулю при $n<m-1$.

в) Первое решение. Для того чтобы никому из покупателей не пришлось ждать сдачи, необходимо, чтобы для каждого из них число стоящих впереди людей, имеющих рубли, превышало не менее чем в два раза число людей, имеющих только трехрублевые билеты. Вероятность этого события проще всего подсчитать с помощью метода, указанного в третьем решении задачи а), — это решение переносится на случай задачи в) почти дословно. Прежде всего подсчитаем вероятность того, что впереди каждого из покупателей в очереди будет стоять более чем в два раза больше



Черт. 74.

людей, имеющих рубли, чем людей, имеющих только трехрублевые билеты — каждому такому расположению покупателей, очевидно, будет отвечать «лестница» $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$, основание A_0 которой не будет лежать в тени, если всю «лестницу» осветить сверху пучком параллельных лучей, падающих под углом, при котором длина тени, отбрасываемой вертикальным отрезком, ровно в два раза превосходит длину самого отрезка (черт. 74). Аналогично третьему решению задачи а) (с заменой лишь лучей, падающих под углом 45°, лучами, падающими под указанным углом) показывается, что вероятность того, что перед каждым покупателем будет стоять более чем в два раза больше людей, имеющих рубли, чем людей, не имеющих их, равна $\frac{n-2m}{n+2m}$ (здесь считается, что $n>2m$; при $n \leqslant 2m$ эта вероятность, очевидно, равна нулю).

Далее, повторив рассуждения, составляющие заключительную часть третьего решения задачи 81а), придем к следующему выводу.

Пусть имеются две очереди: первая состоит из n покупателей, имеющих рубли, и m покупателей, имеющих лишь трехрублевые билеты (всего $n+m$ человек), а вторая — из $n+1$ покупателей, имеющих рубли, и m покупателей, имеющих лишь трехрублевые билеты (всего $n+m+1$ человек). В таком случае вероятность того, что в первой очереди впереди каждого покупателя будет стоять не менее чем в два раза больше людей, имеющих рубли, чем не имеющих их, равна вероятности того, что во второй очереди перед каждым из покупателей будет стоять более чем в два раза больше людей, имеющих рубли, чем не имеющих их, умноженной на $\frac{n+m+1}{n+1}$.

Отсюда вытекает, что искомая в настоящей задаче вероятность равна

$$\frac{n-2m+1}{n+m+1} \cdot \frac{n+m+1}{n+1} = \frac{n-2m+1}{n+1}$$

при $n \geqslant 2m$ и равна нулю при $n<2m$.

Второе решение. Рассматриваемая задача допускает также решение, близкое по идее к первому решению задачи а); однако это решение здесь значительно сложнее, чем в случае задачи а).

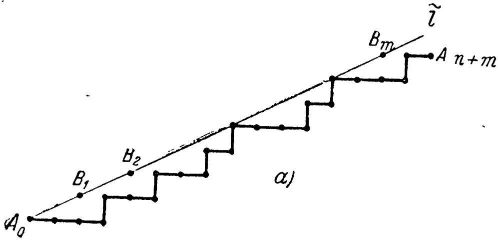
Как и в первом решении задачи а), будем изображать C_{n+m}^{m} равновероятных расположений $n+m$ покупателей в очереди при помощи C_{n+m}^{m} кратчайших ломаных, соединяющих точки

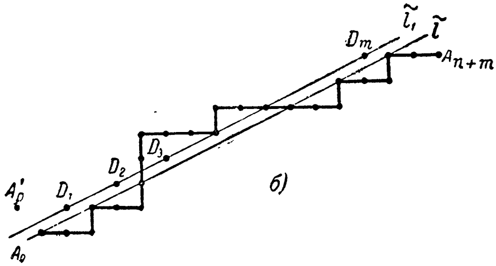
$$A_0 = (0,\ 0) \text{ и } A_{n+m} = (n,\ m).$$

В таком случае благоприятными с точки зрения условий задачи в) будут те расположения, которым отвечают ломаные, расположенные целиком ниже прямой $\tilde{l}$, проходящей через точки

$$A_0,\ B_1=(2,\ 1),\ B_2=(4,\ 2),\ \ldots,\ B_m=(2m,\ m)$$

(черт. 75, *а*)[1]. При $n<2m$ таких ломаных вообще не будет (в этом случае точка A_{n+m} будет расположена выше прямой $\tilde{l}$); в дальнейшем будем считать, что $n \geqslant 2m$.





Черт. 75.

Подсчитаем число расположений, неблагоприятных с точки зрения условий задачи; таким расположениям будут отвечать ломаные, соединяющие A_0 с A_{n+m} и пересекающие прямую $\tilde{l}$. Все такие ломаные будут иметь вершины, расположенные на прямой $\tilde{l}_1$, параллельной прямой $\tilde{l}$ и полученной из $\tilde{l}$ сдвигом на расстояние 1 налево (черт. 75, *б*)[2]. Таким образом, надо

---

[1]) В системе координат, имеющей начало в A_0, горизонтальную ось абсцисс и вертикальную ось ординат, уравнение прямой $\tilde{l}$ записывается в виде $x=2y$.

[2]) Так как $n \geqslant 2m$, то каждая ломаная, соединяющая A_0 с A_{n+m} и пересекающая $\tilde{l}$, обязательно хотя бы раз пересечет эту прямую в направлении слева направо. Ясно, что соседняя с такой точкой пересечения вершина ломаной будет принадлежать $\tilde{l}_1$ (см. черт. 75, *б*).

только подсчитать число ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и имеющих вершины на прямой $\tilde{l}_1$.

Обозначим, как и в первом решении задачи а), через A_0' точку, расположенную на единицу левее и на единицу выше точки A_0 (черт. 75, *б*). Докажем, что число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и имеющих вершины на прямой $\tilde{l}_1$, ровно в два раза превосходит число кратчайших ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m}.

Обозначим через N_{AB} число кратчайших ломаных, соединяющих точки («перекрестки») A и B; если $A=(i, j)$ и $B=(k, l)$, то $N_{AB}=C_{(k-i)+(l-j)}^{l-j}$. На прямой $\tilde{l}_1$ расположены следующие «перекрестки»: $D_1=(1, 1)$, $D_2=(3, 2)$, $D_3=(5,3),\ldots,D_k=(2k-1,k),\ldots,D_m=(2m-1, m)$. Так как

$$N_{A_0D_k}=C_{3k-1}^{k}=\frac{(3k-1)!}{k!\,(2k-1)!}=2\,\frac{(3k-1)!}{(k-1)!\,(2k)!}=2C_{3k-1}^{k-1},$$

а

$$N_{A_0'D_k}=C_{3k-1}^{k-1},$$

то при любом k $(k=1, 2, \ldots, m)$,

$$N_{A_0D_k}=2N_{A_0'D_k}.$$

Будем теперь сравнивать число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и впервые встречающих $\tilde{l}_1$ в точке D_k, с числом подобных же ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m}.

Число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и проходящих через точку D_1, очевидно, равно

$$N_{A_0D_1}\cdot N_{D_1A_{n+m}}=2N_{A_0'D_1}\cdot N_{D_1A_{n+m}},$$

а число кратчайших ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m} и проходящих через D_1, равно $N_{A_0'D_1}\cdot N_{D_1A_{n+m}}$; следовательно, первых ломаных ровно в два раза больше, чем вторых.

Число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и проходящих через точку D_2, но не проходящих через D_1, равно

$$N_{A_0D_2}\cdot N_{D_2A_{n+m}}-N_{A_0D_1}\cdot N_{D_1D_2}\cdot N_{D_2A_{n+m}}$$

(первый член здесь дает общее число ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и проходящих через D_2, а второй — число таких ломаных, проходящих также и через D_1), а число подобных ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m}, равно

$$N_{A_0'D_2} \cdot N_{D_2A_{n+m}} - N_{A_0'D_1} \cdot N_{D_1D_2} \cdot N_{D_2A_{n+m}}.$$

Так как $N_{A_0D_2} = 2N_{A_0'D_2}$ и $N_{A_0D_1} = 2N_{A_0'D_1}$, то и здесь число ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m}, ровно в два раза больше, чем число ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m}.

Аналогично, число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и проходящих через D_3, но не проходящих ни через D_1, ни через D_2, равно

$$N_{A_0D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} - N_{A_0D_1} \cdot N_{D_1D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} - N_{A_0D_2} \cdot N_{D_2D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} + \\ + N_{A_0D_1} \cdot N_{D_1D_2} N_{D_2D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}}$$

(первый член дает общее число ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и проходящих через D_3, второй и третий — число таких ломаных, проходящих также и через D_1, соответственно — через D_2, а четвертый — число ломаных, проходящих и через D_1, и через D_2, и через D_3), а число подобных же ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m}, равно

$$N_{A_0'D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} - N_{A_0'D_1} \cdot N_{D_1D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} - \\ - N_{A_0'D_2} \cdot N_{D_2D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} + N_{A_0'D_1} \cdot N_{D_1D_2} \cdot N_{D_2D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}};$$

легко видеть, что здесь также число ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m}, ровно в два раза больше, чем число ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m}. Продолжая далее рассуждать таким же образом, мы докажем, что для любого k число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и впервые встречающих прямую $\tilde{l}_1$ в точке D_k, ровно в два раза превосходит число кратчайших ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m} и впервые встречающих $\tilde{l}_1$ в той же точке.

Таким образом, общее число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и имеющих вершины на прямой $\tilde{l}_1$, ровно в два раза превосходит число кратчайших ломаных, соединяющих A_0' с A_{n+m} и имеющих вершины на той же прямой. Но любая кратчайшая ломаная, соединяющая A_0' с A_{n+m}, обязательно будет иметь хотя бы одну вершину на прямой $\tilde{l}_1$ (при $n \geqslant 2m$ точка A_0' расположена по левую сторону $\tilde{l}_1$, а точка A_{n+m} — по правую). Следовательно, при $n \geqslant 2m$ число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и имеющих вершины на прямой $\tilde{l}_1$, равно $2N_{A_0'A_{n+m}}$.

Теперь уже совсем легко найти ответ на вопрос, поставленный в задаче. При $n < 2m$ благоприятных исходов опыта вовсе не будет; следовательно, в этом случае искомая вероятность равна нулю (этот результат, разумеется, был очевиден заранее). При $n \geqslant 2m$ число неблагоприятных исходов равно

$$2N_{A_0'A_{n+m}} = 2C_{n+m}^{m-1};$$

так как общее число равновероятных исходов опыта равно C_{n+m}^m, то число благоприятных исходов при $n \geqslant 2m$ определится как

$$C_{n+m}^m - 2C_{n+m}^{m-1} = \frac{(n+m)!}{m!\,n!} - 2\frac{(n+m)!}{(m-1)!\,(n+1)!} =$$
$$= \frac{(n+m)!}{(m-1)!\,n!}\left\{\frac{1}{m} - \frac{2}{n+1}\right\} = \frac{(n+m)!\,(n-2m+1)}{m!\,(n+1)!},$$

и следовательно, искомая вероятность здесь равна

$$\frac{(n+m)!\,(n-2m+1)}{m!\,(n+1)!} : \frac{(n+m)!}{m!\,n!} = \frac{n-2m+1}{n+1}.$$

Третье решение. Угадав ответ настоящей задачи, можно, как и в задачах а) и б), очень просто доказать справедливость этого ответа методом математической индукции. Действительно, пусть $0 < 2m \leqslant n$ и предположим, что уже доказано, что число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с $A_{n+m-1}^{(1)}$ (см. второе решение задачи а)) и не имеющих вершин на прямой $\tilde{l}_1$, равно $\frac{n-2(m-1)+1}{n+1}C_{n+m-1}^{m-1}$ и что число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с $A_{n+m-1}^{(2)}$ и не имеющих вершин на той же прямой, равно $\frac{(n-1)-2m+1}{(n-1)+1}C_{n+m-1}^m$. В таком случае число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и не имеющих вершин на $\tilde{l}_1$, будет равно

$$\frac{n-2(m-1)+1}{n+1} C_{n+m-1}^{m-1} + \frac{(n-1)-2m+1}{(n-1)+1} C_{n+m-1}^{m} =$$
$$= \frac{n-2m+3}{n+1} \cdot \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!} + \frac{n-2m}{n} \cdot \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} =$$
$$= \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!} \left[\frac{n-2m+3}{n+1} + \frac{n-2m}{m} \right] =$$
$$= \frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!} \cdot \frac{(n+m)(n-2m+1)}{(n+1)\,m} =$$
$$= \frac{n-2m+1}{n+1} \frac{(n+m)!}{n!\;m!} = \frac{n-2m+1}{n+1} C_{n+m}^{m}.$$

Отсюда вытекает, что это выражение будет давать число кратчайших ломаных, соединяющих A_0 с A_{n+m} и не имеющих вершин на $\tilde{l}_1$, при любых n и m, $0 \leqslant 2m \leqslant n+1$ (ср. заключительную часть второго решения задачи а)).

Примечание. Задача в) может быть также сформулирована следующим образом:

n предметов, обладающих некоторым свойством X, и m предметов, обладающих свойством Y, располагаются в ряд в случайном порядке (так что вероятность появления любого из C_{n+m}^{m} возможных расположений этих $n+m$ предметов одинакова). Какова вероятность того, что впереди каждого из предметов в ряду будет расположено не менее чем в два раза больше предметов, обладающих свойством X, чем предметов, обладающих свойством Y?

В таком виде эта задача допускает совершенно естественное обобщение: можно спрашивать, какова будет вероятность того, что перед каждым предметом в ряду окажется не менее чем в r раз больше предметов, обладающих свойством X, чем предметов, обладающих свойством Y. Легко видеть, что все три решения, приведенных для случая $r=2$, переносятся на более общий случай произвольного целого r (особенно просто производится такое перенесение для первого решения задачи в), где оно совершенно очевидно). При этом оказывается, что для любого целого r искомая вероятность равна нулю при $n < rm$ (что очевидно) и равна $\frac{n-rm+1}{n+1}$ при $n \geqslant rm$. В частном случае $r=1$ мы приходим к задаче, равносильной задаче а); первое и третье решения задачи в) переходят при этом соответственно в третье и второе решения а), а второе решение в) — в решение, лишь формой отличающееся от первого решения а).

82. а) Нам надо подсчитать число Φ_n способов разбиения $2n$ точек, расположенных на окружности, на n пар так, что n хорд, имеющие концами эти пары точек, не пересекаются между собой. Обозначим наши $2n$ точек в порядке их следования на окружности через $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$. Точку A_i мы будем называть **началом хорды**, если она входит в пару (A_i, A_j), где $j>i$, и **концом хорды**, если она входит в пару (A_i, A_j), где $j<i$. Для того чтобы n хорд не пересекались, необходимо, чтобы никакие две пары точек не перемежались между собой: если (A_i, A_j) и (A_k, A_l) — две пары и $i<j$, $k<l$, $i<k$, то должно быть или $i<j<k<l$, или же $i<k<l<j$, но недопустимо, чтобы было $i<k<j<l$.

Пусть $A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, \ldots, A_{j_n}$ $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant 2n)$ — концы хорд в каком-то разбиении $2n$ точек на пары, удовлетворяющем нашему условию. Так как A_{j_1} является первым концом хорды и пары не перемежаются, то началом A_{i_1} хорды, оканчивающейся в A_{j_1}, может быть только соседняя с A_{j_1} точка A_{j_1-1}; из того, что существует такая точка, следует, что $j_1 \geqslant 2$. Откинем теперь пару (A_{j_1-1}, A_{j_1}) и рассмотрим первый из оставшихся $n-1$ концов хорды — точку A_{j_2}. Для того чтобы пары не перемежались, началом A_{i_2} хорды, оканчивающейся в точке A_{j_2}, должна быть ближайшая предшествующая A_{j_2} точка из числа оставшихся $2n-2$ точек (этой точкой может оказаться точка A_{j_2-1} или, если $A_{j_2-1}=A_{j_1}$, точка A_{j_2-3}); для того чтобы такая точка существовала, перед A_{j_2} должно быть расположено еще не менее трех точек (точки $A_{i_2}, A_{j_1}, A_{i_1}$), т. е. должно быть $j_2 \geqslant 4$. Откинем теперь и пару (A_{i_2}, A_{j_2}) и рассмотрим первый из оставшихся $n-2$ концов хорды — точку A_{j_3}. Началом A_{i_3} хорды, оканчивающейся в точке A_{j_3}, очевидно, должна быть ближайшая предшествующая A_{j_3} точка из числа еще оставшихся $2n-4$ точек (этой точкой A_{i_3} может оказаться или A_{j_3-1}, или A_{j_3-3}, или A_{j_3-5}). Так как четыре точки $A_{i_1}=A_{j_1-1}$, A_{j_1}, A_{i_2} и A_{j_2} заведомо расположены впереди A_{j_3}, то для того, чтобы среди остальных $2n-4$ точек имелась точка A_{i_3}, предшествующая A'_{j_3}, впереди A_{j_3} должно быть не менее пяти точек, т. е. должно быть $j_3 \geqslant 6$. Откинем затем пару (A_{i_3}, A_{j_3}) и рассмотрим конец A_{j_4} и будем продолжать далее откидывать уже составленные пары и рассматривать первый из оставшихся после этого концов хорды; при этом мы последовательно найдем для каждого такого конца A_{j_k} точку A_{i_k}, в которой начинается хорда, оканчивающаяся в A_{j_k}, т. е. последовательно перечислим все пары (A_{i_k}, A_{j_k}), на которые разбиваются наши $2n$ точек. Для того чтобы таким образом можно было составить n пар по n концам A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_n}, необходимо только, чтобы для всех k от 1 до n перед k-м концом A_{j_k} было расположено не менее чем $2k-1$ точек (т. е. чтобы было $j_k \geqslant 2k$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$).

Итак, разбиение $2n$ точек на n пар, при котором соответствующие n хорд не пересекаются, полностью определяется заданием n концов хорд в этом разбиении; при этом для того, чтобы некоторые n точек могли являться концами хорд в одном из таких разбиений, нужно только, чтобы перед k-й из них располагалось не менее $2k-1$ точек.

Это последнее условие иначе может быть сформулировано следующим образом: перед каждой из имеющихся $2n$ точек должно быть расположено не менее начал хорд (т. е. точек, не являющихся концами хорд), чем их концов. Таким образом, число различных разбиений $2n$ точек A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n} на пары, при которых соответствующие n хорд не пересекаются (т. е. число Φ_n), равно числу различных разбиений $2n$ точек на две группы по n точек в каждой («концы» и «начала» хорд), при которых перед каждой из имеющихся точек встречается не менее точек второй группы, чем точек первой (слово «перед» здесь означает: «впереди в ряду A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n}»). Но число таких разбиений $2n$ точек на две группы по n точек в каждой, очевидно, равно числу различных расстановок $2n$ покупателей, n из которых имеют пятерки, а n — только десятки, в очередь, при которых впереди каждого покупателя оказывается не менее покупателей, имеющих пятерки, чем не имеющих их (при подсчете числа различных расположений совершенно безразлично, имеем ли мы дело с точками первой и второй групп или с покупателями, имеющими и не имеющими пятерок). Так как в силу результата задачи 81а) число рассматриваемых здесь расстановок $2n$ покупателей равно $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$ $\left(\text{при } m=n \text{ дробь } \frac{n-m+1}{n+1}\right.$ обращается в $\left.\frac{1}{n+1}\right)$, то, следовательно, и

$$\Phi_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

Тем самым мы получили новое решение задачи 52б).

Отсюда сразу следует и новое решение задачи 51б). Действительно, в решении задачи 52б) было доказано, что число T_n различных разбиений выпуклого n-угольника на треугольники при помощи диагоналей, не пересекающихся внутри n-угольника, связано с числом Φ_n соотношением

$$\Phi_n = T_{n+2}.$$

Значит,

$$T_n = \Phi_{n-2} = \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2};$$

этот результат совпадает с ответом задачи 51б), полученным ранее иным путем.

Примечание. Приведенные здесь рассуждения можно использовать и в обратном направлении: считая известным ответ задачи 52б), из решения, приведенного на стр. 198, мы получаем отсюда новое (четвертое) решение задачи 81а) для частного случая $m = n$.

б) Нам надо подсчитать число ϕ_n разбиений $3n$ точек окружности на n троек, при которых стороны n вписанных треугольников, имеющих вершинами эти n троек точек, не пересекаются между собой. Решение этой задачи очень близко к решению приведенной выше задачи а); только оно опирается не на решение задачи 81а), а на решение задачи 81в).

Обозначим наши $3n$ точек в порядке их следования на окружности через $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{3n-1}, A_{3n}$. Точку A_i мы будем называть «началом треугольника», если она входит в тройку (A_i, A_j, A_k), где $i<j<k$, «серединой треугольника», если она входит в тройку (A_i, A_j, A_k), где $j<i<k$, и «концом треугольника», если она входит в тройку (A_i, A_j, A_k), где $j<k<i$. Для того чтобы стороны треугольников, имеющих вершинами наши тройки, не пересекались, необходимо только, чтобы все эти тройки не перемежались между собой: если (A_i, A_j, A_k) и (A_l, A_m, A_n) — две из этих троек и $i<j<k$, $l<m<n$, $i<l$, то все три числа l, m и n должны быть одновременно или больше i, но меньше j, или больше j, но меньше k, или же больше k.

Рассмотрим теперь совокупность «концов треугольников» в некотором разбиении $3n$ точек на тройки, при котором стороны соответствующих n треугольников не пересекаются; это будут какие-то n точек $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_n}$ из числа имеющихся $3n$ (эти точки мы перечисляем в порядке их следования на окружности, так что $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$ $\ldots < k_n \leqslant 3n$). Так как A_{k_1} является первым «концом треугольника», то ясно, что первыми двумя вершинами треугольника, третьей вершиной которого является A_{k_1}, должны быть непосредственно предшествующие A_{k_1} точки A_{k_1-1} и A_{k_1-2}; отсюда, в частности, вытекает, что должно быть $k_1 \geqslant 3$. Откинем далее уже составленную тройку $(A_{k_1-2}, A_{k_1-1}, A_{k_1})$ и рассмотрим первый из оставшихся $n-1$ «концов треугольника» — точку A_{k_2}. Двумя остальными вершинами треугольника, имеющего третью вершину в этой точке, должны быть точки A_{i_2} и A_{j_2}, непосредственно предшествующие точке A_{k_2} в ряду оставшихся $3n-3$ точек.

Таким образом, зная все «концы треугольников», мы можем найти, в какую тройку входит второй «конец» A_{k_2}, причем k_2 должно быть не меньше 6 (ибо все пять точек A_{k_1-2}, A_{k_1-1}, A_{k_1}, A_{i_2}, A_{j_2} предшествуют A_{k_2}).

Продолжая и далее откидывать уже составленные тройки и рассматривать первый из оставшихся после этого «концов треугольника», мы аналогично решению задачи а) сможем последовательно перечислить все n троек $(A_{i_l}, A_{j_l}, A_{k_l})$, на которые разбиваются наши $3n$ точек; при этом для того, чтобы такое составление n троек по n «концам треугольника» было возможно, необходимо только, чтобы для всех l от 1 до n впереди l-го «конца треугольника» A_{k_l} было расположено не менее $3l-1$ точек, т. е. чтобы было $k_l \geqslant 3l$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда аналогично тому, как это делалось в решении задачи а), можно заключить, что число различных разбиений $3n$ точек на n троек, при которых стороны соответствующих n треугольников не пересекаются (т. е. число ψ_n), равно числу разбиений $3n$ точек на две группы в n и в $2n$ точек, при которых впереди каждой из точек встречается не менее чем в два раза больше точек второй группы, чем точек первой группы.

Иначе это можно сформулировать следующим образом: искомое число ψ_n равно числу таких расстановок в очередь $3n$ покупателей, $2n$ из которых имеют рубли, а остальные n — только трехрублевки, что впереди каждого покупателя оказывается не менее чем в два раза больше покупателей, имеющих рубли, чем покупателей, имеющих лишь трехрублевки. Вследствие результата задачи 81в) отсюда сразу следует, что

$$\psi_n = \frac{1}{2n+1} C_{3n}^n.$$

Этот ответ можно представить в одном из следующих видов:

$$\psi_n = \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!} = \frac{1}{3n+1} \cdot \frac{(3n+1)!}{n!\,(2n+1)!} = \frac{1}{3n+1} C_{3n+1}^n =$$
$$= \frac{1}{n} C_{3n}^{n-1} = \frac{3}{2n+1} C_{3n-1}^{n-1} = \frac{3}{n-1} C_{3n-1}^{n-2}.$$

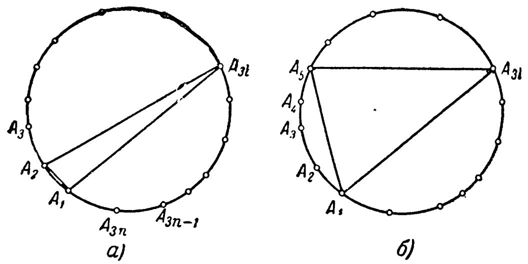
в) Обозначим через S_n число различных способов разбиения выпуклого $2n$-угольника на четырехугольники при помощи диагоналей, не пересекающихся внутри этого $2n$-угольника[1]). Ниже будет показано, что $S_{n+1} = \psi_n$; отсюда в силу результата задачи б) сразу будет следовать и решение рассматриваемой здесь задачи.

Доказательство равенства $S_{n+1} = \psi_n$ проводится совершенно аналогично доказательству того, что $T_{n+2} = \Phi_n$ (см. решение задачи 52б)). Прежде всего мы выведем соотношение, позволяющее определить ψ_n по известным значениям ψ_1, ψ_2, $\psi_3, \ldots, \psi_{n-1}$ (это соотношение близко к соотношению, полученному в решении задачи 52а), и может быть выведено аналогичным путем), затем покажем, что такому же соотношению удовлетворяют числа $Q_n = S_{n+1}$ (эта часть решения будет близка к решению задачи 52б)), после чего нужное нам равенство станет совершенно очевидным.

Приступим к выводу соотношения, связывающего ψ_n с числами $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{n+1}$. Обозначим $3n$ точек, о которых идет речь в условии задачи 82б), в порядке их следования на окружности через $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{3n-1}, A_{3n}$. Рассмотрим тот из n вписанных треугольников, имеющих эти точки вершинами, которому принадлежит вершина A_1. Ясно, что второй (в смысле порядка следования в ряду $A_1, A_2, \ldots, A_{3n}$) вершиной этого треугольника должна быть одна из точек $A_2, A_5, A_8, \ldots, A_{3k-1}, \ldots, A_{3n-1}$ (иначе первая сторона

[1]) Следуя решению задачи 50, легко показать, что каждое такое разбиение будет содержать ровно $n-1$ четырехугольников и что число диагоналей, участвующих в каждом из разбиений, постоянно и равно $n-2$. Из этих же рассмотрений следует, что выпуклый $(2n+1)$-угольник вовсе нельзя разбить на четырехугольники при помощи не пересекающихся внутри него диагоналей.

рассматриваемого треугольника отсекала бы дугу, на которой расположено не кратное трем число точек, и, следовательно, должна была бы пересечься хотя бы с одной из сторон прочих треугольников). Пусть, например, второй вершиной будет точка A_2; тогда третьей вершиной должна быть одна из точек $A_3, A_6, A_9, \ldots, A_{3l}, \ldots, A_{3n}$. Если третьей вершиной будет точка A_{3l} (черт. 76, *а*), то сторона A_2A_{3l} рассматриваемого треугольника отсечет дугу, внутри которой расположено $3(l-1)$ из наших точек (точки $A_3, A_4, A_5, \ldots, A_{3l-1}$),



Черт. 76.

а сторона $A_{3l}A_1$ — дугу, внутри которой расположено $3(n-l)$ точек (точки $A_{3l+1}, A_{3l+2}, \ldots, A_{3n}$). Всевозможные удовлетворяющие условиям задачи разбиения имеющихся $3n$ точек на n троек, в которых точка A_1 входит в тройку (A_1, A_2, A_{3l}), мы получим, комбинируя все ϕ_{l-1} разбиений на тройки $3(l-1)$ точек $A_3, A_4, \ldots, A_{3l-1}$ со всеми ϕ_{n-l} разбиениями на тройки $3(n-l)$ точек $A_{3l+1}, A_{3l+2}, \ldots, A_{3n}$; следовательно, общее число таких разбиений равно $\phi_{l-1}\phi_{n-l}$. Поскольку l здесь может принимать значения $1, 2, 3, \ldots, n$, то общее число разбиений, в которых точка A_1 входит в одну тройку с точкой A_2, равно сумме

$$\phi_{n-1}+\phi_1\phi_{n-2}+\phi_2\phi_{n-3}+\ldots+\phi_{n-2}\phi_1+\phi_{n-1}$$

(первый и последний члены здесь отвечают $l=1$ и $l=n$; эти члены, очевидно, просто равны ϕ_{n-1}). Если же второй вершиной треугольника, содержащего A_1, будет A_5, то третьей вершиной должна быть одна из точек $A_6, A_9, \ldots, A_{3l}, \ldots, A_{3n}$; всевозможные разбиения, при которых второй вершиной этого треугольника будет A_5, а третьей — A_{3l} (черт. 76, *б*), мы получим, комбинируя $\varphi_1 = 1$ способов разбиения на тройки трех точек A_2, A_3, A_4, отсекаемых стороной A_1A_5, с φ_{l-2} разбиениями $3(l-2)$ точек A_6, A_7, ..., A_{3l-1}, отсекаемых стороной A_5A_{3l}, и с φ_{n-l} разбиениями $3(n-l)$ точек A_{3l+1}, A_{3l+2}, ..., A_{3n}, отсекаемых стороной $A_{3l}A_1$, так что общее число разбиений, содержащих тройку (A_1, A_5, A_{3l}), будет равно $\varphi_1\varphi_{l-2}\varphi_{n-l}$. Заставляя здесь l пробегать значения 2, 3, 4, ..., n, мы для общего числа разбиений, в которых второй вершиной треугольника, содержащего вершину A_1, является A_5, получим сумму

$$\varphi_1(\varphi_{n-2} + \varphi_1\varphi_{n-3} + \varphi_2\varphi_{n-4} + \ldots + \varphi_{n-3}\varphi_1 + \varphi_{n-2}).$$

Продолжая рассуждать таким же образом, мы найдем, что число разбиений, в которых второй вершиной треугольника, начинающегося в A_1, будет A_8, равно

$$\varphi_2(\varphi_{n-3} + \varphi_1\varphi_{n-4} + \ldots + \varphi_{n-4}\varphi_1 + \varphi_{n-3})$$

и т. д.; число разбиений, в которых второй вершиной рассматриваемого треугольника является A_{3n-7}, равно

$$\varphi_{n-3}(\varphi_2 + \varphi_1\cdot\varphi_1 + \varphi_2);$$

число разбиений, где этой второй вершиной будет A_{3n-4}, равно

$$\varphi_{n-2}(\varphi_1 + \varphi_1),$$

и, наконец, число разбиений, где этой вершиной является A_{3n-1}, есть

$$\varphi_{n-1}.$$

Таким образом, для φ_n мы получаем следующую общую формулу [1]):

$$\begin{aligned}\varphi_n = \varphi_{n-1} &+ \varphi_1\varphi_{n-2} + \varphi_2\varphi_{n-3} + \ldots + \varphi_{n-2}\varphi_1 + \varphi_{n-1} + \\ &+ \varphi_1(\varphi_{n-2} + \varphi_1\varphi_{n-3} + \ldots + \varphi_{n-3}\varphi_1 + \varphi_{n-2}) + \\ &+ \varphi_2(\varphi_{n-3} + \varphi_1\varphi_{n-4} + \ldots + \varphi_{n-4}\varphi_1 + \varphi_{n-3}) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \varphi_{n-3}(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_{n-2}(\varphi_1 + \varphi_1) + \varphi_{n-1}.\end{aligned}$$

[1]) Условно полагая $\varphi_0 = 1$ и воспользовавшись знаком суммы, эту длинную формулу можно кратко записать следующим образом:

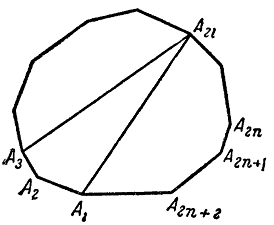
$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}\varphi_i\varphi_j\varphi_{n-i-j-1} = \sum_{i+j+k=n-1}\varphi_i\varphi_j\varphi_k.$$

Это и есть то соотношение, которое мы хотели получить. Пользуясь им и учитывая, что $\varphi_1 = 1$ (φ_1 есть число разбиений трех точек на тройки), мы можем последовательно подсчитать все значения φ_n; в частности, отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1 = 3,\\
\varphi_3 &= \varphi_2 + \varphi_1\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1(\varphi_1 + \varphi_1) + \varphi_2 =\\
&= 3 + 1\cdot 1 + 3 + 1\cdot(1+1) + 3 = 12,\\
\varphi_4 &= \varphi_3 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_1(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_1 + \varphi_2) +\\
&\qquad + \varphi_2(\varphi_1 + \varphi_1) + \varphi_3 =\\
&= 12 + 1\cdot 3 + 3\cdot 1 + 12 + 1\cdot(3 + 1\cdot 1 + 3) +\\
&\qquad + 3\cdot(1+1) + 12 = 55
\end{aligned}$$

и т. д. (все эти значения можно получить также из формулы для φ_n, выведенной при решении задачи 82б)).

Выведем теперь аналогичное соотношение, связывающее S_{n+1} с S_n, S_{n-1}, S_{n-2}, ..., S_2. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2n}\,A_{2n+1}\,A_{2n+2}$ есть выпуклый $(2n+2)$-угольник (черт. 77); рассмотрим тот из четырехугольников, на которые он разбивается непересекающимися диагоналями, в который входит сторона A_1A_2. Третьей (в порядке следования в ряду A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n+2}) вершиной этого четырехугольника может быть или A_3, или A_5, или A_7, ..., или A_{2n+1} (четная вершина $(2n+2)$-угольника этой третьей вершиной быть не может, ибо иначе соответствующая диагональ отсекала бы от $(2n+2)$-угольника многоугольник с нечетным числом сторон, а такой многоугольник не может быть разбит диагоналями на четырехугольники; см. сноску на стр. 291). Если этой третьей вершиной будет A_3, то четвертой вершиной может оказаться или A_4, или A_6, или A_8, и т. д., или A_{2n+2}; общее число разбиений нашего $(2n+2)$-угольника, в которые входит четырехугольник $A_1A_2A_3A_{2l}$, равно, очевидно, $S_{l-1}\,S_{n-l+2}$ [ибо стороны A_1A_{2l} и A_3A_{2l} отсекают от $(2n+2)$-угольника один $2(l-1)$-угольник и один $2(n-l+2)$-угольник; см. черт. 77]. Отсюда следует, что общее число разбиений, в которых третьей вершиной четы-



Черт. 77.

рехугольника, содержащего A_1A_2, будет A_3, равно

$$S_n+S_2S_{n-1}+S_3S_{n-2}+\ldots+S_{n-1}S_2+S_n.$$

Точно так же доказывается, что общее число разбиений, в которых этой третьей вершиной будет A_5, равно

$$S_2(S_{n-1}+S_2S_{n-2}+S_3S_{n-3}+\ldots+S_{n-2}S_2+S_{n-1});$$

общее число разбиений, в которых этой вершиной является A_7, равно

$$S_3(S_{n-2}+S_2S_{n-3}+\ldots+S_{n-3}S_2+S_{n-2})$$

и т. д.; общее число разбиений, где этой третьей вершиной является A_{2n-3}, равно

$$S_{n-2}(S_3+S_2S_2+S_3);$$

число разбиений, где этой вершиной будет A_{2n-1}, равно

$$S_{n-1}(S_2+S_2)$$

и, наконец, число разбиений, где этой вершиной является A_{2n+1}, есть S_n.

Отсюда для S_{n+1} получается следующая общая формула[1]):

$$\begin{aligned}S_{n+1}=S_n&+S_2S_{n-1}+S_3S_{n-2}+\ldots+S_{n-1}S_2+S_n+\\&+S_2(S_{n-1}+S_2S_{n-2}+\ldots+S_{n-2}S_2+S_{n-1})+\\&+S_3(S_{n-2}+S_2S_{n-3}+\ldots+S_{n-2})+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+S_{n-2}(S_3+S_2S_2+S_3)+S_{n-1}(S_2+S_2)+S_n.\end{aligned}$$

Это и есть формула, которая нам нужна. Пользуясь этой формулой и учитывая, что $S_2=1$, мы можем последовательно подсчитать S для всех значений n; в частности, для $n=3$, 4, 5 отсюда следует, что

$$\begin{aligned}S_3&=S_2+S_2+S_2=3,\\S_4&=S_3+S_2S_2+S_3+S_2(S_2+S_2)+S_3=\\&=3+1\cdot1+3+1\cdot(1+1)+3=12,\\S_5&=S_4+S_2S_3+S_3S_2+S_4+S_2(S_3+S_2S_2+S_3)+\\&\qquad\qquad+S_3(S_2+S_2)+S_4=\\&=12+3+3+12+(3+1+3)+3\cdot(1+1)+12=55.\end{aligned}$$

---

[1]) Условно полагая $S_1=1$ и воспользовавшись знаком суммы, мы можем кратко записать эту формулу следующим образом:

$$S_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i+1}S_iS_jS_{n-i-j+2}=\sum_{i+j+k=n+2}S_iS_jS_k.$$

Заметим, что если мы обозначим $S_{n+1} = Q_n$, то выведенное здесь соотношение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_n = Q_{n-1} &+ Q_1Q_{n-2} + Q_2Q_{n-3} + \ldots + Q_{n-2}Q_1 + Q_{n-1} + \\ &+ Q_1(Q_{n-2} + Q_1Q_{n-3} + \ldots + Q_{n-3}Q_1 + Q_{n-2}) + \\ &+ Q_2(Q_{n-3} + Q_1Q_{n-4} + \ldots + Q_{n-3}) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ Q_{n-3}(Q_2 + Q_1Q_1 + Q_2) + Q_{n-2}(Q_1 + Q_1) + Q_{n-1}. \end{aligned}$$

Это соотношение в точности совпадает с тем, которое было получено выше для величины ψ_n (см. стр. 293). Так как, кроме того, $Q_1 = S_2 = 1 = \psi_1$, то последовательный подсчет значений Q_n по нашей формуле для $n = 2, 3, 4, \ldots$ даст в точности те же результаты, что и последовательный подсчет значений ψ_n, другими словами,

$$Q_n = \psi_n,$$

т. е.

$$S_n = Q_{n-1} = \psi_{n-1}$$

(выше мы уже видели, что $S_3 = \psi_2$, $S_4 = \psi_3$ и $S_5 = \psi_4$).

Отсюда в силу результата задачи б) вытекает, что

$$S_n = \frac{1}{2n-1} C_{3n-3}^{n-1} = \frac{(3n-3)!}{(n-1)!\,(2n-1)!}.$$

Это и есть ответ нашей задачи.

Примечание. Задачи 52б) и 82б) являются частными случаями следующей более общей задачи.

На окружности расположено kn точек. Сколькими различными способами можно разбить их на n групп по k точек в каждой так, чтобы стороны n вписанных выпуклых k-угольников, имеющих вершинами эти группы по k точек, не пересекались между собой?

Решение этой общей задачи может быть проведено совершенно аналогично решению задачи 82б); при этом только надо опираться не на результат задачи 81в), а на обобщение этой задачи, указанное в примечании в конце решения задачи 81в). Легко видеть, что при этом мы придем к следующему ответу на наш вопрос: искомое число способов равно

$$\frac{1}{(k-1)n+1} C_{kn}^{n} = \frac{1}{kn+1} C_{kn+1}^{n} = \frac{(kn)!}{n!\,[(k-1)n+1]!}.$$

Точно так же задача Эйлера 51б) и задача 82в) являются частными случаями такой задачи:

Сколькими различными способами можно разбить выпуклый

$[(k-2)n+2]$-угольник [1]) на k-угольники при помощи диагоналей, не пересекающихся внутри этого $[(k-2)n+2]$-угольника?

Аналогично решению задач 51б) и 82в) решение и этой общей задачи без труда может быть сведено к решению предшествующей задачи. Воспользовавшись приведенным выше ответом предшествующей задачи, мы получим, что здесь искомое число способов равно

$$\frac{1}{kn+1}C^n_{(k+1)n}=\frac{[(k+1)n]!}{n!(kn+1)!};$$

этот результат является обобщением результатов, найденных в решениях задач 51б) и 82в).

83. Из каждых шести последовательных целых чисел одно делится на 6 и по одному дают при делении на 6 остатки 1, 2, 3, 4 и 5. Таким образом, из каждых шести последовательных целых чисел взаимно простыми с 6 являются два (а именно те, которые дают при делении на 6 остатки 1 и 5). Поэтому вероятность того, что наперед взятое число будет взаимно просто с 6, будет равна $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Из того, что из каждых трех чисел взаимно простым с 6 является одно, нетрудно вывести, что вероятность того, что хотя бы одно из двух выбранных наудачу чисел окажется взаимно простым с 6, равна $\frac{5}{9}$ (ср. с решением задачи 73а)).

84. а) Квадрат целого числа оканчивается цифрой 1, если само число оканчивается цифрой 1 или 9. Это значит, что среди каждых 10 последовательных целых чисел будет ровно два, квадрат которых оканчивается на единицу. Отсюда следует, что искомая вероятность равна 0,2.

Куб целого числа, как легко проверить, оканчивается цифрой 1 только в том случае, если само число оканчивается цифрой 1. Две последние цифры куба целого числа n зависят, очевидно, только от двух последних цифр числа n (это легко усмотреть, например, из правила умножения многозначных чисел «колонной»). Вычислив последние две цифры кубов

---

[1]) Нетрудно видеть, что при $m \neq (k-2)n+2$ выпуклый m-угольник вовсе нельзя разбить непересекающимися диагоналями на k-угольники (это следует, например, из того, что в случае m-угольника, разбиваемого на k-угольники, сумма углов m-угольника должна равняться сумме углов k-угольника, умноженной на целое число, т. е. должно быть $(m-2)180° = n\cdot(k-2)180°$, $m=(k-2)n+2$).

чисел 01, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 и 91, легко проверить, что из всех двузначных чисел только куб числа 71 оканчивается цифрами 11. Таким образом, вопрос о вероятности того, что куб числа n оканчивается цифрами 11, равносилен следующему: какова вероятность того, что число n оканчивается цифрами 71. Совершенно очевидно, что эта вероятность равна 0,01.

б) Очевидно, что последняя цифра 10-й степени целого числа n зависит только от последней цифры n. Далее легко убедиться, что 4^{10} и 6^{10} оканчиваются цифрой 6, а остальные цифры дают при возведении в 10-ю степень числа, не оканчивающиеся на 6 (2^{10} и 8^{10} оканчиваются на 4, $0^{10}=0$, а нечетные цифры при возведении в 10-ю степень дают нечетные числа). Поэтому из каждых 10 последовательных целых чисел два при возведении в 10-ю степень приводят к числам, оканчивающимся цифрой 6, а остальные восемь — к цифрам, не оканчивающимся цифрой 6. Следовательно, вероятность того, что десятая степень выбранного наудачу целого числа оканчивается цифрой 6, равна 0,2.

Так как 10-я степень каждого четного числа, не делящегося на 10, оканчивается цифрой 4 или 6, то 20-я степень каждого такого числа оканчивается цифрой 6. Все же остальные целые числа при возведении в 20-ю степень, очевидно, не приводят к числам, оканчивающимся на 6. Отсюда следует, что вероятность того, что n^{20} оканчивается на 6, равна 0,4.

Примечание. Можно доказать даже, что вероятность того, что 20-я степень целого числа оканчивается на 76, тоже равна 0,4 (точно так же, как вероятность того, что 200-я степень целого числа оканчивается на 376, равна 0,4). См. по этому поводу решение задачи 34 из книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., Гостехиздат, 1954 («Библиотека математического кружка», вып. 1).

85. $C_n^7=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$; поэтому вероятность того, что C_n^7 делится на 7, равна вероятности того, что произведение $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ делится на 49. Но последнее, очевидно, будет иметь место в том и только в том случае, если n при делении на 49 дает один из остатков 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Из каждых 49 последовательных целых чисел ровно 7 удовлетворяют этому условию. Отсюда вытекает, что искомая вероятность равна $\frac{7}{49}=\frac{1}{7}$.

Вероятность того, что C_n^7 делится на 12, очевидно, совпадает с вероятностью того, что стоящее в числителе произведение $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ делится на $64\cdot 27$. Из каждых семи последовательных чисел 2 обязательно делятся на 3; если при этом одно из них делится на 9, то все произведение обязательно делится на 27. Следовательно, если n имеет вид $9k+r$, где $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$ или 6, то произведение $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ делится на 27. (Случай, когда три сомножителя нашего произведения делятся на 3, сюда тоже включается, так как из трех последовательных чисел, кратных трем, одно обязательно делится на 9.)

Далее из наших семи последовательных целых чисел на 2 делятся $n-1$, $n-3$ и $n-5$ или n, $n-2$, $n-4$ и $n-6$. В первом случае из трех последовательных четных чисел $n-1$, $n-3$ и $n-5$ на 4 делится либо $n-3$, либо $n-1$ и $n-5$. Если на 4 делятся $n-1$ и $n-5$, то из этих двух последовательных чисел, кратных четырем, хотя бы одно делится на 8; поэтому, если $n-1$ делится на 4, т. е. n имеет вид $4l+1$, то наше произведение делится на $2\cdot 4\cdot 8=64$. Если на 4 делится $n-3$, то для того, чтобы произведение делилось на 64, необходимо, чтобы $n-3$ делилось на 16, т. е. чтобы n имело вид $16l+3$. Наконец, если n, $n-2$, $n-4$ и $n-6$ делятся на 2 (если $n=2l$ четно), то из этих четырех последовательных четных чисел два должны делиться на 4 и, значит, в этом случае наше произведение обязательно делится на $2\cdot 2\cdot 4\cdot 4=64$ (нетрудно видеть, что в этом случае оно должно делиться даже на 128).

Итак, $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ делится на 64 тогда, когда n имеет вид или $4l+1$ или $16l+3$, или $2l$, и только в этих случаях или, другими словами, когда n имеет вид $16l+s$, где $s=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13$ или 14.

Итак, C_n^7 делится на 12, если n имеет вид $9k+r$, где r имеет одно из выписанных выше семи значений и одновременно имеет вид $16l+s$, где s имеет одно из выписанных выше 13 значений. Соответственно этому все n, такие, что C_n^7

делится на 12, должны давать при делении на $9\cdot 16=144$ один из $7\cdot 13=91$ остатков (так, например, если n дает при делении на 16 остаток 8, а при делении на 9 — остаток 5, то n обязательно имеет вид $144m+104$: из чисел вида $144m+t$, где $t=8$, 24, 40, 56, 72, 88, 104, 120, 136, лишь числа вида $144m+104$ дают при делении на 9 остаток 5).

Отсюда следует, что искомая вероятность равна $\frac{91}{144}\approx 0{,}63$.

86. Выписав все последовательные степени двойки

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ \ldots,$$

убедимся, что последние цифры этих чисел повторяются периодически с периодом 4. Следовательно, из четырех последовательных степеней двойки ровно одна будет оканчиваться на 2; значит, вероятность того, что 2^n оканчивается на 2, равна $\frac{1}{4}=0{,}25$.

Будем теперь последовательно выписывать две цифры, на которые оканчиваются степени двойки:

$$\begin{gathered}02,\ 04,\ 08,\ 16,\ 32,\ 64,\ 28,\ 56,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\\ 92,\ 84,\ 68,\ 36,\ 72,\ 44,\ 88,\ 76,\ 52,\ 04,\ 08,\ \ldots\end{gathered}$$

(это нетрудно сделать, так как достаточно каждый раз удваивать последнее двузначное число ряда и, если результат окажется трехзначным, отбрасывать в нем первую цифру). Таким образом, мы видим, что 2^{22} оканчивается на те же цифры 04, что и 2^2, 2^{23} оканчивается на те же цифры 08, что и 2^3, и т. д., т. е. две последние цифры чисел 2^n, начиная с числа $2^2=04$, тоже периодически повторяются с периодом 20. При этом из 20 последовательных степеней двойки от 2^2 до 2^{21} на цифры 12 оканчивается только 2^9. Итак, из каждых 20 последовательных степеней двойки, начинающихся с 2^k, где $k\geqslant 2$, ровно одна оканчивается на 12. Следовательно, вероятность того, что 2^n оканчивается на 12, равна $\frac{1}{20}=0{,}05$.

Примечание. Можно показать, что последние k цифр чисел 2^n, начиная с числа 2^k, повторяются с периодом $4\cdot 5^{k-1}$ [см. книгу Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1 («Библиотека математического кружка», вып. 1), задачу 243].

87. Пусть $q(N)$ есть число тех из первых N степеней двойки, которые начинаются цифрой 1. Нам надо определить, чему равен $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{q(N)}{N}$.

Отметим, что не может существовать двух различных степеней двойки, имеющих одинаковое число цифр и начинающихся с цифры 1. Действительно, если имеется два числа, начинающихся с цифры 1 и имеющих одинаковое число цифр, то большее из них всегда будет меньше, чем удвоенное второе; поэтому они не могут быть степенями двойки. С другой стороны, наименьшая из всех степеней двойки, имеющих данное число цифр, большее 1, обязательно начинается цифрой 1: иначе, разделив это число на 2, мы получили бы меньшую степень двойки, имеющую то же самое число цифр (так, наименьшей двузначной степенью двойки является 16, наименьшей трехзначной — 128, наименьшей четырехзначной — 1024 и т. д.). Существенно отметить еще, что существуют степени двойки, имеющие любое число цифр: действительно, если 2^k есть наибольшая из степеней двойки, имеющая p цифр, то следующая степень 2^{k+1} будет иметь $p+1$ цифру, и следовательно, для любого p имеются p-значные степени двойки.

Пусть теперь 2^N есть n-значное число. Тогда среди N первых степеней двойки найдется одно n-значное число, начинающееся с 1, одно $(n-1)$-значное число, начинающееся с 1, одно $(n-2)$-значное число, начинающееся с 1, и т. д. вплоть до одного двузначного числа, начинающегося с 1 (а именно, числа 16). Таким образом, $q(N) = n - 1$.

Если n есть число цифр числа 2^N, то $n-1$ есть характеристика десятичного логарифма числа 2^N, т. е. целая часть числа $\lg(2^N) = N \lg 2$. Иначе говоря, $N\lg 2 = n - 1 + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 1$ и $q(N) = n - 1 = N\lg 2 - \alpha$. Значит,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{q(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N\lg 2 - \alpha}{N} = \lg 2 - \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{N} = \lg 2,$$

т. е. вероятность того, что степень двойки начинается с цифры 1, равна $\lg 2 \approx 0{,}30103$.

88. а) Задача может быть сформулирована следующим образом: требуется доказать, что для любого целого числа M существует такое n, что 2^n начинается с комбинации цифр, представляющей десятичную запись числа M. Иначе говоря, требуется доказать, что для любого целого числа M можно найти два целых положительных числа n и k, такие, что

$$10^k \cdot M \leqslant 2^n < 10^k (M+1).$$

Прологарифмировав последнее неравенство, мы получим равносильное ему неравенство

$$\lg M + k \leqslant n \lg 2 < \lg (M+1) + k.$$

Существование чисел n и k, удовлетворяющих этому последнему неравенству, мы и будем доказывать.

Отметим на числовой оси все промежутки между числами $\lg M + k$ и $\lg (M+1) + k$, где k пробегает все целые положительные числа. Все эти промежутки имеют одинаковую длину $\lg (M+1) - \lg M = \lg \frac{M+1}{M} = \lg \left(1 + \frac{1}{M}\right)$ и все они получаются из первого промежутка $[\lg M, \lg (M+1)]$ при помощи сдвигов на целые расстояния 1, 2, 3, ... Числа $\lg 2$, $2 \lg 2$, $3 \lg 2$, ..., $n \lg 2$, ... образуют арифметическую прогрессию; нам надо доказать, что члены этой прогрессии попадут в конце концов в один из отмеченных промежутков.

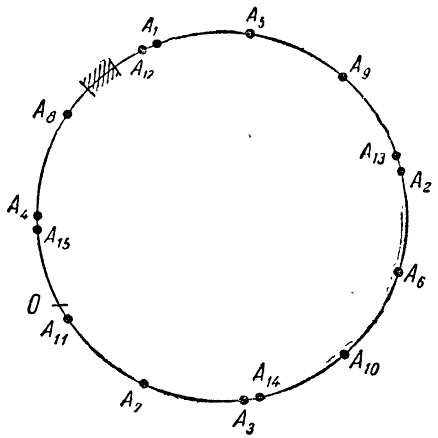
Удобно представлять себе, что числовая ось намотана на окружность радиуса $\frac{1}{2\pi}$ (т. е. на окружность длины 1). В таком случае все точки, расстояние между которыми выражается целым числом, совпадут друг с другом и, в частности, совпадут друг с другом все отмеченные промежутки (черт. 78). Что касается точек $\lg 2$, $2 \lg 2$, $3 \lg 2$, ..., то никакие две из них не совпадут друг с другом: если бы точки $p \lg 2$ и $q \lg 2$ совпали, то это означало бы, что разность $p \lg 2 - q \lg 2$ равна взятой r раз длине окружности, т. е. равна целому числу r; в таком случае выполнялось бы равенство $\lg 2 = \frac{r}{p-q}$, где r, p и q — целые, что противоречит тому, что $\lg 2$ есть число иррациональное[1]). Следовательно, значения $\lg 2$, $2 \lg 2$, $3 \lg 2$, ...

---

[1]) То, что $\lg 2$ иррационален, совершенно очевидно: в противном случае имело бы место равенство $2 = 10^{\frac{m}{n}}$, где m и n — целые числа, т. е. $2^n = 10^m$. Но 2 ни в какой целой степени не может быть степенью 10, ибо любая степень 10 содержит простым делителем 5.

образуют на окружности бесконечную последовательность точек A_1, A_2, A_3, ... (см. черт. 78, где на окружности изображены первые 15 точек A_1, A_2, A_3, ..., A_{15}.) Нам надо показать, что некоторые точки последовательности A_1, A_2, A_3, ... с достаточно высокими номерами (такими, что 2 в соответствующей степени имеет больше знаков, чем M) попадут в выделенный на окружности точками $\lg M$, $\lg(M+1)$ интервал.

Так как на окружности расположено бесконечно много точек нашей последовательности, то можно найти пару таких



Черт. 78.

точек, расстояние между которыми (т. е. длина дуги окружности, концами которой служат эти точки) меньше любого заданного числа — если бы расстояние между любыми двумя точками последовательности превосходило бы некоторое постоянное число α, то на окружности могло бы уместиться только конечное число членов последовательности. Пусть A_p и A_{p+q} — две точки нашей последовательности, расстояние между которыми меньше длины выделенного промежутка $\left[\text{равной } \lg\left(1+\frac{1}{M}\right)\right]$. Заметим, что расстояние между точками A_p и A_{p+q} равно расстоянию между точками A_{p+q} и A_{p+2q}, A_{p+2q} и

A_{p+3q}, A_{p+3q} и A_{p+4q} и т. д. (это следует из того, что $(p+q)\lg 2 - p\lg 2 = q\lg 2 = (p+2q)\lg 2 - (p+q)\lg 2 = (p+3q)\lg 2 - (p+2q)\lg 2 = \ldots$). Таким образом, точки A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, A_{p+3q}, ... следуют на окружности одна за другой на одном и том же расстоянии. А так как расстояние между соседними из этих точек меньше длины выделенного на окружности промежутка, то из любых k последовательных точек, где k есть настолько большое целое число, что k, умноженное на расстояние между точками A_p и A_{p+q}, превосходит единицу, хотя бы одна обязательно попадает внутрь выделенного промежутка (ср. черт. 78, где в качестве последовательности точек A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, ... можно рассматривать, например, точки A_1, A_{12}, A_{23}, A_{34}, ..., из которых лишь первые две обозначены на чертеже). Этим и завершается доказательство.

б) Используя геометрические рассмотрения, приведенные в решении задачи а), мы можем сформулировать поставленную задачу следующим образом: какова вероятность того, что точка, выбранная наудачу из последовательности A_1, A_2, A_3, ..., окажется внутри выделенного на окружности промежутка длины $a = \lg\left(1 + \frac{1}{M}\right)$. Докажем, что искомая вероятность равна как раз длине a этого промежутка.

Выберем целое число m так, чтобы существовали две точки A_p и A_{p+q} последовательности A_1, A_2, A_3, ..., расстояние α между которыми заключено между $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{m+1}$. В решении задачи а) указывалось, что всегда можно выбрать точки A_p и A_{p+q} так, чтобы расстояние между ними было сколь угодно малым; это значит, что при соответствующем выборе точек A_p и A_{p+q} мы можем добиться того, чтобы число m было сколь угодно велико. Сейчас мы докажем, что искомая в настоящей задаче вероятность отличается от $a = \lg\left(1 + \frac{1}{M}\right)$ не более чем на $\frac{2}{m}$; так как при достаточно большом m дробь $\frac{2}{m}$ будет сколь угодно малой, то отсюда уже следует, что эта вероятность точно равна a.

Отметим, что при любом k расстояние между точками A_k и A_{k+q} будет равно расстоянию между точками A_p и A_{p+q} (ибо

$(k+q)\lg 2 - k\lg 2 = (p+q)\lg 2 - p\lg 2)$, т. е. будет равно α. Выберем теперь какое-либо число N и выясним, сколько из первых N членов последовательности $A_1, A_2, A_3, \ldots$ попадет внутрь выделенного промежутка длины a. Для простоты счета мы в дальнейшем будем предполагать, что N кратно qm; так как далее надо будет переходить к пределу при $N \to \infty$, то это ограничение, накладываемое на N, не повлияет на окончательный результат (мы можем безгранично увеличивать N, оставляя его все время кратным qm; любое же другое достаточно большое число мы можем представить в виде суммы числа, делящегося на qm, и остатка, не превосходящего qm и не играющего никакой роли при $N \to \infty$; ср. с примером, разобранным на стр. 42—43). Точки

$$A_1,\ A_{1+q},\ A_{1+2q},\ \ldots,\ A_{1+(m-1)q}$$

расположены вдоль окружности на расстоянии α друг от друга $\left(\text{где } \alpha \text{ заключено между } \frac{1}{m} \text{ и } \frac{1}{m+1}\right)$; исключение составляют крайние точки A_1 и $A_{1+(m-1)q}$, расстояние между которыми больше $1 - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$, но меньше $1 - \frac{m-1}{m+1} = \frac{2}{m+1}$ $\Big($ибо каждый из $m-1$ промежутков A_1A_{1+q}, $A_{1+q}A_{1+2q}, \ldots$ $\ldots, A_{1+(m-2)q}A_{1+(m-1)q}$ имеет длину α, где $\frac{1}{m} > \alpha \geqslant \frac{1}{m+1}\Big)$.

Пусть теперь число $a = \lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$ заключено между $\frac{n}{m}$ и $\frac{n+1}{m}$ (где $n < m$); тогда внутрь выделенного промежутка длины a попадает не больше чем $n+2$, но и не меньше чем $n-1$ точек из числа рассматриваемых m точек.

Действительно, если k — число рассматриваемых точек, попавших в выделенный промежуток длины a, то в этом промежутке уложится $k-1$ промежутков длины α; следовательно,

$$(k-1)\,\alpha \leqslant a < \frac{n+1}{m}; \quad k-1 < \frac{n+1}{m}\cdot\frac{1}{\alpha},$$

или, так как $\alpha \geqslant \frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{\alpha} \leqslant m+1$,

$$k-1 < \frac{n+1}{m}(m+1) = (n+1)\left(1+\frac{1}{m}\right) = n+1+\frac{n+1}{m}.$$

Но $k-1$ — целое число, а $\frac{n+1}{m}<1$; следовательно,

$$k-1 \leqslant n+1, \quad k \leqslant n+2.$$

Далее, $k+2$ отрезка длины α покроют весь данный отрезок длины a; отсюда

$$(k+2)\alpha \geqslant a \geqslant \frac{n}{m}, \quad k+2 \geqslant \frac{n}{m}\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

Так как $\alpha<\frac{1}{m}$, $\frac{1}{\alpha}>m$, то из последнего неравенства следует, что

$$k+2>n, \quad k>n-2 \geqslant n-1.$$

Точно так же показывается, что из каждой из следующих $q-1$ групп по m точек

$$\begin{array}{l} A_2,\ A_{2+q},\ A_{2+2q},\ \ldots,\ A_{2+(m-1)q}; \\ A_3,\ A_{3+q},\ A_{3+2q},\ \ldots,\ A_{3+(m-1)q}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ A_q,\ A_{2q},\ A_{3q},\ \ldots,\ A_{mq} \end{array}$$

внутрь нашего промежутка длины a попадает не более чем $n+2$, но и не менее чем $n-1$ точек. Следовательно, из первых mq точек нашей последовательности внутрь выделенного промежутка попадает не более чем $(n+2)q$ и не менее чем $(n-1)q$ точек.

Подобным же образом показывается, что из любых mq последовательных точек последовательности A_1, A_2, A_3, ... внутрь выделенного промежутка попадает не более чем $(n+2)q$ и не менее чем $(n-1)q$ точек. Отсюда следует, что при N кратном mq вероятность того, что точка, выбранная наудачу из числа первых N точек нашей последовательности, окажется внутри выделенного промежутка длины a, заключена между $\frac{n-1}{m}$ и $\frac{n+2}{m}$. Так как эти пределы не зависят от N, то в этих же пределах будет заключена вероятность и для случая точки, выбранной наудачу из в с е й последовательности A_1, A_2, A_3, ...

Итак, мы показали, что если $a=\lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$ заключено между $\frac{n}{m}$ и $\frac{n+1}{m}$, то искомая вероятность заключена между $\frac{n-1}{m}$ и $\frac{n+2}{m}$, т. е. отличается от a не больше чем на $\frac{2}{m}$.

Отсюда, как мы уже отмечали, следует, что эта вероятность точно равна a.

Таким образом, вероятность того, что степень двойки начинается с числа M, равна $\lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$. (В частности, если $M=1$, то мы снова получаем результат задачи 87: вероятность того, что 2^n начинается с 1, равна $\lg\left(1+\frac{1}{1}\right)=\lg 2$.)

Любопытно отметить, что этому же выражению равна вероятность того, что степень любого целого числа, десятичный логарифм которого иррационален (т. е. любого целого числа, отличного от степени 10), будет начинаться с числа M. Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства, проведенного нами для степеней двойки.

89. а) Нам надо определить вероятность того, что два выбранных наудачу целых числа n и m не имеют ни одного общего простого делителя. Начнем с рассмотрения следующего более простого вопроса: *какова вероятность того, что два выбранных наудачу целых числа n и m не будут иметь общего делителя 2* (т. е. не будут одновременно четными). Согласно определению вероятности для подобных случаев сначала следует рассмотреть этот вопрос для чисел n и m, выбираемых из числа первых N членов натурального ряда, а затем устремить N к бесконечности. Для упрощения подсчета предположим, что рассматриваемое число N является четным. Легко видеть, что это предположение не изменит окончательного результата: действительно, нетрудно показать, что при больших N искомая вероятность для первых N членов натурального ряда будет отличаться от подобной же вероятности для $N+1$ членов на величину, предел которой при $N\to\infty$ равен нулю (ибо во втором случае вероятность того, что хотя бы одно из чисел n и m будет равно $N+1$, т. е. не будет входить в число первых N членов натурального ряда, равна

$$\frac{2N+1}{(N+1)^2}=\frac{\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^2},$$

т. е. стремится к нулю при $N\to\infty$); следовательно, предел этой вероятности при $N \to \infty$ для нечетных N совпадает с тем же пределом для четных N.

Подсчитаем теперь общее число равновероятных исходов и число благоприятных исходов для случая четного N. Так как и n и m могут принимать N различных значений, то общее число равновероятных исходов здесь равно $NN=N^2$. Неблагоприятными будут те исходы, в которых и n и m принимают одно из $\frac{N}{2}$ возможных четных значений $2, 4, \ldots, N$; число таких исходов равно $\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2}=\frac{N^2}{4}$. Остальные $N^2-\frac{N^2}{4}$ исходов будут благоприятными, следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{N^2-\frac{N^2}{4}}{N^2}=1-\frac{1}{4}.$$

Так как это выражение вовсе не зависит от N, то и предел его при $N \to \infty$ имеет то же значение $1-\frac{1}{4}$.

Подсчитаем теперь, чему равна вероятность того, что **два выбранных наудачу числа n и m не будут иметь ни общего делителя 2, ни общего делителя 3**. Здесь опять надо начать со случая, когда n и m выбираются из числа первых N членов натурального ряда. Для упрощения подсчетов удобно считать, что N делится на 6. Ясно, что и это предположение не повлияет на окончательный результат: всякое число N можно представить в виде $N=N_1+k$, где N_1 делится на 6, а k не превосходит 5; при этом интересующая нас вероятность для первых N_1 членов ряда будет отличаться от подобной же вероятности для первых N членов на величину, предел которой равен нулю при $N \to \infty$ (вероятность того, что во втором случае хотя бы одно из чисел n и m будет превосходить N_1, здесь равна

$$\frac{2kN+k^2}{(N+k)^2}=\frac{\frac{2k}{N}+\frac{k^2}{N^2}}{\left(1+\frac{k}{N}\right)^2},$$

т. е. стремится к нулю при $N \to \infty$). Полное число равновероятных исходов опыта здесь опять равно N^2. Из этих

N^2 исходов $\frac{N}{3}\cdot\frac{N}{3}=\frac{N^2}{9}$ отвечают случаям, когда и n и m делятся на 3. Рассмотрим подробнее эти $\frac{N^2}{9}$ исходов: ясно, что $\frac{N}{6}\cdot\frac{N}{6}=\frac{N^2}{36}$ из них отвечают парам четных чисел, а остальные $\frac{N^2}{9}-\frac{N^2}{36}=\frac{N^2}{9}\left(1-\frac{1}{4}\right)$ — парам, в которых хотя бы одно из чисел n или m нечетно. Итак, общее число благоприятных исходов мы получим, вычтя из $N^2\left(1-\frac{1}{4}\right)$ исходов, при которых n и m не делятся одновременно на 2, $\frac{N^2}{9}\left(1-\frac{1}{4}\right)$ из этих исходов, при которых n и m делятся одновременно на 3.

