БИБЛИОТЕКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

ВЫПУСК 8

И. М. ЯГЛОМ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

II

ЛИНЕЙНЫЕ И КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1956

11-3-1

Яглом Исаак Моисеевич.
Геометрические преобразования II.

Редактор *Э. П. Тихонова.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.* Корректор *Н. В. Казанская.*

Сдано в набор 9/II 1956 г. Подписано к печати 12/V 1956 г. Бумага 84×108[1]/32. Физ. печ. л. 19,13. Условн. печ. л. 31,37. Уч.-изд. л. 31,42. Тираж 15 000 экз. Т-04410. Цена книги 10 р. 45 к. Заказ № 1402.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская ул., 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова. Москва, Ж-54, Валовая, 28.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий второй том «Геометрических преобразований» посвящён так называемым линейным и круговым преобразованиям, которые проходятся на математических отделениях пединститутов и университетов, но совсем не затрагиваются программой средней школы (в вузах эти преобразования чаще называют проективными и конформными). Однако книга эта адресована в первую очередь читателям, так или иначе связанным именно со средней школой, — учащимся и учителям школ, студентам и преподавателям институтов. Соответственно этому основная цель её состоит в том, чтобы показать тесную связь рассматриваемых здесь преобразований с элементарной геометрией; от изложения более высоких теорий, связанных с геометрическими преобразованиями, автору пришлось отказаться почти полностью, так как книга и без того оказалась более толстой, чем это ему бы хотелось. Единственные значительные отступления в область «высшей геометрии» представляют собой приложения к главам I и II, посвящённые неевклидовой геометрии Лобачевского; впрочем, и здесь автор стремился к максимальной элементарности, так что эти приложения также должны быть вполне доступны интересующимся математикой школьникам старших классов.

Существенную часть содержания книги составляют задачи, сопровождаемые решениями, приведёнными в конце. Основной текст нигде не зависит от задач; однако нам кажется, что ознакомление по крайней мере с частью из них будет очень значительно способствовать глубине понимания материала книги. Все задачи относятся к элементарной геометрии; исключение представляют лишь задачи приложений, которые преследуют цель хотя бы немного ознакомить читателей с конкретными теоремами неевклидовой геометрии. Решения задач иногда сопровождаются замечаниями общего характера, относящимися к методике использования рассматриваемых в книге преобразований; в одном случае автор не удержался от соблазна приложить к решению задачи более обширное примечание, указывающее возможность довольно широкого развития изложенных в книге теорий (см. решение задачи 300). Второй том книги в основном не зависит от первого; в частности, первый том вполне может быть заменён планиметрической частью какого-либо из «больших» учебников элементарной геометрии («Элементарная геометрия» Ж. Адамара или «Курс элементарной геометрии» Д. И. Перепёлкина). Однако введение к третьей части книги и приложения к главам I и II этой части непосредственно апеллируют к введениям к первой и второй частям первого тома. Также и в части терминологии второй том, естественно, весьма строго следует за первым. Для того чтобы облегчить читателям возможные обращения к первому тому книги, в конце помещён предметный указатель, относящийся сразу к обоим томам.

Каждая глава третьей части представляет собой самостоятельное целое; вторую из них вполне можно читать раньше первой. Введение к части третьей, а также приложения к главам I и II при первом чтении книги могут быть опущены; однако было бы жалко, если бы читатель совсем пропустил их. В первой главе может быть опущен также последний параграф, стоящий в книге особняком. Во второй главе можно считать дополнительными последние три параграфа; читать их можно в любом порядке. Из этих параграфов мне бы хотелось в первую очередь порекомендовать читателям весьма принципиальное заключение § 4 (стр. 246—253; мелкий шрифт здесь, как и всюду в книге, можно считать необязательным), а также изящный (хоть и большой по объёму) § 5, который, вероятно, многим покажется довольно неожиданным.

И. М. Яглом

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЛИНЕЙНЫЕ И КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

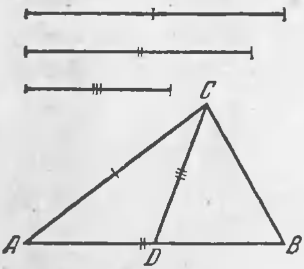
ВВЕДЕНИЕ

ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЯ? (ОКОНЧАНИЕ)

Во введении к первой части книги мы определили геометрию как науку, изучающую те свойства геометрических фигур, которые не меняются при движениях. Во введении ко второй части мы дали новое определение геометрии как науки, изучающей свойства геометрических фигур, не меняющиеся при преобразованиях подобия. Возникает вопрос о том, совпадают ли эти определения полностью, т. е. являются ли они различными определениями одной и той же науки, или же существуют две различные геометрии, причём во введении к первой части мы говорили об одной из них, а во введении ко второй части — о другой. Мы покажем здесь, что в действительности правильным является второй ответ на наш вопрос, т. е. что существуют две разные геометрии (хотя и очень близкие между собой). Логическим развитием этого факта явится предложение о существовании *многих* различных геометрий; одной из наиболее интересных геометрий, существенно отличающейся от обычной, является неевклидова геометрия Лобачевского, которой будут посвящены приложения к главам I и II настоящей части.

Во введении ко второй части мы признали нецелесообразным предложенное ранее определение геометрии как науки, изучающей свойства фигур, не меняющиеся при движениях. При этом мы основывались на следующих доводах. Движения — это такие преобразования плоскости, которые не меняют расстояния между двумя точками. Но величина, выражающая расстояние, зависит от той единицы длины, при помощи которой это расстояние измеряется. А так как геометрическое предложение не может зависеть от выбора единицы длины, то отсюда следует, что в геометрических теоремах не могут фигурировать длины отрезков, а только отношения этих длин; это и означает, что подобные между собой фигуры не различимы для геометрии.

Однако это рассуждение, вполне верное, когда речь идёт о *теоремах* элементарной геометрии, перестаёт оставаться справедливым при переходе к геометрическим *задачам*, в частности — к задачам на построение. В этих задачах длина отрезка задаётся не числом, а при помощи отрезка, равного данному. Так, например, если в задаче требуется построить треугольник ABC, зная длины двух его сторон AC и AB и длину медианы CD, то это значит, что нам даны отрезки, равные отрезкам AC, AB и CD (черт. 1). Таким образом, здесь у нас фигурируют непосредственно длины отрезков, а не отношения длин, и теперь подобные (но не обязательно равные!) треугольники уже не будут для нас равноправны: если один из этих треугольников является решением нашей задачи, то другие (не равные ему) условиям задачи не удовлетворяют. Итак, мы видим, что, в то время как все теоремы элементарной геометрии охватываются определением геометрии, которое было дано во введении ко второй части книги, задачи на построение выпадают из этих рамок (они существенно опираются на определение геометрии, приведённое во введении к первой части). Это обстоятельство и является главной причиной того, что в учебнике Киселёва изложение базируется на первом определении геометрии и соответственно этому начинается с теорем о равенстве треугольников: если считать, что подобные треугольники не различимы между собой, то эти теоремы являются бессодержательными, так как само понятие равенства в этом случае не имеет смысла.



Черт. 1.

Таким образом, мы приходим к выводу, что во введении к первой части и во введении ко второй части мы определили *две различные* геометрии. При этом все свойства фигур во второй геометрии (которую удобно называть *геометрией подобий*) относятся также и к первой геометрии (к *геометрии движений*): действительно, каждое свойство фигуры, сохраняющееся при преобразованиях подобия, сохраняется также и при движениях. Однако обратное предложение неверно: в геометрии движений фигуры имеют больше свойств, чем в геометрии подобий (в геометрии движений расстояние между двумя точками фигуры является её геометрическим свойством, а в геометрии подобий можно рассматривать только отношения расстояний). Это обстоятельство является причиной того, что в геометрии подобий имеется значительно меньше задач на построение, чем в геометрии движений [1]).

Вдумаемся теперь в то, каким образом мы пришли к определению наших двух геометрий. Геометрия движений определялась как наука, изучающая свойства геометрических фигур, сохраняющиеся при движениях; в этой геометрии две фигуры, переводимые одна в другую движением, т. е. две равные фигуры, являются неразличимыми. Геометрия подобий определялась как наука, изучающая свойства геометрических фигур, сохраняющиеся при преобразованиях подобия; в этой геометрии «равными», т. е. не различимыми между собой, являются подобные фигуры. Но можно дальше пойти по этому пути, выбрав ещё какую-нибудь совокупность преобразований и объявив «равными» между собой в смысле новой геометрии фигуры, переводимые друг в друга преобразованиями нашей совокупности [2]). При этом мы придём к новой геометрии, которая определится как наука, изучающая свойства геометрических фигур, сохраняющиеся при преобразованиях выбранной нами совокупности геометрических преобразований.

Теперь мы подошли уже совсем близко к окончательному ответу на вопрос, стоящий в заголовке введений ко всем частям этой книги. Для того чтобы дать полное определение геометрии (или, точнее, определение множества различных

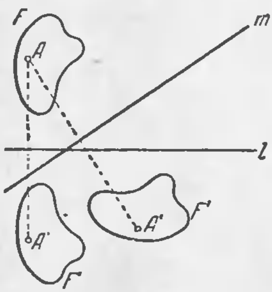
---

[1]) В геометрии подобий возможны лишь такие задачи на построение, в которых задаются какие-либо углы между линиями фигуры и отношения расстояний между её точками, так как в этой геометрии только углы и отношения расстояний являются геометрическими свойствами фигуры. Так, например, в геометрии подобий можно поставить задачу: построить треугольник ABC, зная угол A и отношения длин биссектрисы и высоты, проведённых из вершины B. При этом решить эту задачу — это значит найти какой-нибудь из множества подобных между собой треугольников (неразличимых в геометрии подобий), имеющих данный угол и данное отношение биссектрисы к высоте.

[2]) Примеры совокупностей преобразований более общих, чем преобразования подобия, читатель найдёт ниже в главах I и II этой части книги.

геометрий), нам осталось только выяснить, всякая ли совокупность геометрических преобразований может быть положена в основу определения геометрии.

Нетрудно понять, что ответ на последний вопрос является отрицательным. Так, например, нельзя определить «геометрии симметрий», т. е. науки, изучающей такие свойства геометрических фигур, которые одинаковы у двух фигур, симметричных относительно прямой, и **только у таких фигур** (свойства, не меняющиеся при симметриях относительно прямой). Действительно, в этой геометрии две фигуры F и F', симметричные относительно прямой l, должны были бы обладать одинаковыми «геометрическими свойствами», так же как и фигуры F и F'', симметричные относительно прямой m (черт. 2). В то же время свойства фигур F' и F'' должны быть уже различными (эти фигуры не симметричны между собой, а следовательно, «не равны» в смысле нашей геометрии). Но это противоречит тому, что свойства обеих фигур, как F', так и F'', совпадают со свойствами фигуры F.



Черт. 2.

После этого примера становится довольно ясным, какими свойствами должна обладать совокупность преобразований для того, чтобы, исходя из этих преобразований, можно было определить некоторую «геометрию». «Равенство» фигур определяется в нашей геометрии следующим образом: *фигура F' «равна» фигуре F в том и только в том случае, если F можно перевести в F' каким-либо преобразованием заданной совокупности преобразований.* Для того чтобы это «равенство» имело смысл, необходимо, очевидно, чтобы оно обладало следующими свойствами:

1° *каждая фигура F должна быть «равна» сама себе;*

2° *если фигура F' «равна» фигуре F, то и обратно, фигура F должна быть «равна» фигуре F';*

3° *если фигура F_1 «равна» фигуре F, а фигура F' «равна» фигуре F_1, то и фигура F' должна быть «равна» фигуре F.*

Эти условия заведомо выполняются, если рассматриваемая совокупность преобразований удовлетворяет следующим требованиям:

1° *совокупность преобразований содержит тождественное преобразование* (преобразование, оставляющее всякую фигуру на месте — переводящее её в себя);

2° *если в совокупность входит некоторое преобразование* П, *переводящее фигуру F в фигуру F', то в эту совокупность входит и противоположное преобразование P, переводящее фигуру F' в фигуру F* (черт. 3, *а*);

Черт. 3.

3° *если в совокупность входит преобразование* $П_1$, *переводящее фигуру F в фигуру F_1, и преобразование* $П_2$, *переводящее фигуру F_1 в фигуру F', то в эту совокупность входит также и преобразование* $П_3$, *переводящее фигуру F в фигуру F'* (*«сумма» первых двух преобразований*) (черт. 3,*б*).

Всякая совокупность преобразований, обладающая свойствами 1°—3°, называется **группой преобразований**. Так, например, совокупность движений или совокупность преобразований подобия образует группы преобразований. Совокупность вращений плоскости вокруг определённой точки O тоже составляет группу. Действительно:

1° тождественное преобразование можно рассматривать как вращение вокруг точки O на угол 0° (или 360°);

2° преобразование, противоположное вращению вокруг точки O на угол α, есть вращение вокруг той же точки на тот же угол α, но в противоположном направлении;

3° сумма вращений вокруг точки O сначала на угол α, а затем на угол β представляет собой вращение вокруг той же точки на угол $\alpha + \beta$.

Однако совокупность **всех** вращений плоскости уже не составляет группы: «сумма» двух вращений может оказаться уже не вращением, а параллельным переносом (см. § 2 гл. I первой части книги). Также не составляет группы и совокупность симметрий относительно всевозможных прямых плоскости: здесь не выполняются ни условие 3° («сумма» двух симметрий относительно прямых представляет собой уже не симметрию, а вращение или параллельный перенос; см. § 1 гл. II первой части), ни условие 1° (тождественное преобразование нельзя представить себе как симметрию относительно какой-либо прямой).

Теперь определение геометрии, которое мы дали выше, можно сформулировать так: *геометрия есть наука, изучающая свойства фигур, не меняющиеся при преобразованиях некоторой группы преобразований.* Согласно этому определению имеется не одна, а много геометрий; чтобы придти к какой-либо из них, достаточно выбрать каким-либо образом группу преобразований. Частными случаями рассматриваемых геометрий являются «геометрия движений» и «геометрия подобий», изучаемые в школе. В приложениях к главам I и II третьей части книги мы покажем, что и к неевклидовой геометрии Лобачевского можно также придти естественным путём, если исходить из приведённого общего определения геометрии.

Определение геометрии как науки, изучающей свойства фигур, не меняющиеся при преобразованиях какой-либо группы преобразований, также принадлежит немецкому математику Ф. Клейну. Несмотря на то, что это определение не является самым общим (им не охватываются некоторые важные разделы современной геометрии), оно оказалось очень полезным и сыграло важную роль в развитии науки. В частности, понятие группы преобразований ныне является одним из самых важных понятий всей современной математики [1]).

Элементарная геометрия изучает только те геометрические фигуры плоскости, которые образованы прямыми линиями и окружностями. Ниже мы покажем, что *преобразования подобия можно определить как такие преобразования плоскости, которые переводят каждую прямую линию в прямую линию и каждую окружность в окружность* (см. теорему 1 из § 4 гл. II, стр. 247). В последующих двух главах мы рассмотрим преобразования плоскости, переводящие прямые линии в прямые линии, но не обязательно окружности в окружности

---

[1]) Общему понятию **группы**, являющемуся основным в современной алгебре, посвящена хорошая популярная книга П. С. Александрова «Введение в теорию групп», Москва, Учпедгиз, 1951.

(такие преобразования мы будем называть **линейными преобразованиями**), и преобразования, переводящие окружности снова в окружности, но не обязательно прямые в прямые (эти преобразования мы будем называть **круговыми преобразованиями**). Обе эти совокупности преобразований составляют группы [1]).

Геометрия, определяемая с помощью группы линейных преобразований, называется **проективной геометрией** [2]). Геометрия, определяемая с помощью группы круговых преобразований, называется **конформной** или **аналагматической геометрией**. В настоящей книге мы не ставим своей целью изложить начальные сведения из проективной или аналагматической геометрий или хотя бы только познакомить читателя с основными методами и понятиями этих интересных и важных геометрий [3]). Задача нашего дальнейшего изложения будет значительно проще.

Факт существования различных геометрий может принести большую пользу, если даже и не выходить за рамки элемен-

---

[1]) Ясно, что если преобразование П переводит прямые в прямые, то и противоположное преобразование P переводит прямые в прямые; если два преобразования $П_1$ и $П_2$ переводят прямые в прямые, то и их сумма $П_3$ обладает этим свойством; при тождественном преобразовании прямые остаются прямыми — значит, линейные преобразования составляют группу. Аналогично показывается, что и совокупность круговых преобразований является группой.

[2]) Точнее, проективная геометрия есть наука, изучающая свойства геометрических фигур, не меняющиеся при **обобщённых линейных** (или **проективных**; см. § 2 гл. I) преобразованиях. Наука, изучающая свойства геометрических фигур, не меняющиеся при обыкновенных **линейных** (или **аффинных**; см. § 1 гл. I) преобразованиях, называется **аффинной геометрией**.

[3]) Проективная геометрия служит предметом обязательного изучения на математических факультетах пединститутов и университетов. Для первоначального ознакомления с этой замечательной наукой можно рекомендовать очень хорошую (хотя и не очень лёгкую) популярную книгу О. А. **Вольберга** «Основные идеи проективной геометрии», Москва, Учпедгиз, 1949; для более подготовленного читателя (например, уже прочитавшего книгу Вольберга) очень интересной может оказаться книга Дж. В. **Юнга** «Проективная геометрия», Москва, ГИИЛ, 1949. По конформной (аналагматической) геометрии у нас, к сожалению, пока отсутствуют элементарные книги. Некоторое представление об этой науке читатель может получить из прибавления М «Аналагматические свойства окружностей в пространстве» ко второму тому «Элементарной геометрии» Ж. **Адамара** (1-е издание, Москва, Учпедгиз, 1939); заметим только, что это прибавление является довольно трудным.

тарной геометрии Киселёва. Зная, что та или иная теорема на самом деле относится, например, к проективной геометрии, т. е. что свойства, о которых идёт речь в этой теореме, не меняются при произвольном линейном преобразовании, мы можем зачастую значительно упростить доказательство теоремы. Пусть, например, нам требуется доказать, что некоторые три прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке. Подвергнем чертёж задачи подходящим образом выбранному линейному преобразованию. При этом прямые l_1, l_2 и l_3 перейдут в три новые прямые l'_1, l'_2 и l'_3; если три первые прямые пересекались в одной точке A, то три преобразованные прямые тоже будут пересекаться в одной точке A' (в которую переходит точка A при линейном преобразовании); обратно, если l'_1, l'_2 и l'_3 пересекаются в одной точке, то и l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке. Таким образом, нам достаточно доказать, что преобразованные прямые пересекаются в одной точке, что может оказаться проще, чем доказательство аналогичного факта для исходных прямых. Подобный метод доказательства геометрических теорем иллюстрируется ниже большим числом разнообразных примеров.

Заметим, что приёмы решения задач в третьей части книги несколько отличны от тех, с которыми читатель мог познакомиться по двум первым частям. Если применение движений или преобразований подобия в задачах первых двух частей сводилось к тому, что мы преобразовывали тем или иным образом известную ч а с т ь чертежа задачи, то ниже нам весьма часто придётся преобразовывать в е с ь чертёж. Ясно, что раньше преобразование чертежа в целом не могло принести нам никакой пользы: так как при движении чертёж не меняется (ибо в элементарной геометрии фигуры, различающиеся своим расположением, не отличаются одна от другой), то он не может стать проще первоначального. Однако при доказательстве теорем элементарной геометрии, на самом деле относящихся к проективной или аналагматической геометрии, преобразование чертежа в целом часто может принести значительную пользу.

В связи с другим подходом к решению задач в последней части книги несколько изменяется и характер самих задач. В то время как в первых двух частях бóльшую часть задач составляли задачи на построение, в последней чаще встречаются задачи на доказательство. Однако иногда и при решении задач на построение использование линейных или круговых преобразований может оказаться полезным. Для примера можно назвать три следующие интересные задачи:

а) вписать в данную окружность n-угольник, стороны которого проходят через n заданных точек плоскости (см. § 5 гл. I, задача 183а), стр. 119; § 2 гл. II, задача 232, стр. 207; § 4 гл. II, задача 259, стр. 237);

б) описать вокруг данной окружности n-угольник, вершины которого лежат на n заданных прямых (см. § 5 гл. I, задача 183б), стр. 120 и § 5 гл. II, задача 283, стр. 303);

в) вписать в данный n-угольник другой n-угольник, стороны которого проходят через n заданных точек плоскости (см. § 5 гл. I, задача 189, стр. 122).

Решение первой из этих задач, не использующее свойств линейных или круговых преобразований, является весьма сложным (см., например, указанные на стр. 606 книги Ж. Адамара (задача 391) и Д. О. Шклярского и др. (задача 80)). Для второй и третьей задач подобное решение вовсе не известно.

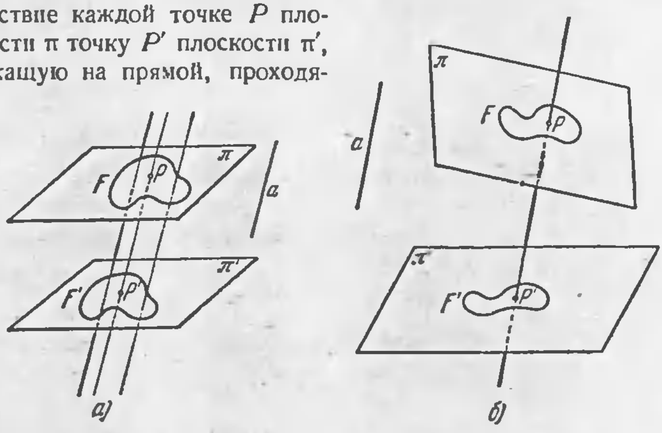
Отметим ещё, что использование линейных и круговых преобразований позволяет решить интересный вопрос о том, какие построения являются возможными, если пользоваться только одной линейкой или только одним циркулем (см. ниже § 5 гл. I и § 2 гл. II).

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Параллельное проектирование плоскости на плоскость. Линейные преобразования плоскости

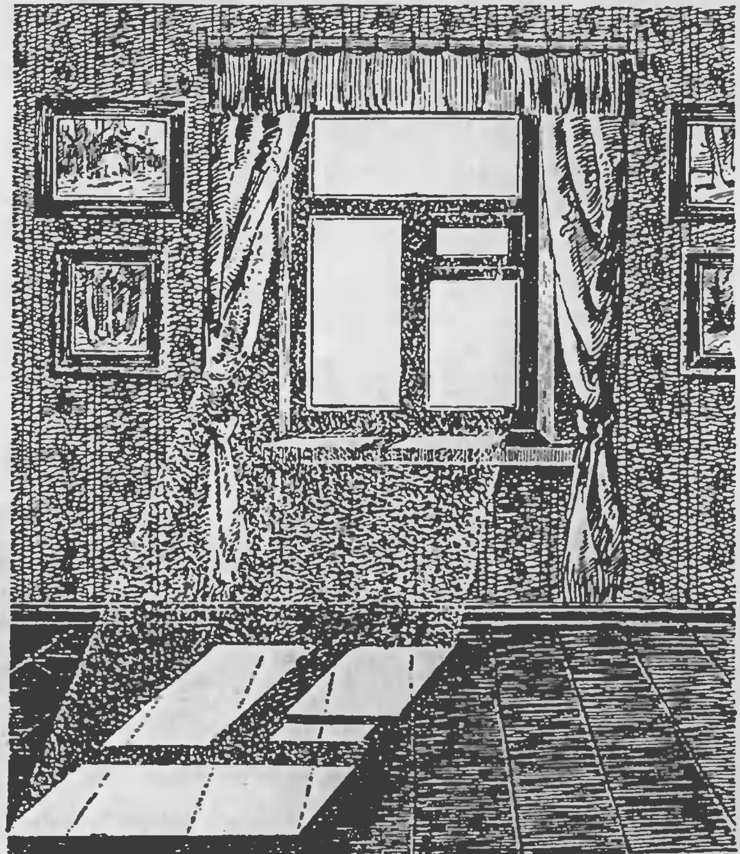
Пусть π и π' — какие-то две различные плоскости пространства (параллельные или пересекающиеся). Спроектируем одну плоскость на другую параллельно некоторому направлению a, т. е. поставим в соответствие каждой точке P плоскости π точку P' плоскости π', лежащую на прямой, проходящей через P и параллельной заданной прямой a[1]) (черт. 4, *а*, *б*). При этом каждая фигура F плоскости π перейдёт в некоторую фигуру F' плоскости π'.



Черт. 4.

[1]) Ясно, что проектирование плоскости π на плоскость π' параллельно данному направлению a возможно, если направление a не параллельно ни плоскости π, ни плоскости π'. В дальнейшем это будет всегда подразумеваться.

Наглядным примером параллельного проектирования может служить, например, тень, отбрасываемая рамой окна на пол комнаты в солнечный день[1]) (черт. 5).



Черт. 5.

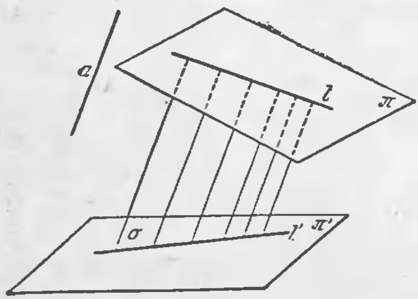
В том случае, когда плоскость π' параллельна плоскости π, каждая фигура при параллельном проектировании перейдёт

---

[1]) Так как солнце находится на очень большом расстоянии от нас, солнечные лучи можно считать параллельными.

просто в равную ей фигуру (параллельное проектирование сводится в этом случае к параллельному переносу в пространстве в направлении a; см. черт. 4, a[1])). В случае же, когда плоскости π и π' не параллельны, форма фигуры при параллельном проектировании искажается (см. черт. 4, $б$; вспомните также, как сильно искажаются тени предметов, когда солнце стоит достаточно низко).

Иногда решение геометрических задач можно упростить, рассмотрев вместо данного чертежа чертёж, получающийся из него параллельным проектированием. Этому методу решения задач и посвящён настоящий параграф. Однако предварительно необходимо изучить основные свойства параллельного проектирования.



Черт. 6.

А. *При параллельном проектировании прямые линии плоскости* π *переходят в прямые линии плоскости* π'. Действительно, все прямые, параллельные a, проведённые через точки прямой l плоскости π, заполняют некоторую плоскость σ (а именно, плоскость, параллельную прямой a и проходящую через прямую l). Следовательно, прямая l при параллельном проектировании переходит в прямую линию l' — линию пересечения плоскостей σ и π' (черт. 6). Обратно, *во всякую прямую плоскости* π' *переходит некоторая прямая плоскости* π.

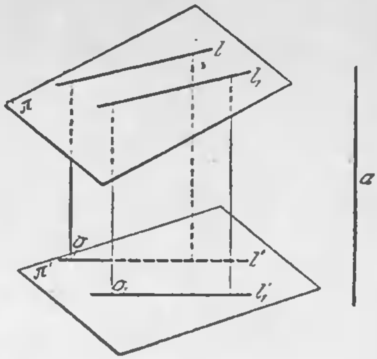
Б. *При параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные.* Действительно, если прямые l и l_1 плоскости π параллельны между собой, то плоскости σ и σ_1, проведённые через эти прямые параллельно прямой a, будут параллельны. Следовательно, и прямые l' и l'_1, по которым плоскости σ и σ_1 пересекаются с плоскостью π', также будут параллельны (черт. 7).

---

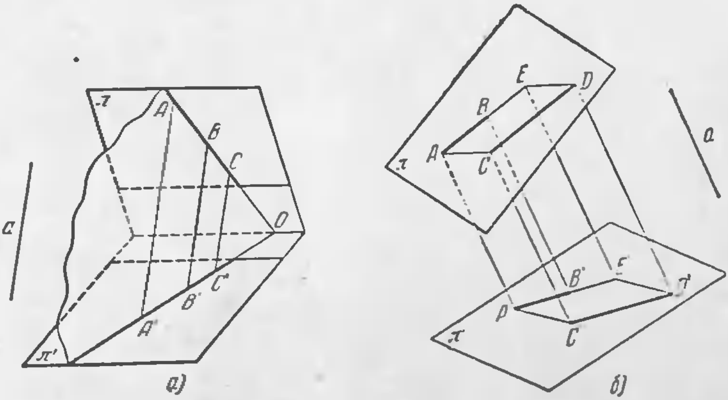
[1]) Параллельный перенос в пространстве определяется аналогично параллельному переносу на плоскости (см., например, книги Ж. Адамара и Д. И. Перепёлкина, цитированные в подстрочном примечании[1]) на стр. 11 первого тома книги).

В. *При параллельном проектировании сохраняется отношение длин двух отрезков, расположенных на одной прямой.* Это обстоятельство непосредственно следует из теоремы о том, что параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки (см. черт. 8, *а*, где $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}\Big)$.

При параллельном проектировании сохраняется также отношение длин двух отрезков, расположенных на параллельных прямых. Действительно, пусть AB и CD — два отрезка плоскости π, такие, что $AB \parallel CD$ (черт. 8, *б*). Проведём через точку D прямую $DE \parallel CA$ до пересечения в точке E с прямой AB. При параллельном проектировании параллелограмм $ACDE$ перейдёт



Черт. 7.



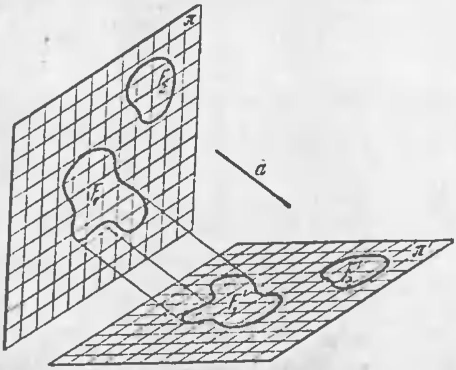
Черт. 8.

в параллелограмм $A'C'D'E'$ плоскости π' (так как параллельные прямые переходят в параллельные, а отрезок AB переходит в $A'B'$). Следовательно,

$$\frac{CD}{AB}=\frac{AE}{AB}=\frac{A'E'}{A'B'}=\frac{C'D'}{A'B'}$$

(здесь мы использовали то обстоятельство, что отношение длин двух отрезков, расположенных на одной прямой, сохраняется при параллельном проектировании).

Г. *При параллельном проектировании сохраняется отношение площадей двух фигур плоскости.* Для того чтобы доказать это свойство, нанесём на плоскость π сетку из равных между собой мелких квадратов. В силу свойств Б и В



Черт. 9.

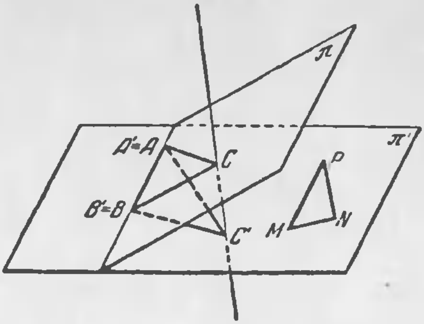
при параллельном проектировании эта сетка перейдёт в сетку равных между собой параллелограммов плоскости π' (черт. 9). Если сетку квадратов сделать достаточно мелкой, то отношение числа квадратов, помещающихся внутри F_1, к числу квадратов, помещающихся внутри F_2, можно сделать сколь угодно мало отличающимся от отношения $S_1:S_2$ площадей фигур F_1 и F_2 [1]). Точно так же, если F_1' и F_2' — фигуры, в которые переходят при параллельном проектировании F_1 и F_2, то отношение числа параллелограммов сетки, помещающихся внутри F_1', к числу параллелограммов, помещающихся внутри F_2', может быть сделано сколько угодно близким к

[1]) $S_1:S_2$ равно пределу, к которому стремится отношение числа квадратов, заключённых внутри F_1, к числу квадратов, заключённых внутри F_2, если сторона квадрата сетки неограниченно уменьшается.

отношению $S'_1:S'_2$ площадей фигур F'_1 и F'_2. Но так как число квадратов, помещающихся внутри F_1, равно числу параллелограммов, помещающихся внутри F'_1, а число квадратов, помещающихся внутри F_2,— числу параллелограммов, помещающихся внутри F'_2, то должно иметь место равенство

$$S_1:S_2 = S'_1:S'_2,$$

которое нам и требуется доказать.



Черт. 10.

Докажем теперь следующую основную теорему о параллельном проектировании.

Теорема 1. *Пусть A, B и C — три точки плоскости π, не лежащие на одной прямой, M, N и P — три точки плоскости π', тоже не лежащие на одной прямой. При помощи параллельного проектирования плоскости π на плоскость π' треугольник ABC можно перевести в треугольник $A'B'C'$, подобный треугольнику MNP.*

Нам требуется так расположить плоскости π и π' в пространстве и выбрать такое направление, чтобы при параллельном проектировании π на π' в этом направлении треугольник ABC перешёл в треугольник, подобный MNP. Сделать это чрезвычайно просто. Пусть $A'B'C'$ — такой треугольник плоскости π', что $\triangle A'B'C' \backsim \triangle MNP$ и $A'B' = AB$. Придадим плоскости π такое положение в пространстве, чтобы лежащий в ней отрезок AB совместился с отрезком $A'B'$ плоскости π', а точка C лежала вне плоскости π' (черт. 10). Если теперь спроектировать π на π' параллельно направлению CC', то треугольник ABC перейдёт в треугольник $A'B'C'$.

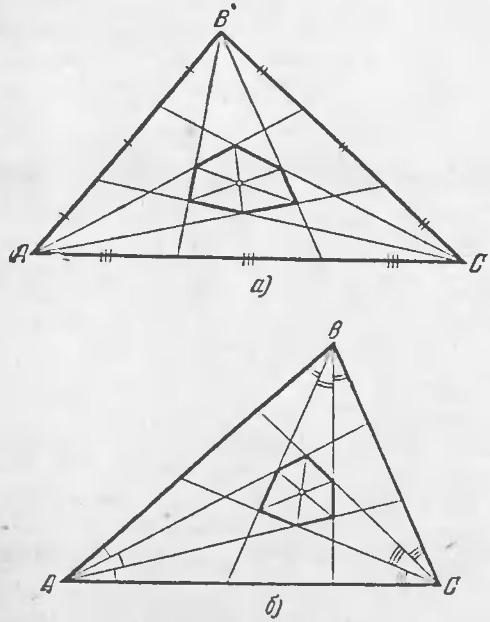
107. Используя свойства параллельного проектирования, докажите, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

108. Используя свойства параллельного проектирования, докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции с точкой пересечения её диагоналей, делит основания трапеции пополам.

109. На плоскости даны две параллельные прямые l и l_1.

а) Отрезок AB прямой l разделите пополам при помощи одной линейки.

б) Через данную точку M проведите при помощи одной линейки прямую, параллельную прямым l и l_1.



Черт. 11.

Обобщением задачи 109а) является задача 132б) следующего параграфа (стр. 58).

110. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях $\left(\text{т. е. } \frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}\right)$. Докажите, что:

а) точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC;

б) точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM, совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

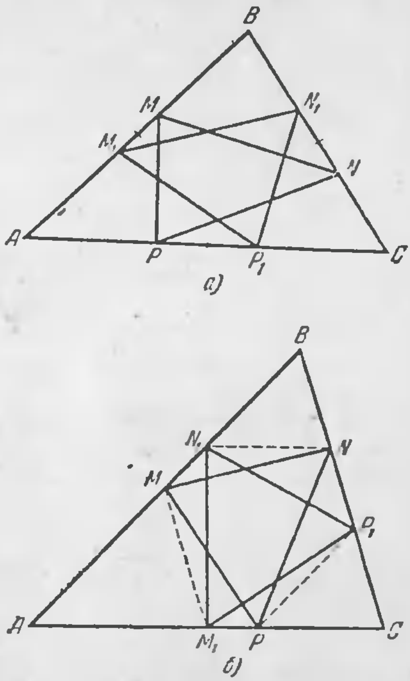
111. Через каждую вершину треугольника ABC проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими шестью прямыми, пересекаются в одной точке (черт. 11,*а*).

С теоремой задачи 111 интересно сравнить следующее предложение: диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного прямыми, делящими углы произвольного треугольника ABC на три равные части, пересекаются в одной точке (черт. 11,*б*). [Самое простое доказательство этого последнего предложения опирается на свойства обобщённых линейных (проективных) преобразований плоскости, которым посвящён следующий параграф этой главы; однако оно использует больший материал из теории этих преобразований, чем тот, который будет изложен в настоящей книге.]

112. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC даны точки M, N и P. Докажите, что:

а) если точки M_1, N_1 и P_1 симметричны точкам M, N и P относительно середин соответствующих сторон треугольника ABC (черт. 12, *а*), то треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ имеют одинаковую площадь [в частности, если точки M, N и P лежат на одной прямой, то и точки M_1, N_1 и P_1 лежат на одной прямой];

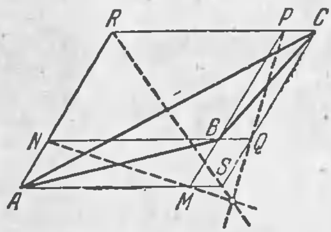
б) если M_1, N_1 и P_1 — такие точки сторон AC, BA и CB треугольника ABC, что $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$ и $PP_1 \parallel AB$



Черт. 12.

(черт. 12, *б*), то треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ имеют одинаковую площадь [в частности, если точки M, N и P лежат на одной прямой, то и точки M_1, N_1 и P_1 лежат на одной прямой].

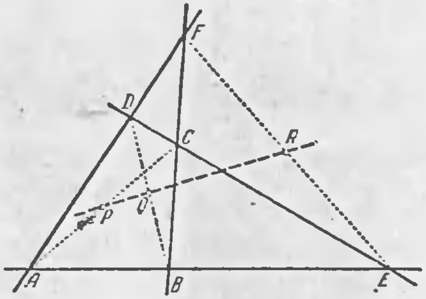
113. Используя свойства параллельного проектирования, решите следующую задачу на построение: в данный треугольник ABC вписать прямоугольник известной площади σ так, чтобы две вершины прямоугольника лежали на стороне AB, а остальные две — на сторонах CA и CB.



Черт. 13.

114. На сторонах треугольника ABC как на диагоналях построены три параллелограмма с одинаковыми направлениями сторон. Докажите, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке (черт. 13).

115. Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей произвольного четырёхугольника $ABCD$, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон (черт. 14).



Черт. 14.

[Разумеется, четырёхугольник задачи 115 не должен быть трапецией или параллелограммом, так как иначе отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон, не существует.]

Теорема задачи 115 часто формулируется ещё и по-иному. Фигура, образованная четырьмя произвольными прямыми плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны, называется **полным четырёхсторонником**. Все шесть точек попарного пересечения прямых (сторон полного четырёхсторонника) называются вершинами четырёхсторонника; прямые, соединяющие противоположные вершины четырёхсторонника (т. е. вершины, не лежащие на одной стороне), называются его диагоналями. При этих обозначениях предложение задачи 115 можно сформулировать следующим образом: *середины трёх диагоналей полного четырёхсторонника лежат на одной прямой* (теорема о полном четырёхстороннике).

116. Пусть A_1, B_1 и C_1 — такие точки сторон BC, CA и AB треугольника ABC, что $\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{1}{3}$. Докажите, что площадь треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1 и CC_1, равна одной седьмой площади треугольника ABC.

117. Используя свойства параллельного проектирования, докажите теорему Чева: если на сторонах AB, BC и CA (но не на их продолжениях!) взяты три точки M, N и P, такие, что

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1,$$

то прямые AN, BP и CM пересекаются в одной точке.

Доказательство теоремы Чева в более полной формулировке составляет содержание задач 57б) из § 1 гл. I второй части книги, и 134б) из § 2 настоящей главы (стр. 58); в § 2 указаны также многочисленные применения, которые может иметь эта важная теорема.

До сих пор мы всё время считали, что плоскости π и π' различны. Соответственно этому в настоящем параграфе мы говорили об отображении одной плоскости π на другую плоскость π', в то время как в предыдущих главах мы рассматривали преобразования, переводящие данную плоскость в себя (движения и преобразования подобия).

Рассмотрим теперь преобразование, переводящее плоскость π в себя, которое получается следующим образом: плоскость π перемещается каким-то образом в пространстве и затем параллельно проектируется на своё прежнее положение. Это преобразование мы будем называть параллельным проектированием плоскости π на себя.

Частным случаем такого преобразования плоскости является всякое движение; параллельное проектирование плоскости π на себя представляет собой движение, если новое положение плоскости π будет параллельно первоначальному.

Из свойства А параллельного проектирования сразу следует, что *при параллельном проектировании плоскости на себя прямые линии переходят в прямые линии.* Всякое преобразование плоскости в себя, переводящее прямые линии снова в прямые линии, мы будем называть линейным преобразованием[1]). Простейшими примерами линейных преобразований плоскости служат движения и преобразования подобия. Параллельное проектирование плоскости на себя также является линейным преобразованием. Это последнее преобразование сложнее движения или преобразования подобия: при этом преобразовании не сохраняется отношение длин отрезков и поэтому форма фигур меняется.

