

И.М.ЯГЛОМ и В.Г.БОЛТЯНСКИЙ ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ

Библиотека
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
кружка

ВЫПУСК 4

И.М.ЯГЛОМ и В.Г.БОЛТЯНСКИЙ

ВЫПУКЛЫЕ
ФИГУРЫ

БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

В Ы П У С К 4

И. М. ЯГЛОМ и В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД

11-3-1

Памяти

ЛЬВА ГЕНРИХОВИЧА

ШНИРЕЛЬМАНА,

*замечательного ученого, организатора
школьного математического кружка
при Московском университете*

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Указания к пользованию книгой	10

	Задачи	Решения
§ 1. Общие свойства выпуклых фигур	13	139
§ 2. Теорема Хелли и ее приложения	30	149
§ 3. Одно свойство непрерывных функций	39	171
§ 4. Сложение выпуклых фигур и кривых	51	198
§ 5. Изопериметрическая задача	66	220
§ 6. Разные задачи на максимум и минимум	75	246
§ 7. Кривые постоянной ширины	90	278
§ 8. Кривые, вращающиеся в равностороннем треугольнике (Δ -кривые), и родственные им кривые	106	305
<i>Дополнение</i> I. Принцип предельной кривой	126	
<i>Дополнение</i> II. О понятиях выпуклой и невыпуклой фигур	136	

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена некоторым задачам из общей теории выпуклых тел (определение выпуклого тела см. в тексте, стр. 13 и 29). Созданная в конце прошлого века теория выпуклых тел в настоящее время является наукой, богатой общими методами и отдельными замечательными результатами. Она интенсивно разрабатывается и по настоящее время. Общее число печатающихся научных работ и книг, посвященных этому вопросу, настолько значительно, что в оглавлении современного реферативного математического журнала, излагающего все появляющиеся работы по математике, теория выпуклых тел стоит как самостоятельная математическая дисциплина наряду с небольшим числом других математических наук. Такая популярность теории выпуклых тел связана в первую очередь с важностью этой теории для геометрии, а также со значительными ее приложениями как к другим разделам математики (алгебра, теория чисел и др.), так и к естествознанию (математическая кристаллография). Значение теории выпуклых тел особенно возросло после недавних замечательных работ ленинградского математика А. Д. Александрова, положившего ее в основу созданного им нового важного направления в наиболее значительной из современных геометрических наук — дифференциальной геометрии.

Все вышесказанное уже полностью оправдывает появление популярных книг по теории выпуклых тел. Но есть еще одно обстоятельство, делающее такие книги особенно полезными. Теория выпуклых тел является единственным разделом современной математики, не использующим существенно в своем построении никаких частей так называемой «высшей математики». Методы этой теории очень красивы, остроумны и зачастую совсем не просты, но они, как правило, совершенно элементарны и могут быть объяснены школьникам стар-

ших классов. Это связано со значительной «геометричностью» теории выпуклых тел: в противоположность другим разделам современной геометрии она не пользуется каким-либо аналитическим аппаратом, а базируется непосредственно на элементарно-геометрических представлениях. Хорошую иллюстрацию к сказанному представляет недавно вышедшая книга А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» (М.—Л., Гостехиздат, 1950): не являясь популярной книгой, специально рассчитанной на широкого читателя, и излагая ряд новых научных результатов, эта монография в основных частях доступна для более подготовленных школьников старших классов.

На русском языке существует превосходная популярная книга по теории выпуклых тел, рассчитанная на школьников старших классов и студентов младших курсов математических факультетов университетов и пединститутков, — это книга Л. А. Люстерника «Выпуклые тела» (М.—Л., Гостехиздат, 1941). Поэтому появление другой книги по теории выпуклых тел, рассчитанной на тех же читателей, что и книга Л. А. Люстерника, нуждается в специальном обосновании.

Наша книга имеет форму сборника задач с решениями, и это резко отличает ее от книги Л. А. Люстерника. Книга входит в серию «Библиотека математического кружка», и хотя по своему характеру она во многом отличается от предыдущих книг этой серии, основные принципы ее совпадают с принципами ранее вышедших книг. Это в первую очередь — установка на самостоятельную, творческую работу читателя, а не на пассивное усвоение излагаемого материала. Нам кажется, что при всей полезности чтения научно-популярной литературы настоящий вкус к математике можно развить только в том случае, если самостоятельно думать над математическими задачами. Изложение же элементов теории выпуклых тел в форме задач представляется нам особенно целесообразным еще и потому, что благодаря незначительности предварительных знаний, необходимых для самостоятельной научной работы в этой области, такую работу можно начинать относительно рано. Дать некоторые необходимые навыки для творческой работы в области теории выпуклых тел было одной из наших задач при написании этой книги.

Выбор формы задачника в значительной мере определил и содержание книги. При подборе материала мы основное внимание уделяли методам, а не результатам. Многие из излагаемых в книге теорем не играют значительной роли в теории выпуклых тел; это обстоятельство особенно бросается в глаза при сравнении настоящей книги с уже упоминавшейся книгой Л. А. Люстерника, содержащей изложение действительно важнейших фактов этой теории. Однако мы стремились к тому, чтобы осветить в книге главные методы теории выпуклых тел, проиллюстрировав их на некоторых примерах, хотя бы сами эти примеры и не являлись особенно серьезными. При этом для того, чтобы было удобнее сопоставить между собой различные методы, мы зачастую давали несколько доказательств одного и того же предложения.

Мы стремились подобрать задачи, занимательные по форме и могущие уже условием заинтересовать читателя. Этим объясняется то большое место (определенно не соответствующее научному весу этих вопросов), которое уделено в книге различным определениям «центра» произвольной выпуклой фигуры и оценкам «степени центральности» (точнее было бы сказать «степени центрально-симметричности») выпуклых фигур (см. задачи 18б), в), 19а), 33, 34, 36, 69), теореме Юнга о наименьшей окружности, в которую можно заключить все фигуры данного диаметра, и сходным теоремам (задачи 16, 17, 19б), 31, 35а), 67, 68), кривым постоянной ширины и родственным кривым (§§ 7 и 8).

Со стремлением к наибольшей наглядности связано то, что содержание книги существенно «двумерно»: как правило, приведенные в книге теоремы о выпуклых фигурах на плоскости либо переносятся на выпуклые тела в пространстве почти без всяких изменений формулировок и доказательств, либо, наоборот, такое перенесение представляет весьма значительные трудности. В некоторых случаях в конце параграфа сообщены соответствующие факты, относящиеся к трехмерному пространству, чаще без доказательств, в порядке реферата. В связи с этим содержание настоящей книги почти совершенно не перекрывается с содержанием упоминавшейся книги Л. А. Люстерника, посвященной в значительной мере существенно «трехмерным» вопросам. В книге остается

совершенно незатронутой теория выпуклых многогранников, составляющая важный и интересный раздел учения о выпуклых телах, так как эта теория достаточно полно освещена в названных выше книгах Л. А. Люстерника и А. Д. Александрова, а также в последних разделах «Задачника по геометрии» Б. Н. Делоне и О. К. Житомирского (М.—Л., Гостехиздат, 1950) и в цикле задач «Теория многогранников» во второй части книги Д. О. Шклярского и др. «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», составляющей вып. 2 «Библиотеки математического кружка».

Книга рассчитана на учащихся старших классов средней школы, студентов младших курсов университетов и пединститутов, а также на всех любителей математики; она может быть использована в работе математических кружков как в средней, так и в высшей школе. Изложение нигде не предполагает никаких знаний, выходящих за пределы школьного курса математики, а для понимания большей части книги достаточны даже знания в объеме программы восьми классов средней школы. При этом и по стилю изложения мы пытались, по возможности, не затруднить малоопытного читателя, хотя для этого нам пришлось в некоторых местах пожертвовать в целях большей доступности книги полной математической строгостью. Нам кажется, что все необходимые уточнения сможет самостоятельно провести каждый студент среднего курса математического факультета университета или пединститута; для облегчения этой работы мы привели в конце книги строгое определение понятия плоской фигуры, как оно понимается в этой книге (см. дополнение II на стр. 136; чтение этого дополнения несколько не необходимо для понимания книги). Мы рассчитываем, что читатели-студенты простят нам некоторые выражения, которые могут шокировать человека, знакомого с курсом математического анализа.

Перед чтением книги следует внимательно прочесть указания к пользованию книгой.

Рукопись провервалась в работе просеминара для студентов первого курса Московского государственного университета, проведенного одним из авторов книги, и в работе секции школьного математического кружка при МГУ, руководимой вторым автором. Некоторые задачи предлагались на

конкурсах по решению задач, проводимых в Московском и Ленинградском университетах для студентов младших курсов, и на математических олимпиадах московских школьников. Во всех случаях задачи оказались вполне доступными.

В книге приведены некоторые теоремы, не встречавшиеся нам в литературе, и большое число новых доказательств известных теорем.

Параграфы 2, 3, 5, 6 принадлежат И. М. Яглому; параграф 4 и дополнения — В. Г. Болтянскому; параграфы 1, 7, 8 написаны И. М. Ягломом и В. Г. Болтянским совместно. Окончательная редакция всего текста проводилась обоими авторами коллективно.

В процессе работы над книгой мы постоянно консультировались с А. М. Ягломом, замечания которого были учтены при изложении отдельных мест книги. Первую половину рукописи внимательно прочла Л. И. Головина-Копейкина, строгая критика которой послужила улучшению книги. Ряд замечаний был сделан нам А. Д. Александровым и его учениками И. Я. Бокельманом, Ю. А. Волковым и Ю. Г. Решетняком. Много дефектов изложения и неточностей в чертежах было устранено по инициативе редактора книги А. З. Рывкина. Считаю своим приятным долгом выразить всем этим лицам нашу искреннюю признательность.

*И. М. Яглом,
В. Г. Болтянский*

Март 1951 г.

УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Настоящая книга состоит из двух частей. В первой части приведено 116 задач на выпуклые фигуры и некоторые необходимые для их понимания теоретические сведения; вторая часть содержит решения всех этих задач.

Все содержание книги разбито на восемь параграфов, довольно независимых между собой; кроме того, книга содержит еще два дополнения, имеющих специальный характер. Каждый параграф начинается с краткого введения (набранного мелким шрифтом), в котором, в частности, указаны номера задач из предыдущих параграфов, используемых при решении задач этого параграфа.

Как и в большинстве других задачников, здесь в пределах того или иного параграфа вполне возможно решение задач «на выбор» в зависимости от вкуса читателя, ибо лишь решения сравнительно небольшого числа задач существенно опираются на предыдущие задачи того же параграфа. Однако нам кажется все же предпочтительным последовательное решение задач в каждом параграфе (с пропуском тех, которые у читателя не будут получаться), так как при расположении задач каждого параграфа мы стремились к тому, чтобы они составляли некоторое законченное целое. Кроме того, как правило, в каждом параграфе более легкие задачи предшествуют более трудным. В некоторых местах книги встречаются так называемые «вспомогательные» задачи, цель которых — облегчить читателю решение непосредственно следующих за ними трудных задач.

В книге мелким шрифтом набран более трудный материал, требующий для своего понимания известной математической культуры. Мы рекомендуем читателю-школьнику при первом чтении книги выпустить весь этот материал (включающий и два дополнения к книге, рассчитанные в основном на студента университета или пединститута). Соответственно

этому все ссылки на дополнение I в подстрочных примечаниях к книге читатель-школьник должен оставлять без внимания. Впрочем, нигде во всем содержании книги не предполагаются у читателя знания, выходящие за пределы школьной программы, так что и мелкий шрифт будет понятен школьнику, если только он проявит достаточную настойчивость при чтении.

Каждый параграф содержит объяснительный текст и задачи. Последние в целях лучшего их выделения отмечены слева тонкой вертикальной линией. Перед чтением условия задачи следует предварительно ознакомиться с предшествующим объяснительным текстом.

Задачи в среднем довольно трудны, и решение их может потребовать значительного времени. Решение следует читать лишь после того, как задача будет решена самостоятельно, для сравнения придуманного решения с приведенным в книге, или если неоднократные попытки решить задачу не привели к успеху.

В тот момент, когда читатель решит, что он больше уже не будет возвращаться к данному параграфу книги, полезно посмотреть решения всех еще не решенных задач параграфа, чтобы составить себе ясное представление о содержании параграфа в целом. При этом, разумеется, работа над одним параграфом может происходить в несколько приемов, перемежающихся с работой над другими параграфами книги или с отдыхом.

В книге специально отмечены те задачи, которые авторам казались более трудными. Номера таких задач помечены звездочкой, а номера самых трудных задач — двумя звездочками. Это выделение более трудных задач, разумеется, довольно условно, поскольку нет никаких определенных критериев для определения степени трудности задачи (известно, что нерешенная задача всегда кажется трудной, а решенная задача — легкой). Возможно, что отдельным читателям покажутся легкими задачи, отмеченные звездочками, или, наоборот, — трудными задачи, нами не отмеченные.

Настоящую книгу можно использовать и независимо от ее формы задачника, т. е. можно читать решения задач и непосредственно после условий. Хотя это и не совпадает с основным замыслом книги, однако и при таком использовании книга

может оказаться полезной, так как она содержит изложение ряда интересных вопросов теории выпуклых кривых. Особенно можно рекомендовать для такого чтения § 5 (и несколько меньше — примыкающий к § 5 более трудный § 6), § 2 и § 7.

Чтение книги следует начинать с § 1, содержащего все необходимые для дальнейшего понятия. Этот параграф имеет вводный характер и не представляет значительного самостоятельного интереса, поэтому не следует слишком на нем задерживаться. После § 1 можно по выбору начинать читать § 2, § 5 или § 7. Для того чтобы читатель смог лучше оценить наиболее интересные задачи 31, 33, 35а) и 36 из § 3, рекомендуется читать этот параграф после § 2. Точно так же рекомендуется читать § 6 (повидимому, самый трудный в книге) после § 5, а § 8 после § 7. Наконец, § 4 является вспомогательным; его лучше читать после ознакомления с § 6 или § 7, чтобы можно было сразу применить материал этого параграфа к более содержательным теоремам. Можно также знакомиться с содержанием § 4 частями, перед теми задачами из других параграфов, в которых используются определенные в нем понятия.

Нам кажется, что §§ 7 и 8 по изяществу определений и стройности всего ряда теорем наиболее способны заинтересовать читателя. По важности содержания на первое место можно поставить § 5, а затем примыкающий к нему § 6. Самым легким в книге является, повидимому, § 2.

В ряде мест мы формулировали по ходу изложения некоторые не решенные еще задачи. Большинство из них — задачи весьма трудные, но некоторые могут оказаться доступными для читателей этой книги.

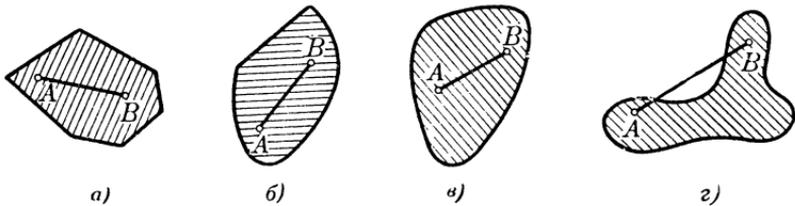
Во введениях к §§ 4, 5 и 7 указана некоторая дополнительная литература, которая может оказаться интересной и полезной читателю этой книги. После проработки настоящей книги мы можем рекомендовать приступить к чтению указанных в предисловии книг Л. А. Люстерника «Выпуклые тела» и А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники».

ЗАДАЧИ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

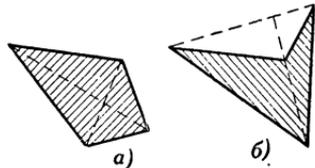
Этот параграф имеет вводный характер. В нем даны основные определения, используемые в дальнейшем, и приведены простейшие задачи, иллюстрирующие эти определения. Возможно, что задачи этого параграфа покажутся читателю скучными или слишком простыми, — они являются подготовительными по отношению к более интересным задачам последующих параграфов. При желании можно и не решать этих задач, но следует прочесть текст, чтобы ознакомиться с определениями выпуклой фигуры, выпуклой кривой, опорной прямой выпуклой фигуры (эти понятия используются в §§ 2—8), обыкновенной и угловой точек выпуклой кривой (используются в §§ 4, 7, 8), длины выпуклой кривой и площади выпуклой фигуры (используются в §§ 4—8). Можно, наконец, читать решения задач сразу после условий, рассматривая этот параграф как «теорию», предпосылаемую задачам остальных параграфов книги.

Плоская фигура называется выпуклой, если она целиком содержит прямолинейный отрезок, соединяющий любые



Черт. 1.

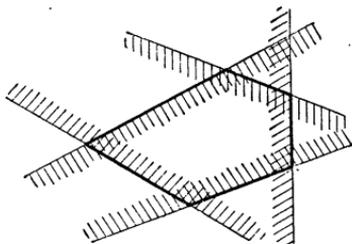
две принадлежащие ей точки. Так, на черт. 1 фигуры *a*, *б*, *в* выпуклы, а фигура *г* не выпукла. Круг и треугольник являются выпуклыми фигурами, четырехугольник же может быть как выпуклым, так и невыпуклым в зависимости от того, пересекаются ли его диагонали внутри или вне четырехугольника (черт. 2).



Черт. 2.

Пересечением двух (или нескольких) фигур называется фигура, состоящая из всех точек, принадлежащих обоим (или всем, если их несколько) фигурам.

1. Докажите, что пересечение двух или нескольких выпуклых фигур есть выпуклая фигура.

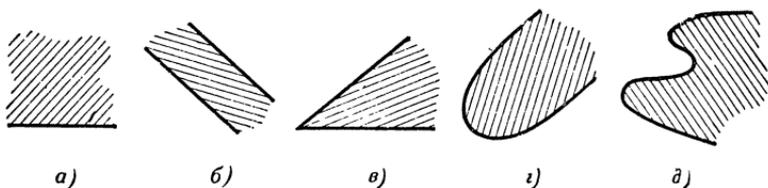


Черт. 3.

2. Докажите, что всякий выпуклый многоугольник является пересечением конечного числа полуплоскостей (черт. 3).

Фигура называется *ограниченной*, если она целиком помещается внутри некоторой окружности. Например, всякий параллелограмм, треугольник, круг, а также все фигуры, изображенные на черт. 1, являются ограниченными фигурами.

В задачах этого параграфа каждый раз, когда не оговорено противное, мы будем допускать, что фигуры могут быть и неограниченными. В последующих параграфах, наоборот, мы будем, как правило, считать все плоские фигуры ограниченными, часто не оговаривая этого специально.



Черт. 4.

На черт. 4 изображено несколько неограниченных фигур; из них выпуклыми являются фигуры *а* (полуплоскость), *б* (полоса), *в* (угол) и *г*.

Выпуклым фигурам можно дать и другие определения отличные от приведенного выше (см. ниже стр. 17—18 и 25),

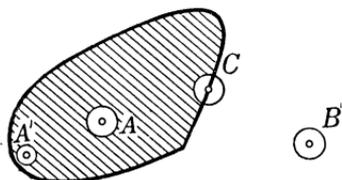
однако определение, приведенное в начале этого параграфа, является самым удобным, и мы, в основном, будем пользоваться этим определением.

По отношению ко всякой плоской фигуре все точки плоскости делятся на три категории: внутренние, внешние и граничные.

Точка фигуры называется внутренней, если существует круг (хотя бы очень малого радиуса) с центром в этой точке, целиком принадлежащий фигуре. Внутренними точками фигуры будут, например, точки A и A' на черт. 5.

Точка называется внешней по отношению к фигуре, если существует круг с центром в этой точке, не содержащий точек фигуры. Примером внешней точки по отношению к фигуре является точка B на черт. 5.

Наконец, точка фигуры называется граничной, если, какой бы мы круг с центром в данной точке ни построили, он всегда будет содержать как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей.



Черт. 5.

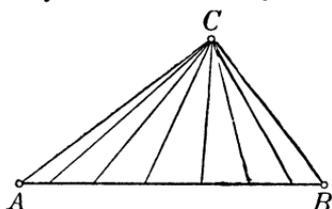
Точка C на черт. 5 может служить примером граничной точки фигуры. Граничные точки фигуры образуют некоторую линию — кривую или ломаную. Эта линия называется границей фигуры. Если плоская линия является границей некоторой выпуклой фигуры, то она называется выпуклой кривой, или — в том случае, когда эта линия ломаная, — выпуклым многоугольником¹⁾.

В дальнейшем мы будем называть точками, принадлежащими фигуре, или, короче, точками фигуры, все ее внутренние или граничные точки. Говоря о плоских фигурах, мы во всех случаях, когда не оговорено противное, будем считать, что эти фигуры не состоят из одних граничных точек, а имеют и внутренние точки (т. е. не являются линиями).

¹⁾ Таким образом, выпуклым многоугольником называют как плоскую фигуру, так и линию — границу этой фигуры. Чтобы избежать смещения, мы будем иногда говорить о границе многоугольника (не обращая внимания на то, что эта граница сама тоже называется выпуклым многоугольником).

Рассмотрим теперь одномерные выпуклые фигуры, т. е. линии, обладающие тем свойством, что отрезок AB , соединяющий любые две точки A и B такой линии, целиком принадлежит ей¹⁾.

В то время как двумерные (плоские) выпуклые фигуры могут быть весьма разнообразны (см., например, фигуры a ,



Черт. 6.

b , v на черт. 1 и a , b , v , z на черт. 4), все одномерные выпуклые фигуры исчерпываются прямолинейными отрезками, лучами и прямыми линиями.

В самом деле, прежде всего легко видеть, что все точки одномерной выпуклой фигуры должны принадлежать одной прямой:

если выпуклая фигура содержит три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, то она в силу выпуклости содержит все точки отрезка AB , а следовательно, и все точки всех отрезков, соединяющих точку C с каждой точкой отрезка AB (черт. 6), т. е. содержит весь треугольник ABC и, следовательно, не может быть одномерной.

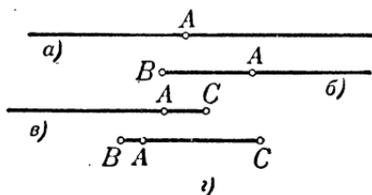
Предположим теперь, что прямая, частью которой является наша одномерная выпуклая фигура, расположена горизонтально, и рассмотрим какую-либо точку A этой фигуры (черт. 7). Если как угодно далеко влево от точки A есть точки нашей одномерной выпуклой фигуры, то эта фигура содержит весь левый луч прямой, концом которого является точка A (так как фигура должна содержать целиком все отрезки, соединяющие любые две ее точки). Если же точки фигуры расположены влево от точки A лишь на ограниченных расстояниях, то наша фигура, очевидно, должна содержать отрезок, соединяющий самую левую из точек фигуры (назовем ее точкой B) с точкой A , и не может содержать никаких точек, расположенных левее точки B . В частном случае точка B может совпасть с точкой A (это значит, что A сама является самой левой точкой фигуры). Точно так же точки фигуры, расположенные

¹⁾ Одномерные выпуклые фигуры можно охарактеризовать как выпуклые фигуры, все точки которых являются граничными.

вправо от точки A , могут заполнять либо целый луч прямой, либо некоторый отрезок AC . Комбинируя все возможные случаи, мы можем заключить, что наша фигура является либо всей прямой (черт. 7, а), либо лучом (черт. 7, б, в), либо отрезком (черт. 7, г), либо точкой. Точки мы будем называть нульмерными выпуклыми фигурами.

Особенно важным для дальнейшего является тот факт, что ограниченная одномерная выпуклая фигура есть обязательно *отрезок*.

В дальнейшем всюду, где не оговорено противное, под выпуклой фигурой мы будем подразумевать *двумерную* выпуклую фигуру.



Черт. 7.

3. Докажите, что

а) если A и B — внутренние точки выпуклой фигуры Φ , то все точки отрезка AB — внутренние точки Φ ;

б) если A — внутренняя, а B — граничная точка выпуклой фигуры Φ , то все точки отрезка AB , кроме B , — внутренние точки Φ ;

в) если A и B — граничные точки выпуклой фигуры Φ , то либо все точки отрезка AB — граничные точки Φ , либо все точки отрезка AB , кроме A и B , — внутренние точки Φ .

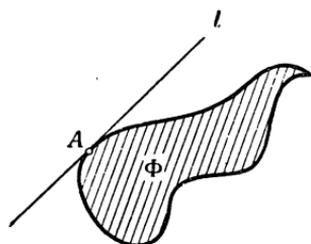
4. Докажите, что всякая прямая, проведенная через внутреннюю точку выпуклой фигуры, пересекает ее границу не более, чем в двух точках. Если выпуклая фигура ограничена, то каждая прямая, проходящая через какую-либо ее внутреннюю точку, пересекает границу фигуры ровно в двух точках.

5. (Обратная задаче 4.) Докажите, что если всякая прямая, проходящая через любую внутреннюю точку ограниченной фигуры, пересекает ее границу в двух точках, то фигура выпукла.

Пользуясь результатами задач 4 и 5, можно дать новое определение ограниченной выпуклой фигуры: *ограниченная*

фигура называется выпуклой, если всякая прямая, проходящая через любую внутреннюю точку этой фигуры, пересекает ее границу в двух точках.

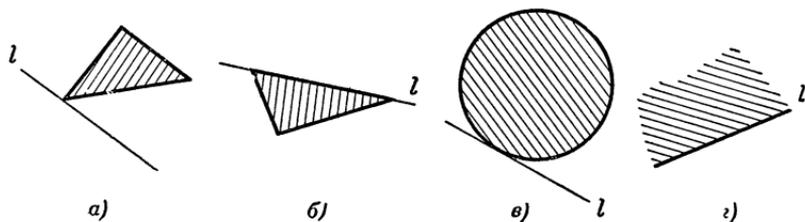
Пусть Φ — произвольная плоская фигура. Прямая l называется опорной прямой фигуры Φ , если она проходит хотя бы через одну граничную точку фигуры Φ и вся фигура Φ расположена по одну сторону от прямой l (черт. 8). Например, прямая, проведенная через вершину треугольника параллельно противоположной стороне (черт. 9, а),



Черт. 8.

или сторона треугольника (черт. 9, б) являются опорными прямыми треугольника; каждая сторона выпуклого многоугольника является его опорной прямой (см. задачу 2). Касательная к окружности является опорной прямой для круга, ограниченного этой окружностью

(черт. 9, в). Опорная прямая может иметь с выпуклой ограниченной фигурой или единственную общую точку (см., напри-

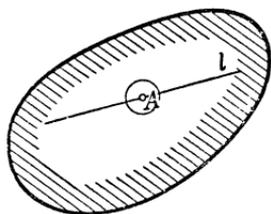


Черт. 9.

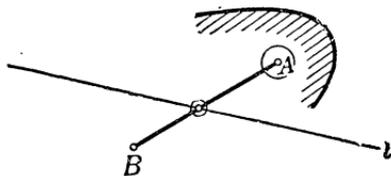
мер, черт. 9, а, в), или целый общий отрезок (черт. 9, б); если выпуклая фигура не ограничена, то опорная прямая может даже целиком принадлежать фигуре (черт. 9, г).

Опорную прямую выпуклой фигуры Φ можно также определить как такую прямую, которая содержит граничные

точки фигуры, но не содержит ни одной ее внутренней точки. Действительно, прежде всего ясно, что опорная прямая не может содержать внутренней точки A фигуры: в противном случае точки фигуры Φ , расположенные внутри некоторой окружности с центром в точке A , находились бы по обе стороны опорной прямой (черт. 10). С другой стороны, если прямая l не содержит внутренних точек выпуклой фигуры Φ , то вся фигура должна быть расположена по одну сторону от l . Действительно, пусть A — какая-нибудь внутренняя точка Φ . Если бы какая-либо (внутренняя или граничная) точка B фигуры находилась по другую сторону от



Черт. 10.

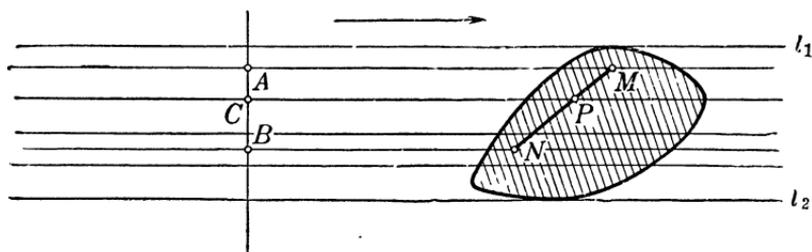


Черт. 11.

прямой l , чем точка A (черт. 11), то точка пересечения прямой l с отрезком AB была бы внутренней точкой Φ (см. задачи 3а), б)).

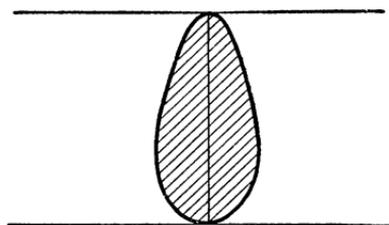
К каждой ограниченной выпуклой фигуре можно провести в точности две опорные прямые, параллельные данному направлению. Для того чтобы это доказать, проведем через каждую точку ограниченной выпуклой фигуры Φ прямую, параллельную данному направлению (черт. 12). Все эти прямые пересекают произвольную прямую, перпендикулярную к выбранному направлению, по одномерной выпуклой фигуре (если A и B — две произвольные точки пересечения нашей совокупности прямых с перпендикулярной к ним прямой, а C — произвольная точка отрезка AB , то C тоже должна принадлежать этому пересечению; это нетрудно усмотреть из черт. 12, если воспользоваться выпуклостью фигуры Φ). Следовательно, в силу сказанного на стр. 17 это пересечение должно быть отрезком прямой линии (ограниченность пересечения вытекает из ограниченности фигуры Φ), а совокупность прямых, параллельных

заданному направлению, проведенных через все точки Φ , должна представлять собой полосу. Крайние (граничные) прямые l_1 и l_2 этой полосы и являются двумя опорными прямыми, параллельными заданному направлению.



Черт. 12.

6. Докажите, что каждая из двух параллельных опорных прямых, расстояние между которыми имеет наибольшее возможное значение, содержит единственную точку границы фигуры и что отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен к обеим опорным прямым (черт. 13).



Черт. 13.

7. Докажите, что наибольшее расстояние между двумя точками выпуклой фигуры совпадает с наибольшим расстоянием между парой параллельных опорных прямых.

Наибольшее расстояние между точками плоской фигуры Φ называется диаметром фигуры¹⁾. Из задачи 7 следует,

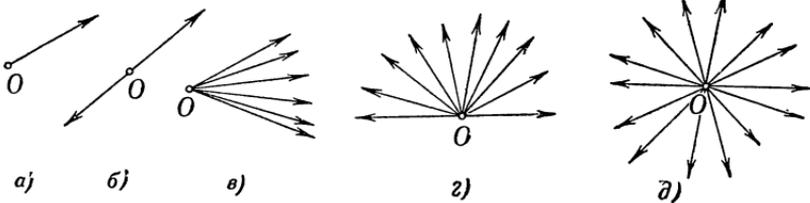
¹⁾ См. задачу 5 дополнения I (стр. 134).

что диаметр выпуклой фигуры можно также определить, как *наибольшее расстояние между параллельными опорными прямыми этой фигуры* (сравните с определением ширины выпуклой фигуры на стр. 33).

8. Докажите, что если A и B — две точки выпуклой фигуры Φ , расстояние d между которыми имеет наибольшее значение, то прямые, проведенные через точки A и B перпендикулярно к отрезку AB , являются опорными прямыми Φ .

Совокупность лучей, исходящих из одной точки O , называется *выпуклой*, если она содержит все лучи, проходящие внутри угла, меньшего 180° , образованного любыми двумя лучами совокупности, не составляющими продолжение один другого.

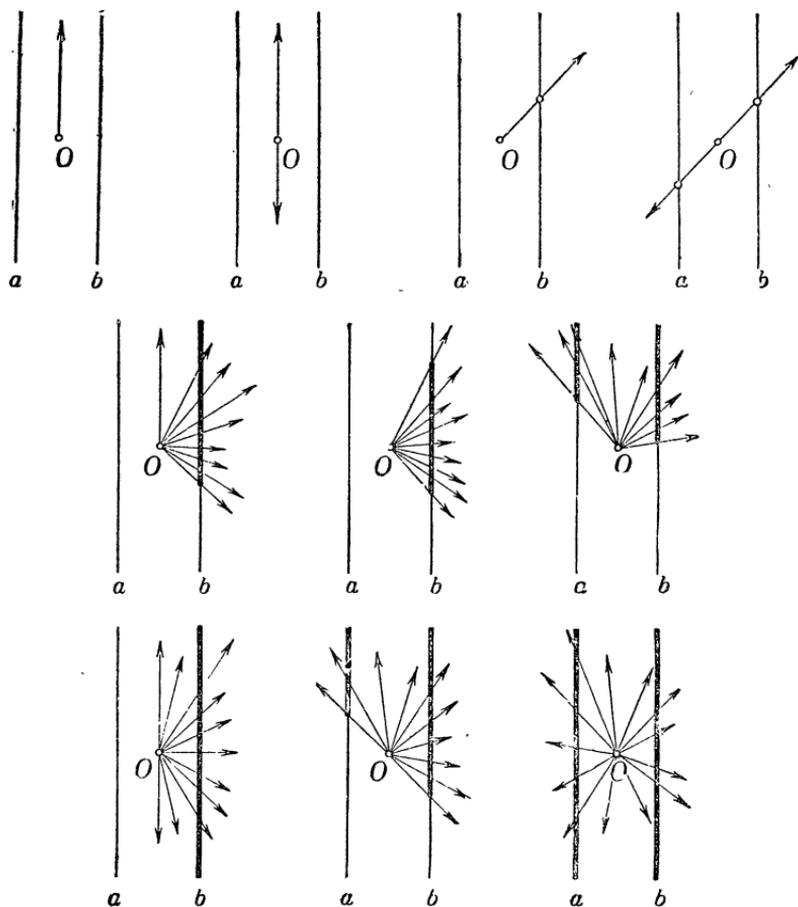
Выбирая какой-либо луч a выпуклой совокупности и рассматривая все ее лучи, расположенные с одной стороны луча a , а затем все лучи, расположенные с другой стороны a , нетрудно доказать при помощи рассуждений, близких к приведенным на стр. 16, 17, что *выпуклая совокупность лучей может быть одним лучом, парой лучей, являющихся продолжением один другого, углом, меньшим 180° , полуплоскостью либо целой плоскостью* (черт. 14).



Черт. 14.

Это же предложение можно получить и как следствие теоремы об одномерных выпуклых фигурах. В самом деле, из определения выпуклой совокупности лучей непосредственно следует, что пересечение такой совокупности с любой прямой, не проходящей через точку O , выпукло. Рассматривая пересечения выпуклой совокупности лучей с двумя параллельными прямыми, расположенными по разные стороны от точки O , и учитывая, что каждое из этих пересечений может совсем не содержать точек, быть единственной точкой,

отрезком, лучом или всей прямой, нетрудно выяснить, что выпуклая совокупность лучей может быть только одного из перечисленных выше видов; все возможные здесь случаи приведены на черт. 15.

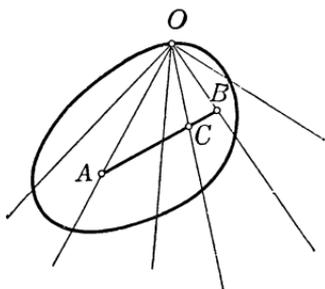


Черт. 15.

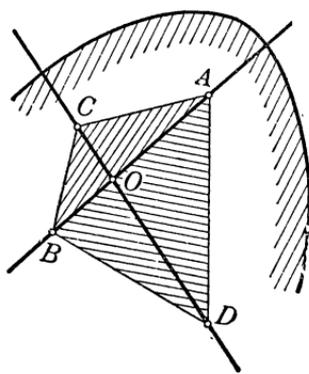
Пусть Φ — некоторая выпуклая фигура и O — ее граничная точка. Проведем из точки O лучи, соединяющие ее с каждой точкой (внутренней или граничной) фигуры Φ

(черт. 16). Мы получим выпуклую совокупность лучей. В самом деле, если OA и OB — два луча нашей совокупности (A и B — точки фигуры Φ), то все лучи, расположенные внутри острого угла AOB , пересекают отрезок AB , целиком состоящий из точек фигуры Φ , и, следовательно, принадлежат нашей совокупности.

Получившаяся совокупность лучей не может быть единственным лучом или парой лучей, составляющих продолжение один другого, так как мы считаем, что фигура не одномерна.



Черт. 16.

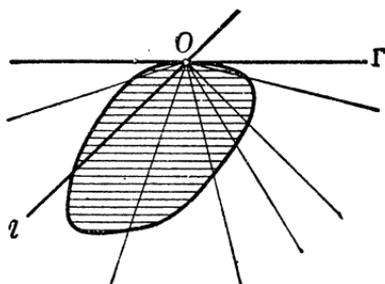


Черт. 17.

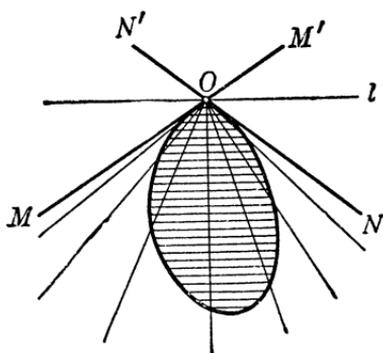
Далее, нетрудно показать, что эта совокупность лучей не может заполнить всю плоскость. Действительно, если лучи заполняют плоскость, то среди них можно выбрать две такие пары лучей OA и OB , OC и OD , что лучи каждой пары составляют продолжение один другого. Пусть A, B, C, D — точки выпуклой фигуры, лежащие на этих лучах (черт. 17). Фигура Φ вместе с точками A, B, C должна содержать весь треугольник ABC (см. черт. 6, стр. 16) и вместе с точками A, B, D — весь треугольник ABD , т. е. она должна содержать весь выпуклый четырехугольник $ACBD$, для которого точка O является внутренней. Таким образом, в этом случае точка O не может быть граничной точкой фигуры Φ .

Следовательно, рассматриваемая совокупность лучей будет либо полуплоскостью, либо углом, меньшим 180° . В первом

случае (черт. 18) точка C называется обыкновенной точкой выпуклой кривой K , ограничивающей фигуру Φ . Прямая Γ , ограничивающая полулюскость, является опорной пря-



Черт. 18.



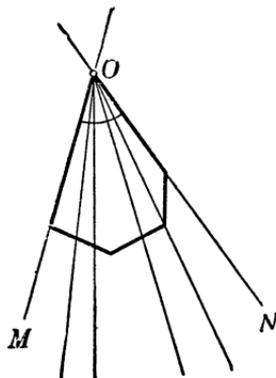
Черт. 19.

мой фигуры Φ (все точки Φ лежат на лучах нашей совокупности, а следовательно, с одной стороны Γ). При этом прямая Γ является единственной опорной прямой фигуры Φ в точке O , так как по обе стороны от каждой другой прямой l , проходящей через O , есть лучи нашей совокупности, а следовательно, и точки фигуры Φ (черт. 18). Прямая Γ называется касательной в точке O к выпуклой кривой K .

Во втором случае (черт. 19) точка O называется угловой точкой выпуклой кривой K , ограничивающей фигуру Φ . Все точки фигуры Φ заключены в этом случае внутри угла MON ; поэтому всякая прямая l , проходящая внутри угла MON , смежного с углом MON , будет опорной прямой фигуры Φ . В частности, опорными будут и лучи OM , ON , которые называются полукасательными в точке O к выпуклой кривой, ограничивающей фигуру Φ . Угол $MON = \alpha$ называется внутренним углом (или просто углом) выпуклой кривой K или выпуклой фигуры Φ в точке O , а угол $MON' = 180^\circ - \alpha$ называется внешним углом кривой K или фигуры Φ .

Согласно этому определению все точки выпуклого многоугольника, кроме вершин, являются обыкновенными, причем касательными в этих точках являются стороны многоугольника.

Вершины выпуклого многоугольника являются его угловыми точками, а определенные нами углы совпадают с углами многоугольника в обычном смысле (черт. 20).



Черт. 20.

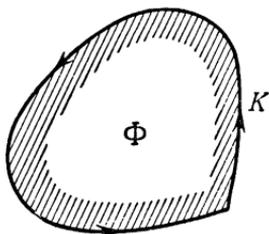
Сопоставляя оба случая — случай обыкновенной точки выпуклой кривой и случай угловой точки, мы приходим к заключению, что *через каждую точку выпуклой кривой проходит по крайней мере одна опорная прямая*. Доказательство обратного утверждения составляет содержание задачи 9.

9. Докажите, что если через каждую граничную точку ограниченной фигуры проходит по крайней мере одна опорная прямая, то фигура является выпуклой.

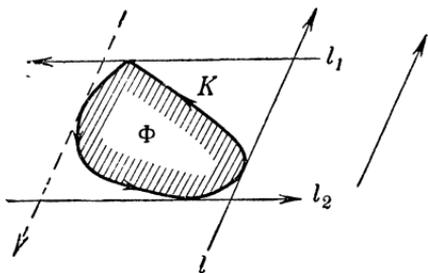
Мы приходим, таким образом, еще к одному определению ограниченной выпуклой фигуры: *ограниченная фигура называется выпуклой, если через каждую ее граничную точку проходит по крайней мере одна опорная прямая*.

Пусть Φ — произвольная ограниченная выпуклая фигура, K — ее граница. Установим на кривой K определенное направление обхода, например, против часовой стрелки. При движении по кривой K в этом направлении фигура Φ все время остается слева (черт. 21). В соответствии с этим мы установим направления и на опорных прямых фигуры Φ .

Именно, направление опорной прямой l фигуры Φ мы будем всегда выбирать таким образом, чтобы фигура Φ лежала слева от прямой l (черт. 22). В таком случае две параллельные

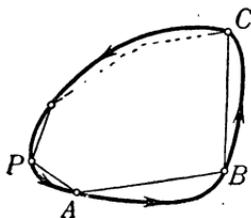


Черт. 21.



Черт. 22.

между собой опорные прямые l_1 и l_2 фигуры Φ получают противоположные направления. Таким образом, каждому направлению в плоскости (которое можно задавать при помощи прямой со стрелкой) будет соответствовать единственная опорная прямая, имеющая это направление (черт. 22). Если K есть многоугольник, то задание направления обхода позволяет говорить о направлениях сторон многоугольника.



Черт. 23.

Мы будем говорить, что n граничных точек A, B, C, \dots, P фигуры Φ расположены в циклическом порядке, если при обходе кривой K , ограничивающей фигуру Φ , против часовой стрелки эти точки встречаются нам в указанном порядке (черт. 23).

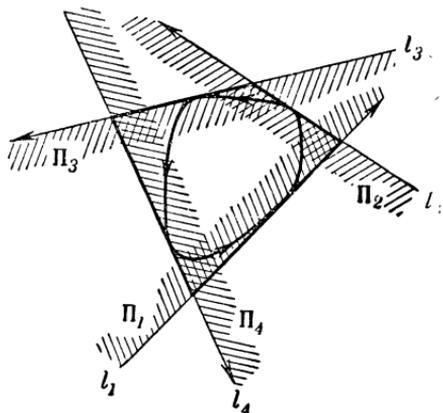
Если точки A, B, C, \dots, P кривой K расположены в циклическом порядке, то многоугольник $ABC\dots P$ называется вписанным в кривую K .

10. Докажите, что всякий многоугольник, вписанный в ограниченную выпуклую кривую, является выпуклым многоугольником.

11. (Обратная задаче 10.) Докажите, что если каждые n точек ограниченной кривой K являются вершинами некоторого выпуклого многоугольника, то эта кривая выпукла.

12. Докажите, что если ограниченная выпуклая кривая имеет конечное число угловых точек, то сумма внешних углов при всех ее угловых точках меньше или равна 360° . При этом, если сумма всех внешних углов равна 360° , то кривая является выпуклым многоугольником.

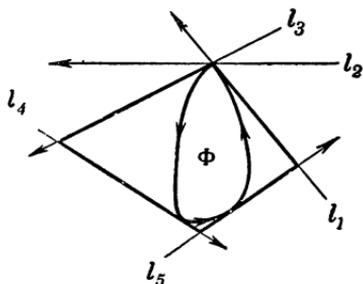
Если l_1, l_2, \dots, l_n суть n опорных прямых выпуклой фигуры Φ , на каждой из которых установлено направление, а $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ — соответствующие им левые полуплоскости (черт. 24), то Φ расположена в каждой из этих левых полуплоскостей (см. выше стр. 26), а значит, в их пересечении. Если это пересечение ограничено, т. е. является многоугольником, то этот многоугольник называется описанным вокруг фигуры Φ или вокруг ограничивающей ее кривой K .



Черт. 24.

Из этого определения следует (ср. задачу 1), что многоугольник, описанный вокруг выпуклой фигуры, всегда является выпуклым. Сторонами описанного многоугольника являются отрезки прямых l_1, l_2, \dots, l_n .

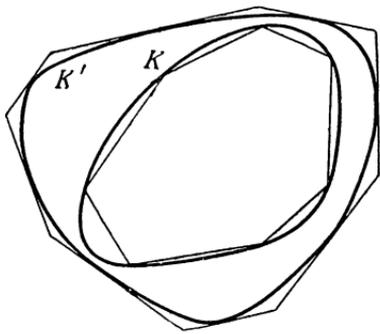
Может, однако, оказаться, что три (или больше) из взятых n опорных прямых будут проходить через одну и ту же граничную точку фигуры Φ (которая в этом случае обязательно является угловой; черт. 25). В таком случае описанный многоугольник будет иметь меньше чем n сторон. Мы, однако, будем считать такой многоугольник n -угольником, имеющим одну или несколько сторон нулевой длины, т. е. сторон, превратившихся в точки. Эти «стороны нулевой длины»



Черт. 25.

но уменьшаются, или описанных вокруг Φ многоугольников, все внешние углы которых безгранично уменьшаются¹⁾).

Из этого определения следует, что *если выпуклая кривая K целиком заключена внутри выпуклой кривой K' , то длина K не может быть больше длины K'* . Действительно, рассмотрим последовательность многоугольников, вписанных в кривую K , стороны которых безгранично уменьшаются, и последовательность многоугольников, описанных вокруг K' , внешние углы которых безгранично уменьшаются (черт. 26). Каждый из многоугольников второй последовательности заключает в себе каждый из выпуклых многоугольников первой последовательности и, следовательно, имеет больший периметр; отсюда следует, что предел периметров многоугольников второй последовательности — длина K' — не меньше предела периметров многоугольников первой последовательности — длины K .



Черт. 26.

¹⁾ Существование длины выпуклой кривой и площади выпуклой фигуры нетрудно доказать, если использовать некоторые предложения теории пределов.

Определение выпуклого тела в пространстве ничем не отличается от определения выпуклой фигуры на плоскости. Однако при определении внутренних, внешних и граничных точек тела нужно рассматривать не круги, а шары с центрами в этих точках. Граничные точки тела образуют его границу. Граница выпуклого тела называется выпуклой поверхностью, а если она составлена из плоских многоугольников — выпуклым многогранником.

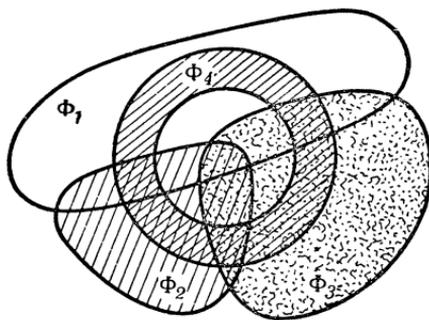
Вместо опорных прямых для пространственных тел рассматриваются опорные плоскости — плоскости, содержащие граничные точки тела и такие, что все тело расположено по одну сторону от этой плоскости.

Для выпуклых тел в пространстве имеют место предложения, аналогичные утверждениям задач 1—9 (они получаются из формулировок задач 1—9 заменой слов «выпуклая фигура» на «выпуклое тело», «граничная кривая» на «граничная поверхность», «опорная прямая» на «опорная плоскость» и т. д.). Мы предоставляем читателю самому доказать все эти теоремы.

§ 2. ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Этот параграф посвящен одной интересной теореме о выпуклых фигурах — так называемой теореме Хелли (см. ниже задачу 14), которая находит применения в различных областях математики ¹⁾. В нем собраны некоторые геометрические предложения, которые могут быть доказаны с помощью этой теоремы. Задачи 16, 17 и 19а) в несколько более полной формулировке приведены также в § 6 книги (см. задачи 67—69).

13. На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все четыре фигуры имеют хотя бы одну общую точку.



Черт. 27.

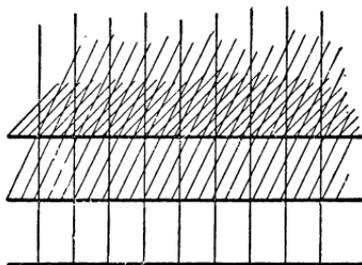
Для невыпуклых фигур это предложение, разумеется, уже не будет справедливым: например, на черт. 27 изображены

¹⁾ Так, например, известный советский математик Л. Г. Шпирельман получил с помощью теоремы Хелли весьма сильные результаты в области математического анализа (приближение функций многочленами). См. Л. Г. Шпирельман, О равномерных приближениях, Известия Академии наук СССР, серия математическая, т. 2, 1938, стр. 53—59.

четыре фигуры, каждые три из которых имеют общую точку; однако все эти фигуры общей точки не имеют.

14. Теорема Хелли. На плоскости дано n выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все n фигур имеют общую точку.

Пусть теперь на плоскости дано бесконечно много выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку. В силу теоремы Хелли любое конечное число этих фигур будет иметь общую часть (которая может состоять из одной точки). Однако, вообще говоря, отсюда еще не следует, что все заданные фигуры имеют общую точку. Рассмотрим, например, совокупность всех «верхних полуплоскостей», ограниченных снизу всевозможными горизонтальными прямыми. Каждые три такие полуплоскости имеют общую часть (черт. 28); любое конечное число полуплоскостей также имеет общую часть. Но если мы будем присоединять к какой-либо совокупности таких полуплоскостей, расположенные все выше и выше, то эта общая часть будет все более и более удаляться вверх, так что всякая точка плоскости останется в конце концов вне общей части полуплоскостей. Таким образом, не существует точки, которая принадлежала бы всем верхним полуплоскостям одновременно.



Черт. 28.

Однако если рассматриваемые фигуры ограничены, то при присоединении все новых и новых фигур к некоторой их совокупности общая часть не сможет «уйти в бесконечность»; она все время будет оставаться в ограниченной части плоскости¹⁾. В этом случае должна существовать точка, которая

¹⁾ Внимательный читатель заметит, что для справедливости этого рассуждения достаточно, чтобы хотя бы одна из рассматриваемых фигур была ограничена.

принадлежит одновременно всем фигурам¹⁾. Другими словами, имеет место следующая теорема, также принадлежащая Хелли:

Если на плоскости даны ограниченные выпуклые фигуры в конечном или бесконечном числе, каждые три из которых имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая одновременно всем фигурам.

В некоторых задачах настоящего параграфа используется теорема Хелли в этой общей формулировке.

15. На плоскости дано n точек, причем известно, что каждые три из них можно заключить в круг радиуса 1. Докажите, что все n точек можно заключить в круг радиуса 1.

16*. Теорема Юнга. На плоскости дано n точек, расстояние между любыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что все эти точки могут быть заключены в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Теорема Юнга справедлива и в том случае, когда точек бесконечно много. Если совокупность точек представляет собой некоторую плоскую фигуру (не обязательно выпуклую), то теорема Юнга формулируется следующим образом:

Любая плоская (не обязательно выпуклая) фигура диаметра 1 (см. выше стр. 20) может быть заключена в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

В такой форме эта теорема применяется в некоторых вопросах теории чисел.

Теорему Юнга можно пояснить следующим вытекающим из нее утверждением: если на скатерти имеется пятно диаметра d , то его заведомо можно прикрыть круглой салфеткой радиуса $\frac{d}{\sqrt{3}}$ (хотя форма пятна может быть такова, что его нельзя прикрыть круглой салфеткой меньшего радиуса).

В тесной связи с теоремой Юнга находится следующая интересная задача, решение которой пока не известно:

¹⁾ Строгое доказательство этого факта, опирающееся на некоторые общие предложения о бесконечных множествах, приведено в дополнении I (см. стр. 132).

Найти фигуру наименьшей площади, которой можно покрыть каждую плоскую фигуру диаметра 1 (т. е. такую фигуру II, что всякую плоскую фигуру диаметра 1 можно поместить внутри II).

Теорема Юнга утверждает, что каждую фигуру диаметра 1 можно покрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Можно показать, что каждую фигуру диаметра 1 можно покрыть уже правильным шестиугольником, вписанным в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. задачу 31 из § 3). Однако и этот шестиугольник не является минимальной фигурой, обладающей таким свойством¹⁾.

Шириной ограниченной выпуклой фигуры называется наименьшее расстояние между ее параллельными опорными прямыми²⁾.

17***. Теорема Бляшке. Докажите, что всякая ограниченная выпуклая фигура ширины 1 заключает внутри себя некоторый круг радиуса $\frac{1}{3}$.

Аналогично задаче, приведенной нами после теоремы Юнга, можно поставить вопрос о фигуре наибольшей площади, которую можно поместить внутри каждой выпуклой фигуры ширины 1. Этот вопрос также пока остается нерешенным³⁾.

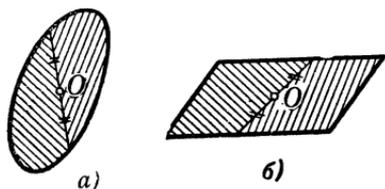
Последующие две задачи этого параграфа содержат некоторые оценки, указывающие, насколько «центральной» является произвольная фигура на плоскости. Центр круга обладает тем свойством, что каждая хорда, проведенная через центр, делит площадь круга и длину окружности пополам, и сама хорда делится в центре круга пополам. Этим же свойством обладает центр любой центрально-симметричной фигуры (черт. 29, а, б).

1) Существование фигуры наименьшей площади, которой можно покрыть всякую фигуру диаметра 1, следует из теоремы 1 дополнения I.

2) См. задачу 6 дополнения I (стр. 134).

3) Существование фигуры наибольшей площади, которую можно заключить внутри каждой выпуклой фигуры ширины 1, также следует из теоремы 1 дополнения I.

Конечно, не всякая плоская фигура имеет центр симметрии; однако в обыденной жизни часто говорят, что фонтан находится «в самом центре» площади или что данное лицо живет «в самом центре» города,

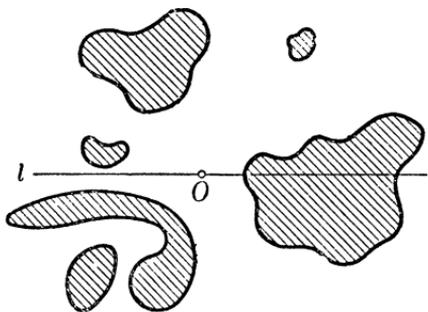


Черт. 29.

также и в том случае, когда площадь или город и не имеет центра в строгом смысле. Задачи 18 и 19а), можно рассматривать как некоторое пояснение утверждения, что точка O находится «в центре» некоторой фигуры Φ . Другие задачи подобного рода будут приведены ниже (см. задачи 33 и 34 из § 3).

18. а) На плоскости дано n точек A_1, A_2, \dots, A_n . Докажите, что существует такая точка O плоскости, что по каждую сторону от любой прямой l , проходящей через точку O , находится не менее $\frac{n}{3}$ точек (включая сюда и точки, расположенные на самой прямой l).

б) На плоскости дана ограниченная кривая K длины L (быть может, состоящая из отдельных кусков; черт. 30). Докажите, что на плоскости найдется такая точка O , что всякая прямая, проходящая через точку O , пересекает кривую K на две части, длина каждой из которых не меньше $\frac{L}{3}$.



Черт. 30.

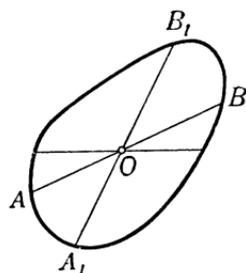
в) На плоскости дана ограниченная фигура Φ площади S (может быть, состоящая из отдельных кусков; см. черт. 30). Докажите, что на плоскости найдется такая точка O , что всякая прямая, проходящая через точку O , пересекает фигуру Φ на две части, площадь каждой из которых не меньше $\frac{S}{3}$.

В том случае, когда Φ есть выпуклая фигура, оценка задачи 18в) может быть значительно усилена. Именно, можно

Докажите, что на плоскости найдется такая точка O , что всякая прямая, проходящая через точку O , пересекает фигуру Φ на две части, площадь каждой из которых не меньше $\frac{S}{3}$.

В том случае, когда Φ есть выпуклая фигура, оценка задачи 18в) может быть значительно усилена. Именно, можно

доказать, что внутри каждой ограниченной выпуклой фигуры Φ существует такая точка O , что всякая прямая, проходящая через O , пересекает Φ на две части, площадь каждой из которых не меньше $\frac{4}{9}$ площади фигуры Φ (см. ниже задачу 36 из § 3). Интересно было бы найти соответствующее усиление оценки задачи 186) для случая, когда K есть выпуклая кривая.

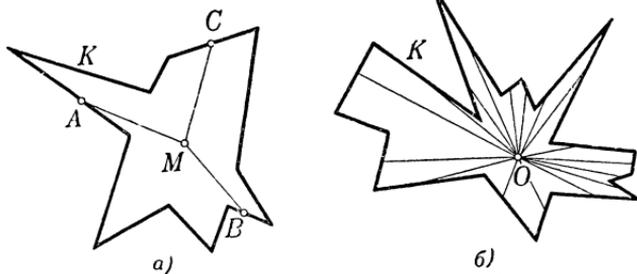


Черт. 31.

19*. а) Докажите, что внутри каждой ограниченной выпуклой фигуры Φ существует такая точка O , что всякая хорда AB фигуры Φ , проходящая через точку O , разбивается этой точкой на отрезки AO и BO , длина каждого из которых не меньше $\frac{1}{3}$ отрезка AB (черт. 31).

б) Выведите из предложения задачи 19а) новое доказательство теоремы Бляшке (см. выше задачу 17).

20**. Теорема М. А. Красносельского. Докажите, что если для любых трех точек A, B, C произволь-



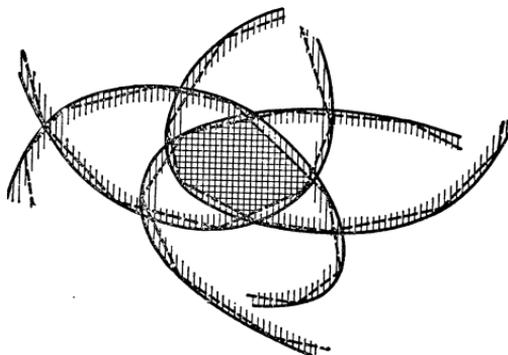
Черт. 32.

ного многоугольника K существует такая точка M , что все три отрезка MA, MB, MC целиком лежат внутри этого многоугольника (черт. 32,а), то внутри K существует точка O , для которой каждый отрезок, соединяющий эту точку с любой точкой многоугольника K , также целиком лежит внутри этого многоугольника.

Многоугольники K , обладающие тем свойством, что все отрезки, соединяющие некоторую внутреннюю точку O со всеми точками границы многоугольника K , лежат внутри K , называются звездчатыми многоугольниками (черт. 32, б). Теорема Красносельского дает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы многоугольник был звездчатым.

Эту теорему можно пояснить следующим образом. Пусть имеется картинная галерея (состоящая, быть может, из нескольких сообщающихся между собой залов), стены которой сплошь увешаны картинами. Теорема Красносельского утверждает, что если для каждых трех картин галереи можно найти такую точку, из которой они видны одновременно, то существует точка, из которой одновременно видны все картины галереи.

В последующих задачах намечены два новых доказательства теоремы Хелли, отличные от приведенного в решениях задач 13 и 14. Задача 21 указывает, как можно просто доказать теорему Хелли для того частного случая, когда все выпуклые фигуры являются выпуклыми многоугольниками. Справедливость теоремы Хелли для выпуклых многоугольников делает вполне очевидной эту теорему и для произвольных



Черт. 33.

выпуклых фигур. Действительно, если в каждую из рассматриваемых выпуклых фигур вписать (или вокруг каждой из них описать) многоугольник, достаточно близкий к самой фигуре (черт. 33), то эти многоугольники пересекаются или не пере-

секаются в зависимости от того, пересекаются или не пересекаются сами фигуры. Однако строгий вывод общей теоремы Хелли из аналогичной теоремы для многоугольников представляет известные трудности.

Доказательство, которому посвящены задачи 22—24, несколько сложнее нашего первого доказательства; однако оно более удобно для того, чтобы перенести теорему Хелли на случай выпуклых тел в пространстве (см. ниже задачу 25).

21. а) Докажите, что если каждые три из n полуплоскостей имеют общую точку, то и все n полуплоскостей имеют общую точку (теорема Хелли для полуплоскостей).

б) Выведите из предложения задачи 21а), что если каждые три из n выпуклых многоугольников (не обязательно ограниченных) имеют общую точку, то и все n многоугольников имеют общую точку (теорема Хелли для многоугольников).

22. Докажите, что если каждые два из заданных на прямой n отрезков имеют общую точку, то и все n отрезков имеют общую точку.

23. (Вспомогательная задача.) Докажите, что если две ограниченные выпуклые фигуры Φ_1 и Φ_2 на плоскости не пересекаются, то существует такая прямая l , что Φ_1 и Φ_2 лежат по разные стороны l .

24. Воспользовавшись результатами задач 22 и 23, докажите, что если каждые три из четырех заданных на плоскости ограниченных выпуклых фигур имеют общую точку, то и все четыре фигуры имеют общую точку.

Из предложения задачи 24 без труда следует теорема Хелли для ограниченных выпуклых фигур (см. решение задачи 14).

25. Теорема Хелли для пространства. В пространстве даны n выпуклых ограниченных тел, каждые четыре из которых имеют общую точку. Докажите, что все n тел имеют общую точку.

Более того, если в пространстве дано бесконечно много ограниченных выпуклых тел, каждые четыре из которых имеют

общую точку, то можно также утверждать, что и все эти тела имеют общую точку.

26. Сформулируйте и докажите стереометрические теоремы, аналогичные предложениям геометрии на плоскости, составляющим содержание задач 16—19а).

Предложение задачи 22 можно назвать теоремой Хелли для прямой линии; в задачах 14 и 25 сформулирована теорема Хелли для плоскости и для пространства. Сопоставив эти задачи, мы получим общую теорему, охватывающую все три случая. Условимся называть пространством одного, двух или трех измерений соответственно прямую, плоскость или все пространство. В таком случае имеет место следующая теорема:

Если в пространстве n измерений ($n = 1, 2, 3$) дано некоторое число ограниченных выпуклых тел, каждые $n + 1$ из которых имеют общую точку, то все эти тела имеют общую точку.

В математике и физике весьма важную роль играет понятие n -мерного пространства при $n > 3$. Теорема Хелли для n -мерных пространств в приведенной выше формулировке справедлива и в общем случае. Все три доказательства этой теоремы (см. задачи 13—14, 21 и 22—24) могут быть перенесены и на n -мерный случай¹⁾.

¹⁾ См. журнал «Успехи математических наук», вып. II, 1936, статья Э. Хелли «О совокупности выпуклых тел с общими точками», стр. 80—81 и вып. X, 1944, статья И. Г. Дукура «К теореме Хелли о совокупности выпуклых тел с общими точками», стр. 60—61.

§ 3. ОДНО СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Этот параграф занимает в книге особое место. Он знакомит читателя с весьма важными понятиями функции и непрерывности. Свойство непрерывных функций, о котором здесь будет идти речь, чрезвычайно простое и наглядное, позволяет доказать целый ряд ни в какой мере не очевидных геометрических теорем (см., например, задачи 31, 33 и 36 этого параграфа), вывод которых иным путем часто является очень сложным или вообще невозможен.

Читатель, которому покажется трудным содержание этого параграфа, может его пропустить без ущерба для понимания дальнейшего. Лишь решения задач 89 (из § 7) и 109 (из § 8) опираются на задачи 30а) и соответственно 30б).

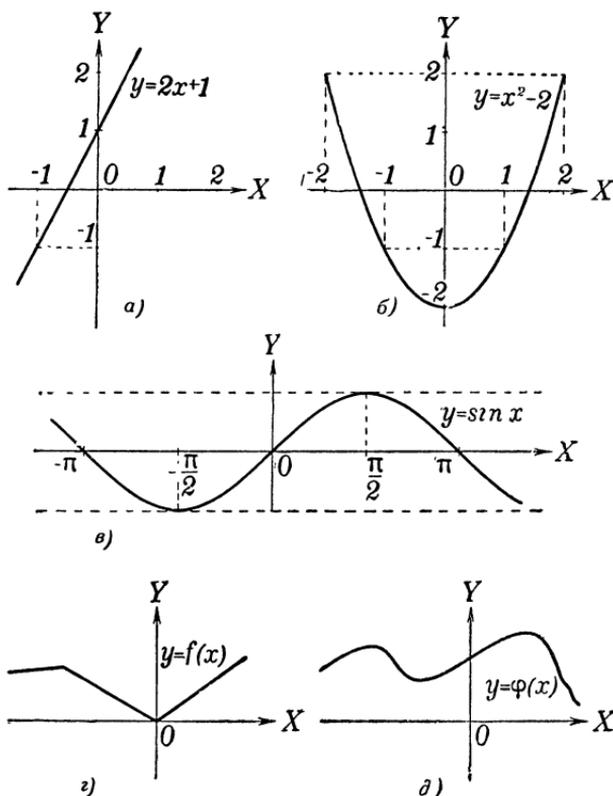
Все фигуры, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаются ограниченными.

Переменная величина y называется функцией x ¹⁾ переменной величины x , если каждому значению x соответствует определенное значение y . Например, длина окружности является функцией ее радиуса, синус угла является функцией угла, температура в данном месте является функцией времени и т. д. Удобным средством, позволяющим наглядно представить себе какую-либо функцию, является ее график.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной, если ее график представляет собой непрерывную кривую. Так, например, функции $y=2x+1$ (черт. 34, а), $y=x^2-2$ (черт. 34, б), $y=\sin x$ (черт. 34, в), а также функции, графики которых изображены на чертежах 34, г, 34, д, являются непрерывными, а функции, графики которых изображены на черт. 35, не являются таковыми. Можно дать также определение непрерывности, не использующее наглядного представления о графике функции. Пусть x_0 — произвольное значение переменного x , а x_1 — близкое к x_0 значение этого же

¹⁾ В математике принято обозначать функции буквами f, F, φ, Φ и т. д. (например, пишут $y=f(x)$).

переменного. Функция непрерывна в точке x_0 , если при приближении x_1 к x_0 разность $f(x_1) - f(x_0)$ становится как угодно малой по абсолютной величине¹⁾.

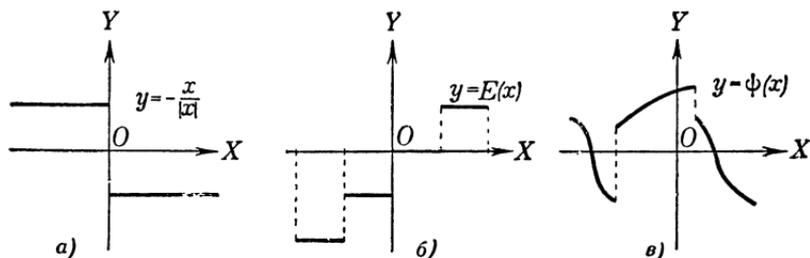


Черт. 34.

Очевидно, что функции, графики которых изображены на черт. 35, имеют точки, в которых непрерывность функций

¹⁾ Точная формулировка: функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если для каждого (сколь угодно малого!) положительного числа ε существует такое число δ , что $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$, как только $|x_1 - x_0| < \delta$. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке между a и b , если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

нарушается — вблизи этих точек значения функций претерпевают «скачок», и поэтому разность $f(x_1) - f(x_0)$ не может быть сделана очень малой.

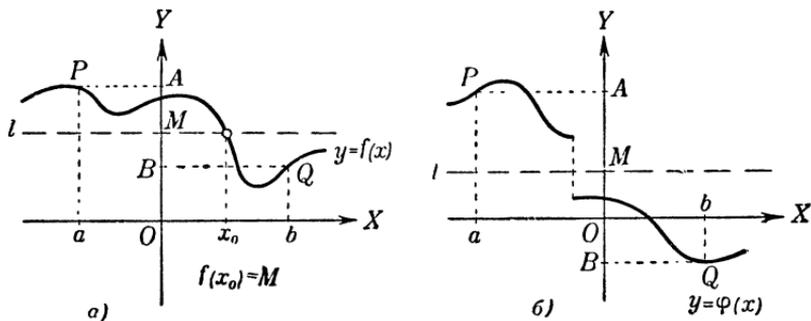


Черт. 35.

Все непрерывные функции обладают следующим свойством:

Если непрерывная на отрезке $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ принимает при $x = a$ значение A , а при $x = b$ — значение B , то в промежутке между $x = a$ и $x = b$ функция хотя бы один раз принимает каждое значение M , заключающееся между A и B .

Это предложение геометрически вполне очевидно; оно означает, что если непрерывная кривая, являющаяся графиком функции $y = f(x)$, проходит через две точки $P(x = a, y = A)$



Черт. 36.

и $Q(x = b, y = B)$, расположенные по разные стороны от прямой l , параллельной оси OX и удаленной от нее на расстояние M , то эта кривая между точками P и Q обяза-

тельно где-то пересечет прямую l (черт. 36, а)¹⁾. Для разрывных функций это свойство может не иметь места (см. черт. 36, б).

Несмотря на полную очевидность сформулированного свойства непрерывных функций, оно является очень важным, так как позволяет доказать целый ряд предложений, которые на первый взгляд вовсе не представляются очевидными.

Для примера докажем здесь следующее утверждение: *каждое кубическое уравнение (уравнение третьей степени) с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень* (в этом отношении кубические уравнения «лучше» квадратных уравнений, которые могут и не иметь вещественных корней). Действительно, пусть

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

или, что то же самое,

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad \left(p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}, \quad r = \frac{d}{a} \right)$$

есть наше кубическое уравнение. Рассмотрим функцию

$$y = x^3 + px^2 + qx + r$$

или в другой записи

$$y = x^3 \left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} \right).$$

Эта функция, очевидно, является непрерывной. Легко видеть, что если абсолютная величина x больше $|3p|$, $\sqrt{|3q|}$, $\sqrt[3]{|3r|}$ (т. е. больше наибольшего из этих чисел), то

$$\left| \frac{p}{x} \right| < \frac{1}{3}, \quad \left| \frac{q}{x^2} \right| < \frac{1}{3}, \quad \left| \frac{r}{x^3} \right| < \frac{1}{3}; \quad \left| \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} \right| < 1$$

и

$$1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} > 0;$$

следовательно, знак выражения

$$y = x^3 \left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2} + \frac{r}{x^3} \right)$$

совпадает со знаком x^3 , т. е. при x , большем чем $|3p|$, $\sqrt{|3q|}$, $\sqrt[3]{|3r|}$, y положительно, а при x , меньшем чем $-|3p|$, $-\sqrt{|3q|}$, $-\sqrt[3]{|3r|}$, y отрицательно. В силу непрерывности функции $y = f(x)$ отсюда

¹⁾ Строгое доказательство этого предложения приводится в учебниках математического анализа.

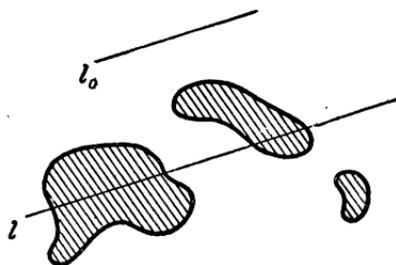
следует, что найдется такое значение x_0 , что

$$f(x_0) = x_0^3 + px_0^2 + qx_0 + r = 0,$$

т. е. что существует хотя бы один вещественный корень x_0 нашего уравнения.

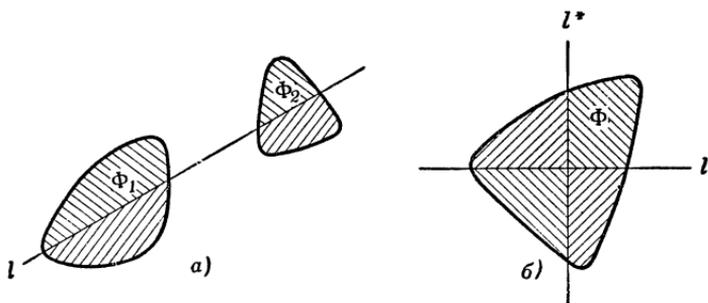
Предложения, указанные в задачах настоящего параграфа, представляют собой следствия сформулированного выше свойства непрерывных функций.

27. На плоскости даны фигура Φ (фигура не обязательно должна быть выпуклой и даже может состоять из нескольких отдельных частей) и некоторая прямая l_0 . Докажите, что существует прямая l , параллельная l_0 , делящая Φ на две равновеликие части (черт. 37).



Черт. 37.

28. а) На плоскости даны две выпуклые фигуры Φ_1 и Φ_2 . Докажите, что существует прямая l , которая делит одновременно каждую из фигур Φ_1 и Φ_2 на две равновеликие части (черт. 38, а).



Черт. 38.

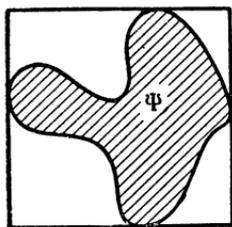
б) На плоскости дана выпуклая фигура Φ . Докажите, что существуют две взаимно перпендикулярные прямые l и l^* , которые делят фигуру Φ на четыре равновеликие части (черт. 38, б).

29. Докажите, что вокруг каждой выпуклой фигуры можно описать квадрат.

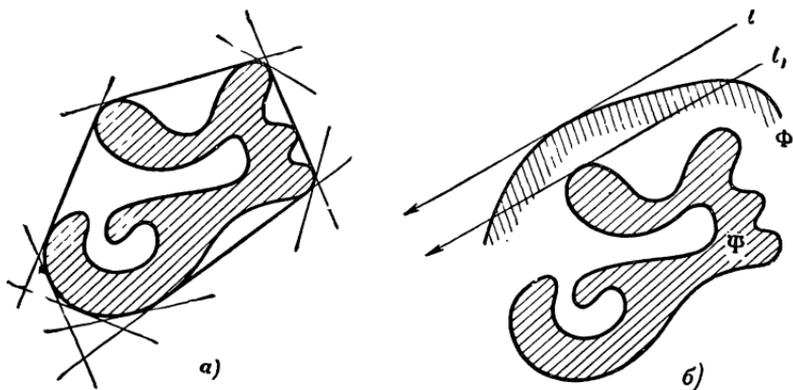
Из предложения задачи 29 следует, что вокруг каждой (не обязательно выпуклой) фигуры Ψ можно описать квадрат (черт. 39).

Для того чтобы это доказать, проведем всевозможные опорные прямые невыпуклой фигуры Ψ (черт. 40, а) и рассмотрим пересечение всех определяемых этими прямыми полуплоскостей, в которых лежит фигура Ψ . В силу задачи 1 из § 1 (остающейся справедливой и для бесконечного числа выпуклых тел) это пересечение будет выпуклой фигурой (обозначим ее буквой Φ). Выпуклая фигура Φ , как нетрудно показать, является наименьшей выпуклой фигурой, содержащей фигуру Ψ ; она называется выпуклой оболочкой фигуры Ψ ¹⁾.

Легко видеть, что всякая опорная прямая выпуклой фигуры Φ является одновременно и опорной прямой невыпуклой



Черт. 39.



Черт. 40.

фигуры Ψ . Действительно, если опорная прямая l фигуры Φ не является опорной для Ψ (черт. 40, б), то, передвигая l

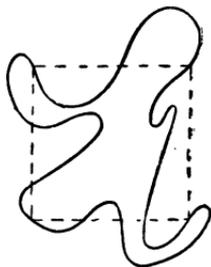
¹⁾ Выпуклую оболочку фигуры Ψ удобно представлять себе как фигуру, образованную охватывающей Ψ натянутой тонкой резинкой.

параллельно самой себе до соприкосновения с границей Ψ , мы получим опорную прямую l_1 фигуры Ψ . Согласно определению фигуры Φ вся она должна целиком лежать в той из полуплоскостей, ограниченных прямой l_1 , в которой лежит Ψ ; следовательно, прямая l , лежащая во второй полуплоскости, не может являться опорной прямой для Φ .

Отсюда вытекает, что всякий квадрат, описанный вокруг выпуклой фигуры Φ , будет одновременно описан и вокруг невыпуклой фигуры Ψ .

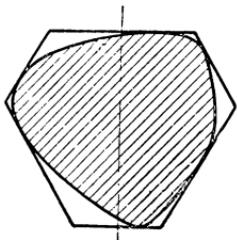
При помощи рассуждений, близких к решениям задач этого параграфа, можно показать, что в каждую выпуклую кривую можно вписать квадрат. Советский математик Л. Г. Шнирельман в 1929 г. показал,

что в каждую (не обязательно выпуклую) плоскую замкнутую кривую можно вписать квадрат (другими словами, что на каждой замкнутой кривой можно найти четыре точки, являющиеся вершинами квадрата; черт. 41). Однако доказательство этого общего предложения является весьма сложным¹⁾.



Черт. 41.

30. а) Докажите, что вокруг каждой выпуклой кривой можно описать шестиугольник с равными углами, имеющий пару равных противоположных сторон.



Черт. 42.

б*) Докажите, что вокруг каждой выпуклой кривой можно описать шестиугольник с равными углами, имеющий ось симметрии (черт. 42).

31*. Докажите, что каждую плоскую фигуру диаметра 1 (см. выше стр. 20) можно заключить внутрь правильного шестиугольника, каждая сторона которого равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

¹⁾ См. журнал «Успехи математических наук», вып. X, 1944, статья Л. Г. Шнирельмана «О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых», стр. 34—44.

Так как правильный шестиугольник со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$ может быть вписан в круг того же радиуса, то предложение этой задачи является значительным усилением теоремы Юнга (см. задачу 16 из § 2).

32*. а) На плоскости даны выпуклая кривая K и некоторая прямая l . Докажите, что можно найти три хорды¹⁾ $A'B'$, $A''B''$, A_0B_0 кривой K , параллельные прямой l , и такие, что хорда A_0B_0 расположена на равном расстоянии от хорд $A'B'$ и $A''B''$ и что $A'B' = A''B'' = \frac{1}{2} A_0B_0$.

б) Докажите, что в каждую выпуклую кривую можно вписать шестиугольник, каждые две противоположные стороны которого параллельны между собой и параллельны диагонали, соединяющей вершины, не принадлежащие этим сторонам.

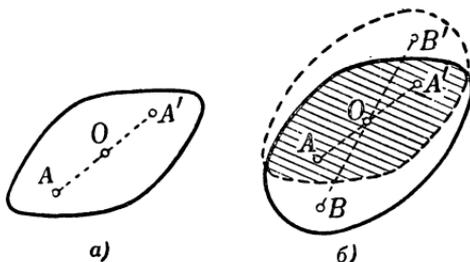
33*. а) Теорема С. С. Ковнера. Докажите, что внутри каждой выпуклой фигуры Φ можно поместить центрально-симметричную выпуклую фигуру, площадь которой не меньше $\frac{2}{3}$ площади фигуры Φ .

б) Докажите, что внутри треугольника нельзя поместить центрально-симметричную фигуру, площадь которой была бы больше $\frac{2}{3}$ площади треугольника.

Теорему Ковнера можно рассматривать как некоторую оценку «степени центральности» произвольной выпуклой фигуры (аналогично теоремам задач 18б), в) и 19а) из § 2 или задаче 69 из § 6). Центр O центрально-симметричной фигуры Φ может быть определен как такая точка, что если симметрично отразить фигуру Φ относительно точки O (т. е. заменить каждую точку A фигуры точкой A' , симметричной A относительно O , то эта фигура переходит в себя; черт. 43, а).

¹⁾ Хордой выпуклой кривой называется всякий отрезок, концами которого являются точки кривой (если кривая содержит прямолинейный отрезок, то каждая часть этого отрезка является хордой кривой).

У произвольной выпуклой фигуры Φ не существует точки, обладающей этим свойством. Однако теорема Ковнера утверждает, что внутри произвольной выпуклой фигуры можно найти такую точку O , что площадь пересечения фигуры Φ и фигуры Φ' , получаемой, если симметрично отразить Φ относительно точки O , не меньше $\frac{2}{3}$ площади фигуры Φ . Действительно, такой точкой является центр симметрии заключенной внутри Φ центрально-симметричной фигуры, площадь которой не меньше $\frac{2}{3}$ площади Φ (очевидно, что эта фигура, переходящая в себя при симметрии относительно точки O , заключается внутри пересечения Φ и Φ' ; см. черт. 43, б).



Черт. 43.

Таким образом, теорему Ковнера можно рассматривать как поясняющую, что может означать слово «центр» в применении к фигуре, которая не имеет центра симметрии (см. текст, предпосланный задачам 18, 19 из § 2).

С задачей 33 интересно сопоставить простую задачу 34.

34. а) Докажите, что каждую выпуклую фигуру Φ можно заключить внутрь центрально-симметричной выпуклой фигуры, площадь которой не больше удвоенной площади фигуры Φ .

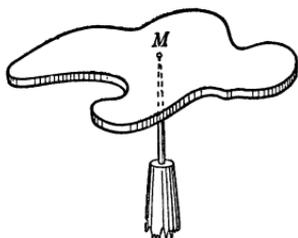
б) Докажите, что треугольник нельзя заключить ни в какую центрально-симметричную выпуклую фигуру, площадь которой была бы меньше удвоенной площади треугольника.

Задачу 34 аналогично задаче 33 можно также рассматривать как некоторую оценку «степени центральности» произвольной выпуклой фигуры.

Отметим, что при всем разнообразии подходов к определению того, что такое «степень центральности» выпуклой фигуры (см. задачи 33, 34, 36, задачу 19а) из § 2 или

задачу 69 из § 6), во всех случаях «наименее центральной» выпуклой фигурой оказывается треугольник.

В заключение приведем несколько задач, связанных с понятием центра тяжести выпуклой фигуры. Понятие центра тяжести принадлежит механике, а не геометрии: центром тяжести какого-либо тела называется точка приложения силы тяжести, действующей на это тело (другими словами, точка приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на отдельные элементы тела).

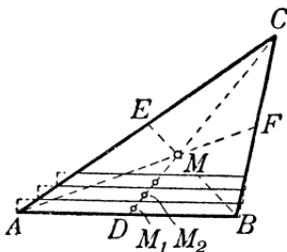


Черт. 44.

В геометрии центром тяжести фигуры Φ называется точка, в которой находится центр тяжести пластинки постоянной толщины, сделанной из какого-либо однородного материала в форме фигуры Φ (центр тяжести пластинки можно представлять как такую точку M , в которой пластинка может быть уравновешена расположенной под пластинкой вертикальной опорой; черт. 44).

Центр тяжести выпуклой фигуры можно определить и чисто геометрически, не используя никаких физических представлений. Известно, что центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан ¹⁾. Далее, если фигура Φ состоит из двух частей — части Φ_1 площади S_1 и части Φ_2 площади S_2 , то центр тяжести M фигуры Φ находится на отрезке, соединяющем центр тяжести M_1 фигуры Φ_1

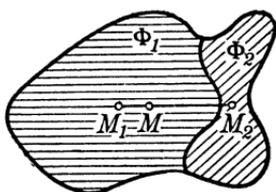
¹⁾ Представим себе треугольник ABC состоящим из отдельных стержней, параллельных стороне AB (черт. 45). Так как центр тяжести каждого стержня находится в его середине и, следовательно, расположен на медиане CD треугольника, то можно утверждать, что и центр тяжести M всего треугольника ABC должен также принадлежать медиане CD . Из подобных же соображений следует, что центр тяжести должен лежать и на двух других медианах BE и AF треугольника ABC , т. е. должен совпадать с точкой пересечения медиан треугольника.



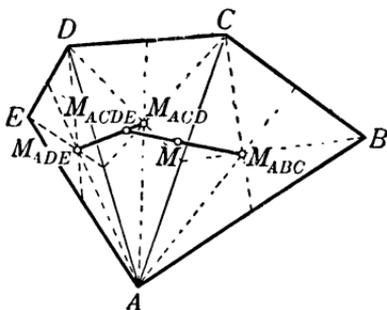
Черт. 45.

и центр тяжести M_2 фигуры Φ_2 , и делит этот отрезок в отношении $MM_1:MM_2 = S_2:S_1$ (черт. 46).

Исходя из этого предложения (которое является важнейшим свойством центра тяжести и используется также в решении нижеследующих задач), можно определить центр тяжести любого многоугольника, разбив его предварительно на треугольники и воспользовавшись тем, что центр тяжести каждого треугольника нам уже известен (черт. 47)¹⁾.



Черт. 46.



Черт. 47.

Центр тяжести произвольной выпуклой фигуры можно определить как предел центров тяжести вписанных в данную фигуру многоугольников, все стороны которых неограниченно уменьшаются (или как предел центров тяжести описанных вокруг фигуры многоугольников, все внешние углы которых неограниченно уменьшаются).

35. а) Докажите, что центр тяжести выпуклой фигуры Φ ширины 1 (см. выше, стр. 33) удален от каждой опорной прямой фигуры Φ на расстояние, не меньшее $\frac{1}{3}$.

б) Дана выпуклая фигура Φ площади S , частью границы которой является прямолинейный отрезок AB длины 1. Докажите, что центр тяжести фигуры Φ отстоит от прямой AB на расстоянии, не большем $\frac{2}{3}S$.

¹⁾ Можно доказать, что определяемый таким образом центр тяжести не зависит от того, каким образом мы разбиваем многоугольник на треугольники (такое разбиение, разумеется, не однозначно).

Из задачи 35а) сразу вытекает теорема Бляшке, составляющая содержание задачи 17 из § 2.

36*. Выпуклая фигура Φ пересекается некоторой прямой l , проходящей через ее центр тяжести, на две части. Докажите, что отношение их площадей всегда заключено в пределах между $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$.

Таким образом, из задачи 36 следует, что для каждой выпуклой фигуры Φ существует такая точка M (центр тяжести фигуры Φ), что отношения площадей S_1 и S_2 частей фигуры Φ , на которые она разбивается всевозможными прямыми, проходящими через M , заключены в пределах $\frac{4}{5} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{5}{4}$. Легко видеть, что внутри треугольника нельзя найти точку O , для которой отношения площадей частей, на которые пересекается треугольник прямыми, проходящими через O , заключались бы в более узких пределах: каждая отличная от центра тяжести M точка O треугольника T площади S находится внутри хотя бы одного из трех треугольников площади $\frac{4}{9}S$, отсекаемых от T прямыми, параллельными сторонам треугольника и проходящими через M , и, следовательно, площадь хотя бы одного из трех треугольников, отсекаемых от треугольника T тремя прямыми, проходящими через O и параллельными сторонам треугольника, меньше $\frac{4}{9}S$.

Поучительно сравнить результат этой задачи с теоремой, составляющей содержание задачи 18в) из § 2: для каждой (не обязательно выпуклой) фигуры Ψ существует такая точка O , что отношения площадей S_1 и S_2 частей фигуры Φ , на которые разбивается Ψ всевозможными прямыми, проходящими через O , заключены в пределах $\frac{1}{2} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{2}{1}$ (причем существуют невыпуклые фигуры Ψ , для которых нельзя найти такую точку O , чтобы отношения частей, на которые делится Ψ прямыми, проходящими через O , были бы заключены в более узких пределах; см. решение задачи 18).

§ 4. СЛОЖЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР И КРИВЫХ

Этот параграф несколько своеобразен по своему содержанию. В нем определяется сложение выпуклых фигур и выпуклых кривых, которое обладает многими свойствами сложения чисел, но которое, конечно, совсем не похоже на обыкновенное сложение. В нем дается также определение расстояния между двумя выпуклыми кривыми, обладающего многими свойствами обыкновенного расстояния (см., например, задачу 51). Это определение может показаться сначала сложным и искусственным; однако позже будет показано, что оно часто оказывается полезным в задачах, связанных с выпуклыми кривыми. Понятие расстояния между кривыми позволяет естественно определить предел последовательности выпуклых кривых.

В связи с необычностью материала этот параграф может показаться читателю трудным или мало интересным. В таком случае его можно свободно пропустить; однако при этом придется пропустить также задачи 75—77 из § 6, 92—95 из § 7 и 110, 111, 116 из § 8, а также части §§ 7 и 8, напечатанные мелким шрифтом. Если интересоваться только приложениями, которые получают задачи этого параграфа в дальнейшем, то можно не решать этих задач, а посмотреть их решения в книге; при этом можно выпустить задачи 48—50, 53 и 54, которые нигде ниже не применяются.

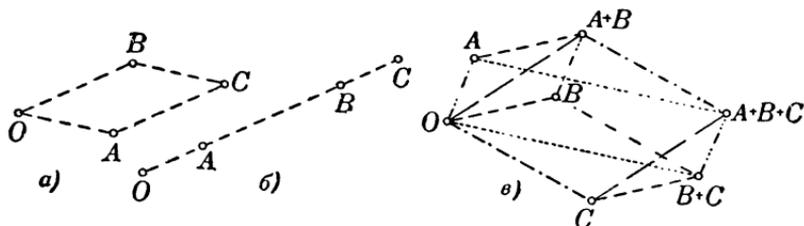
Интересным развитием материала настоящего параграфа является теория линейных систем выпуклых фигур, занимающая большое место в современной теории выпуклых тел. Этой теории посвящена глава V книги Л. А. Люстерника «Выпуклые тела», цитированной в предисловии ¹⁾.

Известное «правило параллелограмма» для сложения векторных величин (сил, скоростей и т. д.) позволяет определить «сумму» точек плоскости. С этого определения, являющегося основой всего последующего изложения, мы и начнем настоящий параграф.

Выберем на плоскости некоторую точку O и назовем ее нулевой точкой или началом отсчета. Если теперь A и B — две произвольные точки плоскости, то вер-

¹⁾ Эта глава книги Л. А. Люстерника предполагает у читателя знания по высшей математике примерно в объеме 1-го курса вуза.