Таким образом, при N, делящемся на 6, из общего числа N^2 исходов благоприятными будут $N^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)$; следовательно, вероятность того, что n и m не имеют ни общего делителя 2, ни общего делителя 3, здесь равна

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right).$$

Так как это выражение не зависит от N, то этому же будет равна соответствующая вероятность и для случая чисел n и m, выбираемых из всего натурального ряда.

Точно так же определяется вероятность того, что числа n и m не будут иметь ни общего делителя 2, ни общего делителя 3, ни общего делителя 5. Сначала будем считать, что n и m выбираются из числа первых N членов натурального ряда; для упрощения счета удобно считать, что N делится на $2\cdot3\cdot5=30$. Из N^2 равноправных исходов опыта, состоящего в выборе наудачу двух чисел n и m из числа первых N натуральных чисел, $\frac{N}{5}\cdot\frac{N}{5}=\frac{N^2}{25}$ отвечают случаям, когда и n и m делятся на 5. Аналогично предыдущему показывается, что из этих $\frac{N^2}{25}$ исходов $\frac{N^2}{25}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)$ относятся к тем случаям, когда n и m не имеют ни общего делителя 2, ни общего делителя 3. Следовательно, число исходов, при которых n и m не имеют ни общего делителя 2, ни общего делителя 3, ни общего делителя 5, равно

$$N^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)-\frac{N^2}{25}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=$$
$$=N^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right).$$

Отсюда вытекает, что вероятность того, что n и m не имеют ни общего делителя 2, ни общего делителя 3, ни общего делителя 5, равна

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right).$$

Так как последнее выражение не зависит от N, то этому же будет равна соответствующая вероятность и для случая чисел m и n, выбираемых из всего натурального ряда.

Точно так же доказывается, что *вероятность того, что два выбранных наудачу числа не имеют ни общего делителя 2, ни общего делителя 3, ни общего делителя 5, ..., ни общего делителя p_k, где p_k есть k-е простое число, равна*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right) \qquad (*)$$

(выражение (*) для любого k легко можно вывести методом математической индукции). Отсюда следует, что искомая в задаче вероятность равна пределу, к которому стремится выражение (*) при неограниченном увеличении числа сомножителей; если этот предел не существует, то это значит, что не существует и искомая вероятность.

Для того чтобы доказать, что предел (*) существует, а также указать удобный способ его вычисления с любой степенью точности, мы несколько преобразуем это выражение. Рассмотрим прежде всего выражение, обратное (*):

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)}=$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}}.$$

Представим теперь каждый сомножитель последнего выражения в виде суммы членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{27}\right)^2+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}=1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{25}\right)^2+\left(\frac{1}{125}\right)^2+\ldots,$$

. . . .

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}}=1+\left(\frac{1}{p_k}\right)^2+\left(\frac{1}{p_k^2}\right)^2+\left(\frac{1}{p_k^3}\right)^2+\ldots$$

Перемножая все эти выражения, получим:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}}=$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\ldots,$$

где справа стоит сумма квадратов обратных величин всех целых чисел, не имеющих иных простых делителей, кроме 2, 3, 5, ..., p_k. Неограниченно увеличивая теперь число k участвующих в выражении (*) простых чисел, мы убедимся, что *искомая вероятность равна единице, деленной на сумму ряда*

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots \qquad (**)$$

обратных величин квадратов всех целых чисел. Взяв достаточно большое число членов ряда (**), мы можем найти сумму этого ряда, а следовательно, и искомую вероятность, с любой степенью точности.

Для того чтобы определить искомую вероятность с точностью до 0,1, заметим, что сумма ряда (**) меньше чем

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$
$$=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=1\frac{3}{4}-\frac{1}{n}<1\frac{3}{4};$$

отсюда следует, что искомая вероятность больше $1:\frac{7}{4}=0,571\ldots$ С другой стороны, сумма ряда (**) больше чем

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1\frac{7}{12}-\frac{1}{n+1}=1\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{n+1}\right),$$

т. е. больше чем $1\frac{1}{2}$, если только $n \geqslant 12$. Отсюда следует, что искомая вероятность меньше $1:\frac{3}{2}=0,666\ldots$

Итак, вероятность того, что два выбранных наудачу числа являются взаимно простыми, с точностью до 0,1 равна 0,6 (см. также задачу 90).

б) Так же как и в решении задачи а), доказывается, что вероятность того, что четыре выбранных наудачу числа не все будут делиться на 2, равна $1-\frac{1}{2^4}$; вероятность того, что не все они делятся на 2 и не все делятся на 3, равна $\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)$; вероятность того, что не все они делятся на 2, не все делятся на 3 и не все делятся на 5, равна $\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)$ и т. д. Вероятность того, что четыре выбранных наудачу числа не все делятся на 2, не все делятся на 3, не все делятся на 5, ..., не все делятся на p_k, где p_k есть k-е простое число, равна

$$\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^4}\right).$$

Следовательно, искомая вероятность того, что четыре выбранных наудачу числа имеют общий множитель, равна

$$1-\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\cdots,$$

где многоточие означает, что произведение распространено на все простые числа натурального ряда.

Для вычисления бесконечного произведения воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\cdots}=$$
$$=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\ldots,$$

где в правой части стоит сумма обратных величин четвертых степеней всех целых положительных чисел; доказательство этого соотношения совершенно аналогично доказательству сходного соотношения, использованного в решении задачи а). Но

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+$$
$$+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}+\ldots=$$
$$=1+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}\right)+\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}\right)+\ldots<$$
$$<1+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)+\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}\right)+\ldots=$$
$$=1+\frac{2}{2^4}+\frac{4}{4^4}+\frac{8}{8^4}+\ldots=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}.$$

С другой стороны,

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+$$
$$+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{16^4}+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{2^4}+\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}\right)+\left(\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{16^4}\right)+\ldots>$$
$$>1+\frac{1}{2^4}+\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}\right)+\left(\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{16^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{16^4}\right)+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{2^4}+\frac{2}{4^4}+\frac{4}{8^4}+\frac{8}{16^4}+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{13}}+\ldots=1+\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{8}}=1+\frac{1}{14}=\frac{15}{14}.$$

Отсюда вытекает, что бесконечное произведение

$$\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\ldots$$

больше чем $\frac{7}{8}=0,875$, но меньше чем $\frac{14}{15}=0,933$. Значит, искомая в задаче вероятность меньше чем $\frac{1}{8}=0,125$, но больше чем $\frac{1}{15}=0,0666$. Итак, с точностью до 0,05 эта вероятность равна 0,1.

90. а) В решении задачи 89а) было показано, что вероятность того, что два взятых наудачу числа будут взаимно простыми, равна единице, деленной на сумму ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

Но сумма этого ряда равна $\frac{\pi^2}{6}$ (см. задачу 143а)). Отсюда следует, что интересующая нас вероятность равна $\frac{6}{\pi^2}=0,608\ldots$

б) В решении задачи 89б) было показано, что вероятность того, что четыре взятых наудачу числа будут иметь общий множитель, равна

$$1-\frac{1}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots}.$$

Но сумма ряда $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ равна $\frac{\pi^4}{90}$ (см. задачу 143б)). Отсюда следует, что искомая вероятность равна $1-\frac{90}{\pi^4}=0,075\ldots$

91. Для решения этой задачи надо прежде всего подсчитать, сколько целых чисел, не превосходящих некоторого целого числа N, будут иметь простой делитель, превосходящий корень квадратный из самого числа.

Каждое число может иметь не больше одного подобного простого делителя. Пусть $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p_k$ будут все простые числа, не превосходящие числа N. Разобьем эти простые числа на две группы: к первой отнесем простые числа $2, 3, 5, \ldots, p_i$, не превосходящие $\sqrt{N}$, а ко второй — простые числа $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k$, большие $\sqrt{N}$, но не большие N. Пусть p есть некоторое простое число из первой группы; легко понять, что оно будет делителем, превосходящим корень квадратный из самого числа, для следующих $p-1$ чисел: $p, 2p, 3p, \ldots, (p-1)p$. Таким образом, всего будет

$$(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)$$

целых чисел, имеющих простым делителем, превосходящим корень квадратный из самого себя, одно из простых чисел $2, 3, 5, \ldots, p_i$; все эти числа, конечно, будут меньше числа N.

Рассмотрим теперь некоторое простое число q из второй группы. Так как q^2 больше N, то для каждого целого числа, не превосходящего N, делитель q, если только он существует, будет больше корня квадратного из самого числа; поэтому для того, чтобы узнать, сколько чисел от 1 до N содержат q делителем, превосходящим корень квадратный из самого числа, нам надо только определить, сколько из этих чисел делится на q. Но число таких чисел равно, очевидно, $\left[\frac{N}{q}\right]$ [1]) (это будут числа q, $2q$, $3q$, ..., $\left[\frac{N}{q}\right]q$). Таким образом, число чисел от 1 до N, для которых одно из простых чисел p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_k является делителем, большим корня квадратного из самого числа, равно

$$\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_k}\right],$$

а общее число чисел от 1 до N, имеющих простых делителей, больших корня квадратного из самого числа, равно

$$(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)+$$
$$+\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_k}\right].$$

Итак, вероятность того, что целое число, не превосходящее N, имеет простой делитель, больший корня квадратного из самого числа, равна

$$\frac{(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)+\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_k}\right]}{N};$$

здесь 2, 3, 5, ..., p_i — все простые числа, не превосходящие $\sqrt{N}$, а p_{i+1}, p_{i+2}, ..., p_k — все простые числа, не превосходящие N, но большие $\sqrt{N}$. Наша задача заключается в том, чтобы найти предел этого выражения при $N\to\infty$.

Рассмотрим прежде всего выражение

$$\frac{(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)}{N}.$$

Так как каждое из слагаемых числителя меньше $\sqrt{N}$, то это выражение меньше чем

$$\frac{\overbrace{\sqrt{N}+\sqrt{N}+\ldots+\sqrt{N}}^{i \text{ раз}}}{N}=\frac{i\sqrt{N}}{N}=\frac{i}{\sqrt{N}}.$$

---

[1]) $\left[\frac{N}{q}\right]$ обозначает целую часть числа $\frac{N}{q}$ (относительно этого обозначения см. выше стр. 13).

Здесь i — число простых чисел, не превосходящих $\sqrt{N}$, или, в обозначениях, указанных на стр. 84, $i=\pi(\sqrt{N})$. Но в силу задачи 165 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}=0$ (этот результат следует также из задачи 166). Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{i}{\sqrt{N}}=\lim\limits_{\sqrt{N}\to\infty}\frac{\pi(\sqrt{N})}{\sqrt{N}}=0$, а следовательно, и тем более

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(2-1)+(3-1)+\ldots+(p_i-1)}{N}=0.$$

Теперь обратимся к выражению

$$\frac{\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_k}\right]}{N}.$$

Отметим прежде всего, что если мы откинем всюду в числителе знак целой части, то мы допустим ошибку, не превосходящую $\frac{k-i}{N}$ (ибо $\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]$ отличается от $\frac{N}{p_{i+1}}$ меньше чем на 1, $\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]$ отличается от $\frac{N}{p_{i+2}}$ меньше чем на 1 и т. д. для каждого из $k-i$ слагаемых числителя дроби). Но даже дробь $\frac{k}{N}$ при $N\to\infty$ стремится к нулю [ибо $k=\pi(N)$ есть число простых чисел, не превосходящих N, и мы опять можем воспользоваться результатом задачи 165]. Поэтому нам достаточно определить предел, к которому стремится при $N\to\infty$ выражение

$$\frac{\frac{N}{p_{i+1}}+\frac{N}{p_{i+2}}+\ldots+\frac{N}{p_k}}{N}=\frac{1}{p_{i+1}}+\frac{1}{p_{i+2}}+\ldots+\frac{1}{p_k};$$

величина этого предела и равна интересующей нас вероятности.

Перепишем теперь последнее выражение в виде

$$\frac{1}{p_{i+1}}+\frac{1}{p_{i+2}}+\ldots+\frac{1}{p_k}=$$
$$=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_k}\right\}-\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_i}\right\}.$$

Но в силу второй теоремы Мертенса (см. задачу 169б)) суммы

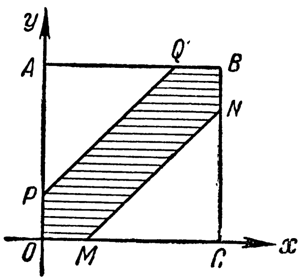
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_k} \text{ и } \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_i}$$

равны соответственно $\ln\ln N+\beta+\varepsilon_1$ и $\ln\ln(\sqrt{N})+\beta+\varepsilon_2$, где числа ε_1 и ε_2, зависящие, разумеется, от N, стремятся к нулю при $N\to\infty$. Отсюда следует, что интересующий нас предел равен

$$(\ln\ln N+\beta)-(\ln\ln(\sqrt{N})+\beta)=$$
$$=\ln\ln N-\ln\left(\frac{1}{2}\ln N\right)=\ln\ln N-(\ln\ln N-\ln 2)=\ln 2.$$

Таким образом, вероятность того, что выбранное наудачу целое число n будет иметь простой делитель, больший корня квадратного из самого числа, равна $\ln 2=0{,}693\ldots$

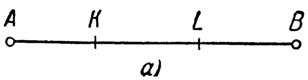
92. Всевозможные исходы опыта, рассматриваемого в этой задаче, состоят в приходе первого человека в какой-то момент времени x между 12 часами и 1 часом и в приходе второго человека в другой момент времени y в этом же интервале. Таким образом, эти исходы определяются парой чисел x, y, где $0\leqslant x\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant 1$. Рассматривая эти числа как координаты точки на плоскости, мы представим множество всех исходов в виде совокупности точек квадрата $OABC$ со стороной 1 (черт. 79). Так как x и y выбираются между 12 часами и 1 часом наудачу, то вероятность того, что x (соответственно y) попадет внутрь какого-либо интервала оси абсцисс (соответственно ординат), равна длине этого интервала (напомним, что в нашем случае $OA=OC=1$). Отсюда следует, что вероятность того, что точка (x, y) попадает внутрь какого-либо прямоугольника внутри $OABC$, равна площади этого прямоугольника. Так как любую область можно покрыть с любой точностью сетью мелких прямоугольников, то вероятность попадания точки (x, y) внутрь любой области

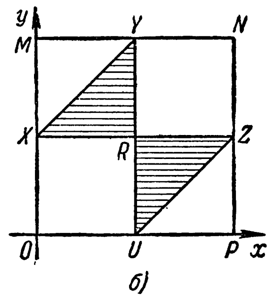


Черт. 79.

равна площади этой области (это свойство можно, если угодно, принять за определение понятия «наудачу», фигурирующего в условии задачи). Благоприятным исходам в нашей задаче будут, очевидно, отвечать те точки (x, y), для которых $|x-y| \leqslant \frac{1}{4}$. Все такие точки расположены в заштрихованной на черт. 79 области, ограниченной прямыми MN и PQ, для которых $x-y=\frac{1}{4}$ и соответственно $y-x=\frac{1}{4}$. Здесь $OM=BN=OP=BQ=\frac{1}{4}$; следовательно, пл. $MCN=$ $=$ пл. $PAQ=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{32}$, и искомая вероятность равна пл. $PQBNMO=1-$ пл. $MCN-$ пл. $PAQ=1-\frac{18}{32}=\frac{7}{16}$.

93. Первое решение. Пусть AB есть наш стержень, а K и L — две точки излома этого стержня (черт. 80, *а*). Обозначим длину AB через l. Всевозможные исходы опыта, рассматриваемого в этой задаче, определяются положением точек K и L, т. е., иначе, двумя числами $AK=x$ и $AL=y$, каждое из которых избирается наудачу между 0 и l. Рассматривая эти числа как координаты точки на плоскости, мы представим множество всех исходов в виде совокупности точек квадрата





Черт. 80.

$OMNP$ со стороной l (черт. 80, *б*). Как и в задаче 92, вероятность того, что точка (x, y) попадает внутрь какой-либо части этого квадрата, будет равна отношению площади этой части к площади всего квадрата. Таким образом, нам остается только определить, какую часть квадрата $OMNP$ будут заполнять точки, отвечающие благоприятным исходам опыта.

Для того чтобы из трех отрезков, на которые распадается стержень, можно было составить треугольник, надо только, чтобы каждый из этих трех отрезков был меньше суммы двух других. Так как сумма всех трех отрезков равна l, то это условие эквивалентно следующему: каждый из трех отрезков должен быть меньше чем $\frac{l}{2}$. Рассмотрим теперь, в каких случаях это условие не будет выполнено.

1°. Самый левый из трех отрезков будет больше $\frac{l}{2}$, если и x и y будут больше $\frac{l}{2}$. Таким исходам будут отвечать точки, расположенные внутри малого квадрата $YRZN$ со стороной $\frac{l}{2}$, занимающего верхнюю правую четверть квадрата $OMNP$ (черт. 80,*б*).

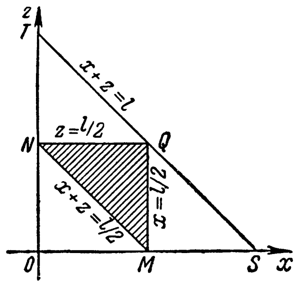
2°. Самый правый из трех отрезков будет больше $\frac{l}{2}$, если и x и y будут меньше $\frac{l}{2}$. Таким исходам будут отвечать точки, расположенные внутри малого квадрата $XRUO$ со стороной $\frac{l}{2}$, занимающего нижнюю левую четверть квадрата $OMNP$ (черт. 80, *б*).

3°. Средний из трех отрезков будет больше $\frac{l}{2}$, если x и y удовлетворяют неравенствам $y-x>\frac{l}{2}$ или $x-y>\frac{l}{2}$. Совокупность точек (x, y), для которых $y-x=\frac{l}{2}$, будет изображаться на нашем чертеже прямой XY, а совокупность точек, для которых $x-y=\frac{l}{2}$,— прямой ZU. Нетрудно видеть, что точки, для которых $y-x>\frac{l}{2}$, будут заполнять на нашем чертеже треугольник XMY, а точки, для которых $x-y>\frac{l}{2}$,— треугольник UPZ. Таким образом, неблагоприятным исходам третьего типа будут отвечать точки, расположенные внутри треугольников XMY и UPZ.

Окончательно, благоприятным исходам будут отвечать точки, заполняющие заштрихованную на черт. 80, *б* часть квадрата $OMNP$. Так как площадь этой части равна $\frac{1}{4}$ площади всего большого квадрата, то искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.

Второе решение. В первом решении мы характеризовали исход опыта числами $x=AK$ и $y=AL$. Можно вместо этого пользоваться также числами $x=AK$ и $z=KL$, где K есть более левая из двух точек излома (см. черт. 80, *а*). Ясно, что $x+z\leqslant l$ (ибо l есть длина всего стержня, а $x+z$ — длина двух из образовавшихся трех частей); таким образом, множество всех исходов здесь будет изображаться точками треугольника OST, ограниченного осями координат и прямой $x+z=l$ (черт. 81).

Легко видеть, что вероятность и при таком выборе координат пропорциональна площади. Множество благоприятных исходов определяется неравенствами $x<\frac{l}{2}$, $z<\frac{l}{2}$, $x+z>\frac{l}{2}$. Проведя на черт. 81 прямые $x=\frac{l}{2}$, $z=\frac{l}{2}$, $x+z=\frac{l}{2}$ (это будут прямые QM, QN и MN), мы убедимся, что благоприятным исходам отвечают точки заштрихованного на черт. 81 треугольника. Так как площадь этого треугольника равна $\frac{1}{4}$ площади всего треугольника OST, то мы еще раз получаем, что искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.



Черт. 81.

Отметим, что наша задача очень близка к задаче 27; в частности, черт. 81 совершенно аналогичен черт. 36. Разница состоит в том, что ранее нас интересовали лишь точки с целыми координатами, а теперь — все точки. Ясно, что при $n\to\infty$ (или, иначе, при уменьшении единицы длины) результаты задачи 27 дают мало нового по сравнению с результатом настоящей задачи: при большом n в ответах задачи 27 существенны лишь члены наивысшей степени относительно n (доля, вносимая остальными членами, при этом становится очень малой), а эти члены показывают, что при большом n неравенствам, фигурирующим в условиях задачи 27, удовлетворяет примерно $\frac{1}{4}$ всех решений соответствующего неопределенного уравнения. В то же время решение настоящей задачи значительно проще решения задачи 27: вместо сложных комбинаторных подсчетов задачи 27 здесь нам приходится лишь определить отношение площадей двух подобных треугольников. Подобное же положение вещей встречается и во многих значительно более глубоких вопросах: в современной теории вероятностей переход от конечных случаев к непрерывным схемам играет большую роль и часто позволяет сильно упростить теорию (в значительной степени именно за счет замены сложных комбинаторных подсчетов и оценок, приближенно верных при больших n, значительно более простыми точными формулами).

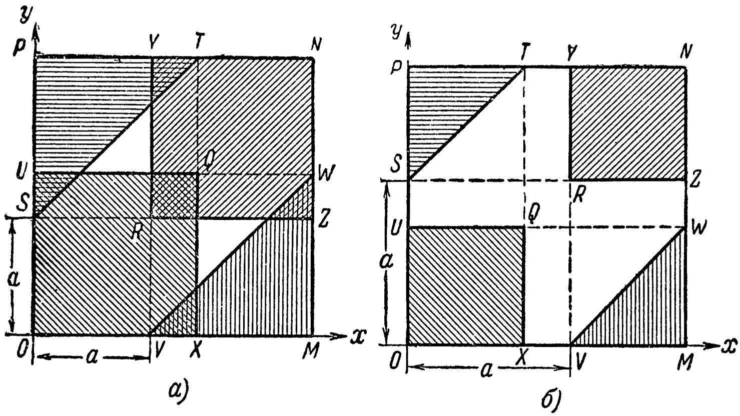
94. Эта задача является обобщением предыдущей. В самом деле, задачу 93, очевидно, можно сформулировать так: какова вероятность того, что ни одна из трех частей стержня, сломанного в двух наудачу выбранных точках, не превзойдет половины общей длины стержня? В настоящей задаче длина $\frac{l}{2}$ заменена произвольной длиной a.

Как и в первом решении задачи 93, всевозможные исходы опыта, о котором идет речь, мы будем характеризовать двумя числами: $AK=x$ и $AL=y$, где K и L — точки излома, A — левый конец стержня. При этом множество всех исходов можно будет представить в виде множества точек квадрата $OMNP$ со стороной l; вероятность того, что точка (x, y) попадет внутрь какой-либо части этого квадрата, будет равна отношению площади этой части к площади всего квадрата.

Выясним, какую часть квадрата заполняют точки, отвечающие неблагоприятным исходам опыта. Прежде всего очевидно, что при $a \leqslant \frac{l}{3}$ все исходы будут неблагоприятными: из трех частей стержня хотя бы один наверное будет не меньше $\frac{l}{3}$. Рассмотрим теперь отдельно случаи $\frac{l}{3} \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}$ (черт. 82, *а*) и $a \geqslant \frac{l}{2}$ (черт. 82, *б*).

Для того чтобы левый кусок стержня был больше a, необходимо, чтобы было $x > a$, $y > a$; точки, удовлетворяющие этим условиям, заполняют на черт. 82, *а* и *б* квадрат $YRZN$ со стороной $l-a$. Точно так же для того, чтобы правый кусок стержня был больше a, необходимо, чтобы было $x < l-a$, $y < l-a$; эти точки заполняют квадрат $XQUO$ со стороной $l-a$. Наконец, средняя часть стержня будет больше a, если $x-y > a$ или $y-x > a$; первому условию удовлетворяют точки треугольника VMW, а второму — точки треугольника SPT.

Теперь нам осталось только подсчитать, какая площадь осталась на черт. 82, *а* и *б* незаштрихованной. В первом случае (черт. 82, *а*) это будут два равнобедренных прямоугольных треугольника, катеты которых, очевидно, равны $PS - US - YT = l - a - 2(l - 2a) = 3a - l$; таким образом, незаштрихованная площадь равна $(3a - l)^2$. Во втором случае (черт. 82, *б*) от площади всего квадрата надо отнять площади



Черт. 82.

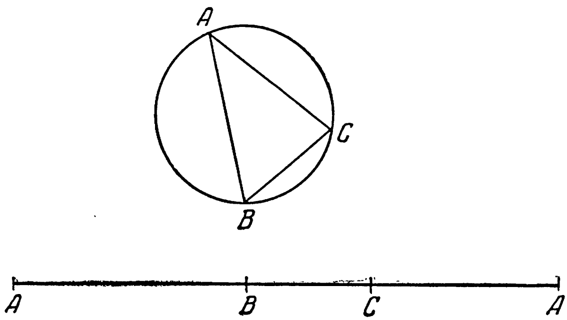
двух квадратов со стороной $l - a$ и двух равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами $l - a$; таким образом, незаштрихованная площадь равна $l^2 - 3(l - a)^2$. Разделив эту площадь на l^2 (площадь всего квадрата), мы получим, что вероятность того, что ни один из трех кусков стержня не будет превосходить a, равна

$$0, \text{ если } 0 \leqslant a \leqslant \frac{l}{3},$$

$$\left(3\frac{a}{l} - 1\right)^2, \text{ если } \frac{l}{3} \leqslant a \leqslant \frac{l}{2},$$

$$1 - 3\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2, \text{ если } \frac{l}{2} \leqslant a \leqslant l.$$

95. Так как все точки окружности равноправны между собой, то можно считать, что первая из трех точек (точка A) как-то фиксирована. Положение точек B и C при этом будет задаваться длиной дуг AB и AC, отсчитываемых в определенном направлении (например, в направлении против часовой стрелки). Разрежем теперь окружность в точке A и развернем ее в отрезок AA' (черт. 83; то, что оба конца этого отрезка изображают одну и ту же точку окружности, для нас несущественно). Наличие в треугольнике ABC тупого угла, очевидно, означает, что одна из трех дуг, на которые



Черт. 83.

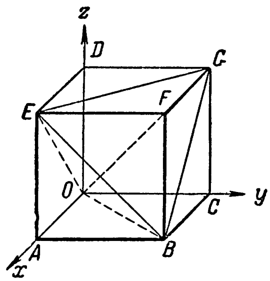
его вершины разбивают отрезок, превосходит полуокружность. Поэтому после перехода от окружности к отрезку AA' наша задача приобретает следующий вид: на отрезке AA' взяты наудачу две точки B и C; какова вероятность того, что ни одна из трех частей, на которые эти точки разбивают окружность, не превосходит половины длины отрезка? Но вычисление этой последней вероятности составляет содержание задачи 93 (см. решение указанной задачи); следовательно, ответ настоящей задачи совпадает с ответом задачи 93: искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.

96. Здесь возможные исходы опыта определяются тройкой чисел x, y, z, каждое из которых выбирается наудачу между 0 и l, где l есть длина рассматриваемых стержней. Рассматривая эти числа как координаты точки в пространстве, мы изобразим множество всех исходов в виде совокупности точек куба $OABCDEFG$ со стороной l (черт. 84). При этом вероятность, что точка (x, y, z) попадает внутрь некоторой части этого куба, определяется как отношение объема рассматриваемой части к объему всего куба.

Определим теперь, где будут расположены точки, отвечающие благоприятным исходам опыта. Для того чтобы из трех отрезков x, y и z можно было составить треугольник, надо только, чтобы эти отрезки удовлетворяли известным неравенствам

$$x+y>z, \quad x+z>y, \quad y+z>x. \tag{*}$$

Но легко проверить, что совокупность точек, удовлетворяющих равенству $x+y=z$, будет заполнять плоскость, проходящую через точки O, E и G, а все точки, для которых $x+y>z$, будут расположены по ту же сторону этой плоскости, что и точка F. Точно так же все точки, для которых $x+z=y$, будут заполнять плоскость, проходящую через точки O, B и G; все точки, для которых $y+z=x$, будут заполнять плоскость, проходящую через точки O, B и E. Таким образом, все точки, отвечающие благоприятным исходам [т. е. удовлетворяющие всем трем неравенствам (*)], будут расположены внутри области $OBGEF$, ограниченной тремя указанными плоскостями и тремя гранями куба. Отметим теперь, что объем куба отличается от объема тела $OBGEF$ на утроенный объем трехгранной пирамиды $EOBA$ (ибо пирамиды $EOBA$, $GOED$ и $GOBC$ равновелики). Но объем $EOBA$ равен



Черт. 84.

$$\frac{1}{3} EA \cdot \text{пл. } OAB = \frac{1}{3} l \cdot \frac{1}{2} l^2 = \frac{l^3}{6};$$

следовательно, объем тела $OBGEF$ равен

$$l^3 - 3\frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{2}$$

и искомая вероятность равна

$$\frac{l^3}{2} : l^3 = \frac{1}{2}.$$

97. В этой задаче рассматривается тот же опыт, что и в предыдущей. Как и там, множество всевозможных исходов опыта мы изобразим в виде множества точек куба $OABCDEFG$ со стороной l; при этом вероятность события будет равна отношению объема части куба, отвечающей благоприятным исходам опыта, к объему всего куба. Таким образом, нам надо только определить, какие точки куба отвечают благоприятным исходам опыта.

Согласно теореме косинусов в остроугольном треугольнике квадрат каждой стороны меньше суммы квадратов двух других сторон, в то время как в тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других сторон и в прямоугольном — квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Следовательно, для того чтобы из трех отрезков можно было сложить остроугольный треугольник, квадрат каждого из этих отрезков должен быть меньше суммы квадратов двух остальных[1]. Таким образом, разница между решением настоящей задачи и предыдущей заключается лишь в том, что теперь благоприятные исходы опыта будут определяться не неравенствами (*) (см. решение задачи 96), а неравенствами

$$x^2+y^2>z^2, \quad x^2+z^2>y^2, \quad y^2+z^2>x^2. \qquad (**)$$

Равенство $x^2+y^2=z^2$ означает, что расстояние $MQ=\sqrt{x^2+y^2}$ от точки M с координатами x, y, z до оси Oz равно отрезку OQ оси Oz (черт. 85, *а*). Отсюда ясно, что все точки, для которых $x^2+y^2=z^2$, будут лежать на поверхности конуса, имеющего осью прямую OD и угол между осью и образующей, равный 45°; точки же, для которых $z^2>x^2+y^2$ (этим точкам отвечают неблагоприятные исходы опыта), будут располагаться внутри этого конуса. Аналогично неравенства $y^2>x^2+z^2$ и $x^2>y^2+z^2$ определяют два конуса, имеющих осью прямые OC и OA (черт. 85, *б*). Внутри куба $OABCDEFG$ помещается четверть каждого из этих трех конусов; они не пересекаются и высота каждого из них равна

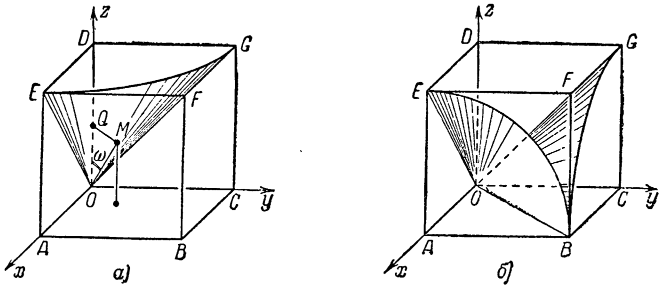
---

[1]) Это условие одновременно гарантирует и то, что ни один из отрезков не будет больше суммы двух других (т. е. то, что из этих отрезков вообще можно сложить треугольник). Действительно, если, например, $x^2<y^2+z^2$, то и подавно $x^2<y^2+2yz+z^2=(y+z)^2$ и, значит, $x<y+z$.

длине ребра куба l, а радиус основания также равен l (так как угол ω между осью и образующей равен 45°). Объем четверти такого конуса, очевидно, равен

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\pi l^2\cdot l=\frac{\pi l^3}{12};$$

следовательно, объем части куба, отвечающей неблагоприят-



Черт. 85.

ным исходам опыта, равен $3\frac{\pi l^3}{12}=\frac{\pi l^3}{4}$, а объем части куба, отвечающей благоприятным исходам, равен $l^3-\frac{\pi l^3}{4}$.

Отсюда вытекает, что искомая в задаче вероятность равна

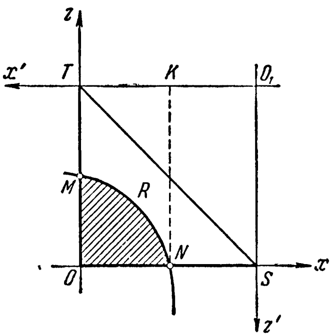
$$\frac{l^3-\frac{\pi l^3}{4}}{l^3}=1-\frac{\pi}{4}=0{,}2146\ldots$$

98. В этой задаче рассматривается тот же опыт, что и в задаче 93. Как и во втором решении задачи 93, всевозможные исходы этого опыта мы будем характеризовать двумя числами: $AK=x$ и $KL=z$ (см. черт. 80, *а*). При этом множество всех исходов представится множеством точек треугольника OST, ограниченного осями координат и прямой $x+z=l$ (черт. 86; ср. также черт. 81), а вероятность какого-либо события будет равна отношению площади части треугольника, отвечающей благоприятным для этого события исходам, к площади всего треугольника.

Нам надо определить, при каких значениях x и z из трех отрезков длины x, z и $l-x-z$ можно будет сложить остроугольный треугольник. Как показано в решении предыдущей задачи, для этого надо только, чтобы квадрат длины каждого из этих отрезков был меньше суммы квадратов длин двух остальных. Таким образом, неблагоприятным исходам опыта будут отвечать точки треугольника OST, для которых выполняется одно из следующих трех неравенств:

$$\left.\begin{array}{c} x^2 \geqslant z^2 + (l - x - z)^2, \quad z^2 \geqslant x^2 + (l - x - z)^2, \\ (l - x - z)^2 \geqslant x^2 + z^2. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

При этом ясно, что никакие два из выписанных неравенств не могут выполняться одновременно (ибо из каждого из них следует, что длина отрезка, фигурирующая в левой части неравенства, больше суммы двух остальных длин; см. сноску на стр. 326); следовательно, никакие две из трех областей, определяемых этими неравенствами, не будут пересекаться. Далее, при разбиении стержня наудачу на три куска вероятность того, что квадрат длины одного определенного куска будет превосходить сумму квадратов длин двух остальных, будет одинакова для всех трех кусков стержня[1]; отсюда вытекает, что площади трех областей треугольника OST, определяемых тремя неравенствами (*), должны быть одинаковыми. Следовательно, для того чтобы найти площадь области, отвечающей всем неблагоприятным исходам опыта, нам достаточно подсчитать площадь области, определяемой каким-либо одним из неравенств (*), и умножить ее на 3.



Черт. 86.

Найдем теперь площадь той части треугольника OST, для которой выполняется неравенство

$$(l - x - z)^2 \geqslant x^2 + z^2.$$

[1]) Как мы видели из решения задачи 95, задача о разбиении стержня на три части равносильна задаче о разбиении на три части окружности, а при разбиении окружности три получающиеся части, очевидно, будут совершенно равноправны.

Раскрывая скобки, это неравенство можно переписать в виде

$$l^2+2xz-2lx-2lz\geqslant 0.$$

Добавив теперь к обеим частям неравенства по слагаемому l^2 и разделив на 2, получим:

$$(l-x)(l-z)\geqslant\frac{l^2}{2}.$$

Но уравнение $(l-x)(l-z)=\frac{l^2}{2}$, очевидно, определяет гиперболу (график обратной пропорциональной зависимости), проходящую через точки $x=\frac{l}{2}$, $z=0$ (точка N) и $x=0$, $z=\frac{l}{2}$ (точка M); только за оси координат при этом следует принять прямые O_1T и O_1S (т. е. прямые $l-z=0$ и $l-x=0$; см. черт. 86). А неравенство $(l-x)(l-z)\geqslant\geqslant\frac{l^2}{2}$ будет выполняться для всех точек криволинейной фигуры $ONRM$, заштрихованной на черт. 86, и только для них.

Нам остается определить площадь фигуры $ONRM$. Примем за новые оси координат прямые O_1T (ось O_1x') и O_1S (ось O_1z'); в этой системе координат наша гипербола будет иметь уравнение $x'z'=\frac{l^2}{2}$. Введем теперь в качестве новой единицы длины длину $\frac{l}{\sqrt{2}}$; тогда это уравнение запишется как $x'z'=1$. При этом абсцисса O_1K точки N в новых единицах будет равна $\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, а абсцисса O_1T точки M равна $\frac{l}{\frac{l}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$. В силу результата задачи 152 отсюда вытекает, что площадь криволинейной трапеции $KNMT$ в новых квадратных единицах будет равна $\ln\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln 2$, т. е. натуральному логарифму числа 2 (логарифму при основании $e=2{,}718\ldots$). Переходя, далее, обратно к старым единицам площади, мы найдем, что площадь криволинейной трапеции

$KNMT$ равна $\ln 2 \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{l^2 \ln 2}{2}$. Отсюда для площади фигуры $ONRM$, заштрихованной на черт. 86, получаем выражение

$$\frac{l^2}{2} - \frac{l^2 \ln 2}{2} = \frac{l^2}{2}(1 - \ln 2).$$

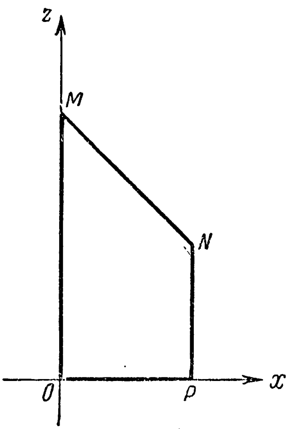
Общая площадь части треугольника OST, отвечающей неблагоприятным исходам опыта, будет в три раза больше этого выражения, а площадь части, отвечающей благоприятным исходам, будет равна

$$\frac{l^2}{2} - 3\,\frac{l^2}{2}(1 - \ln 2) = \frac{l^2}{2}(3 \ln 2 - 2).$$

Таким образом, искомая в задаче вероятность имеет следующее значение:

$$\frac{l^2}{2}(3 \ln 2 - 2) : \frac{l^2}{2} = 3 \ln 2 - 2 = 0{,}082\ldots$$

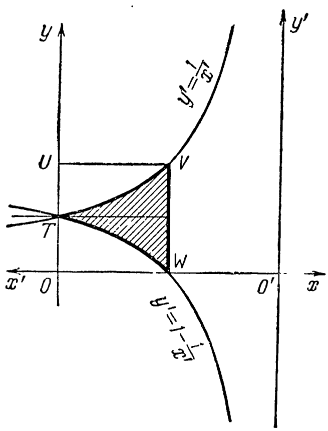
99. Будем для простоты считать, что длина нашего стержня равна 2 (это законно, ибо всегда можно принять половину длины стержня за единицу длины). Пусть AB есть наш стержень, K и L — точки первого и соответственно второго излома. Исход опыта в настоящей задаче полностью определяется числами $x = AK$ и $z = KL$, где x выбирается наудачу между 0 и 1 (x есть длина меньшей из двух образовавшихся после первого излома частей и, следовательно, $x < 1$), а z выбирается наудачу между 0 и $2 - x$. Если мы примем x и z за координаты точки на плоскости, то множество всех исходов изобразится совокупностью точек прямоугольной трапеции $OMNP$ (черт. 87). При этом, однако, вероятность того, что точка (x, z) попадет внутрь некоторого малого прямоугольника, расположенного внутри трапеции, будет зависеть не только от площади этого прямоугольника: вероятность того, что x попадет внутрь некоторого отрезка оси



Черт. 87.

абсцисс, равна длине этого отрезка, но вероятность того, что z попадет внутрь некоторого отрезка оси ординат при данном x, будет равна отношению длины этого отрезка к $2-x$, т. е. будет зависеть от x. Таким образом, вероятность попадания точки (x, z) внутрь какой-либо части трапеции $OMNP$ зависит не только от площади этой части трапеции, но и от ее формы и расположения внутри $OMNP$; по этой причине представление всевозможных исходов опыта точками трапеции $OMNP$ неудобно для подсчета вероятностей.

Значительно удобнее характеризовать всевозможные исходы опыта парой чисел x и $y=\frac{z}{2-x}$. Ясно, что и x и y выбираются наудачу между 0 и 1; следовательно, если мы примем x и y за координаты точки плоскости, то всевозможные исходы будут представляться точками единичного квадрата $OUVW$ (черт. 88) и вероятность того, что точка (x, y) попадет внутрь некоторой части этого квадрата, будет равна площади этой части (площадь всего квадрата $OUVW$ равна 1). Таким образом, надо только определить площадь той части квадрата $OUVW$, которая отвечает благоприятным исходам опыта.



Черт. 88.

В нашей задаче благоприятными будут те исходы, в которых из отрезков x, z и $2-x-z$ можно сложить треугольник. Для того чтобы это было возможно, надо только, чтобы длина каждого из этих отрезков не превзошла 1 (см. решение задачи 93). Так как отрезок x не больше 1 по условию, то благоприятными будут все исходы, в которых $z<1$ и $2-x-z<1$, т. е.

$$z<1 \text{ и } z>1-x.$$

Так как $y=\frac{z}{2-x}$, то, разделив выписанные неравенства на $2-x$, мы получим, что благоприятным исходам будут соответствовать пары чисел (x, y), такие, что $y < \frac{1}{2-x}$ и $y > \frac{1-x}{2-x}$, т. е.

$$y < \frac{1}{2-x}, \quad y > 1 - \frac{1}{2-x}. \tag{*}$$

Нам надо теперь представить себе, как выглядит на черт. 88 область, определенная этими неравенствами.

Введем вместо координат (x, y) координаты (x', y'), где

$$y' = y, \quad \text{а} \quad x' = 2 - x.$$

Такая замена координат эквивалентна перенесению начала координат в точку O', расположенную на оси абсцисс на расстоянии 2 от старого начала и изменению направления оси абсцисс (см. черт. 88). В новых координатах неравенства (*) перепишутся так:

$$y' < \frac{1}{x'}, \quad y' > 1 - \frac{1}{x'}. \tag{**}$$

Первое из этих неравенств показывает, что все точки, отвечающие благоприятным исходам, будут расположены под гиперболой

$$y' = \frac{1}{x'}.$$

Построим теперь еще кривую

$$y' = 1 - \frac{1}{x'} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{2}\right);$$

$$y' - \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{2}\right);$$

эта кривая будет, очевидно, симметрична кривой $y' = \frac{1}{x'}$ относительно прямой $y' = \frac{1}{2}$ (см. черт. 88). Второе из неравенств (**) показывает, что все точки, отвечающие благоприятным исходам, расположены над кривой

$$y' = 1 - \frac{1}{x'}.$$

Таким образом, благоприятным исходам отвечают точки, заполняющие заштрихованную на черт. 88 область. Площадь этой области нам и надо определить.

Прежде всего заметим, что в силу симметрии кривых

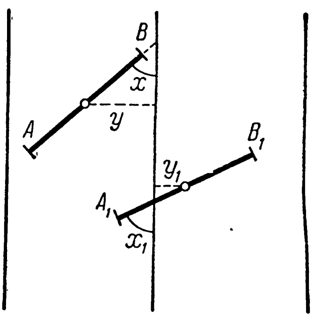
$$y' = \frac{1}{x'} \text{ и } y' = 1 - \frac{1}{x'}$$

относительно прямой $y' = \frac{1}{2}$ площадь криволинейного треугольника OTW равна площади криволинейного треугольника TUV; таким образом, искомая площадь равна $1 - 2$ пл.TUV. Но в силу задачи 152 площадь криволинейной трапеции $OTVW$ равна $\ln 2$ ($\ln$ означает натуральный логарифм, т. е. логарифм при основании $e = 2{,}718\ldots$). Отсюда вытекает, что пл.$TUV = 1 - \ln 2$ и, следовательно, искомая площадь криволинейного треугольника TVW равна

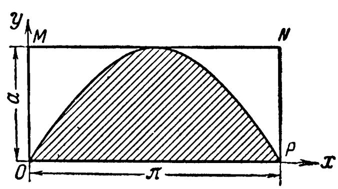
$$1 - 2(1 - \ln 2) = 2\ln 2 - 1 = 0{,}388\ldots$$

Этому же выражению равна вероятность того, что из отрезков x, z и $2 - x - z$ можно сложить треугольник.

100. Положение иглы после ее падения на плоскость определяется расстоянием y от центра иглы AB до ближайшей из параллельных прямых и углом x между направлением иглы и направлением этих прямых (черт. 89). Ясно, что $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; таким образом, всевозможные исходы опыта определяются парами чисел (x, y), где x выбирается наудачу между



Черт. 89.



Черт. 90.

0 и π, а y — наудачу между 0 и a. Множество всех исходов здесь можно изобразить совокупностью точек, заполняющих прямоугольник $OMNP$ со сторонами $OM = a$ и $OP = \pi$ (черт. 90); при этом вероятность попадания точки (x, y) внутрь какой-либо части этого прямоугольника будет равна отношению площади

этой части к площади всего прямоугольника $OMNP$. Таким образом, надо только определить площадь части $OMNP$, отвечающей благоприятным исходам опыта.

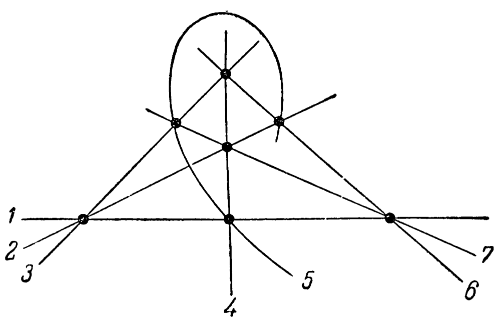
Из черт. 89 видно, что для того, чтобы игла AB пересекла одну из параллельных прямых, надо только, чтобы выполнялось неравенство $y \leqslant a \sin x$. Кривая $y = a \sin x$ есть синусоида (см. черт. 90); неравенство $y \leqslant a \sin x$ показывает, что благоприятным исходам опыта будут отвечать точки, расположенные под этой синусоидой. В силу задачи 147б) площадь под синусоидой равна $2a$. Так как площадь всего прямоугольника $OMNP$ равна $a\pi$, то искомая вероятность есть

$$\frac{2a}{a\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637.$$

РАЗДЕЛ II

ЗАДАЧИ ИЗ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ МАТЕМАТИКИ

101. Возможно. Рассмотрим, например, 10 прямых плоскости, таких, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, и будем считать, что прямые — это автобусные маршруты, а точки их пересечения — остановки. При этом с каждой остановки можно проехать на любую другую: если остановки лежат на одной прямой, — то без пересадки, а если нет, — то с одной пересадкой. Далее, если даже отбросить в этой схеме одну прямую, то все еще останется возможность проехать с каждой остановки на любую другую, сделав в пути не больше одной пересадки. Однако если отбросить две прямые, то одна остановка — точка пересечения этих прямых — уже вовсе не будет обслуживаться оставшимися маршрутами, и с этой остановки будет невозможно проехать на какую-либо другую.

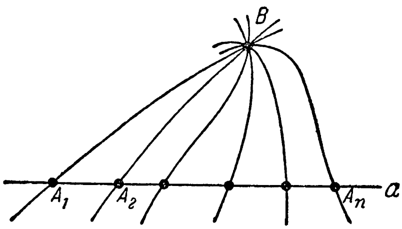


Черг. 91.

102. Пример подобной автобусной сети, состоящей из семи маршрутов, изображен на черт. 91.

103. а) Пусть n есть число остановок какого-то одного из автобусных маршрутов города. Нам надо доказать, что в таком случае каждый маршрут будет иметь ровно n остановок и через каждую остановку будет проходить ровно n маршрутов.

Обозначим маршрут, имеющий n остановок, буквой a, а остановки этого маршрута — буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и рассмотрим произвольную автобусную остановку B, распо-

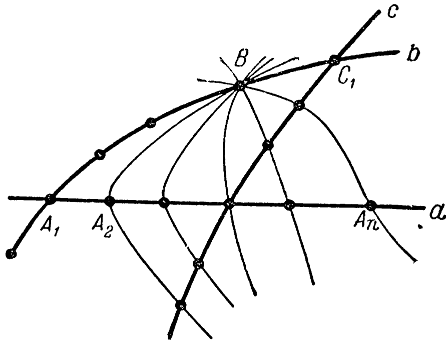


Черт. 92.

ложенную вне маршрута a (черт. 92). В силу условия 2° из остановки B одним из маршрутов можно попасть на каждую из n остановок $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В силу условия 3° каждый из маршрутов, проходящий через B, проходит через какую-то из остановок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (иначе с этого маршрута нельзя было бы пересесть на маршрут a), и при этом только через одну из них (иначе с этого маршрута можно было бы пересесть на маршрут a на двух остановках), и никакие два из проходящих через B маршрута не проходят через одну и ту же остановку маршрута a (иначе с одного из этих маршрутов можно бы было пересесть на другой на двух остановках: на остановке B и на той остановке, в которой они встречают маршрут a). Отсюда следует, что через остановку B проходит столько же маршрутов, сколько имеется остановок на маршруте a, т. е. ровно n маршрутов.

Рассмотрим теперь произвольный маршрут c, отличный от a (черт. 93). В силу условия 1° на c расположено не менее трех остановок, причем в силу 3° лишь одна из этих остановок является одновременно остановкой и маршрута a. Вне маршрута c расположено, очевидно, $n-1$ остановок маршрута a; покажем, что помимо этого вне c расположена еще хотя бы одна остановка, не лежащая на a. Действительно, пусть A_1 есть одна из $n-1$ остановок маршрута a, расположенных вне c, а C_1 есть одна из остановок маршрута c, расположенных вне a (таких остановок имеется не менее чем 2). В силу условия 2° существует автобусный маршрут b, проходящий через остановки A_1 и C_1, в силу условия 3° на этом маршруте помимо A_1 и C_1 имеется еще по крайней мере одна остановка B, которая будет расположена вне c и вне a.

Как мы знаем, через каждую автобусную остановку, расположенную вне a, проходит ровно n маршрутов; это относится,



Черт. 93.

в частности, и к остановке B. Каждый из n маршрутов, проходящих через B, в силу условия 3° пересекается с маршрутом c в одной единственной остановке; далее, в силу условия 2° через каждую остановку маршрута c проходит хотя бы один маршрут, проходящий также и через B. Отсюда вытекает, что число остановок маршрута c равно числу маршрутов, проходящих через B, т. е. равно n. Итак, мы доказали, что **каждый** из автобусных маршрутов города имеет одно и то же число n остановок.

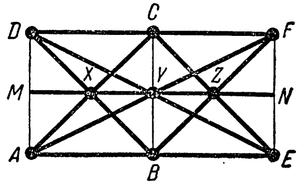
Нам остается еще только доказать, что через каждую из остановок $A_1, A_2, \ldots, A_n$, **расположенных на** a, также проходит ровно n маршрутов. Для этого достаточно показать, что для любой из этих остановок существует маршрут, через эту остановку не проходящий: действительно, этот маршрут, как и всякий другой, будет иметь n остановок, а мы уже знаем, что через любую остановку, расположенную вне маршрута, имеющего n остановок, обязательно будет проходить ровно n маршрутов (см. в самом начале решения этой задачи доказательство того, что через B проходит n маршрутов). Но так как общее число маршрутов не меньше двух, то помимо a существует еще какой-то маршрут b, пересекающийся с маршрутом a в силу условия 3° в единственной остановке. Пусть этой остановкой будет A_1; тогда остановки $A_2, A_3, \ldots, A_n$ будут расположены вне b и, следовательно, через них будет проходить ровно n маршрутов. Далее, на b помимо A_1 расположены еще некоторые другие остановки (не менее двух); пусть B есть одна из этих остановок. В таком случае маршрут, проходящий через B и через A_2 (такой маршрут существует в силу 2°), не будет проходить через остановку A_1; следовательно, вне A_1 также имеется хотя бы один маршрут и через A_1 также проходит ровно n маршрутов. Тем самым задача полностью решена.

б) В силу результата задачи а) в рассматриваемом случае каждый маршрут имеет одно и то же число n остановок и через каждую остановку проходит ровно n маршрутов. Пусть a есть один из маршрутов; через каждую из n остановок этого маршрута помимо a проходит еще $n-1$ маршрутов. Из условия 3° легко следует, что никакие два из получаемых таким образом $n(n-1)$ маршрутов не совпадают между собой и что каждый из маршрутов, отличных от a, входит в число этих $n(n-1)$ маршрутов (ср. решение задачи а)). Таким образом, общее число автобусных маршрутов города (включая a) равно $n(n-1)+1$. Отсюда для определения n получаем квадратное уравнение

$$\begin{aligned} n(n-1)+1 &= 57; \\ n^2-n-56 &= 0; \\ n &= 8 \end{aligned}$$

(второй корень уравнения $n=-7$, конечно, не подходит).

104. а) Расположим два равных прямоугольника $ABCD$ и $BEFC$ так, чтобы они примыкали друг к другу общей боковой стороной BC (черт. 94). Проведем диагонали в каждом из этих прямоугольников и во вдвое большем прямоугольнике $AEFD$, составленном из них обоих. Каждая пара из этих трех пар диагоналей пересекается в некоторой точке, лежащей на прямой MN, проходящей через середины боковых сторон наших прямоугольников; таким образом, мы получаем три точки, лежащие на этой прямой (на черт. 94 это будут точки X, Y, Z). Добавим к этим трем точкам еще шесть точек A, B, E, D, C, F, являющиеся вершинами прямоугольников,— итого мы получим девять точек. В качестве девяти прямых возьмем наши шесть диагоналей, верхнее и нижнее основания прямоугольников и прямую MN, проходящую посредине между верхним и нижним основаниями. Легко видеть, что эти девять точек и девять прямых будут удовлетворять всем условиям задачи.

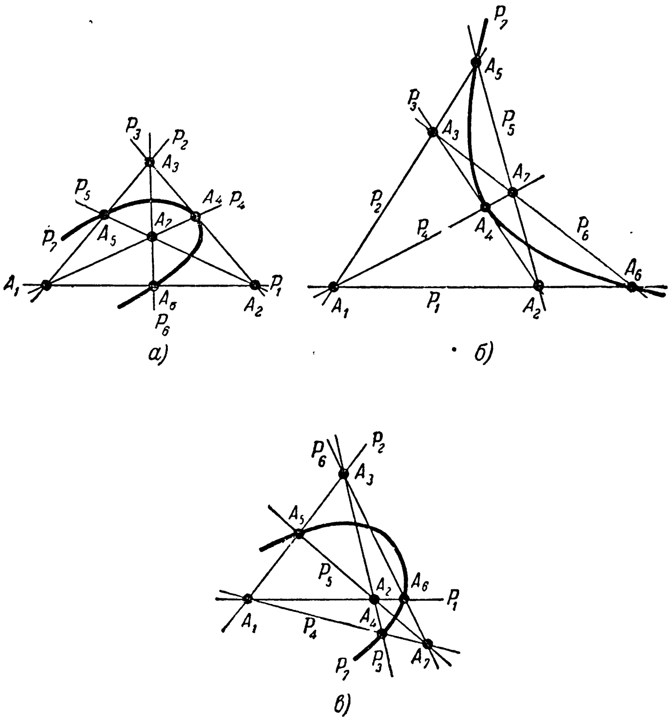


Черт. 94.

б) Предположим, что семь точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 и семь прямых p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 расположены так, как указано в условии задачи. Покажем прежде всего, что в этом случае в число прямых p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 будут входить все прямые, соединяющие какие-либо две из точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, а в число точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 — все точки пересечения каких-либо двух из прямых p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7. Действительно, пусть, например, p_1, p_2 и p_3 — те три из наших прямых, которые проходят через точку A_1. По условию задачи на каждой из прямых p_1, p_2 и p_3 помимо A_1 должны лежать еще по две точки из числа точек A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, следовательно, все эти шесть точек расположены на прямых p_1, p_2 и p_3. А это и означает, что прямая, соединяющая A_1 с любой из шести остальных точек, есть p_1, p_2 или p_3, т. е. одна из наших семи прямых.

Точно так же доказывается, что к числу этих семи прямых относится и прямая, соединяющая любую из наших семи точек с какой-нибудь из остальных точек. Аналогично показывается, что точка пересечения любых двух из наших семи прямых есть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 или A_7: для этого достаточно только заметить, что через те три из этих точек, которые расположены на некоторой одной прямой, по условию задачи должны проходить все остальные шесть из наших прямых (по две прямые через каждую из трех точек).

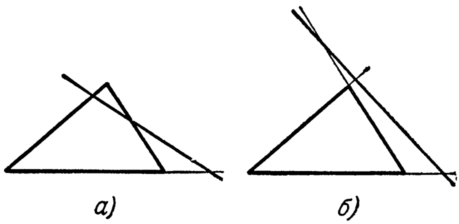
Рассмотрим теперь три точки A_1, A_2, A_3 и три прямые, соединяющие эти точки; пусть это будут, например, прямые p_1, p_2 и p_3 (черт. 95). По условию задачи через каждую из вершин A_1, A_2 и A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ помимо сторон треугольника должна проходить еще третья прямая из числа наших семи прямых; пусть, например, через A_1 проходит



Черт. 95.

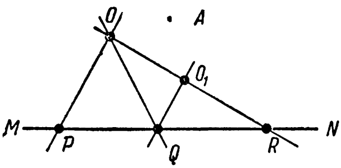
прямая p_4, через A_2 — прямая p_5 и через A_3 — прямая p_6, причем p_4 пересекает p_3 в точке A_4, p_5 пересекает p_2 в точке A_5 и p_6 пересекает p_1 в точке A_6. Для того чтобы все условия задачи были выполнены, надо еще, чтобы прямые p_4, p_5 и p_6 пересекались в одной точке A_7, а точки A_4, A_5, A_6 лежали на одной прямой p_7. Покажем, что оба эти условия не могут быть выполнены: если прямые p_4, p_5 и p_6 будут пересекаться в одной точке A_7, то точки A_4, A_5 и A_6 никогда не будут лежать на одной прямой.

Действительно, прямая, не проходящая через вершины треугольника, может либо пересечь две стороны этого треугольника (черт. 96, *а*), либо не пересечь ни одну из его сторон (черт. 96, *б*), но никогда она не может пересечь только одну сторону или же все три стороны. Если точка A_7 расположена внутри треугольника $A_1A_2A_3$ (черт. 95, *а*), то все точки A_4, A_5 и A_6 будут расположены на сторонах этого треугольника, а если она расположена вне треугольника $A_1A_2A_3$ (черт. 95, *б* и *в*), то лишь одна из этих точек будет расположена на стороне треугольника $A_1A_2A_3$, а остальные две — на продолжениях двух других сторон. В первом случае прямая p_7 должна была бы пересечь все три стороны треугольника $A_1A_2A_3$, а во втором случае — только одну из его сторон (и продолжения двух остальных). Так как и то и другое невозможно, то отсюда следует, что невозможно расположить семь точек и семь прямых так, как это требуется в условии задачи.



Черт. 96.

105. Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что не все n прямых пересекаются в одной точке, т. е. что через некоторую точку A пересечения двух из наших прямых не проходит по крайней мере одна из n прямых. Обозначим прямую, не проходящую через точку A, через MN. Кроме A вне прямой MN может быть расположен еще ряд точек пересечения наших n прямых; пусть O есть та из этих точек, которая расположена ближе всего к прямой MN (черт. 97) (если среди точек пересечения наших прямых, находящихся вне прямой MN, имеется несколько точек, расположенных на одинаковом расстоянии от MN, меньшем расстояний от остальных точек до этой прямой, то за O мы примем любую из этих точек).



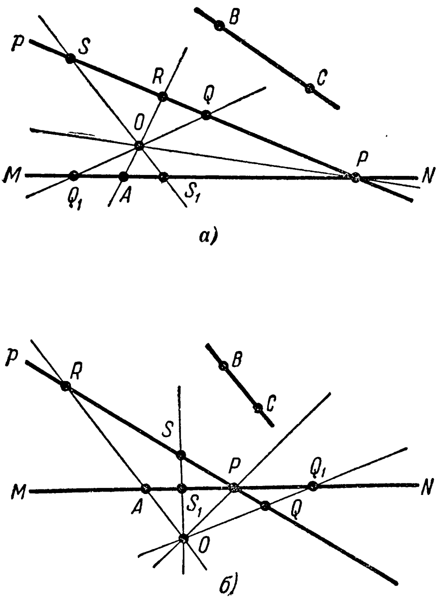
Черт. 97.

Через точку O проходят по крайней мере три различные прямые OP, OQ и OR нашей совокупности; здесь буквами P, Q и R обозначены точки пересечения прямых OP, OQ и OR с прямой MN. Пусть точка Q расположена между точками R и P. Через точку Q кроме прямых MN и OQ должна проходить еще хотя бы одна прямая из нашей совокупности прямых. Но эта прямая обязательно пересечет или отрезок OP или отрезок OR, причем точка пересечения O_1 будет расположена ближе к прямой MN, чем точка O. Тем самым мы пришли к противоречию (ибо мы предположили, что из всех точек пересечения наших прямых, расположенных вне прямой MN, точка O расположена ближе всего к MN).

Таким образом, наше исходное предположение о том, что не все прямые пересекаются в одной точке, оказывается неверным.

106. Решение близко к решению задачи 105, но додуматься до него несколько труднее. Предположим, что утверждение задачи неверно, т. е. что существуют три точки A, B и C из числа данных n точек, не лежащие на одной прямой. Проведем через точку A прямую MN, не содержащую кроме A других точек из числа данных и не параллельную прямой BC (черт. 98). Проведем, далее, все прямые, соединяющие попарно заданные n точек. Эти прямые пересекут прямую MN в ряде точек, среди которых будет точка A (это — точка пересечения прямых AB или AC с MN), но будут и другие точки (например, точка пересечения прямой MN с прямой BC).

Пусть P есть одна из точек пересечения проведенных прямых с прямой MN, расположенная ближе всего к точке A (или одна из двух таких точек); пусть, далее, p — та из проведенных прямых, которая пересекает прямую MN в точке P. Согласно условию задачи на прямой p должны быть расположены по крайней мере три из наших точек. Обозначим эти точки через Q, R и S. Четыре точки P, Q, R и S на прямой всегда можно разбить на две разделяющие друг друга пары (первая и третья и вторая и четвертая точки, если нумеровать эти точки в том порядке, в котором они расположены на прямой); пусть такими двумя разбивающими друг друга парами будут пары P, R и Q, S (два возможных варианта расположения этих точек изображены на черт. 98). Воспользуемся теперь тем, что на прямой AR, кроме точек A и R, обязательно должна быть расположена еще хотя бы одна точка O из наших n точек. Рассмотрим прямые OP, OQ, OR и OS; эти четыре прямые пересекут прямую MN



Черт. 98.

в четырех точках P, Q_1, A и S_1. Из того, что пары точек P, R и Q, S разделяют друг друга, вытекает, что пары точек P, A и Q_1, S_1 также будут разделять друг друга (ибо в этом случае пары прямых OP, OR и OQ, OS разделяют друг друга). Следовательно, одна из двух точек Q_1, S_1 расположена *между* точками A и P, т. е. *ближе* к точке A, чем точка P. Тем самым мы пришли к противоречию, ибо мы предположили, что P есть та из точек пересечения проведенных прямых с MN, которая расположена ближе всего к A. Это противоречие показывает, что исходное предположение было неверным: точки нашей совокупности не могут не лежать на одной прямой.

107. Число n должно быть не меньше трех (ибо не все n точек лежат на одной прямой). Если $n=3$, то теорема является очевидной: три точки, не лежащие на одной прямой, соединяются попарно точно тремя прямыми. Применим теперь метод математической индукции: предположим, что для n точек теорема уже доказана, и покажем, что в таком случае она справедлива и для $n+1$ точек. Рассмотрим все прямые, соединяющие попарно наши $n+1$ точек. Согласно результату задачи 106 хотя бы на одной из этих прямых должны быть расположены только две точки A_n и A_{n+1} из нашей совокупности (в противном случае все наши $n+1$ точек должны были бы лежать на одной прямой). Отбросим теперь точку A_{n+1}. Если остальные n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ расположены на одной прямой, то общее число прямых, очевидно, будет точно равно $n+1$: это будут n прямых, соединяющих точку A_{n+1} с точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и прямая, на которой расположены эти последние n точек. Если же n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не лежат на одной прямой, то по предположению индукции среди прямых, соединяющих попарно точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, будет не менее n различных. Добавим теперь сюда все прямые, соединяющие точку A_{n+1} с точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Так как на прямой A_nA_{n+1} не расположена ни одна из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, то эта прямая во всяком случае не содержится среди прямых, соединяющих попарно точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Таким образом, мы добавили по крайней мере одну новую прямую и, следовательно, после этого добавления число различных прямых стало не меньше чем $n+1$. Тем самым полностью доказано, что если наша теорема верна для n точек, то она верна и для $n+1$ точек. В силу принципа математической индукции отсюда вытекает, что эта теорема верна для любого числа точек.

108. а) Между четырьмя точками A, B, C и D всего имеется шесть взаимных расстояний: AB, AC, AD, BC, BD и CD. По условию они должны принимать одно из двух значений a или b, при этом могут представиться следующие случаи:

1°. все шесть расстояний равны a.

2°. пять расстояний равны a и одно расстояние равно b.

3°. четыре расстояния равны a и два расстояния равны b.

4°. три расстояния равны a и три расстояния равны b.

Эти случаи мы рассмотрим отдельно друг от друга.

Случай 1°, очевидно, невозможен. Действительно, точки A, B и C в этом случае должны быть вершинами равностороннего треугольника; но единственной точкой, равноудаленной от всех вершин такого треугольника, будет центр описанной вокруг треугольника окружности, расстояние от которого до вершин отлично от расстояния двух вершин друг от друга.

Случай 2°. Три из данных четырех точек (например, A, B и C) должны быть вершинами равностороннего треугольника со стороной a. Четвертая точка D должна быть удалена на расстояние a от двух вершин треугольника ABC, например от A и от C, и на расстояние b от вершины B.

Следовательно, точки A, B, C и D будут вершинами ромба, у которого одна диагональ AC равна стороне (черт. 99, *а*). Отсюда легко выводим, что в этом случае $b = BD = a\sqrt{3}$.