Оказывается, что всякое линейное преобразование плоскости сводится к параллельному проектированию плоскости на себя. А именно, имеет место следующая важная теорема:

Теорема 2. *Всякое линейное преобразование плоскости может быть осуществлено путём параллельного проектирования плоскости на себя и последующего преобразования подобия.*

Из этой теоремы вытекает, что для изучения свойств всех линейных преобразований достаточно рассмотреть свойства, общие параллельным проектированиям плоскости на себя и преобразованиям подобия[2]); в частности, из неё следует, что все линейные преобразования плоскости обладают перечисленными выше свойствами Б—Г (см. стр. 18—20), поскольку и параллельные проектирования плоскости на себя и преобразования подобия обладают этими свойствами. Теорема 2 позволяет также ответить на вопрос о сумме двух или нескольких преобразований параллельного проектирования плоскости на себя; из неё следует, что такая сумма пред-

---

[1]) Такие преобразования часто называются также аффинными преобразованиями.

[2]) Из теоремы 2 следует, что линейные преобразования можно определить как параллельные проектирования плоскости на себя, сопровождаемые преобразованиями подобия (см. по этому поводу конец первой части книги, стр. 67—69 первого тома).

ставляет собой новое параллельное проектирование плоскости на себя, сопровождаемое ещё, быть может, преобразованием подобия (ибо эта сумма, разумеется, представляет собой линейное преобразование плоскости).

Теорема 2 является следствием теоремы 1 и следующей теоремы:

Теорема 3. *Существует единственное линейное преобразование плоскости, переводящее три данные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, в три другие данные точки A', B', C' (тоже не лежащие на одной прямой).*

Если считать теорему 3 уже доказанной, то из неё сразу вытекает справедливость теоремы 2. Действительно, так как существует только одно линейное преобразование, переводящее данный треугольник ABC в другой данный треугольник $A'B'C'$, то оно должно совпадать с параллельным проектированием плоскости на себя и последующим преобразованием подобия, переводящими треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$ (то, что такие проектирование и подобие существуют, следует из теоремы 1). Таким образом, нам остаётся только доказать теорему 3 [1]).

Идея этого доказательства такова. Пусть известно, что линейное преобразование переводит три точки A, B и C плоскости в три известные точки A', B' и C'; надо показать, что тем самым полностью определено, в какую точку M' переходит произвольно выбранная точка M плоскости. Мы найдём сначала некоторое число точек, относительно которых сможем указать, в какие точки они переходят; затем построим ряд новых точек, для которых можно будет сделать то же самое, затем ещё новые такие точки и т. д. Таким образом, мы получим на плоскости определённую сеть точек, для каждой из которых можно будет построить точку, в которую она переходит при рассматриваемом линейном преобразовании. В процессе дальнейшего построения эта сеть точек будет делаться всё гуще и гуще; мы покажем, что её можно сделать сколь угодно густой (например, такой, что на каждом квадратном миллиметре площади будет иметься не меньше миллиона точек сети). Таким образом, для любой точки M плоскости можно найти сколь угодно близкие к ней точки сети; можно также найти сколь угодно малый многоугольник с вершинами в точках сети, внутри которого заключается

[1]) Собственно говоря, из теорем 3 и 1 следует только то, что всякое линейное преобразование плоскости, переводящее хотя бы одну тройку точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, в три точки A', B', C', тоже не лежащие на одной прямой, может быть осуществлено путём параллельного проектирования плоскости на себя и последующего подобного преобразования. Но легко видеть, что не может существовать линейного преобразования, переводящего каждые три точки плоскости в три точки, лежащие на одной прямой. Действительно, из того, что три точки A, B и M, где A и B фиксированы, а M — произвольная точка плоскости, переходят в три точки A', B' и M', лежащие на одной прямой, следует, что все точки плоскости переходят в точки прямой $A'B'$, т. е. что мы не имеем преобразования плоскости в обычном смысле этого слова.

точка M. Так как каждая точка сети переходит при нашем линейном преобразовании во вполне определённую точку и, следовательно, каждый многоугольник с вершинами в точках сети переходит во вполне определённый многоугольник, то отсюда с очевидностью следует, что для любой точки M определяется точка M', в которую она переходит[1]). А это нам и требуется доказать.

Покажем теперь, как построить сеть точек, о которой говорилось выше. Для этого мы воспользуемся следующим свойством линейного преобразования: *всякое линейное преобразование переводит параллельные прямые в параллельные прямые.* Действительно, если бы две параллельные прямые l и m перешли бы при линейном преобразовании в пересекающиеся прямые l' и m', то в точку P' пересечения прямых l' и m' должна была бы перейти точка, принадлежащая одновременно прямым l и m, в то время как такой точки вовсе не существует.

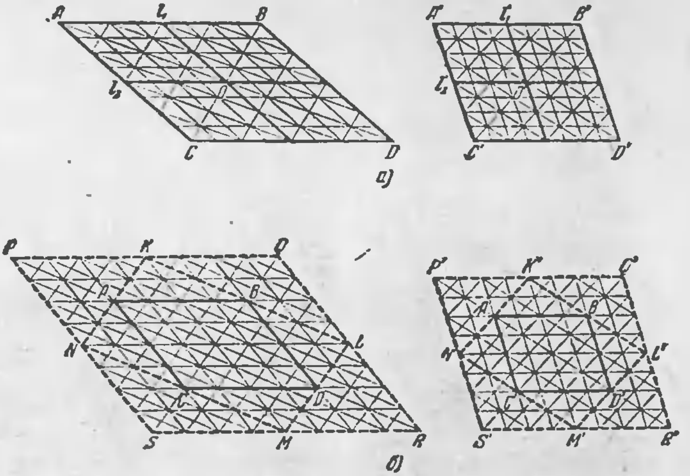
Обозначим теперь прямую AB через l_1 и прямую AC — через l_2. При нашем преобразовании прямая l_1 перейдёт в прямую l_1', проходящую через точки A' и B', а прямая l_2 — в прямую l_2', проходящую через точки A' и C'. Проведём через точку C прямую CD, параллельную l_1, и через точку B — прямую BD, параллельную l_2 (черт. 15, a). Так как при линейном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные, то прямая CD перейдёт в прямую $C'D'$, параллельную l_1', а прямая BD — в прямую $B'D'$, параллельную l_2'. Таким образом, изображённый на черт. 15, a параллелограмм $ABDC$ перейдёт в параллелограмм $A'B'D'C'$, и точка O пересечения диагоналей AD и BC параллелограмма $ABDC$ — в точку O' пересечения диагоналей $A'D'$ и $B'C'$ параллелограмма $A'B'D'C'$. Проведём далее через O прямые, параллельные l_1 и l_2,— средние линии параллелограмма $ABDC$. Эти прямые перейдут при нашем линейном преобразовании в прямые, параллельные соответственно прямым l_1' и l_2' и проходящие через точку O', т. е. в средние линии параллелограмма $A'B'D'C'$; точки пересечения этих прямых с прямыми l_1 и l_2 — середины сторон параллело-

---

[1]) Это рассуждение делает теорему 3 почти очевидной, но оно всё же не может считаться вполне строгим её доказательством. Действительно, из возможности построения сколь угодно густой сети точек, для которых известно, в какие точки они переходят, разумеется, не следует, что каждая точка плоскости может быть включена в эту сеть (так, например, рассматривая только точки оси x с рациональными координатами, мы сможем получить сколь угодно густую сеть точек этой прямой, но точку с координатой $x=\sqrt{2}$ нельзя будет включить в эту сеть). Таким образом, на плоскости могут существовать такие точки M, для которых нельзя прямо указать точки M', в которые они переходят (хотя можно найти точки, сколь угодно близкие к M, для которых это можно сделать). Для того чтобы дополнить приведённое рассуждение до строгого доказательства теоремы 3, нужно привлечь ещё некоторые соображения, на которых мы не остановимся. См. по этому поводу книгу: Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, т. I, М.— Л., Гостехиздат, 1948, стр. 120—124.

грамма $ABDC$ — перейдут в соответствующие точки параллелограмма $A'B'D'C'$, т. е. в середины его сторон.

Проведём теперь такое же построение, как описано выше, в каждом из четырёх меньших параллелограммов, на которые разбивают параллелограмм $ABDC$ его средние линии, затем — в каждом из полученных ещё меньших параллелограммов и т. д. (черт. 15, *а*). Мы получим внутри параллелограмма $ABDC$ сетку из параллелограммов, которая переходит в аналогичную сетку внутри параллелограмма $A'B'D'C'$; каждый узел первой сетки переходит в соответствующий ему узел



Черт. 15.

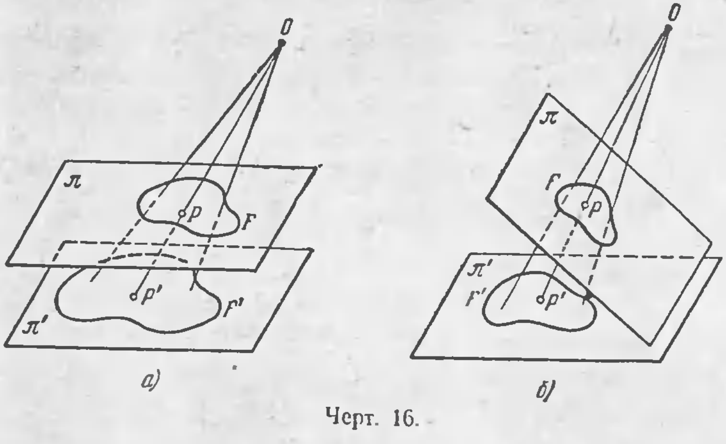
второй сетки. При этом, повторив процесс измельчения сетки достаточно много раз, мы сможем сделать параллелограммы сетки сколь угодно малыми и, следовательно, сеть вершин параллелограммов — сколь угодно густой.

Проведём теперь через точки A и D прямые, параллельные BC, и через точки B и C — прямые, параллельные AD. Так как вершины $ABDC$ переходят в вершины $A'B'D'C'$ и, следовательно, прямые AC и BD в $A'C'$ и $B'D'$, то проведённые прямые перейдут при нашем линейном преобразовании в прямые, параллельные соответственно прямым $B'C'$ и $A'D'$ и проходящие через точки A', D' и B', C'. Таким образом, мы получим параллелограмм $KLMN$, в два раза больший параллелограмма $ABDC$, который при нашем линейном преобразовании переходит в известный нам параллелограмм $K'L'M'N'$. Повторяя то же самое построение ещё один раз, мы получим параллелограмм $PQRS$, в четыре раза больший параллелограмма $ABDC$; стороны этого последнего параллелограмма параллельны сторонам параллелограмма $ABDC$ (черт. 15, *б*). Повторяя это построение, мы можем найти все бо́льшие по размерам параллелограммы, о которых известно, в какие параллелограммы они переходят при нашем линейном преобразовании; проделывая затем в каждом из этих параллелограммов построение, описанное выше, мы можем определить внутри каждого из них сетку из сколь угодно близких друг к другу параллельных прямых, которая переходит при нашем линейном преобразовании в известную сеть параллельных прямых (черт. 15, *б*).

Таким образом, мы можем определить бесконечно много точек, относительно которых можно указать, в какие точки они переходят при нашем линейном преобразовании. При этом построенная таким образом сеть точек может быть распространена на всю плоскость и может быть сделана сколь угодно густой. А это мы и хотели показать.

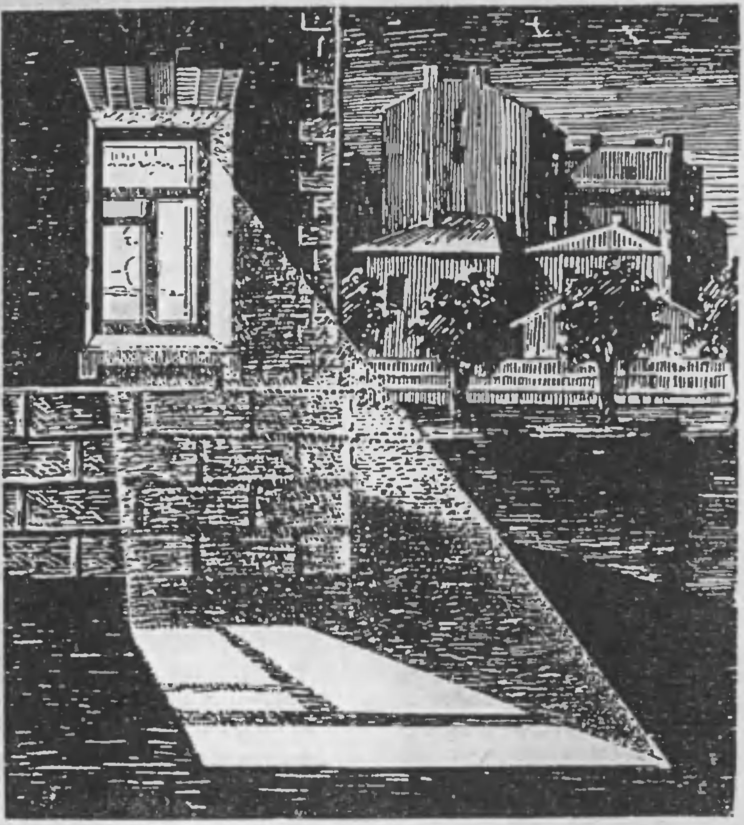
§ 2. Центральное проектирование плоскости на плоскость. Обобщённые линейные (проективные) преобразования плоскости

Пусть π и π' — две плоскости пространства. Выберем в пространстве точку O, не лежащую ни на одной из этих двух плоскостей, и *спроектируем из точки O плоскость π на плоскость π'*, т. е. поставим в соответствие каждой точке P плоскости π точку P' плоскости π',



Черт. 16.

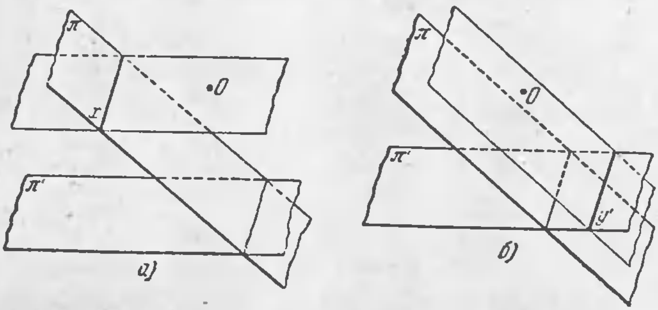
лежащую на прямой OP (черт. 16, *а*, *б*). Точку O мы будем называть *центром проекции*, точку P' — *центральной проекцией* или просто *проекцией* точки P. Каждая фигура F плоскости π перейдёт при центральном проектировании в некоторую фигуру F' плоскости π' (вспомните, например, тень, отбрасываемую вечером на улицу рамой окна ярко освещённой комнаты; черт. 17).



Черт. 17.

Если плоскость π параллельна плоскости π', то при центральном проектировании π на π' каждая фигура F плоскости π переходит в фигуру F' плоскости π', подобную F (центральное проектирование сводится к центрально-подобному преобразованию в пространстве с центром подобия в точке O[1]); см. черт. 16, *а*). В дальнейшем нас будет в первую очередь интересовать тот случай, когда плоскость π не параллельна π' (черт. 16, *б*).

Отметим прежде всего, что в этом случае на плоскости π существует прямая, точки которой не проектируются ни в какие точки плоскости π': это есть прямая x, по которой пересекается плоскость π с плоскостью, параллельной π' и проходящей через точку O (черт. 18, *а*). Аналогично на



Черт. 18.

плоскости π' имеется прямая, в точки которой не проектируются никакие точки плоскости π, — это прямая y', по которой плоскость π' пересекается с плоскостью, параллельной π и проходящей через O (черт. 18, *б*).

Таким образом, при центральном проектировании плоскости π на плоскость π' имеются две прямые (одна на π, другая на π'), находящиеся в исключительном положении. Эти две прямые мы будем называть **выделенными** прямыми плоскостей π и π'[2]).

Центральное проектирование значительно сильнее искажает фигуры, чем параллельное проектирование. Отрезок прямой может при центральном проектировании перейти в отрезок, луч или в совокупность двух лучей (черт. 19, *а*,

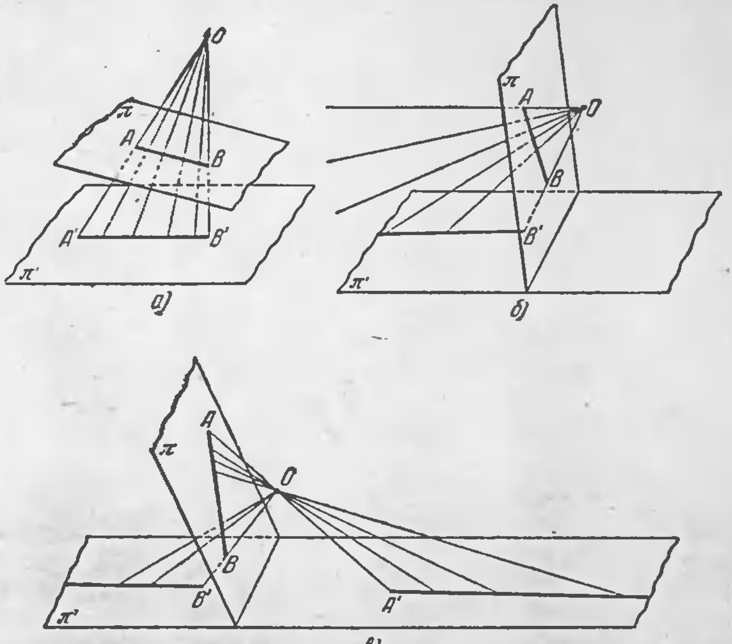
---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 95 первого тома книги.

[2]) Очевидно, что прямая x параллельна прямой y'; обе эти прямые параллельны линии пересечения плоскостей π и π'.

б, *в*), треугольник — в одну из фигур, изображённых на черт. 20, *а* — *д*.

Сложный чертёж иногда удаётся удачно выбранным центральным проектированием перевести в более простой и таким образом облегчить решение задачи, связанной с этим черте-

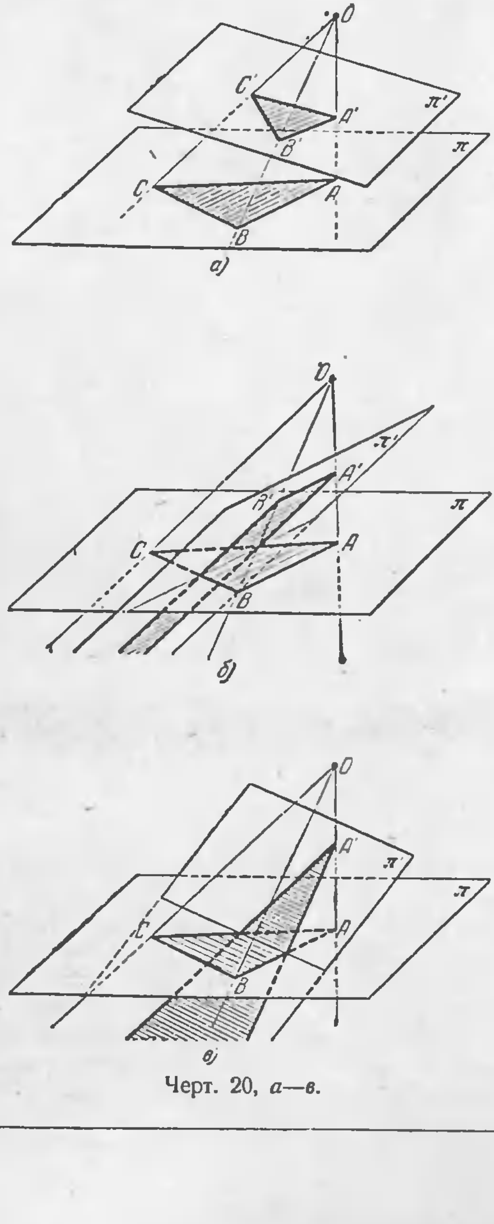


Черт. 19.

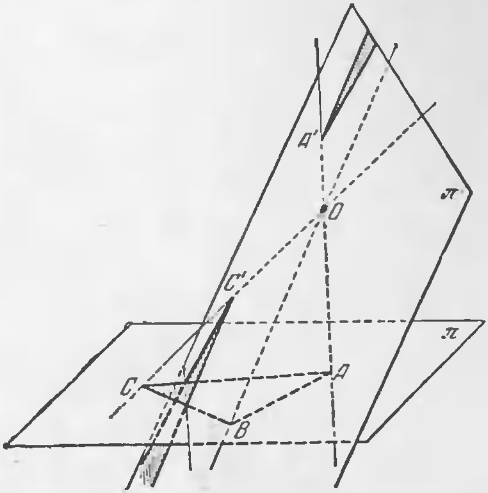
жом. При этом пользуются следующими свойствами центрального проектирования.

А. *При центральном проектировании прямые линии плоскости* π *переходят в прямые линии плоскости* π′ (исключение составляет выделенная прямая *x* плоскости π, точки которой, как мы уже отмечали выше, не проектируются ни в какие точки плоскости π′).

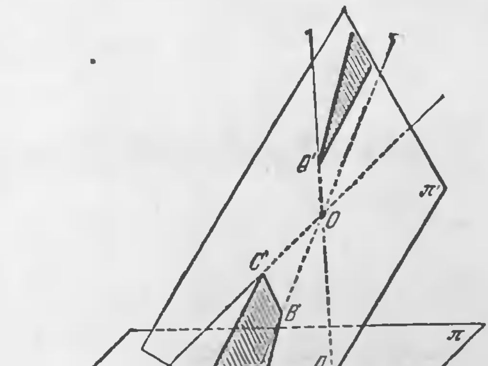
Действительно, прямые, соединяющие все точки некоторой прямой *l* плоскости π с точкой *O*, заполняют плоскость σ; следовательно, прямая *l* переходит при центральном проекти-



Черт. 20, *а*—*в*.



г)

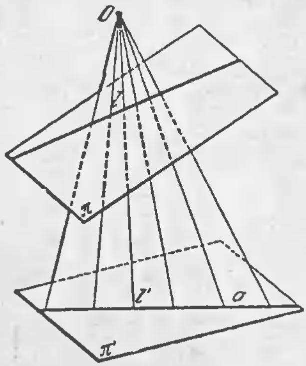


д)

Черт. 20, г—д.

ровании в прямую l' — линию пересечения плоскостей π' и σ (черт. 21).

Обратно, *всякая прямая l' плоскости* π' (за исключением выделенной прямой y') *является образом некоторой прямой l плоскости* π.

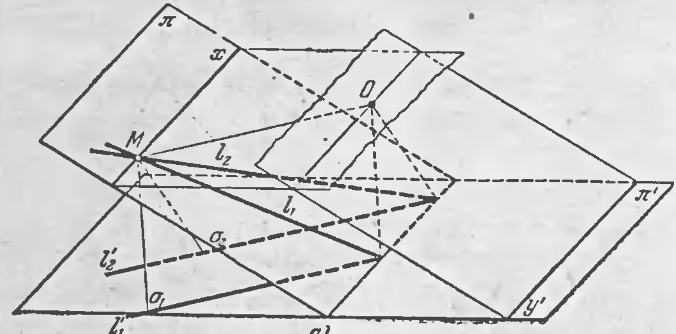


Черт. 21.

Б. *Прямые l_1 и l_2 плоскости π, пересекающиеся в точке M выделенной прямой x этой плоскости, переходят при центральном проектировании в параллельные прямые l_1' и l_2' плоскости π'.*

Действительно, в этом случае плоскости σ_1 и σ_2, проходящие через прямые l_1, соответственно, l_2 и через точку O, пересекаются по прямой OM, параллельной плоскости π', а следовательно, проекции l_1' и l_2' прямых l_1 и l_2 на плоскость π' вовсе не пересекаются (черт. 22, *а*).

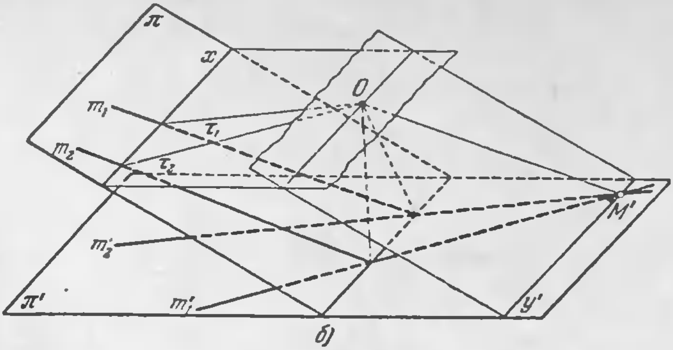
Параллельные прямые m_1 и m_2 плоскости π переходят при центральном проектировании в прямые m_1' и m_2' пло-



Черт. 22, *а*.

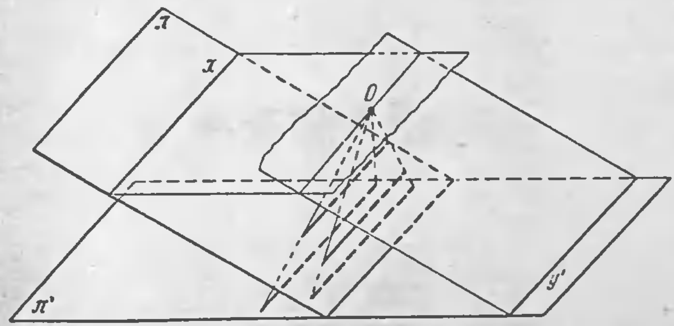
скости π', пересекающиеся в точке M', выделенной прямой y' этой плоскости, так как плоскости τ_1 и τ_2, проходящие через прямые m_1, соответственно, m_2 и через точку O

пересекаются по прямой OM', параллельной плоскости π, и пересекающей плоскость π' в точке M', выделенной прямой y'



Черт. 22, *б*.

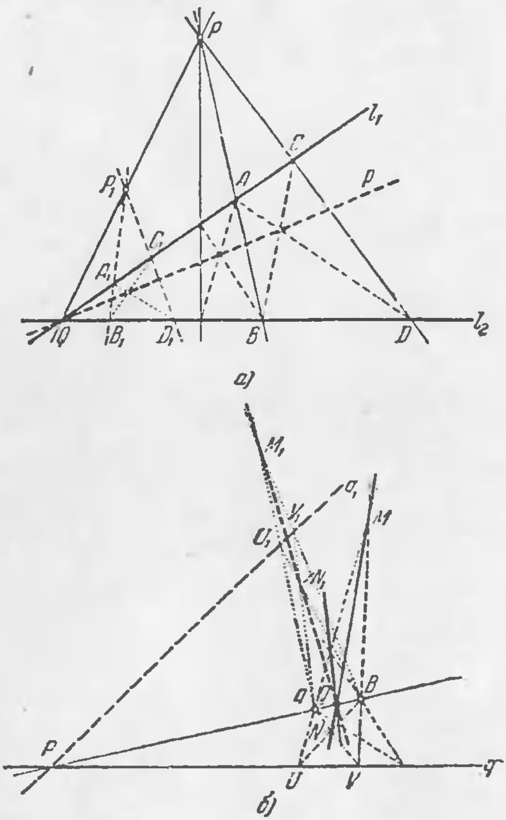
(черт. 22, *б*). *Исключение составляют прямые, параллельные x, которые переходят при центральном проектировании в параллельные прямые, а именно в прямые, параллельные y'* (черт. 23).



Черт. 23.

Используя только свойства А и Б линейного преобразования, можно доказать ряд интересных геометрических теорем. [Отметим, что приведённые ниже формулировки теорем в ряде случаев требуют некоторого уточнения; см. об этом ниже, стр. 51 и след.].

118. а) На плоскости даны две прямые l_1 и l_2 и точка P, не лежащая ни на одной из них. Через P проводится пара прямых, пересекающих l_1 и l_2 в точках A и C, соответственно B и D (черт. 24, *а*). Докажите, что точки пересечения прямых AD и BC для всевозможных пар прямых, проходящих через P и пересекающих l_1 и l_2, лежат на одной прямой p.



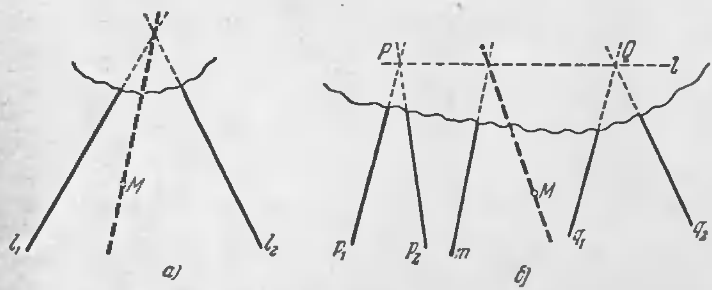
Черт. 24.

Если l_1 и l_2 пересекаются в точке Q, то и p проходит через ту же точку. При этом, если P и P_1 — две разные точки, лежащие на одной прямой, проходящей через Q, то им соответствует **одна и та же** прямая p.

б) На плоскости даны прямая q и две точки A и B, не лежащие на этой прямой. Пусть U и V — пара точек на q, M — точка пересечения прямых UA и VB, N — точка пересечения прямых UB и VA (черт. 24, *б*). Докажите, что при любом выборе пары точек U и V на q прямые MN пересекаются в одной и той же точке Q, лежащей на прямой AB. При этом двум различным прямым q и q_1, пересекающим AB в одной и той же точке P, соответствует одна и та же точка Q.

Прямая p задачи 118а) называется **полярой точки** P **относительно пары прямых** l_1, l_2 или относительно угла, образованного этими прямыми (сравните с определением поляры точки относительно окружности в § 4 этой главы). Точка Q задачи 118б) называется **полюсом прямой** q **относительно пары точек** A, B.

119. а) На плоскости даны две прямые l_1 и l_2, точка пересечения которых нам недоступна (ср. стр. 87—88 первого тома), и точка M. С помощью одной линейки (без циркуля!) проведите через M прямую, проходящую через точку пересечения l_1 и l_2 (черт. 25, *а*).

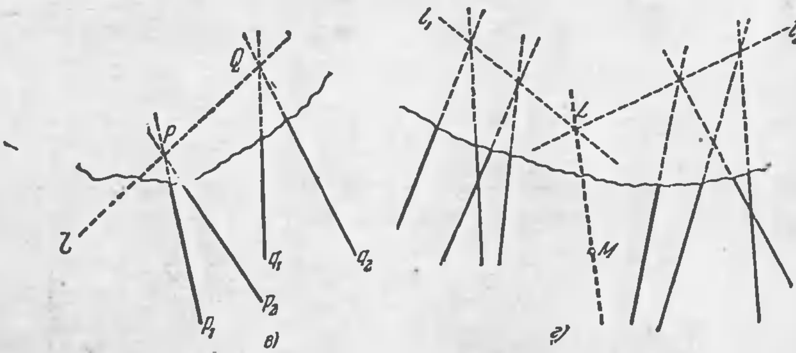


Черт. 25, *а*, *б*.

б) Недоступная прямая l плоскости определяется двумя парами прямых p_1, p_2 и q_1, q_2, пересекающихся в каких-то точках P, Q этой прямой (черт. 25, *б*). Кроме того, на плоскости дана прямая m и точка M. С помощью одной линейки проведите через M прямую, проходящую через точку пересечения прямых l и m.

в) С помощью одной линейки проведите прямую l, проходящую через недоступные точки P и Q, определённые парами прямых p_1, p_2 и q_1, q_2 (черт. 25, *в*).

г) Две недоступные прямые l_1 и l_2 плоскости определены каждая двумя парами прямых аналогично прямой l в условии задачи б) (черт. 25, г). С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, проходящую через точку L пересечения прямых l_1 и l_2.

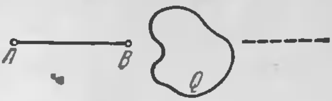


Черт. 25, *в*, *г*.

Во второй части книги, где мы впервые встретились с построениями с недоступными элементами («построения на ограниченной части плоскости»), специально отмечалось, что такие построения имеют серьёзное практическое значение в геодезии (см. подстрочное примечание на стр. 88—89 первого тома). Следует, однако, иметь в виду, что в геодезии (т. е. при построениях на местности) не допускается проведение окружностей: геодезические инструменты позволяют прокладывать на местности прямые, но не окружности. Поэтому для геодезической практики особую важность имеют такие построения на ограниченной части плоскости, которые могут быть осуществлены с помощью одной линейки[1]). Задачи 119а)—г) как раз и посвящены построениям такого рода.

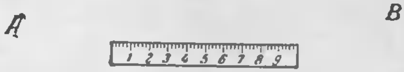
[1]) Точнее говоря, геодезическим построениям в геометрии отвечают построения с помощью линейки и транспортира, поскольку геодезические инструменты позволяют строить прямые и откладывать в данной точке от данной прямой известный угол. Построения с помощью одной линейки представляют собой лишь самые простые из таких построений.

120. На плоскости дан отрезок AB и область Q, как изображено на черт. 26. Как при помощи одной линейки продолжить отрезок AB вправо от области Q, если при этом воспрещается проводить какие-либо линии внутри этой области?



Черт. 26.

[Эта задача может иметь следующий смысл: требуется продолжить данное на местности направление, например, за лес, в котором визирование направлений становится невозможным.]



Черт. 27.

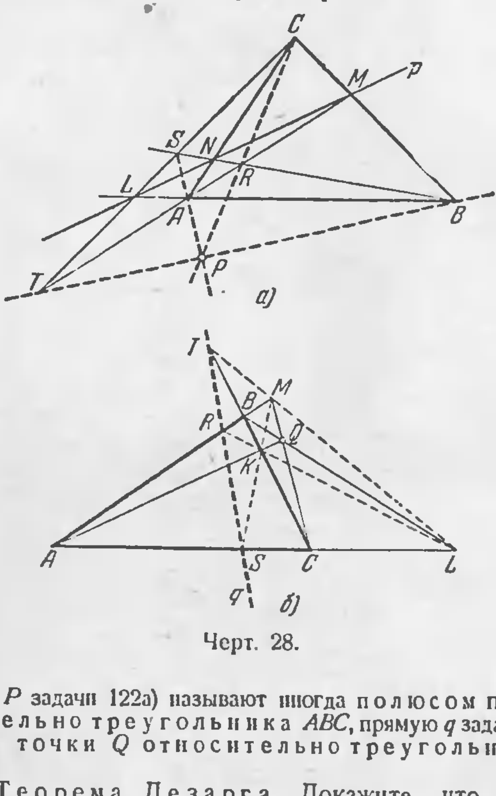
121. На плоскости даны две точки A и B. Как соединить их прямой линией, если в нашем распоряжении имеется только линейка, которая короче расстояния AB (черт. 27)?

При решении задач на построение всегда считают, что каждые две точки плоскости можно соединить прямой; тем самым предполагается, что решающий задачу располагает безграничной линейкой. Практически же каждая линейка является, разумеется, ограниченной, и с помощью её мы можем соединить прямой линией лишь пары точек, не отстоящих слишком далеко одна от другой. Решение задачи 121 показывает, что это обстоятельство не может сузить области возможных построений: *все построения, выполнимые при помощи неограниченной линейки, могут быть выполнены и с помощью линейки конечной длины* (эта линейка может быть даже сколь угодно короткой).

Отметим ещё, что ограниченность раствора всякого циркуля также не сужает области выполнимых построений. В § 5 будет показано, что все задачи на построение, выполнимые с помощью циркуля и линейки, выполнимы также линейкой и циркулем любого фиксированного раствора (при этом циркуль достаточно даже применить один единственный раз).

122. а) Прямая p пересекает стороны AB, BC и CA треугольника ABC (или их продолжения) в точках L, M и N. Обозначим точки пересечения прямых AM, BN и CL через R, S и T, как указано на черт. 28, *а*. Докажите, что прямые AS, BT и CR пересекаются в одной точке P.

б) Даны треугольник ABC и точка Q. Точки пересечения прямых QA, QB и QC с соответствующими сторонами треугольника ABC (или их продолжениями) обозначим через K, L и M; точки пересечения KL и AB, KM и AC, LM и BC — через R, S и T (черт. 28, б). Докажите, что точки R, S и T лежат на одной прямой q.

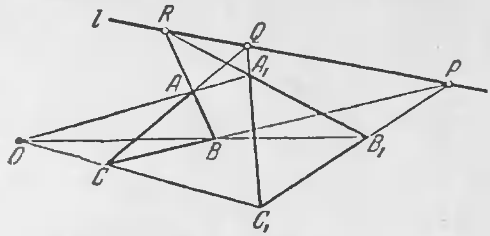


Черт. 28.

Точку P задачи 122а) называют иногда **полюсом прямой** p **относительно треугольника** ABC, прямую q задачи 122б) — **полярой точки** Q **относительно треугольника** ABC.

123. **Теорема Дезарга.** Докажите, что если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены на плоскости таким образом, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 лежат на одной прямой l (черт. 29). Обратно, если точки пересечения прямых AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 лежат на одной прямой, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Треугольники, удовлетворяющие условиям теоремы Дезарга, называются **перспективными**. Точка O, в которой пересекаются прямые, соединяющие соответствующие вершины треугольников, называется **центром перспективы**, а прямая l, на которой лежат точки пересечения соответствующих сторон,— **осью перспективы**.



Черт. 29.

Заметим, что теорема Дезарга выражает некоторое общее свойство прямых и точек плоскости, которое можно и не связывать с парой треугольников. Выделение отдельных элементов черт. 29 (например то, что отрезок AB изображён жирной линией, а точка P — светлым кружком) облегчает его запоминание, но несколько затемняет его смысл — так оно затушёвывает то обстоятельство, что все фигурирующие в теореме Дезарга прямые и все точки **совершенно равноправны** (на черт. 29 прямую OCC_1 тоже можно рассматривать как ось перспективы двух треугольников — треугольников PBB_1 и QAA_1; точку B тоже можно рассматривать как центр перспективы двух треугольников — треугольников PRB_1 и CAO). Аналогичное замечание можно сделать также и по поводу задач 122а), б), 125, 126, 127, 129а), б); см. по этому поводу гл. III очень интересной, но довольно трудной книги Д. **Гильберта** и С. **Кон-Фоссена**, Наглядная геометрия, М.— Л., Гостехиздат, 1950.

Теоремы задач 122а) и б) являются частными случаями теоремы Дезарга: на черт. 28, *а* треугольники RST и ABC перспективны, на черт. 28, *б* перспективны треугольники KLM и ABC.

124. а) Дан треугольник ABC и три точки P, Q и R, лежащие на одной прямой. Впишите в треугольник ABC треугольник XYZ, такой, что стороны его проходят соответственно через точки P, Q и R[1]).

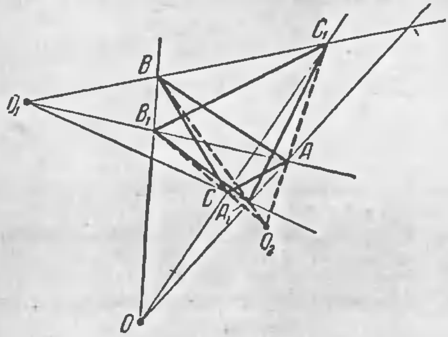
---

[1]) То-есть постройте треугольник XYZ, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC **или на их продолжениях** (а стороны или **продолжения сторон** переходят через заданные точки).

б) На плоскости даны прямые l_1, l_2 и l_3, пересекающиеся в одной точке O, и три точки A, B и C. Постройте треугольник XYZ, стороны которого проходят через точки A, B и C, а вершины лежат на прямых l_1, l_2, l_3.

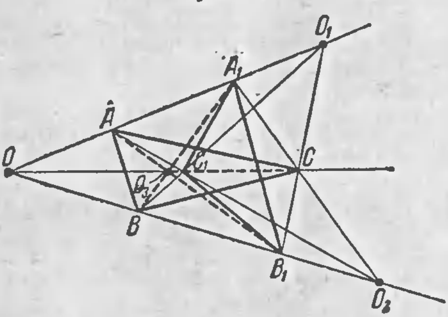
Обобщением задачи 124а) является задача 128 этого параграфа; обобщением задачи 124б) — задача 160 из § 4 (стр. 100). Дальнейшее обобщение этих задач содержится в задаче 189 из § 5 (стр. 122).

125. Теорема о дважды перспективных треугольниках. Пусть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ обладают тем свойством, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O и прямые AB_1, BC_1, CA_1 пересекаются в одной точке O_1 (черт. 30). Докажите, что в таком случае и прямые AC_1, BA_1 и CB_1 пересекаются в одной точке O_2 (другими словами, треугольники, перспективные двумя способами так, как это указано в условии задачи, перспективны и третьим способом).



Черт. 30.