шину C параллелограмма $OACB$ мы будем называть суммой точек A и B и писать $C = A \dagger B$ (черт. 48, *a*). Если точки A и B лежат на одной прямой с началом отсчета O , то



Черт. 48.

фигура $OACB$ (отрезок AC равен и параллелен отрезку OB) будет вырожденным параллелограммом (черт. 48, *б*).

Из этого определения сразу следует, что

$$A \dagger B = B \dagger A; \quad (A \dagger B) \dagger C = A \dagger (B \dagger C)$$

(черт. 48, *в*; последнюю сумму мы будем обозначать через $A \dagger B \dagger C$);

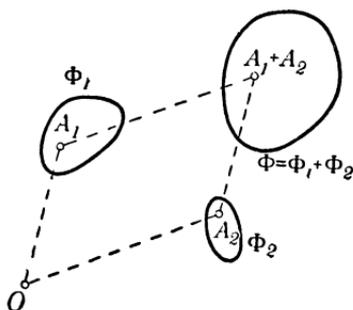
$$A \dagger O = A.$$

Пусть теперь Φ_1 и Φ_2 — две ограниченные¹⁾ плоские выпуклые фигуры, границами которых служат выпуклые кривые K_1 и K_2 ; O — произвольная точка плоскости, которую мы примем за начало отсчета. Рассмотрим всевозможные суммы $A_1 \dagger A_2$, где A_1 и A_2 — произвольные (внутренние или граничные) точки фигур Φ_1 и соответственно Φ_2 . Точки $A_1 \dagger A_2$ заполняют некоторую плоскую фигуру Φ (черт. 49), которую мы будем называть суммой фигур Φ_1 и Φ_2 и обозначать через $\Phi_1 \dagger \Phi_2$. Если фигуры Φ_1 и Φ_2 состоят из одной точки, то $\Phi_1 \dagger \Phi_2$ будет суммой этих точек; другими словами, сложение выпуклых фигур является обобщением сложения точек.

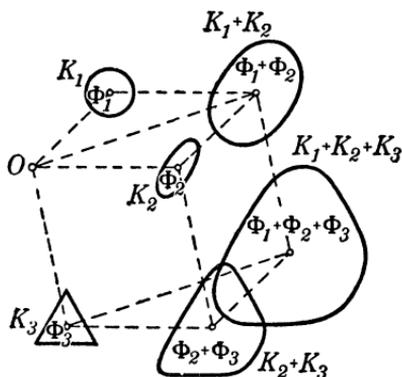
Границу фигуры $\Phi_1 \dagger \Phi_2$ мы будем называть суммой кривых K_1 и K_2 и обозначать через $K_1 \dagger K_2$. Отметим, что сумма кривых $K_1 \dagger K_2$ не совпадает с геометриче-

¹⁾ Так как в этом параграфе речь будет идти исключительно об ограниченных выпуклых фигурах и кривых, то в дальнейшем мы слово «ограниченная» будем опускать.

ским местом всевозможных сумм $A_1 + A_2$, где A_1 — точка кривой K_1 , а A_2 — точка кривой K_2 (геометрическое место таких точек $A_1 + A_2$ будет плоской фигурой, а не кривой; см., например, задачу 37). Определение суммы выпуклых кривых, не зависящее от понятия сложения фигур, дается ниже в задаче 41.



Черт. 49.



Черт. 50.

Сумма выпуклых фигур или выпуклых кривых также есть выпуклая фигура, соответственно выпуклая кривая (задача 38).

Из свойств сложения точек сразу следует:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &= \Phi_2 + \Phi_1, \\ (\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3 &= \\ &= \Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3) \end{aligned}$$

(черт. 50; последнюю сумму мы будем обозначать через $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$).

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= K_2 + K_1, \\ (K_1 + K_2) + K_3 &= \\ &= K_1 + (K_2 + K_3) \end{aligned}$$

(черт. 50; эту сумму мы будем обозначать через $K_1 + K_2 + K_3$).

Исходя из понятия суммы фигур (или кривых), естественно определить понятие умножения выпуклой фигуры (или кривой) на целое число. А именно, можно положить

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi &= 2\Phi, \\ \Phi + \Phi + \Phi &= 3\Phi, \\ \text{и вообще} \\ \underbrace{\Phi + \Phi + \dots + \Phi}_{m \text{ раз}} &= m\Phi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K + K &= 2K, \\ K + K + K &= 3K, \\ \text{и вообще} \\ \underbrace{K + K + \dots + K}_{m \text{ раз}} &= mK. \end{aligned}$$

Далее можно определить фигуру $\frac{1}{n} \Phi$ (кривую $\frac{1}{n} K$) как такую фигуру (кривую), что

$$n \left(\frac{1}{n} \Phi \right) = \Phi, \quad \left| \quad n \left(\frac{1}{n} K \right) = K,$$

и затем определить умножение выпуклых фигур (кривых) на рациональные числа:

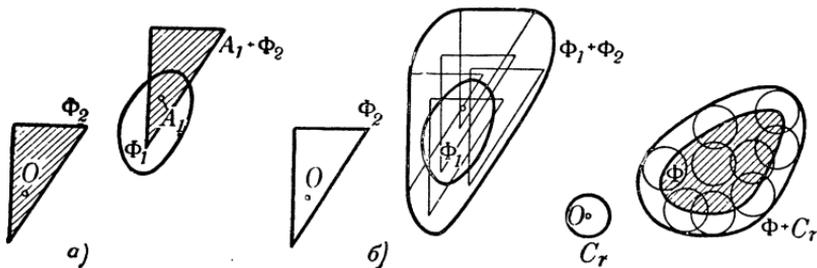
$$\frac{m}{n} \Phi = m \left(\frac{1}{n} \Phi \right), \quad \left| \quad \frac{m}{n} K = m \left(\frac{1}{n} K \right).$$

После этого можно ввести понятие умножения выпуклых фигур (кривых) на все действительные числа, понимая под произведением $a\Phi$ (или aK), где a иррационально, предел, к которому стремится фигура $a\Phi$ (кривая aK), когда рациональное число a стремится к a (строгое определение понятия предела последовательности выпуклых фигур или кривых приведено в этом параграфе, см. ниже, стр. 64)¹⁾.

Нетрудно видеть, что сложение выпуклых фигур (кривых) и умножение на числа связаны теми же правилами, которым подчиняются сложение и умножение чисел, а именно:

$$\begin{aligned} \alpha(\Phi_1 + \Phi_2) &= \alpha\Phi_1 + \alpha\Phi_2, & \left| \quad \alpha(K_1 + K_2) &= \alpha K_1 + \alpha K_2, \\ (\alpha + \beta)\Phi &= \alpha\Phi + \beta\Phi, & \left| \quad (\alpha + \beta)K &= \alpha K + \beta K. \end{aligned}$$

Имеются, однако, и различия между «арифметикой выпуклых фигур» и арифметикой чисел. Так, например, вообще говоря, не существует «разности» $\Phi_1 - \Phi_2$ двух заданных выпуклых фигур Φ_1 и Φ_2 , т. е. такой выпуклой фигуры Φ , что $\Phi_2 + \Phi = \Phi_1$ (в частности, из задачи 46 следует, что не может существовать «разности» между треугольником и кругом).



Черт. 51.

Черт. 52.

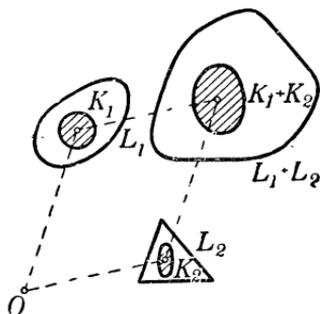
¹⁾ Нетрудно доказать, что $a\Phi$ (или aK) есть фигура (кривая), подобная фигуре Φ (кривой K), с центром подобия в точке O и коэффициентом подобия a . Нам это предложение в дальнейшем не понадобится.

Полезно иметь в виду следующее геометрическое описание операции сложения выпуклых фигур. Предположим, что точка O твердо скреплена с фигурой Φ_2 (удобнее представлять себе тот случай, когда точка O находится внутри фигуры Φ_2). Зафиксируем точку A_1 фигуры Φ_1 ; тогда всевозможные суммы вида $A_1 + A_2$, где A_2 пробегает все точки фигуры Φ_2 , заполняют фигуру, равную Φ_2 , которая получается из Φ_2 параллельным переносом, переводящим O в A_1 . Эту фигуру естественно обозначать через $A_1 + \Phi_2$ (черт. 51, а). Множество всех фигур $A_1 + \Phi_2$, где A_1 пробегает все точки фигуры Φ_1 , заполняет фигуру, которая и является суммой $\Phi_1 + \Phi_2$ (черт. 51, б). В частности, сумму фигуры Φ и круга C , радиуса r с центром в начале отсчета O можно определить как фигуру, образованную совокупностью всех кругов радиуса r с центрами в точках фигуры Φ (черт. 52).

37. Докажите, что если Φ_1 и Φ_2 — непараллельные отрезки, то сумма $\Phi_1 + \Phi_2$ является параллелограммом; если Φ_1 и Φ_2 — параллельные отрезки, то сумма $\Phi_1 + \Phi_2$ является отрезком, параллельным данным, длина которого равна сумме длин Φ_1 и Φ_2 .

38. Докажите, что сумма выпуклых фигур есть выпуклая фигура (или, что то же самое, что сумма выпуклых кривых есть выпуклая кривая).

39. Докажите, что если выпуклая кривая K_1 не выходит за пределы выпуклой кривой L_1 и выпуклая кривая K_2 не выходит за пределы выпуклой кривой L_2 , то кривая $K_1 + K_2$ не выходит за пределы кривой $L_1 + L_2$ (черт. 53).



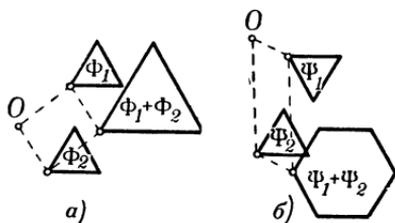
Черт. 53.

Геометрия изучает свойства фигур, не зависящие от их расположения на плоскости. Данное же нами определение суммы выпуклых фигур (или выпуклых кривых), конечно, зависит от положения слагаемых; сверх того оно зависит еще и от выбора начала отсчета. Это обстоятельство безусловно

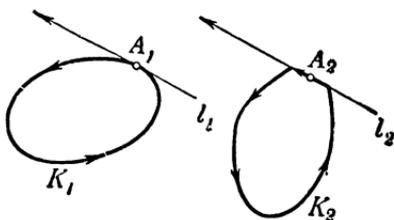
является серьезным недостатком определения. Последующая задача показывает, однако, что положение на самом деле является лучшим, чем это может показаться сначала.

40. Докажите, что при изменении начала отсчета и при параллельном переносе слагаемых форма фигуры, являющейся суммой $\Phi_1 + \Phi_2$ (или форма кривой $K_1 + K_2$), не меняется; эта сумма лишь подвергается в результате параллельному переносу.

Таким образом, форма фигуры (кривой), являющейся суммой двух фигур (кривых), не зависит от выбора начала отсчета; она не меняется также и при параллельном переносе слагаемых. Однако поворот слагаемых может существенно изменить сумму: так, на черт. 54, *а* изображена сумма двух равных между собой треугольников, а на черт. 54, *б* — сумма тех же треугольников, один из которых повернут на угол 180° .



Черт. 54.



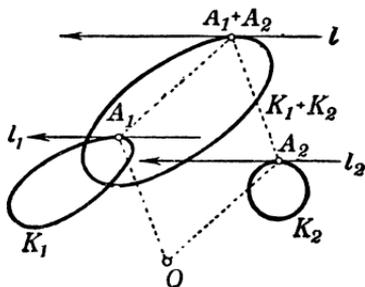
Черт. 55.

Отметим, что форма кривой, являющейся суммой кривой K и окружности O , радиуса r , совсем не зависит от положения слагаемых на плоскости (см. выше черт. 52 и относящийся к нему текст). Этот факт связан с тем обстоятельством, что одновременный поворот обоих слагаемых K_1 и K_2 на один и тот же угол, очевидно, влечет за собой лишь поворот суммы $K_1 + K_2$ на тот же самый угол. Отсюда вытекает, что при повороте кривой K на какой-то угол сумма $K + O$, не изменится, а только повернется на тот же угол.

Пусть теперь K_1 и K_2 — две выпуклые кривые, на которых задано направление обхода против часовой стрелки (черт. 55); l_1 и l_2 — опорные прямые кривых K_1 и K_2 , параллельные между собой и имеющие одинаковое направление

(см. выше стр. 26, в частности черт. 22), A_1 и A_2 — точки соприкосновения прямой l_1 с кривой K_1 , соответственно l_2 с K_2 (любые из точек соприкосновения, если опорная прямая имеет с кривой общий отрезок). Тогда мы скажем, что точки A_1 и A_2 являются соответствующими точками кривых K_1 и K_2 . Для каждой точки одной из кривых имеется (быть может, не единственная) соответствующая точка на другой кривой.

41*. (Другое определение суммы выпуклых кривых.) Пусть K_1 и K_2 — две выпуклые кривые. Докажите, что если A_1 и A_2 — соответствующие точки кривых K_1 и K_2 , то геометрическое место сумм точек $A_1 + A_2$ есть кривая $K_1 + K_2$. При этом точка $A_1 + A_2$ кривой $K_1 + K_2$ соответствует точкам A_1 и A_2 кривых K_1 и K_2 , т. е. кривая $K_1 + K_2$ имеет в точке $A_1 + A_2$ опорную прямую, параллельную опорным прямым к кривым K_1 и K_2 в соответствующих точках A_1 и A_2 (черт. 56).

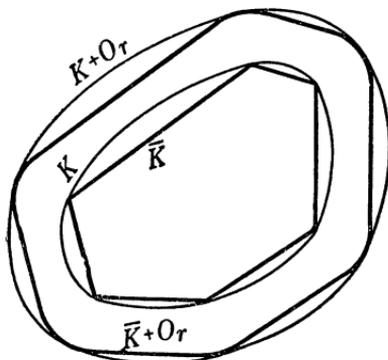


Черт. 56.

42. Пусть K — произвольный выпуклый многоугольник, периметр которого равен L и площадь S ; O_r — окружность радиуса r . Докажите, что длина кривой $K + O_r$ равна $L + 2\pi r$, а площадь выпуклой фигуры, ограниченной этой кривой, равна $S + Lr + \pi r^2$.

Пусть K — произвольная выпуклая кривая, \bar{K} — вписанный в нее многоугольник (черт. 57). Если все стороны много-

угольника \bar{K} уменьшаются, а число их неограниченно увеличивается (так что \bar{K} приближается к K), то $\bar{K} + O_r$ приближается к кривой $K + O_r$. Отсюда легко заключить, что если K имеет длину L и ограничивает фигуру площади S ,



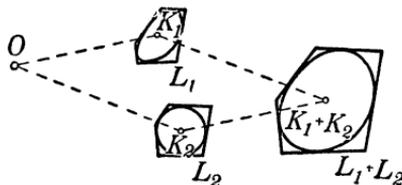
Черт. 57.

то длина кривой $K + O_r$ равна $L + 2\pi r$, а площадь фигуры, ею ограниченной, равна $S + Lr + \pi r^2$ 1).

43. Докажите, что сумма $K_1 + K_2$ двух выпуклых многоугольников K_1 и K_2 сама является выпуклым многоугольником. Если выпуклые многоугольники K_1 и K_2 не имеют параллельных и одинаково направленных сторон (см. выше стр. 26), то число сторон выпуклого многоугольника $K_1 + K_2$ равно сумме числа сторон K_1 и числа сторон K_2 ; этот многоугольник состоит из отрезков, равных и параллельных сторонам многоугольников K_1 и K_2 . Если многоугольники K_1 и K_2 имеют параллельные и одинаково направленные стороны, то многоугольник $K_1 + K_2$ имеет сторону, параллельную двум параллельным между собой сторонам многоугольников K_1 и K_2 и равную по длине их сумме. Во всех случаях периметр многоугольника $K_1 + K_2$ равен сумме периметров многоугольников K_1 и K_2 .

1) Для строгого доказательства достаточно рассмотреть последовательность многоугольников, вписанных в кривую K , число сторон которых увеличивается, а все стороны неограниченно уменьшаются; составить сумму каждого такого многоугольника и окружности O_r и затем перейти к пределу.

44. Докажите, что если K_1 и K_2 — две выпуклые кривые, а L_1 и L_2 — многоугольники с попарно параллельными и одинаково направленными сторонами, описанные вокруг этих кривых, то $L_1 + L_2$ есть многоугольник, описанный во-



Черт. 58.

круг кривой $K_1 + K_2$ (черт. 58). Остается ли это утверждение верным, если стороны многоугольников L_1 и L_2 не являются попарно параллельными и одинаково направленными?

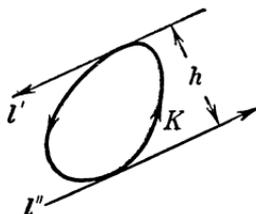
Длину выпуклой кривой мы определили выше (см. § 1, стр. 28) как предел периметров описанных вокруг нее многоугольников, все внешние углы которых стремятся к нулю (или как предел периметров вписанных в нее многоугольников, стороны которых стремятся к нулю). Задача 44 утверждает, что сумма многоугольников с соответственно параллельными сторонами, описанных вокруг кривых K_1 и K_2 , есть многоугольник с теми же направлениями сторон, описанный вокруг $K_1 + K_2$. В силу задачи 43 периметр этого многоугольника равен сумме периметров многоугольников, описанных вокруг K_1 и K_2 . Рассматривая описанные многоугольники со все меньшими внешними углами и переходя к пределу, мы убедимся, что *длина кривой $K_1 + K_2$ равна сумме длин кривых K_1 и K_2 .*

В частности, длина кривой $K + O_r$, где O_r есть окружность радиуса r , а K есть выпуклая кривая длины L , равна $L + 2\pi r$; этот частный случай нашей теоремы был уже получен выше (см. задачу 42 и относящийся к ней текст).

45. Пусть сумма $K = K_1 + K_2$ двух выпуклых кривых K_1 и K_2 содержит прямолинейный отрезок AB длины a . Докажите, что в этом случае либо одна из кривых K_1 , K_2 содержит параллельный AB прямолинейный отрезок длины a , либо обе кривые K_1 и K_2 содержат параллельные AB прямолинейные отрезки, сумма длин которых равна a .

46. Пусть K_1 и K_2 — две выпуклые кривые, $K_1 + K_2$ — их сумма, A_1 и A_2 — соответствующие точки кривых K_1 и K_2 . Докажите, что точка $A_1 + A_2$ может быть угловой точкой кривой $K_1 + K_2$ только в том случае, когда обе точки A_1 и A_2 — угловые точки (однако если A_1 и A_2 — угловые точки кривых K_1 и K_2 , то точка $A_1 + A_2$ может и не быть угловой точкой кривой $K_1 + K_2$).

Из задачи 46 вытекает, в частности, что сумма произвольной кривой K и окружности не может иметь угловых точек.



Черт. 59.

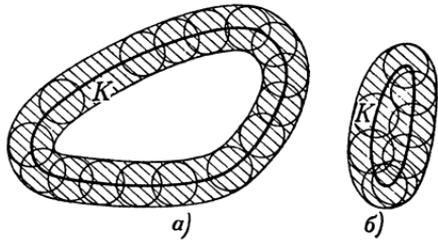
Пусть K — выпуклая кривая, l' и l'' — две ее параллельные опорные прямые. Расстояние h между этими прямыми называется шириной кривой K в направлении, перпендикулярном к прямым l' и l'' (черт. 59).

47. Докажите, что ширина h кривой $K_1 + K_2$ в некотором направлении равна сумме ширин h_1 и h_2 кривых K_1 и K_2 в том же самом направлении.

48*. Докажите, что всякий выпуклый многоугольник можно представить как сумму треугольников и отрезков.

49. Докажите, что каждый выпуклый четырехугольник можно только одним способом представить в виде суммы двух треугольников (или треугольника и отрезка, или двух отрезков). Однако существуют пятиугольники, которые можно представить разными способами в виде суммы треугольников.

Пусть K — произвольная выпуклая кривая. Рассмотрим множество кругов радиуса r , имеющих своими центрами точки кривой K . Все точки плоскости, покрытые хотя бы одним из этих кругов, образуют некоторую фигуру («полосу» или «кольцо»), заключающую кривую K внутри себя, которую мы будем называть r -окрестностью выпуклой кривой K (черт. 60). Эта фигура может быть ограничена либо двумя кривыми — внутренней и внешней (черт. 60, *а*), либо только одной кривой (черт. 60, *б*).

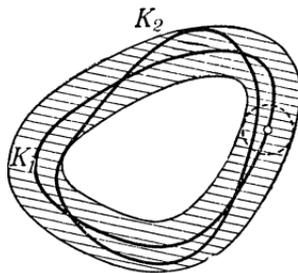


Черт. 60.

Из данного выше определения суммы выпуклой кривой и окружности (см. выше черт. 52 и объяснение к нему) следует, что внешняя кривая, ограничивающая r -окрестность кривой K , есть сумма $K + O_r$ кривой K и окружности O_r радиуса r с центром в начале отсчета. Отсюда следует, что эта кривая всегда выпукла (см. задачу 38).

50. Докажите, что если существует внутренняя кривая, ограничивающая r -окрестность выпуклой кривой K , то она является выпуклой кривой.

Пусть K_1 и K_2 — две выпуклые кривые и r — такой отрезок, что кривая K_2 не выходит за пределы r -окрестности кривой K_1 ,



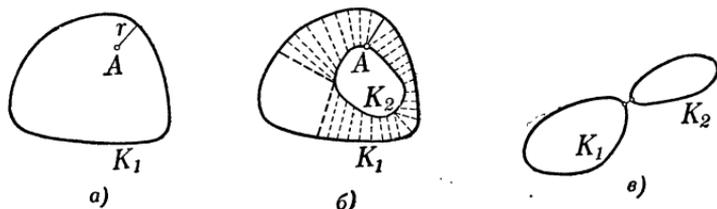
Черт. 61.

но при любом $r' < r$ кривая K_2 выходит за пределы r' -окрестности кривой K_1 . Такой отрезок r называется расстоянием кривой K_2 от кривой K_1 (черт. 61)¹⁾. Например, если K_1 и K_2 —

¹⁾ Так как понятие расстояния кривой K_2 от кривой K_1 является весьма важным, мы здесь поясним его смысл с несколько иной

две concentрические окружности, то расстояние каждой из них от другой равно разности их радиусов (черт. 63, *a*, *b*; на черт. *a* заштрихована $(r_1 - r_2)$ -окрестность окружности K_1 , а на черт. *b* — $(r_1 - r_2)$ -окрестность окружности K_2). Однако отнюдь не всегда расстояние кривой K_2 от кривой K_1 равно расстоянию кривой K_1 от кривой K_2 . Например, если T_1 и T_2 — два равносторонних треугольника с параллельными сторонами и общим центром, то расстояние внутреннего треугольника от внешнего равно расстоянию между параллельными

точки зрения. Расстоянием точки A от кривой K_1 называется расстояние между точкой A и самой близкой к A точкой кривой K_1 (черт. 62, *a*); нетрудно видеть, что это определение совпадает с вышеприведенным в том случае, когда кривая K_2 состоит из единственной точки A . Расстояние же кривой K_2 от кривой K_1 — это расстояние от K_1 наиболее удаленной от этой кривой



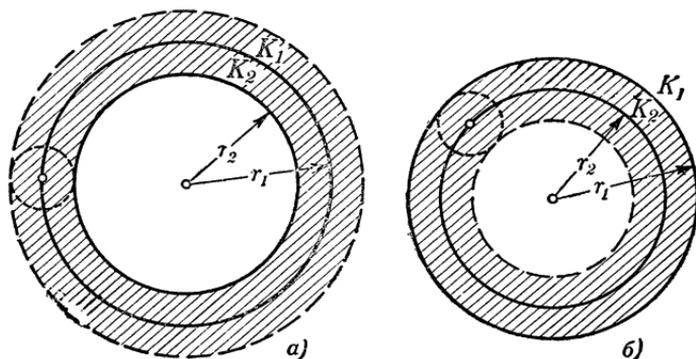
Черт. 62.

точки кривой K_2 (черт. 62, *б*). Иными словами, для определения расстояния K_2 от K_1 составляются всевозможные расстояния между точками A_2 и A_1 , где A_2 — точка кривой K_2 и A_1 — точка кривой K_1 . Для каждой фиксированной точки A_2 ищется минимум всех таких расстояний; это — расстояние от A_2 до K_1 . После этого ищется максимум всех таких минимумов, когда A_2 пробегает все точки кривой K_2 , — это и есть расстояние K_2 от K_1 . Это определение по своей структуре является довольно сложным, однако оно оказывается удобным во многих вопросах и играет в современной математике значительную роль.

Сложность определения расстояния двух кривых связана с тем, что естественно требовать, чтобы малость расстояния между кривыми означала близость друг к другу кривых на всем их протяжении.

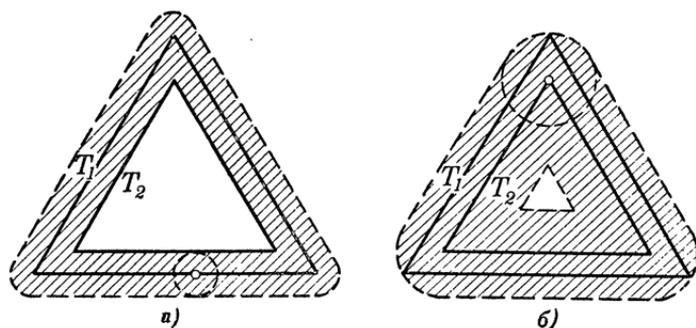
В этом смысле напрашивающееся определение расстояния между кривыми K_1 и K_2 как кратчайшего расстояния между какой-либо точкой K_1 и какой-либо точкой K_2 является неудовлетворительным: две кривые могут иметь близкие точки и при этом быть расположенными далеко друг от друга (черт. 62, *в*).

сторонами треугольников (черт. 64, а), а расстояние внешнего треугольника от внутреннего равно расстоянию между соответствующими вершинами треугольников (черт. 64, б).



Черт. 63.

Наибольшее из двух расстояний кривой K_1 от кривой K_2 и кривой K_2 от кривой K_1 называется просто расстоянием между кривыми K_1 и K_2 . Например, в рассмотренном выше случае двух равносторонних треугольников (см. черт. 64) расстояние между треугольниками равно расстоянию между их соответствующими вершинами.



Черт. 64.

Из определения расстояния между двумя кривыми K_1 и K_2 и из того, что внешняя кривая, ограничивающая r -окрестность кривой K , совпадает с кривой $K + O_r$, следует, что если расстояние между выпуклыми

кривыми K_1 и K_2 равно r , то кривая K_1 не выходит за пределы кривой $K_2 + O_r$, а кривая K_2 не выходит за пределы кривой $K_1 + O_r$ ¹⁾.

51. Пусть A , B и C — три выпуклые кривые. Обозначим расстояние между кривыми A и B через \overline{AB} , расстояние между кривыми B и C — через \overline{BC} и расстояние между кривыми A и C — через \overline{AC} . Докажите, что имеют место неравенства

$$\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}, \quad \overline{AC} + \overline{BC} \geq \overline{AB} \quad \text{и} \quad \overline{AB} + \overline{AC} \geq \overline{BC}.$$

Неравенства задачи 51 называются неравенствами треугольника. Они так называются потому, что если кривые A , B и C рассматривать как «точки» в некотором «пространстве» («пространство выпуклых кривых»), а именно как «вершины» некоторого «треугольника» ABC , а определенное нами расстояние между двумя кривыми — как «расстояние» между этими «точками» в «пространстве кривых», или как «длину» стороны «треугольника», то приведенные неравенства означают, что «длина» каждой стороны «треугольника» не превосходит суммы «длин» двух других его сторон²⁾.

52. Пусть K_1 и K_2 — две выпуклые кривые, расстояние между которыми не превосходит r . Докажите, что разность длин этих кривых не превосходит $2\pi r$, а разность площадей ограниченных ими фигур не превосходит $Lr + \pi r^2$, где L — наибольшая из длин этих кривых.

Говорят, что последовательность выпуклых кривых $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ имеет пределом выпуклую кривую K , если расстояние между кривыми K и K_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ ³⁾. Например, последовательность вписанных в кривую K многоугольников $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$, все стороны которых становятся как угодно малыми, имеет пределом саму кривую K ; точно так же последовательность описанных вокруг K многоугольников, все внешние углы которых делаются как угодно малыми, имеет пределом

1) Нетрудно показать, что расстояние между двумя выпуклыми кривыми K_1 и K_2 есть наименьшее число r , такое, что кривая K_1 не выходит за пределы кривой $K_2 + O_r$ и кривая K_2 не выходит за пределы $K_1 + O_r$.

2) В современной математике играют очень важную роль разного рода «пространства» (такие, как наше «пространство выпуклых кривых»), между «точками» которых определено «расстояние», удовлетворяющее неравенству треугольника. Такие «пространства» называются «метрическими пространствами».

3) Другими словами, это означает, что, каков бы ни был отрезок ϵ , существует такое N , что при $n > N$ расстояние между кривыми K и K_n меньше ϵ .

кривую K . Согласно задаче 52 разность длин выпуклых кривых, расстояние между которыми неограниченно уменьшается, стремится к нулю и разность площадей фигур, ограниченных этими кривыми, тоже неограниченно уменьшается. Отсюда следует, что *если последовательность выпуклых кривых $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ имеет пределом выпуклую кривую K , то длина кривой K является пределом длин кривых K_n ; точно так же площадь, ограниченная кривой K , является пределом площадей, ограниченных кривыми K_n .*

53**. Докажите, что если последовательность окружностей имеет предел, то этот предел есть окружность или точка.

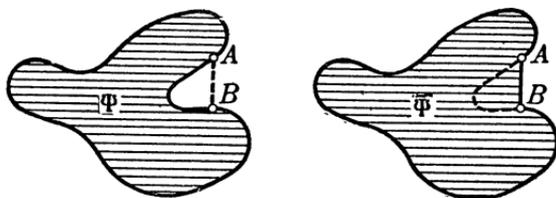
54**. Докажите, что если последовательность треугольников имеет предел, то этот ее предел есть треугольник, отрезок или точка.

§ 5. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Настоящий параграф посвящен одной знаменитой задаче, играющей важную роль во многих разделах математики и физики, а именно так называемой изопериметрической задаче (т. е. задаче о фигурах равных периметров). Он содержит 12 задач, из которых первые пять (задачи 55—59) представляют собой геометрические задачи на максимум и минимум, никак не связанные с выпуклыми фигурами. Однако эти задачи являются естественным введением к изопериметрической задаче, а ознакомление с некоторыми из них необходимо для ее решения. Задачи 60—62 непосредственно связаны с изопериметрической задачей (сама изопериметрическая задача помещена под номером 62), а задачи 63—66 являются ее следствиями.

Хорошим дополнением к материалу настоящего параграфа является элементарная книжка Д. А. Крыжановского «Изопериметры»¹⁾.

Изопериметрическая задача формулируется следующим образом: *среди всех плоских кривых периметра*²⁾ *1 найти ту, которая имеет наибольшую площадь.*



Черт. 65.

Несмотря на то, что в формулировке этой задачи не фигурируют слова «выпуклая фигура», ее естественно включить в настоящую книгу. Действительно, простой черт. 65 пока-

¹⁾ Д. А. Крыжановский, Изопериметры, М.—Л., ОНТИ, 1938.

²⁾ Периметром плоской фигуры мы будем называть длину кривой, ограничивающей эту фигуру.

зывает, что решением изопериметрической задачи может служить только выпуклая фигура, так как для каждой невыпуклой фигуры Ψ периметра l можно найти фигуру $\bar{\Psi}$, имеющую меньший периметр и большую площадь¹⁾, а следовательно, можно найти и фигуру периметра l , имеющую большую площадь, чем Ψ (этим свойством будет обладать фигура периметра l , подобная $\bar{\Psi}$). Таким образом, для решения изопериметрической задачи достаточно найти плоскую выпуклую фигуру периметра l , имеющую наибольшую площадь.

Так как при преобразовании подобия площадь плоской фигуры и квадрат ее периметра увеличиваются или уменьшаются в одинаковое число раз и, следовательно, отношение площади к квадрату периметра не меняется, то можно не требовать, чтобы периметр фигуры был равен l , и сформулировать задачу следующим образом: *среди всех плоских фигур найти фигуру, для которой отношение площади к квадрату периметра было бы наибольшим*. Отсюда легко усмотреть, что решение поставленной задачи сразу укажет нам и ответ следующей задачи: *найти замкнутую плоскую кривую наименьшего периметра, ограничивающую фигуру площади l ²⁾*.

55. а) Докажите, что из всех треугольников с двумя заданными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны взаимно перпендикулярны.

б) Докажите, что из двух неравных треугольников, имеющих равные основания и равные углы при противолежащей вершине, большую площадь и больший периметр имеет тот, у которого разность углов при основании меньше (или, что то же самое, у которого разность боковых сторон меньше); из всех треугольников с данным основанием и данным углом при противолежащей вершине наибольшую площадь и наибольший периметр имеет равнобедренный.

¹⁾ Из черт. 40, а § 3 (стр. 44) следует, что для каждой невыпуклой фигуры Ψ можно найти выпуклую фигуру Φ , имеющую меньший периметр и большую площадь (см. текст, относящийся к черт. 40, а).

²⁾ Если для фигуры Φ отношение площади к квадрату периметра является наибольшим, то отношение квадрата ее периметра к площади является наименьшим и, следовательно, среди всех фигур площади l фигура, подобная Φ , будет иметь наименьший периметр.

в) Докажите, что из всех параллелограммов с данным острым углом и данным периметром наибольшую площадь имеет ромб.

г) Докажите, что из двух неравных треугольников с одинаковыми основаниями и одинаковыми периметрами большую площадь имеет тот, у которого меньше разность углов при основании (или, что то же самое, у которого меньше разность боковых сторон); из всех треугольников с данным основанием и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный.

д) Докажите, что из всех трапеций с данными основаниями и данным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренная.

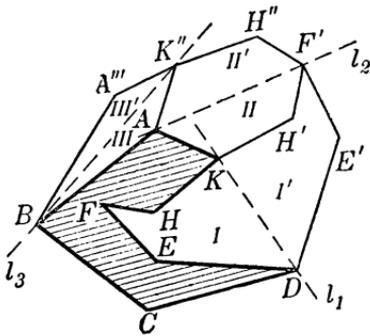
56. а) Докажите, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний.

б) Докажите, что из всех четырехугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

57. а) Докажите, что среди всех n -угольников, вписанных в данную окружность, правильный имеет наибольшую площадь.

б) Докажите, что среди всех n -угольников, вписанных в данную окружность, правильный имеет наибольший периметр.

58*. Докажите, что из всех выпуклых четырехугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет тот, вокруг которого можно описать окружность.



Черт. 66.

Для всякого невыпуклого многоугольника можно найти выпуклый многоугольник с теми же сторонами и большей площадью (см., например, черт. 66, где сначала ломаная $DEFHK$ симметрично отражается относительно прямой l_1 , затем ломаная $AKH'F'$ симметрично отражается относительно прямой l_2 и, наконец, $K''AB$ симметрично

отражается относительно l_3). Отсюда следует, что в условии

задачи 58 слово «выпуклых» можно опустить. Также и в формулировках нижеследующих задач 63 и 64 можно говорить про произвольные многоугольники, а не только про выпуклые.

59.** а) Докажите, что из всех выпуклых четырехугольников с данными углами и данным периметром наибольшую площадь имеет четырехугольник, в который можно вписать окружность ¹⁾.

б) Докажите, что из всех выпуклых n -угольников с данными углами и данным периметром наибольшую площадь имеет n -угольник, в который можно вписать окружность ¹⁾.

Формулировки задач 58 и 59а) очень похожи друг на друга. Это сходство становится еще большим, если вспомнить, что все четырехугольники имеют одну и ту же сумму углов (а именно, $4d$), так что задачи 58 и 59а) можно соответственно сформулировать так:

Из всех выпуклых четырехугольников с данными сторонами (и данной суммой углов, равной $4d$) наибольшую площадь имеет тот, вокруг которого можно описать окружность.

Из всех выпуклых четырехугольников с данными углами и данной суммой сторон наибольшую площадь имеет тот, в который можно вписать окружность.

Обобщение задачи 58, аналогичное задаче 59б), также имеет место (см. ниже задачу 63) ²⁾.

60. Докажите, что если какая-либо хорда выпуклой фигуры Φ , делящая периметр пополам, делит площадь фигуры на две неравные части, то существует фигура $\bar{\Phi}$, имеющая тот же периметр, что и Φ , и большую площадь.

¹⁾ В задачах 59а) и б) считаются известными не только углы рассматриваемых многоугольников, но и порядок, в котором они следуют друг за другом при обходе контура многоугольника. Требование, чтобы четырехугольник (или многоугольник) был выпуклым, означает, что ни один из углов (считающихся по условию задачи известными) не должен быть больше 180° .

²⁾ Аналогия между задачами 58 и 59а) не случайна, а имеет глубокие основания; к сожалению, в рамках настоящей книги мы не можем подробнее остановиться на этом вопросе.

61. Используя результаты задач 60 и 55а), докажите, что если выпуклая фигура Φ отлична от круга, то существует фигура $\bar{\Phi}$, имеющая тот же самый периметр, что и Φ , и ббльшую площадь.

Изопериметрическая задача, которой посвящен настоящий параграф, состоит в отыскании выпуклой фигуры Φ периметра 1, имеющей наибольшую площадь. В задаче 61 утверждается, что такой фигурой может быть только круг. Таким образом, может показаться, что задача 61 полностью решает изопериметрическую задачу: из всех выпуклых (а следовательно, и из всех вообще) плоских фигур периметра 1 наибольшую площадь имеет круг радиуса $r = \frac{1}{2\pi}$ (так как должно быть $2\pi r = 1$); все другие плоские фигуры того же периметра имеют площадь, меньшую, чем площадь круга (равная $\pi \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi} = 0,078\dots$). Однако, хотя это заключение и является верным (см. ниже задачу 62), мы пока еще не имеем оснований делать его с полной определенностью: задача 61 подсказывает ответ изопериметрической задачи, но не дает ее решения.

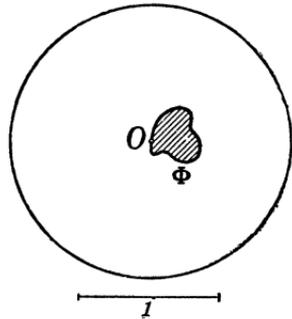
То, что рассуждение задачи 61 нельзя считать решением изопериметрической задачи, легче всего уяснить путем сравнения задачи 61 со следующим чрезвычайно простым предложением: возведение в квадрат какого-либо целого числа n , отличного от 1, позволяет получить новое целое число $\bar{n} = n^2$, большее n . Это утверждение можно сформулировать аналогично задаче 61: «если целое число n отлично от 1, то существует целое число \bar{n} , большее n ». Однако оно, разумеется, не дает основания заключить, что 1 есть наибольшее целое число. Конечно, тому, кто осмелился бы утверждать такую нелепость, можно было бы возразить, что поскольку наибольшего целого числа вообще не существует, то рассуждение, показывающее, что ни одно целое число, отличное от 1, не является наибольшим, ровно ничего не доказывает. Однако в таком случае, если утверждать, что из задачи 61 следует, что круг радиуса $\frac{1}{2\pi}$ имеет наибольшую площадь среди всех (выпуклых) фигур периметра 1, то

надо быть готовым к следующему «ехидному» вопросу: «А откуда Вы знаете, что существует фигура наибольшей площади?» На этот вопрос решение задачи 61 не дает никакого ответа.

Конечно, наш пример с целыми числами сильно отличается от той задачи, которой мы здесь занимаемся. Среди целых чисел можно найти числа сколь угодно большие (в математике этот факт выражают обычно в форме утверждения, что множество всех целых чисел неограниченно); отсюда сразу следует, что не может существовать наибольшего целого числа. В противоположность этому площади всех фигур периметра l ограничены: все такие фигуры, очевидно, должны заключаться внутри круга радиуса l (черт. 67) и, следовательно, площадь каждой из них меньше, чем площадь этого круга, равная π . Швейцарский геометр Штейнер, впервые доказавший (и притом пятью разными способами), что только круг может служить решением изопериметрической задачи, считал, что из ограниченности площадей фигур периметра l следует, что фигура наибольшей площади должна существовать. Однако и это рассуждение не является строгим. Рассмотрим для примера все положительные дроби с числителем, равным 1:

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Множество этих дробей ограничено сверху (все эти дроби, кроме 1, правильные и, следовательно, все они не больше 1) и ограничено снизу (все эти дроби положительны и, следовательно, все они больше нуля). И, однако, из того, что возведение в квадрат любой из этих дробей, отличной от $\frac{1}{1} = 1$, приводит снова к дроби с числителем 1 и притом меньшей, чем исходная, еще нельзя заключить, что $1 = \frac{1}{1}$ есть наименьшая из рассматриваемых дробей, так как наименьшей дроби вовсе не существует.



Черт. 67.

Для того чтобы еще больше подчеркнуть неочевидность факта существования выпуклой фигуры периметра 1 с наибольшей площадью, рассмотрим такой пример. Можно попытаться решить следующую задачу, по форме весьма напоминающую изопериметрическую задачу: среди всех выпуклых фигур с периметром, меньшим 1, найти фигуру наибольшей площади. На первый взгляд эта задача представляется столь же осмысленной, как и изопериметрическая. Однако легко убедиться, что эта задача не имеет решения: для каждой фигуры Φ периметра $p = 1 - \delta < 1$ можно найти фигуру $\bar{\Phi}$, периметр которой тоже меньше 1, имеющую большую площадь, чем Φ (например, таковой будет фигура, подобная Φ , периметр которой равен $1 - \frac{\delta}{2} > 1 - \delta$).

Таким образом, сделанный из результата задачи 61 вывод, что круг радиуса $\frac{1}{2\pi}$ имеет наибольшую площадь среди всех фигур периметра 1, нуждается в предварительном доказательстве существования фигуры наибольшей площади¹⁾.

Имеются, однако, и элементарные решения изопериметрической задачи, не опирающиеся на теорему о существовании фигуры наибольшей площади (см. задачу 62)²⁾.

62. Используя результат задачи 59, докажите, что круг имеет большую площадь, чем каждая другая фигура того же периметра.

63. Докажите, что многоугольник, который можно вписать в круг, имеет большую площадь, чем каждый другой выпуклый многоугольник с теми же длинами сторон.

Задача 63 является обобщением задачи 58. Ее можно сформулировать в виде, аналогичном задаче 59б): *из всех выпуклых многоугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет тот, который можно вписать в окружность.*

¹⁾ Доказательство этого факта, использующее некоторые понятия и методы современной математики, см. в дополнении I (стр. 131).

²⁾ Два других доказательства изопериметрического свойства круга приведены в книге Д. А. Крыжановского, цитированной во введении к этому параграфу.

Однако, для того чтобы задача в такой форме являлась осмысленной, надо доказать, что всегда существует многоугольник, который можно вписать в окружность, имеющий наперед заданные длины сторон (удовлетворяющие тому условию, что каждая сторона короче суммы всех остальных, без чего вообще не может существовать никакого многоугольника). Мы здесь не будем останавливаться на этом¹⁾.

Отметим еще, что столь похожие по форме задачи 63 и 59б) находятся в разном отношении к изопериметрической задаче. Решение задачи 63, не использующее изопериметрической задачи, затруднительно. В противоположность этому задача 59б) может быть решена непосредственно и в свою очередь может быть использована при доказательстве изопериметрического свойства круга (см. решение задачи 62).

64. Докажите, что из всех выпуклых n -угольников с одним и тем же периметром правильный имеет наибольшую площадь.

Задача 64 является, очевидно, обобщением задач 56а) и б).

65. а) Докажите, что из всех выпуклых фигур Φ , ограниченных отрезком прямой длины a и дугой длины l ($l > a$), наибольшую площадь имеет сегмент круга.

б) Докажите, что из всех выпуклых фигур Φ , ограниченных отрезком прямой произвольной длины и дугой длины l , наибольшую площадь имеет полукруг радиуса $\frac{l}{\pi}$.

Задача 65б) (точнее — несколько более общая задача) носит название «задачи Дидоны». Дидона — мифическая финикийская царица, основательница древнего города Карфагена в Африке. Согласно преданию Дидона договорилась с населяющим северное побережье Африки племенем, что ей будет уступлен участок земли «в пределах воловьей шкуры». Однако Дидона не просто покрыла шкурой малый участок земли, как это имели в виду владельцы побережья, а поступила хитрее. Она разрешила шкуру на тонкие ремни и связала из них одну длинную

¹⁾ Доказательство этого предложения также имеется в книге Д. А. Крыжановского.

ленту. После этого Дидона столкнулась с задачей — отгородить этой лентой участок земли наибольшей площади. При этом вопрос, который стоял перед Дидоной, не сводился просто к изопериметрической задаче, так как она могла воспользоваться берегом моря и, отгородив участок, прилегающий к морю, получить большую территорию, чем если бы она выбрала участок вдали от моря. Если считать берег моря прямолинейным, то мы приходим в точности к задаче 65б).

66. Среди всех выпуклых кривых длины 1, имеющих угловую точку с углом α (см. выше стр. 24), найдите кривую, ограничивающую фигуру наибольшей площади.

В трехмерном пространстве «изопериметрической задачей» называется следующая: *среди всех тел, ограниченных поверхностями площади 1, найти тело наибольшего объема.* Таким телом оказывается шар (радиуса $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$); доказательство этого предложения имеется, например, в цитированной выше книге Д. А. Крыжановского.

§ 6. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

В настоящем параграфе собраны некоторые задачи на наибольшие и наименьшие значения численных величин, связанных с выпуклыми фигурами. В §§ 2 и 3 мы уже имели целый ряд подобных задач (см. задачи 16—18, 19а) из § 2 и задачи 31, 33—36 из § 3); § 5 был целиком посвящен одной важной задаче такого рода и ее приложениям. Некоторые задачи на максимум и минимум приведены также в последующих §§ 7 и 8 (задачи 86, 89, 91, 94, 95, 97 из § 7, задачи 103, 104 и 109 из § 8).

Задачи настоящего параграфа в значительной мере не зависят друг от друга, и читатель может начинать с решения той из приведенных здесь задач, которая покажется ему наиболее интересной. Для большинства задач этого параграфа не обязательно также и знакомство с содержанием предыдущих параграфов (кроме § 1, являющегося вводным ко всей книге). Исключением в этом отношении являются лишь задачи 75—77. Задачу 75 можно решить лишь после ознакомления с содержанием основной части § 4. Эта задача представляет собой частный случай одной общей теоремы, имеющей много разнообразных приложений (так называемое неравенство Минковского; см. главу V цитированной в предисловии книги Л. А. Люстерника). Задачи 76 и 77 решаются на основании задачи 75; решение задачи 77 предполагает известным также содержание § 5.

Для понимания ряда задач этого параграфа читателю понадобятся определенные ранее понятия диаметра, ширины, периметра и площади выпуклой фигуры (см. соответственно стр. 20, 33, 66 и 28).

Описанной окружностью плоской фигуры Φ называется наименьшая окружность, заключающая Φ внутри себя ¹⁾.

67. Докажите, что плоская фигура Φ не может иметь двух различных описанных окружностей. Докажите также, что описанная окружность плоской фигуры Φ обязательно содержит или две граничные точки Φ , являющиеся диаметрально противоположными точками окружности, или же три

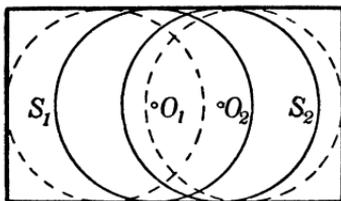
¹⁾ См. задачу 3 дополнения I (стр. 133).

граничные точки Φ , являющиеся вершинами остроугольного треугольника. Выведите отсюда, что радиус R описанной окружности плоской фигуры Φ диаметра l заключается в границах

$$0,5 \leq R \leq \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 \dots$$

Из задачи 67 сразу следует теорема Юнга (см. задачу 16 из § 2, стр. 32).

Вписанной окружностью выпуклой фигуры Φ называется наибольшая окружность, целиком заключающаяся



Черт. 68.

внутри Φ). В противоположность описанной окружности вписанная окружность выпуклой фигуры может и не быть единственной (черт. 68).

68. Докажите, что вписанная окружность выпуклой фигуры Φ обязательно содержит или две граничные точки Φ , являющиеся диаметрально противоположными точками окружности, или три граничные точки Φ , являющиеся вершинами остроугольного треугольника; в последнем случае вписанная окружность Φ является единственной. Докажите также, что радиус r вписанной окружности выпуклой фигуры Φ ширины l заключается в границах

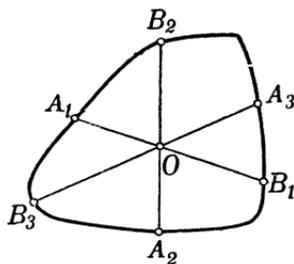
$$\frac{1}{2} \geq r \geq \frac{1}{3}.$$

Из задачи 68 сразу вытекает теорема Бляшке, составляющая содержание задачи 17 из § 2.

1) См. задачу 4 дополнения I (стр. 134).

Центром выпуклой фигуры Φ мы назовем ее внутреннюю точку O , обладающую следующим свойством: отношения, в которых делятся точкой O всевозможные хорды фигуры Φ , проходящие через O , заключены в наиболее тесных пределах. Наименьшее из отношений, в котором делится центром O проходящая через O хорда Φ , мы назовем коэффициентом центральности фигуры Φ . Так, для центрально-симметричных выпуклых фигур (и только для таких фигур) коэффициент центральности равен 1, а центр совпадает с центром симметрии: все хорды, проходящие через центр симметрии, делятся в нем в одном и том же отношении 1:1. Очевидно, что чем ближе к 1 коэффициент центральности выпуклой фигуры, тем больше походит фигура на центрально-симметричную¹⁾.

69**. Докажите, что через центр O выпуклой фигуры Φ с коэффициентом центральности λ проходят по меньшей мере



Черт. 69.

три такие хорды A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , что $\frac{A_1O}{OB_1} = \frac{A_2O}{OB_2} = \frac{A_3O}{OB_3} = \lambda$ (черт. 69). Выведите отсюда, что коэффициент центральности выпуклой фигуры Φ не может быть меньше $\frac{1}{2}$.

См. также задачу 19а) из § 2.

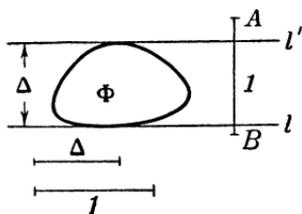
¹⁾ Другие оценки степени центральности выпуклой фигуры содержатся в задачах 33, 34 и 36 из § 3; см. также текст, предпосланный задачам 18 и 19 из § 2.

70*. Докажите, что из всех выпуклых кривых ширины 1 наименьшую площадь ограничивает равносторонний треугольник с высотой 1.

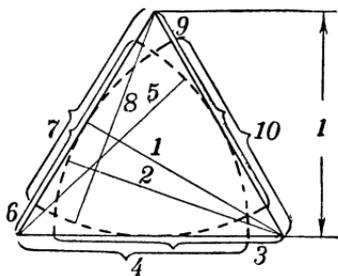
Используя задачу 70, мы можем теперь решить следующую задачу:

Какую наименьшую площадь может иметь выпуклая фигура Φ , если известно, что внутри Φ можно так двигать отрезок длины 1, чтобы он повернулся на угол 360° ?

Действительно, прежде всего легко видеть, что ширина Δ подобной фигуры Φ не может быть меньше 1: если бы расстояние между какой-либо парой параллельных опорных прямых l и l' фигуры Φ было меньше 1, то отрезок длины 1,



Черт. 70.



Черт. 71.

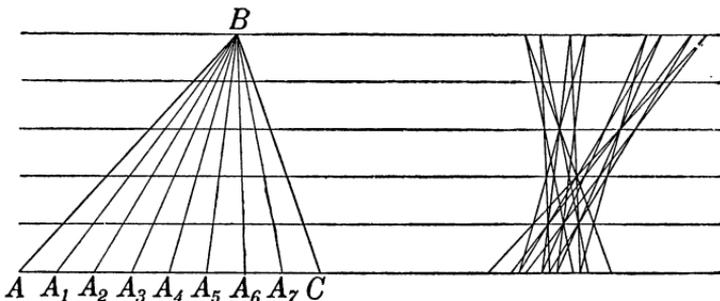
имеющий направление, перпендикулярное к l и l' , не мог бы быть расположен внутри Φ (черт. 70), и следовательно, такой отрезок нельзя повернуть на 360° так, чтобы он все время оставался внутри Φ .

В силу задачи 70 отсюда вытекает, что площадь выпуклой фигуры Φ , внутри которой можно повернуть на 360° отрезок длины 1, не может быть меньше площади равностороннего треугольника высоты 1 (т. е. $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577\dots$). С другой стороны, совершенно очевидно, что внутри правильного треугольника высоты 1 можно повернуть на 360° отрезок длины 1 (черт. 71).

После того как мы убедились, что площадь выпуклой фигуры, внутри которой можно повернуть на 360° отрезок

длины 1 (для наглядности можно говорить про помещение, внутри которого можно вращать шест длины 1), не может быть меньше $\frac{\sqrt{3}}{3}$, естественно возникает вопрос о том, насколько малой может быть площадь фигуры, не обязательно выпуклой, внутри которой можно повернуть на 360° отрезок длины 1. Ответ на этот вопрос представляется совершенно неожиданным (см. ниже задачу 72).

71.** (Вспомогательная задача.) Докажите, что каково бы ни было положительное число σ (как угодно малое!), всегда возможно разрезать данный треугольник ABC



Черт. 72.

прямыми, соединяющими вершину B с точками основания AC , на некоторое (достаточно большое) число равновеликих треугольников $ABA_1, A_1BA_2, A_2BA_3, \dots, A_{n-1}BC$ и затем сдвинуть эти треугольники вдоль прямой AC так, чтобы общая площадь, занимаемая всеми треугольниками $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$, в новом положении была меньше σ (после сдвига треугольники $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$ будут занимать меньшую площадь, чем раньше, так как они могут перекрывать друг друга; черт. 72).

72*. Докажите, что существуют (невыпуклые) плоские фигуры сколь угодно малой площади, внутри которых можно повернуть на 360° отрезок длины 1.

Таким образом, существует фигура, площадь которой, например, меньше $0,001 \text{ мм}^2$, внутри которой можно повернуть на 360° отрезок длиной в 1 км.

73*. Докажите, что треугольник имеет меньшую площадь, чем каждая другая выпуклая фигура того же самого диаметра и той же самой ширины.

Нетрудно видеть, что диаметр D треугольника равен его наибольшей стороне, а ширина Δ —высоте, опущенной на эту сторону. Отсюда легко вывести, что для треугольника $\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} D$. Действительно, если D есть наибольшая сторона некоторого треугольника, то противолежащий ей угол треугольника является наибольшим, откуда следует, что хотя бы один угол, примыкающий к этой стороне, не больше 60° ; отсюда вытекает, что высота треугольника, опущенная на сторону длины D , равная произведению одной из других сторон треугольника (по предположению не большей D) на синус угла, примыкающего к наибольшей стороне, не больше $D \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} D$. Равенство $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} D$ имеет место только в том случае, когда треугольник является равносторонним.

Таким образом, предложение задачи 73 можно сформулировать следующим образом: *из всех выпуклых фигур диаметра D и ширины Δ , где $\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} D$, наименьшую площадь имеет треугольник.*

Вопрос о том, какая выпуклая фигура диаметра D и ширины Δ , где $D > \Delta > \frac{\sqrt{3}}{2} D \approx 0,866 D$, имеет наименьшую площадь, до сих пор не получил решения¹⁾ (для случая $\Delta = D$ эта задача рассматривается в следующем параграфе; см. задачи 89 и 97).

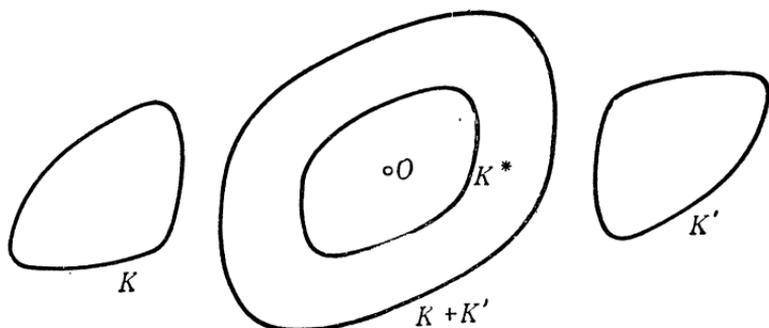
74.** Докажите, что равнобедренный треугольник, боковая сторона которого не меньше основания, не может иметь большую площадь, чем какая-либо другая выпуклая фигура того же диаметра и того же периметра.

¹⁾ Опираясь на теорему 1 дополнения I (стр. 126), можно доказать, что и в этом случае существует некоторая фигура наименьшей площади; однако из этой теоремы нельзя сделать никаких заключений о форме фигуры.

Так как диаметром треугольника, о котором идет речь в задаче 74, является его боковая сторона, то очевидно, что периметр такого треугольника не больше утроенного диаметра. Таким образом, предложение задачи 74 можно сформулировать следующим образом: *из всех выпуклых фигур диаметра D и периметра L , где $L \leq 3D$, наименьшую площадь имеет равнобедренный треугольник с боковой стороной D .*

Периметр L выпуклой фигуры диаметра D не может быть больше πD (см. ниже задачу 94а) из § 7). Вопрос о том, какая выпуклая фигура диаметра D и периметра L , где $3D < L < \pi D \approx 3,14 D$, имеет наименьшую площадь, до сих пор не получил решения¹⁾ (относительно случая $L = \pi D$ см. задачи 89 и 97 из § 7).

75. Пусть K — произвольная выпуклая кривая, K' — кривая, получаемая из K симметрией относительно некоторой



Черт. 73.

точки O , K^* — кривая, подобная сумме кривых K и K' с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ (черт. 73)²⁾. Докажите, что

¹⁾ См. подстрочное примечание на предыдущей странице.

²⁾ Определение кривой K^* можно записать в следующем виде:

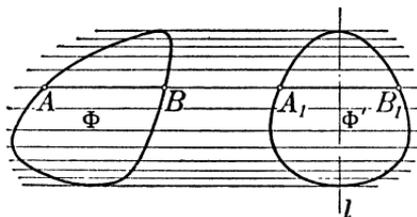
$$K^* = \frac{1}{2} (K + K')$$

(см. подстрочное примечание на стр. 54). Таким образом, K^* можно назвать «средним арифметическим» кривых K и K' .

- а) Кривая K^* имеет центр симметрии.
- б) Диаметр и ширина кривой K^* равны соответственно диаметру и ширине кривой K .
- в) Длина кривой K^* равна длине кривой K .
- г*) Площадь, ограниченная кривой K^* , не меньше площади, ограниченной кривой K .

Так как результат задачи 75 будет играть в последующем изложении важную роль, мы постараемся пояснить здесь еще одним способом смысл проведенной в этой задаче конструкции.

Относительная трудность задач, связанных с выпуклыми фигурами, по сравнению с задачами школьного курса геометрии объясняется тем, что в теории выпуклых фигур изучаются фигуры довольно общего вида, так что нет возможности использовать какие-либо индивидуальные особенности формы этих фигур. Поэтому является чрезвычайно ценной всякая возможность замены изучаемой фигуры новой фигурой, более симметричной, чем первая (здесь мы пока не уточняем смысл термина «более симметричная фигура, который можно понимать по-разному»). В связи с этим в теории выпуклых фигур значительное место занимает метод симметризации, смысл которого как раз и заключается в подобной замене. При этом существует целый ряд различных способов симметризации выпуклой фигуры. Основную роль в теории плоских выпуклых фигур играют два типа симметризации: симметризация относительно оси и симметризация относительно точки.

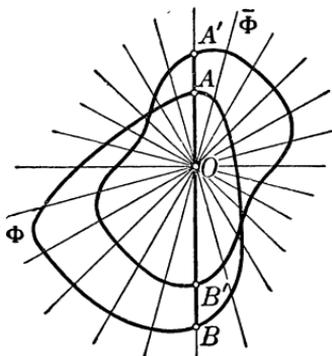


Черт. 74.

Симметризация относительно оси состоит в том, что выпуклая фигура заменяется новой фигурой, имеющей фиксированную ось симметрии l , при помощи следующего построения: каждая хорда AB выпуклой фигуры Φ , перпендикулярная к прямой l , сдвигается вдоль образуемой AB прямой в новое положение A_1B_1 , симметричное относительно l ; фигура Φ' , образованная всеми хордами A_1B_1 в новом их положении, называется образом фигуры Φ при симметризации относительно оси l (черт. 74). Основные свойства симметризации относительно оси и некоторые применения этого преобразования читатель может найти в

книге Д. А. Крыжановского «Изопериметры», цитированной во введении к § 5¹⁾.

Более сложно определяется симметризация относительно точки, переводящая произвольную выпуклую фигуру Φ в центрально-симметричную фигуру $\bar{\Phi}$. По аналогии с симметризацией относительно прямой хотелось бы определить симметризацию относительно точки следующим образом: каждая хорда AB кривой, проходящая через какую-либо внутреннюю точку O , сдвигается вдоль образуемой AB прямой в новое положение $A'B'$, симметричное относительно O (черт. 75). Однако такой метод симметризации находит сравнительно скромное применение²⁾.



Черт. 75.

Значительно более важным оказывается способ симметризации относительно точки, определяемый следующим образом. Выпуклая фигура Φ рассматривается как пересечение бесконечного числа полос, образованных ее параллельными опорными прямыми. Затем все эти полосы сдвигаются в направлении, перпендикулярном к направлению полосы, в новое положение, симметричное относительно некоторой точки O ; фигура $\bar{\Phi}$, образованная в пересечении сдвинутых полос, и называется образом фигуры Φ при симмет-

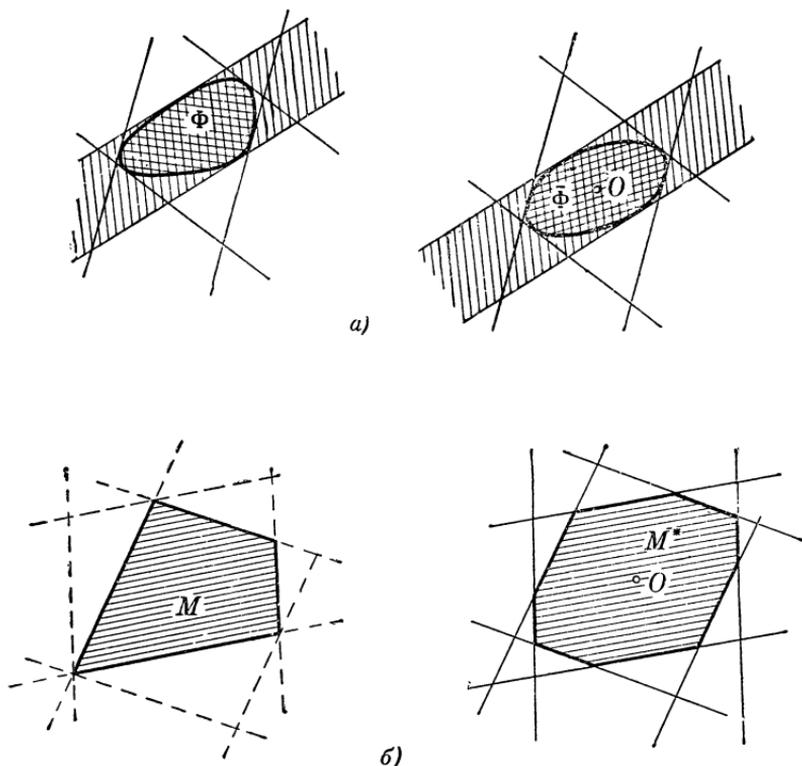
1) Рекомендуем читателю попробовать самостоятельно доказать следующие свойства симметризации относительно оси:

Если Φ' есть образ выпуклой фигуры Φ при симметризации относительно оси, то

- а) фигура Φ' выпукла;
- б) площадь Φ' равна площади Φ ;
- в) периметр Φ' не больше периметра Φ .

2) Одна из причин этого состоит в том, что так определенная симметризация может перевести выпуклую фигуру в невыпуклую (см., например, черт. 75).

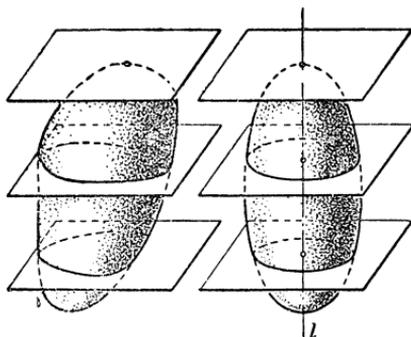
ризации относительно точки O (черт. 76, а). На черт. 76, б изображена симметризация выпуклого многоугольника M . Нетрудно видеть, что выпуклая кривая K^* , определенная в условии задачи 75, как раз и совпадает с кривой, полученной из K при помощи так определенной симметризации относительно точки.



Черт. 76.

В теории выпуклых тел в пространстве важную роль играют три типа симметризации: симметризация относительно плоскости, определяемая аналогично симметризации относительно прямой на плоскости, симметризация относительно точки, определяемая так же, как и на плоскости (с очевидной заменой полос между двумя параллельными опорными прямыми фигуры полосами между двумя параллельными опорными плоскостями тела), и симметризация относительно прямой, при

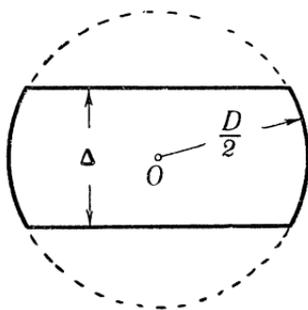
которой каждое сечение выпуклого тела, перпендикулярное к некоторой оси l , заменяется кругом той же площади с центром на оси l (черт. 77).



Черт. 77.

76. а) Докажите, что из всех выпуклых кривых диаметра l наибольшую площадь ограничивает окружность.

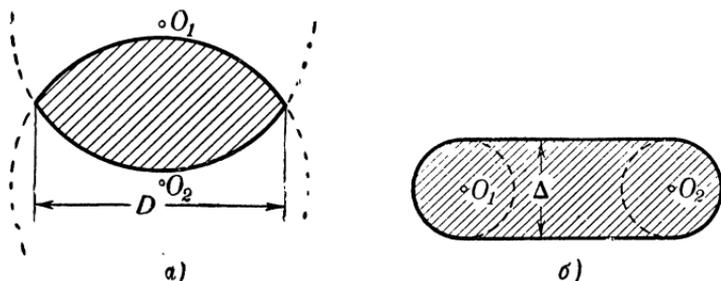
б) Докажите, что из всех выпуклых фигур диаметра D и ширины Δ наибольшую площадь имеет изображенная



Черт. 78.

на черт. 78 фигура, высекаемая из круга радиуса $\frac{D}{2}$ двумя параллельными и одинаково удаленными от центра круга прямыми, расстояние между которыми равно Δ .

77. а) Докажите, что из всех выпуклых фигур диаметра D и периметра L ($L \leq \pi D$; см. ниже задачу 94а) из § 7) наибольшую площадь имеет изображенная на черт. 79, а фигура, состоящая из двух равных сегментов круга с хордой D и дугой длины $\frac{L}{2}$.



Черт. 79.

б) Докажите, что из всех выпуклых фигур ширины Δ и периметра L ($L \geq \pi \Delta$; см. ниже задачу 95а) из § 7) наибольшую площадь имеет изображенная на черт. 79, б фигура, ограниченная двумя равными и параллельными отрезками, расстояние между которыми равно Δ , и двумя полуокружностями диаметра Δ .

Все задачи на максимум и минимум, связанные с выпуклыми фигурами, могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся задачи, в которых требуется из всех выпуклых фигур найти ту, для которой какая-то численная величина, характеризующая фигуру, принимает наибольшее или наименьшее значение (задачи на безусловный максимум или минимум); к этой группе относится, например, задача 69 настоящего параграфа.

Значительно большее число задач содержит вторая группа, в задачах которой требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, связанной с выпуклой фигурой, причем рассматриваемая выпуклая фигура должна удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям, перечи-

сленным в формулировке задачи (задачи на условный максимум или минимум)¹⁾. Чаще всего эти дополнительные условия состоят в том, что какая-то другая численная характеристика выпуклой фигуры должна иметь наперед заданное значение. Наиболее известной задачей такого рода является изопериметрическая задача: *найти максимум площади выпуклой фигуры при условии, что длина кривой, ограничивающей эту фигуру, принимает наперед заданное значение*, например равно 1 (см. § 5).

Много примеров задач подобного рода можно найти в настоящем параграфе. В частности, в задачах этого параграфа и нескольких задачах из §§ 5 и 7 определяются все наибольшие и наименьшие значения, которые может принимать одна из следующих величин: а) диаметр D выпуклой фигуры, б) ширина Δ , в) площадь S и г) периметр L при условии, что какая-то другая из этих величин имеет наперед заданное значение. А именно, оказывается, что

1°. Если диаметр выпуклой фигуры равен D , то

а) $D \geq \Delta > 0$. Обе части этого неравенства очевидны.

б) $\frac{\pi D^2}{4} \geq S > 0$. Первая часть этого неравенства составляет содержание задачи 76а), вторая очевидна.

в) $3,14 D \approx \pi D \geq L > 2D$. Первая часть этого неравенства составляет содержание задачи 94а) из § 7, вторая очевидна²⁾.

2°. Если ширина выпуклой фигуры равна Δ , то

а) $\infty > D \geq \Delta$. Обе части этого неравенства очевидны.

б) $\infty > S \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Delta^2$. Первая часть этого неравенства очевидна, вторая составляет содержание задачи 70.

1) Подобное деление задач на отыскание наибольших и наименьших значений относится, разумеется, не только к задачам о выпуклых фигурах.

2) Очевидно, что периметр выпуклой фигуры Φ диаметра D не может быть меньше $2D$: если A и B — две (граничные) точки фигуры Φ , расстояние между которыми равно D , то каждая из двух дуг, на которые делят точки A и B границу Φ , не может иметь длину, меньшую D . С другой стороны, можно найти выпуклую фигуру диаметра D , периметр которой как угодно близок к $2D$; такой фигурой может служить например, ромб, большая диагональ которого равна D , а меньшая очень мала.

в) $\infty > L \geq \pi \Delta$. Первая часть этого неравенства очевидна, вторая составляет содержание задачи 95а) из § 7.

3°. Если площадь выпуклой фигуры равна S , то

а) $\infty > D \geq \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$. Первая часть этого неравенства очевидна, вторая следует из результата задачи 76а).

б) $\sqrt{V^3 S} \geq \Delta > 0$. Первая часть этого неравенства следует из результата задачи 70, вторая очевидна.

в) $\infty > L \geq \sqrt{4\pi S}$. Первая часть этого неравенства очевидна, вторая следует из результата задачи 62 из § 5.

4°. Если периметр выпуклой фигуры равен L , то

а) $\frac{L}{2} > D \geq \frac{L}{\pi} \approx 0,318L$. Первая часть этого неравенства очевидна¹⁾, вторая следует из результата задачи 94а) из § 7.

б) $\frac{L}{\pi} \geq \Delta > 0$. Первая часть этого неравенства следует из результата задачи 95а) из § 7, вторая очевидна.

в) $\frac{L^2}{4\pi} \geq S > 0$. Первая часть этого неравенства составляет содержание задачи 62 из § 5, вторая очевидна.

Более сложными являются задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, связанной с выпуклой фигурой, если известно, что несколько (две или больше) других численных характеристик фигуры имеют наперед заданные значения (задачи на отыскание условного максимума или минимума с несколькими дополнительными условиями). Некоторые задачи такого рода приведены в этом и следующем параграфах. Все эти задачи связаны с теми же четырьмя величинами D , Δ , S и L ; однако они не исчерпывают всех возможных задач подобного рода, относящихся к этим четырем величинам, ибо для целого ряда таких задач решение пока не известно.

Так, в задаче 76б) определяется максимум S при заданных D и Δ , в задаче 73 и задачах 89, 97 из § 7 определяется минимум S при заданных D и Δ при условии, что $\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{3} D$, соответственно $\Delta = D$; минимум S при задан-

¹⁾ См. предыдущее подстрочное примечание.

ных D и Δ , где $D > \Delta > \frac{\sqrt{3}}{3} D$, до сих пор не найден. В задачах 94б) и 95б) из § 7 определяется максимум, соответственно минимум, L при заданных D и Δ . В задаче 77а) определяется максимум S при заданных D и L , в задаче 74 и задачах 89, 97 из § 7 определяется минимум S при заданных D и L при условии, что $L \leq 3D$, соответственно $L = \pi D$; минимум S при заданных D и L , где $\pi D > L > 3D$, до сих пор не найден. В задаче 77б) определяется максимум S при заданных Δ и L ; минимум S при заданных Δ и L пока остается неизвестным.

Из этого краткого перечня можно судить о том, как много нерешенных вопросов осталось даже в элементарных разделах теории выпуклых фигур.

§ 7. КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Этот параграф посвящен одному интересному классу выпуклых кривых — так называемым кривым постоянной ширины. Этим кривым посвящена также глава 25 хорошей элементарной книги Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры»¹⁾, которая может служить некоторым дополнением к материалу настоящего параграфа.

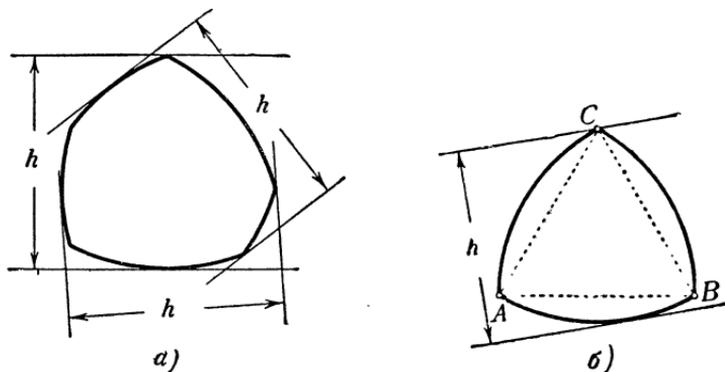
Задачи первой половины этого параграфа (до задачи 91 включительно) в основном не связаны с содержанием предшествующих параграфов (кроме § 1); лишь в решении задачи 89 существенно используется предложение задачи 30а из § 3; если читать § 7 раньше, чем § 3, то следует специально ознакомиться с задачей 30а (может быть, просто прочитав по книге ее решение). Задачи 92—95 предполагают знание материала, содержащегося в первых 11 задачах § 4 и в пояснениях к ним. Задачи 94 и 95 существенно опираются на задачу 75 из § 6; если читать § 7 до § 6, то эти задачи придется пропустить. Наконец, для понимания заключительной части этого параграфа (напечатанной мелким шрифтом) необходимо знание всего § 4.

Шириной выпуклой кривой в данном направлении называется расстояние между парой параллельных опорных прямых кривой, перпендикулярных к этому направлению (см. черт. 59, стр. 60). Если ширина кривой во всех направлениях является одной и той же, то кривая называется кривой постоянной ширины (черт. 80, *a*). Для такой кривой вместо ширины в данном направлении можно говорить просто про ширину кривой.

Простейшим примером кривой постоянной ширины является окружность. Ширина окружности равна ее диаметру. Однако оказывается, что и кроме окружности существует бесконечно много различных кривых постоянной ширины. Вот

¹⁾ Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М.—Л., ОНТИ, 1938.

пример одной из них. Возьмем равносторонний треугольник ABC со стороной длины h и каждую две его вершины соединим дугой окружности радиуса h с центром в третьей вершине (черт. 80, б). Эта кривая называется треугольником Релло. Из каждой пары параллельных опорных прямых треугольника Релло одна проходит через какую-то вершину треугольника ABC , являющуюся угловой точкой кривой, а другая касается противоположной дуги окружности. Поэтому расстояние между всякими двумя параллельными опорными прямыми треугольника Релло равно h .

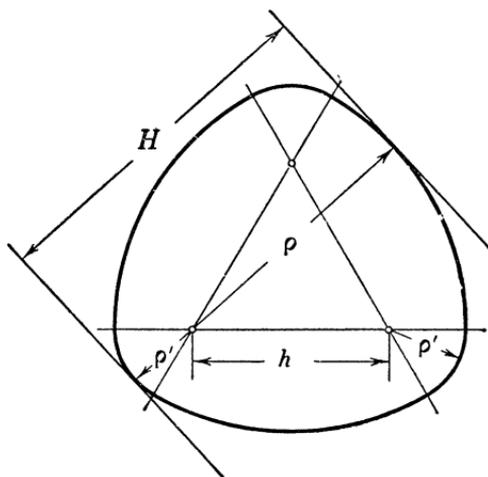


Черт. 80.

Исходя из треугольника Релло, нетрудно построить и новые примеры кривых постоянной ширины. Рассмотрим опять равносторонний треугольник со стороной длины h . Из каждой вершины треугольника внутри соответствующего ей угла проведем по дуге радиуса $\rho > h$; концы полученных трех дуг соединим меньшими дугами радиуса $\rho' = \rho - h$ ($\rho + \rho' = H$) с центрами в вершинах треугольника (черт. 81). Из каждых двух параллельных опорных прямых полученной кривой одна касается дуги большей окружности, а вторая — дуги меньшей окружности с тем же центром; отсюда видно, что эта кривая имеет постоянную ширину, равную H .

Если провести к кривой постоянной ширины h две пары параллельных между собой опорных прямых так, чтобы прямые одной пары были перпендикулярны к прямым второй пары,

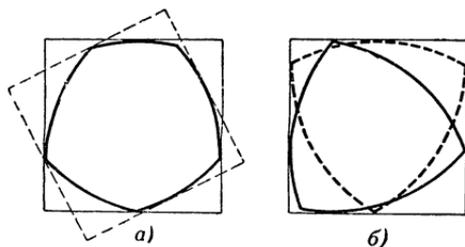
то у нас получится квадрат со стороной h . Таким образом, вокруг кривой постоянной ширины можно описать квадрат со



Черт. 81.

сторона h с произвольным направлением сторон (черт. 82, а). Иначе это можно выразить, говоря, что квадрат можно свободно вращать так, чтобы он все время оставался описанным вокруг заданной кривой постоянной ширины. Или, другими словами, кривую постоянной ширины можно свободно вращать внутри квадрата так, чтобы она все время плотно соприкасалась со сторонами квадрата (оста-

валась вписанной в квадрат; см. черт. 82, б). Очевидно, что это свойство вполне характеризует кривые постоянной ширины.

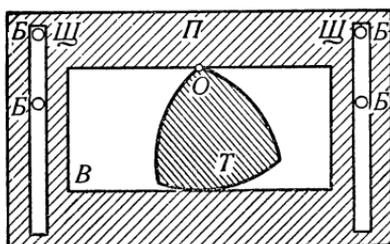


Черт. 82.

Кривые постоянной ширины, особенно треугольник Релло, являющийся простейшей после окружности кривой такого рода, используются на практике в различных механизмах. Так, например, тот факт, что треугольник Релло может свободно вращаться внутри квадрата, все время касаясь всех его сторон, находит применение при сверлении квадратных отверстий: при этом пользуются сверлами, имеющими форму треугольника Релло.

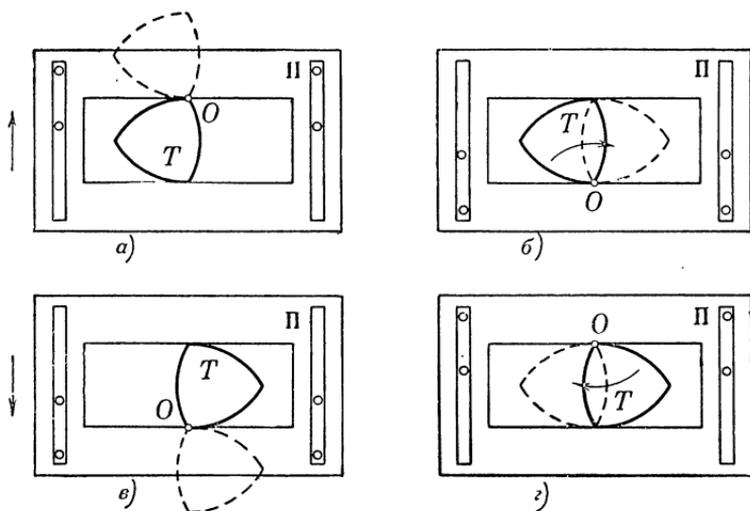
Рассмотрим еще один пример. Пусть Π — плоская пластина, имеющая две вертикальные щели Ψ и прямоугольный вырез B (черт. 83). В щели Ψ вставлено по два болта B , укрепленных на

неподвижном основании так, что пластина Π может свободно двигаться вверх и вниз, но не в стороны. В вырезе B находится диск T , имеющий форму треугольника Релло и укрепленный на оси O , перпендикулярной к плоскости чертежа. Придадим диску T вращательное движение вокруг оси O и посмотрим, как при этом будет двигаться пластина Π . Нетрудно видеть, что при повороте диска T на 120° пластина Π будет подниматься



Черт. 83.

(черт. 84, а), затем при повороте диска T на следующие 60° пластина Π будет неподвижна (черт. 84, б), при повороте на следующие 120° пластина Π будет опускаться до тех пор, пока не займет пер-



Черт. 84.

воначальное положение (черт. 84, в), и, наконец, при повороте на последние 60° , завершающие один оборот, пластина Π будет снова неподвижна (черт. 84, г). Таким образом, вращательное движение диска T будет переходить в поступательное движение пластины Π .

Тот факт, что промежутки движения пластины чередуются с промежутками неподвижности, позволяет применить описанный механизм, например, в качестве грейфера¹⁾ для передвижения пленки в кинопроекторных аппаратах.

78. Вычислите общую длину треугольника Релло и площадь, им ограниченную. Что больше: площадь, ограниченная окружностью, или площадь, ограниченная треугольником Релло той же самой ширины? Определите также величину внутренних углов при угловых точках треугольника Релло.

79. Постройте кривую постоянной ширины h , составленную из пяти, семи или вообще любого нечетного числа дуг окружностей радиуса h . Какова длина каждой из этих кривых?

Кривые постоянной ширины h , составленные из дуг окружностей радиуса h , будут играть в дальнейшем изложении большую роль (см. на стр. 98—102 текст, напечатанный мелким шрифтом).

80. Докажите, что расстояние между двумя точками кривой постоянной ширины h не может быть больше h .

81. Докажите, что любая опорная прямая имеет с кривой постоянной ширины h только одну общую точку. Всякая хорда кривой постоянной ширины, соединяющая точки соприкосновения кривой с параллельными опорными прямыми, перпендикулярна к этим опорным прямым и, следовательно, имеет длину h .

Плоские кривые, обладающие тем свойством, что расстояние между любыми двумя точками кривой не превосходит некоторой величины h и для каждой точки кривой можно найти другую ее точку, отстоящую от первой на расстоянии h , называют иногда кривыми постоянного диаметра. Из результата задачи 81 следует, что *каждая кривая по-*

¹⁾ Для того чтобы не получалось смазывания изображения, в кинопроекторном аппарате лента должна двигаться толчками, т. е. должны чередоваться промежутки движения ленты (и тогда объектив закрывается) с промежутками неподвижности ее (объектив открыт). Механизм, позволяющий осуществить такое движение ленты, называется грейфером.

стоянной ширины есть одновременно кривая постоянного диаметра. Не представляет труда показать, что и обратно каждая кривая постоянного диаметра есть кривая постоянной ширины. (Докажите!). Таким образом, можно не изучать самостоятельно кривые постоянного диаметра: этот класс кривых полностью совпадает с классом кривых постоянной ширины.

Хорды, о которых идет речь в задаче 81, мы будем называть диаметрами кривой постоянной ширины.

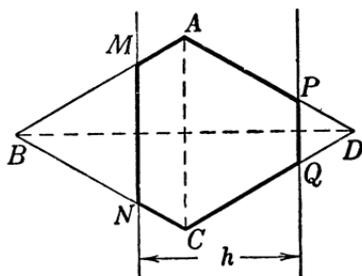
82. Докажите, что всякая хорда кривой постоянной ширины, имеющая длину, равную ширине кривой, является диаметром кривой.

83. Докажите, что всякие два диаметра кривой постоянной ширины пересекаются внутри или на кривой. Если они пересекаются на кривой, то точка A их пересечения является угловой точкой кривой, и внешний угол кривой (см. § 1, стр. 24) в точке A не меньше угла между рассматриваемыми диаметрами.

84. Докажите, что единственной кривой постоянной ширины, имеющей центр симметрии, является окружность.

85. Докажите, что если кривая постоянной ширины h имеет угловую точку, то некоторая дуга этой кривой является дугой окружности радиуса h . Обратно, если некоторая дуга кривой постоянной ширины h является дугой окружности радиуса h , то эта кривая имеет угловую точку.

86. Докажите, что внутренний угол при угловой точке A кривой постоянной ширины не может быть меньше 120° . Единственной кривой постоянной ширины, имеющей угловую точку с внутренним углом 120° , является треугольник Релло.



Черт. 85.

87. (Вспомогательная задача.) Пусть $ABCD$ — ромб, MN и PQ — две прямые, перпендикулярные к диагонали BD ромба, расстояние между которыми имеет фиксированную величину h (черт. 85).

а) Докажите, что периметр шестиугольника $AMNCQP$ не зависит от расположения прямых MN и PQ .

б) Докажите, что площадь шестиугольника $AMNCQP$ имеет наибольшее значение, если прямые MN и PQ расположены на одинаковом расстоянии (равном $\frac{h}{2}$) от диагонали AC ромба, и наименьшее значение, если прямая MN проходит через вершину B ромба или прямая PQ — через вершину D .

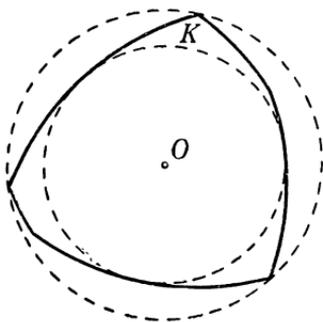
88. Из рассмотрения 2^n -угольников с равными углами, описанных вокруг произвольной кривой K постоянной ширины h и вокруг окружности O диаметра h , выведите теорему Барбье: *Все кривые постоянной ширины h имеют одинаковую длину, равную πh .*

89*. Рассматривая $3 \cdot 2^n$ -угольники с равными углами, описанные вокруг произвольной кривой K постоянной ширины h , вокруг окружности O диаметра h и вокруг треугольника Релло T ширины h , докажите, что из всех кривых постоянной ширины окружность ограничивает наибольшую площадь, а треугольник Релло — наименьшую.

В силу теоремы Барбье (задача 88) первая часть теоремы, составляющей содержание задачи 89, является также следствием изопериметрической задачи (см. задачу 62 из § 5).

90. Пусть дана произвольная выпуклая кривая K постоянной ширины. Докажите, что вписанная в кривую K и описанная вокруг нее окружности (см. выше, стр. 75—76) концентричны (черт. 86), а сумма их радиусов равна ширине кривой.

91*. Докажите, что из всех кривых постоянной ширины h треугольник Релло имеет наибольший радиус описанной окружности (а следовательно, и наименьший радиус вписанной окружности; см. задачу 90), а окружность имеет наименьший радиус описанной окружности (наибольший радиус вписанной окружности).



Черт. 86.

В вопросах, связанных с кривыми постоянной ширины, оказывается полезным понятие сложения выпуклых кривых (см. § 4). Из задачи 47 § 4 сразу следует, что *сумма двух кривых постоянной ширины есть также кривая постоянной ширины*; это предложение дает возможность, исходя из каких-либо кривых постоянной ширины, строить новые примеры таких кривых. Выше мы уже один раз воспользовались этим замечанием: сразу после треугольника Релло мы в качестве примера кривой постоянной ширины рассмотрели сумму треугольника Релло и окружности (см. выше черт. 81).

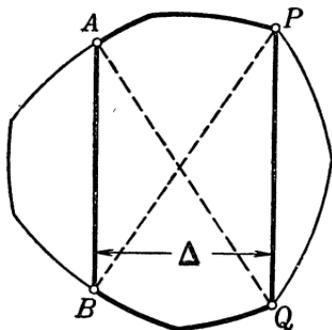
92. Докажите, что сумма произвольной кривой постоянной ширины h и той же самой кривой, повернутой на 180° , является окружностью радиуса h . Выведите из этого предложения новое доказательство теоремы Барбье (см. задачу 88).

93. (Обратная задаче 92.) Докажите, что если сумма некоторой кривой K и кривой K' , получающейся из K поворотом на 180° , есть окружность, то K есть кривая постоянной ширины.

Из задач 92 и 93 следует, что кривые постоянной ширины можно определить как такие *кривые, которые в сумме с кривой, полученной из первоначальной поворотом на 180°* (или, что то же самое, в сумме с кривой, полученной из первоначальной симметрией относительно точки), *дают окружность*. Из этого определения легко можно вывести все свойства кривых постоянной ширины.

94. а) Докажите, что из всех выпуклых кривых диаметра 1 (см. выше, стр. 20) наибольшую длину имеют кривые постоянной ширины 1.

б) Пусть AB и PQ — две такие параллельные хорды кривой \bar{K} постоянной ширины D , что диагонали AQ и BP трапеции $ABQP$ являются диаметрами кривой (черт. 87).

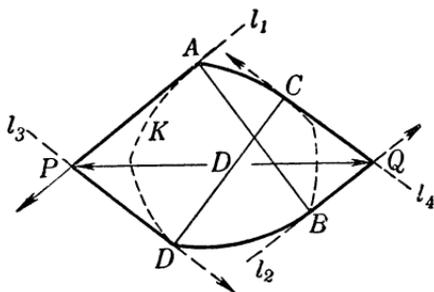


Черт. 87.

Расстояние между прямыми AB и PQ обозначим через Δ . Докажите, что кривая K , образованная дугами AP и BQ кривой \bar{K} и хордами AB и PQ , имеет наибольшую длину среди всех выпуклых кривых диаметра D и ширины Δ (см. выше, стр. 20, 33).