Случай 3° распадается на два подслучая:

А. Два отрезка длины b имеют общий конец (обозначим его D). В этом случае три остальные точки A, B и C образуют равносторонний треугольник со стороной a. Точка D удалена на расстояние b от двух вершин этого треугольника, например от A и от C, и на расстояние a от третьей вершины B. В силу равенств $AD = CD$ и $BD = a$ точка D должна лежать на перпендикуляре, восставленном к середине отрезка AC на расстоянии a от точки B; при этом она может быть расположена по одну или по другую сторону от точки B (черт. 99, *б* и *в*). Таким образом, в этом случае точки A, B, C и D лежат в вершинах дельтоида[1]), две стороны AB и BC которого равны a, стороны AD и CD равны b, а диагонали AC и BD равны между собой и равны a. Из черт. 99, *б* и *в* легко следует, что здесь

$$b^2 = AP^2 + PD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a \mp \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2 \mp \sqrt{3})\, a^2,$$

т. е. что

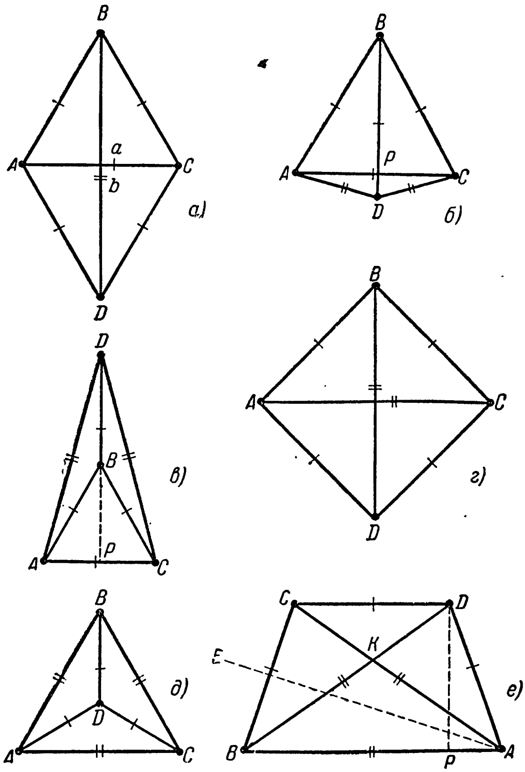
$$b = a\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad b = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

(два знака под радикалом отвечают двум возможностям, изображенным на черт. 99, *б* и *в*).

---

[1]) Дельтоидом называется четырехугольник, имеющий две пары равных соседних сторон.

Б. Два отрезка длины b не имеют общего конца. Пусть $AC = BD = b$, $AB = AD = BC = CD = a$. В силу равенств $AB = BC$, $AD = DC$ и $AB = AD$ точки B и D должны лежать на перпендикуляре, восставленном к отрезку AC в его середине, на одинаковом расстоянии от основания этого перпендикуляра; очевидно, они могут лежать только



Черт. 99.

по разные стороны от отрезка AC. Таким образом, точки A, B, C и D здесь являются вершинами ромба; так как диагонали AC и BD этого ромба равны между собой, то ромб является квадратом (черт. 99, г). В этом случае $b = AC = a\sqrt{2}$.

Случай 4° тоже распадается на два подслучая.

А. Среди данных четырех точек есть три (например, A, B и C), являющиеся вершинами равностороннего треугольника. Так как точка D должна быть одинаково удалена от точек A, B и C, то она должна совпасть с центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC (черт. 99, *д*). В этом случае, очевидно, $b = AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Б. Никакие три точки из наших четырех не являются вершинами правильного треугольника. Будем считать, что b есть большее из двух равноправных расстояний b и a.

Среди трех отрезков длины b найдутся два, имеющих общий конец (шесть концов этих трех отрезков не могут все быть различными, так как все они должны совпадать с одной из четырех точек A, B, C и D); пусть, например, таким общим концом будет точка A и соответственно $AB = AC = b$. Так как в силу сделанного предположения треугольник ABC не должен быть равносторонним, то должно быть $BC = a$. Заметим теперь, что точка D не может быть равноудаленной от точек B и C (т. е. не может быть расположена на перпендикуляре AE, восставленном к прямой BC): действительно, если бы было $BD = CD = a$, то треугольник BCD был бы равносторонним, а если бы было $BD = CD = b$, то расстояние AD было бы больше чем b, в то время как, по нашему предположению, $a < b$ (точка D в этом случае должна была бы быть симметричной точке A относительно прямой BC).

Таким образом, точка D должна располагаться вне прямой AE; будем считать, что она располагается с той же стороны этой прямой, что и точка C (в противном случае мы всегда можем переменить обозначения точек B и C). Отсюда вытекает, что $DB > DC$, а так как оба эти отрезка могут принимать лишь значения a и b, то должно быть $DB = b$, $DC = a$. Но всего мы должны иметь три отрезка длины a и три отрезка длины b; следовательно, последний, еще не определенный отрезок AD должен быть равен a. Теперь из равенства треугольников ABD и BCA заключаем, что точки D и C равноудалены от AB, т. е. $DC \parallel AB$; следовательно, четыре точки A, B, C и D в этом случае являются вершинами равнобедренной трапеции, меньшее основание которой равно ее боковым сторонам, а большее основание — диагоналям (черт. 99, *е*). Из черт. 99, *е* имеем:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AP$$

или

$$b^2 = b^2 + a^2 - 2b\frac{b-a}{2}.$$

Разделив обе части этого равенства на a^2, получаем:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0,$$

откуда $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (второй корень уравнения $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ является отрицательным).

Итак, все возможные расположения четырех точек на плоскости, при которых расстояния между любыми парами точек принимают лишь два различных значения a и b, задаются черт. 99, *а—е*. Мы видим, что такие расположения возможны только, если

$$b = a\sqrt{3}, \qquad b = a\sqrt{2+\sqrt{3}}, \qquad b = a\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$b = a\sqrt{2}, \qquad b = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad b = a\,\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

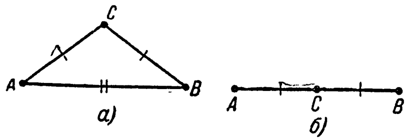
здесь b есть длина, встречающаяся более редко чем a, а в случае, если обе длины встречаются одинаково часто (т. е. по три раза), — большая из двух длин. Удобнее, однако, сформулировать полученный результат, считая b во всех случаях б о л ь ш е й и з д в у х д л и н a, b; так как $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$, то при этом условии остаются лишь следующие возможности:

$$b = a\sqrt{3},\; b = a\sqrt{2+\sqrt{3}},\; b = a\sqrt{2} \;\text{ и }\; b = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

б) Рассмотрим последовательно различные значения n.

1. $n = 2$. В этом случае имеется единственное расстояние; при любом расположении двух точек это расстояние принимает одно единственное значение a.

II. $n=3$. В этом случае имеются три расстояния. Для того чтобы эти три расстояния принимали лишь два различных значения a и b (скажем, два раза a и один раз b), надо, чтобы три точки располагались в вершинах равнобедренного треугольника с основанием b и боковой стороной a (черт. 100, *а* и *б*; второй из этих чертежей изображает вырожденный случай,



Черт. 100.

когда треугольник обращается в отрезок, а третья вершина его — в середину этого отрезка). Ясно, что a и b здесь должны лишь удовлетворять неравенству

$$a \geqslant \frac{b}{2};$$

в частности, может быть и $a=b$.

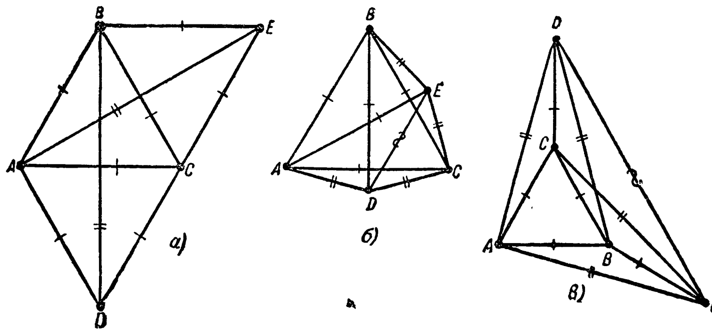
III. $n=4$. Этот случай разобран в решении задачи а).

IV. $n=5$. При этом попарные расстояния между какими-то четырьмя точками A, B, C, D из числа наших пяти точек A, B, C, D, E тоже должны принимать только два значения b и a; отсюда вытекает, что эти точки должны быть расположены одним из шести способов, изображенных на черт. 99, *а* — *е*.

Пусть четыре точки A, B, C, D расположены так, как это изображено на черт. 99, *а*. Расстояния между четырьмя точками A, B, C, E должны принимать те же два значения a и $b=a\sqrt{3}$; следовательно, точки A, B, C, E должны быть расположены или так, как это изображено на черт. 99, *а*, или так, как это изображено на черт. 99, *д*. При этом, так как три из этих четырех точек (а именно A, B и C) являются вершинами равностороннего треугольника со стороной $a<b$, а в расположении черт. 99, *д* имеется только равносторонний треугольник со стороной, равной большему из двух расстояний, то точки A, B, C, E должны быть расположены так, как это изображено на черт. 99, *а*. А так как точка E не совпадает с точкой D, то отсюда следует, что все пять точек A, B, C, D, E должны быть расположены так,

как это изображено на черт. 101, *а*; но в таком случае расстояние $DE = 2a$ отлично как от a, так и от b. Этим завершается доказательство того, что точки A, B, C, D не могут быть расположены так, как это изображено на черт. 99, *а*.

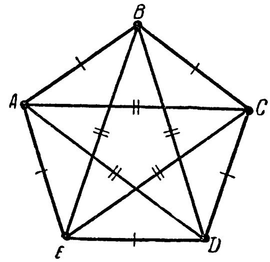
Аналогично показывается, что точки A, B, C, D не могут быть расположены так, как это изображено на черт. 99, *б* и *в*; приняв одно из этих предположений, мы с необходимостью



Черт. 101.

приходим к тому, что расположение точек A, B, C, D, E имеет вид, изображенный на черт. 101, *б* или *в*, и в обоих этих случаях расстояние DE принимает какое-то значение, отличное от имеющихся двух. Если расположение четырех точек A, B, C, D имеет вид, изображенный на черт. 99, *д*, то аналогично первому разобранному случаю показывается, что такой же вид должно иметь и расположение четырех точек A, B, C, E, что вовсе невозможно, если E отлично от D. Аналогично, если четыре точки A, B, C, D расположены так, как это изображено на черт. 99, *г*, то точка E должна совпасть с D (ибо четыре точки A, B, C и E тоже должны быть расположены в вершинах квадрата).

Итак, нам осталось рассмотреть лишь случай, когда точки A, B, C и D расположены в вершинах трапеции, изображенной на черт. 99, *е*. В этом случае и точки A, B, C и E должны являться вершинами такой же трапеции. Отсюда легко выводится, что точки A, B, C, D и E будут вершинами правильного пятиугольника (черт. 102)[1]. Это расположение пяти точек является единственным, удовлетворяющим условию задачи; в этом случае все 10 попарных расстояний между пятью точками принимают лишь два различных значения a и $b = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Черт. 102.

V. $n \geqslant 6$. В силу результата, полученного для $n = 5$, в этом случае каждые пять из рассматриваемых n точек должны лежать в вершинах правильного пятиугольника. Но если наши $n \geqslant 6$ точек все различны, то такое расположение, очевидно, является невозможным. Итак, при $n \geqslant 6$ вовсе не существует расположений n точек, удовлетворяющих условию задачи.

Таким образом, задача возможна только при $n = 3$, 4 или 5.

109. а) Нам надо указать расположение N точек (где N — произвольное целое число, большее 2) на плоскости, при котором не все эти точки лежат на одной прямой и все попарные расстояния между точками выражаются целыми числами.

Приведем даже два таких расположения.

Первое решение. Нетрудно непосредственно проверить, что если

$$x = 2uv; \quad y = |u^2 - v^2|, \quad z = u^2 + v^2, \tag{*}$$

[1]) Отметим, что если описать окружность вокруг трапеции $ABCD$, изображенной на черт. 99, е, то четыре точки A, B, C и D будут четырьмя вершинами правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность. Для доказательства достаточно заметить, что если $\angle DAB = \angle ADB = \alpha$, то $\angle CDB = \angle CBD = \angle CDA - \angle BDA = (180° - \alpha) - \alpha = 180° - 2\alpha = \angle ABD$ и $\angle BCD = 180° - 2(180° - 2\alpha) = 4\alpha - 180°$. Так как $\angle BCD + \angle CBA = 180°$, то имеем $5\alpha - 180° = 180°$, $\alpha = 2\frac{180°}{5} = 72°$. Но из того, что $\angle ABD = \angle DBC = \frac{180°}{5}$, вытекает, что AB, BC и CD есть стороны правильного пятиугольника, вписанного в окружность, описанную вокруг трапеции.

то

$$x^2+y^2=z^2. \qquad (**)$$

Воспользовавшись этими формулами [1]), нетрудно найти $N-2$ троек целых чисел

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\ x_2,\ y_2,\ z_2;\ \ldots,\ x_{N-2},\ y_{N-2},\ z_{N-2},$$

удовлетворяющих условию (**) и таких, что $x_1=x_2=\ldots$ $\ldots=x_{N-2}$. Действительно, пусть k есть какое-либо кратное $(N-2)$-х целых чисел $1, 2, 3, \ldots, N-2$. Будем последовательно полагать в формулах (*)

$$u=1,\ v=k;\ u=2,\ v=\frac{k}{2};$$

$$u=3,\ v=\frac{k}{3};\ \ldots;\ u=N-2,\ v=\frac{k}{N-2};$$

при этом мы придем к $N-2$ тройкам $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots$ $\ldots; x_{N-2}, y_{N-2}, z_{N-2}$ целых чисел, удовлетворяющих (**), для которых $x_1=x_2=\ldots=x_{N-2}=2k$.

Отметим теперь на некоторой прямой RS плоскости произвольную точку O и еще $n=N-2$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, удаленные от точки O на расстояния $y_1, y_2, \ldots, y_n=y_{N-2}$, а на перпендикуляре OP к прямой RS в точке O отметим точку P, удаленную на $x=2k$ единиц длины от O (черт. 103, a). Нетрудно видеть, что в таком случае N точек P, O, $A_1, A_2, \ldots, A_{N-2}$ будут обладать тем свойством, что все попарные расстояния между ними выражаются целыми числами.

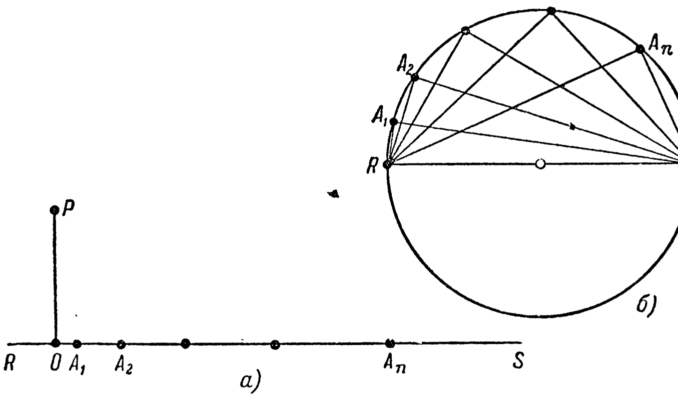
Примечание. Вместо того чтобы откладывать $N-1$ точек $O, A_1, A_2, \ldots, A_{N-2}$ на прямой RS и единственную точку P на перпендикуляре к этой прямой, можно отложить на прямой RS только $N-2$ точек, а в качестве N-й точки взять точку P', расположенную на прямой OP симметрично точке P относительно O. Можно также лишь половину общего количества точек на прямой RS располагать по одну сторону от O, а остальные выбирать симметрично уже расположенным относительно точки O.

[1]) Формулы (*) — это известные формулы, задающие длины сторон целочисленных прямоугольных треугольников [см., например, задачу 128а) из книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., Гостехиздат, 1954 («Библиотека математического кружка», вып. 1)].

Второе решение. Согласно формулам (*) и (**)

$$\left(\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2=1. \qquad (***)$$

Воспользовавшись (***), мы можем без труда найти N точек R, S, A_1, A_2, ..., $A_{N-2}=A_n$, расположенных на окружности диаметра $RS=1$ так, что все расстояния A_1R, A_2R, ..., A_nR;



Черт. 103.

A_1S, A_2S, ..., A_nS выражаются рациональными числами: для этой цели нам достаточно выбрать $n=N-2$ пар рациональных (например, целых) чисел u_1, v_1; u_2, v_2; ...; u_n, v_n ($u_1>v_1$, $u_2>v_2$, ..., $u_n>v_n$) и взять в качестве A_1, A_2, ..., A_n точки окружности, для которых

$$A_iR=\frac{2u_iv_i}{u_i^2+v_i^2}; \quad i=1, 2, \ldots, n;$$

в таком случае мы будем иметь

$$A_iS=\frac{u_i^2-v_i^2}{u_i^2+v_i^2}$$

(черт. 103, *б*).

Докажем теперь, что все попарные расстояния между нашими точками будут также рациональными. Действительно, так как диаметр нашего круга равен 1, то по теореме синусов

$$A_1A_2=\sin A_1RA_2=\sin(A_1RS-A_2RS)=$$
$$=\sin A_1RS\cos A_2RS-\sin A_2RS\cos A_1RS,$$

откуда сразу следует, что A_1A_2 есть число рациональное (ибо длины отрезков A_1R, A_1S, A_2R, A_2S, а следовательно, и $\sin A_1RS = A_1S$, $\cos A_1RS = A_1R$, $\sin A_2RS = A_2S$ и $\cos A_2RS = A_2R$ рациональны). Совершенно аналогично показывается, что и каждое из расстояний A_iA_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ является рациональным.

Пусть теперь k есть какое-либо кратное (например, наименьшее кратное) знаменателей всех дробей, выражающих попарные расстояния между точками R, S, A_1, A_2, ..., A_n. Тогда, увеличив подобно в k раз чертеж, изображающий расположение N точек R, S, A_1, A_2, ..., A_n, мы придем к системе N точек, все попарные расстояния между которыми выражаются целыми числами. Все эти точки лежат на одной окружности (диаметр которой равен k) и, следовательно, не лежат на одной прямой.

б) Покажем теперь, что бесконечное число точек, не все из которых расположены на одной прямой, не может обладать тем свойством, что все попарные расстояния между точками выражаются целыми числами. Для этого достаточно показать, что существует только конечное число точек, удаленных на целочисленные расстояния от трех заданных точек O, P и Q, не лежащих на одной прямой.

Пусть

$$PO = m \text{ и } QO = n;$$

m и n, по предположению, являются целыми числами. Обозначим через A произвольную точку, удаленную от точек O, P и Q на целочисленные расстояния (черт. 104). Так как разность двух сторон треугольника не превосходит третьей стороны, то

$$|AP - AO| \leqslant PO = m \text{ и } |AQ - AO| \leqslant QO = n$$

(знак равенства здесь может достигаться, когда треугольник APO или соответственно AQO вырождается в отрезок прямой). Так как все расстояния AO, AP и AQ — целые, то и разности $AP - AO$ и $AQ - AO$ выражаются целыми числами. В силу доказанных неравенств отсюда следует, что разность $AP - AO$ может принимать всего $2m+1$ различных значений (а именно m, $m-1$, ..., 1, 0, -1, ..., $-m+1$, $-m$), а разность $AQ - AO$ — всего $2n+1$ значений (n, $n-1$, ..., 1, 0, -1, ..., $-n+1$, $-n$).

Покажем, что при заданных значениях обеих разностей

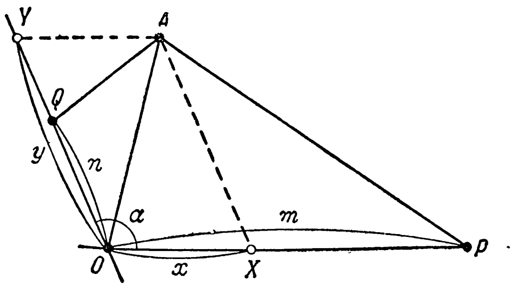
$$AP - AO = k \text{ и } AQ - AO = l$$

для точки A существуют лишь два различных положения; отсюда сразу будет следовать, что не может существовать более чем $2(2m+1)(2n+1)$ различных точек A, удаленных от всех трех точек O, P и Q на целочисленные расстояния, чем наша задача и будет решена.

Итак, пусть

$$AP - AO = k \text{ и } AQ - AO = l.$$

Проведем через точку A прямые AX и AY, соответственно параллельные OQ и OP; буквами X и Y мы обозначим



Черт. 104.

точки пересечения этих прямых соответственно с прямыми OP и OQ, буквами x и y — длины отрезков $OX = YA$ и $OY = XA$, а буквой α — угол QOP; так как O, P и Q не лежат на одной прямой, то $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 180°$. Применяя к треугольникам OAX, PAX и QAY теорему косинусов, получим:

$$OA = \sqrt{OX^2 + XA^2 - 2OX \cdot XA \cos \angle OXA} =$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha},$$
$$PA = \sqrt{PX^2 + XA^2 - 2PX \cdot XA \cos \angle PXA} =$$
$$= \sqrt{(x-m)^2 + y^2 + 2(x-m) y \cos \alpha},$$
$$QA = \sqrt{QY^2 + YA^2 - 2QY \cdot YA \cos \angle QYA} =$$
$$= \sqrt{(y-n)^2 + x^2 + 2(y-n) x \cos \alpha}.$$

Так как $AP - AO = k$ и $AQ - AO = l$, то

$$\sqrt{(x-m)^2 + y^2 + 2(x-m)y\cos\alpha} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha} = k, \qquad (\mathrm{I})$$

$$\sqrt{x^2 + (y-n)^2 + 2x(y-n)\cos\alpha} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha} = l. \qquad (\mathrm{II})$$

Преобразуем первое из этих уравнений. Перенося второй радикал направо и возводя затем обе части в квадрат, получим:

$$(x-m)^2 + y^2 + 2(x-m)y\cos\alpha = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha + 2k\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha} + k^2,$$

т. е.

$$x^2 - 2xm + m^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha - 2my\cos\alpha = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha + k^2 + 2k\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha},$$

или

$$-2xm - 2ym\cos\alpha + m^2 - k^2 = 2k\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha}.$$

Точно так же из второго из наших уравнений получим:

$$-2yn - 2xn\cos\alpha + n^2 - l^2 = 2l\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha}.$$

Сравнивая последние два уравнения, мы будем иметь:

$$l(-2xm - 2ym\cos\alpha + m^2 - k^2) = k(-2yn - 2xn\cos\alpha + n^2 - l^2), \qquad (*)$$

а возводя первое из них в квадрат, найдем:

$$(-2xm - 2ym\cos\alpha + m^2 - k^2)^2 = 4k^2(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha). \qquad (**)$$

Таким образом, для определения x и y мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, причем одно из этих уравнений (уравнение (*)) — первой степени, а второе (уравнение (**)) — второй [1]). Эта система уравнений может быть разрешена методом подстановки; она имеет не более двух различных действительных решений (решением системы является пара чисел x и y). Но задание x и y полностью определяет положение точки A (см. черт. 104; x и y — это координаты точки A в косоугольной системе координат). Следовательно, при заданных

$$AP - AO = k \text{ и } AQ - AO = l$$

точка A действительно может занимать не более двух различных положений, что и требовалось доказать.

Примечание. При решении этой задачи мы алгебраически показали, что число точек, для которых $AP - AO = k$ и $AQ - AO = l$ (O, P и Q — заданные точки, не лежащие на одной прямой; k и l — заданные числа), не превосходит двух. Для того чтобы геометрически получить этот же результат, естественно рассмотреть геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек плоскости есть величина постоянная. Это геометрическое место подробно изучается в высшей математике; оно представляет собой кривую, называемую гиперболой (частным случаем этой кривой является график обратной пропорциональной зависимости) и имеющую

---

[1]) На первый взгляд может показаться, что при $k = l = 0$ уравнение (*) обращается в тождество; однако нетрудно видеть, что в этом случае уравнения (I) и (II) сводятся к следующей системе двух уравнений первой степени:

$$-2xm - 2ym\cos\alpha + m^2 = 0,$$
$$-2yn - 2xn\cos\alpha + n^2 = 0.$$

Уравнение (**), как нетрудно видеть, обращается в следствие уравнения (*) $\left(\text{т. е. } \frac{k^2}{l^2}(-2yn - 2xn\cos\alpha + n^2 - l^2)^2 \text{ тождественно равно } 4k^2(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha)\right)$, только если $k = 0$ или если $n^2 = l^2$ (в этом случае $x = 0$, что можно вывести из уравнения (II)). Однако в первом случае мы можем заменить (**) уравнением

$$(-2yn - 2xn\cos\alpha + n^2 - l^2)^2 = 4l^2(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha),$$

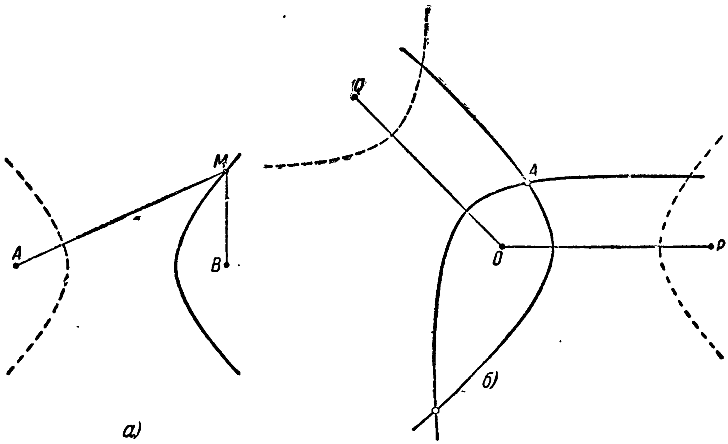
которое получается из уравнения (II) в точности так же, как (**) получается из (I). Во втором же случае система уравнений (I) и (II) сводится к двум простейшим уравнениям первой степени:

$$x = 0 \text{ и } 2(k + m\cos\alpha)y = m^2 - k^2,$$

причем второе уравнение не может обращаться в тождество, так как в этом случае $m^2 - k^2 \neq 0$. Таким образом, во всех случаях мы получаем систему двух уравнений относительно x и y, которая имеет не более двух решений.

вид, указанный на черт. 105, *а*[1]). Из внешнего вида этой кривой можно усмотреть, что две такие кривые, расположенные так, как это изображено на черт. 105, *б*, не могут пересекаться более чем в двух точках; это обстоятельство и было доказано выше при помощи уравнений.

Отметим еще, что в случае точек O, P и Q, лежащих на одной прямой, наше доказательство теряет силу; в этом случае само определение величин x и y теряет смысл. Геометрические рассмотрения

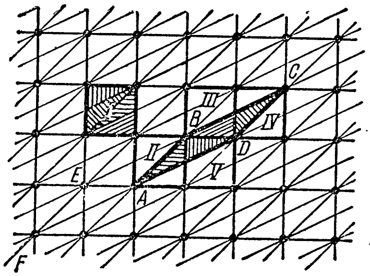


Черт. 105.

в этом случае тоже не дают доказательства того, что число точек, для которых $AP - AO = k$ и $AQ - AO = l$, конечно: если O, P и Q лежат на одной прямой, то соответствующие гиперболы могут вырождиться в лучи этой прямой (так будет при $k = OP$ и $l = OQ$) и совпасть друг с другом в целой полупрямой. И действительно, на прямой нетрудно найти бесконечную совокупность точек, все взаимные расстояния между которыми выражаются целыми числами: такой совокупностью будет, например, совокупность всех точек прямой, удаленных от некоторой фиксированной точки на целые расстояния.

[1]) На черт. 105, *а* и *б* пунктиром обозначены вторые ветви гипербол. Обыкновенно гиперболой называют не геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек имеет постоянную величину, а геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек имеет данную абсолютную величину; гипербола состоит из двух ветвей — геометрического места таких точек M, что $MA - MB = a$, и геометрического места таких точек N, что $NB - NA = a$.

110. а) Пусть $ABCD$ есть наш параллелограмм, внутри и на сторонах которого не расположены никакие узлы сетки квадратов (черт. 106). Пристроим к стороне AB этого параллелограмма равный ему параллелограмм $ABEF$. Очевидно, что вершины $ABEF$ также лежат в узлах сетки квадратов, покрывающей плоскость, и что внутри и на сторонах его также нет никаких вершин квадратов. Действительно, $ABEF$ можно совместить с $ABCD$ при помощи параллельного переноса в направлении отрезка FA на расстояние, равное длине этого отрезка; но сеть квадратов при таком переносе переходит сама в себя и, следовательно, оба наши параллелограмма расположены относительно этой сетки одинаковым образом. Пристроим теперь параллелограммы, равные $ABCD$,



Черт. 106.

также и к сторонам BC, CD и DA; далее, пристроим такие же параллелограммы к сторонам новых параллелограммов и к сторонам $ABEF$ и т. д. При этом мы получим сетку из параллелограммов, заполняющую плоскость наподобие уже имеющейся сетки квадратов, причем все вершины этой сетки параллелограммов будут расположены в узлах сетки квадратов, а внутри и на сторонах сетки параллелограммов никаких узлов сетки квадратов не будет (см. черт. 106).

Выберем в сетке квадратов какой-либо один квадрат (обозначим этот квадрат цифрой I) и покажем, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади этого квадрата. С этой целью рассмотрим те квадраты, которые пересекаются с параллелограммом $ABCD$ (на нашем чертеже это будут квадраты II, III, IV и V), и сдвинем параллельно каждый из них так, чтобы он совпал с квадратом I. При этом части параллелограмма $ABCD$, находящиеся внутри этих квадратов, перейдут внутрь квадрата I. Докажем теперь, что эти части параллелограмма $ABCD$ полностью покроют квадрат I без просветов и двойных покрытий; тем самым будет доказано, что площади квадрата I и параллелограмма $ABCD$ совпадают.

Действительно, предположим сначала, что внутри квадрата I окажется хотя бы одна точка, не покрытая частями параллелограмма $ABCD$. Так как построенная сеть параллелограммов покрывает всю плоскость, то эта непокрытая точка (мы обозначим ее буквой M) должна входить в какой-нибудь параллелограмм сети. Перенесем параллельно этот параллелограмм так, чтобы он совпал с параллелограммом $ABCD$. При этом точка M перейдет в некоторую точку M' параллелограмма $ABCD$ и, следовательно, будет принадлежать одной из частей, на которые $ABCD$ разбивается квадратами. Но в таком случае, сдвинув покрывающий эту точку квадрат в положение I, мы покроем точку M квадрата I, что противоречит предположению о том, что точка M была не покрыта частями параллелограмма $ABCD$.

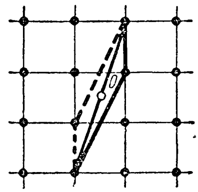
Предположим теперь, что какая-то точка M квадрата I после сдвига всех пересекающихся с $ABCD$ квадратов в положение I окажется покрыта сразу двумя частями параллелограмма $ABCD$. Рассмотрим квадраты, содержащие эти две части параллелограмма $ABCD$; пусть, например, это будут квадраты P и Q. Тогда при параллельном переносе всей плоскости, переводящем квадрат P в квадрат Q, некоторая точка параллелограмма $ABCD$ перейдет в точку того же параллелограмма. Но так как все вершины сетки квадратов являются одновременно всеми вершинами сети параллелограммов (здесь мы опять пользуемся тем, что внутри и на сторонах параллелограмма $ABCD$, а следовательно, и внутри и на сторонах остальных параллелограммов сети, нет вершин сети квадратов), то при параллельном переносе плоскости, переводящем квадрат P в квадрат Q, сетка параллелограммов, как и сетка квадратов, должна перейти сама в себя. Итак, параллелограмм $ABCD$ при таком переносе должен перейти в некоторый другой параллелограмм сети и, значит, ни одна его точка не может перейти опять в точку того же параллелограмма $ABCD$. Тем самым доказано, что никакая точка квадрата I не может оказаться покрытой сразу двумя частями $ABCD$. Итак, мы видим, что площадь квадрата I действительно равна площади параллелограмма $ABCD$, что и требовалось доказать.

б) Заметим прежде всего, что в силу результата задачи а) формула

$$S = N + \frac{k}{2} - 1$$

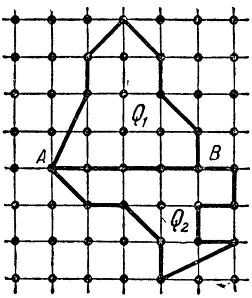
справедлива для параллелограммов, внутри и на сторонах которых нет узлов сетки квадратов. Действительно, для таких параллелограммов $S=1$ (см. задачу а)), $N=0$, $k=4$ (ибо четыре вершины параллелограмма находятся в вершинах сети квадратов) и

$$S=N+\frac{k}{2}-1=0+\frac{4}{2}-1.$$



Черт. 107.

Отсюда сразу следует, что эта формула верна и для всех «пустых» треугольников, т. е. для всех треугольников с вершинами в узлах сетки квадратов, внутри и на сторонах которых нет других узлов сетки. В самом деле, такой треугольник всегда можно достроить до параллелограмма, добавив к нему еще один треугольник, симметричный первому относительно середины O какой-либо из его сторон (черт. 107). Так как бесконечная сетка квадратов имеет своим центром симметрии середину любого из отрезков, соединяющих два узла сетки, то ясно, что внутри и на сторонах добавляемого треугольника также не будет никаких узлов сетки (иначе точка, симметричная относительно O с таким узлом, была бы узлом сетки квадратов, расположенным внутри или на стороне первого треугольника). Таким образом, площадь так построенного параллелограмма должна равняться 1, а следовательно, площадь S исходного «пустого» треугольника равна $\frac{1}{2}$. Но для такого треугольника $N=0$, $k=3$, так что



Черт. 108.

$$S=N+\frac{k}{2}-1=0+\frac{3}{2}-1.$$

Рассмотрим теперь два многоугольника Q_1 и Q_2, имеющих все вершины в узлах сетки квадратов и примыкающих друг к другу по одной общей стороне AB (черт. 108).

Пусть нам известно, что для обоих этих многоугольников формула $S=N+\frac{k}{2}-1$ справедлива; докажем, что в таком случае эта формула будет справедлива и для большого многоугольника Q, получаемого объединением Q_1 и Q_2.

Действительно, пусть S_1, N_1 и k_1 — площадь, число узлов сетки внутри многоугольника и число узлов сетки на границе многоугольника Q_1, а S_2, N_2 и k_2 — соответствующие числа для многоугольника Q_2. По предположению,

$$S_1 = N_1 + \frac{k_1}{2} - 1$$

и

$$S_2 = N_2 + \frac{k_2}{2} - 1.$$

Обозначим буквой k' число узлов сетки квадратов, расположенных на отрезке AB, включая точки A и B. Для многоугольника Q площадь S, число N узлов сетки внутри многоугольника и число k узлов сетки на границе многоугольника будут, очевидно, выражаться через S_1, N_1, k_1, S_2, N_2, k_2 и k' следующим образом:

$$S = S_1 + S_2,$$
$$N = N_1 + N_2 + (k' - 2)$$

(к внутренним узлам сетки добавляются все узлы, расположенные на AB, за исключением A и B) и

$$k = (k_1 - k') + (k_2 - k') + 2$$

(последнее слагаемое $+2$ здесь учитывает узлы A и B). Следовательно,

$$S = S_1 + S_2 = N_1 + \frac{k_1}{2} - 1 + N_2 + \frac{k_2}{2} - 1 =$$
$$= (N_1 + N_2 + k' - 2) + \frac{k_1 + k_2 - 2k' + 2}{2} - 1 = N + \frac{k}{2} - 1,$$

что и требовалось доказать.

Теперь уже совсем легко доказать, что эта формула верна для всех многоугольников с вершинами в узлах сетки квадратов. Каждый такой многоугольник можно разбить диагоналями на совокупность треугольников, примыкающих друг к другу по одной из сторон [1]); все вершины каждого из этих треуголь-

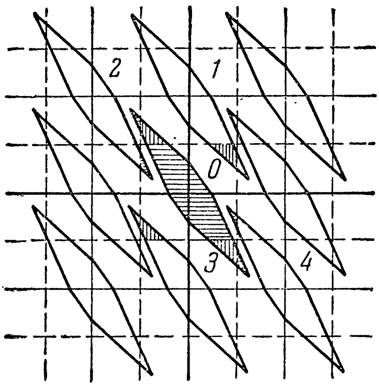
[1]) См., например, книгу Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, задачу 8а), М., Гостехиздат, 1952 («Библиотека математического кружка», вып. 2).

ников будут совпадать с некоторыми вершинами исходного многоугольника и, следовательно, будут узлами сетки квадратов. Каждый из полученных треугольников, не являющийся «пустым» (т. е. содержащий внутри себя или на границе какие-либо узлы сетки), можно далее разбить на некоторое число «пустых» треугольников. Действительно, соединив какой-либо внутренний узел сетки с тремя вершинами треугольника или какой-либо узел сетки, находящийся на границе, с противоположной вершиной треугольника, мы разобьем наш треугольник на три или два более мелких треугольника, для каждого из которых число узлов сетки, находящихся внутри или на сторонах, будет по крайней мере на единицу меньше, чем для исходного.

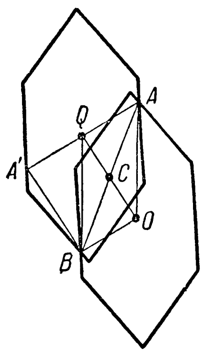
Повторив подобное разбиение достаточное число раз, мы в конце концов получим разбиение всех наших треугольников (т. е., иными словами, всего исходного многоугольника) на «пустые» треугольники. Вспомнив теперь, что для «пустых» треугольников формула $S = N + \frac{k}{2} - 1$ справедлива, и применив несколько раз доказанный выше результат (согласно которому эта формула верна для суммы Q многоугольников Q_1 и Q_2, если только она верна для Q_1 и для Q_2), мы убедимся, что наша формула справедлива для любого многоугольника с вершинами в узлах сетки.

111. Пусть центрально-симметричный выпуклый многоугольник M с центром в узле O сетки квадратов не содержит внутри себя ни одного узла сетки, отличного от O. Рассмотрим всевозможные узлы сетки квадратов, расстояния которых от обеих прямых сети, проходящих через точку O, выражаются четными числами, и построим все многоугольники, равные и параллельно расположенные с многоугольником M, центрами которых служат эти точки (черт. 109, *а*).

Мы утверждаем, что никакой из этих многоугольников не пересечет многоугольника M. Действительно, предположим, что многоугольник M_Q с центром в точке Q пересекает многоугольник M; пусть A есть какая-то общая точка этих двух многоугольников (черт. 109, *б*). Обозначим через A' точку многоугольника M_Q, симметричную точке A относительно центра Q этого многоугольника. Многоугольник M получается из многоугольника M_Q в результате параллельного перенесения на отрезок QO; следовательно, точке A' многоугольника M_Q отвечает точка B многоугольника M такая, что QA' параллельно и равно OB. В таком случае четырехугольник $OBA'Q$ есть параллелограмм и, следовательно, OB параллельно и равно QA'; отсюда вытекает, что OB также параллельно и равно AQ и, следовательно, четырехугольник $OBQA$ есть тоже параллелограмм. А из последнего следует, что середина C отрезка AB совпадает с серединой отрезка OQ. Но так как



а)



б)

Черт. 109.

A и B — две точки выпуклого многоугольника M, то и точка C принадлежит этому многоугольнику. С другой стороны, из того, что расстояния точки Q от прямых сети квадратов, проходящих через O, выражаются четными числами, следует, что середина C отрезка OQ есть узел сетки квадратов. Таким образом, если бы какой-нибудь из рассматриваемых многоугольников пересекал первоначальный многоугольник M, то M должен был бы содержать внутри себя отличный от O узел сетки квадратов, что противоречит условию задачи.

Дальнейшая часть доказательства того, что площадь многоугольника M не больше 4, близка к решению задачи 110а). Прямые сетки квадратов, расстояния которых от прямых, проходящих через O, измеряются нечетными числами (эти прямые обозначены пунктиром на черт. 109, *а*), образуют на плоскости сетку более крупных квадратов, площади которых равны 4. Многоугольник M может пересекаться с рядом таких квадратов; так, на черт. 109, *а* этот многоугольник пересекается с квадратами, помеченными номерами *0* (это есть квадрат с центром в точке O), *1, 2, 3, 4*. Сдвинем теперь параллельно многоугольник M таким образом, чтобы квадрат *1* совпал с квадратом *0*. При этом параллельном перенесении многоугольник M совпадет с одним из построенных на плоскости многоугольников M_1, равным и параллельно расположенным с многоугольником M; в частности, кусок многоугольника M, расположенный в квадрате *1*, совпадет с куском многоугольника M_1, расположенным в квадрате *0*. Таким образом, мы видим, что среди наших многоугольников имеется многоугольник M_1 такой, что кусок этого многоугольника, расположенный в квадрате *0*, равен куску многоугольника M, расположенному в квадрате *1*. Точно так же показывается, что существуют многоугольники M_2, M_3, M_4, куски которых, расположенные в квадрате *0*, равны соответственно кускам многоугольника M, расположенным в квадратах *2, 3, 4*. Отсюда следует, что общая площадь всех тех кусков рассматриваемых многоугольников, которые помещаются в квадрате *0*, в точности равна площади многоугольника M. А так как наши многоугольники не пересекаются между собой, то отсюда вытекает, что площадь многоугольника M не может быть больше площади квадрата *0*, т. е. 4.

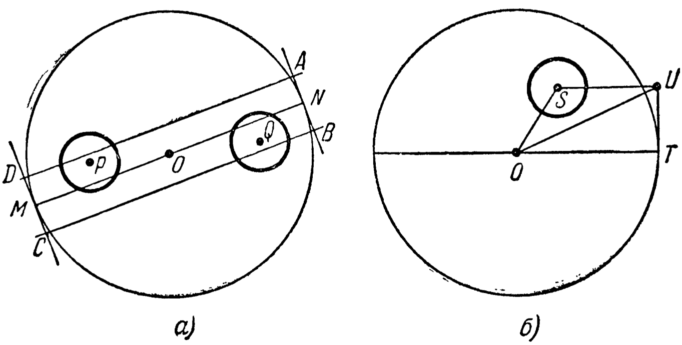
Из теоремы Минковского вытекает, что всякий центрально-симметричный выпуклый многоугольник площади, б о л ь ш е й четырех, имеющий центр в вершине сети квадратов, обязательно содержит внутри себя отличные от центра вершины сетки. (При этом в силу центральной симметрии многоугольника мы можем даже быть уверены, что помимо центра он содержит по крайней мере еще две вершины решетки, симметричные относительно центра.)

П р и м е ч а н и е. Теорема Минковского может быть еще несколько обобщена. См. по этому поводу книги Л. А. Люстерника и Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена, указанные на стр. 54.

112. Покажем прежде всего, что если радиус ρ всех деревьев больше $\frac{1}{50}$, то вид из центра сада оказывается полностью заслоненным. Проведем через центр O произвольную прямую MN, пересекающую границу сада в точках M и N, и покажем, что ни в направлении ON, ни в направлении OM наблюдатель из центра сада не может увидать просвета. Проведем касательные к ограничивающей сад окружности в точках M и N и две прямые, параллельные MN и отстоящие на расстоянии ρ от этой прямой (черт. 110, *а*). Мы получим прямоугольник $ABCD$, площадь которого равна

$$AB \cdot MN = 100 \cdot 2\rho = 4 \cdot 50\rho,$$

т. е. больше 4 $\left(\text{так как } \rho > \frac{1}{50}\right)$. В силу теоремы Минковского (см. задачу 111) отсюда вытекает, что внутри



Черт. 110.

четырехугольника $ABCD$ имеются две симметричные относительно точки O вершины P и Q сетки квадратов, образованной центрами деревьев (см. замечание в конце решения задачи 111). Деревья радиуса ρ, растущие в этих двух точках P и Q, обязательно пересекут лучи OM и ON, откуда и следует, что наблюдатель из центра не увидит просвета ни в направлении OM, ни в направлении ON.

Покажем теперь, что если

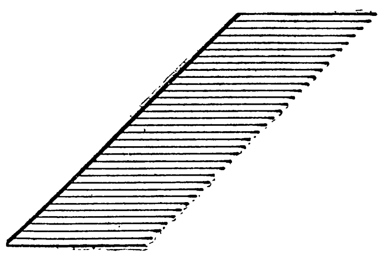
$$\rho < \frac{1}{\sqrt{2501}},$$

то просветы обязательно будут существовать. Пусть OT есть проходящая через центр сада прямая сети квадратов; T — точка пересечения этой прямой с границей сада, TU — отрезок касательной к границе сада в точке T длины 1 (черт. 110, *б*). Очевидно, что точка U является вершиной сети квадратов, причем внутри отрезка OU не будет расположено ни одной вершины сети; далее,

$$OU = \sqrt{OT^2 + TU^2} = \sqrt{2501}.$$

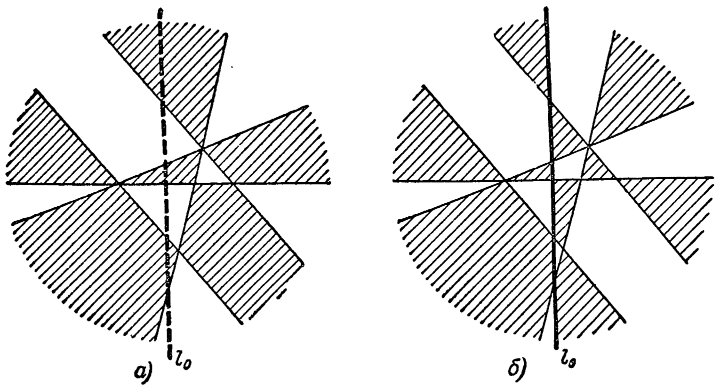
Пусть S — какая-то вершина сети квадратов, лежащая внутри сада. В силу формулы задачи 110б) площадь треугольника OUS не может быть меньше $^1/_2$ (так как k в этом случае равно трем), а следовательно, высота треугольника OUS, опущенная на сторону OU, не может быть меньше $\frac{1}{\sqrt{2501}}$. Но это и означает, что дерево радиуса $\rho < \frac{1}{\sqrt{2501}}$, растущее в точке S, не может пересечь луч OU, а следовательно, не может заслонить вид из центра в этом направлении.

113. Прежде всего очевидно, что две области, на которые разбивается плоскость одной единственной прямой, могут быть закрашены двумя цветами с соблюдением условий задачи (черт. 111). Теперь покажем, что если области, на которые разбивается плоскость n прямыми, могут быть закрашены двумя цветами с соблюдением условий задачи, то и области, на которые разбивается плоскость $n+1$ прямыми, тоже могут быть закрашены двумя цветами; отсюда в силу принципа математической индукции будет следовать утверждение задачи.



Черт. 111.

Действительно, пусть мы имеем $n+1$ прямых l_0, l_1, l_2, ..., l_n. Отбросим одну из этих прямых l_0; остальные n прямых разбивают плоскость на области, которые согласно предположению индукции можно закрасить двумя цветами с соблюдением условий задачи (черт. 112, *а*). Теперь проведем прямую l_0 и с одной стороны этой прямой изменим краски всех областей, а с другой стороны оставим все краски без изменения (черт. 112, *б*). Если две страны области из числа тех, на которые плоскость разбивается $n+1$ прямыми, граничат по одной из прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, то они окажутся окрашенными разными цветами (ибо раньше они были окрашены разными цветами, а после перекраски или оба цвета

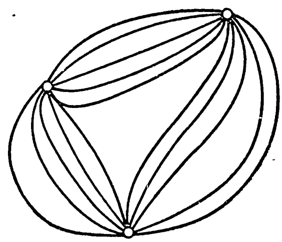


Черт. 112.

остались без изменения или оба одновременно изменились). Если же две области граничат по прямой l_0, то они тоже окажутся окрашенными в разные цвета: до проведения прямой l_0 эти две области были объединены и, следовательно, имели один цвет, а затем цвет одной из этих областей мы изменили, а цвет второй оставили прежним. Таким образом, полученная раскраска тоже удовлетворяет условиям задачи, что и требовалось доказать.

114. Нетрудно показать, что действительно для некоторых сетей 14 различных цветов может нехватить; для этого достаточно рассмотреть сеть, имеющую три узла, каждые два из которых соединены между собой пятью линиями (черт. 113). Каждые две линии этой сети сходятся в одном узле, откуда следует, что число красок, которыми можно закрасить эту сеть с соблюдением условий задачи, равно числу линий, т. е. равно 15.

Покажем теперь, что 15 различных цветов всегда достаточно. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. Именно наше утверждение справедливо в случае сети, имеющей только два различных узла (в этом случае достаточно даже только 10 различных цветов). Нетрудно видеть также, что и в случае сети, имеющей только три узла, 15 различных цветов всегда окажется достаточно, т. е. что рассмотренный выше пример сети с тремя узлами является самым невыгодным. Пусть мы уже доказали, что для раскраски каждой сети, имеющей n узлов, достаточно 15 различных цветов; покажем, что в таком случае и для каждой сети, имеющей $n+1$ узлов, хватит 15 различных цветов.



Черт. 113.

Пусть мы имеем произвольную сеть S, имеющую $n+1$ узлов A_0, A_1, ..., A_n. Все линии сети, не проходящие через узел A_0, составляют новую сеть S', имеющую n узлов; согласно предположению индукции сеть S' можно закрасить, использовав 15 различных цветов (может быть, некоторые из этих цветов на самом деле даже не придется использовать). Покажем теперь, что при помощи этих 15 цветов можно раскрасить и сеть S.

Предположим, что узел A_0 сети S соединяется p_1 линиями с узлом A_1, p_2 линиями с узлом A_2 и т. д., p_n линиями с узлом A_n (некоторые из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ могут, разумеется, равняться нулю). Согласно условию задачи сумма $p_1+p_2+\ldots+p_n$ (общее число линий сети S, сходящихся в узле A_0) не превосходит 10. В узле A_1 сети S' сходилось, очевидно, не более чем $10-p_1$ линий, так что после раскраски сети S' останутся еще по крайней мере

$$15-(10-p_1)=5+p_1$$

цветов, не использованных при раскраске линий, сходящихся в узле A_1; аналогично, останутся еще $5+p_2$ (или больше) цветов, не использованных при раскраске линий, сходящихся в узле A_2, $5+p_3$ цветов, не использованных при раскраске линий, сходящихся в A_3, и т. д.

Начнем теперь последовательно раскрашивать линии сети S, сходящиеся в узле A_0. Так как у нас имеется $5+p_1$ или больше цветов, не использованных при раскраске линий сети S', сходящихся в A_1, то p_1 линий, соединяющих A_0 с A_1, мы можем закрасить какими-то p_1 из этих цветов. Переходя далее к линиям, соединяющим A_0 с A_2, мы должны выбрать лишь те цвета, которые не были еще использованы ни при закраске линий сети S', сходящихся в A_2, ни при закраске линий сети S, соединяющих A_0 с A_1. Аналогично этому линии, соединяющие A_0 с A_3, можно будет закрашивать лишь цветами, не использованными при раскраске линий, соединяющих A_0 с A_1 и с A_2; линии, соединяющие A_0 с A_4, можно будет закрашивать цветами, не использованными при раскраске линий, соединяющих A_0 с A_1, с A_2 и с A_3 и т. д. Предположим теперь, что, выполняя эти условия, мы смогли закрасить все линии, соединяющие A_0 с узлами $A_1, A_2, \ldots \ldots, A_{i-1}$, и, может быть, часть линий, соединяющих A_0 с A_i; далее, однако, оказалось, что все цвета, еще не использованные для раскраски линий, сходящихся в узле A_0 (ниже мы будем обозначать эти цвета римскими цифрами I, II, III, ...), окрашивают некоторые из линий, проходящие через узел A_i. В этом случае мы, очевидно, не сможем продолжить раскраску линий, соединяющих A_0 с A_i так, чтобы не нарушить условия, указанного в формулировке задачи. Покажем, однако, что и в этом случае возможно продолжить раскраску сети, не нарушая этого условия, если только изменить цвет некоторых из уже закрашенных линий.

Рассмотрим какой-нибудь цвет 1 такой, что среди уже закрашенных линий, сходящихся в узле A_i (т. е. среди линий сети S', исходящих из узла A_i, и, быть может, нескольких уже закрашенных линий, соединяющих A_0 с A_i), нет линии цвета 1. Мы предположили, что все цвета, не использованные при закраске линий, исходящих из A_i, окрашивают какие-то линии, сходящиеся в A_0; следовательно, цветом 1 окрашена какая-то линия, соединяющая A_0 с узлом A_j, $j < i$. Рассмотрим далее несколько возможных случаев.

А. Среди линий сети S', сходящихся в узле A_j, нет линии какого-то из цветов I, II, III, ... В этом случае мы можем линию, соединяющую A_0 с A_j и закрашенную ранее в цвет 1, перекрасить в этот цвет, а одну из еще не закрашенных линий, соединяющих A_0 с A_i, закрасить в цвет 1.

Б. Среди линий, сходящихся в узле A_j, есть линии всех цветов I, II, III, ... Это значит, что ни один из $5+p_j$ или более цветов, не закрашивающих никаких линий сети S', исходящих из A_j, не принадлежит к числу цветов I, II, III, ..., т. е. что все эти цвета использованы при закраске линий сети S, сходящихся в A_0. Из этих $5+p_j$ или больше цветов ровно p_j использовано для закраски линий, соединяющих A_0 с A_j, и, следовательно, не меньше пяти цветов использовано при закраске линий, соединяющих A_0 с остальными узлами $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_i$. Далее, согласно нашему предположению, все $5+p_i$ или более цветов, которые не закрашивают линий сети S', исходящих из A_i, были использованы при раскраске линий сети S, соединяющих A_0 с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_i$; из этих $5+p_i$ или больше цветов для закраски линий, соединяющих A_0 с A_i, были до сих пор использованы меньше p_i цветов и, следовательно, не меньше, чем шесть цветов было использовано при раскраске линий сети S, соединяющих A_0 с остальными узлами A_1, $A_2, \ldots, A_{i-1}$. Но по условию задачи в узле A_0 сходится не более 10 линий; из них закрашено пока не более девяти линий. Отсюда вытекает, что среди пяти или больше линий, соединяющих A_0 с узлами $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_i$ и закрашенных цветами, не использованными при закраске линий сети S', сходящихся в A_j, и среди шести или больше линий, соединяющих A_0 с $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ и закрашенных цветами, не использованными при закраске линий сети S', сходящихся в A_i, есть хотя бы одна общая. Пусть этой общей линией будет линия, соединяющая A_0 с узлом A_k ($k<i$, $k\neq i$, $k\neq j$) и закрашенная в какой-то цвет 2. Рассмотрим далее отдельно два подслучая.

1°. С р е д и л и н и й, с х о д я щ и х с я в у з л е A_k, н е т л и н и и к а к о г о-т о и з ц в е т о в I, II, III, ... В этом случае мы можем перекрасить в этот цвет линию, соединяющую A_0 с A_k и закрашенную ранее в цвет 2, а одну из еще не закрашенных линий, соединяющих A_0 с A_i, закрасить в цвет 2.

2°. С р е д и л и н и й, с х о д я щ и х с я в у з л е A_k, е с т ь л и н и и в с е х ц в е т о в I, II, III, ... Отметим теперь следующее обстоятельство. Выделим в сети линий, раскрашенных с соблюдением условий задачи, какой-нибудь контур, вдоль которого попеременно чередуются линии двух произвольных цветов A и B, и продолжим этот контур в обе стороны до тех пор, пока это только будет возможно; при этом, очевидно, контур может либо замкнуться, либо оборваться с обеих сторон, но не может нигде иметь разветвлений (ибо к каждой вершине сети может подходить лишь одна линия наперед заданного цвета). Перекрасим теперь все линии этого контура, заменив всюду цвет A на цвет B и наоборот; в таком случае новая раскраска, разумеется, тоже будет удовлетворять нашим условиям. Теперь рассмотрим подобный контур, начинающийся в узле A_i, вдоль которого чередуются цвета I и 2 (через узел A_i, по предположению, проходит линия цвета I и не проходит линия цвета 2). Так как к узлу A_0 подходит линия цвета 2 (линия A_0A_k), но не подходит линия цвета I, а к узлу A_j, как и к узлу A_i, подходит линия цвета I, но не подходит линия цвета 2, то рассматриваемый контур или будет иметь второй конец в узле A_0, но не будет проходить через A_j, или будет иметь второй конец в узле A_j, но не будет проходить через A_0, или, наконец, не будет проходить ни через A_0, ни через A_j. Рассмотрим теперь отдельно две возможности, хотя бы одна из которых обязательно имеет место.

1) Пусть рассматриваемый контур не проходит через узел A_0. В этом случае изменим чередование цветов линий этого контура на обратное; после этого к узлу A_i уже не будут подходить линии цвета I и мы сможем закрасить в этот цвет одну из еще не закрашенных линий, соединяющих A_0 с A_i.

2) Пусть рассматриваемый контур не проходит через узел A_j. Рассмотрим теперь контур из линий, окрашенных попеременно в те же два цвета I и 2, исходящий из узла A_j; этот контур не будет проходить ни через A_i, ни через A_0. Изменим чередование цветов у линий этого нового контура на обратное. После этого линию A_0A_j цвета 1 можно будет перекрасить в цвет I (ибо к узлу A_j уже не будут подходить линии цвета I) и мы сможем затем закрасить одну из не закрашенных до сих пор линий, соединяющих A_0 с A_i в освободившийся цвет 1.

Таким образом, во всех случаях мы можем продолжить раскраску линий, сходящихся в узле A_0, изменив только, быть может, цвета некоторых из уже закрашенных линий. Продолжая поступать далее таким же образом, мы в конце концов окрасим все линии, сходящиеся в узле A_0.

Итак, если сеть S', имеющую n узлов, можно окрасить 15 цветами с соблюдением условий задачи, то и сеть S, имеющую $n+1$ узлов, можно раскрасить тем же количеством цветов. А отсюда в силу принципа математической индукции следует, что каждую сеть можно раскрасить 15 цветами.

Примечание. Точно так же показывается, что если в каждом узле сети сходится не более чем $m=2k$ линий, то все линии сети можно с соблюдением условий задачи окрасить $3k$ цветами; если же $m=2k+1$, то наименьшее число цветов, достаточное для раскраски любой сети, в узлах которой сходятся не больше m линий, равно $3k+1$.

115. а) Докажем даже больше, чем требуется в условии задачи, а именно докажем, что число треугольников подразделения, занумерованных цифрами 1, 2, 3, обязательно будет нечетным (отсюда, в частности, следует и утверждение задачи, так как нуль есть число четное). С этой целью подсчитаем двумя способами число сторон треугольников подразделения, занумерованных цифрами 1, 2.

А. Каждый треугольник подразделения, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3 (число таких треугольников мы обозначим буквой X), имеет единственную сторону, концы которой занумерованы цифрами 1, 2; каждый треугольник, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 2 или цифрами 1, 1, 2 (число таких треугольников мы обозначим буквой Y), имеет две стороны, концы которых имеют номера 1 и 2; каждый из остальных треугольников подразделения (например, треугольники, занумерованные цифрами 1, 1, 1 или 1, 3, 3) вовсе не имеет сторон, занумерованных цифрами 1, 2.

Отсюда следует, что общее число сторон мелких треугольников, занумерованных цифрами 1, 2, равно

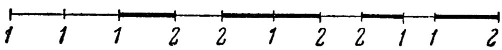
$$X+2Y.$$

Б. Отметим, что при проведенном подсчете мы считали дважды каждый отрезок, концы которого занумерованы цифрами 1 и 2, расположенный внутри большого (основного) треугольника, ибо каждый такой отрезок входит в качестве стороны в два треугольника, расположенных по разные стороны от этого отрезка. Каждый же из отрезков 1, 2, расположенных на сторонах большого треугольника, является стороной лишь одного из треугольников подразделения и, следовательно, учитывается в сумме $X+2Y$ один раз. Таким образом, если мы обозначим число отрезков 1, 2, расположенных внутри большого треугольника, через U, а число таких отрезков, расположенных на сторонах большого треугольника, через V, то будем иметь:

$$X+2Y=2U+V.$$

Отсюда вытекает, что число X является четным или нечетным одновременно с числом V, и достаточно доказать, что V всегда нечетно.

Согласно условию задачи на стороне 13 большого треугольника не может быть вершин, занумерованных цифрой 2, а на стороне 23 — вершин, занумерованных цифрой 1; поэтому отрезки, ограниченные точками 1 и 2, могут встретиться только на стороне 12 большого треугольника. Будем пересчитывать все такие отрезки в порядке их расположения на стороне 12, начиная от конца этой стороны, занумерованного



Черт. 114.

цифрой 1 (черт. 114). Двигаясь вдоль стороны 12 от вершины 1 к вершине 2, мы сначала встретим несколько (одну или больше) точек, занумерованных цифрой 1. После того как мы в первый раз пройдем отрезок 12, мы попадем в точку, занумерованную цифрой 2. Далее могут следовать несколько точек 2 (т. е. несколько отрезков 22); лишь после того, как мы пройдем отрезок 21, мы снова попадем в точку 1. Миновав далее следующий отрезок 12, мы опять попадем в точку 2, миновав следующий отрезок 21, — в точку 1 и т. д.

Таким образом, после нечетного числа отрезков 12 будут следовать вершины разбиения, занумерованные цифрой 2, а после четного числа таких отрезков — вершины, занумерованные цифрой 1. Но так как последняя вершина разбиения, расположенная на рассматриваемой стороне, есть вершина 2 большого треугольника, то общее число отрезков 12, находящихся на стороне 12 большого треугольника (равное числу V), должно быть нечетным. Тем самым наша теорема доказана.

Примечание. Полученный результат может быть еще несколько уточнен. А именно, будем различать между собой треугольники разбиения, вершины которых занумерованы цифрами 1, 2, 3 и направление обхода контура которых (в направлении от вершины 1 к вершине 2 и затем к вершине 3) совпадает с направлением обхода контура большого треугольника (тоже в направлении $1 \to 2 \to 3$), и занумерованные цифрами 1, 2, 3 треугольники, направление обхода контура которых противоположно направлению обхода контура большого треугольника. Можно показать, что число первых треугольников всегда будет ровно на единицу больше числа вторых треугольников; отсюда, в частности, вытекает, что общее число треугольников, занумерованных цифрами 1, 2, 3, нечетно. Доказательство этого предложения близко к решению настоящей задачи и предоставляется читателю.

б) Доказательство теоремы, формулировка которой приведена в указаниях к задаче, очень близко к доказательству теоремы задачи а). Подсчитаем двумя способами число граней треугольников подразделения, занумерованных цифрами 1, 2, 3. С одной стороны, каждый тетраэдр подразделения, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3 и 4 (число таких тетраэдров мы обозначим через X), имеет единственную грань 123; каждый из тетраэдров с вершинами 1, 1, 2, 3, или 1, 2, 2, 3, или 1, 2, 3, 3 (общее число таких тетраэдров мы обозначим через Y) имеет по две грани 123, а каждый из остальных тетраэдров подразделения вовсе не имеет таких граней. Таким образом, искомое число граней 123 равно

$$X+2Y.$$

С другой стороны, всякий треугольник 123, расположенный внутри большого тетраэдра (число таких треугольников мы обозначим через U), является гранью одновременно двух тетраэдров подразделения, а каждый треугольник 123, расположенный на грани 123 большого тетраэдра (число таких треугольников мы обозначим через V), является гранью лишь одного из тетраэдров подразделения (заметим, что в силу условий теоремы на остальных трех гранях большого тетраэдра вовсе не будет треугольников подразделения, занумерованных цифрами 1, 2, 3). Следовательно,

$$X+2Y=2U+V.$$

Но разбиение грани 123 большого тетраэдра на малые треугольники удовлетворяет всем условиям задачи а) и из решения этой задачи следует, что число V малых треугольников 1, 2, 3 на этой грани обязательно нечетно. Отсюда вытекает, что и число X нечетно и, значит, не может равняться нулю. Теорема доказана.

Примечание. Эта теорема тоже может быть уточнена аналогично теореме задачи а) (см. примечание на стр. 375). Формулировка и доказательство этого уточненного результата предоставляются читателю.

116. Докажем даже больше, чем требуется в условии задачи. А именно, покажем, что если произвольный многоугольник M разбит на треугольники с соблюдением условий задачи (т. е. так, что никакие два треугольника не граничат по части стороны одного из них) и в каждой вершине разбиения сходится четное число треугольников, то все вершины разбиения можно занумеровать тремя цифрами 1, 2 и 3 так, что все вершины, лежащие на границе многоугольника M, будут занумерованы только двумя цифрами 1 и 2 и все вершины каждого треугольника разбиения будут занумерованы тремя разными цифрами.

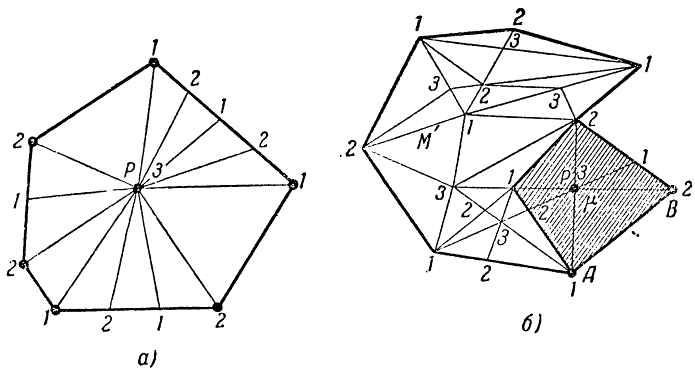
Доказательство проведем методом математической индукции по числу вершин разбиения, лежащих внутри многоугольника M. Прежде всего, если внутри M лежит только одна вершина P разбиения, то предложение очевидно: в вершине P сходится по условию четное число треугольников; поэтому на границе M имеется четное число вершин разбиения и, занумеровав эти вершины попеременно цифрами 1 и 2, мы можем приписать вершине P номер 3 (черт. 115, a)[1]).