[Отметим, что теорема задачи 125 утверждает существование трёх треугольников: ABC, $A_1B_1C_1$ и OO_1O_2, каждые два из которых перспективны между собой тремя способами с центрами перспективы в вершинах третьего треугольника.]

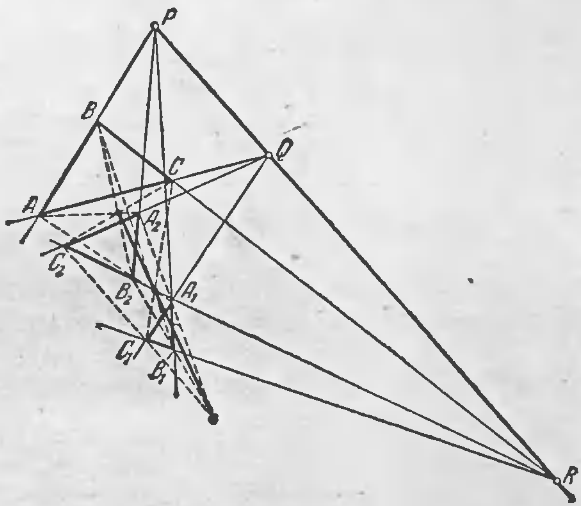


Черт. 31.

126. Теорема о трижды перспективных треугольниках. Пусть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ обладают тем свойством, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, прямые AA_1, BC_1 и CB_1 пересекаются в одной точке O_1 и прямые AC_1, BB_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_2 (черт. 31).

Докажите, что в этом случае и прямые AB_1, BA_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O_3 (другими словами, треугольники, перспективные тремя способами так, как это указано в условии задачи, перспективны и четвёртым способом).

127. На плоскости даны три треугольника ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, такие, что прямые AB, A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в одной точке P, прямые AC, A_1C_1 и A_2C_2 пересекаются



Черт. 32.

в одной точке Q, прямые BC, B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в одной точке R и точки P, Q и R лежат на одной прямой.

Докажите, что в этом случае три точки, в которых в силу теоремы Дезарга (задача 123) сходятся прямые AA_1, BB_1 и CC_1; AA_2, BB_2 и CC_2; A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой (черт. 32).

[Теорему задачи 127 можно коротко сформулировать следующим образом: если оси перспективы трёх попарно перспективных треугольников совпадают, то их центры перспективы лежат на одной прямой.]

128. Впишите в данный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ другой n-угольник так, чтобы его стороны проходили через n известных точек, расположенных на одной прямой[1]).

Значительным обобщением задачи 128 является задача 189 из § 5 (стр. 122).

129. а) Даны две прямые l и l_1, точки A, B, C, расположенные на прямой l, и точки A_1, B_1, C_1, расположенные на прямой l_1. Докажите, что точки пересечения прямых AB_1 и A_1B, AC_1 и A_1C, BC_1 и B_1C лежат на одной прямой (черт. 33, *а*).

б) Даны две точки O и O_1 и прямые l, m, n, проходящие через точку O, и l_1, m_1, n_1, проходящие через точку O_1. Точки пересечения прямых l и m_1, m и n_1, n и l_1; l_1 и m, m_1 и n, n_1 и l обозначим соответственно через P, Q, R; P_1, Q_1, R_1 (черт. 33, *б*). Докажите, что прямые PP_1, QQ_1 и RR_1 пересекаются в одной точке.

Отметим, что задачи 129а) и б) могут быть также сформулированы следующим образом:

а) Если вершины A, B, C (невыпуклого или даже самопересекающегося) шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ лежат на прямой l, а вершины A_1, B_1, C_1 — на прямой l_1, то точки пересечения противоположных сторон этого шестиугольника лежат на одной прямой.

б) Если стороны PQ_1, QR_1, RP_1 (невыпуклого или даже самопересекающегося) шестиугольника $PQ_1RP_1QR_1$ проходят через точку O_1, а стороны P_1Q, Q_1R, R_1P — через точку O, то диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке.

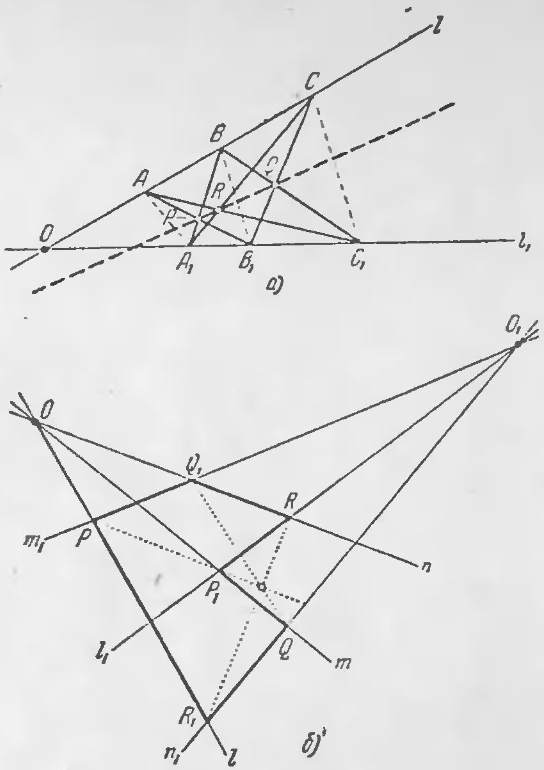
В такой форме предложения этих задач оказываются очень похожими на предложения задач 145 и 146 из § 3 настоящей главы, стр. 80 (сравните также решение задачи 174, стр. 110, и 179, стр. 115, из § 5)[2]).

---

[1]) Слово «вписанный» здесь понимается в том же смысле, что и в задаче 124а), являющейся частным случаем настоящей (см. сноску на стр. 43).

[2]) Эта аналогия не является случайной, однако выяснение её причин опирается на общую теорию конических сечений, от изложения которой в рамках настоящей книги пришлось отказаться, чтобы не слишком увеличить объём книги. По этому поводу см., например, книгу Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена, цитированную на стр. 43.

Заметим ещё, что предложению задачи 129а) можно придать следующую весьма наглядную форму: если четырёхугольник ACC_1A_1 разбит произвольной прямой BB_1 на два



Черт. 33.

новых четырёхугольника ABB_1A_1 и BCC_1B_1 (черт. 33, *а*), то точки пересечения диагоналей трёх четырёхугольников ABB_1A_1, BCC_1B_1 и ACC_1A_1 лежат на одной прямой.

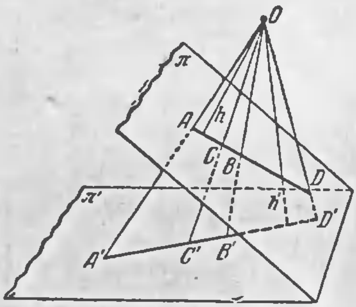
130. а) В какое предложение перейдёт теорема задачи 129а), если спроектировать черт. 33, *а* с плоскости π на другую плоскость π' так, чтобы прямая l_1 была выделенной прямой плоскости π?

б) На плоскости даны четыре прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения высот четырёх треугольников, образованных этими четырьмя прямыми, лежат на одной прямой.

В другой связи задача 130б) была приведена в § 1 гл. II второй части книги (см. задачу 87).

131. В какое предложение перейдёт теорема задачи 129б), если спроектировать черт. 33, *б* с плоскости π на другую плоскость π' так, чтобы прямая OO_1 была выделенной прямой плоскости π?

Свойства А и Б центрального проектирования в какой-то мере заменяют свойства А и Б параллельного проектирования (см. выше стр. 18). Попытаемся теперь найти какую-нибудь замену свойству В параллельного проектирования.



Черт. 34.

Пусть при центральном проектировании с центром проекции в точке O отрезок AB плоскости π переходит в отрезок $A'B'$ плоскости π' (черт. 34); посмотрим, как изменится длина этого отрезка. Воспользуемся тем, что площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся как произведения сторон, заключающих эти углы $\left(\text{это следует, например, из известной формулы } S = \frac{1}{2} ab \sin C\right)$. Поэтому, обозначая через h и h' расстояния от точки O до прямых AB и $A'B'$, мы будем иметь:

$$\frac{h'\cdot A'B'}{h\cdot AB}=\frac{OA'\cdot OB'}{OA\cdot OB}\left(=\frac{S_{\triangle OA'B'}}{S_{\triangle OAB}}\right),$$

или

$$A'B'=AB\cdot\frac{OA'\cdot OB'}{OA\cdot OB}\cdot\frac{h}{h'}.$$

Отсюда следует, что если A, B, C — три произвольные точки на прямой l плоскости π, а A', B', C' — точки плоскости π', в которые они проектируются, то

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC\cdot\dfrac{OA'\cdot OC'}{OA\cdot OC}\cdot\dfrac{h}{h'}}{BC\cdot\dfrac{OB'\cdot OC'}{OB\cdot OC}\cdot\dfrac{h}{h'}}=\frac{AC}{BC}\cdot\left(\frac{OA'}{OA}:\frac{OB'}{OB}\right). \qquad (*)$$

Таким образом, в противоположность параллельному проектированию, здесь, вообще говоря, $\frac{A'C'}{B'C'}\neq\frac{AC}{BC}$. Однако если мы составим отношение двух отношений, в которых делят отрезок AB две точки C и D прямой AB (черт. 34), то мы, очевидно, получим:

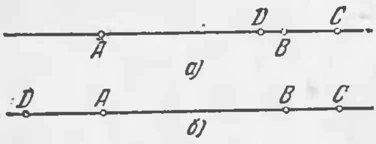
$$\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'D'}{B'D'}=\left(\frac{AC}{BC}\cdot\frac{OA'}{OA}:\frac{OB'}{OB}\right):\left(\frac{AD}{BD}\cdot\frac{OA'}{OA}:\frac{OB'}{OB}\right)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}.$$

Выражение $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ называется **двойным** или **сложным отношением**, в котором две точки C и D делят отрезок AB, или двойным отношением четырёх точек A, B; C, D.

Таким образом, мы пришли к следующему результату:

В. *При центральном проектировании сохраняется двойное отношение четырёх точек A, B; C, D, расположенных на одной прямой.*

Двойное отношение четырёх точек есть отношение двух простых отношений $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AD}{BD}$. Так как простое отношение может быть положительным или отрицательным (см. стр. 77 первого тома), то естественно считать, что и **двойное отношение может быть положительным или отрицательным**. Очевидно, двойное отношение четырёх точек A, B; C, D будет положительным, если обе точки C, D находятся внутри или вне отрезка AB (в этом случае отношения $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AD}{BD}$ будут или оба отрицательны или оба положительны), и отрицательным, если одна из точек C, D находится внутри отрезка AB, а другая — вне этого отрезка (в этом случае одно из отношений $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AD}{BD}$ будет положительно, а другое — отрицательно). Другими словами, можно сказать, что двойное отношение четырёх точек A, B; C, D будет отрицательно, если пары точек A, B и C, D разделяют друг друга (черт. 35, *а*), и положительно в противном случае (черт. 35, *б*). Отсюда можно заключить, что



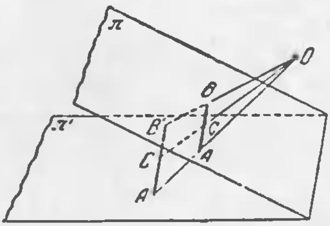
Черт. 35.

знак двойного отношения четырёх точек сохраняется при центральном проектировании, т. е. свойство В остаётся в силе и в том случае, если учитывать знак двойного отношения: действительно, если пары точек A, B и C, D разделяют (не разделяют) друг друга, то и пары прямых OA, OB и OC, OD разделяют (не разделяют) друг друга и, следовательно, пары точек A', B' и C', D', в которые проектируются пары A, B и C, D, разделяют (не разделяют) друг друга[1]).

Отметим ещё, что если прямая AB параллельна выделенной прямой плоскости π (т. е. параллельна линии пересечения плоскостей π и π'; черт. 36), то, очевидно, $AB \parallel A'B'$ и $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$. Поэтому формула (*) в этом случае даёт

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC},$$

или словами: *при центральном проектировании сохраняется отношение двух отрезков прямой, параллельной выделенной прямой плоскости.*



Черт. 36.

Относительно сложное свойство В центрального проектирования будет играть в нашем элементарном изложении сравнительно небольшую роль (исключение в этом отношении составляет последний параграф настоящей главы, в котором весьма существенно используется свойство В), однако оно является основным во всех более глубоких теориях, связанных с центральным проектированием.

[1]) Заметим, что аналогично этому при параллельном проектировании простое отношение трёх точек одной прямой тоже, очевидно, сохраняется не только по величине, но и по знаку.

Если рассматривать отношение $AC:BC$, в котором данная точка C делит отрезок AB, то можно выделить случай, когда точка C является серединой AB, т. е. когда $|AC|=|BC|$ (мы ставим чёрточки, чтобы подчеркнуть, что эти отрезки равны по абсолютной величине, но противоположны по направлению), или $AC:BC=-1$. Точно так же, если рассматривать двойное отношение $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$, в котором пара точек C, D делит отрезок AB, можно особо выделить тот случай, когда $\left|\frac{AC}{BC}\right|=\left|\frac{AD}{BD}\right|$ или $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=-1$ (если точка C отлична от точки D, — а, разумеется, только этот случай и может представлять интерес,— то отношения $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AD}{BD}$ должны иметь разные знаки). В этом случае одна из точек C, D находится внутри отрезка AB, а вторая — вне этого отрезка, причём отношения $\frac{AC}{BC}$ и $\frac{AD}{BD}$ равны по абсолютной величине (черт. 37). При этом говорят, что точки C и D **гармонически** делят отрезок AB (или что пара точек C, D **гармонически сопряжена** паре точек A, B).

Черт. 37.

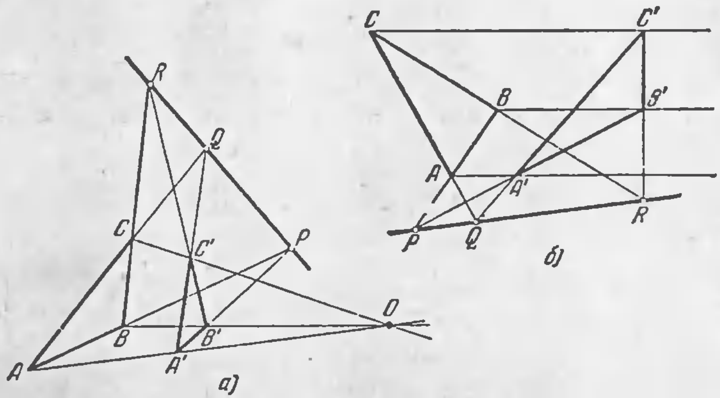
Выше мы видели, что в вопросах, связанных с параллельным проектированием, очень часто фигурируют середины отрезков (см., например, задачи 107, 108, 109а), 110, 112а), 115, решения задач 109б), 111, 112б), доказательство теоремы 3 из стр. 27—30, в котором существенную роль играют средние линии некоторых параллелограммов, и т. д.). Аналогично этому в вопросах, связанных с центральным проектированием, часто встречаются пары точек, гармонически делящие какой-то отрезок. Так, например, геометрическое место задачи 118а) — поляру точки P относительно пары прямых l_1 и l_2 — можно определить как геометрическое место таких точек M всех проходящих через точку P секущих, что точки P и M делят гармонически отрезок, высекаемый на секущей прямыми l_1 и l_2; точка Q задачи 118б) есть такая точка прямой AB, что Q и P делят гармонически отрезок AB[1]), и т. д. Доказательства всех этих утверждений легко получить, если воспользоваться свойством В центрального проектирования.

Отметим ещё одну неточность, которая имелась в предыдущем изложении. Наличие на плоскостях π и π' двух выделенных прямых x и y', точки первой из которых никуда не

---

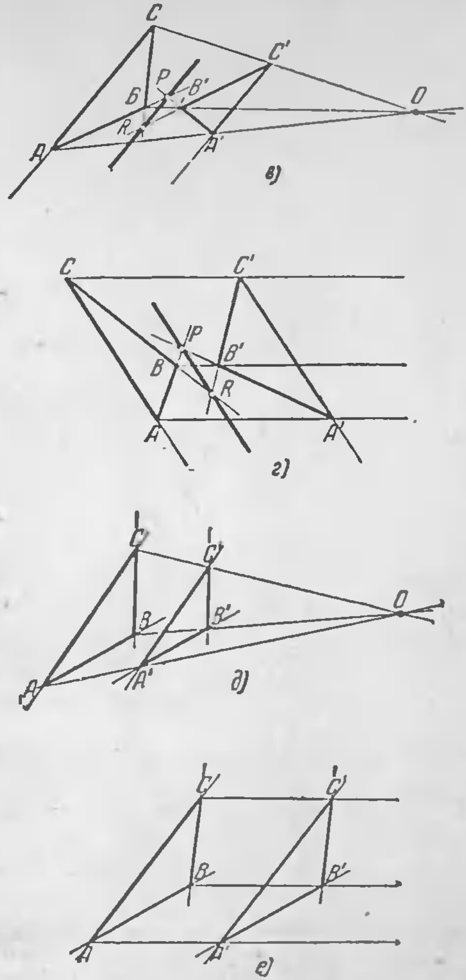
[1]) Тот факт, что точки Q и P задачи 118б) делят гармонически отрезок AB, часто формулируют так: *любые две диагонали полного четырёхсторонника делят гармонически третью его диагональ* (см. выше стр. 24—25). Предоставляем читателю доказать самостоятельно, что эта теорема равносильна нашему утверждению.

проектируются, а в точки второй не проектируются никакие точки, создаёт необходимость многочисленных оговорок во всех предложениях, связанных с центральным проектированием; выше эти оговорки, как правило, опускались. Так, например, формулировка теоремы Дезарга (см. задачу 123), строго говоря, является неправильной, так как она не оговаривает ряда особых случаев, возникающих из-за того, что при центральном



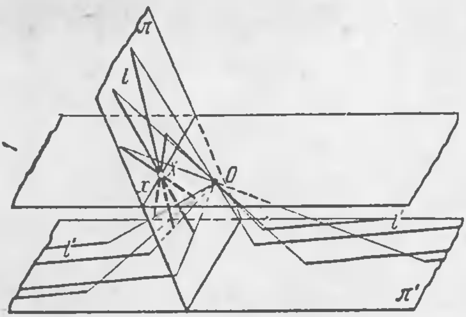
Черт. 38, *а*, *б*.

проектировании прямые, пересекающиеся в одной точке (например, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 или AB, A_1B_1 и PQ на черт. 29), могут перейти не только в прямые, пересекающиеся в одной точке, но и в параллельные прямые. Полная формулировка теоремы Дезарга должна иметь следующий вид: *если два треугольника расположены на плоскости так, что прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке или параллельны между собой, то либо точки пересечения соответствующих сторон треугольников лежат на одной прямой* (черт. 38, *а*, *б*), *либо одна пара соответствующих сторон параллельна прямой, соединяющей точки пересечения двух других пар соответствующих сторон* (черт. 38, *в*, *г*), *либо каждая сторона одного треугольника параллельна соответствующей стороне второго треугольника* (черт. 38, *д*, *е*), *и обратно*. Мы видим, насколько громоздкой и трудной для понимания является эта полная формулировка. Аналогичное замечание можно сделать и относительно многих других задач.



Черт. 38, *в—е*.

Для того чтобы устранить все осложнения, связанные с особым положением выделенных прямых, мы будем говорить, что выделенная прямая x плоскости π проектируется в «бесконечно удалённую прямую» плоскости π' и что в выделенную прямую y' плоскости π' проектируется «бесконечно удалённая прямая» плоскости π. При этом следует иметь в виду, что эта терминология чисто условна: выражение «прямая x проектируется в бесконечно удалённую прямую» равносильно следующему: «прямая x ни во что не проектируется». Про каждую точку X выделенной прямой x мы будем говорить, что эта точка проектируется в «бесконечно удалённую точку» плоскости π'; совокупность прямых, проходящих через точку X, проектируется в совокупность параллельных между собой прямых (черт. 39), про которые мы будем говорить, что все они пересекаются в одной «бесконечно удалённой точке»[1]). Таким образом, каждая прямая l плоскости имеет одну «бесконечно удалённую точку», в которой эта прямая пересекается со всеми параллельными ей прямыми, а все бесконечно удалённые точки всех прямых плоскости лежат на одной «бесконечно удалённой прямой».

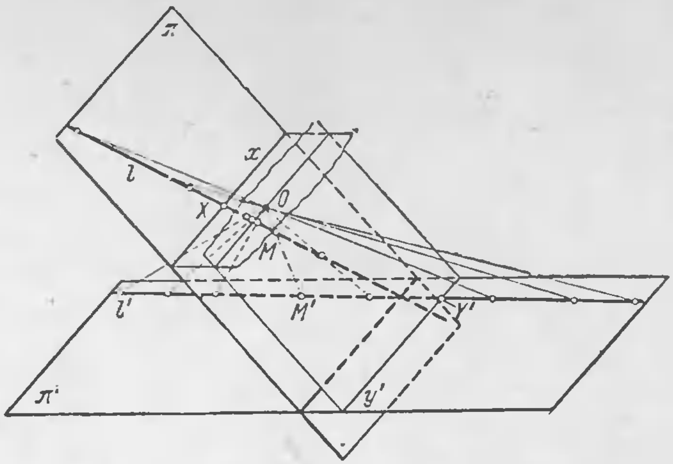


Черт. 39.

Эта терминология имеет следующий смысл. Если точка M прямой l приближается к точке X пересечения l и x, то проекция этой точки на плоскость π' неограниченно удаляется (в одну или в другую сторону прямой l' в зависимости от того, с какой стороны приближается точка M к точке X; см. черт. 40).

[1]) То обстоятельство, что каждой «бесконечно удалённой точке» плоскости отвечает совокупность параллельных между собой прямых, «проходящих через эту точку», позволяет отождествлять «бесконечно удалённые точки» с направлениями плоскости. При этом, например, выражение «прямая, проведённая через данную точку A и данную бесконечно удалённую точку B» означает прямую, проведённую через A в направлении, отвечающем «бесконечно удалённой точке» B, и т. д.

Точно так же, если точка M прямой l движется в одну или в другую сторону этой прямой, неограниченно удаляясь, то проекция этой точки приближается к точке Y' пересечения прямой l' с прямой y' (черт. 40)[1].



Черт. 40.

Отношение $\frac{AD}{BD}$, где D есть «бесконечно удалённая точка» прямой AB, естественно считать равным единице (отношение $\frac{AM}{BM}$ стремится к единице, когда точка M «стремится к бесконечно удалённой точке D», т. е. неограниченно удаляется вдоль прямой AB в одну или в другую сторону). В связи с этим двойное отношение $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$, где D — «бесконечно удалённая точка», следует считать равным простому отношению $\frac{AC}{BC}$. Нетрудно проверить, что свойство В центрального проектирования при этом сохраняется и тогда, когда какая-

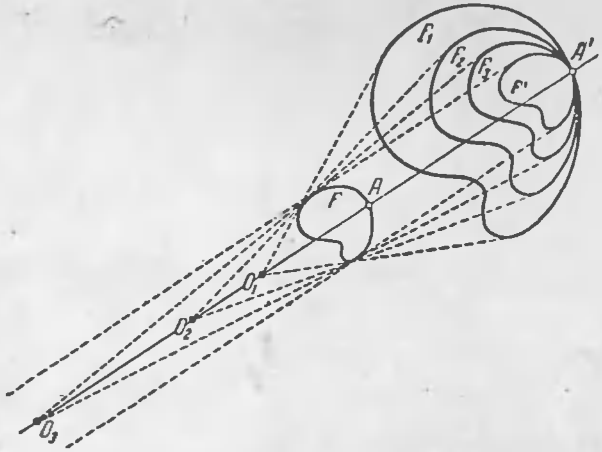
[1]) Отметим, что оказывается целесообразным говорить об одной «бесконечно удалённой точке» прямой, несмотря на то, что из соображений наглядности хочется считать, что прямая имеет две такие точки, отвечающие двум её направлениям.

либо из точек A, B, C, D является «бесконечно удалённой» или проектируется в «бесконечно удалённую».

Введение «бесконечно удалённой прямой» и «бесконечно удалённых точек» позволяет охватить одной общей формулировкой ряд частных предложений, имеющих одинаковые доказательства (ибо при центральном проектировании не существующие «бесконечно удалённые точки» равноправны с настоящими точками — одни могут переходить в другие). Так, например, все частные случаи теоремы Дезарга, перечисленные на предыдущей странице, охватываются первоначальной формулировкой этой теоремы (задача 123), если только считать, что как точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1, так и точки пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ могут быть и обыкновенными и «бесконечно удалёнными».

Плоскость, дополненную таким образом фиктивными «бесконечно удалёнными» точками и прямой, называют **проективной плоскостью**.

Введение «бесконечно удалённых» точек и прямой иногда может оказаться полезным и в вопросах, не связанных с центральным проектированием. Так, например, удобно отождествлять параллельный перенос с центрально-подобным преобразованием с центром подобия в «бесконечно удалённой точке» плоскости, отвечающей направлению переноса, и коэффициентом подобия, равным единице. [Это связано с тем, что если рассматривать всевозможные фигуры F_1, F_2, F_3, $\ldots$, центрально-подобные данной фигуре F, причём такие, что какой-то точке A фигуры F соответствует фиксированная точка A', то при неограниченном удалении центров подобия O_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ вдоль прямой AA' фигура F_i будет всё более походить на фигуру F', получающуюся из F параллельным переносом на расстояние AA', а коэффициент подобия $\frac{O_iA'}{O_iA}$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ будет стремиться к единице; см. черт. 41.] При этом условии отпадает необходимость выделять частные случаи, которые имеют место в ряде теорем, относящихся к центрально-подобным фигурам. Так, например, теперь можно утверждать, что две окружности **всегда** можно двумя способами рассматривать как центрально-подобные (см. § 1 гл. I второй части книги). Сумма двух центрально-подобных преобразований (каждое из которых может иметь конечный или «бесконечно удалённый» центр) будет снова являться центрально-подобным преобразованием (с конечным или «бесконечно удалённым» центром; см. § 1 гл. I первой части и § 1 гл. I второй части). Теорема о трёх центрах подобия теперь может быть короче сформулирована так: три центра подобия трёх попарно центрально-подобных фигур всегда лежат на одной прямой, эта формулировка охватывает случаи, когда один из трёх центров подобия является «бесконечно удалёным» (две из трёх фигур равны) и когда все три центра подобия — «бесконечно удалённые», а ось подобия есть «бесконечно удалённая прямая» (все три фигуры попарно равны), а также случай, когда все три центра подобия совпадают. Три окружности с нашей новой точки зрения всегда будут иметь шесть попарных центров подобия, расположенных по три на четырёх осях подобия (относительно различных частных случаев, охватываемых этой теоремой, см. § 1 гл. I

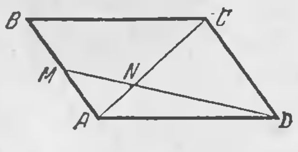


Черт. 41.

второй части книги). Теорема 2 § 2 гл. I второй части принимает теперь более простой вид, так как скользящую симметрию мы можем считать частным случаем центрально-подобной симметрии и случай, когда F переводится в F' скользящей симметрией, уже не надо оговаривать отдельно. Теорема 2 § 2 гл. II первой части является с нашей новой точки зрения просто частным случаем теоремы 2 § 2 гл. I второй части (что объясняет очень большое сходство формулировок и доказательств этих двух теорем). Иногда также удобно рассматривать параллельный перенос как вращение, центром которого является «бесконечно удалённая точка», соответствующая направлению, перпендикулярному к направлению переноса; при этом все теоремы о сложении собственных движений (см. первую часть книги) можно будет охватить одной формулировкой.

132. а) Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что если прямая DM отсекает от стороны AB отрезок $AM = \frac{1}{n} AB$, то она отсекает от диагонали AC отрезок $AN = \frac{1}{n+1} AC$

(на черт. 42 $n=2$). Во что перейдёт это предложение, если спроектировать плоскость чертежа на другую плоскость так, чтобы прямая AB была параллельна выделенной прямой плоскости?



Черт. 42

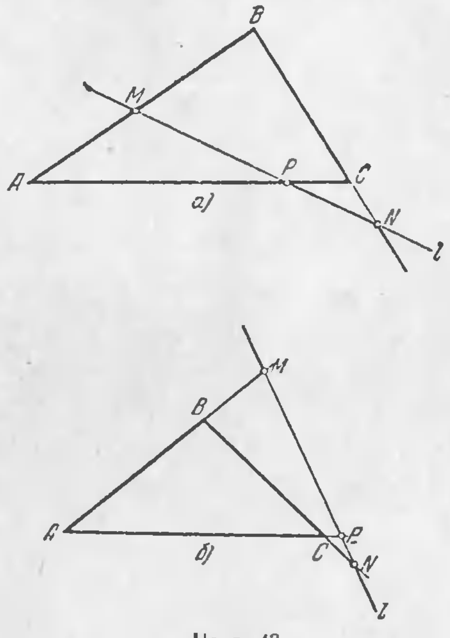
б) На плоскости даны две параллельные прямые l и l_1 и отрезок AB на l. Разделите отрезок AB на n равных частей с помощью одной линейки.

133. В какую теорему перейдёт теорема о полном четырёхстороннике (см. задачу 115 из § 1 на стр. 24 и относящийся к ней текст), если спроектировать черт. 14 так, чтобы прямая ABE была выделенной?

134. а) Используя свойства центрального проектирования, докажите теорему Менелая: три точки M, N, P, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC (или на их продолжениях), лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

(черт. 43).



Черт. 43.

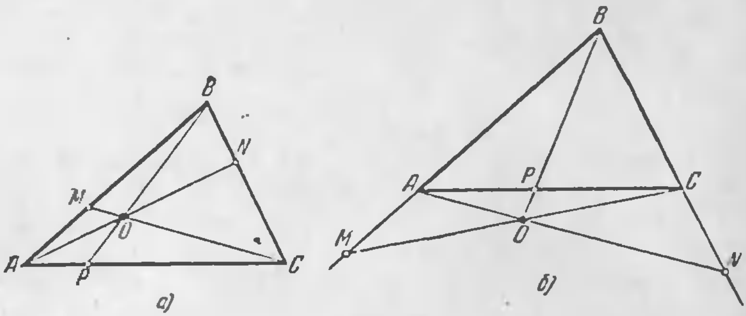
б) Используя свойства центрального проектирования, докажите теорему Чева: три прямые AN, BP и CM, где M, N, P — точки, расположенные на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (или на их продолжениях), пересекаются в одной точке или параллельны в том и только в том случае, когда

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$

(черт. 44).

См. также задачи 57а), б) из § 1 гл. I второй части книги и 117 из § 1 настоящей главы (стр. 25); относительно связи между теоремами Менелая и Чева см. задачу 165 из § 4 настоящей главы (стр. 100).

Нетрудно видеть, что если точки M, N и P лежат на одной прямой, то на сторонах (не на продолжениях сторон!) треугольника ABC из них расположены две точки или же ни одной (черт. 43, a, $б$); поэтому из трёх отношений $\frac{AM}{BM}$, $\frac{BN}{CN}$, $\frac{CP}{AP}$ отрицательными являются или два, или ни одного



Черт. 44.

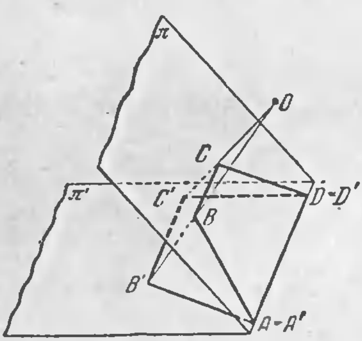
и произведение трёх отношений обязательно положительно. Точно так же, если прямые AN, BP и CM пересекаются в одной точке (черт. 44, a, $б$) или параллельны, то из точек M, N, P на сторонах треугольника (не на продолжениях!) лежат все три или одна; поэтому из отношений $\frac{AM}{BM}$, $\frac{BN}{CN}$, $\frac{CP}{AP}$ положительными являются или два, или ни одного и произведение трёх отношений отрицательно.

Теоремы Менелая и Чева часто находят применение в задачах, где требуется доказать, что три точки лежат на одной прямой или три прямые пересекаются в одной точке. Так, с помощью теоремы Менелая можно доказать предложения задач 85 из первого тома книги, 115, 122б), 123, 127, 129а), 137б), 144, 145, 167, теоремы задач 170, 172а), б) и т. д.;

с помощью теоремы Чева можно доказать, что три медианы, три биссектрисы, три высоты пересекаются в одной точке, а также предложения задач 50б), в) из первого тома 111, 114, 122а), 123, 125, 126, 129б), 137а), 138а), б), 139а), б), 146, 149, 156, теорему задачи 169 и т. д. Мы рекомендуем читателю попытаться самостоятельно провести эти доказательства (см. также по этому поводу цитированные на стр. 606 книги Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии, ч. 2 и книгу Д. И. Перепёлкин, Курс элементарной геометрии, ч. 1, М. — Л., Гостехиздат, 1948).

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 1. *Пусть даны четыре точки A, B, C, D плоскости π, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четыре точки M, N, P, Q плоскости π', никакие три из которых тоже не лежат на одной прямой. При помощи центрального (или параллельного) проектирования плоскости π на плоскость π' четырёхугольник $ABCD$ можно перевести в четырёхугольник $A'B'C'D'$, подобный $MNPQ$* [1]).



Черт. 45.

Отметим прежде всего, что доказательство теоремы 1 не представляет затруднений, если четырёхугольники $ABCD$ и $MNPQ$ являются трапециями: $AD \parallel BC$, $MQ \parallel NP$. Рассмотрим в этом случае трапецию $A'B'C'D'$ плоскости π', подобную $MNPQ$, и такую, что $A'D' = AD$. Придадим плоскости π такое положение в пространстве, чтобы отрезок AD совпал с отрезком $A'D'$, а точки B и C расположились вне плоскости π' (черт. 45). Соединим точки B и B', C и C'. Прямые BB' и CC' будут лежать в одной плоскости: так как $BC \parallel AD$, $AD \parallel B'C'$, то отрезки BC и $B'C'$ параллельны и, следовательно, лежат

[1]) Точнее, вершины четырёхугольника $ABCD$ можно перевести в вершины четырёхугольника $A'B'C'D'$, подобного $MNPQ$ (ср. с подстрочным примечанием на стр. 377 решений).

в одной плоскости. Если прямые BB' и CC' пересекутся в некоторой точке O, то центральное проектирование с центром в O переводит $ABCD$ в $A'B'C'D'$; если $BB' \parallel CC'$, то параллельное проектирование в направлении этих прямых переводит $ABCD$ в $A'B'C'D'$.

Покажем, что общий случай можно привести к рассмотренному частному случаю. Пусть теперь $ABCD$ и $MNPQ$ — два произвольных четырёхугольника, расположенных соответственно в плоскостях π и π' (черт. 46)[1]; предположим, что при некотором центральном (или параллельном) проектировании π на π' четырёхугольник $ABCD$ переходит в четырёхугольник $A'B'C'D'$, подобный $MNPQ$. Покажем, что, зная $ABCD$ и $MNPQ$, мы можем найти выделенную прямую плоскости π. Пусть E, E', R — точки пересечения сторон AB и CD, $A'B'$ и $C'D'$, MN и PQ четырёхугольников $ABCD$, $A'B'C'D'$ и $MNPQ$; в силу свойства А центрального проектирования точка E перейдёт в E'. Если X_1' есть «бесконечно удалённая точка» прямой $A'B'$, то в силу свойства В центрального проектирования в X_1' переходит такая точка X_1 прямой AB, что

$$\frac{AE}{BE} : \frac{AX_1}{BX_1} = \frac{A'E'}{B'E'} = \frac{MR}{NR}$$

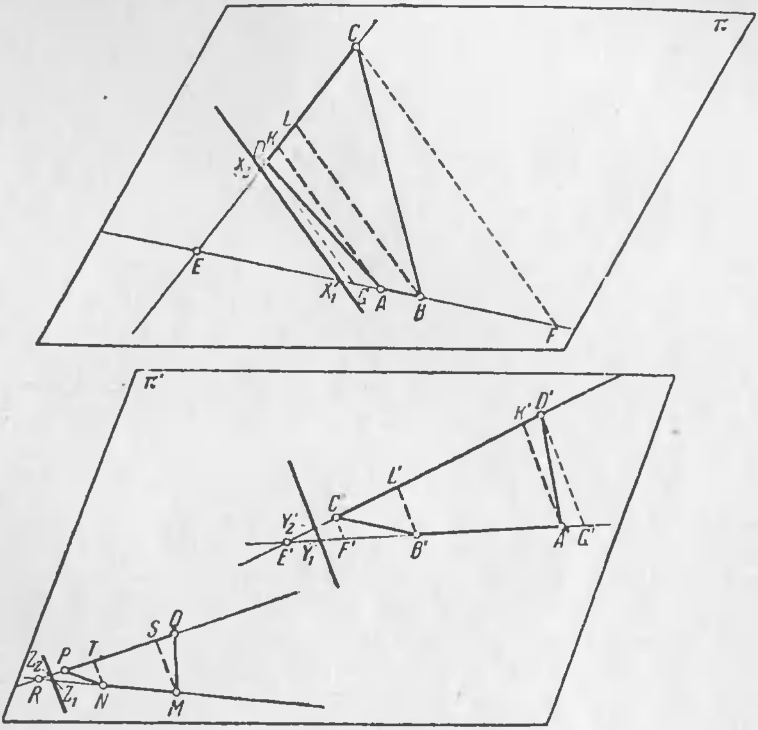
(так как $\frac{A'E'}{B'E'} : \frac{A'X_1'}{B'X_1'} = \frac{A'E'}{B'E'}$; ср. стр. 55). Из этого условия мы можем определить отношение $\frac{AX_1}{BX_1}$ (по величине и по знаку!) и найти точку X_1. Точно так же соотношение $\frac{CE}{DE} : \frac{CX_2}{DX_2} = \frac{C'E'}{D'E'} = \frac{PR}{QR}$ определяет точку X_2 прямой DC, которая переходит в «бесконечно удалённую точку» X_2' прямой $D'C'$[2]).

---

[1]) На черт. 46 четырёхугольники $ABCD$ и $MNPQ$ — оба выпуклые; однако рассуждения почти не изменятся и в том случае, когда один из них или оба невыпуклые.

[2]) Если в «бесконечно удалённую точку» прямой $A'B'$ переходит точка E прямой AB (т. е. если $A'B' \parallel C'D'$), то мы будем рассматривать вместо прямых AB и CD прямые AD и BC. Если и точка E и точка I пересечения прямых AD и BC переходят в «бесконечно удалённые точки» (т. е. если $A'B'C'D'$ — параллелограмм), то выделенной прямой плоскости π будет являться прямая EI. В этом последнем случае теорема 1 допускает также и чисто геометрическое доказательство (см., например, книгу Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, изд. 5-е, М. — Л., Гостехиздат, 1950, задача 503, где доказывается, что всякий четырёхугольник можно центральным проектированием перевести в квадрат).

Прямая X_1X_2 и есть выделенная прямая плоскости π. Аналогично этому в плоскости π' четырёхугольника $A'B'C'D'$ можно определить выделенную прямую $Y_1'Y_2'$ (черт. 46; точки Y_1' и



Черт. 46

Y_2' определяются равенствами $\frac{AE}{BE} = \frac{A'E'}{B'E'} : \frac{A'Y_1'}{B'Y_1'}$ и $\frac{CE}{DE} = \frac{C'E'}{D'E'} : \frac{C'Y_2'}{D'Y_2'}\Big)$.

Проведём через точки A и B прямые AK и BL, параллельные выделенной прямой X_1X_2; пусть K и L — точки пересечения этих прямых с прямой CD. В силу свойства Б центрального проектирования параллельные прямые AK и BL переходят в параллельные прямые; таким образом, наше центральное проектирование переводит трапецию $ABLK$ в трапецию $A'B'L'K'$ (где $A'K' \parallel B'L' \parallel Y_1'Y_2'$). При этом, зная четырёхугольники $ABCD$ и $MNPQ$, мы можем найти трапецию $ABLK$ и трапецию $MNTS$, подобную $A'B'L'K'$. [Для этого надо найти на прямых MN и PQ точки Z_1 и Z_2, такие, что

$$\frac{MR}{NR}:\frac{MZ_1}{NZ_1}=\frac{A'E'}{B'E'}:\frac{A'Y_1'}{B'Y_1'}=\frac{AE}{BE}$$

и

$$\frac{PR}{QR}:\frac{PZ_2}{QZ_2}=\frac{C'E'}{D'E'}:\frac{C'Y_2'}{D'Y_2'}=\frac{CE}{DE},$$

и провести $MS \parallel NT \parallel Z_1Z_2$.]