95. а) Докажите, что из всех выпуклых кривых ширины 1 наименьшую длину имеют кривые постоянной ширины 1.

б) Пусть AB и CD — два диаметра кривой \bar{K} постоянной ширины Δ , l_1, l_2 — опорные прямые кривой \bar{K} , перпендикулярные к AB и CD соответственно.



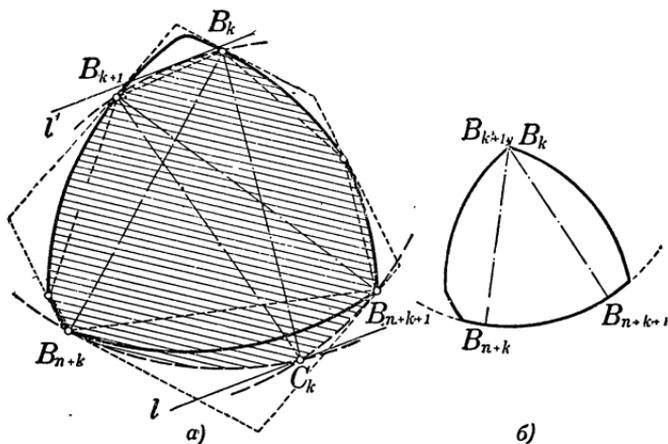
Черт. 88.

Рассмотрим кривую K , образованную отрезками AP, PD, BQ, QC и дугами AC и BD кривой \bar{K} . Докажем, что эта кривая имеет наименьшую длину среди всех кривых ширины Δ и диаметра D .

Докажем теперь, что если K есть произвольная кривая постоянной ширины h , то можно построить кривую постоянной ширины h , состоящую из дуг окружностей радиуса h , сколь угодно близкую к K (в смысле расстояния между кривыми, определенного в § 4).

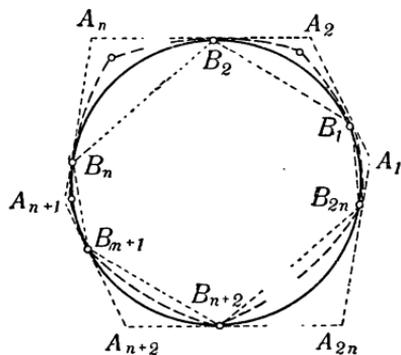
Для доказательства рассмотрим такой описанный вокруг K многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$ с четным числом сторон, что противоположные стороны A_kA_{k+1} и $A_{n+k}A_{n+k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), A_nA_{n+1} и $A_{2n}A_1$ этого многоугольника параллельны, и вписанный в K многоугольник $B_1B_2 \dots B_{2n}$ вершинами которого служат точки соприкосновения

$B_{n+k}C_k$, то вторая проходит через угловую точку B_k ; если l проходит через угловую точку C_k , то l' касается дуги B_kB_{k+1} ; если l



Черт. 90.

касается дуги C_kB_{n+k+1} , то l' проходит через угловую точку B_{k+1} . При этом кривая K'' остается вписанной в многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$

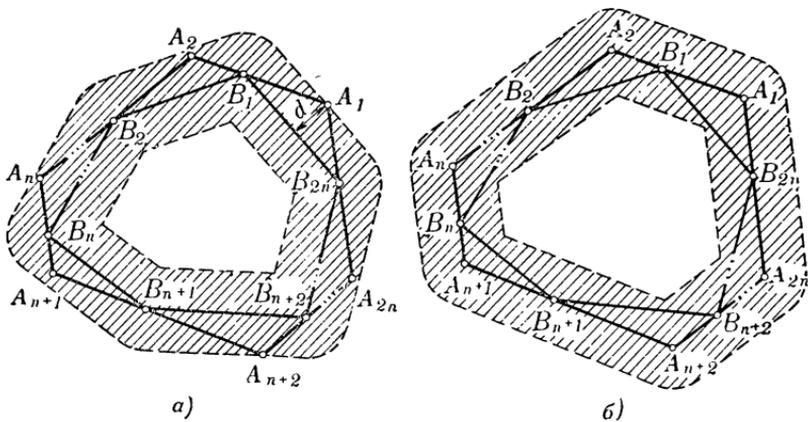


Черт. 91.

и описанной вокруг многоугольника $B_1B_2 \dots B_{2n}$ ¹⁾. В случае, когда B_k совпадает с B_{k+1} , диаметры B_kB_{n+k} и $B_{k+1}B_{n+k+1}$ пересекаются на кривой, так что дуга $B_{n+k}B_{n+k+1}$ является дугой окружности радиуса h с центром в точке $B_k = B_{k+1}$ (черт. 90, б; см. задачи 83, 85). Прделав такое же построение с каждой парой противоположных дуг кривой K , мы придем к кривой постоянной ширины K_0 , составленной только из дуг окружности радиуса h , вписанной в многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$ и описанной вокруг многоугольника $B_1B_2 \dots B_{2n}$ (черт. 91).

¹⁾ В этом построении можно, разумеется, изменить роль точек A_k, A_{k+1} и A_{n+k}, A_{n+k+1} ; в таком случае мы придем к иной кривой K'' , также обладающей желаемыми свойствами.

Теперь нам осталось только доказать, что, подобрав соответствующим образом многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$, мы можем добиться того, чтобы расстояние между K_0 и K было сколь угодно малым. Из того, что выпуклые кривые K и K_0 обе вписаны в многоугольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$ и описаны вокруг многоугольника $B_1B_2 \dots B_{2n}$, сразу следует, что *расстояние между этими кривыми не больше расстояния между многоугольниками*: если r -окрестность многоугольника $A_1A_2 \dots A_{2n}$ включает многоугольник $B_1B_2 \dots B_{2n}$ и r -окрестность многоугольника $B_1B_2 \dots B_{2n}$ включает $A_1A_2 \dots A_{2n}$, то и подавно K не может выйти из пределов r -окрестности K_0 и K_0 не может выйти из пределов r -окрестности K . Таким образом, если мы докажем, что *расстояние между многоугольниками $A_1A_2 \dots A_{2n}$ и $B_1B_2 \dots B_{2n}$*



Черт. 92.

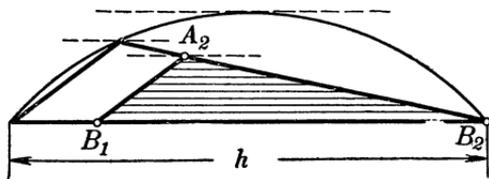
может быть сделано сколь угодно малым, то отсюда уже будет вытекать, что расстояние между K_0 и K может быть сделано сколь угодно малым.

Далее, легко видеть, что расстояние между многоугольниками $A_1A_2 \dots A_{2n}$ и $B_1B_2 \dots B_{2n}$ равно наибольшему из расстояний вершин A_1, A_2, \dots, A_{2n} от соответствующих им сторон $B_{2n}B_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$ многоугольника $B_1B_2 \dots B_{2n}$. Действительно, если d — это расстояние, то $A_1A_2 \dots A_{2n}$ не выходит за пределы d -окрестности $B_1B_2 \dots B_{2n}$ (черт. 92, а) и $B_1B_2 \dots B_{2n}$ не выходит за пределы d -окрестности $A_1A_2 \dots A_{2n}$ (черт. 92, б). Предположим теперь, что все углы многоугольника $A_1A_2 \dots A_{2n}$ равны между собой, т. е. равны

$$\frac{(2n - 2) \cdot 180^\circ}{2n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ$$

(сумма углов $2n$ -угольника равна $(2n - 2) \cdot 180^\circ$), и рассмотрим треуголь-

ники $B_{2n}A_1B_1, B_1A_2B_2, \dots, B_{2n-1}A_{2n}B_{2n}$. Основания всех этих треугольников меньше h (задача 80), а углы при вершинах равны $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ$. Отсюда следует, что высота каждого из них меньше высоты сегмента, вмещающего угол $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ$, хорда которого равна h (черт. 93). Но при увеличении n высота такого сегмента неограниченно уменьшается



Черт. 93.

легко подсчитать, что она равна $\frac{h}{2} \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{2n}$. Отсюда следует, что, выбирая число сторон описанного $2n$ -угольника $A_1A_2 \dots A_{2n}$ достаточно большим, мы

можем добиться того, чтобы расстояние между $A_1A_2 \dots A_{2n}$ и $B_1B_2 \dots B_{2n}$ было сколь угодно малым, а следовательно, чтобы расстояние между K_0 и K было сколь угодно малым.

Из доказанного предложения сразу следует, что для каждой кривой K постоянной ширины h всегда можно найти такую последовательность $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ кривых постоянной ширины h , состоящих из дуг окружностей радиуса h , что K есть предел этой последовательности; для этого достаточно только потребовать, что расстояние между K_1 и K было меньше 1, расстояние между K_2 и K было меньше $\frac{1}{2}$, ..., расстояние между K_m и K было меньше

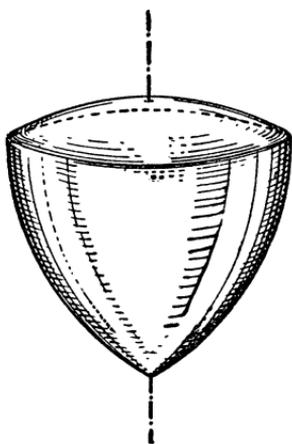
$\frac{1}{m}$ и т. д. Эта теорема (называемая аппроксимационной теоремой¹⁾) часто оказывается полезной для изучения свойств произвольных кривых постоянной ширины. В частности, наиболее трудные из задач, предлагавшихся нами ранее в этом параграфе (см. задачи 88 и 89), могут быть решены с помощью этой теоремы (см. ниже задачи 96 и 97).

96. Выведите из аппроксимационной теоремы новое доказательство теоремы Барбье (см. выше задачу 88).

97.** Выведите из аппроксимационной теоремы новое доказательство того, что из всех кривых постоянной ширины h наименьшую площадь ограничивает треугольник Релло (см. выше задачу 89).

¹⁾ От латинского слова *approximare* — приближать. Теоремы подобного рода, позволяющие представлять сложный математический объект в виде предела последовательности более простых, играют весьма важную роль в современной математике.

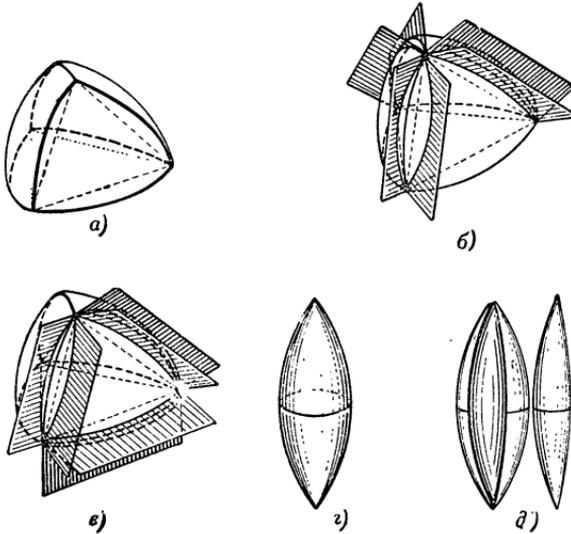
Телом постоянной ширины h называется выпуклое тело в трехмерном пространстве, расстояние между каждой парой параллельных опорных плоскостей которого равно h . Существует бесконечно много тел постоянной ширины, отличных от шара; однако примеры таких тел более сложны, чем примеры плоских кривых постоянной ширины, так как не существует отличных от шара тел постоянной ширины, поверхность которых состоит из кусков сфер. Простейшим примером тела постоянной ширины, отличного от шара, является тело, получаемое вращением треугольника Релло вокруг одной из осей симметрии (черт. 94).



Черт. 94.

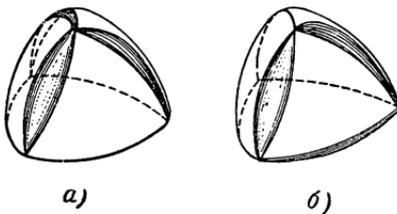
В качестве примеров тел постоянной ширины, не являющихся телами вращения, можно привести «тетраэдры постоянной ширины» — тела, которые можно рассматривать как пространственные аналоги треугольника Релло. Существует два различных «тетраэдра постоянной ширины». Они строятся следующим образом. Из каждой вершины правильного тетраэдра с ребром h , как из центра, описывается шар радиуса h . Пересечение этих четырех шаров представляет собой тело, изображенное на черт. 95, *а*. Затем удаляются части поверхности этого тела, лежащие внутри двугранных углов, вертикальных по отношению к трем двугранным углам тетраэдра, из которых никакие два не являются противоположными, т. е. к трем двугранным углам, сходящимся в одной вершине (черт. 95, *б*), или к трем двугранным углам, примыкающим к одной грани тетраэдра (черт. 95, *в*). Эти части поверхности тела заменяются тремя кусками поверхностей, которые образуются вращением дуг окружностей, ограничивающих полученную поверхность, вокруг соответствующих ребер, т. е. кусками поверхности лимонобразного тела, изображенного на черт. 95, *г*; подобная часть поверхности тела вырезана на черт. 95, *д*. Полученные таким образом два различных тела изображены на черт. 96, *а*, *б*; нетрудно

проверить, что оба они имеют постоянную ширину h . Оба «тетраэдра постоянной ширины» имеют одну и ту же площадь



Черт. 95.

поверхности и один и тот же объем. Предполагают, что из всех тел постоянной ширины h «тетраэдры постоянной ширины» имеют наименьший объем.



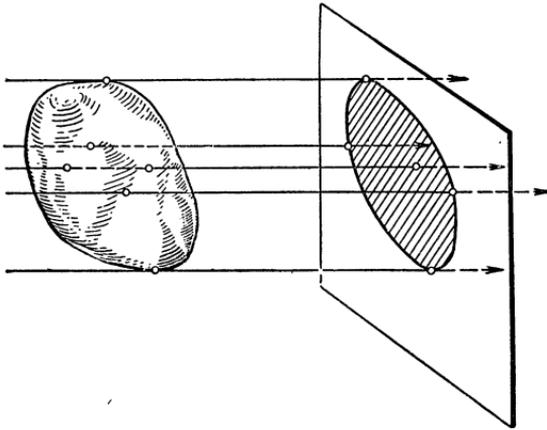
Черт. 96.

Тела постоянной ширины h могут иметь разную величину поверхности; другими словами, в пространстве не имеет места теорема, аналогичная теореме Барбье. Зато пространственные тела постоянной ширины обладают

некоторым другим замечательным свойством.

Тенью выпуклого тела Π в трехмерном пространстве называется плоская фигура, получающаяся в результате параллельного проектирования тела Π на какую-либо плоскость (черт. 97). Так как все тени тела Π постоянной ширины h

будут, очевидно, являться плоскими фигурами постоянной ширины h , то из теоремы Барбье следует, что все тени Π



Черт. 97.

будут иметь один и тот же периметр (длину кривой, ограничивающей тень), равный πh . Выпуклое тело, все тени которого имеют один и тот же периметр, называется телом постоянного охвата.

Таким образом, мы видим, что *все тела постоянной ширины являются также телами постоянного охвата*. Обратное обстоятельство также имеет место: *каждое тело постоянного охвата является телом постоянной ширины*; однако доказательство этого предложения является очень сложным.

§ 8. КРИВЫЕ, ВРАЩАЮЩИЕСЯ В РАВНОСТОРОННЕМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ (Δ -КРИВЫЕ), И РОДСТВЕННЫЕ ИМ КРИВЫЕ

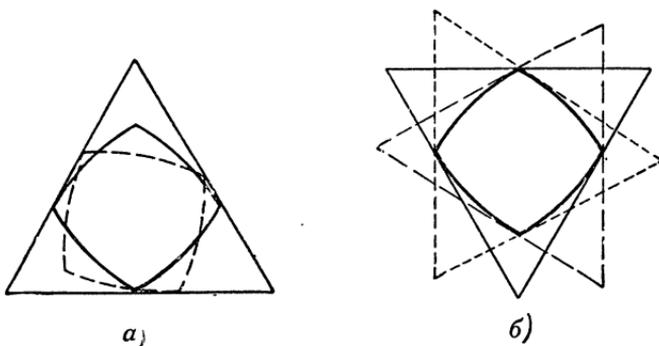
Настоящий параграф по своему содержанию очень тесно примыкает к предыдущему параграфу, посвященному кривым постоянной ширины. Поэтому этот параграф нельзя читать раньше, чем § 7.

Для решения первых 11 задач этого параграфа (задач 98—108), а также задач 113—115 достаточно знать содержание § 1. В решении задачи 109 существенно используется предложение задачи 30б) из § 3; поэтому, если читать этот параграф до § 3, то, прежде чем приступить к задаче 109, надо специально посмотреть задачу 30б) (можно просто прочитать по книге ее решение). Задачи 110, 111 и 116 предполагают знание материала, составляющего содержание первой части § 4 (включающей первые 11 задач). Наконец, для понимания части настоящего параграфа, напечатанной мелким шрифтом (включающей задачу 112), необходимо знание содержания всего § 4.

Кривые постоянной ширины (см. § 7) можно определить как такие выпуклые кривые, которые могут вращаться в квадрате, все время соприкасаясь со всеми его сторонами (см. выше, стр. 92, черт. 82, б). Можно также ставить вопрос о том, какими свойствами обладают выпуклые кривые, которые могут свободно вращаться внутри какого-нибудь другого многоугольника. В этом параграфе рассматриваются кривые, которые могут свободно вращаться в равностороннем треугольнике, соприкасаясь все время со всеми его сторонами (черт. 98, а), или, что то же самое, такие кривые, что все описанные вокруг них равносторонние треугольники равны между собой (черт. 98, б). Такие кривые мы будем называть Δ -кривыми (читается «дельта»-кривые). Простейшим примером Δ -кривой является окружность; другие примеры Δ -кривых содержатся в первых задачах настоящего параграфа. Высоту h равностороннего треугольника, описанного вокруг Δ -кривой, мы будем называть высотой Δ -кривой. Свойства Δ -кривых оказываются

очень похожими на свойства кривых постоянной ширины, и многие задачи этого параграфа напоминают задачи предыдущего.

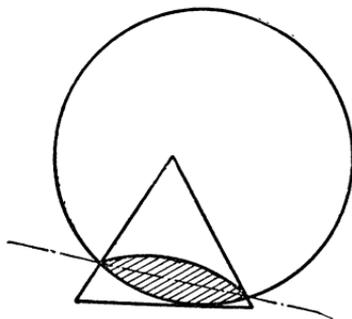
Конец параграфа посвящен некоторым обобщениям кривых постоянной ширины и Δ -кривых. Ряд предложений, относящихся



Черт. 98.

к кривым, обобщающим кривые постоянной ширины и Δ -кривые, приведен в тексте этого параграфа без доказательства; читателю рекомендуется попытаться самостоятельно доказать эти предложения.

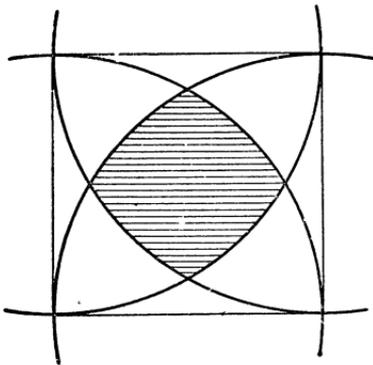
98. а) Окружность радиуса, равного высоте некоторого равностороннего треугольника, катится по стороне этого треугольника. Докажите, что дуга, высекаемая сторонами треугольника из окружности, равна 60° . Докажите также, что «линза», получаемая отражением этой дуги относительно стягивающей ее хорды (черт. 99), остается все время внутри треугольника. Кривую, ограничивающую эту линзу, мы будем в дальнейшем называть Δ -двуугольником; Δ -двуугольник является Δ -кривой.



Черт. 99.

Вычислите длину Δ -двуугольника высоты h и площадь, им ограниченную. Что больше: площадь, ограниченная окружностью радиуса $\frac{1}{3}h$, или площадь, ограниченная Δ -двуугольником высоты h ?

б) Докажите, что три перпендикуляра, восстановленных к сторонам равностороннего треугольника в точках их соприкосновения со вписанным в треугольник Δ -двуугольником, пересекаются в одной точке. Найдите также геометрическое место, которое описывает



Черт. 100.

этой точки, когда Δ -двуугольник вращается внутри равностороннего треугольника, и геометрическое место, которое описывает эта точка, когда равносторонний треугольник вращается, оставаясь все время описанным около неподвижного Δ -двуугольника.

99. а) Из четырех вершин квадрата со стороной h радиусом, равным его стороне, описаны четыре круга. Докажите, что кривая, ограничивающая фигуру, полученную в пересечении этих четырех кругов (черт. 100), есть Δ -кривая высоты h . Вычислите длину этой кривой и площадь, ею ограниченную.

б) Докажите, что три перпендикуляра к сторонам равностороннего треугольника, описанного вокруг рассматриваемой в задаче 99а) Δ -кривой, восстановленные в точках соприкосновения треугольника с кривой, пересекаются в одной точке. Найдите также геометрическое место, которое описывает эта точка пересечения перпендикуляров, когда рассматриваемая Δ -кривая вращается внутри равностороннего треугольника, а также геометрическое место, которое описывает эта точка, когда равносторонний треугольник вращается, оставаясь все время описанным около неподвижной Δ -кривой.

100. Пусть K — Δ -кривая и T — описанный вокруг нее равносторонний треугольник, стороны которого соприка-

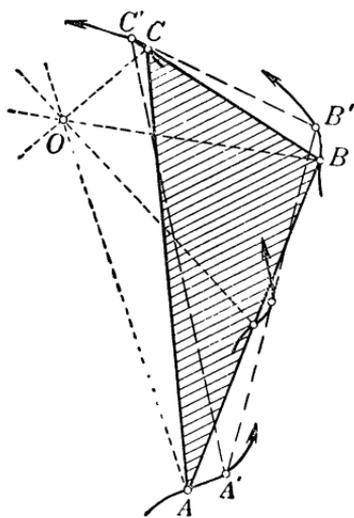
саются с кривой K в точках A, B, C . Докажите, что всякий равносторонний треугольник, описанный вокруг треугольника ABC , имеет длину стороны, не большую, чем длина стороны треугольника T .

101*. Докажите, что три перпендикуляра, восстановленных к сторонам равностороннего треугольника, описанного вокруг произвольной Δ -кривой K , в точках соприкосновения сторон этого треугольника с K , пересекаются в одной точке.

Теорема этой задачи обобщает предложения задач 986) и 996).

Теорема задачи 101 имеет простой кинематический смысл. В курсах механики показывается, что перпендикуляры к траекториям всех точек движущейся фигуры в каждый момент времени или параллельны между собой, или сходятся в одной точке, называемой мгновенным центром вращения фигуры (черт. 101). Если Δ -кривая вращается внутри равностороннего треугольника, все время касаясь его сторон, то, как легко видеть, траектории точек соприкосновения кривой со сторонами треугольника в каждый момент касаются соответствующих сторон треугольника. Следовательно, перпендикуляры к траекториям этих точек совпадают с перпендикулярами к сторонам треугольника; точка, о которой идет речь в задаче 101, есть мгновенный центр вращения Δ -кривой.

Кинематические представления позволяют дать простые доказательства и ряда других предложений, относящихся к Δ -кривым и родственным кривым (в частности, теоремы Барбье), и облегчают построение примеров таких кривых. Упрощение, которое может быть достигнуто при использовании этих представлений, хорошо иллюстрируется сопоставлением сказанного здесь с чисто геометрическим доказательством, приведенным в решении задачи 101.



Черт. 101.

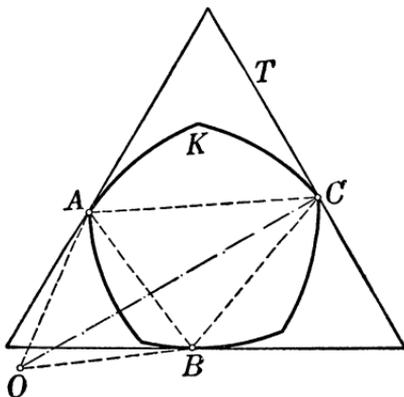
102. Докажите, что всякая опорная прямая Δ -кривой имеет с Δ -кривой только одну общую точку.

103. Докажите, что диаметр (см. выше, стр. 20) Δ -кривой K высоты h не может превосходить h . Если диаметр равен h , то K есть Δ -двуугольник.

104. Докажите, что никакая Δ -кривая не может иметь угловую точку с внутренним углом, меньшим 60° . Единственная Δ -кривая, имеющая угловую точку с внутренним углом в 60° , есть Δ -двуугольник.

105. Докажите, что единственной Δ -кривой, которая переходит в себя при повороте вокруг некоторой точки O на 120° , является окружность.

106. Пусть A, B, C — точки соприкосновения Δ -кривой K со сторонами описанного вокруг нее равностороннего треугольника T , O — вершина равностороннего треугольника ABO , по-



Черт. 102.

строенного на стороне AB вне треугольника ABC (черт. 102). Докажите, что длина отрезка OC равна высоте h Δ -кривой K .

107*. Постройте Δ -кривую высоты h , состоящую из пяти, семи или вообще любого числа, не делящегося на три, дуг окружностей радиуса h . Вычислите длину построенной кривой.

Составленные из дуг окружностей радиуса h Δ -кривые высоты h будут играть в дальнейшем изложении значительную роль (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 112—115).

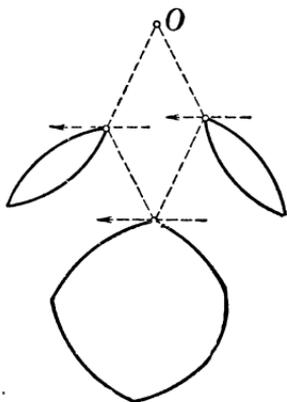
108*. Из рассмотрения $3 \cdot 2^n$ -угольников с равными углами, описанных вокруг произвольной Δ -кривой K высоты h и вокруг

окружности O радиуса $\frac{1}{3}h$, выведите теорему Барбье для Δ -кривых: *все Δ -кривые высоты h имеют одну и ту же длину, равную $\frac{2\pi h}{3}$.*

109.** Рассматривая $3 \cdot 2^n$ -угольники с равными углами, описанные вокруг произвольной Δ -кривой K высоты h , вокруг окружности O радиуса $\frac{1}{3}h$ и вокруг Δ -двуугольника D высоты h , докажите, что из всех Δ -кривых высоты h окружность ограничивает наибольшую площадь, а Δ -двуугольник — наименьшую площадь.

То, что из всех Δ -кривых заданной высоты h окружность ограничивает наибольшую площадь, следует также из изопериметрической задачи (см. § 5, задача 62) в силу теоремы Барбье для Δ -кривых (см. выше задачу 108).

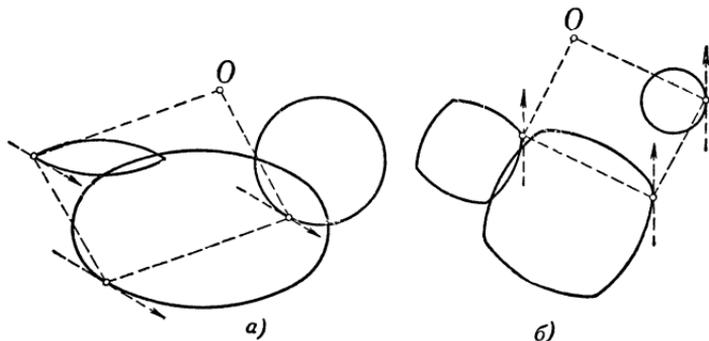
Так же как и в теории кривых постоянной ширины, в вопросах, связанных с Δ -кривыми, большую пользу могут принести



Черт. 103.

понятия, которым посвящен § 4. Из предложений задач 43 и 44 из § 4 непосредственно следует, что *сумма двух Δ -кривых также есть Δ -кривая*. Это предложение позволяет, исходя из каких-либо известных примеров Δ -кривых, строить новые примеры таких кривых. Так, например, на черт. 103 изображена

сумма двух равных Δ -двуугольников, повернутых друг относительно друга на угол 90° ; на черт. 104, *а* изображена сумма



Черт. 104.

Δ -двуугольника и окружности, на черт. 104, *б* — сумма кривой задачи 99 и окружности. Все эти кривые также являются Δ -кривыми.

110. Докажите, что сумма произвольной Δ -кривой K и кривых K' и K'' , получающихся из нее поворотом соответственно на углы 120° и 240° , является окружностью. Выведите отсюда новое доказательство теоремы Барбье для Δ -кривых (см. выше задачу 108).

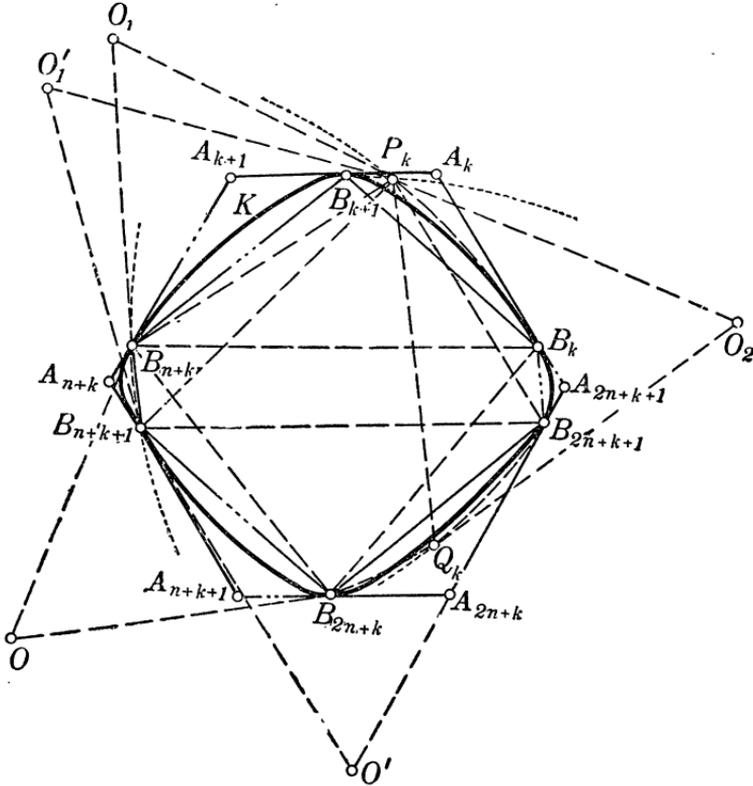
111. (Обратная задаче 110.) Докажите, что если сумма некоторой кривой K и кривых K' и K'' , получающихся из K поворотом соответственно на 120° и 240° , есть окружность, то K есть Δ -кривая.

Из задач 110 и 111 следует, что Δ -кривые можно определить как такие кривые, которые в сумме с кривыми, полученными из первоначальной поворотами соответственно на 120° и 240° , дают окружность. Из этого определения легко вывести все свойства Δ -кривых.

Для Δ -кривых тоже может быть доказана аппроксимационная теорема, подобная аппроксимационной теореме, которую мы доказали в теории кривых постоянной ширины (см. стр. 102). Именно, можно показать, что если K есть произвольная Δ -кривая высоты h , то

можно построить Δ -кривую K той же высоты h , состоящую из дуг окружностей радиуса h и сколь угодно близкую к кривой K . Доказательство этого предложения сходно с доказательством аналогичного предложения для кривых постоянной ширины.

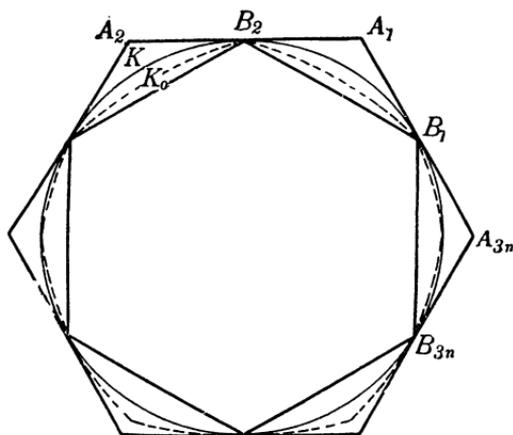
Рассмотрим такой описанный вокруг кривой K $3n$ -угольник $A_1A_2 \dots A_{3n}$, чго его 1-я, $(n+1)$ -я, $(2n+1)$ -я стороны, 2-я, $(n+2)$ -я,



Черт. 105.

$(2n+2)$ -я стороны и т. д. (т. е. стороны $A_kA_{k+1}, A_{n+k}A_{n+k+1}, A_{2n+k}A_{2n+k+1}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), $A_nA_{n+1}, A_{2n}A_{2n+1}, A_{3n}A_1$) образуют друг с другом углы в 60° (например, описанный $3n$ -угольник с равными углами). Точки соприкосновения сторон этого $3n$ -угольника с кривой K обозначим через B_1, B_2, \dots, B_{3n} . Покажем, что существует Δ -кривая высоты h , состоящая из дуг окружностей радиуса h , вписанная в многоугольник $A_1A_2 \dots A_{3n}$ и описанная вокруг $B_1B_2 \dots B_{3n}$.

Заменим одновременно дуги $B_k B_{k+1}$, $B_{n+k} B_{n+k+1}$ и $B_{2n+k} B_{2n+k+1}$ кривой K новыми кривыми, составленными из дуг окружностей радиуса h , при помощи следующего построения. На сторонах $B_{n+k} B_{2n+k}$ и $B_{n+k+1} B_{2n+k+1}$ треугольников $B_k B_{n+k} B_{2n+k}$ и $B_{k+1} B_{n+k+1} B_{2n+k+1}$ вне этих треугольников построим равнобедренные треугольники $B_{n+k} B_{2n+k} O$ и $B_{n+k+1} B_{2n+k+1} O'$ (черт. 105). Отрезок OB_k равен отрезку $O'B_{k+1}$ и равен h (см. задачу 106). Проведем из точек O и O' , как из центров, окружности радиуса h . Точку пересечения этих окружностей, расположенную с той же стороны линии центров OO' , что и точки B_k и B_{k+1} , обозначим через P_k . Построим теперь на



Черт. 106.

сторонах $P_k B_{n+k}$ и $P_k B_{n+k+1}$ треугольников $P_k B_{n+k} B_{2n+k}$ и $P_k B_{n+k+1} B_{2n+k+1}$ вне этих треугольников равнобедренные треугольники $P_k B_{n+k} O_1$ и $P_k B_{n+k+1} O'_1$. Так как $\triangle O_1 B_{n+k} B_{2n+k} = \triangle O P_k B_{n+k}$ и $\triangle O'_1 B_{n+k+1} B_{2n+k+1} = \triangle O' P_k B_{n+k+1}$, то $O_1 B_{2n+k} = O P_k = h$ и $O'_1 B_{2n+k+1} = O' P_k = h$.

Проведем теперь из точек O_1 и O'_1 , как из центров, окружности радиуса h . Точку пересечения этих окружностей, расположенную с той же стороны линии центров $O_1 O'_1$, что и точки B_{2n+k} и B_{2n+k+1} , обозначим через Q_k . Наконец, на общей стороне $P_k Q_k$ треугольников $P_k Q_k B_{n+k}$ и $P_k Q_k B_{n+k+1}$ построим вне этих треугольников равнобедренный треугольник $P_k Q_k O_2$; $O_2 B_{n+k} = O_1 Q_k = h$, $O_2 B_{n+k+1} = O'_1 Q_k = h$ ($\triangle O_2 B_{n+k} P_k = \triangle O_1 Q_k P_k$ и $\triangle O_2 B_{n+k+1} P_k = \triangle O'_1 Q_k P_k$); следовательно, мы можем соединить точки B_{n+k} и B_{n+k+1} дугой окружности радиуса h с центром в точке O_2 .

Заменим теперь дугу $B_k B_{k+1}$ кривой K дугами окружностей $B_k P_k$ и $P_k B_{k+1}$, дугу $B_{2n+k} B_{2n+k+1}$ кривой K — дугами окружностей $B_{2n+k} Q_k$ и $Q_k B_{2n+k+1}$ и дугу $B_{n+k} B_{n+k+1}$ — дугой окружности $B_{n+k} B_{n+k+1}$ с центром в точке O_2 . Нетрудно видеть, что полученная такой заменой новая кривая K' тоже будет Δ -кривой. Если описанный вокруг K' правильный треугольник будет касаться какой-либо из построенных дуг окружностей, то, как легко усмотреть, две другие стороны этого треугольника будут проходить через угловые точки кривой, и высота треугольника будет равна h (сравните с решением задачи 107).

Если произвести такую замену для каждой тройки дуг $B_k B_{k+1}$, $B_{n+k} B_{n+k+1}$, $B_{2n+k} B_{2n+k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и $B_n B_{n+1}$, $B_{2n} B_{2n+1}$, $B_{3n} B_{3n+1}$ кривой K , то мы приходим к Δ -кривой K_0 высоты h , состоящей только из дуг окружностей радиуса h , описанной вокруг многоугольника $B_1 B_2 \dots B_{3n}$ и вписанной в многоугольник $A_1 A_2 \dots A_{3n}$ (черт. 106).

Дальнейший ход доказательства не отличается от доказательства аппроксимационной теоремы для кривых постоянной ширины. Сама теорема формулируется следующим образом: *для каждой Δ -кривой K высоты h можно найти такую последовательность $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ Δ -кривых высоты h , состоящих из дуг окружностей радиуса h , что K есть предел этой последовательности.*

112. Выведите из аппроксимационной теоремы новое доказательство теоремы Барбье для Δ -кривых (см. выше задачу 108).

По аналогии с Δ -кривыми можно рассматривать также выпуклые кривые, которые могут свободно вращаться внутри правильного n -угольника, соприкасаясь все время со всеми его сторонами (n — здесь произвольное фиксированное целое число; при $n = 3$ мы приходим к Δ -кривым, а при $n = 4$ — к кривым постоянной ширины). Относительно этих кривых можно доказать ряд предложений, аналогичных предложениям, составляющим содержание задач настоящего параграфа. Так, например, можно доказать, что n перпендикуляров, восставленных к сторонам описанного вокруг такой кривой правильного n -угольника в точках соприкосновения его сторон с кривой K , пересекаются в одной точке¹⁾.

Рассматривая описанные вокруг кривой K и окружности O $n \cdot 2^k$ -угольники с равными углами, можно доказать, что *длина кривой K , могущей вращаться внутри правильного n -угольника, равна длине окружности, вписанной в этот n -угольник.*

¹⁾ См. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 109; наменченное там кинематическое доказательство теоремы задачи 101 переносится без изменений на более общий случай.

Последнее предложение может быть также просто получено, если использовать теорему о длине суммы выпуклых кривых. Действительно, вполне аналогично решениям задач 92 из § 7 и 110 из настоящего параграфа можно доказать, что *если кривая K может свободно вращаться внутри правильного n -угольника, соприкасаясь все время со всеми его сторонами, то сумма*

$$K + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(n-1)},$$

где кривая $K^{(1)}$ получается из K поворотом на угол $\frac{360^\circ}{n}$, кривая $K^{(2)}$ получается из K поворотом на угол $\frac{2 \cdot 360^\circ}{n}$, ..., наконец, $K^{(n-1)}$ получается из K поворотом на угол $\frac{(n-1) \cdot 360^\circ}{n}$, *есть окружность*¹⁾. Отсюда в силу того, что длина суммы нескольких кривых равна сумме их длин (см. § 4, стр. 59), сразу следует, что все кривые, которые могут свободно вращаться в некотором правильном n -угольнике, имеют одну и ту же длину (сравните с решениями задач 92 из § 7 и 110 из настоящего параграфа).

Следует отметить, что в противоположность теоремам, составляющим содержание задач 93 из § 7 и 111 из настоящего параграфа, из того, что сумма некоторой кривой K и $n-1$ кривых, получаемых из K соответственно поворотами на углы $\frac{360^\circ}{n}$, $\frac{2 \cdot 360^\circ}{n}$, ..., $\frac{(n-1) \cdot 360^\circ}{n}$, *есть окружность*, еще не следует, что кривая K может свободно вращаться внутри правильного n -угольника (см. ниже стр. 122).

Существует бесконечно много отличных от окружности кривых, которые могут свободно вращаться внутри правильного n -угольника, соприкасаясь все время со всеми его сторонами²⁾.

¹⁾ При доказательстве этой теоремы надо использовать следующее легко доказываемое предложение: *единственной кривой, которая может свободно вращаться в правильном n -угольнике и переходит сама в себя при повороте вокруг некоторой точки на угол $\frac{360^\circ}{n}$, является окружность*.

²⁾ Можно доказать, что *пр о и з в о л ь н а я* дуга выпуклой кривой, удовлетворяющая некоторым достаточно общим условиям, угол между касательными в конечных точках которой не больше $\frac{360^\circ}{n}$, может быть дополнена до выпуклой кривой подобного рода.

Однако при $n > 4$ простейшие примеры таких кривых становятся сложнее треугольника Релло или Δ -двуугольника. Неизвестно также, какая из кривых, могущих свободно вращаться внутри заданного правильного n -угольника, где $n > 4$, ограничивает наименьшую площадь.

Рассмотрим теперь еще одно обобщение кривых постоянной ширины и Δ -кривых.

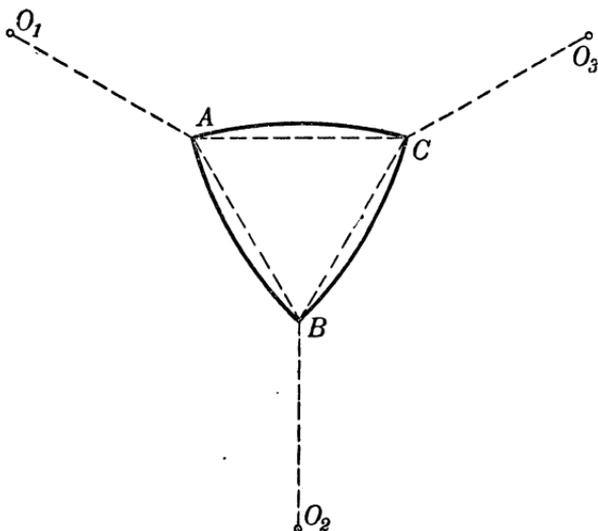
Очевидно, что вокруг произвольной выпуклой кривой K всегда можно описать прямоугольник с произвольно заданным направлением сторон (см. стр. 19). Кривые постоянной ширины можно определить как такие выпуклые кривые, для которых все описанные прямоугольники являются равными между собой квадратами (см. выше, стр. 92, в частности, черт. 82, *a*). Рассмотрим теперь выпуклые кривые, обладающие тем свойством, что все описанные вокруг них прямоугольники имеют один и тот же периметр¹⁾. Конечно, все кривые постоянной ширины обладают этим свойством. Однако имеется также много кривых, обладающих этим свойством, не являющихся кривыми постоянной ширины. Простейшие примеры таких кривых даны в последующих задачах 113 и 114. Оказывается, что эти кривые сохраняют некоторые свойства, присущие кривым постоянной ширины (см. в первую очередь задачу 115)²⁾.

1) Наиболее естественным обобщением кривых постоянной ширины явились бы такие кривые, для которых все описанные вокруг них прямоугольники были бы равны между собой, но отличались бы от квадратов; другими словами, такие кривые, которые могли бы свободно вращаться в некотором прямоугольнике, соприкасаясь все время со всеми его сторонами. Однако нетрудно убедиться, что таких кривых не существует.

Действительно, если кривая может свободно вращаться между двумя параллельными прямыми (сторонами некоторого прямоугольника), соприкасаясь с ними все время, то расстояние между каждой парой параллельных опорных прямых этой кривой должно быть равно расстоянию между рассматриваемыми параллельными прямыми. Следовательно, рассматриваемая кривая является кривой постоянной ширины, и все описанные вокруг нее прямоугольники являются квадратами.

2) В задаче 116 устанавливается связь этих кривых с кривыми постоянной ширины.

113. Высоты равностороннего треугольника продолжены за соответствующие вершины, и на их продолжениях отложены отрезки, равные стороне треугольника. Вершины треугольника соединены дугами, центрами которых являются полученные точки (черт. 107). Докажите, что все прямоугольники, описанные вокруг выпуклой кривой, образованной тремя проведенными дугами окружностей, имеют одинаковый периметр.



Черт. 107.

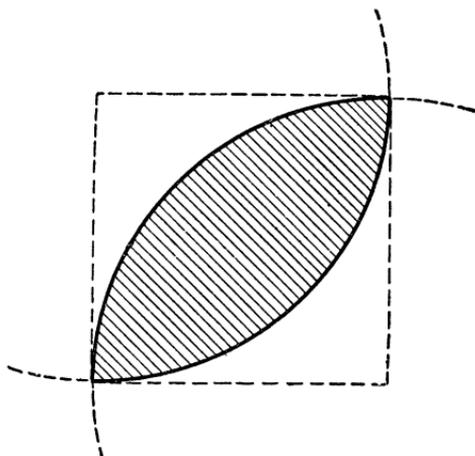
Вычислите длину этой кривой и площадь, ею ограниченную, если периметр описанного вокруг кривой прямоугольника равен $4l$.

114. Из двух противоположных вершин квадрата радиусом, равным его стороне, описаны два круга. Докажите, что периметры всех прямоугольников, описанных вокруг выпуклой фигуры, полученной в пересечении этих двух кругов (черт. 108), равны между собой. Вычислите длину кривой, ограничивающей эту фигуру, и площадь фигуры, если периметры прямоугольников, описанных вокруг нее, равны $4l$.

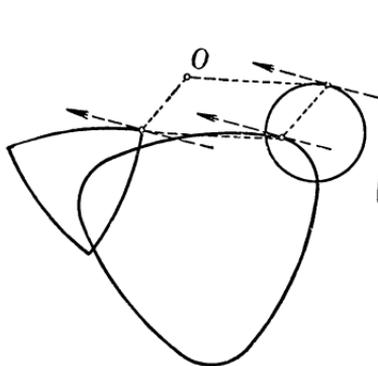
115*. (Обобщенная теорема Барбье.) Докажите, что если периметры всех прямоугольников, описанных вокруг выпуклой кривой K , равны одной и той же величине $4l$, то длина кривой K равна πl .

Из задач 43 и 44 § 4 следует, что если кривые K_1 и K_2 обладают тем свойством, что периметры всех прямоугольников, описанных вокруг каждой из них, равны между собой, то сумма $K = K_1 + K_2$ также обладает этим свойством.

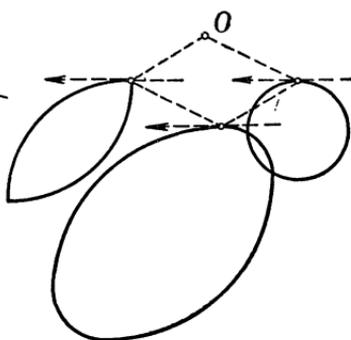
Это замечание позволяет, исходя из каких-либо таких кривых, что периметры всех прямоугольников, описанных вокруг каждой из этих кривых, одинаковы, строить



Черт. 108.



Черт. 109.

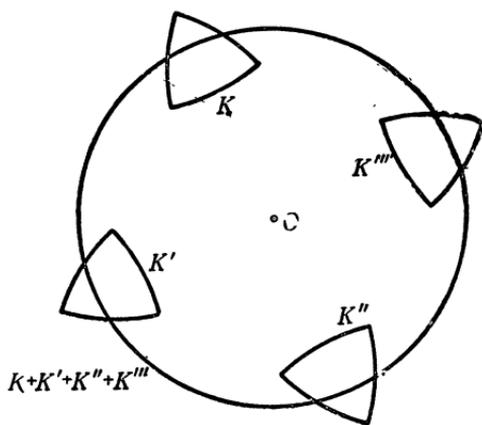


Черт. 110.

новые примеры таких кривых. Так, на черт. 109 изображена сумма кривой из задачи 113 и окружности, а на черт. 110 — сумма кривой из задачи 114 и окружности.

116. Докажите, что если периметры всех прямоугольников, описанных вокруг выпуклой кривой K , имеют одну и ту же величину, то сумма $K + K'$, где кривая K' получается из K поворотом на 90° , является кривой постоянной ширины; обратно, если $K + K'$ — кривая постоянной ширины (K' получается из K поворотом на 90°), то периметры всех прямоугольников, описанных вокруг выпуклой кривой K , равны между собой. Выведите отсюда новое доказательство обобщенной теоремы Барбье (см. выше задачу 115). Чему равна сумма $K + K'$, если K есть кривая из задачи 113 или кривая из задачи 114?

Таким образом, кривые, для которых все описанные прямоугольники имеют одинаковый периметр, можно также определить как такие кривые, которые дают в сумме с кривой, получающейся из первоначальной поворотом на 90° , кривую постоянной ширины. Используя определенное кривых постоянной ширины, приведенное на стр. 97, мы легко убедимся, что рассматриваемые кривые можно также определить как такие выпуклые кривые, которые дают окружность в сумме



Черт. 111.

с тремя кривыми, получающимися из первоначальной поворотами соответственно на 90° , 180° и 270° . Так, например, на черт. 111 кривые K , K' , K'' и K''' , из которых каждая последующая получается из предыдущей поворотом на 90° , в сумме дают окружность. Это определение вполне аналогично определению кривых постоянной ширины (см. стр. 97) и Δ -кривых (см. стр. 112).

Можно доказать, что каждую кривую K постоянной ширины h можно представить в виде суммы некоторой

кривой K_1 , такой, что периметры всех описанных вокруг K_1 прямоугольников равны $2h$, и кривой K'_1 , получающейся из K_1 поворотом на 90° . Это предложение доказывается довольно просто для кривых постоянной ширины h , состоящих только из дуг окружностей радиуса h ; общая теорема выводится из этого частного случая с помощью аппроксимационной теоремы (см. § 7, стр. 102)¹⁾.

Можно рассматривать также кривые K , обладающие тем свойством, что периметры всех описанных вокруг K n -угольников с равными углами (n — произвольное фиксированное целое число) равны между собой. При $n=4$ получаются кривые, рассматриваемые в задачах 113—116, а при $n=3$ получаются Δ -кривые, которым посвящены задачи 98—112 настоящего параграфа. Частным случаем таких кривых являются кривые, которые могут вращаться в правильном n -угольнике, соприкасаясь все время со всеми его сторонами (см. выше, стр. 115—117).

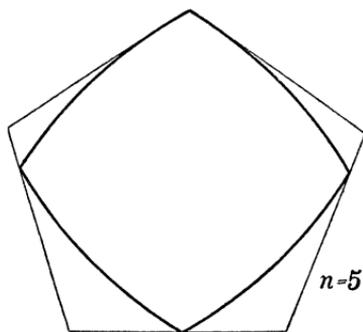
Существует бесконечно много выпуклых кривых, отличных от кривых, могущих вращаться в правильном n -угольнике и обладающих рассматриваемым свойством. Нетрудно построить простые примеры подобных кривых. Так, например, легко подсчитать, что периметры всех n -угольников с равными углами, описанных вокруг кривой, составленной из $n-1$ равных дуг окружностей, образующих между собой углы, равные углу правильного n -угольника (черт. 112), имеют одинаковую величину (при $n=4$ построенная кривая переходит в кривую из задачи 113, а при $n=3$ — в Δ -двуугольник, определенный в задаче 98). Также легко убедиться, что равны между собой периметры всех n -угольников с равными углами, описанных вокруг кривой, составленной из двух равных дуг окружностей, угловая мера которых равна

$$\frac{[3 + (-1)^n] \cdot 180^\circ}{2n} = \begin{cases} \frac{180^\circ}{n} & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ \frac{360^\circ}{n} & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}$$

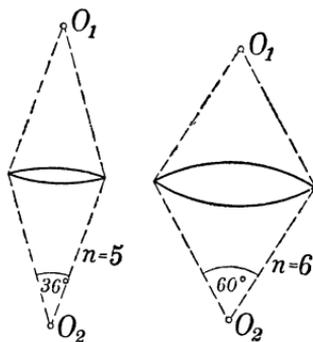
(черт. 113) (при $n=4$ эта кривая совпадает с кривой задачи 114, а при $n=3$ — с Δ -двуугольником). Представляется

¹⁾ При этом приходится воспользоваться также теоремой 1 дополнения I (стр. 126).

правдоподобным, что последняя кривая ограничивает меньшую площадь, чем любая другая кривая, обладающая рассматриваемым свойством, описанные вокруг которой n -угольники с равными углами имеют тот же самый периметр; было бы интересно доказать или опровергнуть это утверждение.



Черт. 112.



Черт. 113.

Рассматривая $n \cdot 2^k$ -угольники с равными углами, описанные вокруг кривой K , обладающей тем свойством, что периметры всех n -угольников с равными углами, описанных вокруг K , равны nl , нетрудно убедиться, что *длина K равна длине окружности, вписанной в правильный n -угольник со стороной l* (сравните с решением задачи 115).

Последнее предложение проще вывести из теоремы о длине суммы выпуклых кривых (см. § 4, стр. 59), используя следующее легко доказываемое предложение:

Для того чтобы периметры всех n -угольников с равными углами, описанных вокруг кривой K , были одинаковы, необходимо и достаточно, чтобы сумма кривой K и $n - 1$ кривых, получающихся из кривой K поворотом соответственно на углы $\frac{360^\circ}{n}$, $\frac{2 \cdot 360^\circ}{n}$, ..., $\frac{(n-1) \cdot 360^\circ}{n}$, была окружностью (сравните с задачами 110, 111 и 116).

Другое обобщение кривых постоянной ширины представляют выпуклые кривые, все описанные вокруг которых прямоугольники являются квадратами (не обязательно равными!). Простейшим примером такой

кривой, отличной от кривой постоянной ширины, может служить квадрат. Можно показать, что, для того чтобы все описанные вокруг кривой K прямоугольники являлись квадратами, необходимо и достаточно, чтобы K была суммой двух кривых $K_1 + K'_1$, где K'_1 получается из кривой K_1 поворотом на угол 90° ¹⁾. Так, например, квадрат есть сумма двух равных между собой взаимно перпендикулярных отрезков (см. задачу 37 из § 4). Если кривая K_1 обладает тем свойством, что периметры всех описанных вокруг нее прямоугольников равны, то сумма $K_1 + K'_1$ есть кривая постоянной ширины (см. выше задачу 116 и замечание на стр. 120—121).

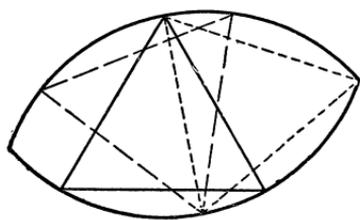
Можно также рассматривать кривые, которые могут вращаться внутри неправильного n -угольника, соприкасаясь все время со всеми его сторонами. Однако далеко не для всех n -угольников существуют такие кривые (см., например, подстрочное примечание на стр. 117). Можно показать, что для данного треугольника в том и только в том случае существуют отличные от окружности кривые, которые могут вращаться внутри треугольника, соприкасаясь все время со всеми его сторонами, если все углы треугольника соизмеримы²⁾. Этот результат является справедливым и для всех n -угольников, где n отлично от 4: если углы n -угольника ($n \neq 4$), в который можно вписать окружность, соизмеримы, то существует отличная от окружности кривая, которая может вращаться внутри этого n -угольника, соприкасаясь все

1) Совсем легко доказать, что если $K = K_1 + K'_1$, где K'_1 получается из K_1 поворотом на 90° , то любой прямоугольник, описанный вокруг K , является квадратом. Обратное предложение может быть несложно получено для того случая, когда K есть многоугольник, обладающий рассматриваемым свойством. Общее предложение может быть выведено из этого частного случая при помощи следующей аппроксимационной теоремы: для каждой кривой K , все описанные вокруг которой прямоугольники являются квадратами, можно найти такую последовательность многоугольников $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$, обладающих тем же свойством, что K есть предел этой последовательности (в смысле определения, данного в § 4, стр. 64).

2) См. заметку И. М. Каменецкого «Решение геометрической задачи Л. Люстерника» в журнале «Успехи математических наук», т. II, вып. 2, 1947, стр. 199—202 (доказательство не элементарно).

время со всеми его сторонами; если углы n -угольника несоизмеримы, то такой кривой не существует¹⁾. Для четырехугольников эта теорема уже не имеет места: независимо от того, соизмеримы или несоизмеримы углы ромба, существуют кривые, отличные от окружности, которые могут вращаться внутри этого ромба, соприкасаясь все время со всеми его сторонами (этим свойством будут обладать кривые постоянной ширины, равной высоте ромба).

В некотором смысле «двойственными» для Δ -кривых являются кривые, внутри которых может вращаться правиль-



Черт. 114.

выпуклые кривые, внутри которых может вращаться правильный треугольник (невыпуклых кривых такого рода

ный треугольник, так что все его вершины скользят по кривой. Нетрудно показать, что этим свойством обладает, например, изображенная на черт. 114 кривая, составленная из двух равных дуг окружностей с центральным углом 120° . Можно думать, что эта кривая и окружность — единственные

¹⁾ Сформулированный результат кажется на первый взгляд удивительным; однако аналогичное положение довольно часто встречается в подобных вопросах. В качестве еще одного примера укажем следующую задачу, близкую к некоторым частным случаям общей задачи Л. А. Люстерника, о которой пойдет речь ниже: *найти все выпуклые кривые, которые видны из всех точек фиксированной окружности C под постоянным углом α* . Оказывается, что в случае, когда угол α несоизмерим с π , единственной такой кривой является окружность, концентрическая с окружностью C . Так же обстоит

дело, если $\alpha = \frac{m}{n} \pi$ ($\frac{m}{n}$ — несократимая дробь), где числа m и n

оба нечетные. Если же одно из двух чисел m и n четно, то имеется бесконечно много кривых, обладающих рассматриваемым свойством и отличных от окружности. Наибольшую длину среди всех этих кривых имеет окружность, а наименьшую — некоторый

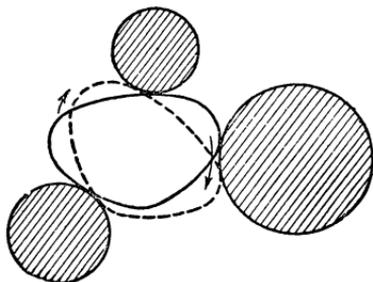
n -угольник, составленный из дуг эллипсов (в случае $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ этот

n -угольник вырождается в дважды взятый отрезок — диаметр окружности C).

существует бесконечно много); это предложение было бы интересно доказать или опровергнуть.

Относительно кривых, внутри которых может вращаться какой-либо треугольник, отличный от равностороннего, так же как и относительно кривых, внутри которых может вращаться какой-либо n -угольник, где $n > 3$, не известно, повидимому, совсем ничего.

Обобщением задачи о кривых, которые могут вращаться в треугольнике, соприкасаясь со всеми его сторонами, и задачи о кривых, внутри которых может вращаться треугольник, является вопрос, поставленный недавно Л. А. Люстерником¹⁾. Л. А. Люстерник спрашивает об условиях существования выпуклой фигуры, которая может свободно вращаться, соприкасаясь все время с тремя заданными на плоскости окружностями (черт. 115). При этом некоторые из окружностей могут об-



Черт. 115.

ращаться в прямые («окружности бесконечно большого радиуса») или точки («окружности нулевого радиуса»). Если вместо трех окружностей рассматривать три прямые, то мы приходим к задаче о кривых, которые могут вращаться внутри треугольника; если вместо трех окружностей рассматривать три точки, то мы приходим к задаче о кривых, внутри которых может вращаться треугольник. Полное решение задачи Л. А. Люстерника (которая имеет практическое значение в технике измерений) является, вероятно, очень трудным.

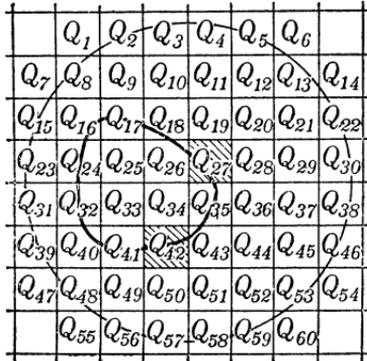
¹⁾ «Успехи математических наук», т. I, вып. 3—4, 1946.

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОЙ КРИВОЙ

Докажем следующее важное предложение, которое можно назвать «принципом предельной кривой».

Теорема 1. *Если имеется бесконечно много выпуклых кривых, которые заключены все внутри некоторого круга, то из них всегда можно выбрать такую последовательность кривых $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$, которая будет иметь предел.* При этом предельном выбранной последовательности может оказаться либо выпуклая кривая, либо отрезок, либо точка.

Доказательство. Обозначим через L все множество рассматриваемых выпуклых кривых и пусть O — круг, внутри которого они расположены. Разобьем плоскость на квадраты со стороной



Черт. 116.

$\frac{1}{8}$ и обозначим через Q_1, Q_2, \dots, Q_r те из квадратов, которые имеют общие точки с кругом O . Обозначим, далее, через $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_r)$ множество тех из рассматриваемых кривых, которые имеют общие точки с каждым из квадратов $Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_r$, но не имеют общих точек с остальными квадратами. Ясно, что каждая из рассматриваемых кривых принадлежит некоторому множеству $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_r)$. Например, на черт. 116 кривая имеет общие точки только с квадра-

тами 16, 17, 18, 24, 26, 27, 32, 35, 40, 41, 42, 43. Ясно, далее, что некоторые множества $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ могут оказаться совсем не содержащими ни одной кривой. Например, множество $L(Q_{27}, Q_{42})$ совсем не содержит кривых, ибо выпуклая кривая не может состоять из двух отдельных кусков.

Множество $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ лишь конечное число. Действительно, существует ровно C_r^1 множеств, состоящих из кривых, расположенных целиком в одном квадрате, ровно C_r^2 множеств, кривые которых расположены в двух квадратах, и т. д. Итого имеется

$$C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^r = 2^r - 1$$

множеств $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$, из которых, однако, многие совсем не содержат кривых. Отсюда следует, что по крайней мере в одном из множеств $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ имеется бесконечно много кривых. В самом деле, если бы каждое множество $L(Q_\alpha, Q_\beta, \dots, Q_\rho)$ содержало лишь конечное число кривых, то и всего во всех этих множествах вместе было бы лишь конечное число кривых, между тем как нам было задано бесконечно много кривых.

Итак, некоторое множество $L(Q_{\alpha_0}, Q_{\beta_0}, \dots, Q_{\rho_0})$ содержит бесконечно много кривых. Обозначим это множество через L_1 . Если K' и K'' — две кривые, принадлежащие множеству L_1 , то расстояние между ними меньше $\frac{1}{4}$. Действительно, если A — любая точка кривой K' , а Q_β — тот квадрат, в котором эта точка расположена, то на кривой K'' имеется точка B , также расположенная в Q_β , ибо K' и K'' принадлежат одному множеству $L_1 = L(Q_{\alpha_0}, Q_{\beta_0}, \dots, Q_{\rho_0})$. Значит, на кривой K'' имеется точка B , расстояние которой от A не больше, чем $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$ (диагональ квадрата со стороной $\frac{1}{8}$). Таким образом, все точки кривой K' лежат в $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ -окрестности кривой K'' . Сама кривая K'' тоже лежит в $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ -окрестности кривой K' , так что расстояние между этими кривыми не больше $\frac{1}{8}\sqrt{2}$, т. е. по-прежнему меньше $\frac{1}{4}$.

Пусть K_1 — любая кривая множества L_1 , а $K_1^* = K_1 + O_{\frac{1}{2}}$ — сумма этой кривой с окружностью радиуса $\frac{1}{2}$, т. е. внешняя кривая, ограничивающая $\frac{1}{2}$ -окрестность кривой K_1 . Тогда любая кри-

вая K' из L_1 расположена внутри K_1^* вместе со своей $\frac{1}{4}$ -окрестностью (ибо любая кривая K' из L_1 лежит целиком внутри суммы кривой K_1 с окружностью радиуса $\frac{1}{4}$).

Разобьем теперь плоскость на квадраты со стороной $\frac{1}{16}$ и обозначим через Q'_1, Q'_2, \dots те из них, которые имеют общие точки с кругом O . Так же как и раньше, образуем множества $L_1(Q'_\alpha, \dots, Q'_\rho)$ тех кривых из L_1 , которые пересекаются с квадратами $Q'_\alpha, \dots, Q'_\rho$ и не имеют общих точек с другими квадратами. Выберем из этих множеств некоторое содержащее бесконечно много кривых и обозначим его через L_2 . Как и прежде, мы докажем, что расстояние двух любых кривых из L_2 не больше $\frac{1}{8}$ (так как квадраты взяты вдвое меньшего размера). Выбрав какую-либо кривую K_2 из L_2 и обозначив через K_2^* сумму $K_2 + O_{\frac{1}{4}}$ этой кривой с окружностью радиуса $\frac{1}{4}$, мы получим, что все кривые из L_2 заключены вместе с их $\frac{1}{8}$ -окрестностями внутри K_2^* . При этом, так как K_2 есть кривая из множества L_1 (ибо все множество L_2 есть часть множества L_1), то K_2 лежит вместе со своей $\frac{1}{4}$ -окрестностью внутри K_1^* , т. е. K_2^* лежит целиком внутри K_1^* .

Затем мы разобьем плоскость на квадраты со стороной $\frac{1}{32}$ и продолжим то же построение. Тогда мы получим множество L_3 , из которого выберем любую кривую K_3 , и обозначим через K_3^* сумму кривой K_3 с окружностью радиуса $\frac{1}{8}$. Тогда K_3^* лежит внутри кривой K_2^* .

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ кривых из L и последовательность вспомогательных кривых $K_1^*, K_2^*, \dots, K_n^*, \dots$. При этом K_1^* заключает внутри себя кривую K_2^* , последняя заключает внутри себя K_3^* и т. д., а расстояние между K_n и K_n^* равно $\frac{1}{2^n}$, ибо K_n^* есть сумма кривой K_n и окружности радиуса $\frac{1}{2^n}$.

Обозначим через Φ_n^* выпуклую фигуру, ограниченную кривой K_n^* , и покажем, что *существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем фигурам $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \dots, \Phi_n^*, \dots$* Проведем ко всем фигурам Φ_n^* параллельные между собой и одинаково направленные опорные прямые l_n и обозначим через Π_n полуплоскость, лежащую слева от l_n , т. е. ту полуплоскость, в которой лежит фигура Φ_n^* . Пересечение всех полуплоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n, \dots$ есть некоторая полуплоскость Π , ограниченная прямой l , параллельной всем прямым $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ Ясно, что прямая l пересекается с каждой из фигур Φ_n^* , так что Φ_1^* высекает на прямой l некоторый отрезок M_1 , Φ_2^* высекает некоторый отрезок M_2 и т. д. При этом M_1 содержит целиком отрезок M_2 , последний содержит M_3 и т. д. Общая точка всех этих отрезков будет и общей точкой всех фигур $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \dots$

Для доказательства того, что имеется точка, общая всем отрезкам M_n , рассмотрим луч N_1 , расположенный слева от правого конца отрезка M_1 , луч N_2 , расположенный слева от правого конца отрезка M_2 , и т. д. Каждый из этих лучей есть выпуклая фигура, причем N_1 содержит луч N_2 , последний заключает в себе N_3 и т. д. Пересечение всех этих лучей есть выпуклая фигура, ограниченная с одной стороны, т. е. луч. Нетрудно видеть, что конец C этого луча принадлежит всем отрезкам M_1, M_2, \dots Итак, фигуры $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \dots, \Phi_n^*, \dots$

имеют общую точку, и можно говорить о пересечении всех этих фигур, которое мы обозначим через Φ^* . Граница K^* этой фигуры может быть либо выпуклой кривой (если Φ^* — двумерная выпуклая фигура), либо отрезком, либо точкой.

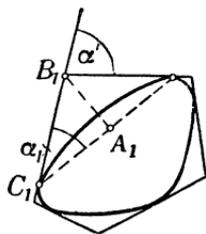
Нетрудно видеть, что прямая l , рассмотренная выше, является опорной прямой фигуры Φ^* . Действительно, мы видели, что на этой прямой имеются точки фигуры Φ^* (например, точка C). Далее, так как каждая фигура Φ_n^* лежит левее прямой l_n , т. е. в полуплоскости Π_n , то пересечение Φ^* всех этих фигур лежит в полуплоскости Π , являющейся пересечением полуплоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n, \dots$, т. е. слева от прямой l . Итак, прямая l — опорная. Отсюда следует, что если l' есть прямая, параллельная и одинаково направленная с l , но расположенная справа от нее, то, начиная с некоторого n , все фигуры Φ_n^* будут расположены слева от l' . В самом деле, точки прямой l' не лежат в полуплоскости Π , так что прямая l' будет принадлежать не всем полуплоскостям Π_n , т. е., начиная с некоторого значения n , полуплоскости Π_n , а вместе с ними и фигуры Φ_n^* будут лежать левее прямой l .

Выберем теперь произвольное расстояние ϵ , и пусть P — описанный вокруг K^* многоугольник с настолько малыми внешними

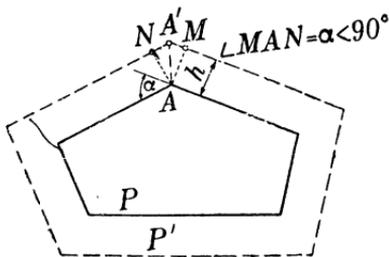
углами, что расстояние между P и K^* меньше $\frac{\varepsilon^1}{2}$. Пусть, далее, P' — многоугольник со сторонами, параллельными сторонам P , и заключающий P внутри себя, причем предположим, что стороны P' настолько мало отстоят от сторон P , что расстояние между P и P' также меньше $\frac{\varepsilon^2}{2}$, так что расстояние между K^* и P' меньше ε (см. задачу 51 из § 4, стр. 64).

Обозначим через l'_1, l'_2, \dots, l'_k все стороны многоугольника P' . Тогда существует такое n_1 , что при n , больших n_1 , все фигуры Φ_n^* лежат левее прямой l'_1 ; существует, далее, такое n_2 , что при n , больших n_2 , все фигуры Φ_n^* лежат левее прямой l'_2 и т. д. Таким образом, при n , больших, чем все числа n_1, n_2, \dots, n_k , фигуры Φ_n^* будут лежать левее всех прямых l'_1, l'_2, \dots, l'_k , т. е. внутри многоугольника P' , и потому подавно в ε -окрестности кривой K^* . Итак, начиная с некоторого n , все кривые K_n^* отстоят от K^* менее, чем на ε , т. е. *последовательность кривых $K_1^*, K_2^*, \dots, K_n^*$ имеет пределом кривую K^** .

1) Расстояние между выпуклой кривой и описанным вокруг нее многоугольником меньше $d \cdot \operatorname{tg} \alpha$, где d — диаметр кривой, а α — наибольший внешний угол многоугольника. Действительно, на черт. 117 отрезок A_1B_1 равен $C_1A_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$, причем так как точки C_1 и A_1 суть точки выпуклой фигуры, то $C_1A_1 \leq d$ и, кроме того, $\alpha_1 < \alpha' \leq \alpha$.



Черт. 117.



Черт. 118.

2) Если все внешние углы многоугольника P меньше 90° , а стороны многоугольника P' отстоят от соответствующих сторон многоугольника P на расстоянии h , то расстояние между P и P' меньше $h\sqrt{2}$ (черт. 118). Если K^* — отрезок или точка, то за P' можно взять достаточно близкий к K^* прямоугольник.

Докажем теперь, что K^* является пределом также и для последовательности кривых $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$. Пусть n_ϵ — такое число, что при $n > n_\epsilon$ расстояние между K^* и K_n меньше $\frac{\epsilon}{2}$. Мы можем также предположить n_ϵ настолько большим, что при $n > n_\epsilon$ $\frac{1}{2n} < \frac{\epsilon}{2}$, откуда следует, что расстояние между K_n^* и K_n меньше $\frac{\epsilon}{2}$ при $n > n_\epsilon$.

Таким образом, расстояние между кривыми K^* и K_n меньше ϵ , если n больше n_ϵ , т. е. последовательность $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ имеет пределом кривую K^* (которая может быть выпуклой кривой, отрезком или точкой). Теорема доказана.

Частным случаем доказанной теоремы является следующее предложение, которое получается, если все выпуклые кривые превращаются в точки:

Теорема 2. (Теорема Больцано-Вейерштрасса.) *Если внутри некоторого круга взято бесконечно много точек, то из них всегда можно выбрать такую последовательность точек, которая будет иметь предел.*

Приведенные теоремы позволяют в некоторых случаях доказать существование выпуклой фигуры, обладающей тем или иным свойством (однако только на основании этих теорем мы не можем ничего сказать о форме этой фигуры). Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1 (к стр. 72). *Доказать, что среди всех выпуклых кривых периметра 1 существует кривая наибольшей площади.*

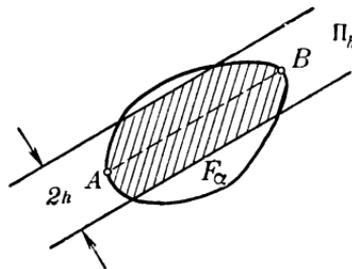
Решение. Возьмем произвольную выпуклую фигуру F периметра 1, и пусть ее площадь равна S . Выберем фиксированную прямую l и на ней точку O и отложим вправо от точки O отрезок OM , длина которого (в определенных единицах длины) равна S . Таким образом, каждой выпуклой фигуре периметра 1 мы поставим в соответствие некоторую точку M прямой l ; чем больше площадь F , тем правее расположена точка M на прямой l . Если взять точки M для всех выпуклых кривых периметра 1, то они заполнят на прямой l некоторое множество Φ .

Докажем, что это множество является одномерной выпуклой фигурой. Действительно, если M — точка множества Φ и α — длина отрезка OM (т. е. существует фигура F_α периметра 1 и площади α), а N — точка отрезка OM , так что длина отрезка ON равна $\beta < \alpha$, то точка N также принадлежит множеству Φ (т. е. существует выпуклая фигура периметра 1 и площади β).

Для доказательства рассмотрим две точки A и B фигуры F_α , и пусть Π_h — полоса, заключенная между двумя прямыми, параллельными прямой AB и расположенными на расстоянии h от нее (черт. 119). При больших h пересечение фигур F_α и Π_h есть вся фигура F_α , т. е. имеет отношение площади к квадрату периметра,

равное α . При малых h площадь этого пересечения как угодно мала, а периметр близок к удвоенной длине хорды AB , так что отношение площади к квадрату периметра как угодно мало. Из соображений непрерывности (§ 3) следует, что при некотором h отношение площади к квадрату периметра для пересечения F_α и Π_h будет равно β . Увеличивая это пересечение подобно, так чтобы его периметр стал равен 1, мы получим фигуру F_β площади β , откуда следует, что точка N принадлежит множеству Φ .

Итак, множество Φ — выпуклая фигура. Так как множество Φ , кроме того, ограничено (не существует фигур периметра 1 и как



Черт. 119.

угодно большой площади — см. стр. 71), то Φ есть отрезок прямой l , левым концом которого является точка O , а правым — некоторая точка M^* (см. § 1, стр. 17). Пусть α^* — длина отрезка OM^* , тогда для любого положительного $\alpha < \alpha^*$ существует выпуклая фигура периметра 1 и площади α . Выберем такие выпуклые фигуры F_n периметра 1, чтобы площадь F_n равнялась $\alpha^* - \frac{1}{n}$, и расположим все эти фигуры в круге радиуса 1. Тогда согласно теореме 1 существует подпоследовательность F_{n_1}, F_{n_2}, \dots выбранных фигур, для которых имеется предел F^* . На основании доказанного в § 4 (см. стр. 65) мы заключаем, что периметр фигуры F^* равен 1, а площадь равна α^* , т. е. что F^* — наибольшая по площади выпуклая фигура периметра 1.

Доказанное предложение ничего не говорит о форме этой наибольшей фигуры. Однако оно дополняет рассуждения Штейнера до строгого решения изопериметрической задачи (см. § 5, задачи 55а), 60 и 61). Действительно, никакая отличная от круга фигура не может быть максимальной, а так как по доказанному наибольшая фигура существует, то ею является круг.

Задача 2 (к стр. 32). *Доказать, что теорема Хелли справедлива для бесконечного числа ограниченных выпуклых фигур.*

Решение. Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ — ограниченные выпуклые фигуры, каждые три из которых имеют общую точку. Согласно

задаче 14 из § 2 отсюда следует, что каждые n из этих фигур имеют общую точку. Пусть A_3 — общая точка фигур F_1, F_2 и F_3 , A_4 — общая точка фигур F_1, F_2, F_3 и F_4, \dots , A_n — общая точка фигур F_1, F_2, \dots, F_n и т. д. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса (именно здесь мы пользуемся ограниченностью фигур $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$, так как иначе множество точек A_n могло бы не уместиться ни в каком круге) из последовательности точек $A_3, A_4, \dots, A_n, \dots$ можно выбрать подпоследовательность $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}, \dots$, имеющую предел. Докажем, что *точка A , являющаяся этим пределом, принадлежит всем фигурам $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$*

Предположим, например, что A не принадлежит фигуре F_m , т. е. не является ни ее внутренней, ни граничной точкой. Тогда вокруг точки A можно описать круг K_r некоторого радиуса r , целиком лежащий вне фигуры F_m . Из последовательности чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ выберем настолько большое число n_t , что $n_t > m$ и точка A_{n_t} лежит от A на расстоянии, меньшем r . Тогда точка A_{n_t} принадлежит всем фигурам $F_1, F_2, \dots, F_m, \dots, F_{n_t}$ и лежит внутри K_r , что, однако, противоречит тому, что F_m не имеет точек внутри круга K_r . Полученное противоречие доказывает, что точка A принадлежит всем фигурам $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$

Задача 3 (к стр. 75). *Доказать, что существует описанная окружность заданной ограниченной фигуры F , т. е. что среди всех окружностей, заключающих F внутри себя, существует наименьшая.*

Решение. Пусть C — окружность, заключающая F внутри себя, r — ее радиус. Выберем фиксированную прямую l и на ней точку O и отложим на прямой l вправо от O отрезок OM , равный r . Таким образом, каждой окружности, заключающей F внутри себя, соответствует некоторая точка M на прямой l . Рассматривая точки M , соответствующие всем окружностям, заключающим F , мы получим некоторое множество Φ на прямой l . Если M принадлежит Φ , то и всякая точка, лежащая правее M , принадлежит Φ . Действительно, если окружность радиуса r содержит F внутри себя, то любая окружность, концентричная с первой и имеющая радиус, больший r , подавно заключает F внутри себя. Отсюда следует, что Φ есть выпуклая одномерная фигура, а именно луч, исходящий из некоторой точки M^* прямой l ; M^* — самая левая точка луча Φ . Пусть отрезок OM^* равен r^* . Для любого $r > r^*$ существует окружность радиуса r , заключающая F внутри себя. Докажем, что *существует окружность радиуса r^* , заключающая F внутри себя.*

Действительно, пусть C_n — окружность радиуса $r^* + \frac{1}{n}$, заключающая F внутри себя ($n = 1, 2, \dots$). Из последовательности окружностей $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ можно согласно теореме 1 выбрать подпоследовательность, имеющую предел. Пусть C^* — предел этой подпоследовательности; тогда C^* есть окружность (см. задачу 53 из § 4). При этом, так как F заключается внутри каждой из окружностей

$C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, то ясно, что фигура F не выходит за пределы также и «предельной кривой» C^* . Радиус окружности C^* , очевидно, равен r^* ; последнее легко следует, например, из того, что длина окружности C^* равна пределу длин окружностей C_n (см. выше, стр. 65).

Совершенно аналогично решается

Задача 4 (к стр. 76). *Доказать, что существует вписанная окружность заданной выпуклой фигуры F , т. е. среди всех окружностей, заключающихся внутри F , существует наибольшая.*

Задача 5 (к стр. 20). *Пусть F — ограниченная фигура. Доказать, что существуют две такие точки A, B этой фигуры, что длина отрезка AB больше (или в крайнем случае равна) расстоянию между любыми другими двумя точками фигуры F .*

Решение. Выберем фиксированную прямую l и на ней точку O и будем откладывать на прямой l вправо от O отрезки OM , длины которых равны расстояниям между парами точек фигуры F . Все такие точки M образуют на прямой l некоторое множество, которое является (так же как и в задачах 1, 3) отрезком OD прямой l . Пусть d — длина этого отрезка.

Выберем такие точки A_n, B_n фигуры F , расстояние между которыми равно $d - \frac{1}{n}$. Из последовательности точек $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ можно выбрать сходящуюся последовательность $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}, \dots$. Соответствующая последовательность $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots, B_{n_k}, \dots$, выбранная из последовательности $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$, может быть несходящейся. Однако, выбрав из этой последовательности сходящуюся последовательность $B_{m_1}, B_{m_2}, \dots, B_{m_k}, \dots$ и рассмотрев соответствующую последовательность $A_{m_1}, A_{m_2}, \dots, A_{m_k}, \dots$, мы получим две сходящиеся последовательности точек, имеющие предел и выбранные соответственно из последовательностей $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ и $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$. Пусть A, B — пределы этих последних двух последовательностей. Нетрудно видеть, что расстояние между точками A и B равно d .

Остается доказать, что обе точки A, B принадлежат фигуре F . Докажем это, например, для A . Пусть p — произвольное натуральное число, A_{m_i} — такая точка последовательности $A_{m_1}, A_{m_2}, \dots, A_{m_k}, \dots$, что расстояние между A и A_{m_i} меньше $\frac{1}{p}$. Точка A_{m_i} принадлежит фигуре F , следовательно, как угодно близко к A имеются точки фигуры F , а значит, точка A тоже принадлежит фигуре F (см. дополнение II, свойство 1).

Приведем формулировки еще двух задач, решаемых совершенно аналогично.

Задача 6 (к стр. 33). *Пусть Φ — ограниченная фигура. Можно провести две такие параллельные опорные прямые фигуры Φ , что расстояние между ними меньше (или в крайнем случае равно) расстоянию между любыми другими двумя параллельными опорными прямыми фигуры Φ .*

Задача 7 (к решению задачи 23, стр. 167). *Если Φ_1 и Φ_2 — две выпуклые фигуры, по крайней мере одна из которых ограни-*

чена, то существуют такие точки A_1, A_2 соответственно фигур Φ_1, Φ_2 , что длина отрезка A_1A_2 меньше (или в крайнем случае равна) длины любого другого отрезка, соединяющего точку фигуры Φ_1 с точкой фигуры Φ_2 .

Заметим, наконец, что из теоремы 1 часто вытекает существование наибольшей (или наименьшей) фигуры, но никогда нельзя сделать заключения о единственности этой фигуры. Так, например, описанная окружность фигуры Φ всегда единственна (см. задачу 67 из § 6, стр. 75), но вписанных окружностей может существовать много (см. стр. 76, черт. 68).

О ПОНЯТИЯХ ВЫПУКЛОЙ И НЕВЫПУКЛОЙ ФИГУР

В § 1 мы определили те условия, при которых плоская фигура называется выпуклой. Но что следует понимать под плоской фигурой? Настоящее добавление посвящено разъяснению того смысла, который приписывают авторы слову «фигура».

С самой общей точки зрения можно было бы понимать под «фигурой» произвольно заданное на плоскости множество точек. Задать множество точек — это значит указать закон, который позволяет точно ответить на вопрос, принадлежит ли произвольно выбранная точка этому множеству или нет. Так, причисляя к множеству все точки, лежащие внутри некоторой окружности, мы получим круг (без границы), а если мы к множеству причислим, кроме того, и все точки окружности, то получим уже другое множество (круг вместе с границей).

Заданное на плоскости множество выпукло, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь соединяющий их отрезок. Круг, взятый вместе с границей, так же как и круг без границы, есть выпуклое множество. Более того, присоединив к кругу лишь часть точек его границы, мы получим выпуклое множество. Но геометрически все эти множества представляются одной фигурой; для геометрии достаточно поэтому рассмотреть одну из них, например круг, взятый вместе со своей границей. Кроме того, если бы мы рассматривали произвольные выпуклые множества (к которым не обязательно причисляются все их граничные точки), то формулировки целого ряда предложений значительно усложнились бы (например, «опорная прямая» могла бы совсем не пересекаться с фигурой). Поэтому в этой книге фигурой мы называем только такие множества, которые имеют следующее

Свойство I. Если множество M есть «фигура», то все его граничные точки причисляются к множеству M .

При этом внутренние точки произвольного множества M и внешние по отношению к этому множеству точки определяются так же, как и в § 1 (стр. 15); все же остальные точки (независимо от того, принадлежат они M или нет) являются граничными точками M .

При рассмотрении выпуклых фигур всегда в нашей книге предполагается, что они обладают свойством I (ср. § 1, стр. 15). При рассмотрении невыпуклых фигур это свойство также предполагается выполненным, так же как и следующее

Свойство II. Если A — граничная точка, фигуры F и K — круг с центром в точке A (он может быть взят как угодно малым!), то внутри K имеются как внутренние точки фигуры F , так и внешние по отношению к этой фигуре точки.

Круг и лежащая вне его точка A дают пример множества, обладающего свойством I, но не обладающего свойством II: точка A является граничной точкой этого множества, но вблизи нее совсем нет внутренних точек рассматриваемого множества.

Однако даже в том случае, если мы ограничимся только множествами, обладающими свойствами I и II (и даже теми из них, которые связаны, т. е. состоят из одного куска), наше определение «фигуры» будет слишком широким (хотя уже многие предложения о невыпуклых фигурах, например задачи 5, 9 из § 1, будут справедливы, ибо при их доказательстве используются только свойства I и II). Среди множеств, обладающих свойствами I—II, существуют, например, такие, что три различных множества имеют одну и ту же границу, т. е. к этой общей границе, так сказать, «с трех сторон» примыкают эти три множества¹⁾. Кроме того, среди множеств, удовлетворяющих свойствам I—II, имеются, например, такие, как кольцо (часть плоскости, расположенная между двумя концентрическими окружностями), граница которого состоит из двух отдельных кривых. Эти факты не могут иметь места для выпуклых фигур, и, поскольку невыпуклые фигуры интересуют нас лишь с точки зрения сравнения их с выпуклыми фигурами, для нас имеет смысл исключить множества, подобные описанным выше. Поэтому мы ограничиваемся в нашей книге рассмотрением таких фигур, которые имеют

Свойство III. Граница фигуры F состоит из одной простой кривой (замкнутой, если фигура ограничена, и могущей уходить концами в бесконечность, если F — неограниченная фигура).

Мы не можем, оставаясь в рамках этой книги, точно определить, что такое простая кривая²⁾. Наглядно простая кривая представляется линией, получаемой непрерывным движением карандаша и не пересекающей самой себя.

Мы предполагали в этой книге, что (если не оговорено противное) фигура есть множество точек, обладающее свойствами I—III. Не следует думать, что в этом случае фигура является очень простой. Среди простых замкнутых кривых существуют, например, такие, которым не может быть приписано никакой конечной длины («неспрямляемые» кривые); как мы отмечали выше (стр. 28), для выпуклых кривых это обстоятельство не может иметь места. Впрочем, и наглядно ясное понятие выпуклой кривой не так уж просто. Так, существуют выпуклые кривые, у которых на каждой дуге (сколь угодно малой и расположенной где угодно на кривой!) имеется бесконечно много угловых точек.

¹⁾ См., например, П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 68—69.

²⁾ Там же, стр. 65.

Для простых замкнутых кривых на плоскости справедлива знаменитая

Теорема Жордана. *Всякая простая замкнутая кривая K разбивает плоскость на две области (внутреннюю и внешнюю).*

Это значит, что все точки плоскости, не лежащие на K , составляют два множества G внутр и G внеш, обладающих следующими свойствами: 1) каждые две точки, принадлежащие одной и той же из этих областей, могут быть соединены ломаной, целиком лежащей в этой же области, т. е. не пересекающейся с K ; 2) если A и B — две точки, принадлежащие разным областям, то всякая ломаная (или кривая), соединяющая эти точки, пересекается с K . Эта теорема делает законным выражение: точка лежит «внутри» или «вне» простой замкнутой кривой.

Теорема Жордана позволяет нам утверждать, что всякая ограниченная фигура в нашем смысле (т. е. ограниченное множество, удовлетворяющее свойствам I—III) есть множество точек, расположенных внутри и на некоторой простой замкнутой кривой. В тех случаях, когда речь идет о длине кривой и о площади ограниченной ею фигуры (§§ 5, 6), естественно следует ограничиться такими простыми замкнутыми кривыми, для которых эти понятия имеют смысл.

Доказательство теоремы Жордана в общем случае довольно сложно, хотя и может быть проведено достаточно элементарно¹⁾. Для многоугольников доказательство теоремы Жордана сравнительно несложно²⁾.

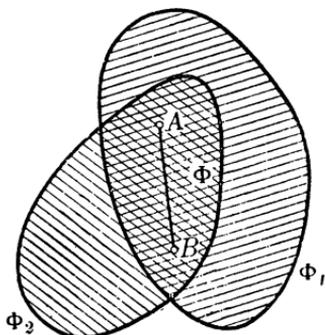
¹⁾ См. гл. II цитированной выше книги П. С. Александрова, а также журнал «Успехи математических наук», т. V, вып. 5¹, 1950 г., статьи Э. И. Вольперта «Элементарное доказательство теоремы Жордана», стр. 168—172 и А. Ф. Филиппова «Элементарное доказательство теоремы Жордана», стр. 173—176.

²⁾ См., например, цитированную в предисловии книгу А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники», стр. 69—72 или прибавления П. К. Рашевского к переводу книги Гильберта «Основания геометрии», М.—Л., Гостехиздат, 1948, стр. 409—419.

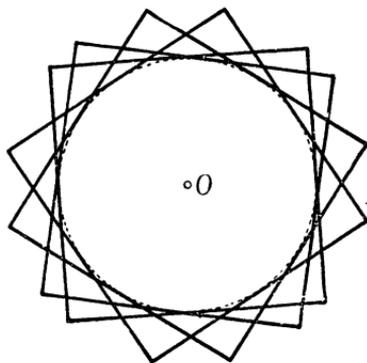
РЕШЕНИЯ

§ 1

1. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две выпуклые фигуры, Φ — их пересечение, A и B — две произвольные точки, принадлежащие пересечению Φ (черт. 120). По определению пересечения двух фигур обе точки A и B принадлежат как фигуре Φ_1 , так и фигуре Φ_2 . В силу выпуклости фигуры Φ_1 все точки отрезка AB принадлежат Φ_1 , а в силу выпуклости Φ_2 — все они принадлежат также Φ_2 . Следовательно, отрезок AB целиком принадлежит пересечению Φ фигур Φ_1 и Φ_2 , а это и означает, что пересечение Φ выпукло.