Далее, предположим, что внутри многоугольника M лежат n вершин разбиения и что для любого разбиения какого-либо многоугольника, удовлетворяющего условиям задачи, и такого, что внутри многоугольника лежат менее n вершин разбиения, теорема уже доказана. Пусть AB есть какой-то из отрезков, на которые вершины разбиения разбивают границу M, ABP — треугольник разбиения, прилегающий к AB. Вершина P находится внутри M, так как в противном случае в вершинах A и B многоугольника M сходилось бы нечетное число треугольников (по одному). В точке P сходится по условию четное

[1]) Так как в каждой вершине M сходится два или больше треугольника разбиения, то внутри M обязательно есть хотя бы одна вершина разбиения.

число треугольников разбиения; многоугольник, составленный из всех этих треугольников, обозначим через μ (см. черт. 115, *б*, на котором многоугольник μ заштрихован).

Выкинем теперь из M многоугольник μ; мы получим новый, меньший многоугольник M'. Многоугольник M' тоже разбит на треугольники с соблюдением условий задачи: нетрудно видеть, что в каждой вершине многоугольника M' сходится



Черт. 115.

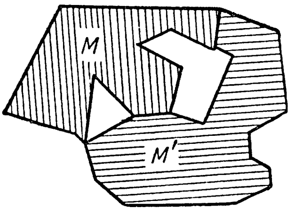
также четное число треугольников разбиения (в каждой вершине M', одновременно являющейся вершиной μ, сходится на два треугольника меньше, чем сходилось раньше). Далее, внутри M', очевидно, содержится меньше вершин разбиения, чем внутри M. Следовательно, согласно нашему предположению мы можем занумеровать все вершины разбиения M' цифрами 1, 2 и 3 так, что все вершины, лежащие на границе M', будут занумерованы цифрами 1 и 2 и вершины каждого треугольника разбиения будут занумерованы тремя различными цифрами [1]).

Теперь припишем вершине P номер 3 и затем продолжим нумеровать не имеющие еще номеров вершины, лежащие на контуре μ, попеременно цифрами 1 и 2; при этом каждые две соседние из этих вершин получат разные номера, так как всего на контуре μ лежит четное число вершин разбиения (ибо в точке P

[1]) Предоставляем читателю самостоятельно разобрать, как изменятся рассуждения в том случае, если M' распадается на несколько частей.

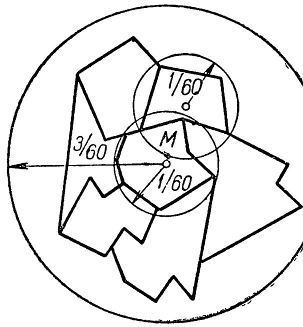
сходится четное число треугольников). После этого все вершины многоугольника M окажутся занумерованными с соблюдением всех наших требований. В силу принципа математической индукции отсюда следует справедливость утверждения, сформулированного в начале решения задачи.

117. Может оказаться, что между двумя соседними многоугольниками M и M' разбиения имеются полости (заполненные, разумеется, другими многоугольниками; см. черт. 116) или, другими словами, что часть границы M и M', общая для обоих этих многоугольников, состоит из нескольких кусков. Присоединим в таком случае к многоугольнику M все полости между этим многоугольником и его соседями; мы получим больший многоугольник $\overline{M}$. Затем поступим так же последовательно со всеми соседями многоугольника $\overline{M}$, потом — со всеми соседями образовавшихся многоугольников и т. д. В конце концов мы придем к новому разбиению квадрата на многоугольники, причем теперь между двумя многоугольниками нового разбиения уже не будет полостей (общая часть границы каждых двух многоугольников разбиения будет состоять из одного куска, т. е. представлять собой одну точку или одну ломаную). При этом очевидно, что если некоторый многоугольник нового разбиения имеет не меньше шести соседей, то многоугольник старого разбиения, из которого он получился, тоже имел не менее шести соседей (ибо после нашего изменения разбиения число соседей многоугольника может только уменьшиться). Заметим еще, что многоугольник $\overline{M}$ заключен внутри многоугольника $\overline{\overline{M}}$, полученного присоединением к многоугольнику M всех его соседей и всех полостей между M и его соседями. Так как по условию задачи как многоугольник M, так и каждый из его соседей можно заключить в круг диаметра $^1/_{30}$, то $\overline{\overline{M}}$ можно заключить в круг диаметра $^3/_{30}={}^1/_{10}$ (черт. 117), а следовательно, $\overline{M}$ и подавно можно заключить в круг такого диаметра.



Черт. 116.

Рассмотрим многоугольник $\overline{M}_0$ нового разбиения, покрывающий центр O квадрата (или один из таких многоугольников, если O лежит на границе нескольких многоугольников). Этот многоугольник назовем *многоугольником 1-го этажа*. Все многоугольники нашего нового разбиения, соседние с $\overline{M}_0$, мы будем называть *многоугольниками 2-го этажа*; все многоугольники, соседние с каким-нибудь из многоугольников 2-го этажа, — *многоугольниками 3-го этажа* и т. д.



Черт. 117.

Очевидно, что многоугольник $\overline{M}_0$ заключается внутри круга радиуса $^1/_{10}$ с центром в O, $\overline{M}_0$ и все многоугольники 2-го этажа заключаются внутри круга радиуса $^2/_{10}$ с центром в O, $\overline{M}_0$ и все многоугольники 2-го и 3-го этажей — внутри круга радиуса $^3/_{10}$ с центром в O и, наконец, $\overline{M}_0$, все многоугольники 2-го, 3-го и 4-го этажей заключаются внутри круга радиуса $^4/_{10}$ с центром в O. Отсюда, в частности, вытекает, что ни один из многоугольников первых четырех этажей не может примыкать к границе квадрата.

Отметим теперь некоторые очевидные свойства разбиения всех многоугольников на этажи.

1°. Каждый из многоугольников n-го этажа ($n > 1$) имеет соседей в $(n-1)$-м этаже.

2°. Никакой многоугольник n-го этажа ($n > 2$) не имеет соседей в $(n-2)$-м этаже (иначе этот многоугольник следовало бы отнести к $(n-1)$-му этажу).

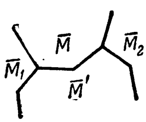
3°. Если многоугольник $\overline{M}$ n-го этажа ($n > 1$) имеет меньше двух соседей, принадлежащих к этому же этажу, то $\overline{M}$ не имеет соседей в $(n+1)$-м этаже. Действительно, если $\overline{M}$ имеет соседей, принадлежащих $(n+1)$-му этажу, то часть границы $\overline{M}$ соприкасается с многоугольниками $(n+1)$-го этажа, а другая часть границы — с многоугольниками $(n-1)$-го этажа (см. 1°). Но так как никакой многоугольник $(n+1)$-го этажа не соприкасается с многоугольниками $(n-1)$-го этажа (см. 2°), то между этими участками границы $\overline{M}$ должны быть по крайней мере два участка, по которым $\overline{M}$ соприкасается с многоугольниками того же n-го этажа. А так как каждые два соседних многоугольника нашего нового разбиения соприкасаются по одному куску границы, то отсюда следует, что $\overline{M}$ имеет не менее двух соседей в том же n-м этаже.

Предположим теперь, что **никакой из многоугольников нашего нового разбиения не имеет больше пяти соседей**, и покажем, что в таком случае никакой из многоугольников 4-го этажа не может иметь соседей среди многоугольников 5-го этажа.

Рассмотрим отдельно два случая.

А. Если многоугольник $\overline{M}$ 4-го этажа имеет среди многоугольников того же этажа не более одного соседа, то он не имеет соседей среди многоугольников 5-го этажа в силу 3°.

Б. Пусть теперь многоугольник $\overline{M}$ 4-го этажа имеет не менее двух соседей среди многоугольников того же 4-го этажа. Покажем прежде всего, что $\overline{M}$ имеет не менее двух соседей среди многоугольников 3-го этажа. Действительно, пусть это не так и $\overline{M}'$ есть единственный многоугольник 3-го этажа, соседний с $\overline{M}$. В таком случае $\overline{M}'$ имеет в 4-м этаже по крайней мере еще двух соседей, кроме $\overline{M}$: это будут многоугольники $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$, с которыми соприкасается $\overline{M}$ в концах общей границы $\overline{M}$ и $\overline{M}'$ (черт. 118). $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ не могут принадлежать 3-му этажу, так как, по предположению, $\overline{M}$ не имеет соседей в 3-м этаже кроме $\overline{M}'$, и не могут принадлежать 5-му этажу в силу 2°. Кроме того, $\overline{M}'$ имеет не менее двух соседей в 3-м этаже (см. 3°) и по крайней мере одного соседа во 2-м этаже (см. 1°), так что всего $\overline{M}'$ имеет не менее шести соседей, что противоречит нашему предположению.

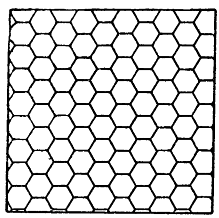


Черт. 118.

Можно показать, что $\overline{M}$ имеет **не меньше трех** соседей среди многоугольников 3-го этажа. Действительно, пусть $\overline{M}'$ есть какой-то сосед многоугольника $\overline{M}$, принадлежащий к 3-му этажу (число таких соседей, как мы видели, не меньше двух). Покажем, что $\overline{M}'$ не имеет кроме $\overline{M}$ других соседей, принадлежащих 4-му этажу. Действительно, $\overline{M}'$ имеет не менее двух соседей, принадлежащих 3-му этажу (см. 3°). Кроме того, можно показать, что $\overline{M}'$ имеет не менее двух соседей, принадлежащих 2-му этажу (доказательство этого утверждения не отличается от доказательства того, что $\overline{M}$ имеет не менее двух соседей, принадлежащих 3-му этажу). А так как общее число соседей $\overline{M}'$, по предположению, не больше пяти, то $\overline{M}'$ не может иметь кроме $\overline{M}$ других соседей в 4-м этаже. А теперь, в точности аналогично рассуждению, проведенному выше, можно показать, что $\overline{M}$ имеет кроме $\overline{M}'$ еще по крайней мере двух соседей $\overline{M}_1'$ и $\overline{M}_2'$ в 3-м этаже: $\overline{M}_1'$ и $\overline{M}_2'$ суть многоугольники, с которыми соприкасается $\overline{M}'$ в концах общей границы $\overline{M}'$ и $\overline{M}$.

Теперь уже ясно, что $\overline{M}$ не может иметь соседей среди многоугольников 5-го этажа. Действительно, если бы $\overline{M}$ имел соседей среди многоугольников 5-го этажа, то $\overline{M}$ имел бы еще не менее двух соседей среди многоугольников того же 4-го этажа (см. 3°). А так как, по доказанному, $\overline{M}$ имеет не менее трех соседей среди многоугольников 3-го этажа, то общее число соседей $\overline{M}$ было бы не меньше шести.

Итак, мы видим, что многоугольники 4-го этажа не соприкасаются с многоугольниками 5-го этажа, т. е. что все многоугольники разбиения исчерпываются первыми четырьмя этажами. Но это невозможно, так как выше мы указывали, что ни один из многоугольников 4-го этажа не соприкасается с границей квадрата. Полученное противоречие и доказывает, что наше исходное предположение о том, что ни один из многоугольников разбиения не имеет больше пяти соседей, было неверным.



Черт. 119.

Примечание. Нетрудно видеть, что квадрат можно разбить на сколь угодно малые многоугольники таким образом, чтобы ни один из многоугольников разбиения не имел **больше** шести соседей (черт. 119).

118. Пусть K — некоторая непрерывная кривая, соединяющая точки A и B. Докажем, что если кривая K не имеет параллельной AB хорды длины a и не имеет параллельной AB хорды длины b, то эта кривая не может иметь параллельной AB хорды длины $a+b$. Отсюда уже будет следовать, что кривая K наверное имеет параллельную AB хорду длины $\frac{1}{n}$. Действительно, в противном случае кривая K не могла бы также иметь параллельных AB хорд длины

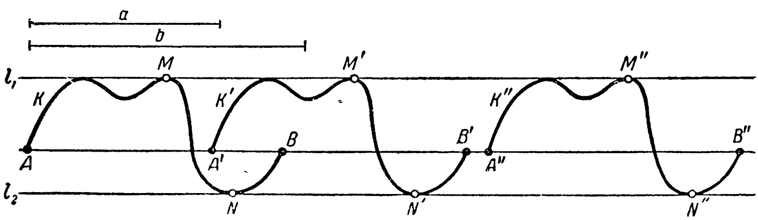
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n},\quad \frac{1}{n}+\frac{2}{n}=\frac{3}{n},\quad \frac{1}{n}+\frac{3}{n}=\frac{4}{n}\ \text{и т. д.}$$

и, наконец, не могла бы иметь параллельную AB хорду длины

$$\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1,$$

в то время как мы знаем, что K имеет параллельную AB хорду длины 1 (а именно саму хорду AB).

Перейдем теперь к доказательству сформулированного предложения. То, что кривая K не имеет параллельной AB



Черт. 120.

хорды длины a, означает, что кривая K', полученная из K параллельным перенесением в направлении AB на расстояние a, не имеет общих точек с K (черт. 120). Далее, кривая K', равная K, по условию не имеет параллельной AB хорды длины b; это значит, что кривая K'', получаемая из K' параллельным перенесением в направлении AB на расстояние b, не имеет общих точек с K'. Покажем, что и кривые K и K'' не пересекаются; это и будет означать, что кривая K не имеет параллельной AB хорды длины $a+b$ (так как кривая K'' получается из кривой K параллельным перенесением в направлении AB на расстояние $a+b$).

Пусть M' и N' — точки кривой K', расположенные по разные стороны от $A'B'$ на наибольшем расстоянии от $A'B'$ (или какие-то из таких точек, если кривая K' имеет по одну сторону от прямой AB несколько точек, удаленных от $A'B'$ больше, чем все остальные точки, лежащие с этой же стороны $A'B'$). Проведем через точки M' и N' прямые l_1 и l_2, параллельные AB (одна из этих прямых может совпадать с AB). Очевидно, что все три кривые K, K' и K'' лежат внутри полосы, образованной прямыми l_1 и l_2. Дуга $M'N'$ кривой K' делит эту полосу на две части; при этом, так как кривые K и K'' не пересекаются с K', то каждая из них лежит в какой-то одной из этих двух частей полосы. Нетрудно видеть также, что кривые K и K'' находятся в *разных* частях полосы.

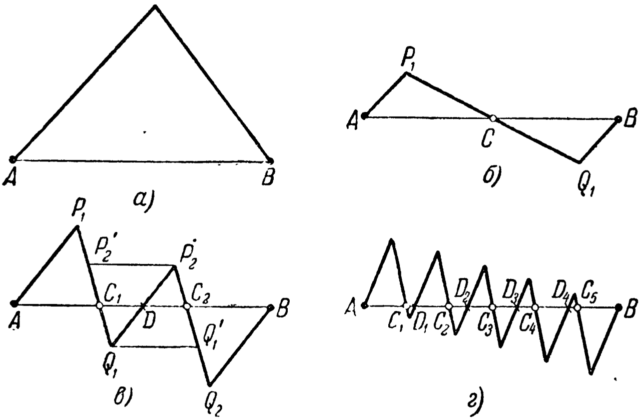
Действительно, если M и соответственно M'' — точки кривых K и K'', отвечающие точке M' кривой K', то точки M и M'' находятся по разные стороны от точки M', а следовательно, и кривые K и K'' находятся по разные стороны от дуги $M'N'$ и, следовательно, не могут пересечься. Этим завершается доказательство первой части теоремы.

Теперь осталось только показать, что для *каждого* числа a, не имеющего вида $\frac{1}{n}$, можно построить непрерывную кривую, соединяющую точки A и B и не имеющую хорды длины a. Если $a > 1$, то это утверждение совершенно очевидно: в этом случае достаточно потребовать, чтобы кривая K не выходила за пределы полосы, образованной перпендикулярами, восставленными к прямой AB в точках A и B (см., например, черт. 121, *а*). Если $a > \frac{1}{2}$, то проведем через точки A и B параллельные между собой прямые и через середину C отрезка AB — произвольную прямую, не параллельную первым двум. Легко видеть, что полученная ломаная AP_1CQ_1B (черт. 121, *б*) не имеет параллельных AB хорд, больших $\frac{1}{2}$.

Пусть теперь $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$. Разделим отрезок AB на три равные части: $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$ и независимо на две равные части: $AD = DB$. Проведем через точки A, D и B какие-то параллельные между собой прямые и через точки C_1 и C_2 — другие параллельные между собой прямые, не параллельные первым трем. Нетрудно видеть, что получившаяся ломаная

$AP_1C_1Q_1DP_2C_2Q_2B$ (черт. 121, *в*) не имеет параллельных AB хорд, длина которых заключается между $^1/_2$ и $^1/_3$.

Действительно, если концы хорды лежат на отрезках AP_1 и P_1Q_1, или P_1Q_1 и Q_1P_2, или Q_1P_2 и P_2Q_2, или P_2Q_2 и Q_2B, то длина хорды не больше $^1/_3$ (ибо в обозначениях черт. 121, *в* $AC_1 = P_2'P_2 = Q_1Q_1' = C_2B = \frac{1}{3}$). Если концы хорды лежат на отрезках P_1Q_1 и P_2Q_2, то длина хорды

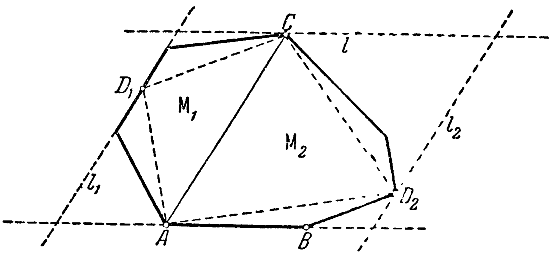


Черт. 121.

равна $^1/_3$. Если концы хорды лежат на отрезках AP_1 и Q_1P_2, или Q_1P_2 и Q_2B, то длина хорды равна $^1/_2$. Наконец, во всех остальных случаях длина хорды больше $^1/_2$.

Совершенно так же строится пример кривой, не содержащей никакой параллельной AB хорды, длина которой заключена между $\frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n}$. Разделим отрезок AB на $n+1$ равных частей: $AC_1 = C_1C_2 = \ldots = C_nB$ и независимо на n равных частей: $AD_1 = D_1D_2 = \ldots = D_{n-1}B$. Проведем теперь через точки A, D_1, D_2, ..., D_{n-1}, B какие-то параллельные между собой прямые и через точки C_1, C_2, ..., C_n — другие параллельные между собой прямые, не параллельные первым прямым. Легко видеть, что получившаяся ломаная (см. черт. 121, *г*, где изображен случай $n = 5$) удовлетворяет требуемому условию; доказательство этого вполне аналогично приведенному выше доказательству для случая $n = 3$.

119. а) Пусть AB — некоторая сторона выпуклого многоугольника M площади 1, C — точка многоугольника M, наиболее удаленная от AB (или одна из таких точек, если M имеет сторону, параллельную AB). Проведем прямую AC (черт. 122); эта прямая делит многоугольник M на две части M_1 и M_2 (в частном случае одна из этих частей может не



Черт. 122.

существовать). Пусть, далее, D_1 и D_2 — точки многоугольников M_1, соответственно M_2, наиболее удаленные от прямой AC (или какие-то из таких точек). Проведем через точку C прямую l, параллельную AB, и через точки D_1 и D_2 — прямые l_1 и l_2, параллельные AC. Прямые AB, l, l_1 и l_2 образуют некоторый параллелограмм Π, заключающий M внутри себя.

Так как многоугольники M_1 и M_2 выпуклые, то M_1 содержит треугольник AD_1C, а M_2 содержит треугольник AD_2C. Прямая AC делит параллелограмм Π на два параллелограмма, которые мы обозначим соответственно через Π_1 и Π_2. Очевидно, что

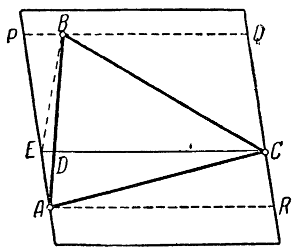
$$S_{AD_1C}=\frac{1}{2}S_{\Pi_1} \quad \text{и} \quad S_{AD_2C}=\frac{1}{2}S_{\Pi_2}.$$

Отсюда следует, что

$$S_\Pi=S_{\Pi_1}+S_{\Pi_2}=2S_{AD_1C}+2S_{AD_2C}\leqslant 2S_{\mathrm{M}_1}+2S_{\mathrm{M}_2}=2S_\mathrm{M}=2,$$

что и требовалось доказать (если $S_\Pi<2$, то мы можем увеличить этот параллелограмм так, чтобы он продолжал заключать многоугольник M внутри себя).

б) Пусть П — параллелограмм, содержащий внутри себя треугольник ABC площади 1 (черт. 123). Уменьшим этот параллелограмм, сдвинув параллельно его стороны до тех пор, пока они не пройдут через вершины треугольника; пусть A — вершина, через которую проходят две стороны полученного таким образом параллелограмма $APQR$, вершина B лежит на стороне PQ, вершина C — на стороне QR. Проведем через точку C прямую, параллельную сторонам PQ и AR параллелограмма; точки пересечения ее с AB и AP обозначим через D и E. Тогда, очевидно,



Черт. 123.

$$S_{\triangle CBD} \leqslant S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} S_{CQPE}$$

и

$$S_{\triangle CAD} \leqslant S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} S_{CRAE},$$

откуда и следует, что

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBD} + S_{\triangle CAD} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} S_{CQRE} + \frac{1}{2} S_{CRAE} = \frac{1}{2} S_{APQR};$$
$$S_{APQR} \geqslant 2S_{\triangle ABC} = 2$$

(если C есть внутренняя точка стороны QR, то $S_{APQR} = 2$ только в том случае, если B совпадает с P).

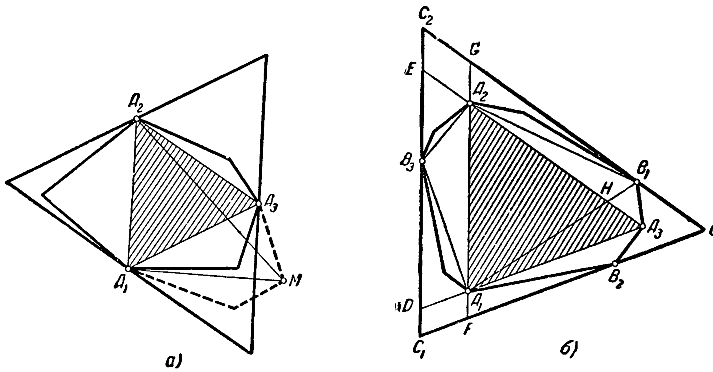
120. а) Впишем в данный многоугольник U треугольник $A_1A_2A_3$ наибольшей возможной площади (черт. 124, a)[1]). Предположим сначала, что площадь этого треугольника не больше $^1/_2$. Через вершины треугольника A_1, A_2, A_3 проведем прямые, параллельные его противоположным сторонам. Образуется некоторый треугольник T, площадь которого в четыре раза больше площади треугольника $A_1A_2A_3$, т. е. не больше 2.

Покажем, далее, что многоугольник U лежит целиком внутри T. Действительно, допустим противное, т. е. предполо-

---

[1]) Можно показать, что таким является наибольший из всех треугольников, вершинами которых служат три какие-нибудь вершины многоугольника U [см., например, книгу Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, М., Гостехиздат 1952, задачу 23 («Библиотека математического кружка», вып. 2)].

жим, что какая-нибудь точка M, принадлежащая U, лежит вне T. В таком случае точка M дальше хотя бы от одной из сторон треугольника $A_1A_2A_3$ (например, от A_1A_2), чем противоположная этой стороне вершина треугольника. Тогда треугольник MA_1A_2, вписанный в многоугольник U, по площади больше треугольника $A_1A_2A_3$ (см. черт. 124, *а*), что противоречит тому, что по условию треугольник $A_1A_2A_3$ имеет наибольшую площадь среди всех треугольников, вписанных в U. Итак, в этом случае многоугольник U заключен внутри треугольника T площади, не большей 2, что и требовалось доказать (ибо ясно, что в таком случае U можно заключить и внутрь треугольника, площадь которого точно равна 2).



Черт. 124.

Несколько более сложным является тот случай, когда площадь треугольника $A_1A_2A_3$ больше $^1/_2$ (черт. 124, *б*). В каждую из частей, отрезаемых от многоугольника U сторонами треугольника $A_1A_2A_3$, впишем наибольший по площади треугольник, основание которого совпадает с соответствующей стороной треугольника $A_1A_2A_3$. Через свободные вершины B_1, B_2, B_3 этих треугольников проведем прямые, параллельные их основаниям. Получим некоторый треугольник $C_1C_2C_3$. Совершенно аналогично предыдущему доказывается, что многоугольник U лежит целиком внутри этого треугольника.

Докажем, что $S_{\triangle C_1C_2C_3} \leqslant 2S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}$. Так как последняя площадь не больше 1 (т. е. площади U), то отсюда следует требуемое неравенство.

Рассмотрим отдельно шестиугольник $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ и описанный около него треугольник $C_1C_2C_3$. Положим

$$\frac{S_{A_1A_2B_3}}{S_{A_1A_2A_3}}=\lambda_3;\quad \frac{S_{A_1A_3B_2}}{S_{A_1A_2A_3}}=\lambda_2;\quad \frac{S_{A_2A_3B_1}}{S_{A_1A_2A_3}}=\lambda_1;$$

тогда

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{S_{A_1A_2B_3}+S_{A_1A_3B_2}+S_{A_2A_3B_1}}{S_{A_1A_2A_3}}<1,$$

так как по условию $S_{A_1A_2A_3}>\frac{1}{2}$, а площадь всего многоугольника U равна 1.

Продолжим стороны треугольника $A_1A_2A_3$, как указано на черт. 124, *б*. Отметим, что отношение высот треугольников $B_3A_1A_2$ и $A_3A_1A_2$, опущенных на общую сторону A_1A_2, равно отношению площадей этих двух треугольников, т. е. λ_3. Точно так же отношение высот треугольников $B_2A_1A_3$ и $A_2A_1A_3$, опущенных на общую сторону A_1A_3, равно λ_2, а отношение высот треугольников $B_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3$, опущенных на общую сторону A_2A_3, равно λ_1. Отсюда без труда получаем, что

$$\frac{ED}{A_1A_2}=1+\lambda_3,\quad \frac{C_2E}{A_1A_2}=\frac{GA_2}{A_1A_2}=\frac{BH}{A_1H}=\lambda_1,\quad \frac{C_1D}{A_1A_2}=\frac{FA_1}{A_1A_2}=\lambda_2.$$

Отсюда следует, что коэффициент подобия треугольников $C_1C_2C_3$ и $A_1A_2A_3$ равен

$$\frac{C_1C_2}{A_1A_2}=\frac{C_1D+DE+EC_2}{A_1A_2}=1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$\frac{S_{\triangle C_1C_2C_3}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=(1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2,$$

а так как, кроме того, очевидно, имеем:

$$\frac{S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=\frac{S_{\triangle A_1A_2A_3}+S_{\triangle B_1A_2A_3}+S_{B_2A_1A_3}+S_{\triangle B_3A_1A_2}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}=$$
$$=1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

то окончательно приходим к равенству

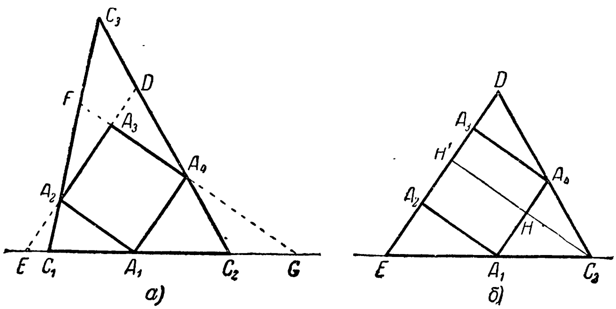
$$\frac{S_{\triangle C_1C_2C_3}}{S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}}=1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$

Из этого равенства и следует, что $S_{\triangle C_1C_2C_3} \leqslant 2$, так как

$$S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2} \leqslant S_{\text{мн. } U} = 1, \text{ а } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 1.$$

Этим и завершается доказательство.

б) Покажем прежде всего, что квадрат со стороной 1 нельзя заключить ни в какой треугольник площади, меньшей 2. Пусть $C_1C_2C_3$ — треугольник, описанный около квадрата $A_1A_2A_3A_4$; вершины A_1, A_2 и A_4 квадрата соответственно лежат на сторонах C_1C_2, C_1C_3 и C_2C_3 треугольника (черт. 125, *а*). Продолжим стороны A_2A_3 и A_4A_3 квадрата до



Черт. 125.

пересечения со сторонами C_3C_2, C_1C_2, соответственно C_3C_1, C_2C_1, треугольника в точках D, E и F, G. Так как углы A_2A_3F и A_4A_3D прямые, то углы A_2DC_3 и A_4FC_3 тупые. Далее,

$$\angle A_2EA_1 + \angle A_4GA_1 = 180° - \angle EA_3G = 90°;$$
$$\angle A_2A_1E + \angle A_4A_1G = 90°;$$

отсюда следует, что либо $\angle A_2A_1E \leqslant \angle A_2EA_1$, либо $\angle A_4A_1G \leqslant \angle A_4GA_1$; предположим, для определенности, что имеет место первое из этих неравенств. В таком случае будем иметь

$$A_2E \leqslant A_2A_1 = A_2A_3 < A_2D$$

и из черт. 125, *а* с очевидностью следует, что

$$S_{\triangle A_2DC_3} > S_{\triangle A_2EC_1}; \quad S_{\triangle EDC_2} < S_{\triangle C_1C_3C_2}.$$

Таким образом, мы пришли к описанному около квадрата треугольнику EDC_2, площадь которого меньше площади первоначального треугольника $C_1C_3C_2$ и на одной стороне которого лежат две вершины квадрата (если у первоначально рассматриваемого треугольника была сторона, на которой лежат две вершины квадрата, то все приведенное рассуждение можно опустить).

Обозначим высоту треугольника $A_1A_4C_2$, опущенную на сторону A_1A_4, через h; пусть H и H' — точки пересечения этой высоты со сторонами A_1A_4 и A_2A_3 квадрата (черт. 125, *б*); $HH'=1$ (стороне квадрата). В таком случае

$$\frac{S_{\triangle C_2HA_4}}{S_{HA_4A_3H'}}=\frac{h}{2}; \quad \frac{S_{\triangle C_2HA_1}}{S_{\triangle A_4A_3D}}=h^2$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{\triangle A_1A_3D}}{S_{HA_4A_3H'}}=\frac{1}{2h}$$

и

$$\frac{S_{\triangle C_2H'D}}{S_{HA_4A_3H'}}=\frac{S_{\triangle C_2HA_4}+S_{HA_4A_3H'}+S_{\triangle A_4A_3D}}{S_{HA_4A_3H'}}=1+\frac{h}{2}+\frac{1}{2h}.$$

Точно так же показывается, что

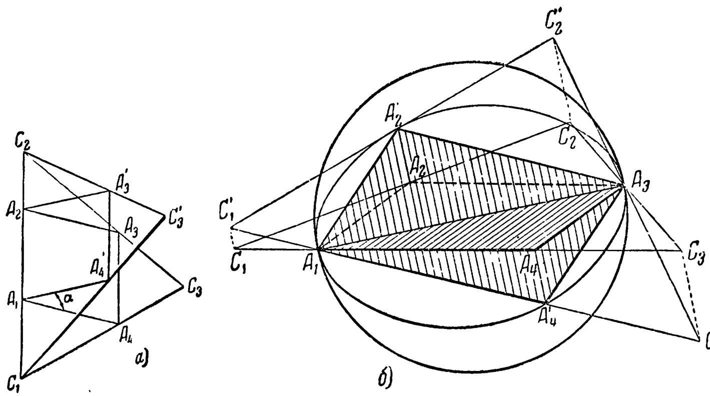
$$\frac{S_{\triangle C_2H'E}}{S_{HA_1A_2H'}}=1+\frac{h}{2}+\frac{1}{2h}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{S_{\triangle C_2ED}}{S_{A_1A_2A_3A_4}}=1+\frac{h}{2}+\frac{1}{2h}=2+\left(\frac{h}{2}-1+\frac{1}{2h}\right)=$$
$$=2+\left(\sqrt{\frac{h}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2h}}\right)^2\geqslant 2,$$

т. е. $S_{\triangle C_2ED}\geqslant 2$, что и требовалось доказать.

Но если вокруг квадрата площади 1 нельзя описать треугольник площади, меньшей 2, то и вокруг произвольного прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$ площади 1 нельзя описать треугольник $C_1C_2C_3$ площади, меньшей 2. Действительно, предположим, что это не так. Представим себе квадрат $A_1A_2A_3'A_4'$, сторона A_1A_2 которого совпадает с большей стороной A_1A_2 прямоугольника, а остальные стороны расположены в пространстве таким образом, что прямоугольник $A_1A_2A_3A_4$ представляет собой ортогональную проекцию квадрата на плоскость прямоугольника (для этого надо, чтобы было $\frac{A_2A_3}{A_2A_3'} = \cos\alpha$, где α — угол между плоскостями квадрата и прямоугольника; см. черт. 126, *а*). Обозначим далее через $C_1'C_2'C_3'$ треугольник, описанный вокруг квадрата $A_1A_2A_3'A_4'$ и проектирующийся в треугольник $C_1C_2C_3$ (на черт. 126, *а* C_1' и C_2' совпадают соответственно с C_1 и C_2, но это не обязательно). Так как при ортогональном проектировании каждая фигура переходит в другую фигуру, площадь которой равна

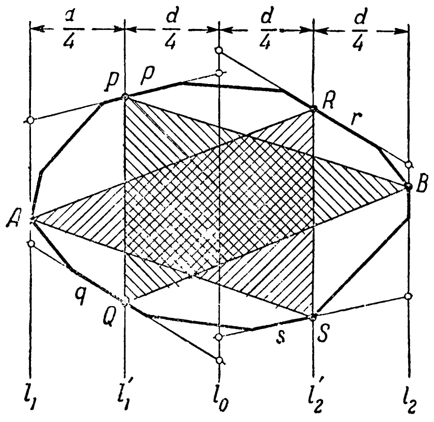


Черт. 126.

площади первоначальной фигуры, умноженной на $\cos\alpha$, то отношение площадей фигур при проектировании не меняется. Следовательно, если $S_{C_1C_2C_3} < 2S_{A_1A_2A_3A_4}$, то должно быть и $S_{C_1'C_2'C_3'} < 2S_{A_1A_2A_3'A_4'}$, а мы видели выше, что последнее равенство невозможно.

Далее, если вокруг прямоугольника площади 1 нельзя описать треугольник площади, меньшей 2, то и вокруг п р о и з в о л ь н о г о п а р а л л е л о г р а м м а $A_1A_2A_3A_4$ нельзя описать треугольник $C_1C_2C_3$, площадь которого была бы меньше 2. Действительно, предположим, что это не так (черт. 126, *б*). Построим сферу, диаметром которой является бо́льшая диагональ A_1A_3 параллелограмма, и пусть A'_2 и A'_4 — точки пересечения сферы с перпендикулярами к плоскости параллелограмма, восставленными в вершинах A_2 и A_4. В таком случае очевидно, что прямоугольник $A_1A'_2A_3A'_4$ проектируется в параллелограмм $A_1A_2A_3A_4$. Обозначив через $C'_1C'_2C'_3$ треугольник, описанный вокруг прямоугольника $A_1A'_2A_3A'_4$ и проектирующийся в треугольник $C_1C_2C_3$ (см. черт. 126, *б*), мы, как выше, вынуждены будем заключить, что площадь треугольника $C'_1C'_2C'_3$ меньше двойной площади прямоугольника $A_1A'_2A_3A'_4$, что, как мы уже видели, невозможно.

121. а) Проведем две прямые, параллельные l и расположенные по разные стороны от выпуклого многоугольника M, и затем сдвинем их так, чтобы они прошли через вершины A и B многоугольника; в таком случае многоугольник M будет заключен внутри полосы, образованной двумя прямыми



Черт. 127.

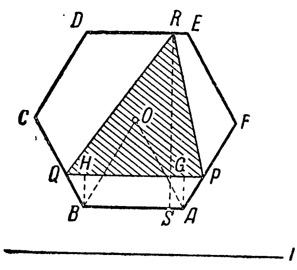
l_1 и l_2, параллельными l и проходящими соответственно через A и B; при этом возможно, что одна из прямых l_1 и l_2 или даже обе сразу будут содержать целую сторону многоугольника M (черт. 127). Обозначим расстояние между l_1 и l_2 через d. Проведем затем еще три прямые l_0, l'_1 и l'_2, параллельные l, таким образом, что l_0 расположена на равном расстоянии от l_1 и l_2; l'_1 и l'_2 расположены на равном расстоянии от l_1 и l_0, соответственно l_2 и l_0. Пусть l'_1 пересекает контур многоугольника в точках P и Q, а l'_2 — в точках R и S. Пусть, далее, p есть сторона многоугольника, проходящая через точку P (может быть, одна из двух таких сторон); точно так же q, r и s — стороны многоугольника, проходящие соответственно через Q, R и S. Площадь трапеции T_1, ограниченной прямыми l_0, l_1, p и q, равна, очевидно, $PQ\cdot\frac{d}{2}$; точно так же площадь трапеции T_2, ограниченной прямыми l_0, l_2, r и s, равна $RS\cdot\frac{d}{2}$. Так как объединение трапеций T_1 и T_2 содержит многоугольник M внутри себя (в крайнем случае совпадает с многоугольником M), то

$$S_M \leqslant S_{T_1} + S_{T_2} = PQ\cdot\frac{d}{2} + RS\cdot\frac{d}{2} = (PQ + RS)\cdot\frac{d}{2}.$$

Рассмотрим теперь два треугольника ARS и BPQ, вписанных в многоугольник M. Очевидно, $S_{ARS} = \frac{1}{2} RS\cdot\frac{3}{4}d$; $S_{BPQ} = \frac{1}{2} PQ\cdot\frac{3}{4}d$; следовательно,

$$S_{ARS} + S_{BPQ} = (RS + PQ)\cdot\frac{3}{8}d = \frac{3}{4}\cdot(PQ + RS)\frac{d}{2} \geqslant \frac{3}{4} S_M.$$

Отсюда вытекает, что или $S_{ARS} \geqslant \frac{3}{8} S_M$, или $S_{BPQ} \geqslant \frac{3}{8} S_M$, что и доказывает утверждение задачи.



Черт. 128.

б) Пусть M — правильный шестиугольник $ABCDEF$, а l параллельна стороне AB шестиугольника (черт. 128). Далее, пусть PQR — вписанный в M треугольник наибольшей возможной площади, одна сторона PQ которого параллельна AB. Если P и Q лежат соответственно на сторонах AF и BC шестиугольника, то, очевидно, вершина R должна лежать на стороне DE. Примем длину стороны шестиугольника за 1 и обозначим расстояние $AP = BQ$ через a. В таком случае, как легко подсчитать,

$$PQ = AB + PG + QH = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 1 + a,$$

$$h_{PQ} = RS - AG = \sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = (2 - a)\frac{\sqrt{3}}{2};$$

следовательно,

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}(1 + a)\cdot(2 - a)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2 + a - a^2) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[2\frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Из этой формулы сразу вытекает, что для того, чтобы площадь треугольника PQR была наибольшей, необходимо, чтобы было $a - \frac{1}{2} = 0$, $a = \frac{1}{2}$; в этом случае

$$S_{\triangle PQR} = \frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Но площадь всего шестиугольника $ABCDEF$ равна

$$6S_{\triangle OAB} = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(O — центр шестиугольника); отсюда следует, что наибольший по площади вписанный в $ABCDEF$ треугольник, одна сторона которого параллельна AB, имеет площадь, равную $\frac{3}{8}S_{ABCDEF}$, что и требовалось доказать.

122. а) Имеется n бесконечных в обе стороны целочисленных арифметических прогрессий, каждые две из которых имеют общий член. Надо доказать, что все эти прогрессии имеют общий член. Доказательство будем проводить по методу математической индукции. При $n = 2$ теорема очевидна. Предположим теперь, что теорема уже доказана для $n - 1$

прогрессий, и покажем, что она будет в таком случае верна и для n прогрессий. Согласно предположению индукции первые $n-1$ из наших n арифметических прогрессий имеют общий член; обозначим его через A. Отнимем теперь от всех членов наших n прогрессий число A; мы получим новые n прогрессий. Очевидно, если мы докажем, что эти новые n прогрессий имеют общий член, то отсюда будет следовать, что и первоначальные прогрессии имели общий член.

Первые $n-1$ из наших новых прогрессий имеют общий член 0. Обозначим разности наших прогрессий соответственно через $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$ ($d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$ — целые числа, так как мы рассматриваем целочисленные прогрессии). В таком случае первые $n-1$ прогрессий составлены из чисел, соответственно кратных $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}$ (ибо они содержат 0), а выражение для общего члена последней n-й прогрессии имеет вид $a+kd_n$, где a есть какой-то член этой прогрессии, а k — номер члена (который может быть как положительным, так и отрицательным, так как мы рассматриваем прогрессии, бесконечные в обе стороны).

Нам надо доказать, что есть такой член $a+kd_n$ последней прогрессии, который принадлежит одновременно и остальным $n-1$ прогрессиям, т. е. что есть такой номер k, что число $a+kd_n$ делится на все числа $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$. Другими словами, нам надо показать, что существует такое целое число k, что $a+kd_n$ делится на общее наименьшее кратное N чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$.

Обозначим через D общий наибольший делитель чисел N и d_n. В таком случае существуют два таких целых числа p и q (каждое из этих чисел может быть положительным, отрицательным или нулем), что

$$D=pN+qd_n. \qquad (*)$$

Доказательство этого утверждения мы отложим до конца решения, а пока примем его на веру.

Докажем теперь, что число a делится на D. Действительно, разложим число D на простые множители:

$$D=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}.$$

То, что общий наибольший делитель D чисел d_n и N содержит простой множитель p_1 в степени α_1, означает, что d_n делится на $p_1^{\alpha_1}$ и N делится на $p_1^{\alpha_1}$. То, что наименьшее общее кратное N чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ делится на p^{α_1}, означает, что какое-то из этих чисел (пусть это будет для определенности d_1) делится на $p_1^{\alpha_1}$. Но, по условию задачи, первая прогрессия имеет общий член с n-й прогрессией. Обозначим через k' номер этого члена в первой прогрессии, а через k'' — номер этого члена в n-й прогрессии (k' и k'' — целые числа, каждое из которых может быть положительным, отрицательным или нулем); в таком случае мы будем иметь равенство

$$k'd_1 = a + k''d_n,$$

или

$$a = k'd_1 - k''d_n,$$

откуда следует, что a делится на $p_1^{\alpha_1}$ (так как d_1 и d_n делятся на $p_1^{\alpha_1}$). Точно так же можно показать, что a делится на $p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$; следовательно, a делится на их произведение D.

Обозначим теперь частное $\frac{a}{D}$ через m и умножим равенство (*) на m. Мы получим:

$$a = pmN + qmd_n,$$

или

$$a - qmd_n = pmN,$$

откуда и следует, что член $a - qmd_n$ n-й прогрессии (член с номером $-qm$) делится на N, что и требовалось доказать.

Нам еще осталось доказать равенство (*). Очевидно, достаточно показать, что если числа $\overline{N}$ и $\overline{d}_n$ взаимно простые, то существуют два таких целых (не обязательно положительных) числа p и q, что

$$p\overline{N} + q\overline{d}_n = 1 \qquad (**)$$

(равенство (**) получается из равенства (*) сокращением обеих частей на D; $\overline{N} = \frac{N}{D}$ и $\overline{d}_n = \frac{d_n}{D}$ взаимно просты, так как D есть наибольший общий делитель N и d_n). Пусть для определенности $\overline{N}$ есть большее из целых чисел $\overline{N}$ и $\overline{d}_n$. Очевидно, из равенства (**) следует

$$p'\overline{N}'+q'\overline{d}_n=1, \qquad (***)$$

где $\overline{N}'=\overline{N}-\overline{d}_n$ и p' и q' тоже целые ($p'=p$, $q'=p+q$); обратно, если равенство (***) имеет место, то имеет место и равенство (**) (где $p=p'$, $q=q'-p'$). Числа $\overline{N}'$ и $\overline{d}'_n$ тоже взаимно просты и наибольшее из них уже меньше, чем наибольшее из чисел $\overline{N}$ и $\overline{d}_n$. Продолжая тот же процесс, мы будем получать аналогичные равенства, в которые будут входить все меньшие положительные числа, и в конце концов покажем, что равенство (**) [а следовательно, и равенство (*)] равносильно равенству

$$1=\overline{p}\cdot 1+\overline{q}\cdot 0,$$

которое, очевидно, и имеет место при целых $\overline{p}$ и $\overline{q}$ ($\overline{p}=1$, $\overline{q}=0$). Этим и завершается доказательство первого утверждения задачи.

В задаче еще требуется показать, что из того, что каждые две из н е ц е л о ч и с л е н н ы х прогрессий имеют общий член, не вытекает, что все прогрессии имеют общий член. Но это совершенно очевидно. Рассмотрим, например, две прогрессии:

$$\ldots,\ -2\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ \ldots$$

и

$$\ldots,\ -2\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ \ldots$$

Эти прогрессии имеют только один общий член, а именно 0 $\left(\text{из равенства } k\sqrt{2}=k'\sqrt{3}, \text{ где } k \text{ и } k' \text{ целые, не равные } 0, \text{ следует абсурдный результат } \sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{k'}{k}\right)$. Далее, рассмотрим еще одну прогрессию, имеющую общий член с первой прогрессией и общий член со второй прогрессией, причем оба эти члена отличны от нуля, например прогрессию

$$\ldots,\ \sqrt{3}+\sqrt{2}-2(\sqrt{3}-\sqrt{2}),$$
$$\sqrt{3}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{2},\ \sqrt{3}+\sqrt{2},$$
$$\sqrt{3}+\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3},$$
$$\sqrt{3}+\sqrt{2}+2(\sqrt{3}-\sqrt{2}),\ \ldots$$

Каждые две из рассматриваемых трех прогрессий имеют общий член (первые две — член 0; первая и третья — член $2\sqrt{2}$; вторая и третья — член $2\sqrt{3}$), но все они не имеют ни одного общего члена (третья прогрессия не содержит нуля, являющегося единственным общим членом первых двух прогрессий).

Примечание. Нетрудно видеть, что первое утверждение задачи остается справедливым, если все члены рассматриваемых прогрессий являются рациональными (но не обязательно целыми) числами (для доказательства достаточно заметить, что в этом случае, умножив все прогрессии на одно и то же целое число, их можно привести к целочисленным прогрессиям).

б) Пусть имеем теперь n прогрессий, каждые три из которых имеют общий член. Рассмотрим какие-либо две из этих прогрессий. Если эти две прогрессии имеют единственный общий член, то все остальные прогрессии тоже должны содержать этот член (так как по условию каждая третья прогрессия имеет общий член с двумя данными). Если же эти две прогрессии имеют два или больше общих членов, то разность между этими членами можно представить как в виде $k'd_1$, так и в виде $k''d_2$, где k' и k'' — какие-то целые числа, а d_1 и d_2 — разности рассматриваемых прогрессий. Следовательно, в этом случае

$$k'd_1 = k''d_2, \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{k''}{k'},$$

т. е. разности рассматриваемых прогрессий соизмеримы между собой.

Таким образом, если знаменатели каких-то двух из наших n прогрессий несоизмеримы, то эти две прогрессии имеют единственный общий член и все n прогрессий обязательно имеют этот же общий член. Если же знаменатели каждых двух прогрессий соизмеримы, то, умножив все прогрессии на одно и то же число, мы можем придти к новым n прогрессиям с целыми разностями. Вычтем теперь из всех членов всех этих прогрессий одно и то же число так, чтобы первая из прогрессий стала целочисленной; так как все остальные прогрессии по условию имеют общие члены с первой прогрессией, то они тоже станут целочисленными. Но n целочисленных прогрессий имеют общий член, если каждые две из них имеют общий член (см. задачу а)), а наши прогрессии имеют общие члены даже по три. Отсюда следует, что полученные n целочисленных прогрессий все имеют общий член, а тогда и исходные n прогрессий имеют общий член.

123. а) Доказательство этого предложения почти очевидно. Действительно, пусть, например, первая цифра рассматриваемой последовательности есть 1. Если вторая цифра тоже 1, то эта цифра уже повторяется два раза. Пусть теперь второй цифрой будет 2 (начало последовательности имеет вид 12...). Если на третьем месте стоит цифра 2, то эта цифра повторится два раза. Пусть теперь на третьем месте стоит снова цифра 1 (начало имеет вид 121...). Если на четвертом месте стоит цифра 1, то она повторяется в последовательности два раза подряд, если же на четвертом месте стоит цифра 2, то два раза подряд повторяется группа цифр 12. Совершенно так же разбирается случай, когда на первом месте стоит цифра 2 (достаточно в предыдущих рассуждениях всюду поменять цифру 1 на цифру 2 и наоборот).

б) Докажем, что все последовательности I_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), составленные из цифр 1 и 2 так, как это объяснено в указании к настоящей задаче, не содержат никакой цифры или группы цифр, повторяющейся подряд три раза. То, что в I_n *никакая цифра не повторяется подряд три раза*, сразу следует из способа составления этой последовательности. Действительно, $I_n = \overline{I}_{n-1}$ состоит из совокупности пар 12 и 21 (эти пары мы будем далее называть *звеньями* последовательности I_n), выписанных в определенном порядке друг за другом так, что каждая цифра последовательности входит в определенное звено и, следовательно, соседняя слева или справа с этой цифрой будет от нее отличаться. Значительно труднее доказать, что в I_n *никакая группа цифр не может повторяться подряд три раза*; для доказательства этого приходится воспользоваться методом математической индукции.

Очевидно, что в последовательности $I_1 = 12$, содержащей всего две цифры, не может быть никакой цифры или группы цифр, повторяющейся подряд три раза. Докажем теперь, что если в последовательности I_{n-1} нет цифры или группы цифр, повторяющейся подряд три раза, то такой группы цифр не будет и в последовательности I_n. Это доказательство мы будем вести от противного: предположим, что в I_n

есть группа цифр, повторяющаяся подряд три раза, и покажем, что это предположение приводит к противоречию. Для этого рассмотрим отдельно различные возможные случаи.

Первый случай. *Группа цифр P, повторяющаяся подряд три раза, содержит четное число цифр.* Здесь могут представиться следующие две возможности:

А) Группа цифр P в первый раз начинается с первой цифры некоторого звена. В этом случае P и во второй и в третий раз будет начинаться с первой цифры звена, т. е. P каждый раз будет содержать целое число звеньев. Заменив каждое звено 12 одной цифрой 1, а каждое звено 21 — цифрой 2, мы придем к предыдущей последовательности I_{n-1}; при этом группа цифр P перейдет в новую группу Q (содержащую в два раза меньше цифр), повторяющуюся в последовательности I_{n-1} три раза подряд. Но это находится в противоречии с предположением о том, что в последовательности I_{n-1} не существует цифры или группы цифр, повторяющейся три раза подряд. Итак, этот случай невозможен.

Б) Группа цифр P в первый раз (а следовательно, и во второй и в третий) начинается со второй цифры некоторого звена. Предположим для определенности, что первая цифра P есть 1 (если бы первой цифрой P была 2, то мы должны были бы только во всех дальнейших рассуждениях заменить всюду цифру 1 цифрой 2). В таком случае группа P все три раза начинается со второй цифры звена 21; значит, последнее звено группы (на середине которого обрывается P) есть 21 и последняя цифра P есть 2. Мы приходим, таким образом, к схеме I:

$$2\overbrace{1 * * \;\; * * \ldots 2}^{P}\overbrace{1 * * \;\; * * \;\ldots 2}^{P}\overbrace{1 * * \;\; * * \ldots 2}^{P}1$$
$$\underbrace{21 * * \;\; * * \ldots}_{Q}\underbrace{21 * * \;\; * * \;\ldots}_{Q}\underbrace{21 * * \;\; * * \ldots}_{Q}21$$

Схема I.

Из этой схемы видно, что в рассматриваемом случае последовательность I_n обязательно будет содержать три раза подряд также и группу цифр Q, получающуюся из P отбрасыванием последней цифры и добавлением еще одной цифры в начале. Но группа Q уже начинается с первой цифры звена и не может повторяться три раза подряд в силу доказанного выше. Следовательно, и этот случай тоже невозможен, что и требовалось доказать.

Второй случай. *Группа цифр P, повторяющаяся подряд три раза, содержит нечетное число цифр.* Так как I_n состоит из двузначных звеньев, то P помимо целого числа звеньев обязательно содержит еще одну отдельную цифру. При этом или P начинается с первой цифры некоторого звена, и тогда во второй раз P начинается со второй цифры звена, или же P начинается со второй цифры звена, и тогда во второй раз P начинается с первой цифры звена, а в третий раз — снова со второй цифры. В обоих случаях можно выбрать две следующие друг за другом группы цифр P, первая из которых начинается с первой цифры звена, а вторая — со второй (это будут первая и вторая или вторая и третья группы P). Эти две группы P (мы будем обозначать их соответственно через P_1 и P_2) мы сейчас и рассмотрим.

Предположим, что группа P_1 начинается со звена 12 (если бы она начиналась со звена 21, нам пришлось бы во всех дальнейших рассуждениях заменить 1 на 2 и наоборот). Так как группа P_2 начинается со второй цифры звена и эта цифра есть 1, то последняя цифра P_1 есть 2 (см. схему II).

$$\overbrace{12\underset{12}{**}\ \underset{12}{**}\dots 2}^{P_1}\overbrace{1\ \underset{21}{**}\ \underset{21}{**}\dots 2}^{P_2}$$

Схема II.

Так как вторая цифра P_1 есть 2, то и вторая цифра P_2 есть 2 и первое звено, целиком входящее в группу P_2, есть 21. Следовательно, третья цифра P_2 и P_1 есть 1; отсюда вытекает, что второе звено группы P_1 есть 12, так что четвертая цифра P_1 и P_2 есть 2. Таким образом, второе звено, целиком входящее в группу P_2, есть также 21; значит, пятая цифра P_2 и P_1 есть 1 и третье звено группы P_1 есть 12, так что шестой цифрой P_1 и P_2 будет 2. Продолжая рассуждать подобным же образом, мы покажем, что в группе цифр P на каждом нечетном месте стоит цифра 1, а на каждом четном месте — цифра 2. Но это противоречит тому, что на последнем месте в этой группе стоит цифра 2, так как последнее место является в нашем случае нечетным. (Отметим еще, что если P содержит более пяти цифр, то P_1 содержит три последовательных звена 12.) Таким образом, этот последний случай тоже является невозможным, что завершает доказательство.

Примечание. Выписывая последовательности I_1, I_2, $I_3, \ldots$, легко заметить, что каждая из них получается из предыдущей добавлением к ней некоторого числа новых цифр. Воспользовавшись методом математической индукции, нетрудно дать общее доказательство того, что I_n можно получить, приписав определенные 2^{n-1} цифр к I_{n-1}. Отсюда вытекает, что существуют не только сколь угодно длинные последовательности цифр 1 и 2, в которых никакая цифра или группа цифр не повторяется подряд три раза, но и бесконечная последовательность, обладающая этим свойством. Действительно, задать некоторую бесконечную последовательность цифр это значит задать правило, позволяющее последовательно выписать любое число цифр этой последовательности (вспомните задание бесконечной арифметической или геометрической прогрессий). В нашем случае закон, по которому последовательность I_{n-1} дополняется 2^{n-1} цифрами до последовательности I_n, как раз задает такое правило, и нетрудно понять, что в так образованной бесконечной последовательности (первые 2^n цифр которой образуют I_n) никакая цифра или группа цифр не может повторяться подряд три раза. Аналогичное замечание можно сделать также и к решениям задач 124а и б).

124. а) Доказательство того, что все построенные согласно указанию к этой задаче последовательности J_n не содержат никакой повторяющейся дважды цифры или группы цифр аналогично решению задачи 123б). Прежде всего очевидно, что последовательность J_n не может содержать двух повторяющихся подряд цифр. Действительно, J_n состоит из групп цифр 02, 0121, 0131 и 03 (которые мы будем называть звеньями), выписанных в определенном порядке. Легко проверить, что внутри звеньев нет повторяющихся подряд цифр. Но и два звена, стоящих рядом, тоже не могут образовать двух повторяющихся подряд цифр, так как каждое звено начинается цифрой 0 и ни одно звено на 0 не кончается.

Остается показать, что никакая последовательность J_n не содержит группы цифр, повторяющейся подряд два раза. Доказательство этого утверждения проводится по индукции при помощи рассуждений, близких к решению задачи 123б). Очевидно, что последовательность $J_0 = 01$ не содержит повторяющихся цифр или групп цифр. Далее предполагается, что последовательность J_{n-1} не содержит повторяющихся цифр или групп цифр, и показывается, что в этом случае предположение о том, что последовательность J_n содержит две повторяющиеся подряд группы цифр P (обозначаемые далее через P_1 и P_2), приводит к противоречию. При этом приходится рассмотреть отдельно несколько возможных случаев.

Первый случай. *Группа P_1 состоит из целого числа звеньев.* В таком случае и группа P_2 должна, очевидно, состоять из целого числа таких же звеньев. Заменим теперь в последовательности J_n каждое звено на соответствующую цифру, т. е. перейдем обратно от последовательности J_n к последовательности J_{n-1}. Тогда две следующие подряд одинаковые группы цифр P последовательности J_n перейдут в две следующие подряд одна за другой одинаковые цифры или группы цифр последовательности J_{n-1}, что противоречит нашему предположению о том, что последовательность J_{n-1} не содержит двух повторяющихся одинаковых цифр или групп цифр.

Второй случай. *Группы цифр P_1 и P_2 начинаются с некоторой цифры a, занимающей в обоих случаях одно и то же место в одинаковых звеньях.* Пусть для определенности обе группы P начинаются с двойки, занимающей третье место в звене 0121. В таком случае группа P_1 должна оканчиваться цифрами 01, начинающими звено 0121, а следовательно, теми же цифрами должна кончаться и группа P_2:

$$\underbrace{01\mathrlap{\overbrace{21****01}^{P_1}}}_{Q_1}\underbrace{\mathrlap{\overbrace{21****01}^{P_2}}}_{Q_2}$$

Схема I.

Таким образом, мы приходим к схеме I, из которой видно, что в этом случае последовательность J_n должна так же содержать две повторяющиеся подряд группы цифр Q, состоящие из целого числа звеньев. Но этот случай мы уже разобрали выше и доказали, что он является невозможным.

Третий случай. *Группы P_1 и P_2 начинаются с одной и той же цифры a, которая в обоих случаях принад-*

лежит разным звеньям или стоит на разных местах в одинаковых звеньях.

Здесь за цифрой a должна в обоих случаях следовать одна и та же цифра b. Рассмотрев все возможные случаи (здесь оказывается важным, что мы знаем, какая цифра следует за каждой данной цифрой звена: за последней цифрой звена обязательно следует 0 — первая цифра следующего звена), мы убедимся, что это возможно только в том случае, когда a есть цифра 1, а именно, одна из групп P начинается с четвертой цифры звена 0121, а вторая группа P — с четвертой цифры звена 0131 [1]). Пусть для определенности группа P_1 начинается с последней цифры звена 0121, а группа P_2 — с последней цифры звена 0131 (если бы группа P_1 начиналась с последней цифры звена 0131, а группа P_2 — с последней цифры звена 0121, пришлось бы в последующих рассуждениях заменить всюду 2 на 3 и наоборот). В этом случае группа P_1 должна кончаться цифрами 013 — первыми тремя цифрами звена 0131, четвертой цифрой которого начинается группа P_2. Следовательно, и группа P_2 кончается цифрами 013. Но из закона построения наших последовательностей легко усмотреть, что в последовательностях J_n три цифры 013 следуют в таком порядке друг за другом только в том случае, когда это — первые три цифры звена 0131; таким образом, за этими цифрами всегда следует цифра 1. Следовательно, в рассматриваемом случае мы приходим к схеме II:

$$012\overbrace{10 * * * * 013}^{P_1}\overbrace{10 * * * * 0131}^{P_2}$$
$$0121\underbrace{0 * * * * 0131}_{Q_1}\underbrace{0 * * * * 0131}_{Q_2}$$

Схема II.

из которой видно, что и в этом случае последовательность I_n должна содержать две повторяющиеся подряд группы цифр Q, состоящие из целого числа звеньев, что, как мы уже видели выше, невозможно.

---

[1]) Может показаться, что есть еще одна возможность — одна группа P может начинаться с первой цифры звена 0121, а вторая — с первой цифры звена 0131. Однако в этом случае в двух группах P уже третьи цифры оказываются различными.

Примечание. Для построения бесконечной последовательности, состоящей из цифр 0, 1, 2, 3, в которой никакая цифра или группа цифр не повторяется подряд два раза (см. примечание к решению задачи 123 б)), удобнее рассматривать не последовательности J_n, а последовательности J'_n, которые образуются по следующему правилу:

$$J'_0=01,\ J'_n=01\tilde{J}'_{n-1}$$

(здесь значок $\sim$ над буквой имеет тот же смысл, что и в указании к настоящей задаче). Нетрудно проверить, что последовательность J'_n получается из последовательности J'_{n-1} приписыванием к ней в конце некоторой группы цифр.

б) Доказательство аналогично решению задач 123б) и 124а) и тоже основывается на методе математической индукции. Очевидно, что последовательность $K_1=123$ не содержит повторяющихся цифр или групп цифр. Предположим теперь, что последовательность K_{n-1} не содержит повторений, и покажем, что в этом случае предположение о том, что последовательность K_n содержит две повторяющиеся подряд одинаковые группы цифр P_1 и P_2, приводит к противоречию.

Прежде всего очевидно, что P_1 и P_2 не могут состоять из одной цифры. Действительно, никакое из звеньев последовательности K_n (звенья — группы из трех цифр 123 и т. д.) не содержит повторяющихся цифр. Но и два соседних звена не могут образовать повторяющуюся пару цифр. Действительно, в последовательности K_n не могут стоять рядом звенья 231 и 123 или 321 и 132, ибо первые два звена оба заменяют цифры, стоящие на нечетном месте, а следующие два звена — стоящие на четном месте; звенья 231 и 123 или 321 и 123 также не могут стоять рядом, ибо первые два звена оба ставятся на месте цифры 2, а вторые — на месте цифры 1, а в последовательности K_{n-1} по нашему предположению не было повторяющихся цифр. Совершенно аналогично доказывается, что два соседних звена не могут образовывать повторение цифры 2 или цифры 3. Остается только доказать, что последовательность K_n не может содержать повторяющихся групп цифр P_1 и P_2, состоящих больше чем из одной цифры. При этом нам придется рассмотреть отдельно несколько мыслимых частных случаев.

Первый случай. *Группы цифр P_1 и P_2 содержат целое число звеньев.* В таком случае, заменив все звенья на соответствующие цифры, мы придем к последовательности K_{n-1}, которая вопреки нашему предположению будет содержать повторение группы цифр (получающейся при нашей замене из группы цифр P, повторяющейся подряд два раза в последовательности K_n). Этим доказано, что этот случай невозможен.

Второй случай. *Число цифр в группах P_1 и P_2 делится на* 3. Если при этом группа P_1 начинается со второй цифры некоторого звена, то и группа P_2 должна начинаться со второй цифры некоторого звена (ибо число цифр в группе P_1 кратно трем). Если две последние цифры звена, с которых начинается группа P_1, будут, скажем, 12, то перед ними стоит цифра 3; при этом и две первые цифры P_2 будут 12, а так как эти цифры вместе с последней цифрой группы P_1 составляют целое звено, то последняя цифра P_1 есть 3 (см. схему I). В таком случае, сдвинув обе группы P_1 и P_2 на одну цифру влево, мы получим повторяющиеся группы Q_1 и Q_2, состоящие из целого числа звеньев, т. е. придем к первому случаю.

$$\underset{\qquad Q_1 \qquad\qquad\qquad Q_2}{\overset{\qquad P_1 \qquad\qquad\qquad P_2}{3\,12*\,*\,*\;\;*\,*\,*\,3\,12*\,*\,*\;\;*\,*\,*\,3}}$$

Схема I.

Аналогично показывается, что если группы P_1 и P_2 начинаются с третьей цифры звена (т. е. если эти группы кончаются первыми двумя цифрами некоторого звена), то, сдвинув обе эти группы на одну цифру вправо, мы получим повторяющиеся группы цифр, состоящие из целого числа звеньев.

Третий случай. *Число цифр в группах P_1 и P_2 не кратно трем; P_2 начинается с целого звена.* Рассмотрим отдельно две представляющиеся возможности.

А. Число цифр в группах P_1 и P_2 равно $3k+1$. В таком случае обе группы цифр P содержат целое число звеньев плюс еще одну цифру — первую цифру группы P_1 и последнюю цифру группы P_2. Пусть для определенности первая цифра группы P_1 есть 3. В таком случае и первая цифра группы P_2 есть тоже 3, а следовательно, последующие две цифры первого звена группы P_2 будут 1 и 2 (на прилагаемой схеме II пара цифр 1 и 2, *о которых мы не знаем, в каком порядке они следуют*, обозначаются через XX). Следовательно, вторая и третья цифры P_1 будут 1 и 2, а значит, четвертая цифра этой группы (третья цифра первого полного звена группы P_1) есть 3. Но раз четвертая цифра P_2 (первая цифра второго звена P_1) есть 3, то пятая и шестая цифры группы P (вторая и третья цифры второго звена группы P_2) будут 1 и 2 (стоящие в каком-то порядке). Следовательно, первая и вторая цифры второго полного звена P_1 будут 1 и 2 и, значит, третья цифра этого звена (седьмая цифра группы P) есть снова 3. Продолжая эти рассуждения, мы заключаем, что в группах P_1 и P_2 цифра 3 стоит на 1-м, 4-м, 7-м и т. д. местах; так как общее число цифр в этих группах равно $3k+1$, то на последнем месте в этих группах тоже стоит цифра 3. Таким образом, мы видим, что

$$\overbrace{3\,XX3\,XX3\,\ldots\ldots\,XX3}^{P_1}\,\overbrace{3XX\,3XX\,3XX\,\ldots\ldots\,3}^{P_2}$$

Схема II.