Переведём теперь центральным (или параллельным) проектированием трапецию $ABLK$ в трапецию $A'B'L'K'$, подобную $MNTS$; выше мы видели, что это всегда возможно. Наша теорема будет доказана, если мы покажем, что это проектирование переводит четырёхугольник $ABCD$ в четырёхугольник $A'B'C'D'$, т. е. что оно переводит точки C и D в точки C' и D'. Отметим прежде всего, что выделенной прямой плоскости π при этом проектировании обязательно является найденная выше прямая X_1X_2: действительно, выделенная прямая параллельна AK и BL (в силу свойства Б центрального проектирования[1])) и проходит через точку X_1 (ибо точка E пересечения AB и KL переходит в точку E' пересечения $A'B'$ и $K'L'$ и точка X_1, такая, что $\frac{AE}{BE}:\frac{AX_1}{BX_1}=\frac{A'E'}{B'E'}$, переходит в «бесконечно удалённую точку»). Точно так же показывается, что выделенной прямой плоскости π' является прямая $Y_1'Y_2'$. Так как точки E, X_2 и «бесконечно удалённая точка» прямой KL переходят соответственно в E', «бесконечно удалённую точку» и точку Y_2' прямой $K'L'$, то в силу свойства В центрального проектирования точка C перейдёт в такую точку $\overline{C}$ прямой $K'L'$, что

$$\frac{EX_2}{CX_2}:1=1:\frac{E'Y_2'}{\overline{C}Y_2'};$$

следовательно,

$$\overline{C}Y_2'=E'Y_2'\cdot\frac{EX_2}{CX_2}.$$

---

[1]) Это можно усмотреть так же и из того, как осуществляется центральное (или параллельное) проектирование, переводящее трапецию в трапецию (см. стр. 60—61).

Докажем теперь, что точка $\overline{C}$ совпадает с точкой C'. Переведём при помощи центрального (или параллельного) проектирования и последующего преобразования подобия изображённую на черт. 46 трапецию $CDGF$ (где $CF \parallel DG \parallel X_2X_1$) в трапецию $C'D'G'F'$ (где $C'F' \parallel D'G' \parallel Y_2'Y_1'$); это возможно в силу доказанного выше. При этом точка E перейдёт в E', точка X_2 прямой CD перейдёт в «бесконечно удалённую точку» X_2' прямой $C'D'$ и «бесконечно удалённая точка» Y_2 прямой CD перейдёт в точку Y_2' $\left(\text{ибо } \frac{CE}{DE}:\frac{CX_2}{DX_2}=\frac{C'E'}{D'E'}\right.$ и $\frac{CE}{DE}=\frac{C'E'}{D'E'}:\frac{C'Y_2'}{D'Y_2'}$ по определению точек X_2 и $Y_2'$$\Big)$. Поэтому в силу свойства В проектирования

$$\frac{EX_2}{CX_2}:1=1:\frac{E'Y_2'}{C'Y_2'}$$

и

$$C'Y_2'=E'Y_2'\cdot\frac{EX_2}{CX_2}.$$

Отсюда следует, что точка $\overline{C}$ совпадает с C'. Точно так же доказывается, что при центральном проектировании, переводящем $ABLK$ в $A'B'L'K'$, точка D переходит в точку $\overline{D}$, совпадающую с D'; значит, четырёхугольник $ABCD$ переходит в $A'B'C'D'$.

Нетрудно перенести доказательство теоремы 1 и на тот случай, когда некоторые из точек A, B, C, D или A', B', C', D' являются «бесконечно удалёнными».

135. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырёхугольник; B_1, B_2, B_3, B_4 — точки пересечения его сторон с прямыми, соединяющими точку N пересечения диагоналей четырёхугольника с точками P и Q пересечения противоположных сторон. Точки пересечения сторон четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ и вписанного в него четырёхугольника $B_1B_2B_3B_4$ обозначим буквами M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 и M_8, как указано на черт. 47. Докажите, что:

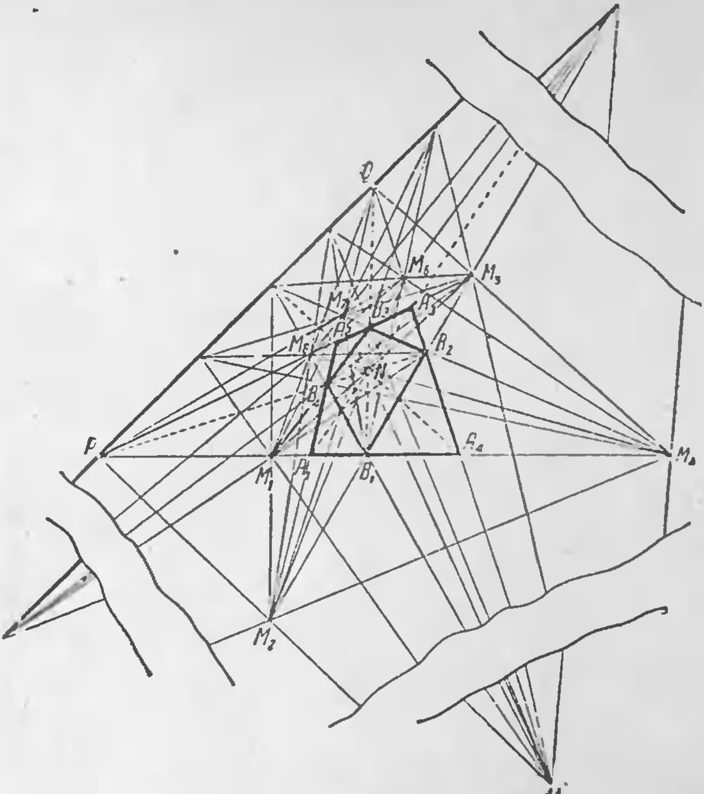
а) прямые M_1M_5, M_2M_6, M_3M_7 и M_4M_8 проходят через точку N;

б) прямые M_2M_3 и M_6M_7 проходят через точку P; прямые M_1M_8 и M_4M_5 проходят через точку Q;

в) прямые M_1M_2, M_3M_8, M_4M_7 и M_5M_6 проходят через точку пересечения прямой PQ и диагонали A_2A_4; прямые

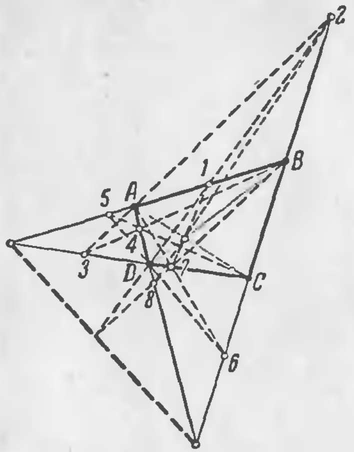
M_3M_4, M_2M_5, M_1M_6 и M_7M_8 проходят через точку пересечения прямой PQ и диагонали A_1A_3;

г) четвёрки прямых M_1M_3, M_5M_7, B_4M_4 и B_2M_8; M_2M_4, M_6M_8, B_4M_5 и B_2M_1; M_3M_5, M_1M_7, B_1M_6 и B_3M_2; M_4M_6, M_2M_8, B_1M_7 и B_3M_3 сходятся в четырёх точках прямой PQ.



Черт. 47.

136. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ взята произвольная точка *1*. Из D как из центра точка *1* проектируется в точку *2* прямой BC; затем из A как из центра точка *2* проектируется в точку *3* прямой CD; из B как из центра точка *3* проектируется в точку *4* прямой DA; из C как из центра точка *4* проектируется в точку *5* прямой AB и т. д. (черт. 48). Докажите, что:



Черт. 48.

а) точка *13* стороны AB, к которой мы приходим, обойдя три раза четырёхугольник, совпадает с заданной точкой *1* (и, следовательно, точка *14* совпадает с точкой *2*, точка *15* — с точкой *3* и т. д.);

б) прямые *1—7*, *2—8*, *3—9* и т. д. (т. е. прямые, проходящие через точки *1* и *7*, *2* и *8*, *3* и *9* и т. д.) проходят через точку пересечения диагоналей четырёхугольника;

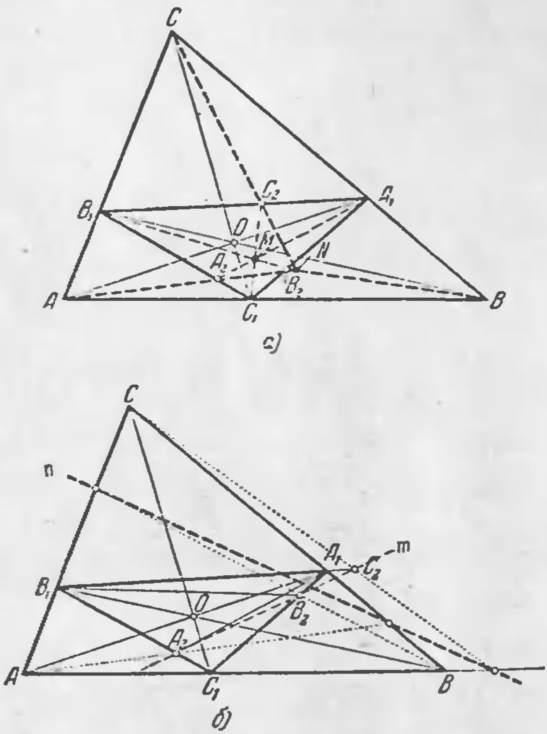
в) прямые *1—2* и *7—8*; *2—3* и *8—9*; *3—4* и *9—10* и т. д. пересекаются на прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника.

137. В плоскости треугольника ABC дана точка O; A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения прямых AO, BO и CO с противоположными сторонами треугольника. Докажите, что:

а) если A_2, B_2, C_2 — точки сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, такие, что три прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (черт. 49,*а*);

б) если точки A_2, B_2, C_2, расположенные на сторонах B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, лежат на одной прямой, то и точки пересечения прямых AA_2, BB_2, CC_2 с противоположными сторонами треугольника ABC лежат на одной прямой (черт. 49, *б*).

До сих пор мы всё время рассматривали о т о б р а ж е н и е плоскости π на другую плоскость π'. Теперь рассмотрим п р е о б р а з о в а н и е, переводящее плоскость π в себя, которое производится следующим образом: плоскость π перемещается каким-то образом в пространстве, занимает какое-то новое положение и затем проектируется из некоторого центра O на своё прежнее положение. Это преобразование мы будем называть **центральным проектированием плоскости π на себя**. Частным случаем такого преобразования является всякое преобразование подобия; центральное проекти-



Черт. 49.

рование плоскости на себя представляет собой подобие, если новое положение плоскости параллельно её первоначальному положению.

Из свойств центрального проектирования следует, что всякая прямая линия плоскости π при центральном проектировании этой плоскости на себя переходит снова в прямую линию, за исключением единственной выделенной прямой, которая исчезает («переходит в бесконечно удалённую прямую»). Если же мы рассмотрим какую-либо часть плоскости π, которую не пересекает выделенная прямая, то всякая прямая, проходящая по этой части плоскости, переходит в прямую линию.

Преобразования плоскости, переводящие все прямые, расположенные на какой-либо части плоскости, снова в прямые линии, мы будем называть обобщёнными линейными преобразованиями. Всякое линейное преобразование является, конечно, одновременно и обобщённым линейным преобразованием, но обратное обстоятельство неверно: центральное проектирование плоскости на себя является обобщённым линейным преобразованием, но оно не является линейным преобразованием плоскости.

Можно показать, что всякое обобщённое линейное преобразование плоскости может быть сведено к центральному проектированию плоскости на себя и преобразованию подобия. А именно, имеет место следующая важная теорема:

Теорема 2. *Всякое обобщённое линейное преобразование плоскости может быть осуществлено путём центрального (или параллельного) проектирования плоскости на себя и последующего преобразования подобия.*

Обобщённые линейные преобразования плоскости обыкновенно называют проективными преобразованиями[1]). Основанием для этого названия служит теорема 2.

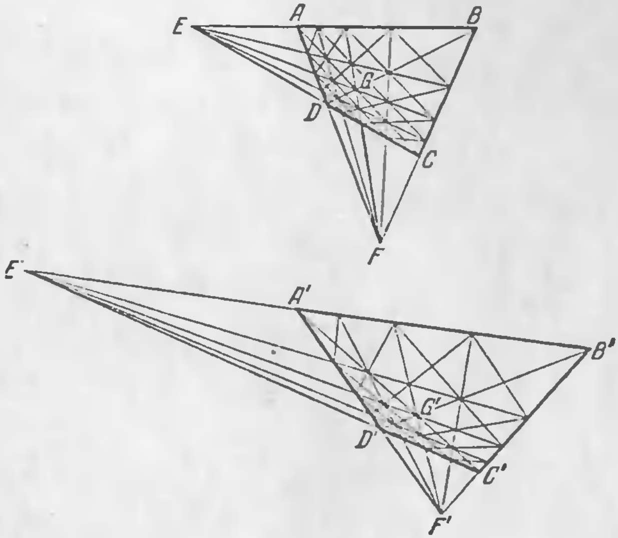
Доказательство теоремы 2 очень близко к доказательству теоремы 2 из § 1 (см. выше стр. 26). Рассмотрим, например, случай, когда часть плоскости, о которой идёт речь в определении обобщённого линейного преобразования, представляет собой выпуклый четырёхугольник (например, страницу тетради).

Пусть обобщённое линейное преобразование переводит четырёхугольник $ABCD$ в четырёхугольник $A'B'C'D'$ (черт. 50). В силу теоремы 1 мы можем перевести четырёхугольник $ABCD$ в четырёхугольник $A'B'C'D'$ при помощи центрального (или параллельного) проектирования плоскости на себя и последующего преобразования подобия. Следовательно, если мы докажем, что существует единственное обобщённое линейное преобразование, переводящее $ABCD$ в $A'B'C'D'$, то отсюда будет следовать, что оно совпадает с центральным проектированием плоскости на себя и последующим подобным преобразованием.

---

[1]) Вот ещё одно определение проективных преобразований: проективными преобразованиями называются такие преобразования проективной плоскости π (см. выше стр. 56), которые переводят прямые линии снова в прямые линии; от определения линейных (или аффинных) преобразований (см. конец § 1) оно отличается только тем, что здесь π не обыкновенная, а проективная плоскость.

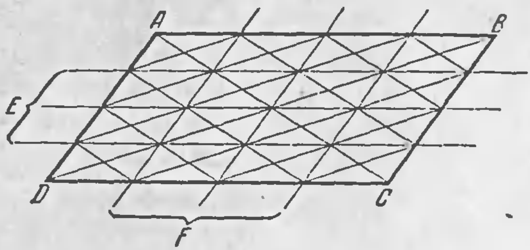
Доказательство того, что обобщённое линейное преобразование **полностью** определяется тем, в какие точки перешли вершины четырёхугольника, очень близко к доказательству теоремы 3 § 1; здесь его мы только коротко наметим. Обозначим через E, F; E', F' точки пересечений продолжений сторон AB и CD, AD и BC; $A'B'$ и $C'D'$, $A'D'$ и $B'C'$ четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (некоторые из этих точек могут быть и бесконечно удалёнными) и через G и G'



Черт. 50.

точки пересечения диагоналей этих четырёхугольников. Так как прямая AB переходит в $A'B'$ и CD переходит в $C'D'$, то точка E переходит в E'; аналогично точка F переходит в F', G — в G'. Отсюда следует, что прямые EG и FG переходят в прямые $E'G'$, соответственно, $F'G'$.

Прямые EG и FG делят четырёхугольник $ABCD$ на четыре меньших четырёхугольника, относительно каждого из которых нам известно, в какой четырёхугольник его переводит наше обобщённое линейное преобразование. Соединяя затем точки пересечения диагоналей этих меньших четырёхугольников с теми же точками E и F и продолжая этот процесс далее, мы определим внутри четырёхугольника $ABCD$ сетку из прямых линий, относительно которой нам известно, в какую сетку она переходит внутри $A'B'C'D'$ при нашем преобразовании (см. черт. 50). При этом эта сетка может быть сделана сколь угодно густой (нетрудно видеть, что при центральном проектировании плоскости нашего чертежа на себя, переводящем прямую EF в бесконечно удалённую прямую, наша сетка переходит в изображённую на черт. 51 сетку параллелограммов, фигурирующую



Черт. 51.

в доказательстве теоремы 3 § 1. Отсюда аналогично доказательству теоремы 3 § 1 следует единственность обобщённого линейного преобразования, переводящего $ABCD$ в $A'B'C'D'$[1]).

§ 3. Центральное проектирование, переводящее заданную окружность в окружность. Стереографическая проекция

В предыдущем параграфе мы привели ряд задач, которые решались при помощи следующего приёма: чертёж проектировался на другую плоскость таким образом, что доказательство интересующего нас соотношения на преобразованном чертеже оказывалось уже простым. Однако первое ознакомление с этим методом заставляло думать, что он приложим лишь к сравнительно небольшому числу задач. Действительно, в элементарной геометрии рассматриваются свойства фигур, образованных из прямых линий и окружностей. При центральном проектировании прямые линии переходят снова в прямые линии; однако окружности, вообще говоря, уже не переходят в окружности. Поэтому кажется, что метод центрального проектирования может оказаться полезным только

---

[1]) Мы здесь ограничиваемся рассмотрением того, куда переводит наше преобразование внутренние точки четырёхугольника, так как само определение обобщённого линейного преобразования естественным образом выделяет некоторую часть плоскости, преобразование которой нас только и интересует. Заметим, впрочем, что построенную сеть можно распространить и за пределы исходного четырёхугольника аналогично тому, как это делалось в § 1.

при решении задач, в условии которых вовсе не фигурируют окружности (такими были все задачи предыдущего параграфа).

В этом параграфе мы покажем, как можно использовать метод центрального проектирования и при решении ряда задач, связанных с окружностью. Для этого мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть на плоскости π дана окружность S и точка Q внутри этой окружности. При помощи центрального проектирования плоскости π на другую плоскость π' можно перевести окружность S в некоторую окружность S' плоскости π', центром которой служит точка Q', в которую переходит при проектировании точка Q.*

Теорема 1'. *Пусть на плоскости π дана окружность S и прямая l, не пересекающая окружности. При помощи центрального проектирования плоскости π на другую плоскость π' можно перевести окружность S в некоторую окружность S' плоскости π', а прямую l — в «бесконечно удалённую прямую» этой плоскости.*

Существует несколько путей для доказательства теорем 1 и 1'. Мы выберем не самый простой из них, так как дополнительные усилия, которые нам придётся приложить, с лихвой окупаются интересными результатами, которые мы попутно получим[1]). Этот путь связан с рассмотрением стереографической проекции сферы на плоскость.

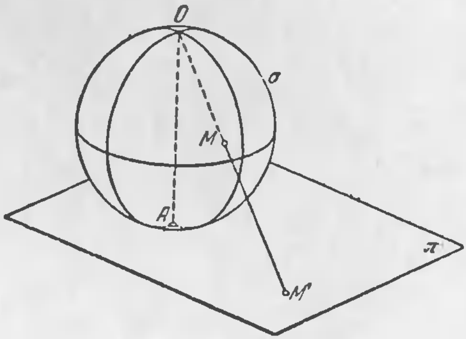
Стереографической проекцией сферы σ на плоскость π', касающуюся сферы σ в некоторой точке A, называется центральная проекция σ на плоскость π' из второго конца O диаметра этой сферы, проходящего через точку A (черт. 52). Таким образом, стереографическая проекция переводит каждую точку M сферы σ (кроме точки O) в точку M' пересечения прямой OM с плоскостью π'; точка O сферы не переходит при стереографической проекции ни в какую точку плоскости.

Важнейшее свойство стереографической проекции выражается следующей теоремой.

Теорема 2. *Стереографическая проекция переводит каждую окружность сферы σ в окружность или прямую*

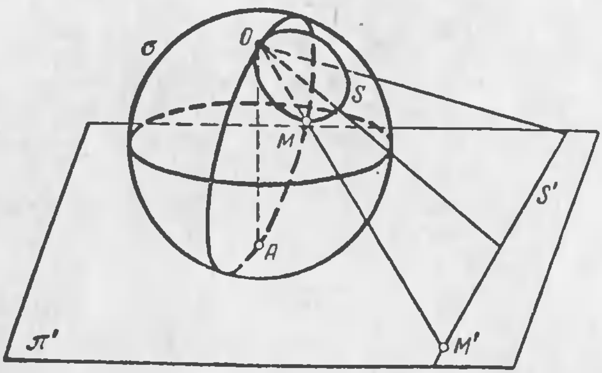
[1]) Другой путь доказательства этих теорем намечен в 26-й главе популярной книжки Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, М.—Л., ОНТИ, 1938 (ср. также Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, М. — Л., Гостехиздат, 1949, тема 43).

плоскости π' и, обратно, каждой окружности или прямой плоскости π' при стереографической проекции соответствует окружность сферы σ.



Черт. 52.

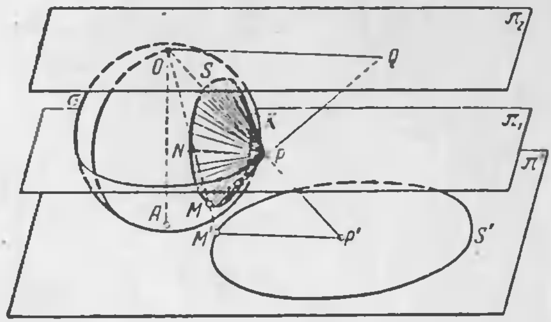
Доказательство. Прежде всего очевидно, что стереографическая проекция переводит окружность S сферы σ, проходящую через точку O, в прямую S' плоскости π'



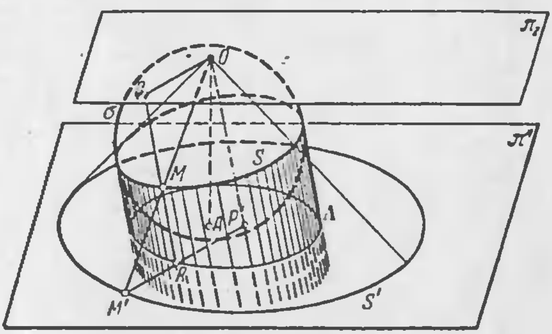
Черт. 53.

(черт. 53); обратно, каждой прямой плоскости π' стереографическая проекция сопоставляет окружность сферы σ, проходящую через точку O. Пусть теперь S есть окружность сферы σ, не проходящая через O. Окружность S

можно рассматривать как линию касания σ с описанным конусом К (черт. 54, *а*) или с описанным цилиндром Λ (черт. 54, *б*); пусть P' — точка пересечения с плоскостью π' прямой, проходящей через вершину P конуса К или параллельной образующей цилиндра Λ. Докажем, что стереографическая



а)



б)

Черт. 54.

проекция переводит окружность S в окружность S' плоскости π' с центром в точке P'.

Пусть M — произвольная точка окружности S, M' — точка плоскости π', в которую она проектируется. Нам надо доказать, что расстояние $P'M'$ не зависит от выбора точки M окружности S; это и будет означать, что геометрическое место точек M' представляет собой окружность S' с центром P'. Рассмотрим сначала тот случай, когда S есть линия касания конуса К со сферой σ (черт. 54, *а*), и проведём через точки P и O плоскости π_1 и π_2, параллельные π'; пусть N есть точка пересечения прямой OM с плоскостью π_1, Q — точка пересечения прямой PM с плоскостью π_2; точку Q соединим с O. Прямые $P'M'$, PN и QO будут параллельны, так как они суть линии пересечения плоскости OPM с параллельными плоскостями π', π_1 и π_2. Поэтому треугольники MPN и MQO, так же как и треугольники OPN и $OP'M'$, подобны между собой. Из подобия первой пары треугольников вытекает, что $\frac{PN}{PM}=\frac{QO}{QM}$; так как $QO=QM$ как две касательные к сфере σ, проведённые из одной точки Q (QO лежит в плоскости π_2, касающейся σ; QM есть образующая конуса К, описанного вокруг σ), то $PN=PM$. Таким образом, мы видим, что отрезок PN равен отрезку PM образующей конуса К и, следовательно, не зависит от выбора точки M. Далее из подобия второй пары треугольников вытекает $\frac{P'M'}{PN}=\frac{OP'}{OP}$, откуда

$$P'M'=PN\cdot\frac{OP'}{OP}=PM\cdot\frac{OP'}{OP}.$$

Таким образом, $P'M'$ действительно не зависит от выбора точки M, что и требовалось доказать.

Если S есть линия касания цилиндра Λ со сферой σ (черт. 54, *б*), то проведём через точку M образующую цилиндра; точки пересечения её с плоскостью π' и рассмотренной выше плоскостью π_2 обозначим через R и Q. Так как $MR \parallel OP'$, то R — точка отрезка $M'P'$. Соединим Q с O; как и выше, заключаем, что треугольники MRM' и MQO подобны, откуда следует равенство отрезков MR и RM' (ибо $QM=QO$, как отрезки касательных к сфере σ, проведенных из точки Q). А теперь из подобия треугольников $OP'M'$ и MRM' заключаем, что

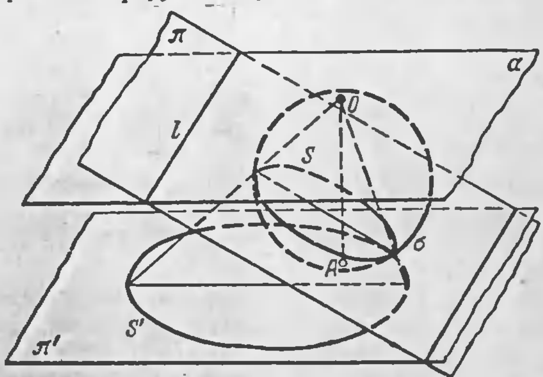
$$P'M'=P'O;$$

значит, и в этом случае $P'M'$ не зависит от выбора точки M.

Обратно, пусть S' есть произвольная окружность плоскости π' с центром в точке P', M' — произвольная точка этой окружности и M — точка сферы σ, соответствующая M' при стереографической проекции. Обозначим через P точку пересечения прямой OP' с касательной плоскостью α к сфере σ в точке M (если такая точка существует). Аналогично предыдущему нетрудно показать, что точка P не зависит от выбора точки M' на окружности S'; если же плоскость α параллельна OP', то это обстоятельство будет иметь место при любом выборе точки M'. Отсюда следует, что геометрическим местом точек M является окружность S, по которой касается сферы σ конус К касательных, проведённых к сфере из точки P, или цилиндр Λ касательных, параллельных OP'.

Используя теорему 2, мы можем уже легко доказать основные теоремы 1 и 1′.

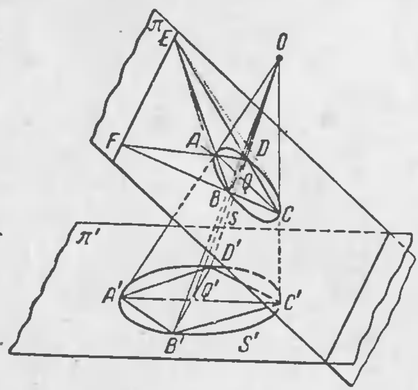
Доказательство теоремы 1′. Пусть дана окружность S плоскости π и прямая l, не пересекающая этой окружности. Проведём сферу σ, которая содержит окружность S; затем



Черт. 55.

проведём через прямую l плоскость α, касающуюся сферы σ. Обозначим через O точку касания плоскости α и сферы σ и проведём параллельно плоскости α плоскость π', касающуюся сферы σ в точке A (черт. 55). При центральном проектировании плоскости π на плоскость π' с центром проекции в точке O окружность S перейдёт в некоторую окружность S' плоскости π' (в силу теоремы 2), а прямая l, очевидно, перейдёт в «бесконечно удалённую» прямую плоскости π'.

Доказательство теоремы 1. Пусть нам дана окружность S и точка Q внутри этой окружности. Проведём через точку Q две произвольные хорды AC и BD и рассмотрим вписанный в S четырёхугольник $ABCD$ (черт. 56). Обозначим через E и F точки пересечения противоположных сторон этого четырёхугольника. Из того, что касательные, проведённые из точки E пересечения сторон AB и DC к окружности S, касаются её в точках дуг AB и DC, следует, что прямая EF не пересекает S. Спроектируем наш чертёж на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в некоторую окружность S', а прямая EF — в бесконечно удалённую прямую плоскости π' (это мы можем сделать в силу теоремы 1'). В таком случае четырёхугольник $ABCD$ перейдёт во вписанный в окружность S' параллелограмм $A'B'C'D'$ (т. е. в прямоугольник), а точка Q пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ — в точку Q' пересечения диагоналей прямоугольника $A'B'C'D'$, т. е. в центр окружности S' ($A'C'$ и $B'D'$ — диаметры S').



Черт. 56.

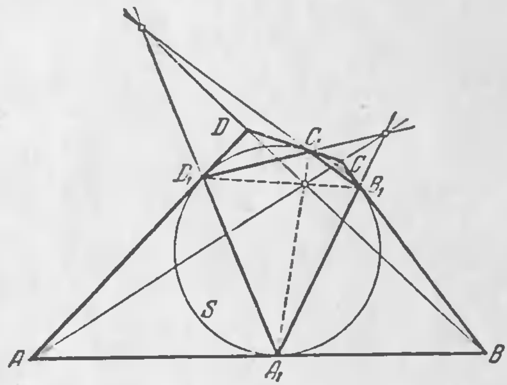
Теоремы 1 и 1' дают возможность использовать центральное проектирование для решения ряда задач, связанных с окружностью. Ниже мы приводим несколько таких задач. При решении их часто будет оказываться полезным следующее очевидное соображение: если центральное проектирование переводит окружность S в окружность S', то касательная к окружности S (прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку) переходит в касательную к окружности S'. Решения этих задач, не использующие центрального проектирования, являются, как правило, весьма сложными.

138. а) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной в треугольник окружностью, пересекаются в одной точке (см. ниже черт. 63, *г*, стр. 82).

б) Даны треугольник ABC и окружность S, пересекающая стороны AB, BC и CA треугольника соответственно в точках M и N, P и Q, R и T. Пусть C_1, A_1, B_1 — точки пересечения касательных к окружности S в точках M и N, P и Q, R и T соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

139. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, описанный вокруг окружности S; A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки касания его сторон с окружностью S (черт. 57). Докажите, что:

а) точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают;



Черт. 57.

б) продолжения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проходят через точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$.

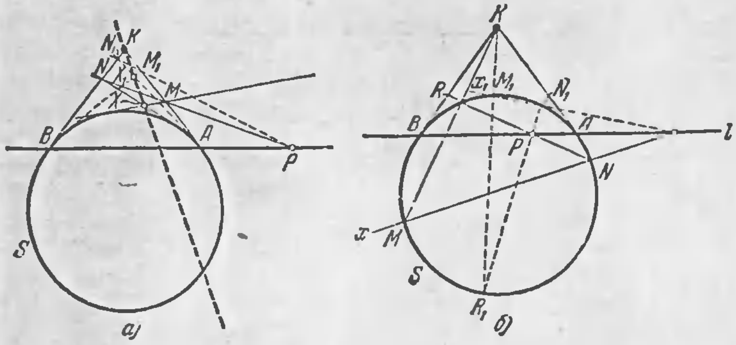
140. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, вписанный в окружность S, P и Q — точки пересечения его противоположных сторон, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что:

а) существует бесконечно много вписанных в окружность S треугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через точки P, Q и O (точнее, если две стороны вписанного в S треугольника проходят через две из точек P, Q и O, то третья сторона обязательно проходит через третью точку);

б) существует бесконечно много вписанных в окружность S четырёхугольников, точки пересечения противоположных сторон которых совпадают с P и Q (точнее, если две противоположные стороны вписанного в S четырёхугольника пересекаются в точке P и третья сторона проходит через Q, то и противоположная ей сторона проходит через Q), причём точки пересечения диагоналей всех этих четырёхугольников совпадают с O;

в) существует бесконечно много вписанных в окружность S четырёхугольников, точка пересечения диагоналей которых совпадает с O, а одна из точек пересечения противоположных сторон — с P (точнее, если точка пересечения диагоналей вписанного в S четырёхугольника совпадает с O и одна из сторон проходит через P, то и противоположная ей сторона проходит через P), причём вторая точка пересечения противоположных сторон всех этих четырёхугольников совпадает с Q.

141. Через фиксированную точку P, расположенную в плоскости окружности S, проводятся всевозможные секущие этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности S, проведённых в двух точках пересечения окружности с секущей.



Черт. 58.

142. Даны окружность S, точка P и прямая l, проходящая через P и пересекающая окружность в точках A и B; точку пересечения касательных к S в точках A и B обозначим через K.

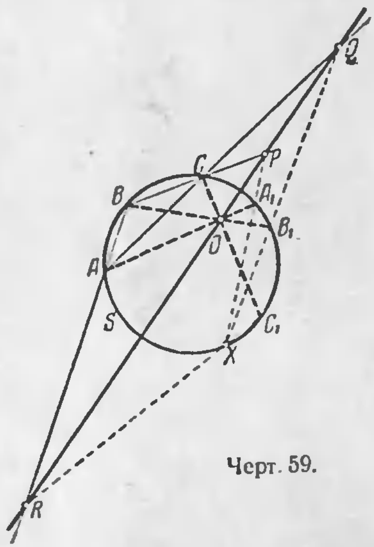
а) Через P проходит переменная прямая, пересекающая AK и BK в точках M и N (черт. 58, $а$). Докажите, что геометрическим местом точек X пересечения вторых касательных к окружности S, проведённых из точек M и N, является прямая линия, проходящая через K (точнее, часть этой прямой, расположенная вне S).

б) Переменная точка R окружности S соединяется с точками P и K (черт. 58, *б*). Докажите, что прямая x, соединяющая вторые точки M и N пересечения RK и RP с окружностью S, проходит через фиксированную (не зависящую от выбора R!) точку, лежащую на прямой l.

143. Впишите в данную окружность четырёхугольник, если известны:

а) точка пересечения диагоналей четырёхугольника и две точки, лежащие на его противоположных сторонах;

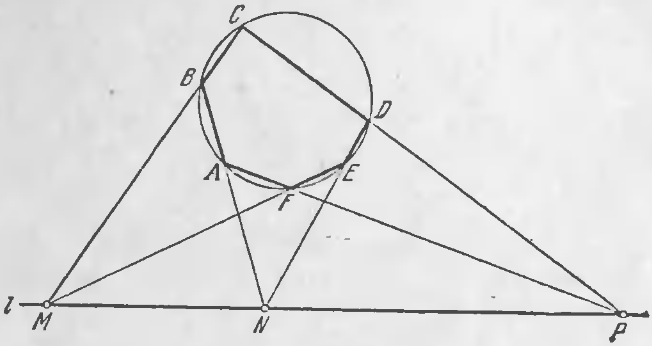
б) точка пересечения двух противоположных сторон и по одной точке на каждой из двух других сторон.



Черт. 59.

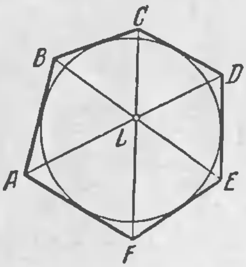
144. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — три хорды окружности S, пересекающиеся в одной точке O, X — произвольная точка той же окружности. Докажите, что точки P, Q и R пересечения прямых XA_1, XB_1, XC_1 со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC лежат на одной прямой, проходящей через O (черт. 59).

145. Теорема Паскаля. Докажите, что три точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой (черт. 60).



Черт. 60.

В другой связи теорема Паскаля (в несколько более общем виде) приведена в § 5 настоящей главы (см. задачу 179, стр. 115) и в § 1 гл. II (задача 223, стр. 193).

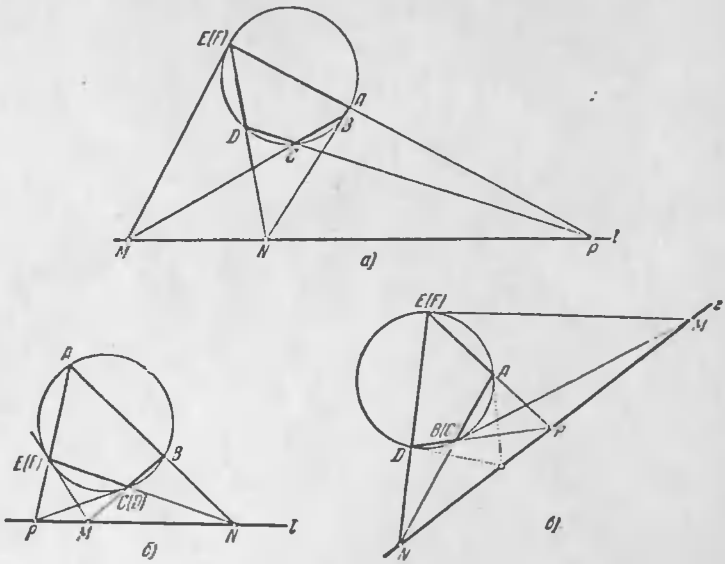


Черт. 61.

146. Теорема Брианшона. Докажите, что три диагонали, соединяющие противоположные вершины описанного вокруг окружности шестиугольника, пересекаются в одной точке (черт. 61).

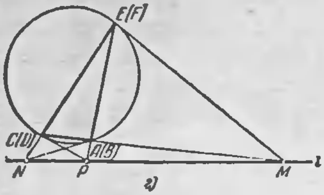
В другой связи теорема Брианшона приведена в § 5 гл. II (см. задачу 282, стр. 303). Ещё одно неожиданное доказательство той же теоремы содержит приложение к настоящей главе (см. задачу 197 на стр. 146). Относительно связи между теоремами Паскаля и Брианшона см. задачу 162 из § 4 (стр. 100).

Предельными случаями теорем Паскаля и Брианшона являются некоторые предложения, относящиеся к вписанным и описанным пятиугольникам, четырёхугольникам и треугольникам. Так, например, предположим, что вершина F шестиугольника $ABCDEF$, вписанного в окружность, движется по окружности, приближаясь к точке E. При этом сторона EF шестиугольника будет стремиться к касательной к окружности в точке E, и в пределе мы получим следующее предложение: *точка пересечения стороны BC вписанного в окружность пятиугольника $ABCDE$ с касательной к окружности в точке E лежит на одной прямой с точками пересечения сторон AB и DE, CD и AE* (черт. 62, *а*). Аналогично, считая, что в шестиугольнике $ABCDEF$ вершина F совпадает с E, а вершина D — с C, мы получим следующую теорему: *точка пересечения сторон AB и CE вписанного в окружность четырёхугольника $ABCE$ лежит на одной прямой с точками пересечения стороны BC и касательной к окружности в точке E, стороны AE и касательной к окружности в точке C* (черт. 62, *б*). Предполагая, что вершина F шестиугольника совпала с E, а вершина C — с B, мы получим, что *точка пересечения касательных к окружности в вершинах E и B вписанного четырёхугольника $ABDE$ лежит на одной прямой с точками пересечения противоположных сторон*; очевидно, на этой же прямой лежит и точка пересечения касательных к окружности в точках A и D (черт. 62, *в*). Наконец, предполагая, что вершина B шести-

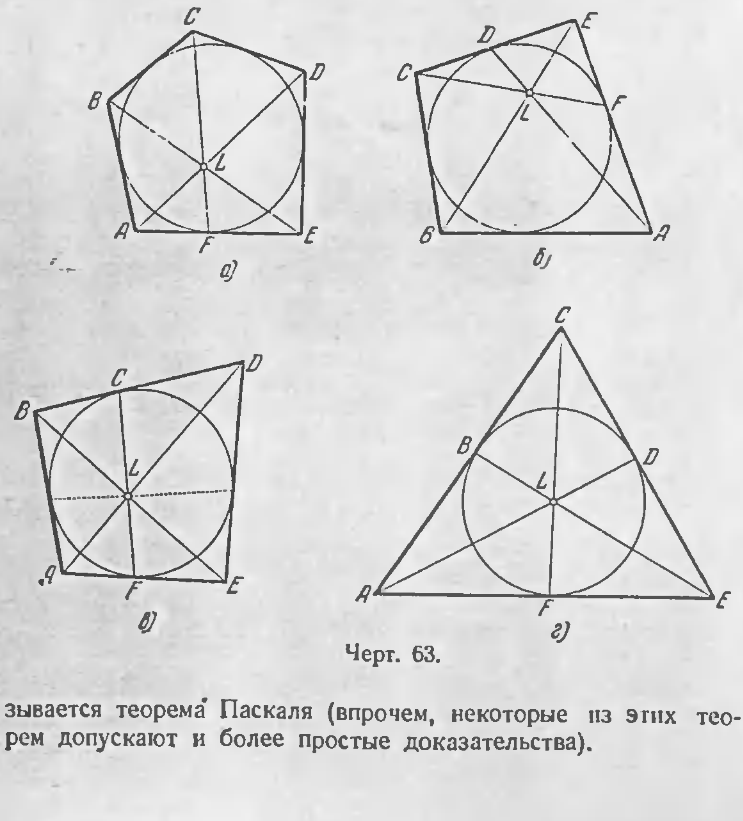


Черт. 62, *а—в*.