Черт. 120.



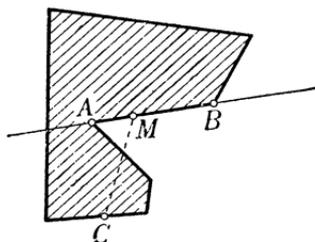
Черт. 121.

Точно так же доказывается, что пересечения Φ нескольких выпуклых фигур $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ выпукло: если A и B — две произвольные точки Φ , то A и B принадлежат одновременно всем фигурам $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, и в силу того, что все эти фигуры выпуклы, все точки отрезка AB принадлежат одновременно всем фигурам $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, т. е. принадлежат их пересечению Φ .

Примечание. Теорема остается верной и в том случае, когда фигур Φ_1, Φ_2, \dots бесконечно много; доказательство ее остается

прежним. Например, на черт. 121 изображены равные между собой квадраты с общим центром. Легко видеть, что пересечением всех таких квадратов (а этих квадратов бесконечно много) является круг, т. е. выпуклая фигура.

2. Выпуклый многоугольник Φ лежит по одну сторону от каждой прямой, являющейся продолжением его стороны. В самом деле, если бы существовала точка C , принадлежащая Φ и расположенная не с той стороны прямой AB (A и B — две соседние вершины Φ), с какой многоугольник Φ примыкает к стороне AB (черт. 122), то, например, отрезок MC , соединяющий внутреннюю точку M отрезка AB с точкой C , не принадлежал бы целиком Φ , т. е. многоугольник Φ не мог бы быть выпуклым.



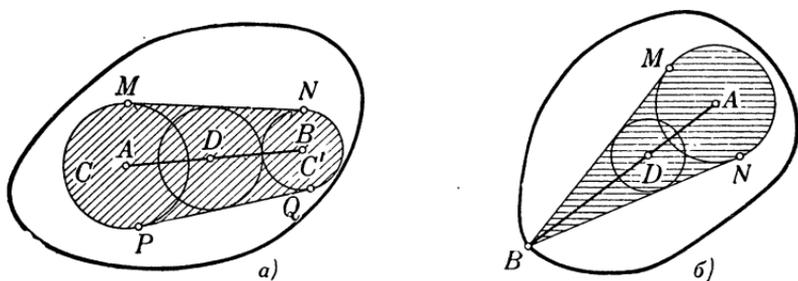
Черт. 122.

Таким образом, выпуклый многоугольник Φ расположен целиком в каждой из полуплоскостей, границами которых служат прямые, содержащие каждую из сторон многоугольника. Пересечение всех таких полуплоскостей и дает многоугольник Φ ¹⁾.

3. а) Пусть A и B — две внутренние точки фигуры Φ . Согласно определению внутренних точек существуют два круга C и C' с центрами соответственно в точках A и B , все точки которых принадлежат фигуре Φ (черт. 123, а). Пусть MN и PQ — внешние общие касательные кругов C и C' . В силу выпуклости Φ вся криволинейная фигура $MPQN$, заштрихованная на черт. 123, а, принадлежит Φ , и следовательно, каждая точка D отрезка AB является центром некоторого круга, все точки которого принадлежат Φ (этот круг вписан в фигуру $MPQN$).

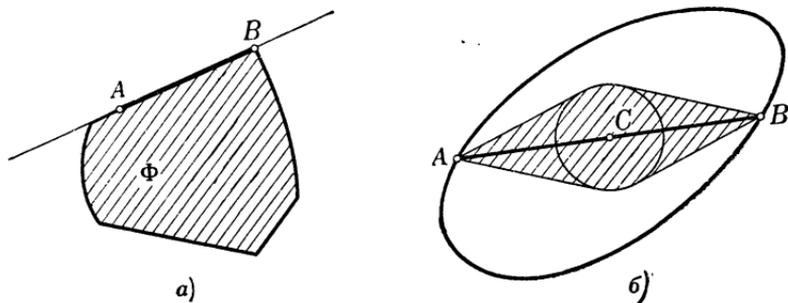
¹⁾ Исходя из определения выпуклой фигуры, приведенного на стр. 25, можно показать, что всякая выпуклая фигура является пересечением полуплоскостей в конечном или бесконечном числе.

б) Доказательство почти не отличается от доказательства предложения а), только окружность C' приходится заменить одной точкой B и фигуру $MPQN$ — фигурой MBN , заштрихованной на черт. 123, б).



Черт. 123.

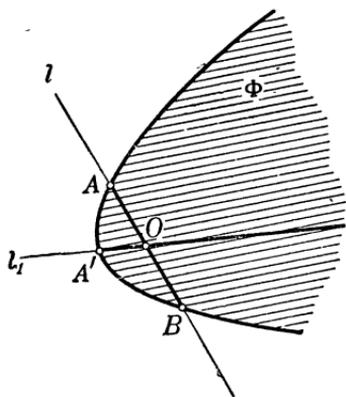
в) Пусть A и B — две граничные точки выпуклой фигуры Φ . Отрезок AB может целиком состоять из граничных точек (черт. 124, а) — это есть первый случай, указанный



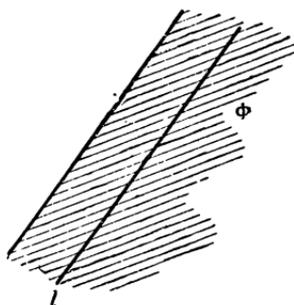
Черт. 124.

в условии задачи. Если же какая-либо точка C отрезка AB является внутренней точкой Φ , то согласно предложению задачи б) все точки отрезков CA и CB , кроме A и B , должны быть внутренними для Φ , — это второй случай, указанный в условии (черт. 124, б).

4. Пусть Φ есть выпуклая фигура, O — ее внутренняя точка и l — прямая, проходящая через точку O . Так как прямая l сама есть выпуклая фигура, то пересечение ее с фигурой Φ будет (согласно задаче 1) выпуклой фигурой, расположенной на прямой (одномерной выпуклой фигурой), т. е. отрезком, лучом или всей прямой. Если это — отрезок, то его концы A и B являются граничными точками фигуры Φ (черт. 125), и следовательно, прямая l содержит две граничные



Черт. 125.



Черт. 126.

точки Φ . Если это пересечение — луч (прямая l_1 на черт. 125), то его начало A' будет единственной граничной точкой фигуры Φ , лежащей на прямой l . Если, наконец, прямая l целиком принадлежит фигуре (черт. 126), то на этой прямой нет ни одной граничной точки фигуры Φ ¹⁾.

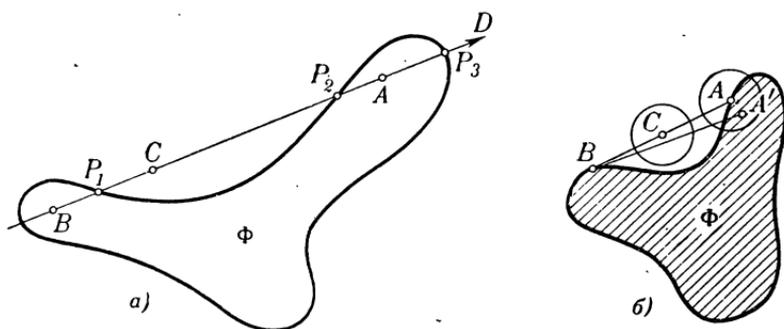
Если фигура Φ ограничена, то ее пересечение с прямой также ограничено и, следовательно, является отрезком. Таким образом, на каждой прямой l , проведенной через внутреннюю точку ограниченной выпуклой фигуры Φ , имеются ровно две граничные точки этой фигуры.

¹⁾ Можно доказать, что если выпуклая фигура содержит целую прямую, то она является либо полосой (см. черт. 4, б, стр. 14), либо полуплоскостью (см. черт. 4, а), либо всей плоскостью.

5. Наше утверждение равносильно утверждению, что для всякой ограниченной невыпуклой фигуры Φ найдется прямая, пересекающая ее границу более чем в двух точках.

Докажем это.

Пусть Φ — ограниченная невыпуклая фигура. В таком случае найдутся такие точки A и B , принадлежащие Φ , что отрезок, их соединяющий, не принадлежит целиком фигуре Φ ; обозначим через C точку отрезка AB , не принадлежащую Φ (черт. 127, а). Мы всегда можем предположить, что точка



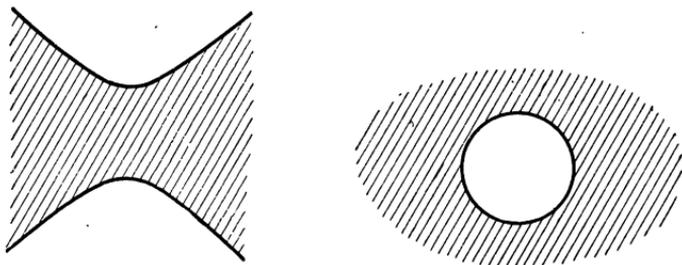
Черт. 127.

A — внутренняя точка Φ . Действительно, если A — граничная точка Φ , A' — внутренняя точка, достаточно близкая к точке A (см. определение граничной точки фигуры, стр. 15), то отрезок $A'B$ также будет иметь точки вне фигуры Φ (черт. 127, б).

Итак, пусть A — внутренняя точка. На отрезке BC есть граничная точка P_1 фигуры Φ (может быть, совпадающая с B), ибо точка B принадлежит фигуре Φ , а C лежит вне ее. На отрезке AC также есть граничная точка P_2 фигуры Φ (A лежит внутри Φ , C — вне этой фигуры). Наконец, продолжив отрезок BA за точку A , мы получим луч AD , исходящий из внутренней точки A фигуры Φ . На этом луче также есть граничная точка P_3 фигуры Φ (ибо фигура Φ ограничена). Итак, на прямой AB , проходящей через внутреннюю точку A фигуры Φ , лежат по крайней мере три граничные точки P_1 , P_2 и P_3 , что и требовалось доказать.

Следовательно, всякая фигура Φ , удовлетворяющая условию задачи, должна быть выпуклой.

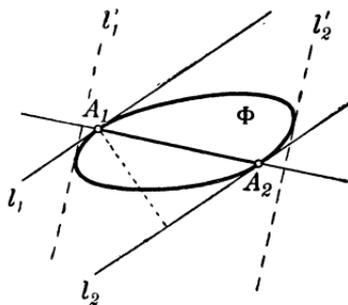
Примечание. Если бы фигура Φ была не ограничена, то точка P_3 могла бы не существовать, так как продолжение прямой AC за точку A могло целиком принадлежать фигуре Φ . Например,



Черт. 128.

если Φ есть одна из фигур, изображенных на черт. 128, то всякая прямая пересекает ее границу не более, чем в двух точках, а между тем фигура Φ является невыпуклой.

6. Пусть l_1, l_2 — две параллельные опорные прямые фигуры Φ , расстояние между которыми имеет наибольшее значение; A_1 и A_2 — граничные точки фигуры Φ , принадлежащие соответственно прямым l_1 и l_2 .



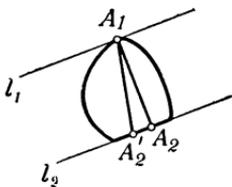
Черт. 129.

Мы утверждаем, что отрезок A_1A_2 перпендикулярен к обеим прямым l_1 и l_2 . В самом деле, если бы это было не так, то расстояние между прямыми l_1 и l_2 было бы меньше, чем отрезок A_1A_2 (черт. 129), и тем более меньше, чем расстояние между двумя опорными прямыми l'_1 и l'_2 фигуры Φ , перпендикулярными к отрезку A_1A_2 , что противоречит условию.

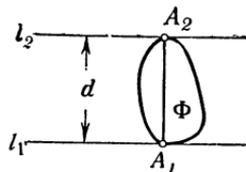
Так как A_1 и A_2 — как не угодно граничные точки фигуры Φ , принадлежащие соответственно прямым l_1 и l_2 , то из перпендикулярности отрезка A_1A_2 к прямым l_1 и l_2 следует, что ни одна из прямых l_1, l_2 не может иметь с фи-

гурой Φ целый общий отрезок (т. е. случай, изображенный на черт. 130, невозможен); другими словами, каждая из этих прямых содержит единственную граничную точку фигуры Φ .

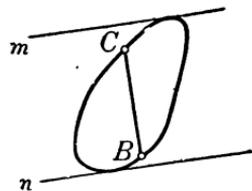
7. Пусть Φ — выпуклая фигура, l_1 и l_2 — параллельные опорные прямые, расстояние между которыми имеет наибольшее возможное значение d , A_1 и A_2 — общие точки фигуры Φ и прямых l_1 и l_2 соответственно. Так как отрезок A_1A_2 перпендикулярен к прямым l_1 , l_2 (см. задачу 6), то длина его равна d (черт. 131). Нам остается только доказать, что рас-



Черт. 130.



Черт. 131.



Черт. 132.

стояние между любыми двумя точками фигуры Φ не превосходит d . Действительно, если B и C — какие-либо две точки фигуры Φ , а m и n — опорные прямые, перпендикулярные к отрезку BC (черт. 132), то отрезок BC не превосходит расстояния между прямыми m и n , которое в свою очередь не превосходит d . Следовательно, длина BC не может быть больше d .

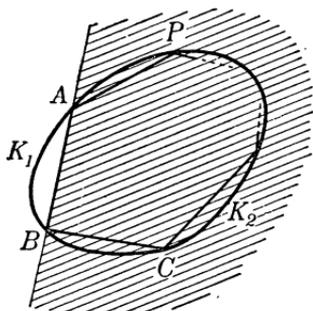
8. Проведем две опорные прямые l , m выпуклой фигуры Φ , перпендикулярные к отрезку AB . Вся фигура Φ заключена в полосу между прямыми l , m , а следовательно, в этой полосе помещается и отрезок AB длины d , перпендикулярный к прямым l , m . Но так как расстояние между прямыми l , m не может быть больше d (задача 7), то прямые l , m должны проходить через концы A и B отрезка.

9. Нам надо показать, что всякая невыпуклая фигура Φ имеет граничную точку, через которую не проходит ни одна опорная прямая. Прделав то же построение, что и при решении задачи 5 (см. черт. 127, а), нетрудно убедиться, что

такой точкой будет, например, точка P_2 . Действительно, прямая AB , проходящая через P_2 , не является опорной потому, что она проходит через внутреннюю точку A . Всякая же другая прямая, проходящая через точку P_2 , не является опорной потому, что точки A и B фигуры Φ расположены по разные стороны от нее.

Примечание. Для неограниченных фигур утверждение задачи также остается справедливым, но мы не будем останавливаться на его доказательстве.

10. Рассмотрим произвольную сторону AB многоугольника $ABC\dots P$, вписанного в кривую K , ограничивающую выпуклую фигуру Φ . Точки A и B делят кривую K на две дуги K_1 и K_2 (черт. 133); согласно определению вписанного многоугольника все его остальные вершины C, \dots, P лежат на одной из этих двух дуг, например на дуге K_2 . Отрезок AB вместе с дугой K_2 составляет выпуклую кривую K^* , — она является границей одной из двух выпуклых фигур, на которые прямая AB пересекает фигуру Φ . (Эти фигуры выпуклы, ибо являются

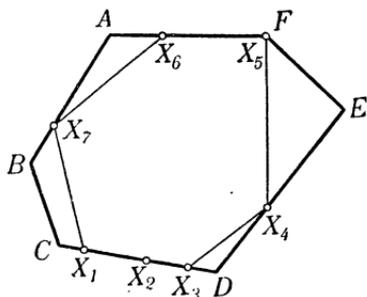


Черт. 133.

пересечениями фигуры Φ с полуплоскостями, на которые прямая AB разделяет плоскость.) Прямая AB является опорной для выпуклой кривой K^* , следовательно, дуга K_2 , а вместе с ней и все точки C, \dots, P лежат по одну сторону от AB . Из того, что все вершины многоугольника $ABC\dots P$ лежат по одну сторону от продолжения любой его стороны, следует, что этот многоугольник является выпуклым (см. решение задачи 2).

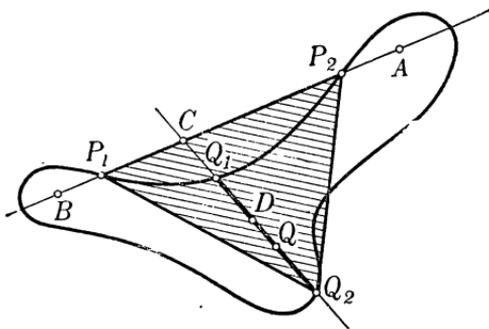
Примечание. Некоторые стороны многоугольника $ABC\dots P$ могут составлять продолжение одна другой. Например, на черт. 134 в семиугольнике $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$, вписанном в выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, стороны X_1X_2 и X_2X_3 составляют продолжение одна другой, так что точка X_2 фактически не является вершиной

вписанного многоугольника, и фигура $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7$ представляет собой на самом деле не семиугольник, а шестиугольник. Тем не менее в подобных случаях мы будем говорить, что такие точки как X_2 также являются вершинами вписанного многоугольника, — это упростит формулировки и решения некоторых задач.



Черт. 134.

11. Предположим, что фигура Φ , ограниченная кривой K , удовлетворяющей условиям задачи, не является выпуклой. Прделаем еще раз построение, проведенное при решении задачи 5. Через точку C и произвольную внутреннюю точку D фигуры Φ , не лежащую на прямой AB , проведем прямую CD (черт. 135). Рассмотрим все точки Q прямой CD , обладающие тем свойством, что отрезок DQ целиком принадлежит фигуре Φ ; эти точки образуют выпуклую фигуру — отрезок Q_1Q_2 , не пересекающий

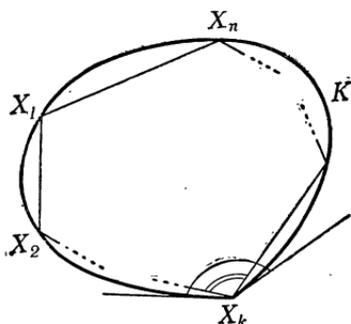


Черт. 135.

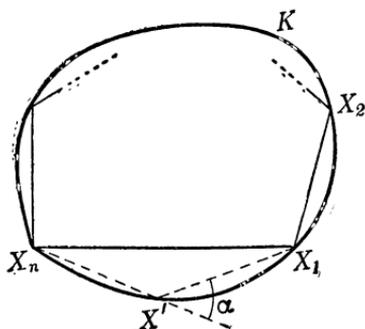
прямой AB . Но тогда точка Q_1 , ближайшая к прямой AB из точек Q_1, Q_2 , лежит внутри треугольника, имеющего вершинами точки P_1, P_2 и Q_2 . Следовательно, точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 не являются вершинами выпуклого четырехугольника, что противоречит условию.

Примечание. Из этого решения следует, что в условии задачи достаточно потребовать, чтобы *каждые четыре точки кривой K были вершинами выпуклого четырехугольника*; отсюда уже будет вытекать, что кривая K является выпуклой.

12. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — все угловые точки кривой K , расположенные в циклическом порядке. Тогда многоугольник $X_1X_2\dots X_n$ вписан в кривую K . При этом внутренний угол при угловой точке X_k кривой K больше или равен внутреннему углу при вершине X_k многоугольника $X_1X_2\dots X_n$



Черт. 136.



Черт. 137.

(черт. 136). Значит, внешний угол при угловой точке X_k кривой K меньше или равен внешнему углу при вершине X_k многоугольника $X_1X_2\dots X_n$, и следовательно, сумма внешних углов при угловых точках кривой K не превосходит суммы внешних углов многоугольника $X_1X_2\dots X_n$, которая, как известно, равна 360° ¹⁾.

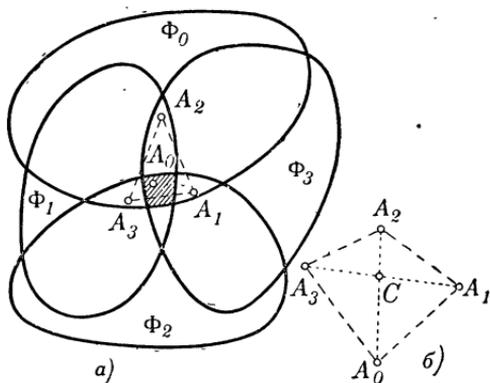
Если кривая K отлична от выпуклого многоугольника $X_1X_2\dots X_n$, то пусть X' — произвольная ее точка, не лежащая на контуре этого многоугольника (черт. 137), и пусть угловые точки кривой K так занумерованы, что точки X_1, X_2, \dots, X_n, X' следуют в циклическом порядке. Рассмотрим

¹⁾ Первое предложение задачи остается справедливым также и в том случае, когда выпуклая фигура имеет бесконечно много угловых точек; однако доказательство этого предложения требует знания некоторых простейших понятий математического анализа.

вписанный многоугольник $X_1X_2\dots X_nX'$. Как и прежде, мы заключаем, что сумма внешних углов при угловых точках кривой K не больше, чем сумма внешних углов при вершинах X_1, X_2, \dots, X_n многоугольника $X_1X_2\dots X_nX'$, а последняя сумма равна $360^\circ - \alpha$, где α — внешний угол при вершине X' многоугольника $X_1X_2\dots X_nX'$. Таким образом, если кривая K отлична от выпуклого многоугольника, то сумма ее внешних углов при угловых точках меньше 360° .

§ 2

13. Обозначим наши выпуклые фигуры буквами Φ_0, Φ_1, Φ_2 и Φ_3 . Пусть A_0 — точка, общая фигурам Φ_1, Φ_2 и Φ_3 , A_1 — точка, общая фигурам Φ_0, Φ_2 и Φ_3 , A_2 — точка, общая фигурам Φ_0, Φ_1 и Φ_3 , и, наконец, A_3 — точка, общая фигурам Φ_0, Φ_1 и Φ_2 . Так как точки A_0, A_1 и A_2 принадлежат фигуре Φ_3 , то и весь треугольник $A_0A_1A_2$ принадлежит этой фигуре (см. черт. 6 на стр. 16). Аналогично треугольник $A_0A_1A_3$ принадлежит фигуре Φ_2 , треугольник $A_0A_2A_3$ — фигуре Φ_1 и, наконец, треугольник $A_1A_2A_3$ — фигуре Φ_0 . При этом могут иметь место два случая.



Черт. 138.

1°. Одна из точек A_0, A_1, A_2, A_3 лежит внутри (или на стороне) треугольника, образованного тремя другими. Пусть, например, точка A_0 лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$ (черт. 138, а). Тогда она принадлежит всем четырем фигурам Φ_0, Φ_1, Φ_2 и Φ_3 . Это рассуждение остается справедливым, когда треугольник $A_1A_2A_3$ вырождается в отрезок (например, когда точка A_2 лежит на стороне A_1A_3).

2°. Ни одна из точек не лежит внутри треугольника, образованного тремя другими, т. е. точки A_0, A_1, A_2, A_3 являются

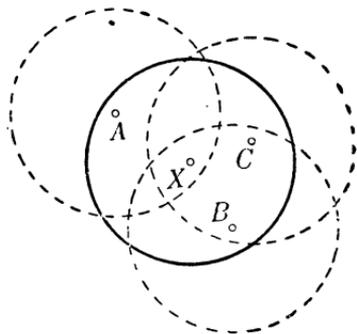
вершинами выпуклого четырехугольника (черт. 138, б). Тогда точка C пересечения диагоналей этого четырехугольника принадлежит всем четырем рассматриваемым треугольникам, а следовательно, и всем четырем фигурам $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_2$.

14. Доказательство будем вести методом математической индукции. Мы видели (см. задачу 13), что если число фигур равно 4, то теорема справедлива. Докажем, что если эта теорема справедлива для n фигур, где $n \geq 4$, то она справедлива и для $n+1$ фигуры. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ — данные выпуклые фигуры, каждые три из которых имеют общую точку. Обозначим через $\bar{\Phi}_n$ пересечение фигур Φ_n и Φ_{n+1} . Тогда $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}, \bar{\Phi}_n$ суть n выпуклых фигур (см. задачу 1 из § 1), каждые три из которых имеют общую точку. Действительно, общая точка трех из этих фигур, среди которых нет $\bar{\Phi}_n$, существует по предположению. Общая же точка фигур Φ_k, Φ_l и $\bar{\Phi}_n$ (т. е. общая точка фигур Φ_k, Φ_l, Φ_n и Φ_{n+1}) существует в силу задачи 13, так как каждые три из фигур Φ_k, Φ_l, Φ_n и Φ_{n+1} имеют общую точку. Итак, каждые три из фигур $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}, \bar{\Phi}_n$ имеют общую точку, а так как число этих фигур равно n , то, по предположению индукции, существует точка, принадлежащая всем этим фигурам, а следовательно, и каждой из фигур $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$.

15. Нам надо доказать, что существует точка O плоскости (центр искомого круга), удаленная от всех заданных точек на расстояние, не большее 1, или, другими словами, что существует точка O плоскости, принадлежащая всем кругам радиуса 1 с центрами в данных точках.

Согласно теореме Хелли для этого достаточно доказать, что пересекаются каждые три из рассматриваемых кругов. Но по условию задачи каждые три точки A, B, C из заданных n точек можно заключить в круг радиуса 1 (черт. 139); центр X этого круга и будет являться точкой, принадлежащей трем кругам радиуса 1 с центрами в точках A, B, C (так как он удален от каждой из точек A, B, C на расстояние, не большее 1).

Примечание. Доказанное предложение остается в силе и в том случае, когда заданных точек бесконечно много, ибо из того, что каждые три из заданного бесконечного числа кругов пересекаются, следует, что все круги пересекаются.



Черт. 139.

16. Достаточно доказать, что каждые три из данных точек можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в силу задачи 15 отсюда уже будет следовать, что все точки можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (разумеется, то, что в задаче 15 радиус был принят за 1, а здесь радиус равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$, не играет роли).

Каждая из сторон $\triangle ABC$, вершинами которого служат любые три из данных точек, не больше 1. Если этот треугольник тупоугольный или прямоугольный, то он целиком заключается внутри окружности, описанной на большей стороне как на диаметре; радиус этой окружности не больше $\frac{1}{2}$, т. е. меньше $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Если $\triangle ABC$ — остроугольный, то радиус круга, описанного вокруг этого треугольника, тоже не может быть больше чем $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Действительно, хотя бы один из углов этого треугольника, например $\angle A$, не меньше 60° (сумма всех трех углов равна 180°). Следовательно, сторона BC , стягивающая дугу, не меньшую 120° , но

меньшую 180° , не меньше $r\sqrt{3}$, где r — радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC (хорда, стягивающая дугу в 120° , равна $r\sqrt{3}$). Итак, $BC \geq r\sqrt{3}$, а так как $BC \leq 1$, то $r\sqrt{3} \leq 1$ или

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

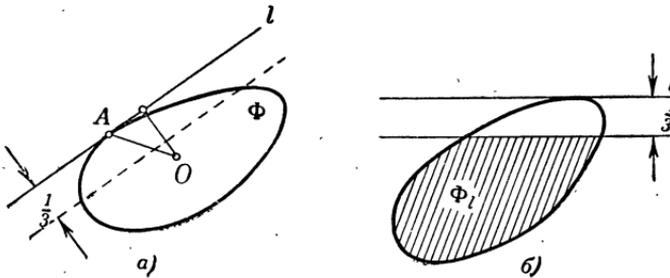
Примечание. Оценка теоремы Юнга не может быть улучшена: три точки, расположенные в вершинах правильного треугольника со стороной 1, представляют собой пример системы точек, расстояние между любыми двумя из которых не больше 1 и которую нельзя заключить в круг радиуса, меньшего $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (правильный треугольник со стороной 1 представляет собой пример фигуры диаметра 1, которую нельзя заключить в круг радиуса, меньшего $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

17. Нам надо доказать, что существует круг радиуса $\frac{1}{3}$, целиком содержащийся внутри заданной выпуклой фигуры Φ ; другими словами, требуется доказать, что внутри фигуры Φ существует точка O (центр искомого круга), удаленная от всех опорных прямых Φ на расстояние, не меньшее чем $\frac{1}{3}$.

В самом деле, если такая точка существует, то круг радиуса $\frac{1}{3}$ с центром в этой точке будет заключен внутри Φ , поскольку точка O удалена от каждой граничной точки A фигуры Φ на расстояние, не меньшее $\frac{1}{3}$ (точка O удалена от опорной прямой l , проходящей через A , на расстояние, не меньшее чем $\frac{1}{3}$; черт. 140, а).

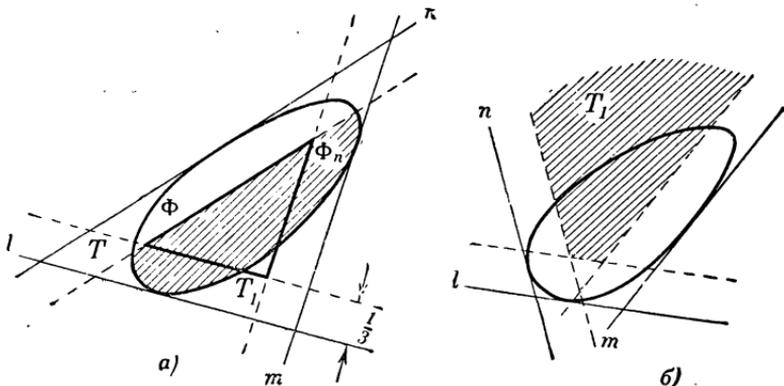
Все точки фигуры Φ , удаленные от некоторой опорной прямой l этой фигуры на расстояние, не меньшее чем $\frac{1}{3}$, заполняют некоторую ограниченную выпуклую фигуру Φ_l , получаемую, если отрезать от фигуры Φ полоску ширины $\frac{1}{3}$, заключенную между опорной прямой l и параллельной ей прямой, удаленной от l на расстояние $\frac{1}{3}$ (черт. 140, б). В силу

теоремы Хелли нам достаточно доказать, что каждые три из фигур Φ_i пересекаются между собой; отсюда уже будет следовать, что существует точка O , общая всем фигурам Φ_i , и мы сможем принять эту точку за центр искомого круга.



Черт. 140.

Проведем три опорные прямые l , m и n фигуры Φ . Эти три опорные прямые либо образуют треугольник, внутри которого



Черт. 141.

заклучена фигура Φ (черт. 141, а), либо не образуют такого треугольника (черт. 141, б). Для определенности мы остановимся сначала на первом случае; треугольник, образованный прямыми l , m и n , мы обозначим через T .

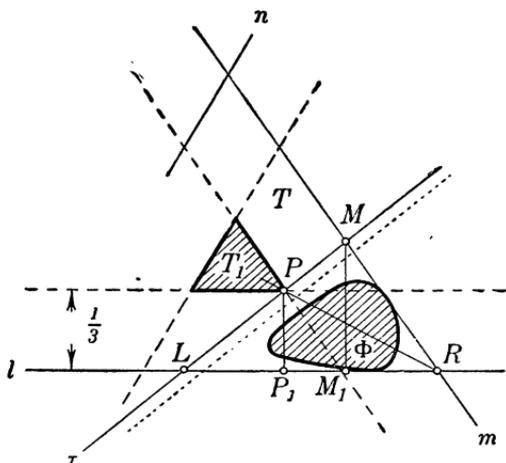
Так как ширина фигуры Φ равна 1, то и ширина описанного вокруг Φ треугольника T не меньше 1. Отсюда следует, что все высоты треугольника T не меньше 1, и следовательно, точка пересечения медиан этого треугольника (отстоящая от каждой стороны на расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ соответствующей высоты) удалена от каждой из прямых l , m и n на расстоянии, не меньшее $\frac{1}{3}$. Таким образом, если мы ототрежем от нашего треугольника три полосы, состоящие из точек, расположенных хотя бы от одной из сторон на расстоянии, меньшем $\frac{1}{3}$, то внутри треугольника останется еще некоторый треугольник T_1 (в крайнем случае T_1 может состоять из единственной точки; последующее доказательство при этом не меняется).

Нам остается доказать, что существуют точки фигуры Φ , удаленные от всех сторон треугольника T на расстояние, не меньшее чем $\frac{1}{3}$, т. е. что фигура Φ пересекается с треугольником T_1 ; это пересечение, очевидно, будет принадлежать всем трем фигурам Φ_l , Φ_m и Φ_n (см. черт. 141, a ; на нем обозначена лишь фигура Φ_n).

Предположим, что фигура Φ не пересекается с треугольником T_1 (черт. 142). Проведем тогда разделяющую их прямую (см. ниже задачу 23) и сдвинем ее параллельно самой себе до тех пор, пока она не коснется границы треугольника T_1 . Полученная таким образом прямая r будет либо параллельна одной из сторон треугольника T , либо будет образовывать с двумя из трех прямых l , m и n (например, с прямыми l и m) такой треугольник t , внутри которого заключается фигура Φ . Если r параллельна одной из сторон треугольника T , то фигура Φ должна заключаться внутри полосы ширины $\frac{1}{3}$, что невозможно. Если мы докажем, что ширина треугольника t меньше 1, то отсюда будет следовать, что фигура Φ ширины 1 не может заключаться внутри этого треугольника, т. е. второй случай также не может иметь места, и следовательно, предположение о том, что Φ не пересекается с треугольником T , является невозможным.

Обозначим вершины треугольника t соответственно через

L , M и R , а вершину треугольника T_1 , лежащую на стороне LM , — через P . Так как точка P удалена от прямых l и m на одно и то же расстояние $\frac{1}{3}$, то прямая RP является биссектрисой угла LRM . Пусть теперь $LR \geq MR$ (случай $LR \leq MR$



Черт. 142.

рассматривается так же); так как $LP:MP = LR:MR$, то в этом случае $LP \geq MP$. Опустим из точек M и P перпендикуляры MM_1 и PP_1 на прямую l . Так как $PP_1 = \frac{1}{3}$, то

$$MM_1 = PP_1 \cdot \frac{LM}{LP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{LP + PM}{LP} \leq \frac{1}{3} \cdot 2 < 1.$$

Таким образом, мы видим, что высота MM_1 треугольника t меньше 1, что и завершает доказательство.

Если опорные прямые l , m и n не образуют описанного вокруг Φ треугольника, то доказательство почти не меняется. Существование точек, удаленных от каждой из прямых l , m и n на расстояние, не меньшее чем $\frac{1}{3}$, в этом случае доказывается проще, чем в предыдущем; эти точки в рассматриваемом случае заполняют неограниченную выпуклую фигуру T_1 (см. черт. 141, б; в том случае, когда прямые l и m парал-

лельны, существование таких точек вытекает из того, что расстояние между l и m не меньше 1, а следовательно, заведомо больше $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$). Последующая часть доказательства не отличается от вышеприведенной.

Примечание. Оценка теоремы Бляшке не может быть улучшена: правильный треугольник с высотой 1 представляет собой выпуклую фигуру ширины 1, внутри которой нельзя поместить никакого круга, радиус которого был бы больше $\frac{1}{3}$.

Другие доказательства теоремы Бляшке даны в решениях задач 196) и 35а).

18. а) Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — данные точки. Рассмотрим все такие полуплоскости, в которых расположено более двух третей из общего числа данных n точек (считая n точки на прямой, ограничивающей полуплоскость). Покажем, что любые три из этих полуплоскостей имеют общую точку.

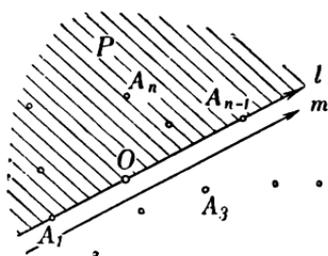
Действительно, пусть P_1, P_2 и P_3 — три такие полуплоскости; так как в каждой из полуплоскостей P_1 и P_2 содержится более чем по $\frac{2}{3}n$ данных точек, а общее число точек равно n , то должно существовать более $\frac{1}{3}n$ данных точек, принадлежащих одновременно полуплоскостям P_1 и P_2 . А так как в полуплоскости P_3 содержится более $\frac{2}{3}n$ данных точек, то по крайней мере одна из точек, принадлежащих одновременно P_1 и P_2 , принадлежит P_3 , т. е. P_1, P_2 и P_3 содержат по крайней мере одну общую точку (эта точка является даже одной из заданных точек). Так как каждая полуплоскость является выпуклой фигурой, то согласно теореме Хелли существует точка O , принадлежащая всем рассматриваемым полуплоскостям.

Докажем, что точка O — искомая. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через точку O (будем считать, что на прямой l выбрано определенное направление), а P — любая из полуплоскостей, на которые плоскость пересекается прямой l , например расположенная слева от l (черт. 143). Нам надо доказать, что в полуплоскости P (считая n на прямой l) расположено не менее чем $\frac{n}{3}$ данных точек.

Допустим противное; тогда справа от l будет более чем $\frac{2}{3}n$ данных точек, не считая точек, принадлежащих самой прямой l . Проведем справа от l прямую m , параллельную l и настолько близкую к l , что между прямыми l и m нет ни одной из данных точек. Тогда справа от m будет расположено столько же точек, сколько и справа от l , т. е. больше чем $\frac{2}{3}n$, и следовательно, полуплоскость, расположенная справа от m , должна будет содержать точку O , что, однако, не может иметь места, ибо O лежит на прямой l , т. е. левее m . Полученное противоречие и доказывает, что полуплоскость P содержит не менее $\frac{1}{3}n$ данных точек.

Внимательный читатель мог заметить неточность в решении этой задачи. Ведь полуплоскости, к которым применялась в доказательстве теорема Хелли, — неограниченные выпуклые фигуры, в то время как в тексте мы специально отмечали, что для бесконечного числа неограниченных фигур теорема Хелли может быть неверна. Однако эту неточность нетрудно исправить. Пусть C — настолько большой круг, что все точки A_1, A_2, \dots, A_n заключаются внутри него. Будем в предыдущем рассуждении рассматривать не целиком каждую полуплоскость, в которой расположено более $\frac{2}{3}n$ данных точек, а только часть такой полуплоскости, заключенную внутри круга C . Тогда мы получим ограниченные выпуклые фигуры, каждые три из которых имеют общую точку, так что приведенное доказательство действительно применимо.

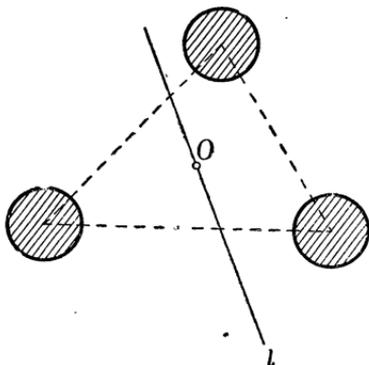
б) и в) Эти задачи решаются аналогично задаче а), только вместо полуплоскостей, содержащих более $\frac{2}{3}n$ рассматриваемых точек, приходится рассматривать полуплоскости, содержащие часть кривой K , длина дуги которой более $\frac{2}{3}L$, или, соответ-



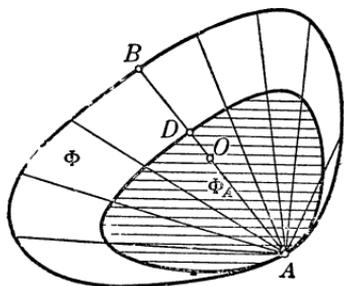
Черт. 143.

ственно, содержащие часть фигуры Φ , площадь которой больше $\frac{2}{3} S$. Предоставляем читателю провести самостоятельно полное доказательство этих теорем.

Примечание. Оценки задач 18 а) — в) не могут быть улучшены. Произвольные три точки, не лежащие на одной прямой, представляют собой пример системы точек, для которой невозможно найти такую точку O , чтобы по каждую сторону от произвольной прямой, проходящей через O , находилось больше $\frac{n}{3}$ точек. Три непересекающиеся малые окружности (соответственно круга) с центрами в вершинах некоторого треугольника (черт. 144) дают пример кривой K (фигуры Φ), для которой оценка задачи 18 б) (или 18 в)) не может быть улучшена.



Черт. 144.



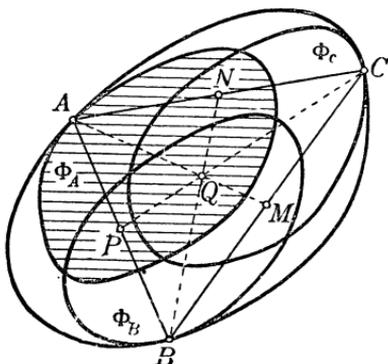
Черт. 145.

19. а) Пусть Φ — данная выпуклая фигура, A — ее произвольная граничная точка (черт. 145). Проведем через точку A всевозможные хорды фигуры Φ и на каждой такой хорде AB отложим отрезок AD , равный $\frac{2}{3}$ всей хорды. Все полученные таким путем точки D будут принадлежать границе некоторой фигуры Φ_A , подобной и подобно расположенной по отношению к фигуре Φ с центром подобия в точке A и коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. Пусть теперь O есть точка, существование которой требуется доказать, и AB — хорда фигуры Φ , проходящая через эту точку. Так как согласно опре-

делению точки O должно быть $AO \leq \frac{2}{3} AB$, то O принадлежит фигуре Φ_A .

Утверждение, что существует такая точка O фигуры Φ , что, какова бы ни была граничная точка A фигуры Φ для хорды AB , проходящей через O , отрезок AO не больше $\frac{2}{3} AB$, равносильно утверждению, что существует точка O , принадлежащая всем фигурам Φ_A , подобным Φ , с центром подобия в какой-либо точке A границы Φ и коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. Так как все фигуры Φ_A выпуклы (очевидно, что фигура, подобная выпуклой фигуре, является выпуклой), то в силу теоремы Хелли достаточно показать, что каждые три из рассматриваемых фигур имеют общую точку.

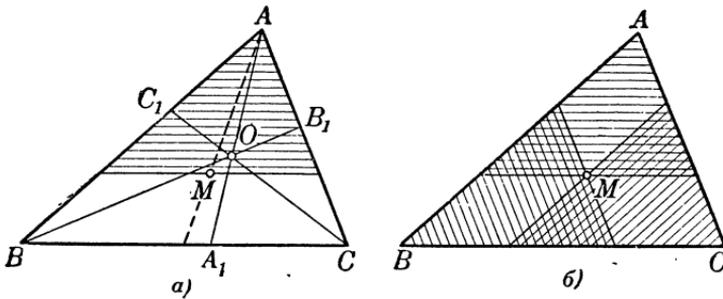
Пусть Φ_A, Φ_B, Φ_C — три фигуры, подобные Φ , с центрами подобия соответственно в граничных точках A, B, C фигуры Φ и коэффициентом подобия, равным $\frac{2}{3}$ (черт. 146); проведем три хорды AB, BC, AC фигуры Φ . Пусть M, N, P — середины сторон треугольника ABC , а Q — точка пересечения медиан AM, BN и CP этого треугольника. Точка M принадлежит фигуре Φ (так как M лежит на отрезке BC , а фигура Φ выпукла). В силу известного свойства медианы треугольника отрезок AQ равен $\frac{2}{3} AM$; следовательно, точка Q принадлежит фигуре Φ_A . Аналогично доказывается, что Q принадлежит фигурам Φ_B и Φ_C . Таким образом, Φ_A, Φ_B и Φ_C имеют общую точку Q . Отсюда следует утверждение задачи.



Черт. 146.

Примечание. Оценка задачи 19а) не может быть улучшена: легко доказать, что внутри треугольника нельзя найти такую точку O , чтобы оба отрезка каждой хорды, проходящей через O , были больше $\frac{1}{3}$ всей хорды. Действительно, пусть O — внутренняя точка

треугольника ABC , A_1 , B_1 и C_1 — точки пересечения AO , BO и CO соответственно со сторонами BC , AC и AB треугольника (черт. 147, а). Если $A_1O > \frac{1}{3} A_1A$, то точка O лежит внутри (не на границе!) треугольника, отсекаемого от ABC прямой, параллельной BC и проходящей через точку M пересечения медиан. Точно так же, если $B_1O > \frac{1}{3} B_1B$, то O лежит внутри треугольника, отсекаемого от ABC прямой, параллельной AC и проходящей через M ; если



Черт. 147.

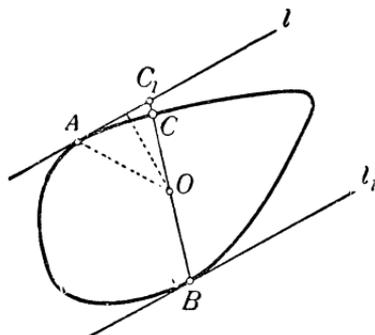
$C_1O > \frac{1}{3} C_1C$, то O лежит внутри треугольника, отсекаемого от ABC прямой, параллельной AB и проходящей через M . Но эти три треугольника не имеют общих внутренних точек (черт. 147, б), и следовательно, подобная точка O треугольника ABC не может существовать.

б) Предположим, что ширина выпуклой фигуры Φ равна 1, и докажем, что точка O , существование которой утверждается в задаче 19а), является центром круга радиуса $\frac{1}{3}$, целиком заключенного внутри Φ . Для этого достаточно показать, что точка O удалена от каждой граничной точки A фигуры Φ на расстояние, не меньшее чем $\frac{1}{3}$. Проведем через точку A опорную прямую l фигуры Φ , и пусть B есть точка соприкосновения фигуры Φ с опорной прямой l_1 , параллельной l (см. § 1, стр. 19). Расстояние между l и l_1 не меньше ширины фигуры Φ , т. е. не меньше 1. Пусть C и C_1 — точки пересечения прямой BO соответственно с грани-

ней фигуры Φ и с прямой l (черт. 148). Так как $CO \geq \frac{1}{3} CB$ (согласно определению точки O), то

$$C_1O = CO + CC_1 \geq \frac{1}{3} (CB + 3CC_1) \geq \frac{1}{3} C_1B,$$

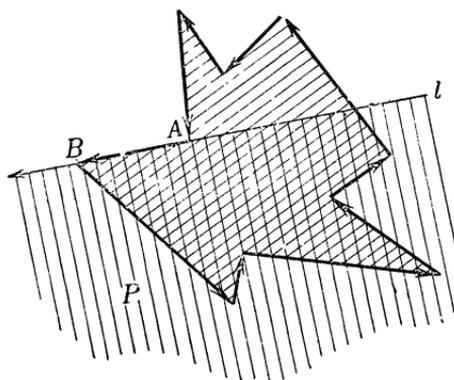
а следовательно, расстояние от точки O до прямой l не меньше $\frac{1}{3}$ расстояния между прямыми l и l_1 , т. е. не меньше $\frac{1}{3}$. Из последнего вытекает, что и расстояние между точками O и A не может быть меньше $\frac{1}{3}$.



Черт. 148.

20. Пусть K — данный многоугольник. Отметим на его контуре какое-либо направление обхода, например «против часовой стрелки», т. е. такое, что при движении по контуру в этом направлении вблизи каждой стороны справа будут лежать внешние, а слева —

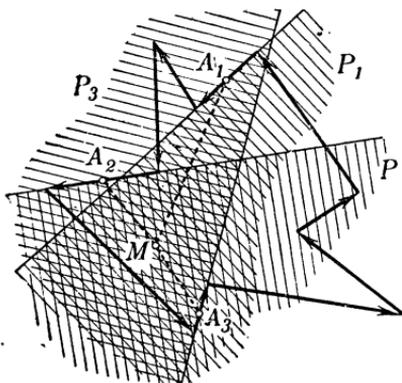
внутренние точки многоугольника K (черт. 149). Пусть AB — одна из сторон многоугольника, лежащая на прямой l . Будем считать, что l имеет то же направление, что и сторона AB многоугольника K , и обозначим через P полуплоскость, лежащую слева от l . Назовем P левой полуплоскостью многоугольника K , отвечающей стороне AB .



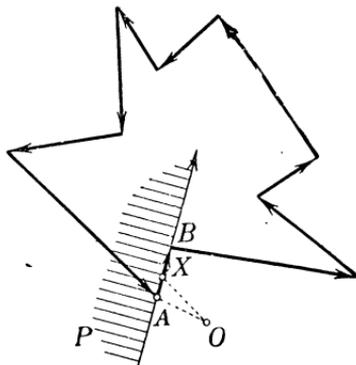
Черт. 149.

Докажем теперь, что существует точка O , которая принадлежит левым полуплоскостям, отвечающим всем сторонам многоугольника K . (Как будет показано в дальнейшем, эта

точка удовлетворяет условиям теоремы.) Согласно теореме Хелли достаточно доказать, что любые три из левых полуплоскостей имеют общую точку. Пусть P_1, P_2, P_3 — три левые полуплоскости, отвечающие трем произвольным сторонам многоугольника K , и A_1, A_2, A_3 — произвольные точки, лежащие соответственно на этих сторонах (черт. 150). Согласно условию теоремы существует такая точка M , что отрезки A_1M ,



Черт. 150.



Черт. 151.

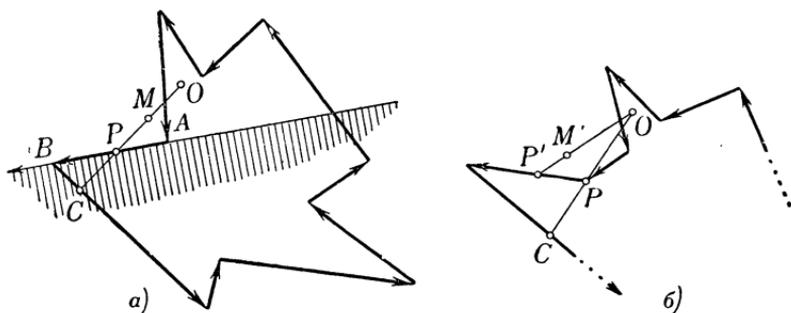
A_2M и A_3M целиком лежат внутри многоугольника K . Отсюда следует, что при движении по рассматриваемым трем сторонам точка M лежит по ту же сторону, что и внутренние точки многоугольника K , т. е. слева. Таким образом, точка M лежит во всех трех левых полуплоскостях P_1, P_2, P_3 .

Пусть теперь O — общая точка всех левых полуплоскостей многоугольника K ; докажем, что O — искомая точка. Прежде всего докажем, что O лежит внутри K .

Предположим противное; пусть O лежит вне многоугольника K и пусть X — ближайшая (или одна из ближайших) к O точка границы многоугольника K (черт. 151). Тогда отрезок OX лежит целиком вне K . Если бы точка X была вершиной многоугольника K (совпадала с точкой A), то на одной из двух сторон, сходящихся в этой вершине, можно было бы (достаточно близко от X) взять такую точку, не являющуюся вершиной многоугольника, что весь

отрезок, соединяющий эту точку с O , лежал бы вне многоугольника. Итак, если O лежит вне K , то на одной из сторон многоугольника обязательно найдется такая точка X , не являющаяся вершиной, что отрезок OX лежит вне K . Но если AB — сторона, на которой лежит точка X , то точка O находится по ту же сторону от AB , что и внешние точки многоугольника, т. е. справа, что противоречит тому, что O принадлежит всем левым полуплоскостям многоугольника K и, в частности, левой полуплоскости P , отвечающей стороне AB .

Итак, точка O лежит внутри K . Остается доказать, что если C — любая точка многоугольника K , то весь отрезок OC лежит внутри K .



Черт. 152.

Предположим противное. Пусть на отрезке OC найдется точка M , лежащая вне многоугольника K , и пусть P — ближайшая к M точка пересечения отрезка CM с контуром многоугольника K (черт. 152, а).

Если P не является вершиной многоугольника K и AB — сторона, на которой лежит точка P , то точка O лежит по ту же сторону от AB , что и M , т. е. по ту сторону, с которой лежат внешние точки многоугольника, — справа. Но это опять-таки противоречит тому, что точка O принадлежит всем левым полуплоскостям многоугольника K .

Если P является вершиной K , то на любой из сторон, сходящихся в P , найдется (достаточно близко к точке P) такая точка P' , не являющаяся вершиной многоугольника K , что на отрезке OP' будет точка M' , лежащая вне многоугольника (черт. 152, б). Дальше повторяется предыдущее рассуждение.

Таким образом, отрезок, соединяющий любую точку C многоугольника K с точкой O , лежит целиком внутри K , что и требовалось доказать ¹⁾).

Примечание. Теорема Красносельского справедлива не только для многоугольников, но и для произвольных плоских фигур; доказательство ее в общем случае по существу не отличается от приведенного ²⁾).

21. а) Будем вести доказательство методом математической индукции. Пусть мы уже доказали, что k из наших полуплоскостей имеют общую точку; покажем в таком случае, что $(k+1)$ -я полуплоскость Π пересекает общую часть Φ первых k полуплоскостей, т. е., другими словами, что и $k+1$ полуплоскостей имеют общую точку.

Фигура Φ выпукла в силу задачи 1 из § 1; она представляет собой либо выпуклый многоугольник (может быть, неограниченный), либо отрезок (или луч, или всю прямую), либо точку. Рассмотрим в отдельности все эти случаи.

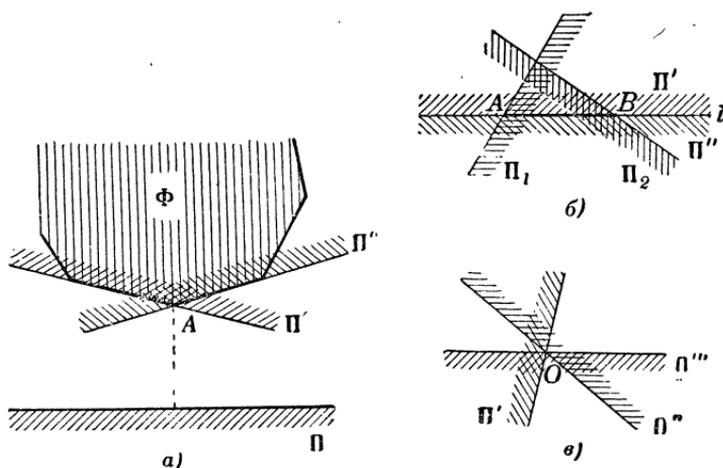
1°. Пусть Φ есть выпуклый многоугольник (черт. 153, а). Предположим, что Π не пересекает этого многоугольника. Пусть A есть вершина многоугольника Φ , наиболее близкая к полуплоскости Π (или одна из таких вершин, если их несколько). В таком случае стороны многоугольника Φ , сходящиеся в вершине A , являются границами двух из наших полуплоскостей Π' и Π'' . Из черт. 153, а видно, что полуплоскости Π , Π' и Π'' не имеют общей точки, что противоречит условию задачи. Таким образом, Π обязательно пересекает Φ , что и требовалось доказать.

2°. Пусть Φ есть отрезок AB прямой l (черт. 153, б). В таком случае среди первых k полуплоскостей есть две Π' и Π'' , ограниченные прямой l и направленные в разные сто-

¹⁾ В этом доказательстве мы воспользовались теоремой Хелли для случая, когда рассматриваемые выпуклые фигуры (полуплоскости) не ограничены; однако это обстоятельство не нарушает доказательства, так как в случае конечного числа фигур их ограниченность не существенна для справедливости теоремы Хелли.

²⁾ В этом случае ввиду бесконечного числа «левых полуплоскостей» к ним нельзя без оговорок применять теорему Хелли (вследствие их неограниченности), поэтому в доказательстве приходится прибегать к приему, использованному нами при решении задачи 18.

роны от этой прямой; кроме того, среди них есть полуплоскость Π_1 , пересекающая прямую l в точке A и содержащая точку B , и полуплоскость Π_2 , пересекающая прямую l в точке B и содержащая точку A . Из того, что полуплоскости Π' , Π'' и Π имеют общую точку, следует, что Π пересекает прямую l . Если бы теперь полуплоскость Π пересекала l по лучу, расположенному вне отрезка AB за точкой A ,



Черт. 153.

то, как нетрудно убедиться, либо три полуплоскости Π , Π_1 и Π' ; либо три полуплоскости Π , Π_1 и Π'' не имели бы общей точки. Так же доказывается, что Π не может пересекать l по лучу, расположенному вне отрезка AB за точкой B . Следовательно, Π пересекает AB , что и требовалось доказать.

Аналогично проводится доказательство и в тех случаях, когда Φ есть луч или вся прямая.

3°. Пусть Φ есть точка O . В таком случае среди первых k полуплоскостей есть три Π' , Π'' и Π''' , пересекающиеся в точке O и расположенные так, как изображено на черт. 153, в. Нетрудно показать, что если бы полуплоскость Π не содержала точки O , то какие-нибудь три полуплоскости Π , Π' и Π'' ; Π , Π' и Π''' или Π , Π'' и Π''' не имели бы общей точки.

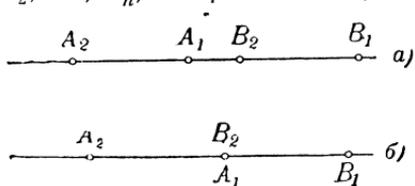
Из доказанного утверждение задачи выводится при помощи обычного рассуждения «по индукции».

б) Пусть имеется n многоугольников $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, каждые три из которых имеют общую точку. В силу результата задачи 2 из § 1 каждый из этих многоугольников есть пересечение некоторого числа полуплоскостей. Мы утверждаем, что все эти полуплоскости имеют общую точку.

Действительно, если три полуплоскости Π, Π' и Π'' отвечают трем различным многоугольникам, то общая часть полуплоскостей Π, Π' и Π'' содержит общую часть этих трех многоугольников, которая существует по условию задачи. Если же плоскости Π, Π' и Π'' отвечают двум многоугольникам (две из них относятся к числу полуплоскостей, определяющих в пересечении какой-то один многоугольник) или одному многоугольнику, то эти полуплоскости тоже имеют общие точки (в первом случае общая часть этих полуплоскостей будет содержать пересечение двух рассматриваемых многоугольников, а во втором — целый многоугольник).

В силу результата задачи 21а), отсюда следует, что все наши полуплоскости имеют хотя бы одну общую точку, которая, очевидно, будет принадлежать всем n многоугольникам. Этим и завершается доказательство теоремы.

22. Обозначим левые концы заданных отрезков через A_1, A_2, \dots, A_n , а правые концы тех же отрезков — через B_1, B_2, \dots, B_n . Из того, что



Черт. 154.

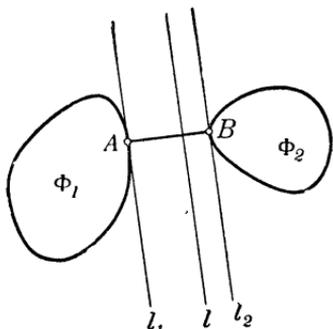
отрезки A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются, следует, что левый конец A_1 первого отрезка не может лежать правее, чем правый конец B_2 второго отрезка, т. е. либо A_1 лежит левее B_2 (черт. 154, а), ли-

бо A_1 совпадает с B_2 (в последнем случае эта точка будет единственной общей точкой отрезков A_1B_1 и A_2B_2 ; черт. 154, б). Таким образом, каждый из левых концов A_1, A_2, \dots, A_n отрезков лежит не правее, чем каждый из правых концов B_1, B_2, \dots, B_n . Обозначим через A_0 самый правый из левых концов отрезков и через B_0 — самый левый из правых концов. Мы видели, что A_0 не может лежать правее B_0 . Если A_0 совпадает с B_0 , то точка $A_0 = B_0$ будет единственной точкой, принадлежащей всем отрезкам A_iB_i ,

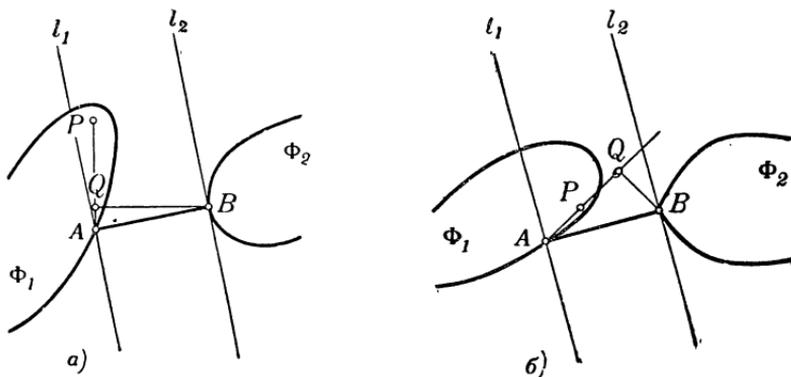
A_2B_2, \dots, A_nB_n . Если же точка A_0 расположена левее B_0 , то всем этим отрезкам принадлежит целый отрезок A_0B_0 .

23. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две ограниченные выпуклые фигуры, не имеющие общих точек, а A и B — две их точки, расстояние между которыми имеет наименьшее значение (черт. 155)¹⁾. Проведем через точки A и B прямые l_1 и l_2 , перпендикулярные к отрезку AB , и докажем, что эти прямые являются опорными соответственно для фигур Φ_1 и Φ_2 .

Допустим, что l_1 не является опорной прямой фигуры Φ_1 . Тогда по ту же сторону от l_1 , что и точка B , найдется точка P , принадлежащая фигуре Φ_1 , причем в силу выпуклости Φ_1 и весь отрезок AP будет принадлежать фигуре Φ_1 . На отрезке AP имеется такая точка, расстояние которой до точки B меньше AB . В самом деле, такой точкой



Черт. 155.



Черт. 156.

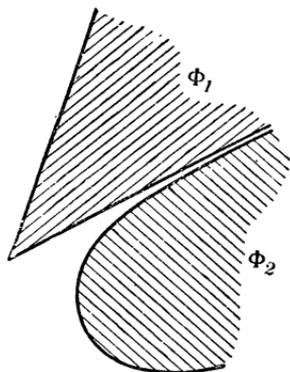
будет или основание Q перпендикуляра, опущенного из B на прямую AP , если оно лежит на отрезке AP (черт. 156, а), или сама точка P , если основание перпендикуляра лежит на

¹⁾ См. задачу 7 дополнения I (стр. 134).

продолжении AP за точку P (черт. 156, б; из того, что угол PAB — острый, следует, что основание перпендикуляра, опущенного из B на AP , не может лежать на продолжении AP за точку A). А это противоречит тому, что AB — наименьшее расстояние между точками фигур Φ_1 и Φ_2 .

Аналогично доказывается утверждение относительно l_2 .

Таким образом, l_1 и l_2 являются соответственно опорными прямыми фигур Φ_1 и Φ_2 , откуда сразу следует, что любая прямая l , параллельная прямым l_1 и l_2 и расположенная между ними, удовлетворяет условиям задачи.



Черт. 157.

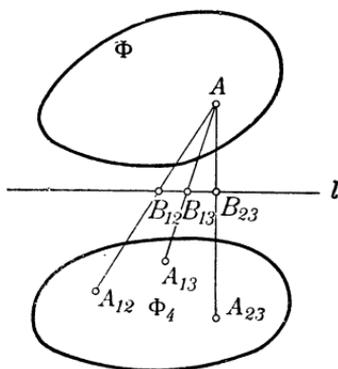
Примечание. Приведенное доказательство остается в силе и в том случае, когда только одна из фигур Φ_1 , Φ_2 является ограниченной. Однако если и Φ_1 и Φ_2 — неограниченные выпуклые фигуры, то утверждение задачи перестает быть справедливым. Дело в том, что между фигурами, простирающимися в бесконечность, может и не существовать кратчайшего расстояния: в то время как паличие сколь угодно близких точек у двух ограниченных фигур означает, что эти фигуры пересекаются, у двух непересекающихся неограниченных фигур Φ_1 и Φ_2 могут существовать сколь угодно близкие точки (черт. 157). Легко видеть, что выпуклые фигуры, изображенные на черт. 157, нельзя разделить никакой прямой.

существовать сколь угодно близкие точки (черт. 157). Легко видеть, что выпуклые фигуры, изображенные на черт. 157, нельзя разделить никакой прямой.

24. Обозначим данные фигуры через Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 , а выпуклую фигуру, являющуюся пересечением Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 , обозначим через Φ (см. задачу 1 из § 1). Нам надо доказать, что фигуры Φ и Φ_4 имеют общую точку.

Допустим, что Φ и Φ_4 не пересекаются. Тогда существует такая прямая l , что фигуры Φ и Φ_4 лежат по разные стороны от нее (задача 23). Мы будем считать для удобства, что прямая l горизонтальна. Φ лежит сверху, а Φ_4 — снизу от нее (черт. 158). Так как каждые три из наших фигур пересекаются, то существует точка A_{12} , принадлежащая фигурам Φ_1 , Φ_2 и Φ_4 , точка A_{13} , принадлежащая Φ_1 , Φ_3 и Φ_4 , и точка A_{23} , принадлежащая Φ_2 , Φ_3 и Φ_4 . Все эти точки лежат снизу от прямой l .

Пусть A — произвольная точка фигуры Φ . В силу выпуклости фигур Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 отрезок $A_{12}A$ принадлежит пересечению фигур Φ_1 и Φ_2 , отрезок $A_{13}A$ — пересечению фигур Φ_1 и Φ_3 , отрезок $A_{23}A$ — пересечению фигур Φ_2 и Φ_3 . В частности, точки B_{12} , B_{13} и B_{23} — точки пересечения этих отрезков с прямой l — принадлежат указанным фигурам. Итак, на прямой l существуют точки, принадлежащие каждому двум из трех фигур Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 . Поэтому в пересечении прямой l с фигурами Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 получаются три отрезка, каждые два из которых имеют общую точку. Отсюда следует (задача 22), что некоторая точка O прямой l принадлежит всем трем указанным отрезкам, т. е. принадлежит всем трем фигурам Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 . Но это противоречит нашему предположению о том, что прямая l не имеет общих точек с пересечением Φ фигур Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 . Таким образом, Φ и Φ_4 пересекаются, и доказательство завершено.



Черт. 158.

25. Укажем лишь этапы доказательства, аналогичного доказательству теоремы Хелли для плоскости, изложенному в решении задач 22—24.

Прежде всего доказываем, что каждые два непересекающихся ограниченных выпуклых тела могут быть разделены некоторой плоскостью. Затем доказываем, что если каждые четыре из пяти ограниченных выпуклых тел Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 , Φ_5 имеют общую точку, то и все эти тела имеют общую точку. Доказательство ведем от противного: предполагаем, что тело Φ_5 не пересекается с общей частью Φ тел Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 , и проводим плоскость L , разделяющую тела Φ и Φ_5 . Оказывается, что четыре плоские ограниченные выпуклые фигуры, получающиеся в пересечении тел Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , Φ_4 с плоскостью L , удовлетворяют условию теоремы Хелли, откуда вытекает, что и Φ должно иметь с плоскостью L общую точку. Полученное противоречие и доказывает предложение.

Последний этап доказательства аналогичен решению задачи 14, позволяющему по индукции перейти от задачи 13 к общей теореме Хелли.

Примечание. Можно доказать, что если каждые четыре из заданных пяти выпуклых тел $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ имеют общую точку, то и все они имеют общую точку, также и при помощи рассуждения, аналогичного решению задачи 13. Этот путь доказательства теоремы Хелли для пространства удобнее намеченного выше тем, что он не предполагает ограниченности фигур. Однако такое доказательство для случая пространственных тел оказывается более сложным, чем доказательство аналогичного предложения для плоских фигур, в то время как доказательство, намеченное выше, точно следует доказательству теоремы Хелли для плоских фигур и не содержит никаких дополнительных трудностей. Действительно, если мы аналогично решению задачи 13 введем точки A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 , где A_0 есть точка, общая для тел $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ и т. д., то нам придется рассмотреть не два, а пять возможных случаев расположения пяти точек A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 , а значительно больше. Однако и тут удастся показать, что во всех случаях существует точка, общая всем пяти телам.

Мы предоставляем читателю полностью восстановить соответствующее доказательство.

26. Мы здесь приведем лишь формулировки теорем, аналогичных теоремам задач 16—19а); доказательства этих теорем похожи на доказательства предложений задач 16—19а), и мы предоставляем читателю провести их самостоятельно (отметим, что аналог теоремы Бляшке для случая пространства нельзя вывести из теоремы, аналогичной предложению задачи 19а).

Аналог теоремы Юнга. В трехмерном пространстве каждое тело диаметра¹⁾ 1 может быть заключено в шар

радиуса $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ($\frac{\sqrt{6}}{4}$ есть радиус сферы, описанной вокруг правильного тетраэдра со стороной 1).

Аналог теоремы Бляшке. Внутри каждого выпуклого тела ширины²⁾ 1, расположенного в трехмерном пространстве, содержится некоторый шар диаметра $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Аналог задачи 18. а) Если в пространстве даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n , то всегда существует такая точка O ,

¹⁾ Диаметром пространственного тела называется наибольшее расстояние между его точками.

²⁾ Шириной выпуклого тела в пространстве называется наименьшее расстояние между парой параллельных опорных плоскостей,

что по каждую сторону от всякой плоскости, проходящей через точку O , находится не менее $\frac{n}{4}$ данных точек.

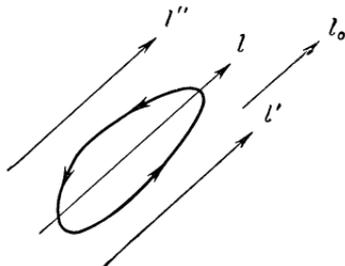
б), в) Если в пространстве дана произвольная поверхность C (произвольное тело P), то всегда существует такая точка O , что поверхность части C (объем части P), находящейся по каждую сторону от произвольной плоскости L , проходящей через O , не меньше $\frac{1}{4}$ поверхности C (объема P).

Аналог задачи 19а). Внутри каждого ограниченного выпуклого тела P существует такая точка O , что каждая хорда AB тела P , проходящая через O , делится точкой O на два отрезка AO и OB , длина каждого из которых не меньше $\frac{1}{4}$ длины AB .

Оценки этих теорем не могут быть улучшены.

§ 3

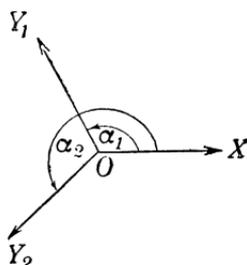
27. Выберем какое-нибудь направление на прямой l_0 и возьмем прямую l' , параллельную выбранному направлению l_0 и такую, что фигура Φ целиком находится слева от нее (черт. 159). Будем двигать теперь прямую l' параллельно самой себе влево до тех пор, пока она не займет такого положения l'' , что вся фигура Φ будет расположена справа от l'' . При этом площадь части фигуры Φ , расположенной справа от передвигаемой прямой l , будет непрерывной функцией расстояния этой прямой от l' ; когда расстояние равно нулю (l совпадает с l'), функция равна



Черт. 159.

нулю, а когда l совпадает с l'' , она равна площади Φ . Следовательно, между l' и l'' найдется такая прямая l , параллельная l' и l'' (т. е. параллельная l_0), что справа от l находится ровно половина (по площади) фигуры Φ , т. е. прямая l , которая делит площадь Φ пополам. Ясно, что для выпуклой фигуры и вообще для всякой фигуры, состоящей из одного куска, проведенная прямая единственна,

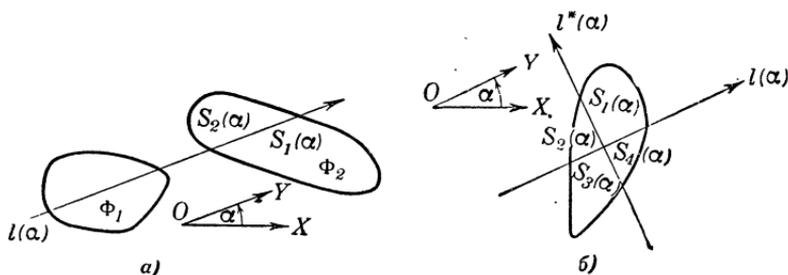
28. а) Выберем в плоскости направление OX , которое будет служить началом



Черт. 160.

отсчета углов; каждое направление OY мы будем определять углом α , который это направление образует с направлением OX (точнее углом α , на который надо повернуть направление OX против часовой стрелки, чтобы оно совпало с направлением OY ; здесь α может принимать любое значение от 0 до 360° ; черт. 160).

Для каждого угла α существует единственная прямая $l(\alpha)$, параллельная направлению OY , образуемому углом α с началом отсчета OX , которая делит площадь фигуры Φ_1 на две равные части (черт. 161, а; см. решение задачи 27). Пусть эта прямая делит площадь фигуры Φ_2 на две неравные части; например, площадь $S_1(\alpha)$ части фигуры Φ_2 , расположенной справа от $l(\alpha)$, больше



Черт. 161.

площади $S_2(\alpha)$ части фигуры Φ_2 , расположенной слева от $l(\alpha)$:

$$S_1(\alpha) - S_2(\alpha) > 0.$$

Заменим угол α на $\alpha + 180^\circ$; очевидно, что прямая $l(\alpha + 180^\circ)$ совпадает с $l(\alpha)$ и отличается от нее только своим направлением. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S_1(\alpha + 180^\circ) &= S_2(\alpha), & S_2(\alpha + 180^\circ) &= S_1(\alpha); \\ S_1(\alpha + 180^\circ) - S_2(\alpha + 180^\circ) &= S_2(\alpha) - S_1(\alpha) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при увеличении угла α в пределах от α до $\alpha + 180^\circ$ разность $S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$ меняет знак с $+$ на $-$; а так как $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$ являются, очевидно, непрерывными функциями угла α , а следовательно, и $S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$ есть непрерывная функция α , то между α и $\alpha + 180^\circ$ должен существовать такой угол α_0 , при котором

$$S_1(\alpha_0) - S_2(\alpha_0) = 0,$$

т. е. при котором прямая $l(\alpha_0)$ делит одновременно и фигуру Φ_1 и фигуру Φ_2 на две равновеликие части.

б) Как и в решении задачи 28а), выберем какое-то направление OX за начало отсчета углов. Для каждого направления OY , которое определяется углом α , образуемым этим направлением с началом отсчета OX , найдется единственная прямая $l(\alpha)$, параллельная OY и делящая площадь фигуры Φ на две равновеликие части (см. задачу 27). Точно так же существует перпендикулярная к OY прямая $l^*(\alpha)$, также делящая фигуру Φ на две равновеликие части. Обозначим площади четырех частей, на которые прямые $l(\alpha)$ и $l^*(\alpha)$ разбивают фигуру Φ (эти площади являются функциями угла α) через $S_1(\alpha)$, $S_2(\alpha)$, $S_3(\alpha)$, $S_4(\alpha)$ (черт. 161, б). По построению

$$S_1(\alpha) + S_2(\alpha) = S_3(\alpha) + S_4(\alpha)$$

и

$$S_1(\alpha) + S_4(\alpha) = S_2(\alpha) + S_3(\alpha),$$

откуда сразу следует, что

$$S_2(\alpha) = S_4(\alpha) \text{ и } S_1(\alpha) = S_3(\alpha).$$

Для того чтобы площади четырех частей, на которые фигура Φ делится прямыми $l(\alpha)$ и $l^*(\alpha)$, были равны, необходимо, чтобы имело место равенство $S_1(\alpha) = S_2(\alpha)$. Предположим, что для какого-то фиксированного угла α (черт. 161, б) $S_1(\alpha) > S_2(\alpha)$, т. е. $S_1(\alpha) - S_2(\alpha) > 0$ (доказательство почти не изменилось бы, если бы было $S_1(\alpha) - S_2(\alpha) < 0$). Если заменить угол α на $\alpha + 90^\circ$ (т. е. повернуть прямые $l(\alpha)$ и $l^*(\alpha)$ против часовой стрелки на 90°), то $l(\alpha + 90^\circ)$ совпадет с $l^*(\alpha)$, а $l^*(\alpha + 90^\circ)$ будет отличаться от $l(\alpha)$ лишь своим направлением. При этом площадь $S_1(\alpha + 90^\circ)$ совпадет

с $S_2(\alpha)$, а $S_2(\alpha + 90^\circ)$ совпадает с $S_3(\alpha) = S_1(\alpha)$, следовательно,

$$S_1(\alpha + 90^\circ) - S_2(\alpha + 90^\circ) = S_2(\alpha) - S_1(\alpha) < 0.$$

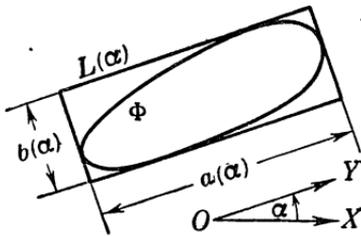
Но так как $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$ являются, очевидно, непрерывными функциями угла α , а следовательно, и их разность $S_1(\alpha) - S_2(\alpha)$ есть тоже непрерывная функция α , то между α и $\alpha + 90^\circ$ должно существовать такое значение угла α_0 , что

$$S_1(\alpha_0) - S_2(\alpha_0) = 0, \text{ т. е. } S_1(\alpha) = S_2(\alpha).$$

Таким образом, взаимно перпендикулярные прямые $l(\alpha_0)$ и $l^*(\alpha_0)$ делят фигуру Φ на четыре равновеликие части.

Примечание. Нетрудно видеть, что в условиях задач 28а) и 28б) можно и не требовать, чтобы рассматриваемые фигуры были выпуклы. Предоставляем читателю самостоятельно разобраться, как надо дополнить доказательства в таком случае.

29. Вокруг каждой выпуклой фигуры Φ можно описать единственный прямоугольник $L(\alpha)$, одна сторона которого $a(\alpha)$ имеет данное направление OY , определяемое углом α между этим направлением и фиксированным началом отсчета углов OX (черт. 162). Обозначим через $b(\alpha)$ сторону прямоугольника, перпендикулярную к $a(\alpha)$, и предположим, что $a(\alpha) \neq b(\alpha)$, например



Черт. 162.

$$a(\alpha) > b(\alpha),$$

т. е.

$$a(\alpha) - b(\alpha) > 0.$$

Если угол α заменить на $\alpha + 90^\circ$, то описанный прямоугольник останется прежним; лишь сторона его $a(\alpha + 90^\circ)$ совпадет с $b(\alpha)$, а $b(\alpha + 90^\circ)$ с точностью до направления совпадет с $a(\alpha)$; при этом

$$a(\alpha + 90^\circ) - b(\alpha + 90^\circ) = b(\alpha) - a(\alpha) < 0.$$

Так как разность $a(\alpha) - b(\alpha)$ является непрерывной функцией α ¹⁾, то между α и $\alpha + 90^\circ$ должен существовать такой

¹⁾ Мы не останавливаемся здесь на деталях доказательства того, что разность $a(\alpha) - b(\alpha)$ является непрерывной функцией α , так как

угол α_0 , что

$$a(\alpha_0) - b(\alpha_0) = 0 \quad \text{или} \quad a(\alpha_0) = b(\alpha_0).$$

Таким образом, описанный вокруг фигуры Φ прямоугольник $L(\alpha_0)$, одна сторона которого образует с началом отсчета OX угол α_0 , является квадратом.

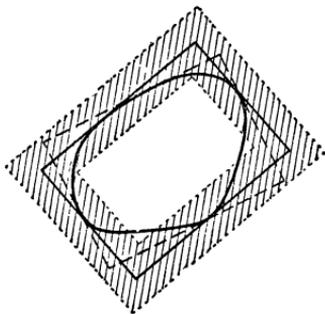
30. а) Вокруг каждой выпуклой кривой K можно описать единственный шестиугольник с равными углами (шестиугольник, все углы которого равны 120°), одна из сторон которого имеет данное направление OY , определяемое углом α между этим направлением и фиксированным началом отсчета углов OX (черт. 164). Обозначим сторону этого шестиугольника, имеющую направление OY , через $a(\alpha)$, а противоположную ей сторону — через $b(\alpha)$. Предположим, что $a(\alpha) \neq b(\alpha)$; пусть, например,

$$a(\alpha) > b(\alpha), \quad \text{т. е.} \quad a(\alpha) - b(\alpha) > 0.$$

При замене угла α на угол $\alpha + 180^\circ$ описанный шестиугольник останется прежним; при этом сторона $a(\alpha + 180^\circ)$

этот факт представляется геометрически очевидным. Идея точного доказательства состоит в следующем.

Рассмотрим некоторый описанный вокруг Φ прямоугольник, одна из сторон которого образует угол α с началом отсчета OX . Этот прямоугольник мы обозначим через $L(\alpha)$. Нетрудно доказать, что если $\Delta\alpha$ (изменение угла α) достаточно мало, то точки соприкосновения выпуклой фигуры Φ и сторон описанного вокруг Φ прямоугольника $L(\alpha + \Delta\alpha)$ близки к точкам соприкосновения соответствующих сторон прямоугольника $L(\alpha)$ с фигурой Φ (если стороны прямоугольника $L(\alpha)$ соприкасаются с границей фигуры Φ по целому отрезку, то одна из точек соприкосновения — один из концов отрезка — близка к точке соприкосновения соответствующей стороны



Черт. 163.

$L(\alpha + \Delta\alpha)$). Отсюда следует, что прямоугольник $L(\alpha + \Delta\alpha)$ при малом $\Delta\alpha$ близок к прямоугольнику $L(\alpha)$, т. е. что прямоугольник $L(\alpha + \Delta\alpha)$ целиком заключается внутри некоторой узкой «рамки», описанной вокруг $L(\alpha)$ (черт. 163). Из этого нетрудно усмотреть, что длины $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$, а следовательно, и их разность $a(\alpha) - b(\alpha)$ — непрерывные функции α .

совпадет с $b(\alpha)$, а $b(\alpha + 180^\circ)$ совпадет с $a(\alpha)$. Таким образом, мы будем иметь:

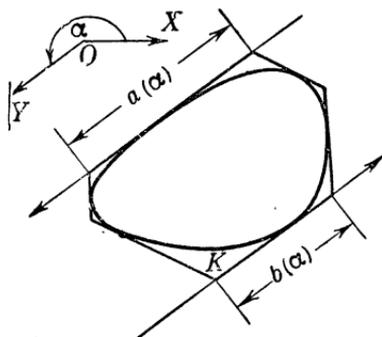
$$a(\alpha + 180^\circ) - b(\alpha + 180^\circ) = b(\alpha) - a(\alpha) < 0.$$

Так как разность $a(\alpha) - b(\alpha)$ является непрерывной функцией α ¹⁾, то между α и $\alpha + 180^\circ$ должен существовать такой угол α_0 , что

$$a(\alpha_0) - b(\alpha_0) = 0$$

или

$$a(\alpha_0) = b(\alpha_0).$$

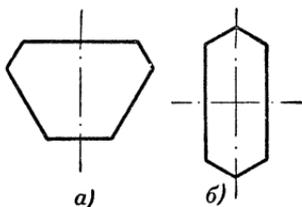


Черт. 164.

Итак, шестиугольник $L(\alpha_0)$ имеет пару равных противоположных сторон.

б) Заметим, что если шестиугольник, все углы которого равны между собой (и равны 120°), имеет оси симметрии, то одна из этих осей обязательно должна проходить через середины противоположных сторон (шестиугольник может иметь

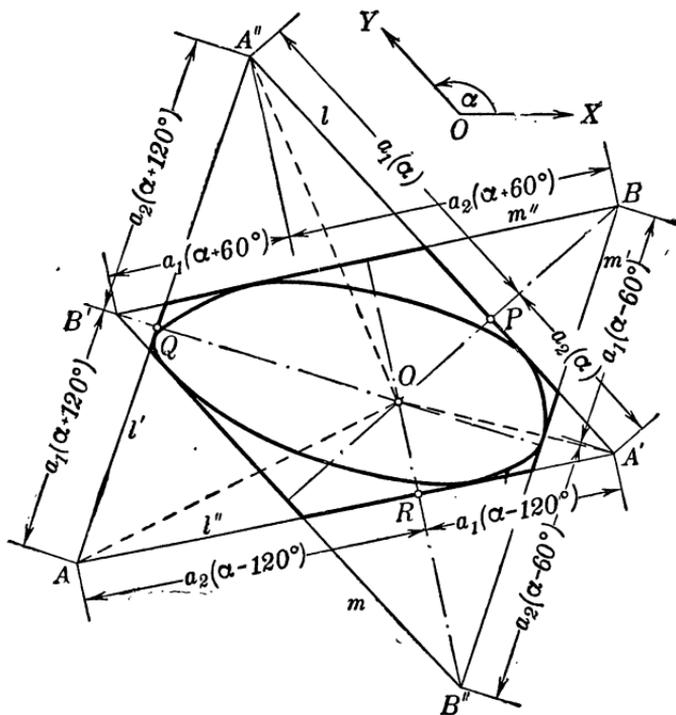
еще и другие оси симметрии). Действительно, легко видеть, что ось симметрии всякого многоугольника может пересекать его границу или в вершине (в этом случае она будет биссектрисой соответствующего угла), или в середине стороны (в этом случае она будет перпендикулярна к этой стороне). Отсюда следует, что у шестиугольника с равными углами, противоположные стороны которого параллельны, ось симметрии может проходить либо через середины противоположных сторон (черт. 165, а), либо через противоположные вершины (черт. 165, б); в последнем случае она делит шестиугольник на две равнобокие трапеции (углы при основании которых



Черт. 165.

¹⁾ Непрерывность функции $a(\alpha) - b(\alpha)$ геометрически представляется очевидной; точное доказательство аналогично доказательству, намеченному в предыдущем подстрочном примечании.

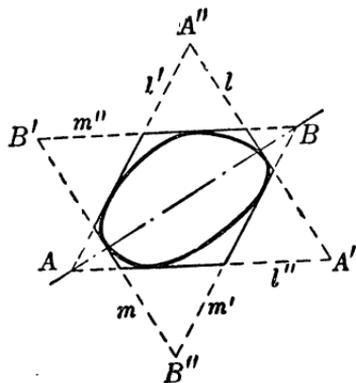
равны 60°), и шестиугольник имеет также ось симметрии, проходящую через середины противоположных сторон. Следовательно, надо искать описанный вокруг выпуклой фигуры шестиугольник, имеющий ось симметрии, проходящую через середины противоположных сторон (и перпендикулярную к этим сторонам).



Черт. 166.

Вокруг выпуклой фигуры Φ можно описать единственный шестиугольник с равными углами, одна из сторон которого имеет данное направление OY , образующее угол α с фиксированным началом отсчета углов OX . Этот шестиугольник мы обозначим через $L(\alpha)$, а последовательные стороны этого шестиугольника — опорные прямые фигуры Φ — через l, m', l', m, l'', m' (черт. 166). Прямые l, l', l'' и m, m, m' образуют два равносторонних треугольника; вершины этих треугольников

мы обозначим через A, A', A'' и B'', B, B' (вершина A лежит против стороны l , вершина B'' — против стороны m'' и т. д.). Если шестиугольник $L(\alpha)$ имеет ось симметрии, проходящую через середину стороны l и перпендикулярную к ней, то эта ось симметрии (в силу вышеприведенного замечания об осях симметрии) проходит также через две вершины рассматриваемых равносторонних треугольников: вершину A треугольника $AA'A''$ и вершину B треугольника $BB'B''$ (черт. 167). Обратно, если перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону l , проходит через вершину A (т. е. делит сторону $A'A''$ равно-



Черт. 167.

стороннего треугольника $AA'A''$ на две равные части), то шестиугольник $L(\alpha)$ имеет ось симметрии.

Предположим теперь, что последнее обстоятельство не имеет места, т. е. что перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую l , делит отрезок $A'A''$ на две неравные части $a_1(\alpha)$ и $a_2(\alpha)$. Пусть, например, отрезок $a_1(\alpha)$ стороны $A'A''$, примыкающий к вершине A'' , будет больше второго отрезка $a_2(\alpha)$ (см. черт. 166). Опустим из B' и B'' перпендикуляры соответственно на стороны AA'' и AA' треугольника $AA'A''$. Отрезки, на которые эти перпендикуляры разбивают соответствующие стороны треугольника $AA'A''$, обозначим через $a_1(\alpha + 120^\circ)$, $a_2(\alpha + 120^\circ)$ и $a_1(\alpha - 120^\circ)$, $a_2(\alpha - 120^\circ)$; очевидно, отрезки $a_1(\alpha)$ и $a_2(\alpha)$ переходят в $a_1(\alpha + 120^\circ)$ и $a_2(\alpha + 120^\circ)$, соответственно в $a_1(\alpha - 120^\circ)$ и $a_2(\alpha - 120^\circ)$,

если заменить угол α на $\alpha + 120^\circ$, соответственно на $\alpha - 120^\circ$. Опущенные из B, B' и B'' перпендикуляры являются высотами равностороннего треугольника $BB'B''$ и, следовательно, пересекаются в одной точке O ; отсюда получаем¹⁾:

$$\begin{aligned} a_1(\alpha)^2 + a_1(\alpha + 120^\circ)^2 + a_1(\alpha - 120^\circ)^2 &= \\ &= a_2(\alpha)^2 + a_2(\alpha + 120^\circ)^2 + a_2(\alpha - 120^\circ)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, если $a_1(\alpha) > a_2(\alpha)$, то невозможно, чтобы одновременно было

$$a_1(\alpha + 120^\circ) > a_2(\alpha + 120^\circ)$$

и

$$a_1(\alpha - 120^\circ) > a_2(\alpha - 120^\circ).$$

Предположим, например, что

$$a_1(\alpha - 120^\circ) < a_2(\alpha - 120^\circ).$$

Функция $a_1(\alpha) - a_2(\alpha)$ является непрерывной функцией угла α ²⁾, откуда следует, что между $\alpha - 120^\circ$ и α найдется такой угол α_0 , что $a_1(\alpha_0) - a_2(\alpha_0) = 0$ или $a_1(\alpha_0) = a_2(\alpha_0)$. Следовательно, шестиугольник $L(\alpha_0)$ имеет ось симметрии, проходящую через середины пары противоположных сторон.

Примечание. Можно утверждать даже несколько больше, чем только существование некоторого описанного вокруг выпуклой фигуры Φ шестиугольника, имеющего ось симметрии, проходящую через середины противоположных сторон. А именно, изменив несколько наше доказательство, мы сможем доказать, что существует шестиугольник подобного рода, у которого ось симметрии составляет с произвольным наперед заданным направлением угол, меньший 60° .

¹⁾ Из черт. 166 видно, что

$$\begin{aligned} a_1(\alpha)^2 &= A'O^2 - OP^2, & a_1(\alpha + 120^\circ)^2 &= AO^2 - OQ^2, \\ a_1(\alpha - 120^\circ)^2 &= A'O^2 - OR^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a_2(\alpha)^2 &= A'O^2 - OP^2, & a_2(\alpha + 120^\circ)^2 &= A'O^2 - OQ^2, \\ a_2(\alpha - 120^\circ)^2 &= AO^2 - OR^2, \end{aligned}$$

откуда сразу следует нужное нам соотношение.