группа P_1 оканчивается цифрой 3; группа P_2 начинается цифрой 3. Следовательно, в последовательности K_n два раза подряд повторяется *одна цифра* 3, что, как мы уже видели, невозможно.

Совершенно аналогично рассматриваются случаи, когда первая цифра групп P_1 и P_2 есть 2 или 1.

Б. *Число цифр в группах* P_1 *и* P_2 *равно* $3k+2$. В таком случае группы цифр P_1 и P_2 содержат кроме целого числа циклов еще по две цифры; это будут первые две цифры группы P_1 и последние две цифры группы P_2. Пусть первые две цифры групп P_1 и P_2 будут 1 и 2, стоящие в каком-то порядке; тогда третья цифра групп P_1 и P_2 (третья цифра первого цикла группы P_2) есть 3. Но это означает, что четвертая и пятая цифры группы P_1 (вторая и третья цифры первого полного цикла P_1) будут снова 1 и 2; следовательно, шестая цифра P (третья цифра второго цикла P_2) есть 3 и т. д.

Таким образом, мы заключаем, что у групп P_1 и P_2 цифра 3 стоит на 3-м, 6-м, 9-м и т. д. местах (см. схему III). Отсюда следует, что группа P_1 кончается циклом, начинающимся с цифры 3 (т. е. 312 или 321); группа P_2 начинается с цикла, кончающегося цифрой 3 (т. е. 123 или 213). Далее, повторяя почти точно рассуждения, с помощью которых

$$\overbrace{3XX\;3XX\;3XX\ldots\ldots3XX}^{P_1}\overbrace{XX3\;XX3\;XX3\ldots\ldots XX}^{P_2}$$

Схема III.

было доказано, что K_n не может содержать двух повторяющихся цифр (см. стр. 405), можно показать, что во всех представляющихся случаях последовательность K_{n-1} должна была бы содержать две повторяющиеся подряд цифры.

Совершенно аналогично разбираются случаи, когда группы P_1 и P_2 начинаются с цифр 1 и 3 или 2 и 3.

Четвертый случай. *Число цифр в группах P_1 и P_2 не кратно трем; P_2 не начинается с целого звена.* Здесь следует рассмотреть четыре подслучая.

А. **Группа P_2 начинается с последней цифры некоторого звена; группы P_1 и P_2 содержат $3k+1$ цифр.** В этом случае группа P_1 должна начинаться с неполного звена из двух цифр; группа P_2 должна кончаться целым звеном.

Предположим для определенности, что P_1 и P_2 начинаются с цифры 3 (рассуждения почти не изменились бы, если бы P_1 и P_2 начинались с цифры 1 или 2). Следовательно, две последние цифры группы P_1 будут 1 и 2 (стоящие в каком-то порядке); значит, две последние цифры группы P_2 будут 1 и 2. Отсюда следует, что третья от конца цифра группы P_2 (а следовательно, и P_1) есть 3. Но раз третья цифра от конца в группе P_1 есть 3, то две предыдущие цифры будут 1 и 2. Переходя теперь снова к группе P_2, мы заключаем, что шестая цифра от конца есть 3. Продолжая эти рассуждения, мы последовательно убеждаемся, что в группах P_1 и P_2

$$\overbrace{3X\ldots\ldots XX3\;XX3\;XX3}^{P_1}\overbrace{\ldots\ldots3XX\;3XX\;3XX}^{P_2}$$

Схема IV.

цифра 3 стоит на 3-м, 6-м, 9-м и т. д. местах от конца (см. схему IV). Так как всего эти группы содержат по

$3k+1$ цифр, то отсюда следует, что цифра 3 стоит в группах P_1 и P_2 на 2-м месте. Но это противоречит тому, что в *группе* P_1 *цифра* 3 *стоит на* 1-м месте.

Б. Группа P_2 начинается с последней цифры некоторого звена; группы P_1 и P_2 содержат по $3k+2$ цифр. В этом случае группа P_1 должна начинаться с целого звена, а группа P_2 должна кончаться первой цифрой звена. Предположим опять, что P_1 и P_2 начинаются с цифры 3. В таком случае на двух следующих местах в группе P_1 (а следовательно, и в группе P_2) стоят цифры 1 и 2; значит, на 4-м месте группы P_2 (и P_1) стоит цифра 3. Продолжая рассуждать, как выше, мы опять приходим к заключению, что в группах P_1 и P_2 цифра 3 стоит на 1-м, 4-м, 7-м и т. д. местах (см. схему V). Так как число цифр в каждой из групп P_1 и P_2 равно $3k+2$, то отсюда следует, что цифра 3 должна стоять на предпоследнем месте в этих группах, что противоречит тому, что последние две цифры

$$\overbrace{3XX\ 3XX\ 3XX\ \ldots\ldots\ XX}^{P_1}\overbrace{3\ XX3\ XX3\ XX3\ \ldots\ldots XX3}^{P_2}$$

Схема V.

группы P_1 есть 1 и 2 (первые две цифры звена, кончающегося цифрой 3).

В. Группа P_2 начинается с неполного звена из двух цифр; группы P_1 и P_2 состоят из $3k+1$ цифр. В этом случае группа P_1 должна начинаться с целого звена, а группа P_2 кончаться неполным звеном из двух цифр. Предположим для определенности, что группы P_1 и P_2 кончаются цифрой 3. В таком случае первые две цифры группы P_2 (и P_1) будут 1 и 2; следовательно, третья цифра группы P_1 (и P_2) есть 3. Но раз третья цифра группы P_2 есть 3, то две последующие цифры будут 1 и 2, а раз четвертая и пятая цифры группы P_1 будут 1 и 2, то шестая цифра этой группы

$$\overbrace{XX3\ XX3\ XX3\ \ldots\ldots\ 3}^{P_1}\overbrace{XX\ 3XX\ 3XX\ \ldots\ldots X3X}^{P_2}$$

Схема VI.

(а следовательно, также и группы P_2) есть 3. Продолжая эти рассуждения аналогично предыдущему, убеждаемся, что цифра 3 стоит в группах P_1 и P_2 на 3-м, 6-м, 9-м и т. д. местах (см. схему VI). Так как общее число цифр в этих группах равно $3k+1$, то, следовательно, цифра 3 должна стоять и на предпоследнем месте, что противоречит тому, что в группе P на последнем месте стоит цифра 3.

Г. Группа P_2 начинается с неполного звена из двух цифр; P_1 и P_2 состоят из $3k+2$ цифр. В этом случае группа P_1 начинается с последней цифры звена; группа P_2 кончается целым звеном. Предположим опять, что группы P_1 и P_2 кончаются цифрой 3. В таком случае в точности, как выше, показываем, что в группах P_1 и P_2 цифра 3 стоит на 1-м, 4-м, 7-м и т. д. местах с конца (см. схему VII). Так как число цифр в каждой из этих групп равно

$$\overbrace{X\ldots\ldots 3XX\,3XX}^{P_1}\overbrace{3XX\ldots\ldots XX3\,XX3}^{P_2}$$

Схема VII.

$3k+2$, то отсюда, в частности, следует, что цифра 3 стоит в этих группах на 2-м месте; но это противоречит тому, что на последнем месте в группе P_1 стоит цифра 3 (ибо последняя цифра группы P_1 и вторая цифра группы P_2 принадлежат одному звену).

Таким образом, мы разобрали все возможные случаи; этим самым доказательство полностью завершено.

Замечание. Аналогично решению задачи б) можно доказать, что если, начиная с последовательности $1234\ldots n$, последовательно заменять:

цифру	1,	стоящую на	нечетном	месте,	группой	цифр	$123\ldots n$
»	2	»	»	»	»	»	$234\ldots n1$
»	3	»	»	»	»	»	$345\ldots n12$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	n	»	»	»	»	»	$n12\ldots(n-2)(n-1)$
»	1	»	четном	»	»	»	$n(n-1)(n-2)\ldots 21$
»	2	»	»	»	»	»	$1n(n-1)\ldots 32$
»	3	»	»	»	»	»	$21n(n-1)\ldots 43$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	n	»	»	»	»	»	$(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1n$,

то все полученные последовательности (состоящие из цифр $1, 2, 3, \ldots, n$) не будут содержать повторяющихся два раза цифр или групп цифр.

125. Докажем, что число T_n, составленное по правилу, описанному в указании к этой задаче, действительно удовлетворяет условию задачи. Из самого этого правила следует, что все n-значные числа, получающиеся выписыванием каких-то идущих подряд n цифр числа T_n, будут отличны друг от друга. Таким образом, для полного решения задачи необходимо только показать, что к а ж д о е n-значное число k, составленное только из нулей и единиц, может быть получено по такому правилу. Проведем это доказательство при помощи математической индукции по числу единиц в конце числа k.

Из построения числа T_n следует, что оно содержит n последовательных единиц (число T_n начинается с n единиц).

Единственное n-значное число, составленное из нулей и единиц, которое оканчивается $n-1$ единицами, есть $0\underbrace{11\ldots1}_{n-1 \text{ раз}}$. Покажем, что это число тоже может быть выделено из числа T_n, а именно, что число T_n о к а н ч и в а е т с я цифрами $0\underbrace{11\ldots1}_{n-1 \text{ раз}}$. Действительно, обозначим n последних цифр числа T_n через $\delta_1\delta_2\ldots\delta_n$. Так как $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n$ есть $n-1$ п о с л е д н и х цифр числа T_n, то согласно определению этого числа n-значные числа $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n0$ и $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n1$ уже встречались в качестве n последовательных цифр нашего числа (иначе после $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n$ можно было бы приписать по крайней мере еще одну цифру). Далее, е с л и н е в с е ц и ф р ы $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ я в л я ю т с я е д и н и ц а м и, то последовательности цифр $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n0$ и $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n1$ не могут стоять в самом начале нашего числа T_n (ибо это число по построению начинается с n единиц). Таким образом, оба числа $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n0$ и $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n1$ не являются первыми n цифрами T_n, следовательно, где-то в середине числа T_n дважды встречается одинаковая последовательность $n-1$ цифр $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n$. Но так как никакие n последовательных цифр числа T_n не могут повториться, то, следовательно, перед $\delta_2\delta_3\ldots\delta_n$ один раз должна была стоять цифра 0 и один раз цифра 1. А в таком случае цифра δ_1 не может быть равна ни 0, ни 1 (оба n-значные числа, $0\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}$ и $1\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}$, уже встречались раньше). Полученное противоречие и доказывает, что наше предположение о том, что среди цифр $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ есть хотя бы один нуль, является неверным; следовательно, последними $n-1$ цифрами числа T_n могут быть только $n-1$ единиц. Но в таком случае ясно, что непосредственно перед этими $n-1$ единицами должен стоять нуль, ибо n последовательных единиц уже встречались в самом начале нашего числа.

Итак, мы доказали, что последними n цифрами числа T_n действительно будут цифры $0\underbrace{11\ldots1}_{n-1\text{ раз}}$.

Предположим теперь, что все n-значные числа вида $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-i-1}0\underbrace{11\ldots1}_{i\text{ раз}}$, где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-i-1}$ принимают значения 0 или 1 и $i>m$, встречаются среди последовательностей n соседних цифр числа T_n, и покажем, что в таком случае и каждое число $k=\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ раз}}$ встретится среди последовательностей n соседних цифр числа T_n.

По предположению индукции число $\delta_2\ldots\delta_{n-m-1}0\underbrace{11\ldots11}_{m+1\text{ раз}}$ где-то встречается в ряду цифр числа T_n. Но по построению числа T_n последовательность цифр $\delta_2\ldots\delta_{n-m-1}0\underbrace{11\ldots11}_{m+1\text{ раз}}$ может встретиться в этом числе только в том случае, если до нее встретилась в числе T_n последовательность цифр $\delta_2\ldots\delta_{n-m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ раз}}0$. Таким образом, мы видим, что $(n-1)$-значное число $\delta_2\ldots\delta_{n-m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ раз}}$ дважды встречается в качестве n последовательных цифр числа T_n (причем оба раза не в самом начале, ибо число T_n начинается с p единиц). Но так как по построению T_n никакие n последовательных цифр этого числа не могут повторяться, то один раз непосредственно перед $\delta_2\ldots\delta_{n-m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ раз}}$ должна стоять цифра 1, а второй раз 0. Значит, независимо от того, равно ли δ_1 единице или нулю, рассматриваемое число $k=\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-m-1}0\underbrace{11\ldots1}_{m\text{ раз}}$ встречается в качестве n последовательных знаков числа T_n. Это рассуждение завершает доказательство.

Примечание. Так как число различных n-значных чисел, состоящих только из нулей и единиц, равно, очевидно, 2^n, то из этого решения, в частности, следует, что число T_n является (2^n+n-1)-значным (если бы T_n имело меньше чем 2^n+n-1 цифр, то все 2^n n-значных чисел никак не могли бы встретиться в качестве n последовательных цифр числа T_n, а если бы T_n имело больше чем 2^n+n-1 цифр, то некоторые из выделенных из T_n n-значных чисел должны были бы совпадать).

Отметим еще, что с помощью аналогичного приема можно построить число (состоящее из всех десяти цифр 0, 1, 2, ... , 9), всевозможные группы из n последовательных цифр которого все различны и совпадают со всеми n-значными числами десятичной системы счисления.

126. Докажем более общее предложение, т. е. что если m сортов пирожных по n пирожных каждого сорта упакованы в m ящиков, по n пирожных в каждом ящике, то всегда можно выбрать по одному пирожному каждого сорта, вынув одно пирожное из каждого ящика. Это утверждение совершенно очевидно при $m=1$ (т. е. когда некоторое число пирожных одного сорта запаковано в один ящик) и при $n=1$ (некоторое число пирожных, все различных сортов, запаковано в ящики, по одному пирожному в ящике). Докажем теперь, что это предложение справедливо при любом значении n.

Прежде всего рассмотрим случай $n=2$ (случай, когда в каждом ящике находятся два пирожных). В этом случае нетрудно указать, как производить выбор пирожных, удовлетворяющий условию задачи. Вынем из произвольного ящика произвольное пирожное; сорт этого пирожного мы будем называть 1-м. Назовем сорт второго пирожного, лежащего в том же ящике, 2-м (случай, когда второе пирожное в первом ящике было того же сорта, что и первое пирожное, мы специально отметим ниже). Так как мы имеем по два пирожных каждого сорта, то где-то у нас есть еще одно пирожное 2-го сорта; вынем это пирожное из того ящика, в котором оно находится. Сорт второго пирожного, лежащего во втором ящике, мы назовем 3-м. Где-то у нас имеется еще одно пирожное 3-го сорта; вынем это пирожное из того ящика, в котором оно находится. Далее сорт второго пирожного в третьем ящике мы назовем 4-м; где-то у нас имеется еще одно пирожное 4-го сорта; вынем это пирожное из ящика, в котором оно лежит. Этот процесс мы сможем продолжать до тех пор, пока не придем к ящику, в котором лежит второе пирожное 1-го сорта. Пусть это будет k-й ящик, из которого мы вынимали пирожные; при этом k может равняться единице или m.

Таким образом, мы нашли k ящиков, в которых уложены $k \cdot 2$ пирожных k различных сортов; при этом из этих k ящиков мы сумели выбрать k разных пирожных, вынув по одному пирожному из каждого ящика. Если $k = m$, то задача уже решена; если же $k < m$ (в частности, если $k = 1$, т. е. если в первом ящике лежали два пирожных одного сорта), то мы откладываем выбранные k пирожных и далее продолжаем выбирать пирожные из оставшихся $m - k$ ящиков таким же образом, начиная с произвольного пирожного какого-то $(k+1)$-го сорта (см. схему I). При этом может быть мы и во второй

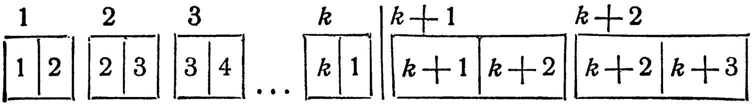


Схема I.

раз не исчерпаем всех сортов пирожных, т. е. придем к ящику, в котором лежит второе пирожное $(k+1)$-го сорта, прежде чем переберем все ящики; в таком случае нам снова в известный момент придется начинать выбор с произвольного пирожного одного из не встреченных до сих пор сортов. Однако ясно, что при помощи такого процесса мы в конце концов сможем осуществить требуемый выбор m разных пирожных, по одному из каждого ящика.

Для случая $n \geqslant 3$ мы будем доказывать наше утверждение индукцией по числу n. Другими словами, мы предположим, что для всех n, меньших некоторого определенного значения (большего 2), мы уже наше утверждение доказали, и покажем, что в таком случае это утверждение наверное справедливо и для этого значения n.

Итак, мы считаем, что для всех n, меньших данного, предложение задачи справедливо. Предположим теперь, что мы имеем какое-то распределение $m \cdot n$ пирожных (m различных сортов пирожных по n пирожных каждого сорта) по m ящикам (n пирожных в каждом ящике), такое, что можно выбрать m пирожных различных сортов, взяв по одному пирожному из каждого ящика. Докажем, что если мы поменяем местами какие угодно два пирожных, то новое распределение пирожных по ящикам будет таково, что мы и теперь сможем выбрать пирожные всех имеющихся сортов, вынув по одному пирожному из каждого ящика.

Действительно, согласно нашему условию для первоначального распределения мы можем осуществить выбор m пирожных m различных сортов, взяв по одному пирожному из каждого ящика. После этого в каждом ящике останется $n-1$ пирожных [всего $m(n-1)$ пирожных m различных сортов]. Согласно предположению индукции мы еще раз можем выбрать m различных пирожных, вынув по одному пирожному из каждого ящика. После второй выемки пирожных в каждом ящике останется по $n-2$ пирожных; согласно предположению индукции мы и в третий раз можем выбрать m различных пирожных, выбрав по одному пирожному из каждого ящика. Таким образом, мы видим, что для нашего исходного распределения можно осуществить выбор трех партий по m различных пирожных, три раза вынимая по одному пирожному из каждого ящика. Теперь предположим, что мы изменили первоначальное распределение пирожных, обменяв местами два пирожных. При этом хотя бы в одну из трех партий по m пирожных разных сортов не войдут пирожные, которые мы меняли местами (ибо мы меняли местами всего два пирожных). Отсюда и вытекает, что и при новом распределении пирожных мы можем отобрать m пирожных m различных сортов, вынув по одному пирожному из каждого ящика.

Из доказанного предложения уже следует, что для к а ж д о г о распределения $m \cdot n$ пирожных (m различных сортов по n пирожных каждого сорта) по m ящикам (n пирожных в каждом ящике) можно выбрать m разных пирожных, вынув по одному пирожному из каждого ящика. Действительно, каждое распределение $m \cdot n$ пирожных по ящикам можно получить из распределения, при котором в каждом ящике лежали пирожные одного определенного сорта, последовательно меняя несколько раз местами пары пирожных. Но для распределения пирожных, при котором в каждом ящике лежат пирожные одного сорта, требуемый выбор пирожных, очевидно, возможен; поэтому из доказанного выше следует, что такой выбор возможен и для каждого распределения. Этим завершается доказательство того, что если требуемое утверждение справедливо для всех n, меньших некоторого, то оно справедливо и для этого n. Отсюда в силу принципа математической индукции следует, что утверждение справедливо для всех n.

127. Докажем, что номер клетки, стоящей на пересечении $(A+1)$-й строки и $(B+1)$-го столбца, определяется таким образом, как это сказано в указании к задаче. Для этого нам надо проверить, что число $Z(A, B)$ обладает следующими тремя свойствами:

1°. $Z(0, 0)=0$.

2°. $Z(A, B)$ отлично от всех чисел $Z(A, 0), Z(A, 1),\ldots$ $\ldots, Z(A, B-1)$; $Z(0, B)$, $Z(1, B)$, $\ldots$, $Z(A-1, B)$.

3°. Любое целое неотрицательное число, меньшее $Z(A, B)$, равно одному из чисел $Z(A, 0)$, $Z(A, 1)$, $\ldots$, $Z(A, B-1)$ или одному из чисел $Z(0, B)$, $Z(1, B)$, $\ldots$, $Z(A-1, B)$.

Свойство 1° непосредственно вытекает из определения $Z(A, B)$.

Докажем теперь свойство 2°. Пусть $A=$ «$a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0$», $B=$ «$b_m b_{m-1}\ldots b_1 b_0$» и $C=$ «$c_k c_{k-1}\ldots c_1 c_0$» — три целых неотрицательных числа; для определенности будем считать, что $n\geqslant m\geqslant k$. В таком случае очевидно, что

$$Z(Z(A, B), C)= «\bar{z}_n \bar{z}_{n-1}\ldots \bar{z}_1 \bar{z}_0»,$$

где

$$\bar{z}_i=\begin{cases} 0, & \text{если } a_i+b_i+c_i=0 \text{ или } a_i+b_i+c_i=2, \\ 1, & \text{если } a_i+b_i+c_i=1 \text{ или } a_i+b_i+c_i=3 \end{cases}$$
$$(i=n, n-1, \ldots, 1, 0).$$

Отсюда без труда получаем, что

$$Z(Z(A, B), A)=B.$$

Пусть теперь $Z(A, B)=Z(A, B_1)$. В таком случае $Z(Z(A, B), A)=Z(Z(A, B_1), A)$, откуда в силу доказанного следует, что $B=B_1$. Таким образом, число $Z(A, B)$ не может совпадать ни с одним из чисел $Z(A, 0), Z(A, 1), \ldots$ $\ldots, Z(A, B-1)$. Совершенно так же показывается, что $Z(A, B)$ не может совпадать ни с одним из чисел $Z(0, B)$, $Z(1, B)$, $\ldots$, $Z(A-1, B)$ (это можно вывести из уже доказанного, если заметить, что $Z(A, B)=Z(B, A)$).

Нам ёще осталось доказать свойство 3°. Пусть $X = $ «$x_q x_{q-1} \ldots x_1 x_0$» есть некоторое целое неотрицательное число, меньшее чем $Z(A, B) = $ «$z_p z_{p-1} \ldots z_1 z_0$»; это значит, что $q \leqslant p$, и если $q = p$, то $x_p = z_p$, $x_{p-1} = z_{p-1}$, ..., $x_{r+1} = z_{r+1}$ и $x_r = 0$, $z_r = 1$ (номер r может, в частности, совпадать с p). Так как $z_p = 1$ (старшая «цифра» в двоичной записи числа $Z(A, B)$), то $a_p = 1$, $b_p = 0$ или $a_p = 0$, $b_p = 1$; так как $z_r = 1$, то $a_r = 1$, $b_r = 0$ или $a_r = 0$, $b_r = 1$; для определенности мы будем считать, что в обоих случаях верно первое. Обозначим число $Z(X, B)$ через A_1 и докажем, что $A_1 < A$. Действительно, так как старшая «цифра» числа $Z(A, B)$, отличная от 0, есть p-я, то все «цифры» старше p-й совпадают у чисел A и B; с другой стороны, так как старшая «цифра» числа X, отличная от 0, есть q-я, то все «цифры» старше q-й совпадают у чисел $A_1 = Z(X, B)$ и B; так как $q \leqslant p$, то отсюда следует, что все «цифры» старше p-й совпадают у чисел A_1 и A. Далее, если $q < p$, то p-я «цифра» числа A_1 совпадает с p-й «цифрой» числа B, т. е. равна 0, в то время как p-я «цифра» числа A равна 1; значит, $A_1 < A$. Если же $p = q$, то из того, что p-я, $(p-1)$-я, ..., $(r+1)$-я «цифры» чисел $Z(A, B)$ и X совпадают, следует, что и соответствующие «цифры» чисел $A_1 = Z(X, B)$ и A совпадают (если $z_i = x_i = 0$, то i-е «цифры» чисел A и B совпадают и i-е «цифры» чисел A_1 и B совпадают; если $z_i = x_i = 1$, то i-е «цифры» чисел A и B различны и i-е «цифры» чисел A_1 и B различны). Наконец, $a_r = 1$, $b_r = 0$; $x_r = 0$; следовательно, r-я «цифра» числа $A_1 = Z(X, B)$ равна 0, а r-я «цифра» числа A равна 1. Таким образом доказано, что $A_1 < A$. (Если бы было, например, $q < p$, $a_r = 0$, $b_r = 1$, то мы доказали бы, что $Z(X, A) = B_1 < B$.)

Но из того, что $Z(X, B) = A_1 < A$, следует, что число X встречается в ряду чисел $Z(0, B)$, $Z(1, B)$, ..., $Z(A-1, B)$; действительно, как было показано выше, $X = Z(Z(X, B), B) = Z(A_1, B)$.

Этим самым завершено доказательство того, что номер клетки, стоящей на пересечении $(A+1)$-й строки и $(B+1)$-го столбца, равен $Z(A, B)$. Теперь только остается заметить, что $999 = $ «1111100111» и $99 = $ «1100011», чтобы найти номер, который получит клетка, стоящая на пересечении 1000-й строки и 100-го столбца: этот номер равен $Z(999, 99) = $ «1110000100» $= 900$.

128. Пусть в трех кучках имеется соответственно a, b и c спичек. Запишем числа a, b и c в двоичной системе счисления:

$$a = a_0 2^m + a_1 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + \ldots + a_{m-1} 2 + a_m,$$
$$b = b_0 2^m + b_1 2^{m-1} + b_2 2^{m-2} + \ldots + b_{m-1} 2 + b_m,$$
$$c = c_0 2^m + c_1 2^{m-1} + c_2 2^{m-2} + \ldots + c_{m-1} 2 + c_m,$$

где все «цифры» a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, ..., a_m, b_m, c_m равны либо 0, либо 1 (мы здесь пишем одинаковое число «цифр» во всех числах a, b и c, поскольку в противном случае всегда можно дописать один или несколько нулей вначале к тем числам, у которых «цифр» меньше, чем у других; таким образом, мы предполагаем, что из «первых цифр» a_0, b_0 и c_0 хотя бы одна, но не обязательно все, равна 1). Играющий, делая очередной ход, может заменить одно из чисел a, b и c на любое меньшее число. Пусть, например, он взял какое-то число спичек из первой кучки; при этом он обязательно изменит хотя бы одну из «цифр» a_0, a_1, ..., a_m. Отметим, что каждое изменение «цифры» двоичного написания числа обязательно меняет четность этой «цифры» (ибо единственные возможные изменения — это замена 1 на 0 или 0 на 1). Следовательно, играющий, взяв несколько спичек из первой кучки, обязательно изменит четность хотя бы одной из «цифр» a_0, a_1, ..., a_m. Точно так же, взяв несколько спичек из второй кучки, он изменит четность хотя бы одной из «цифр» b_0, b_1, ..., b_m, а взяв несколько спичек из третьей кучки, — четность хотя бы одной из «цифр» c_0, c_1, ..., c_m.

Отсюда вытекает, что если в начальном положении хотя бы одна из сумм «цифр» одного разряда

$$a_0 + b_0 + c_0, \quad a_1 + b_1 + c_1, \quad a_2 + b_2 + c_2, \quad \ldots, \quad a_m + b_m + c_m$$

будет нечетной, то начинающий всегда может выиграть. Действительно, пусть первой из этих сумм, являющейся нечетной, будет сумма $a_k + b_k + c_k$. Следовательно, хотя бы одна из «цифр» a_k, b_k и c_k равна 1; для определенности будем считать, что $a_k = 1$. Начинающий может тогда, взяв несколько спичек из первой кучки, добиться того, чтобы «цифры» a_0, a_1, ..., a_{k-1} не изменились, «цифра» a_k стала равной 0, а «цифры» a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_m приняли те значения, которые ему желательны (ибо все числа, удовлетворяющие этим условиям, меньше a и, следовательно, могут быть получены вычитанием из a некоторого числа). В частности, играющий может добиться, чтобы и все суммы

$$a_{k+1}+b_{k+1}+c_{k+1},\ a_{k+2}+b_{k+2}+c_{k+2},\ \ldots,\ a_m+b_m+c_m$$

стали четными. Второй играющий своим очередным ходом обязательно изменит четность хотя бы одной из «цифр» $a_0, a_1, \ldots, a_m$ или хотя бы одной из «цифр» $b_0, b_1, \ldots, b_m$, или хотя бы одной из «цифр» $c_0, c_1, \ldots, c_m$ и, следовательно, обязательно приведет игру снова к такому положению, при котором хотя бы одна из сумм

$$a_0+b_0+c_0,\ a_1+b_1+c_1,\ \ldots,\ a_m+b_m+c_m$$

нечетна. Первый может далее снова добиться того, чтобы все эти суммы стали четными; тогда второй опять будет вынужден сделать хотя бы одну из этих сумм нечетной и т. д. Количество спичек во всех трех кучках будет при этом все время уменьшаться; следовательно, когда-нибудь все спички будут разобраны. Но так как после каждого хода второго хотя бы одна из сумм

$$a_0+b_0+c_0,\ a_1+b_1+c_1,\ \ldots,\ a_m+b_m+c_m$$

будет оставаться нечетной, а после каждого хода первого все эти суммы будут становиться четными, то ясно, что совсем не останется спичек (т. е. a, b и c станут равными 0, 0 и 0) после хода первого.

Если в начальном положении все суммы

$$a_0+b_0+c_0,\ a_1+b_1+c_1,\ \ldots,\ a_m+b_m+c_m$$

четны, то это положение невыгодно для начинающего; ясно, что если только второй не сделает ошибки, то начинающий здесь должен проиграть.

Примечание. Отметим, что игра представляет большие преимущества для начинающего: проигрышные положения для него очевидно, являются в некотором смысле исключительными (их гораздо меньше, чем выигрышных положений, особенно если числа a, b и c велики), так что при правильной игре и выборе чисел a, b и c наудачу начинающий будет выигрывать значительно чаще, чем проигрывать.

Заметим еще, что все приведенные здесь рассуждения совершенно не зависят от того, что число кучек равно 3: и сама задача и приведенное здесь решение ее полностью сохраняют смысл при любом числе кучек.

Вместо использования двоичной системы счисления при решении этой задачи можно также воспользоваться четверичной, восьмиричной и т. д. системами счисления. Сформулируем без доказательства результаты, получаемые при использовании четверичной системы счисления. Пусть числа a, b и c записаны в четверичной системе:

$$a = a_0^* 4^m + a_1^* 4^{m-1} + \ldots + a_{m-1}^* 4 + a_m^*,$$
$$b = b_0^* 4^m + b_1^* 4^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^* 4 + b_m^*,$$
$$c = c_0^* 4^m + c_1^* 4^{m-1} + \ldots + c_{m-1}^* 4 + c_m^*.$$

В таком случае начальное положение является проигрышным для начинающего, если все тройки «цифр»

$$(a_0^*, b_0^*, c_0^*), \quad (a_1^*, b_1^*, c_1^*), \quad \ldots, \quad (a_m^*, b_m^*, c_m^*)$$

(«цифры» здесь могут принимать значения 0, 1, 2 и 3) имеют вид (0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 3, 3) или (1, 1, 3). Если же это не так, то начинающий может выиграть; для этого ему надо только при каждом своем ходе следить, чтобы после этого хода все рассматриваемые тройки «цифр» приняли указанный вид.

129. Пусть числа спичек в первой и во второй кучке равны a и b. Вместо того чтобы искать все положения, в которых начинающий выигрывает, мы определим все положения, проигрышные для начинающего: опыт предыдущей задачи показывает, что таких положений бывает много меньше, чем положений, выигрышных для начинающего, и, следовательно, найти их все будет проще.

Легко найти первое проигрышное положение — это будет положение, определяемое числами $a = 1$, $b = 2$; здесь после каждого хода начинающего его противник следующим ходом заканчивает игру с выигрышем. Все остальные пары a, b, в которых одно из чисел равно 1 или 2 или же $b - a = 1$, выигрышны для начинающего: начинающий может в этом случае одним ходом привести игру к положению 1, 2.

Следующей проигрышной парой является пара 3, 5; здесь после каждого хода начинающего его противник или сразу выигрывает или же сводит игру к положению 1, 2. Следовательно, все остальные положения a, b, где одно из чисел равно 3 или 5 или же $b - a = 2$, выигрышны для начинающего.

Точно так же находится следующая проигрышная для начинающего пара — пара 4, 7; затем идет пара 6, 10; пара 8, 13; пара 9, 15 и т. д. Такую таблицу проигрышных для начинающего пар нетрудно последовательно продолжить довольно далеко. Однако подметить общую закономерность в этой таблице очень не легко. Мы здесь для нахождения такой закономерности воспользуемся специальной и весьма своеобразной «обобщенной системой счисления», а именно разложением чисел по членам ряда Фибоначчи.

Определение фибоначчиевой системы счисления дано в указании к настоящей задаче. Из равенства $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ следует, что в этой системе счисления

1° все «цифры» q_k произвольного числа a равны 1 или 0 (как и в двоичной системе счисления), ибо здесь $2u_k > u_{k+1}$ при любом k и, следовательно, частное a_k от деления u_{k+1} на u_k меньше 2;

2° если «цифра» q_k равна 1, то соответствующий остаток r_{n-k+1} меньше u_{k-1} ($r_{n-k} = u_k + r_{n-k+1}$, $r_{n-k} < u_{k+1}$, $r_{n-k+1} = r_{n-k} - u_k < u_{k+1} - u_k = u_{k-1}$) и, следовательно, «цифра» q_{k-1}, равная частному от деления r_{n-k+1} на u_{k-1}, есть нуль.

Таким образом, любое целое число N однозначно записывается в виде

$$N = q_n u_n + q_{n-1}u_{n-1} + q_{n-2}u_{n-2} + \ldots + q_1 u_1$$

(разложение числа N по фибоначчиевой системе счисления), где все «цифры» q_k равны либо 1, либо 0 и между каждыми двумя единицами стоит по крайней мере один нуль. Разложение числа N по фибоначчиевой системе счисления мы будем записывать в виде

$$N = «q_n q_{n-1} q_{n-2} \ldots q_1».$$

Так, например,

$1 = u_1 = «1»$, $2 = u_2 = «10»$, $3 = u_3 = «100»$,
$4 = u_3 + u_1 = «101»$, $5 = u_4 = «1000»$, $6 = u_4 + u_1 = «1001»$,
$7 = u_4 + u_2 = «1010»$, $8 = u_5 = «10\,000»$,
$9 = u_5 + u_1 = «10\,001»$, $10 = u_5 + u_2 = «10\,010»$,
$11 = u_5 + u_3 = «10\,100»$, $12 = u_5 + u_3 + u_1 = «10\,101»$, ...

Запишем теперь в фибоначчиевой системе счисления найденные выше проигрышные для начинающего пары a, b:

1) «1», «10»;
2) «100», «1000»;
3) «101», «1010»;
4) «1001», «10010»;
5) «10000», «100000»;
6) «10001», «100010»,...

Здесь общий закон легко подмечается: во всех выписанных парах первое число оканчивается четным числом нулей (напомним, что 0 есть число четное), а второе получается из первого приписыванием в конце еще одного нуля (и, следовательно, оканчивается нечетным числом нулей).

Будем называть пару чисел такую, что в фибоначчиевой системе счисления меньшее из этих чисел оканчивается четным числом нулей, а большее получается из меньшего приписыванием еще одного нуля в конце, особой парой.

Отметим, что из самого определения особых пар вытекает, что каждое целое положительное число d входит в одну (и притом в единственную) особую пару: если d в фибоначчиевой системе счисления оканчивается четным числом нулей, то второе число той же пары получается из d приписыванием одного нуля в конце, а если d оканчивается в фибоначчиевой системе счисления нечетным числом нулей, то второе число получается из d отбрасыванием последнего нуля.

Рассмотрим теперь ряд разностей $m-n$ чисел особых пар m, n $(m>n)$. Покажем, что и в этот ряд чисел входит каждое целое положительное число d и притом единственный раз. Действительно, если

$$d= «p_l p_{l-1}\ldots p_1» = p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \ldots + p_1 u_1$$

оканчивается нечетным числом нулей, то для особой пары

$$\left.\begin{aligned} n &= «p_l p_{l-1}\ldots p_1 0» = p_l u_{l+1} + p_{l-1} u_l + \ldots + p_1 u_2, \\ m &= «p_l p_{l-1}\ldots p_1 00» = p_l u_{l+2} + p_{l-1} u_{l+1} + \ldots + p_1 u_3 \end{aligned}\right\} (*)$$

имеем

$$\begin{aligned} m-n = p_l(u_{l+2}-u_{l+1}) + p_{l-1}(u_{l+1}-u_l) + \ldots + p_1(u_3-u_2) = \\ = p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \ldots + p_1 u_1 = d. \end{aligned}$$

Если же $p_1 = p_2 = \ldots = p_{2m} = 0$, $p_{2m+1} = 1$, т. е. число d

оканчивается четным числом нулей, то для особой пары

$$\left.\begin{aligned} n &= «p_l p_{l-1} \ldots p_{2m+2}\underbrace{0101\ldots01}_{m+1 \text{ раз } 01}» = p_l u_{l+1} + p_{l-1} u_l + \ldots \\ &\qquad \ldots + p_{2m+2} u_{2m+3} + (u_{2m+1} + \ldots + u_3 + u_1), \\ m &= «p_l p_{l-1} \ldots p_{2m+2}\underbrace{0101\ldots010}_{m+1 \text{ раз } 01}» = p_l u_{l+2} + p_{l-1} u_{l+1} + \ldots \\ &\qquad \ldots + p_{2m+2} u_{2m+4} + (u_{2m+2} + \ldots + u_4 + u_2) \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

имеем

$$\begin{aligned} m - n &= p_l (u_{l+2} - u_{l+1}) + p_{l-1}(u_{l+1} - u_l) + \ldots \\ &\quad \ldots + p_{2m+2}(u_{2m+4} - u_{2m+3}) + (u_{2m+2} - u_{2m+1}) + \ldots \\ &\quad \ldots + (u_4 - u_3) + (u_2 - u_1) = \\ &= p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \ldots + p_{2m+2} u_{2m+2} + u_{2m} + \ldots + u_2 + u_0 = \\ &= p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \ldots + p_{2m+2} u_{2m+2} + u_{2m+1} = d, \end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned} u_{2m} + \ldots + u_4 + u_2 + u_0 &= u_{2m} + \ldots + u_4 + (u_2 + u_1) = \\ &= u_{2m} + \ldots + u_6 + (u_4 + u_3) = \\ &= u_{2m} + \ldots + (u_6 + u_5) = \ldots = (u_{2m} + u_{2m-1}) = u_{2m+1}. \end{aligned}$$

Обратно, по особым парам (*) или (**) однозначно определяется число $m - n = d = «p_l p_{l-1} \ldots p_1»$ [формулы (*) отвечают тому случаю, когда n оканчивается нулем, а формулы (**) — случаю, когда n оканчивается единицей и в записи этого числа два нуля подряд встречаются впервые на $(2m+2)$-м и $(2m+3)$-м местах [1]]; при этом, если для двух особых пар (m, n) и (m_1, n_1) имеем $n_1 > n$ (а следовательно, и $m_1 > m$), то

$$d_1 = m_1 - n_1 > m - n = d.$$

Докажем теперь, что если начальная пара a, b не является особой, то начинающий может выиграть, а если она особая, то начинающий при правильной игре противника должен проиграть. Доказательство этого мы проведем в два этапа.

А. Докажем, что *если начальная пара a, b $(a < b)$ не является особой, то начинающий может сразу* (т. е. одним ходом) *выиграть или свести игру к положению, в котором пара a, b уже является особой.*

---

[1]) $p_{2m+2} = 0$, ибо иначе в записи числа d по фибоначчиевой системе счисления два раза подряд встречалась бы «цифра» 1, что невозможно (см. свойство 2° на стр. 421).

Если числа a и b равны или одно из них равно нулю, то начинающий может сразу выиграть, забрав все спички. В противном случае рассмотрим особую пару a, p и особую пару m, n, такую, что $m-n=b-a$ (пары a, p и m, n существуют по доказанному выше). Если $p<b$, то мы можем одним ходом перейти от пары a, b к особой паре a, p. Если же $p>b$, то

$$p-a>b-a=m-n;$$

поэтому особая пара p, a «больше» пары m, n, т. е. $p>m$, $a>n$. Но раз

$$b-a=m-n \text{ и } a>n,$$

то

$$b>m, \quad n=a-(a-n), \quad b=b-(b-m)=b-(a-n)$$

и, значит, мы можем одним ходом перейти от пары a, b к особой паре m, n.

Б. Докажем, что *если в начальном положении пара a, b является особой, то после любого хода начинающего она перестанет быть особой.*

Действительно, если начинающий возьмет какое-то число спичек лишь из одной из двух кучек, то пара перестанет быть особой, так как в двух различных особых парах не может участвовать одно и то же число. Если же начинающий возьмет поровну спичек из каждой кучки, то разность $b-a$ не изменится, и пара перестанет быть особой, так как никакие две особые пары не имеют одной и той же разности чисел.

Теперь уже ясно, что *если a, b не есть особая пара, то начинающий всегда может выиграть, а если a, b — особая пара, то он должен проиграть* (конечно, если его противник не сделает ошибки). Действительно, если a, b не есть особая пара, то начинающий может или сразу выиграть, или добиться того, чтобы пара a, b стала особой; после этого противник его опять должен будет создать положение, в котором пара a, b не является особой (но с меньшими числами a и b, чем вначале), и начинающий снова может сделать пару a, b особой и т. д. Так как числа a, b все время уменьшаются, то начинающий или выиграет еще до этого или же сведет игру к наименьшей особой паре 1, 2, после чего он выигрывает в один ход при любом ходе противника. Если же пара a, b особая, то начинающий вынужден перевести игру в положение, где a, b не есть особая пара; после этого его противник может придерживаться описанной тактики и выиграть. Поскольку наши рассуждения содержат также и указание правильного метода игры, то тем самым задача полностью решена.

Примечание. Основную роль во всем рассуждении играло следующее свойство чисел, составляющих особые пары: каждое целое положительное число 1, 2, 3, ..., n, ... единственный раз входит в состав особой пары и единственный раз является разностью двух чисел особой пары. Это свойство позволяет без труда выписывать последовательно особые пары

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_n, b_n), \ldots;$$

надо лишь принять за a_1 число 1 и затем каждый раз считать, что $b_k = a_k + k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), а a_{k+1} есть наименьшее целое положительное число, не фигурирующее еще среди чисел a_1, b_1; a_2, b_2; ... ...; a_k, b_k:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	...
$b_n = a_n + n$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	...

Переход к фибоначчиевой системе счисления нужен лишь для того, чтобы определить, является ли наперед заданная пара a, b особой или нет, и сформулировать правила беспроигрышной игры.

Отметим еще, что указанное свойство чисел особых пар позволяет также выписать формулы для чисел a_n, b_n (в зависимости от числа n). Для того чтобы вывести эти формулы, докажем, что *если α и β — иррациональные числа, связанные зависимостью*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

то каждое целое положительное число встречается среди чисел

$$a_n = [\alpha n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$b_n = [\beta n], \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и притом единственный раз (здесь прямые скобки — знак целой части числа; см. выше стр. 13). Для доказательства заметим, что $a_n=[\alpha n]<N$, если $n=1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{N}{\alpha}\right]$, и $b_n=[\beta n]<N$, если $n=1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{N}{\beta}\right]$; таким образом, существует всего

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right]+\left[\frac{N}{\beta}\right]$$

чисел a_n и b_n, меньших N. Но так как $\frac{N}{\alpha}$ и $\frac{N}{\beta}$ — иррациональные числа, такие, что

$$\frac{N}{\alpha}+\frac{N}{\beta}=N\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=N,$$

то

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right]+\left[\frac{N}{\beta}\right]=N-1$$

(ибо $\left[\frac{N}{\alpha}\right]=\frac{N}{\alpha}-\varepsilon_1$, $\left[\frac{N}{\beta}\right]=\frac{N}{\beta}-\varepsilon_2$, где $0<\varepsilon_1<1$, $0<\varepsilon_2<1$ и, следовательно, целое число $\left[\frac{N}{\alpha}\right]+\left[\frac{N}{\beta}\right]=\left(\frac{N}{\alpha}-\varepsilon_1\right)+\left(\frac{N}{\beta}-\varepsilon_2\right)=$ $=N-\varepsilon_1-\varepsilon_2$ заключается между N и $N-2$). Итак, существует ровно $N-1$ целых чисел a_n и b_n, меньших N, т. е. 0 таких чисел, меньших 1; одно такое число, меньшее 2 (число 1); два таких числа, меньших 3 (числа 1 и 2); три таких числа, меньших 4 (числа 1, 2 и 3), и т. д.

Для того чтобы прийти к числам наших особых пар, надо еще, чтобы было

$$b_n-a_n=[\beta n]-[\alpha n]=n.$$

Но для этого достаточно потребовать, чтобы было $\beta-\alpha=1$, $\beta=\alpha+1$ (ибо $[(\alpha+1)n]-[\alpha n]=[\alpha n+n]-[\alpha n]=n$). Таким образом, имеем

$$\beta=\alpha+1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}=1,$$

откуда

$$\alpha^2-\alpha-1=0, \quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

и окончательно

$$a_n=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right], \quad b_n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]. \tag{*}$$

С формулами (*) связано следующее любопытное решение нашей задачи. Введем в рассмотрение иррациональные числа

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618 \text{ и } \gamma=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}382$$

и условимся обозначать через $[x]$ целую и через $\{x\}$ дробную части

числа x, так что
$$x = [x] + \{x\},$$
где $[x]$ целое, $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Пусть начальное положение определяется парой чисел a, b, где $b > a$. В таком случае, если в начальном положении
$$\{a\alpha\} > \gamma \text{ и } b = [a\alpha] + 1,$$
то это положение проигрышное для начинающего; во всех остальных случаях начинающий может выиграть. Если в начальном положении
$$\{a\alpha\} < \gamma,$$
то выигрышным ходом будет переход от пары a, b к паре
$$a,\ [a\alpha] - a.$$
Если же $\{a\alpha\} > \gamma$ и $b > [a\alpha] + 1$, то выигрышным ходом является переход от a, b к паре
$$a,\ [a\alpha] + 1,$$
а если
$$\{a\alpha\} > \gamma,\ b < [a\alpha] + 1 \text{ и } b - a = n,$$
то выигрышным будет переход от a, b к паре
$$[n\alpha],\ [n\alpha] + n.$$

Доказательство справедливости этих правил попытайтесь вывести самостоятельно из формул (*) или из приведенного выше решения задачи (при этом очень четко выявляется связь ряда Фибоначчи с иррациональным числом $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, по поводу которой см., например, книги Н. Н. Воробьева, Числа Фибоначчи, М.— Л., Гостехиздат, 1951, Е. Б. Дынкина и В. А. Успенского, Математические беседы, М.— Л., Гостехиздат, 1952 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 6), а также книжку А. И. Маркушевича, Возвратные последовательности, М. — Л., Гостехиздат, 1950. Если же не удастся самостоятельно получить эти правила, то можно прочесть их доказательство в статье И. В. Арнольда «Об одном свойстве числа $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$», напечатанной в журнале «Математическое просвещение», вып. 8, 1936, стр. 16—24.

130. Имеем (см., например, ниже задачу 138б)):
$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2 \cos^{n-2}\alpha \sin^2\alpha + C_n^4 \cos^{n-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots$$

Положим теперь, что
$$\alpha = \arccos x.$$
В таком случае
$$\cos\alpha = x, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - x^2}$$

и, следовательно,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) =$$
$$= x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots,$$

т. е., действительно, $T_n(x)$ есть многочлен степени n. Раскрывая скобки в полученном выражении для $T_n(x)$, мы убедимся, что коэффициент этого многочлена при x^n будет равен

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots,$$

т. е. 2^{n-1} (см. задачу 56а)).

Найдем теперь корни уравнения n-й степени

$$T_n(x) = 0.$$

Так как $\cos\varphi = 0$ только в том случае, если $\varphi = \frac{2k-1}{2}\pi$, то

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0,$$

если

$$n \arccos x = \frac{2k-1}{2}\pi, \quad x = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Придавая k значения $1, 2, 3, \ldots, n$, мы найдем n корней нашего уравнения:

$$x_1 = \cos\frac{1}{2n}\pi, \quad x_2 = \cos\frac{3}{2n}\pi, \quad \ldots, \quad x_n = \cos\frac{2n-1}{2n}\pi.$$

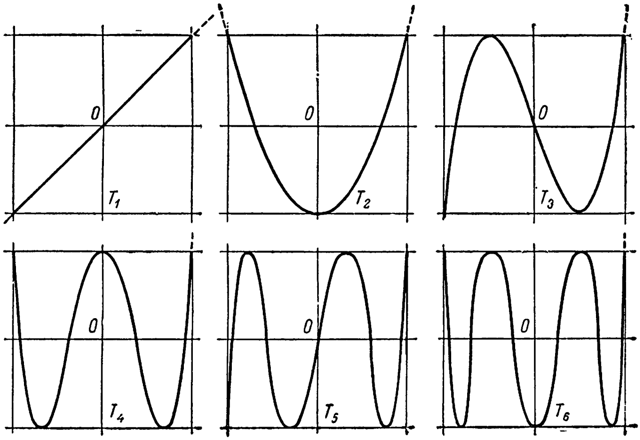
Далее очевидно, что при x, заключенном между -1 и $+1$, $-1 \leqslant \cos(n \arccos x) \leqslant +1$ (ибо $-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant +1$ при любом φ). Нетрудно указать значения x, при которых многочлен $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ принимает значения $+1$ и -1. Действительно, $\cos\varphi = \pm 1$ только в том случае, если $\varphi = k\pi$; отсюда получаем, что $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \pm 1$, если

$$n \arccos x = k\pi, \quad x = \cos\frac{k\pi}{n}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &T_n(\cos 0) = T_n(1) = 1, \quad T_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = -1, \\ &T_n\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) = 1, \quad T_n\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right) = -1, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Важно отметить, что на отрезке от -1 до $+1$ наибольшие и наименьшие значения многочлена $T_n(x)$ чередуются, т. е. в точке $x=1$ значение этого многочлена равно $+1$, затем оно убывает до -1 $\left(\text{в точке } x=\cos\frac{\pi}{n}\right)$, затем снова растет до $+1$ $\left(\text{в точке } x=\cos\frac{2\pi}{n}\right)$, затем снова убывает до -1 $\left(\text{в точке } x=\cos\frac{3\pi}{n}\right)$ и т. д. (см. черт. 129, на



Черт. 129.

котором изображены первые шесть многочленов Чебышева). На этом обстоятельстве основано решение нижеследующей задачи 132.

131. Легко видеть, что многочлен

$$P(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

принимает наименьшее значение $q-\frac{p^2}{4}$ при $x=-\frac{p}{2}$. Рассмотрим теперь отдельно два случая.

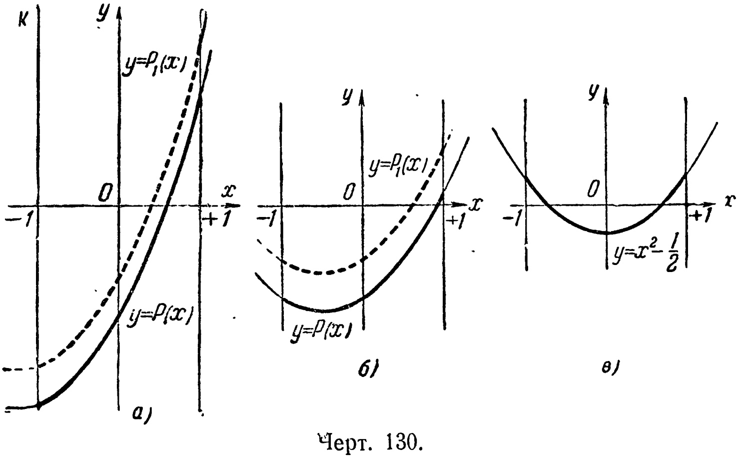
1°. $\left|-\frac{p}{2}\right|\geqslant 1$ (черт. 130, *а*). Пусть наш многочлен принимает при $x=1$ значение $P(1)=a$, а при $x=-1$ — значение $P(-1)=b$; уклонение от нуля многочлена $P(x)$, очевидно, равно большему из чисел $|a|$ и $|b|$. Рассмотрим теперь многочлен

$$P_1(x) = x^2 + px + q - \frac{a+b}{2} = x^2 + px + q_1;$$

для этого многочлена

$$P_1(1) = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2};\ P_1(-1) = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2},$$

т. е. $P_1(1) = -P_1(-1)$. Легко видеть, что уклонение многочлена $P_1(x)$ от нуля не больше, чем уклонение первоначального многочлена $P(x)$ (график многочлена $P_1(x)$ получается из графика $P(x)$ параллельным перенесением в направлении оси Oy на такое расстояние, чтобы ось Ox была равноудалена от концов кривой, отвечающих значениям $x = +1$ и $x = -1$; см. черт. 130, *а*, где график многочлена $P_1(x)$



Черт. 130.

изображен пунктиром). Таким образом, уклонение $P(x)$ от нуля не меньше, чем уклонение $P_1(x)$, равное

$$\frac{|P_1(1) - P_1(-1)|}{2} = \frac{|(1+p+q_1) - (1-p+q_1)|}{2} = |p|.$$

А так как мы предположили, что $\left|\frac{p}{2}\right| \geqslant 1$, то уклонение не меньше 2.

2°. $\left|-\frac{p}{2}\right|<1$ (черт. 130, *б*). Предположим, что точка $x=-\frac{p}{2}$ находится в левой половине отрезка от $+1$ до -1; $-1<-\frac{p}{2}\leqslant 0$, $0\leqslant\frac{p}{2}<1$ $\left(\text{если бы было } 0\leqslant-\frac{p}{2}<1,\right.$ рассуждение почти не изменилось бы$\left.\right)$. В таком случае, очевидно,

$$\left|P(1)-P\left(-\frac{p}{2}\right)\right|\geqslant\left|P(-1)-P\left(-\frac{p}{2}\right)\right|$$

(см. черт. 130, *б*). Аналогично случаю 1° заменим наш многочлен новым многочленом

$$P_1(x)=x^2+px+q_1,$$

для которого $P_1\left(-\frac{p}{2}\right)=-P_1(1)$ (перенесем график многочлена $P(x)$ параллельно оси Oy на такое расстояние, чтобы ось Ox была равноудалена от самой нижней точки кривой и конца, отвечающего $x=1$; см. черт. 130, *б*), при этом уклонение многочлена только уменьшится. Итак, уклонение многочлена $P(x)$ не меньше чем уклонение $P_1(x)$, равное

$$\frac{\left|P_1(1)-P_1\left(-\frac{p}{2}\right)\right|}{2}=\frac{\left|\left(1+p+q_1\right)-\left(\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q_1\right)\right|}{2}=$$

$$=\frac{\left|\frac{p^2}{4}+p+1\right|}{2}=\frac{\left|\left(\frac{p}{2}+1\right)^2\right|}{2}.$$

Так как $0\leqslant\frac{p}{2}<1$, то уклонение от нуля будет иметь наименьшее значение $\frac{1}{2}$ при $p=0$; при этом если $P_1\left(-\frac{p}{2}\right)=$ $=-P_1(1)$, то $q_1=-\frac{1}{2}$.

Окончательно заключаем, что наименьшее уклонение от нуля на отрезке $-1\leqslant x\leqslant+1$ будет иметь многочлен

$$P_0(x)=x^2-\frac{1}{2}$$

(черт. 130, *в*); его уклонение равно $\frac{1}{2}$.

132. Предположим, что на отрезке от -1 до $+1$ уклонение некоторого многочлена n-й степени

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

от нуля меньше $\frac{1}{2^{n-1}}$, т. е. при $-1 \leqslant x \leqslant +1$

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Другими словами, мы предполагаем, что в рассматриваемых пределах

$$P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} < 0, \quad P_n(x) + \frac{1}{2^{n-1}} > 0.$$

Покажем, что это невозможно.

Рассмотрим многочлен

$$R(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Так как коэффициенты при старших членах многочленов $P_n(x)$ и $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ равны 1, то эти старшие члены при вычитании сокращаются и, следовательно, степень многочлена $R(x)$ не выше $n-1$.

Из формул (*) решения задачи 130 (см. стр. 428) следует:

$$R(1) = P_n(1) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(1) < 0,$$
$$R\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = P_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) > 0,$$
$$R\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) = P_n\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) < 0,$$
$$R\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right) = P_n\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right) > 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

т. е. при $x = 1$, $\cos\frac{2\pi}{n}$, $\cos\frac{4\pi}{n}$, ... многочлен $R(x)$ является отрицательным, а при $x = \cos\frac{\pi}{n}$, $\cos\frac{3\pi}{n}$, ... — положительным. Следовательно, кривая, изображающая график этого многочлена, при $x = 1$ расположена снизу от оси абсцисс, а при $x = \cos\frac{\pi}{n}$ — сверху от оси абсцисс. Отсюда следует, что где-то между $x = 1$ и $x = \cos\frac{\pi}{n}$ эта кривая пересекает ось абсцисс, т. е. где-то между $x=1$ и $x=\cos\frac{\pi}{n}$ есть такое значение x, что $R(x)$ равно 0 — корень уравнения $R(x)=0$. Точно так же показывается, что уравнение $R(x)=0$ имеет корень где-то между $\cos\frac{\pi}{n}$ и $\cos\frac{2\pi}{n}$, между $\cos\frac{2\pi}{n}$ и $\cos\frac{3\pi}{n}$, между $\cos\frac{3\pi}{n}$ и $\cos\frac{4\pi}{n}, \ldots$, наконец, между $\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$ и $\cos\pi=-1$.

Таким образом, мы заключаем, что уравнение $R(x)=0$ имеет не меньше n корней. Но степень этого уравнения не больше $n-1$, а уравнение $(n-1)$-й степени не может иметь более $n-1$ корней[1]). Полученное противоречие и доказывает, что многочлена n-й степени $P_n(x)$, уклонение которого от нуля меньше $\frac{1}{2^{n-1}}$, не может существовать.

Несколько уточнив эти рассуждения, мы можем показать также, что существует единственный многочлен $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ n-й степени со старшим коэффициентом 1, уклонение которого от нуля на отрезке от -1 до $+1$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$. Действительно, пусть $P_n(x)$ — другой такой многочлен. Рассмотрим, как прежде, разность

$$R(x)=P_n(x)-\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

— многочлен, степень которого не выше $n-1$. В точках $x=1$, $\cos\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{4\pi}{n}, \ldots$ значения $R(x)$ во всяком случае неположительны, а в точках $\cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{3\pi}{n}, \cos\frac{5\pi}{n}, \ldots$ — неотрицательны. Отсюда следует, что в каждом из промежутков

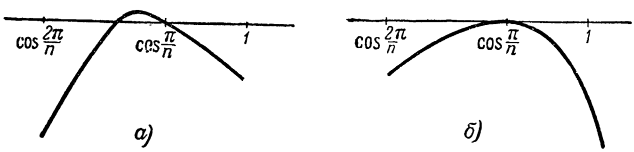
$$\left(1, \cos\frac{\pi}{n}\right), \quad \left(\cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}\right),$$
$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{3\pi}{n}\right), \ \ldots, \ \left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}, -1\right)$$

(может быть на границах этих промежутков!) уравнение $R(x)=0$ имеет хотя бы один корень. Покажем, что в таком случае общее число корней уравнения $R(x)=0$ не меньше n.

[1]) Если уравнение $(n-1)$-й степени $R(x)=0$ имеет n корней: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, то в силу теоремы Безу многочлен $R(x)$ степени $n-1$ должен делиться на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ степени n. Но это, очевидно, невозможно.

Действительно, так как число наших промежутков равно n, то число корней могло бы быть меньше n только в том случае, если в двух соседних промежутках (включая их границы) имеется единственный корень (который в этом случае, очевидно, должен совпадать с общей границей этих промежутков) или в трех соседних промежутках (включая их концы) имеются только два корня (которые должны совпадать с общими границами промежутков), или в четырех соседних промежутках (включая их концы) имеются только три корня (совпадающих с общими границами промежутков) и т. д.

Рассмотрим первый случай. Пусть, например, на отрезке от 1 до $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ (вместе с концами) уравнение $R(x)=0$ имеет единственный корень $x=\cos\frac{\pi}{n}$. В точках $x=1$ и $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ значения $R(x)$, как мы знаем, неположительны; так как мы предполагаем, что они не равны нулю, то эти значения должны быть отрицательны. Если бы кривая $y=R(x)$



Черт. 131.

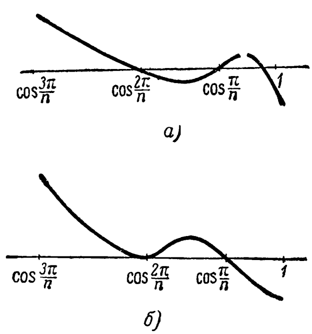
в точке $x=\cos\frac{\pi}{n}$ пересекала ось Ox (черт. 131, *а*), то из того, что в обеих точках $x=1$ и $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ эта кривая расположена под осью Ox, следовало бы, что она пересекает ось Ox еще в одной точке, кроме $x=\cos\frac{\pi}{n}$; но это противоречит нашему предположению о том, что кроме $x=\cos\frac{\pi}{n}$ уравнение $R(x)=0$ между $x=1$ и $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ не имеет корней. Следовательно, в точке $x=\cos\frac{\pi}{n}$ кривая $y=R(x)$ касается оси Ox (черт. 131, *б*). Но в таком случае, как нетрудно видеть, корень $x=\cos\frac{\pi}{n}$ уравнения $R(x)=0$ должен быть двойным.

Действительно, предположим, что этот корень не является двойным. В таком случае уравнение $R(x)=0$ можно представить в виде

$$\left(x-\cos\frac{\pi}{n}\right)R_1(x)=0,$$

где уравнение $R_1(x)=0$ уже не имеет корня $x=\cos\frac{\pi}{n}$. Но это значит, что многочлен $R_1(x)$ в точке $x=\cos\frac{\pi}{n}$ не равен нулю и, следовательно, вблизи этой точки он не меняет знак. А в таком случае многочлен $R(x)=\left(x-\cos\frac{\pi}{n}\right)R_1(x)$ в точке $x=\cos\frac{\pi}{n}$ меняет знак (многочлен $R_1(x)$ сохраняет знак, а двучлен $x-\cos\frac{\pi}{n}$ при переходе через значение $x=\cos\frac{\pi}{n}$ меняет знак) и, следовательно, график этого многочлена в точке $x=\cos\frac{\pi}{n}$ *пересекает* ось Ox, а не касается ее.

Таким образом, если при $x=1$ и $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ многочлен $R(x)$ является отрицательным, а при $x=\cos\frac{\pi}{n}$ — не отрицательным, то между $x=1$ и $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ уравнение $R(x)=0$ обязательно имеет *не меньше двух* (различных или одинаковых!) корней.



Черт. 132.

Точно так же показывается, что невозможны остальные перечисленные выше случаи. Пусть, например, уравнение $R(x)=0$ на отрезке от $x=1$ до $x=\cos\frac{3\pi}{n}$ (вместе с концами) имеет только два корня: $x=\cos\frac{\pi}{n}$ и $x=\cos\frac{2\pi}{n}$. В точке $x=1$ многочлен $R(x)$ должен быть отрицательным, а в точке $x=\cos\frac{3\pi}{n}$ положительным. Но если бы кривая $y=R(x)$ в обеих точках $x=\cos\frac{\pi}{n}$ и $x=\cos\frac{3\pi}{n}$ *пересекала* ось Ox (черт. 132, *а*), то она должна была бы пересечь ось Ox

еще в одной точке между $x=1$ и $x=\cos\frac{3\pi}{n}$. Если же в других точках эта кривая не пересекает ось Ox, то в одной из двух точек $x=\cos\frac{\pi}{n}$ или $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ она должна касаться оси Ox (черт. 132, *б*), т. е. один из корней $x=\cos\frac{\pi}{n}$ или $x=\cos\frac{2\pi}{n}$ уравнения $R(x)=0$ должен быть двойным.

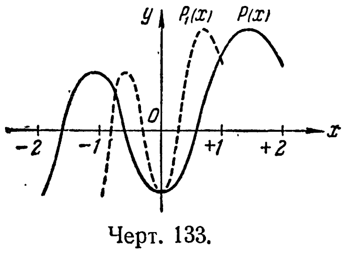
Таким образом, мы видим, что между $x=1$ и $x=\cos\frac{3\pi}{n}$ уравнение $R(x)=0$ должно иметь не менее трех (различных или одинаковых!) корней.

Итак, окончательно мы получаем, что уравнение $R(x)=0$ не выше чем $(n-1)$-й степени имеет не меньше n корней. Так как это невозможно, то не может существовать отличный от $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ многочлен n-й степени со старшим коэффициентом 1, уклонение которого от нуля на отрезке от -1 до $+1$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$.

133. Пусть

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

есть многочлен степени n, уклонение которого от нуля на



Черт. 133.

отрезке от -2 до $+2$ равно δ. Рассмотрим многочлен

$$P_1(x)=P(2x)=$$
$$=(2x)^n+a_1(2x)^{n-1}+a_2(2x)^{n-2}+\ldots+a_{n-1}(2x)+a_n,$$

график которого получается из графика многочлена $P(x)$ равномерным сжатием в два раза к оси Oy (черт. 133). Уклонение многочлена $P_1(x)$ от нуля на отрезке от -1 до

$+1$ равно, очевидно, уклонению δ многочлена $P(x)$ на отрезке от -2 до $+2$. Теперь рассмотрим многочлен

$$\overline{P}(x)=\frac{1}{2^n}P_1(x)=$$
$$=x^n+\frac{1}{2}a_1x^{n-1}+\frac{1}{4}a_2x^{n-2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}x+\frac{1}{2^n}a_n$$

со старшим коэффициентом 1. Уклонение его от нуля равно

$$\overline{\delta}=\frac{1}{2^n}\delta.$$

Но из результата задачи 132 следует, что $\overline{\delta}$ не может быть меньше $\frac{1}{2^{n-1}}$, причем $\overline{\delta}=\frac{1}{2^{n-1}}$ только в том случае, если $\overline{P}(x)$ есть $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$. Таким образом, мы видим, что $\delta=2^n\cdot\overline{\delta}$ не может быть меньше 2, причем $\delta=2$ только в том случае, если

$$P_1(x)=P(2x)=2^n\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=2T_n(x),$$
$$P(x)=2T_n\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos\left(n\arccos\frac{x}{2}\right)$$

(n здесь может быть **каким угодно**).