угольника совпала с A, вершина D — с C и вершина F — с E, мы получаем: *точки пересечения сторон треугольника ACE с касательными к описанной вокруг ACE окружности в противоположных вершинах треугольника лежат на одной прямой* (черт. 62, *г*). Все эти предложения можно условно считать частными случаями теоремы Паскаля, относящимися к вписанным в окружность шестиугольникам, одна или несколько сторон которых имеют нулевую длину; естественно, что каждое из них можно доказать точно так же, как доказывается теорема Паскаля (впрочем, некоторые из этих теорем допускают и более простые доказательства).



Черт. 62, *г*.



Черт. 63.

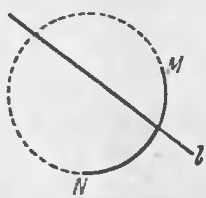
Совершенно аналогично можно вывести ряд новых предложений и из теоремы Брианшона, если считать отдельные стороны описанного шестиугольника совпадающими (другими словами, если считать, что описанный шестиугольник имеет один или несколько углов, равных 180°). О соответствующих предложениях дают представление чертежи 63, *а* — *г*; предоставляем читателю самостоятельно их сформулировать (отметим, что теоремы, выражаемые черт. 63, *в* и *г*, совпадают с предложениями задач 139а) и 138а)).

147. Дана окружность и на ней точка A. Проведите касательную к окружности в точке A, пользуясь только одной линейкой (без циркуля!).

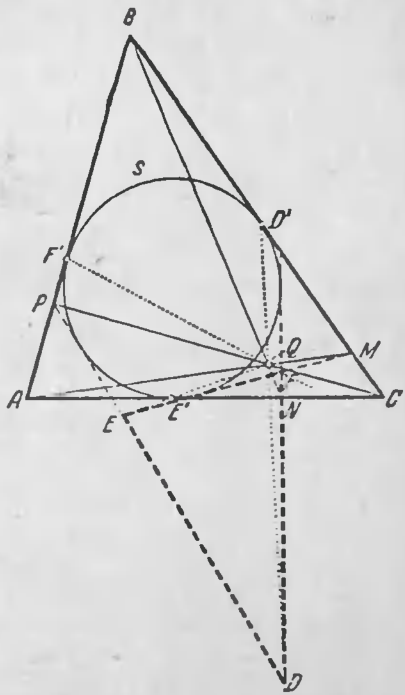
Сравните задачу 147 с задачей 153 следующего параграфа (стр. 88).

148. Дана дуга MN окружности S и прямая l, пересекающая эту дугу в одной точке (черт. 64). С помощью одной линейки определите вторую точку пересечения прямой l с окружностью S.

Сравните задачу 148 с задачей 154 следующего параграфа (стр. 89).



Черт. 64.



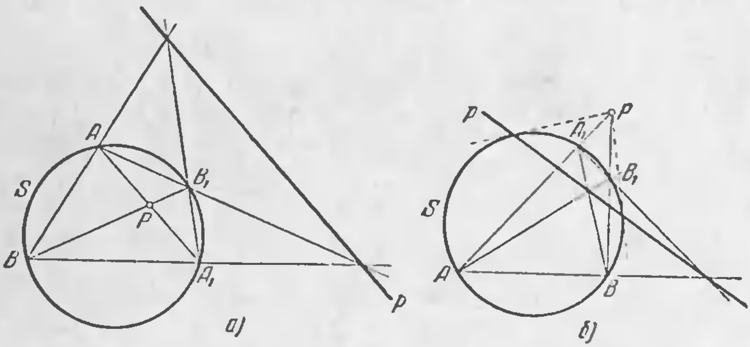
Черт. 65.

149. Даны треугольник ABC и точка Q; прямые AQ, BQ и CQ пересекают противоположные стороны треугольника в точках M, N и P (черт. 65). Вершины треугольника DEF, образованного вторыми касательными к вписанной в треугольник окружности s, проведёнными из точек M, N и P, соединены с точками касания s с соответствующими сторонами треугольника ABC. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке (а именно, в точке Q).

§ 4. Полярное преобразование плоскости. Принцип двойственности

В дальнейшем важную роль будет играть следующая теорема.

Теорема 1. *Если через точку P, не лежащую на окружности S, провести всевозможные пары секущих, пересекающих окружность в точках A и A_1, B и B_1, то геометрическим местом точек пересечения прямых AB и A_1B_1 и геометрическим местом точек пересечения прямых AB_1 и A_1B будет являться одна прямая p* (черт. 66).



Черт. 66.

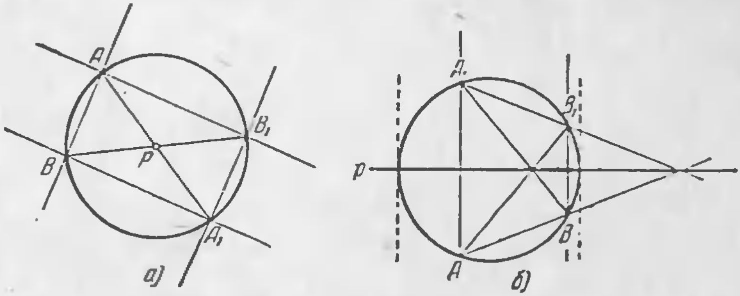
Прямая p называется полярой точки P относительно окружности S, а точка P — полюсом прямой p[1]).

С первого взгляда теорема 1 не кажется ни очень интересной, ни очень важной; однако замечательные следствия,

[1]) Поляру точки P относительно окружности S можно также определить как геометрическое место таких точек проходящих через P секущих, которые вместе с точкой P гармонически делят отрезки, высекаемые на секущих окружностью (см. мелкий шрифт на стр. 51).

вытекающие из этой теоремы, вполне оправдывают наше внимание к ней.

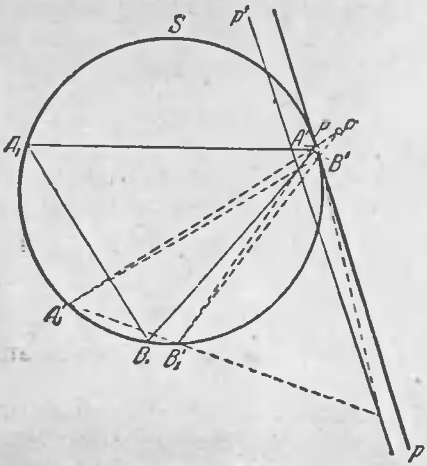
Теорему 1 легко доказать, если воспользоваться теоремами 1 и 1′ предыдущего параграфа. Если точка P лежит внутри окружности S (черт. 66, *а*), то её можно центральным проектированием перевести в центр окружности (см. теорему 1 § 3). Но для случая, когда P есть центр S, теорема 1 является очевидной: четырёхугольник ABA_1B_1 является в этом случае прямоугольником (все его углы опираются на диаметр), $AB \parallel B_1A_1$, $AB_1 \parallel BA_1$ и, следовательно, искомым



Черт. 67.

геометрическим местом является «бесконечно удалённая прямая» плоскости (черт. 67, *а*). Отсюда вытекает, что эта теорема верна для любой точки P, расположенной внутри окружности. Если точка P находится вне окружности S (черт. 66, *б*), то при помощи центрального проектирования её можно перевести в «бесконечно удалённую точку» плоскости (см. теорему 1′ § 3). Но если P есть «бесконечно удалённая точка», то теорема 1 очевидна: четырёхугольник AA_1B_1B является в этом случае трапецией, вписанной в окружность (т. е. равнобочной трапецией) с фиксированным направлением оснований (черт. 67, *б*); точка пересечения диагоналей AB_1 и A_1B и точка пересечения боковых сторон AB и A_1B_1 лежат на её оси симметрии, т. е. на диаметре окружности S, перпендикулярном к направлению оснований трапеции. Отсюда следует, что теорема 1 является справедливой для любой точки P, лежащей вне окружности S.

Если точка P лежит на окружности S, то геометрическое место теоремы 1 не имеет смысла, так как в этом случае точки A и B совпадают с точкой P, четырёхугольник ABB_1A_1 вырождается в треугольник A_1B_1P, прямые A_1B и B_1A переходят в прямые A_1P и B_1P, пересекающиеся в точке P, а прямая AB становится неопределённой (черт. 68). Нетрудно видеть, однако, что если точка P' приближается к точке P окружности (безразлично, изнутри или снаружи окружности), то поляра p' точки P' приближается к касательной к окружности в точке P (см. черт. 68). Поэтому естественно считать полярой точки P окружности S касательную p к окружности в этой точке.

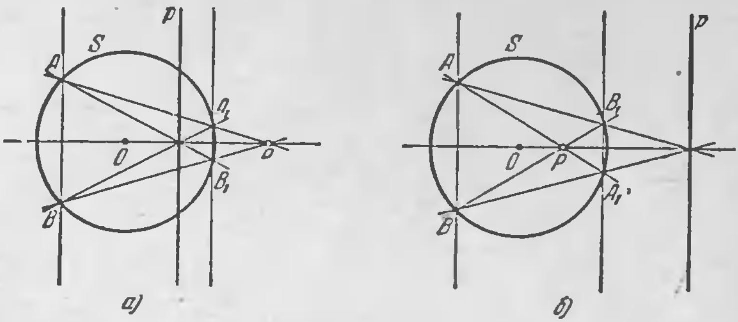


Черт. 68.

Если точка P лежит внутри окружности S, то её поляра p относительно S целиком лежит вне S, а если P лежит вне S, то p пересекает S (см. черт. 66). *Когда P лежит вне окружности S, её поляра p совпадает с прямой, соединяющей точки касания с S касательных, проведённых к ней из точки P* (черт. 66, *б*). Для того чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что оно справедливо в том случае, когда P есть «бесконечно удалённая точка» (см. черт. 67, *б*); так как при центральном проектировании, переводящем точку P в точку P' и окружность S в окружность S', поляра точки P относительно S переходит в поляру точки P' относительно S' и касательные к S — в касательные к S', то это предложение сохраняет силу и в том случае, если P есть произвольная точка, расположенная вне S'.

Отметим ещё, что *поляра p точки P относительно окружности S перпендикулярна к прямой OP* (здесь O — центр окружности S); обратно, *полюс P прямой p лежит на перпендикуляре, опущенном из O на прямую p*. Это следует, например, из соображений симметрии (черт. 69).

Построение поляры точки P относительно заданной окружности S, а также построение полюса произвольно заданной прямой p непосредственно вытекают из определений (см. черт. 66, *а*, *б*). Отметим что оба эти построения выполняются **о д н о й л и н е й к о й**, т. е. без помощи циркуля,—

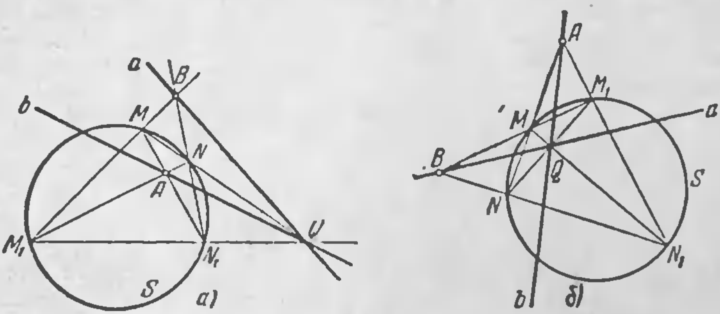


Черт. 69.

обстоятельство, которым нам ещё придётся пользоваться впоследствии.

Наиболее важным свойством поляры является следующее:

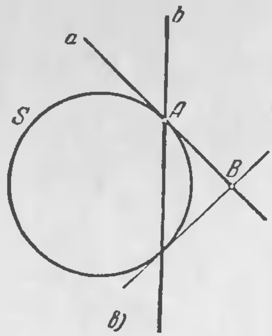
Т е о р е м а 2. *Если точка A лежит на поляре b точки B, то точка B лежит на поляре a точки A* (черт. 70).



Черт. 70, *а*, *б*.

Это свойство непосредственно следует из определения поляры. Пусть, например, A расположена внутри окружности S; в таком случае B обязательно лежит вне S, ибо иначе поляра b точки B лежала бы целиком вне S (черт. 70, *а*).

Так как точка A лежит на поляре точки B, то через точку B можно провести две секущие, пересекающие окружность в точках M, M_1 и N, N_1, таких, что A есть точка пересечения диагоналей четырёхугольника MM_1N_1N. Но тогда из черт. 70, *а* сразу следует, что полярой точки A является прямая BQ, где Q есть точка пересечения MN и M_1N_1; следовательно, поляра A проходит через точку B. Аналогично доказывается теорема 2 и в том случае, когда A лежит вне S (в этом случае B может лежать внутри S, чему соответствует тот же черт. 70, *а*, где следует изменить обозначения точек A и B, или вне S — см. черт. 70, *б*); она сохраняет силу и когда A лежит на окружности S (черт. 70, *в*).



Черт. 70, *в*.

150. Докажите, что если расстояние от центра O окружности S до точки A равно d, то расстояние от O до поляры a точки A относительно S равно $\frac{r^2}{d}$, где r—радиус S.

151. Пусть A и B — две точки, a и b — их поляры относительно окружности S с центром O, AP и BQ — расстояния от A до b и от B до a. Докажите, что

$$\frac{OA}{AP}=\frac{OB}{BQ}.$$

152. Пусть дан произвольный четырёхугольник $ABCD$,

а) вписанный в окружность S;

б) описанный вокруг окружности S.

Докажите, что перпендикуляр, опущенный из центра S на прямую, соединяющую точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей.

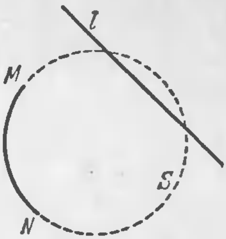
153. Дана окружность S и точка A вне неё. Проведите из точки A касательные к окружности, пользуясь только одной линейкой.

Сравните с задачей 147 из § 3 (стр. 83).

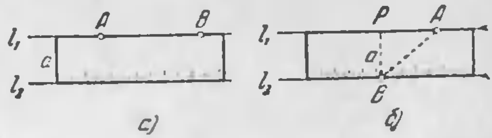
154. Дана дуга MN окружности S и прямая l, не пересекающая этой дуги (черт. 71). С помощью одной линейки определите точки пересечения прямой l с окружностью S.

Сравните с задачей 148 из § 3 (стр. 83).

155. Параллельной линейкой называется линейка, имеющая два параллельных края; с её помощью можно провести две параллельные прямые l_1 и l_2, отстоящие друг от друга на расстоянии a, равном ширине линейки, так, чтобы l_1 проходила через



Черт. 71.



Черт. 72.

две данные точки A и B (черт. 72, a) или чтобы l_1 проходила через A, а l_2 — через B (черт. 72, $б$)[1]). Докажите, что с помощью одной параллельной линейки можно найти точки пересечения данной прямой l с неначерченной окружностью, имеющей данный центр A и радиус a, равный ширине линейки.

Параллельная линейка является весьма распространённым чертёжным инструментом; поэтому интересно выяснить, какие построения выполнимы с помощью такой линейки. Совершенно ясно, что все задачи на построение, которые решаются одной линейкой, разрешимы с помощью параллельной линейки. Однако с помощью параллельной линейки можно решить также некоторые задачи, неразрешимые с помощью простой линейки; так, например, в § 5 будет показано, что с помощью одной линейки (без циркуля) нельзя через данную точку M провести прямую, параллельную известной прямой l (см. ниже стр. 123), в то время как с помощью параллельной линейки это можно сделать (ибо можно провести прямую l_1, параллельную l и отстоящую от неё на расстоянии a; далее см. задачу 109б) из § 1, стр. 22).

---

[1]) Последнее возможно, разумеется, лишь в том случае, если $AB \geqslant a$.

Все построения, выполнимые с помощью параллельной линейки, разумеется, выполнимы также и с помощью циркуля и линейки (ибо при наличии этих инструментов выполнимы оба построения, изображённые на черт. 72, *а* и *б*: построение изображённых на черт. 72, *б* прямых l_1 и l_2 сводится к определению вершины P прямоугольного треугольника ABP с известной гипотенузой AB и катетом $BP = a$). В § 5 будет показано, что и обратно, ***все построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, осуществимы также и при наличии одной параллельной линейки***; при этом основную роль будет играть построение, составляющее содержание задачи 155.

156. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с полюсами A', B', C' противоположных сторон треугольника относительно некоторой окружности S, пересекаются в одной точке.

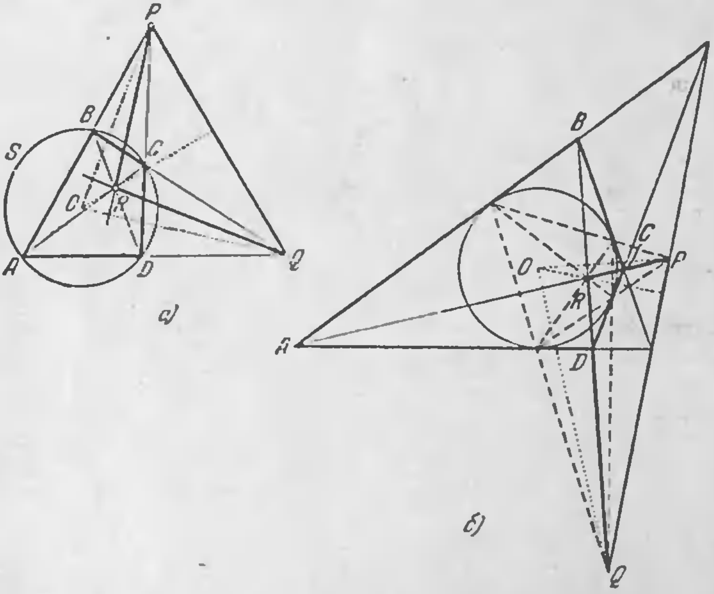
Теорема задачи 156 может быть сформулирована ещё и по-иному. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ называются п о л я р н ы м и относительно данной окружности, если стороны треугольника $A'B'C'$ являются полярами соответствующих вершин треугольника ABC; из теоремы 2 следует, что в таком случае стороны треугольника ABC являются полярами вершин треугольника $A'B'C'$. Теорема задачи 156 означает, что ***полярные треугольники всегда перспективны*** (см. задачу 123 из § 2 и относящийся к ней текст, стр. 42—43); из этой теоремы вытекает также, что точки пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ лежат на одной прямой (см. задачу 123). [Частными случаями теоремы задачи 156 являются предложения задач 138а) и б) из § 3 (стр. 76—77).]

157. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ и окружность S. Докажите, что если прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке, то и прямые, соединяющие полюсы сторон треугольника ABC (относительно S) с полюсами соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке (иными словами, если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ перспективны, то и треугольники, полярные первым двум, тоже перспективны; см. текст, относящийся к предыдущей задаче).

158. Треугольник называется *автополярным* относительно данной окружности, если каждая сторона треугольника является полярой противоположной вершины. Докажите, что для каждого *тупоугольного* треугольника ABC существует единственная окружность, относительно которой он является автополярным; центром этой окружности является точка пересечения высот треугольника ABC. Остроугольный или прямоугольный треугольник не является автополярным относительно никакой окружности.

Отметим, что из теоремы 1 вытекает, что

если в окружность S вписан четырёхугольник, то треугольник, вершинами которого являются точка пересечения диагоналей четырёх-



Черт. 73.

угольника и точки пересечения противоположных сторон, является автополярным относительно S (черт. 73, a).

Точно так же,

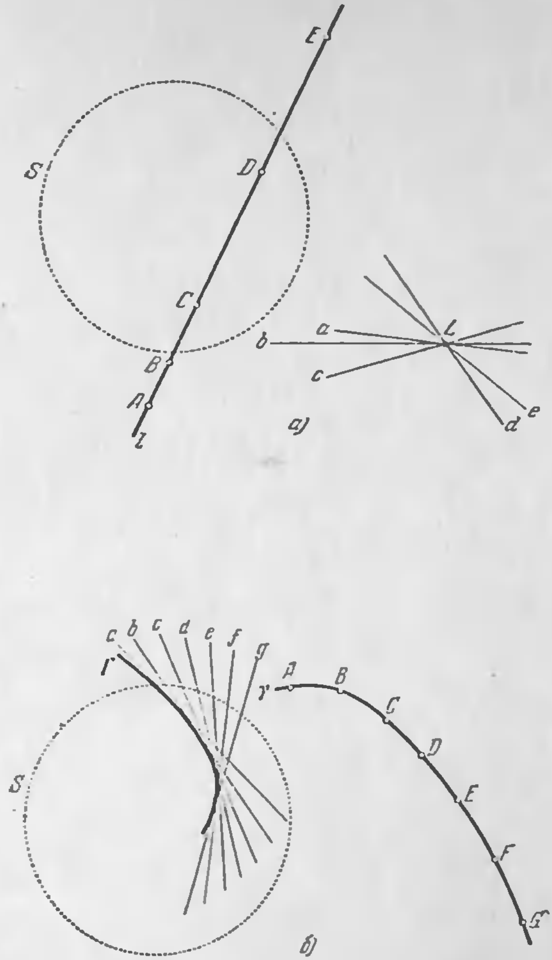
если вокруг окружности S описан четырёхугольник, то треугольник, образованный диагоналями четырёхугольника и прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон, является автополярным относительно S (черт. 73, $б$).

[Если стороны описанного четырёхугольника, изображённого на черт. 73, *б*, касаются S в вершинах вписанного четырёхугольника, изображённого на черт. 73, *а*, то треугольник, выделенный жирными линиями на черт. 73, *б*, совпадает с треугольником, выделенным на черт. 73, *а*; доказательство этого представляется читателю.] Из результата задачи 158 вытекает, что *оба рассматриваемых треугольника являются тупоугольными и точки пересечения их высот совпадают с центром S.*

Понятие поляры точки относительно окружности позволяет определить своеобразное «преобразование» плоскости, которое оказывается полезным для доказательства многих теорем. А именно, пусть мы имеем какую-либо фигуру F на плоскости, образованную любым числом точек и прямых линий. Поставим в соответствие этой фигуре новую фигуру F', заменив каждую точку первоначальной фигуры F её полярой и каждую прямую фигуры F — её полюсом относительно какой-либо фиксированной окружности S. Преобразование, которое ставит в соответствие F новую фигуру F', полученную из первоначальной описанным образом, называется **полярным преобразованием.**

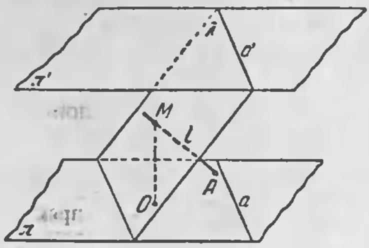
Полярное преобразование, разумеется, не является преобразованием в том смысле, в каком мы до сих пор понимали это слово. Раньше, говоря о преобразовании, мы подразумевали всегда «точечное преобразование», т. е. преобразование, переводящее точки плоскости снова в точки. Полярное же преобразование переводит точки в прямые и прямые в точки; оно является преобразованием совсем другой природы, чем все те, которые мы рассматривали раньше (движения, преобразования подобия, преобразования проектирования). Впоследствии мы встретимся с другими примерами преобразований, не являющихся точечными (см. § 5 гл. II).

Мы определили полярное преобразование как **преобразование, переводящее** заданную **фигуру** в некоторую **другую фигуру**; этого вполне достаточно для решения всех приведённых ниже задач. Можно, однако, рассматривать полярное преобразование как **преобразование всей плоскости** (точнее, множества всех точек и всех прямых плоскости), переводящее каждую точку в некоторую прямую и каждую прямую в некоторую точку. При этом в силу теоремы 2 точки, лежащие на одной прямой l, переходят в прямые, проходящие через одну точку L — образ прямой l (черт. 74, *а*). Произвольная кривая γ, рассматриваемая как совокупность точек, переходит при полярном преобразовании в новую кривую Γ, которую следует рассматривать как совокупность всех её касательных (черт. 74, *б*).



Черт. 74.

Отметим ещё, что полярное преобразование плоскости можно определить независимо от теоремы 1 при помощи следующей геометрической конструкции. Рассмотрим две параллельные плоскости π и π' и точку M, равноудалённую от обеих плоскостей (черт. 75). Сопоставим теперь каждой прямой l, проходящей через точку M, плоскость λ, тоже проходящую через M и перпендикулярную к l, и точке A, в которой прямая l пересекает плоскость π, прямую a', по которой плоскость λ пересекает плоскость π' (при этом основанию O перпендикуляра MO, опущенного из M на π, не будет отвечать никакая прямая плоскости π'). Если теперь «опустить» плоскость π' на плоскость π (т. е. спроектировать её ортогонально на π), то прямая a' перейдёт в прямую a плоскости π. Нетрудно показать, что преобразование, ставящее в соответствие точке A прямую a, есть не что иное, как полярное преобразование относительно окружности с центром O и радиусом, равным OM; так как нам это предложение не понадобится, то доказательство его мы предоставим читателям. Из этого нового определения полярного преобразования нетрудно вывести все его свойства; мы рекомендуем читателю попытаться сделать это самостоятельно.



Черт. 75.

При помощи полярного преобразования иногда удаётся свести задачу к более простой и тем самым облегчить её решение. Некоторые примеры подобного рода мы приведём ниже. Однако ещё большее значение имеет полярное преобразование как источник совершенно новых теорем, которые можно вывести из уже известных предложений. Действительно, если в предыдущих параграфах настоящей главы мы решали геометрические задачи, приводя при помощи подходяще выбранного центрального или параллельного проектирования задачу к её более простому частному случаю (например, считали произвольно заданный треугольник равносторонним в § 1 или произвольно заданные прямые параллельными в §§ 2 и 3), то при помощи полярного преобразования мы никогда не сможем придти к частному случаю ~~той~~ же самой задачи. Действительно, чертёж, полученный из данного чертежа полярным преобразованием, будет уже совершенно иным: там, где раньше у нас была точка, сейчас будет прямая линия, и наоборот. Таким образом, если мы преобразуем чертёж, соответствующий какой-либо теореме, то мы придём к чертежу, выражающему совершенно новое предложение. Это предложение может быть проще первоначального, и, доказав его, мы докажем тем самым и первоначальную теорему. Но если даже новая теорема доказывается и не проще первоначальной, мы всё же останемся в выигрыше, так как вместо одной теоремы мы получим две (причём доказывать надо только одну из этих теорем).

Теоремы, получаемые одна из другой при помощи полярного преобразования, называются **двойственными теоремами**, а факт существования пар двойственных друг другу теорем носит название **принципа двойственности**. Многочисленные примеры, иллюстрирующие принцип двойственности, будут приведены ниже.

Принцип двойственности позволяет переходить от одной геометрической теоремы к другой заменой слова «точка» словом «прямая», и наоборот. Мы основывали этот принцип на полярном преобразовании плоскости, которое определялось с помощью теоремы 1 в начале параграфа. При этом значение теоремы 1 заключается в том, что она даёт возможность переходить от точек к прямым так, что каждой точке отвечает единственная прямая, каждой прямой — единственная точка и точка, лежащая на прямой, переходит в прямую, проходящую через соответствующую точку (см. теорему 2 на стр. 87). Способов, позволяющих каждой точке плоскости сопоставить некоторую прямую, можно указать, разумеется, очень много (например, каждой точке P можно сопоставить ось симметрии p точки P и какой-либо фиксированной точки O; см. также задачи 118а) или 122б) из § 2). Однако можно доказать, что **всякое** преобразование плоскости, переводящее точки в прямые, такое, что *каждой точке* (*прямой*) *отвечает единственная прямая* (*точка*) *и точке и проходящей через нее прямой отвечают прямая и лежащая на ней точка*, может быть получено при помощи полярного преобразования относительно некоторой окружности S, сопровождаемого ещё, быть может, центральным проектированием плоскости на себя или симметрией относительно точки и центральным проектированием (см. по этому поводу гл. VI хорошей популярной книги О. **Вольберга** «Основные идеи проективной геометрии», изд. 3-е, М.—Л., Учпедгиз, 1949).

Отметим ещё, что указанное выше различие между использованием центрального или параллельного проектирования и использованием полярного преобразования не является принципиальным. Мы отмечали, что полярное преобразование иногда применяется для **доказательства** геометрических теорем (а не для получения новых предложений). С другой стороны, параллельное или центральное проектирование тоже может быть применено для получения новых теорем из уже известных: преобразовав при помощи проектирования чертёж какой-либо теоремы, мы можем иногда получить новое предложение. Действительно, теоремы, в которых фигурируют лишь понятия, сохраняющиеся при параллельном проектировании (т. е. теоремы аффинной геометрии; см. введение к третьей части), не могут перейти в результате параллельного проектирования в новые теоремы (подобно тому, как ни одна геометрическая теорема не может перейти в новую теорему, если передвинуть как-либо её чертёж; подробнее об этом см. введение к первой части). Поэтому применение параллельного проектирования к таким теоремам ограничивается тем, что иногда при помощи параллельного проектирования удаётся придти к более простому частному случаю той же теоремы; много примеров подобного рода имеется в § 1. Однако теоремы, в формулировке которых фигурируют иные понятия, могут при параллельном проектировании переходить в новые теоремы: так, спроектировав, например, прямоугольный треугольник в равносторонний, мы можем перевести какую-либо теорему о прямоугольном треугольнике в совершенно новое предложение. Точно так же при помощи центрального проектирования можно получать новые теоремы из теорем, относящихся к аффинной геометрии; некоторые примеры подобного рода были приведены выше (см. задачи 130а) и 131, 132а) и 133 из § 2, стр. 47—48 и 57—58). Однако параллельное и центральное проектирования чаще применяются для доказательства теорем, а полярное преобразование — для вывода новых теорем из уже известных.

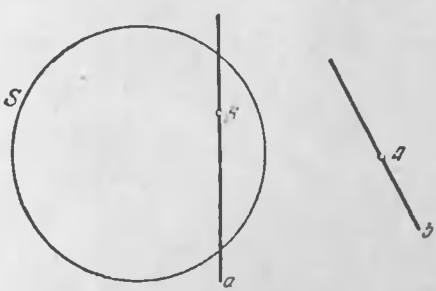
Важно иметь в виду, что принцип двойственности имеет место только на проективной плоскости, т. е. на плоскости, дополненной «бесконечно удалёнными» элементами (в «бесконечно удалённую прямую» переходит при полярном преобразовании центр окружности S, а в «бесконечно удалённые точки» — диаметры этой окружности). Это и понятно: принцип двойственности позволяет заменять в геометрических теоремах точки прямыми, а прямые — точками, т. е. он означает, что точки и прямые плоскости в известном смысле равноправны между собой. Между тем до введения «бесконечно удалённых» элементов никакой равноправности точек и прямых быть не могло: в противном случае параллельным прямым (не имеющим общей точки) должны были бы отвечать какие-то «параллельные» точки (не имеющие «общей прямой», т. е. прямой, проходящей через обе точки), а таких точек вовсе не существует. Введение «бесконечно удалённых» элементов устраняет исключительное положение параллельных прямых: на проективной плоскости каждые две прямые определяют единственную принадлежащую им обеим точку (конечную или «бесконечно удалённую») и каждые две точки определяют единственную проходящую через них прямую.

Можно показать, что из отмеченной симметрии основных свойств точек и прямых проективной плоскости уже с необходимостью следует принцип двойственности, т. е. возможность получать из одних теорем другие (двойственные первоначальным) при помощи замены слова «точка» словом «прямая», выражения «лежит на» выражением «проходит через» и наоборот. Действительно, общий путь доказательства геометрических теорем состоит в том, что эти теоремы сводятся к другим, более простым, те в свою очередь сводятся к каким-то ещё и т. д., пока не приходят к простейшим геометрическим предложениям — аксиомам, принимаемым без доказательства. *Но в проективной плоскости основные свойства точек и прямых совершенно равноправны*, т. е. каждая аксиома остаётся справедливой, если заменить в ней слово «точка» словом «прямая», выражение «лежит на» выражением «проходит через» и наоборот (для каждой аксиомы существует двойственная ей аксиома). Отсюда следует, что при подобной замене каждая теорема переходит в новую теорему, тоже верную: эта новая теорема может быть доказана так же, как и первоначальная, только теперь доказательство приведёт к аксиомам, двойственным тем, к которым приводило доказательство первоначальной теоремы. Подробнее об этом см. п. 3 гл. I и п. 3 гл. II цитированной выше книги О. А. Вольберга.

Впрочем, следует отметить, что полярные преобразования позволяют получить значительно больше двойственных друг другу теорем, чем одно только использование равноправности основных свойств точек и прямых. Действительно, использование этой равноправности (выражающейся в существовании пар двойственных друг другу аксиом) позволяет получать теоремы, двойственные лишь тем предложениям, в формулировке которых не участвуют никакие углы или расстояния (ибо в противном случае мы не будем знать, чем заменить в новой теореме эти углы или расстояния)[1]. Приводимые же ниже свойства Б и В полярного преобразования позволяют применить принцип двойственности к значительно более широкому классу теорем.

Рассмотрим некоторые свойства полярного преобразования. Самым важным из них является следующее.

А. *Точка A и проходящая через неё прямая b переходят при полярном преобразовании в прямую a и лежащую на ней точку B* (черт. 76).

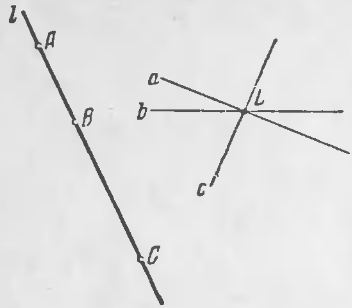


Черт. 76.

[1]) Другими словами, равноправность основных свойств точек и прямых проективной плоскости позволяет применять принцип двойственности лишь к теоремам проективной геометрии (см. введение к третьей части).

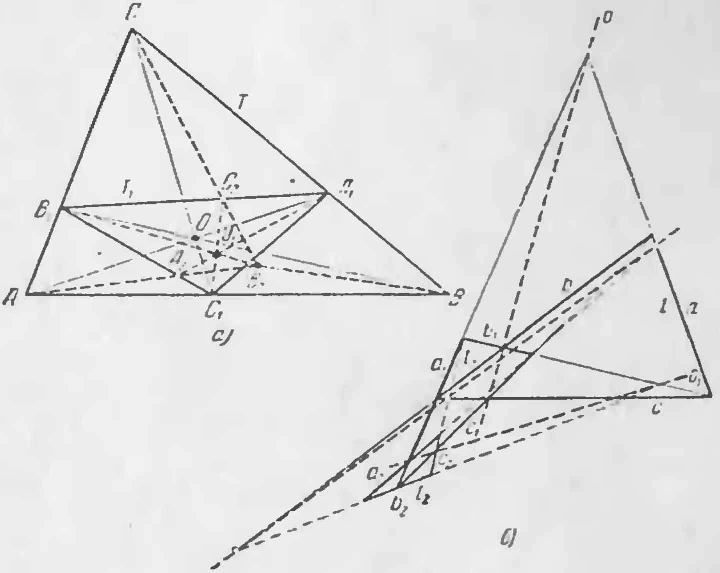
Это свойство полярного преобразования непосредственно вытекает из теоремы 2.

Из свойства А следует, что три точки A, B и C, лежащие на одной прямой l, переходят при полярном преобразовании в три прямые a, b и c, пересекающиеся в одной точке L (черт. 77), и обратно, что три прямые, пересекающиеся в одной точке (обыкновенной или «бесконечно удалённой»), переходят в три точки, лежащие на одной прямой. Это обстоятельство уже позволяет получать из известных теорем новые теоремы. Рассмотрим, например, теорему задачи 137а): *если A_1, B_1, C_1 — такие точки на сторонах треугольника* ABC (обозначим его через T), *что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O, и A_2, B_2, C_2 — такие точки на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$* (треугольника T_1), *что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке O_1, то и прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке* (черт. 78, *а*). Применим к этой теореме полярное преобразование. Треугольник T перейдёт в новый треугольник t, сторонами которого являются поляры a, b и c вершин T; точка O перейдёт в прямую o и треугольник T_1 — в треугольник t_1, сторонами которого являются прямые a_1, b_1 и c_1, соединяющие вершины t с точками пересечения o с его противоположными сторонами; точка O_1 перейдёт в прямую o_1 и точки A_2, B_2 и C_2 — в прямые a_2, b_2 и c_2, соединяющие вершины t_1 с точками пересечения o_1 с его противоположными сторонами (черт. 78, *б*). Так как прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 в силу теоремы задачи 137а) пересекаются в одной точке, то точки пересечения a и a_2, b и b_2, c и c_2 должны лежать на одной прямой. Таким образом, мы приходим к следующей теореме: *если t_1 — треугольник, образованный прямыми, соединяющими вершины произвольного треугольника t с точками пересечения его противоположных сторон с какой-либо прямой o, а t_2 — треугольник, образованный прямыми, соединяющими вершины t_1 с точками пересечения его про-*



Черт 77.

тивоположных сторон с какой-то прямой o_1, *то точки пересечения соответствующих сторон треугольников* t *и* t_2 *лежат на одной прямой,*— это есть совершенно новая теорема, выражаемая новым чертежом. При этом нам нет



Черт. 78.

необходимости доказывать это предложение самостоятельно: его справедливость автоматически следует из теоремы задачи 137а) и свойства А полярного преобразования [1]).

[1]) Отметим, что, строго говоря, при выводе новых теорем при помощи полярного преобразования это преобразование следует применять два раза. Это легко уяснить себе, если вдуматься в приведённый выше пример. Применяя полярное преобразование, мы из известной теоремы (в нашем случае — теоремы задачи 137а)) получаем формулировку новой теоремы. Однако мы ещё не можем быть твёрдо уверены в справедливости этой теоремы во всех случаях (мы ещё не можем утверждать, что черт. 78, *б*, где треугольник t и прямые o и o_1 выбраны совершенно произвольно, может быть получен полярным преобразованием черт. 78, *а*); для доказательства полученной теоремы нам следует снова произвести полярное преобразование и таким образом свести новую теорему к первоначальной.

159. Какие теоремы получаются при помощи полярного преобразования из теорем задач 118а), б); 122а), б); 123; 125; 126; 127; 129а), б)?

160. На плоскости даны прямые l_1, l_2, ..., l_n, пересекающиеся в одной точке, и n точек M_1, M_2, ..., M_n. Постройте n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$, вершины которого лежат на прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$, а стороны проходят через точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Значительное обобщение задачи 160 содержится в задаче 189 из § 5 (стр. 122).

161. Какие теоремы получаются при помощи полярного преобразования из теорем задач 135а) — г); 136а) — в); 137б)?

162. В какие теоремы переходят теоремы задач 138а), б); 139а), б); 140; 142а), б); 144; 145; 146; 149 при полярном преобразовании относительно окружности, фигурирующей в условиях каждой из этих задач?

163. Какое предложение получается из результата задачи 141 при полярном преобразовании относительно окружности S?

164. Дана окружность S и три прямые l, l_1 и l_2. Опишите вокруг S четырёхугольник $ABCD$ так, чтобы вершины A и C лежали на прямой l, вершина B — на прямой l_1 и вершина D — на прямой l_2.

Обобщением этой задачи является задача 183б) из § 5 (стр. 120).

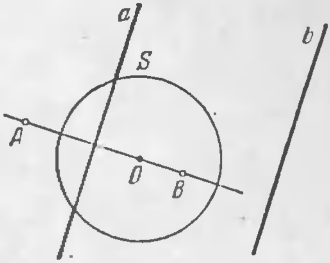
165. Выведите с помощью полярного преобразования теорему Чева (см. задачу 134б) из § 2, стр. 58—59) из теоремы Менелая (задача 134а)) и обратно — теорему Менелая из теоремы Чева.

Рассмотрим теперь дальнейшие свойства полярного преобразования.

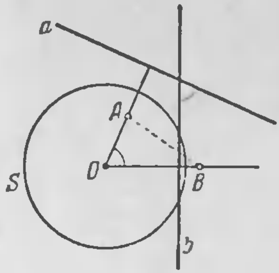
Б. *Параллельные прямые переходят при полярном преобразовании в точки, лежащие на одной прямой с центром окружности* S, *относительно которой производится полярное преобразование; обратно, точки, лежащие на одной прямой с центром окружности* S, *переходят в параллельные прямые* (черт. 79).

Это свойство сразу следует из того, что полюс прямой a лежит на прямой, перпендикулярной к a и проходящей через центр S (см. выше стр. 86).

В. *Угол между двумя прямыми a и b равен углу, под которым виден из центра основной окружности полярного преобразования отрезок, соединяющий точки A и B, в которые переходят эти прямые (или углу, смежному с ним).*



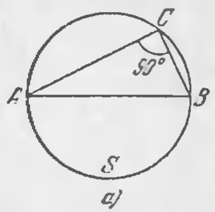
Черт. 79.