²⁾ Непрерывность функции $a_1(\alpha) - a_2(\alpha)$ геометрически представляется очевидной; точное доказательство близко к доказательству, наменченному в подстрочном примечании на стр. 175.

Действительно, опустим соответственно из вершин A'' и A' перпендикуляры на стороны BB' и BB'' треугольника $BB'B''$. Отрезки, на которые эти перпендикуляры делят стороны BB' и BB'' , обозначим через $a_1(\alpha + 60^\circ)$, $a_2(\alpha + 60^\circ)$ и соответственно $a_1(\alpha - 60^\circ)$, $a_2(\alpha - 60^\circ)$ (см. черт. 166); легко видеть, что отрезки $a_1(\alpha)$ и $a_2(\alpha)$ переходят в $a_1(\alpha + 60^\circ)$ и $a_2(\alpha + 60^\circ)$, соответственно в $a_1(\alpha - 60^\circ)$ и $a_2(\alpha - 60^\circ)$ при замене α на $\alpha + 60^\circ$, соответственно на $\alpha - 60^\circ$. Нетрудно доказать, что

$$a_1(\alpha + 60^\circ) - a_2(\alpha + 60^\circ) = a_1(\alpha - 120^\circ) - a_2(\alpha - 120^\circ)$$

и

$$a_1(\alpha - 60^\circ) - a_2(\alpha - 60^\circ) = a_1(\alpha + 120^\circ) - a_2(\alpha + 120^\circ),$$

так как (для верхней строчки) обе эти разности равны удвоенному расстоянию между параллельными прямыми, проведенными через точки A'' и B'' перпендикулярно к прямой BB' (или AA').

Таким образом, если $a_1(\alpha) > a_2(\alpha)$, то

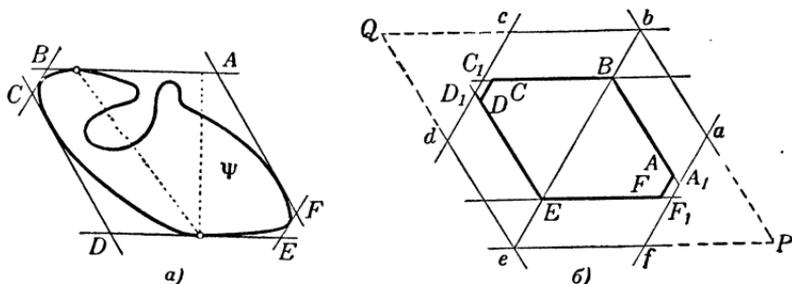
$$a_1(\alpha + 60^\circ) < a_2(\alpha + 60^\circ) \quad \text{или} \quad a_1(\alpha - 60^\circ) < a_2(\alpha - 60^\circ).$$

Отсюда в силу непрерывности разности $a_1(\alpha) - a_2(\alpha)$ как функции от α вытекает, что между α и $\alpha + 60^\circ$ или между α и $\alpha - 60^\circ$, где угол α определяет некоторое произвольно фиксированное направление, найдется такой угол α_0 , что шестиугольник $L(\alpha_0)$ имеет ось симметрии, и стороны, перпендикулярные к оси симметрии, составляют угол α_0 с началом отсчета углов. Наше утверждение доказано. Это замечание впоследствии окажется полезным.

31. В решении задачи 30а) доказываем, что вокруг всякой выпуклой фигуры можно описать шестиугольник с равными углами, имеющий пару равных противоположных сторон. Отсюда непосредственно следует, что вокруг всякой (не обязательно выпуклой) ограниченной фигуры Ψ можно описать такой шестиугольник. Действительно, всякий шестиугольник, описанный вокруг выпуклой оболочки фигуры Ψ , будет одновременно описан и вокруг Ψ (см. текст на стр. 44—45).

Пусть теперь нам дана плоская фигура Ψ диаметра 1; опишем вокруг этой фигуры шестиугольник $ABCDEF$ (черт. 168, а), все углы которого равны 120° и противоположные стороны AB и DE равны. Расстояние между каждой парой противоположных сторон не больше 1. Действительно, если бы, например, расстояние между опорными прямыми AB и DE фигуры Ψ было больше 1, то расстояние между точками, в которых эти опорные прямые касаются фигуры, было бы тоже больше 1, что противоречит тому, что диаметр Ψ равен 1.

Увеличим теперь шестиугольник $ABCDEF$, сдвинув параллельно самим себе все его стороны так, чтобы расстояние между каждой парой параллельных сторон стало равным точно единице (может быть, при этом нам вовсе не придется сдвигать некоторые стороны шестиугольника $ABCDEF$). Пусть $abcdef$ есть новый шестиугольник, построенный таким образом, что каждые две его противоположные стороны одинаково удалены от соответствующих им сторон шестиугольника $ABCDEF$ (черт. 168, б). Мы утверждаем, что стороны ab и de шестиугольника $abcdef$ равны между собой. Действительно,



Черт. 168.

сдвинув на одно и то же расстояние противоположные стороны AF и DC шестиугольника $ABCDEF$, мы получим новый шестиугольник $A_1BC_1D_1EF_1$, причем $AA_1 = DD_1$ и, следовательно, $A_1B = D_1E$. Точно так же стороны A_1B и D_1E нового шестиугольника увеличиваются на равные отрезки, когда мы сдвигаем на одно и то же расстояние стороны BC_1 и EF_1 , и затем уменьшаются в одном и том же отношении, когда мы сдвигаем на одинаковое расстояние сами эти стороны (см. черт. 168, б).

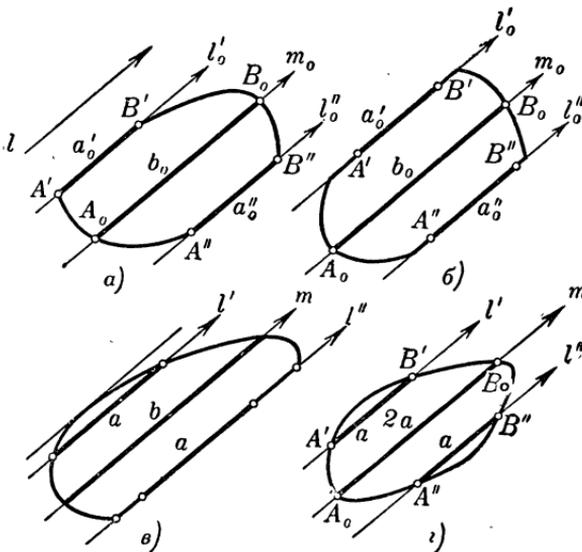
Теперь уже нетрудно показать, что шестиугольник $abcdef$ является искомым правильным шестиугольником. Действительно, продолжим отрезки bc , ba , ed и ef до пересечения так, чтобы образовался параллелограмм $PbQe$ (черт. 168, б). Этот параллелограмм является ромбом, так как его высоты равны. Прямые af и cd перпендикулярны к диагонали PQ этого ромба и, следовательно, параллельны диагонали be . Таким образом, bcd и $abef$ — равнобокие трапеции, так что $bc = de$ и $ab = ef$. Теперь из равенства противоположных сторон шестиугольника следует, что $ab = bc = de = ef$.

Аналогично мы докажем, например, равенство $ab = af = cd = de$ (для этого надо продолжить до пересечения прямые ab , af , cd и de). Таким образом, все стороны шестиугольника $abcdef$ равны между собой и, следовательно, этот шестиугольник — правильный.

Нетрудно проверить, что если расстояние между парой противоположных сторон правильного шестиугольника равно 1, то сторона шестиугольника равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (если расстояние от центра правильного шестиугольника до стороны равно $\frac{1}{2}$, то расстояние от центра до вершины — радиус описанного круга — равно $\frac{1}{2} : \cos 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а следовательно, и сторона равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

32. а) Проведем опорные прямые l'_0 и l''_0 фигуры Φ , параллельные прямой l , и прямую m_0 , также параллельную l и находящуюся на равном расстоянии от l'_0 и l''_0 . Предположим, что длины отрезков, по которым прямые l'_0 и l''_0 соприкасаются с кривой K , равны, соответственно a'_0 и a''_0 и что $a'_0 \leq a''_0$ (если прямые l'_0 и l''_0 имеют с границей Φ лишь по одной общей точке, то $a'_0 = a''_0 = 0$), а длину хорды, высекаемой кривой K на прямой m_0 , обозначим через b_0 . Если $a'_0 \geq \frac{b_0}{2}$, то три хорды кривой K , удовлетворяющие условию задачи, можно расположить на прямых l'_0 , l''_0 и m_0 ; при этом хорды определяются однозначно, если $a'_0 = a''_0 = \frac{b_0}{2}$, и могут быть выбраны разными способами в противном случае (черт. 169, а, б). Если же $a'_0 < \frac{b_0}{2}$, т. е. $b_0 > 2a'_0$, $b_0 - 2a'_0 > 0$, то будем непрерывно двигать прямую l'_0 параллельно самой себе по направлению к прямой l''_0 . Пусть l' — какое-то положение, занимаемое этой прямой в процессе движения, и l'' — прямая, параллельная l' , на которой кривая K определяет хорду такой же длины a , что и на прямой l' ; если

$a''_0 > a'_0$, то возможно, что прямая l'' совпадает с l'_0 , хотя l' и отличается от l'_0 (черт. 169, в). Через m мы обозначим прямую, параллельную прямым l' и l'' и расположенную на равном расстоянии от этих прямых; через b — длину хорды, отсекаемой кривой K на прямой m . При движении l'_0 по направлению к l''_0 разность $b - 2a$ непрерывно изменяется. При

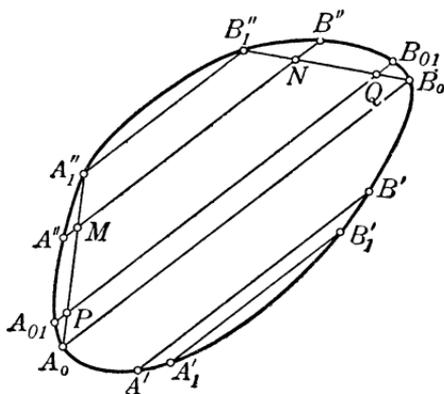


Черт. 169.

этом, если a_1 есть самая длинная хорда кривой K , параллельная направлению l , то когда a становится равным a_1 , b тоже равно a_1 , разность $b - 2a = a_1 - 2a_1$ становится меньше нуля. Из непрерывности разности $b - 2a$, которую можно рассматривать как функцию от расстояния между l'_0 и l' , следует, что при некотором положении прямой l' мы будем иметь $b = 2a$ (черт. 169, г), что и требовалось доказать.

Примечание. Нетрудно доказать, что описанная тройка хорд единственна в том смысле, что прямые, на которых лежат эти хорды, определяются единственным образом. Действительно, пусть $A'B'$, $A''B''$, A_0B_0 и $A'_1B'_1$, $A''_1B''_1$, $A_{01}B_{01}$ — две различные

тройки хорд одного и того же направления, удовлетворяющие условию задачи. Докажем прежде всего, что хорды A_0B_0 и $A_{01}B_{01}$ совпадают. Допустим, что это не так (черт. 170), и пусть h — расстояние между параллельными прямыми A_0B_0 и $A_{01}B_{01}$. Предположим для определенности, что $A_0B_0 \geq A_{01}B_{01}$ (иначе мы поменяли бы



Черт. 170.

ролями эти тройки хорд в последующем рассуждении). Предположим далее, что хорда A_0B_0 расположена по ту же сторону от хорды $A_{01}B_{01}$, что и хорда $A_1'B_1'$ (обратный случай аналогичен). Тогда хорда $A'B'$ расположена между прямыми A_0B_0 и $A_1'B_1'$ (или на прямой $A_1'B_1'$), так как иначе было бы $A'B' < A_1'B_1'$, что противоречит неравенству $A_0B_0 \geq A_{01}B_{01}$. Таким образом, расстояние между параллельными хордами A_0B_0 и $A'B'$ по крайней мере на h меньше, чем

расстояние между $A_{01}B_{01}$ и $A_1'B_1'$. Отсюда легко следует, что расстояние между хордами $A''B''$ и $A_1''B_1''$ не меньше $2h$. Рассмотрим трапецию $A_0B_0B_1''A_1''$. Точки пересечения боковых сторон этой трапеции с $A''B''$ и $A_{01}B_{01}$ обозначим через M , N и P , Q . Тогда из рассмотрения этой трапеции мы заключаем, что

$$MN - A_1''B_1'' \geq 2(A_0B_0 - PQ),$$

ибо расстояние между хордами MN и $A_1''B_1''$ по крайней мере в два раза больше, чем расстояние между хордами A_0B_0 и PQ . С другой стороны, мы имеем:

$$\begin{aligned} A_0B_0 - PQ &> A_0B_0 - A_{01}B_{01} = 2A''B'' - 2A_1''B_1'' = \\ &= 2(A''B'' - A_1''B_1'') > 2(MN - A_1''B_1''), \end{aligned}$$

а это, согласно доказанному выше, больше чем $4(A_0B_0 - PQ)$. Мы получим абсурдное неравенство

$$A_0B_0 - PQ > 4(A_0B_0 - PQ).$$

Итак, хорды A_0B_0 и $A_{01}B_{01}$ совпадают. Отсюда уже без труда получается, что и хорды $A'B'$ и $A_1'B_1'$ (так же как и $A''B''$ и $A_1''B_1''$) расположены на одной прямой.

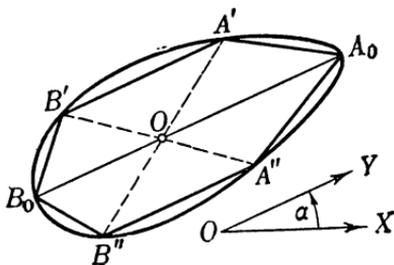
б) Пусть l — некоторая прямая, которая определяется углом α , образуемым ею с некоторым фиксированным началом отсчета углов OX ; для простоты выберем l так, чтобы кривая K не содержала отрезков прямых, параллельных l . Обозначим через $A'B'$, $A''B''$ и A_0B_0 хорды кривой K , параллельные прямой l и такие, что A_0B_0 находится на равном расстоянии от $A'B'$ и $A''B''$ и что $A'B' = A''B'' = \frac{1}{2} A_0B_0$ (см. задачу 32а), в частности примечание в конце решения этой задачи). Шестиугольник $A'B'B_0B''A''A_0$ обозначим через $L(\alpha)$. Диагонали $A'B''$ и $A''B'$ шестиугольника $L(\alpha)$, очевидно, пересекаются в точке O диагонали A_0B_0 и делятся в этой точке пополам (черт. 171).

Предположим теперь, что в нашем шестиугольнике $A_0O \neq OB_0$; пусть, например, $A_0O > OB_0$, $A_0O - OB_0 > 0$.

При непрерывном увеличении угла α шестиугольник $L(\alpha)$ будет также изменяться непрерывно. Если даже некоторому углу α соответствует не единственный шестиугольник $L(\alpha)$, что возможно в том случае, когда кривая K содержит отрезки прямых, составляющие угол α с началом отсчета углов, то мы в процессе изменения шестиугольника перейдем от шестиугольников, соответствующих углам, меньшим α , к шестиугольнику $L_2(\alpha)$, изображенному на черт. 172, б, затем непрерывно переведем этот шестиугольник в шестиугольник $L_1(\alpha)$, изображенный на черт. 172, а, и далее перейдем к углам, большим α .

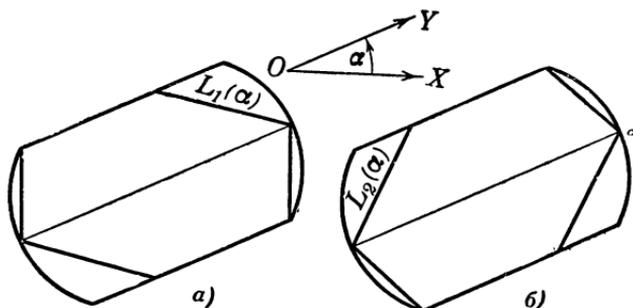
Когда мы таким образом заменим угол α на $\alpha + 180^\circ$, мы придем к тому же шестиугольнику $L(\alpha)$; однако при этом отрезки A_0O и OB_0 поменяются ролями, и разность $A_0O - OB_0$ перейдет в $B_0O - OA_0 < 0$, т. е. эта разность меняет знак. Это означает, что существует некоторый шестиугольник $L(\alpha_0)$, для которого

$$A_0O = OB_0 = A'B' = A''B'' \quad \text{и} \quad B'O = OA'', \quad A'O = OB''.$$



Черт. 171.

Отсюда следует, что $A'B'OA_0$ — параллелограмм ($A'B'$ равно и параллельно A_0O) и $OB_0B''A''$ — также параллелограмм



Черт. 172.

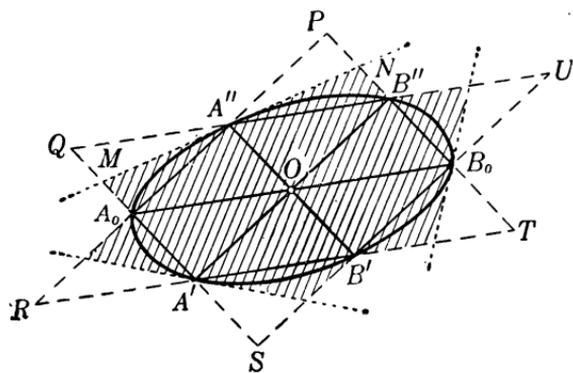
(OB_0 равно и параллельно $A''B''$). Таким образом,

$$A_0A' \parallel A''B'' \parallel B''B_0,$$

и аналогично доказывается, что

$$B'B_0 \parallel A'B'' \parallel A_0A''.$$

33. а) В выпуклую кривую K , ограничивающую фигуру Φ ,



Черт. 173.

впишем шести-
угольник

$$A'B'B_0B''A''A_0,$$

удовлетворяющий условиям задачи 326) (черт. 173). Этот шестиугольник представляет собой выпуклую центрально-симметричную фигуру, заключенную внутри фигуры Φ . Мы утверждаем,

что его площадь не может быть меньше чем $\frac{2}{3}$ площади фигуры Φ .

Обозначим площадь треугольника $A'B'O$ через σ . Диагонали $A'B''$, $B'A''$ и A_0B_0 разбивают шестиугольник $A'B'B_0B''A''A_0$

на шесть равных треугольников, одним из которых является треугольник $A'B'O$; таким образом, площадь этого шестиугольника равна 6σ . Продолжив стороны $A'B'$, B_0B'' , $A''A_0$ и, соответственно, $B'B_0$, $B''A''$, A_0A' шестиугольника $A'B'B_0B''A''A_0$ до их взаимного пересечения, мы получим изображенный на черт. 173 звездчатый 12-угольник $PA''QA_0RA'SB'TB_0UB''$, состоящий, как легко видеть, из 12 треугольников, равных треугольнику $A'B'O$. Следовательно, площадь этого 12-угольника равна 12σ . Так как очевидно, что фигура Φ заключается внутри этого звездчатого 12-угольника, то мы можем утверждать, что площадь Φ меньше 12σ и, следовательно, площадь шестиугольника $A'B'B_0B''A''A_0$ не меньше половины площади фигуры Φ . Однако эту оценку можно значительно усилить.

Проведем через вершины A' , B_0 , A'' какие-нибудь опорные прямые фигуры Φ ; они отсекут от рассматриваемого звездчатого 12-угольника некоторый меньший звездчатый 9-угольник (заштрихованный на черт. 173). Площадь этого 9-угольника, как нетрудно видеть, равна 9σ . Действительно, пусть, например, опорная прямая фигуры Φ , проходящая через точку A'' , отсекает от принадлежащих 12-угольнику треугольников $A_0A''Q$ и $A''B''P$ треугольники $A''MQ$ и $A''NP$ (см. черт. 173). При этом

$$\triangle A_0A''Q = \triangle A''B''P = \triangle OA''B'',$$

следовательно,

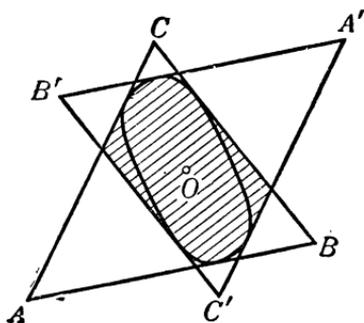
$$S_{\triangle A_0A''Q} + S_{\triangle A''B''P} = 2\sigma.$$

Далее, $\triangle A''MQ = \triangle A''B''N$ (по стороне $A''Q = A''B''$ и двум прилежащим к ней углам) и $\triangle A''NP = \triangle A_0A''M$, следовательно,

$$S_{\triangle A''MQ} + S_{\triangle A''NP} = \frac{1}{2} (S_{\triangle A_0A''Q} + S_{\triangle A''B''P}) = \sigma.$$

Точно так же опорные прямые фигуры Φ , проведенные в точках B_0 и A' , отсекают от 12-угольника по паре треугольников общей площади σ . Таким образом, площадь 9-угольника равна $12\sigma - 3\sigma = 9\sigma$. Но фигура Φ заключается внутри этого 9-угольника; следовательно, площадь Φ не больше 9σ , и площадь шестиугольника $A'B'B_0B''A''A_0$, равная 6σ , не меньше $\frac{2}{3}$ площади Φ .

б) Пусть O — центр некоторой центрально-симметричной фигуры Φ , вписанной в треугольник ABC . Отразим симметрично Φ относительно точки O ; при этом фигура Φ перейдет в себя, а треугольник ABC перейдет в треугольник $A'B'C'$, симметричный ABC относительно точки O (черт. 174). Так как фигура Φ заключалась внутри $\triangle ABC$, то полученная из Φ при нашей симметрии относительно точки O фигура, совпадающая с Φ , заключается внутри $\triangle A'B'C'$. Таким образом, мы можем заключить, что Φ заключено как внутри $\triangle ABC$, так и внутри $\triangle A'B'C'$, т. е. что Φ заключено внутри



Черт. 174.

пересечения треугольников ABC и $A'B'C'$. Но это пересечение само является центрально-симметричной выпуклой фигурой: при симметрии относительно O треугольник ABC переходит в $\triangle A'B'C'$, $\triangle A'B'C'$ переходит в $\triangle ABC$, а пересечение этих треугольников переходит в себя. Таким образом, мы видим, что пересечение треугольников ABC и $A'B'C'$ является самой большой центрально-

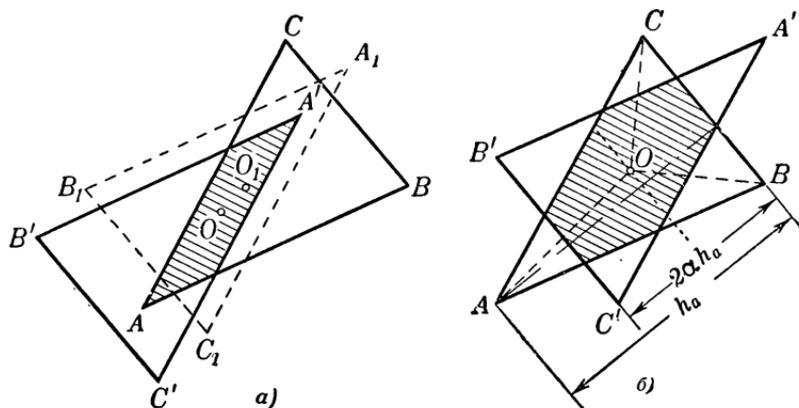
симметричной фигурой, заключенной внутри треугольника ABC и имеющей центр в точке O ; всякая другая такая фигура заключена внутри этого пересечения.

Итак, для того чтобы найти наибольшую центрально-симметричную фигуру, заключенную внутри треугольника ABC , нам надо найти внутри треугольника ABC такую точку O , чтобы площадь пересечения треугольника ABC и треугольника $A'B'C'$, получаемого из треугольника ABC симметрией относительно O , была наибольшей.

В зависимости от положения точки O это пересечение может быть параллелограммом (черт. 175, а) или центрально-симметричным шестиугольником (черт. 175, б). Однако сразу видно, что в том случае, когда пересечение представляет собой параллелограмм, всегда можно так изменить положение точки O , чтобы пересечение $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ стало шестиугольником и увеличилось по площади (см. черт. 175, а). Следовательно, наибольшая вписанная в данный треугольник

ABC центрально-симметричная фигура обязательно должна быть шестиугольником.

Если пересечение представляет собой шестиугольник, то треугольник $A'B'C'$ отсекает от треугольника ABC три маленьких треугольника, подобных треугольнику ABC (стороны каждого из этих треугольников параллельны сторонам треугольника ABC). Обозначим стороны треугольника ABC через a , b и c , соответствующие высоты этого треугольника — через h_a , h_b и h_c и отношения расстояний точки O от сторон



Черт. 175.

треугольника ABC к соответствующим высотам через α , β и γ . При этих обозначениях расстояния точки O от сторон треугольника ABC равны соответственно αh_a , βh_b и γh_c . Из того, что

$$\alpha h_a = \beta h_b = \gamma h_c = 2S_{\triangle ABO}$$

и

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \alpha h_a + \beta \cdot \beta h_b + \gamma \cdot \gamma h_c &= \\ &= 2S_{\triangle BCO} + 2S_{\triangle ACO} + 2S_{\triangle ABO} = 2S_{\triangle ABC}, \end{aligned}$$

следует, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Из черт. 175, б) легко усмотреть, что коэффициент подобия треугольника, отсекаемого от $\triangle ABC$ стороной $B'C'$, и самого треугольника ABC равен $\frac{h_a - 2\alpha h_a}{h_a} = 1 - 2\alpha$ (так как расстоя-

ние от O до BC равно ah_a , то расстояние между BC и $B'C'$ равно $2ah_a$; точно так же коэффициент подобия треугольника, отсекаемого от $\triangle ABC$ стороной $A'C'$, и самого треугольника ABC равен $1-2\beta$, и коэффициент подобия треугольника, отсекаемого стороной $A'B'$, и треугольника ABC равен $1-2\gamma$.

Таким образом, сумма площадей трех треугольников, отсекаемых от треугольника ABC сторонами треугольника $A'B'C'$, равна

$$\begin{aligned} & [(1-2\alpha)^2 + (1-2\beta)^2 + (1-2\gamma)^2] S_{\triangle ABC} = \\ & = [3-4\alpha-4\beta-4\gamma+4\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2] S_{\triangle ABC} = \\ & = [4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-1] S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

(напоминаем, что $\alpha+\beta+\gamma=1$). Эта сумма будет наименьшей, если сумма $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ будет наименьшей. Но

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= \frac{1}{3} [(\alpha+\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\gamma)^2] = \\ &= \frac{1}{3} [1 + (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\gamma)^2], \end{aligned}$$

откуда следует, что сумма $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ будет наименьшей, если

$$\alpha-\beta=0, \quad \beta-\gamma=0 \quad \text{и} \quad \alpha-\gamma=0,$$

т. е. если

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}.$$

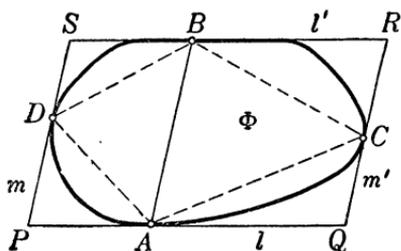
А в этом случае (нетрудно видеть, что он имеет место, если точка O совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC)

$$[4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-1] = \frac{1}{3}.$$

Итак, в рассматриваемом случае сумма площадей трех треугольников, отсекаемых от треугольника ABC , равна $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, а площадь пересечения треугольников ABC и $A'B'C'$ — площадь наибольшей центрально-симметричной фигуры, которую можно заключить внутри треугольника ABC , — равна $\frac{2}{3} S_{\triangle ABC}$.

34. а) Проведем произвольную пару параллельных опорных прямых l и l' фигуры Φ , которые соприкасаются с ней соответственно в точках A и B (может быть, не единственных; черт. 176). Проведем теперь параллельно прямой AB опорные прямые m и m' фигуры Φ , соприкасающиеся с ней соответственно в точках C и D (тоже, возможно, не единственных). Четыре прямые l , l' , m и m' определяют параллелограмм $PQRS$, описанный вокруг Φ . Отрезок AB разбивает этот параллелограмм на два меньших параллелограмма. При этом очевидно, что площадь одного из них равна удвоенной площади треугольника ABC , а площадь второго — удвоенной площади треугольника ABD .

Таким образом, площадь всего параллелограмма $PQRS$ равна удвоенной площади четырехугольника $ACBD$. Но из выпуклости фигуры Φ следует, что она заключает $ACBD$ внутри себя. Отсюда вытекает, что площадь параллелограмма $PQRS$ (который является центрально-симметричной выпуклой фигурой, содержащей Φ внутри



Черт. 176.

себя) не больше удвоенной площади Φ , что и требовалось доказать.

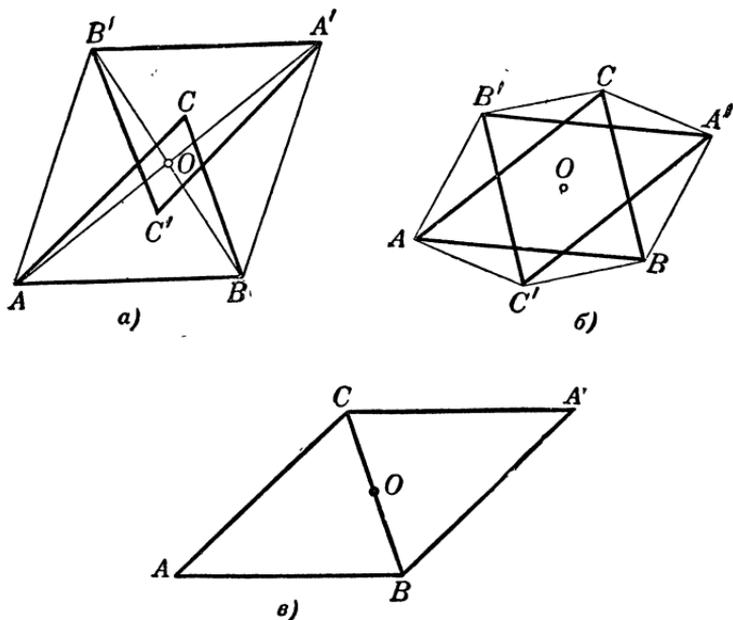
б) Аналогично решению задачи 33б) заключаем, что каждая центрально-симметричная фигура с центром симметрии в некоторой точке O , заключающая внутри себя треугольник ABC , содержит внутри себя также и треугольник $A'B'C'$, симметричный ABC относительно O . Следовательно, выпуклая центрально-симметричная фигура, содержащая ABC внутри себя, содержит внутри себя выпуклую оболочку пары треугольников ABC и $A'B'C'$ (см. выше, стр. 44).

Пересечение треугольников ABC и $A'B'C'$ может быть параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником (см. черт. 175, а и б). В первом случае выпуклая оболочка треугольников ABC и $A'B'C'$ представляет собой параллелограмм $ABA'B'$ (черт. 177, а), площадь которого не может быть меньше удвоенной площади треугольника ABC .

Действительно,

$$S_{ABA'B'} = 4S_{\triangle AOB};$$

но $S_{\triangle AOB} \geq \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, ибо если бы высота треугольника AOB была меньше половины высоты треугольника ABC , то точка C' находилась бы вне треугольника ABC (за стороной AB) и пересечение ABC и $A'B'C'$ не было бы параллелограммом.



Черт. 177.

Во втором случае выпуклая оболочка представляет собой центрально-симметричный шестиугольник $AC'BA'CB'$ (черт. 177, б), площадь которого в точности равна удвоенной площади треугольника ABC . В самом деле,

$$\begin{aligned} S_{AC'BA'CB'} &= S_{\triangle OAB'} + S_{\triangle OA'B} + S_{\triangle OCA'} + S_{\triangle OC'A} + S_{\triangle OBC'} + \\ &+ S_{\triangle OB'C} = 2S_{\triangle OAB'} + 2S_{\triangle OCA'} + 2S_{\triangle OBC'}, \end{aligned}$$

но

$$S_{\triangle OAB'} = S_{\triangle OAB},$$

ибо AO есть медиана треугольника $AB'B$, и аналогично

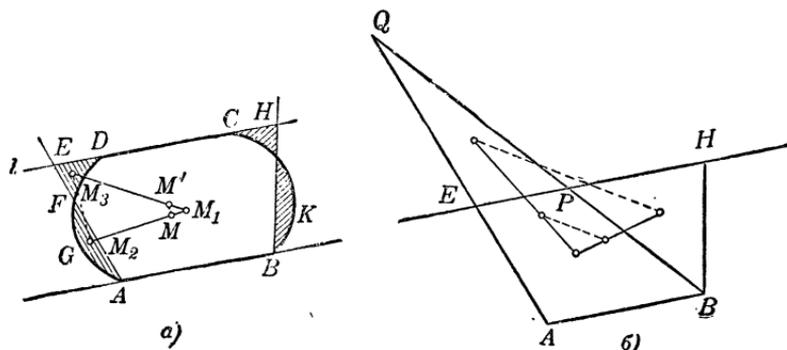
$$S_{\Delta OCA'} = S_{\Delta OCA}, \quad S_{\Delta OBC'} = S_{\Delta OBC},$$

и следовательно,

$$S_{AC'VA'CB'} = 2S_{OAB} + 2S_{OCA} + 2S_{OBC} = 2S_{ABC}.$$

Примечание. Самый простой пример центрально-симметричной выпуклой фигуры, площадь которой равна $2S_{\Delta ABC}$, заключающей ΔABC внутри себя, дается параллелограммом, изображенным на черт. 177, в.

35. а) Пусть l есть некоторая опорная прямая фигуры Φ , l' — другая опорная прямая, параллельная l ; расстояние d между l и l' больше или равно 1 (ибо ширина фигуры Φ равна 1). Предположим, что прямая l соприкасается с границей Φ по отрезку CD , а прямая l' — по отрезку AB (D может совпасть с C , а B — с A). Граница фигуры Φ разбивается на четыре части: отрезок AB , отрезок CD и две кривые DA и BC (черт. 178, а). Предположим, что



Черт. 178.

часть AD границы Φ не является прямолинейным отрезком. Соединим точки A и D прямой AD и будем поворачивать ее вокруг точки A ; пусть E — переменная точка пересечения вращающейся прямой с опорной прямой l , перемещающаяся по прямой l в направлении от точки D влево, а F — точка пересечения этой же прямой с кривой AD .

При вращении прямой AE площадь сегмента AGF уменьшается от ее наибольшего значения, равного площади

сегмента AD фигуры Φ , до нуля, а площадь криволинейного треугольника DEF увеличивается, начиная от нуля, и становится в конце концов больше любого числа. Разность $S_{AGF} - S_{DEF}$ этих двух площадей непрерывно изменяется; при этом в начальном положении отрезка эта разность положительна (она равна площади сегмента AD), а впоследствии она становится отрицательной. Отсюда следует, что на кривой AD найдется такая точка F , что

$$S_{AGF} - S_{DEF} = 0,$$

т. е. что площадь сегмента AGF равна площади криволинейного треугольника DEF .

Заменим прежде всего фигуру Φ фигурой $ABCEA$, имеющей ту же самую площадь, что и Φ . Пусть M_1 есть центр тяжести части $ABCDA$ фигуры Φ (без сегмента AGF), точка M_2 — центр тяжести сегмента AGF и точка M_3 — центр тяжести криволинейного треугольника DEF . Фигура Φ состоит из той же части $ABCDA$ и сегмента AGF ; центр тяжести M фигуры Φ находится на прямой M_1M_2 . Фигура $ABCEFA$ состоит из части $ABCDA$ и криволинейного треугольника DEF ; центр тяжести M' этой фигуры находится на прямой M_1M_3 .

При этом $\frac{M_1M'}{M'M_3} = \frac{M_1M}{MM_2}$ и, следовательно, $MM' \parallel M_2M_3$. Отсюда вытекает, что центр тяжести M' фигуры $ABCEFA$ расположен не дальше от прямой l , чем центр тяжести M фигуры Φ .

Заменив точно так же, как это было сделано выше, кривую BC , ограничивающую фигуру Φ , прямолинейным отрезком BH , мы придем к трапеции $ABHE$, имеющей ту же площадь, что и фигура Φ , центр тяжести которой не более удален от прямой l , чем центр тяжести фигуры Φ .

Если отрезок AB имеет нулевую длину (B совпадает с A), то эта трапеция превращается в треугольник.

Если B совпадает с A , то центр тяжести M' треугольника $EАН$ удален от прямой l на расстояние, равное $\frac{1}{3}$ высоты d треугольника (медиана AR треугольника $AЕН$ делится центром тяжести M' в отношении $\frac{RM'}{RA} = \frac{1}{3}$), т. е. не

меньшее чем $\frac{1}{3}$. Следовательно, и расстояние M от l заведомо не меньше $\frac{1}{3}$. Если $EABH$ есть трапеция, то центр тяжести M' этой трапеции лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести треугольников AEH и ABH . Но центр тяжести первого из этих треугольников удален от l на расстояние $\frac{1}{3}d$, а центр тяжести второго треугольника удален на то же расстояние от прямой l' , т. е. удален от l на расстояние $\frac{2}{3}d$. Следовательно, расстояние M' от l больше $\frac{1}{3}d \geq \frac{1}{3}$, а значит, и расстояние M от l наверное больше $\frac{1}{3}$.

б) Рассмотрим некоторую выпуклую фигуру Φ площади S , граница которой содержит отрезок AB (см. черт. 178, а) и докажем, что при замене этой фигуры треугольником ABQ той же площади с основанием AB расстояние центра тяжести фигуры от прямой AB только увеличится.

Проведем опорную прямую l фигуры Φ , параллельную отрезку AB ; пусть прямая l имеет с границей фигуры Φ общий отрезок CD (при этом точка C может совпадать с D). В точности так же, как и при решении задачи 35а), заменим фигуру Φ трапецией $ABHE$ (см. черт. 178, а), центр тяжести M' которой расположен не ближе к прямой AB , чем центр тяжести M фигуры Φ .

Обозначим основания трапеции через $AB=a$ и $EH=b$ и отложим на прямой AE от точки A отрезок AQ , равный $AE \cdot \frac{a+b}{a}$ (черт. 178, б). Тогда высота треугольника ABQ будет относиться к высоте трапеции $ABHE$, как $(a+b):a$, откуда следует, что площадь этого треугольника будет равна площади трапеции $ABHE$. Заменим теперь трапецию $ABHE$ треугольником ABQ , имеющим ту же площадь. Трапеция $ABHE$ состоит из четырехугольника $ABPE$ и треугольника BHP ; ее центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести этих двух частей. Треугольник ABQ состоит из четырехугольника $ABPE$ и треугольника PEQ ; центр тяжести треугольника ABQ расположен на отрезке, соединяющем центры тяжести составляющих его частей. Отсюда без

труда выводим, что центр тяжести треугольника ABQ более удален от отрезка AB , чем центр тяжести трапеции $ABHE$.

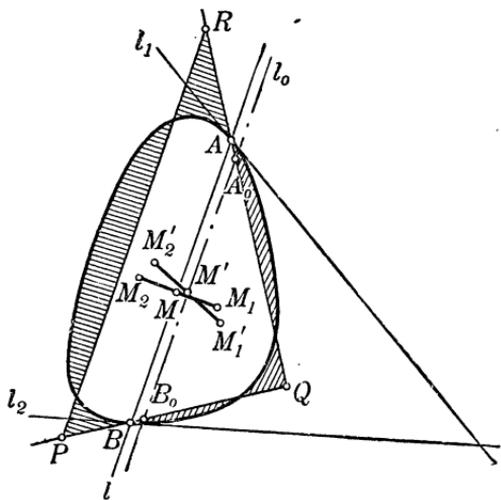
Таким образом, расстояние центра тяжести треугольника ABQ от прямой AB не меньше расстояния центра тяжести первоначальной фигуры Φ от этой прямой. Но расстояние центра тяжести треугольника ABQ от отрезка AB равно трети высоты. Высота же треугольника ABQ , имеющего основание l и площадь S , очевидно, равна $2S$. Этим и заканчивается доказательство.

36. Пусть имеется некоторая выпуклая фигура Φ и M — центр тяжести этой фигуры. Будем проводить через M всевозможные прямые и сравнивать отношения площадей тех частей, на которые делят эти прямые фигуру Φ . Эти отношения заключаются в некоторых пределах. Мы покажем, что можно найти треугольник T , для которого отношение площадей частей, на которые его можно разделить прямой, проходящей через центр тяжести, будет меньше, чем для фигуры Φ . Это доказательство будет состоять из нескольких этапов.

Пусть l — прямая, проходящая через центр тяжести M фигуры Φ (черт. 179). Прямая l делит Φ на две части Φ_1 и Φ_2 с площадями, соответственно, S_1 и S_2 . Заменяем, прежде всего, часть Φ_1 фигуры Φ треугольником ABQ (A и B — точки пересечения прямой l с границей Φ) той же самой площади S_1 , что и Φ_1 . При этом вершину Q этого треугольника мы выберем так, чтобы она находилась в той же области, ограниченной прямой l и опорными прямыми l_1 и l_2 фигуры Φ , проведенными в точках A и B , что и фигура Φ_1 (l_1 и l_2 — любые опорные прямые, проходящие через A , соответственно B , если точки A и B являются угловыми). Ясно, что так выбрать точку Q всегда возможно (на черт. 179 изображен случай, когда l_1 и l_2 пересекаются с той стороны l , где расположена часть Φ_1 ; в противном случае возможность такого выбора Q еще очевиднее). В этом случае фигура Φ_2 оказывается целиком расположенной внутри угла AQB (по другую сторону отрезка AB , чем треугольник ABQ); это обстоятельство является для нас существенным. Заменяем теперь часть Φ_2 фигуры Φ трапецией $BARP$ той же самой площади S_2 , меньшим основанием которой является отрезок AB , а боковые стороны AP и BR расположены на прямых QA и QB (см. черт. 179). Тем

самым мы заменим фигуру Φ треугольником PQR той же самой площадью.

Пусть M' есть центр тяжести треугольника PQR . Мы утверждаем, что точка M' принадлежит треугольнику ABQ . Действительно, пусть M_1 есть центр тяжести фигуры Φ_1 , M_2 — центр тяжести фигуры Φ_2 , M'_1 — центр тяжести треугольника ABQ и M'_2 — центр тяжести трапеции $BARP$. Точка M лежит на отрезке M_1M_2 и делит его в отношении $M_1M : MM_2 = S_2 : S_1$; точка M' лежит на отрезке $M'_1M'_2$ и делит его в том же самом отношении. Но точка M'_1 расположена не ближе к прямой AB , чем точка M_1 (см. задачу 356)); с другой стороны, центр тяжести M'_2 трапеции $BARP$ расположен не дальше от прямой AB , чем центр тяжести M_2 фигуры Φ_2 (представляется очевидным, что из всех фигур площади S_2 ,



Черт. 179.

расположенных внутри угла AQB с той же стороны отрезка AB , что и Φ_2 , трапеция $BARP$ имеет центр тяжести, наиболее близкий к отрезку AB ; этому легко дать и строгое доказательство, рассматривая отдельные части, из которых состоят трапеция $BARP$ и фигура Φ_2). Отсюда вытекает, что центр тяжести M' треугольника PQR расположен с той стороны отрезка AB , что и треугольник ABQ .

Проведем через центр тяжести M' треугольника PQR прямую l_0 , параллельную l (т. е. параллельную основанию RP); точки пересечения этой прямой с боковыми сторонами QR и QP треугольника обозначим через A_0 и B_0 . При этом, очевидно,

$$S_{A_0B_0Q} \leq S_{ABQ} = S_1, \quad S_{B_0A_0RP} \geq S_{BARP} = S_2,$$

следовательно,

$$\frac{S_{A_0B_0Q}}{S_{B_0A_0RP}} \leq \frac{S_1}{S_2}.$$

Это и есть результат, который мы хотели получить. Он означает, что *отношение площадей, на которые делится выпуклая фигура Φ прямой l , проходящей через центр тяжести, является наименьшим в том случае, когда Φ есть треугольник, а прямая l параллельна основанию треугольника Φ* . Но в этом случае отношение площадей $\frac{S_{A_0B_0Q}}{S_{B_0A_0RP}}$, очевидно, равно $\frac{4}{5}$: треугольник A_0QB_0 подобен треугольнику RQP , и коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$ (медиана треугольника делится в центре тяжести в отношении $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, считая от вершины). Следовательно,

$$S_{A_0B_0Q} = \frac{4}{9} S, \quad S_{B_0A_0RP} = \frac{5}{9} S$$

(S — площадь фигуры Φ). Отсюда

$$\frac{S_1}{S_2} \geq \frac{S_{A_0B_0Q}}{S_{B_0A_0RP}} = \frac{4}{5},$$

что нам и требовалось доказать.

Примечание. Из решения задачи следует, что если фигура Φ отлична от треугольника, то отношение площадей, на которые делится фигура Φ прямой, проходящей через ее центр тяжести, всегда заключено в более тесных пределах, чем между $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$.

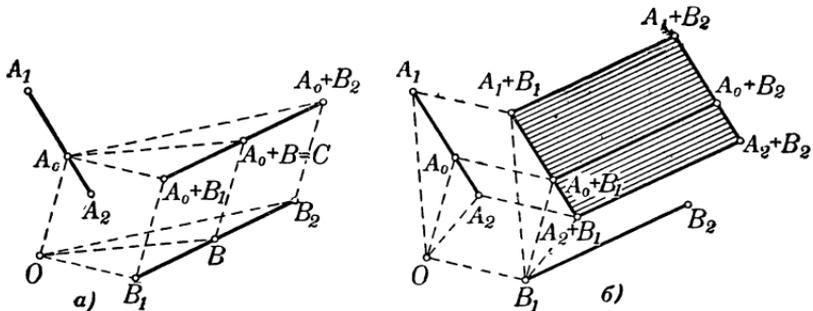
§ 4

37. Пусть A_0 — какая-то фиксированная точка отрезка A_1A_2 . Легко видеть, что произвольные суммы $A_0 + B$, где B пробегает все точки отрезка B_1B_2 , заполняют отрезок, равный и параллельный B_1B_2 , концом которого являются точки $A_0 + B_1$ и $A_0 + B_2$; из того, что треугольники

$$OB_1B_2 \text{ и } A_0(A_0 + B_1)(A_0 + B_2)^1$$

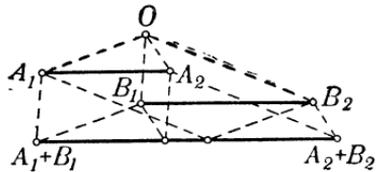
¹⁾ Через $A_0(A_0 + B_1)(A_0 + B_2)$ мы обозначаем треугольник, вершинами которого являются точки $A_0, A_0 + B_1, A_0 + B_2$.

(черт. 180, а) равны и параллельно расположены, следует, что фигура $OBCA_0$, где B и C — соответствующие точки отрезков B_1B_2 и $(A_0 + B_1)(A_0 + B_2)$, есть параллелограмм



Черт. 180.

($OB = A_0C$ и $OB \parallel A_0C$), и, следовательно, $C = A_0 + B$. Если теперь менять положение точки A_0 на отрезке A_1A_2 , то мы получим ряд параллельных и равных между собой отрезков (черт. 180, б). Точки $A_0 + B_1$ — левые концы этих отрезков — заполняют отрезок от точки $A_1 + B_1$ до точки $A_2 + B_1$, равный и параллельный отрезку A_1A_2 . Таким образом, совокупность всевозможных точек $A + B$, где A принадлежит отрезку A_1A_2 , а B — отрезку B_1B_2 , заполняет параллелограмм с вершинами $A_1 + B_1$, $A_1 + B_2$, $A_2 + B_2$, $A_2 + B_1$ (см. черт. 180, б).

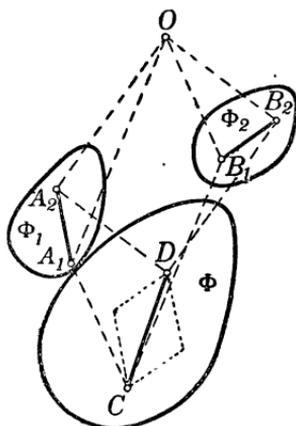


Черт. 181.

В случае, когда отрезки A_1A_2 и B_1B_2 параллельны между собой, рассматриваемый параллелограмм превращается в отрезок, параллельный отрезкам A_1A_2 и B_1B_2 и по длине равный их сумме (черт. 181).

38. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две выпуклые фигуры, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ — их сумма, C и D — две точки фигуры Φ . По определению суммы двух фигур существуют такие точки A_1 и A_2 фигуры Φ_1 (может быть, совпадающие между собой) и такие

точки B_1 и B_2 фигуры Φ_2 (может быть, совпадающие между собой), что $C = A_1 + B_1$, $D = A_2 + B_2$ (черт. 182). Так как фигуры Φ_1 и Φ_2 выпуклы, то отрезок A_1A_2 целиком принадлежит фигуре Φ_1 , а отрезок B_1B_2 — фигуре Φ_2 . Значит, параллелограмм (или отрезок), являющийся суммой отрезков A_1A_2 и B_1B_2



Черт. 182.

параллелограмм (или отрезок), являющийся суммой отрезков A_1A_2 и B_1B_2 (см. задачу 37), целиком принадлежит фигуре $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. В частности, отрезок, соединяющий $A_1 + B_1$ и $A_2 + B_2$, т. е. точки C и D (диагональ параллелограмма), принадлежит фигуре Φ . Итак, фигура Φ вместе с произвольными двумя точками C и D содержит также весь соединяющий их отрезок, т. е. фигура Φ выпукла.

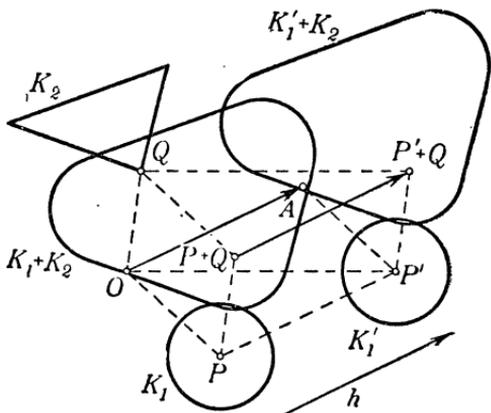
39. Обозначим фигуры, ограниченные кривыми K_1 и K_2 , через Φ_1 и Φ_2 , а фигуры, ограниченные кривыми L_1 и L_2 , — через Ψ_1 и Ψ_2 . Фигура Φ_1 не выходит за пределы фигуры Ψ_1 , т. е. все точки фигуры Φ_1 являются также точками фигуры Ψ_1 . Точно так же все точки фигуры Φ_2 являются точками фигуры Ψ_2 . Но отсюда следует, что все точки фигуры $\Phi_1 + \Phi_2$ являются точками фигуры $\Psi_1 + \Psi_2$, т. е. что кривая $K_1 + K_2$ не выходит за пределы кривой $L_1 + L_2$.

40. Пусть сначала параллельному переносу подвергается только кривая K_1 , а кривая K_2 и начало отсчета O остаются прежними. Пусть OA — отрезок, отложенный из начала отсчета O , равный и параллельный отрезку, на который смещается каждая точка кривой K_1 при параллельном переносе, K'_1 — кривая, в которую переходит K_1 в результате параллельного переноса, а Φ_1 , Φ_2 , Φ'_1 — фигуры, ограниченные соответственно кривыми K_1 , K_2 , K'_1 (черт. 183). Пусть, далее, P — произвольная точка фигуры Φ_1 , Q — произвольная точка фигуры Φ_2 , а P' — точка, в которую переходит P в результате параллельного переноса. Тогда, очевидно, в силу опре-

деления сложения точек и свойств параллельного переноса

$$P' = P + A \quad \text{и} \quad P' + Q = (P + A) + Q = (P + Q) + A.$$

Но последнее равенство как раз и означает, что фигура $\Phi'_1 + \Phi_2$ получается из фигуры $\Phi_1 + \Phi_2$ параллельным переносом (точки фигуры $\Phi'_1 + \Phi_2$ получаются из отвечающих им точек фигуры $\Phi_1 + \Phi_2$ сдвигом на отрезок, равный и параллельный OA). Точно так же доказывается, что если не менять положения фигуры Φ_1 и перенести параллельно фигуру Φ_2 , то сумма $\Phi_1 + \Phi_2$ претерпит параллельный перенос (совпадающий по направлению и величине с параллельным переносом фигуры Φ_2).



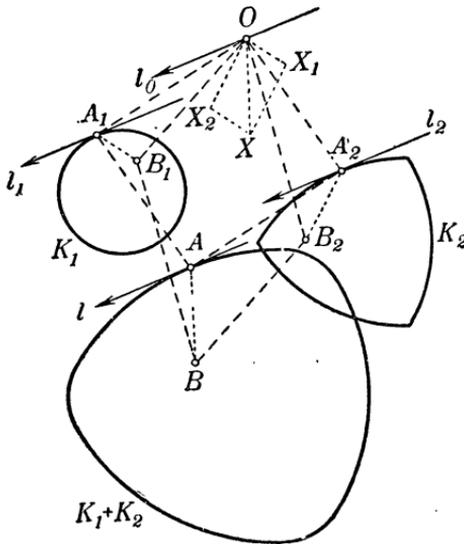
Черт. 183.

Далее, из определения сложения фигур ясно, что если мы подвергнем и начало отсчета O и обе фигуры Φ_1 и Φ_2 одному и тому же параллельному переносу, то и фигура $\Phi_1 + \Phi_2$ подвергнется тому же самому параллельному переносу.

Пусть, наконец, мы подвергаем фигуры Φ_1 и Φ_2 разным параллельным переносам, так что в результате они переходят в фигуры Φ'_1 и Φ'_2 , и одновременно перемещаем начало отсчета из точки O в некоторую точку O' . Подвергнем сначала фигуры Φ_1 и Φ_2 и начало отсчета O параллельному переносу на отрезок OO' . Тогда Φ_1 и Φ_2 займут новые положения Φ''_1 , Φ''_2 , а $\Phi_1 + \Phi_2$ подвергнется параллельному переносу на отрезок OO' . Затем перенесем параллельно фигуру Φ''_1 в положение Φ'_1 и, наконец, перенесем Φ''_2 в положение Φ'_2 . При каждом из этих параллельных переносов сумма $\Phi_1 + \Phi_2$ подвергается некоторому параллельному переносу. Таким образом, сумма $\Phi_1 + \Phi_2$, образованная при помощи сложения точек относительно начала отсчета O , пере-

водится в сумму $\Phi'_1 + \Phi_2$, образованную при помощи сложения точек относительно начала отсчета O' тремя последовательными параллельными переносами, которые можно заменить одним результирующим параллельным переносом.

41. Пусть A_1 и A_2 — соответствующие точки кривых K_1 и K_2 , l_1 и l_2 — опорные прямые кривых K_1 и K_2 , проведенные в точках A_1 и A_2 , параллельные между собой и имеющие одинаковое направление; Φ_1 и Φ_2 — фигуры, ограничиваемые кривыми K_1 и K_2 (черт. 184). Тогда точка $A = A_1 + A_2$ принадлежит фигуре $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Покажем, что эта точка является граничной. Для этого проведем через точку $A_1 + A_2$ прямую l , параллельную прямым l_1 и l_2 и имеющую с ними одинаковое направление, и покажем, что произвольная точка B фигуры $\Phi_1 + \Phi_2$ лежит слева от прямой l , т. е. что прямая l есть опорная прямая фигуры $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.



Черт. 184.

Действительно, пусть B — точка фигуры Φ ; B_1 и B_2 — такие точки фигур Φ_1 и Φ_2 , что $B = B_1 + B_2$. Соединим точку A_1 с точкой B_1 , точку A_2 с B_2 и точку A с B и отложим от начала отсчета O отрезки OX_1 , OX_2 , OX , соответственно равные и параллельные отрезкам A_1B_1 , A_2B_2 , AB . В силу определения сложения точек мы имеем

$$B_1 = A_1 + X_1, \quad B_2 = A_2 + X_2, \quad B = A + X.$$

Но

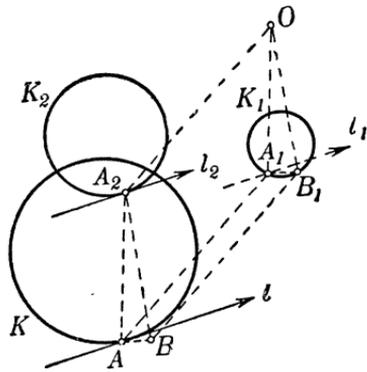
$$B = B_1 + B_2, \quad A = A_1 + A_2,$$

откуда следует, что

$$X = X_1 + X_2,$$

т. е. что четырехугольник OX_1XX_2 есть параллелограмм. Проведем через точку O прямую l_0 , параллельную прямым l_1 , l_2 и l и одинаково с ними направленную. Так как всякая выпуклая фигура всегда лежит слева от своей опорной прямой (см. выше, стр. 26), то отрезки OX_1 и OX_2 , параллельные отрезкам A_1B_1 и A_2B_2 , расположены слева от прямой l_0 (см. черт. 184). Следовательно, весь параллелограмм OX_1XX_2 лежит слева от l_0 , т. е. и отрезок OX расположен слева от l_0 . Но так как l параллельно l_0 , а отрезок AB параллелен OX , то отсюда следует, что точка B лежит слева от l .

Итак, всякая точка фигуры Φ лежит слева от l , т. е. l — опорная прямая фигуры. Доказано, таким образом, что сумма двух соответствующих точек кривых K_1 и K_2 есть точка кривой K (и притом им соответствующая). Но для доказательства того, что K есть геометрическое место сумм соответствующих точек кривых K_1 и K_2 , надо еще показать, что каждая точка кривой K есть сумма некоторых соответствующих точек кривых K_1 и K_2 , ибо могло бы оказаться, например, что суммы соответствующих точек заполняют лишь дугу кривой K , а не всю эту кривую. Проведем это доказательство.

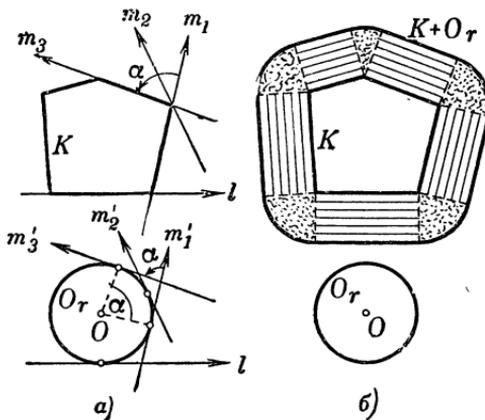


Черт. 185.

Пусть A — произвольная точка кривой K , а A_1 и A_2 — такие точки фигур Φ_1 , Φ_2 , что $A_1 + A_2 = A$. Покажем, что A_1 и A_2 — граничные точки фигур Φ_1 , Φ_2 и притом соответствующие. Действительно, пусть l — опорная прямая, проведенная к фигуре Φ через точку A (любая, если через A проходит не единственная опорная прямая к Φ), а l_1 и l_2 — прямые, проведенные через A_1 и A_2 параллельно l . Предположим, что хотя бы одна из этих прямых, например l_1 , не является опорной прямой соответствующей фигуры, т. е. справа от l_1 имеются точки фигуры Φ_1 , и пусть B_1 — такая точка (черт. 185). Тогда точка $B_1 + A_2 = B$ есть точка фигуры Φ по определению суммы фигур. Но отрезок A_1B_1 равен

и параллелен отрезку AB , так что точка B лежит справа от прямой l , так же как B_1 — справа от l_1 ; а это противоречит тому, что прямая l — опорная прямая к Φ . Полученное противоречие показывает, что l_1 и l_2 — опорные прямые фигур Φ_1 и Φ_2 . Таким образом, A_1 и A_2 — соответствующие точки кривых K_1 и K_2 , что и требовалось доказать.

42. Очевидно, что каждой стороне многоугольника K соответствует единственная точка окружности O_r (точка, в которой касательная к окружности параллельна рассматриваемой стороне).



Черт. 186.

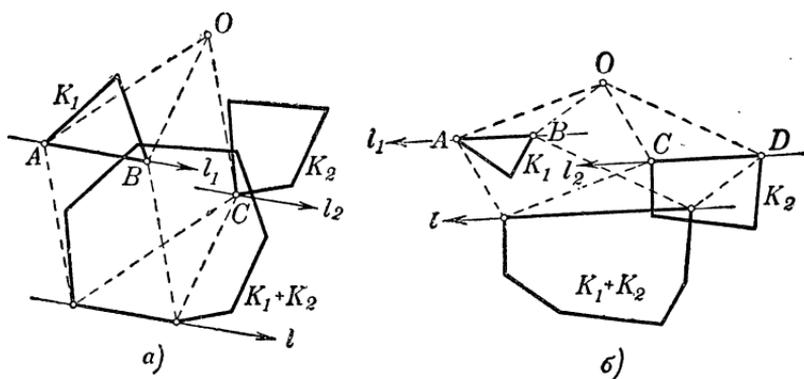
Каждой вершине K соответствует целая дуга окружности O_r , центральный угол которой равен внешнему углу многоугольника в этой вершине (см. черт. 186, а). Для простоты примем центр окружности O_r за начало отсчета O ; в таком случае кривая $K + O_r$ будет состоять

из отрезков прямых, равных и параллельных сторонам многоугольника и удаленных от сторон на расстояние r , и из дуг окружностей радиуса r с центрами в вершинах многоугольника, равных внешним углам многоугольника (черт. 186, б). Сумма длин всех отрезков прямых равна периметру L многоугольника K , сумма длин всех дуг равна длине окружности радиуса r , т. е. $2\pi r$ (так как сумма всех внешних углов многоугольника равна 360° , или 2π). Таким образом, длина кривой $K + O_r$ равна $L + 2\pi r$.

Фигура Φ , ограниченная кривой $K + O_r$, состоит, очевидно, из следующих частей: самого многоугольника K площади S , прямоугольников, основаниями которых являются стороны многоугольника K , а высота равна r , — сумма площадей всех этих прямоугольников равна Lr — и секторов круга радиуса r — сумма площадей всех секторов равна πr^2 (см.

черт. 186, б). Следовательно, площадь, ограниченная кривой $K \mp O_r$, равна $S \mp Lr \mp \pi r^2$.

43. Пусть K_1 и K_2 — два многоугольника, не имеющих попарно параллельных и одинаково направленных сторон (черт. 187, а). Согласно задаче 41 кривая, являющаяся суммой этих многоугольников, есть геометрическое место сумм соответствующих точек. Пусть l_1 есть опорная прямая многоугольника K_1 , являющаяся продолжением одной из его сторон AB , l_2 — параллельная и одинаково с ней направленная опорная прямая второго многоугольника. Так как многоугольники не имеют параллельных сторон, то прямая l_2 имеет со вторым



Черт. 187.

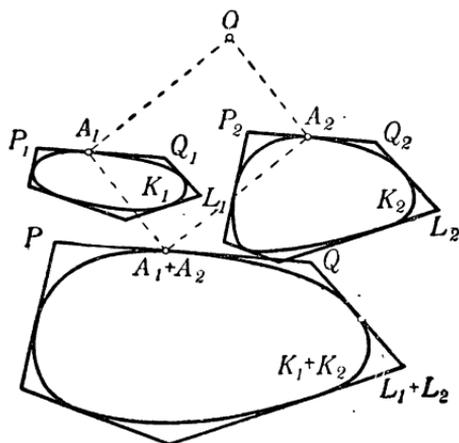
многоугольником единственную общую точку C . Соответствующими точками многоугольников являются точка C и любая точка отрезка AB . Сумма соответствующих точек будет в этом случае заполнять отрезок, равный и параллельный отрезку AB (см. решение задачи 37).

Сложив все точки n -угольника K_1 с соответствующими им точками m -угольника K_2 (каждой стороне первого многоугольника соответствует единственная точка второго многоугольника, а именно, некоторая вершина; сторонам второго многоугольника соответствуют вершины первого многоугольника), мы получим $(m \mp n)$ -угольник, каждая сторона которого будет равна и параллельна какой-либо стороне многоугольника K_1

или какой-либо стороне многоугольника K_2 ; периметр этого многоугольника будет, очевидно, равен сумме периметров многоугольников K_1 и K_2 .

Предположим теперь, что многоугольники K_1 и K_2 имеют параллельные и одинаково направленные стороны. Пусть, например, сторона AB многоугольника K_1 параллельна стороне CD многоугольника K_2 и одинаково с ней направлена (черт. 187, б). Соответствующими в этом случае являются любая точка отрезка AB и любая точка отрезка CD ; сумма соответствующих точек будет заполнять отрезок, параллельный отрезкам AB и CD и равный по длине их сумме (см. задачу 37). Суммой многоугольников K_1 и K_2 будет многоугольник, имеющий меньше чем $m+n$ сторон. Однако очевидно, что периметр многоугольника K_1+K_2 и в этом случае будет равен сумме периметров многоугольников K_1 и K_2 .

44. Пусть P_1Q_1 и P_2Q_2 — параллельные и одинаково направленные стороны многоугольников L_1 и L_2 , A_1 и A_2 —



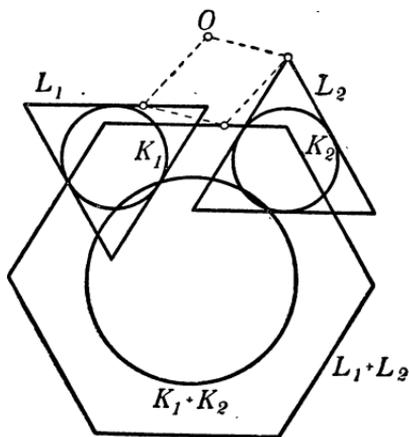
Черт. 188.

точки соприкосновения их с кривыми K_1 и K_2 (черт. 188). Согласно определению сложения выпуклых кривых, данному в задаче 41, сторона PQ многоугольника L_1+L_2 , параллельная прямым P_1Q_1 и P_2Q_2 (см. задачу 43), будет проходить через точку A_1+A_2 , т. е. будет опорной прямой для кривой K_1+K_2 .

Итак, сторонами многоугольника L_1+L_2 являются отрезки опорных прямых кривой K_1+K_2 .

Кроме того, многоугольник L_1+L_2 является выпуклым как сумма двух выпуклых многоугольников (задача 38) и содержит кривую K_1+K_2 внутри себя (см. задачу 39). Таким образом, L_1+L_2 есть многоугольник, описанный вокруг кривой K_1+K_2 .

Если описанные многоугольники L_1 и L_2 не являются многоугольниками с попарно параллельными и одинаково направленными сторонами, то утверждение задачи становится неверным. Так, например, если K_1 и K_2 суть равные окружности, а L_1 и L_2 — описанные вокруг них равносторонние треугольники с параллельными, но не одинаково направленными сторонами, то $K_1 + K_2$ есть окружность, а $L_1 + L_2$ есть шестиугольник, который не описан вокруг окружности $K_1 + K_2$ (черт. 189).



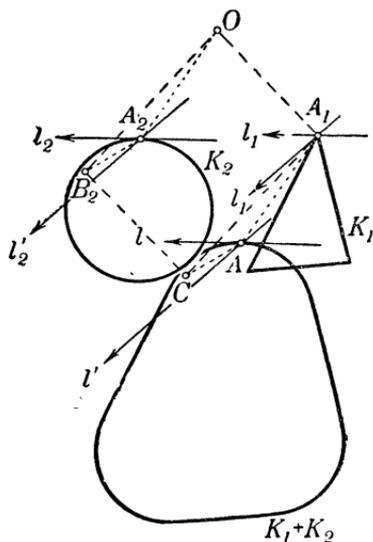
Черт. 189.

45. Из определения сложения выпуклых кривых, данного в задаче 41, следует, что если кривая $K_1 + K_2$ содержит прямолинейный отрезок AB , то этот отрезок представляет геометрическое место всевозможных сумм точек $A_1 + A_2$, где A_1 — точки кривой K_1 , соответствующие точкам отрезка AB кривой $K_1 + K_2$, и A_2 — точки кривой K_2 , соответствующие точкам отрезка AB . Из этого замечания и из определения соответствующих точек кривой (стр. 57) уже следует утверждение задачи (см. также задачу 37).

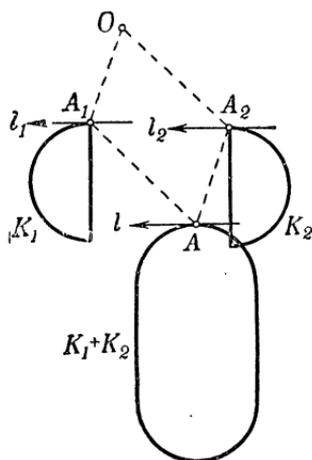
46. Пусть K_1 и K_2 — две выпуклые кривые, A_1 и A_2 — их соответствующие точки, l_1 и l_2 — параллельные опорные прямые, проходящие соответственно через A_1 и A_2 . Предположим для определенности, что, например, A_2 не является угловой точкой кривой K_2 (черт. 190), и докажем, что в этом случае прямая l , параллельная l_1 и l_2 , является единственной опорной прямой фигуры $K_1 + K_2$, проходящей через точку $A = A_1 + A_2$, т. е. что точка A является обыкновенной точкой кривой $K_1 + K_2$.

Действительно, пусть l' — произвольная прямая, проходящая через точку A , отличная от прямой l , l'_1 и l'_2 — прямые,

параллельные l' , проходящие соответственно через точки A_1 и A_2 . Так как A_2 — обыкновенная точка кривой K_2 , то l_2 не может быть опорной прямой для кривой K_2 ; другими словами, справа от l_2 найдётся точка B_2 фигуры K_2 . Проведем отрезок AC , равный и параллельный отрезку A_2B_2 . Четырехугольник OA_1CB_2 — параллелограмм, т. е. точка C есть сумма точек A_1 и B_2 и поэтому принадлежит фигуре, ограниченной



Черт. 190.



Черт. 191.

кривой $K_1 + K_2$. Но треугольники AA_1C и A_2OB_2 равны и параллельно расположены, поэтому точка C фигуры, ограниченной кривой $K_1 + K_2$, лежит справа от прямой l' , а следовательно, l' не является опорной прямой фигуры $K_1 + K_2$, что и требовалось доказать.

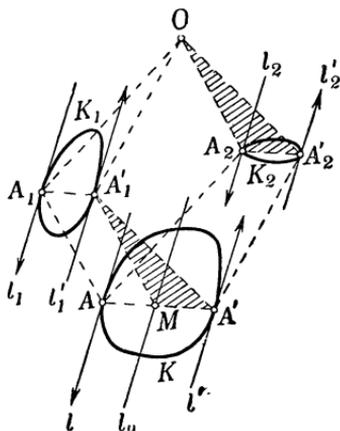
Однако из того, что соответствующие точки A_1 и A_2 кривых K_1 и K_2 являются угловыми точками, еще не следует, что точка $A_1 + A_2$ является угловой точкой кривой $K_1 + K_2$. Например, на черт. 191 изображены две полуокружности, угловые точки которых соответствуют друг другу; сумма этих двух полуокружностей не имеет угловых точек.

47. Пусть K_1 — выпуклая кривая, l_1 и l'_1 — ее две параллельные опорные прямые, A_1 и A'_1 — их точки соприкосновения с кривой; точно так же K_2 — другая выпуклая кривая, l_2 и l'_2 — две ее опорные прямые, параллельные прямым l_1 и l'_1 , A_2 и A'_2 — их точки соприкосновения с кривой K_2 (черт. 192). Рассмотрим сумму $K = K_1 + K_2$ этих двух кривых; опорные прямые кривой $K_1 + K_2$, параллельные прямым l_1, l'_1, l_2, l'_2 , обозначим через l и l' , а точки их соприкосновения с кривой $K_1 + K_2$ — через A и A' :

$$A = A_1 + A_2, \quad A' = A'_1 + A'_2$$

(см. задачу 41). Проведем отрезок A'_1M , равный и параллельный отрезку OA_2 , и через точку M проведем прямую l_0 , параллельную всем шести опорным прямым.

Четырехугольник A'_1A_1AM есть параллелограмм (так как отрезок A'_1M равен и параллелен OA_2 , равен и параллелен A_1A), значит, отрезок AM равен и параллелен отрезку $A_1A'_1$. Отсюда следует, что расстояние между



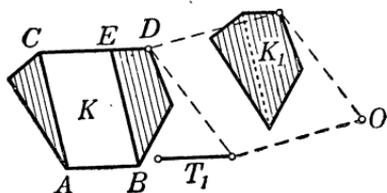
Черт. 192.

прямыми l и l_0 равно расстоянию между прямыми l_1 и l'_1 , т. е. ширине h_1 кривой K_1 в направлении, перпендикулярном ко всем проведенным опорным прямым.

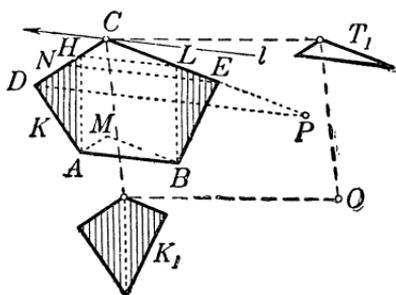
Аналогично, отрезок MA' равен и параллелен отрезку $A_2A'_2$ (ибо треугольники A'_1MA' и $OA_2A'_2$ равны), и поэтому расстояние между прямыми l_0 и l' равно расстоянию между прямыми l_2 и l'_2 , т. е. ширине h_2 кривой K_2 в указанном направлении. Но ширина h кривой $K_1 + K_2$ в направлении, которое мы рассматриваем, равна сумме расстояний между прямыми l и l_0 и между прямыми l_0 и l' , т. е. она равна сумме $h_1 + h_2$.

48. Пусть K — произвольный многоугольник. Предположим, что он имеет две параллельные стороны AB и CD , и

пусть для определенности CD — большая из этих сторон (черт. 193). Отложим на стороне CD отрезок CE , равный AB , и проведем отрезки CA и BE . Тогда многоугольник K будет разделен на три части: параллелограмм $ABEC$ и две части, примыкающие к сторонам AC и BE . Из этих двух частей мы сложим новый многоугольник K_1 , а через T_1 обозначим отрезок, равный и параллельный AB . Тогда, используя данное в задаче 41 определение сложения выпуклых кривых, нетрудно усмотреть, что сумма многоугольника K_1 и отрезка



Черт. 193.



Черт. 194.

T_1 есть многоугольник K (см. также задачу 43). При этом K_1 есть многоугольник, число сторон которого на одну меньше, чем у многоугольника K (или даже на две, если отрезки AB и CD равны), а T_1 есть отрезок.

Пусть теперь многоугольник K не имеет параллельных сторон. Выберем произвольную сторону AB многоугольника K и проведем опорную прямую l , параллельную прямой AB . Точку соприкосновения прямой l с многоугольником K обозначим через C , а стороны многоугольника K , сходящиеся в вершине C , — через CD и CE (черт. 194). Построим треугольники ABM , CDP и CNE , стороны каждого из которых соответственно параллельны отрезкам AB , CD и CE . Пусть, например, треугольник ABM — наименьший из них. Тогда отрезок AM не превосходит стороны CD , а BM не превосходит стороны CE . Отложим на CD и CE отрезки CH и CL , равные соответственно AM и BM . Наконец, соединим A с H и B с L . Тогда треугольники ABM и CHL равны, а четырехугольник $ABLN$ есть параллелограмм.

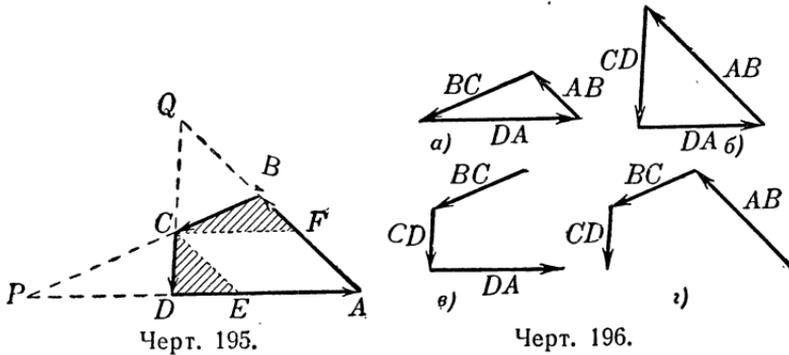
Таким образом, мы разбили многоугольник K на четыре части: треугольник CHL (равный треугольнику ABM), параллелограмм $ABLN$ и заштрихованные на черт. 194 треугольники ADH и BEL . Из заштрихованных треугольников сложим многоугольник K_1 , а через T_1 обозначим треугольник, равный CHL . Нетрудно видеть, что сумма многоугольников K_1 и T_1 есть многоугольник K . При этом T_1 есть треугольник, а K_1 имеет меньше сторон, чем K , по крайней мере на одну, ибо у K_1 уже нет стороны, параллельной AB .

Предоставляем читателю самостоятельно разобрать случай, когда наименьший из треугольников ABM , CDP и CNE отличен от ABM (рекомендуется нарисовать чертеж).

Сопоставляя оба рассмотренных выше случая, мы можем заключить, что, каков бы ни был многоугольник K , его можно представить в виде суммы $K_1 + T_1$, где T_1 есть отрезок или треугольник, а K_1 имеет меньше сторон, чем многоугольник K . Если K_1 является треугольником или отрезком, то наша цель достигнута. В противном случае сделаем то же самое с многоугольником K_1 , т. е. представим его в виде суммы $K_1 = K_2 + T_2$, где T_2 — треугольник или отрезок, а K_2 имеет меньше сторон, чем K_1 . Повторяя эту операцию некоторое конечное число раз, мы наверное достигнем цели, ибо число сторон у многоугольника, являющегося первым слагаемым, делается все меньше и меньше.

49. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, не являющийся параллелограммом или трапецией. Обозначим через P и Q точки пересечения его противоположных сторон; пусть P — точка пересечения стороны DA , продолженной за точку D , и стороны BC , продолженной за точку C ; Q — точка пересечения стороны AB , продолженной за точку B , и стороны DC , продолженной за точку C (черт. 195). Нетрудно видеть, что можно построить треугольник, стороны которого параллельны и одинаково направлены со сторонами DA , AB и BC или DA , AB и CD (черт. 196, a и b), но нельзя построить треугольника, стороны которого параллельны и одинаково направлены со сторонами BC , CD и DA или AB , BC и CD , ибо отрезки, имеющие направления этих сторон, не образуют замкнутого контура (черт. 196, $в$ и $г$). Так как стороны двух треугольников, сумма которых равна четырехугольнику $ABCD$,

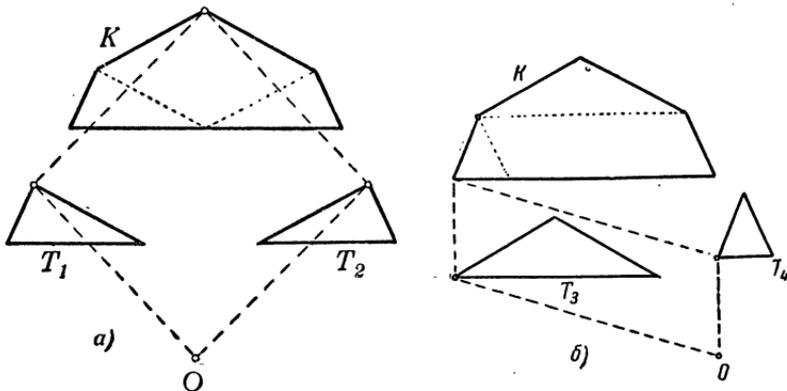
должны быть параллельны и одинаково направлены со сторонами этого четырехугольника (см. задачу 43), то $ABCD$ может являться суммой только треугольников вида, изобра-



Черт. 195.

Черт. 196.

женного на черт. 196, *а* и *б*. При этом легко видеть, что сумма треугольников такого вида в точности равна четырехугольнику $ABCD$ лишь в том случае, когда один из тре-



Черт. 197.

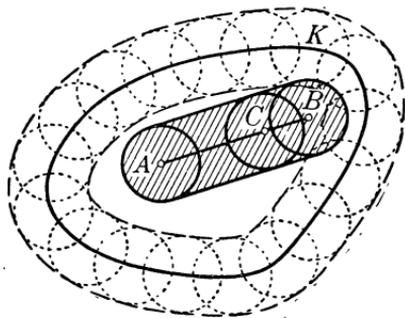
угольников имеет сторону, равную BC , а второй — сторону, равную CD . Всем этим условиям удовлетворяют только заштрихованные на черт. 195 треугольники BCF и CDE , сумма которых действительно равна четырехугольнику $ABCD$, если за начало отсчета принять точку C . Таким образом, мы до-

казали, что четырехугольник $ABCD$ можно только одним способом представить в виде суммы двух треугольников.

Аналогично показывается, что каждая трапеция может быть только одним способом представлена в виде суммы треугольника и отрезка, а параллелограмм — в виде суммы двух отрезков.

Для пятиугольников и многоугольников с большим числом сторон дело обстоит не так. На черт. 197, a и b изображены два различных представления одного и того же пятиугольника в виде суммы двух треугольников.

50. Пусть A и B — две точки, лежащие внутри внутренней кривой, ограничивающей r -окрестность кривой K , т. е. такие внутренние точки фигуры, ограниченной кривой K , которые не лежат в r -окрестности кривой K . Проведем окружности радиуса r с центрами в точках A и B и их общие внешние касательные (черт. 198). Внутри окружностей нет ни одной точки кривой K , ибо если бы существовала точка P кривой K , лежащая, например, в окружности радиуса r с центром в A , то расстояние AP было бы меньше r , и точка A попала бы внутрь круга радиуса r с центром в P , т. е. она лежала бы в r -окрестности кривой K .



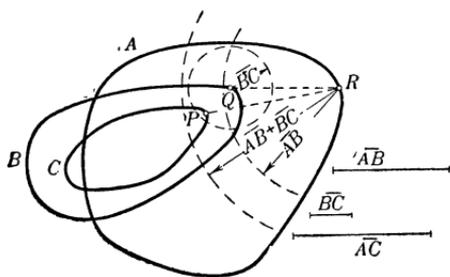
Черт. 198.

Итак, наши две окружности лежат целиком внутри выпуклой кривой; следовательно, любой отрезок, соединяющий точку одной из этих окружностей с точкой другой окружности, лежит целиком внутри K . Отсюда следует, что внутри K лежит вся фигура, ограниченная рассматриваемыми двумя окружностями и их внешними касательными (на черт. 198 эта фигура заштрихована).

Если теперь C есть произвольная точка отрезка AB , то окружность радиуса r с центром в точке C лежит внутри заштрихованной фигуры и, значит, целиком внутри кривой K .

Следовательно, точка C не лежит в r -окрестности кривой K , т. е. лежит внутри внутренней кривой, ограничивающей r -окрестность. Итак, весь отрезок AB , соединяющий две любые точки, лежащие внутри рассматриваемой кривой, также лежит внутри этой кривой, т. е. кривая выпукла.

51. Пусть P — произвольная точка кривой C (черт. 199). Так как расстояние кривой C от кривой B не превосходит \overline{BC}



Черт. 199.

(напомним, что \overline{BC} есть наибольшее из расстояний кривой C от кривой B и кривой B от кривой C), то точка P находится в \overline{BC} -окрестности кривой B , т. е. на кривой B найдется такая точка Q , что круг радиуса \overline{BC} с центром в Q содержит точку P , т. е. что расстояние PQ не превосходит \overline{BC} .

Аналогично на кривой A найдется такая точка R , что расстояние QR не превосходит \overline{AB} (см. черт. 199). Из рассмотрения треугольника PQR сразу следует, что

$$PR \leq PQ + QR,$$

а значит, и подавно

$$PR \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Значит, круг радиуса $\overline{AB} + \overline{BC}$ с центром в точке R содержит точку P . Итак, любая точка P кривой C содержится в $(\overline{AB} + \overline{BC})$ -окрестности кривой A , т. е. расстояние кривой C от кривой A не превосходит $\overline{AB} + \overline{BC}$.

Точно так же доказывается, что расстояние кривой A от кривой C не превосходит $\overline{AB} + \overline{BC}$. Отсюда следует, что расстояние \overline{AC} между кривыми A и C не превосходит $\overline{AB} + \overline{BC}$, а это и есть первое из неравенств, которые нам надо доказать.

Аналогично доказываются и остальные два неравенства.

52. Пусть K_2 — та из рассматриваемых двух кривых, длина которой больше. Так как расстояние кривой K_2 от кривой K_1 меньше r , то кривая K_2 целиком расположена в r -окрестности кривой K_1 , т. е. не выходит за пределы кривой $K_1 + O_r$, ограничивающей снаружи r -окрестность кривой K_1 . Отсюда следует, что длина кривой K_2 не превосходит длины кривой $K_1 + O_r$, т. е. (если L_1 — длина кривой K_1 и L_2 — длина кривой K_2)

$$L_2 \leq L_1 + 2\pi r, \quad L_2 - L_1 \leq 2\pi r$$

(см. выше стр. 58), что и требовалось доказать.

Точно так же, если, например, площадь S_2 , ограниченная кривой K_2 , больше чем площадь S_1 , ограниченная кривой K_1 , то S_2 не превосходит площади, ограниченной кривой $K_1 + O_r$, т. е.

$$S_2 \leq S_1 + L_1 r + \pi r^2$$

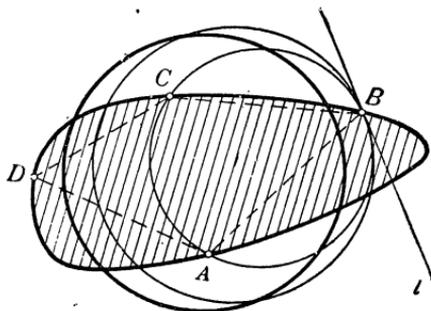
(см. выше стр. 58),

$$S_2 - S_1 \leq L_1 r + \pi r^2 \leq L r + \pi r^2,$$

где L — наибольшая из длин L_1, L_2 .

53. Пусть K — произвольная выпуклая кривая (фигура, ограниченная K , заштрихована на черт. 200), отличная от окружности. Докажем, что существует такое расстояние r , что всякая окружность удалена от кривой K на расстояние, большее чем r ; этим самым будет доказано, что кривая K не может являться пределом последовательности окружностей.

Проведем окружность через три произвольные точки A, B, C кривой K , не лежащие на одной



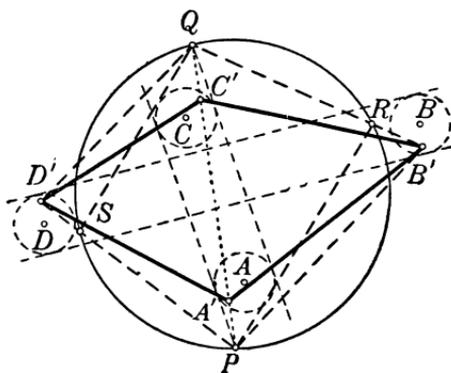
Черт. 200.

прямой. Так как K отлична от окружности, то на кривой K найдется точка D , не принадлежащая проведенной окружности. Пусть для определенности точка D лежит вне окружности,

проходящей через точки A, B, C (доказательство мало изменилось бы, если бы точка D лежала внутри этой окружности). Предположим, что A, B, C, D — циклический порядок наших четырех точек на кривой K ; так как кривая K выпукла, то четырехугольник $ABCD$ — выпуклый четырехугольник (см. выше § 1, задача 10, стр. 26).

Проведем в точке B касательную l к нашей окружности, затем построим окружность большего радиуса, касающуюся прямой l в точке B и такую, чтобы точка D все еще находилась вне этой окружности; точки A и C будут еще находиться внутри этой большей окружности (черт. 200). Перенесем теперь последнюю окружность в направлении, перпендикулярном к прямой l , на такое малое расстояние, чтобы точка D все еще оставалась вне окружности, а точки A и C оставались внутри окружности; точка B будет находиться уже вне окружности.

Таким образом, мы нашли такую окружность, что из четырех точек A, B, C и D кривой K две точки — A и C —



Черт. 201.

находятся внутри окружности, а две другие точки — B и D — снаружи ее. Проведем теперь окружности с центрами в точках A, B, C и D достаточно малого радиуса r (одинакового), удовлетворяющие следующим условиям: 1) они не должны пересекаться с выбранной окружностью, 2) окружности с центрами в точках A и C не должны пере-

секаться с внешними касательными к окружностям с центрами в точках B и D и 3) окружности с центрами в точках B и D не должны пересекаться с внешними касательными к окружностям с центрами в точках A и C (черт. 201). Мы утверждаем, что не может существовать никакой окружности, которая пересекалась бы одновременно со всеми четырьмя малыми кругами, т. е. другими словами, что не существует никакой четверки точек

A', B', C', D' , лежащих по одной внутри каждой из рассматриваемых четырех окружностей и таких, что все они лежат на одной окружности.

Рассмотрим четырехугольник $A'B'C'D'$. В силу условий 2), 3), которыми мы руководствовались при построении наших малых окружностей, этот четырехугольник будет выпуклым — диагонали его будут пересекаться внутри четырехугольника. Мы утверждаем, что этот четырехугольник не может быть вписан в окружность. Действительно, продолжим отрезок $A'C'$ до пересечения с большой окружностью в точках P и Q ; пусть, далее, например, отрезок $B'Q$ пересекает большую окружность в точке R , а $D'P$ пересекает ту же окружность в точке S . Углы B' и D' четырехугольника $A'B'C'D'$ меньше углов $PB'Q$ и $PD'Q$; сумма последних углов в свою очередь меньше, чем сумма углов PRQ и PSQ , равная 180° (см. черт. 201). Итак, сумма противоположных углов B' и D' четырехугольника $A'B'C'D'$ меньше 180° и, следовательно, этот четырехугольник нельзя вписать в окружность.

Итак, мы доказали, что никакая окружность не может пересекать одновременно четыре окружности радиуса r , описанные вокруг точек A, B, C, D ; другими словами, что четыре точки A, B, C, D не могут лежать в r -окрестности никакой окружности. Но это и означает, что расстояние кривой K (на которой лежат точки A, B, C, D) от любой окружности больше r , что и требовалось доказать.