Примечание. Совершенно так же показывается, что уклонение от нуля многочлена n-й степени со старшим коэффициентом 1

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

на отрезке от a до b (a и b — произвольные числа, $a<b$) не может превосходить $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$ и равно $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$ только в том случае, если

$$P_n(x)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}T_n\left[\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right]=$$
$$=2\left(\frac{b-a}{4}\right)^nT_n\left[\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right].$$

Отсюда, в частности, следует, что для того, чтобы существовали многочлены со старшим коэффициентом 1, которые на всем данном отрезке принимают сколь угодно малые значения (меньше произвольного наперед заданного числа; например, меньше 0,001 или меньше 0,000001), необходимо (и достаточно), чтобы длина отрезка была меньше четырех.

134. Эта задача по формулировке близка к предыдущей, но решается совсем по-другому. Обозначим значения, которые принимает какой-то многочлен

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

в точках $x=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots,\ n$ соответственно через $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$, $P(n)$, и рассмотрим многочлен

$$Q(x)=P(0)\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{(0-1)(0-2)(0-3)\ldots(0-n)}+$$
$$+P(1)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{(1-0)(1-2)(1-3)\ldots(1-n)}+$$
$$+P(2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{(2-0)(2-1)(2-3)\ldots(2-n)}+\ldots$$
$$\ldots+P(n)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{(n-0)(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}=$$
$$=P(0)\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{(-1)^n\cdot n!}+$$
$$+P(1)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot(n-1)!}+$$
$$+P(2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{(-1)^{n-2}\cdot 2!\cdot(n-2)!}+\ldots$$
$$\ldots+P(n)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!}.$$

При $x=0,1,2,\ \ldots,n$ многочлен $Q(x)$ принимает те же значения $P(0), P(1), P(2),\ \ldots,\ P(n)$, что и $P(x)$. Отсюда следует, что $Q(x)$ совпадает с $P(x)$ (иначе разность $Q(x)-P(x)$, которая является многочленом порядка не выше n, обращалась бы в нуль в $n+1$ точках). В частности, коэффициент многочлена $Q(x)$ при x^n равен 1:

$$\frac{P(0)}{(-1)^n\cdot n!}+\frac{P(1)}{(-1)^{n-1}\cdot 1!\cdot(n-1)!}+\frac{P(2)}{(-1)^{n-2}\cdot 2!\cdot(n-2)!}+$$
$$+\frac{P(3)}{(-1)^{n-3}\cdot 3!\cdot(n-3)!}+\ldots+\frac{P(n)}{n!}=1.$$

Обозначим теперь уклонение многочлена $P(x)$ от нуля на системе точек $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,n$ через δ. В таком случае $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $\ldots$, $P(n)$ все по абсолютной величине не превосходят δ и, следовательно, правая часть последнего равенства не превосходит суммы

$$\delta\cdot\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3!(n-3)!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right]=\delta\cdot\frac{2n}{n!}$$

(ибо

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\ldots+\frac{1}{n!}=$$
$$=\frac{1}{n!}[1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+1]=\frac{2^n}{n!};$$

см. задачу 55а)). Следовательно,

$$\delta\cdot\frac{2^n}{n!}\geqslant 1,\quad \delta\geqslant\frac{n!}{2^n}.$$

Из решения задачи легко усмотреть также, что имеется **единственный** многочлен n-й степени со старшим коэффициентом 1, уклонение которого от нуля на системе точек $x=0, 1, 2, \ldots, n$ в точности **равно** $\frac{n!}{2^n}$, а именно, многочлен

$$P(x)=\frac{n!}{2^n}\left\{\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!}+\right.$$
$$+\frac{x(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{1\cdot(n-1)!}+\frac{x(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{2!(n-2)!}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!}\right\},$$

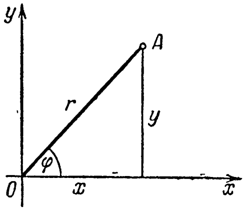
для которого

$$P(n)=-P(n-1)=P(n-2)=$$
$$=-P(n-3)=\ldots=(-1)^nP(0)=\frac{n!}{2^n}.$$

135. Воспользуемся геометрическим изображением комплексных чисел; комплексное число

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

изображается точкой с декартовыми прямоугольными координатами x, y или полярными координатами r, φ (черт. 134).



Черт. 134.

Если точкам A_1, A_2, ..., A_n соответствуют комплексные числа α_1, α_2, ... α_n, а точке M — переменное комплексное число z, то

$$MA_1 = |z - \alpha_1|,$$
$$MA_2 = |z - \alpha_2|,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$MA_n = |z - \alpha_n|.$$

Но так как при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, то

$$MA_1 \cdot MA_2 \dots MA_n = |(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)| = \\ = |z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n|,$$

где $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = P(z)$ — многочлен $(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$ с комплексными, вообще говоря, коэффициентами и корнями α_1, α_2, ..., α_n.

Теперь уже нетрудно усмотреть связь между настоящей задачей и задачей 132 о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. Выберем систему координат на плоскости таким образом, чтобы наш отрезок длины l являлся отрезком оси действительных чисел от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$. В таком случае наша задача может быть переформулирована таким образом: какое наименьшее значение может принимать уклонение от нуля на отрезке от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$ многочлена $P(z)$ степени n со старшим коэффициентом 1 и комплексными, вообще говоря, коэффициентами (здесь *уклонением многочлена от нуля*, как и раньше, мы называем наибольшее значение абсолютной величины $|P(z)|$ многочлена; только в отличие от многочлена с действительными коэффициентами уклонение многочлена с комплексными коэффициентами нельзя изобразить на чертеже, так как такой многочлен принимает, вообще говоря, комплексные значения и поэтому не имеет графика).

Запишем наш многочлен в виде

$$P(z) = P_1(z) + iP_2(z);$$

здесь коэффициентами многочлена $P_1(z)$ являются действительные части коэффициентов $P(z)$, а коэффициентами многочлена $iP_2(z)$ — мнимые части коэффициентов $P(z)$. Отсюда следует, что $P_1(z)$ есть многочлен с действительными коэффициентами степени n со старшим коэффициентом 1; $P_2(z)$ есть многочлен с действительными коэффициентами степени не выше $n-1$. Далее имеем:

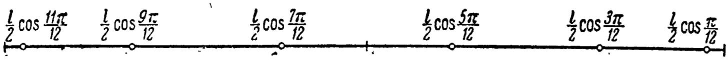
$$|P(z)| = \sqrt{P_1(z)^2 + P_2(z)^2} \geqslant |P_1(z)|;$$

таким образом, абсолютная величина $P(z)$ не превосходит абсолютной величины $P_1(z)$ и, следовательно, уклонение от нуля многочлена $P(z)$ на отрезке от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$ не превосходит уклонения от нуля многочлена $P_1(z)$ с действительными коэффициентами на этом же отрезке. Но в силу результата задачи 133 (см. в особенности примечание к решению этой задачи) уклонение от нуля многочлена $P_1(z)$ на отрезке от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$ не превосходит $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Отсюда следует, что и уклонение от нуля многочлена $P(z)$ с комплексными коэффициентами не превосходит $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$.

Далее, для того чтобы уклонение от нуля многочлена $P(z)$ на отрезке от $-\frac{l}{2}$ до $+\frac{l}{2}$ было в точности равно $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$, необходимо, чтобы многочлен $P_1(z)$ совпадал с многочленом $2\left(\frac{l}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2z}{l}\right)$, а многочлен $P_2(z)$ равнялся нулю во всех тех точках, где абсолютная величина многочлена $P_1(z) = 2\left(\frac{l}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2z}{l}\right)$ принимает наибольшее значение $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Но таких точек имеется $n+1$ (см. решения задач 130, 132); следовательно, многочлен $P_2(z)$ с действительными коэффициентами степени не выше $n-1$ должен обращаться в нуль в $n+1$ точках, откуда следует, что этот многочлен тождественно равен нулю (ср. с решением задачи 132). Таким образом, мы должны иметь:

$$P(z) = 2\left(\frac{l}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2z}{l}\right).$$

Возвращаясь теперь к нашей первоначальной постановке вопроса, мы получаем, что произведение $MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — фиксированные точки, а M пробегает отрезок длины l, заведомо принимает хотя бы один раз значение, не меньшее чем $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Для того чтобы это произведение не принимало никакого значения, большего $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$, необходимо, чтобы точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ были расположены на самом отрезке, причем так, как корни уравнения $T_n\left(\frac{2z}{l}\right)=0$, где прямая, которой принадлежит отрезок, принята за числовую ось, а середина отрезка — за начало отсче-

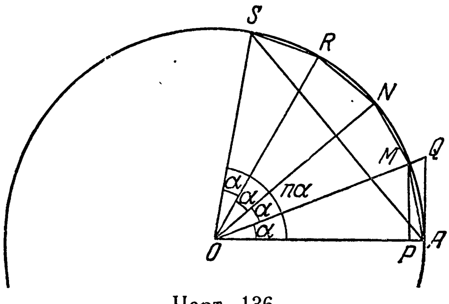


Черт. 135.

та; другими словами, необходимо, чтобы расстояния точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ от середины отрезка были равны

$$\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2n}, \frac{l}{2}\cos\frac{3\pi}{2n}, \frac{l}{2}\cos\frac{5\pi}{2n}, \ldots, \frac{l}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

(черт. 135; см. решение задачи 130).



Черт. 136.

136. а) Имеем (черт. 136)

$$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}OA\cdot MP=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{\text{сект. } OAM}=\frac{1}{2}OA^2\cdot\angle AOM=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\alpha=\frac{1}{2}\alpha,$$

$$S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}OA\cdot AQ=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Из того, что $S_{\triangle OAM} < S_{\text{сект.}\,OAM} < S_{\triangle OAQ}$ и следуют требуемые неравенства.

б) Имеем (черт. 136)

$$\alpha = 2S_{\text{сект.}\,OAM}, \quad \sin\alpha = 2S_{\triangle OAM};$$
$$n\alpha = 2S_{\text{сект.}\,OAS}, \quad \sin n\alpha = 2S_{\triangle\,OAS}.$$

Но, очевидно,

$$\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} = \frac{S_{\triangle\,OAS}}{S_{\text{сект.}\,OAS}} < \frac{S_{\triangle OAM} + S_{\triangle OMN} + \ldots + S_{\triangle ORS}}{S_{\text{сект.}OAM} + S_{\text{сект.}OMN} + \ldots + S_{\text{сект.}ORS}} =$$
$$= \frac{n \cdot S_{\triangle OAM}}{n \cdot S_{\text{сект.}\,OAM}} = \frac{S_{\triangle OAM}}{S_{\text{сект.}OAM}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

что и требовалось доказать.

137. *Умножим наше выражение с конца на* $\sin\frac{\alpha}{2^n}$. *Получим:*

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\sin\frac{\alpha}{2^n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}\right) =$$
$$= \ldots = \frac{1}{2^{n-2}}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\sin\alpha,$$

откуда

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

138. Для вывода формул задач а) и б) достаточно раскрыть скобки в левой части формулы Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

(см. сноску на стр. 210), пользуясь формулой бинома Ньютона, и затем приравнять действительные части и коэффициенты при мнимых частях выражений, стоящих слева и справа.

Для вывода формулы задачи в) следует поделить почленно друг на друга формулы задач а) и б) и затем разделить числитель и знаменатель стоящего справа выражения на $\cos^n\alpha$.

139. а) Формулу задачи 138а) можно переписать в следующем виде:

$$\sin n\alpha = \sin^n \alpha\,(C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1}\alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5}\alpha - \ldots).$$

Пусть теперь $n = 2m+1$ нечетно. Если α равно

$$\frac{\pi}{2m+1} + \frac{2\pi}{2m+1},\ \frac{3\pi}{2m+1},\ \ldots,\ \frac{m\pi}{2m+1},$$

то $\sin(2m+1)\alpha = 0$, а $\sin\alpha \neq 0$; следовательно,

$$C_{2m+1}^1 \operatorname{ctg}^{2m}\alpha - C_{2m+1}^3 \operatorname{ctg}^{2m-2}\alpha + C_{2m+1}^5 \operatorname{ctg}^{2m-4}\alpha - \ldots = 0.$$

Таким образом, мы видим, что уравнение

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \ldots = 0$$

имеет корни $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1}$, $\ldots$, $\operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}$.

б) Формулу задачи 138в) можно также переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} n\alpha} = \frac{C_n^1 \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} - C_n^3 \frac{1}{\operatorname{ctg}^3\alpha} + C_n^5 \frac{1}{\operatorname{ctg}^5\alpha} - \ldots}{1 - C_n^2 \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} + C_n^4 \frac{1}{\operatorname{ctg}^5\alpha} - \ldots}$$

или

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^n\alpha - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2}\alpha + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4}\alpha - \ldots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1}\alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5}\alpha - \ldots}.$$

Пусть теперь n — четное число. Если α равно $\frac{\pi}{4n}$, $\frac{5\pi}{4n}$, $\frac{9\pi}{4n}$, $\ldots$, $\frac{(4n-3)\pi}{4n}$, то $\operatorname{ctg} n\alpha = 1$; следовательно, для этих α

$$\frac{\operatorname{ctg}^n\alpha - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2}\alpha + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4}\alpha - \ldots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1}\alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5}\alpha - \ldots} = 1.$$

Отсюда вытекает, что уравнение

$$x^n - C_n^1 x^{n-1} - C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + C_n^4 x^{n-4} - \ldots = 0 \qquad (*)$$

имеет корни $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}$, $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4n}$, $\ldots$, $\operatorname{ctg}\frac{(4n-3)\pi}{4n}$.

Но

$$\operatorname{ctg}\frac{(4n-3)\pi}{4n}=-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n},\ \operatorname{ctg}\frac{(4n-7)\pi}{4n}=-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \operatorname{ctg}\frac{(2n+1)\pi}{4n}=-\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n};$$

поэтому корни уравнения (*) можно переписать также в виде

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n},\ -\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n},\ \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n},\ \ldots,\ \operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n},\ -\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}.$$

в), г) Формулы задач 138а) и б) для четного $n=2m$ можно переписать в следующем виде:

$$\sin 2m\alpha=\cos\alpha\sin\alpha\,\{C_{2m}^1(1-\sin^2\alpha)^{m-1}-$$
$$-C_{2m}^3(1-\sin^2\alpha)^{m-2}\sin^2\alpha+C_{2m}^5(1-\sin^2\alpha)^{m-3}\sin^4\alpha-\ldots\}$$

и

$$\cos 2m\alpha=(1-\sin^2\alpha)^m-C_{2m}^2(1-\sin^2\alpha)^{m-1}\sin^2\alpha+$$
$$+C_{2m}^4(1-\sin^2\alpha)^{m-2}\alpha\sin^4\alpha-\ldots$$

Отсюда в точности, как и выше, заключаем, что уравнения

$$C_{2m}^1(1-x)^{m-1}-C_{2m}^3(1-x)^{m-2}x+C_{2m}^5(1-x)^{m-3}x^2-\ldots=0$$

и

$$(1-x)^m-C_{2m}^2(1-x)^{m-1}x+C_{2m}^4(1-x)^{m-2}x^2-\ldots=0$$

имеют корни

$$\sin^2\frac{\pi}{2m},\ \sin^2\frac{2\pi}{2m},\ \sin^2\frac{3\pi}{2m},\ \ldots,\ \sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

и соответственно

$$\sin^2\frac{\pi}{4m},\ \sin^2\frac{3\pi}{4m},\ \sin^2\frac{5\pi}{4m},\ \ldots,\ \sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}.$$

140. а) Так как уравнение

$$C_{2m+1}^1x^m-C_{2m+1}^3x^{m-1}+C_{2m+1}^5x^{m-2}-\ldots=0$$

имеет корнями $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1},\quad \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1},\quad \ldots,\ \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}$

(см. задачу 139а)), то многочлен

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \ldots$$

делится на

$$x - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}, \quad x - \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \ \ldots, \ x - \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1},$$

т. е.

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \ldots =$$
$$= A\left(x - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}\right)\left(x - \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}\right) \ldots \left(x - \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1}\right). \quad (*)$$

Раскрывая скобки в правой части последнего равенства и приравнивая коэффициенты при x^m и при x^{m-1} слева и справа, имеем:

$$C_{2m+1}^1 = A,$$
$$C_{2m+1}^3 = A\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1}\right),$$

откуда

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1} =$$
$$= \frac{C_{2m+1}^3}{A} = \frac{C_{2m+1}^3}{C_{2m+1}^1} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

что и требовалось доказать.

б) Так как $\operatorname{cosec}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$, то из равенства задачи а) следует

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{cosec}^2 \frac{m\pi}{2m+1} =$$
$$= \frac{m(2m-1)}{3} + m = \frac{m(2m+2)}{3}.$$

в) Из результата задачи 139б) вытекает, что

$$x^n - C_n^1 x^{n-1} - C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \ldots =$$
$$= \left(x - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}\right)\left(x + \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4n}\right)\left(x - \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4n}\right)\left(x + \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4n}\right) \times \ldots$$
$$\ldots \times \left(x - \operatorname{ctg} \frac{(2n-3)\pi}{4n}\right)\left(x + \operatorname{ctg} \frac{(2n-1)\pi}{4n}\right).$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при x^{n-1} слева и справа, получаем:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots$$
$$\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=C_n^1=n.$$

141. Из решения задач 139в), г) следует, что

$$C_{2m}^1(1-x)^{m-1}-C_{2m}^3(1-x)^{m-2}x+C_{2m}^5(1-x)^{m-3}x^2-\ldots=$$
$$=A\left(x-\sin^2\frac{\pi}{2m}\right)\left(x-\sin^2\frac{2\pi}{2m}\right)\ldots\left(x-\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)$$

и

$$(1-x)^m-C_{2m}^2(1-x)^{m-1}x+C_{2m}^4(1-x)^{m-2}x^2-\ldots=$$
$$=B\left(x-\sin^2\frac{\pi}{4m}\right)\left(x-\sin^2\frac{3\pi}{4m}\right)\ldots\left(x-\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}\right).$$

Приравняв в этих двух равенствах коэффициенты при старших степенях x слева и справа, получим:

$$A=(-1)^{m-1}\{C_{2m}^1+C_{2m}^3+C_{2m}^5+\ldots\},$$
$$B=(-1)^m\{1+C_{2m}^2+C_{2m}^4+\ldots\},$$

откуда (см. задачи 55а), б))

$$(-1)^{m-1}A+(-1)^mB=2^{2m},\qquad (-1)^{m-1}A-(-1)^mB=0,$$

т. е.

$$A=(-1)^{m-1}2^{2m-1},\quad B=(-1)^m2^{2m-1}.$$

Теперь, приравнивая в тех же двух равенствах свободные члены слева и справа, имеем:

$$2m=C_{2m}^1=(-1)^{m-1}A\sin^2\frac{\pi}{2m}\sin^2\frac{2\pi}{2m}\ldots\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m},$$
$$1=(-1)^mB\sin^2\frac{\pi}{4m}\sin^2\frac{3\pi}{4m}\sin^2\frac{5\pi}{4m}\ldots\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m},$$

откуда и вытекают требуемые тождества.

142. а) Перейдем в тождестве задачи 137

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

к пределу при $n\longrightarrow\infty$. Получим:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}\right\}=\sin\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Но так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}=1$ $\left(\text{ибо } \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=1;\right.$ последнее следует из того, что в силу неравенств задачи 136а) $\left.1\leqslant\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}\leqslant\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$, то

$$\sin\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha.$$

Таким образом, получаем:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha \qquad (*)$$

и

$$\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots}.$$

Теперь остается только положить в последнем равенстве

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\quad \sin\alpha=1,\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

и воспользоваться тем, что

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}.$$

б) Положив в тождестве (*) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$, получаем:

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}\ldots=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

143. а) Так как для углов первой четверти $\operatorname{cosec}\alpha>\frac{1}{\alpha}>\operatorname{ctg}\alpha$ (см. задачу 136а)), то из тождеств задач 140а) и б) следует

$$\frac{m(2m-1)}{3}<$$
$$<\left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2<\frac{m(2m+2)}{3},$$

или

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2}{2m+1}\right)<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}<$$
$$<\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right).$$

Но так как крайние члены последнего двойного неравенства при $m\to\infty$ стремятся к $\frac{\pi^2}{6}$, то

$$\lim_{m\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}\right\}=\frac{\pi^2}{6}.$$

б) Найдем сумму квадратов корней уравнения задачи 139а). Приравнивая в тождестве (*) решения задачи 140а) коэффициенты при x^{m-2} слева и справа, мы найдем, что сумма всевозможных попарных произведений корней уравнения равна

$$\frac{C_{2m+1}^5}{A}=\frac{C_{2m+1}^5}{C_{2m+1}^1}=\frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{30}.$$

А так как сумма квадратов каких-либо величин равна квадрату их суммы, уменьшенному на удвоенную сумму всевозможных попарных произведений этих величин, то получаем:

$$\operatorname{ctg}^4 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^4 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^4 \frac{3\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^4 \frac{m\pi}{2m+1} =$$

$$= \frac{m^2(2m-1)^2}{9} - \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{15} =$$

$$= \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-7)}{45}.$$

Далее, так как $\operatorname{cosec}^4 \alpha = (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)^2 = \operatorname{ctg}^4 \alpha + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$, то имеем:

$$\operatorname{cosec}^4 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cosec}^4 \frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{cosec}^4 \frac{m\pi}{2m+1} =$$

$$= \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-7)}{45} + \frac{2m(2m-1)}{3} + m =$$

$$= \frac{8m(m+1)(m^2+m+3)}{45}.$$

Теперь аналогично решению задачи а) получаем следующее двойное неравенство:

$$\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-7)}{45} <$$

$$< \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^4 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^4 + \left(\frac{2m+1}{3\pi}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^4 <$$

$$< \frac{8m(m+1)(m^2+m+3)}{45},$$

или

$$\frac{\pi^4}{90}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2m+1}\right)\left(1 + \frac{3}{2m+1} - \frac{13}{(2m+1)^2}\right) <$$

$$< 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{m^4} < \frac{\pi^4}{90}\left(1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right)\left(1 + \frac{11}{(2m+1)^2}\right),$$

из которого, переходя к пределу при $m \to \infty$, получим:

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Примечание. Точно так же определяя сумму кубов, четвертых степеней и т. д. корней уравнения задачи 139а), можно получить следующий ряд формул:

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945},$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{\pi^8}{9450},$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\ldots=\frac{\pi^{10}}{93\,555},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\ldots=\frac{691\pi^{12}}{638\,512\,875}$$

. . . .

Все эти формулы были впервые получены Л. Эйлером.

144. а) Так как

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}=\sin(\beta-\alpha)\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta,$$

то из тождества задачи 140в) следует

$$\sin\frac{\pi}{2n}\left\{\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4\pi}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{4n}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\operatorname{cosec}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right\}=n,$$

или

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{4n}+\ldots$$
$$\ldots+\operatorname{cosec}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{n}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)$$

$\left(\text{ибо}\ \operatorname{ctg}(\beta-\alpha)=\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}\right)$; следовательно, из того же тождества следует

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}+\frac{n}{2}\right\}=n,$$

или

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{n}{2}.$$

Аналогично решению задачи 143а) получаем двойное неравенство

$$\frac{n}{\sin\frac{\pi}{2n}}>\frac{4n}{\pi}\cdot\frac{4n}{3\pi}+\frac{4n}{5\pi}\cdot\frac{4n}{7\pi}+\ldots+\frac{4n}{(2n-3)\pi}\cdot\frac{4n}{(2n-1)\pi}>\frac{n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{n}{2},$$

или

$$\frac{\pi^2}{8n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}>\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{(2n-3)(2n-1)}>\frac{\pi^2}{8n}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{\pi^2}{16n},$$

или, наконец,

$$\frac{\pi}{4}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}>1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}>\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{\pi}{4n}\right).$$

Так как при $n\to\infty$ крайние члены последнего двойного неравенства стремятся к одному и тому же пределу $\frac{\pi}{4}$ [ибо $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha\right)=1$; ср. с решением задачи 142а)], то получаем:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4},$$

что и требовалось доказать.

б) Найдем сумму квадратов корней уравнения задачи 139б). Аналогично решению задачи 143б) заключаем, что сумма удвоенных произведений корней этого уравнения равна

$-C_n^2=-\frac{n(n-1)}{2}$ и сумма квадратов равна

$$n^2+n(n-1)=n(2n-1).$$

Из тождества

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4n}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}^2\frac{5\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}=n(2n-1)$$

следует

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4n}+\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}^2\frac{5\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}=$$
$$=n(2n-1)+n=2n^2,$$

откуда, аналогично решению задачи 143а), заключаем, что

$$n(2n-1)<$$
$$<\left(\frac{4n}{\pi}\right)^2+\left(\frac{4n}{3\pi}\right)^2+\left(\frac{4n}{5\pi}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4n}{(2n-1)\pi}\right)^2<2n^2,$$

или

$$\frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{1}{2n}\right)<1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{\pi^2}{8}$$

и, следовательно,

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

(Последняя формула равносильна формуле Эйлера: действительно, из формулы Эйлера следует

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.)$$

Примечание. Определяя сумму кубов, четвертых степеней и т. д. корней уравнения задачи 139б), можно получить следующий ряд формул:

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32},$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$$

(эта формула равносильна соотношению задачи 143б)),

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\ldots=\frac{5\pi^5}{1536},$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{960},$$

. . . .

Все эти формулы тоже были впервые выведены Л. Эйлером.

145. Составим следующие два выражения, закон образования которых подсказывается формулой Валлиса:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}} \qquad (*)$$

и

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{6\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{2m\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}. \qquad (**)$$

В силу тождеств задачи 141 выражения (*) и (**) соответственно равны

$$\frac{\frac{m}{2^{2m-2}}}{\frac{1}{2^{2m-1}}}\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}=2m\sin\frac{\pi}{4m}\cos\frac{\pi}{4m}=m\sin\frac{\pi}{2m}$$

и

$$\frac{\frac{m}{2^{2m-2}}}{\frac{1}{2^{m-1}}}\,\frac{\sin\frac{2m\pi}{4m}}{\sin\frac{2\pi}{4m}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{4m}=2m\,\frac{\sin^2\frac{\pi}{4m}}{2\sin\frac{\pi}{4m}\cos\frac{\pi}{4m}}=m\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}.$$

Докажем теперь, что выражение (*) только уменьшится, если заменить синусы углов самими углами, а выражение (**) увеличится. Воспользуемся тем, что

$$\sin^2 k\alpha - \sin^2 \alpha = (\sin k\alpha + \sin \alpha)(\sin k\alpha - \sin \alpha) =$$
$$= 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k-1)\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\cos\frac{(k-1)\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2} =$$
$$= \sin(k-1)\alpha\,\sin(k+1)\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}\,\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha} = \frac{\sin^2 k\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2 k\alpha} = 1 - \left(\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}\right)^2,$$

в то время как

$$\frac{(k-1)\alpha}{k\alpha}\,\frac{(k+1)\alpha}{k\alpha} = \frac{(k^2-1)\alpha^2}{(k\alpha)^2} = 1 - \left(\frac{\alpha}{k\alpha}\right)^2.$$

Но из результата задачи 136б) следует, что $\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha} > \frac{\alpha}{k\alpha}$ и, значит,

$$1 - \left(\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}\right)^2 < 1 - \left(\frac{\alpha}{k\alpha}\right)^2,$$

откуда и вытекает, что

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}\,\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha} < \frac{(k-1)\alpha}{k\alpha}\,\frac{(k+1)\alpha}{k\alpha},$$
$$\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}\,\frac{\sin k\alpha}{\sin(k+1)\alpha} > \frac{k\alpha}{(k-1)\alpha}\,\frac{k\alpha}{(k+1)\alpha}.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\,\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}} < m\sin\frac{\pi}{2m}$$

и

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}\,\frac{4\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}\,\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}\,\frac{6\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}\,\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}\,\frac{2m\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}\,\frac{(2m-1)\pi}{4m}} > m\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4m},$$

или

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\,\frac{2m-2}{2m-1}<m\sin\frac{\pi}{2m}$$

и

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\,\frac{2m}{2m-1}>m\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4m}.$$

Последние два неравенства можно объединить в следующее двойное неравенство:

$$m\sin\frac{\pi}{2m}>\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\,\frac{2m-2}{2m-1}>\frac{2m-1}{m}\,m\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4m},$$

или

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}>\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}>$$

$$>\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}.$$

Так как при $m\to\infty$ обе части последнего двойного неравенства стремятся к одному и тому же пределу $\frac{\pi}{2}$ (ср. с решением задачи 144а)), то получаем:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

146. Разделим отрезок $OD=a$ оси абсцисс на n равных частей и построим на каждом отрезке $M_{k-1}M_k$ прямоугольник указанным на стр. 70 способом (черт. 137). Длина основания каждого из таких прямоугольников равна $\frac{a}{n}$, а высота $\left(k\frac{a}{n}\right)^2$, где k — порядковый номер прямоугольника, считая от точки O. Сумма площадей всех этих прямоугольников равна

$$S_n=\frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(2\frac{a}{n}\right)^2+\ldots+\left(n\frac{a}{n}\right)^2\right]=$$

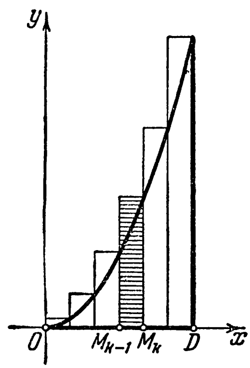
$$=\frac{a^3}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2).$$

Но, как известно (см. сноску на стр. 179),

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

значит,

$$S_n=\frac{a^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



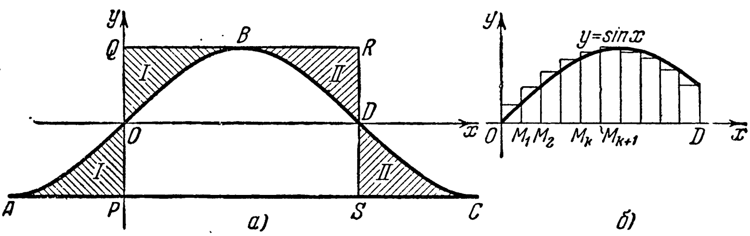
Черт. 137.

Площадь S, ограниченная параболой, равна пределу суммы площадей прямоугольников при неограниченном увеличении их числа, т. е.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a^3\,\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}a^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{a^3}{3}.$$

147. а) Рассматриваемая площадь равна 2π. Доказательство с очевидностью следует из черт. 138, *а*, на котором показано, что интересующая нас фигура $AOBDC$ равносоставлена с пря-



Черт. 138.

моугольником $PQRS$ с основанием $PS=OD=\pi$ и высотой $PQ=2$ (т. е. фигура и прямоугольник состоят из одинаковых частей).

б) Как и в задаче 146, в качестве точек M_1, M_2, ..., M_{n-1} выберем точки, делящие отрезок $OD=a$ оси абсцисс на n равных частей (черт. 138, *б*). В таком случае сумма S_n будет равна

$$S_n=h(\sin h+\sin 2h+\ldots+\sin nh),$$

где

$$h=\frac{a}{n}.$$

Воспользовавшись теперь равенством [1])

$$\sin h+\sin 2h+\ldots+\sin nh=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}},$$

получим:

$$S_n=h\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}=\frac{a}{n}\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}\frac{a}{n}\right)}{\sin\frac{a}{2n}}.$$

Но так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{2n}}=\lim_{n\to\infty}2\frac{\frac{a}{2n}}{\sin\frac{a}{2n}}=2.$$

---

[1]) Эта формула легко выводится следующим образом: так как

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\},$$

то

$$(\sin h+\sin 2h+\ldots+\sin nh)\sin\frac{h}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{h}{2}-\cos\frac{3h}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\cos\frac{3h}{2}-\cos\frac{5h}{2}\right)+\ldots+\left(\cos\frac{(2n-1)h}{2}-\cos\frac{(2n+1)h}{2}\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{h}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right\}.$$

Отсюда

$$\sin h+\sin 2h+\ldots+\sin nh=\frac{\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{h}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right\}}{\sin\frac{h}{2}}=$$
$$=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n = 2\lim_{n\to\infty} \sin\frac{a}{2}\sin\left\{\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=2\sin^2\frac{a}{2}.$$

В частности, при $a=\pi$ мы будем иметь $S=2$, а при $a=\frac{\pi}{2}$ $S=1$. Из этих двух результатов легко снова показать, что площадь фигуры $AOBDC$ черт. 138, a равна 2π, ибо

$$S_{OBD}=2;\ S_{ODSP}=\pi$$

и

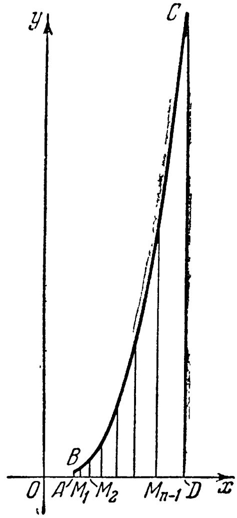
$$S_{OAP}=S_{DCS}=\frac{\pi}{2}-1.$$

148. а) При решении этой задачи удобнее разбить отрезок AD оси абсцисс ($OA=a$, $OD=b$) не на равные части, а так, чтобы выполнялось соотношение $\frac{OM_1}{a}=\frac{OM_2}{OM_1}=\ldots=\frac{b}{OM_{n-1}}$ (черт. 139). Обозначив общее значение всех этих отношений через q:

$$\frac{OM_1}{a}=\frac{OM_2}{OM_1}=\ldots=\frac{b}{OM_{n-1}}=q,$$

получим:

$$\frac{OM_1}{a}\frac{OM_2}{OM_1}\cdots\frac{b}{OM_{n-1}}=q^n=\frac{b}{a}$$



Черт. 139.

и, значит, $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Следовательно, при $n\to\infty$ $q\to 1$ [1]).

Очевидно, что

$$OM_1=aq,\ OM_2=OM_1\cdot q=aq^2,$$
$$OM_3=OM_2\cdot q=aq^3,\ \ldots,\ b=OM_{n-1}\cdot q=aq^n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
h_1&=OM_1-OA=a(q-1),\\
h_2&=aq^2-aq=aq(q-1),\\
h_3&=aq^3-aq^2=aq^2(q-1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_n&=aq^n-aq^{n-1}=aq^{n-1}(q-1).
\end{aligned}$$

[1]) Так как $\log q=\frac{1}{n}(\log b-\log a)\to 0$ при $n\to\infty$.

Отметим, что обязательное условие, указанное на стр. 71, здесь выполняется: так как $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\to 1$ при $n\to\infty$, то длина всех отрезков $M_{k-1}M_k=h_k$ при увеличении n стремится к нулю. Площадь k-го прямоугольника в этом случае, очевидно, равна

$$h_k(OM_k)^m=aq^{k-1}(q-1)(aq^k)^m,$$

так что сумма площадей всех n прямоугольников равна

$$\begin{aligned}S_n&=a(q-1)(aq)^m+aq(q-1)(aq^2)^m+\\&+aq^2(q-1)(aq^3)^m+\ldots+aq^{n-1}(q-1)(aq^n)^m=\\&=a^{m+1}q^m(q-1)[1+q^{m+1}+q^{2(m+1)}+\ldots+q^{(n-1)(m+1)}]=\\&=a^{m+1}q^m(q-1)\frac{q^{n(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}=q^m\frac{1}{\frac{q^{m+1}-1}{q-1}}a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right]\end{aligned}$$

$\left(\text{ибо } q^{n(m+1)}=(q^n)^{m+1}=\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}\right)$. Но при $n\to\infty$ $q\to 1$; значит, $\lim\limits_{n\to\infty}q^m=1$, при любом фиксированном m, и для того, чтобы определить площадь криволинейной трапеции $ABCD$, нам остается только найти предел выражения $\frac{q^{m+1}-1}{q-1}$ при $q\to 1$.

Рассмотрим теперь отдельно несколько случаев.

1°. m — целое положительное число. В этом простейшем случае

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}&=\lim_{q\to 1}(q^m+q^{m-1}+\ldots+q+1)=\\&=\underbrace{1+1+\ldots+1+1}_{m+1\text{ раз}}=m+1.\end{aligned}$$

2°. m — рациональное число, большее -1: $m+1=\frac{r}{s}$, где r и s — целые положительные. В этом случае

$$\lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=\lim_{q\to 1}\frac{q^{\frac{r}{s}}-1}{q-1}=\lim_{q\to 1}\left\{\frac{(q^{\frac{1}{s}})^r-1}{q^{\frac{1}{s}}-1}:\frac{(q^{\frac{1}{s}})^s-1}{q^{\frac{1}{s}}-1}\right\},$$

а так как если $q\to 1$, то и $q_1=\sqrt[s]{q}\to 1$, то из результата пункта 1° следует

$$\lim_{q\to 1}\frac{\left(q^{\frac{1}{s}}\right)^r-1}{q^{\frac{1}{s}}-1}=\lim_{q_1\to 1}\frac{q_1^r-1}{q_1-1}=r,\quad \lim_{q\to 1}\frac{\left(q^{\frac{1}{s}}\right)^s-1}{q^{\frac{1}{s}}-1}=s$$

и, значит,

$$\lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=r:s=m+1.$$

3°. m — рациональное число, меньшее чем -1: $m+1=-\frac{r}{s}$, где r и s — целые положительные. В этом случае, используя результат пункта 2°, получаем:

$$\lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=\lim_{q\to 1}\frac{q^{-\frac{r}{s}}-1}{q-1}=\lim_{q\to 1}\left\{-q^{-\frac{r}{s}}\frac{q^{\frac{r}{s}}-1}{q-1}\right\}=$$

$$=-1\cdot\frac{r}{s}=m+1.$$

4°. Если m иррационально, то q^{m+1} определяется как предел выражений вида $q^{\frac{r}{s}}$, где $\frac{r}{s}$ — рациональные числа, стремящиеся к $m+1$ (определение иррациональной степени числа). Поэтому из того, что при всяком рациональном значении m, отличном от -1, $\lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=m+1$, следует, что и при иррациональном m

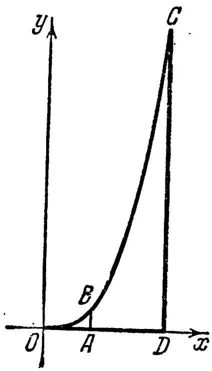
$$\lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=m+1.$$

Итак, для всякого m, отличного от -1, $\lim_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=m+1$. Отсюда следует, что при всяком m, отличном от -1, площадь криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной дугой BC кривой $y=x^m$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$, будет равна

$$1\cdot\frac{1}{m+1}a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right]=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

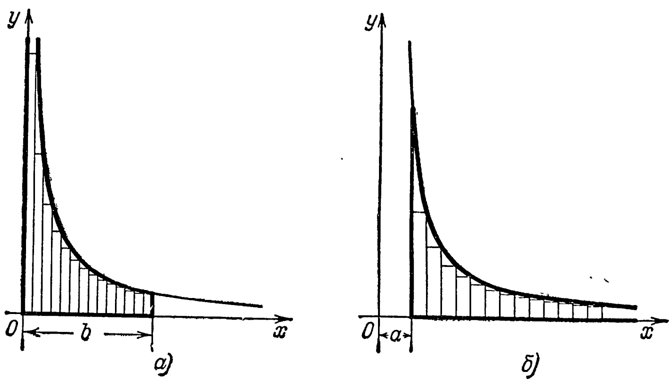
Примечание. При $m=-1$ формула для площади криволинейной трапеции $ABCD$ имеет совершенно другой вид; см. ниже задачу 152.

б) Для вычисления площади криволинейного треугольника, ограниченного параболой $y=x^m$, осью абсцисс и прямой $x=b$, способ, которым мы решали предыдущую задачу, не может быть применен, так как отрезок $OD=a$ оси абсцисс нельзя разбить на конечное число участков так, чтобы абсциссы точек деления составляли геометрическую прогрессию. Однако мы можем воспользоваться готовым результатом предыдущей задачи. В самом деле, площадь криволинейного треугольника OCD (черт. 140) является пределом площадей криволинейных трапеций $ABCD$ при $A \to O$. Выражение $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ при $a \to 0$ стремится к $\frac{b^{m+1}}{m+1}$; следовательно, площадь криволинейного треугольника равна $\frac{b^{m+1}}{m+1}$.



Черт. 140.

Примечание. Отметим, что полученный в задаче б) результат сохраняет силу не только для положительных значений m, но и для



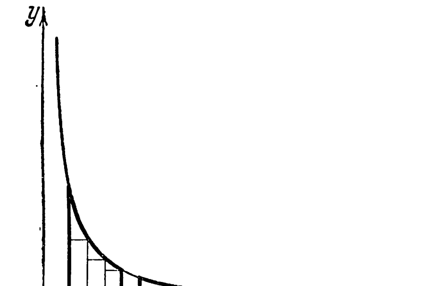
Черт 141.

отрицательных m, больших чем -1 (если $m>-1$, то $\lim\limits_{a\to 0}\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}=\frac{b^{m+1}}{m+1}$). В последнем случае криволинейного треугольника OCD не существует, ибо кривая $y=x^m$ имеет вид, изображенный на черт. 141, a. Однако несмотря на то, что фигура, ограниченная кривой $y=x^m$, осью абсцисс, осью ординат $x=0$ и прямой $x=b$, при m отрицательном простирается в бесконечность, можно все-таки говорить о площади этой фигуры (понимая, например, под площадью предел суммы площадей прямоугольников, изображенных на черт. 141, *а*, когда основание каждого из этих прямоугольников стремится к нулю); эта площадь равна $\frac{b^{m+1}}{m+1}$.

Аналогично этому при $m<-1$ можно говорить о площади простирающейся в бесконечность фигуры, ограниченной кривой $y=x^m$, осью абсцисс и прямой $x=a$ (черт. 141, *б*); эта площадь, под которой следует понимать предел площадей прямоугольников, изображенных на черт. 141, *б*, когда основание каждого прямоугольника стремится к нулю, а сумма всех оснований — к бесконечности, равна

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}=\frac{a^{m+1}}{-(m+1)}.$$

149. Разделим отрезки A_1D_1 $(OA_1=a_1,\ OD_1=b_1)$ и A_2D_2 $(OA_2=a_2,\ OD_2=b_2)$ оси абсцисс каждый на n равных



Черт. 142.

частей и построим на каждой из этих частей прямоугольник, как указано на черт. 142. Площадь k-го из первых прямоугольников, очевидно, равна

$$S_{(k)}^{(1)}=\frac{b_1-a_1}{n}\,\frac{1}{a_1+k\,\frac{b_1-a_1}{n}}=\frac{b_1-a_1}{(n-k)\,a_1+kb_1}=\frac{\frac{b_1}{a_1}-1}{n-k+k\,\frac{b_1}{a_1}}.$$

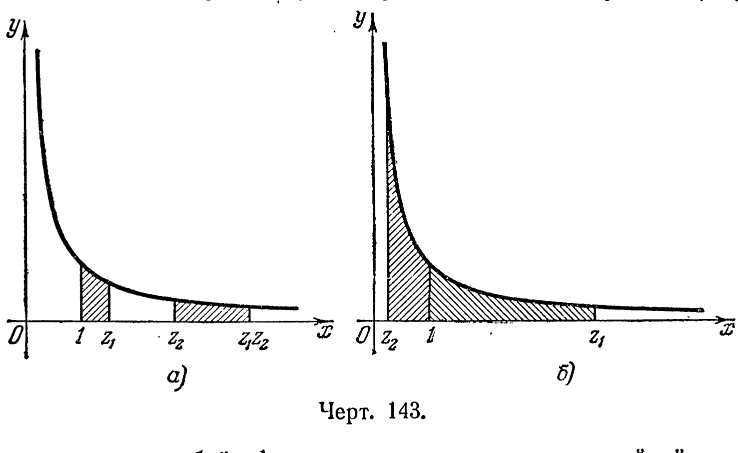
Точно так же площадь k-го из вторых прямоугольников равна

$$S_{(k)}^{(2)} = \frac{b_2 - a_2}{n} \frac{1}{a_2 + k\frac{b_2 - a_2}{n}} = \frac{b_2 - a_2}{(n-k)a_2 + kb_2} = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{n - k + k\frac{b_2}{a_2}}.$$

Так как по условию задачи $\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1}$, то $S_{(k)}^{(1)} = S_{(k)}^{(2)}$. Отсюда вытекает, что сумма $\overline{S}_n$ площадей n первых прямоугольников совпадает с суммой $\overline{\overline{S}}_n$ площадей n вторых прямоугольников. Отсюда и следует требуемый результат (см. выше, стр. 70—71).

150. Разберем отдельно ряд возможных случаев.

1°. z_1 и z_2 оба больше 1 (черт. 143, *а*). Так как $\frac{z_1 z_2}{z_2} = \frac{z_1}{1}$, то в силу результата задачи 149 площади двух криволинейных трапеций, заштрихованных на черт. 143, *а*,



Черт. 143.

равны между собой. А так как площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и прямыми $x = 1$ и $x = z_1 z_2$, равна сумме площадей двух криволинейных трапеций, ограниченных осью абсцисс, гиперболой и прямыми $x = 1$ и $x = z_2$, соответственно $x = z_2$ и $x = z_1 z_2$, то

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) + F(z_2).$$

2°. $z_2=\frac{1}{z_1}$; $z_1>1$ (черт. 143, *б*). В таком случае равенство, которое нам надо доказать, принимает вид

$$F(z_1)+F\left(\frac{1}{z_1}\right)=F(1)=0,$$

т. е.

$$F\left(\frac{1}{z_1}\right)=-F(z_1).$$

Так как $z_1:1=1:\frac{1}{z_1}$, то в силу результата задачи 149 площадь трапеции, ограниченной осью абсцисс, гиперболой и прямыми $x=1$ и $x=z_1$, равна площади трапеции, ограниченной осью абсцисс, гиперболой и прямыми $x=\frac{1}{z_1}$ и $x=1$. Отсюда немедленно следует требуемое равенство $F\left(\frac{1}{z_1}\right)=$ $=-F(z_1)$ (см. стр. 74).

3°. z_1 и z_2 оба меньше 1. В таком случае $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$ и $\frac{1}{z_1z_2}$ будут больше 1 и в силу уже доказанного

$$F\left(\frac{1}{z_1}\right)=-F(z_1),\quad F\left(\frac{1}{z_2}\right)=-F(z_2),\quad F\left(\frac{1}{z_1z_2}\right)=-F(z_1z_2)$$

и

$$F\left(\frac{1}{z_1}\right)+F\left(\frac{1}{z_2}\right)=F\left(\frac{1}{z_1z_2}\right).$$

Умножив обе части последнего равенства на -1, мы придем к нужному равенству

$$F(z_1)+F(z_2)=F(z_1z_2).$$

4°. $z_1>1$, $z_2<1$ (но $z_1z_2\neq 1$). Для определенности предположим, что $z_1>\frac{1}{z_2}$, так что

$$z_1z_2>1.$$

Так как $\frac{1}{z_2}>1$, то в силу уже доказанного

$$F(z_1z_2)+F\left(\frac{1}{z_2}\right)=F\left(z_1z_2\cdot\frac{1}{z_2}\right)=F(z_1),$$

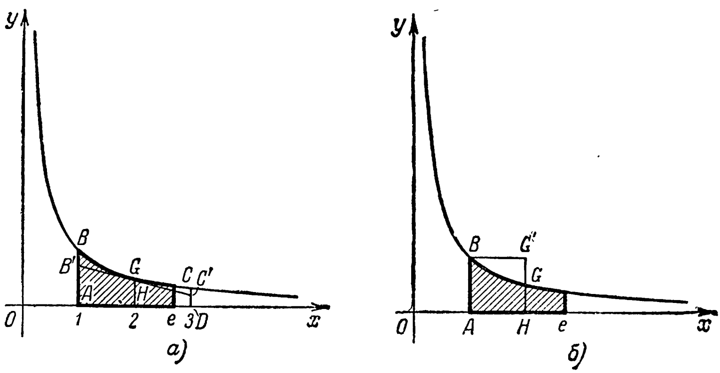
отсюда

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) - F\left(\frac{1}{z_2}\right) = F(z_1) + F(z_2).$$

Случай, когда $z_1 z_2 < 1$, разбирается аналогично.

Тем самым требуемое соотношение доказано во всех случаях.

151. Отметим, что по самому своему определению функция $F(z)$ есть функция возрастающая: при $z_2 > z_1$, очевидно, $F(z_2) > F(z_1)$. Так как $F(1) = 0$ и $F(z)$ с ростом z меняется непрерывно и не может «перескочить» ни через какое значение,



Черт. 144.

то для того, чтобы убедиться в существовании такого числа e, для которого $F(e) = 1$, нам надо только показать, что существуют такие значения z, при которых $F(z) > 1$.

Покажем, что $F(3) > 1$. С этой целью проведем касательную $B'C'$ к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке G с координатами $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ (черт. 144, *а*). Площадь трапеции $ABCD$ ($OA = 1$, $OD = 3$) равна 1, так как ее средняя линия $HG = \frac{1}{2}$, а высота $AD = 2$. Отсюда вытекает, что площадь $F(3)$ криволинейной трапеции $ABCD$ больше 1, что и надо было доказать.

Покажем теперь, что $F(2)<1$. Это следует из черт. 144, *б*: площадь криволинейной трапеции $ABGH$ ($OA=1$, $OH=2$), равная $F(2)$, заведомо меньше площади квадрата $ABG'H$, равной 1.

Таким образом,

$$F(2)<1<F(3),$$

откуда

$$2<e<3.$$

152. Докажем предварительно следующее важное свойство функции $F(z)$: при любом α имеет место равенство

$$F(z^\alpha)=\alpha F(z).$$

Это доказательство мы проведем в несколько шагов, постепенно расширяя область рассматриваемых чисел α.

1°. $F(z^n)=nF(z)$ при n целом положительном. Действительно, в силу результата задачи 150

$$\begin{aligned}
&F(z^2)=F(z)+F(z)=2F(z),\\
&F(z^3)=F(z^2)+F(z)=2F(z)+F(z)=3F(z),\\
&F(z^4)=F(z^3)+F(z)=3F(z)+F(z)=4F(z),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F(z^n)=F(z^{n-1})+F(z)=(n-1)F(z)+F(z)=nF(z).
\end{aligned}$$

2°. $F(z^k)=kF(z)$ при k целом отрицательном. Действительно, пусть $k=-n$, где n — целое положительное; тогда, очевидно, $F(z^k)=F\left(\frac{1}{z^n}\right)=-F(z^n)$ (см. решение задачи 140) и, значит,

$$F(z^k)=-nF(z)=kF(z).$$

3°. $F(z^{\frac{1}{m}})=\frac{1}{m}F(z)$ при m целом. Действительно, заменив в уже доказанном равенстве $F(z_1^m)=mF(z_1)$ число z_1 на $z^{\frac{1}{m}}$, получим:

$$F(z)=mF(z^{\frac{1}{m}}),$$

откуда

$$F(z^{\frac{1}{m}})=\frac{1}{m}F(z).$$

4°. $F(z^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m} F(z)$, где $\frac{n}{m}$ — любое рациональное число. Действительно,

$$F(z^{\frac{n}{m}}) = F\left[(z^{\frac{1}{m}})^n\right] = nF(z^{\frac{1}{m}}) = \frac{n}{m} F(z)$$

(см. пункты 1°—2° и 3°).

5°. $F(z^\alpha) = \alpha F(z)$, где α — любое иррациональное число. Построим две последовательности рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ и $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n', \ldots$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\alpha_n - \alpha < 0, \quad \alpha_n' - \alpha > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n' = \alpha.$$

(В качестве чисел α_n и α_n' можно взять, например, десятичные приближения числа α с недостатком и соответственно с избытком с точностью до $\frac{1}{10^n}$.)

Так как функция $F(z)$, очевидно, растет при увеличении z, то мы можем написать:

$$F(z^{\alpha_n}) < F(z^\alpha) < F(z^{\alpha_n'}),$$

или, так как α_n и α_n' — рациональные числа,

$$\alpha_n F(z) < F(z^\alpha) < \alpha_n' F(z)$$

(см. пункт 4°). Отсюда

$$\alpha_n < \frac{F(z^\alpha)}{F(z)} < \alpha_n'$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \frac{F(z^\alpha)}{F(z)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \alpha_n'.$$

Но так как

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n' = \alpha,$$

то из последнего равенства следует

$$\frac{F(z^\alpha)}{F(z)} = \alpha; \quad F(z^\alpha) = \alpha F(z),$$

что и надо было доказать.

Теперь уже легко показать, что

$$F(z) = \log_e z.$$

В самом деле, в силу вышедоказанного

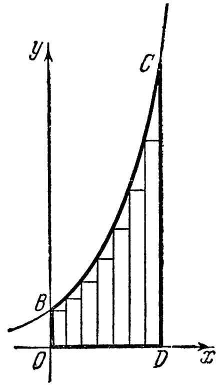
$$F(z) = F(e^{\log_e z}) = \log_e z \cdot F(e) = \log_e z,$$

так как $F(e) = 1$ по определению числа e.

153. а) Разобьем отрезок OD оси абсцисс, где $OD = b$ на n равных частей (черт. 145). Длина каждой такой части будет равна $\frac{b}{n}$, а высоты треугольников, построенных на этих частях и вписанных в кривую $y = a^x$, равны соответственно $1, a^{\frac{b}{n}}, a^{\frac{2b}{n}}, \ldots, a^{\frac{(n-1)b}{n}}$. Следовательно, сумма S_n площадей всех прямоугольников равна

$$S_n = \frac{b}{n}\left(1 + a^{\frac{b}{n}} + a^{\frac{2b}{n}} + \cdots + a^{\frac{(n-1)b}{n}}\right) =$$

$$= \frac{b}{n} \frac{a^b - 1}{a^{\frac{b}{n}} - 1}.$$



Черт. 145.

Площадь S криволинейной трапеции $OBCD$ равна пределу сумм S_n при $n \to \infty$; таким образом,

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \frac{(a^b - 1)}{(a^{\frac{b}{n}} - 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^b - 1}{\frac{n}{b}(a^{\frac{b}{n}} - 1)}.$$

Но в силу результата нижеследующей задачи 159в)

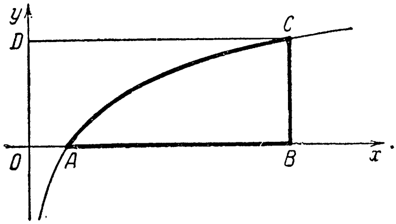
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b}\left(a^{\frac{b}{n}} - 1\right) = \frac{1}{b} \lim_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{a^b} - 1) = \frac{1}{b} \ln a^b = \ln a.$$

Итак,

$$S = \frac{a^b - 1}{\ln a}.$$

(В частности, если $a = e$, то мы получаем следующее простое выражение: $S = e^b - 1$.)

б) Первое решение этой задачи может быть получено из решения задачи а), если воспользоваться тем, что уравнение кривой $y=\log_a x$ можно записать также в виде $x=y^a$. Нам надо найти площадь криволинейного треугольника ABC, где $OA=1$, $OB=b$ (черт. 146).



Черт. 146.

Найдем предварительно площадь криволинейной трапеции $OACD$. Уравнение нашей кривой имеет вид $y=\log_a x$ или $x=a^y$. Отсюда вытекает, что криволинейная трапеция $OACD$ имеет точно такую же форму, как и криволинейная трапеция $OBCD$ на черт. 145, площадь которой мы вычисляли в предыдущей задаче[1]). Трапеция $OACD$ ограничена кривой $x=a^y$ и прямыми $y=0$ и $y=\log_a b$, следовательно, в силу результата задачи а) ее площадь равна

$$S_{OACD}=\frac{a^{\log_a b}-1}{\ln a}=\frac{b-1}{\ln a}.$$

Но площадь криволинейного треугольника ABC равна площади прямоугольника $OBCD$ минус площадь трапеции $OACD$. Отсюда получаем[2]):

$$S=b\log_a b-\frac{b-1}{\ln a}=\frac{b\log_a b\ln a-b+1}{\ln a}=\frac{b\ln b-b+1}{\ln a}.$$

В частности, для площади S_0 криволинейного треугольника, ограниченного осью абсцисс, кривой $y=\ln x$ и прямой $x=b$, мы получаем формулу

$$S_0=b\ln b-b+1,$$

а для площади S_1 криволинейного треугольника, ограниченного осью

---

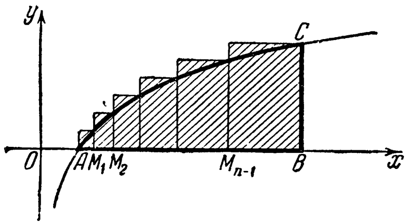
[1]) Точнее, эти трапеции будут симметричны (ибо положительное направление оси Oy обращено влево от оси Ox, если смотреть в положительном направлении последней, а положительное направление оси Ox обращено вправо от оси Oy).

[2]) Напомним доказательство того, что $\log_a b\ln a=\ln b$. Так как $a^{\log_a b}=b$, а $a=e^{\ln a}$, то $(e^{\ln a})^{\log_a b}=e^{\ln a\log_a b}=b=e^{\ln b}$ и, следовательно, $\ln a\log_a b=\ln b$.

абсцисс, логарифмической кривой $y=\lg x$ и прямой $x=b$,— формулу

$$S_1=\frac{b\ln b-b+1}{\ln 10}=\frac{\ln 10\cdot b\lg b-b+1}{\ln 10}\approx\frac{2{,}3b\lg b-b+1}{2{,}3}.$$

Второе решение. Разобьем отрезок AB, где $OA=1$, $OB=b$, точками M_1, M_2, $\ldots$, M_{n-1} на n частей так, что



Черт. 147.

$\frac{OM_1}{1}=\frac{OM_2}{OM_1}=\frac{OM_3}{OM_2}=\ldots=\frac{b}{OM_{n-1}}$ (черт. 147). В таком случае мы будем иметь:

$$OM_1=q,\ OM_2=q^2,$$
$$OM_3=q^3,\ldots,\ OM_{n-1}=q^{n-1},\ OB=q^n=b,$$

где $q=\sqrt[n]{b}$ (ср. с решением задачи 148). Отсюда следует, что основания прямоугольников, изображенных на черт. 147, соответственно равны

$$q-1,\ q(q-1),\ q^2(q-1),\ \ldots,\ q^{n-1}(q-1),$$

а высоты

$$\log_a q,\ \log_a q^2=2\log_a q,\ \log_a q^3=3\log_a q,\ \ldots,\ \log_a q^n=n\log_a q.$$

Таким образом, площадь криволинейного треугольника ABC будет равна пределу при $n\to\infty$ суммы

$$S_n=(q-1)\log_a q+q(q-1)\cdot 2\log_a q+q^2(q-1)\cdot 3\log_a q+\ldots$$
$$\ldots+q^{n-1}(q-1)\,n\log_a q=$$
$$=(q-1)(1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1})\log_a q.$$

Но (см. ниже задачу 168б))

$$1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}=\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2};$$

следовательно,

$$S_n = nq^n \log_a q - \frac{(q^n - 1)\log_a q}{q - 1},$$

или, так как $q = \sqrt[n]{b}$, $\log_a q = \frac{1}{n}\log_a b$,

$$S_n = b\log_a b - \frac{(b-1)\log_a b}{n(\sqrt[n]{b} - 1)}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b} - 1) = \ln b$ (см. ниже задачу 159в)); следовательно,

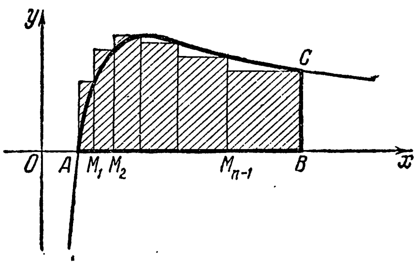
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = b\log_a b - (b-1)\frac{\log_a b}{\ln b} =$$

$$= b\log_a b - \frac{b-1}{\ln a} = \frac{b\ln b - b + 1}{\ln a}$$

(см. сноску на стр. 470).

Примечание. Если определить площадь задачи б) независимо от решения задачи а) (см. второе решение задачи б)), то из полученной формулы в свою очередь нетрудно вывести результат задачи а) (ср. с первым решением задачи б)).

154. Решение этой задачи аналогично второму решению задачи 153б). Разобьем отрезок AB, где $OA = 1$, $OB = b$, точками M_1, M_2, M_3, ..., M_{n-1} на n частей так, что



Черт. 148.

$\frac{OM_1}{1} = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{OM_3}{OM_2} = \ldots = \frac{OM_{n-1}}{b}$ (черт. 148). В таком случае основания прямоугольников, изображенных на черт. 148, будут соответственно равны

$$q - 1,\ q(q-1),\ q^2(q-1),\ \ldots,\ q^{n-1}(q-1),$$

где $q=\sqrt[n]{b}$, а высоты равны

$$\frac{\log_a q}{q},\quad \frac{2\log_a q}{q^2},\quad \frac{3\log_a q}{q^3},\quad \ldots,\quad \frac{n\log_a q}{q^n}$$

(ср. с решением задачи 153б)). Отсюда следует, что площадь S криволинейного треугольника ABC равна пределу при $n\to\infty$ суммы

$$S_n=\frac{(q-1)\log_a q}{q}+\frac{2(q-1)\log_a q}{q}+\ldots+\frac{n(q-1)\log_a q}{q}=$$

$$=\frac{q-1}{q}\log_a q(1+2+3+\ldots+n)=\frac{n(n+1)}{2}\frac{q-1}{q}\log_a q,$$

или, так как $q=\sqrt[n]{b}$, $\log_a q=\frac{1}{n}\log_a b$,

$$S_n=\frac{n+1}{2}\,\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\sqrt[n]{b}}\log_a b=\frac{1}{2}n(\sqrt[n]{b}-1)\log_a b\,\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{\sqrt[n]{b}}.$$

А так как в силу результата задачи 159в)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b}-1)=\ln b$$

и, очевидно [1],

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1,$$

то [2]

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\ln b\,\log_a b=\frac{1}{2}\ln a\,(\log_a b)^2.$$

В частности, площадь криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y=\frac{\ln x}{x}$, осью абсцисс и прямой $x=b$, равна $\frac{1}{2}\ln^2 b$, а площадь криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y=\frac{\lg x}{x}$, осью абсцисс и прямой $x=b$, равна

$$\frac{1}{2}\ln 10\,\lg^2 b\approx 1{,}15\lg^2 b.$$

---

[1]) Ср. со сноской на стр. 459.

[2]) Ср. со сноской на стр. 470.

155. Определим площадь, ограниченную параболой k-й степени $y=x^k$, осью абсцисс и прямой $x=b$, выбрав точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ (см. стр. 70) так, чтобы они делили отрезок OD на n равных частей. Сумма S_n подсчитывается точно так же, как в решении задачи 146; она равна

$$S_n=h\ [h^k+(2h)^k+\ldots+(nh)^k]=h^{k+1}(1^k+2^k+\ldots+n^k),$$

где $h=\frac{b}{n}$. Таким образом, искомая площадь оказывается равной

$$S=\lim_{n\to\infty} b^{k+1}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}.$$

Но из решения задачи 148б) мы знаем, что $S=\frac{b^{k+1}}{k+1}$. Отсюда следует, что для любого $k>-1$ (см. примечание к решению задачи 148б))

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

При k целом положительном предложение настоящей задачи можно доказать также чисто алгебраически (см., например, решения задач 151 и 316 из указанной на стр. 77 книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома и решение задачи 5 из § 10 указанной там же книги В. А. Кречмара).

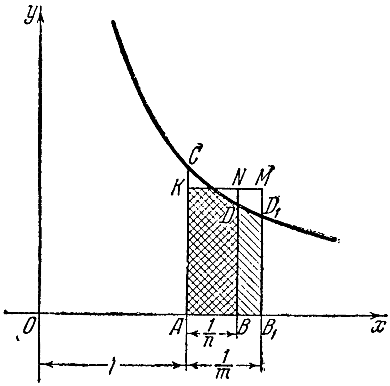
156. а) Достаточно доказать, что при $n>m$ имеет место неравенство

$$\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]>\log\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]$$

или

$$n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)>m\log\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Логарифмы будем брать при основании e (см. выше задачи 149—152); при этом $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ есть площадь криволинейной трапеции $ABDC$, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=1+\frac{1}{n}$; совершенно аналогично определяется и $\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$ (черт. 149). Пусть $ABNK$



Черт. 149.

есть прямоугольник с основанием AB, равновеликий криволинейной трапеции $ABDC$; в таком случае $S_{ABNK}=AB\cdot AK=$ $=\frac{1}{n}AK$ и, следовательно,

$$\frac{1}{n}AK=S_{ABDC}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ AK=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Далее, так как в обозначениях черт. 149 $S_{ABNK}=S_{ABDC}$ и $S_{BB_1MN}>S_{BB_1D_1D}$, то, очевидно, $S_{AB_1MK}>S_{AB_1D_1C}$. Но $S_{A_1B_1MK}=$ $=AB_1\cdot AK=\frac{1}{m}AK=\frac{1}{m}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $S_{AB_1D_1C}=\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$; значит,

$$\frac{1}{m}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{m}\right);$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

что и требовалось доказать.

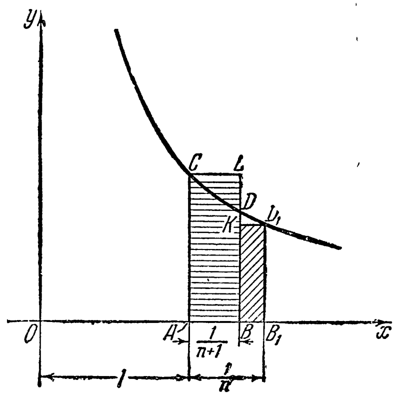
б) Достаточно доказать, что при любом целом положительном n имеет место неравенство

$$\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]>\log\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right].$$

Составим разность

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]-\ln\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right]=$$
$$=(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-(n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

(логарифмы натуральные!). Но $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ есть площадь криволинейной трапеции BB_1D_1D, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1+\frac{1}{n}$, $x=1+\frac{1}{n+1}$; $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ есть площадь криволинейной



Черт. 150.