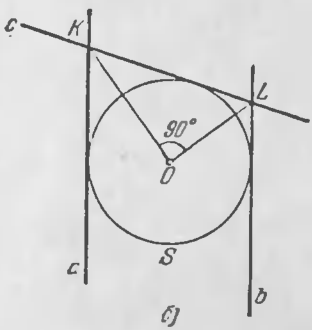


Черт. 80.

Это свойство также следует из того, что поляра точки A относительно окружности S перпендикулярна к прямой OA; отсюда вытекает, что угол между прямыми a и b и угол между прямыми OA и OB — углы со взаимно перпендикулярными сторонами (черт. 80).

Свойства Б и В полярного преобразования позво-





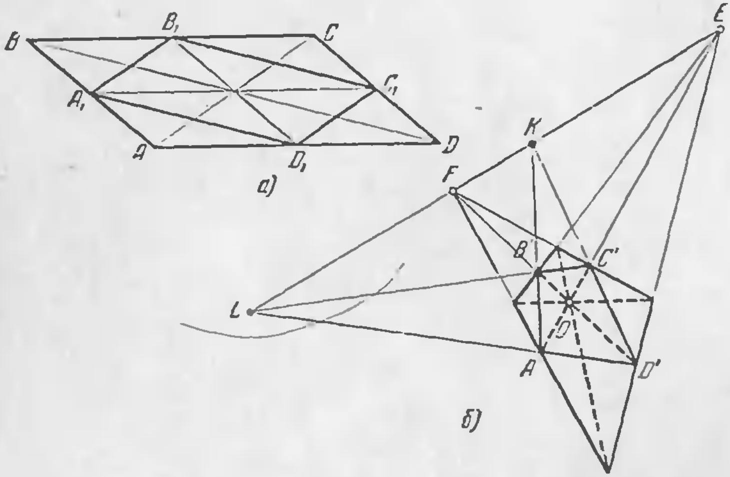
Черт. 81.

ляют получать из многих теорем элементарной геометрии новые теоремы. Рассмотрим, например, следующее предложение: вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой (черт. 81, *а*). При полярном преобразовании точки A, B и C окружности S переходят в касательные a, b и c к этой окружности; при этом, если A и B — диаметрально противоположные точки окружности, то касательные a и b параллельны (ср. со свойством Б полярного преобразования).

Принимая во внимание свойство В полярного преобразования, мы приходим к теореме: *отрезок KL, высекаемый на произвольной касательной c к окружности S параллельными касательными a и b к той же окружности, виден из центра O окружности S под прямым углом* (черт. 81, *б*).

Рассмотрим ещё один, более сложный, пример. Почти очевидным является следующее предложение: четырёхугольник, вершинами которого служат середины сторон параллелограмма, сам является параллелограммом (черт. 82, *а*). Выясним, в какое предложение переходит эта теорема при полярном преобразовании.

Прежде всего нам необходимо так определить середины сторон параллелограмма, чтобы в это определение входили только понятия,

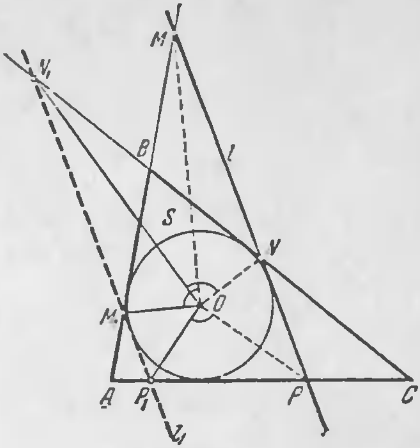


Черт. 82.

относительно которых известно, во что они переходят при полярном преобразовании (ибо мы не знаем, во что переходит при полярном преобразовании середина известного отрезка). Этому условию удовлетворяет определение середин сторон параллелограмма как точек пересечения сторон со средними линиями — прямыми, проведёнными через точку пересечения диагоналей параллельно сторонам. Из этого определения мы и будем исходить.

В силу свойства Б полярного преобразования параллелограмм $ABCD$ переходит при полярном преобразовании в четырёхугольник $A'B'C'D'$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с центром O окружности S (см. черт. 82, *б*; сама окружность S на этом чертеже не изображена). Противоположные вершины параллелограмма переходят в противоположные стороны четырёхугольника $A'B'C'D'$, диагонали параллелограмма — в точки K и L пересечения противоположных сторон, точка пересечения диагоналей — в прямую KL. Средние линии параллелограмма (прямые, проведённые через точку пересечения диагоналей параллельно сторонам) в силу свойств А и Б полярного преобразования переходят в точки E и F пересечения прямой KL с диагоналями $A'C'$ и $B'D'$ четырёхугольника $A'B'C'D'$. Следовательно, середины сторон параллелограмма переходят в прямые EB' и ED', FA' и FC', а исходная теорема — в следующее предложение: *точка пересечения диагоналей четырёхугольника, сторонами которого служат прямые FA', EB', FC' и ED', совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника* $A'B'C'D'$ (черт. 82, *б*).

Как мы видим, полученное предложение является совсем не простым и не очевидным; непосредственное доказательство его довольно сложно.



Черт. 83.

166. Воспользуйтесь свойством Б полярного преобразования для доказательства теоремы Дезарга (задача 123 из § 2, стр. 42).

167. Пусть l — произвольная касательная к вписанной окружности S треугольника ABC; M, N, P — точки пересечения l со сторонами треугольника (черт. 83). Восставим из центра O окружности S перпендикуляры к прямым OM, ON, OP; пусть M_1, N_1 и P_1 — точки пересечения этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что точки M_1, N_1 и P_1 лежат на одной прямой l_1, также касающейся окружности S.

168. В какую теорему переходит при полярном преобразовании теорема: вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, равны между собой?

169. В какую теорему переходит при полярном преобразовании теорема о прямой Симсона (задача 85 из § 1 гл. II второй части книги)?

170. В какую теорему переходит при полярном преобразовании теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке», если за окружность полярного преобразования принять описанную окружность S треугольника?

171. В какую теорему переходит при полярном преобразовании теорема: если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то они являются биссектрисами углов параллелограмма?

172. В какие теоремы переходят при полярном преобразовании теоремы:

а) высоты треугольника пересекаются в одной точке?

б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке?

173. Придумайте самостоятельно другие примеры двойственных друг другу теорем.

Кроме свойств А — В полярного преобразования при выводе новых теорем из уже известных иногда оказываются полезными и иные его свойства, в частности те, которые составляют содержание задач 150 и 151. Так, например, воспользовавшись свойством В полярного преобразования и теоремой задачи 150, нетрудно показать, что теорема задачи 105а) из § 2 гл. II второй части книги переходит при полярном преобразовании в следующую теорему: *если p_1, p_2, p_3 — расстояния сторон произвольного треугольника ABC от точки O, из которой стороны треугольника видны под равными (или смежными)* [1] *углами, то бо́льшая из величин $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{p_3}$ не превосходит суммы двух других.* Аналогично с помощью предложения задачи 151 можно из теорем задач 254а), б) и 255 из § 4 гл. II (см. ниже стр. 234) получить следующие предложения:

произведение расстояний от чётных вершин описанного около окружности S $2n$-угольника $A_1A_2\ldots A_{2n}$ до произвольной касатель-

[1]) Если все углы треугольника ABC меньше 120°, то O — точка внутри треугольника, из которой все стороны видны под равными углами (в 120°); если ABC — тупоугольный треугольник с углом, бо́льшим 120°, то точки, из которой все стороны видны под равными углами, не существует и O — точка вне треугольника, из которой две стороны видны под углами в 60°, а бо́льшая сторона — под углом в 120°; если один угол треугольника равен 120°, то точка O совпадает с вершиной тупого угла, и сформулированное предложение не имеет смысла.

Точка O обладает замечательными свойствами (некоторые из них рассмотрены в задачах § 2 гл. II второй части книги); в литературе она иногда называется точкой Торичелли треугольника.

ной l окружности S всегда равно произведению расстояний от нечётных вершин до той же прямой l;

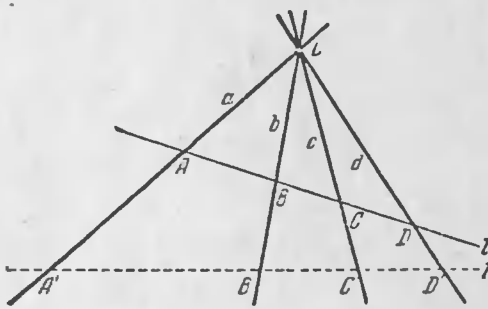
произведение расстояний от всех вершин описанного около окружности S n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ до произвольной касательной l окружности S всегда равно произведению расстояний от точек касания сторон n-угольника с окружностью до той же прямой l;

пусть d_0, d_1, d_2, ..., d_{n-1} — расстояния от вершин правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ до произвольной касательной l вписанной окружности n-угольника, d_0 — наименьшее из этих расстояний. В таком случае

$$\frac{1}{d_0}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_{n-1}}.$$

Предоставляем читателю самостоятельно вывести с помощью полярного преобразования все эти теоремы.

Наконец, отметим ещё одно свойство полярного преобразования, играющее основную роль во многих глубоких теориях, связанных с этим преобразованием. Наряду с двойным отношением



Черт. 84.

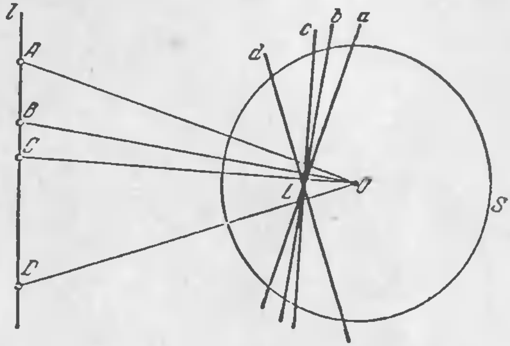
четырёх точек, лежащих на одной прямой (см. выше стр. 49), часто рассматривают также двойное или сложное отношение четырёх прямых a, b; c, d, пересекающихся в одной точке. Под этим понимают двойное отношение четырёх точек A, B; C, D, в которых четыре рассматриваемые прямые пересекают произвольную пятую прямую l (не проходящую через их общую точку; см. черт. 84). Очевидно, что это сложное отношение зависит только от прямых a, b, c, d, но не от прямой l; действительно, если те же четыре прямые пересекают какую-либо иную прямую l' в точках A', B', C', D', то сложное отношение точек A', B'; C', D' равно сложному отношению точек A, B; C, D (в силу свойства В центрального проектирования; сравните черт. 84 с черт. 34 на стр. 48).

Теперь можно сформулировать то свойство полярного преобразования, которое мы имели в виду:

Г. *Если четыре точки A, B, C и D, лежащие на одной прямой l, переходят при полярном преобразовании в четыре прямые*

a, b, c и d (пересекающиеся в силу свойства А полярного преобразования в одной точке L), *то сложное отношение четырёх прямых* a, b; c, d *равно сложному отношению четырёх точек* A, B; C, D.

Доказательство свойства Г является совсем простым. Действительно, рассмотрим четыре точки A, B, C и D, лежащие на одной прямой l, и четыре прямые a, b, c и d — поляры этих точек относительно некоторой окружности S (черт. 85). Согласно определению двойного отношения четырёх прямых двойное отношение точек A, B; C, D

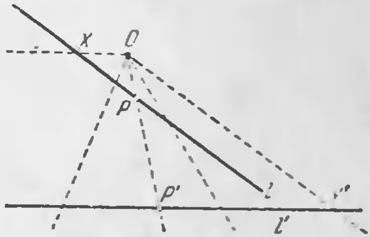


Черт. 85.

равно двойному отношению прямых OA, OB; OC, OD, где O — центр окружности S. Так как поляра точки относительно окружности S перпендикулярна к прямой, соединяющей эту точку с центром окружности S (см. выше, стр. 86), то прямые OA, OB, OC и OD перпендикулярны соответственно к прямым a, b, c и d. Отсюда следует, что четвёрку прямых OA, OB, OC, OD можно движением совместить с четвёркой прямых a, b, c, d (эти четвёрки равны): для этого достаточно параллельно перенести четвёрку OA, OB, OC, OD так, чтобы точка O совпала с точкой L, а затем повернуть эту четвёрку прямых на 90° вокруг точки L. Следовательно, сложное отношение четырёх прямых OA, OB; OC, OD равно сложному отношению четырёх прямых a, b; c, d, а значит, и сложное отношение четырёх точек A, B; C, D равно сложному отношению четырёх прямых a, b; c, d, что и требовалось доказать.

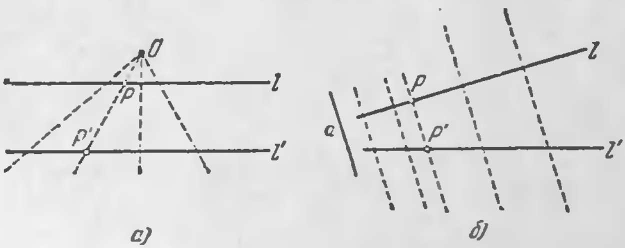
§ 5. Проективные преобразования прямой и окружности. Построения с помощью одной линейки

Пусть l и l' — две различные прямые плоскости. Выберем на плоскости некоторую точку O, не лежащую ни на одной из этих прямых, и спроектируем из центра O прямую l на прямую l', т. е. сопоставим каждой точке P прямой l ту точку P' прямой l', в которой её пересекает прямая OP (черт. 86). При этом точка X прямой l, в которой l пересекается с прямой OX, параллельной l', не проектируется ни в какую точку прямой l'. Для того, чтобы сделать точку X равноправной со всеми другими точками, мы будем говорить,



Черт. 86.

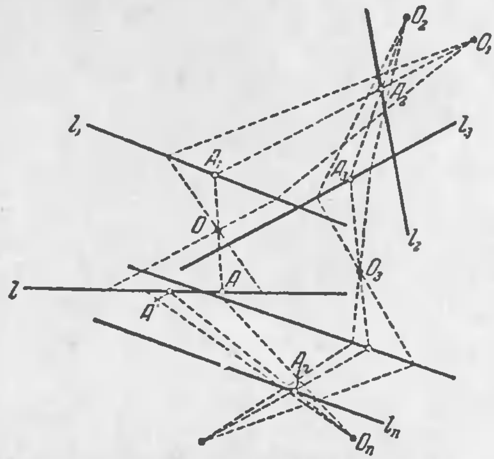
что она проектируется в «бесконечно удалённую точку» прямой l'. Точно так же мы будем считать, что в точку Y', в которой прямая l' пересекается с прямой OY', параллельной l, проектируется «бесконечно удалённая точка» прямой l. Если прямые l и l' параллельны между собой (черт. 87, *а*), то мы будем говорить, что «бесконечно



Черт. 87.

удалённые точки» этих прямых проектируются одна в другую; то же самое мы будем говорить и в том случае, когда l проектируется на l' параллельно (черт. 87, *б*).

Центральное (или параллельное) проектирование не является преобразованием прямой, переводящим её в себя,— это есть отображение одной прямой на другую. Пусть теперь прямая l проектируется из некоторой точки O на прямую l_1, прямая l_1 проектируется из точки O_1 на прямую l_2, прямая l_2 проектируется из точки O_3 на прямую l_3 и т. д., наконец, прямая l_n проектируется из точки O_n обратно на прямую l (черт. 88). При этом точка A прямой l переходит сначала в точку A_1 прямой l_1, затем — в точку A_2 прямой l_2, затем — в точку A_3 прямой l_3 и т. д. и, наконец, в точку A'



Черт. 88.

первоначальной прямой l. Таким образом, рассмотренная цепь центральных проектирований определяет некоторое **преобразование** прямой l, при котором точка A переходит в точку A'. Такое преобразование прямой мы будем называть **проективным преобразованием**. Мы будем называть преобразование прямой проективным и в том случае, когда в цепи приводящих к этому преобразованию проектирований одной прямой на другую некоторые центральные проектирования (или даже все) заменяются параллельными проектированиями [1]).

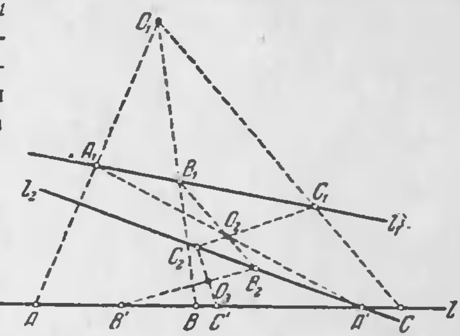
Основным свойством проективных преобразований является следующее: *при проективных преобразованиях прямой со-*

---

[1]) Вообще с того момента, как мы ввели в рассмотрение «бесконечно удалённые точки» плоскости (см. выше стр. 54), мы можем считать параллельное проектирование одной прямой на другую частным случаем центрального проектирования (когда центром проекции служит «бесконечно удалённая точка»).

храняется двойное отношение четырёх точек. Действительно, при центральном проектировании одной прямой на другую двойное отношение четырёх точек не меняется (см. свойство В центрального проектирования, стр. 49); не меняется двойное отношение и при параллельном проектировании прямой на прямую (при параллельном проектировании не меняется даже простое отношение $\frac{AC}{BC}$ трёх точек A, B, C). Отсюда вытекает, что при всяком проективном преобразовании прямой (осуществляемом при помощи ряда последовательных проектирований) каждые четыре точки переходят в четыре точки, имеющие то же самое двойное отношение.

Из этого основного свойства сразу следует, что *проективное преобразование прямой полностью определяется тем, в какие точки переходят три данные точки.* Действительно, если известны точки A', B' и C', в которые перешли при проективном преобразовании три данные точки A, B и C, то любая другая точка M прямой переходит в такую точку M', что



Черт. 89.

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AM}{BM}=\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'M'}{B'M'}. \quad (*)$$

Но равенство (*) однозначно определяет положение точки M'.

С другой стороны, *существует проективное преобразование прямой, которое переводит три данные точки A, B, C в три наперёд заданные точки A', B', C'.* Для того чтобы такое преобразование осуществить, спроектируем сначала нашу прямую l на произвольную прямую l_1 так, чтобы точки A, B, C перешли в некоторые точки A_1, B_1, C_1 прямой l_1, затем спроектируем прямую l_1 на произвольную прямую l_2, пересекающую l в точке A', так, чтобы точка A_1 перешла в точку A', а точки B_1, C_1 — в какие-то точки B_2, C_2 прямой l_2, наконец, спроектируем прямую l_2 на прямую l, приняв за центр проекции (конечную или «бесконечно удалённую») точку O пересечения прямых $B'B_2$ и $C'C_2$ (черт. 89) [1]).

Теперь легко доказать, что *каждое преобразование прямой, при котором сохраняется двойное отношение четырёх точек прямой, является проективным преобразованием* (т. е. может быть осуществлено при помощи цепи последовательных проектирований). Действительно, пусть мы имеем какое-то преобразование прямой, при котором сохраняется двойное отношение четырёх точек, и пусть это преобразование переводит какие-то три точки A, B, C в точки A', B', C'. Существует проективное преобразование, которое переводит точки A, B, C в те же точки A', B', C'. Но если два преобразования прямой, оба сохраняющие двойное отношение четырёх точек, переводят какие-то три точки прямой в одни и те же три точки, то они переводят произвольную точку M в одну и ту же точку M' (положение которой определяется формулой (*) предыдущей стр.), т. е. совпадают между собой.

174. Воспользуйтесь свойствами проективного преобразования прямой для доказательства теоремы задачи 129а) из § 2, стр. 46.

175. Воспользуйтесь свойствами проективного преобразования прямой для доказательства теоремы задачи 136а) из § 2, стр. 65—66.

176. Точка M_1 на стороне A_1A_2 правильного n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ проектируется из центра A_n на сторону A_2A_3; полученная точка M_2 проектируется из центра A_1 на сторону A_3A_4; полученная точка M_3 проектируется из центра A_2 на сторону A_4A_5 и т. д. Докажите, что:

а) если $n=4$, то точка M_{13}, полученная после трёхкратного обхода n-угольника, совпадает с исходной точкой M_1 (и, следовательно, M_{14} совпадает с M_2, M_{15} — с M_3 и т. д.);

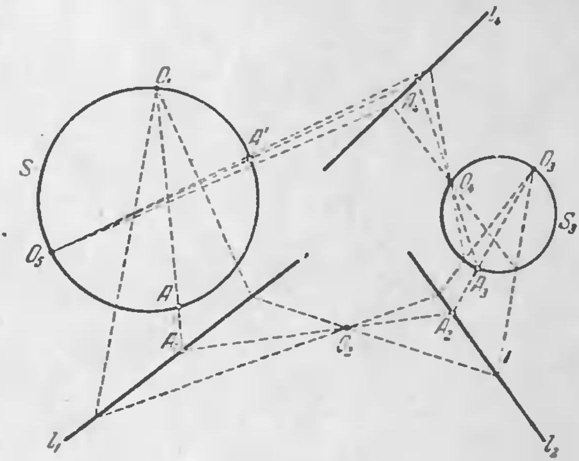
б) если $n=6$, то точка M_{13}, полученная после двукратного обхода n-угольника, совпадает с исходной точкой M_1 (и, следовательно, M_{14} совпадает с M_2, M_{15} — с M_3 и т. д.);

---

[1]) Можно доказать даже, что всякое проективное преобразование прямой осуществимо при помощи **одного** проектирования прямой l на некоторую другую прямую l_1 и последующего проектирования прямой l_1 на первоначальную прямую l. Нам это предложение не понадобится, и мы не будем останавливаться на его доказательстве.

в) если $n=10$, то точка M_{11}, полученная после одного обхода n-угольника, совпадает с исходной точкой M_1 (и, следовательно, M_{12} совпадает с M_2, M_{13} — с M_3 и т. д.).

Рассмотрим теперь цепь проектирований, при которых проектируются друг на друга **прямые и окружности**. Пусть, например, окружность S проектируется из точки O_1 этой окружности на прямую l_1, прямая l_1 проектируется из



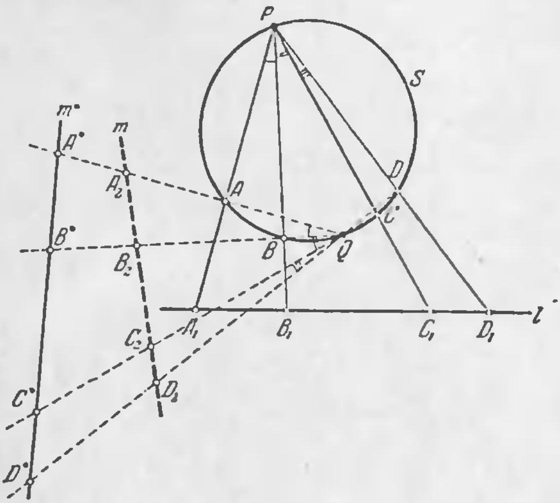
Черт. 90.

некоторой точки O_2 на другую прямую l_2, прямая l_2 проектируется из точки O_3 окружности S_3 на окружность S_3, окружность S_3 проектируется из другой точки O_4 окружности на прямую l_4, наконец, прямая l_4 проектируется из точки O_5 окружности S обратно на S (черт. 90)[1]). Первое проектирование переводит точку A окружности S в точку A_1 прямой l_1, второе проектирование переводит A_1 в точку A_2 прямой l_2, третье — точку A_2 в точку A_3 окружности S_3, четвёртое —

[1]) Окружность необходимо проектировать на прямую **из точки** O **этой же окружности**, ибо если бы точка O находилась внутри окружности, то каждой точке прямой отвечали бы две точки окружности, а если выбрать O вне окружности, то некоторым точкам прямой будут отвечать две точки окружности, а другим — ни одной.

точку A_3 в точку A_4 прямой l_4 и, наконец, последнее — точку A_4 в точку A' окружности S.

Таким образом, наша цепь проектирований определяет некоторое **преобразование** окружности S, переводящее точку A в точку A'. Всякое преобразование окружности, которое может быть осуществлено при помощи цепи подобных последовательных проектирований, мы будем называть **проективным преобразованием окружности**.



Черт. 91.

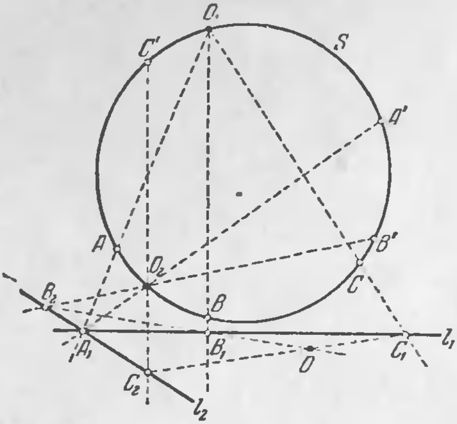
Двойным (или **сложным**) **отношением четырёх точек** A, B; C, D **окружности** S мы будем называть двойное отношение четырёх точек A_1, B_1; C_1, D_1, в которые переходят точки A, B, C, D при проектировании окружности S из некоторой точки P этой окружности на какую-либо прямую l (черт. 91). Нетрудно показать, что так определённое двойное отношение четырёх точек окружности не зависит от выбора точки P и прямой l, т. е. вполне определяется точками A, B, C, D. Действительно, пусть при проектировании окружности S из точки P на прямую l точки A, B, C, D переходят в точки A_1, B_1, C_1, D_1, а при проектировании окружности S из точки Q той же окружности на прямую m —

в точки A_2, B_2, C_2, D_2 (черт. 91). В силу известного свойства вписанных углов прямые PA, PB, PC, PD образуют между собой такие же углы, как и прямые QA, QB, QC, QD. Отложим теперь на прямых QA, QB, QC, QD отрезки $QA^* = PA_1$, $QB^* = PB_1$, $QC^* = PC_1$, $QD^* = PD_1$. В таком случае фигура $QA^*B^*C^*D^*$ будет равна фигуре $PA_1B_1C_1D_1$ (эти две пятёрки точек можно совместить движением: достаточно совместить точки Q и P и лучи QA^* и QB^* направить по лучам PA_1 и PB_1); поэтому точки A^*, B^*, C^* и D^* лежат на одной прямой m^* и двойное отношение четырёх точек $A^*, B^*; C^*, D^*$ равно двойному отношению четырёх точек A_1, B_1; C_1, D_1. С другой стороны, четвёрка точек A^*, B^*, C^*, D^* получается из четвёрки точек A_2, B_2, C_2, D_2 проектированием прямой m на прямую m^* из центра Q; поэтому двойное отношение точек A^*, B^*; C^*, D^* равно двойному отношению точек A_2, B_2; C_2, D_2. Отсюда и вытекает, что двойное отношение четвёрки точек A_2, B_2; C_2, D_2 равно двойному отношению четвёрки точек A_1, B_1; C_1, D_1, что и требовалось доказать.

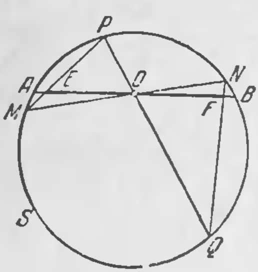
Так как проектирование прямой на окружность (или окружности на прямую) сохраняет двойное отношение четырёх точек, то *при проективном преобразовании окружности сохраняется двойное отношение четырёх точек.* Отсюда в точности так же, как и в случае проективных преобразований прямой, выводится, что *проективное преобразование окружности полностью определяется тем, в какие точки переходят три данные точки.* Наконец, легко доказать, что всякое преобразование окружности, при котором сохраняется двойное отношение четырёх точек, является проективным преобразованием (т. е. может быть получено в результате ряда последовательных проектирований[1])). Для этого достаточно показать, что существует проективное преобразование, переводящее три данные точки A, B, C окружности S в три наперёд заданные её точки A', B', C' (ср. выше стр. 110). Но

[1]) Из сказанного ниже даже следует, что всякое проективное преобразование окружности осуществимо при помощи одного проектирования окружности S из точки O на некоторую прямую l и последующего проектирования прямой l из другой точки O' обратно на окружность S. Для этого достаточно выбрать точки O и O' таким образом, чтобы двойное отношение четырёх точек A, B; C, O окружности равнялось двойному отношению точек A', B'; C', O'; ср. с чертежом 98 на стр. 118.

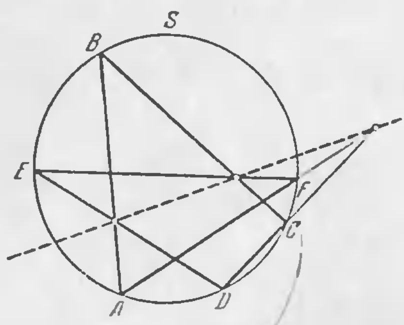
такое преобразование можно осуществить так: спроектируем тройки точек A, B, C и A', B', C' из произвольных точек O_1 и O_2 окружности S в точки A_1, B_1, C_1, соответственно A_1, B_2, C_2, прямых l_1 и l_2, пересекающихся в точке A_1, а затем спроектируем тройку точек A_1, B_1, C_1 в тройку точек A_1, B_2, C_2 (черт. 92; за центр O этого проектирования следует принять точку пересечения прямых B_1B_2 и C_1C_2). В таком случае последовательность трёх проектирований: окружности S на прямую l_1 из центра O_1, прямой l_1 на прямую l_2 из центра O и l_2 обратно на окружность S из центра O_2, переводит тройку точек A, B, C в тройку точек A', B', C'.



Черт. 92.



Черт. 93.



Черт. 94.

177. Через середину O хорды AB окружности S проведены две произвольные хорды MN и PQ. Докажите, что отрезок EF, который высекают на AB хорды MP и NQ, делится точкой O пополам (черт. 93).

178. Воспользуйтесь свойствами проективного преобразования окружности для доказательства теорем задач 140а) — в) § 3 (стр. 77—78).

179. Воспользуйтесь свойствами проективного преобразования окружности для доказательства **теоремы Паскаля**: если A, B, C, D, E, F — произвольные шесть точек окружности, то точки пересечения AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой (черт. 94; сравните с задачей 145 из § 3, стр. 80).

Отметим, что результат задачи 179 сильнее результата задачи 145, поскольку там мы считали, что $ABCDEF$ есть вписанный в окружность **выпуклый** шестиугольник, в то время как в условии задачи 179 шестиугольник $ABCDEF$ может быть и самопересекающимся.

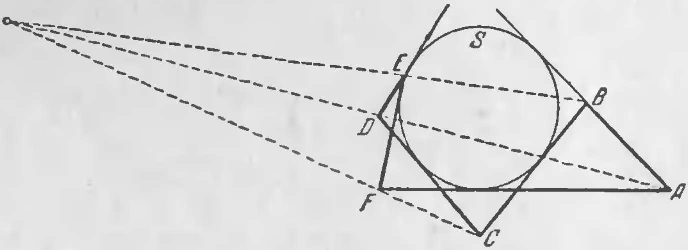
Таким образом, шесть точек окружности определяли в задаче 145 единственный вписанный в окружность шестиугольник, в то время как теперь мы можем рассматривать 60 различных вписанных в окружность шестиугольников с одними и теми же вершинами, отвечающих различным возможным порядкам нумерации вершин[1]), и, следовательно, 60 различных «паскалевых прямых», отвечающих данной шестёрке точек окружности[2]).

---

[1]) Существует 60 различных шестиугольников, имеющих своими вершинами данные шесть точек. Действительно, начиная от какой-либо вершины, мы можем пятью способами выбрать вторую вершину, после этого еще четырьмя способами — третью, затем тремя способами — четвертую, двумя способами — пятую; после этого последняя вершина определится однозначно. Таким образом, мы получаем число $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$, которое надо ещё разделить пополам, так как при таком перечислении всех возможных шестиугольников каждый шестиугольник считается дважды (в соответствии с двумя возможными направлениями обхода его вершин).

[2]) Полученная таким образом совокупность 60 прямых обладает рядом замечательных свойств, изучавшихся многими выдающимися геометрами прошлого века. Так, например, эти 60 прямых пересекаются по четыре в 45 точках (на каждой паскалевой прямой лежат три такие точки) и по три — в 80 точках (на каждой паскалевой прямой лежат четыре такие точки); последние 80 точек, кроме прямых Паскаля, лежат ещё по четыре на 20 новых прямых, которые в свою очередь пересекаются по четыре в 15 новых точках и т. д. Все эти свойства могут быть довольно просто выведены из теорем Дезарга (задача 123 из § 2, стр. 42), Паскаля и Брианшона, однако доказательство их завело бы нас слишком далеко.

Заметим также, что так как теорема Брианшона (см. задачу 146 из § 3) может быть выведена из теоремы Паскаля (см. решение задачи 162 из § 4), то из теоремы задачи 179

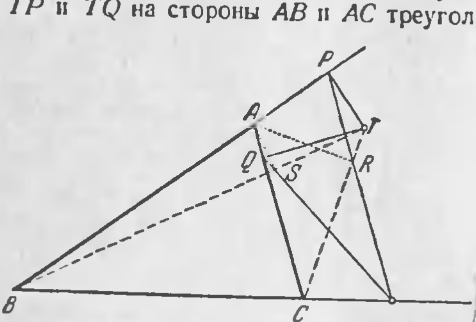


Черт. 95.

следует, что и теорема Брианшона остаётся справедливой для самопересекающихся шестиугольников (черт. 95).

180. а) Выведите из теоремы Паскаля предложение задачи 144 из § 3 (стр. 79).

б) Из произвольной точки T плоскости опущены перпендикуляры TP и TQ на стороны AB и AC треугольника ABC;

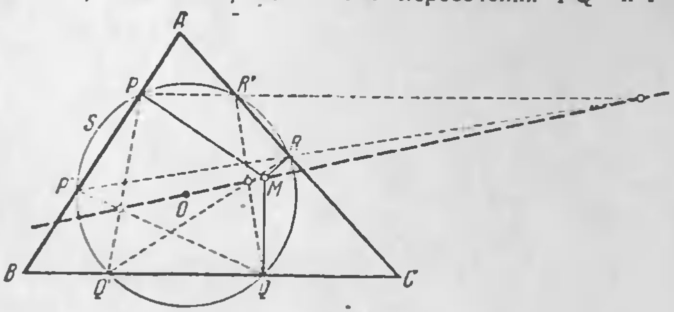


Черт. 96.

далее точка T соединена с вершинами B и C и из вершины A опущены перпендикуляры AR и AS на прямые TC и TB (черт. 96). Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

в) Из произвольной точки M плоскости опущены перпендикуляры MP, MQ и MR на стороны треугольника ABC;

пусть P', Q' и R' — вторые точки пересечения сторон треугольника с окружностью S, проходящей через точки P, Q, R (черт. 97). Докажите, что точки пересечения PQ' и $P'Q$,



Черт. 97.

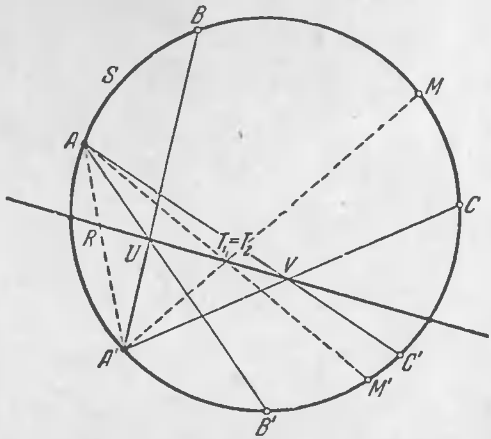
PR' и $P'R$, QR' и $Q'R$ лежат на прямой OM, где O — центр S.

Часто оказывается важным уметь определить **неподвижные точки** проективного преобразования окружности, т. е. такие точки, которые при этом преобразовании переходят сами в себя. Будем считать, что проективное преобразование определено тем, что три заданные точки A, B и C окружности S переходят в три другие известные точки A', B' и C'. Мы можем считать, что тройка точек A', B', C' не совпадает с тройкой точек A, B, C, так как иначе рассматриваемое проективное преобразование было бы тождественным преобразованием и все точки окружности являлись неподвижными[1]). Пусть, например, точка A' не совпадает с A; далее пусть M — произвольная точка окружности S и M' — точка, в которую переходит точка M в результате проективного преобразования (черт. 98). Докажем, что *прямые AM' и $A'M$ пересекаются на прямой UV, соединяющей точки пересечения AB' и $A'B$, AC' и $A'C$.*

---

[1]) Так как существует **единственное** проективное преобразование окружности, переводящее три данные точки в три известные точки, то преобразование, оставляющее три точки на месте, обязательно совпадает с тождественным.

Действительно, предположим, что это не так, и обозначим через T_1 и T_2 точки пересечения прямых $A'M$ и AM' с прямой UV; далее, пусть R есть точка пересечения прямой AA' с прямой UV. Проектируя окружность S на прямую UV сначала из точки A', а затем из точки A, мы увидим, что двойное отношение точек A, B; C, M окружности S равно двойному отношению точек R, U; V, T_1 прямой UV и двойное отношение точек A', B'; C', M' окружности S равно двойному отношению точек R, U; V, T_2 прямой UV. Но поскольку существует проективное преобразование, переводящее четвёрку точек A, B, C, M в четвёрку точек A', B', C', M', то двойные отношения этих двух четвёрок точек равны.



Черт. 98.

Следовательно, равны и двойные отношения четвёрок точек R, U; V, T_1 и R, U; V, T_2 прямой UV, откуда вытекает, что точка T_1 совпадает с T_2. А это нам и требовалось доказать.

Теперь мы видим, что для построения точки M', в которую переходит при нашем проективном преобразовании наперёд заданная точка M окружности S, достаточно соединить точку A с точкой T пересечения прямой $A'M$ с прямой UV, где U — точка пересечения AB' и $A'B$, V — точка пересечения AC' и $A'C$. Точка пересечения прямой AT с окружностью S и будет точкой M'. Из этого построения непосредственно следует, что *неподвижными точками рассматриваемого проективного преобразования окружности являются точки пересечения прямой UV с окружностью S*; таким образом, преобразование имеет две неподвижные точки, если UV пересекает S (именно этот случай изображён на черт. 98), одну неподвижную точку, если UV касается S, и ни одной неподвижной точки, если UV проходит вне S.

Интересно отметить, что построение неподвижных точек проективного преобразования окружности S, переводящего три данные её точки A, B, C в три другие данные точки A', B', C', производится с *помощью одной линейки* (без циркуля).

181. Дана окружность S и две её хорды AB и CD. Найдите такую точку X окружности, чтобы прямые AX и BX высекали на CD отрезок,

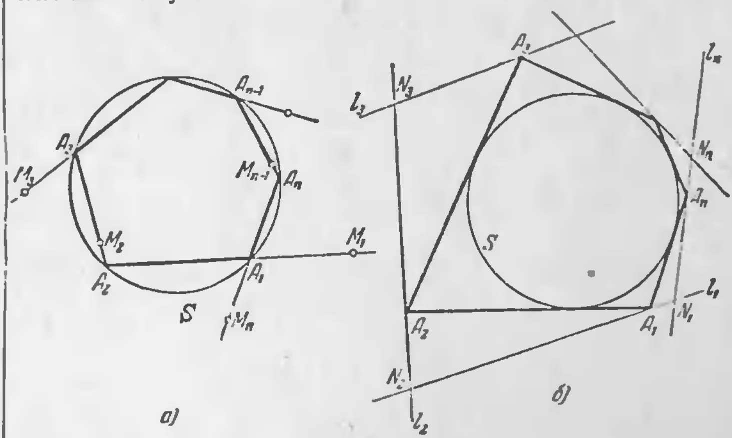
а) имеющий данную длину a;

б) делящийся пополам в данной точке E хорды CD.

В другой связи задачи 181а) и б) приведены в первой части книги (см. задачу 5 из § 1 гл. I и задачу 10 из § 2 той же главы).

182. а) Дана прямая l и точка P вне неё. Найдите на прямой l отрезок XY известной длины a, который виден из P под данным углом α.

б) Даны две прямые l_1 и l_2 и две точки P и Q, не лежащие на этих прямых. Найдите точку X на прямой l_1 и точку Y на прямой l_2, такие, что отрезок XY виден из точки P под данным углом α и из точки Q — под данным углом β.



Черт. 99.

183. а) Впишите в данную окружность n-угольник, стороны которого проходят через n заданных точек M_1, M_2, ..., M_n (черт. 99, a) или часть сторон проходит через данные точки, а остальные параллельны известным прямым.

б) Опишите вокруг данной окружности n-угольник, вершины которого лежат на n известных прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (черт. 99, *б*).

[Условия задач 183а) и б) можно также сформулировать следующим образом:

а) постройте n-угольник, вписанный в данную окружность S и описанный вокруг данного n-угольника $M_1M_2 \ldots M_n$ [1]);

б) постройте n-угольник, описанный вокруг данной окружности S и вписанный в данный n-угольник $N_1N_2 \ldots N_n$.]

В другой связи задача 183а) приведена в §§ 2 и 4 гл. II (см. задачу 231 на стр. 206—207 и 259 на стр. 237), а задача 183б) — в § 5 той же главы (задача 283 на стр. 303). Частными случаями задачи 183 являются задачи 40а), б) из § 1 гл. II части первой и 143б) из § 3 настоящей главы (стр. 79).