54. Пусть K — некоторая выпуклая кривая, отличная от треугольника. Докажем, что существует такое число r , что всякий треугольник удален от кривой K на расстояние, большее чем r , — этим самым будет доказано, что кривая K не может быть пределом последовательности треугольников.

Треугольник можно охарактеризовать тем свойством, что из каждых семи точек, принадлежащих его контуру, имеется по крайней мере три, лежащие на одной прямой. Действительно, из каждых семи точек, лежащих на сторонах треугольника, по крайней мере три лежат на одной стороне. Если же кривая K отлична от треугольника, то она обязательно содержит семь таких точек, что никакие три из них не лежат на одной прямой. В самом деле, если кривая K является ломаной (т. е. K есть выпуклый многоугольник), то она

должна содержать не меньше четырех отрезков разных прямых, и, взяв на каждом из этих отрезков по две точки, мы получим даже восемь точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Если же K содержит какой-либо криволинейный отрезок AB , то любые семь точек дуги AB удовлетворяют нашему условию, ибо согласно задаче 4 из § 1 никакая прямая не пересекает выпуклую кривую более чем в двух точках.

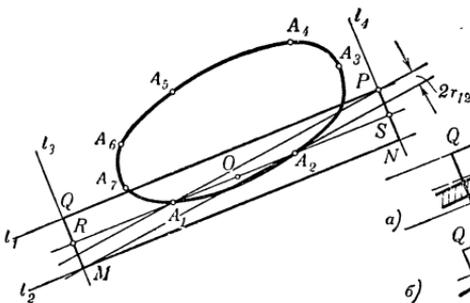
Пусть теперь A_1, A_2, \dots, A_7 — семь точек кривой K , из которых никакие три не лежат на одной прямой (черт. 202). Покажем, что можно подобрать число r , обладающее тем свойством, что не существует такого треугольника, чтобы все семь точек A_1, A_2, \dots, A_7 лежали в его r -окрестности. Выберем две из наших точек, например A_1 и A_2 , и проведем прямую A_1A_2 ; на этой прямой, по предположению, больше нет ни одной из наших семи точек.

Проведем прямые l_1 и l_2 , параллельные прямой A_1A_2 , расположенные от нее на одинаковом расстоянии, настолько малом, чтобы в полосе между прямыми l_1 и l_2 не было других точек из наших семи, кроме A_1 и A_2 . Проведем, далее, прямые l_3 и l_4 , перпендикулярные к l_1 и l_2 , расположенные на одинаковом расстоянии от середины O отрезка A_1A_2 , настолько большим, чтобы все точки A_1, \dots, A_7 находились между прямыми l_3 и l_4 . В пересечении прямых l_1, l_2, l_3, l_4 образуется прямоугольник, вершины которого мы обозначим буквами $MNPQ$ (точка A_1 находится ближе к стороне MQ этого четырехугольника, точка A_2 — ближе к стороне NP ; см. черт. 202).

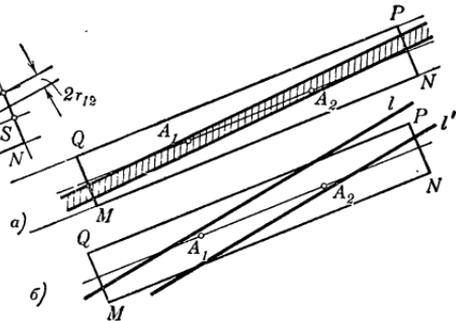
Проведем, наконец, прямые A_1P и A_2M . Легко видеть, что они параллельны. В самом деле, из равенства треугольников A_1PS и A_2MR , где R и S — точки пересечения прямой A_1A_2 с отрезками MQ и NP , следует, что прямые A_1P и A_2M образуют равные внутренние накрест лежащие углы с A_1A_2 .

Расстояние между параллельными прямыми A_1P и A_2M обозначим через $2r_{12}$. Отметим, что каждая полоса между двумя параллельными прямыми шириной не больше $2r_{12}$, содержащая внутри себя точки A_1 и A_2 , не содержит никаких других из наших семи точек. Это происходит потому, что часть такой полосы, заключенная между прямыми l_3 и l_4 ,

лежит целиком внутри прямоугольника $MNPQ$ (черт. 203, *a*), т. е. не может содержать других точек из выбранных семи, кроме A_1 и A_2 , а вне полосы между прямыми l_3 и l_4 вообще нет ни одной из этих семи точек. Действительно, если полоса ширины, не большей $2r_{12}$, заключает внутри себя точки A_1 и A_2 , то угол наклона прямых l и l' , ограничивающих эту полосу, к прямой A_1A_2 не больше угла PA_1A_2 (черт. 202), ибо синус этого угла (равный отношению ширины полосы к



Черт. 202.

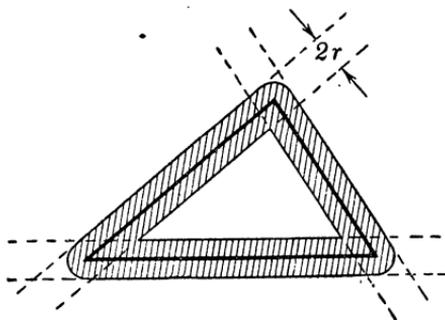


Черт. 203.

длине отрезка, высекаемого полосой на прямой A_1A_2) меньше чем $\sin \angle PA_1A_2$. Предположим теперь, что одна из прямых l , l' пересекает сторону MN или PQ прямоугольника (черт. 203, *б*), например, прямая l пересекает сторону PQ . Тогда, сдвинув полосу параллельно в направлении A_2A_1 так, чтобы прямая l' проходила через A_2 , мы получим, что прямая l по-прежнему будет пересекать сторону PQ . Если теперь повернуть сдвинутую полосу вокруг точки A_2 так, чтобы угол наклона ограничивающих ее прямых к A_1A_2 стал равен углу PA_1A_2 (мы будем вращать полосу против часовой стрелки!), то по-прежнему l будет пересекать отрезок PQ между точками P и Q . Но прямая l' в новом положении совпадает с прямой A_2M , обозначенной на черт. 202, и так как расстояние между l и l' не больше расстояния между A_2M и A_1P , то l не сможет пересечь сторону PQ .

Проведем такое построение для каждой пары точек из выбранных семи (всего у нас будет 21 пара точек). Таким образом, мы получим 21 полосу, ширина которых соответственно равна $2r_{12}$, $2r_{13}$, ..., $2r_{67}$. Наименьшее из этих

расстояний обозначим просто через $2r$. Это расстояние обладает тем свойством, что если расстояние между двумя параллельными прямыми равно $2r$, то в полосе между ними не может находиться более двух точек из выбранных семи (если в этой полосе имеются какие-либо две точки, то там уже не может находиться никакая третья). Теперь уже легко видеть, что r -окрестность любого треугольника T не может содержать семи точек A_1, \dots, A_7 . Действительно, r -окрестность треугольника T содержится в трех полосах ширины $2r$, описанных вокруг сторон этого треугольника (черт. 204).



Черт. 204.

В каждой из этих полос имеется не более двух из выбранных семи точек, значит, во всех трех полосах не может содержаться более шести из этих точек. Иными словами, вся кривая K (содержащая точки A_1, A_2, \dots, A_7) не может лежать в r -окрестности никакого треугольника T , т. е. расстояние от любого треугольника T до кривой K будет больше r , что и требовалось доказать.

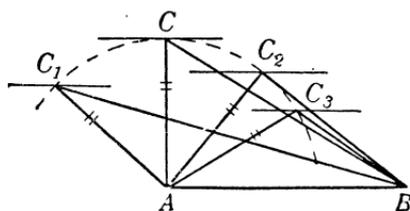
§ 5

55. а) Утверждение задачи совершенно очевидно (черт. 205).

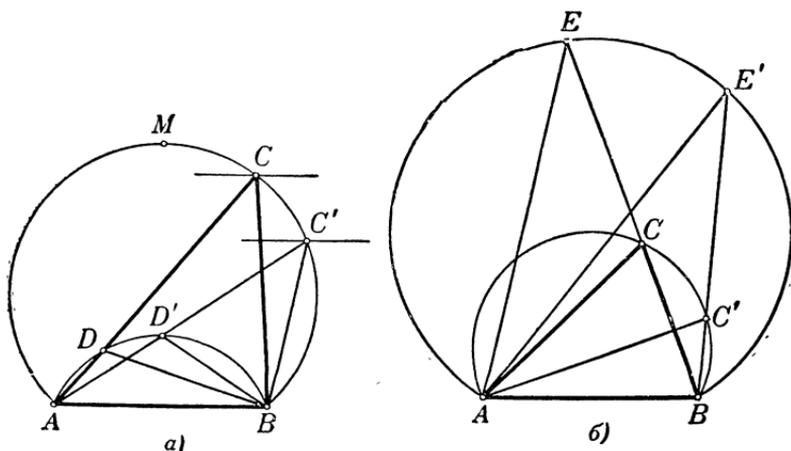
б) Наложим два треугольника, удовлетворяющих условию задачи, друг на друга, чтобы их основания совпали, вершины C и C' были расположены по одну сторону от общего основания AB и чтобы одновременно было

$$\angle CAB < \angle CBA, \quad \angle C'AB < \angle C'BA$$

(черт. 206, а). В этом случае вершины C и C' треугольников будут расположены на дуге окружности $BC'SA$, вмещающей угол ACB , равный углу $AC'B$. Из черт. 206, а сразу видно, что вершина треугольника ABC , имеющего меньшую разность углов при основании, чем треугольник ABC' , расположена ближе к середине дуги $BC'SA$, откуда следует, что высота $\triangle ABC$ больше высоты $\triangle ABC'$, и следовательно, $S_{\triangle ABC} > S_{\triangle ABC'}$.



Черт. 205.



Черт. 206.

Нам остается еще доказать, что

$$CA - CB < C'A - C'B$$

и

$$CA + CB > C'A + C'B.$$

Отложим на стороне CA отрезок $CD = CB$ и на стороне $C'A$ отрезок $C'D' = C'B$ и соединим D и D' с B (черт. 206, а). Так как углы ADB и $AD'B$ суть внешние углы равнобе-

ренных треугольников BCD и $BC'D'$, то

$$\begin{aligned}\angle ADB &= 2d - \frac{2d - \angle ACB}{2} = d + \frac{\angle ACB}{2}, \\ \angle AD'B &= d + \frac{\angle AC'B}{2}.\end{aligned}$$

Так как $\angle ADB = \angle AD'B$, то точки D и D' лежат на дуге окружности $BD'DA$. Поскольку $\angle DBA < \angle D'BA < 180^\circ$, то

$$CA - CB = DA < D'A = C'A - C'B.$$

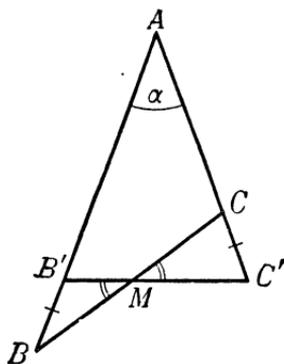
Аналогично, отложив на продолжениях сторон BC и EC' отрезки $CE = CA$ и $C'E' = C'A$ (черт. 206, б), получим:

$$CA + CB = BE > BE' = C'A + C'B,$$

ибо $\angle AEB = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{\angle AC'B}{2} = \angle AE'B$.

Второе утверждение задачи сразу следует из доказанного.

в) Параллелограмм с данным острым углом α и данным периметром $2p$ разбивается диагональю на два треугольника. Поэтому для решения задачи нам достаточно доказать, что из всех треугольников с данным углом α при вершине и данной суммой p боковых сторон наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.



Черт. 207.

Итак, пусть ABC — такой равно-
сторонний треугольник, что $\angle BAC = \alpha$,
а $AB + AC = p$; предположим для
определенности, что $AB > AC$ (в про-
тивном случае доказательство аналогич-
но). Построим равнобедренный треуголь-
ник $AB'C'$, у которого $\angle B'AC' = \alpha$,
 $AB' + AC' = p$ и который расположен, как
указано на черт. 207. Точку пересечения
сторон BC и $B'C'$ обозначим через M .

Докажем теперь, что

$$S_{\triangle CC'M} > S_{\triangle BB'M}.$$

Действительно, треугольники $CC'M$ и $BB'M$ имеют равные углы при вершинах и равные основания CC' и BB' , ибо

$$\begin{aligned}CC' - BB' &= (AC' - AC) - (AB - AB') = \\ &= (AB' + AC') - (AB + AC) = p - p = 0.\end{aligned}$$

Далее, из четырех углов $BB'M$, $B'BM$, $CC'M$ и $C'CM$ наибольшим является первый, а следовательно, наименьшим — второй (ибо сумма двух первых углов равна сумме двух последних). Отсюда следует, что разность углов при основании треугольника $BB'M$ больше, чем разность углов при основании треугольника $CC'M$. Таким образом $S_{\Delta C'CM} > S_{\Delta B'BM}$ (см. задачу 556)). Следовательно, $S_{\Delta AB'C'} > S_{\Delta ABC}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Задача допускает также очень простое алгебраическое решение. В самом деле, площадь параллелограмма со сторонами a и b и углом α равна

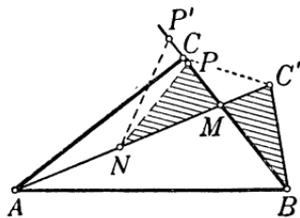
$$ab \sin \alpha = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a-b)^2] \sin \alpha = \frac{1}{4} [p^2 - (a-b)^2] \sin \alpha,$$

где $p = a+b$ — полупериметр рассматриваемого параллелограмма. Отсюда сразу следует, что при данном периметре $2p$ и остром угле α площадь будет наибольшей, если $a-b=0$, $a=b$, т. е. если параллелограмм является ромбом.

г) Наложим два треугольника, удовлетворяющих условию задачи, друг на друга так, чтобы их основания совпали, вершины C и C' были расположены по одну сторону от общего основания AB ; пусть при этом

$$\begin{aligned} \angle CAB &< \angle CBA, \\ \angle C'AB &< \angle C'BA \end{aligned}$$

(черт. 208). Пусть, кроме того, $\angle CAB > \angle C'AB$. Если бы при этом было $\angle CBA > \angle C'BA$, то $\Delta ABC'$ был бы заключен внутри ΔABC и они не могли бы иметь равных периметров. Следовательно, треугольники расположены так, как изображено на черт. 208; отсюда и из предыдущих соотношений между углами следует, что разность углов при основании больше у треугольника $AC'B$.



Черт. 208.

Точку пересечения сторон AC' и BC обозначим через M . Отложим на прямой MA отрезок $MN = MB$ и на прямой MC отрезок $MP = MC'$. При этом точка N будет находиться

между A и M , так как из того, что

$$\angle MBA > \angle CAB > \angle MAB,$$

следует, что $MA > MB$. С другой стороны, точка P будет находиться между M и C , так как если бы она совпала с некоторой точкой P' на продолжении MC , то из равенства периметров двух треугольников мы имели бы $AC + CB = AC' + C'B$, т. е. $AC + P'M - CP' + MB = AN + NM + MC' + C'B$. Отсюда, так как $P'M = MC'$, $MB = MN$ и $C'B = P'N$, мы имели бы:

$$AC = AN + NP' + P'C,$$

что невозможно.

Отняв теперь от треугольников ABC и ABC' равные между собой треугольники NMP и MBC' (заштрихованные на черт. 208), мы сразу обнаружим, что треугольник ABC имеет большую площадь.

Нам еще остается доказать, что

$$CA - CB < C'A - C'B.$$

Для этого достаточно проверить, что $AC < AC'$ (а следовательно, $BC > BC'$). Действительно, если бы было

$$AC > AC', \quad BC < BC',$$

то из рассмотрения треугольников ACC' и BCC' мы получили бы два несовместных неравенства:

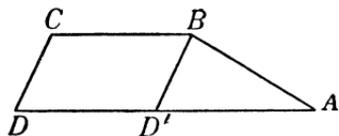
$$\angle ACC' < \angle AC'C, \quad \angle BCC' > \angle BC'C.$$

Равенство же $AC = AC'$ невозможно, так как треугольники ABC и ABC' , по предположению, не равны.

Отметим еще, что из решения задачи вытекает также следующая ее формулировка: *из двух неравных треугольников с общим основанием и одинаковыми периметрами меньшую площадь имеет тот, которому принадлежит наибольший из четырех углов при основании.*

Второе утверждение задачи сразу следует из доказанного.

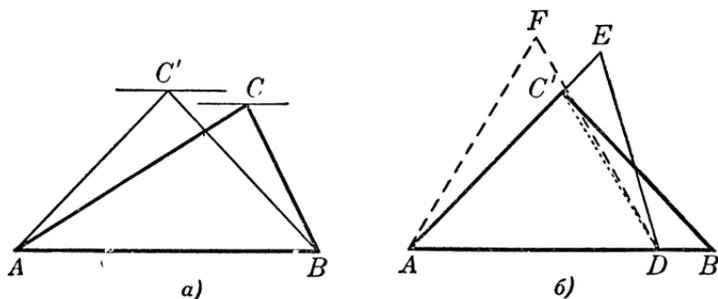
д) Для того чтобы при заданных основаниях площадь трапеции $ABCD$ была наибольшей, необходимо, чтобы ее вы-



Черт. 209.

сота была наибольшей. Проведя линию $BD' \parallel CD$ (черт. 209), мы получим, что наибольшей высоте трапеции $ABCD$ отвечает наибольшая площадь треугольника ABD' с заданным основанием (равным разности оснований трапеции) и заданным периметром (равным периметру трапеции минус удвоенное меньшее основание). После этого остается только применить к треугольнику ABD' заключение задачи 55г).

56. а) Пусть ABC — неравносторонний треугольник, AB — его бо́льшая сторона (или одна из двух бо́льших сторон).



Черт. 210.

Равнобедренный треугольник ABC' , имеющий тот же периметр, что и треугольник ABC , и то же основание AB (черт. 210, а), в силу задачи 55г) имеет не меньшую площадь, чем треугольник ABC . Построим теперь треугольник ADE , у которого сторона AD равна $\frac{1}{3}$ периметра треугольника ABC' , $\angle DAE = \angle BAC'$ и периметр которого равен периметру $\triangle ABC'$. Расположим треугольник ADE так, как указано на черт. 210, б). Так как AB — бо́льшая сторона треугольника ABC , а сторона AD равна трети периметра этого треугольника, то $AB > AD$; отсюда следует, что $AE > AC'$ (так как иначе $\triangle ADE$ был бы заключен внутри треугольника ABC' и не мог бы иметь того же периметра). AB есть бо́льшая сторона равнобедренного треугольника ABC' , поэтому

$$AC' = BC' < \frac{AB + BC' + C'A}{3} = AD.$$

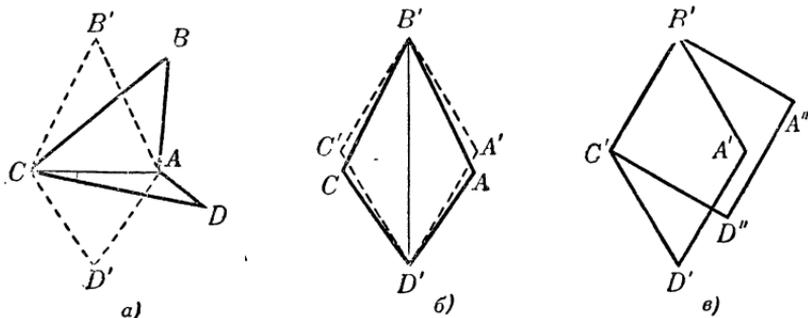
Из последнего неравенства вытекает, что $\angle AC'D > \angle ADC'$, т. е. $\angle EC'D < \angle BDC'$. Так как, кроме того, очевидно, что $\angle BDC' > \angle EDC'$, то в силу задачи 55г) мы можем заключить, что из двух треугольников $C'DE$ и $BC'D$, имеющих общее основание и равные периметры, второй имеет меньшую площадь (см. последнее замечание в решении задачи 55г)). Таким образом,

$$S_{\triangle C'DE} > S_{\triangle BC'D}, \quad S_{\triangle ADE} > S_{\triangle ABC'}.$$

Теперь, построив на основании AD равнобедренный треугольник ADF , имеющий тот же периметр, что и треугольник ADE (этот треугольник, изображенный пунктиром на черт. 210, б, очевидно, будет равносторонним), мы получим согласно задаче 55г), что $S_{\triangle ADF} > S_{\triangle ADE}$ (треугольник ADE не совпадает с равносторонним треугольником ADF , так как $EAD \neq 60^\circ$). Цепь неравенств

$$S_{\triangle ABC} \leq S_{\triangle ABC'} < S_{\triangle ADE} < S_{\triangle ADF}$$

и доказывает теорему (в этом ряду неравенств мы один раз вынуждены писать \leq вместо $<$, так как у нас нет уверенности, что $\triangle ABC$ не равен $\triangle ABC'$, т. е. что он не равнобедренный).



Черт. 211.

б) Разобьем четырехугольник $ABCD$ диагональю AC на два треугольника. Заменяя треугольники ABC и ACD равнобедренными треугольниками $AB'C$ и ACD' с теми же осно-

ваниями и теми же периметрами, мы получим четырехугольник $AB'CD'$, причем в силу задачи 55г)

$$S_{AB'CD'} \geq S_{ABCD}$$

(черт. 211, а). Теперь заменим равные треугольники $AB'D'$ и $B'CD'$ равнобедренными треугольниками $A'B'D'$ и $B'C'D'$ с теми же основаниями и теми же периметрами; мы получим ромб $A'B'C'D'$, причем

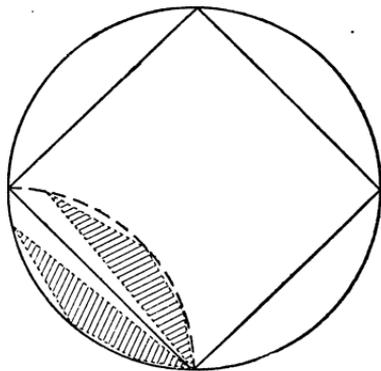
$$S_{A'B'C'D'} \geq S_{AB'CD'}$$

(черт. 211, б). Наконец, ромб $A'B'C'D'$ имеет в силу задачи 55а) не большую площадь, чем квадрат $A''B''C''D''$ с той же стороной (черт. 211, в). Если четырехугольник $ABCD$ отличен от квадрата, то в цепи неравенств

$$S_{ABCD} \leq S_{AB'CD'} \leq S_{A'B'C'D'} \leq S_{A''B''C''D''}$$

хотя один раз должно стоять точное неравенство.

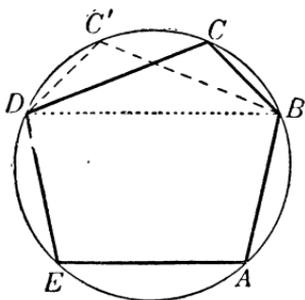
57. а) Если вписанный в круг n -угольник не является правильным, то у него есть сторона, меньшая стороны соответствующего правильного n -угольника. Предположим, далее, что у этого вписанного в круг неправильного n -угольника есть сторона, большая стороны правильного n -угольника (если последнее не имеет места, то весь n -угольник вписан в дугу окружности, меньшую $\frac{1}{n}$ части окружности; этот случай мы можем сразу отбросить, так как тогда многоугольник может быть целиком помещен внутри правильного n -угольника и наверное имеет меньшую площадь; черт. 212).



Черт. 212.

Не меняя площади многоугольника, вписанного в окружность, мы можем поменять его стороны местами так, чтобы рядом оказались сторона, большая стороны правильного n -угольника, и сторона, меньшая стороны правильного n -угольника (очевидно,

что если поменять местами две соседние стороны вписанного в окружность многоугольника, то площадь его не изменится —



Черт. 213.

черт. 213; повторяя этот процесс, можно добиться того, чтобы любые две стороны оказались рядом). Если мы теперь, не меня остальных сторон, изменим длины этих двух сторон многоугольника так, чтобы одна из них стала равной стороне правильного n -угольника и многоугольник оставался вписанным в ту же окружность, то согласно задаче 556) площадь n -угольника увеличится. Продолжая этот процесс далее, мы придем в конце концов к правильному

n -угольнику; при этом в процессе изменения исходного n -угольника площадь его будет только увеличиваться.

б) Доказывается аналогично решению задачи 57а).

58. Преобразуем подобно выпуклый четырехугольник $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) с коэффициентом подобия $k = \frac{c}{a}$; при этом сторона $A'B'$ преобразованного четырехугольника $A'B'C'D'$ станет равна стороне CD четырехугольника $ABCD$. Приложим теперь четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равными сторонами, как это показано на черт. 214, а. Площадь всей образовавшейся фигуры $ADC'D'CB$ равна, очевидно,

$$S_{ABCD} + S_{A'B'C'D'} = (1 + k^2) S_{ABCD}.$$

Из подобия четырехугольников $A'B'C'D'$ и $ABCD$ следует, что

$$\angle ADC' = \angle BCD'.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \angle BCD' &= \angle C + \angle A, \\ \angle ADC' &= 4d - \angle D - \angle B = \angle C + \angle A. \end{aligned}$$

Произведения сторон треугольников DAC' и CBD' , заключающих равные углы, также равны: $d \cdot kb = b \cdot kd$. Таким

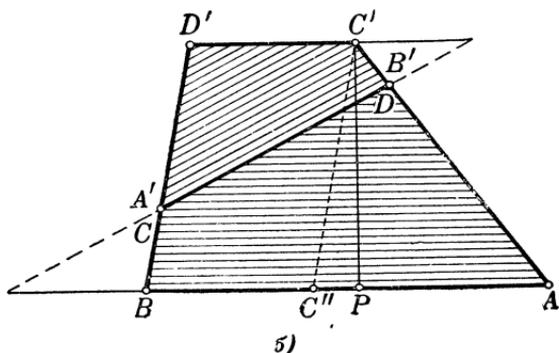
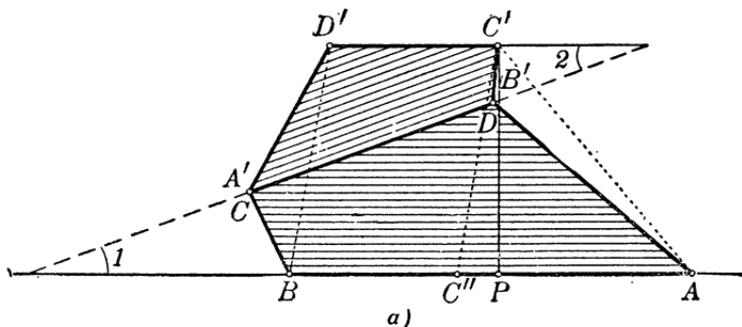
образом,

$$S_{\triangle CBD'} = S_{\triangle DAC'}$$

и, следовательно,

$$S_{ABD'C'} = S_{ABCD} + S_{C'D'D} = (1 + k^2) S_{ABCD} = \frac{a^2 + c^2}{a^2} S_{ABCD}.$$

Четырехугольник $ABD'C'$ является трапецией: параллельность сторон AB и $C'D'$ следует из равенства внутренних



Черт. 214.

накрест лежащих углов, образованных ими с секущей CD (углы I и 2 на черт. 214, а). Нам надо выяснить, в каком случае площадь трапеции $ABD'C'$ с заданными основаниями $AB = a$ и $C'D' = kc = \frac{c^2}{a}$ будет наибольшей, т. е. в каком случае эта трапеция имеет наибольшую высоту.

Проведем $C'C'' \parallel D'B$ и рассмотрим треугольник $AC'C''$, имеющий ту же высоту, что и трапеция $ABD'C'$, и основание

$$AC'' = a - kc = \frac{a^2 - c^2}{a}.$$

Отметим, что разность квадратов боковых сторон этого треугольника при заданных сторонах четырехугольника $ABCD$ является фиксированной. Действительно, по теореме косинусов имеем:

$$C'C''^2 = D'B^2 = b^2 + k^2d^2 - 2kbd \cos \angle BCD',$$

$$AC'^2 = d^2 + k^2b^2 - 2kbd \cos \angle ADC';$$

и так как $\angle BCD' = \angle ADC'$, то

$$\begin{aligned} C'C''^2 - AC'^2 &= b^2 + k^2d^2 - (d^2 + k^2b^2) = \\ &= (b^2 - d^2)(1 - k^2) = \frac{(b^2 - d^2)(a^2 - c^2)}{a^2}. \end{aligned}$$

Обозначим основание высоты треугольника $AC'C''$ буквой P . В таком случае имеем:

$$AC'^2 = AP^2 + C'P^2, \quad C'C''^2 = C''P^2 + C'P^2,$$

$$C'C''^2 - AC'^2 = C''P^2 - AP^2 = (C''P + AP)(C''P - AP).$$

Предположим, что точка P заключена между точками A и C'' . В таком случае

$$C''P + AP = AC'' = a - kc = \frac{a^2 - c^2}{a}$$

и, следовательно,

$$C''P - AP = \frac{b^2 - d^2}{a} \text{ } ^1),$$

т. е.

$$AP = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2a}, \quad C''P = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2a},$$

что полностью определяет положение точки P .

¹⁾ Отсюда видно, что наше предположение о том, что точка P заключена между A и C'' , справедливо только в том случае, если $a^2 - c^2 \geq b^2 - d^2$. Если же $a^2 - c^2 < b^2 - d^2$, то точка C'' заключена между A и P ; дальнейшие рассуждения от этого почти не меняются

(в этом случае $C''P + AP = \frac{b^2 - d^2}{a}$, а $C''P - AP = \frac{a^2 - c^2}{a}$).

Таким образом, основание высоты, опущенной из вершины C' на сторону AB трапеции $ABD'C'$, не зависит от углов четырехугольника $ABCD$. Отсюда ясно, что высота $C'P$ трапеции будет наибольшей в том случае, когда углы четырехугольника будут удовлетворять соотношению $\angle C + \angle A = 180^\circ$ (в этом случае сторона AC' треугольника $AC'C''$ будет иметь наибольшее значение $d + kb = d + \frac{bc}{a}$; см. черт. 214, б), т. е. когда четырехугольник $ABCD$ можно вписать в круг. А это нам и требовалось доказать.

Примечание. Условие задачи имеет смысл, так как существует единственный четырехугольник, который можно вписать в окружность и стороны которого, взятые в определенном порядке, имеют наперед заданные длины a, b, c и d . Действительно, нетрудно построить такой четырехугольник, если воспользоваться приведенными выше рассуждениями. Прежде всего по двум сторонам

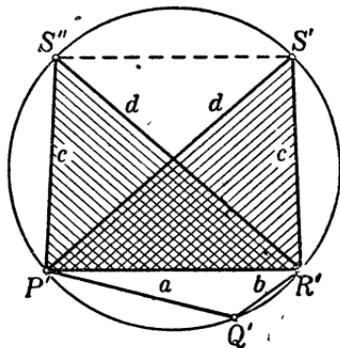
$$AP = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2a}$$

и

$$AC' = d + \frac{bc}{a}$$

мы без труда можем построить прямоугольный треугольник APC' (черт. 214, б); отложив на сторонах AP и AC' этого треугольника соответственно отрезки $AB = a$ и $AD = d$, мы найдем вершины B и D искомого четырехугольника $ABCD$, после чего последнюю вершину C легко построить, так как $BC = b$, $DC = c$.

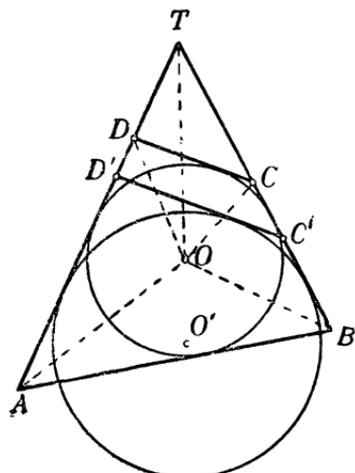
В условии настоящей задачи нет необходимости требовать, чтобы порядок сторон в четырехугольнике был определен (предположение, из которого мы исходили в нашем решении). Действительно, если в произвольном четырехугольнике $PQRS$ стороны следуют, например, в порядке $PQ = a$, $QR = b$, $RS = c$, $SP = d$, то площадь его менее площади вписанного в круг четырехугольника $P'Q'R'S'$, в котором стороны следуют в том же порядке ($P'Q' = a$, $Q'R' = b$, $R'S' = c$, $S'P' = d$). Площадь же последнего четырехугольника, как легко усмотреть из черт. 215, равна площади вписанного в круг



Черт. 215.

четыреугольника $P'Q'R'S''$ со сторонами $P'Q' = a, Q'R' = b, R'S'' = d, S''P' = c$, следующими в другом порядке ¹⁾.

59. а) Откажемся от требования, чтобы периметр четырехугольника был данным, и будем искать среди всех четырехугольников с данными углами такой, для которого отношение



Черт. 216.

площади к квадрату периметра было бы наибольшим (см. текст на стр. 67). Пусть сумма углов A и B четырехугольника меньше 180° (при $\angle A + \angle B > 180^\circ$ было бы $\angle C + \angle D = 360^\circ - \angle A - \angle B < 180^\circ$, и мы заменили бы углы A и B углами C и D ²⁾). Построим треугольник ABT , два угла которого равны углам A и B искомого четырехугольника (черт 216); нам надо пересечь этот треугольник прямой CD заданного направления так, чтобы у получившегося четырехугольника $ABCD$ отношение площади к квадрату периметра было бы возможно бóльшим.

Обозначим радиус круга, вписанного в $\triangle ABT$, через R , радиус внеписанного круга произвольного треугольника $TC'D'$, у которого сторона $C'D'$ имеет данное направление, через kR (k — некоторое число, которое может быть и больше и меньше 1), и пусть CD — прямая, параллельная $C'D'$,

¹⁾ Можно доказать, что площадь вписуемого в круг четырехугольника со сторонами a, b, c, d равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ (обобщение формулы Герона). Отсюда сразу видно, что площадь не зависит от порядка следования сторон. Нам эта формула не понадобится.

²⁾ Здесь мы исключаем случай, когда сумма каждых двух соседних углов четырехугольника $ABCD$ равна 180° , т. е. когда этот четырехугольник является параллелограммом. В этом случае предложение настоящей задачи совпадает с утверждением задачи 55в).

касающаяся круга, вписанного в треугольник ABT (см. черт. 216).

Нам нужно доказать, что имеет место неравенство

$$\frac{S_{ABCD}}{(AB + BC + CD + DA)^2} > \frac{S_{ABC'D'}}{(AB + BC' + C'D' + D'A)^2}.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABT} - S_{\triangle CTD}, \\ AB + BC + CD + DA &= (AB + BT + TA) - (CT + TD - CD), \\ S_{ABC'D'} &= S_{\triangle ABT} - S_{\triangle C'TD'}, \\ AB + BC' + C'D' + D'A &= \\ &= (AB + BT + TA) - (C'T + TD' - C'D'). \end{aligned}$$

Обозначим $AB + BT + TA$ через $2P$, $CT + TD - CD$ через $2p$. Из подобия треугольников CTD и $C'TD'$ будет следовать тогда, что $C'T + TD' - C'D' = 2kp$ (ибо отношение радиусов R и kR соответствующих вневписанных окружностей этих двух треугольников равно их коэффициенту подобия). Далее, если O есть центр круга, вписанного в $\triangle ABT$ (и вневписанного в $\triangle CTD$), то, очевидно,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABT} &= S_{\triangle AOT} + S_{\triangle BOT} + S_{\triangle BOA} = \\ &= \frac{1}{2} R \cdot AT + \frac{1}{2} R \cdot BT + \frac{1}{2} R \cdot BA = PR, \\ S_{\triangle CDT} &= S_{\triangle cot} + S_{\triangle dot} - S_{\triangle cod} = \\ &= \frac{1}{2} R \cdot CT + \frac{1}{2} R \cdot DT - \frac{1}{2} R \cdot CD = pR, \end{aligned}$$

и из подобия треугольников CTD и $C'TD'$

$$S_{\triangle C'TD'} = k^2 pR.$$

Таким образом, неравенство, которое нам надо доказать, принимает вид

$$\frac{RP - Rp}{(2P - 2p)^2} > \frac{RP - k^2 Rp}{(2P - 2kp)^2}$$

или

$$\frac{1}{P - p} > \frac{P - k^2 p}{(P - kp)^2}.$$

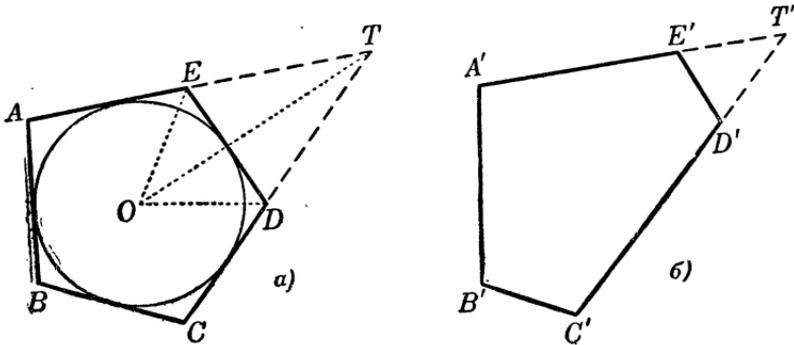
Умножая последнее неравенство на положительное выражение $(P-p)(P-kp)^2$, получим:

$$(P-kp)^2 > (P-p)(P-k^2p),$$

что действительно имеет место, так как

$$\begin{aligned} (P-kp)^2 - (P-p)(P-k^2p) &= \\ &= P^2 - 2kpP + k^2p^2 - P^2 + k^2pP + pP - k^2p^2 = \\ &= k^2pP - 2kpP + pP = pP(1-k)^2 > 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в последнем неравенстве стоит знак $>$, а не \geq , так как p и P положительны, а $k \neq 1$ (равенство $k=1$ означало бы, что треугольники CTD и $C'TD'$ не только подобны, но и равны; в этом случае $C'D'$ совпало бы с CD).



Черт. 217.

б) Решение аналогично решению задачи 59а). Для простоты решим сначала задачу для случая пятиугольника. Рассмотрим два пятиугольника $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ с равными углами, из которых первый описан около окружности, а второй не подобен первому (черт. 217). Для того чтобы доказать, что у пятиугольника $ABCDE$ отношение площади к квадрату периметра больше, чем у пятиугольника $A'B'C'D'E'$, отбросим соответствующие стороны DE и $D'E'$ этих пятиугольников (такие, что $\angle D + \angle E > 2d$) и продолжим примыкающие к DE и $D'E'$ стороны до их пересечения. Мы получим два четырехугольника $ABCT$ и $A'B'C'T'$ с соответственно равными углами; из них первый описан около окруж-

ности. Для упрощения доказательства будем считать, что размеры пятиугольника $A'B'C'D'E'$ выбраны так, что периметр четырехугольника $A'B'C'T'$ равен периметру $2P$ четырехугольника $ABCT$ (выполнения этого условия можно всегда добиться, преобразовав подобно пятиугольник $A'B'C'D'E'$ с подходящим коэффициентом подобия). Площадь четырехугольника $ABCT$ равна RP , где R — радиус вписанного в этот четырехугольник круга. Площадь четырехугольника $A'B'C'T'$ мы обозначим через αRP . Так как в силу результата предыдущей задачи четырехугольник $A'B'C'T'$, имеющий те же углы и тот же периметр, что и четырехугольник $ABCT$, не может иметь большую площадь, то $\alpha \leq 1$; при этом $\alpha = 1$ только в том случае, если четырехугольник $A'B'C'T'$ тоже может быть описан около круга и, следовательно, равен $ABCT$. Далее, обозначим $DT + TE - DE$ через $2p$, $D'T' + T'E' - D'E'$ через $2kp$; здесь k — коэффициент подобия треугольников $D'T'E'$ и DTE . Площадь треугольника DTE равна Rp (R — радиус внеписанного круга этого треугольника); следовательно, площадь треугольника $D'T'E'$, подобного DTE с коэффициентом подобия k , равна k^2Rp .

Так как

$$S_{ABCDE} = S_{ABCT} - S_{\Delta DET},$$

$$AB + BC + CD + DE + EA =$$

$$= (AB + BC + CT + TA) - (DT + TE - ED),$$

$$S_{A'B'C'D'E'} = S_{A'B'C'T'} - S_{\Delta D'E'T'},$$

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A' =$$

$$= (A'B' + B'C' + C'T' + T'A') - (D'T' + T'E' - E'D'),$$

то неравенство

$$\frac{S_{ABCDE}}{(AB + BC + CD + DE + EA)^2} >$$

$$> \frac{S_{A'B'C'D'E'}}{(A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A')^2},$$

которое нам нужно доказать, принимает вид

$$\frac{RP - Rp}{(2P - 2p)^2} > \frac{\alpha RP - k^2 Rp}{(2P - 2kp)^2} \quad (*)$$

или

$$\frac{1}{P - p} > \frac{\alpha P - k^2 p}{(P - kp)^2},$$

$$(P - kp)^2 > (P - p)(\alpha P - k^2 p).$$

Но это последнее неравенство действительно имеет место. В самом деле,

$$\begin{aligned} (P - kp)^2 - (P - p)(\alpha P - k^2 p) &= \\ &= (P - kp)^2 - (P - p)(P - k^2 p) + (1 - \alpha)(P - p)P = \\ &= Pp(1 - k)^2 + (1 - \alpha)(P - p)P > 0 \end{aligned}$$

(см. решение задачи 59а)), так как $1 - \alpha \geq 0$, а $P > p$ по самому определению этих величин. В последнем неравенстве стоит знак $>$, а не \geq , так как если $1 - \alpha = 0$, $\alpha = 1$, то четырехугольник $A'B'C'T'$ равен четырехугольнику $ABCT$, и для того, чтобы пятиугольник $A'B'C'D'E'$ был отличен от $ABCDE$, надо, чтобы треугольник $D'E'T'$ был отличен от DET , т. е. $k \neq 1$; таким образом, если $(1 - \alpha)(P - p)P = 0$, то $Pp(1 - k)^2$ наверное больше нуля.

Решение задачи для n -угольника проводится по методу математической индукции. Оно ничем не отличается от вышеприведенного, и все выкладки имеют точно такой же вид. Только вместо пятиугольника всюду надо говорить об n -угольнике и вместо четырехугольника — об $(n - 1)$ -угольнике, для которого, по предположению индукции, теорема считается уже доказанной (что позволяет утверждать, что $\alpha \leq 1$).

Примечание. Отметим, что имеет место даже неравенство

$$\frac{RP - Rp}{(2P - 2p)^2} \cdot \frac{RP}{P^2} > \frac{\alpha RP - k^2 Rp}{(2P - 2kp)^2} \cdot \frac{\alpha RP}{P^2}, \quad (**)$$

более сильное, чем неравенство (*). Действительно, неравенство (**)

можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{P-p} > \frac{\alpha P - k^2 p}{\alpha (P - kp)^2},$$

$$\alpha (P - kp)^2 - (P - p)(\alpha P - k^2 p) > 0,$$

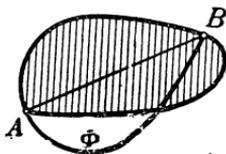
$$-2\alpha k P p + \alpha k^2 p^2 + k^2 P p + \alpha P p - k^2 p^2 > 0,$$

$$\alpha P p (1 - k)^2 + k^2 p (1 - \alpha)(P - p) > 0,$$

а последнее неравенство, очевидно, имеет место.

Неравенство (***) означает, что при переходе от четырехугольника к пятиугольнику (в общем случае — от $(n-1)$ -угольника к n -угольнику) отношение площади к квадрату периметра увеличивается больше для многоугольников, описанных около круга, чем для произвольных многоугольников. Впоследствии мы воспользуемся этим обстоятельством.

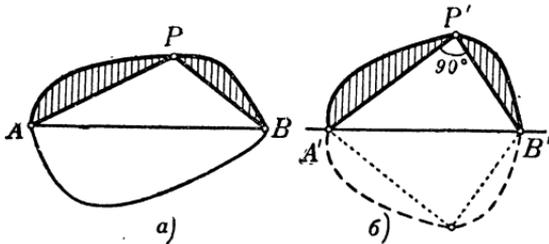
60. Если хорда AB выпуклой фигуры Φ делит периметр Φ на две равные части, а площадь — на две неравные части, то, отразив большую из этих частей относительно хорды AB и заменив этим отражением меньшую часть, мы получим фигуру $\bar{\Phi}$ с тем же периметром, что и Φ , и большей площадью (черт. 218). Полученная фигура $\bar{\Phi}$ может быть и невыпуклой; в этом случае ее площадь можно еще увеличить, не увеличивая периметра (см. выше, стр. 66—67).



Черт. 218.

61. Пусть AB — хорда фигуры Φ , делящая периметр Φ пополам. Если хорда AB делит площадь Φ на две неравные части, то существует фигура $\bar{\Phi}$, имеющая тот же периметр, что и Φ , и большую площадь (см. задачу 60). Если же хорда AB делит периметр и площадь Φ пополам и фигура Φ отлична от круга, то по крайней мере одна из двух частей, на которые AB делит Φ , отлична от полукруга с диаметром AB . Отсюда следует, что у фигуры Φ найдется такая граничная точка P , что угол APB отличен от прямого (черт. 219, а; в противном случае граница Φ являлась бы окружностью с диаметром AB , и фигура Φ была бы кругом). Заменим теперь часть APB фигуры Φ новой фигурой $A'P'B'$ (черт. 219, б), оставив сегменты фигуры, отсекаемые хордами

AP и PB , без изменения и заменив треугольник APB прямоугольным треугольником с теми же длинами боковых сторон ($AP = A'P'$, $PB = P'B'$); при этом в силу задачи 55а) $S_{\Delta A'P'B'} > S_{\Delta APB}$. Отразив теперь полученную фигуру $A'P'B'$ относительно хорды $A'B'$, мы получим фигуру $\bar{\Phi}$ того же периметра, что и фигура Φ (периметр обеих фигур равен удвоен-



Черт. 219.

ной длине дуги APB), но большей площади (площадь $\bar{\Phi}$ равна удвоенной площади фигуры $A'P'B'$, площадь Φ — удвоенной площади фигуры APB).

Примечание. Приведенное здесь рассуждение принадлежит швейцарскому геометру Штейнеру, предполагавшему, что оно полностью решает изопериметрическую задачу. На самом деле, однако, это рассуждение не содержит еще строгого доказательства изопериметрического свойства круга (см. стр. 70—72).

62. Пусть Φ — произвольная выпуклая фигура, K — круг. Нам надо доказать, что отношение площади круга K к квадрату его периметра больше, чем отношение площади фигуры Φ к квадрату ее периметра. При этом площадь и периметр Φ и K определятся как пределы площадей и периметров последовательностей описанных вокруг этих выпуклых фигур многоугольников, все внешние углы которых стремятся к нулю (см. выше, стр. 28).

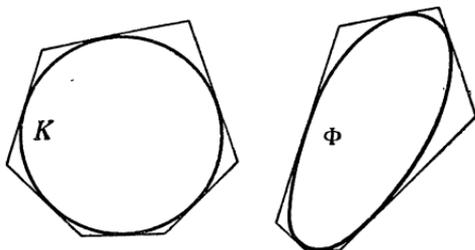
Будем рассматривать описанные вокруг Φ и K многоугольники с соответственно равными углами (например, описанные вокруг Φ и K многоугольники с параллельными сторонами; черт. 220). В силу задачи 59б) отношение площади к квадрату периметра будет для каждого многоугольника, описанного

вокруг K , не меньше, чем для соответствующего многоугольника, описанного вокруг Φ . Отсюда, переходя к пределу, получаем, что

$$\frac{\text{площадь } K}{(\text{периметр } K)^2} \geq \frac{\text{площадь } \Phi}{(\text{периметр } \Phi)^2}, \quad (*)$$

откуда уже следует, что круг имеет не меньшую площадь, чем каждая другая выпуклая фигура того же периметра.

Предположим теперь, что фигура Φ не является кругом, т. е. отлична от K . В этом случае, очевидно, не все многоугольники, описанные вокруг K , будут подобны соответствующим



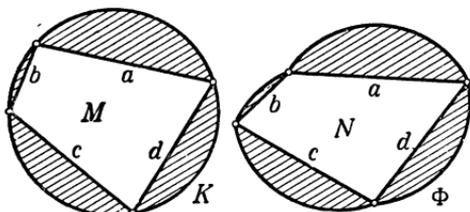
Черт. 220.

многоугольникам, описанным вокруг Φ . При этом если M есть первый из рассматриваемых многоугольников, описанных вокруг K , который не подобен соответствующему многоугольнику \bar{M} , описанному вокруг Φ , то отношение площади к квадрату периметра для многоугольника M будет больше (а не только не меньше), чем для многоугольника \bar{M} (см. решения задач 59а) и б)). А так как в дальнейшем отношение площади к квадрату периметра для многоугольников, описанных вокруг K , увеличивается каждый раз (при переходе от описанного n -угольника к описанному $(n+1)$ -угольнику) больше, чем для многоугольников, описанных вокруг Φ (см. примечание в конце решения задачи 59б)), то окончательно мы можем заключить, что

$$\frac{\text{площадь } K}{(\text{периметр } K)^2} > \frac{\text{площадь } \Phi}{(\text{периметр } \Phi)^2}. \quad (**)$$

Примечание. Если уже доказано, что площадь круга K периметра 1 не меньше площади любой иной фигуры Φ того же периметра [именно это и означает неравенство (*)], то из результата задачи 61 (для любой фигуры Φ , отличной от круга, можно найти фигуру $\bar{\Phi}$ того же периметра и большей площади) сразу будет следовать, что площадь K (которая не может быть меньше площади Φ) больше площади Φ [т. е. неравенство (**)].

63. Рассмотрим вписанный в круг многоугольник M и какой-либо другой выпуклый многоугольник N с теми же длинами сторон. Дополним многоугольник N до некоторой фигуры Φ , приложив к его сторонам сегменты круга, отсекаемые соответствующими сторонами M от круга K , описанного вокруг M (черт. 221).



Черт. 221.

Площадь круга K равна площади многоугольника M плюс сумма площадей сегментов, заштрихованных на черт. 221; площадь фигуры Φ равна площади многоугольника N плюс сумма площадей этих же сегментов. Фигура Φ имеет тот же периметр, что и круг K , а следовательно, площадь ее меньше площади круга K (см. задачу 62). Отсюда вытекает, что площадь многоугольника N меньше площади многоугольника M .

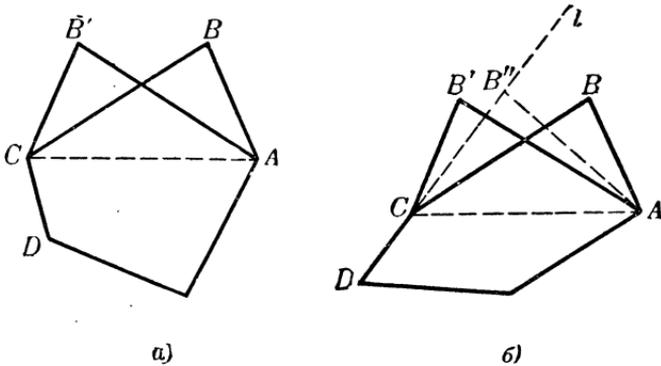
Примечание. В условии настоящей задачи нет необходимости требовать, чтобы порядок сторон в многоугольнике был определен (предположение, из которого мы исходили в нашем решении). Доказательство этого почти не отличается от доказательства аналогичного утверждения, приведенного в решении задачи 58 (см. черт. 215).

64. Прежде всего заметим, что из двух правильных многоугольников одного и того же периметра $2p$ тот имеет большую площадь, у которого число сторон больше. Действительно, площадь правильного n -угольника равна произведению его полупериметра p на апофему, а апофема правильного n -угольника постоянного периметра $2p$, равная $\frac{p}{n} : \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, возрастает при увеличении n .

Для доказательства достаточно представить $\frac{p}{n} : \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ в виде $\frac{p}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{n} : \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right)$ и заметить, что α и $\operatorname{tg} \alpha$ соответственно равны удвоенной площади сектора тригонометрического круга и удвоенной площади треугольника, образованного неподвижным и подвижным радиусами и линией тангенсов. Гео-

метрически очевидно, что отношение $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ (отношение площади треугольника к площади сектора) убывает при уменьшении α (возрастает при увеличении α)¹). Отсюда следует, что $\frac{\pi}{n} : \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ возрастает при увеличении n .

Решение задачи мы будем вести по индукции: предположим доказанным, что площадь всякого выпуклого n -угольника периметра $2p$ меньше площади правильного n -угольника того же периметра, и докажем, что это же имеет место и для $(n+1)$ -угольников. Индукция является законной, так как в случаях $n=3$ и $n=4$ это утверждение справедливо (см. задачи 56а), б)).



Черт. 222.

Покажем прежде всего, что площадь произвольного $(n+1)$ -угольника периметра $2p$ не больше, чем площадь некоторого n -угольника или чем площадь $(n+1)$ -угольника того же периметра, у которого все стороны равны между собой (и, следовательно, длина каждой из них равна $\frac{2p}{n+1}$).

Пусть $ABCD\dots$ — произвольный $(n+1)$ -угольник периметра $2p$, AB и BC — две его соседние стороны. Проведем диагональ AC и построим треугольник $AB'C$, равный треугольнику ABC и расположенный так, как указано на черт. 222, а.

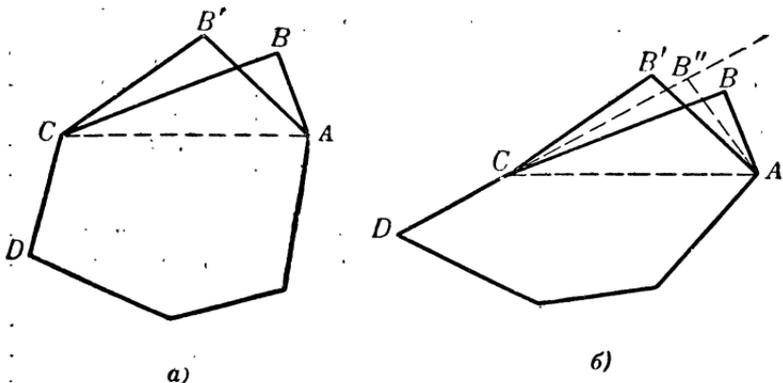
¹) См. Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1 («Библиотека математического кружка», вып. 1), М.—Л., Гостехиздат, 1950, задача 102в), стр. 25.

Многоугольник $AB'CD \dots$, получившийся в результате замены треугольника ABC треугольником $AB'C$, может оказаться невыпуклым (черт. 222, б). В этом случае продолжение одной из сторон, примыкающих к AB или BC , пересечет треугольник $AB'C$; пусть, например, это имеет место для продолжения l прямой CD . Возьмем на l такую точку B'' , что $AB'' + B''C = AB + BC$ (существование такой точки очевидно из соображений непрерывности, см. § 3). Тогда периметры и основания треугольников ABC и $AB''C$ будут равны, причем последний из них имеет меньшую разность углов при основании, так что (см. задачу 55г) $S_{\Delta AB''C} > S_{\Delta ABC}$. Таким образом, n -угольник $AB''D \dots$ имеет тот же периметр $2p$ и большую площадь, чем исходный многоугольник $ABCD \dots$.

Итак, произведя построение треугольника $AB'C$, указанное выше, мы либо придем к выпуклому многоугольнику $AB'CD \dots$ (черт. 222, а) того же периметра и той же площади, у которого стороны AB и BC поменялись местами, либо убедимся, что площадь исходного многоугольника $ABCD \dots$ меньше площади некоторого n -угольника того же периметра, что и исходный $(n+1)$ -угольник. Пользуясь этим приемом, мы сможем (меняя несколько раз местами две соседние стороны многоугольника) либо сделать соседними наибольшую и наименьшую стороны, либо убедиться, что рассматриваемый $(n+1)$ -угольник меньше по площади некоторого n -угольника того же периметра.

Рассмотрим теперь $(n+1)$ -угольник, у которого наименьшая (или одна из наименьших) и наибольшая (одна из наибольших) стороны расположены рядом. Пусть это будут стороны AB и BC (AB — наименьшая, BC — наибольшая стороны многоугольника). Ясно, что $AB < \frac{2p}{n+1}$, а $BC > \frac{2p}{n+1}$, ибо если бы, например, наименьшая сторона AB была больше $\frac{2p}{n+1}$, то периметр многоугольника был бы больше чем $(n+1) \cdot \frac{2p}{n+1} = 2p$, чего не может быть. Построим треугольник $AB'C$ с тем же основанием AC , тем же периметром (следовательно, той же суммой боковых сторон),

у которого одна из боковых сторон равна $\frac{2p}{n+1}$ и $AB' \leq \leq B'C$ (черт. 223, а). При этом разность боковых сторон треугольника $AB'C$ меньше, чем разность боковых сторон треугольника ABC , так что $S_{\Delta AB'C} > S_{\Delta ABC}$ (см. задачу 55г)), и многоугольник $AB'CD\dots$ имеет тот же периметр и большую площадь, чем исходный многоугольник. Если же окажется, что многоугольник $AB'CD\dots$ — невыпуклый, то мы поступим так же, как и выше (черт. 223, б), и убедимся, что площадь исходного многоугольника меньше площади некоторого n -угольника с тем же периметром.



Черт. 223.

Итак, при помощи описанного приема мы сможем построить либо выпуклый многоугольник $AB'C\dots$, одна сторона которого равна $\frac{2p}{n+1}$ (при этом он имеет тот же периметр и большую площадь, чем многоугольник $ABCD\dots$), либо выпуклый n -угольник того же периметра, что и многоугольник $ABCD\dots$, но большей площади.

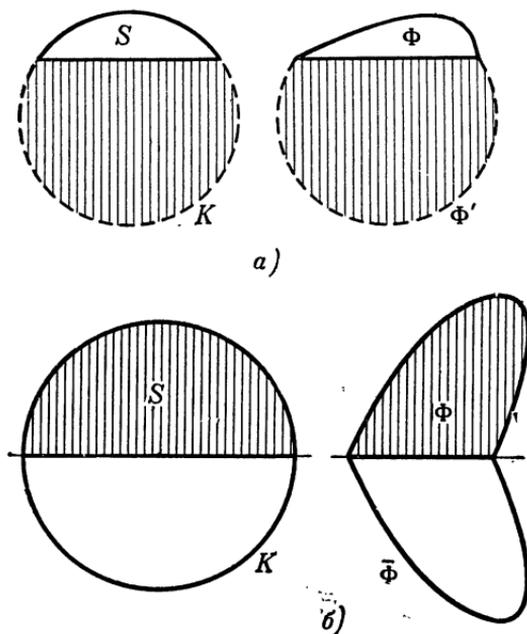
Если полученный многоугольник все еще имеет стороны, отличные от $\frac{2p}{n+1}$, то у него непременно найдутся как стороны, меньше $\frac{2p}{n+1}$, так и стороны, больше $\frac{2p}{n+1}$, и мы сможем, применяя тот же прием, построить $(n+1)$ -угольник того же периметра и большей площади с двумя сторонами длины $\frac{2p}{n+1}$ или n -угольник периметра $2p$ и большей

площади. Поступая таким же образом далее, мы докажем, что площадь произвольного $(n+1)$ -угольника периметра $2p$ не больше площади $(n+1)$ -угольника, все стороны которого равны $\frac{2p}{n+1}$, или площади некоторого n -угольника.

Площадь выпуклого $(n+1)$ -угольника, все стороны которого равны, не больше площади правильного $(n+1)$ -угольника того же периметра (см. задачу 63). Площадь же n -угольника периметра $2p$ по предположению индукции меньше площади правильного n -угольника периметра $2p$, а следовательно, и меньше площади правильного $(n+1)$ -угольника того же периметра (см. замечание в начале решения задачи).

Таким образом, требуемое утверждение полностью доказано.

65. а) Рассмотрим сегмент S с хордой длины a и дугой длины l и какую-либо другую фигуру Φ периметра $a+l$, граница которой содержит прямолинейный отрезок длины a . Дополним сегмент S до круга K ; второй такой же сегмент, как тот, который дополняет S до круга K , приложим хордой к прямолинейному отрезку границы фигуры Φ так, чтобы он оказался расположенным по дру-



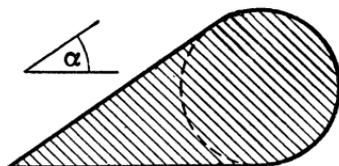
Черт. 224.

гую сторону этого отрезка относительно Φ (черт. 224, а). Образовавшаяся фигура Φ' имеет тот же периметр, что и круг K , и, следовательно, меньшую площадь (задача 62). Отнимая от площадей K и Φ равные между собой сегменты,

заштрихованные на черт. 224, а, мы убедимся в том, что площадь сегмента S больше площади фигуры Φ .

б) Рассмотрим полукруг S радиуса $\frac{l}{\pi}$ и какую-либо другую фигуру Φ , ограниченную отрезком прямой и дугой длины l . Отразим симметрично фигуры Φ и S относительно прямой, отрезок которой входит в их границы (черт. 224, б). Мы получим круг K (площадь K в два раза больше площади S) и фигуру $\bar{\Phi}$ (площадь $\bar{\Phi}$ в два раза больше площади Φ). Периметр $\bar{\Phi}$ равен периметру K ; следовательно, площадь $\bar{\Phi}$ меньше площади K (см. задачу 62), и площадь Φ меньше площади S .

66. Искомой фигурой является выпуклая фигура, ограниченная сторонами угла величины α и дугой окружности,

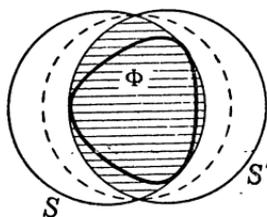


Черт. 225.

вписанной в этот угол (черт. 225). Решение может быть проведено вполне аналогично решению задачи 62; предоставляем читателю провести его самостоятельно.

§ 6

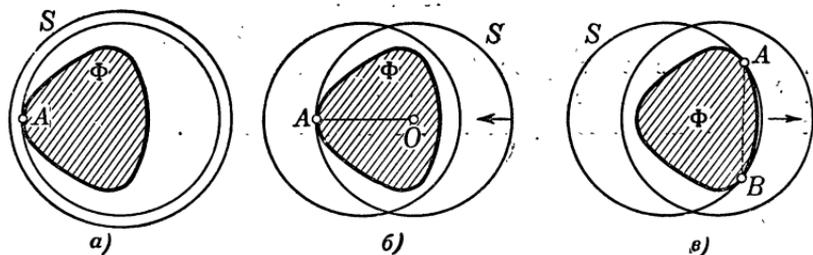
67. Фигура Φ не может иметь двух различных описанных окружностей, потому что если бы Φ содержалась внутри двух окружностей S и S' одного и того же радиуса R , то она заключалась бы также внутри заштрихованного на черт. 226



Черт. 226.

двуугольника, образованного пересечением окружностей S и S' , а следовательно, и внутри окружности, описанной вокруг этого двуугольника (изображенной пунктиром на черт. 226). Но последняя окружность имеет меньший радиус, чем окружности S и S' , что противоречит тому, что окружности S и S' — описанные окружности фигуры Φ .

Далее, если окружность S , заключающая плоскую фигуру Φ внутри себя, вообще не содержит граничных точек Φ , то существует окружность меньшего радиуса, также содержащая Φ внутри себя. Чтобы получить эту окружность, будем постепенно уменьшать радиус окружности S , не меняя ее центра, до тех пор, пока уменьшенная окружность не коснется границы фигуры Φ в какой-либо точке A (черт. 227, а).



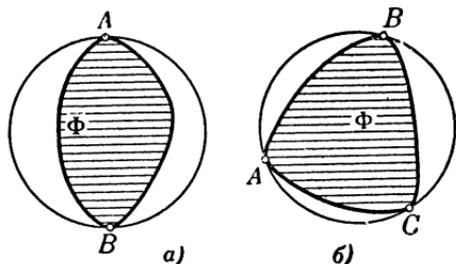
Черт. 227.

Если окружность S , заключающая фигуру Φ внутри себя, содержит единственную граничную точку A фигуры Φ , то также существует окружность S' меньшего радиуса, заключающая Φ внутри себя. Для того чтобы это доказать, сдвинем несколько окружность S в направлении радиуса OA (O — центр окружности S) так, чтобы точка A оказалась внутри окружности (черт. 227, б). При этом мы получим окружность

того же радиуса, что и S , заключающую фигуру Φ внутри себя и не содержащую граничных точек Φ ; согласно вышесказанному радиус этой окружности можно уменьшить так, чтобы она все еще содержала фигуру Φ внутри себя.

Наконец, если окружность S , заключающая фигуру Φ внутри себя, содержит две граничные точки A и B фигуры Φ , не являющиеся диаметрально противоположными точками S , и дуга окружности S , большая полуокружности, с концами в точках A и B не содержит более никаких точек Φ , то также существует окружность, радиус которой меньше радиуса S и которая заключает фигуру внутри себя. Для доказательства сдвинем несколько окружность S в направлении, перпендикулярном к хорде AB так, чтобы точки A и B оказались внутри окружности (черт. 227, *в*). При этом мы снова получим окружность того же радиуса, что и S , содержащую Φ внутри себя и не содержащую граничных точек Φ ; радиус этой окружности можно уменьшить так, чтобы Φ все еще оставалась внутри окружности.

Таким образом, наименьшая из содержащих Φ окружностей обязательно должна содержать либо две точки Φ , являющиеся диаметрально противоположными точками окружности (черт. 228, *а*), либо три такие точки Φ , что никакая из дуг окружности между какими-либо двумя из этих трех точек не больше полуокружности (т. е. три точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника; черт. 228, *б*).



Черт. 228.

Отсюда сразу следует, что радиус R описанной окружности S фигуры Φ диаметра 1 заключается в указанных в условии задачи границах. Действительно, прежде всего, так как фигура Φ заключается внутри окружности S радиуса R , наибольшее расстояние между точками которой равно $2R$, то из того, что диаметр Φ равен 1, сразу следует, что $2R \geq 1$, $R \geq \frac{1}{2}$. Таким образом, остается только доказать, что $R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Если описанная окружность содержит две точки Φ , являющиеся диаметрально противоположными точками окружности, то, так как расстояние между этими точками не больше 1, радиус R окружности не может быть больше $\frac{1}{2}$, следовательно, он равен $\frac{1}{2}$ и, значит, меньше $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Если же описанная окружность S фигуры Φ содержит три точки Φ , являющиеся вершинами остроугольного треугольника ABC , то по крайней мере один из углов α этого остроугольного треугольника не меньше 60° (сумма трех углов треугольника равна 180°). Синус этого угла не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, и так как сторона a , противолежащая этому углу, не больше 1, то диаметр $2R$ окружности S , описанной вокруг треугольника ABC , равный $\frac{a}{\sin \alpha}$, не больше $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

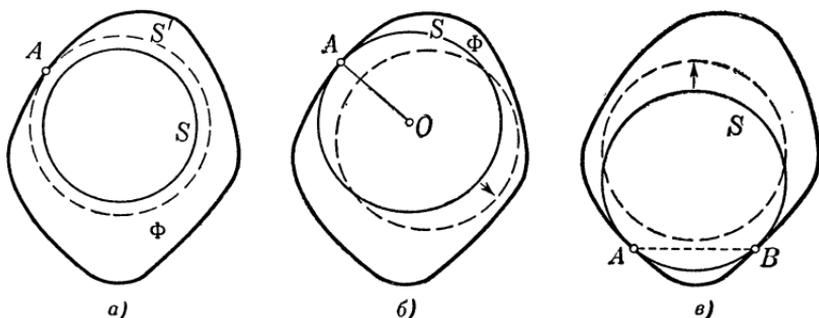
Примечание. Обе границы для значения радиуса описанной окружности, полученные в настоящей задаче, достижимы, как показывает пример прямоугольника, с одной стороны, и пример правильного треугольника, с другой стороны.

68. Решение очень похоже на предыдущее. Прежде всего, если окружность S , целиком заключающаяся внутри выпуклой фигуры Φ , не содержит совсем граничных точек Φ , то существует заключающаяся внутри Φ окружность S' , радиус которой больше радиуса S . Чтобы найти эту окружность, будем постепенно увеличивать радиус S , не меняя ее центра, до тех пор, пока увеличенная окружность не коснется границы Φ в какой-либо точке A (черт. 229, а).

Если окружность S , заключающаяся целиком внутри выпуклой фигуры Φ , содержит единственную граничную точку A фигуры Φ , то тоже существует окружность, радиус которой больше радиуса S , заключающаяся внутри Φ . Для того чтобы это доказать, сдвинем несколько окружность S в направлении радиуса AO (O — центр окружности S) так, чтобы точка A оказалась вне окружности (черт. 229, б). При этом мы получим окружность того же радиуса, что и S , заключенную внутри Φ и не имеющую с границей Φ общих точек; со-

гласно вышесказанному, радиус этой окружности можно увеличить так, чтобы она все еще оставалась заключенной внутри Φ .

Наконец, если окружность S , заключенная внутри фигуры Φ , содержит две такие граничные точки A и B фигуры Φ , что дуга AB окружности S , большая 180° , не содержит никаких других граничных точек Φ , то также существует окружность большего радиуса, чем S , содержащаяся целиком внутри Φ . Действительно, сдвинем окружность S в направлении, перпендикулярном к хорде AB так, чтобы точки A и B



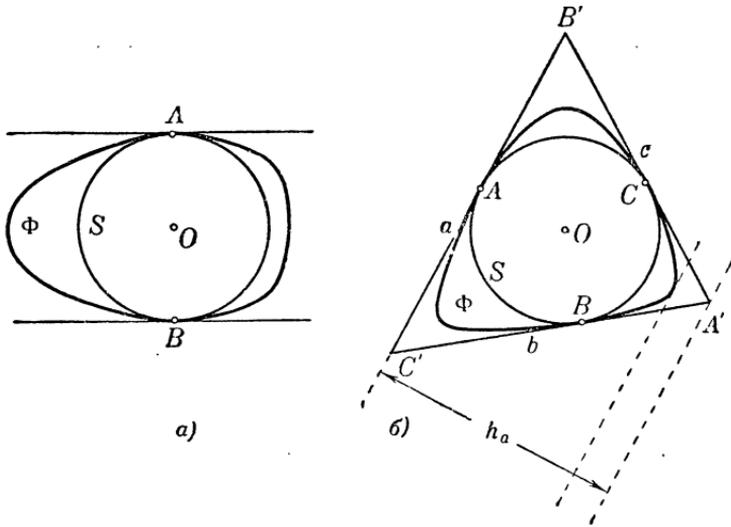
Черт. 229.

оказались вне окружности (черт. 229, *в*). При этом мы получим окружность того же радиуса, что и S , заключающуюся внутри Φ и не имеющую с границей Φ общих точек; радиус этой окружности мы можем увеличить так, чтобы она все еще оставалась внутри Φ .

Таким образом, наибольшая из всех содержащихся в Φ окружностей должна содержать либо две граничные точки Φ , являющиеся диаметрально противоположными точками окружности (черт. 230, *а*), либо три такие граничные точки Φ , что никакая из дуг окружности между какими-либо двумя из этих трех точек не больше полуокружности, т. е. три точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника (черт. 230, *б*).

Отсюда нетрудно вывести, что радиус r вписанной окружности выпуклой фигуры Φ ширины l заключается в указанных в условии задачи пределах. Прежде всего, так как окружность S заключается внутри Φ , а следовательно, и внутри каждой полосы, образованной парой параллельных

опорных прямых фигуры Φ , то диаметр S не может быть больше 1 и, следовательно, радиус r окружности S не может быть больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, требуется доказать только, что r не может быть меньше $\frac{1}{3}$.



Черт. 230.

Если вписанная в выпуклую фигуру Φ окружность S соприкасается с границей Φ в точке A , то опорная прямая фигуры Φ , проходящая через точку A , должна быть одновременно и опорной прямой окружности S . Но так как через граничную точку окружности можно провести только единственную опорную прямую, то отсюда следует, что фигура Φ может иметь в точке A единственную опорную прямую, совпадающую с касательной к окружности S (т. е. точка A не может быть угловой точкой фигуры Φ). Отсюда прежде всего вытекает, что если вписанная в Φ окружность S содержит две граничные точки A и B фигуры Φ , являющиеся диаметрально противоположными точками S , то радиус S равен половине расстояния между параллельными опорными прямыми фигуры Φ , проведенными в точках A и B , и не может быть

меньше $\frac{1}{2}$, следовательно, в этом случае обязательно $r = \frac{1}{2}$ (черт. 230, а).

Если же вписанная окружность S фигуры Φ содержит три граничные точки A, B, C фигуры Φ , являющиеся вершинами остроугольного треугольника, то опорные прямые фигуры Φ , проведенные в точках A, B, C , образуют некоторый треугольник $A'B'C'$, описанный одновременно вокруг Φ и вокруг окружности S (черт. 230, б). Обозначим стороны этого треугольника через a, b, c (a — наибольшая сторона), а соответствующие высоты — через h_a, h_b, h_c . Площадь треугольника $A'B'C'$ равна, с одной стороны, $\frac{a+b+c}{2} \cdot r$, а с другой, $\frac{a}{2} \cdot h_a$. Так как $a \geq b, a \geq c$, то из равенства

$$\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{a}{2} \cdot h_a$$

следует:

$$h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \cdot r \leq 3r;$$

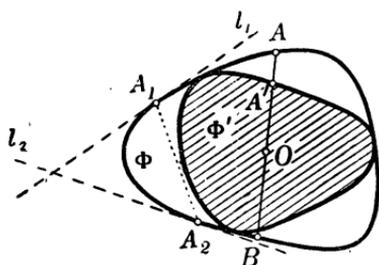
$$r \geq \frac{1}{3} h_a.$$

Но высота h_a треугольника $A'B'C'$, описанного вокруг фигуры Φ , не может быть меньше ширины Φ (см. черт. 230, б); отсюда следует, что $r \geq \frac{1}{3}$, что и требовалось доказать.

В том случае, когда вписанная в выпуклую фигуру Φ окружность S содержит три граничные точки Φ , являющиеся вершинами остроугольного треугольника, существует треугольник $A'B'C'$, описанный одновременно вокруг Φ и вокруг S . Отсюда следует, что в этом случае вписанная окружность S является единственной — всякая другая окружность, содержащаяся внутри Φ , должна также содержаться внутри треугольника $A'B'C'$ и, следовательно, будет меньше, чем окружность S , вписанная в треугольник $A'B'C'$. Однако, если вписанная окружность соприкасается с границей Φ в двух диаметрально противоположных точках, то она может быть и не единственной (см. черт. 68 в тексте).

Примечание. Обе границы для величины радиуса вписанной окружности выпуклой фигуры Φ ширины 1 достижимы, как показывает пример прямоугольника, с одной стороны, и пример равностороннего треугольника, с другой стороны. Из решения задачи нетрудно усмотреть, что равносторонний треугольник будет единственной выпуклой фигурой, радиус вписанной окружности которой равен $\frac{1}{3}$ ширины.

69. Пусть Φ — выпуклая фигура, O — ее центр, λ — коэффициент центральности. Каждая хорда AB фигуры Φ , проходящая через O , делится в этой точке в отношении $\frac{AO}{OB}$,



Черт. 231.

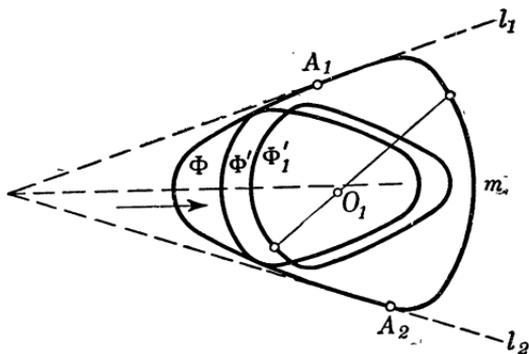
не меньшему λ . Другими словами, $OA \geq \lambda \cdot OB$; следовательно, если отложить на отрезке OA отрезок $OA' = \lambda \cdot OB$, то точка A' также будет принадлежать фигуре Φ (черт. 231). Совокупность всех таких точек A' , отложенных на всех хордах AB фигуры Φ , будет границей некоторой фигуры Φ' , подобной фигуре Φ с коэффициентом подобия λ и центром подобия

в точке O . Фигура Φ' заключается внутри фигуры Φ и должна соприкасаться с ее границей, поскольку существуют хорды фигуры Φ , проходящие через O , которые делятся точкой O в отношении $\frac{AO}{OB}$, в точности равном λ .

Пусть теперь $A_1 m A_2$ — любая дуга ограничивающей фигуру Φ выпуклой кривой, не содержащая точек фигуры Φ' . Мы утверждаем, что если опорные прямые l_1 и l_2 фигуры Φ , проведенные в точках A_1 и A_2 (эти опорные прямые могут быть не единственными), не параллельны, то они обязательно пересекаются в точке, расположенной с той же стороны хорды $A_1 A_2$, что и дуга $A_1 m A_2$.

Действительно, предположим, что это не так и что, следовательно, имеет место случай, изображенный на черт. 232. Тогда мы можем сдвинуть фигуру Φ' в направлении, параллельном биссектрисе угла между прямыми l_1 и l_2 , на такое малое расстояние, что полученная фигура Φ'_1 будет цели-

ком заключена внутри Φ и не будет иметь с Φ общих граничных точек. Обозначим через O_1 центр подобия фигур Φ и Φ'_1 (легко видеть, что фигуры Φ и Φ'_1 также будут подобно расположены¹⁾). Так как коэффициент подобия Φ и Φ'_1 равен λ , то из того, что фигура Φ'_1 расположена целиком внутри Φ (т. е. не соприкасается с границей Φ), следует,



Черт. 232.

что все хорды Φ , проходящие через точку O_1 , делятся в этой точке в отношении, большем λ . А это противоречит тому, что точка O является центром Φ .

Обозначим границу фигуры Φ через K и границу Φ' через K' . Мы видим, что если только некоторая дуга кривой K не соприкасается с K' , то опорные прямые к K в концах этой дуги обязательно пересекаются по ту сторону от стягивающей дугу хорды, с которой расположена сама дуга. А это может быть только в следующих двух случаях: 1) если граница фигуры Φ содержит три точки A_1, A_2, A_3 , принадлежащие Φ' и такие, что опорные прямые l_1, l_2, l_3 в этих точках образуют описанный вокруг Φ треугольник, и 2) если

¹⁾ Нетрудно доказать, что две подобные фигуры подобно расположены (имеют центр подобия), если соответствующие отрезки этих фигур параллельны. Отсюда и следует, что фигуры Φ и Φ'_1 подобно расположены.

граница Φ содержит две такие точки A и B , что опорные прямые l_1 и l_2 к Φ в этих точках параллельны. Нетрудно доказать, что последнее обстоятельство может иметь место только в том случае, когда коэффициент центральности Φ равен 1, т. е. когда эта фигура центрально-симметрична (и Φ' совпадает с Φ); мы предоставляем читателю провести самостоятельно это несложное доказательство.

Рассмотрим теперь первый случай. Пусть A_1, A_2, A_3 — три точки соприкосновения границы Φ с границей Φ' , т. е. A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 — три такие хорды фигуры Φ , проходящие через точку O , что $\frac{A_1O}{OB_1} = \frac{A_2O}{OB_2} = \frac{A_3O}{OB_3} = \lambda$. Из того, что опорные прямые l_1, l_2 и l_3 фигуры Φ в точках A_1, A_2 и A_3 образуют описанный вокруг Φ треугольник, легко вывести, что точка O расположена внутри треугольника $A_1A_2A_3$.

В самом деле, предположим, что это не так. Если точка O лежит на стороне A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$, то, очевидно, $\frac{A_1O}{OA_2} = \frac{A_2O}{OA_1} = \lambda$; следовательно, $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = 1$ и фигура Φ центрально-симметрична. Предположим теперь, что точка O лежит вне треугольника $A_1A_2A_3$, т. е. внутри одного из трех треугольников, получаемых из треугольника со сторонами l_1, l_2, l_3 после удаления из него треугольника $A_1A_2A_3$. Пусть, например, точка O лежит в том из этих трех треугольников (обозначим его через T), который примыкает к стороне A_1A_2 (треугольник T заштрихован на черт. 233, *a*). Обозначив точки пересечения прямых A_1O, A_2O с l_2, l_1 через D_1, D_2 , будем иметь:

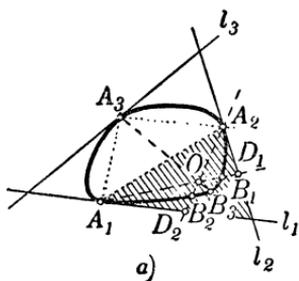
$$A_1O : OB_1 \geq A_1O : OD_1$$

и

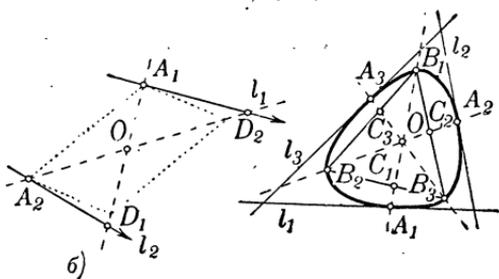
$$A_2O : OB_2 \geq A_2O : OD_2.$$

Но по крайней мере одно из отношений $A_1O : OD_1, A_2O : OD_2$ больше единицы (в противном случае внутри треугольника T был бы расположен параллелограмм со стороной A_1A_2 и центром O , и прямые l_1, l_2 не могли бы пересечься со стороны дуги A_1A_2 ; см. черт. 233, *b*). Пусть для определенности $A_1O : OD_1 > 1$. Тогда $\lambda = A_1O : OB_1 \geq A_1O : OD_1 > 1$, чего, очевидно, не может быть, ибо при $\lambda > 1$ фигура Φ' не расположена целиком внутри Φ .

Итак, точка O расположена внутри $\triangle A_1A_2A_3$. Отсюда следует, что точки $A_1, B_3, A_2, B_1, A_3, B_2$ расположены на границе фигуры Φ в циклическом порядке, так что точка O лежит также внутри $\triangle B_1B_2B_3$ (черт. 234). Отсюда уже можно вывести, что $\lambda \geq \frac{1}{2}$.



Черт. 233.



Черт. 234.

В самом деле, обозначим точки пересечения прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 со сторонами треугольника $B_1B_2B_3$ через C_1, C_2, C_3 . Имеем:

$$\frac{B_1O}{OC_1} \geq \frac{B_1O}{OA_1} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{B_2O}{OC_2} \geq \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{B_3O}{OC_3} \geq \frac{1}{\lambda};$$

отсюда

$$\frac{B_1C_1}{OC_1} = \frac{B_1O + OC_1}{OC_1} \geq 1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1 + \lambda}{\lambda}, \quad \frac{OC_1}{B_1C_1} \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

и точно так же

$$\frac{OC_2}{B_2C_2} \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad \frac{OC_3}{B_3C_3} \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{OC_1}{B_1C_1} + \frac{OC_2}{B_2C_2} + \frac{OC_3}{B_3C_3} &= \frac{S_{\triangle OR_2B_3}}{S_{\triangle B_1B_2B_3}} + \frac{S_{\triangle OB_3B_1}}{S_{\triangle B_2B_3B_1}} + \frac{S_{\triangle OB_1B_2}}{S_{\triangle B_3B_1B_2}} = \\ &= \frac{S_{\triangle OB_3B_3} + S_{\triangle OR_2B_1} + S_{\triangle OB_1B_2}}{S_{\triangle B_1B_2B_3}} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что

$$3 \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \geq 1, \quad 3\lambda \geq 1 + \lambda, \quad 2\lambda \geq 1,$$

и окончательно имеем:

$$\lambda \geq \frac{1}{2}.$$

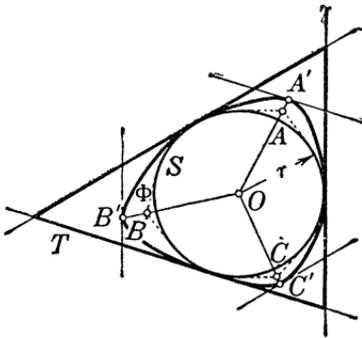
Примечание. Из решения задачи легко усмотреть, что коэффициент центральности λ фигуры Φ равен $\frac{1}{2}$ в том и только в том случае, когда Φ — треугольник.

70. Прежде всего отметим, что в силу результата задачи 68 радиус r круга S , вписанного в фигуру Φ ширины 1, не больше $\frac{1}{2}$ и не меньше $\frac{1}{3}$. При этом если $r = \frac{1}{2}$, то площадь фигуры Φ наверное не меньше $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} = 0,78\dots$, что больше площади равностороннего треугольника высоты 1, равной $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\dots$. Если же $r = \frac{1}{3}$, то Φ есть равносторонний треугольник высоты 1.

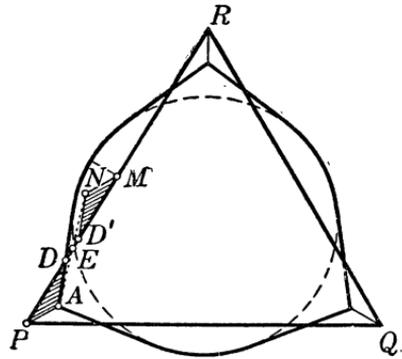
Пусть теперь радиус вписанного круга S фигуры Φ равен r ($\frac{1}{3} \leq r < \frac{1}{2}$); тогда существует треугольник T , описанный одновременно вокруг Φ и вокруг S (см. решение задачи 68, черт. 230; б). Проведем еще три опорные прямые фигуры Φ , соответственно параллельные сторонам треугольника T ; точки соприкосновения этих опорных прямых с границей фигуры Φ (какие-нибудь из точек соприкосновения, если эти прямые содержат целые отрезки, принадлежащие границе Φ) обозначим через A' , B' , C' (черт. 235). Центр круга S обозначим через O . Так как расстояние между парой параллельных опорных прямых фигуры Φ не может быть меньше 1, а точка O отстоит от каждой из сторон треугольника на расстоянии r , то расстояние точек A' , B' , C' от точки O не меньше $1 - r$. На отрезках OA' , OB' , OC' отметим точки A , B , C , удаленные от O на расстояние $1 - r$. Проведя из точек A , B , C касательные к кругу S , мы получим фигуру Φ_r , состоящую из круга радиуса r и трех равных между собой частей, ограниченных кругом и

двумя касательными круга (см. черт. 235); эта фигура заключается внутри нашей фигуры Φ . Если $r = \frac{1}{3}$, то $\Phi_r = \Phi_{1/3}$ представляет собой равносторонний треугольник с высотой 1.

Нам достаточно доказать, что из всех фигур Φ_r , соответствующих разным значениям r ($\frac{1}{3} \leq r < \frac{1}{2}$), наименьшую площадь имеет равносторонний треугольник $\Phi_{1/3}$. На черт. 236



Черт. 235.

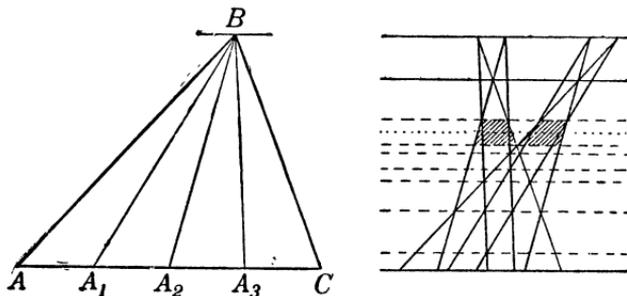


Черт. 236.

изображены равносторонний треугольник PQR и фигура Φ_r ($\frac{1}{3} < r < \frac{1}{2}$). Нетрудно видеть, что общая площадь частей равностороннего треугольника, выходящих за пределы фигуры Φ_r , меньше площади частей фигуры Φ_r , расположенных вне треугольника $\Phi_{1/3}$. Части треугольника, расположенные вне Φ_r , состоят из шести треугольников таких, как треугольник APD , заштрихованный на черт. 236. Пусть M — середина стороны PQ треугольника PQR . Проведем из точки M отрезок MN , равный и параллельный PA . Точка N будет находиться внутри круга, составляющего часть фигуры Φ_r , так как наименьшее расстояние от точки M до окружности (расстояние по перпендикуляру к PR) равно, как нетрудно видеть, PA (это можно вывести из того, что наибольшее расстояние от точки A до окружности равно 1, как и высота треугольника). Соединим N с A ; пусть NA пересекает PQ

в точке E . Треугольник MNE равен треугольнику EAP , а треугольник DAP составляет лишь часть EAP . Таким образом, мы можем перенести треугольник DAP внутрь MNE , т. е. внутрь Φ_r (новое положение треугольника DAP тоже заштриховано на черт. 236). Перенеся таким же образом все шесть треугольников, таких, как DAP , внутрь Φ_r , мы убедимся, что равносторонний треугольник $\Phi_{1/3}$ имеет меньшую площадь, чем фигура Φ_r . Этим и завершается доказательство.

71. Пусть треугольники $ABA_1, A_1BA_2, A_2BA_3, \dots, A_{n-1}BC$ сдвинуты каким-то образом вдоль прямой AC (черт. 237). Для того чтобы определить площадь, занимаемую



Черт. 237.

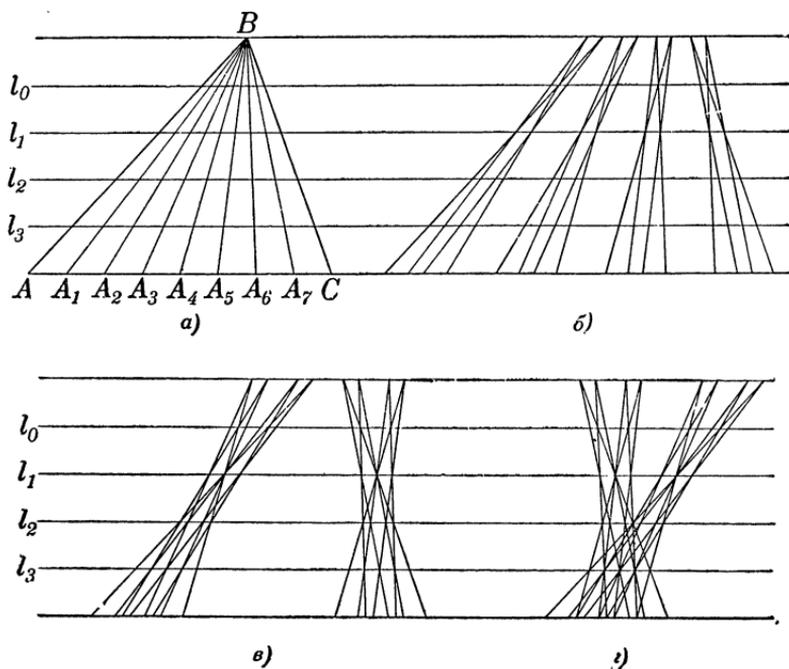
всеми этими треугольниками в новом положении, проведем прямые, параллельные общему основанию AC всех треугольников, через каждую из точек пересечения боковых сторон каких-либо двух из наших треугольников. При этом мы разобьем всю совокупность треугольников на ряд малых треугольников и трапеций. И площадь треугольника, и площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту; отсюда следует, что общая площадь всех треугольников и трапеций, заключающихся внутри полосы между двумя соседними из проведенных нами прямых, будет равна ширине полосы, умноженной на сумму длин всех отрезков, которые высекаются треугольниками на средней линии полосы (т. е. прямой, параллельной AC и равноудаленной от ограничивающих полос прямых; см. черт. 237).