трапеции $ABDC$, ограниченной той же гиперболой, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=1+\frac{1}{n+1}$ (черт. 150). Площадь криволинейной трапеции BB_1D_1D больше площади прямоугольника BB_1D_1K, равной

$$BB_1\cdot B_1D_1=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n(n+1)}\frac{n}{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2;$$

следовательно,

$$(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]>$$
$$>(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}.$$

Площадь криволинейной трапеции $ABDC$ меньше площади прямоугольника $ABLC$, равной

$$AB\cdot AC=\frac{1}{n+1}\cdot 1=\frac{1}{n+1};$$

следовательно,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n+1}.$$

Из сравнения двух полученных неравенств вытекает

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]-\ln\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right]=$$
$$=(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0,$$

что и требовалось доказать.

Для дальнейшего важно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ совпадают с числом e, определенным геометрически в условии задачи 151. Для доказательства этого достаточно показать, что при любом n

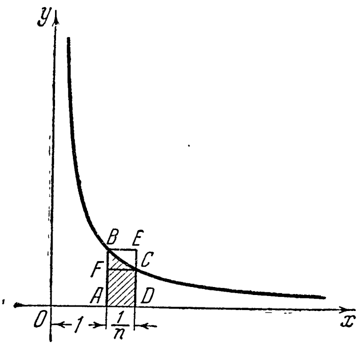
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}; \qquad (*)$$

отсюда и из того, что последовательности задач 156а) и б) стремятся к одному пределу, уже следует, что этим пределом может быть лишь число e. Но так как $\ln e=1$, то неравенства (*) равносильны следующим:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (**)$$

Число $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ равно площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и

$x=1+\frac{1}{n}$ (черт. 151). Но площадь этой трапеции заключается между площадями прямоугольников $ABED$ и $AFCD$ с общим основанием $AD=\frac{1}{n}$ и высотами $AB=1$ и $CD=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}$. Таким образом, получаем:



Черт. 151.

$$\frac{1}{n}\cdot 1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<$$
$$<\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

откуда и следуют требуемые неравенства (**).

Примечание. Чисто алгебраическое доказательство предложений задач 156а) и б) имеется, например, в указанных выше книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома и книге В. А. Кречмара.

157. Пусть сначала z положительно. Рассмотрим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=1+\frac{z}{n}$ (черт. 152, a). Площадь этой трапеции заключена между площадями прямоугольников $ABED$ и $AFCD$, т. е. между $\frac{z}{n}\cdot 1$ и $\frac{z}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{n}}=$ $=\frac{z}{n+z}$ (ср. с окончанием решения задачи 156). Отсюда следует

$$\frac{z}{n}>\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)>\frac{z}{n+z},$$

или

$$z>\ln\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right]>\frac{z}{1+\frac{z}{n}}.$$

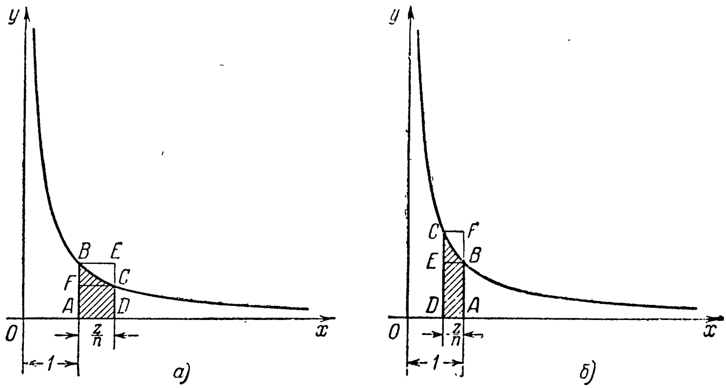
Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получаем:

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right]=z,$$

откуда в силу определения натуральных логарифмов и следует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z.$$

Аналогично рассматривается и случай отрицательного z



Черт. 152.

(черт. 152, *б*). Здесь $S_{ABED}=-\frac{z}{n}\cdot 1$, $S_{AFCD}=-\frac{z}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{n}}=$ $=-\frac{z}{n-z}$, $S_{ABCD}=-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)$ (напоминаем, что z отрицательно; см. выше стр. 74) и из черт. 152, *б* следует

$$-\frac{z}{n}<-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)<-\frac{z}{n-z},$$

или

$$\frac{z}{n}>\ln\left(1-\frac{z}{n}\right)>\frac{z}{n-z},$$

или, наконец,

$$z>\ln\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)^n\right]>\frac{z}{1-\frac{z}{n}}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, опять получаем:

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right]=z,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z.$$

158. Преобразуем выражение $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ с помощью формулы бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1+\frac{z}{n}\frac{n}{1}+\frac{z^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2!}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{z^n}{n^n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}=$$
$$=1+z+\frac{z^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{z^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{z^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Мы можем записать

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_k+u_{k+1}+\ldots+u_n,$$

где

$$u_k=\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\quad (k=1,\ 2,\ldots,n).$$

Члены u_k нашей суммы, очевидно, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|u_k|\leqslant\frac{|z|^k}{k!},$$

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=\frac{|z|\left(1-\frac{k}{n}\right)}{k+1}<\frac{|z|}{k+1}.$$

Из второго из этих неравенств вытекает, что

$$|u_{k+1}|<|u_k|\frac{|z|}{k+1};\quad |u_{k+2}|<|u_{k+1}|\frac{|z|}{k+2}<|u_k|\frac{|z|^2}{(k+1)^2};$$
$$|u_{k+3}|<|u_{k+2}|\frac{|z|}{k+3}<|u_k|\frac{|z|^3}{(k+1)^3},\ \ldots$$

Выберем теперь k так, чтобы выполнялось соотношение $k+1>|z|$ (это всегда возможно, так как мы будем впоследствии переходить к пределу при $n\to\infty$ и, следовательно, наши суммы будут содержать достаточное количество членов). Для таких k

$$|u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n|\leqslant|u_{k+1}|+|u_{k+2}|+\ldots+|u_n|<$$
$$<|u_k|\left[\frac{|z|}{k+1}+\left(\frac{|z|}{k+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{|z|}{k+1}\right)^{n-k}\right]<$$
$$<|u_k|\frac{\frac{|z|}{k+1}}{1-\frac{|z|}{k+1}}=|u_k|\frac{|z|}{k+1-|z|}\leqslant\frac{|z|^{k+1}}{k!(k+1-|z|)}.$$

Но

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-(1+u_1+u_2+\ldots+u_k)=u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n,$$

так что

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-(1+u_1+u_2+\ldots+u_k)\right|<\frac{|z|^{k+1}}{k!(k+1-|z|)}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^n-(1+u_1+u_2+\ldots+u_k)\right]\right|<$$
$$<\frac{|z|^{k+1}}{k!(k+1-|z|)}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_k=\frac{z^k}{k!}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$ (см. задачу 157),

то

$$\left|e^z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^k}{k!}\right)\right|\leqslant\frac{|z|^{k+1}}{k!(k+1-|z|)}.$$

Но очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|z|^{k+1}}{k!(k+1-|z|)}=0.$$

Итак,

$$\lim_{k\to\infty}\left[e^z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^k}{k!}\right)\right]=0,$$

а это и значит, что

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

159. а) Как мы знаем, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ равен площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=1+\frac{1}{n}$ (см. черт. 151 на стр. 478). Так как площадь этой трапеции меньше площади прямоугольника $ABED$ и больше площади прямоугольника $AFCD$, то

$$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$1>n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

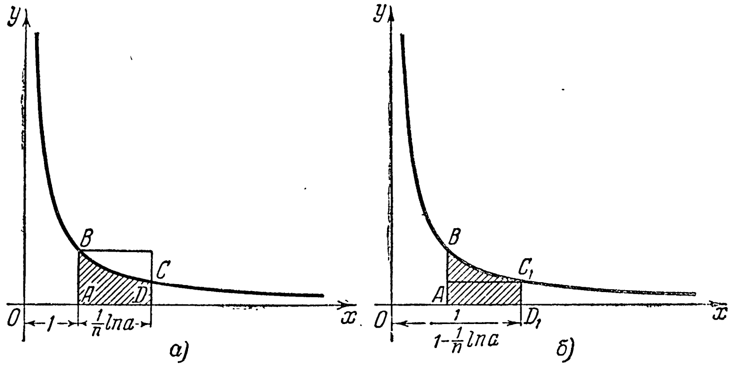
Примечание. Утверждение настоящей задачи равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (ср. конец решения задачи 156).

б) Как известно, $\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}$ (см. сноску на стр. 470). Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}.$$

в) Вспомним, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=\sqrt[n]{a}$, равна $\ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a$.

Площадь трапеции, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и прямыми $x=1$ и $x=1+\frac{1}{n}\ln a$, очевидно, меньше площади



Черт. 153.

прямоугольника с основанием $\frac{1}{n}\ln a$ и высотой 1 (см. черт. 153, *а*), т. е. меньше $\frac{1}{n}\ln a$; отсюда следует, что

$$\sqrt[n]{a}>1+\frac{1}{n}\ln a.$$

Точно так же площадь, ограниченная гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и прямыми $x=1$ и $x=\frac{1}{1-\frac{1}{n}\ln a}$, больше площади прямоугольника с основанием $\frac{1}{1-\frac{1}{n}\ln a}-1$ и высотой $1-\frac{1}{n}\ln a$ (черт. 153, *б*), т. е. больше $\frac{1}{n}\ln a$; следовательно,

$$\sqrt[n]{a}<\frac{1}{1-\frac{1}{n}\ln a}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n}\ln a < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}\ln a} - 1 = \frac{\frac{1}{n}\ln a}{1 - \frac{1}{n}\ln a},$$

т. е.

$$\ln a < n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) < \frac{\ln a}{1 - \frac{1}{n}\ln a},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$$

160. Рассмотрим сумму площадей $n-1$ трапеций (точнее, одного треугольника и $(n-2)$ трапеций) высоты 1, вписанных в кривую $y = \ln x$ (черт. 154, a). Так как основания k-й из этих трапеций равны $\ln k$ и $\ln(k+1)$, то рассматриваемая сумма равна

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 4 + \ln 3}{2} + \ldots + \frac{\ln n + \ln(n-1)}{2} =$$
$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n.$$

Так как площадь $S^{(n)}$ криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \ln x$ и прямой $x = n$, очевидно, больше суммы площадей наших трапеций, то

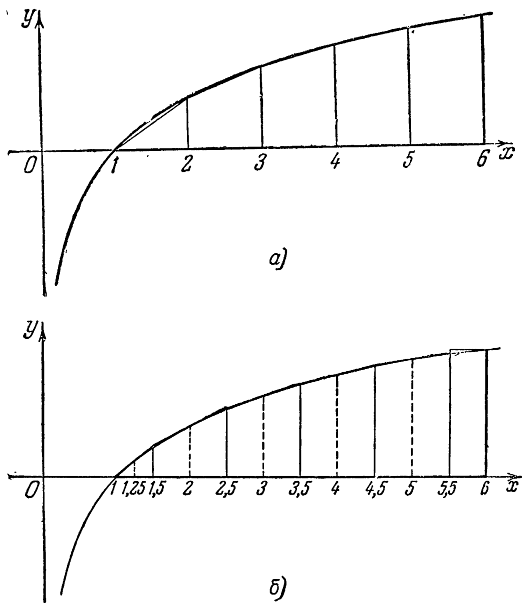
$$S^{(n)} > \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n,$$

при этом разность

$$K^{(n)} = S^{(n)} - \left[\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n\right]$$

увеличивается при увеличении n (эта разность равна сумме площадей $n-1$ сегментов, отсекаемых от кривой $y = \ln x$ хордами, ограничивающими наши трапеции, и с ростом n к этой сумме добавляются площади новых сегментов).

Построим теперь $n-2$ трапеции, каждая из которых ограничена прямыми $x = k - 0{,}5$ и $x = k + 0{,}5$ и касательной к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = k$ (k пробегает значения 2, 3, 4., . . , $n-1$), и добавим к ним еще трапецию, ограниченную прямыми $x=1$ и $x=1{,}5$ и касательной к кривой $y=\ln x$ в точке с абсциссой $x=1{,}25$, и прямоугольник высоты $\ln n$ с боковыми сторонами, расположенными на прямых $x=n-\frac{1}{2}$ и $x=n$ (черт. 154, *б*). Так как средняя



Черт. 154.

линия k-й из наших трапеций равна $\ln(k+1)$, а средняя линия добавленной малой трапеции равна $\ln 1{,}25$, то площадь всей полученной фигуры будет равна

$$[\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln(n-1)]+\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}=$$
$$=\left[\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n\right]+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}.$$

Но эта площадь больше площади $S^{(n)}$, следовательно,

$$\left[\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n\right]+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}>S^{(n)}.$$

Отсюда вытекает, что при любом n

$$K^{(n)} < \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}.$$

В решении задачи 153б) было показано, что

$$S^{(n)} = n\ln n - n + 1.$$

С другой стороны,

$$\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) + \ln n = \ln 2\cdot 3\ldots n = \ln n!.$$

Пользуясь этими соотношениями, мы можем переписать выражение для $K^{(n)}$ следующим образом:

$$K^{(n)} = (n\ln n - n + 1) - \left(\ln n! - \frac{1}{2}\ln n\right) =$$

$$= \ln n^n - \ln e^n + 1 - \ln n! + \ln\sqrt{n} = \ln\frac{n^n\sqrt{n}}{n!\,e^n} + 1.$$

Так как $0 < K^{(n)} < \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$ при всех n, то

$$0 < \ln\frac{n^n\sqrt{n}}{n!\,e^n} + 1 < \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4},$$

т. е.

$$-1 < \ln\frac{n^n\sqrt{n}}{n!\,e^n} < -1 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4},$$

или

$$1 > \ln\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} > 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4},$$

откуда, потенцируя, находим:

$$e > \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} > \sqrt{\frac{4}{5}}\,e,$$

или

$$e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n > n! > \sqrt{\frac{4}{5}}\,e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

что и требовалось доказать.

161. а) Продолжим рассуждения, приведшие к решению задачи 160. Так как $K^{(n)}$ растет с ростом n, но остается все время меньше чем $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$, то эта величина должна иметь определенный предел, также не превосходящий $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$ (но заведомо положительный, ибо $K^{(n)}$ положительно при всех n). Итак,

$$\lim_{n\to\infty} K^{(n)}=K, \quad \text{где } 0<K\leqslant\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}.$$

Но в решении задачи 160 было показано, что

$$K^{(n)}=\ln\frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}+1;$$

поэтому, если существует предел $K=\lim\limits_{n\to\infty}K^{(n)}$, то существует и предел

$$C=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}},$$

при этом

$$e>C\geqslant\sqrt{\frac{4}{5}}\,e,$$

что и требовалось доказать.

б) Для того чтобы определить численную величину предела C отношения $\dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=C^{(n)}$, воспользуемся формулой Валлиса (задача 145):

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right\},$$

которую можно записать в виде

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot4\cdot6\ldots2n)^4}{(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots2n)^2(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{[2^n(n!)]^4}{[(2n)!]^2(2n+1)},$$

или

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{2}}}.$$

Подставим в последнее равенство

$$n!=C^{(n)}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,\quad (2n)!=C^{(2n)}\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n};$$

получим:

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(C^{(n)})^2\,n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{C^{(2n)}\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(C^{(n)})^2}{C^{(2n)}\sqrt{\frac{2n+1}{n}}}.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}C^{(n)}=\lim_{n\to\infty}C^{(2n)}=C,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}}=\sqrt{2};$$

поэтому имеем:

$$\sqrt{\pi}=\frac{C^2}{C\sqrt{2}},$$

откуда

$$C=\sqrt{2\pi},$$

что и требовалось доказать.

162. а) $\ln n$ равен площади криволинейной трапеции $ABCD$ ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=n$.

Построим теперь ступенчатую фигуру из n прямоугольников, основания которых все равны единице, а высоты равны соответственно $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1}$ (черт. 155, *а*). Очевидно, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$, равная $\ln n$, меньше площади этой ступенчатой фигуры. Отсюда вытекает, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}>\ln n,$$

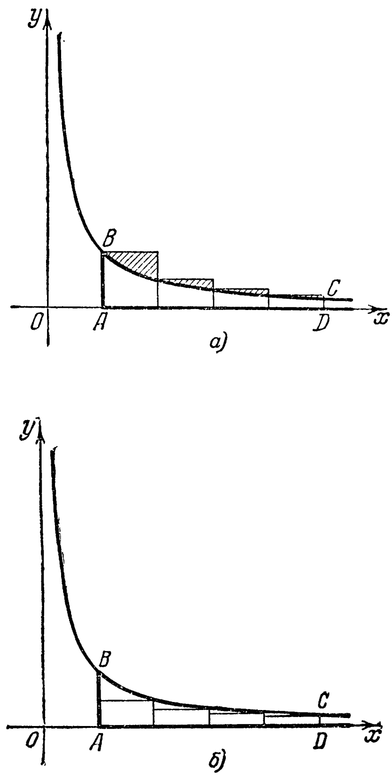
т. е. что

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n>0.$$

Впишем теперь в ту же криволинейную трапецию ступенчатую фигуру, состоящую из n прямоугольников с основаниями, равными единице, и высотами, соответственно равными

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ (черт. 155, *б*). Так как площадь этой ступенчатой фигуры меньше $ABCD$, то

$$\ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$



Черт. 155.

Следовательно,

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n < 1 - \frac{1}{n}.$$

Таким образом, при любом n

$$0 < \gamma_n < 1.$$

б) С ростом n величина γ_n возрастает; действительно, γ_n есть разность между площадью ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, и площадью криволинейной трапеции $ABCD$, т. е. γ_n равно сумме площадей частей прямоугольников, заштрихованных на черт. 155, *а*. Поскольку с ростом n разность

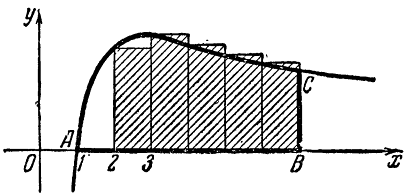
$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

увеличивается, но остается все время меньше 1, она имеет предел γ, также не превосходящий единицы (но, конечно, больший нуля, ибо все γ_n положительны). Тем самым задача 162 полностью решена.

163. а) Сумма

$$\frac{\lg 1}{1} + \frac{\lg 2}{2} + \frac{\lg 3}{3} + \ldots + \frac{\lg(n-1)}{n-1}$$

равна площади ступенчатой фигуры, заштрихованной на черт. 156.



Черт. 156.

При большом n эта площадь будет не очень сильно отличаться от площади криволинейного треугольника ABC, равной в силу результата задачи 154 $\frac{\ln 10}{2}\lg^2 n$ $(\approx 1{,}15 \lg^2 n)$. Поэтому естественно думать, что нужным нам числом C будет $\frac{\ln 10}{2}$. Оценим разность

$$\frac{\lg 1}{1} + \frac{\lg 2}{2} + \frac{\lg 3}{3} + \ldots + \frac{\lg n}{n} - C\lg^2 n,$$

где $C = \frac{\ln 10}{2}$; для этого нужно прежде всего точнее изучить форму кривой $y = \frac{\lg x}{x}$.

Очевидно, что при $x \to 0$ величина $\frac{\lg x}{x}$ стремится к $-\infty$; при $x = 1$ она равна нулю и при $x \to \infty$ стремится к нулю (последнее утверждение вытекает из того, что отношение числа цифр десятичной записи n к самому числу n при $n \to \infty$ стремится к нулю, а число цифр n отличается от $\lg n$ не больше чем на 1). Воспользуемся теперь тем, что

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}}<$$

$$<\sqrt[n(n+1)]{\frac{4}{n}}$$

(см. задачу 156а)); следовательно, при $n\geqslant 4$ имеет место неравенство $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$. Но $\sqrt{2}=1{,}41\ldots$, $\sqrt[3]{3}=1{,}44\ldots$ и $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}=1{,}41\ldots$, значит,

$$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\quad\text{и}\quad\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}>\ldots$$

Логарифмируя эти неравенства, получим:

$$\frac{\lg 2}{2}<\frac{\lg 3}{3}\quad\text{и}\quad\frac{\lg 3}{3}>\frac{\lg 4}{4}>\frac{\lg 5}{5}>\frac{\lg 6}{6}>\ldots$$

Отсюда видно, что величина $\frac{\lg x}{x}$ при увеличении x сначала увеличивается, затем где-то между $x=2$ и $x=4$ принимает наибольшее значение и далее уменьшается. Для того чтобы выяснить точнее, где именно между 2 и 4 принимает эта величина наибольшее значение, нужно еще дополнительное исследование.

Сравним значения $\frac{\lg 2{,}5}{2{,}5}$ и $\frac{\lg 3}{3}$. Имеем

$$\frac{\lg 2{,}5}{2{,}5}=\frac{\lg {}^{10}/_4}{{}^{10}/_4}=\frac{4(1-2\lg 2)}{10}=\frac{4(1-0{,}60206\ldots)}{10}=0{,}15917\ldots$$

и

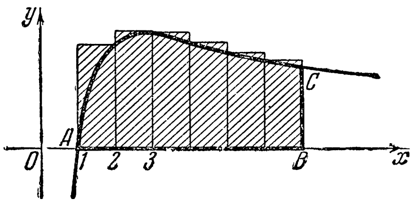
$$\frac{\lg 3}{3}=\frac{0{,}47712\ldots}{3}=0{,}15904\ldots$$

Следовательно, $\frac{\lg 2{,}5}{2{,}5}>\frac{\lg 3}{3}$, откуда ясно, что наибольшее значение $\frac{\lg x}{x}$ достигается при x, заключенном между 2 и 3 [1]).

[1]) Можно доказать, что наибольшее значение достигается при $x=e$ ($\approx 2{,}718$). Нам здесь это не понадобится.

Таким образом, кривая $y=\frac{\lg x}{x}$ действительно имеет вид, изображенный на черт. 26 (стр. 76). При этом наибольшее значение $\frac{\lg x}{x}$ не может быть больше чем $\frac{\lg 3}{2}$ (ибо $\lg x<\lg 3$ при $2<x<3$, а $x>2$).

Площадь криволинейного треугольника ABC при любом n будет меньше площади ступенчатой фигуры, заштрихованной



Черт. 157.

на черт. 157. Но площадь этой ступенчатой фигуры меньше, чем

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 4}{4}+\ldots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}$$

(площадь первого прямоугольника равна $\frac{\lg 2}{2}$, второго — меньше чем $\frac{\lg 3}{2}$, третьего — равна $\frac{\lg 3}{3}$, четвертого — равна $\frac{\lg 4}{4}$ и т. д.). Так как $\frac{\lg 1}{1}=0$, то можно записать:

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}+\frac{\lg 3}{2}>C\lg^2 n,$$

т. е.

$$\delta_n=\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\ldots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}-C\lg^2 n>-\frac{\lg 3}{2}.$$

С другой стороны, площадь криволинейного треугольника ABC больше, чем площадь криволинейной трапеции $MDEN$;

тем более, она больше, чем площадь ступенчатой фигуры, заштрихованной на черт. 158. Площадь этой ступенчатой фигуры равна

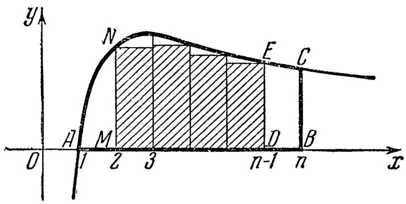
$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 4}{4}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}.$$

Итак,

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 4}{4}+\ldots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}-\frac{\lg 3}{3}<C \lg^2 n,$$

где $C=\frac{\ln 10}{2}$, т. е.

$$\delta_n=\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}-C \lg^2 n<\frac{\lg 3}{3}.$$



Черт. 158.

Так как $-\frac{\lg 3}{3}=-0{,}238\ldots$ и $\frac{\lg 3}{3}=0{,}159\ldots$, то получаем

$$-0{,}238\ldots<\delta_n<0{,}159\ldots$$

и тем более

$$-\frac{1}{4}<\delta_n<\frac{1}{4}.$$

б) Разность

$$\varepsilon_n=\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 4}{4}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}-(C \lg^2 n-C \lg^2 2),$$

где $C=\frac{\ln 10}{2}$, а $n \geqslant 3$, очевидно, равна части криволинейной трапеции $MBCN$, оставленной незаштрихованной на черт. 158. Отсюда понятно, что эта разность при увеличении n будет все время увеличиваться. Но в силу результата задачи а) величина $\varepsilon_n = \delta_n - \frac{\lg 3}{3} + C \lg^2 2$ при любом n остается меньше чем $\frac{1}{4} - \frac{\lg 3}{3} + C \lg^2 2$. Следовательно, ε_n при $n \to \infty$ стремится к определенному пределу ε. Поэтому последовательность величин $\delta_n = \varepsilon_n + \frac{\lg 3}{3} - C \lg^2 2$ при $n \to \infty$ будет также стремиться к некоторому пределу δ $\left(\delta = \varepsilon + \frac{\lg 3}{3} - C \lg^2 2\right)$.

164. Эта задача решается аналогично задаче 162а). Пусть $ABCD$ есть криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = \frac{1}{x^l}$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = n$. Рассмотрим ступенчатую фигуру из $n - 1$ прямоугольников с основанием 1, вписанную в эту криволинейную трапецию, и ступенчатую фигуру из $n - 1$ прямоугольников с основанием 1, описанную вокруг нее (см. черт. 155, *а* и *б*). Площади этих ступенчатых фигур равны

$$1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^l} \text{ и } \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^l} + \frac{1}{n^l},$$

а площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна $\dfrac{1 - \frac{1}{n^l}}{l - 1}$ (см. решение задачи 148а)). Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^l} + \frac{1}{n^l} < \frac{1 - \frac{1}{n^l}}{l - 1} <$$
$$< 1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^l},$$

или

$$\frac{1 - \frac{1}{n^l}}{l - 1} < 1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^l} < \frac{1 - \frac{1}{n^l}}{l - 1} + 1 - \frac{1}{n^l},$$

или, наконец,

$$\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l-1}\frac{1}{n^l} < 1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^l} < \frac{l}{l-1} - \frac{1}{l-1}\frac{1}{n^l}.$$

Так как $\frac{1}{n^l} \to 0$ при $n \to \infty$, то из этого неравенства вытекает утверждение задачи (то, что при $n \to \infty$ сумма $1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{n^l}$ стремится к определенному пределу, следует из того, что она увеличивается с ростом n и все время остается меньше $\frac{l}{l-1}$).

165. Обозначим r первых простых чисел через $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (выбор числа r мы произведем ниже) и вычеркнем из числа целых чисел, не превосходящих N, сначала все числа, делящиеся на p_1, затем все числа, делящиеся на p_2, затем все числа, делящиеся на p_3, и т. д. (все эти числа, кроме самих чисел $p_1, p_2, \ldots, p_r$, являются составными). Число чисел, не превосходящих N и делящихся на p_1, равно, очевидно, целой части $\left[\frac{N}{p_1}\right]$ дроби $\frac{N}{p_1}$ (относительно обозначений см. стр. 13). Число целых чисел, не превосходящих N и делящихся на p_2, равно $\left[\frac{N}{p_2}\right]$; но среди этих чисел будет $\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]$ чисел, делящихся и на p_1 и на p_2, а все эти числа мы вычеркнули раньше. Поэтому число не превосходящих N целых чисел, делящихся на p_1 или на p_2, равно

$$\left[\frac{N}{p_1}\right] + \left[\frac{N}{p_2}\right] - \left[\frac{N}{p_1p_2}\right].$$

Далее, число целых чисел, не превосходящих N и делящихся на p_3, равно $\left[\frac{N}{p_3}\right]$. Но среди этих чисел будет $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]$ чисел, делящихся на p_3 и p_1, и $\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$ целых чисел, делящихся на p_3 и на p_2; все эти числа мы уже вычеркнули раньше. Однако для того, чтобы определить число чисел, делящихся на p_3 и не делящихся ни на p_1, ни на p_2, недостаточно отнять от $\left[\frac{N}{p_3}\right]$ сумму $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right] + \left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$. В самом деле, среди $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]$ чисел, делящихся на p_3 и на p_1, и $\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$ чисел, делящихся на p_3 и на p_2, имеется $\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]$ общих чисел (это числа, делящиеся и на p_1, и на p_2, и на p_3); поэтому, вычитая из числа $\left[\frac{N}{p_3}\right]$ сумму $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$, мы все эти числа вычитаем дважды. Отсюда следует, что число не превосходящих N чисел, делящихся на p_1, или на p_2, или на p_3, равно

$$\left[\frac{N}{p_1}\right]+\left[\frac{N}{p_2}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]+\\ +\left\{\left[\frac{N}{p_3}\right]-\left(\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]\right)\right\}=\\ =\left[\frac{N}{p_1}\right]+\left[\frac{N}{p_2}\right]+\left[\frac{N}{p_3}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]-\\ -\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]$$ [1].

Совершенно аналогично показывается, что общее число не превосходящих N чисел, делящихся на p_1, или на p_2, или на $p_3, \ldots$, или на p_r, равно

$$\left[\frac{N}{p_1}\right]+\left[\frac{N}{p_2}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_r}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]-\ldots-\left[\frac{N}{p_{r-1}p_r}\right]+\\ +\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2p_4}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_{r-2}p_{r-1}p_r}\right]-\ldots\\ \ldots+(-1)^{r-1}\left[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r}\right]$$ [2],

а следовательно, среди чисел $1, 2, 3, \ldots, N$ имеется

$$N-\left[\frac{N}{p_1}\right]-\left[\frac{N}{p_2}\right]-\ldots-\left[\frac{N}{p_r}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]+\ldots\\ \ldots+\left[\frac{N}{p_{r-1}p_r}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2p_4}\right]-\ldots\\ \ldots-\left[\frac{N}{p_{r-2}p_{r-1}p_r}\right]+\ldots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r}\right]$$

чисел, не делящихся ни на p_1, ни на p_2, ни на $p_3, \ldots$, ни на p_r.

---

[1]) Ср. с задачей 11.

[2]) Полное доказательство нетрудно получить с помощью принципа математической индукции (ср. с первым решением задачи 78а)).

Последняя формула позволяет оценить число простых чисел, не превосходящих N. А именно, такими числами являются r чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ и еще какие-то числа, не делящиеся ни на p_1, ни на $p_2, \ldots$, ни на p_r. Следовательно,

$$\pi(N) \leqslant r + \left\{N - \left[\frac{N}{p_1}\right] - \left[\frac{N}{p_2}\right] - \ldots - \left[\frac{N}{p_r}\right] + \left[\frac{N}{p_1p_2}\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{N}{p_1p_3}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{p_{r-1}p_r}\right] - \ldots + (-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r}\right]\right\}.$$

Упростим теперь последнее выражение. Если мы отбросим в фигурных скобках во всех дробях знак целой части, то придем к выражению

$$N - \frac{N}{p_1} - \frac{N}{p_2} - \ldots - \frac{N}{p_r} + \frac{N}{p_1p_2} + \frac{N}{p_1p_3} + \ldots + \frac{N}{p_{r-1}p_r} -$$
$$- \frac{N}{p_1p_2p_3} - \frac{N}{p_1p_2p_4} - \ldots - \frac{N}{p_{r-2}p_{r-1}p_r} + \ldots + (-1)^r\frac{N}{p_1p_2\ldots p_r},$$

равному, как легко видеть, произведению

$$N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Отсюда видно, что число членов в рассматриваемом выражении равно 2^r. Так как, отбрасывая у каждой дроби знак целой части, мы допускаем ошибку, меньшую 1, то можно утверждать, что

$$\pi(N) < r + 2^r + N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) <$$
$$< 2^r + 2^r + N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) =$$
$$= 2^{r+1} + N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Теперь условимся выбрать число r таким, чтобы было

$$2^{r+1} > \sqrt{N},$$

т. е.

$$r + 1 < \frac{1}{2}\log_2 N;$$

например, будем считать, что $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие числа $n = \left[\frac{1}{2}\log_2 N\right] - 1$ (при этом с изменением числа N будет, разумеется, меняться и номер r). Тогда согласно предыдущему равенству отношение числа $\pi(N)$ к числу N будет заведомо меньше, чем

$$\frac{2^{\frac{1}{2}\log_2 N}}{N}+\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{N}}{N}+\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

При N, неограниченно возрастающем, первый член этого выражения стремится к нулю. Для того чтобы завершить доказательство, надо только доказать, что и второй член стремится к нулю.

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие некоторого целого числа n. Наша задача будет полностью решена, если мы покажем, что это выражение неограниченно возрастает при увеличении n.

По формуле для суммы членов геометрической прогрессии имеем:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots>1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^k},$$

k — к а к о е   у г о д н о целое число. Следовательно,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}}>\left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\ldots+\frac{1}{p_1^k}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_2^k}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_r}+\frac{1}{p_r^2}+\ldots+\frac{1}{p_r^k}\right).$$

Раскрыв в последнем выражении скобки, мы получим сумму дробей, числители которых равны единице, а в знаменателях стоят какие-то целые числа. При этом, выбрав k достаточно большим, мы можем добиться, чтобы в знаменателе стояли в с е целые числа, не превосходящие n. Следовательно, имеем:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Но сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

может быть сделана сколь угодно большой, для чего достаточно только выбрать n достаточно большим (см., например, задачу 162). Отсюда следует, что произведение

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}}$$

может быть сделано сколь угодно большим, а следовательно, произведение

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}}$$

может быть сделано сколь угодно малым. Этим и завершается доказательство.

166. Рассмотрим выражение

$$C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

и оценим двумя способами величину этого выражения.

Во-первых, в силу формулы бинома Ньютона имеем:

$$1+C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+\ldots+C_{2n}^{n}+\ldots+C_{2n}^{2n-1}+1=(1+1)^{2n}=\\=2^{2n},$$

и, следовательно,

$$C_{2n}^{n}<2^{2n};$$

с другой стороны,

$$C_{2n}^{n}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=\frac{2n}{n}\,\frac{2n-1}{n-1}\,\frac{2n-2}{n-2}\cdots\frac{n+1}{1}>\\>\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2}_{n\text{ раз}}=2^n,$$

так что

$$2^n<C_{2n}^{n}<2^{2n}. \qquad (*)$$

Во-вторых, оценим то же самое число, рассматривая все простые числа, входящие в разложение этого целого числа на простые множители. Очевидно, в разложение числа

$C_{2n}^{n}=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$ входят только простые числа, не превосходящие $2n$. Далее, простое число p входит в разложение на простые множители числа $k!=1\cdot 2\cdot 3\ldots k$ в степени

$$\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\ldots,$$

где прямые скобки обозначают целую часть числа[1]) (легко видеть, что среди сомножителей числа $k!=1\cdot 2\cdot 3\ldots k$ имеется $\left[\frac{k}{p}\right]$ чисел, делящихся на p; среди них $\left[\frac{k}{p^2}\right]$ чисел, делящихся на p^2; среди них $\left[\frac{k}{p^3}\right]$ чисел, делящихся на p^3, и т. д.). Таким образом, в разложение числа $C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ на простые множители входят простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_r$, не превосходящие $2n$, причем каждое простое число p_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ в степени

$$\left[\frac{2n}{p_i}\right]+\left[\frac{2n}{p_i^2}\right]+\ldots+\left[\frac{2n}{p_i^{q_i}}\right]-$$
$$-2\left(\left[\frac{n}{p_i}\right]+\left[\frac{n}{p_i^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p_i^{q_i}}\right]\right)=\left(\left[\frac{2n}{p_i}\right]-2\left[\frac{n}{p_i}\right]\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{2n}{p_i^2}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^2}\right]\right)+\ldots+\left(\left[\frac{2n}{p_i^{q_i}}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^{q_i}}\right]\right),$$

где q_i есть наибольшее целое число, такое, что $p_i^{q_i}\leqslant 2n$. Но в силу определения целой части числа, каково бы ни было число a,

$$2\left[\frac{a}{2}\right]=\begin{cases}[a], & \text{если } \frac{a}{2}-\left[\frac{a}{2}\right]<\frac{1}{2},\\ [a]-1, & \text{если } \frac{a}{2}-\left[\frac{a}{2}\right]\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

т. е. $[a]-2\left[\frac{a}{2}\right]=0$ или 1; следовательно, сумма

$$\left(\left[\frac{2n}{p_i}\right]-2\left[\frac{n}{p_i}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p_i^2}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^2}\right]\right)+\ldots+\left(\left[\frac{2n}{p_i^{q_i}}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^{q_i}}\right]\right)$$

не превосходит $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{q_i \text{ раз}}=q_i$. Таким образом,

[1]) Относительно обозначений см. стр. 13.

p_i входит множителем в разложение числа C_{2n}^n в степени не выше, чем q_i; поэтому

$$C_{2n}^n \leqslant p_1^{q_1} p_2^{q_2} \ldots p_r^{q_r} \leqslant (2n)(2n)\ldots(2n) = (2n)^r.$$

Но $r = \pi(2n)$ (число простых чисел, не превосходящих $2n$); поэтому последнее неравенство можно записать в виде

$$C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}.$$

С другой стороны, $C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\ldots n}$ делится на произведение всех простых чисел $p_{s+1}, p_{s+2}, \ldots, p_r$, бо́льших n, но не бо́льших $2n$ (через $p_1, p_2, \ldots, p_s$ мы обозначаем все простые числа, не превосходящие n); следовательно,

$$C_{2n}^n \geqslant p_{s+1} p_{s+2} \ldots p_r.$$

Заменяя каждое из этих простых чисел меньшим числом n, получим

$$C_{2n}^n > n \cdot n \ldots n = n^{r-s}.$$

Но $r = \pi(2n)$, а $s = \pi(n)$ (число простых чисел, не превосходящих n). Таким образом, окончательно имеем:

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}. \qquad (**)$$

Из сравнения неравенств (*) и (**) и выводятся требуемые теоремы.

1°. Сопоставляя неравенства (*) и (**), получаем:

$$2^n < (2n)^{\pi(2n)}.$$

Логарифмируя, имеем отсюда

$$\pi(2n) \lg(2n) > n \lg 2,$$

т. е.

$$\pi(2n) > \frac{\lg 2}{2} \frac{2n}{\lg(2n)} = 0{,}15051\ldots \frac{2n}{\lg(2n)}.$$

Таким образом, для четных значений $N = 2n$ мы уже получили одно из требуемых неравенств. Для нечетных значений N такое же неравенство можно вывести из полученного, если заметить, что $\frac{2n}{2n+1} \geqslant \frac{2}{3}$. Отсюда

$$\pi(2n+1)\lg(2n+1) > \pi(2n)\lg(2n) > 0{,}15051\ldots\cdot 2n >$$
$$> \frac{2}{3}\cdot 0{,}15051\ldots(2n+1) = 0{,}10034\ldots(2n+1);$$

следовательно,

$$\pi(2n+1) > 0{,}10034\ldots\frac{(2n+1)}{\lg(2n+1)}.$$

Таким образом, для всякого N имеем:

$$\pi(N) > 0{,}1\,\frac{N}{\lg N}. \qquad \text{(I)}$$

2°. Несколько сложнее доказывается второе из требуемых неравенств. Прежде всего, сравнивая неравенства (*) и (**), получаем:

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < 2^{2n},$$

откуда, логарифмируя, имеем $[\pi(2n)-\pi(n)]\lg n < 2n\lg 2$, т. е.

$$\pi(2n)-\pi(n) < 2\lg 2\,\frac{n}{\lg n} = 0{,}60206\ldots\frac{n}{\lg n}.$$

Пусть теперь x есть какое угодно (даже не обязательно целое!) положительное число; через $\pi(x)$ мы, как раньше, будем обозначать число простых чисел, не превосходящих x. Обозначим $\left[\frac{x}{2}\right]$ через n; тогда, очевидно, $[x]=2n$ или $2n+1$, и мы будем иметь:

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \pi(2n)-\pi(n)+1 <$$
$$< 0{,}60206\ldots\cdot\frac{n}{\lg n}+1 < 1{,}60206\ldots\cdot\frac{n}{\lg n}$$

$\left(\text{ибо } \frac{n}{\lg n} > 1\right)$. Нетрудно показать, что при $n \geqslant 3$ из $n < x$ вытекает, что $\frac{n}{\lg n} < \frac{x}{\lg x}$ [1]); следовательно, при $\left[\frac{x}{2}\right] \geqslant 3$

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right) < 1{,}60206\ldots\frac{x}{\lg x}.$$

---

[1]) См. график функции $\frac{\lg x}{x}$ на стр. 76 и относящийся к этому графику текст в решении задачи 163а)

Легко проверить, что последнее неравенство будет верно и при $\left[\frac{x}{2}\right]<3$: в самом деле, если $\left[\frac{x}{2}\right]<3$, то разность $\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)$, очевидно, может быть равна двум (при $2,5\leqslant\frac{x}{2}<3$), единице или нулю; во всех этих случаях произведение $1,60206\ldots\frac{x}{\lg x}$ будет принимать большее значение. Таким образом, при любом (целом или не целом) положительном x

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)<1,60206\ldots\frac{x}{\lg x}.$$

Из выведенного неравенства далее получаем:

$$\begin{aligned}&\pi(x)\lg x-\pi\left(\frac{x}{2}\right)\lg\frac{x}{2}=\\&=\left[\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)\right]\lg x+\pi\left(\frac{x}{2}\right)\left(\lg x-\lg\frac{x}{2}\right)<\\&<\lg x\cdot 1,60206\ldots\frac{x}{\lg x}+\lg 2\cdot\pi\left(\frac{x}{2}\right)<\\&<\left(1,60206\ldots+\frac{\lg 2}{2}\right)x\approx 1,75257\,x\end{aligned}$$

$\left[\text{здесь мы воспользовались тем, что, очевидно, } \pi\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{x}{2}\right].$

Пусть теперь N — произвольное целое число. В силу доказанного имеем:

$$\begin{aligned}&\pi(N)\lg N-\pi\left(\frac{N}{2}\right)\lg\frac{N}{2}<1,75257\ldots\cdot N,\\&\pi\left(\frac{N}{2}\right)\lg\frac{N}{2}-\pi\left(\frac{N}{4}\right)\lg\frac{N}{4}<1,75257\ldots\cdot\frac{N}{2},\\&\pi\left(\frac{N}{4}\right)\lg\frac{N}{4}-\pi\left(\frac{N}{8}\right)\lg\frac{N}{8}<1,75257\ldots\cdot\frac{N}{4},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\pi\left(\frac{N}{2^{k-1}}\right)\lg\frac{N}{2^{k-1}}-\pi\left(\frac{N}{2^k}\right)\lg\frac{N}{2^k}<1,75257\ldots\cdot\frac{N}{2^{k-1}};\end{aligned}$$

k мы выберем так, чтобы было $2^k>N$. Сложив все эти неравенства, получаем:

$$\pi(N)\lg N-\pi\left(\frac{N}{2^k}\right)\lg\frac{N}{2^k}<$$
$$<1{,}75257\ldots\cdot\left(N+\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\ldots+\frac{N}{2^{k-1}}\right)=$$
$$=1{,}75257\ldots\cdot\frac{N-\frac{N}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}<3{,}50514\ldots\cdot N<4N.$$

Но согласно нашему выбору числа k дробь $\frac{N}{2^k}$ меньше 1 и, следовательно, $\pi\left(\frac{N}{2^k}\right)=0$. Таким образом, мы получаем:

$$\pi(N)<4\frac{N}{\lg N}, \qquad \text{(II)}$$

что и требовалось доказать.

167. Будем исходить из разложения числа $N!=1\cdot2\cdot3\ldots N$ на простые множители:

$$N!=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие N, а α_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ равно

$$\left[\frac{N}{p_i}\right]+\left[\frac{N}{p_i^2}\right]+\left[\frac{N}{p_i^3}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_i^{q_i}}\right],$$

где прямые скобки обозначают целую часть числа, q_i — наибольшее целое число, такое, что $p_i^{q_i}<N$ (см. начало решения задачи 166). Логарифмируя эту формулу, получим:

$$\lg N!=\alpha_1\lg p_1+\alpha_2\lg p_2+\ldots+\alpha_r\lg p_r.$$

Оценим теперь величину выражения $\lg N!$ двумя различными способами. Правая часть последней формулы имеет вид

$$\left(\left[\frac{N}{p_1}\right]+\left[\frac{N}{p_1^2}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_1^{q_1}}\right]\right)\lg p_1+$$
$$+\left(\left[\frac{N}{p_2}\right]+\left[\frac{N}{p_2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_2^{q_2}}\right]\right)\lg p_2+\ldots$$
$$\ldots+\left(\left[\frac{N}{p_r}\right]+\left[\frac{N}{p_r^2}\right]+\ldots+\left[\frac{N}{p_r^{q_r}}\right]\right)\lg p_r.$$

Откинем всюду в этом выражении квадратные скобки, т. е. заменим все целые части дробей самими дробями. Так как целая часть числа отличается от самого числа не больше чем на единицу, то допущенная ошибка не будет превышать

$$\begin{aligned}&q_1 \lg p_1 + q_2 \lg p_2 + \ldots + q_r \lg p_r = \\ &= \lg p_1^{q_1} + \lg p_2^{q_2} + \ldots + \lg p_r^{q_r} \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{\lg N + \lg N + \ldots + \lg N}_{r \text{ раз}} = r \lg N.\end{aligned}$$

Но $r = \pi(N)$ в силу предыдущей задачи меньше $B\frac{N}{\lg N}$, где B — некоторая постоянная; в частности, можно принять $B = 4$. Поэтому

$$r \lg N < B\frac{N}{\lg N} \lg N = BN.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{N}{p_1} + \frac{N}{p_1^2} + \ldots + \frac{N}{p_1^{q_1}}\right) \lg p_1 + \left(\frac{N}{p_2} + \frac{N}{p_2^2} + \ldots + \frac{N}{p_2^{q_2}}\right) \lg p_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \left(\frac{N}{p_r} + \frac{N}{p_r^2} + \ldots + \frac{N}{p_r^{q_r}}\right) \lg p_r \geqslant \lg N! > \\ &> \left(\frac{N}{p_1} + \frac{N}{p_1^2} + \ldots + \frac{N}{p_1^{q_1}}\right) \lg p_1 + \left(\frac{N}{p_2} + \frac{N}{p_2^2} + \ldots + \frac{N}{p_2^{q_2}}\right) \lg p_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \left(\frac{N}{p_r} + \frac{N}{p_r^2} + \ldots + \frac{N}{p_r^{q_r}}\right) \lg p_r - BN.\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$\frac{N}{p_i} + \frac{N}{p_i^2} + \ldots + \frac{N}{p_i^{q_i}} \geqslant \frac{N}{p_i}$$

и

$$\frac{N}{p_i} + \frac{N}{p_i^2} + \ldots + \frac{N}{p_i^{q_i}} = \frac{\frac{N}{p_i} - \frac{N}{p_i^{q_i+1}}}{1 - \frac{1}{p_i}} < \frac{\frac{N}{p_i}}{1 - \frac{1}{p_i}} = \frac{N}{p_i - 1}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{N}{p_1-1}\lg p_1+\frac{N}{p_2-1}\lg p_2+\ldots+\frac{N}{p_r-1}\lg p_r>\lg N!>$$
$$>\frac{N}{p_1}\lg p_1+\frac{N}{p_2}\lg p_2+\ldots+\frac{N}{p_r}\lg p_r-BN.$$

Мы утверждаем, что из последнего двойного неравенства следует

$$N\left\{\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}+K\right\}>\lg N!>$$
$$>N\left\{\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}-B\right\}, \qquad (*)$$

где K есть некоторое постоянное число, которое можно оценить. Действительно,

$$\frac{\lg p_i}{p_i-1}-\frac{\lg p_i}{p_i}=\frac{\lg p_i}{p_i(p_i-1)} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

так что сумма, стоящая в левой части неравенства (*), отличается от выражения, которое стоит слева в ранее полученном неравенстве, на

$$N\left\{\frac{\lg p_1}{p_1(p_1-1)}+\frac{\lg p_2}{p_2(p_2-1)}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r(p_r-1)}\right\}.$$

Докажем, что при любом r стоящая в скобках сумма меньше некоторого постоянного числа. Заметим, что для каждого целого числа $a\geqslant 2$:

$$\frac{\lg a}{a(a-1)}<\frac{1}{a\sqrt{a}}, \text{ т. е. } \lg a<\frac{a-1}{\sqrt{a}}.$$

Действительно, при целом $a\geqslant 2$

$$2\left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)=2\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}}{a}\right)\geqslant 2\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)=\sqrt{a},$$

а

$$2\lg a<\sqrt{a}, \quad \text{ибо} \quad 10^{2\lg a}=a^2<10^{\sqrt{a}}$$

(когда a^2 заключено между 10^k и 10^{k+1}, то число цифр числа $10^{\sqrt{a}}$, равное целой части $\sqrt{a}$ плюс 1, заведомо больше

$k+2$). Отсюда вытекает, что

$$\frac{\lg p_1}{p_1(p_1-1)}+\frac{\lg p_2}{p_2(p_2-1)}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r(p_r-1)}<$$
$$<\frac{1}{p_1\sqrt{p_1}}+\frac{1}{p_2\sqrt{p_2}}+\ldots+\frac{1}{p_r\sqrt{p_r}}<$$
$$<1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{N\sqrt{N}}.$$

Но последняя сумма остается ограниченной при всяком N:

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{N\sqrt{N}}<\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}-1}=3$$

(см. задачу 164). Таким образом, за число K в неравенстве (*) можно принять, например, 3.

Для того чтобы оценить другим способом $\lg N!$, воспользуемся тем, что при всяком N

$$C_1\sqrt{N}\left(\frac{N}{e}\right)^N>N!>C_2\sqrt{N}\left(\frac{N}{e}\right)^N,$$

где $C_1=e$, $C_2=\sqrt{\frac{4}{5}e}$ (см. выше задачу 160). Логарифмируя, получаем отсюда:

$$N\{\lg N-\lg e\}+\frac{1}{2}\lg N+\lg C_1>\lg N!>$$
$$>N\{\lg N-\lg e\}+\frac{1}{2}\lg N+\lg C_2,$$

или, если воспользоваться тем, что $\frac{1}{2}\frac{\lg N}{N}\leqslant\frac{1}{2}\frac{\lg 3}{3}<0{,}08$ при $N\geqslant 3$ (см. решение задачи 163а)), а $\lg\frac{C_1}{N}\leqslant\frac{\lg e}{3}<0{,}15$,

$$N\{\lg N-\lg e+0{,}23\}>\lg N!>N\{\lg N-\lg e\}. \qquad (**)$$

Сравнивая между собой неравенства (*) и (**), получаем:

$$\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}+K<\lg N-\lg e,$$
$$\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}-B<\lg N-\lg e+0{,}23,$$

откуда и следует требуемый результат:

$$\lg N+R>\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}>\lg N-R,$$

где за R можно принять наибольшее из чисел $B-\lg e+0{,}23$ и $K+\lg e$. Так как постоянным B и K можно придать значения 4 и 3 и $\lg e \approx 0{,}4343$, то можно положить, например, $R=4$.

168. а) Из определения величин $B_1, B_2, \ldots, B_n$ имеем:
$b_1=B_1,\ b_2=B_2-B_1,\ b_3=B_3-B_2,\ \ldots,\ b_n=B_n-B_{n-1}$.

Таким образом,

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n=$$
$$=a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+a_3(B_3-B_2)+\ldots+a_n(B_n-B_{n-1}),$$

или, группируя члены по-иному,

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n=$$
$$=(a_1-a_2)B_1+(a_2-a_3)B_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+a_nB_n,$$

что и требовалось доказать.

б) 1) Если мы положим в формуле задачи а)

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ \ldots,\ a_n=n;$$
$$b_1=1,\ b_2=q,\ b_3=q^2,\ \ldots,\ b_n=q^{n-1},$$

то будем иметь:

$$B_1=1\left(=\frac{q-1}{q-1}\right),\quad B_2=1+q=\frac{q^2-1}{q-1},$$
$$B_3=1+q+q^2=\frac{q^3-1}{q-1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ B_{n-1}=1+q+q^2+\ldots+q^{n-2}=\frac{q^{n-1}-1}{q-1},$$
$$B_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$$

и

$$a_1-a_2=a_2-a_3=a_3-a_4=\ldots=a_{n-1}-a_n=-1.$$

Таким образом, получаем:

$$1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}=$$
$$=-\left(\frac{q-1}{q-1}+\frac{q^2-1}{q-1}+\ldots+\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)+n\,\frac{q^n-1}{q-1}=$$
$$=-\frac{1}{q-1}(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}-n)+n\,\frac{q^n-1}{q-1}=$$
$$=-\frac{1}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}-n\right)+n\,\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}.$$

2) Если мы положим в формуле задачи а)

$$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=9,\ \ldots,\ a_n=n^2;$$
$$b_1=1,\ b_2=q,\ b_3=q^2,\ \ldots,\ b_n=q^{n-1},$$

то $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ будут иметь те же значения, что и раньше, а

$$a_1-a_2=-3,\ a_2-a_3=-5,\ a_3-a_4=-7,\ \ldots$$
$$\ldots,\ a_{n-1}-a_n=(n-1)^2-n^2=-(2n-1).$$

Таким образом, получаем:

$$1+4q+9q^2+\ldots+n^2q^{n-1}=-\left(3\frac{q-1}{q-1}+5\frac{q^2-1}{q-1}+\right.$$
$$\left.+7\frac{q^3-1}{q-1}+\ldots+(2n-1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=$$
$$=\left(\frac{q-1}{q-1}+\frac{q^2-1}{q-1}+\frac{q^3-1}{q-1}+\ldots+\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)-$$
$$-2\left(2\frac{q-1}{q-1}+3\frac{q^2-1}{q-1}+\ldots+n\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=$$
$$=\frac{1}{q-1}(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}-n)-$$
$$-\frac{2}{q-1}\left(1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}\right)+$$
$$+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}-n\right)-$$
$$-\frac{2}{q-1}\left[\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}-\frac{n(n+1)}{2}\right]+n^2\frac{q^n-1}{q-1}=$$
$$=\frac{n^2q^n}{q-1}-\frac{(2n-1)q^n+1}{(q-1)^2}+\frac{2q^n-2}{(q-1)^3}$$

(здесь мы воспользовались тем, что в силу пункта 1)

$$1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}=\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}\Bigg).$$

169. а) Для того чтобы оценить сумму ряда

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_r},$$

где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие некоторого целого числа N, положим в формуле задачи 168а)

$$a_1=\frac{1}{\lg p_1},\quad a_2=\frac{1}{\lg p_2},\quad a_3=\frac{1}{\lg p_3},\quad \ldots,\quad a_r=\frac{1}{\lg p_r},$$

$$b_1=\frac{\lg p_1}{p_1},\quad b_2=\frac{\lg p_2}{p_2},\quad b_3=\frac{\lg p_3}{p_3},\quad \ldots,\quad b_r=\frac{\lg p_r}{p_r}.$$

Если мы обозначим

$$\frac{\lg p_1}{p_1}=B_1,$$
$$\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}=B_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}=B_r,$$

то будем иметь:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_r}=$$
$$=\left(\frac{1}{\lg p_1}-\frac{1}{\lg p_2}\right)B_1+\left(\frac{1}{\lg p_2}-\frac{1}{\lg p_3}\right)B_2+$$
$$+\left(\frac{1}{\lg p_3}-\frac{1}{\lg p_4}\right)B_3+\ldots+\left(\frac{1}{\lg p_{r-1}}-\frac{1}{\lg p_r}\right)B_{r-1}+\frac{1}{\lg p_r}B_r=$$
$$=\left(\frac{1}{\lg p_1}-\frac{1}{\lg p_2}\right)B_1+\left(\frac{1}{\lg p_2}-\frac{1}{\lg p_3}\right)B_2+$$
$$+\left(\frac{1}{\lg p_3}-\frac{1}{\lg p_4}\right)B_3+\ldots+\left(\frac{1}{\lg p_{r-1}}-\frac{1}{\lg p_r}\right)B_{r-1}+$$
$$+\left(\frac{1}{\lg p_r}-\frac{1}{\lg N}\right)B_r+\frac{1}{\lg N}B_r.$$

Теперь нам осталось оценить последнее выражение. Прежде всего воспользуемся тем, что в силу первой формулы Мертенса (см. задачу 167)

$$B_1<\lg p_1+R,$$
$$B_2<\lg p_2+R,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{r-1}<\lg p_r+R,$$
$$B_r<\lg p_r+R \text{ и } B_r<\lg N+R;$$

здесь R есть постоянное число (за R можно принять, например, число 4). Таким образом, получаем:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_r}<$$

$$<\left(\frac{1}{\lg p_1}-\frac{1}{\lg p_2}\right)(\lg p_1+R)+\left(\frac{1}{\lg p_2}-\frac{1}{\lg p_3}\right)(\lg p_2+R)+$$

$$+\left(\frac{1}{\lg p_3}-\frac{1}{\lg p_4}\right)(\lg p_3+R)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{\lg p_{r-1}}-\frac{1}{\lg p_r}\right)(\lg p_{r-1}+R)+$$

$$+\left(\frac{1}{\lg p_r}-\frac{1}{\lg N}\right)(\lg p_r+R)+\frac{1}{\lg N}(\lg N+R)=$$

$$=1+\left[-\frac{1}{\lg p_2}\lg p_1+\left(\frac{1}{\lg p_2}-\frac{1}{\lg p_3}\right)\lg p_2+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{\lg p_3}-\frac{1}{\lg p_4}\right)\lg p_3+\ldots+\left(\frac{1}{\lg p_{r-1}}-\frac{1}{\lg p_r}\right)\lg p_{r-1}+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\lg p_r}-\frac{1}{\lg N}\right)\lg p_r+\frac{1}{\lg N}\lg N\right]+R\frac{1}{\lg p_1},$$

ибо в сумме членов со множителем R все члены, кроме $R\frac{1}{\lg p_1}$, взаимно уничтожаются.

Нам остается только оценить сумму в квадратных скобках. Но это нетрудно сделать геометрически. Для этого представим ее в виде

$$(\lg p_2-\lg p_1)\frac{1}{\lg p_2}+(\lg p_3-\lg p_2)\frac{1}{\lg p_3}+$$

$$+(\lg p_4-\lg p_3)\frac{1}{\lg p_4}+\ldots+(\lg p_r-\lg p_{r-1})\frac{1}{\lg p_r}+$$

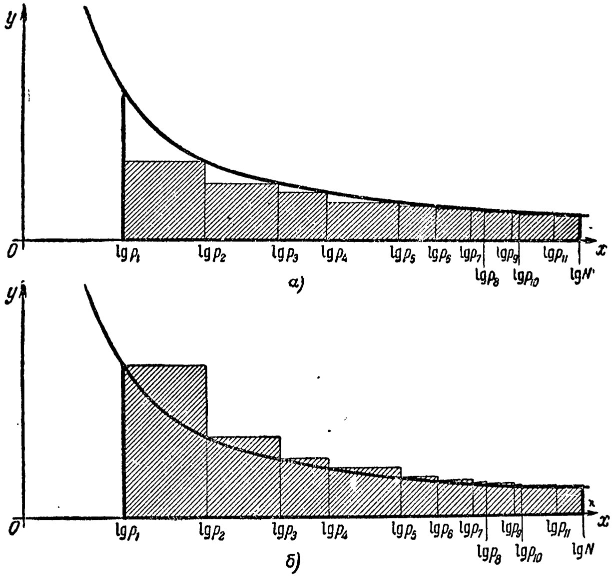
$$+(\lg N-\lg p_r)\frac{1}{\lg N}.$$

Теперь рассмотрим черт. 159, *а*, на котором изображена гипербола $y=\frac{1}{x}$. Очевидно, интересующая нас сумма равна площади фигуры, заштрихованной на чертеже, и, следовательно, она меньше площади, ограниченной гиперболой, осью Ox и прямыми $y=\lg p_1$ и $y=\lg N$, равной $\ln(\lg N)-\ln(\lg p_1)$ (первый логарифм натуральный; см. задачу 152).

Таким образом, окончательно получаем:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_r}<\ln\lg N-\ln\lg p_1+R\frac{1}{\lg p_1}+1. \quad (*)$$

Таким образом, мы нашли число, заведомо б о л ь ш е е нашей суммы. Для того чтобы найти число м е н ь ш е е ее



Черт. 159.

(и тем самым определить границы, внутри которых сумма может заключаться), преобразуем несколько первую теорему Мертенса. В силу этой теоремы

$$B_i=\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_i}{p_i}>$$

$$>\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_i}{p_i}+\frac{\lg p_{i+1}}{p_{i+1}}-a>\lg p_{i+1}-R-a$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

где a — постоянное число, выбранное так, что $a\geqslant\frac{\lg p_{i+1}}{p_{i+1}}$ при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ r$ (за a можно принять, например, число $\frac{\lg 3}{3}$

или число $0{,}16 > \frac{\lg 3}{3}$; см. решение задачи 163$\Big)$. Кроме того, воспользуемся тем, что

$$\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\frac{\lg p_3}{p_3}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}>\lg N-R-a$$

(согласно первой теореме Мертенса слагаемое $-a$ в правой части даже излишне, но нам оно будет удобно). Тогда получим:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_r}>$$
$$>\left(\frac{1}{\lg p_1}-\frac{1}{\lg p_2}\right)(\lg p_2-R-a)+$$
$$+\left(\frac{1}{\lg p_2}-\frac{1}{\lg p_3}\right)(\lg p_3-R-a)+$$
$$+\left(\frac{1}{\lg p_3}-\frac{1}{\lg p_4}\right)(\lg p_4-R-a)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{\lg p_{r-1}}-\frac{1}{\lg p_r}\right)(\lg p_r-R-a)+$$
$$+\left(\frac{1}{\lg p_r}-\frac{1}{\lg N}\right)(\lg N-R-a)+\frac{1}{\lg N}(\lg N-R-a)=$$
$$=\Big[(\lg p_2-\lg p_1)\frac{1}{\lg p_1}+(\lg p_3-\lg p_2)\frac{1}{\lg p_2}+$$
$$+(\lg p_4-\lg p_3)\frac{1}{\lg p_3}+\ldots+(\lg p_r-\lg p_{r-1})\frac{1}{\lg p_{r-1}}+$$
$$+(\lg N-\lg p_r)\frac{1}{\lg p_r}\Big]+1-(R+a)\frac{1}{\lg p_1}$$

$\Big($в квадратных скобках отсутствует член $\frac{1}{\lg N}\lg N$ преобразуемой суммы; зато есть лишний член $\frac{1}{\lg p_1}\lg p_1\Big)$. Здесь сумма в квадратных скобках, как легко видеть, больше площади, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью Ox и прямыми $y=\lg N$ и $y=\lg p_1$ (см. черт. 159, *б*, на котором площадь заштрихованной фигуры равна нашей сумме). Таким образом,

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_r}>$$
$$>\ln\lg N-\ln\lg p_1-(R+a)\frac{1}{\lg p_1}+1. \qquad (**)$$

Чтобы избежать использования в одной формуле логарифмов при двух различных основаниях, перейдем всюду к натуральным логарифмам. А именно, воспользуемся тем, что

$$\lg N = M \ln N,$$

где M есть модуль перехода[1]):

$$M = \lg e = 0{,}434 \ldots$$

Таким образом, наши оценки (*) и (**) для суммы

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r}$$

принимают вид

$$\ln \ln N + \ln M - \ln \lg 2 + \frac{R}{\lg 2} + 1 >$$
$$> \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r} >$$
$$> \ln \ln N + \ln M - \ln \lg 2 - \frac{R+a}{\lg 2} + 1$$

(напоминаем, что p_1 есть первое простое число, т. е. $p_1 = 2$). Отсюда и следует, что существует такое число T, что интересующая нас сумма заключается между $\ln \ln N + T$ и $\ln \ln N - T$ (за T можно принять наибольшее из чисел $\frac{R}{\lg 2} + 1 + \ln M - \ln \lg 2$ и $\frac{R+a}{\lg 2} - 1 - \ln M + \ln \lg 2$; так как постоянным $\frac{R}{\lg 2}$, $\frac{R+a}{\lg 2}$, $\ln M$ и $\ln \lg 2$ можно придать значения $\frac{4}{0{,}301\ldots} < 13\frac{1}{2}$, соответственно $\frac{4{,}16}{0{,}301\ldots} < 13\frac{1}{2}$, $\ln 0{,}434\ldots = -0{,}833\ldots$ и $\ln 0{,}301\ldots = -1{,}20\ldots$, то за T можно принять, например, число 15).

---

1) Напомним доказательство формулы $\lg N = \lg e \ln N$. Мы имеем:

$$N = 10^{\lg N}$$

и

$$N = e^{\ln N} = (10^{\lg e})^{\ln N} = 10^{\lg e \ln N}.$$

Из сравнения этих двух формул и вытекает требуемый результат.

б) Будем с самого начала пользоваться только натуральными логарифмами. Обозначим

$$B_1=\frac{\ln p_1}{p_1},\quad B_2=\frac{\ln p_1}{p_1}+\frac{\ln p_2}{p_2},\ \ldots$$
$$\ldots,\ B_n=\frac{\ln p_1}{p_1}+\frac{\ln p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\ln p_n}{p_n}$$

и введем в рассмотрение разности

$$\alpha_1=B_1-\ln p_1,\quad \alpha_2=B_2-\ln p_2,\quad \alpha_3=B_3-\ln p_3,\ \ldots;$$

пусть, кроме того,

$$\alpha^{(N)}=B_r-\ln N,$$

где p_r — наибольшее простое число, не превосходящее целого числа N.