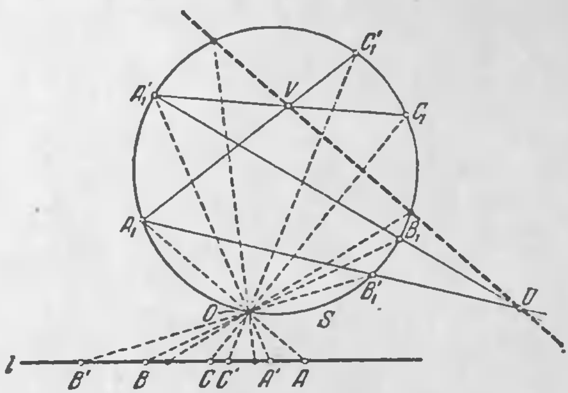
184. а) Впишите в данную окружность S треугольник ABC, зная длину стороны AB, направление стороны BC и точку, через которую проходит сторона AC.

б) Впишите в данную окружность S четырёхугольник $ABCD$ зная две точки, лежащие на двух противоположных сторонах, и длины двух других сторон.

Рассмотрим теперь проективное преобразование прямой l, переводящее три данные точки A, B, C в три известные точки A', B', C'; наша цель будет заключаться в отыскании неподвижных точек этого преобразования. Для решения этой задачи рассмотрим вспомогательную окружность S и спроектируем прямую l на окружность S из некоторой точки O этой окружности (черт. 100). Каждому преобразованию прямой, переводящему точку M в точку M', отвечает преобразование окружности, переводящее точку M_1, в которую проектируется точка M, в точку M'_1, в которую проектируется M'. При этом если преобразование прямой будет проективным, т. е. будет сохранять двойное отношение четырёх точек, то и преобразование окружности будет сохранять двойное отношение четырёх точек (ибо двойное отношение четырёх точек окружности равно двойному отношению соответствующих точек прямой), т. е. тоже будет проективным. Пусть точки A, B, C; A', B', C' прямой проектируются в точки A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1 окружности (черт. 100), в таком случае проективному преоб-

[1]) Ср. с подстрочным примечанием на стр. 43.

разованию прямой, переводящему точки A, B, C в точки A', B', C', отвечает проективное преобразование окружности S, переводящее точки A_1, B_1, C_1 в точки A_1', B_1', C_1'. Неподвижным точкам проективного преобразования прямой отвечают неподвижные точки проективного преобразования окружности. Но неподвижные точки проективного преобразования окружности мы уже умеем находить (см. выше черт. 98). Таким образом,



Черт. 100.

неподвижные точки нашего проективного преобразования прямой l находятся как точки пересечения l с прямыми, соединяющими O с точками пересечения окружности S и прямой UV, где U — точка пересечения A_1B_1' и $A_1'B_1$, V — точка пересечения A_1C_1' и $A_1'C_1$ (здесь мы считаем, что A отлична от A' и, следовательно, A_1 отлична от A_1'; если три точки A', B', C' совпадают с точками A, B, C, то все точки прямой l являются неподвижными). Проективное преобразование прямой, не являющееся тождественным, может иметь две, одну или ни одной неподвижной точки; при этом неподвижная точка может быть и «бесконечно удалённой» (если прямая, соединяющая O с неподвижной точкой проективного преобразования окружности, параллельна l).

Отметим, что если окружность S нам задана, то далее нахождение неподвижных точек проективного преобразования прямой, переводящего три данные точки A, B, C в три другие данные точки A', B', C', производится уже без циркуля (с помощью одной линейки).

185. Даны две прямые l_1 и l_2 и две точки A и B, не лежащие на этих прямых. Найдите на прямой l_1 такую точку X, чтобы прямые AX и BX высекали на прямой l_2 отрезок,

а) имеющий данную длину a;

б) делящийся пополам в данной точке E прямой l_2.

Ср. с задачей 181 (стр. 119).

186. Даны две прямые l_1 и l_2, точка A на прямой l_1, точка B на прямой l_2 и точка P, не принадлежащая ни l_1, ни l_2. Проведите через P прямую, пересекающую l_1 и l_2 в точках X и Y, таких, что

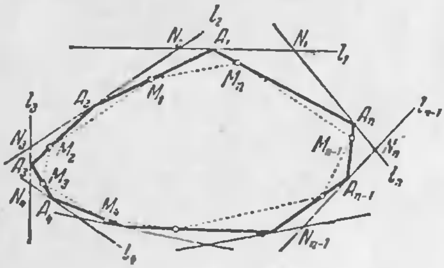
а) $AX:BY = m:n$, где $m:n$ задано;

б) $AX \cdot BY = k^2$, где k задано.

В другой связи задача 186а) приведена в первом томе книги (см. задачу 41б) из § 2 гл. II первой части и относящееся к этой задаче замечание на стр. 114 первого тома).

187. На плоскости даны три прямые l_1, l_2 и l_3 и точка P. Проведите через P прямую, на которой данные три прямые высекают равные отрезки.

188. На плоскости даны две прямые l_1 и l_2 и точка P вне этих прямых. Проведите через точку P две прямые, высекающие на l_1 и на l_2 отрезки X_1Y_1 и X_2Y_2 данной длины: $X_1Y_1 = a_1$, $X_2Y_2 = a_2$.



Черт. 101.

189. На плоскости даны n прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (черт. 101). Постройте n-угольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через заданные точки (или часть сторон проходит через известные точки, а остальные имеют известные направления).

[Эту задачу можно сформулировать также следующим образом: вписать в данный n-угольник другой n-угольник, стороны которого проходят через данные n точек (или часть сторон проходит через данные точки, а другие имеют известные направления), или ещё так: построить n-угольник, вписанный в данный n-угольник $N_1N_2\ldots N_n$ и описанный вокруг другого известного n-угольника $M_1M_2\ldots M_n$.]

Частными случаями задачи 189 являются задачи 47б) и 48в) из § 1 гл. I второй части книги, 124а), б) и 128 из § 2 настоящей главы (стр. 43—44 и 46), 160 из § 4 настоящей главы (стр. 100).

С содержанием настоящего параграфа тесно связан вопрос о построениях с помощью одной линейки. Обыкновенно в геометрии рассматриваются построения, которые можно осуществить при помощи линейки и циркуля. Однако оказывается, что запрещение пользоваться одним из этих двух инструментов не очень сильно уменьшает наши возможности. В следующей главе мы покажем, что, пользуясь только одним циркулем, можно решить все задачи на построение, которые можно решить с помощью циркуля и линейки (см. § 2 гл. II, стр. 209 и след.). Здесь же мы рассмотрим построения, осуществляемые с помощью одной линейки.

Нетрудно видеть, что при помощи одной линейки нельзя решить все задачи на построение, которые можно решить, если пользоваться и линейкой и циркулем. Покажем, например, что с помощью одной линейки нельзя провести через данную точку P прямую, параллельную данной прямой l. Действительно, предположим, что это не так, т. е. что искомую прямую m можно найти при помощи построения, которое состоит только в проведении каких-то прямых линий. Спроектируем чертеж этого построения (состоящий только из прямых линий) на другую плоскость π' таким образом, чтобы параллельные прямые l и m перешли в пересекающиеся прямые l' и m'. Мы увидим, что построение, при помощи которого находится прямая m, выполненное на плоскости π', где роль прямой l играет прямая l', приводит к прямой m', не параллельной l'. Таким образом, это построение не во всех случаях приводит к прямой, параллельной заданной, что и доказывает наше утверждение.

Однако можно доказать, что во всех построениях элементарной геометрии достаточно использовать циркуль только один раз. При этом мы можем начертить циркулем совершенно произвольную окружность — после этого уже будет возможно во всех дальнейших построениях совсем не пользоваться циркулем. Иными словами, если на плоскости заранее задана какая-то окружность S с известным центром O, то, используя эту окружность, можно осуществить с помощью одной линейки любое построение, выполнимое циркулем и линейкой. Доказательству этого предложения будут посвящены остальные задачи настоящего параграфа.

Все построения, которые можно осуществить с помощью циркуля и линейки, сводятся к проведению некоторого числа прямых линий и окружностей. При этом прямые линии проводятся через какие-либо две точки, имеющиеся на чертеже, а окружность каждый раз проводится из какой-то известной точки — центра окружности, — известным радиусом. Точки, которые могут фигурировать в этих построениях, либо задаются заранее, либо определяются пересечением вспомогательных прямых и окружностей. Таким образом, все построения при помощи циркуля и линейки сводятся к комбинации следующих основных построений [1]):

А. провести прямую через данные две точки;

Б. провести окружность, если известны центр и радиус этой окружности;

В. определить точку пересечения двух данных прямых;

Г. определить точку пересечения данной прямой и данной окружности;

Д. определить точку пересечения двух данных окружностей.

При этом окружности можно считать заданными своими центрами и радиусами, а прямые — парами точек, через которые они проходят.

Из пяти основных построений два, а именно построения А и В, осуществляются с помощью одной линейки. Построение Б, конечно, невозможно осуществить с помощью одной линейки, и в этом смысле наше утверждение о том, что при наличии вспомогательной окружности с известным центром с помощью одной линейки можно решить все задачи, которые можно решить циркулем и линейкой, является неточным. Однако оказывается, что в этом случае можно при помощи одной

[1]) Подробнее об этом см. Д. И. Перепёлкин, Геометрические построения в средней школе, М., Учпедгиз, 1953.

линейки построить сколь угодно много точек окружности, центр и радиус которой нам заданы (см. ниже задачу 191). Кроме того, используя вспомогательную окружность, можно при помощи одной линейки осуществить построения Г и Д (см. задачи 192 и 193), а следовательно, и вообще любое построение, выполнимое при помощи циркуля и линейки (с тем уточнением, о котором мы говорили выше: если в задаче требуется построить некоторую окружность, то при помощи одной линейки можно построить, разумеется, не все точки окружности, а только сколь угодно много её точек).

Во всех задачах 190—193 *считается заданной некоторая фиксированная окружность* S *с известным центром* O. *Все построения требуется произвести при помощи одной линейки.* При решении этих задач оказывается существенным, что поляра заданной точки и полюс заданной прямой относительно известной окружности строятся без помощи циркуля (см. § 4, стр. 87).

190. а) Проведите через заданную точку P прямую, параллельную заданной прямой l.

б) Отложите от данной точки M отрезок MN, равный и параллельный заданному отрезку AB.

в) Опустите из заданной точки P перпендикуляр на заданную прямую l.

191. Как построить сколь угодно много точек окружности S_1, если известны центр её A и радиус BC?

192. Найдите точки пересечения данной прямой l и окружности S_1, заданной центром A и радиусом BC.

193. Найдите точки пересечения двух окружностей S_1 и S_2, заданных центрами A_1 и A_2 и радиусами B_1C_1 и B_2C_2.

Заметим, что если на плоскости задана даже не целая окружность S, а лишь (сколь угодно малая!) дуга MN окружности (и её центр O), то уже можно решить с помощью одной линейки все задачи на построение, разрешимые с помощью циркуля и линейки. Этот результат следует из того, что точки пересечения любой прямой l с окружностью S, дуга MN которой нам известна, можно определить с помощью одной линейки (см. задачи 148 из § 3 и 154 из § 4, стр. 83 и 89); поэтому все построения, выполнимые с помощью одной линейки при наличии на плоскости окружности S, выполнимы также, если задана не вся окружность целиком, а лишь некоторая её дуга, Следует ещё иметь в виду, что условие о том, что нам известен центр окружности S (или дуги MN, если считать заданной не всю окружность, а лишь некоторую её дугу), является очень важным. Действительно, нетрудно показать, что если центр заданной окружности S нам не известен, то невозможно определить его, не пользуясь циркулем. Доказательство этого аналогично рассуждению, с помощью которого мы показали выше, что одной линейкой нельзя построить параллель к известной прямой. Предположим, что мы нашли некоторое построение, выполнимое одной линейкой, позволяющее определить центр O окружности S; чертёж этого построения представляет собой некоторую систему прямых линий, как-то связанных с окружностью S, две из которых пересекаются в точке O. Спроектируем этот чертёж на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в новую окружность S', а центр O окружности S — в точку O', не являющуюся центром S'; это возможно сделать в силу результатов § 3 (см., в частности, теорему 1 на стр. 71). При этом мы получим на плоскости π' чертёж, во всём подобный первоначальному, только этот чертёж будет определять уже не центр окружности S', а другую точку O'. Поэтому не может существовать построения, выполнимого с помощью одной линейки, которое позволяет найти центр любой окружности, а следовательно, ни одно построение не может дать нам уверенности, что мы нашли центр окружности S. Но отсюда вытекает, что если центр заданной окружности S неизвестен, то нельзя с помощью одной линейки решить все задачи, разрешимые циркулем и линейкой (например, с помощью циркуля и линейки можно определить центр S, а одной линейкой сделать это невозможно).

Более того, если на плоскости даны даже две непересекающиеся окружности с неизвестными центрами, то одной линейки оказывается недостаточно для того, чтобы определить центры этих окружностей [1]) (за исключением того случая, когда известно, что окружности являются концентрическими; см. ниже задачу 194в)). Можно показать, однако, что если на плоскости даны две пересекающиеся или касающиеся окружности (см. задачи 194а), б)) или три (хотя бы и не пересекающиеся) окруж-

---

[1]) См., например, книгу Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, гл. 26, М.— Л., ОНТИ, 1938.

ности[1]), то всегда можно при помощи одной линейки определить центры этих окружностей а, следовательно, и решить все те задачи, которые разрешимы циркулем и линейкой.

194. На плоскости даны две окружности S_1 и S_2. Как найти с помощью одной линейки центры этих окружностей, если они:

а) пересекаются в двух точках;
б) касаются;
в) концентричны.

Теперь мы можем также доказать теорему о построениях с помощью параллельной линейки, которая была сформулирована в § 4 (см. выше стр. 90). Действительно, поскольку с помощью параллельной линейки можно найти точки пересечения произвольной прямой l с окружностью S, имеющей известные центр A и радиус a (см. выше задачу 155 из § 4, стр. 89), то с помощью параллельной линейки наверное можно решить все задачи, разрешимые с помощью одной линейки при наличии на плоскости окружности S с известным центром, т. е. все задачи, разрешимые циркулем и линейкой.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛ. I

Неевклидова геометрия Лобачевского (первое изложение)

Во введении к третьей части мы отмечали, что каждой группе преобразований отвечает своя геометрия — наука, изучающая свойства геометрических фигур, не меняющиеся при преобразованиях именно этой группы. Таким образом, классическая геометрия Евклида, которая изучается в средней школе, отнюдь не является единственной: выбрав какую-либо группу преобразований, отличную от группы движений (или группы преобразований подобия, которая приводит к геометрии, весьма близкой к евклидовой), мы придём к какой-то новой, «неевклидовой» геометрии. Примером такой «неевклидовой» геометрии может служить п р о е к т и в н а я г е о м е т р и я, изучающая свойства фигур, не меняющиеся при проективных (обобщённых линейных) преобразованиях. Однако проективная геометрия является, пожалуй, даже «слишком неевклидовой»:

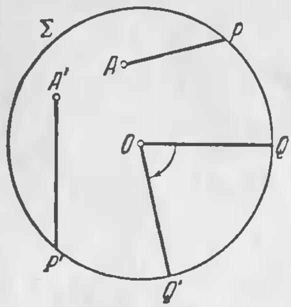
[1]) Надо только потребовать, чтобы эти три окружности не принадлежали одному пучку (см. ниже § 3 гл. II, стр. 215 и след.).

она сохраняет настолько мало особенностей, присущих евклидовой геометрии, что сопоставление этих двух геометрий становится фактически невозможным. Так, например, в проективной геометрии отсутствует понятие расстояния между точками, ибо любые два отрезка плоскости можно проективным преобразованием перевести один в другой и, следовательно, в смысле проективной геометрии они «равны» между собой; точно так же и любые два угла «равны» между собой, так что и привычное понятие угла между прямыми в проективной геометрии не имеет смысла. Более того, даже любые два четырёхугольника плоскости «равны» в смысле проективной геометрии (см. по этому поводу теорему 1 § 2 гл. I, стр. 60); поэтому здесь нельзя выделить никаких определённых классов четырёхугольников (как параллелограммы, трапеции и т. д.). Также «равны» между собой и любые два треугольника, причём проективным преобразованием можно перевести любой треугольник в любой треугольник так, чтобы произвольная наперёд заданная точка первого треугольника перешла в определённую точку второго треугольника; это обстоятельство полностью снимает вопрос о «замечательных точках треугольника» (в проективной геометрии все точки треугольника совершенно равноправны). Таким образом, учение о треугольниках и четырёхугольниках, занимающее столь значительное место в школьном курсе геометрии, в проективной геометрии становится совершенно бессодержательным. Можно сказать, что теория многоугольников в проективной геометрии начинается сразу с учения о пятиугольниках: лишь для пятиугольников можно формулировать определённые признаки «равенства» и выделять те или иные специальные их классы.

Все эти особенности проективной геометрии связаны с тем, что совокупность проективных преобразований является значительно более широкой, чем совокупность движений (движения представляют собой лишь очень частный случай проективных преобразований). Именно поэтому проективная геометрия много беднее геометрическими свойствами, чем евклидова геометрия: большинство свойств, сохраняющихся при движениях, уже не сохраняется при проективных преобразованиях (например, длина отрезка прямой, величина угла, свойство четырёхугольника быть параллелограммом и т. д.). Для того чтобы придти к геометрии, более богатой геометрическими свойствами, чем проективная геометрия, следует выбрать более узкую совокупность проективных преобразований (надо только, разумеется, потребовать, чтобы эта совокупность преобразований тоже составляла группу). Так, например, ограничившись совокупностью движений (составляющих лишь часть всей группы проективных преобразований), мы придём к евклидовой геометрии. Но можно и по-иному выбирать группы проективных преобразований, составляющие часть полной группы; на этом пути можно получить новые интересные геометрии.

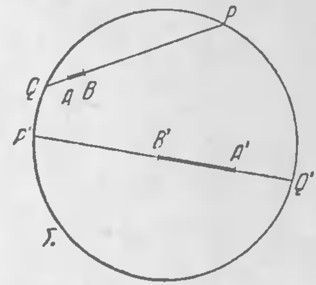
Один из простейших способов, каким можно выбрать группу проективных преобразований, достаточно узкую для того, чтобы построенная на базе этой группы геометрия была достаточно богата геометрическими свойствами, состоит в следующем. Возьмём в плоскости определённый круг К и рассмотрим те проективные преобразования, которые переводят этот круг в себя. Очевидно, что совокупность этих проективных преобразований составляет группу: если произвести, например, последовательно два проективных преобразования, каждое из которых переводит К в себя, то сумма этих преобразований, разумеется, тоже будет переводить К в себя; столь же просто проверяется выполнимость и остальных условий, определяющих группу. Проективные преобразования, переводящие К в себя, мы будем называть *неевклидовыми движениями*, а науку, изучающую свойства фигур, не меняющиеся при неевклидовых движениях,— *неевклидовой геометрией Лобачевского*.

С первого взгляда может показаться, что группа неевклидовых движений выбрана неудачно. В самом деле, если группа всех проективных преобразований является *слишком широкой*, так что с помощью проективного преобразования можно перевести любые два отрезка один в другой и поэтому понятие длины отрезка не имеет смысла, то группа неевклидовых движений может показаться *слишком узкой*: эти преобразования не позволяют перевести каждую точку плоскости в любую другую, так что здесь тоже должно отсутствовать понятие длины отрезка (ибо не все отрезки можно сравнивать). В самом деле, неевклидовы движения определяются как преобразования, переводящие К в себя; поэтому ни одну точку круга К нельзя перевести неевклидовым движением в точку, расположенную вне этого круга. Однако это затруднение не является серьёзным. Условимся только называть **точками неевклидовой геометрии** лишь точки круга К; соответственно этому **прямыми неевклидовой геометрии** мы будем называть отрезки прямых, заключённые внутри К. В таком случае уже все точки нашей геометрии будут равноправны: нетрудно видеть, что существует неевклидово движение, переводящее любую внутреннюю точку A круга К в любую другую внутреннюю точку A' (ср. теорему 1 § 3, стр. 71). Более того, можно показать, что *если в точках A и A' задать произвольные лучи AP и $A'P'$* (под лучом с началом A следует понимать отрезок прямой, ограниченный точкой A и окружностью Σ круга К; см. черт. 102), *то существует неевклидово движение, переводящее A в A', и луч AP в луч $A'P'$*. Для доказательства достаточно заметить, что в силу теоремы 1 § 3 существует неевклидово движение $Д_1$, переводящее A в центр O круга К, и неевклидово движение $Д_2$, переводящее A' в O. Предположим ещё, что $Д_1$ переводит луч AP в луч OQ, а $Д_2$ — луч $A'P'$ в луч OQ'. Обозначим теперь через $-Д_2$ неевклидово движение, противоположное движению $Д_2$ (т. е. переводящее луч OQ' в луч $A'P'$; такое движение существует, поскольку неевклидовы движения образуют группу), и рассмотрим последовательность трёх неевклидовых движений: $Д_1$, вращения B круга К вокруг центра O на угол QOQ' и $-Д_2$. Первое из этих преобразований переводит AP в OQ, второе — OQ в OQ', наконец, третье — OQ' в $A'P'$. Таким образом, сумма этих трёх неевклидовых движений переводит AP в $A'P'$, что и доказывает наше утверждение.



Черт. 102.

Таким образом, в неевклидовой геометрии Лобачевского каждую точку можно перевести в любую другую точку и каждый луч — в любой другой луч; возникает естественный вопрос о том, нельзя ли также перевести любой отрезок AB в любой другой отрезок $A'B'$. Нетрудно видеть, что ответ на этот вопрос будет отрицательным. Действительно, пусть существует неевклидово движение, переводящее отрезок AB в отрезок $A'B'$ (черт. 103). В таком случае это движение переводит прямую AB в прямую $A'B'$; так как, кроме того, каждое неевклидово движение, разумеется, переводит окружность Σ круга K в себя, то точки P и Q, в которых AB пересекает окружность Σ, перейдут в точки P' и Q', в которых $A'B'$ пересекает Σ. Таким образом, наше неевклидово движение переводит четвёрку точек A, B, P, Q в четвёрку точек A', B', P', Q'. А так как неевклидовы движения сохраняют величину двойного отношения четырёх точек (этим свойством обладает каждое проективное преобразование; см. выше стр. 49), то должно иметь место равенство: $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}$; если же это равенство не выполняется, то заведомо не существует неевклидова движения, переводящего отрезок AB в отрезок $A'B'$[1]).



Черт. 103.

Итак, мы доказали, что *если отрезок AB можно неевклидовым движением перевести в отрезок $A'B'$, то*

$$\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}.$$

Покажем теперь, что и обратно, *если*

$$\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'},$$

[1]) Из полученного равенства, в частности, следует, что если порядок точек на (евклидовых) прямых AB и $A'B'$ таков: Q, A, B, P и Q', A', B', P', то неевклидово движение, переводящее отрезок AB в отрезок $A'B'$, наверное переводит P в P' и Q в Q' (но не P в Q', а Q в P'!). Действительно, двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$, так же как и $\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}$, больше единицы $\left(\frac{AP}{BP}>1,\ \frac{AQ}{BQ}<1\right)$, в то время как двойное отношение $\frac{A'Q'}{B'Q'}:\frac{A'P'}{B'P'}$ меньше единицы $\left(\frac{A'Q'}{B'Q'}<1, \frac{A'P'}{B'P'}>1\right)$; поэтому равенство $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{A'Q'}{B'Q'}:\frac{A'P'}{B'P'}$ является невозможным.

то существует неевклидово движение, переводящее отрезок AB в отрезок $A'B'$. Действительно, переведём точку A в точку A' так, чтобы луч AP перешёл в луч $A'P'$ (выше мы видели, что это всегда возможно). При этом точка Q перейдёт в точку Q'; пусть B_1 — точка, в которую перейдёт точка B. В силу того, что двойное отношение четырёх точек не меняется при проективном преобразовании, мы будем иметь $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{A'P'}{B_1P'}:\frac{A'Q'}{B_1Q'}$. А так как по условию $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=$ $=\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}$, то

$$\frac{A'P'}{B_1P'}:\frac{A'Q'}{B_1Q'}=\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}.$$

Отсюда следует, что точка B_1 совпадает с B', т. е. что наше неевклидово движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$.

Таким образом, мы видим, что двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ характеризует «неевклидову длину» отрезка AB, т. е. что *два отрезка AB и $A'B'$ равны в смысле неевклидовой геометрии Лобачевского в том и только в том случае, когда совпадают двойные отношения* $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ *и* $\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}$. Этого, однако, ещё мало для того, чтобы назвать двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ неевклидовой длиной отрезка AB: ведь в евклидовой геометрии таким свойством обладает не только длина отрезка, но и любая однозначная функция от длины (например, квадрат длины или корень кубический из длины). Мы привыкли ещё к тому, что *длина суммы двух отрезков равна сумме их длин*, т. е. что если точка C делит отрезок AB на два меньших отрезка AC и CB (черт. 104, *а*), то длина AB равна сумме длин отрезков AC и CB. Если же точка C делит отрезок AB неевклидовой геометрии Лобачевского на два отрезка AC и CB (черт. 104, *б*), то, очевидно,

$$\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\left(\frac{AP}{CP}:\frac{AQ}{CQ}\right)\cdot\left(\frac{CP}{BP}:\frac{CQ}{BQ}\right),$$

т. е. двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ равно п р о и з в е д е н и ю (а не сумме!) двойных отношений $\frac{AP}{CP}:\frac{AQ}{CQ}$ и $\frac{CP}{BP}:\frac{CQ}{BQ}$. Но отсюда следует, что [1])

$$\log\left(\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}\right)=\log\left(\frac{AP}{CP}:\frac{AQ}{CQ}\right)+\log\left(\frac{CP}{BP}:\frac{CQ}{BQ}\right)$$

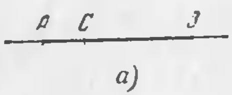
(ибо логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей). Поэтому, если обозначить

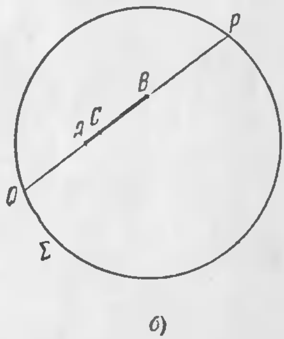
$$\log\left(\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}\right)=d_{AB} \qquad (*)$$

(где, как всегда, P и Q — точки пересечения прямой AB с окружностью Σ), то

$$d_{AB}=d_{AC}+d_{CB}.$$

С другой стороны, как было показано выше, два отрезка AB





Черт. 104.

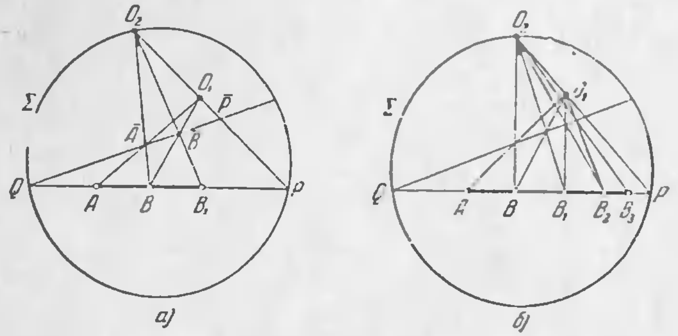
и $A'B'$ равны в том и только в том случае, если $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=$ $=\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}$, или, что равносильно, если $d_{AB}=d_{A'B'}$. Это

---

[1]) Отметим, что в силу нашего условия о порядке точек на прямой AB (см. сноску на стр. 131) двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ (а также и два других двойных отношения) положительно; поэтому логарифм его существует.

позволяет назвать число d_{AB}, определяемое по формуле (*), **неевклидовой длиной** отрезка AB[1]).

Отметим, что если точка B движется по прямой AP, неограниченно приближаясь к P, то двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ неограниченно увеличивается (ибо $BP \to 0$); поэтому и длина d_{AB} отрезка AB растёт неограниченно. Отсюда следует, что *неевклидова длина луча AP (или всей прямой PQ) бесконечна*, хотя вся неевклидова прямая и изображается конечным отрезком.



Черт. 105.

Неограниченность неевклидовой прямой можно доказать и чисто геометрически. На черт. 105, *а* показано построение, позволяющее удвоить отрезок AB неевклидовой прямой PQ; действительно, $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{\bar{A}\bar{P}}{\bar{B}\bar{P}}:\frac{\bar{A}Q}{\bar{B}Q}$, так как четвёрки точек A, B, P, Q и $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{P}$, Q получаются одна из другой цен-

[1]) Точнее, неевклидовой длиной отрезка AB следует называть выражение $k\log\left(\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}\right)$, где k — произвольное постоянное число; выбор того или другого значения k означает выбор той или иной единицы измерения длин в неевклидовой геометрии Лобачевского. Отсюда следует, что выбор основания системы логарифмов в формуле (*) не играет роли (ибо переход от одной системы логарифмов к другой равносилен умножению всех «длин» d_{AB} на один и тот же постоянный множитель).

тральным проектированием с центром O_1, и $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}:\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}=\frac{BP}{B_1P}:\frac{BQ}{B_1Q}$, так как четвёрки точек $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{P}$, Q и B, B_1, P, Q получаются одна из другой центральным проектированием с центром O_2. Следовательно,

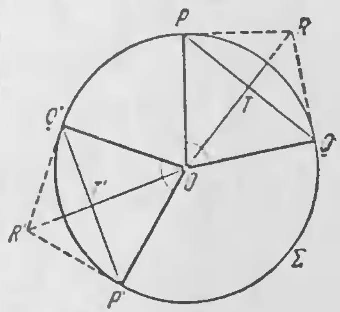
$$\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{BP}{B_1P}:\frac{BQ}{B_1Q},$$

или

$$d_{AB}=d_{BB_1},$$

т. е. отрезок BB_1 равен (в смысле неевклидовой геометрии Лобачевского) отрезку AB. А теперь уже нетрудно видеть, что на луче AP можно от точки A сколь угодно много раз откладывать отрезок, равный AB, и всё же мы никогда не дойдём до точки P (черт. 105, *б*).

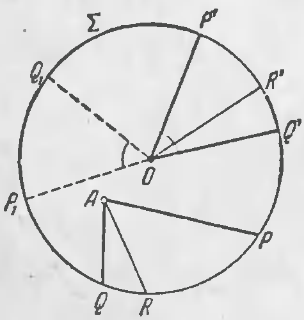
Перейдём к вопросу об у г л е м е ж д у п р я м ы м и в неевклидовой геометрии Лобачевского. Рассмотрим прежде всего две пары лучей OP и OQ, OP' и OQ', выходящих из центра O круга К. Совершенно ясно, что *если обыкновенные (евклидовы) углы POQ и $P'OQ'$ равны* (черт. 106), *то существует неевклидово движение, переводящее угол POQ в угол $P'OQ'$*: этим движением будет вращение вокруг центра O (вращение вокруг O, очевидно, является неевклидовым движением, так как это есть проективное преобразование, переводящее круг К в себя)[1]). Докажем, что и обратно, *если существует неевклидово движение, переводящее угол POQ в угол $P'OQ'$, то* (*обыкновенные*) *углы POQ и $P'OQ'$*



Черт. 106.

[1]) Углы POQ и $P'OQ'$ (равные в евклидовом смысле) всегда можно совместить неевклидовым движением даже так, ч т о б ы OP с о в п а л о с OP', а OQ — с OQ' (а не наоборот, OP с OQ' и OQ с OP'). Для этого достаточно повернуть круг К на угол POP' вокруг центра O (при этом OP совпадёт с OP') и, может быть, отразить ещё К симметрично от диаметра OP (симметрия относительно диаметра К также является неевклидовым движением).

равны. Действительно, такое неевклидово движение переводит точки P и Q в точки P' и Q' и, следовательно, прямую PQ — в прямую $P'Q'$, касательные PR и QR к окружности Σ в точках P и Q — в касательные $P'R'$ и $Q'R'$ в точках P' и Q' (ибо окружность Σ при всяком неевклидовом движении переходит в себя и касательные к Σ переходят в касательные; ср. выше стр. 76), прямую OR — в прямую OR' и точку T пересечения PQ и OR в точку T' пересечения $P'Q'$ и OR' (черт. 106). Таким образом, наше неевклидово движение переводит отрезок OT в отрезок OT'; значит, эти отрезки должны быть равны в смысле неевклидовой геометрии Лобачевского. Но отсюда вытекает, что эти отрезки равны и в смысле евклидовой геометрии: действительно, если бы, например, отрезок OT был меньше OT', то вращение вокруг O (являющееся неевклидовым движением) переводило бы OT в часть отрезка OT', поэтому неевклидовы длины этих отрезков не были бы одинаковы. А из равенства $OT = OT'$ следует, что $\angle POQ = \angle P'OQ'$ $\left(\text{так как } OT = r\cos\frac{\angle POQ}{2},\ OT' = r\cos\frac{\angle P'OQ'}{2}\right.$, где r — радиус круга К $\Big)$.

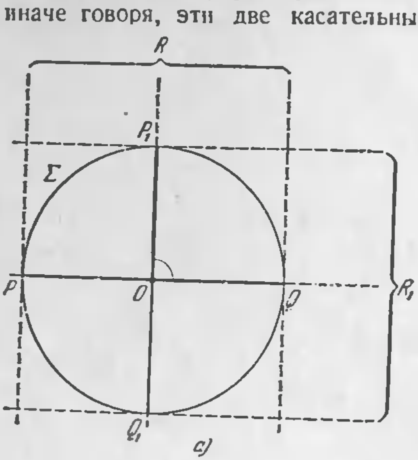


Черт. 107.

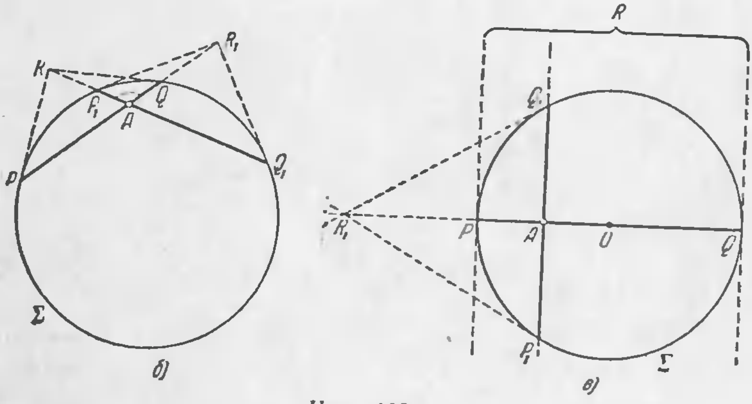
Таким образом, мы видим, что величина угла POQ характеризует «неевклидов угол» между OP и OQ $\Big($в том же смысле, в каком двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ характеризует «неевклидову длину» отрезка $AB\Big)$. Кроме того, если луч OU делит угол POQ на части POU и UOQ, то $\angle POQ = \angle POU + \angle UOQ$ (*величина суммы двух углов равна сумме их величин*); поэтому мы можем назвать н е е в к л и д о в ы м у г л о м δ_{POQ} между двумя лучами OP и OQ, исходящими из центра O круга К, величину (евклидова) угла POQ. Пусть теперь PAQ есть угол с вершиной в п р о и з в о л ь н о й точке A круга К (черт. 107). Произведём неевклидово движение, переводящее A в центр O круга; пусть угол PAQ переходит при этом в угол $P'OQ'$. Такое движение, разумеется, можно выбрать не одним способом (см. выше стр. 130). Если, однако, два движения $Д_1$ и $Д_2$ переводят угол PAQ в два различных угла $P'OQ'$ и P_1OQ_1 с вершиной в O, то движение $-Д_1$, противоположное $Д_1$, переводит угол $P'OQ'$ в угол PAQ и, следовательно, неевклидово движение, являющееся суммой движений $-Д_1$ и $Д_2$, переводит $P'OQ'$ в P_1OQ_1. А отсюда вытекает, что углы $P'OQ'$ и P_1OQ_1 «равны» в смысле неевклидовой геометрии Лобачевского, а значит, они равны и в обычном (евклидовом) смысле. Поэтому *за величину* $\hat{\varepsilon}_{PAQ}$ *неевклидова угла между лучами* AP *и* AQ *можно принять евклидову величину любого угла* $P'OQ'$ *с вершиной* O (т. е. в центре К), *в который угол* PAQ *может быть переведён неевклидовым движением*. Ясно, что эта неевклидова величина угла обладает важнейшими свойствами величины угла евклидовой геометрии: она одинакова для любых двух углов, которые можно перевести один в другой при помощи неевклидова движения, и для угла PAQ, разделённого внутренним лучом AR на две части PAR и RAQ, она равна сумме $\hat{\varepsilon}_{PAR}+\hat{\varepsilon}_{RAQ}$.

Так как прямая при неевклидовом движении переходит в прямую же, то ясно, что величина развёрнутого угла (т. е. угла, стороны которого составляют одну прямую) в любой точке A совпадает с величиной развёрнутого угла в точке O, т. е. с евклидовой величиной развёрнутого угла; иначе говоря, в неевклидовой геометрии, так же как и в обычной, развёрнутый угол всегда равен 180°. Полный угол вокруг любой точки в неевклидовой геометрии, как и в евклидовой, равен двум развёрнутым углам, т. е. 360°. Прямой угол, т. е. угол, равный своему смежному, равен, очевидно, половине развёрнутого угла, т. е. 90°. При этом, однако, две прямые, взаимно перпендикулярные (т. е. образующие прямой угол) в неевклидовой геометрии Лобачевского, конечно, не будут, вообще говоря, взаимно перпендикулярными в обычном (евклидовом) смысле.

Рассмотрим подробнее вопрос о том, в каком случае две неевклидовы прямые PQ и P_1Q_1 будут в з а и м н о п е р п е н д и к у л я р н ы в смысле неевклидовой геометрии Лобачевского. Если эти прямые пересекаются в центре O круга К, то они должны быть перпендикулярны и в обычном (евклидовом) смысле, так что касательные к окружности Σ в точках P и Q здесь будут параллельны прямой P_1Q_1 (черт. 108, *а*); иначе говоря, эти две касательные и прямая P_1Q_1 в этом



случае сходятся в одной «бесконечно удалённой» точке проективной плоскости. При неевклидовом движении, переводящем O в произвольную точку A, черт. 108, *а* перейдёт в черт. 108, *б*; при противоположном движении, переводящем A в O, черт. 108, *б* перейдёт в черт. 108, *а*. Отсюда видно, что *для того, чтобы две неевклидовы прямые PQ и P_1Q_1 были*

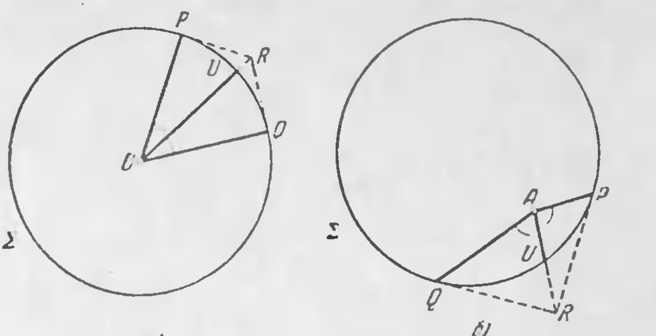


Черт. 108.

взаимно перпендикулярны, надо, чтобы продолжение прямой P_1Q_1 за круг К проходило через точку пересечения касательных к Σ в точках P и Q (черт. 108, *б*) [1]). В частном случае, когда прямая PQ является диаметром круга (черт. 108, *в*),

[1]) Иначе: *прямая P_1Q_1 перпендикулярна к PQ, если её продолжение за круг К проходит через полюс прямой PQ относитель-*

касательные к Σ в точках P и Q будут параллельны между собой и перпендикулярны (в евклидовом смысле) к этому диаметру; следовательно, прямая P_1Q_1, перпендикулярная PQ в неевклидовом смысле, будет образовывать с ней и евклидов угол в $90°$ (независимо от того, проходит ли P_1Q_1 через центр круга или нет). Ясно, что *из любой точки B неевклидовой геометрии Лобачевского можно опустить единственный перпендикуляр на любую прямую PQ*; для этого достаточно соединить B с точкой R пересечения касательных к Σ в точках P и Q. Основание этого перпендикуляра естественно назвать п р о е к ц и е й точки B на прямую PQ. В частном случае точка B может располагаться на прямой PQ; тогда наше построение показывает, как восставить перпендикуляр к прямой в точке этой прямой.



Черт. 109.