Таким образом, если мы добьемся того, чтобы общая длина всех отрезков, высекаемых сдвинутыми треугольниками $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{n-1}BC$ на каждой из параллельных AC прямых, была меньше $\frac{\sigma}{h}$, где h есть высота треугольника ABC , то мы можем быть уверенными, что общая площадь всех треугольников будет меньше σ . В самом деле, в этом случае площадь частей этих треугольников, заключенных между i -й и $(i+1)$ -й из приведенных нами параллельных прямых, будет меньше $\frac{\sigma}{h} h_i$, где h_i — расстояние между i -й и $(i+1)$ -й прямыми, а общая площадь всех треугольников — меньше чем

$$\frac{\sigma}{h} (h_1 + h_2 + \dots) = \frac{\sigma}{h} h = \sigma.$$

Теперь предположим, что $n = 2^m$, где m — достаточно большое целое число, и будем последовательно сдвигать треугольники $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{2^m-1}BC$ вдоль прямой AC следующим образом. Разделим высоту треугольника ABC на $m+2$ равные части, и проведем через все точки деления прямые $l_0, l_1, l_2, \dots, l_m$, параллельные AC (l_0 есть самая близкая к вершине B из наших прямых, l_1 — следующая за ней и т. д.; черт. 238, а). Каждая из этих прямых пересечет все треугольники $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{2^m-1}BC$ по отрезкам равной длины (так как все эти треугольники имеют равные основания). Разобьем наши 2^m треугольников на 2^{m-1} пар: ABA_1 и A_1BA_2 , A_2BA_3 и $A_3BA_4, \dots, A_{2^m-2}BA_{2^m-1}$ и $A_{2^m-1}BC$, и сдвинем треугольники так, чтобы отдельные пары не перекрывали друг друга, а в каждой паре оба треугольника пересекались таким образом, чтобы у них совпадали отрезки, по которым пересекает эти треугольники прямая l_1 (черт. 238, б). При этом каждая прямая, параллельная AC и расположенная ближе к основанию AC чем l_1 , пересекает каждую пару сдвинутых треугольников по двум отрезкам, имеющим общую часть, длина которой равна длине пересечения какого-либо из треугольников с l_1 (отметим, что два треугольника одной пары имеют пару параллельных боковых сторон — это будут стороны, которые получились из одного

разреза треугольника ABC). Длина отрезка, по которому пересекается с l_1 каждый из треугольников $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{2^{m-1}}BC$ равна, как нетрудно видеть, $\frac{2}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$, где a — длина основания AC треугольника ABC . Отсюда следует,



Черт. 238.

что на каждой прямой, параллельной AC и расположенной ближе к AC , чем l_1 , сдвинутые указанным образом треугольники высекают отрезки, общая длина которых меньше пересечения этой прямой с первоначальным треугольником ABC на

$$\left(\frac{2}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} \right) \cdot 2^{m-1} = \frac{a}{m+2}.$$

Сгруппируем теперь полученные 2^{m-1} пар треугольников в пары — первую пару объединим со второй, третью — с чет-

вертой, ..., $(2^{m-1} - 1)$ -ю пару — с 2^{m-1} -й. Сдвинем в каждой паре пар треугольников отдельные пары треугольников таким образом, чтобы они пересекались по отрезкам, высекаемым этими парами на прямой l_2 (черт. 238, в); нетрудно видеть, что на этой прямой каждая пара сдвинутых треугольников высекает отрезок одной и той же длины: первоначальная длина этих отрезков, когда треугольники пары еще не были сдвинуты, была одной и той же, а именно $2 \cdot \frac{a}{2^m} \cdot \frac{3}{m+2}$; после первого сдвига эта длина уменьшилась на $\frac{2}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$ и стала равной $\frac{4a}{2^m(m+2)}$. После этого каждая прямая, параллельная AC и расположенная ближе к AC , чем l_2 , будет пересекать каждую четверку треугольников, получающуюся после сдвига двух пар, по отрезку, длина которого меньше суммы длин пересечений этой прямой с каждой из составляющих четверку пар на $\frac{4a}{2^m(m+2)}$ (отметим, что каждые две соседние пары сдвинутых треугольников также имеют по паре параллельных сторон, которые получились из одного разреза треугольника ABC). Таким образом, после второго сдвига мы убедимся, что на каждой прямой, параллельной AC и расположенной ближе к AC , чем l_2 , наши 2^m треугольников будут высекают отрезки, общая длина которых меньше длины пересечения этой прямой с первоначальным треугольником ABC на

$$\frac{a}{m+2} + \frac{4a}{2^m(m+2)} \cdot 2^{m-2} = \frac{2a}{m+2}.$$

Далее объединим полученные 2^{m-2} четверок треугольников в 2^{m-3} пар и две четверки каждой пары сдвинем так, чтобы они пересекались по отрезку, высекаемому этими четверками на прямой l_3 (черт. 238, г). До сдвигов четыре треугольника каждой четверки высекали на прямой l_3 отрезки общей длины $4 \cdot \frac{4}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m}$; после первых двух сдвигов четверка треугольников высекает на l_3 отрезок длины

$$4 \cdot \frac{4}{m+2} \cdot \frac{a}{2^m} - 2 \frac{2a}{(m+2)2^m} - \frac{4a}{(m+2) \cdot 2^m} = \frac{8a}{2^m(m+2)}.$$

Так же как и выше, убеждаемся, что сдвинутые таким образом треугольники высекают на каждой прямой, параллельной AC и расположенной ближе к AC чем l_3 , отрезки, общая длина которых меньше чем длина пересечения этой прямой с первоначальным треугольником ABC на

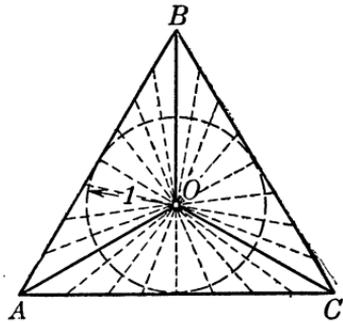
$$\frac{2a}{m+2} + \frac{8a}{2^m(m+2)} \cdot 2^{m-3} = \frac{3a}{m+2}.$$

Затем объединим полученные таким образом 2^{m-3} восьмерок треугольников в 2^{m-4} пар восьмерок и каждую пару восьмерок сдвинем так, чтобы они пересекались по отрезкам, высекаемым этими восьмерками на прямой l_4 . И далее будем продолжать этот процесс, на последнем шагу которого нам придется сдвинуть две совокупности по 2^{m-1} треугольников так, чтобы они пересекались по отрезкам, высекаемым этими двумя совокупностями на прямой l_m .

Оценим общую длину всех отрезков, которые высекают сдвинутые указанным образом треугольники на какой-либо прямой l , параллельной AC . Если эта прямая проходит ближе к вершинам треугольников чем l_1 , то длина всех высекаемых на ней треугольниками отрезков не может быть больше, чем длина отрезка, высекаемого на этой прямой первоначальным треугольником ABC , которая в свою очередь меньше $\frac{2a}{m+2}$ (длина отрезка, высекаемого треугольником ABC на прямой l_1). Если l заключено между l_1 и l_2 , то после первого из проведенных нами сдвигов общая длина высекаемых на l отрезков уменьшится на $\frac{a}{m+2}$, а так как до сдвига она была меньше $\frac{3a}{m+2}$ ($\frac{3a}{m+2}$ — длина отрезка, высекаемого треугольником ABC на прямой l_2), то после сдвига она станет меньше $\frac{3a}{m+2} - \frac{a}{m+2} = \frac{2a}{m+2}$; при дальнейших же сдвигах длина суммы отрезков, высекаемых треугольниками на прямой l , во всяком случае не увеличится. Если l заключена между l_2 и l_3 , то после первых двух сдвигов длина суммы отрезков, высекаемых нашими треугольниками на l_2 , уменьшится на $\frac{2a}{m+2}$ и, следовательно, будет не больше

$\frac{4a}{m+2} - \frac{2a}{m+2} = \frac{2a}{m+2} \left(\frac{4a}{m+2} - \text{длина отрезка, высекаемого} \right.$
 треугольником ABC на прямой l_3); в дальнейшем эта длина
 также не увеличится. Таким же способом показываем, что
 длина отрезка, высекаемого сдвинутыми треугольниками на
 каждой прямой l , параллельной AC , будет не больше
 $\frac{2a}{m+2}$ ¹⁾. А отсюда следует, что общая площадь, занимае-
 мая всеми 2^m треугольниками после произведенных сдвигов,
 будет не больше $\frac{2a}{m+2} \cdot h = \frac{4S}{m+2}$ ²⁾, где S — площадь
 треугольника ABC . Следовательно, эта площадь может быть
 сделана меньше любого наперед заданного числа σ (для чего
 нужно только выбрать число m достаточно большим), а это
 нам и требовалось доказать.

72. Основываясь на задаче 71, уже нетрудно построить фи-
 гуру, площадь которой меньше произвольно выбранного
 (сколь угодно малого!) числа σ и
 внутри которой можно повернуть
 на 360° отрезок длины 1. Пусть
 ABC — какой-либо треугольник,
 радиус вписанного круга которого
 равен 1. Соединим центр O впи-
 санного круга с вершинами тре-
 угольника и рассмотрим треуголь-
 ники AOB , BOC , COA (черт. 239).
 Согласно задаче 71 можно разде-
 лить каждый из этих трех тре-
 угольников прямыми, проходящими
 через вершину O , на части и
 сдвинуть затем эти части так, что-
 бы общая площадь, занимаемая всеми сдвинутыми треуголь-



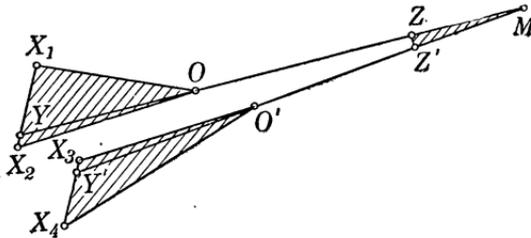
Черт. 239.

1) Нетрудно строго доказать это предложение по методу математической индукции.

2) Можно доказать, что площадь, занимаемая всеми треугольниками $ABA_1, A_1BA_2, \dots, A_{2^m-1}BC$, сдвинутыми указанным способом, будет равна $\frac{S}{m+2}$. Нам это предложение не потребуется.

никами, была сколь угодно мала. Сделаем это таким образом, чтобы площадь, занимаемая всеми треугольниками (полученными при разрезании трех треугольников AOB , BOC , COA), была меньше $\frac{\sigma}{2}$. Внутри каждого из треугольников AOB , BOC и COA отрезок длины 1 можно повернуть на угол, соответственно равный углу AOB , BOC и COA , ибо внутри этого треугольника помещается сектор вписанного круга (радиуса 1) с центром в этой вершине.

Пусть теперь имеются два треугольника X_1OX_2 и $X_3O'X_4$ нашего разбиения треугольника ABC , которые, до того как их сдвинули, были соседними, т. е. имели общую сторону



Черт. 240.

(на черт. 240 эти треугольники для наглядности изображены непересекающимися, чего на самом деле, вообще говоря, не будет). При этом стороны OX_2 и $O'X_3$, которые получились из одного разреза треугольника ABC , параллельны между собой. Проведем внутри наших треугольников прямые OY и $O'Y'$, образующие малые углы со сторонами OX_2 и $O'X_3$, и продолжим эти прямые до их пересечения в точке M . При точке M построим сектор MZZ' радиуса 1 с центральным углом OMO' (см. черт. 240; на этом чертеже сектор не пересекается с треугольниками X_1OX_2 и $X_3O'X_4$, чего на самом деле может и не быть).

Отрезок длины 1 мы сможем повернуть из положения, совпадающего с прямой OX_1 , до положения, совпадающего с OY , затем сдвинуть по прямой YM в положение ZM , повернуть до положения $Z'M$, сдвинуть по прямой MU' так, чтобы он попал внутрь треугольника $X_3O'X_4$, и повернуть до положения $O'X_4$.

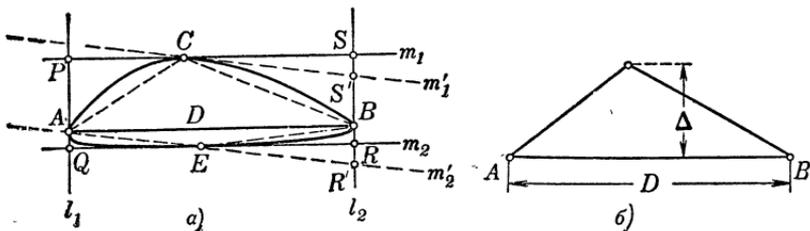
Если теперь произвести описанное построение для каждой пары соседних треугольников нашего разбиения треугольника ABC , то, поступая описанным образом, мы сможем повернуть на 360° отрезок длины 1 внутри фигуры, образованной всеми треугольниками, на которые был разбит треугольник ABC прямыми вида OM и MO' , и секторами вида ZMZ' (см. черт. 240). Но площадь каждого сектора, прибавляемого к нашей фигуре, может быть сделана сколь угодно малой (центральный угол сектора может быть сделан сколь угодно малым!); прямые, которые мы также включаем в фигуру, имеют площадь нуль (можно заменить эти прямые полосками сколь угодно малой толщины).

Таким образом, добавив к фигуре, составленной из треугольников, на которые был разбит треугольник ABC (площадь ее, как известно из задачи 71, может быть сделана меньше $\frac{\sigma}{2}$, как бы мало ни было наперед заданное число σ), прямые и секторы (или полоски и секторы), общая площадь которых также может быть сделана меньше $\frac{\sigma}{2}$, мы получим фигуру с площадью, меньшей σ , внутри которой можно повернуть отрезок длины 1 на 360° . А это нам и требовалось доказать.

73. Пусть Φ — некоторая выпуклая фигура диаметра D и ширины Δ . Докажем, что площадь Φ не может быть меньше площади треугольника с основанием D и высотой Δ , т. е. не может быть меньше $\frac{1}{2}D\Delta$.

Пусть A и B — две граничные точки фигуры Φ , расстояние между которыми является наибольшим (равно D). Через точки A и B проведем опорные прямые l_1 и l_2 фигуры Φ , перпендикулярные к отрезку AB (см. задачи 6—7 из § 1); проведем также две другие опорные прямые m_1 и m_2 фигуры Φ , перпендикулярные к l_1 и l_2 (параллельные AB ; черт. 241, a). Согласно определению ширины выпуклой фигуры, расстояние между прямыми m_1 и m_2 не может быть меньше Δ ; следовательно, площадь прямоугольника $PQRS$, образованного прямыми l_1 , m_1 , l_2 и m_2 , не может быть меньше $D\Delta$.

Пусть C — точка соприкосновения опорной прямой m_1 (стороны PS прямоугольника $PQRS$) с фигурой Φ , E — точка соприкосновения прямой m_2 с фигурой Φ . В силу выпуклости фигуры Φ она должна содержать целиком четырехугольник $BCAE$. Но площадь треугольника ABC равна половине площади прямоугольника $ABSP$; площадь треугольника ABE равна половине площади прямоугольника $AQRB$. Таким образом, площадь $BCAE$ равна половине площади прямоугольника $PQRS$ и, следовательно, не может быть меньше $\frac{1}{2} D\Delta$; следовательно, и площадь Φ не может быть меньше $\frac{1}{2} D\Delta$.



Черт. 241.

Из приведенного решения нетрудно усмотреть, что площадь Φ равна $\frac{1}{2} D\Delta$ только в том случае, когда фигура Φ есть треугольник. Действительно, прежде всего фигура Φ площади $\frac{1}{2} D\Delta$ должна совпадать с четырехугольником $BCAE$ (см. черт. 241, а), причем диагональ AB должна быть равна диаметру D четырехугольника $ABCE$, а расстояние между прямыми m_1 и m_2 — ширине Δ . Но последнее возможно только в том случае, когда отрезок AB совпадает с одной из сторон PS или QR прямоугольника $PQRS$. Действительно, в противном случае через точки C и E всегда возможно провести опорные прямые m'_1 и m'_2 четырехугольника $BCAE$, расстояние между которыми будет меньше расстояния между m_1 и m_2 (см. черт. 241, а; если $CS \geq ER$, то $SS' \geq RR'$, $S'R' \leq SR$ и, следовательно, расстояние между m'_1 и m'_2 и подавно меньше SR).

Таким образом, площадь выпуклой фигуры может быть равна $\frac{1}{2} D\Delta$ только в том случае, когда Φ есть треугольник с основанием D и высотой Δ (черт. 241, б).

74. Нам достаточно доказать, что равнобедренный треугольник T периметра L , диаметр D которого равен его боковой стороне¹⁾, имеет меньшую площадь, чем каждый другой выпуклый многоугольник того же диаметра D и того же периметра L . В самом деле, так как для всякой выпуклой фигуры Φ диаметра D и периметра L всегда можно найти многоугольник, диаметр которого сколь угодно близок к диаметру фигуры Φ , периметр — к периметру Φ , а площадь — к площади Φ ²⁾, то этим самым мы и докажем, что никакая выпуклая фигура диаметра D и периметра L не может иметь меньшую площадь, чем треугольник T ³⁾.

Итак, пусть M — некоторый выпуклый многоугольник диаметра D и периметра L . Покажем, что площадь этого многоугольника больше площади треугольника T . Обозначим через A и B точки многоугольника M , расстояние между которыми равно D (нетрудно видеть, что точки A и B — вершины многоугольника M), и пусть $AX_1X_2\dots X_kB$ и $AU_1U_2\dots U_lB$ — два многоугольника, на которые разбивается M отрезком AB (черт. 242). В силу того, что D есть диаметр многоугольника M , ни один из отрезков $BX_1, BX_2, \dots, BX_k, BU_1, BU_2, \dots, BU_l$ не больше D .

Предположим, что в многоугольнике $AX_1X_2\dots X_kB$ диагональ BX_1 меньше D (если бы она равнялась D , то мы заменили бы отрезок AB отрезком BX_1 и рассматривали бы далее многоугольник $X_1X_2\dots X_kB$ вместо $AX_1X_2\dots X_kB$).

1) То-есть такой, что боковая сторона D треугольника T не меньше его основания (легко видеть, что диаметр D всякого треугольника равен его наибольшей стороне).

2) Этим свойством будет обладать, например, вписанный в Φ многоугольник, все стороны которого достаточно малы, или описанный вокруг Φ многоугольник, все внешние углы которого достаточно малы.

3) Можно доказать даже, что всякая выпуклая фигура Φ диаметра D и периметра L имеет большую (а не только не меньшую) площадь, чем треугольник T . На доказательстве этого предложения мы не останавливаемся.

окружность радиуса D ; пусть M и N — точки пересечения этой окружности соответственно с прямыми BX_1 и BX'_1 (черт. 242, б). Так как $BX_1 < D$, а $BX'_1 > D$, то точка X_1 расположена внутри отрезка BM , а точка X'_1 — на продолжении отрезка BN . Отсюда следует, что треугольник AMX_2 имеет больший периметр, чем AX_1X_2 , а треугольник ANX_2 — меньший периметр, чем AX_1X_2 (напоминаем, что периметры треугольников AX_1X_2 и AX'_1X_2 равны). Из соображений непрерывности (см. § 3) вытекает, что на дуге MN окружности между точками M и N найдется такая точка X''_1 , что

$$AX''_1 + X''_1X_2 = AX_1 + X_1X_2.$$

Заменим теперь треугольник AX_1X_2 треугольником AX''_1X_2 . Расстояние BX''_1 равно D , и в дальнейшем мы будем рассматривать вместо отрезка AB отрезок X''_1B , а вместо многоугольника $AX_1X_2 \dots X_kB$ — многоугольник $X''_1X_2X_3 \dots X_kB$, имеющий меньшее число сторон.

Поступая далее с многоугольником $AX''_1X_3 \dots X_kB$ или, соответственно, с многоугольником $X''_1X_2 \dots X_kB$ так же, как мы раньше поступали с $AX_1X_2 \dots X_kB$, мы в конце концов заменим этот многоугольник таким многоугольником $AX''_1X''_2 \dots X''_{k_1}B$ ($k_1 \leq k$) того же периметра и меньшей площади, что

$$BA = BX''_1 = BX''_2 = \dots = BX''_{k_1}.$$

Точно так же можно заменить многоугольник $AU_1U_2 \dots U_lB$ таким многоугольником $AU''_1U''_2 \dots U''_{l_1}B$ ($l_1 \leq l$) того же периметра и меньшей площади, что

$$BA = BU''_1 = BU''_2 = \dots = BU''_{l_1}.$$

Окончательно мы приходим к многоугольнику

$$AX''_1X''_2 \dots X''_{k_1} BU''_{l_1} \dots U''_{l_1}Y''_1,$$

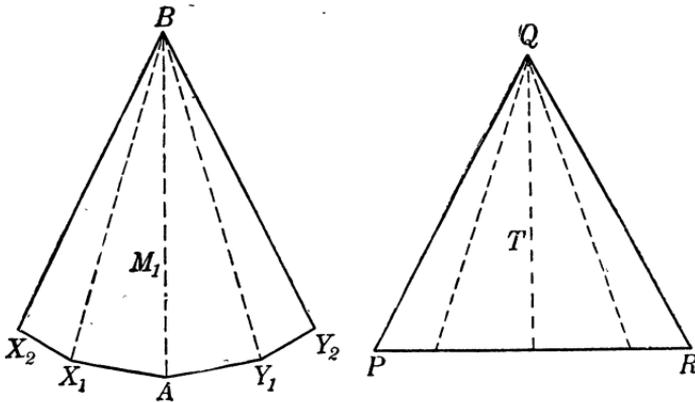
периметр которого равен периметру L многоугольника M , а площадь меньше площади M . Этот многоугольник мы обозначим через M_1 .

Теперь нам осталось только сравнить площади многоугольника M_1 и треугольника T (черт. 243). Многоугольник M_1

разбивается на ряд равнобедренных треугольников, боковые стороны которых равны D :

$$BY_{l_1}Y_{l_1-1}, BY_{l_1-1}Y_{l_1-2}, \dots \\ \dots, BY_1A, BAX_1, BX_1X_2, \dots, BX_{k_1-1}X_{k_1}.$$

Сумма оснований всех этих треугольников в силу равенства периметров M_1 и T равна основанию треугольника T ; отсюда следует, что каждый из этих треугольников имеет не меньшую высоту,

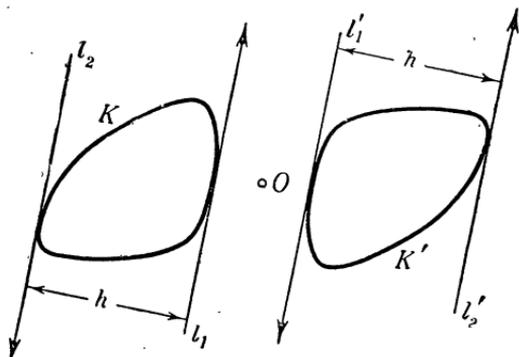


Черт. 243.

чем треугольник T (легко видеть, что из двух равнобедренных треугольников с равными боковыми сторонами тот имеет меньшую высоту, у которого основание больше). Разобьем треугольник T прямыми, проходящими через вершину, в которой сходятся равные стороны, на ряд треугольников, основания которых равны основаниям соответствующих треугольников из числа тех, на которые разбивается многоугольник M_1 (см. черт. 243). Площадь каждого из этих треугольников не больше площади соответствующего треугольника, составляющего часть многоугольника M_1 . Таким образом, мы заключаем, что площадь треугольника T не больше площади M_1 , откуда следует, что площадь T не больше площади M , что и требовалось доказать.

75. а) В силу результата задачи 40 из § 4 мы можем считать, что фигурирующая в условии задачи точка O является началом отсчета. При повороте на 180° вокруг точки O кривая K переходит в K' , кривая K' — в K , а сумма $K + K'$ переходит сама в себя. Но это означает, что точка O является центром симметрии кривой $K + K'$; следовательно, и кривая K^* , подобная кривой $K + K'$, имеет центр симметрии O .

б) Из определения ширины кривой в данном направлении (см. § 4, стр. 60, черт. 59) следует, что ширина K' в каком-нибудь направлении равна ширине K в том же самом направлении (черт. 244). Отсюда следует, что ширина кривой $K + K'$

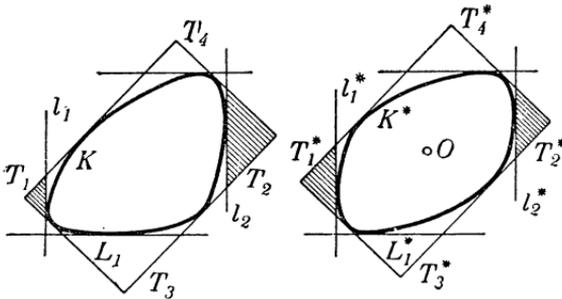


Черт. 244.

в каждом направлении в два раза больше ширины кривых K и K' в том же направлении (см. задачу 47 из § 4); а значит, кривая K^* в каждом направлении имеет ту же самую ширину, что и кривые K и K' . Следовательно, и диаметр, и ширина кривой K^* (см. задачу 7 из § 1 и определение на стр. 33) совпадают с диаметром и шириной кривой K .

в) Так как длина суммы выпуклых кривых равна сумме их длин (см. § 4, стр. 59), а кривые K и K' равны между собой (одна получается из другой поворотом на 180° вокруг точки O) и, значит, имеют одну и ту же длину, то длина кривой $K + K'$ равна удвоенной длине K . Отсюда вытекает, что длина кривой K^* равна длине K (и K').

г) Опишем вокруг выпуклых кривых K и K^* прямоугольники L_1 и L_1^* с параллельными сторонами. Так как кривые K и K^* в каждом направлении будут иметь одну и ту же ширину (см. решение задачи 75б)), то эти прямоугольники равны (и, следовательно, имеют равные площади). Проведем теперь опорные прямые к кривым K и K^* , перпендикулярные к биссектрисам углов прямоугольников L_1 и L_1^* ; вместе с уже проведенными опорными прямыми они образуют описанные вокруг K и K^* восьмиугольники L_2 и L_2^* с равными углами (черт. 245).



Черт. 245.

Докажем, что восьмиугольник L_2 не может иметь большую площадь, чем восьмиугольник L_2^* . Каждая пара вновь проведенных параллельных опорных прямых отсекает от прямоугольников L_1 , L_1^* по паре треугольников. Всего получим восемь подобных равнобедренных прямоугольных треугольников. При этом сумма высот двух треугольников T_1 и T_2 , отсекаемых от прямоугольника L_1 парой параллельных опорных прямых l_1 и l_2 , будет равна сумме высот соответствующих треугольников T_1^* и T_2^* , отсекаемых от прямоугольника L_1^* опорными прямыми l_1^* и l_2^* , параллельными l_1 и l_2 . В самом деле, расстояние между проходящими через вершины прямоугольников L_1 и L_1^* прямыми, параллельными l_1 , l_2 , l_1^* и l_2^* , будет одно и то же, так как прямоугольники L_1 и L_1^* равны между собой, а расстояние между l_1 и l_2 равно расстоянию между

l_1^* и l_2^* , так как кривые K и K^* имеют во всех направлениях одинаковую ширину.

Из того, что кривая K^* имеет центр симметрии, следует, что треугольник T_1^* равен треугольнику T_2^* (T_1^* симметричен T_2^* относительно центра симметрии O кривой K^*).

Площади подобных треугольников пропорциональны квадратам их высот. Высоты треугольников T_1^* и T_2^* равны между собой. Отсюда следует, что сумма площадей треугольников T_1 и T_2 не может быть меньше суммы площадей треугольников T_1^* и T_2^* ¹⁾.

Точно так же доказывается, что сумма площадей треугольников T_3 и T_4 , отсекаемых от прямоугольника L_1 второй парой параллельных опорных прямых, не может быть меньше суммы площадей треугольников T_3^* и T_4^* , отсекаемых от прямоугольника L_1^* опорными прямыми того же направления. А отсюда следует, что площадь описанного вокруг K восьмиугольника L_2 с равными углами (разность площади прямоугольника L_1 и суммы площадей треугольников T_1, T_2, T_3 и T_4) не больше площади восьмиугольника L_2^* с параллельными сторонами, описанного вокруг K^* .

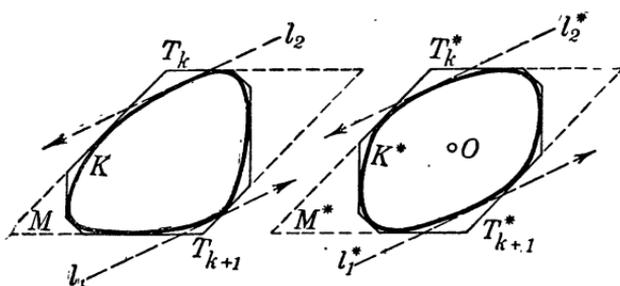
Проведем теперь к кривым K и K^* четыре пары параллельных опорных прямых, перпендикулярных к биссектрисам углов восьмиугольников L_2 и L_2^* . Эти прямые отсекут от восьмиугольников L_2 , соответственно L_2^* , по четыре пары равнобедренных треугольников (вместе со сторонами восьмиугольников эти прямые образуют описанные вокруг K и K^* шестнадцатиугольники L_3 и L_3^* с равными углами).

Общая площадь каждой пары треугольников T_k и T_{k+1} , отсекаемых от восьмиугольника L_2 парой параллельных опорных прямых, не может быть меньше общей площади соответствующей пары треугольников T_k^* и T_{k+1}^* , отсекаемых от восьми-

¹⁾ Если сумма $h_1 + h_2$ постоянна, то сумма квадратов $h_1^2 + h_2^2$ имеет наименьшее значение в том случае, когда $h_1 = h_2$. Это утверждение сразу вытекает из формулы

$$h_1^2 + h_2^2 = \frac{1}{2} [(h_1 + h_2)^2 + (h_1 - h_2)^2].$$

угольника L_2^* (черт. 246). Доказательство этого утверждения почти не отличается от вышеприведенного; только теперь вместо прямоугольников L_1 и L_1^* надо рассматривать параллелограммы M и M^* , образованные парами сходящихся в вершинах треугольников T_k и T_{k+1} , соответственно T_k^* и T_{k+1}^* сторон восьмиугольников, описанных вокруг K и K^* (см. черт. 246).



Черт. 246.

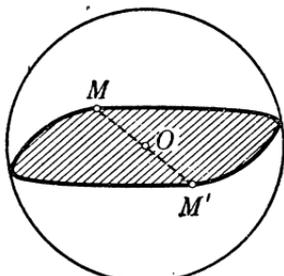
Параллелограммы M и M^* равны между собой, так как две высоты одного параллелограмма равны соответственно двум высотам второго параллелограмма (ибо кривые K и K^* имеют во всех направлениях одинаковую ширину). Из того, что общая площадь всех треугольников, отсекаемых от восьмиугольника L_2 , не меньше площади всех треугольников, отсекаемых от восьмиугольника L_2^* , следует, что площадь шестнадцатиугольника L_3 не больше площади шестнадцатиугольника L_3^* .

Точно так же доказывается, что площадь 2^n -угольника с равными углами L_{n-1} , описанного вокруг K , не больше площади 2^n -угольника с параллельными сторонами L_{n-1}^* , описанного вокруг K^* . Это доказательство легко провести по методу математической индукции. А именно, предположим известным, что площадь 2^{n-1} -угольника L_{n-2} с равными углами, описанного вокруг K , не больше площади 2^{n-1} -угольника L_{n-2}^* с параллельными сторонами, описанного вокруг K^* . Далее, нетрудно показать, что сумма площадей всех треугольников, отсекаемых от 2^{n-1} -угольника L_{n-2} 2^{n-1} опорными

прямыми кривой K , параллельными биссектрисам углов L_{n-2} , не меньше суммы площадей треугольников, отсекаемых от 2^{n-1} -угольника L_{n-2}^* опорными прямыми K^* , параллельными проведенным опорным прямым K . Отсюда следует, что площадь L_{n-1} не больше площади L_{n-1}^* .

Переходя теперь к пределу, мы заключаем, что площадь K не может быть больше площади K^* 1).

76. а) Прежде всего в силу задачи 75 мы можем заменить всякую выпуклую кривую K центрально-симметричной выпуклой кривой K^* того же диаметра, ограничивающей не меньшую площадь. Следовательно, нам достаточно найти центрально-симметричную кривую диаметра 1, ограничивающую фигуру наибольшей площади. Но расстояние точки M центрально-симметричной выпуклой фигуры диаметра 1 от центра симметрии O не может превышать $\frac{1}{2}$; в



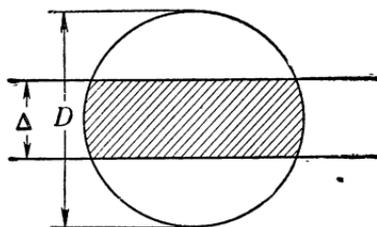
Черт. 247.

противоположном случае расстояние между точкой M и точкой M' , симметричной M по отношению к O , было бы больше 1 (черт. 247). Таким образом, всякая центрально-симметричная выпуклая кривая диаметра 1 заключается внутри окружности диаметра 1 (черт. 247) и не может ограничивать площадь, большую, чем окружность.

Примечание. Из доказанной теоремы нетрудно также вывести, что из всех (не обязательно выпуклых) плоских фигур диаметра 1 наибольшую площадь ограничивает окружность. Действительно, для каждой невыпуклой фигуры можно найти выпуклую фигуру того же диаметра и большей площади (см. черт. 40, а на стр. 44 и относящийся к нему текст, а также задачу 7 из § 1).

1) Внимательный анализ проведенного доказательства позволяет даже заключить, что если K отлично от K^* (т. е. K не имеет центра симметрии), то площадь K меньше (а не только не больше) площади K^* .

б) Как и при решении задачи а), мы можем ограничиться рассмотрением центрально-симметричных выпуклых кривых. Каждые две параллельные опорные прямые центрально-симметричной выпуклой кривой симметричны относительно центра симметрии O , и если ширина такой кривой равна Δ , то кривая имеет пару параллельных опорных прямых, расстояние каждой из которых от центра симметрии O равно $\frac{\Delta}{2}$;



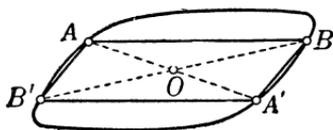
Черт. 248.

следовательно, кривая целиком заключается внутри полосы ширины Δ , ограниченной двумя параллельными прямыми, равноудаленными от центра симметрии O . С другой стороны, центрально-симметричная кривая диаметра D целиком заключается внутри окружности радиуса D с центром в центре симметрии кривой (см. решение задачи а)). Пересечение полосы ширины Δ и круга диаметра D (черт. 248) есть наибольшая по площади выпуклая центрально-симметричная фигура ширины Δ и диаметра D ; всякая другая такая фигура должна целиком принадлежать этому пересечению.

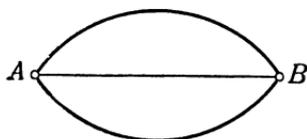
Примечание. Из предложения б) нетрудно вывести предложение а) настоящей задачи: теорема б) является обобщением теоремы а).

77. а) На основании задачи 75 нам достаточно найти центрально-симметричную кривую диаметра D и длины L , ограничивающую фигуру наибольшей площади. Пусть K — искомая кривая; A и B — точки кривой K , расстояние между которыми достигает наибольшего значения D . Из того, что кривая K центрально-симметрична, следует, что отрезок AB проходит через центр симметрии O и делится в нем пополам (если бы хорда AB кривой K не проходила через O , то отрезок $A'B'$, симметричный AB относительно O , являлся бы хордой K , отличной от AB , и одна из диагоналей AA' или BB' параллелограмма $ABA'B'$ была бы длиннее AB ; черт. 249).

Рассмотрим часть кривой K , расположенную по одну сторону хорды AB ; тогда наша задача сведется к тому, чтобы отыскать выпуклую кривую, состоящую из отрезка AB и



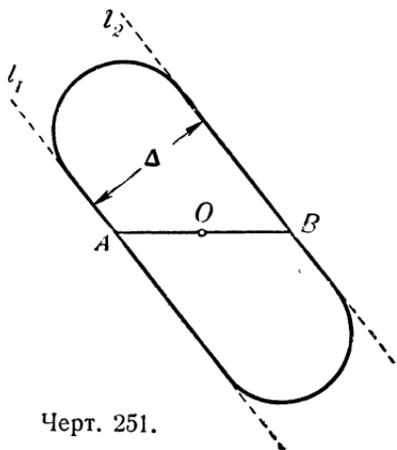
Черт. 249.



Черт. 250.

кривой длины $\frac{L}{2}$ и ограничивающую фигуру наибольшей площади. В силу задачи 65а) из § 5 такой кривой будет сегмент круга; в соответствии с этим искомая кривая K будет иметь вид, изображенный на черт. 250.

б) Как и при решении задачи а), мы можем ограничиться рассмотрением центрально-симметричных выпуклых кривых. Централно-симметричная выпуклая кривая K ширины Δ имеет две опорные прямые l_1 и l_2 , удаленные от центра симметрии на расстояние $\frac{\Delta}{2}$. Пусть A и B — симметричные по отношению к центру O точки соприкосновения опорных прямых l_1 и l_2 с кривой K .



Черт. 251.

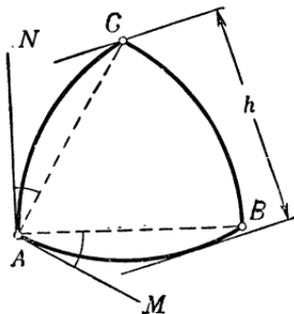
отыскать выпуклую кривую длины $\frac{L}{2} + d$, состоящую из отрезка AB длины d , отрезков параллельных прямых l_1 и l_2 , проходящих через точки A и B , и какой-то кривой, и ограничивающую фигуру наибольшей площади. Эта задача может быть решена вполне аналогично основной задаче 62 из § 5

(или задаче 66); ответом служит кривая, состоящая из отрезка AB , отрезков прямых l_1 и l_2 и полуокружности диаметра Δ , касающейся прямых l_1 и l_2 . В соответствии с этим искомая кривая будет иметь вид, изображенный на черт. 251.

§ 7

78. Если ширина треугольника Релло (черт. 252) равна h , то каждая из трех дуг имеет длину $\frac{2\pi h}{6}$, а длина всей кривой равна πh . Площадь треугольника Релло равна площади трех секторов круга радиуса h с центральным углом 60° минус удвоенная площадь треугольника ABC , т. е. равна

$$\frac{h^2}{2} (\pi - \sqrt{3}) \approx 0,7048h^2.$$



Черт. 252.

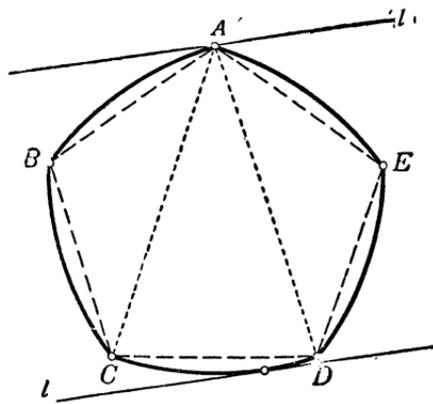
Окружность ширины h имеет ту же длину πh и большую площадь $\frac{\pi h^2}{4} \approx 0,7854h^2$.

Каждая дуга, соединяющая вершины треугольника, содержит 60° . Поэтому угол между касательной AM и хордой AB равен 30° . Угол CAN также равен 30° (см. черт. 252). Отсюда следует, что угол MAN при угловой точке A треугольника Релло равен 120° .

79. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, большая из диагоналей которого равна h . Из каждой вершины пятиугольника радиусом h проведем дугу окружности, соединяющую две противоположные вершины (черт. 253). Полученная выпуклая кривая будет кривой постоянной ширины, ибо из каждых двух параллельных опорных прямых одна проходит через вершину пятиугольника, а другая касается противоположной дуги; поэтому расстояние между ними равно h . Угол CAD равен 36° , поэтому каждая из пяти дуг, составляющих кривую, имеет длину $\frac{2\pi h}{10}$, а длина всей кривой равна πh .

Такое же построение можно проделать для любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон. (Многоугольник должен иметь нечетное число сторон потому, что у каждой вершины должно быть две противоположные вершины, которые соединяются дугой окружности радиуса h .) Если мы исходим из правильного $(2n - 1)$ -угольника, то полученная кривая будет состоять из $2n - 1$ равных дуг окружностей радиуса h ; центральный угол каждой дуги будет равен $\frac{2\pi}{2(2n-1)}$, и общая длина кривой будет равна $(2n - 1) \cdot \frac{2\pi h}{2(2n-1)} = \pi h$.

Заметим, что в нашем построении нет необходимости требовать, чтобы исходный многоугольник с нечетным числом сторон был правильным. Необходимо лишь, чтобы все диагонали многоугольника, соединяющие ка-



Черт. 253.

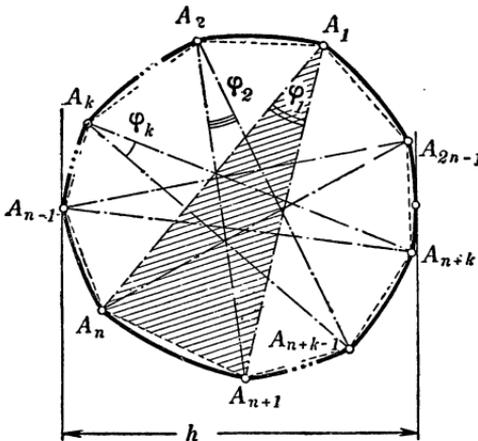
кую-либо его вершину с одной из двух противоположных ей вершин (число таких диагоналей равно числу вершин многоугольника), имели одну и ту же длину h , а все остальные диагонали и все стороны многоугольника были бы короче h . Нетрудно убедиться, что этими свойствами обладают многие многоугольники, не являющиеся правильными. Проведем из каждой вершины такого многоугольника дугу окружности радиуса h , соединяющую две противоположные вершины (черт. 254). Полученная выпуклая кривая является кривой постоянной ширины. Из каждой пары параллельных опорных прямых одна проходит через вершину многоугольника, а другая касается дуги окружности, соединяющей две противоположные вершины, и поэтому расстояние между ними равно h .

Покажем, что длина полученной кривой также равна πh . Обозначим через φ_k угол $A_{n+k-1}A_kA_{n+k}$ (A_{n+k-1} и A_{n+k} — вершины, противоположные вершине A_k ; черт. 254).

Тогда дуга, соединяющая точки A_{n+k-1} и A_{n+k} , стягивает центральный угол φ_k . Таким образом, рассматриваемая кривая состоит из $2n-1$ дуг окружностей радиуса h , которые вместе составляют дугу, стягивающую угол $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1}$. Если мы докажем, что

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1} = 180^\circ,$$

то отсюда будет следовать, что длина нашей кривой равна длине полуокружности радиуса h , т. е. равна πh .



Черт. 254.

Рассмотрим треугольники, вершинами которых являются произвольная вершина A_k и противолежащие ей вершины A_{n+k-1} и A_{n+k} (такой треугольник, соответствующий $k=1$, заштрихован на черт. 254). Число таких треугольников равно $2n-1$, следовательно, сумма углов всех этих тре-

угольников равна $(2n-1) \cdot 180^\circ$. С другой стороны, сумма углов всех этих треугольников составляет сумму всех углов многоугольника $A_1 A_2 \dots A_{2n-1}$, причем углы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n-1}$ встречаются в этой сумме по три раза (так, например, угол φ_1 входит в сумму углов треугольников $A_1 A_n A_{n+1}$, $A_{n+1} A_1 A_2$, $A_n A_1 A_{2n-1}$). Таким образом, сумма углов всех указанных треугольников равна сумме углов $(2n-1)$ -угольника плюс удвоенная сумма $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1}$.

Итак,

$$(2n-1) \cdot 180^\circ =$$

$$= [(2n-1) - 2] \cdot 180^\circ + 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1}),$$

откуда и получаем:

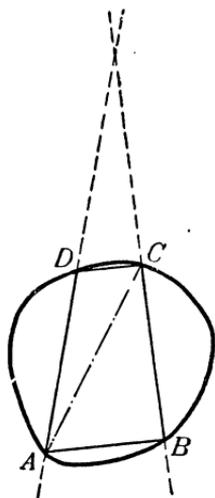
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{2n-1} = 180^\circ.$$

80. Если бы хорда AB кривой K постоянной ширины h имела длину, большую h , то расстояние между опорными прямыми, перпендикулярными к AB , было бы по-прежнему больше h , что противоречит определению кривой постоянной ширины.

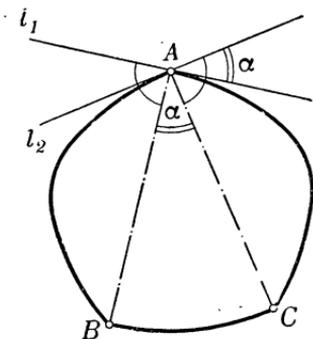
81. См. задачу 6 из § 1.

82. В силу задачи 80 мы можем применить результат задачи 8 из § 1.

83. Пусть два диаметра AD и BC пересекаются вне кривой или параллельны (черт. 255). Тогда они являются сторонами вписанного четырехугольника $ABCD$. Так как сумма углов четырехугольника равна 180° , то по крайней мере один из углов A, B, C, D не меньше 90° .



Черт. 255.



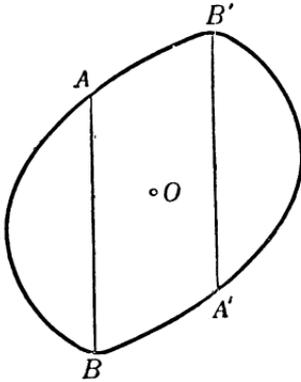
Черт. 256.

Пусть для определенности угол D не меньше 90° . Тогда отрезок AC больше h , так как AD равно h , а $AC > AD$ (ибо $\angle ADC > \angle ACD$). Но это противоречит утверждению задачи 80.

Если два диаметра AB и AC пересекаются на кривой постоянной ширины в точке A (черт. 256), то прямые l_1 и l_2 , перпендикулярные к отрезкам AB и AC и проходящие через точку A , являются опорными прямыми. Следовательно,

через точку A проходят две опорные прямые, и потому A — угловая точка.

Если угол BAC равен α , то угол между прямыми l_1 и l_2 тоже равен α . Поэтому внешний угол при точке A не меньше α (и, следовательно, внутренний угол при точке A не больше $180^\circ - \alpha$).

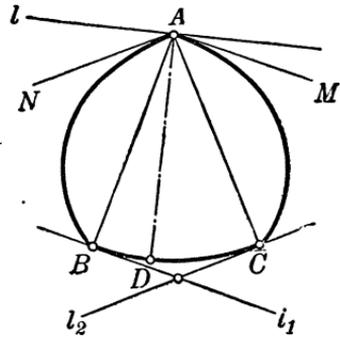


Черт. 257.

84. Пусть K — кривая постоянной ширины и O — ее центр симметрии. Нетрудно видеть, что все диаметры кривой K проходят через точку O . Действительно, если диаметр AB кривой K не проходит через точку O , то отрезок $A'B'$, симметричный с AB относительно точки O (черт. 257), в силу симметрии кривой K также будет являться диаметром K . Но тогда диаметры AB и $A'B'$ будут параллельны, а это противоречит предложению задачи 83. Итак, все

диаметры кривой K проходят через точку O . Далее, в силу симметрии кривой K каждый диаметр должен делиться пополам в точке O . Таким образом, K есть окружность радиуса $\frac{h}{2}$ с центром в точке O .

85. Пусть A — угловая точка кривой постоянной ширины h , AM и AN — полукасательные к кривой в этой точке (черт. 258). Проведем отрезки AB и AC длины h , перпендикулярные соответственно к лучам AM и AN . Наконец, проведем дугу BC окружности радиуса h с центром в A . Докажем, что все точки дуги BC принадлежат рассматриваемой кривой постоянной ширины. Пусть D — произвольная точка дуги BC . Проведем отрезок AD , и пусть l — прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к отрезку AD . Прямая l является



Черт. 258.

касательной к кривой в точке D . Прямая l_2 является опорной кривой в точке D . Прямая l является опорной кривой в точке A . Следовательно, отрезок AD является диаметром кривой постоянной ширины. Так как D — произвольная точка дуги BC , то все точки дуги BC принадлежат кривой постоянной ширины.

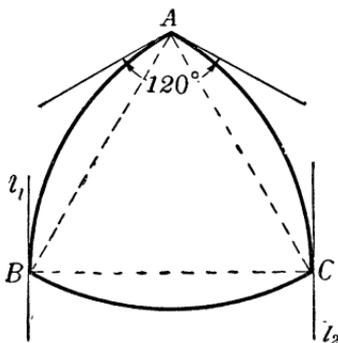
опорной прямой для рассматриваемой кривой, ибо оба луча AM и AN лежат по одну сторону от нее. Но так как прямая l — опорная, а A — точка ее соприкосновения с кривой, то отрезок AD длины h является диаметром кривой (задача 81), и потому точка D лежит на кривой. Итак, все точки дуги BC лежат на рассматриваемой кривой. Если внешний угол при угловой точке A равен α , то дуга BC стягивает центральный угол α .

Обратно, пусть некоторая дуга BC кривой постоянной ширины h является дугой окружности радиуса h (см. черт. 258) и A — центр этой дуги. Проведем касательные l_1 и l_2 к дуге BC в точках B и C . Тогда прямые l_1 и l_2 являются опорными прямыми кривой постоянной ширины, точки B и C суть точки их соприкосновения с кривой, а отрезки AB и AC перпендикулярны к прямым l_1 и l_2 и имеют длину h , т. е. AB и AC являются диаметрами кривой. Таким образом, в точке A пересекаются два диаметра кривой, а следовательно, A есть угловая точка кривой (см. задачу 83).

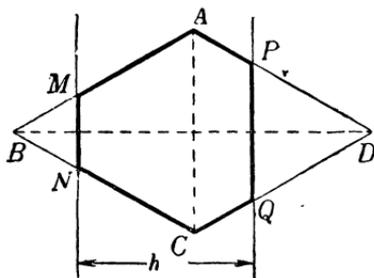
86. Пусть A — угловая точка кривой постоянной ширины h . Если бы угол при точке A был меньше 120° , то внешний угол при точке A был бы больше 60° . Но тогда кривая постоянной ширины h содержала бы дугу окружности радиуса h , стягивающую угол, больший 60° (см. решение задачи 85). Следовательно, хорда, соединяющая концы этой дуги, имела бы длину, большую h , чего не может быть согласно результату задачи 80. Итак, внутренний угол при угловой точке A не может быть меньше 120° .

Пусть теперь внутренний угол при точке A кривой постоянной ширины h равен 120° . Тогда кривая содержит дугу BC окружности радиуса h с центральным углом BAC , равным 60° (черт. 259). Следовательно, ABC — равносторонний треугольник. Так как длина отрезка BC равна h , то этот отрезок тоже является диаметром, — прямые l_1 и l_2 , проходящие через точки B и C и перпендикулярные к отрезку BC , должны быть опорными, ибо расстояние между ними равно h . Так как диаметры AB и BC пересекаются в точке B кривой, то точка B — угловая. Значит, дуга окружности радиуса h с центром в точке B , соединяющая точки A и C , целиком принадлежит кривой. Точно так же кривой принадлежит дуга

окружности радиуса h , соединяющая точки A и B . Но три проведенные дуги окружности образуют в совокупности треугольник Релло.



Черт. 259.



Черт. 260.

87. а) Обозначим периметр ромба $ABCD$ через p , длину его диагонали BD через a , а высоты треугольников BMN и DPQ , опущенные из вершины B , соответственно D , — через h_1 и h_2 . Тогда периметр шестиугольника $AMNCQP$ (черт. 260) равен $p - (BM + BN - MN) - (DP + DQ - PQ)$. Но из подобия треугольников MNB и PQD мы заключаем, что

$$\frac{BM + BN - MN}{h_1} = \frac{DP + DQ - PQ}{h_2}.$$

Обозначим величину этого отношения через k . Тогда периметр шестиугольника $AMNCQP$ равен

$$p - kh_1 - kh_2 = p - k(a - h),$$

так как, очевидно, $h_1 + h_2 = a - h$. Но последнее выражение $p - k(a - h)$ не зависит от расположения прямых MN и PQ .

б) Площадь шестиугольника $AMNCQP$ отличается от площади ромба $ABCD$ на сумму площадей треугольников BMN и DPQ . Площади этих треугольников пропорциональны квадратам высот h_1 и h_2 ; следовательно, сумма площадей треугольников пропорциональна $h_1^2 + h_2^2$, и нам остается выяснить, при каком расположении прямых MN и PQ величина $h_1^2 + h_2^2$

достигает наибольшего значения и при каком — наименьшего. Но сумма

$$h_1 + h_2 = a - h$$

не зависит от расположения прямых MN и PQ . А так как

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 &= \frac{1}{2} [(h_1 + h_2)^2 + (h_1 - h_2)^2] = \\ &= \frac{1}{2} [(a - h)^2 + (h_1 - h_2)^2], \end{aligned}$$

то сумма $h_1^2 + h_2^2$ будет иметь наименьшее значение, если

$$h_1 - h_2 = 0, \quad h_1 = h_2$$

(это соответствует тому, что прямые MN и PQ расположены на равном расстоянии $\frac{h}{2}$ от центра ромба), и наибольшее значение, если

$$|h_1 - h_2| = a - h,$$

т. е.

$$h_1 = 0 \quad \text{или} \quad h_2 = 0$$

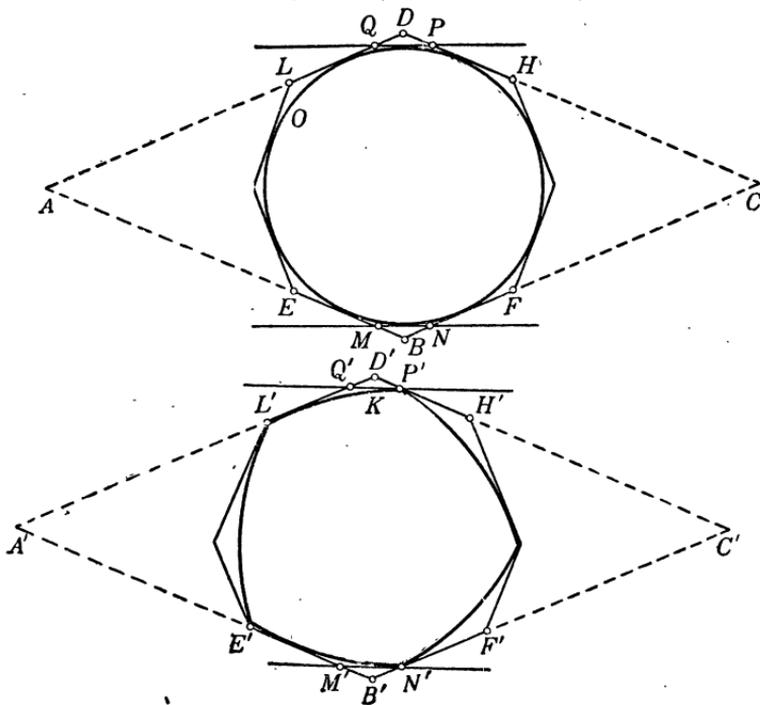
(это соответствует тому, что одна из прямых MN или PQ проходит через вершину ромба).

Примечание. Прямая MN может проходить через вершину B ромба только в том случае, если при этом прямая PQ останется правее диагонали AC (черт. 260), т. е. если расстояние h между прямыми MN и PQ не меньше половины диагонали BD . Именно этот случай встретится нам при решении задачи 89. В случае $h < \frac{a}{2}$ наибольшая разность $|h_1 - h_2|$ (и, значит, наименьшая площадь шестиугольника) будет, если одна из прямых MN, PQ совпадает с диагональю AC .

88. Пусть O — окружность диаметра h , а K — произвольная кривая постоянной ширины h . Докажем, что периметры 2^n -угольников с равными углами, описанных вокруг O и K , равны. Доказательство будем вести индукцией по n . Прежде всего ясно, что квадраты, описанные вокруг O и K , имеют равные периметры — эти квадраты даже равны.

Пусть теперь мы доказали, что периметры 2^n -угольников с равными углами, описанных вокруг K и O , равны. Докажем, что то же имеет место и для 2^{n+1} -угольников. Рассмотрим две стороны 2^n -угольников, сходящиеся в одной

вершине, — пусть это будут BE и BF — и две стороны — DL и DH , — противоположные им (черт. 261); продолжения этих сторон образуют параллелограмм $ABCD$, имеющий равные высоты, т. е. ромб. Это построение проведем для кривых O и K . Полученные при этом два ромба $ABCD$ (описанный вокруг O) и $A'B'C'D'$ (описанный вокруг K) будут равны: они

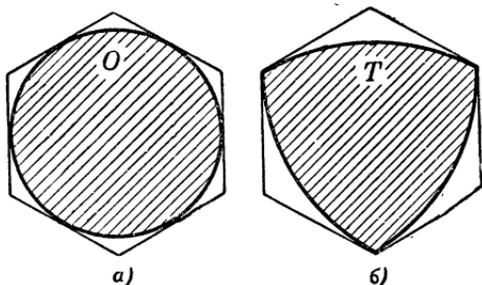


Черт. 261.

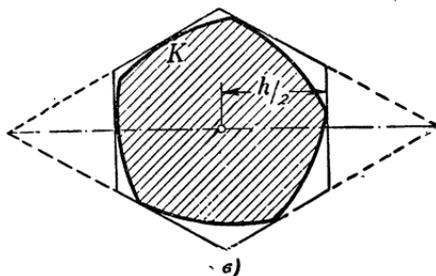
имеют равные углы и равные высоты. Проведем, далее, опорные прямые MN и QP окружности O , перпендикулярные к диагонали ромба BD , и опорные прямые $M'N'$ и $Q'P'$ кривой K , перпендикулярные к $B'D'$. Расстояние между этими опорными прямыми равно h ; согласно задаче 87а) можно утверждать, что шестугольники $AMNCPQ$ и $A'M'N'C'P'Q$ имеют одинаковые периметры. Но отсюда следует, что описанные вокруг O и K многоугольники, получающиеся из

2^n -угольников заменой сторон BE , BF , DL и DH сторонами EM , MN , NF , LQ , QP , PH , имеют равные периметры. Производя это построение для каждой двух сторон BE и BF , сходящихся в одной вершине, мы построим описанные вокруг K и O 2^{n+1} -угольники с равными углами и докажем, что они имеют равные периметры.

Итак, указанные 2^n -угольники ($n=2, 3, 4, \dots$), описанные вокруг O и K , имеют равные периметры; следовательно, пределы этих периметров при $n \rightarrow \infty$ также равны, т. е. длины кривых K и O равны. Длина окружности O равна, как известно, πh , значит, и длина K равна πh .



89. Отметим прежде всего, что *вокруг всякой кривой K постоянной ширины h можно описать правильный шестиугольник*. Действительно, согласно задаче 30а) из §. 3 (стр. 45), мы можем описать вокруг кривой постоянной ширины шестиугольник с



Черт. 262.

равными углами (шестиугольник, все углы которого равны 120°), имеющий пару равных противоположных сторон (черт. 262). Продолжения остальных четырех сторон этого шестиугольника образуют параллелограмм с углом в 120° , обе высоты которого имеют одинаковую величину h , т. е. ромб с высотой h . Две равные стороны шестиугольника перпендикулярны к большей диагонали ромба и пересекают эту диагональ на равных расстояниях от центра ромба (это следует из равенства сторон), а именно на расстояниях $\frac{h}{2}$

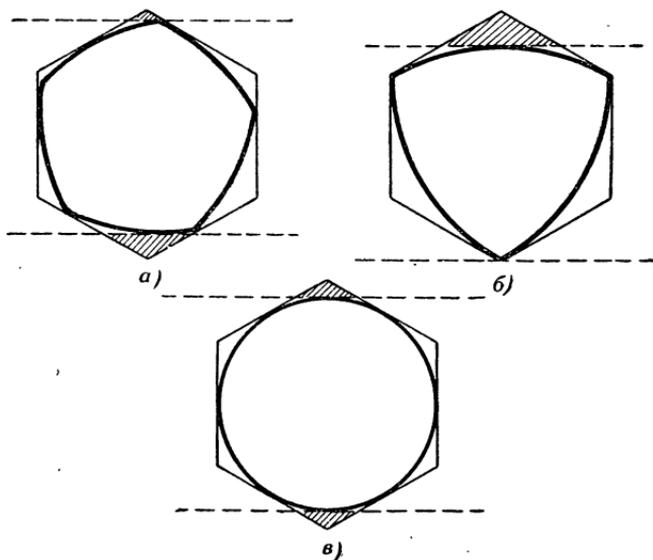
от центра. Отсюда легко усмотреть, что рассматриваемый шестиугольник является правильным шестиугольником с апофемой $\frac{h}{2}$.

Опишем теперь правильный шестиугольник вокруг окружности O диаметра h , вокруг треугольника Релло T ширины h и вокруг произвольной кривой K постоянной ширины h (черт. 262). При этом заметим, что три вершины правильного шестиугольника, описанного вокруг треугольника Релло T , совпадают с вершинами кривой T (см. черт. 262, б). Далее, будем аналогично решению задачи 88 удваивать число сторон многоугольников, описанных вокруг T , O и K , т. е. перейдем от описанных 6-угольников к описанным 12-угольникам, затем к описанным 24-угольникам и т. д.

Рассмотрим полученные $3 \cdot 2^n$ -угольники с равными углами, описанные вокруг O , T и K . Докажем, что при каждом n площадь $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг O , не меньше (а площадь $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг T , не больше) чем площадь $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг K . Доказательство будем вести по методу математической индукции. Именно, предположим, что для $3 \cdot 2^n$ -угольников это предположение уже доказано, и покажем, что в таком случае оно будет иметь место и для $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольников. При этом для $n=1$ наше утверждение справедливо, так как 6-угольники с равными углами, описанные вокруг O , T и K , все равны между собой (это есть правильные шестиугольники с апофемой $\frac{h}{2}$).

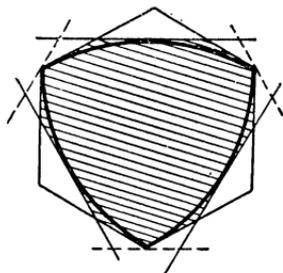
Площадь $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольника получается из площади $3 \cdot 2^n$ -угольника вычитанием площадей пар треугольников, отсекаемых от $3 \cdot 2^n$ -угольника парами параллельных опорных прямых кривой (черт. 263). Но для окружности O $3 \cdot 2^n$ -угольник будет правильным, и мы каждый раз будем проводить секущие, проходящие на равном расстоянии от центра $3 \cdot 2^n$ -угольника (ибо окружность центрально-симметрична). Покажем, что для треугольника Релло T одна из секущих всегда будет проходить через вершину $3 \cdot 2^n$ -угольника. Действительно, одна из двух параллельных опорных прямых треугольника Релло обязательно проходит через его угловую точку (см. черт. 80, б в тексте). Так как все угловые точки треугольника Релло являются вершинами описанного шестиугольника, то при построении

описанного 12-угольника с равными углами в каждой из трех пар проводимых параллельных опорных прямых одна из прямых будет проходить через вершину шестиугольника.



Черт. 263.

Отсюда вытекает, что описанный вокруг треугольника Релло T 12-угольник с равными углами на самом деле будет 9-угольником, т. е. три его стороны будут иметь нулевую длину (см. определение описанного многоугольника, § 1, стр. 27), причем все три угловые точки треугольника Релло будут являться вершинами 9-угольника (черт. 264). Аналогично и для каждого описанного вокруг треугольника Релло T $3 \cdot 2^n$ -угольника с равными углами все три угловые точки треугольника Релло будут являться вершинами $3 \cdot 2^n$ -угольника (на самом деле такой $3 \cdot 2^n$ -угольник будет иметь меньше чем $3 \cdot 2^n$ сторон), откуда следует, что из каждых двух параллельных



Черт. 264.

опорных прямых, которые мы проводим в процессе построения описанного вокруг треугольника Релло $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольника, одна всегда будет проходить через вершину $3 \cdot 2^n$ -угольника.

Рассмотрим теперь ромбы, образованные двумя соседними сторонами l_1 и l_2 $3 \cdot 2^n$ -угольников, описанных вокруг O , T и K , и сторонами l_3 и l_4 , параллельными l_1 , соответственно l_2 . Все эти три ромба имеют одинаковые высоты h и одинаковые углы (равные углам правильных $3 \cdot 2^n$ -угольников, т. е. $\frac{180^\circ (3 \cdot 2^n - 2)}{3 \cdot 2^n}$), т. е. они равны. В силу результата задачи 876) для окружности сумма площадей треугольников, отсекаемых парой параллельных сторон описанного $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольника от рассматриваемого ромба, не больше чем для кривой K , а для треугольника Релло T — не больше чем для K (в случае окружности эти прямые симметричны относительно центра ромба, а в случае треугольника Релло одна из них проходит через вершину ромба). Значит, площадь $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг O , не меньше площади $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг K , а площадь $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг T , не больше площади $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг K . Переходя к пределу, мы получаем, что окружность O ограничивает площадь, не меньшую чем K , а треугольник Релло T — площадь, не большую чем K .

Мы можем даже утверждать, что если K отлична от окружности, то K ограничивает меньшую площадь чем O (а не только не большую), и что, если K отлична от треугольника Релло, то K ограничивает большую площадь чем T . Действительно, так как каждый раз при проведении пары параллельных опорных прямых O и K , мы отсекаем от многоугольника, описанного вокруг K , пару треугольников не меньшей площади, чем пара треугольников, отсекаемая от многоугольника, описанного вокруг O , то полученные в пределе площади могут быть равны только в том случае, если мы каждый раз отсекаем в обоих случаях пары треугольников одной и той же площади. Но это возможно только в том случае, если каждая пара параллельных опорных прямых кривой K , проведенных в процессе построения $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольника, симметрична относительно центра ромба, образованного смежными сторонами $3 \cdot 2^n$ -угольника. Если же имеет

место этот случай, то все $3 \cdot 2^n$ -угольники, описанные вокруг K , будут центрально-симметричны (с центром симметрии в центре описанного вокруг K правильного шестиугольника). Отсюда нетрудно вывести, что сама кривая K должна иметь центр симметрии, т. е. являться окружностью (см. задачу 84)¹⁾.

Еще проще доказать, что если кривая K отлична от треугольника Релло T , то K ограничивает большую площадь чем T . Кривая K могла бы ограничивать ту же самую площадь, что и T , только в том случае, если бы в процессе нашего построения мы каждый раз, проводя пару параллельных опорных прямых K и T , отсекали бы от многоугольников, описанных вокруг K и T , пару треугольников одной и той же площади. Но уже первая пара параллельных опорных прямых кривой K , проведенных в процессе построения, не может отсекают от описанного вокруг K шестиугольника ту же самую площадь, которую отсекает пара параллельных опорных прямых треугольника Релло T от описанного вокруг T правильного шестиугольника.

Действительно, противное могло бы иметь место только в том случае, если бы одна из двух параллельных опорных прямых кривой K проходила через вершину правильного шестиугольника, описанного вокруг K . Но это возможно только в том случае, если соответствующая вершина правильного шестиугольника принадлежит кривой K . Последнее же может иметь место только в том случае, если K имеет угол в 120° , т. е. если K есть треугольник Релло (см. задачу 86).

Таким образом, если K — произвольная кривая постоянной ширины h , а S — ее площадь, то

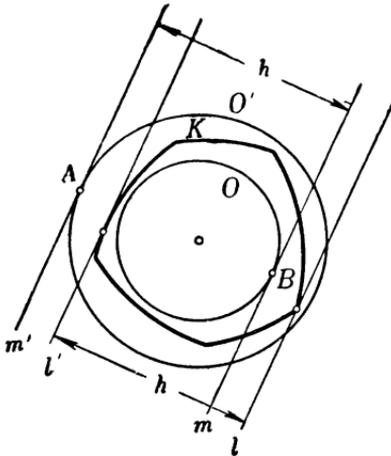
$$0,7048h^2 \approx \frac{1}{2} h^2 (\pi - \sqrt{3}) \leq S \leq \frac{1}{4} \pi h^2 \approx 0,7854h^2.$$

Таким образом, площади кривых постоянной ширины заключены в довольно узких пределах.

90. Пусть K — произвольная кривая постоянной ширины h , O — окружность радиуса r , не выходящая за пределы кривой K ; пусть, далее, O' — окружность радиуса $h - r$,

¹⁾ То, что кривая постоянной ширины, отличная от окружности O , ограничивает меньшую площадь чем окружность O той же самой ширины, можно вывести также из предложений задач 61 и 62 § 5, если воспользоваться теоремой Барбье (задача 88).

концентричная с окружностью O (черт. 265). Докажем, что окружность O' заключает кривую K внутри себя, т. е. что любая точка окружности O' лежит вне кривой K . Пусть A — произвольная точка окружности O' , m' — касательная к окружности O' в этой точке, m — касательная к окружности O , параллельная m' и расположенная на расстоянии h от нее.



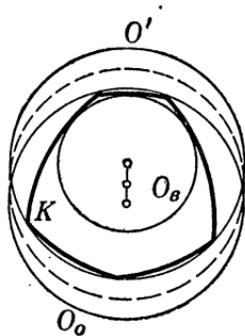
Черт. 265.

Точку прикосновения m с окружностью O обозначим через B . Пусть, далее, l и l' — опорные прямые кривой K , параллельные m и m' ; расстояние между l и l' равно h , т. е. расстоянию между m и m' . Пусть l расположена по ту же самую сторону прямой l' , что и прямая m относительно m' (см. черт. 265). Так как точка B расположена внутри кривой K (или принадлежит кривой K), то прямая m заключена между l и l' . Отсюда следует, что прямая m' расположена вне полосы, образованной прямыми l и l' , т. е. вне кривой K , и

следовательно, точка A лежит вне кривой K , что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что если O' — окружность радиуса R , заключающая кривую K внутри себя, а O — окружность радиуса $h - R$, концентричная с O' , то O не выходит за пределы кривой K .

Пусть теперь O_0 — описанная окружность кривой K , а O_B — вписанная окружность. Радиусы их обозначим соответственно через R и r . Радиус R не может быть больше $h - r$, так как окружность радиуса $h - r$, концентричная с O_B , заключает кривую K внутри себя, а описанная окружность имеет наименьший радиус из всех окружностей, заключающих внутри себя K . Но O_0 не может иметь и радиус, меньший чем $h - r$, так как иначе окружность радиуса $h - R$, концентричная с O_0 , содержалась бы внутри K и имела бы радиус, больший чем r . Таким образом, мы видим, что $R + r = h$.

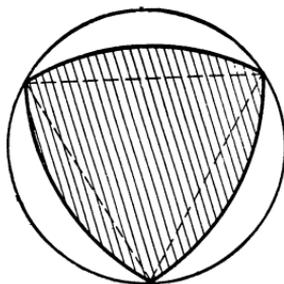
Предположим теперь, что окружности O_0 и O_B не концентричны. Тогда окружность O' радиуса R , концентричная с O_B , заключает кривую K внутри себя, и следовательно, мы имеем две окружности O_0 и O' одного и того же радиуса R , заключающие K внутри себя (черт. 266). Но в этом случае можно было бы построить окружность меньшего радиуса, чем R , содержащую внутри себя кривую K : эта окружность имела бы центр в середине линии центров окружностей O_0 и O' и проходила бы через обе точки пересечения этих окружностей. А это противоречит определению описанной окружности.



Черт. 266.

91. Легко видеть, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника Релло ширины h , равен $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ (черт. 267).

Но все кривые постоянной ширины h имеют диаметр h (см. задачи 80, 81), а согласно теореме Юнга (задача 16 из § 2 и задача 67 из § 6) радиус окружности, описанной вокруг кривой диаметра h , не может быть больше $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.



Черт. 267.

Нетрудно видеть, что если кривая K постоянной ширины h отличается от треугольника Релло, то радиус круга, описанного вокруг K , меньше $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ (а не только не больше $\frac{h\sqrt{3}}{3}$).

Действительно, радиус окружности, описанной вокруг плоской фигуры диаметра h , может достигнуть наибольшего значения $\frac{h\sqrt{3}}{3}$ только в том случае, когда описанная окружность содержит три точки фигуры, являющиеся вершинами равностороннего треугольника со стороной h (см. задачу 67

из § 6). Но если кривая K постоянной ширины h содержит три точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника со стороной h , то стороны этого равностороннего треугольника являются диаметрами K , и кривая K есть, очевидно, треугольник Релло.

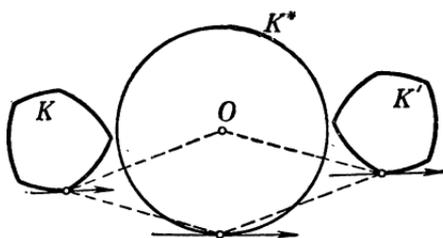
Вторая часть задачи совершенно очевидна: для окружности описанная окружность совпадает с ней самой, т. е. имеет тот же самый диаметр, а диаметр окружности, описанной вокруг произвольной кривой K , не может быть меньше диаметра K . Ясно также, что если кривая K постоянной ширины h отлична от окружности, то диаметр окружности, описанной вокруг K , больше h .

Таким образом, мы видим, что для всех кривых постоянной ширины h величины радиуса описанной окружности R и радиуса вписанной окружности r заключены в следующих довольно узких пределах:

$$0,5h = \frac{h}{2} \leq R \leq \frac{h\sqrt{3}}{3} \approx 0,58h,$$

$$0,42h \approx \frac{h(3-\sqrt{3})}{3} \leq r \leq \frac{h}{2} = 0,5h.$$

92. Пусть K — произвольная кривая постоянной ширины h , K' — кривая, которая получается из кривой K поворотом на 180° вокруг начала отсчета O (кривая, симметричная K относительно начала отсчета O), $K^* = K + K'$ — их сумма (черт. 268). Из задачи 47 § 4 сразу следует, что K^* есть кривая постоянной ширины $2h$; кроме того, $K^* = K + K'$ есть центрально-симметричная кривая с центром симметрии в точке O , т. е.



Черт. 268.

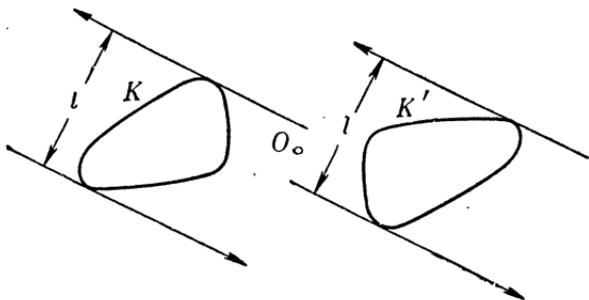
K^* переходит в себя при симметрии относительно точки O , или, другими словами, при повороте вокруг O на 180° . Действительно, при таком повороте K переходит в K' , K' — в K , а следовательно, их сумма переходит в себя. В

K^* переходит в себя при симметрии относительно точки O , или, другими словами, при повороте вокруг O на 180° . Действительно, при таком повороте K переходит в K' , K' — в K , а следовательно, их сумма переходит в себя. В

силу задачи 84 кривая K^* должна быть окружностью радиуса h .

Длина окружности K^* равна $2\pi h$. Но, с другой стороны, длина K^* равна сумме длин кривых K и K' (см. § 4, стр. 59). Так как кривые K и K' равны (одна получается из другой поворотом на 180°), то и длины их равны. Таким образом, удвоенная длина кривой K равна $2\pi h$, т. е. длина кривой K равна πh (теорема Барбье).

93. Пусть K — такая выпуклая кривая, что сумма $K^* = K + K'$ кривой K и кривой K' , симметричной с K отно-



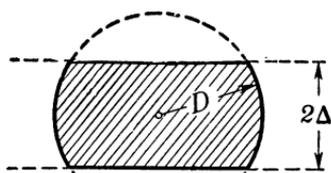
Черт. 269.

сительно какой-либо точки O (получающейся из K поворотом на 180° вокруг O), есть окружность радиуса h . Если ширина кривой K в каком-либо направлении равна l , то и ширина кривой K' в этом же направлении тоже равна l (черт. 269). Согласно предложению задачи 47 из § 4 ширина кривой $K^* = K + K'$ в этом же направлении должна равняться $2l$. Но так как K^* есть окружность радиуса h , то ширина ее в каждом направлении равна $2h$, т. е. $2l = 2h$ и, следовательно, $l = h$. Итак, мы видим, что ширина кривой K в каждом направлении имеет одно и то же значение h .

94. а) Пусть K — некоторая выпуклая кривая диаметра 1 , K' — кривая, получающаяся из K симметрией относительно некоторой точки, $K^* = K + K'$. Очевидно, что K^* есть центрально-симметричная выпуклая кривая, диаметр которой равен 2 , а длина — удвоенной длине кривой K (см. § 6,

задачи 75а), б), в); отметим, что кривая, которую мы обозначили через K^* в задаче 75, подобна рассматриваемой в настоящей задаче кривой K^* с коэффициентом подобия $1/2$). Расстояние какой-либо точки кривой K^* от центра симметрии O этой кривой не может быть больше 1, так как в противном случае диаметр K^* был бы больше 2. Следовательно, кривая K^* заключается внутри окружности радиуса 1. Длина K^* (а следовательно, и длина K , равная половине длины K^*) будет наибольшей, если K^* является окружностью радиуса 1; кривая K в этом случае должна быть кривой постоянной ширины 1 (см. задачу 93).

б) Пусть K — некоторая выпуклая кривая диаметра D и ширины Δ , K' — кривая, полученная из K симметрией относительно некоторой точки. В таком случае кривая $K^* = K + K'$ есть центрально-симметричная выпуклая кривая диаметра $2D$ и ширины 2Δ ; длина K^* в два раза больше длины K (см. задачи 75а), б), в) из § 6). Так как ширина K^* равна 2Δ , то K^* заключена внутри полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми равно 2Δ . Из того, что кривая K^* центрально-симметрична, следует, что эти две прямые — опорные прямые кривой K^* , расстояние между которыми имеет наименьшее значение, — равноудалены от центра симметрии O кривой K^* . С другой стороны, так как диаметр K^* равен $2D$, кривая K^* заключена внутри окружности радиуса D с центром в центре симметрии O (см. решение задачи 94а)). Отсюда следует,



Черт. 270.

что кривая K^* заключена внутри изображенной на черт. 270 жирной кривой; следовательно, K^* (а значит, и K) имеет наибольшую длину, если K^* совпадает с этой жирной кривой.

Но для кривой K , описанной в условии задачи, кривая $K + K'$ в точности совпадает с жирной кривой, изображенной на черт. 270. Действительно, сумма $\overline{K} + \overline{K'}$ есть окружность радиуса D . Точки A', B', P' и Q' кривой $\overline{K'}$, получающиеся из точек A, B, P и Q при повороте кривой \overline{K} на 180° во-

круг точки O , являются соответствующими (в смысле задачи 41 из § 4) для точек B , A , Q и P кривой \overline{K} . Таким образом, суммы соответствующих точек дуг AQ и $B'P'$ образуют дугу окружности радиуса D ; то же имеет место для дуг $A'Q'$ и BP . Отсюда следует наше утверждение.

Нетрудно видеть, что если кривая K в сумме с кривой K' дает кривую, изображенную на черт. 270, то K обязательно совпадает с кривой, описанной в условии задачи (см. задачу 45 из § 4 и задачу 93).

95. а) Пусть K — некоторая выпуклая кривая ширины 1, K' — кривая, получающаяся из K при помощи симметрии относительно некоторой точки. Тогда $K^* = K' + K$ есть центрально-симметричная кривая ширины 2, длина которой равна удвоенной длине кривой K (см. задачи 75а), б), в), из § 6).

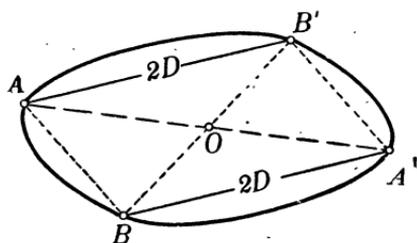
Из того, что ширина K^* равна 2, следует, что кривая K^* целиком расположена вне окружности радиуса 1 с центром в центре симметрии O этой кривой. В самом деле, если бы какая-то точка A кривой K^* помещалась внутри этой окружности, то расстояние между опорной прямой кривой K^* , проходящей через точку A , и опорной прямой, симметричной первой относительно центра O кривой, очевидно, было бы меньше 2.

Таким образом, мы видим, что K^* имеет наименьшую длину, если она совпадает с окружностью радиуса 1. В этом случае кривая K должна быть кривой постоянной ширины 1 (см. задачу 93).

б) Пусть K — некоторая выпуклая кривая ширины Δ и диаметра D , K' — кривая, полученная из K симметрией относительно некоторой точки, и $K^* = K + K'$; K^* есть центрально-симметричная кривая ширины 2Δ и диаметра $2D$, длина которой в два раза больше длины K (см. задачи 75а), б), в) из § 6).

Обозначим через A и B точки кривой K^* , расстояние между которыми равно $2D$; легко видеть, что A и B должны быть симметричны друг другу относительно центра O кривой K^* (в противном случае одна из двух хорд AA' или BB' кривой K^* , где A' и B' — точки, симметричные A , соответственно B , относительно центра симметрии O , была бы больше $2D$; черт. 271). С другой стороны, в силу того, что

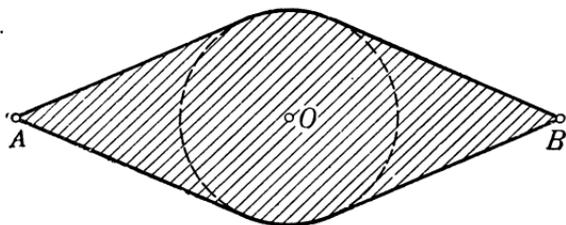
кривая K^* имеет ширину 2Δ , она целиком расположена вне окружности радиуса Δ с центром в точке O (см. решение задачи 95а)).



Черт. 271.

Отсюда вытекает, что кривая K^* (а следовательно, и K) имеет наименьшую возможную длину, если K^* состоит из двух дуг окружности радиуса Δ с центром в точке O и из четырех отрезков касательных, проведенных к этой окружности из точек A и B (черт. 272).

Отсюда в силу задачи 93 и задачи 45 из § 4 следует, что кривая K имеет вид, изображенный на черт. 88.



Черт. 272.

96. Докажем прежде всего, что кривая K_0 постоянной ширины h , составленная только из дуг окружностей радиуса h (построение такой кривой, близкой к произвольной наперед заданной кривой постоянной ширины h , описано в тексте), имеет длину, равную πh . Рассмотрим отдельно какую-либо одну дугу AB из дуг окружностей, составляющих K_0 . Проведем диаметры кривой, проходящие через точки A и B . Если эти диаметры пересекаются в точке C , лежащей на кривой, то C является центром дуги AB (черт. 273, а), и длина дуги AB равна углу α между этими диаметрами, умноженному на ширину кривой K_0 . Если же диаметры AC и BD кривой K_0 пересекаются внутри K_0 , то согласно построению K_0 (см. стр. 98—100) эта кривая должна содержать дуги окружностей CP и DP с центрами соответственно в точках A и B , причем точка P

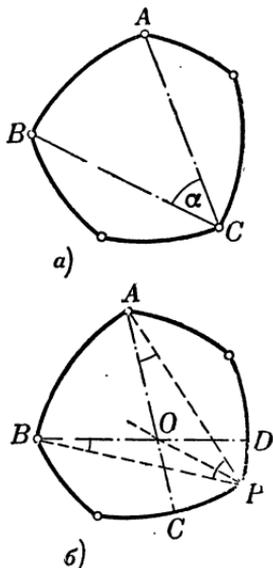
пересечения этих дуг и будет являться центром дуги AB (см. черт. 273, б). При этом сумма длин дуг AB , CP , PD равна углу между диаметрами AC и BD , умноженному на ширину h кривой K_0 . Действительно, дуга AB равна $h \cdot \angle APB$, дуга CP равна $h \cdot \angle CAP$, дуга PD равна $h \cdot \angle PBD$, а сумма углов APB , CAP и PBD равна, как легко видеть, углу между AC и BD . (Если O есть точка пересечения AC и BD , то суммы $\angle APO + \angle PAC$ и $\angle BPO + \angle PBD$ равны соответственно двум частям, на которые разбивает прямая PO угол AOB .)

Если сложить длины всех участков кривой K_0 , заключающихся между диаметрами, проходящими через соседние угловые точки кривой, то мы без труда убедимся, что полная длина кривой K равна πh .

Пусть теперь нам дана произвольная кривая K постоянной ширины h . Составим последовательность кривых $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ постоянной ширины h , состоящих только из дуг окружностей радиуса h , пределом которой является кривая K . Длина каждой из кривых $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ равна согласно вышедшему доказанному πh . Следовательно, длина K , равная пределу длин кривых K_1, K_2, \dots (см. § 4, стр. 65), тоже равна πh .

97. Рассмотрим сначала кривые постоянной ширины h , составленные только из дуг окружностей радиуса h . Пусть K_0 — такая кривая, а BD и AC — два ее диаметра, проходящих через две соседние вершины A и B кривой K_0 . Часть этой кривой, заключенная между диаметрами BD и AC , пересекающимися внутри кривой, состоит из дуги CP с центром в точке A , дуги DP с центром в точке B и дуги AB с центром в точке P (черт. 274).

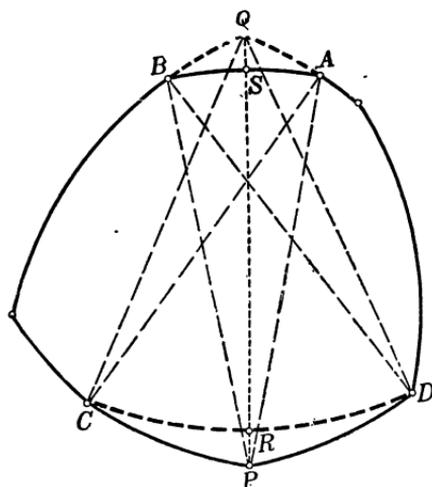
Дуги AB , CP и PD кривой K_0 можно заменить дугами AQ с центром в точке C , QB с центром в точке D и CD с



Черт. 273.

центром в точке Q ; при этом кривая K_0 перейдет в новую кривую K'_0 , также имеющую постоянную ширину h (см. черт. 274).

Докажем, что если хорда CD больше хорды AB , то кривая K'_0 ограничивает меньшую площадь, чем кривая K_0 .

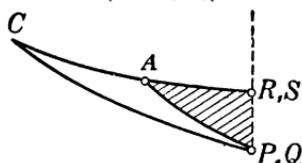


Черт. 274.

Для этого нужно доказать, что площадь S_{CPD} криволинейного треугольника CPD больше, чем площадь S_{ABQ} криволинейного треугольника ABQ . Проведем отрезки CA , CQ , DB , DQ , AP и BP , длина каждого из которых равна h , а также соединим точки P и Q . Мы предположили, что $CD > AB$; отсюда следует, что $\widehat{CD} > \widehat{AB}$, ибо эти дуги имеют одинаковый радиус h . Обозначим точки пересечения отрезка PQ с дугами CD и AB через R и S . Тогда $RP = SQ$ (ибо $PS = RQ$, так как эти отрезки являются радиусами

дуг AB и CD соответственно). Площадь криволинейного треугольника CPD складывается из площадей S_{CPR} и S_{PDR} криволинейных треугольников CPR и PDR ; точно так же $S_{ABQ} = S_{ASQ} + S_{BSQ}$. Если бы было $CR \geq SA$ и $DR \geq SB$ (где знаки равенства не имеют места одновременно), то было бы $S_{CPR} \geq S_{SAQ}$, $S_{PDR} \geq S_{BSQ}$ и, следовательно, $S_{CPD} > S_{AQB}$. Действительно, если, например, $CR \geq SA$, то, наложив криволинейный треугольник SQA на криволинейный треугольник CPR так, чтобы PR совпало с QS , а дуга SA пошла по дуге RC , мы убедимся (черт. 275), что точка A окажется между точками C и R , так что криволинейный треугольник SAQ целиком будет находиться внутри треугольника RCP (все дуги окружностей имеют одинаковый радиус), и потому $S_{CPR} \geq S_{SAQ}$.

Площадь криволинейного треугольника CPD складывается из площадей S_{CPR} и S_{PDR} криволинейных треугольников CPR и PDR ; точно так же $S_{ABQ} = S_{ASQ} + S_{BSQ}$. Если бы было $CR \geq SA$ и $DR \geq SB$ (где знаки равенства не имеют места одновременно), то было бы $S_{CPR} \geq S_{SAQ}$, $S_{PDR} \geq S_{BSQ}$ и, следовательно, $S_{CPD} > S_{AQB}$. Действительно, если, например, $CR \geq SA$, то, наложив криволинейный треугольник SQA на криволинейный треугольник CPR так, чтобы PR совпало с QS , а дуга SA пошла по дуге RC , мы убедимся (черт. 275), что точка A окажется между точками C и R , так что криволинейный треугольник SAQ целиком будет находиться внутри треугольника RCP (все дуги окружностей имеют одинаковый радиус), и потому $S_{CPR} \geq S_{SAQ}$.



Черт. 275.