Из первой теоремы Мертенса (задача 167) следует, что все эти разности будут ограничены — по абсолютной величине они все будут меньше числа $\frac{4}{0,434\ldots}<10$ [1]). Используя результат задачи 168 аналогично решению задачи а), легко показать, что

$$\varepsilon^{(N)}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_r}-\ln\ln N=\varepsilon_1^{(N)}+\varepsilon_2^{(N)},$$

где

$$\varepsilon_1^{(N)}=\alpha_1\left(\frac{1}{\ln p_1}-\frac{1}{\ln p_2}\right)+\alpha_2\left(\frac{1}{\ln p_2}-\frac{1}{\ln p_3}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_{r-1}\left(\frac{1}{\ln p_{r-1}}-\frac{1}{\ln p_r}\right)+\alpha_r\left(\frac{1}{\ln p_r}-\frac{1}{\ln N}\right)+\alpha^{(N)}\frac{1}{\ln N}$$

---

[1]) Ибо

$$\frac{\ln p_1}{p_1}+\frac{\ln p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\ln p_k}{p_k}-\ln p_k=$$
$$=\frac{1}{M}\left(\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_k}{p_k}-\lg p_k\right),$$

где $M=0,434\ldots$ (см. сноску на стр. 514), и

$$\left|\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\frac{\lg p_3}{p_3}+\ldots+\frac{\lg p_k}{p_k}-\lg p_k\right|<4.$$

и

$$\varepsilon_2^{(N)} = \ln p_1\left(\frac{1}{\ln p_1} - \frac{1}{\ln p_2}\right) + \ln p_2\left(\frac{1}{\ln p_2} - \frac{1}{\ln p_3}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \ln p_{r-1}\left(\frac{1}{\ln p_{r-1}} - \frac{1}{\ln p_r}\right) + \ln p_r\left(\frac{1}{\ln p_r} - \frac{1}{\ln N}\right) + \ln N\frac{1}{\ln N} -$$
$$- \ln\ln N = 1 + (\ln p_2 - \ln p_1)\frac{1}{\ln p_2} + (\ln p_3 - \ln p_2)\frac{1}{\ln p_3} + \ldots$$
$$\ldots + (\ln p_r - \ln p_{r-1})\frac{1}{\ln p_r} + (\ln N - \ln p_r)\frac{1}{\ln N} - \ln\ln N.$$

В решении задачи а) было доказано, что $\varepsilon^{(N)}$ при любом N по абсолютной величине не превосходит числа 15. Теперь нам надо доказать, что при $N \to \infty$ последовательность чисел $\varepsilon^{(N)} = \varepsilon_1^{(N)} + \varepsilon_2^{(N)}$ стремится к определенному пределу. Для этого достаточно показать, что обе последовательности $\varepsilon_1^{(N)}$ и $\varepsilon_2^{(N)}$ стремятся к пределу при $N \to \infty$.

В отношении последовательности чисел $\varepsilon_2^{(N)}$ это доказывается совсем просто. Для этого надо только воспользоваться тем, что

$$\varepsilon_2^{(N)} - \ln\ln 2 - 1 = \ln\frac{\ln N}{\ln 2} - \left[(\ln p_2 - \ln p_1)\frac{1}{\ln p_2} + \ldots\right.$$
$$+ (\ln p_3 - \ln p_2)\frac{1}{\ln p_3} + \ldots + (\ln p_r - \ln p_{r-1})\frac{1}{\ln p_r} +$$
$$\left.+ (\ln N - \ln p_r)\frac{1}{\ln N}\right]$$

равно сумме площадей криволинейных треугольников, не заштрихованных на черт. 159, *а*. Отсюда видно, что $-\varepsilon_2^{(N)} - \ln\ln 2 - 1$ монотонно возрастает с ростом N, и из теоремы о том, что монотонно возрастающая последовательность, остающаяся ограниченной, всегда имеет предел, легко следует, что последовательность чисел $-\varepsilon_2^{(N)} - \ln\ln 2 - 1$, а следовательно, и чисел $\varepsilon_2^{(N)}$, имеет предел при $N \to \infty$ (ср. с решением задачи 162б)).

Докажем теперь, что и последовательность чисел $\varepsilon_1^{(N)}$ при $N \to \infty$ стремится к некоторому пределу. Обозначим

$$\alpha_1\left(\frac{1}{\ln p_1} - \frac{1}{\ln p_2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\ln p_2} - \frac{1}{\ln p_3}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{k-1}\left(\frac{1}{\ln p_{k-1}} - \frac{1}{\ln p_k}\right) = d_k.$$

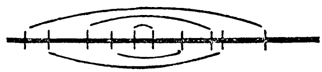
В таком случае очевидно, что если $N > p_k$, то

$$\varepsilon_1^{(N)} = d_k + \alpha_k\left(\frac{1}{\ln p_k} - \frac{1}{\ln p_{k+1}}\right) + \alpha_{k+1}\left(\frac{1}{\ln p_{k+1}} - \frac{1}{\ln p_{k+2}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{r-1}\left(\frac{1}{\ln p_{r-1}} - \frac{1}{\ln p_r}\right) + \alpha_r\left(\frac{1}{\ln p_r} - \frac{1}{\ln N}\right) + \alpha^{(N)}\frac{1}{\ln N}.$$

Но все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; $\alpha^{(N)}$ заключаются между -10 и $+10$. Заменив в последней формуле все эти числа на -10, соответственно на $+10$, получим:

$$d_k - \frac{10}{\ln p_k} < \varepsilon_1^{(N)} < d_k + \frac{10}{\ln p_k}.$$

Таким образом, все числа $\varepsilon_1^{(N)}$, такие, что $N > p_k$, заключаются внутри отрезка числовой оси длины $\frac{20}{\ln p_k}$. Выбрав $l > k$, найдем отрезок еще меньшей длины $\left(\text{длины } \frac{20}{\ln p_l}\right)$, внутри которого заключены все числа $\varepsilon_1^{(N)}$, у которых $N > p_l$; затем выберем отрезок еще меньшей длины $\left(\frac{20}{\ln p_m},\ m > l\right)$, внутри которого заключаются все числа $\varepsilon_1^{(N)}$, у которых $N > p_m$, и т. д.



Черт. 160.

Таким образом, мы получаем систему вложенных друг в друга отрезков все меньшей и меньшей длины (черт. 160). Левые концы этих отрезков образуют последовательность чисел, которые все время возрастают, но остаются ограниченными; следовательно, они стремятся к некоторому пределу $\bar{\varepsilon}_1$. Аналогично правые концы этих отрезков образуют последовательность чисел, стремящуюся к пределу $\bar{\bar{\varepsilon}}_1$. Но так как существуют сколь угодно большие простые числа, то длины отрезков неограниченно убывают и, следовательно, числа $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\bar{\varepsilon}}_1$ должны совпасть, т. е. $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\bar{\varepsilon}}_1 = \varepsilon_1$. Легко видеть, что это же число ε_1 будет пределом и для последовательности чисел $\varepsilon_1^{(N)}$.

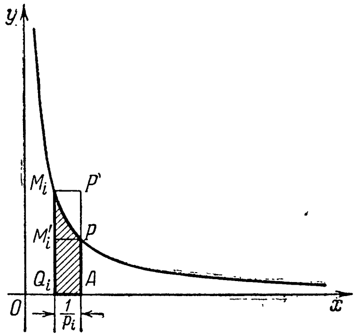
170. Нам надо оценить произведение

$$\pi^{(N)} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие целого числа N. Логарифмируя это произведение, получим:

$$\log \pi^{(N)} = \log\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+\log\left(1-\frac{1}{p_2}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

Условимся теперь считать, что логарифмы в последней формуле натуральные (см. задачи 149—152). Натуральный логарифм $\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ числа $\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ равен взятой со знаком минус площади криволинейной трапеции APM_iQ_i (черт. 161), ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=1-\frac{1}{p_i}$ и $x=1$ (см. определение функции $F(x)$ на стр. 74 и задачу 152). Но площадь криволинейной трапеции APM_iQ_i заключается между площадями прямоугольников APM'_iQ_i и $AP_iM_iQ_i$. Так как



Черт. 161.

$$S_{APM'_iQ_i}=AP\cdot Q_iA=1\cdot\frac{1}{p_i}=\frac{1}{p_i}$$

и

$$S_{AP_iM_iQ_i}=Q_iM_i\cdot Q_iA=\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\cdot\frac{1}{p_i}=\frac{1}{p_i-1},$$

то

$$\frac{1}{p_i}<-\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right)<\frac{1}{p_i-1}.$$

Обозначим

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\frac{1}{p_i}+\beta_i,$$

где

$$0<\beta_i<\frac{1}{p_i-1}-\frac{1}{p_i}=\frac{1}{p_i(p_i-1)}.$$

Теперь формула для $\ln \pi^{(N)}$ принимает вид:

$$\ln \pi^{(N)} = -\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_r}\right) - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r),$$

или, если обозначить разность $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_r} - \ln \ln N$ через $\varepsilon^{(N)}$ (ср. задачу 169б)),

$$\ln \pi^{(N)} = -\ln \ln N - \varepsilon^{(N)} - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r).$$

При $N \to \infty$ число $\varepsilon^{(N)}$ стремится к некоторому определенному пределу ε (см. вторую теорему Мертенса, задачу 169). Докажем, что и сумма $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r$ при $N \to \infty$ также стремится к определенному пределу. Действительно, так как все числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, \ldots$ положительны, то при увеличении N эта сумма все время возрастает. С другой стороны, эта сумма все время остается ограниченной. Действительно, так как

$$\beta_i < \frac{1}{p_i(p_i - 1)} < \frac{1}{(p_i - 1)^2},$$

то

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r < \frac{1}{(p_1 - 1)^2} + \frac{1}{(p_2 - 1)^2} + \ldots + \frac{1}{(p_r - 1)^2} <$$
$$< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{N^2} < 2$$

(см. задачу 164). Отсюда и вытекает, что при $N \to \infty$ сумма $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r$ стремится к определенному пределу.

Таким образом, при $N \to \infty$ сумма

$$\ln \pi^{(N)} + \ln \ln N = -\varepsilon^{(N)} - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r)$$

стремится к некоторому пределу a:

$$\ln \pi^{(N)} + \ln \ln N \to a.$$

Потенцируя последнее соотношение, имеем:

$$\pi^{(N)} \ln N \to e^a;$$

отсюда следует, если обозначить e^a через c,

$$\pi^{(N)} : \frac{c}{\ln N} \to 1,$$

что и требовалось доказать.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

РАЗДЕЛ I

ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. 7.
2. 15.
3. 8 (в некоторых частных случаях их может оказаться меньше 8).
4. 30 способами.
5. 2 775 498 395 670 способами. $\left(\text{Это число равно } \frac{30!}{3!\,(10!)^3}.\right)$
6. 8008 способами. $\left(\text{Это число равно } \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.\right)$ При решении удобно сначала определить число способов выбора двух пирожных, затем — трех и т. д. вплоть до шести.

7. Число замков равно 462; число ключей у одного члена комиссии равно 252. $\left(\text{Число 462 равно } C_{11}^5, \text{ а число 252 равно } \frac{462\cdot 6}{11}.\right)$
8. 800.
9. Больше таких чисел, в записи которых встречается цифра 1.
10. 175 308 642 раза.
11. а) 686.
б) 457.
12. 12 960 000.
13. 7142. Докажите, что остатки от деления $2^x - x^2$ на 7 периодически повторяются через 21 значение x.
14. 10 153. Докажите, что только при x и y, делящихся на 7, $x^2 + y^2$ делится на 49.
15. 139 способами. Подсчитайте число разложений, считая различными разложения, отличающиеся порядком множителей (таких разложений будет 784), а затем учтите, что некоторые из этих 784 разложений следует считать совпадающими.
16. Число делителей 264. Сумма делителей 319 823 280.
17. 1502.
18. Коэффициент при x^{18} равен нулю; коэффициент при x^{17} равен 3420.
19. 29 способами.

20. $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ способами.

21. а) $\left(\frac{(n+3)^2}{12}\right)$ способами (относительно обозначений см. стр. 13). Для доказательства этой формулы воспользуйтесь результатом задачи 20 и равенством

$$\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^m}{4}$$

(m — целое).

б) $\left(\frac{(n+4)^2}{20}\right)$ способами.

22. 4562 способами. При решении этой задачи удобно воспользоваться результатом задачи 21б).

23. $\left[\frac{n}{2}\right]$ способами.

24. 19 801 решение.

25. $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ способами.

26. $\left(\frac{n^2}{12}\right)$ способами. Решение этой задачи аналогично решению задачи 21.

27. $\frac{n^2-1}{8}$ решений при n нечетном и $\frac{(n+8)(n-2)}{8}$ решений при n четном.

28. $\left(\frac{n^2+6n}{48}\right)$ треугольников при n нечетном и $\left(\frac{n^2}{48}\right)$ треугольников при n четном. При решении этой задачи следует воспользоваться результатом задачи 26 и отдельно рассмотреть 12 случаев, отвечающих 12 различным возможным остаткам от деления n на 12.

29. а) C_{n-1}^{m-1}.

б) C_{n+m-1}^{m-1}.

30. а) Пусть число n есть сумма k_1 чисел, равных 1, k_2 чисел, равных 2, ..., k_l чисел, равных l, так что

$$n=k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+\ldots+k_l\cdot l.$$

Положим

$$y_1=k_2+\ldots+k_l,\quad y_2=k_3+\ldots+k_l,\ \ldots,\ y_{l-1}=k_l.$$

Тогда числа $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ не превосходят m и

$$y_1+\ldots+y_{l-1}=n-m.$$

Отсюда легко выводится требуемая теорема.

б) Пусть

$$n=x_1+x_2+\ldots+x_m$$

есть разложение числа n на m неравных слагаемых, расположенных в порядке возрастания,

$$n-\frac{m(m+1)}{2}=(x_1-1)+(x_2-2)+\ldots+(x_m-m)=$$
$$=k_0\cdot 0+k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+\ldots+k_l\cdot l$$

— представление числа $n-\frac{m(m+1)}{2}$ в виде суммы не обязательно различных слагаемых (ср. с указанием а)). Обозначив

$$k_1+k_2+k_3+\ldots+k_l=y_1,\quad k_2+k_3+\ldots+k_l=y_2,\ldots,\quad k_l=y_l,$$

получим

$$y_1+y_2+\ldots+y_l=n-\frac{m(m+1)}{2}.$$

31. а) Представьте все слагаемые в виде произведения степени двойки на нечетное число и соберите вместе те из них, которые имеют одинаковый нечетный множитель.

б) Пусть в представлении числа n в виде суммы слагаемых, не кратных k, слагаемое 1 встречается s_1 раз, слагаемое 2 встречается s_2 раз и т. д. Запишите все числа $s_1, s_2, \ldots$ в «k-ичной системе счисления» (см. начало указания к задаче 129).

32. а) Число ладей равно n; число способов расстановки равно $n!$

б) Число ладей равно n; число способов расстановки равно $2n^n-n!$

33. а) 14; $2n-2$.

б) 8; n.

34. Следует из того, что при n четном совокупность белых полей одинакова с совокупностью черных полей.

35. а) Воспользуйтесь результатом задачи 33а) и подсчитайте сумму полей, которым угрожает первый, второй и т. д. слон.

б) Число расположений равно 2^n. Для доказательства этого воспользуйтесь результатом задачи а).

36. а) $144^2=20\,736$.

б) $912^2=831\,744$.

в) $24\cdot 72=1728$.

г) $\left[\frac{3n-12}{4}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2$ при $n=4k$,

$\left[\frac{3n^2+4}{8}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)!\right]^2$ при $n=4k+2$,

$(6n-6)\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right]^2$ при $n=2k+1$.

37. а) 16.

б) $\left[\frac{n+1}{2}\right]^2$ (относительно обозначений см. стр. 13).

38. а) 9.

б) $\left[\frac{n+2}{3}\right]^2$.

39. а) 8 ферзей.

б) Один ферзь при $n=1$ и $n=2$, два ферзя при $n=3$, n ферзей при $n \geqslant 4$. Для того чтобы доказать, что на шахматной доске из n^2 клеток ($n \geqslant 4$ любое) можно расставить n ферзей требуемым образом, достаточно рассмотреть лишь случай четного n и указать для этого случая расстановку n ферзей, при которой хотя бы одна главная диагональ остается свободной (случай нечетного n можно тогда получить, добавив еще одну колонну и одну строку и поставив $(n+1)$-го ферзя на угловое поле). Что касается четных n, то удобно сначала рассмотреть случай n, дающего при делении на 6 в остатке 0 или 4, и отдельно — случай n, дающего при делении на 6 в остатке 2.

40. а) 32 коня.

б) Два расположения.

41. а) На $(n+1)^2$ частей.

б) На $3n^2+3n+1$ частей.

42. а) На $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ частей.

б) На n^2-n+2 частей.

При решении удобно последовательно рассматривать, насколько может увеличиться число частей после проведения второй, третьей, ..., n-й прямой (соответственно окружности).

43. а) На $\dfrac{n^3+5n+6}{6}$ частей. Воспользуйтесь результатом задачи 42а).

б) На $\dfrac{n(n^2-3n+8)}{3}$ частей. Воспользуйтесь результатом задачи 42б).

44. В $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=C_n^4$ точках.

45. На $\dfrac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$ частей.

46. а) $1296=36^2$.

б) $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

47. а) 204.

б) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

48. $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n^3+18n^2-43n+60)}{720}$ треугольников. Это выражение получается как сумма $C_n^3+4C_n^4+5C_n^5+C_n^6$.

49. Искомое число k-угольников равно

$$\frac{n(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!}=\frac{n}{k}C_{n-k-1}^{k-1}.$$

50. а) Число треугольников равно $n-2$.

б) Число диагоналей равно $n-3$.

51. а) 132 способами. При решении этой задачи удобно последовательно определять число разбиений на треугольники выпуклого четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника, семиугольника и восьмиугольника.

б) Искомое число способов T_n равно $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-5)}{(n-1)!}2^{n-2}$. Для вывода этой формулы надо только доказать, что

$$T_{n+1}=\frac{2(2n-3)}{n}T_n.$$

Один из способов получения этого соотношения таков: мы двумя разными способами выражаем T_n через $T_{n-1}, T_{n-2}, \ldots, T_3$ и из сравнения двух полученных формул выводим требуемое соотношение.

52. а) 16 796 способами. При решении этой задачи удобно последовательно подсчитывать число способов для случая наличия на окружности 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 и 20 точек.

б) Искомое число способов Φ_n равно $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(n+1)!}2^n$. Для вывода этой формулы достаточно показать, что $\Phi_n=T_{n+2}$ (см. указание к задаче 51б)).

53. а) $\frac{n^p-n}{p}+n$ способами.

54. а) $\frac{1}{2}\left\{\frac{(p-1)!+1}{p}+p-4\right\}$ звездчатых p-угольников.

55. а) 2^n;

б) 0;

в) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

г) $2^{n-1}n$;

д) 0;

е) $(-1)^m C_{n-1}^m$ при $m<n$ и 0 при $m=n$;

ж) $C_{n+m+1}^{k+1}-C_n^{k+1}$ при $k<n$ и C_{n+m+1}^{n+1} при $k=n$;

з) 1 при $n=3k$, 0 при $n=3k+1$ и -1 при $n=3k-1$;

и) 2^{2n};

к) C_{2n}^n;

л) $(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}$ при n четном и 0 при n нечетном;

м) C_{n+m}^k.

56. а) 2^{n-1}.

б) 2^{n-1}.

Решение этих двух задач легко следует из результата задач 55а) и б).

в) $2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k$, $2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k\pm 1$, 2^{n-2} при $n=8k\pm 2$, $2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k\pm 3$ и $2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k+4$.

Для решения этой и последующих трех задач воспользуйтесь разложением $(1+i)^n$ и $(1-i)^n$ по формуле бинома Ньютона.

г) 2^{n-2} при $n=8k$ или $n=8k+4$, $2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k+1$ или $n=8k+3$, $2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k+2$, $2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k-1$ или $n=8k-3$ и $2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k-2$.

д) $2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k$, $2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k\pm 1$, 2^{n-2} при $n=8k\pm 2$, $2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k\pm 3$ и $2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k+4$.

е) 2^{n-2} при $n=8k$ или $n=8k+4$, $2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k+1$ или $n=8k+3$, $2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k+2$, $2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}}$ при $n=8k-1$ или $n=8k-3$ и $2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}$ при $n=8k-2$.

ж) $\frac{2^n+2}{3}$ при $n=6k$, $\frac{2^n+1}{3}$ при $n=6k\pm 1$, $\frac{2^n-1}{3}$ при $n=6k\pm 2$ и $\frac{2^n-2}{3}$ при $n=6k+3$.

Для решения этой и последующих двух задач воспользуйтесь разложением по формуле бинома Ньютона биномов $(1+\varepsilon_1)^n$ и $(1+\varepsilon_2)^n$, где $\varepsilon_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, а $\varepsilon_2=\varepsilon_1^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

з) $\frac{2^n-1}{3}$ при $n=6k$ или $n=6k-2$, $\frac{2^n+1}{3}$ при $n=6k+1$ или $n=6k+3$, $\frac{2^n+2}{3}$ при $n=6k+2$ и $\frac{2^n-2}{3}$ при $n=6k-1$.

и) $\frac{2^n-1}{3}$ при $n=6k$ или $n=6k+2$, $\frac{2^n-2}{3}$ при $n=6k+1$, $\frac{2^n+1}{3}$ при $n=6k+3$ или $n=6k-1$ и $\frac{2^n+2}{3}$ при $n=6k-2$.

57. Воспользуйтесь методом математической индукции.

58. а) C_{n+m}^k (см. задачу 55 м)).

б) $\frac{(n-m-1)(n-m-2)\ldots(n-m-k)}{k!}$. При $n-m-1\geqslant k$ это выражение равно C_{n-m-1}^k.

59. в) C_{n+m}^k.

60. а) 1, 1000, 499 500.

б) В k-й перекресток тысячного ряда придет

$$C_{1000}^k=\frac{1000!}{k!\,(1000-k)!}$$

человек.

61. Воспользуйтесь тем, что число B_n^k является коэффициентом при x^k в разложении выражения $(1+x+x^2)^n$.

62. $0{,}6561=(0{,}9)^4$. При решении этой задачи удобно считать, что все велосипедные номера четырехзначны, но могут начинаться с нуля или с нескольких нулей (при этом 10 000 мы заменяем на 0000).

63. а) $\frac{1}{360}\approx 0{,}003$.

б) $\frac{12}{360}=\frac{1}{30}\approx 0{,}033$.

64. $\frac{1}{630}\approx 0{,}0015$. При решении учтите, что $396=4\cdot 9\cdot 11$, и используйте признаки делимости на 4, на 9 и на 11.

65. 0,2.

66. а) $\frac{12!}{12^{12}}\approx 0{,}000054$.

б) $\frac{66\,(2^6-2)}{12^6}\approx 0{,}00137$.

67. а) $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^9}=\frac{1792}{6561}\approx 0{,}273$.

б) $\frac{9!}{(3!)^3\cdot 3^9}=\frac{560}{6561}\approx 0{,}085$.

в) $\frac{9!}{2\cdot 4!\cdot 3^9}=\frac{280}{729}\approx 0{,}384$.

68. а) $\frac{10}{19}$.

б) $\frac{C_{16}^6}{\frac{1}{2}C_{20}^{10}}=\frac{28}{323}\approx 0{,}08$; $\left(\frac{28}{323}\right)^2\approx 0{,}0064$.

в) $\frac{3C_{16}^8}{\frac{1}{2}C_{20}^{10}}=\frac{135}{323}\approx 0{,}42$.

69. Выиграть три партии из четырех вероятнее, чем пять из восьми $\left(\text{первая вероятность равна } \frac{1}{4}, \text{ вторая равна } \frac{7}{32}<\frac{1}{4}\right)$.

70. а) $\frac{C_n^r C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k}$.

б) C_{n+m}^k. Воспользуйтесь тем, что сумма вероятностей того, что не будет извлечен ни один белый шар, что будет извлечен точно один белый шар, что будет извлечено два белых шара, ..., что будет извлечено k белых шаров, равна единице.

71. а) $\frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}}$.

б) 2^{2n}. Этот результат выводится из задачи а) аналогично тому, как из задачи 70а) следует соотношение задачи 70б).

72. $^1/_2$. При решении этой задачи проще всего непосредственно доказывать, что в рассматриваемом опыте число благоприятных исходов равно числу неблагоприятных (без подсчета этого числа).

73. а) $\frac{5}{9}$ (можно считать, что рассматриваемый в этой задаче опыт может иметь девять равноправных исходов и пять из них будут благоприятными).

б) $\frac{19}{27}$.

в) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Здесь легче подсчитать число случаев, при которых все n охотников промахнутся.

74. $\frac{95}{144}\approx 0{,}66$.

75. $\frac{13}{41}$. При решении этой задачи существенно заметить, что из 81 равновероятного исхода, который может иметь место при независимых высказываниях A, B, C и D, в настоящем случае, в силу специального характера этих высказываний, остается возможным только 41 исход.

76. а) $\frac{8}{15}\approx 0{,}53$.

б) $\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$.

77. а) $\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$.

б) $\begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \dfrac{[(2k)!]^3}{(4k!)(k!)^2} & \text{при } n=2k \text{ четном.} \end{cases}$

78. а) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$.

б) При $n\longrightarrow\infty$ эта вероятность стремится к $1-\frac{1}{e}\approx 0{,}632$ ($e\approx 2{,}718$ есть основание натуральной системы логарифмов; см. задачу 158).

79. а) $$C_n^0\cdot 1^k-C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

б) $\frac{C_n^r}{n^k}\{C_r^0r^k-C_r^1(r-1)^k+C_r^2(r-2)^k-\ldots+(-1)^{r-1}C_r^{r-1}\cdot 1^k\}$.

в) $$1^kC_n^1-2^kC_n^2+3^kC_n^3-\ldots+(-1)^{n-1}n^kC_n^n=$$
$$=\begin{cases} 0 & \text{при } k<n, \\ (-1)^{n-1}n! & \text{при } k=n. \end{cases}$$

Воспользуйтесь тем, что вероятность, которую требуется разыскать в задаче а), равна 0 при $k < n$ и легко подсчитывается непосредственно при $k = n$.

80. $\frac{439\,792}{3\,628\,800} \approx 0{,}12$. Общее число возможных исходов опыта равно $9!\cdot 10!$ Число неблагоприятных исходов равно $C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2 + C_{10}^3 a_3 - \ldots$ $\ldots + C_{10}^9 a_9 - C_{10}^{10} a_{10}$, где

$$a_k = \begin{cases} (10-k)!\,(10-k-1)!\,(20-2k)\,(20-2k+1)\ldots(20-2k-1) & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant 9, \\ 2\cdot 9! & \text{при } k = 10. \end{cases}$$

81. а) $\frac{n-m+1}{n+1}$ при $m \leqslant n$; 0 при $m > n$. Этот ответ может быть получен различными путями.

Первое решение. Полное число равновероятных исходов в настоящей задаче равно C_{n+m}^m. Эти C_{n+m}^m исходов удобно представить в виде C_{n+m}^m различных кратчайших путей, соединяющих перекрестки (0, 0) и (n, m) города (см. стр. 27). Пользуясь этой схемой, можно показать, что при $m \leqslant n$ число неблагоприятных исходов равно числу путей, соединяющих перекрестки (— 1, 1) и (n, m), т. е. равно C_{n+m}^{m-1}; отсюда легко следует ответ задачи.

Второе решение. Зная ответ задачи, нетрудно проверить его справедливость методом математической индукции.

Третье решение. Рассмотрите $n+m$ расположений наших $n+m$ покупателей в очереди, получающихся из какого-нибудь одного расположения перестановкой некоторого числа покупателей, стоявших первыми, в конец очереди (в том же порядке, в котором они стояли вначале). Докажите, что при $n > m$ из этих $n+m$ расположений ровно $n-m$ обладают тем свойством, что для них впереди каждого покупателя стоит больше людей, имеющих пятерки, чем людей, имеющих лишь десятки. Отсюда уже нетрудно получить ответ задачи.

б) $1 - \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}$ при $n+p \geqslant m \geqslant p+1$;

0 при $m > n+p$; 1 при $m \leqslant p$. Решение этой задачи может быть проведено аналогично первому или второму решению задачи 81а).

в) $\frac{n-2m+1}{n+1}$ при $n \geqslant 2m$ и 0 при $n < 2m$.

Решение этой задачи может быть проведено аналогично первому, второму или третьему решению задачи а), причем наиболее простым здесь является решение, аналогичное третьему решению задачи а).

82. а) При разбиении $2n$ точек на окружности на n пар какие-то n из числа $2n$ точек будут первыми точками пары, а остальные n — вторыми точками. Докажите, что для того, чтобы n хорд, имеющих концами эти пары, не пересекались, нужно лишь, чтобы при перечислении всех $2n$ точек в порядке их расположения на окружности впереди каждой точки располагалось не менее точек, являющихся первыми в своих парах, чем точек, являющихся вторыми. Отсюда в силу результата задачи 81а) сразу получается ответ задачи 52б).

Поскольку из ответа задачи 52б) легко выводится также и ответ задачи 51б) (ср. решение задачи 52б)), то указанное здесь рассуждение решает также и задачу 51б).

б) Искомое число способов ψ_n равно

$$\frac{(2n+2)(2n+3)\ldots 3n}{n!}=\frac{1}{2n+1}C_{3n}^{n}.$$

Этот результат получается из решения задачи 81в) точно так же, как результат задачи 52б) — из решения задачи 81а).

в) Искомое число способов S_n равно

$$\frac{2n(2n+1)\ldots(3n-3)}{(n-1)!}=\frac{1}{2n-1}C_{3(n-1)}^{n-1}.$$

Для доказательства этого факта надо лишь показать, что $S_n=\psi_{n-1}$ (ср. с решением задачи 52б)).

83. $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{9}$.

84. а) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{100}$.

б) $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$.

85. $\frac{1}{7}$; $\frac{91}{144}$.

86. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{20}$.

87. $\lg 2$ (логарифм десятичный!). Для доказательства этого факта надо воспользоваться тем, что среди степеней двойки, имеющих данное число цифр, обязательно будет точно одна степень, начинающаяся с цифры 1.

88. а) Обозначим число, записываемое данной комбинацией цифр, через M. Надо доказать, что при любом M можно найти два целых числа n и k, таких, что k превосходит число знаков M и что $10^kM\leqslant 2^n<10^k(M+1)$. Прологарифмировав это неравенство, получим:

$$\lg M+k\leqslant n\lg 2<\lg(M+1)+k.$$

Задача будет решена, если будут найдены n и k, удовлетворяющие последнему неравенству. Таким образом, надо показать, что хотя бы одна из точек $\lg 2$, $2\lg 2$, $3\lg 2,\ldots$ числовой оси попадет в один из промежутков $(\lg M+k,\ \lg(M+1)+k)$, $k=1, 2,\ldots$

б) $\lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$ (логарифм десятичный!). Докажите, что вероятность того, что точка $n\lg 2$ числовой оси при выбранном наудачу числе n попадет в один из указанных выше промежутков, равна общей длине всех этих промежутков.

89. а) 0,6. Докажите, что вероятность того, что два взятых наудачу числа окажутся взаимно простыми, равна

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\left(1-\frac{1}{13^2}\right)\ldots$$

(2, 3, 5, 7, 11, 13, ... — все простые числа), или, что равносильно, равна

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots}.$$

б) 0,1. Докажите, что искомая вероятность равна

$$1-\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\left(1-\frac{1}{11^4}\right)\ldots=$$
$$=1-\frac{1}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots}.$$

90. а) Воспользуйтесь результатом задачи 143а).

б) Воспользуйтесь результатом задачи 143б).

91. $\ln 2$ (логарифм натуральный!). Для доказательства воспользуйтесь результатами задач 165 и 169б).

92. $\frac{7}{16}$. Множество всех равноправных исходов опыта здесь изображается совокупностью точек квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, где x и y — прямоугольные координаты точки, представляющие время прихода первого и соответственно второго человека.

93. $\frac{1}{4}$.

94. Искомая вероятность равна
$$\begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant a \leqslant \frac{l}{3}, \\ \left(3\frac{a}{l}-1\right)^2, & \text{если } \frac{l}{3} \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}, \\ 1-3\left(1-\frac{a}{l}\right)^2, & \text{если } \frac{l}{2} \leqslant a \leqslant l. \end{cases}$$

95. $\frac{1}{4}$ (ср. с задачей 93).

96. $\frac{1}{2}$. Здесь все возможные исходы опыта изображаются точками куба.

97. $1-\frac{\pi}{4}$ (см. указание к предыдущей задаче).

98. $3\ln 2 - 2$ (логарифм натуральный; см. задачи 149—152).

99. $2\ln 2 - 1$ (логарифм натуральный; см. задачу 152). Всевозможные исходы опыта здесь удобно характеризовать парой чисел (x, y), где x — длина меньшей части, образовавшейся после первого излома; y — отношение длины стержня, полученного при изломе большей части, к длине этой большей части. В таком случае множество всех исходов изобразится совокупностью точек некоторого прямоугольника и вероятность, что точка (x, y) попадет внутрь некоторой части прямоугольника, будет пропорциональна площади этой части.

100. Воспользуйтесь результатом задачи 147б).

РАЗДЕЛ II

ЗАДАЧИ ИЗ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ МАТЕМАТИКИ

101. Возможно.

102. Можно построить пример автобусной сети, состоящей из семи маршрутов и удовлетворяющей условиям задачи.

103. а) Пусть n есть число остановок некоторого маршрута a. Далее покажите последовательно, что: 1) через каждую остановку, не принадлежащую маршруту a, проходит ровно n маршрутов; 2) каждый маршрут города имеет ровно n остановок; 3) через каждую остановку, принадлежащую маршруту a, тоже проходит ровно n маршрутов.

б) 8. Воспользуйтесь результатом задачи а).

104. б) Предварительно докажите, что в число семи точек входит каждая точка пересечения двух из рассматриваемых семи прямых (и в число прямых входит каждая прямая, соединяющая две из рассматриваемых точек).

105. Теорема доказывается от противного: предположите, что задача неверна и что вне некоторой из наших n прямых (обозначим ее через MN) имеются какие-то точки пересечения этих прямых. Покажите, что для каждой из этих точек можно найти точку пересечения прямых, более близкую к MN (т. е. что нет самой близкой к MN точки пересечения прямых). Так как это невозможно, то исходное предположение должно быть неверным.

106. Предположите, что задача неверна, и покажите, что если MN есть произвольная прямая, проведенная через одну из заданных точек A и не проходящая через другие из них, то для каждой из точек пересечения MN с прямыми, соединяющими пары заданных точек, можно найти такую точку, более близкую к A (т. е. что среди этих точек нет самой близкой к A). Так как это невозможно, то исходное предположение должно быть неверным.

107. Примените метод математической индукции; при этом используйте результат задачи 106.

108. а) Всего возможны шесть различных расположений четырех точек, удовлетворяющие условию задачи, а именно: 1) вершины ромба, одна диагональ которого равна стороне; 2)—3) вершины дельтоида (четырехугольника, имеющего две пары равных соседних сторон), две диагонали которого равны между собой и равны одной паре сторон; при этом дельтоид может быть выпуклым и невыпуклым; 4) вершины квадрата; 5) три вершины правильного треугольника и его центр; 6) вершины равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию, а диагонали — большему. Возможные отношения $\frac{b}{a}$ равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (здесь b есть большее из двух расстояний).

б) Возможные значения n: $n=3$ (вершины равнобедренного треугольника), $n=4$ (шесть расположений задачи а)), $n=5$ (вершины правильного пятиугольника).

109. а) Можно непосредственно указать такие расположения N точек на плоскости (где N — какое угодно целое число), при которых эти точки не все лежат на одной прямой и все попарные расстояния между ними выражаются целыми числами (для нахождения таких расположений удобно использовать известные формулы для длин x, y, z сторон целочисленных прямоугольных треугольников: $x = 2uv$, $y = |u^2 - v^2|$, $z = u^2 + v^2$, u, v — произвольные целые числа).

б) Покажите, что если O, P и Q — три фиксированные точки плоскости, не лежащие на одной прямой, то существует не более двух точек A, таких, что разности расстояний $AP - AO$ и $AQ - AO$ имеют наперед заданные значения. Отсюда следует, что существует лишь конечное число точек, расстояния от которых до трех фиксированных точек, не лежащих на одной прямой, выражаются целыми числами.

110. а) Исходя из заданного параллелограмма, постройте бесконечную сетку равных и параллельно расположенных параллелограммов, аналогичную имеющейся сетке квадратов. Далее покажите, что квадраты, из каких состояла прежняя сетка, равносоставлены с параллелограммами, из которых состоит новая сетка.

б) Докажите, что если многоугольник с вершинами в узлах сетки квадратов разбит на два меньших многоугольника, вершины которых тоже совпадают с узлами сетки, и если для этих меньших многоугольников доказываемая формула справедлива, то она справедлива и для большего многоугольника. Далее произвольный многоугольник разбейте на ряд треугольников, для каждого из которых наша формула справедлива в силу результата задачи а).

111. Постройте всевозможные многоугольники, равные данному и расположенные параллельно ему, центры которых совпадают с «четными» узлами сетки квадратов (т. е. с узлами сетки, расстояния которых от прямых сетки, проходящих через центр данного многоугольника, выражаются четными числами). Докажите, что никакие два из этих многоугольников не пересекаются и что площадь всех частей построенных многоугольников, расположенных внутри квадрата со стороной 2, с центром в «нечетном» узле сетки равна площади исходного многоугольника.

112. Пусть радиус ρ всех деревьев больше $\frac{1}{50}$. Проведите через центр сада произвольную прямую, пересекающую границы сада в точках M и N, и постройте прямоугольник ширины 2ρ, для которого MN есть средняя линия. Из теоремы Минковского (см. задачу 111) следует, что внутри этого прямоугольника окажутся некоторые точки посадки деревьев; эти деревья и заслонят вид из центра в направлении MN.

Если радиус всех деревьев меньше $\frac{1}{\sqrt{2501}}$, то можно непосредственно указать луч, в направлении которого будет существовать просвет.

113. Примените метод математической индукции.

114. Предложение задачи является очевидным для сети, имеющей только два узла. Далее для доказательства примените метод математической индукции (по числу узлов сети). А именно, предположите, что часть нашей сети, состоящая из линий, не проходящих через один фиксированный узел, уже раскрашена, и затем раскрасьте линии, проходящие через этот последний узел (при этом для того, чтобы раскраска удовлетворяла условиям задачи, в некоторых случаях придется перекрашивать уже раскрашенные линии).

115. а) Нетрудно показать, что число отрезков, занумерованных цифрами 12 и расположенных на стороне 12 большого треугольника, является нечетным; на остальных сторонах большого треугольника вовсе нет таких отрезков. Далее, подсчитывая по всем треугольникам разбиения число сторон этих треугольников, занумерованных цифрами 12, можно убедиться, что число треугольников, вершины которых занумерованы цифрами 123, должно быть одинаковой четности с числом отрезков 12 на стороне 12 большого треугольника, т. е. нечетным (и, следовательно, заведомо отлично от нуля).

б) Теорема формулируется следующим образом.

Если большой тетраэдр, четыре вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3 и 4, разбит на более мелкие тетраэдры таким образом, что каждые два тетраэдра подразделения или вовсе не имеют общих точек или имеют общую вершину, или имеют общее ребро (но не часть ребра), или имеют общую грань (но не часть грани), и если вершины подразделения, расположенные на грани 123 большого тетраэдра, имеют номера 1, 2 или 3 и аналогично для остальных граней, и вершины подразделения, расположенные на ребре 12 большого тетраэдра, имеют номера 1 или 2 и аналогично для остальных ребер, то обязательно найдется хотя бы один тетраэдр подразделения, четыре вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3 и 4.

116. Докажите, пользуясь методом математической индукции, следующее утверждение (несколько более сильное, чем требуется в условии задачи): если произвольный многоугольник разбит на треугольники так, что никакие два треугольника разбиения не соприкасаются по части стороны одного из них и в каждой вершине разбиения сходится четное число треугольников, то все вершины разбиения можно занумеровать цифрами 1, 2 и 3 таким образом, что все вершины, лежащие на контуре многоугольника, будут занумерованы цифрами 1 и 2 и все вершины каждого из треугольников разбиения будут занумерованы тремя разными цифрами.

117. Прежде всего, если между двумя соседними многоугольниками разбиения имеются полости, заполненные другими многоугольниками разбиения, то присоедините эти полости к нашим многоугольникам; при этом получится новое разбиение квадрата, такое, что каждые два соседних многоугольника разбиения или имеют одну общую точку или соприкасаются по одной ломаной. Затем рассмотрите отдельно многоугольник M_0, покрывающий центр квадрата (многоугольник 1-го этажа), многоугольники, соседние с многоугольником M_0 (многоугольники 2-го этажа), многоугольники, соседние с многоугольниками 2-го этажа (многоугольники 3-го этажа), и т. д. Покажите, что если все многоугольники разбиения имеют не более пяти соседей, то ни один из многоугольников 4-го этажа не имеет соседей в 5-м этаже, т. е. что все многоугольники разбиения исчерпываются многоугольниками первых четырех этажей (что невозможно, так как многоугольники 4-го этажа не соприкасаются с границей квадрата).

118. Докажите, что если кривая не имеет параллельной AB хорды длины a и не имеет параллельной AB хорды длины b, то она не может иметь и параллельной AB хорды длины $a+b$ (при доказательстве этого предложения воспользуйтесь тем, что отсутствие у кривой параллельной AB хорды длины a означает, что кривая, которая получается из данной параллельным перенесением в направлении AB на расстояние a, не пересекается с данной кривой). Из этого предложения вытекает первое утверждение задачи.

Для доказательства второго утверждения положите, что a заключается между $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ (n — целое число); постройте пример такой кривой, которая не имеет никакой параллельной AB хорды, длина которой заключается между $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ (для построения примера рекомендуется сначала придавать n небольшие значения).

119. а) Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника M площади 1, C — точка многоугольника, наиболее удаленная от AB (или одна из таких точек). Докажите, что вокруг M можно описать параллелограмм площади, не превосходящей 2, одна сторона которого содержит сторону AB многоугольника и две стороны параллельны AC.

б) Рассмотрите параллелограмм $APQR$, описанный вокруг треугольника ABC площади 1 и такой, что вершина A параллелограмма совпадает с вершиной треугольника, а стороны PQ и QR проходят через вершины B и C; докажите, что площадь этого параллелограмма не меньше 2.

120. а) Впишите в данный многоугольник треугольник $A_1A_2A_3$ *наибольшей возможной площади* и рассмотрите отдельно случаи, когда площадь этого треугольника не превосходит $^1/_2$ и когда она больше $^1/_2$.

б) Прежде всего докажите, что вокруг квадрата со стороной 1 нельзя описать треугольник площади, меньшей чем 2. Затем последовательно покажите, что вокруг прямоугольника площади 1 нельзя описать треугольник площади, меньшей 2, и что вокруг параллелограмма площади 1 нельзя описать треугольник площади, меньшей 2. При этом воспользуйтесь тем, что при ортогональном проектировании площади всех фигур уменьшаются в одинаковое число раз.

121. а) Предположим, что прямая l не пересекает многоугольник. Пусть A есть вершина многоугольника, наиболее близкая к прямой l (или одна из таких вершин); B — вершина многоугольника, наиболее удаленная от l. Далее пусть l_1', l_0 и l_2' — прямые, параллельные l и делящие отрезок AB на четыре равные части; прямые l_1' (более близкие к A) и l_2' пересекают контур многоугольника в точках P, Q, соответственно, R, S. Докажите, что площадь хотя бы одного из двух треугольников ARS и BPQ не меньше $^3/_8$ площади M.

б) Найдите вписанный в правильный шестиугольник треугольник наибольшей площади, одна сторона которого параллельна стороне AB шестиугольника.

122. а) Воспользуйтесь методом математической индукции (по числу n прогрессий); при доказательстве удобно воспользоваться тем, что если d есть общий наибольший делитель двух целых чисел a и b, то существуют два таких целых (не обязательно положительных) числа p и q, что $d = pa + qb$. Второе утверждение задачи нетрудно доказать, построив пример трех прогрессий, каждые две из которых имеют общий член, а все три общего члена не имеют.

б) Докажите, что если разности каких-либо двух рассматриваемых прогрессий несоизмеримы, то эти прогрессии имеют единственный общий член (и, следовательно, все остальные прогрессии тоже должны иметь этот общий член). Если же разности каждых двух прогрессий соизмеримы, то рассматриваемые прогрессии можно свести к целочисленным прогрессиям, после чего останется только применить результат предыдущей задачи.

123. а) Попытки непосредственно построить последовательность цифр 1 и 2, не содержащую повторений, очень быстро приводят к противоречию.

б) Введем следующие обозначения. Пусть A есть некоторая последовательность цифр 1 и 2. В таком случае через $\overline{A}$ мы обозначим последовательность, получающуюся из A по следующему закону: каждая цифра 1 последовательности A заменяется парой цифр 12, а каждая цифра 2 — парой цифр 21. Рассмотрим теперь следующие последовательности цифр 1 и 2:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 12,\\
I_2 = \overline{I_1} &= 12\,21,\\
I_3 = \overline{I_2} &= 12\,21\,21\,12,\\
I_4 = \overline{I_3} &= 12\,21\,21\,12\,21\,12\,12\,21,\\
I_5 = \overline{I_4} &= 12\,21\,21\,12\,21\,12\,12\,21\,21\,12\,12\,21\,12\,21\,21\,12,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Можно доказать, что ни одна из последовательностей $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ не содержит цифры или группы цифр, повторяющейся подряд три раза.

124. а) Аналогично решению задачи 123б) обозначим через $\tilde{A}$ последовательность, получающуюся из известной последовательности A цифр 0, 1, 2 и 3, по следующему закону: каждая цифра 0 последовательности A заменяется парой цифр 02, цифра 1 — четверкой цифр 0121, цифра 2 — четверкой цифр 0131 и цифра 3 — парой цифр 03. Рассмотрим теперь следующие последовательности цифр 0, 1, 2 и 3:

$$
\begin{aligned}
J_0 &= 01,\\
J_1 = \tilde{J}_0 &= 02\,0121,\\
J_2 = \tilde{J}_1 &= 02\,0131\,02\,0121\,0131\,0121,\\
J_3 = \tilde{J}_2 &= 02\,0131\,02\,0121\,03\,0121\,02\,0131\,02\,0121\,0131\,0121\,02\,0121\,03\,0121\\
&\qquad 02\,0121\,0131\,0121,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Можно доказать, что ни одна из последовательностей $J_1, J_2, J_3, \ldots$ $\ldots, J_n, \ldots$ не содержит цифры или группы цифр, повторяющейся подряд два раза.

б) Введем следующие обозначения. Пусть A — некоторая последовательность цифр 1, 2 и 3. Через $\hat{A}$ мы обозначим последовательность, получающуюся из A по следующему закону: вместо цифры 1 последовательности A, стоящей в A на нечетном месте, мы ставим тройку цифр 123, а вместо цифры 1, стоящей на четном месте,— тройку цифр 321; точно так же каждую цифру 2, стоящую на нечетном месте, заменим тройкой цифр 231, а цифру 2, стоящую на четном месте, — тройкой цифр 132; наконец, цифру 3, стоящую на нечетном месте, заменим тройкой цифр 312, а цифру 3, стоящую на четном месте,— тройкой цифр 213. Теперь рассмотрим следующие последовательности цифр 1, 2 и 3:

$$\hat{K}_1 = 123,$$
$$K_2 = \hat{K}_1 = 123\,132\,312,$$
$$K_3 = \hat{K}_2 = 123\,132\,312\,321\,312\,132\,312\,321\,231,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Можно доказать, что ни одна из последовательностей $K_1, K_2, K_3, \ldots$ $\ldots, K_n, \ldots$ не содержит цифры или группы цифр, повторяющейся подряд два раза.

125. Определим число T_n при помощи следующего построения. Прежде всего выпишем подряд n единиц: $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ раз}}$. Так как нам надо, чтобы из построенного числа нельзя было выделить два одинаковых n-значных числа, то после этих n единиц мы вынуждены поставить 0: иначе из получившегося числа можно было бы два раза выделить одно и то же n-значное число $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ раз}}$ (n первых цифр числа T и n цифр, следующих за первой). Таким образом, мы приходим к числу $111\ldots10$. Дальше мы выписываем за первым нулем еще нули до тех пор, пока это будет возможно, т. е. пока окажется, что мы больше уже не можем приписать нуль в конце образовавшегося числа без того, чтобы из вновь полученного числа возможно было выделить два одинаковых n-значных числа. В этом случае мы будем вынуждены приписать в конце единицу. Затем снова будем приписывать в конце нули до тех пор, пока это будет возможно, и т. д. Таким образом, мы условимся всегда поступать так: если в конце имеющегося числа можно поставить нуль без того, чтобы совпали два n-значных числа, которые можно выделить из получающегося числа, то мы приписываем в конце нуль, в противном случае приписываем в конце единицу. Процесс построения числа T_n закончится, когда в конце числа нельзя будет поставить ни нуля, ни единицы (в обоих случаях будет получаться число, из которого можно выделить два одинаковых n-значных числа).

Для ясности приведем несколько примеров.

$$T_2 = 11001;$$

действительно, после двух единиц мы ставим два нуля, а затем единицу, так как иначе из полученного числа можно было бы двумя способами выделить число 00. На этом число T_2 обрывается, так как после пятой цифры мы уже не можем приписать ни нуля (иначе из полученного числа двумя способами выделялось бы число 10), ни единицы (иначе двумя способами выделялось бы число 11). Совершенно так же строятся числа

$$T_3 = 1110001011,$$
$$T_4 = 1111000010011010111$$

и т. д.

Нетрудно проверить, что из числа T_2 (соответственно T_3 или T_4) можно выделить все возможные двузначные (трехзначные, четырехзначные) числа, составленные из нулей и единицы. То, что в общем случае из образованного по указанному правилу числа T_n может быть выделено *каждое* n-значное число k (составленное из нулей и единиц), доказывается индукцией по числу единиц в конце числа k.

126. Докажите (индукцией по числу n при $n > 2$; при $n = 1$ и $n = 2$ теорема почти очевидна), что если m сортов пирожных по n пирожных каждого сорта упакованы в m ящиков по n пирожных в ящике, то можно выбрать m пирожных всех имеющихся сортов, выбрав по одному пирожному из каждого ящика.

127. 900. Пусть A и B — два целых неотрицательных числа. Запишем эти числа в двоичной системе счисления:

$$A = «a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0», \quad B = «b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0»;$$

эта запись означает, что $A = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$ и $B = b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 2 + b_0$, где «цифры» $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ чисел A и B все равны 0 или 1 и старшие «цифры» a_n и b_m равны 1. Обозначим теперь через $Z(A, B)$ число, запись которого в двоичной системе счисления определяется следующим образом:

$$Z(A, B) = «z_p z_{p-1} \ldots z_1 z_0», \text{ где } z_i = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i + b_i = 0 \text{ или } 2, \\ 1, & \text{если } a_i + b_i = 1 \end{cases}$$
$$(i = p, p-1, \ldots, 1, 0);$$

здесь p есть наибольшее целое число, такое, что $a_p + b_p = 1$.

Докажите, что при указанном в условии задачи порядке нумерации клеток доски, клетка, стоящая на пересечении $(A + 1)$-й строки и $(B + 1)$-го столбца, получит номер $Z(A, B)$.

128. Пусть в трех кучках будет соответственно a, b и c спичек. Запишем числа a, b и c по двоичной системе счисления и составим сумму трех последних цифр чисел a, b и c, трех предпоследних цифр и т. д. Если хотя бы одна из сумм цифр одного разряда в двоичном разложении этих чисел нечетна, то начинающий всегда может выиграть; в противном случае при правильной игре противника он должен проиграть.

129. Решение этой задачи близко к решению предыдущей, но значительно сложнее его. Для того чтобы найти закон, позволяющий определить, при каких количествах спичек в кучках начинающий может выиграть, и указывающий правило беспроигрышной игры в этих случаях, следует записать числа спичек в некоторой «обобщенной системе счисления» (подобно тому, как в предыдущей задаче оказывалось удобным перейти к двоичной системе счисления).

Разложение числа N по a-ичной системе счисления имеет следующий смысл. Число N записывается в виде

$$N = q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + q_{n-2} a^{n-2} + \ldots + q_1 a + q_0, \qquad (*)$$

где a_n есть частное от деления N на a^n (a^n — наибольшая степень a, не превосходящая N); q_{n-1} — частное от деления первого остатка $r_1 = N - q_n a^n$ на a^{n-1}, q_{n-2} — частное от деления второго остатка $r_2 = N - q_n a^n - q_{n-1} a^{n-1}$ на a^{n-2} и т. д. При этом «цифры» $q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_1, q_0$, очевидно, могут принимать какие угодно значения между нулем и $a-1$ (в десятичной системе счисления цифры могут быть равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, а в двоичной системе счисления все они равны 0 или 1).

Рассмотрим теперь произвольную бесконечную возрастающую последовательность целых положительных чисел, начинающуюся с единицы:

$$u_0 = 1,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_n, \ldots$$

Представление целых положительных чисел N в виде

$$N = q_n u_n + q_{n-1} u_{n-1} + q_{n-2} u_{n-2} + \ldots + q_1 u_1 + q_0 \qquad (**)$$

мы будем называть обобщенной системой счисления. В записи (**) q_n есть частное от деления N на u_n (u_n — наибольшее из чисел последовательности, не превосходящее N), q_{n-1} — частное от деления «первого остатка» $r_1 = N - q_n u_n$ на u_{n-1}, q_{n-2} — частное от деления «второго остатка» $r_2 = N - q_n u_n - q_{n-1} u_{n-1}$ на u_{n-2} и т. д. Очевидно, что любое целое положительное число N однозначно записывается в каждой «обобщенной системе счисления». В том случае, когда

$$u_0 = a^0 = 1,\ u_1 = a^1 = a,\ u_2 = a^2, \ldots,\ u_n = a^n, \ldots,$$

запись (**) переходит в (*), т. е. «обобщенная система счисления» переходит в обыкновенную a-ичную систему счисления (десятичную систему счисления, если $a = 10$).

«Цифра» q_k «обобщенной системы счисления», определенной заданной последовательностью целых возрастающих чисел $u_0 = 1$, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, может принимать все значения между нулем и частным a_k от деления u_{k+1} на u_k (включая или не включая значение a_k в зависимости от того, будет ли $u_{k+1} > a_k u_k$ или $u_{k+1} = a_k u_k$): действительно, q_k есть частное от деления «$(n-k)$-го остатка» $r_{n-k} = N - q_n u_n - q_{n-1} u_{n-1} - \ldots - q_{k+1} u_{k+1}$ на u_k, а «$(n-k)$-й остаток» заведомо меньше u_{k+1}.

Последовательность целых чисел

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n, \ldots,$$

определяемая соотношениями

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

называется рядом Фибоначчи. Легко проверить, что начало ряда Фибоначчи записывается следующим образом:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \ldots$$

«Обобщенную систему счисления», связанную с разложением целых положительных чисел по членам $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ряда Фибоначчи (u_0 в этих разложениях не участвует, так как уже $u_1 = 1$), естественно называть фибоначчиевой системой счисления. Нетрудно показать, что в фибоначчиевой системе счисления все «цифры» числа N равны либо 0, либо 1 (ибо $r_{n-k} < u_{k+1}$, а $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_k + u_{k-1}}{u_k} < 2$) и между каждыми двумя единицами стоит по крайней мере один нуль (ибо если бы на k-м, $(k-1)$-м и $(k-2)$-м месте стояли «цифры» 0, 1, 1, то это означало бы, что «$(n-k)$-й остаток» r_{n-k} меньше u_k и $r_{n-k} = u_{k-1} + u_{k-2} + \ldots$; но это невозможно, ибо $u_{k-1} + u_{k-2} = u_k$).

Для решения настоящей задачи оказывается удобным разложить числа a и b спичек в двух кучках по фибоначчиевой системе счисления; при этом нетрудно подметить закон, по которому записываются проигрышные для начинающего начальные положения (т. е. первоначальные значения чисел a и b), и затем найти правила беспроигрышной игры в том случае, когда начальное положение не было для начинающего проигрышным.

130. Воспользуйтесь формулой задачи 138б).

Для решения второй части задачи надо использовать то, что $\cos\varphi$ принимает наибольшее и наименьшее значение при φ, кратном π, и обращается в нуль, если $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k—любое целое число.

131. Многочлен $x^2 - \frac{1}{2}$, уклонение от нуля которого равно $^1/_2$.

132. Рассмотрите разность

$$R(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

где $P_n(x)$ — какой-то многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, уклонение от нуля которого на отрезке от -1 до $+1$ не превосходит $\frac{1}{2^{n-1}}$. Эта разность представляет собой многочлен, степень которого не превосходит $n-1$. Рассмотрите, в каких точках многочлен $R(x)$ должен быть положителен и в каких отрицателен, и выведите, что кривая $y = R(x)$ должна пересекать ось Ox не менее n раз, т. е. что уравнение $R(x) = 0$ степени не выше $n-1$ имеет не меньше n корней. Из того, что это невозможно, вытекает утверждение задачи. Отдельно разберите случаи, когда уклонение от нуля многочлена $P_n(x)$ меньше $\frac{1}{2^{n-1}}$ и когда оно равно $\frac{1}{2^{n-1}}$.

133. Искомые многочлены $2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$, где n — любое, а $T_n(x)$ — многочлен Чебышева (см. задачу 130); уклонение от нуля всех этих многочленов на отрезке от -2 до $+2$ равно 2. При решении воспользуйтесь результатом задачи 132.

134. Многочлен

$$\frac{n!}{2^n}\left\{\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!} + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{1!\,(n-1)!} + \right.$$
$$+ \frac{(x-0)(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{2!\,(n-2)!} + \ldots$$
$$\left.\ldots + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!}\right\},$$

уклонение которого равно $\frac{n!}{2^n}$.

При доказательстве воспользуйтесь формулой

$$P(x)=(-1)^n P(0)\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!}+$$
$$+(-1)^{n-1}P(1)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{1!\cdot(n-1)!}+$$
$$+(-1)^{n-2}P(2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{2!\,(n-2)!}+\ldots$$
$$\ldots+P(n)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!},$$

где $P(x)$ — произвольный многочлен степени n, $P(0)$, $P(1)$, $P(2),\ldots$ $\ldots, P(n)$ — значения, которые он принимает при $x=0, 1, 2,\ldots, n$.

135. Для того чтобы на отрезке длины l не существовало такой точки M, что $MA_1\cdot MA_2\ldots MA_n>2\left(\frac{l}{4}\right)^n$, необходимо, чтобы все точки $A_1, A_2,\ldots,A_n$ были расположены на этом отрезке на расстояниях $\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2n}$, $\frac{l}{2}\cos\frac{3\pi}{2n}$, $\frac{l}{2}\cos\frac{5\pi}{2n},\ldots, \frac{l}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$ от его середины.

При решении воспользуйтесь геометрическим изображением комплексных чисел: если точки $A_1, A_2,\ldots, A_n$ отвечают комплексным числам $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$, а точка M — комплексному числу z, то произведение $MA_1\cdot MA_2\ldots MA_n$ равно абсолютной величине многочлена $(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$ степени n со старшим коэффициентом 1 и комплексными коэффициентами. Далее воспользуйтесь результатом задачи 132.

136. Воспользуйтесь геометрическим определением синуса и тангенса как удвоенных площадей некоторых треугольников, связанных с тригонометрическим кругом.

137. $\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$. Умножьте это выражение на $\sin\frac{\alpha}{2^n}$.

138. Воспользуйтесь формулой Муавра:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha.$$

139. а) $C_{2m+1}^1x^m-C_{2m+1}^3x^{m-1}+C_{2m+1}^5x^{m-2}-\ldots=0$. Воспользуйтесь формулой задачи 138а) (считая в ней $n=2m+1$).

б) $x^n-C_n^1x^{n-1}-C_n^2x^{n-2}+C_n^3x^{n-3}+C_n^4x^{n-4}-\ldots=0$. Воспользуйтесь формулой для $\operatorname{ctg} n\alpha$, вытекающей из формулы задачи 138в).

в) — г) Соответственно уравнения:

$$C_{2m}^1(1-x)^{m-1}-C_{2m}^3(1-x)^{m-2}x+C_{2m}^5(1-x)^{m-3}x^2-\ldots=0$$

и

$$(1-x)^m-C_{2m}^2(1-x)^{m-1}x+C_{2m}^4(1-x)^{m-2}x^2-\ldots=0.$$

Воспользуйтесь формулами задач 138а) и б) (полагая в них $n=2m$).

140. а) Воспользуйтесь результатом задачи 139а).

б) Следует из тождества задачи а).

в) Воспользуйтесь результатом задачи 139б).

141. Воспользуйтесь результатами задачи 139в) и г).

142. а) Положите в тождестве задачи 137 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и перейдите к пределу при $n \to \infty$.

б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

143. а) Воспользуйтесь результатом задачи 136а).

б) $\frac{\pi^4}{90}$. Определите суммы четвертых степеней котангенсов и косекансов углов $\frac{\pi}{2m+1}, \frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, \frac{m\pi}{2m+1}$.

144. а) Решается аналогично задаче 143а).

б) $\frac{\pi^2}{8}$.

145. Рассмотрите следующие два выражения, закон образования которых подсказывается формулой Валлиса:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}$$

и

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{6\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}} \frac{\sin\frac{2m\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}.$$

Далее воспользуйтесь результатом задачи 136б).

146. $\frac{a^3}{3}$.

147. а) 2π.

б) $2\sin^2\frac{a}{2}$.

148. а) $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. Разбейте сторону AD рассматриваемой криволинейной трапеции $ABCD$ ($OA = a$, $OD = b$) на части AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., $M_{n-1}D$ так, чтобы было $\frac{OM_1}{a} = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{OM_3}{OM_2} = \ldots$ $\ldots = \frac{b}{OM_{n-1}}$.

б) $\frac{b^{m+1}}{m+1}$.

149. Разделите отрезки A_1D_1 (где $OA_1 = a_1$, $OD_1 = b_1$) и A_2D_2 (где $OA_2 = a_2$, $OD_2 = b_2$) на n равных частей и замените криволинейные трапеции ступенчатыми фигурами.

150. Воспользуйтесь результатом задачи 149.

151. Воспользуйтесь тем, что $F(z)$ есть непрерывная возрастающая функция аргумента z.

152. Докажите предварительно, что при любом α $F(z^\alpha)=\alpha F(z)$.

153. а) $\dfrac{a^b-1}{\ln a}$. При доказательстве придется воспользоваться результатом задачи 159в).

б) $\dfrac{b\ln b-b+1}{\ln a}$. Этот результат можно получить из формулы предыдущей задачи или вывести самостоятельно аналогично решению задачи 148а) (см. указание к этой задаче); в последнем случае придется воспользоваться результатами задач 168б), 1) и 159в).

154. $\frac{1}{2}\ln a(\log_a b)^2$. Решение задачи аналогично второму решению задачи 153б).

155. Воспользуйтесь результатом задачи 148б).

156. а) Достаточно доказать, что при $n>m$ $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>$ $>m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$. Далее воспользуйтесь результатом задачи 152.

б) Докажите, что $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>(n+2)\ln\left(1+\frac{1}{1+n}\right)$; воспользуйтесь результатом задачи 152.

157. Рассмотрите отдельно случаи положительного и отрицательного z; воспользуйтесь результатом задачи 152.

158. Воспользуйтесь результатом задачи 157.

159. а) Воспользуйтесь результатом задачи 152.

б) $\dfrac{1}{\ln a}$. Воспользуйтесь результатом задачи а).

в) $\ln a$. Воспользуйтесь результатом задачи 152.

160. Оцените двумя способами площадь криволинейного треугольника, ограниченного осью абсцисс, кривой $y=\ln x$ и прямой $x=n$, рассмотрев сумму площадей трапеций, вписанных в этот криволинейный треугольник и описанных вокруг него; воспользуйтесь результатом задачи 153б).

161. а) Решается аналогично задаче 160.

б) Воспользуйтесь формулой Валлиса (задача 145).

162. Воспользуйтесь результатом задачи 152.

163. Воспользуйтесь результатом задачи 154.

164. Воспользуйтесь результатом задачи 148а).

165. Очевидно, $\pi(N)$ не больше чем сумма числа r и числа чисел, не превосходящих N и не делящихся ни на одно из r первых простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_r$ $(p_r<N)$. Число не превосходящих N целых чисел, не делящихся ни на одно из заданных простых чисел, может быть подсчитано аналогично решению задачи 11. В полученном выражении отбросьте все знаки целой части и оцените получаемую при этом ошибку; затем подберите удобным образом число r.

166. Оцените двумя способами величину выражения $C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. А именно докажите, что $2^n<C_{2n}^{n}<2^{2n}$ и что

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)}<C_{2n}^{n}\leqslant(2n)^{\pi(2n)}.$$

167. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие целого числа N; в таком случае разложение целого числа $N!$ на простые множители имеет вид

$$N!=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Здесь каждый из показателей α_i ($i=1, 2, \ldots, r$) нетрудно подсчитать: $\alpha_i=\left[\frac{N}{p_i}\right]+\left[\frac{N}{p_i^2}\right]+\left[\frac{N}{p_i^3}\right]+\ldots$ (относительно обозначений см. стр. 13). Отсюда можно получить оценку для числа $\lg N!$, в которой будет фигурировать сумма $\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg p}{p}$ условия задачи; при этом придется воспользоваться также теоремой Чебышева (задача 166).

Вторую оценку для числа $\lg N!$ можно получить, исходя из результата задачи 160. Далее остается только сравнить между собой полученные две оценки.

168. а) Выразите числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и подставьте полученные выражения в сумму S.

б) 1) $\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}$; 2) $\frac{n^2q^n}{q-1}-\frac{(2n-1)q^n+1}{(q-1)^2}+\frac{2q^n-2}{(q-1)^3}$.

169. Примените к сумме $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}$ формулу задачи 168а) и воспользуйтесь первой теоремой Мертенса (задача 167); кроме этого придется воспользоваться некоторыми оценками, близкими к оценкам задачи 162.

170. Очевидно,

$$\ln\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]=$$
$$=\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{5}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{7}\right)+$$
$$+\ln\left(1-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Далее, для оценки правой части, воспользуйтесь геометрическим определением натурального логарифма (см. задачи 149—152); наконец, используйте вторую теорему Мертенса (задача 169).

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Вып. 1. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.** Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 1. Арифметика и алгебра.

Вып. 2. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.** Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 2. Геометрия (планиметрия).

Вып. 3. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом.** Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 3. Геометрия (стереометрия).

Вып. 4. **И. М. Яглом и В. Г. Болтянский.** Выпуклые фигуры.

Вып. 5. **А. М. Яглом и И. М. Яглом.** Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

Вып. 6. **Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский.** Математические беседы.

~~Цена 10 р. 15 к.~~

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954