Итак, если $CR \geq SA$ и $DR \geq SB$, то, действительно, $S_{CPD} > S_{ABD}$. Остается рассмотреть случай, когда одна из двух дуг DR , CR больше, а другая меньше чем соответствующие дуги SB , SA . Пусть для определенности $CR > SA$, $DR < SB$. При этом, так как $\overline{CD} > \overline{AB}$, то $\overline{CR} - \overline{SA} > \overline{SB} - \overline{DR}$. Нам остается доказать, что из последнего неравенства следует аналогичное неравенство для площадей:

$$S_{CPR} - S_{SAQ} > S_{SBQ} - S_{PDR},$$

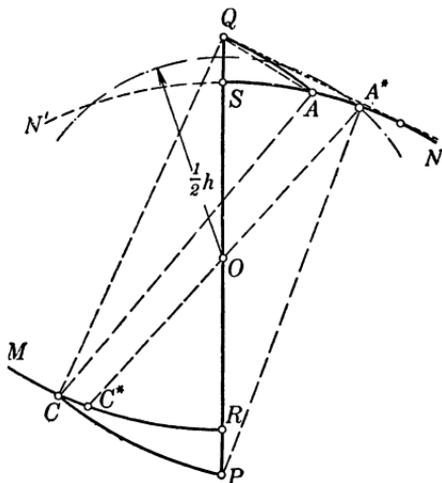
откуда сразу следует, что

$$S_{CPR} + S_{PDR} > S_{SAQ} + S_{SBO},$$

т. е.

$$S_{CPD} > S_{ABQ}.$$

Утверждение, которое нам осталось доказать, можно еще сформулировать таким образом. Пусть PQ — отрезок, больший h , R и S — такие точки на нем, что $RQ = PS = h$ (откуда $PR = SQ$); RM и SN — дуги окружностей радиуса h с центрами в Q и P (черт. 276). Пусть, наконец, A и C — такие точки на этих дугах, что $AC = h$, а \overline{AQ} и \overline{CP} — дуги окружностей радиуса h , соединяющие точки A и Q , C и P (центрами этих дуг будут служить, очевидно, точки C и A соответственно). Тогда при увеличении разности дуг CR и AS ($CR > AS$) разность площадей криволинейных треугольников CPR и AQS также увеличивается.



Черт. 276.

Прежде всего заметим, что лишь при некотором определенном положении точки A будем иметь $AS = CR$.

Действительно, при этом условии $RASC$ будет параллелограммом, и AC пройдет через середину O отрезка RS , т. е. $OA = OC = \frac{1}{2}h$. Но на дуге SN найдется лишь одна точка A , расстояние которой от O равно $\frac{1}{2}h$ (всего на окружности таких точек две, но одна лежит на дуге SN' , симметричной с SN относительно прямой RS). Обозначим такую точку через A^* , а соответствующую ей точку дуги RM — через C^* . Если точка A совпадает с A^* , то C совпадает с C^* , и разность $CR - AS$ равна нулю. Если же A начинает двигаться от A^* к S , то C движется от C^* к M , так что дуга AS уменьшается, а дуга CR увеличивается, в результате чего разность $\overline{CR} - \overline{AS}$, равная в начале нулю, непрерывно увеличивается.

Для доказательства этого предложения соединим точки P и A^* . Тогда в $\triangle PA^*Q$ $OA^* = \frac{1}{2}h$, а $PQ > h$, так что медиана OA^* меньше половины соответствующей стороны PQ . Отсюда следует, что угол PA^*Q — тупой, так что A^* — первая точка пересечения прямой QA^* с дугой SN . Значит, при движении точки A от A^* к S угол PQA будет все время уменьшаться.

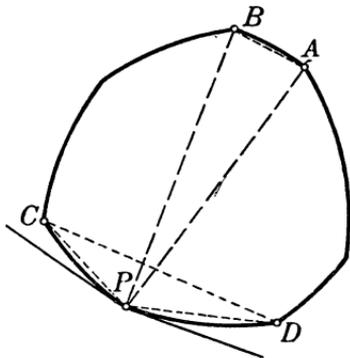
Далее, C есть вершина равнобедренного треугольника QAC с основанием QA и длиной h боковой стороны. Но при движении точки A от A^* к S отрезок QA уменьшается, так что угол CQA при основании рассмотренного равнобедренного треугольника QAC увеличивается. Так как при этом угол PQA уменьшается, то угол CQP , очевидно, увеличивается, и точка C все время движется от C^* к M .

Таким образом, увеличение разности $\overline{CR} - \overline{AS}$ равносильно уменьшению дуги AS , т. е. движению точки A от A^* к S . Но при этом, действительно, разность $S_{CPR} - S_{ASQ}$ увеличивается, ибо криволинейный треугольник CPR увеличивается (так как C удаляется от R), а треугольник SAQ уменьшается (A приближается к S). Таким образом, нужное нам предложение доказано.

Покажем теперь, что *всякая кривая K постоянной ширины h , состоящая только из дуг окружностей радиуса h , где число этих дуг больше трех, ограничивает большую площадь, чем треугольник Релло ширины h* . Для этого,

используя доказанное только что предложение, мы будем последовательно изменять кривую K так, чтобы она все время оставалась кривой постоянной ширины h и чтобы площадь, ограниченная ею, в процессе изменения все время уменьшалась; при этом число дуг, из которых состоит кривая, будет все время уменьшаться, и в конце концов мы придем к треугольнику Релло.

Пусть AB — наименьшая из дуг, из которых состоит кривая K (или одна из наименьших). Концы A и B этой дуги являются угловыми точками кривой K и, следовательно, служат центрами некоторых дуг этой кривой (см. решение задачи 85). Точка P пересечения дуг CP и PD кривой K , имеющих центрами точки A и B , является центром дуги AB (черт. 277); C и D являются угловыми точками кривой. Так как общее число дуг, из которых состоит кривая K , по предположению, не меньше четырех, то не может точка C совпадать с B и одновременно D совпадать с A . Таким образом, кроме дуг AB , CP и PD , кривая K содержит еще по крайней мере одну дугу, центром которой является точка C или D .



Черт. 277.

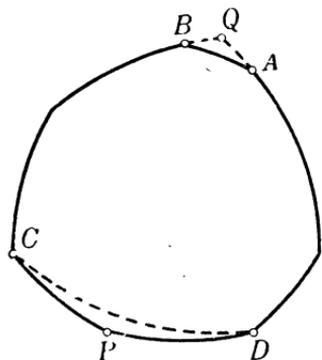
Мы утверждаем, что $AB < CD$. Действительно, так как дуга CP меньше 60° (если бы дуга CP была не меньше 60° , то хорда CP была бы не меньше ширины h кривой; следовательно, эта хорда должна была бы быть равной h и кривая являлась бы треугольником Релло — см. решение задачи 86), то касательная к дуге PC в точке P составляет с хордой PC угол, меньший 30° , и угол APC между радиусом AP и хордой PC больше, чем $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$; точно так же угол BPD больше 60° . А так как угол APB (центральный угол дуги AB) меньше 60° , то

$$\angle CPD = \angle APC + \angle BPD - \angle APB > 60^\circ + 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ.$$

Отсюда следует, что хорда CD больше по крайней мере одной из хорд CP , PD (в треугольнике CPD угол CPD не

может быть наименьшим). Но согласно нашему выбору дуги AB хорда AB не может быть больше хорд CP , PD . Таким образом, мы заключаем, что хорда AB меньше хорды CD .

Заменяем теперь дуги AB , CP и PD кривой K дугами AQ с центром в точке C , QB с центром в точке D и CD с центром в точке Q (черт. 278). Согласно вышедоказанному площадь, ограниченная кривой K , при такой замене уменьшится. Но и общее число дуг, из которых состоит кривая K , при этом тоже уменьшится: две дуги CP и PD заменятся единственной дугой CD , а дуга AB заменится дугами AQ и QB , из которых по крайней мере одна является продолжением смежной дуги (так как дуга AQ имеет центр в точке C , дуга QB имеет центр в точке D , а кривая K уже раньше содержала дугу с центром в C или дугу с центром в D).



Черт. 278.

Продолжая этот процесс далее, мы в конце концов придем к кривой постоянной ширины, состоящей только из трех дуг окружностей, а такая кривая, как легко видеть, может быть только треугольником Релло.

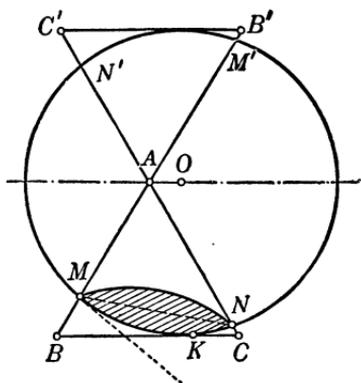
Действительно, при этом хотя бы одна из дуг должна быть больше или равна 60° ; этой дуге отвечает угловая точка кривой, угол при которой меньше или равен 120° ; далее см. задачу 86.

Из доказанного уже совсем просто вывести, что никакая кривая K постоянной ширины h не может ограничивать площадь, меньшую, чем треугольник Релло. Действительно, рассмотрим последовательность кривых $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ постоянной ширины h , состоящих только из дуг окружностей радиуса h , пределом которой является кривая K . Согласно вышедоказанному все кривые $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ ограничивают площади, большие, чем треугольник Релло ширины h , а следовательно, площадь, ограниченная кривой K , являющаяся пределом площадей, ограниченных кривыми K_1, K_2, \dots (см. § 4, стр. 65), не может быть меньше площади, ограниченной треугольником Релло.

Предоставляем читателю, дополнив эти рассуждения, доказать, что площадь треугольника Релло меньше (а не только не больше), чем площадь любой другой кривой той же постоянной ширины.

§ 8

98. а) Пусть ABC — данный равносторонний треугольник, $AB'C'$ — треугольник, симметричный с ним относительно точки A . По стороне BC треугольника катится окружность; O — ее центр в некотором положении, K — точка соприкосновения стороны BC с окружностью; стороны AB и AC высекают на окружности дугу MKN (черт. 279). Прямая OA является осью симметрии фигуры; следовательно, стороны AB' и AC' высекают на окружности дугу $M'N'$, равную дуге MKN . Угол A , содержащий 60° , измеряется полусуммой дуг MN и $M'N'$; следовательно, каждая из этих дуг содержит 60° .

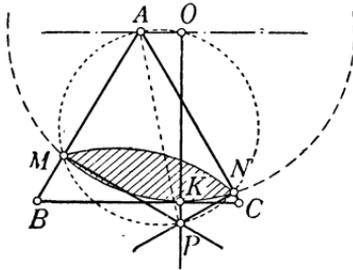


Черт. 279.

Далее, угол между хордой MN и касательной к окружности в точке M или N равен 30° . Значит, чтобы показать, что заштрихованная на чертеже линза остается все время внутри треугольника ABC , нам нужно показать, что углы AMN и ANM остаются все время не меньше 30° . Но эти углы при движении окружности изменяются от 30° до 90° . Отсюда следует, что Δ -двуугольник есть Δ -кривая.

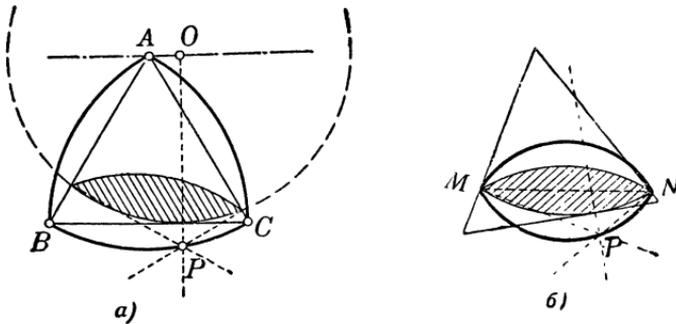
Длина Δ -двуугольника равна длине $\frac{1}{3}$ окружности радиуса h , т. е. $\frac{2\pi h}{3}$. Площадь, ограниченная кривой, равна удвоенной площади сегмента круга радиуса h , дуга которого содержит 60° , т. е. эта площадь равна $h^2 \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \approx 0,18h^2$. Окружность, вписанная в равносторонний треугольник высоты h

(окружность радиуса $\frac{1}{3}h$), имеет ту же длину $\frac{2\pi h}{3}$, а площадь, ею ограниченная, равна $h^2 \cdot \frac{\pi}{9} \approx 0,34 h^2$, т. е. больше площади, ограниченной Δ -двуугольником.



Черт. 280.

б) Пусть P — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках M и N к сторонам треугольника (черт. 280). Четырехугольник $AMPN$, очевидно, можно вписать в окружность. На этой же окружности лежит и центр O дуги MKN Δ -двуугольника, касающейся стороны BC , так как $\angle MON = \angle MAN = 60^\circ$. Отрезок AP — диаметр этой окружности, ибо углы AMP и ANP равны 90° . Значит, угол AOP равен 90° , т. е. отрезок OP перпендикулярен к AO , а потому и к основанию BC треугольника. Но OP проходит через точку K соприкосновения Δ -двуугольника со стороной BC , и следовательно, перпендикуляры MP , NP и KP к сторонам $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке.



Черт. 281.

Найдем теперь геометрическое место точек P . Величина диаметра AP окружности $MPNOA$ не зависит от положения Δ -двуугольника внутри равностороннего треугольника.

В самом деле, хорда MN постоянной длины (хорда линзы) стягивает в этой окружности дугу в 120° . Нетрудно видеть, что диаметр этой окружности равен стороне треугольника ABC : действительно, когда OP проходит через точку C , то P совпадает с C и AP совпадает с AC . Таким образом, AP равно AC , или, другими словами, расстояние точки P от вершины треугольника ABC , лежащей по другую сторону отрезка MN , всегда равно стороне треугольника. Геометрическое место, которое описывает точка P , когда Δ -двуугольник вращается внутри равностороннего треугольника, изображено на черт. 281, а¹⁾.

Очевидно, что $\angle MPN = 180^\circ - \angle MAN = 120^\circ$ (см. черт. 280). Отсюда следует, что геометрическое место, которое описывает точка P , когда равносторонний треугольник вращается, оставаясь все время описанным вокруг неподвижного Δ -двуугольника, имеет вид, изображенный на черт. 281, б.

99. а) Пусть $ABCD$ — квадрат, $MNPQ$ — кривая, указанная в условии задачи (черт. 282). Треугольник CDM — равносторонний по построению, следовательно, $\angle MDC = 60^\circ$, $\angle MDA = 30^\circ$. Треугольник AMD — равнобедренный, поэтому

$$\angle DAM = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ, \quad \angle BAM = 15^\circ;$$

точно так же $\angle DAQ = 15^\circ$. Итак,

$$\angle MAQ = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ.$$

Из равенства треугольников ADM и ABQ следует, что $AM = AQ$. Таким образом, мы видим, что треугольник AMQ — равносторонний. Равносторонними являются также треугольники BNM , CPN и DQP .

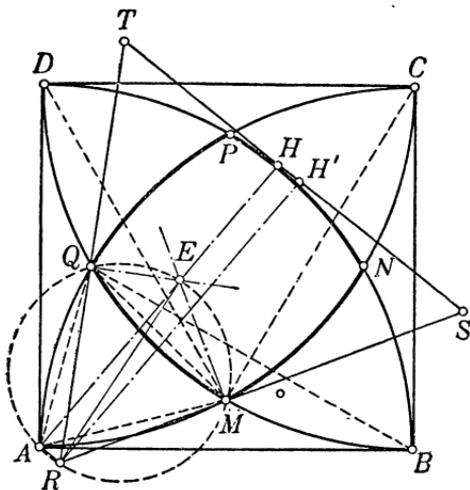
Пусть теперь RST — равносторонний треугольник, две стороны которого проходят через точки M и Q , а третья касается дуги PN в точке H . Тогда углы MAQ и MRQ

¹⁾ Нетрудно видеть, что это геометрическое место представляет собой треугольник Релло (см. § 7, стр. 91).

равны каждый 60° и, следовательно, точки A, R, M, Q лежат на одной окружности. Имеем также

$$\angle ARM = 180^\circ - \angle AQM = 120^\circ,$$

и потому отрезок AR параллелен стороне ST треугольника (так как $\angle ARS + \angle RST = 180^\circ$). Отсюда следует, что высота RH' треугольника RST равна отрезку AH , т. е. стороне первоначального квадрата.



Черт. 282.

Далее, треугольник RST содержит кривую $MNPQ$ внутри себя. В самом деле, каждая из дуг MN, NP, PQ, QM содержит 30° ($\angle MDA = 30^\circ$ и $\angle NDC = 30^\circ$, $\angle MDN = 30^\circ$); следовательно, например, касательные к дуге NP в точках N и P образуют с хордой NP углы в 15° . Каждый же из углов NMS и PQT заключен между 15° и 45° ($\angle NMS = 15^\circ$, если H совпадает с P и высота треугольника RST имеет направление AP ; $\angle NMS = 45^\circ$, если H совпадает с N), так что дуги MN и PQ (а также NP) заключены внутри треугольника RST . Дуга MQ также заключена внутри этого треугольника, ибо углы MQR и QMR заключены между 45° и 75° ($\angle MQR = 45^\circ$, если H совпадает с P ; $\angle MQR = 75^\circ$, если H совпадает с N).

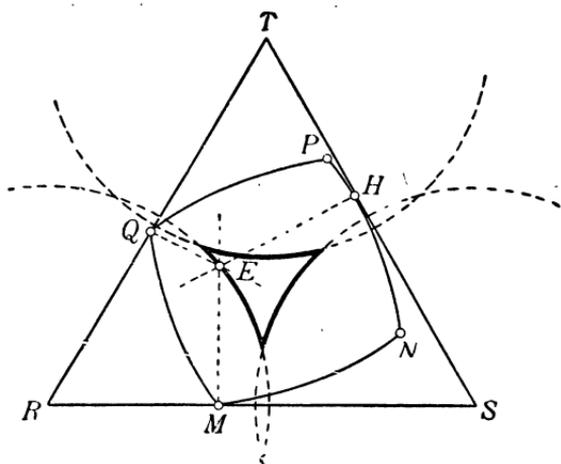
Наконец, заметим, что, рассматривая равносторонние треугольники, две стороны которых проходят через соседние угловые точки кривой $MNPQ$, а третья касается противоположной дуги, мы получим равносторонние треугольники с любыми направлениями сторон, описанные вокруг кривой $MNPQ$, т. е. все описанные равносторонние треугольники. Высота любого такого треугольника равна стороне квадрата, т. е. равна h .

Итак, $MNPQ$ есть Δ -кривая. Она состоит из четырех дуг окружностей радиуса h , содержащих по 30° , и ее длина равна длине одной трети окружности радиуса h , т. е. равна $\frac{2\pi h}{3}$ (и, следовательно, равна длине окружности или Δ -двуугольника высоты h). Ее площадь, как нетрудно подсчитать, равна $\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right) \cdot h^2 \approx 0,31h^2$, т. е. имеет промежуточное значение между площадью окружности и площадью Δ -двуугольника той же высоты h (см. задачу 98а).

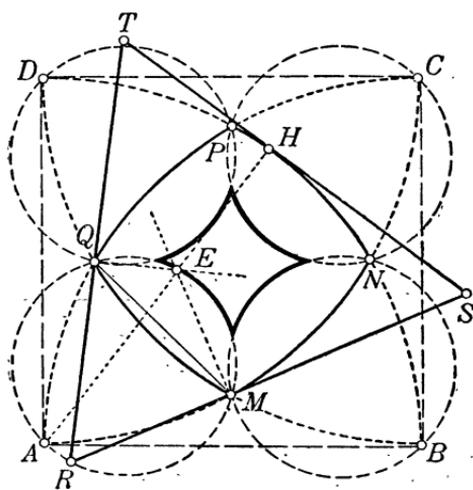
б) Обозначим точку пересечения отрезка AH с окружностью, проходящей через точки A , R , M и Q , через E (см. черт. 282). Тогда ER есть диаметр окружности, ибо $\angle EAR$ — прямой ($EA \perp ST$, $AR \parallel ST$). Отсюда следует, что углы EMR и EQR прямые, т. е. перпендикуляры, восставленные в точках M , Q , H к сторонам треугольника RST , пересекаются в одной точке E .

Найдем теперь геометрическое место точек E . Диаметр RE окружности $MRAQE$ не зависит от положения кривой внутри треугольника: хорда MQ постоянной длины стягивает в этой окружности дугу в 120° . Можно доказать, что длина отрезка RE равна $2\sqrt{2-\sqrt{3}}h$, где h — сторона квадрата или высота треугольника RST . Геометрическое место, которое описывает точка E , когда рассматриваемая Δ -кривая вращается внутри равностороннего треугольника, изображено на черт. 283, а.

Очевидно, что $\angle MEQ = 180^\circ - \angle MRQ = 120^\circ$. Отсюда следует, что геометрическое место, которое описывает точка E , когда равносторонний треугольник вращается, оставаясь все время описанным вокруг Δ -кривой $MNPQ$, имеет вид, изображенный на черт. 283, б.



а)

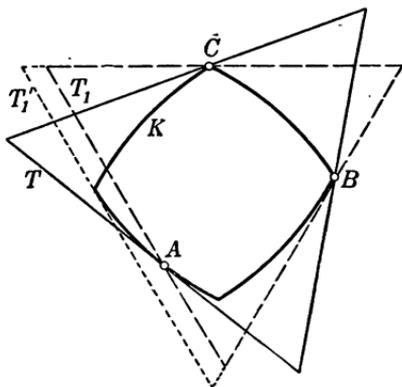


б)

Черт. 283.

100. Пусть K — произвольная Δ -кривая, T — описанный вокруг нее равносторонний треугольник, A, B, C — точки соприкосновения сторон треугольника T и кривой K (черт. 284). Пусть далее T_1 — произвольный равносторонний треугольник, стороны которого проходят через точки A, B и C . Нам нужно доказать, что высота треугольника T_1 не больше высоты треугольника T .

Действительно, пусть T'_1 — треугольник, описанный вокруг кривой K , стороны которого параллельны и одинаково направлены со сторонами треугольника T_1 . Треугольник T'_1 заключает треугольник T_1 (ибо точки A, B, C принадлежат кривой и, следовательно, лежат внутри треугольника T'_1 или на его контуре). Значит, высота треугольника T_1 не превосходит высоты треугольника T'_1 , а высота последнего равна высоте треугольника T в силу определения Δ -кривой.



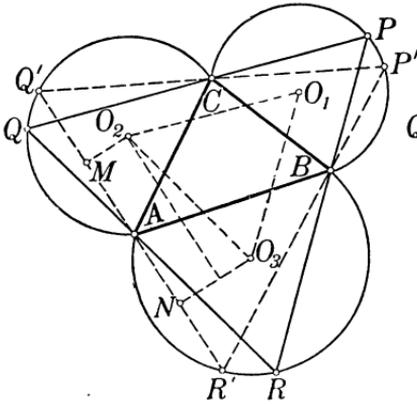
Черт. 284.

101. Начнем с решения следующей вспомогательной задачи: *вокруг данного треугольника ABC описать равносторонний треугольник PQR наибольшего возможного размера.*

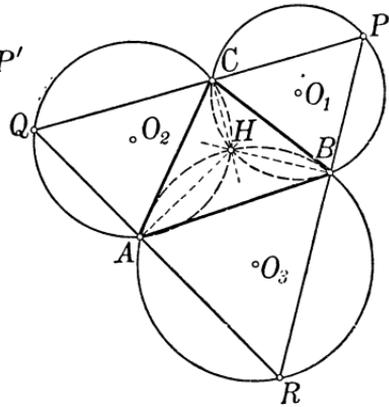
Решение этой последней задачи несложно. Опишем прежде всего на сторонах треугольника ABC вне этого треугольника дуги, вмещающие углы в 60° (черт. 285). Теперь для того, чтобы построить какой-либо равносторонний треугольник, описанный вокруг ABC , нам достаточно провести какую-нибудь прямую $Q'R'$, проходящую через точку A , концы которой расположены на дугах, построенных на отрезках AC и AB ; прямые $Q'C$ и $R'B$ пересекутся в точке P' третьей дуги и образуют равносторонний треугольник $P'Q'R'$, описанный вокруг ABC .

Для того чтобы построить **н а и б о л ь ш и й** из всех описанных около $\triangle ABC$ равносторонних треугольников, нам следует найти

наибольшую общую хорду дуг окружностей, построенных на отрезках AC и AB , проходящую через точку A пересечения этих дуг. Пусть $Q'R'$ есть какая-то общая хорда этих двух дуг, проходящая через A (см. черт. 285). Опустим из центров O_2 и O_3 двух рассматриваемых окружностей перпендикуляры O_2M и O_3N на прямую $Q'R'$. При этом $MA = \frac{1}{2} Q'A$, $AN = \frac{1}{2} AR'$, следовательно, $MN = \frac{1}{2} Q'R'$. Но из рассмотрения прямоугольной трапеции O_2O_3NM легко



Черт. 285.



Черт. 286.

вывести, что $MN \leq O_2O_3$, причем $MN = O_2O_3$ только в том случае, когда $Q'R' \parallel O_2O_3$. Таким образом, равносторонний треугольник PQR будет наибольшим в том случае, когда $QR \parallel O_2O_3$; в этом случае $QR = 2O_2O_3$. Аналогично показывается, что если PQR есть наибольший равносторонний треугольник, описанный вокруг ABC , то $PR \parallel O_1O_3$, $PQ \parallel O_1O_2$, где O_1 есть центр окружности, построенной на отрезке BC .

Отметим теперь, что если PQR есть наибольший равносторонний треугольник, описанный вокруг треугольника ABC , то перпендикуляры, восставленные в точках A , B и C к соответствующим сторонам треугольника PQR , пересекаются в одной точке. Действительно, из нашего построения следует, что эти перпендикуляры представляют собой не что

иное, как общие хорды рассматриваемых в процессе доказательства окружностей с центрами O_1 , O_2 и O_3 . Но нетрудно видеть, что эти три окружности пересекаются в одной точке H . В самом деле, обозначим через H точку пересечения двух из этих окружностей, построенных на отрезках AB и BC . Если точка H расположена внутри треугольника ABC , то $\angle ANB = \angle BNC = 120^\circ$, отсюда

$$\angle AHC = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$$

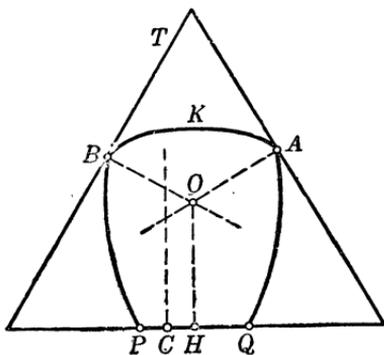
и, следовательно, H лежит и на третьей окружности (черт. 286). Аналогично доказывается, что H лежит и на третьей окружности в том случае, когда эта точка расположена вне треугольника; в этом случае из трех углов ANB , BNC , CNA два равны 60° , а третий равен 120° .

Очевидно, что точка H и будет точкой пересечения трех общих хорд рассматриваемых окружностей, т. е. точкой пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A , B и C к соответствующим сторонам треугольника PQR .

Из последнего замечания непосредственно следует требуемый результат, так как в силу задачи 100 описанный вокруг Δ -кривой K равносторонний треугольник PQR , соприкасающийся с кривой в точках A , B и C , есть наибольший равносторонний треугольник, описанный вокруг треугольника ABC .

102. Пусть некоторая дуга PQ Δ -кривой K является прямолинейным отрезком, а T — описанный вокруг K равносторонний треугольник, одна сторона которого имеет с кривой K общий отрезок PQ (черт. 287).

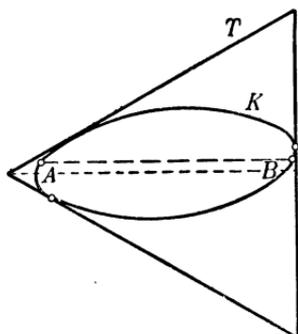
Пусть две другие стороны треугольника T соприкасаются с кривой в некоторых T точках A и B , а O — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к сторонам треугольника. Опустим из O перпендикуляр OH на третью сторону треугольника, и пусть C — точка отрезка PQ , отличная от точки H . Тогда



Черт. 287.

три перпендикуляра, восстановленных к сторонам треугольника в точках A , B , C соприкосновения этих сторон с Δ -кривой, не пересекаются в одной точке, что противоречит задаче 101.

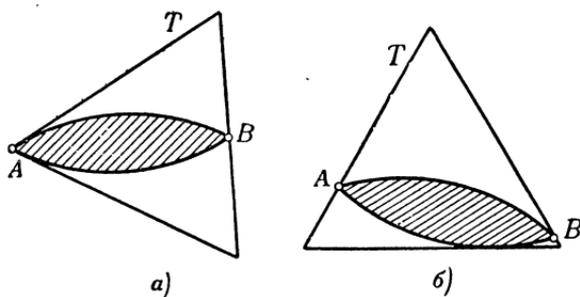
103. Пусть A и B — две точки Δ -кривой K , T — описанный вокруг K равносторонний треугольник, высота которого параллельна отрезку AB (черт. 288). Очевидно, что AB не превосходит высоты треугольника T , т. е. высоты h Δ -кривой.



Черт. 288.

Пусть теперь расстояние между точками A и B равно h (черт. 289, *a*). В этом случае точка A должна совпадать с вершиной треугольника T , откуда следует, что угол при точке A не может быть более 60° (точнее, угол каждой полукасательной — см. выше стр. 24 — в точке A с прямой AB не может быть более 30°). Отсюда нетрудно вывести,

что при движении кривой K внутри треугольника T точка A все время скользит по сторонам треугольника (см. черт. 289, *б*);

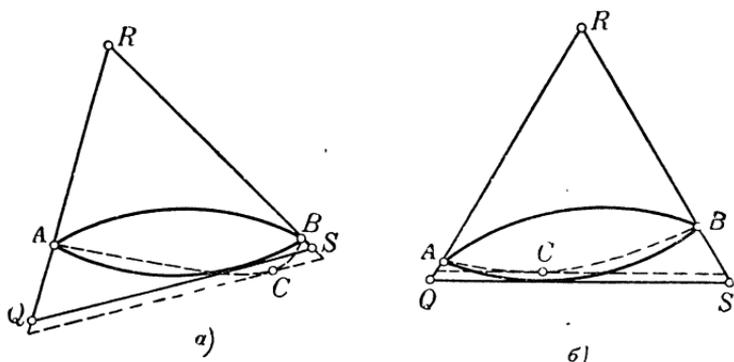


Черт. 289.

то же самое относится и к точке B . Таким образом, точки A и B будут скользить по сторонам T , а третья сторона T будет касаться дуги AB кривой K (если точки A и B будут скользить по сторонам RQ и RS треугольника T , то дуга

кривой K , расположенная с той же стороны отрезка AB , что и вершина R треугольника T , останется внутри T (черт. 290), так как полукасательные в точках A и B образуют с хордой AB углы, не большие 30° .

Проведем Δ -двуугольник D , угловые точки которого совпадают с точками A и B . Если какая-либо точка C кривой K находится вне D , то вокруг K можно описать равносторонний треугольник, высота которого больше отрезка AB (см. черт. 290, a ; отметим, что высота равностороннего



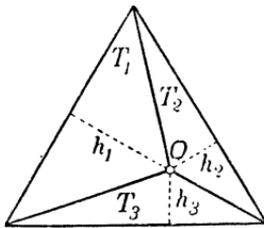
Черт. 290.

треугольника, описанного вокруг Δ -двуугольника D , равна AB); если какая-либо точка C кривой K находится внутри D , то вокруг K можно описать равносторонний треугольник, высота которого меньше AB (черт. 290, $б$). И тот и другой случаи противоречат определению Δ -кривой. Следовательно, Δ -кривая K должна совпадать с D .

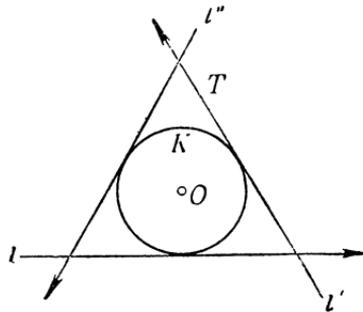
104. Если угол при точке A Δ -кривой K не превосходит 60° , то существует описанный вокруг K равносторонний треугольник, одна вершина которого совпадает с A (черт. 289, a). Если B есть точка соприкосновения противоположной стороны треугольника T с Δ -кривой K , то расстояние AB не может быть меньше высоты h треугольника T . В силу результата задачи 103 мы можем заключить, что AB равно h и что K есть Δ -двуугольник.

105. При доказательстве этой теоремы нам понадобится следующее предложение. Пусть T — равносторонний треугольник, h — высота, O — произвольная внутренняя точка, h_1 , h_2 и h_3 — длины перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника; тогда *сумма $h_1 + h_2 + h_3$ равна высоте h треугольника T .*

Действительно, соединим точку O с вершинами треугольника T (черт. 291). Треугольник T разобьется на три треугольника T_1 , T_2 , T_3 , площади которых равны соответственно



Черт. 291.



Черт. 292.

$\frac{1}{2} ah_1$, $\frac{1}{2} ah_2$ и $\frac{1}{2} ah_3$, где a — длина стороны треугольника T . Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} ah_1 + \frac{1}{2} ah_2 + \frac{1}{2} ah_3 = \frac{1}{2} ah,$$

и значит,

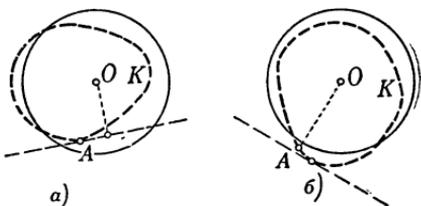
$$h_1 + h_2 + h_3 = h.$$

Пусть теперь K — произвольная Δ -кривая высоты h , которая переходит в себя при повороте вокруг некоторой внутренней точки O на 120° (очевидно, что ни одна выпуклая кривая не может перейти в себя при повороте на 120° вокруг внешней точки), l — произвольная опорная прямая кривой K . Опишем вокруг K равносторонний треугольник T , одной из сторон которого является прямая l (черт. 292). При повороте на 120° вокруг O кривая K переходит в себя; описанный вокруг K равносторонний треугольник T переходит при этом в описанный вокруг K равносторонний треугольник, сто-

роны которого имеют те же направления, что и стороны T (при повороте на 120° направления сторон равностороннего треугольника не меняются), т. е. переходит в себя. Обозначим две отличные от l стороны треугольника T через l' и l'' . При повороте вокруг O на 120° l переходит в l' , а $l' — в l''$. Выше мы показали, что сумма расстояний от O до прямых l , l' и l'' равна высоте h треугольника T ; так как прямые l , l' , l'' переходят друг в друга при повороте вокруг O , то они должны быть равноудалены от O , т. е. расстояние каждой из них от O равно $\frac{1}{3}h$. Но l есть произвольная опорная прямая кривой K . Таким образом, все опорные прямые кривой K удалены от точки O на одно и то же расстояние $\frac{1}{3}h$.

Отсюда уже нетрудно усмотреть, что K есть окружность радиуса $\frac{1}{3}h$ с

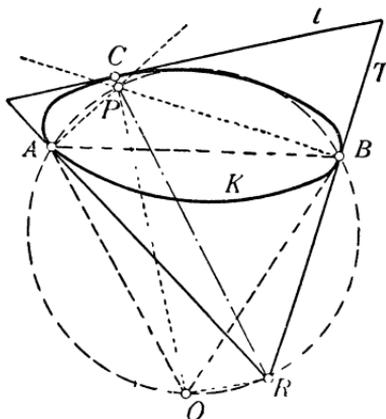
центром в точке O . Действительно, если бы какая-либо точка A кривой K заключалась внутри этой окружности, то расстояние от точки O до опорной прямой кривой K , проходящей через точку A , было бы меньше $\frac{1}{3}h$ (черт. 293, *a*). С другой стороны, если бы какая-либо точка A кривой K была бы расположена вне этой окружности, то опорная прямая кривой K , перпендикулярная к отрезку OA , была бы удалена от точки O на расстояние, большее $\frac{1}{3}h$ (черт. 293, *б*).



Черт. 293.

106. Фактически мы уже пользовались этим предложением при решении задач 98 и 99. Пусть O — точка, составляющая с A и B три вершины равностороннего треугольника (и расположенная по ту же сторону прямой AB , что и вершина R треугольника T — точка пересечения сторон, проходящих через A и B), P — точка пересечения перпендикуляров, составленных в точках A , B , C к сторонам T (черт. 294; см. задачу 101). Тогда углы AOB и ARB равны 60° , а угол APB

равен 120° , и потому точки A, O, R, B, P лежат на одной окружности (отсюда следует, что угол ORB равен 120° , и потому прямая OR параллельна стороне l треугольника T , проходящей через точку C).



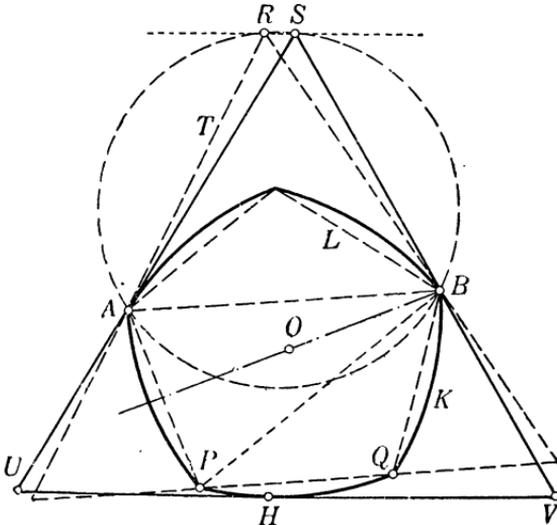
Черт. 294.

Далее, прямая RP является диаметром рассматриваемой окружности, и следовательно, $OP \perp OR$, $OP \perp l$. Отсюда вытекает, что точка C лежит на продолжении OP . Таким образом, мы видим, что OC параллельно высоте треугольника T , проходящей через вершину R , и что длина OC равна длине h высоты треугольника T .

107. Пусть L — правильный n -угольник (n не делится на 3), PQ — некоторая его сторона, T — описанный вокруг L равносторонний треугольник, одна из сторон которого содержит отрезок PQ . Пусть две другие стороны треугольника T соприкасаются с многоугольником L в точках A и B (черт. 295). Обозначим через R вершину треугольника T — точку пересечения сторон, проходящих через A и B , и пусть $RP = RQ = h$. Из точки R , как из центра, проведем дугу окружности радиуса h , соединяющую точки P и Q . Такими же дугами соединим каждые две другие соседние вершины многоугольника L . Мы утверждаем, что составленная из проведенных n дуг окружностей выпуклая кривая K является Δ -кривой высоты h .

Докажем это. Пусть SUV — равносторонний треугольник, две стороны SU и SV которого проходят через точки A и B , а третья сторона UV касается дуги PQ в некоторой точке H (см. черт. 295). Очевидно, что четыре точки A, B, S, R лежат на одной окружности (так как $\angle ARB = \angle ASB = 60^\circ$), следовательно, $\angle RSB = \angle RSA + \angle ASB = 120^\circ$, и потому прямые RS и UV параллельны ($\angle RSV + \angle SVU = 180^\circ$). Отсюда вытекает, что высота треугольника SUV равна отрезку RH , т. е. h .

Далее, треугольник SUV содержит кривую K внутри себя. Для доказательства заметим, что треугольник ABP всегда будет равнобедренным. Действительно, если $n = 3m + 1$, то



Черт. 295.

между A и B заключено m сторон правильного n -угольника L , так же как и между A и P , и между B и Q ; если $n = 3m + 2$, то между A и B и между B и P заключено по $m + 1$ сторон n -угольника L , а между A и $P - m$ сторон. (Отметим, что здесь используется то обстоятельство, что n не кратно трем: если бы было $n = 3m$, то треугольник ABP не был бы равнобедренным!) Поэтому, если точка H совпадает с P (или с Q), то треугольник SUV касается не только дуги PQ , но и дуги кривой с концом A или B . Так, например, на черт. 295 $n = 5 = 3 \cdot 1 + 2$, и если точка H совпадает с P , то треугольник SUV оказывается расположенным симметрично относительно прямой OB и его сторона SU касается в этом положении дуги кривой K , проходящей через точку A .

Отсюда можно заключить, что при любом положении точки H на дуге PQ дуги кривой K с концами в точках A

и B , расположенные по ту же сторону прямой AB , что и вершина S треугольника SUV , остаются внутри треугольника SUV . То, что и две другие дуги кривой K с концами в точках A и B остаются все время внутри треугольника SUV , является еще более очевидным. Таким образом, при любом положении точки H на дуге PQ вся кривая K остается внутри треугольника SUV .

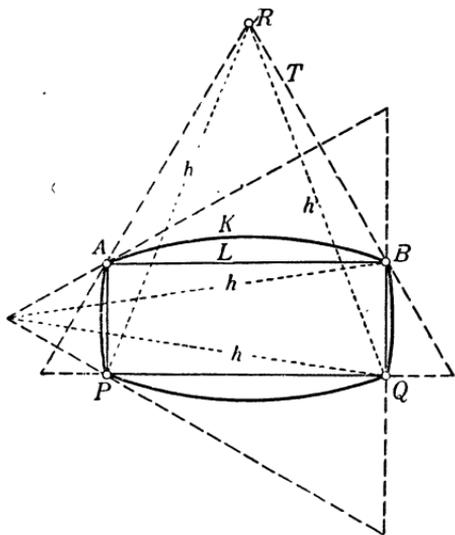
Рассматривая все треугольники, две стороны которых проходят через угловые точки кривой K , а третья касается одной из дуг этой кривой, мы получаем все описанные вокруг K равносторонние треугольники. Так как высота каждого такого треугольника равна h , то K есть Δ -кривая. При $n=4$ мы приходим к кривой, описанной в задаче 99. Можно считать, что такое же построение в случае $n=2$ приводит к Δ -двуугольнику (вместо правильного n -угольника L в этом случае надо исходить из отрезка).

Можно показать, что не существует никакой Δ -кривой, составленной из $n=3m$ равных дуг окружностей радиуса h , построенных на сторонах правильного n -угольника; предоставляем читателю самостоятельно провести это доказательство.

Заметим еще, что в нашем построении нет необходимости требовать, чтобы многоугольник L был обязательно правильным. Нам надо только, чтобы n -угольник L (n не делится на 3) обладал следующим свойством. Пусть T — описанный вокруг L равносторонний треугольник, одна из сторон которого содержит сторону PQ многоугольника L , а две другие — содержат вершины A и B многоугольника L . Обозначим через R вершину равностороннего треугольника, построенного на отрезке AB по другую сторону от прямой AB , чем точки P и Q (черт. 296).

Для того чтобы описанное выше построение было возможным, необходимо, чтобы для каждой стороны PQ многоугольника L отрезки RP и RQ были бы равны между собой и чтобы общая длина этих отрезков (обозначим ее через h) не зависела от выбора стороны PQ многоугольника L . Нетрудно видеть, что этому условию могут удовлетворять многоугольники, и не являющиеся правильными. Соединим каждые две соседние вершины многоугольника L дугой окружности радиуса h . Мы утверждаем, что полученная при этом кривая K есть Δ -кривая высоты h .

Доказательство этого предложения сходно с приведенным выше доказательством для случая, когда многоугольник L является правильным многоугольником. Первая часть доказательства вообще не использует того, что многоугольник L является правильным, и она проводится в нашем более общем случае в точности так же, как это было сделано выше. При доказательстве же того, что кривая K всегда заключается внутри равностороннего треугольника T , две стороны которого проходят через угловые точки A и B кривой K , а третья сторона касается дуги окружности PQ в некоторой точке H , мы использовали равенство двух сторон треугольника ABP (или ABQ), которое не имеет места, если многоугольник L не является правильным. Поэтому эту часть доказательства нам надо провести заново; мы изложим ее вкратце.

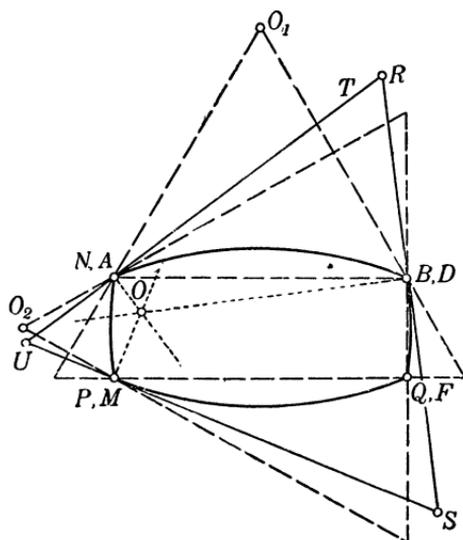


Черт. 296.

Прежде всего легко видеть, что три перпендикуляра, восстановленных в точках A , B и P к сторонам равностороннего треугольника T , две стороны которого проходят через точки A и B , а третья касается дуги окружности PQ в точке P , пересекаются в одной точке O (для доказательства этого предложения тот факт, что многоугольник L — неправильный, не имеет значения; важно то, что точки A , O_1 , R , B (черт. 297) и точка O пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к соответствующим сторонам T , лежат на одной окружности). Пусть AD и BF — две такие стороны многоугольника L , что точки F , B , D , A , Q , P (D может совпадать с B , Q — с F) следуют друг за другом на многоугольнике L в циклическом порядке (см. черт. 297). Выберем из

двух углов RAD и SBF наименьший — пусть это будет, например, угол SBF . Тогда нетрудно видеть, что равносторонний треугольник T_1 , одна сторона которого содержит отрезок BF , а две другие проходят через A и P , будет описан вокруг многоугольника L .

Рассмотрим равносторонний треугольник T' , две стороны которого проходят через точки A и P , а третья касается



Черт. 297.

дуги BF (радиуса h) в точке B . Так как прямая BO проходит через точку O_2 (см. черт. 297), то треугольник T' совпадает с T . Таким образом, когда точка H касания стороны треугольника T с дугой PQ совпадает с точкой P , треугольник T будет касаться не только дуги PQ , но и дуги BF . Отсюда следует, что при любом положении точки H на дуге PQ дуга BF будет заключена внутри треугольника T . Тем более дуга AD заключена внутри треугольника T . Аналогично, рассматривая положение треугольника T , когда точка H совпадает с Q , мы заключим, что дуги MA и NB кривой K (вершины B, N, A, M, P, Q многоугольника L следуют друг за

другом в циклическом порядке) при любом положении точки H на дуге PQ находятся внутри треугольника T .

Таким образом, при любом положении точки H на дуге PQ кривой K треугольник T содержит внутри себя всю кривую K . Но, рассматривая все равносторонние треугольники, две стороны которых проходят через угловые точки кривой K , а третья касается одной из дуг этой кривой, мы получим все равносторонние треугольники, описанные вокруг кривой K . Так как все эти треугольники имеют высоту h , то K есть Δ -кривая.

Для вычисления длины этой кривой заметим, что если дуга PQ стягивает центральный угол α , то при перемещении точки H от Q к P треугольник T поворачивается на угол α . Но при повороте равностороннего описанного треугольника на угол 120° он занимает прежнее положение, только вершины его меняются местами, а точка H , в которой одна из сторон треугольника касается дуги кривой K , описывает при таком повороте всю кривую K . Значит, сумма центральных углов всех дуг окружности радиуса h , из которых составлена кривая K , равна 120° , а следовательно, длина кривой K равна $\frac{2\pi h}{3}$.

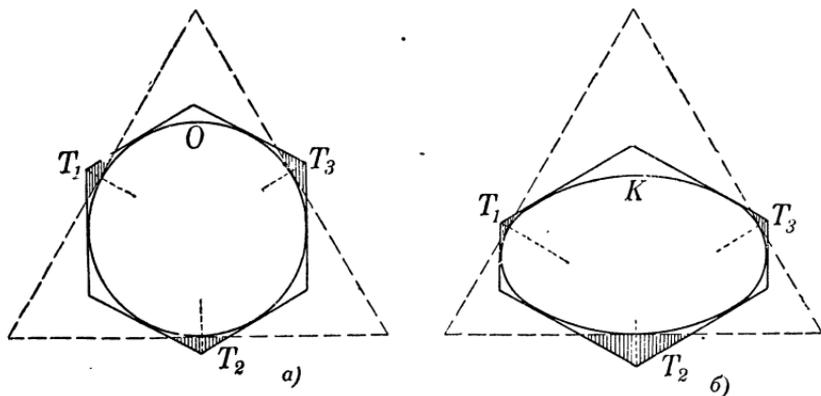
108. Пусть K есть произвольная Δ -кривая высоты h , а O — окружность, вписанная в равносторонний треугольник с высотой h . Докажем, что $3 \cdot 2^n$ -угольники с равными углами, описанные вокруг K и O , имеют одинаковые периметры. Доказательство будем вести по индукции.

Равносторонние треугольники (т. е. $3 \cdot 2^0$ -угольники с равными углами), описанные вокруг K и O , не только имеют одинаковые периметры, но и равны между собой. Пусть теперь $3 \cdot 2^n$ -угольники с равными углами, описанные вокруг K и O , имеют равные периметры; докажем, что в таком случае и $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольники с равными углами, описанные вокруг K и O , также будут иметь равные периметры.

Проведем равносторонние треугольники T , описанные вокруг K и O , одна из сторон которых перпендикулярна к биссектрисе одного из углов $3 \cdot 2^n$ -угольников (черт. 298). Эти треугольники отсекают от каждого $3 \cdot 2^n$ -угольника по три подобных треугольника T_1, T_2, T_3 .

Докажем, что сумма высот треугольников T_1, T_2, T_3 одинакова для каждой из кривых K и O .

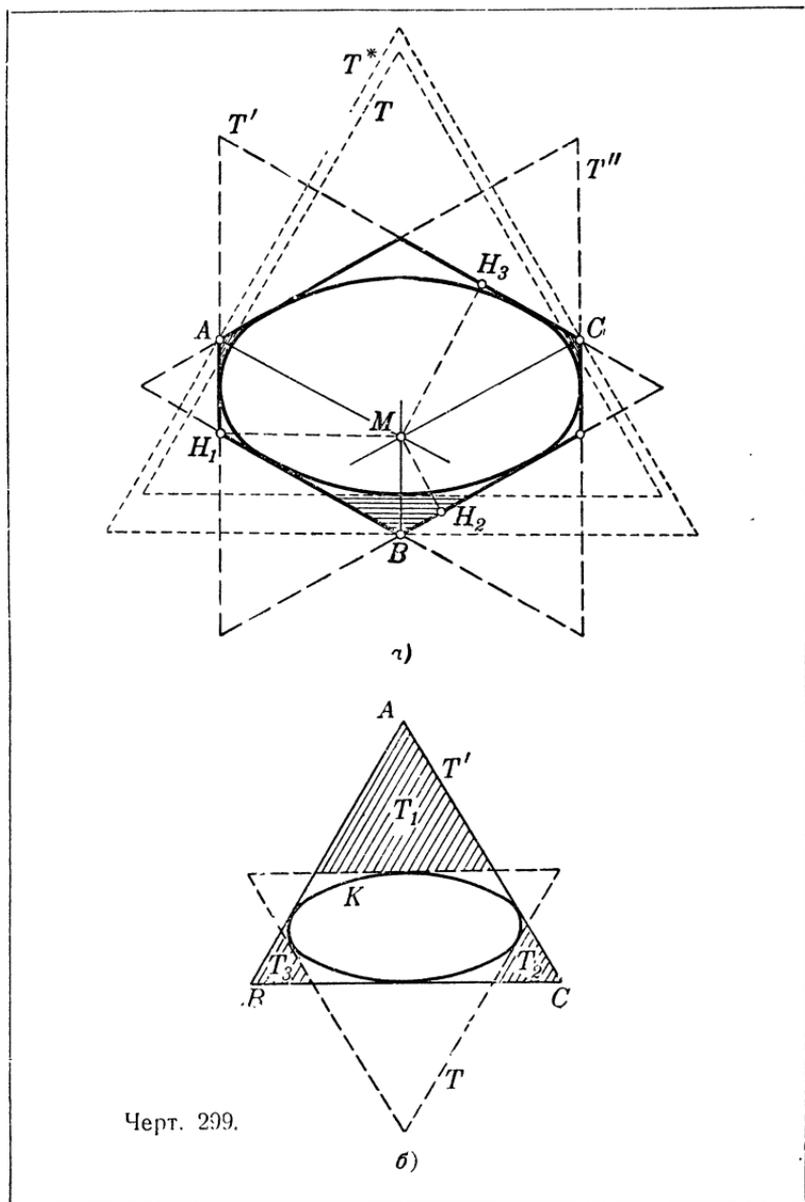
Для доказательства продолжим те стороны $3 \cdot 2^n$ -угольника, которые пересекаются треугольником T ; мы получим два описанных равносоставленных треугольника T' и T'' , пересеченных



Черт. 298.

треугольником T (черт. 299, *а*). Точки пересечения сторон треугольников T' и T'' , являющиеся вершинами треугольников T_1, T_2, T_3 , обозначим через A, B, C . Проведем треугольник T^* со сторонами, параллельными сторонам треугольника T и проходящими через точки A, B, C ; согласно построению треугольника T стороны T^* являются биссектрисами острых углов, образованных сторонами треугольников T' и T'' в точках A, B и C (см. черт. 299, *а*). Наконец, проведем перпендикуляры к сторонам треугольника T^* в точках A, B, C (биссектрисы тупых углов, образованных сторонами T' и T''). Нетрудно видеть, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке M .

Действительно, пусть перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника T в точках A и B , пересекаются в M . Тогда AM есть геометрическое место точек, равноудаленных от проходящих через точку A сторон треугольников T' и T'' ; BM — геометрическое место точек, равноудаленных от проходящих через точку B сторон треугольников T' и T'' . Так как треугольники T' и T'' , описанные вокруг Δ -кривой K (или O), равны между собой, то сумма расстояний от



Черт. 299.

произвольной точки, являющейся внутренней как для T' , так и для T'' , до трех сторон T' равна сумме расстояний от той же точки до трех сторон T'' (см. вспомогательное предложение в начале решения задачи 105). Отсюда мы можем заключить, что точка M — пересечение прямых AM и BM — равноудалена также от проходящих через точку C сторон треугольников T' и T'' , т. е. что MC перпендикулярна к стороне треугольника T^* , проходящей через точку C .

Сумма $AM + BM + CM$, с одной стороны, равна высоте треугольника T^* , а с другой стороны, равна высоте h треугольника T , сложенной с суммой высот треугольников T_1 , T_2 и T_3 . Но высота треугольника T^* будет одной и той же для обеих кривых K и O . В самом деле, если MH_1 , MH_2 , MH_3 — перпендикуляры, опущенные из точки M на стороны треугольника T' ($MH_1 + MH_2 + MH_3 = h$ — высоте треугольника T), то

$$\begin{aligned} MH_1 &= MA \cdot \cos \angle AMH_1, & MH_2 &= MB \cdot \cos \angle BMH_2, \\ & & MH_3 &= MC \cdot \cos \angle CMH_3. \end{aligned}$$

Но

$$\angle AMH_1 = \angle BMH_2 = \angle CMH_3,$$

так как каждый из них равен половине угла между соответствующими сторонами треугольников T' и T'' ; этот угол (обозначим его через 2α) — один и тот же для кривых K и O . Таким образом,

$$MA + MB + MC = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

Отсюда следует, что и сумма высот треугольников T_1 , T_2 и T_3 будет одной и той же для Δ -кривой K и окружности O (она будет равна $\frac{h}{\cos \alpha} - h = h \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$).

Это рассуждение надо несколько изменить, если $n = 0$ (переход от описанного треугольника к описанному шестиугольнику). В этом случае мы не имеем пары треугольников T' и T'' , а только единственный треугольник T' , вершинами которого являются точки A , B , C (черт. 299, б). Однако и в этом случае сумма высот треугольников T_1 , T_2 и T_3 будет одной и той же для кривых K и O ; доказательство этого

предложения (мало отличающееся от вышеприведенного) предоставляется читателю.

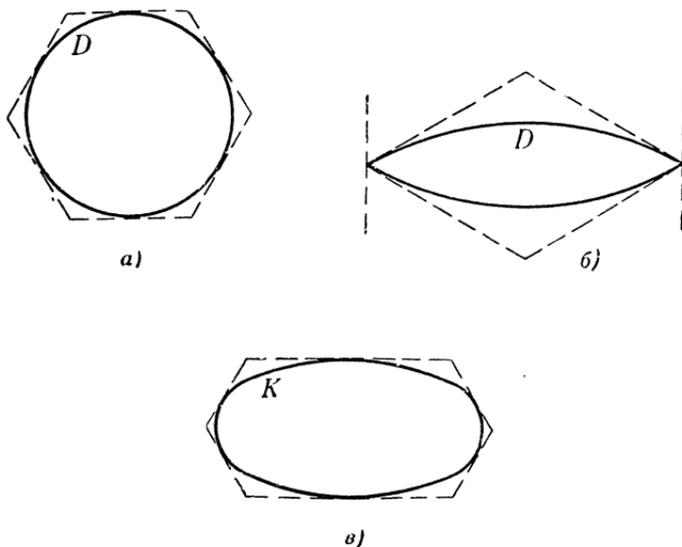
Из доказанного следует, что если периметры $3 \cdot 2^n$ -угольников, описанных вокруг K и O , были равны, то будут равны и периметры многоугольников, которые получаются из этих $3 \cdot 2^n$ -угольников, если отбросить треугольники T_1 , T_2 и T_3 (сравните с решением задачи 88 из § 7). Но если таким же образом отрезать по треугольнику около каждой вершины $3 \cdot 2^n$ -угольника с равными углами, то мы приходим к описанному $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольнику. Таким образом показывается, что из равенства периметров описанных вокруг K и O $3 \cdot 2^n$ -угольников с равными углами следует и равенство периметров описанных $3 \cdot 2^{n+1}$ -угольников с равными углами, чем и заканчивается рассуждение по индукции.

Отсюда путем предельного перехода можно вывести, что кривые K и O имеют одинаковую длину, равную $\frac{2\pi h}{3}$ (сравните с решением задачи 88).

109. Пусть K — произвольная Δ -кривая, D — Δ -двуугольник и O — окружность; пусть высоты всех трех кривых равны h . Опишем вокруг O шестиугольник с равными углами (он будет обязательно правильным шестиугольником; черт. 300, a). Вокруг D опишем ромб с углами в 60° и 120° , вершины острых углов которого находятся в вершинах D (черт. 300, b). Ромб D мы будем рассматривать как шестиугольник с равными углами, две противоположные стороны которого равны нулю. Мы утверждаем, что вокруг кривой K всегда можно описать шестиугольник с равными углами, площадь которого будет не больше площади правильного шестиугольника, описанного вокруг O , и не меньше площади ромба, описанного вокруг D (черт. 300, v). Доказательство этого утверждения составляет самую трудную часть решения задачи; мы его отложим на конец, а пока примем это без доказательства.

Опишем вокруг O правильный шестиугольник, вокруг D — ромб и вокруг K — шестиугольник с равными углами, площадь которого заключается между площадью правильного шестиугольника и площадью ромба. Будем последовательно удваивать число сторон многоугольников с равными углами,

описанных вокруг K , D и O , начиная с описанных шестиугольников, подобно тому как мы это делали при решении задачи 108. При этом каждый раз будем отсекаем от описанных вокруг K , D и O многоугольников по три подобных между собой треугольника, сумма высот которых одинакова для всех трех кривых (см. решение предыдущей задачи). Сумма площадей этих трех отсекаемых треугольников пропорциональна



Черт. 300.

сумме квадратов их высот. Но если сумма $h_1 + h_2 + h_3$ постоянна, то $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ имеет наименьшее значение, если $h_1 = h_2 = h_3$, и наибольшее значение, если $h_1 = h_2 = 0$ ¹⁾.

Нетрудно видеть, что первый случай будет иметь место, если Δ -кривая является окружностью O (это легко выводится

¹⁾ Справедливость этого утверждения сразу следует из формул

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = \frac{1}{3} [(h_1 + h_2 + h_3)^2 + (h_1 - h_2)^2 + (h_1 - h_3)^2 + (h_2 - h_3)^2],$$

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = (h_1 + h_2 + h_3)^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 2h_2h_3.$$

из свойства окружности переходить в себя при повороте вокруг центра на 120° ; при таком повороте T_1 перейдет в T_2 , а T_2 — в T_3). Второй случай будет иметь место, если Δ -кривая является Δ -двуугольником (ибо каждый описанный вокруг Δ -двуугольника равносторонний треугольник проходит через обе угловые точки, которые при $n \geq 1$ являются вершинами всех описанных вокруг Δ -двуугольника $3 \cdot 2^n$ -угольников, т. е. два отсекаемых треугольника обратятся в точки).

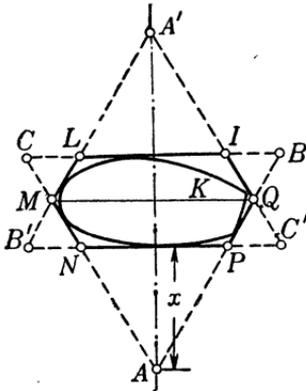
Итак, от $3 \cdot 2^n$ -угольника, описанного вокруг окружности, мы отсекаем каждый раз не больше, чем от $3 \cdot 2^n$ -угольников, описанных вокруг K и D , а от ромба, описанного вокруг D , мы отсекаем каждый раз не меньше, чем от $3 \cdot 2^n$ -угольников, описанных вокруг K и O . Отсюда следует, что для каждого значения n $3 \cdot 2^n$ -угольник, описанный вокруг K , имеет не большую площадь, чем $3 \cdot 2^n$ -угольник, описанный вокруг O , и не меньшую площадь, чем $3 \cdot 2^n$ -угольник, описанный вокруг D . В пределе мы получаем, что площадь, ограниченная кривой K , не больше площади, ограниченной O , и не меньше площади, ограниченной D .

Уточнив это рассуждение, нетрудно даже доказать, что площадь, ограниченная окружностью O , больше площади, ограниченной Δ -кривой K , если только K отлична от окружности, и что площадь, ограниченная Δ -двуугольником D , меньше площади, ограниченной Δ -кривой K , если только K отлична от Δ -двуугольника. Это доказательство очень похоже на заключительное рассуждение в решении задачи 89 из § 7; при этом приходится использовать задачи 105 и 104 настоящего параграфа. Мы предоставляем читателю самостоятельно провести полное доказательство.

Теперь нам осталось еще показать, что действительно *вокруг каждой Δ -кривой K можно описать шестиугольник с равными углами, площадь которого заключается между площадью правильного шестиугольника, описанного вокруг окружности O , и площадью ромба с углами 60° и 120° , описанного вокруг Δ -двуугольника D* (здесь мы считаем, что все три Δ -кривые D , O и K имеют одинаковую высоту h).

Опишем вокруг K шестиугольник $ILMNPQ$ с равными углами, имеющий ось симметрии, проходящую через середины противоположных сторон IL и NP (черт. 301; существование

такого описанного шестиугольника было доказано в задаче 30б) из § 3). Определим площадь этого шестиугольника. Продолжив его стороны до их пересечения, мы получим два описанных вокруг Δ -кривой K правильных треугольника ABC и $A'B'C'$, высота каждого из которых равна h . Ось симметрии шестиугольника перпендикулярна к основаниям BC и $B'C'$ треугольников и проходит через их вершины



Черт. 301.

A и A' . Обозначим расстояние от вершины A до стороны NP через x ; $0 \leq x \leq h$. Если площадь треугольника ABC равна S , то площадь треугольника ANP равна $\frac{x^2}{h^2}S$, площадь треугольника AMQ равна $\frac{(h+x)^2}{4h^2}S$ (расстояние от A до A' равно $h+x$, а расстояние от A до MQ равно $\frac{h+x}{2}$) и площадь трапеции $MNPQ$ равна

$$\left[\frac{(h+x)^2}{4h^2} - \frac{x^2}{h^2} \right] S = \frac{h^2 + 2hx - 3x^2}{4h^2} S.$$

Следовательно, площадь шестиугольника $ILMNPQ$ равна $\frac{h^2 + 2hx - 3x^2}{2h^2} S$. Представив последнее выражение в виде

$$\frac{h^2 + 2hx - 3x^2}{2h^2} S = \frac{\frac{4}{3}h^2 - \left(\frac{h}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x \right)^2}{2h^2} S,$$

мы убедимся в том, что эта площадь будет наибольшей в том случае, когда $\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}x$, или $x = \frac{h}{3}$. Но в этом случае, как легко видеть, шестиугольник $ILMNPQ$ будет правильным. Таким образом, мы заключаем, что всякий шестиугольник с равными углами, описанный вокруг выпуклой кривой K и имеющий ось симметрии, проходящую через середины парал-

лельных сторон, будет иметь не бóльшую площадь, чем описанный вокруг O правильный шестиугольник ¹⁾. -

Далее, так как случаю описанного вокруг D ромба (см. черт. 300, б) отвечает значение $x=0$, то площадь шестиугольника $ILMNPQ$ будет не меньше площади этого ромба, если

$$\left| \frac{h}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x \right| \leq \left| \frac{h}{\sqrt{3}} \right|, \quad \text{т. е.} \quad \frac{h}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x \geq -\frac{h}{\sqrt{3}};$$

$$x \leq \frac{2}{3}h,$$

и меньше ее, если $x > \frac{2}{3}h$.

В случае, когда $x \leq \frac{2}{3}h$, рассматриваемый шестиугольник уже удовлетворяет нашим требованиям: его площадь не больше площади описанного вокруг O правильного шестиугольника и не меньше площади описанного вокруг D ромба.

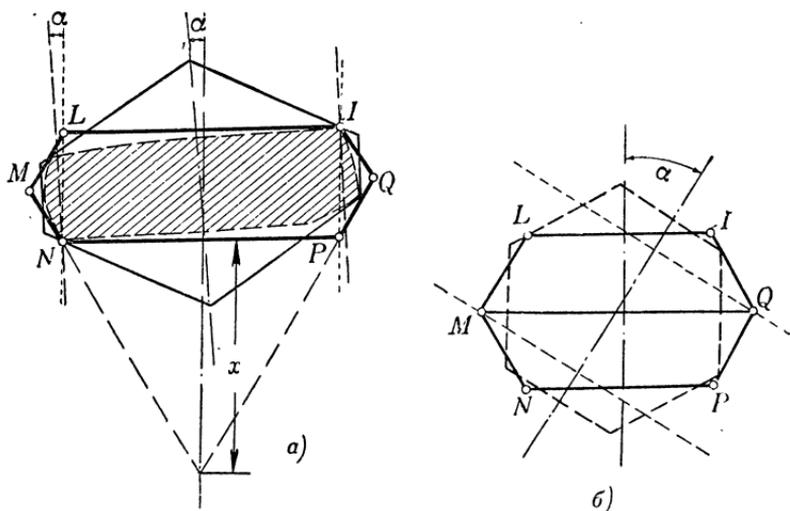
Таким образом, остается только рассмотреть случай, когда вокруг K можно описать симметричный шестиугольник с равными углами, для которого $x > \frac{2}{3}h$. Докажем, что в этом случае вокруг K можно описать еще и другой симметричный шестиугольник с равными углами, которому уже будет отвечать значение x , меньшее $\frac{2}{3}h$.

Действительно, пусть $ILMNPQ$ — шестиугольник, для которого $x > \frac{2}{3}h$ (черт. 302); точки соприкосновения сторон IL , LM , MN , NP , PQ и QI этого шестиугольника с кривой K обозначим соответственно через I' , L' , M' , N' , P' и Q' . Рассмотрим теперь описанный вокруг K симметричный шестиугольник, ось симметрии которого составляет с прямой MQ угол, не бóльший 60° (существование такого шестиугольника следует из примечания к решению задачи 30б) из § 3). Мы утверждаем, что расстояние между сторонами такого шестиугольника,

¹⁾ Нетрудно показать, что каждый описанный вокруг K шестиугольник с равными углами (не обязательно имеющий ось симметрии) будет иметь не бóльшую площадь, чем описанный вокруг O правильный шестиугольник.

перпендикулярными к оси симметрии, больше $\frac{h}{3}$; а это и означает, что этому шестиугольнику соответствует значение $x < \frac{2}{3}h$, т. е. что площадь рассматриваемого шестиугольника не меньше площади описанного вокруг D ромба.

В самом деле, пусть ось рассматриваемого шестиугольника образует с прямой MQ угол $\alpha \leq 30^\circ$; тогда перпендикулярные к оси стороны этого шестиугольника образуют



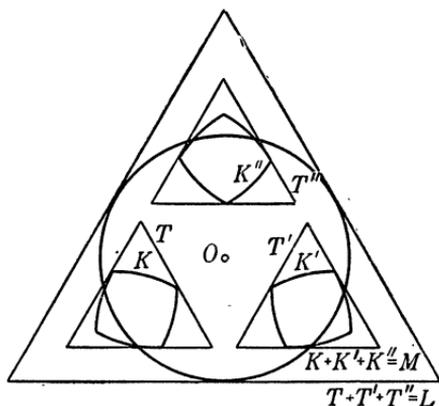
Черт. 302.

с осью шестиугольника $ILMNPQ$ тот же угол $\alpha \leq 30^\circ$ и, следовательно, соприкасаются с дугами $L'M'$ и $P'Q'$ кривой K (черт. 302, а). Расстояние между этими сторонами только уменьшится, если мы их сдвинем так, чтобы они проходили через вершины I и N (или через вершины L и P). Но расстояние между параллельными прямыми, проходящими через точки I и N и заключенными соответственно внутри углов PIQ и $LNМ$ (а этому условию будут удовлетворять прямые, параллельные рассматриваемым сторонам шестиугольника), будет, как легко видеть, наименьшим в том случае, когда эти прямые совпадают с прямыми LN и PI . В этом же край-

нем случае расстояние между этими прямыми равно IL , т. е. больше даже $\frac{2}{3}h$ (это следует из того, что для шестиугольника $ILMNPQ$ $x > \frac{2}{3}h$).

Предположим теперь, что ось рассматриваемого шестиугольника образует с прямой MQ такой угол α , что $60^\circ \geq \alpha \geq 30^\circ$; перпендикулярные к оси стороны этого шестиугольника образуют с осью шестиугольника $ILMNPQ$ тот же угол α и, следовательно, касаются дуг $I'L'$ и $N'P'$ (или $Q'I'$ и $M'N'$) кривой K (черт. 302, б). Поэтому расстояние между этими сторонами только уменьшится, если мы их сдвинем параллельно так, чтобы они проходили через точки Q и M . При этом расстояние между сдвинутыми прямыми, как легко подсчитать, будет наименьшим в том случае, когда эти прямые образуют с осью шестиугольника $ILMNPQ$ угол 60° . В этом же крайнем случае расстояние между прямыми равно $\frac{MQ}{2}$, т. е. больше $\frac{1}{3}h$, так как $MQ > \frac{2}{3}h$ (это следует из того, что для шестиугольника $ILMNPQ$ $x > \frac{2}{3}h$). Этим самым мы полностью доказали сформулированное в начале решения утверждение.

110. Пусть K — произвольная Δ -кривая, K' и K'' — кривые, получающиеся из K поворотом вокруг некоторой точки O на углы 120° , соответственно 240° , T — некоторый равносторонний



Черт. 303.

треугольник, описанный вокруг кривой K . При повороте вокруг точки O на 120° , соответственно на 240° , треугольник T переходит в треугольник T' , соответственно T'' , описанный вокруг кривой K' , соответственно K'' (черт. 303);

высоты этих двух треугольников (получаемых из треугольника T вращением) также равны h , а стороны параллельны сторонам треугольника T . Сумма $T + T' + T''$ представляет собой равносторонний треугольник с высотой $3h$, стороны которого имеют те же направления, что и стороны треугольника T (см. § 4, задача 43). В силу задачи 44 из § 4 треугольник $L = T + T' + T''$ описан вокруг кривой $M = K + K' + K''$; таким образом, каждый равносторонний треугольник, описанный вокруг кривой M , имеет одну и ту же высоту $3h$; другими словами, M является Δ -кривой высоты $3h$. Но M переходит в себя при повороте вокруг точки O на 120° (при таком повороте K переходит в K' , K' — в K'' , K'' — в K , а $M = K + K' + K''$ остается на месте). Следовательно, M есть окружность радиуса h (см. задачу 105).

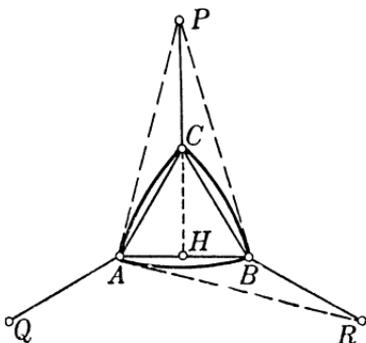
Так как длина окружности M (равная $2\pi h$) должна быть равна сумме длин кривых K , K' и K'' (см. § 4, стр. 59), т. е. утроенной длине K , то длина K равна $\frac{2\pi h}{3}$ (теорема Барбье для Δ -кривых).

111. Пусть K — такая выпуклая кривая, что сумма $M = K + K' + K''$, где K' и K'' получаются из кривой K поворотом вокруг некоторой точки O соответственно на 120° и 240° , является окружностью радиуса h , L — равносторонний треугольник, описанный вокруг кривой M , T , T' , T'' — равносторонние треугольники с тем же самым направлением сторон, описанные вокруг кривых K , K' , K'' (см. черт. 303). Треугольники T' и T'' получаются из треугольника T поворотом вокруг точки O на 120° , соответственно 240° , т. е. они равны $L = T + T' + T''$ (см. задачу 44 из § 4). Высота треугольника L , описанного вокруг окружности радиуса h , равна $3h$; высота треугольника T , описанного вокруг кривой K , в три раза меньше высоты треугольника L , т. е. равна h . Отсюда следует, что K есть Δ -кривая высоты h .

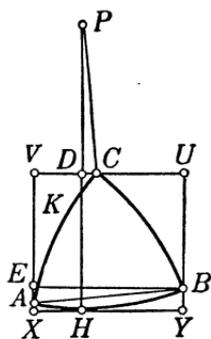
112. То, что все Δ -кривые высоты h , составленные из дуг окружностей радиуса h , имеют одну и ту же длину $\frac{2\pi h}{3}$, фактически было уже доказано в конце решения задачи 107.

Так как длина произвольной Δ -кривой K высоты h равна пределу длин Δ -кривых высоты h , составленных из дуг окружностей радиуса h , пределом которых эта кривая является (см. § 4, стр. 65), то всякая Δ -кривая K высоты h имеет длину, равную $\frac{2\pi h}{3}$.

113. Пусть ABC — данный треугольник, P, Q, R — центры дуг, указанных в условии задачи, K — кривая, образованная этими дугами (черт. 304). Определим углы этой кривой в угловых точках A, B, C . Проведем высоту CH треугольника ABC и отрезки AP и BP (P — центр дуги AB). Тогда



Черт. 304.



Черт. 305.

угол APC равен половине угла ACH ($\triangle ACP$ — равнобедренный), т. е. $\angle APC = 15^\circ$, а потому и $\angle PAC = 15^\circ$, а $\angle APB = 30^\circ$. Отсюда следует, что AP есть касательная к дуге AC (угол между касательной к дуге AC в точке A и хордой AC равен 15°) и угол между касательными AP и AR к дугам AC и AB в точке A равен 90° . Таким образом, углы кривой K равны 90° ; следовательно, все три угловые точки лежат на контуре любого описанного вокруг K прямоугольника, три стороны описанного прямоугольника проходят через точки A, B и C , а четвертая касается одной из дуг окружностей.

Пусть теперь $UVXY$ — описанный вокруг K прямоугольник, сторона XY которого соприкасается с дугой AB кривой K в точке H (черт. 305). Проведем отрезок HP (P — центр

дуги AB), пересекающий сторону UV прямоугольника в точке D , а также отрезок BE , параллельный сторонам XU и UV прямоугольника. Тогда прямоугольные треугольники ABE и CPD равны (по гипотенузе и острому углу), и поэтому $DP = BE = XY$. Отсюда $PH = PD + DH = XY + YU$, а последнее выражение есть полупериметр прямоугольника $XYUV$. Итак, периметр каждого описанного вокруг кривой K прямоугольника равен удвоенному отрезку PH .

Если периметр описанного прямоугольника равен $4l$, то радиусы дуг, образующих кривую K , равны $2l$, а центральный угол, отвечающий каждой дуге, равен 30° (см. выше). Отсюда следует, что длина кривой K равна четверти окружности радиуса $2l$, т. е. πl .

Чтобы вычислить площадь, ограниченную кривой K , обозначим сторону треугольника ABC через a . Тогда (см. черт. 304)

$$PH = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right),$$

$$PA = \sqrt{PH^2 + AH^2} = a \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2l.$$

Таким образом,

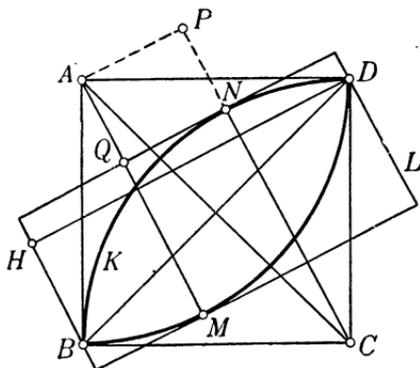
$$a = \frac{2l}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2l \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Площадь же, ограниченная кривой K , равна утроенной площади сегмента AB плюс площадь треугольника ABC , т. е. равна

$$l^2 (\pi - 3) + l^2 \sqrt{3} (2 - \sqrt{3}) = l^2 (\pi + 2\sqrt{3} - 6) \approx 0,60l^2.$$

114. Пусть $ABCD$ — квадрат, l — длина его стороны, K — кривая, образованная двумя дугами BD окружностей, указанная в условии задачи (черт. 306). Пусть L — прямоугольник, описанный вокруг K . Для того чтобы вычислить периметр прямоугольника L , проведем диагонали квадрата $ABCD$, отрезок DH , перпендикулярный к стороне прямоугольника L , проходящей через D , и отрезки AM и CN , где M и N — точки касания сторон L с дугами кривой K (M лежит на дуге с центром A , N — на дуге с центром C). Пусть AM пересе-

кает сторону L , проходящую через точку N , в точке Q . Наконец, опустим из точки A перпендикуляр AP на прямую CN .



Черт. 306.

Из равенства прямоугольных треугольников CAP и BDH (по гипотенузе и острому углу) заключаем, что $DH = CP$. Периметр прямоугольника L равен

$$2(DH + QM) = 2(CP + QM).$$

Но легко видеть, что

$$QM = AM - AQ, \quad CP = CN + NP = AM + AQ, \\ CP + QM = 2AM,$$

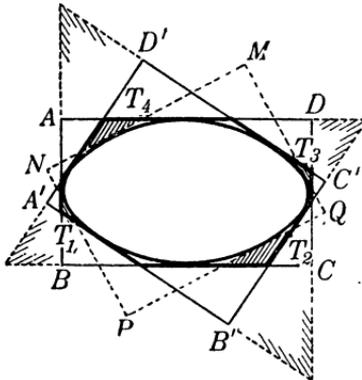
и периметр L равен учетверенному отрезку AM , т. е. $4l$.

Длина кривой K равна длине полуокружности радиуса l , т. е. равна πl . Площадь, ограниченная кривой K , равна сумме площадей двух секторов окружности радиуса l с центральным углом в 90° минус площадь квадрата $ABCD$, т. е. равна

$$\frac{\pi l^2}{2} - l^2 = l^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,57l^2.$$

115. Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — два прямоугольника, описанных вокруг кривой K и имеющих равные периметры $4l$. Восемь прямых, являющихся сторонами этих прямоугольников, образуют описанный вокруг K восьмиугольник. Пусть M, NPQ —

описанный вокруг K прямоугольник, одна из сторон которого перпендикулярна к биссектрисе какого-либо угла восьмиугольника (черт. 307). Прямоугольник $MNPQ$ отсекает от восьмиугольника четыре подобных треугольника T_1, T_2, T_3 и T_4 (заштрихованных на чертеже). Докажем, что сумма высот этих треугольников зависит только от величины l и от того, какой угол образуют между собой соответствующие стороны прямоугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$.

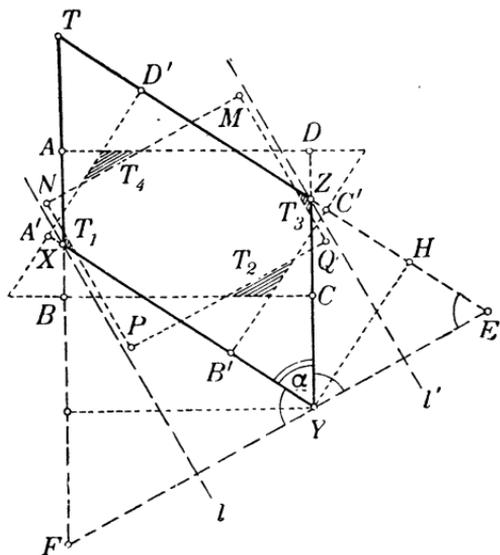


Черт. 307.

Для доказательства рассмотрим два параллелограмма: параллелограмм, образованный прямыми $A'B', AB, C'D', CD$, и параллелограмм, образованный прямыми $B'C', BC, A'D', AD$. Как видно из черт. 307, каждая из пары смежных сторон одного из прямоугольников является высотой одного из параллелограммов, поэтому сумма четырех высот обоих параллелограммов равна $4l$. Стороны первого параллелограмма пересечены прямыми MN и PQ , стороны второго — прямыми NP и MQ (см. черт. 307). Сумма расстояний между прямыми MN и PQ и между MQ и NP (половина периметра прямоугольника $MNPQ$) равна $2l$.

Рассмотрим какой-то один из этих параллелограммов $XYZT$ и пересекающие его стороны прямые MQ и NP ; по построению эти прямые параллельны биссектрисам двух противоположных углов параллелограмма (черт. 308). Через вершины X, Z параллелограмма $XYZT$, принадлежащие отсекаемому от него треугольникам T_1 и T_3 , проведем прямые l и l' , параллельные PN и MQ . Сумма высот треугольников T_1 и T_3 равна, очевидно, расстоянию между прямыми l и l' минус расстояние между прямыми PN и MQ . Из вершины Y опустим перпендикуляры на прямые l и l' и продолжим их до пересечения в точках E, F с продолжениями сторон TZ и TX параллелограмма $XYZT$. Сумма опущенных на боковые стороны высот двух подобных равнобедренных треугольников

YZE и YXF равна сумме высот параллелограмма $XYZT$. Через эту сумму легко выражается сумма оснований YE и FY треугольников, т. е. удвоенное расстояние между прямыми l и l' . Действительно, обозначим известный угол при вершине рассматриваемых двух равнобедренных треугольников YZE и



Черт. 308.

YXF через α (этот угол равен углу XYZ параллелограмма $XYZT$, т. е. углу между сторонами $A'B'$ и DC прямоугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$). В таком случае угол между основанием YE треугольника YZE и высотой YH , опущенной на сторону ZE , равен $\frac{\alpha}{2}$ (он равен углу между высотой, опущенной на основание, и боковой стороной — это есть углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и, следовательно, $YE = \frac{YH}{\cos \frac{\alpha}{2}}$. Следовательно, расстояние между l и l' равно

сумме высот параллелограмма $XYZT$, деленной на $2 \cos \frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, сумма высот треугольников T_1 и T_3 равна

$$\frac{H_1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} - h_1,$$

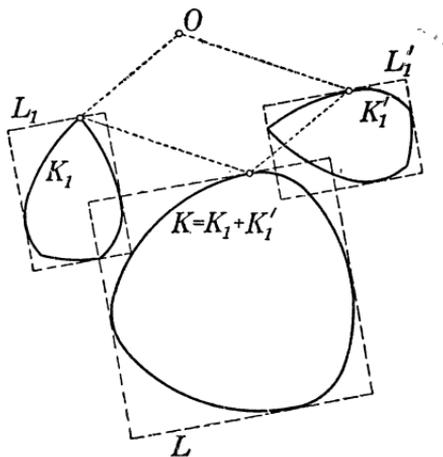
где H_1 — сумма высот параллелограмма $XYZT$, h_1 — расстояние между прямыми MQ и PN . Прделавав то же самое построение с параллелограммом, образованным боковыми сторонами треугольников T_2 и T_4 , и учитывая, что сумма высот этого параллелограмма и высот параллелограмма $XYZT$ равна $4l$, а сумма расстояний между прямыми MN и PQ и между прямыми PN и MQ равна $2l$, мы получим окончательно, что сумма высот четырех треугольников T_1 , T_2 , T_3 и T_4 равна

$$2l \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) = \frac{2l \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Пусть теперь O — окружность радиуса $\frac{1}{2}l$; периметры всех описанных вокруг нее квадратов равны $4l$. Опишем вокруг K и O прямоугольники; периметры этих прямоугольников равны. Далее, рассмотрим новые описанные вокруг O и K прямоугольники, стороны которых перпендикулярны к биссектрисам углов первоначальных. Суммы высот треугольников, отсекаемых от первоначального прямоугольника, будут одинаковы для обеих кривых K и O , и получившиеся описанные восьмиугольники будут иметь равные периметры. (Предоставляем читателю самостоятельно провести соответствующее рассуждение, несколько более простое, чем вышеприведенное.) В обще периметры 2^n -угольников с равными углами, описанных вокруг кривых K и O , равны между собой. Доказывается это по индукции: предполагается, что равны периметры 2^{n-1} -угольников с равными углами, описанных вокруг K и O , и показывается, что в таком случае будут равны также периметры 2^n -угольников с равными углами, описанных вокруг K и O (сравните с решением задачи 88 из § 7).

После этого с помощью предельного перехода легко заключить, что кривые K и O имеют равную длину, а именно πl .

116. Пусть кривая K_1 обладает тем свойством, что периметры всех описанных вокруг нее прямоугольников равны $4l$; K'_1 — кривая, получающаяся из K_1 поворотом на 90° вокруг некоторой точки O ; пусть также $K = K_1 + K'_1$, а L — некоторый описанный вокруг K прямоугольник (черт. 309). Рассмотрим описанные вокруг K_1 и K'_1 прямоугольники L_1 и L'_1 , стороны которых параллельны сторонам L .

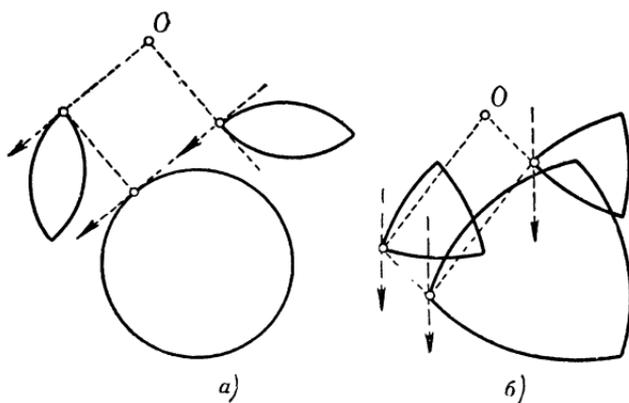


Черт. 309.

Прямоугольник L'_1 , очевидно, получается из прямоугольника L_1 поворотом на 90° вокруг точки O ; периметр прямоугольника L_1 равен $4l$ в силу свойств кривой K_1 . Из определения сложения многоугольников (см. задачу 43 из § 4) легко выводится, что сумма $L_1 + L'_1$ представляет собой квадрат со стороной $2l$. Но в силу задачи 44 из § 4 прямоугольник L равен сумме $L_1 + L'_1$. Таким образом, мы видим, что каждый прямоугольник L , описанный вокруг кривой K , является квадратом со стороной $2l$, откуда следует, что K есть кривая постоянной ширины $2l$.

Обратно, пусть сумма $K = K_1 + K'_1$, где K'_1 получается из K_1 поворотом вокруг какой-то точки O на 90° , есть кривая постоянной ширины $2l$. Пусть L_1 — какой-то прямоуголь-

ник, описанный вокруг кривой K_1 . При повороте вокруг O на 90° прямоугольник L_1 перейдет в прямоугольник L'_1 , описанный вокруг кривой K'_1 ; при этом прямоугольники L_1 и L'_1 имеют, очевидно, одно и то же направление сторон. Отсюда в силу задачи 44 из § 4 следует, что сумма $L = L_1 + L'_1$ есть прямоугольник, описанный вокруг кривой K , т. е. в силу того, что K есть кривая постоянной ширины, L есть квадрат со стороной $2l$. Но периметр квадрата L равен сумме периметров прямоугольников L_1 и L'_1 (см. задачу 43 из § 4), т. е.



Черт. 310.

так как прямоугольники L_1 и L'_1 равны между собой (L'_1 получается из L_1 поворотом на 90° вокруг точки O), периметр квадрата L равен удвоенному периметру прямоугольника L_1 . Отсюда следует, что все описанные вокруг K_1 прямоугольники L_1 имеют один и тот же периметр $\frac{4 \cdot 2l}{2} = 4l$, что и требовалось доказать.

Из полученного результата и теоремы Барбье для кривых постоянной ширины (см. задачу 88 из § 7; см. также доказательство теоремы Барбье, составляющее содержание задачи 92 из § 7) непосредственно следует обобщенная теорема Барбье. Действительно, равные между собой кривые K_1 и K'_1 , сумма которых есть кривая постоянной ширины K , имеют

одинаковую длину. Но так как в силу теоремы Барбье длина кривой K равна $2\pi l$ и так как сумма длин кривых K_1 и K'_1 равна длине кривой K (см. § 4, стр. 59), то удвоенная длина кривой K_1 должна равняться $2\pi l$ и, следовательно, длина кривой K_1 равна πl .

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что если K_1 есть кривая из задачи 114, то $K_1 + K'_1$ есть окружность (черт. 310, а); если же K_1 есть кривая из задачи 113, то $K_1 + K'_1$ есть треугольник Релло (черт. 310, б).

Редактор *А. Э. Рывкин.*
Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*
Корректор *А. С. Бакулова.*

Подписано к печати 14/VIII 1951 г.
Бумага $84 \times 108^{1/2}$ _{зв.} 5,375 бум. л. 17,63
печ. л. 18,73 уч.-изд. л. 42 490 тип. зн.
в печ. л. Тираж 25 000 экз. Т-06324.
Цена книги 5 р. 60 к. Переплет 1 р.
Заказ № 2504.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфиздата при Совете
Министров СССР.
Москва, Вадовая, 28.

Цена 6 р. 60 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1951