Выясним ещё, как построить в неевклидовой геометрии Лобачевского б и с с е к т р и с у угла. Если вершина угла совпадает с центром O круга К, то прямая OU будет биссектрисой в том случае, если она делит этот угол пополам в обычном (евклидовом) смысле (черт. 109, *а*); другими словами, прямая OU есть биссектриса угла POQ, если продолжение её за круг К проходит через точку R пересечения касательных к окружности Σ в точках P и Q. Отсюда следует, что

но окружности Σ (см. выше § 4, стр. 86); в силу теоремы 2 § 4 (стр. 87) в этом случае и продолжение прямой PQ будет проходить через полюс P_1Q_1 относительно Σ, т. е. через точку пересечения касательных к окружности Σ в точках P_1 и Q_1.

прямая AU будет биссектрисой неевклидова угла PAQ (с вершиной в произвольной точке A неевклидовой геометрии Лобачевского), *если продолжение её за круг* К *проходит через точку R пересечения касательных к* Σ *в точках P и Q* (черт. 109, *б*)[1]).

Можно указать простое построение, позволяющее найти угол $P'OQ'$ с вершиной в центре O круга К, равный данному углу PAQ (черт. 110, *а*; равенство углов и отрезков всюду понимается в смысле неевклидовой геометрии Лобачевского). Рассмотрим два угла $\overline{P}\overline{A}\overline{Q}$ и $\overline{P}_1\overline{A}_1\overline{Q}_1$, симметричные (в обычном смысле) относительно некоторого диаметра MN круга К (черт. 110, *б*); при этом выберем их так, чтобы углы $\overline{A}_1\overline{A}\overline{P}$ и $\overline{A}_1\overline{A}\overline{Q}$ были равны углам OAP и OAQ (отсюда следует, что угол $\overline{P}\overline{A}\overline{Q}$ равен углу PAQ) и чтобы расстояние $\overline{A}\overline{A}_1$ было равно AO. Углы $\overline{P}\overline{A}\overline{Q}$ и $\overline{P}_1\overline{A}_1\overline{Q}_1$ заведомо равны, поскольку они переводятся один в другой неевклидовым движением — симметрией относительно диаметра MN. Неевклидово движение, совмещающее отрезок $\overline{A}\overline{A}_1$ с отрезком AO, переводит угол $\overline{P}\overline{A}\overline{Q}$ в угол PAQ (именно для этого мы требовали равенства углов $\overline{A}_1\overline{A}\overline{P}$ и OAP, $\overline{A}_1\overline{A}\overline{Q}$ и OAQ), а угол $\overline{P}_1\overline{A}_1\overline{Q}_1$ — в угол $P'O'Q'$ с вершиной в центре O, равный углу PAQ (ибо неевклидово движение переводит равные углы в равные). Наша задача состоит в том, чтобы указать, как построить угол $P'OQ'$ (считая угол PAQ заданным).

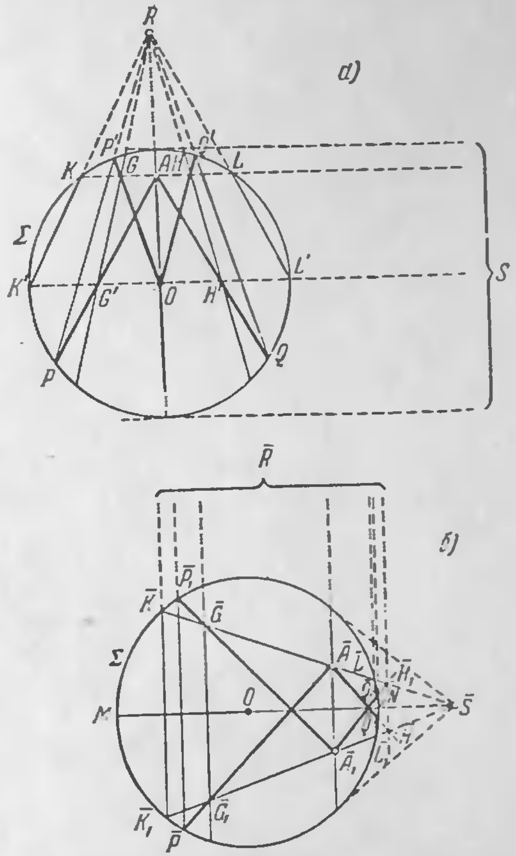
Предположим для определённости, что углы PAO и QAO острые. Восставим в точках A и O, $\overline{A}$ и $\overline{A}_1$ перпендикуляры (неевклидовы) KL и $K'L'$, $\overline{K}\overline{L}$ и $\overline{K}_1\overline{L}_1$ к AO, соответственно к $\overline{A}\overline{A}_1$ (так как AO — диаметр, то KL и $K'L'$ будут являться и евклидовыми перпендикулярами к AO; см. выше черт. 108, *в*); точки пересечения сторон углов PAQ и $P'OQ'$, соответственно $\overline{P}\overline{A}\overline{Q}$ и $\overline{P}_1\overline{A}_1\overline{Q}_1$, с (евклидовыми) прямыми KL и $K'L'$, $\overline{K}\overline{L}$ и $\overline{K}_1\overline{L}_1$ обозначим через G, H, G' и H'; $\overline{G}$, $\overline{H}$, $\overline{G}_1$ и $\overline{H}_1$, как указано на черт. 110, *а*, *б*. Из черт. 110, *б* видно, что (евклидовы) прямые $\overline{K}\overline{K}_1$, $\overline{L}\overline{L}_1$, $\overline{G}\overline{G}_1$, $\overline{H}\overline{H}_1$ (и $\overline{A}\overline{A}_1$) сходятся в одной «бесконечно удалённой» точке $\overline{R}$; так как неевклидово движение переводит черт. 110, *б* в черт. 110, *а*, то прямые KK', LL', GG', HH' (и AO) должны сходиться в одной точке R.

Отсюда вытекает искомое построение угла $P'OQ'$. А именно, *для того чтобы перенести неевклидовым движением вершину A угла PAQ в центр O круга* К, *надо восставить в точках A и O перпендикуляры* (обычные) *KL и K'L' к диаметру AO* (K, L и K', L' — точки пересечения этих перпендикуляров с окружностью Σ, K и K'

---

[1]) То-есть *если продолжение AU проходит через полюс прямой PQ относительно окружности* Σ (сравните со сноской на предыдущей странице). В частном случае, когда угол PAQ развёрнутый, построение биссектрисы угла, очевидно, совпадает с построением перпендикуляра к прямой PQ в данной её точке A.

лежат по одну сторону от OA) *и соединить точки G' и H' пересечения AP и AQ с $K'L'$* с (лежащей вне К) *точкой R пересечения KK' и LL'; если прямые RG' и RH' пересекают KL в точках*



Черт. 110.

G и H, то $\hat{\varepsilon}_{G'AH'} = \hat{\varepsilon}_{GOH}$ [1]). А так как $\hat{\varepsilon}_{GOH} = \angle GOH$ (здесь $\hat{\varepsilon}_{GOH}$ — неевклидова величина угла между лучами OG и OH, $\angle GOH$ — евклидов угол между этими же лучами), то окончательно

$$\hat{\varepsilon}_{PAQ} = \angle GOH.$$

[1]) Можно также соединить с точкой R точки P и Q — прямые RP и RQ пересекут окружность Σ в точках P' и Q' (см. черт. 110, *а*, *б*).

Отметим ещё, что, как следует из черт. 110, *а*,

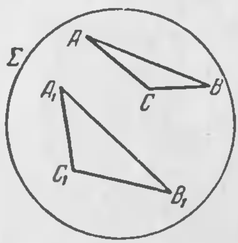
$$\varepsilon_{PAQ} = \angle GOH < \angle PAQ$$

(ибо $AG < OG'$, $AH < OH'$ и, значит, $\angle GOA < \angle G'AO$, $\angle HOA < \angle H'AO$).

Ещё одно несложное построение для неевклидова угла ε_{PAQ} между известными лучами AP и AQ неевклидовой геометрии Лобачевского будет указано в конце приложения к гл. II этой части книги (см. стр. 354, в частности черт. 265).

Сравним теперь неевклидову геометрию Лобачевского с геометрией Евклида, изучаемой в средней школе. Сразу бросается в глаза, что обе геометрии имеют много общего. Так, в обеих геометриях через каждые две точки проходит одна и только одна прямая и две различные прямые не могут иметь больше одной общей точки — это следует из того, что прямые неевклидовой геометрии Лобачевского изображаются отрезками прямых плоскости. Далее, и в евклидовой геометрии и в геометрии Лобачевского каждую точку и луч, выходящий из этой точки, можно перевести движением в любую другую точку и наперёд заданный луч, выходящий из второй точки. Неевклидова длина отрезка и величина угла очень близки по своим свойствам к соответствующим понятиям обычной (евклидовой) геометрии; так, например, в обеих геометриях длина суммы двух отрезков (соответственно величина суммы двух углов) равна сумме их длин (сумме величин этих углов).

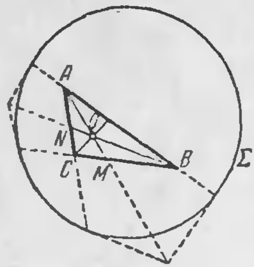
В неевклидовой геометрии Лобачевского подобно обыкновенной геометрии Евклида можно на любой прямой от любой точки в любом из двух направлений отложить отрезок любой данной длины (здесь существенную роль играет, что неевклидова прямая бесконечна; см. выше стр. 134); точно так же в любой точке заданной прямой можно по любую сторону от этой прямой отложить данный угол. А отсюда следует, что и все теоремы школьного курса геометрии, доказательства которых опираются лишь на перечисленные простейшие предложения (аксиомы) евклидовой геометрии, переносятся в неевклидову геометрию Лобачевского и без всяких изменений. Так, например, в геометрии Лобачевского остаются в силе теоремы о смежных и вертикальных углах (и как следствие — теоремы о том, что биссектрисы вертикальных углов составляют одну прямую, а биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны); все признаки равенства треугольников (включая и признаки равенства прямоугольных треугольников); теоремы о свойствах равнобедренного треугольника; свойство перпендикуляра, проведённого к отрезку прямой через его середину, и свойство биссектрисы угла; теорема о том, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и т. д. Из признаков равенства треугольников, как обычно, выводится теорема о внешнем угле треугольника («внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла его, не смежного с этим внешним»), откуда в свою очередь следуют теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника и теорема о том, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Отсюда вытекают теоремы о сравнительной длине перпендикуляра и наклонных (которые позволяют назвать **расстоянием от точки до прямой** длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую), а также теорема о том, что отрезок короче любой ломаной, соединяющей его концы. Если теперь определить длину произвольной кривой как предел длин вписанных в неё ломаных, то мы сможем заключить, что в неевклидовой геометрии Лобачевского, как и в обычной (евклидовой) геометрии, отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками; это позволяет определить **расстояние между точками** как длину отрезка, соединяющего эти точки. Все эти предложения подчёркивают большое сходство между двумя геометриями.



Черт. 111.

Для примера покажем, как доказывается в неевклидовой геометрии Лобачевского первый признак равенства треугольников. Пусть мы имеем два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, такие, что $d_{AC}=d_{A_1C_1}$, $d_{AB}=d_{A_1B_1}$ и $\delta_{BAC}=\delta_{B_1A_1C_1}$; требуется доказать, что эти треугольники равны (черт. 111). Переведём неевклидовым движением точку A в точку A_1, причём так, чтобы сторона AC пошла по A_1C_1. Тогда вследствие равенства этих сторон точка C совместится с C_1; вследствие равенства углов A и A_1 сторона AB пойдёт по A_1B_1, а вследствие равенства этих сторон точка B совпадёт с B_1; поэтому сторона CB совместится с C_1B_1 (так как две точки можно соединить только одной прямой) и треугольники совпадут; значит, они равны[1]). Это рассуждение дословно повторяет доказательство первого признака равенства треугольников, приведённое в школьном учебнике А. П. Киселёва (рекомендуем читателю сравнить по книге Киселёва!), хотя чертёж здесь, разумеется, надо представлять себе совсем иным.

В качестве второго примера рассмотрим теорему: три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Как мы уже упоминали, в неевклидовой геометрии Лобачевского сохраняет силу теорема о том, что если какая-либо точка лежит на биссектрисе угла, то она одинаково удалена от сторон угла, а также и обратная теорема (докажите!). Рассмотрим биссектрису AM угла A треугольника ABC и биссектрису BN угла B (черт. 112). Эти две биссектрисы должны, очевидно, пересечься внутри треугольника в некоторой точке Q. Так как точка Q принадлежит биссектрисе AM, то она равноудалена от сторон AB и AC; так как она принадлежит биссектрисе BN, то она равноудалена от сторон BA и BC. Поэтому точка Q равноудалена также и от сторон CA и CB. Но в таком случае она должна лежать на биссектрисе угла C; следовательно, биссектрисы трёх углов треугольника пересекаются в одной точке Q. Это доказательство тоже почти дословно повторяет соответствующее место из учебника А. П. Киселёва. Рекомендуем читателю самостоятельно доказать и другие теоремы, перечисленные выше.



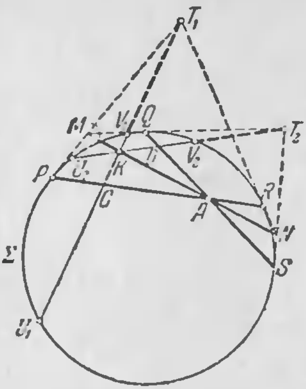
Черт. 112.

Отметим, что каждую теорему неевклидовой геометрии Лобачевского можно одновременно рассматривать и как теорему евклидовой геометрии, относящуюся к точкам круга К и хордам этого круга. Так, например, теорема неевклидовой геометрии: биссектриса угла есть геометрическое место точек,

---

[1]) Неевклидово движение, переводящее точку A в точку A_1 и луч AC в луч A_1C_1, осуществляется либо так, как указывалось на стр. 130, либо следующим образом: сначала производится движение $Д_1$, переводящее A в O, затем поворот B вокруг O, затем симметрия C круга К относительно диаметра OQ', в который перейдёт луч AC в результате первых двух движений, и лишь после этого — движение — $Д_2$, переводящее O в A_1. Если $\delta_{BAC} = \delta_{B_1A_1C_1}$, то одно из этих двух неевклидовых движений, переводящих луч AC в луч A_1C_1, наверное, переводит луч AB в луч A_1B_1.

равноудалённых от сторон угла — имеет следующий смысл. Пусть PR, QS и MN — три хорды окружности Σ, пересекающиеся в одной точке A и такие, что продолжение MN проходит через точку пересечения касательных к Σ в точках P и Q (MN есть «неевклидова биссектриса» угла PAQ; см. черт. 113). Соединим произвольную точку K хорды MN с точками T_1 и T_2, в которых пересекаются касательные к окружности Σ в точках P и R, Q и S (т. е. опустим из точки K «неевклидовы перпендикуляры» на прямые PR и QS); пусть хорды U_1V_1 и U_2V_2, высекаемые окружностью Σ на этих перпендикулярах, пересекают PR, соответственно QS, в точках C и D. В таком случае двойное отношение точек K, C; U_1, V_1 равно двойному отношению точек K, D; V_2, U_2.



Черт. 113.

Связь между теоремами неевклидовой геометрии Лобачевского и теоремами обычной (евклидовой) геометрии позволяет сводить доказательство любого предложения неевклидовой геометрии к доказательству некоторой теоремы, относящейся к точкам и хордам круга К, т. е. даёт общий метод, с помощью которого можно сколь угодно подробно изучать неевклидову геометрию (см. ниже задачу 198, а также задачи 199—211). Но эта связь может представлять интерес ещё и в другом отношении. Доказав какое-либо предложение неевклидовой геометрии, мы тем самым докажем и соответствующее предложение евклидовой геометрии; так из того, что, в неевклидовой геометрии Лобачевского сохраняется теорема о биссектрисе угла, вытекает, что в обозначениях черт. 113

$$\frac{KU_1}{CU_1}:\frac{KV_1}{CV_1}=\frac{KV_2}{DV_2}:\frac{KU_2}{DU_2};$$

непосредственное доказательство этого довольно сложно. Подобное применение неевклидовой геометрии к доказательству теорем обычной (евклидовой) геометрии может иногда приводить к интересным результатам.

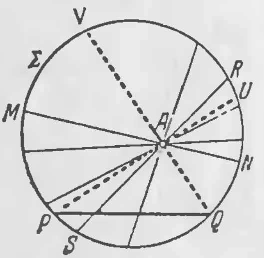
195. Докажите, что теорема неевклидовой геометрии Лобачевского: биссектрисы вертикальных углов составляют одну прямую — равносильна теореме евклидовой геометрии, составляющей содержание задачи 139а) из § 3 (стр. 77).

196. Какой теореме евклидовой геометрии соответствует следующая теорема неевклидовой геометрии Лобачевского: биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны?

197. Докажите, что теорема неевклидовой геометрии Лобачевского: биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — равносильна теореме Брианшона евклидовой геометрии (см. задачу 146 из § 3, стр. 80).

198. Воспользуйтесь выражением неевклидовой длины отрезка для непосредственного доказательства того, что в геометрии Лобачевского длина стороны треугольника всегда меньше суммы длин двух других его сторон.

Наряду со сходством между обычной (евклидовой) геометрией и неевклидовой геометрией Лобачевского имеет место также и резкое различие между ними. Вспомним так называемую аксиому параллельных линий: *через одну и ту же точку нельзя провести двух различных прямых, не пересекающих одну и ту же третью прямую.* Посмотрим, выполняется ли эта аксиома в неевклидовой геометрии Лобачевского. Здесь две прямые PQ и RS следует называть пересекающимися только в том случае, если они пересекаются во внутренней точке круга К (черт. 114), так как внешние по отношению к кругу точки и граничные точки (точки окружности Σ) не считаются точками неевклидовой геометрии Лобачевского. Отсюда сразу следует, что через данную точку A вне прямой PQ можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих PQ (как прямая MN на черт. 114). Таким образом, *аксиома параллельных линий в неевклидовой геометрии Лобачевского не выполняется.* Вместе с тем все теоремы школьного курса геометрии, доказательство которых так или иначе опирается на эту теорему (а таких теорем в



Черт. 114.

курсе большинство) становятся в неевклидовой геометрии сомнительными — они могут оказаться верными в этой геометрии (см. ниже задачи 201, 203, 204), но могут быть также и неправильными (см., например, ниже задачи 199 а), б), 207—211) [1]).

Прямые QP и UP, пересекающиеся в точке окружности Σ, мы будем называть параллельными прямыми неевклидовой геометрии. Параллельные прямые не пересекаются (поскольку точки окружности Σ не считаются точками неевклидовой геометрии Лобачевского). Однако, разумеется, не всякие непересекающиеся прямые являются параллельными; поэтому обычное определение параллельных как прямых, которые не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали, не сохраняет силу в неевклидовой геометрии. Из черт. 114 видно, что параллельные PQ прямые AU и AV разделяют пересекающие PQ и не пересекающие PQ прямые, проходящие через A. Поэтому проходящие через данную точку A прямые, параллельные PQ, можно определить как *такие прямые AU и AV, которые сами не пересекают PQ, но все проходящие через A прямые, заключённые внутри угла UAV, уже пересекают PQ.* Интересно отметить, что это «неевклидово» определение параллельных прямых остаётся справедливым и в евклидовой геометрии; только здесь прямые AU и AV совпадают и угол UAV является развёрнутым. Именно это обстоятельство и служит основанием для того, чтобы присвоить прямым AU и AV привычное название параллелей к PQ; оно определяет значительное сходство между свойствами евклидовых и неевклидовых параллелей [2]).

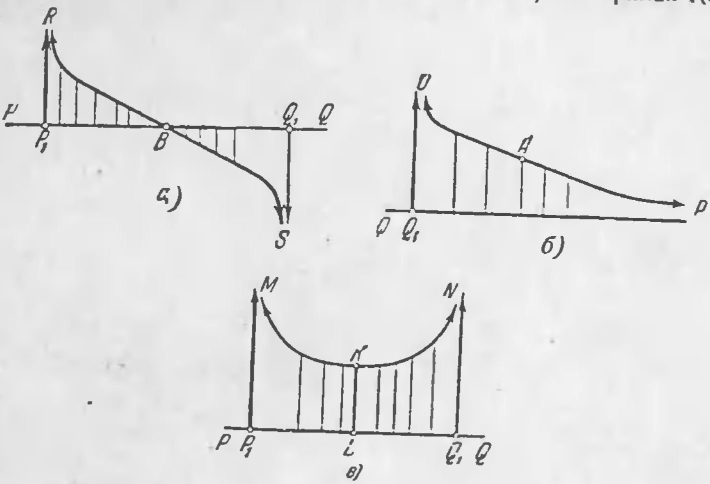
Прямые неевклидовой геометрии Лобачевского, не являющиеся ни пересекающимися, ни параллельными (как прямые PQ и MN на черт. 114), называются расходящимися. Название «расходящиеся прямые» связано с тем, что такие прямые при движении по ним в любом из двух возможных

[1]) Из того, что известное нам доказательство какой-либо теоремы опирается на аксиому параллельных линий, разумеется, не следует, что не существует другого доказательства той же теоремы, не использующего этой аксиомы. Поэтому из того, что определённое доказательство теоремы не переносится непосредственно в неевклидову геометрию Лобачевского, не вытекает ещё, что в этой геометрии теорема обязательно не верна.

[2]) См. по этому поводу книгу А. П. Нордеи, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, гл. II, М., Гостехиздат, 1953.

направлений неограниченно удаляются друг от друга (см. ниже задачу 199в)).

199. а) Пусть PQ и RS — две прямые неевклидовой геометрии Лобачевского, пересекающиеся в точке B. Докажите, что расстояния от точек прямой RS до прямой PQ возрастают неограниченно по обе стороны от точки B. При этом основания перпендикуляров, опущенных из всевозможных точек прямой RS на прямую PQ (проекции точек прямой RS на прямую PQ), покрывают лишь конечный отрезок P_1Q_1 прямой PQ, т. е., другими словами, вся прямая RS



Черт. 115.

проектируется в конечный отрезок P_1Q_1 прямой PQ. Перпендикуляры, восставленные к прямой PQ в точках P_1 и Q_1, параллельны RS.

Все эти особенности взаимного расположения пересекающихся прямых PQ и RS показаны на схематическом черт. 115, *а*, где искривленная линия RBS изображает «неевклидову прямую» RS. Прямые P_1R и Q_1S, параллельные RS, изображены неограниченно приближающимися к этой прямой; основанием для этого служит задача б).

б) Пусть PQ и UP — две параллельные прямые неевклидовой геометрии Лобачевского. Докажите, что расстояния от точек прямой UP до прямой PQ неограниченно убывают в направлении луча AP (A — произвольная точка прямой UP) и неограниченно возрастают в направлении луча AU. Проекцией всей прямой UP на прямую PQ служит луч Q_1P; при этом перпендикуляр, восставленный к прямой PQ в точке Q_1, параллелен UP.

Все эти особенности взаимного расположения параллельных прямых PQ и UP показаны на схематическом черт. 115, *б*.

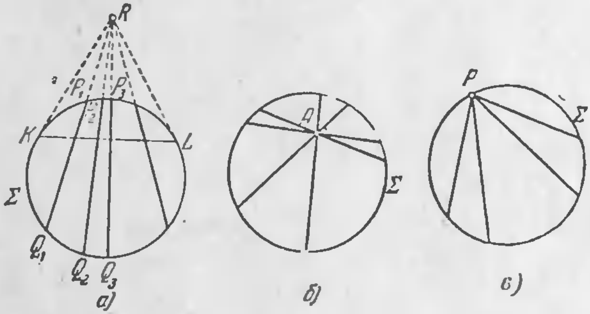
в) Докажите, что расходящиеся прямые PQ и MN неевклидовой геометрии Лобачевского имеют (единственный) общий перпендикуляр KL; обратно, если две прямые имеют общий перпендикуляр, то эти прямые — расходящиеся. Расстояния от точек прямой MN до прямой PQ неограниченно растут в обе стороны от основания K общего перпендикуляра. Прямая MN проектируется в конечный отрезок P_1Q_1 прямой PQ; перпендикуляры, восставленные к прямой PQ в точках P_1 и Q_1, параллельны MN.

Эти особенности взаимного расположения двух расходящихся прямых PQ и MN изображены на схематическом черт. 115, *в*.

Так как из всех расстояний от какой-либо точки A прямой MN до точек прямой PQ кратчайшим является перпендикуляр, опущенный из A на PQ (ибо в неевклидовой геометрии Лобачевского, как мы уже отмечали выше, сохраняется теорема о сравнительной длине перпендикуляра и наклонных), и расстояния от точек прямой MN до расходящейся с ней прямой PQ растут по обе стороны от основания K общего перпендикуляра KL этих прямых (см. задачу 199в)), то общий перпендикуляр KL расходящихся прямых PQ и MN неевклидовой геометрии Лобачевского является кратчайшим расстоянием между точками этих прямых; это дает основание называть р а с с т о я н и е м м е ж д у п р я м ы м и PQ и MN длину отрезка KL. Что же касается параллельных прямых неевклидовой геометрии Лобачевского, то в противоположность евклидовой геометрии понятие расстояния между такими прямыми здесь не имеет смысла (можно показать, что любую пару параллельных прямых неевклидовой геометрии Лобачевского можно совместить неевклидовым движением с любой другой парой параллельных прямых).

Заметим ещё, что поскольку две пересекающиеся или параллельные прямые неевклидовой геометрии Лобачевского вовсе не имеют общего перпендикуляра, а две расходящиеся прямые имеют единственный общий перпендикуляр (см. задачу 199в)), то никакие две прямые неевклидовой геометрии не могут иметь двух общих перпендикуляров; другими словами, в неевклидовой геометрии Лобачевского не существует прямоугольников — четырёхугольников с четырьмя прямыми углами (см. также ниже задачу 207б)).

Из результата задачи 199в) следует ещё одно различие между неевклидовой геометрией Лобачевского и обычной (евклидовой) геометрией. В евклидовой геометрии две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны между собой;



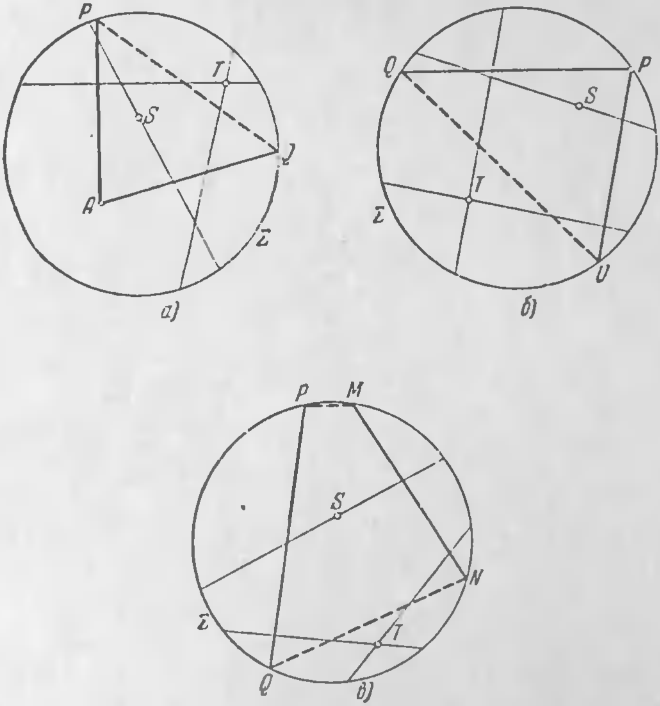
Черт. 116.

обратно, любые две (или больше) параллельные прямые можно рассматривать как перпендикуляры к одной и той же прямой. В противоположность этому в неевклидовой геометрии Лобачевского прямые, перпендикулярные к какой-либо одной прямой, уже не будут параллельными. Такие прямые мы назовём **сверхпараллельными**. Из результата задачи 199в) вытекает, что две сверхпараллельные прямые являются расходящимися [1]) и обратно — любые две расходящиеся прямые являются сверхпараллельными (т. е. они перпендикулярны к одной и той же третьей прямой); поэтому выражения «две расхо-

---

[1]) Эти прямые не могут быть пересекающимися; теорема: два перпендикуляра к одной прямой не могут пересечься, сколько бы мы их ни продолжали — доказывается в школьном курсе геометрии **до** аксиомы параллельных линий и поэтому должна сохранять силу и в неевклидовой геометрии Лобачевского.

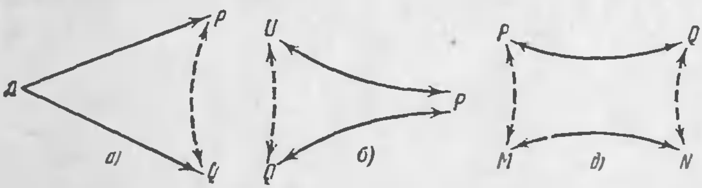
дящиеся прямые» или «две сверхпараллельные прямые» имеют в неевклидовой геометрии Лобачевского одинаковый смысл. Что же касается трёх или больше сверхпараллельных прямых (т. е. трёх или более перпендикуляров к одной и той же прямой), то это уже не будут произвольные расходящиеся (т. е. попарно не пересекающиеся и не параллельные) прямые. Действительно, прямые P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ... и т. д. неевклидовой геометрии Лобачевского будут, очевидно, лишь



Черт. 117.

в том случае перпендикулярны к одной и той же прямой KL, если продолжения хорд P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ... и т. д. за круг K проходят через одну точку — точку пересечения касательных к окружности Σ в точках K и L (черт. 116, a). Таким образом, хорды круга K, пересекающиеся в одной точке A внутри К, представляют собой пучок пересекающихся прямых неевклидовой геометрии Лобачевского (черт. 116, *б*); хорды, пересекающиеся в одной точке P окружности Σ,— пучок параллельных прямых (черт. 116, *в*), а хорды, продолжения которых проходят через одну точку R вне К,— пучок сверхпараллельных прямых (черт. 116, *а*).

Укажем тут же ещё некоторые особенности взаимного расположения точек и прямых неевклидовой геометрии Лобачевского. Пусть PAQ — неевклидов угол, образованный лучами AP и AQ. В таком случае внутри этого угла можно провести прямую PQ, параллельную одновременно и AP и AQ; эта прямая отделяет точки, через которые можно провести прямые, пересекающие обе стороны угла, от точек, через которые нельзя провести ни одной такой прямой (черт. 117, *а*; напомним, что в геометрии Евклида через каждую точку внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны). Аналогично, если QP и UP — две параллельные прямые неевклидовой геометрии Лобачевского, то внутри полосы, ограниченной этими прямыми, также можно провести прямую UQ, параллельную одновременно и QP и UP и отделяющую точки, через которые проходят прямые, пересекающие и QP и UP, от точек, через которые такие прямые не проходят (черт. 117, *б*). Если же PQ и MN — расходящиеся



Черт. 118.

прямые, то точки, через которые проходят прямые, пересекающие и PQ и MN, отделяются от точек, через которые ни одна такая прямая не проходит, двумя прямыми MP и NQ, каждая из которых параллельна одновременно и PQ и MN (черт. 117, *в*). Все эти особенности неевклидовой геометрии Лобачевского схематически изображены на черт. 118, *а—в*.

200. а) Докажите, что каждые две прямые l_1 и l_2 неевклидовой геометрии Лобачевского имеют ось симметрии l (симметрия относительно прямой определяется в неевклидовой геометрии Лобачевского в точности так же, как и в евклидовой геометрии; см. начало § 1 гл. II части первой). При этом прямые l_1, l_2 и l принадлежат все одному пучку (т. е. или все пересекаются в одной точке, или все параллельны между собой, или все три перпендикулярны к одной прямой; см. стр. 152).

б) Докажите, что если прямые l_1, l_2 и l неевклидовой геометрии Лобачевского принадлежат к одному пучку и l есть ось симметрии точек A_1 и A_2, лежащих соответственно на прямых l_1 и l_2, то l является осью симметрии прямых l_1 и l_2.

201. Четырёхугольник неевклидовой геометрии Лобачевского, диагонали которого в точке пересечения делятся пополам, называется неевклидовым параллелограммом. Докажите, что:

а) противоположные стороны неевклидова параллелограмма равны;

б) противоположные углы неевклидова параллелограмма равны;

в) если диагонали неевклидова параллелограмма взаимно перпендикулярны, то все его стороны равны и диагонали являются биссектрисами углов при вершинах (такой параллелограмм можно назвать неевклидовым ромбом);

г) если диагонали неевклидова параллелограмма равны, то все его углы равны (такой параллелограмм можно назвать неевклидовым прямоугольником, хотя углы его, разумеется, не являются прямыми; см. стр. 150);

д) если диагонали неевклидова параллелограмма одновременно равны и взаимно перпендикулярны, то все стороны его равны и все углы равны (такой параллелограмм можно назвать неевклидовым квадратом).

202. Являются ли противоположные стороны неевклидова параллелограмма (см. предыдущую задачу) параллельными прямыми?

203. Докажите, что в неевклидовой геометрии Лобачевского высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке. Остаётся ли эта теорема в силе и для тупоугольных треугольников?

204. Докажите, что в неевклидовой геометрии Лобачевского медианы треугольника пересекаются в одной точке.

205. Сохраняется ли в неевклидовой геометрии Лобачевского теорема: медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершин?

206. Докажите, что в неевклидовой геометрии Лобачевского три перпендикуляра, восставленные к сторонам треугольника в их серединах, принадлежат одному пучку (т. е. либо пересекаются все в одной точке, либо все параллельны между собой, либо все три перпендикулярны к одной прямой; см. стр. 152).

207. а) Докажите, что сумма углов треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского всегда меньше $180°$[1]).

б) Докажите, что сумма углов n-угольника неевклидовой геометрии Лобачевского всегда меньше, чем $180°(n-2)$.

208. Докажите, что площадь n-угольника неевклидовой геометрии Лобачевского пропорциональна разности между $180°(n-2)$ и суммой углов n-угольника (в частности, площадь треугольника с углами $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ равна $k(180° - \angle A - \angle B - \angle C)$, где коэффициент пропорциональности k зависит от выбора единицы измерения площадей).

Разность между $180°(n-2)$ (суммой углов n-угольника евклидовой геометрии) и суммой углов n-угольника неевклидовой геометрии Лобачевского называется **угловым дефектом** (недостатком) этого n-угольника. Таким образом, теорема задачи 208 может быть сформулирована так: *площадь n-угольника неевклидовой геометрии Лобачевского пропорциональна его угловому дефекту.* Отсюда, в частности, видно, что сумма углов n-угольников малой площади близка к $180°(n-2)$.

---

[1]) Можно доказать, что для **любых** трёх углов A, B и C, сумма которых меньше $180°$, можно подобрать треугольник неевклидовой геометрии Лобачевского с углами этой величины. С этим обстоятельством связан и неожиданный результат нижеследующих задач 208 и 209. В обычной (евклидовой) геометрии задание всех углов треугольника равносильно заданию двух его элементов (ибо третий угол здесь определяется двумя другими); поэтому три угла не могут определять треугольник. В противоположность этому в неевклидовой геометрии три угла — это три независимых элемента треугольника; они его полностью определяют.

209. Докажите четвёртый признак равенства треугольников неевклидовой геометрии Лобачевского: два треугольника равны, если три угла одного треугольника равны трём углам второго треугольника.

Из теоремы задачи 209 вытекает, в частности, что в неевклидовой геометрии Лобачевского отсутствует понятие подобия фигур. Это обстоятельство имеет важное принципиальное значение. Во введении ко второй части мы видели, что все теоремы евклидовой геометрии фактически относятся к «геометрии подобий», т. е. в них фигурируют лишь те свойства геометрических фигур, которые не меняются при преобразованиях подобия. Это связано с тем, что содержание теорем обычной (евклидовой) геометрии не может зависеть от выбора единицы измерения длин; поэтому ни в какой теореме не могут фигурировать длины отрезков (а лишь отношения длин). Но в неевклидовой геометрии Лобачевского не существует подобных фигур и, следовательно, нет преобразований, которые можно было бы назвать «неевклидовыми подобиями»; следовательно, там положение дела должно быть иным. В силу нашей долголетней привычки к евклидовой геометрии это может показаться удивительным; поэтому мы остановимся на этом вопросе подробнее.

Напомним, что теоремы евклидовой геометрии могут зависеть от выбора единицы измерения углов; так, например, формулировка теоремы «сумма углов треугольника равна 180°», разумеется, изменится, если принять градус равным не $\frac{1}{90}$, а $\frac{1}{100}$ части прямого угла[1]). Эта разница между расстояниями и углами связана с тем, что в евклидовой геометрии единицу измерения углов можно определить чисто геометрически (за такую единицу измерения можно при-

[1]) Иначе говоря, в теоремах евклидовой геометрии могут фигурировать величины углов, но лишь отношения величин длин (сравните, как фигурируют углы и длины в теореме: в прямоугольном треугольнике с углом 30° меньший катет равен половине гипотенузы). Именно поэтому в дореволюционном учебнике Киселёва, которым до сих пор пользуются в наших школах, не пришлось изменить ни одного слова из-за того, что за время употребления этого учебника полностью изменились принятые единицы измерения длин (мы имеем в виду переход от русской системы мер к метрической в 1918 г.). Если бы за это время изменились единицы измерения углов, то формулировки ряда теорем пришлось бы заменить новыми.

нять, например, прямой угол — угол, равный своему смежному,— или любую его часть; также и угол в 1 радиан — центральный угол, которому отвечает дуга окружности, равная радиусу,— определяется геометрически), в то время как никаких геометрических соображений, которые позволили бы предпочесть одну единицу длины другой, здесь не существует. В противоположность этому в неевклидовой геометрии Лобачевского единицу измерения длин тоже можно определить чисто геометрически; например, можно принять за единицу длины сторону равностороннего треугольника с углом 45° (в силу теоремы задачи 209 это есть вполне определённый отрезок). Поэтому формулировки теорем неевклидовой геометрии могут зависеть от выбора единицы длины.

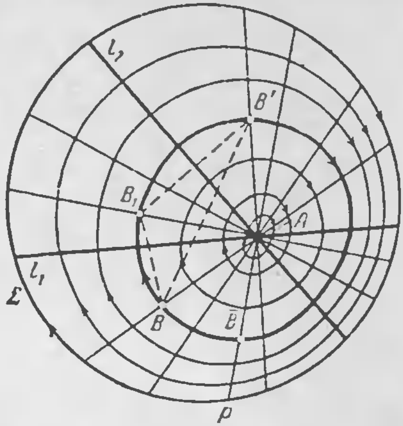
Отметим ещё, что в силу теорем задач 208 и 209 в неевклидовой геометрии Лобачевского также и единица измерения площадей может быть определена чисто геометрически, например из условия, чтобы площадь каждого n-угольника была равна его угловому дефекту [1]) (можно также принять за единицу площадь какого-либо треугольника, определённого своими углами).

В заключение остановимся на вопросе о к л а с с и ф и к а ц и и д в и ж е н и й неевклидовой геометрии Лобачевского. В первой части книги мы видели, что каждые две собственно-равные фигуры обыкновенной (евклидовой) геометрии можно перевести одну в другую при помощи двух последовательных симметрий относительно прямой (см. § 2 гл. II первой части, в частности текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 65). Совершенно так же показывается, что и в геометрии Лобачевского *каждые две собственно-равные фигуры можно перевести одну в другую при помощи суммы двух симметрий относительно прямой* (определение симметрии относительно прямой, а также собственно-равных и зеркально-равных фигур в неевклидовой геометрии Лобачевского ничем не отличается от определения этих понятий в евклидовой геометрии;

---

[1]) В таком случае мы придём к предложению: *площадь каждого многоугольника равна его угловому дефекту*, являющемуся хорошим примером теоремы, з а в и с я щ е й о т в ы б о р а е д и н и ц ы п л о щ а д и (при ином выборе единицы измерения площадей эта теорема уже не будет верна).

см. начало § 1 гл. II и начало § 2 той же главы первой части книги)[1]). Однако, в то время как в евклидовой геометрии имеются две существенно различные возможности взаимного расположения двух прямых (пересекающиеся и параллельные прямые), в неевклидовой геометрии Лобачевского приходится рассматривать три случая взаимного расположения прямых (пересекающиеся, параллельные и расходящиеся прямые). Соответственно этому в обычной геометрии существуют два различных типа собственных движений, а именно: вращение и параллельный перенос, т. е. сумма симметрий относительно двух пересекающихся прямых и сумма симметрий относительно двух параллельных прямых; в неевклидовой же геометрии Лобачевского существуют следующие три типа собственных движений.



а)

Черт. 119, а.

1°. **Сумма симметрий относительно прямых l_1 и l_2, пересекающихся в точке A** (черт. 119, *а*). При этом движении точка A остаётся на месте и, следовательно, пучок II_1 прямых, пересекающихся в точке A, переходит в себя (каждая прямая этого пучка переходит в другую прямую того же пучка). Пусть B' — точка, в которую переходит при рассматриваемом движении произвольная точка B неевклидовой геометрии Лобачевского (B симметрична B_1 относительно l_1; B_1 симметрична B' относительно l_2),

---

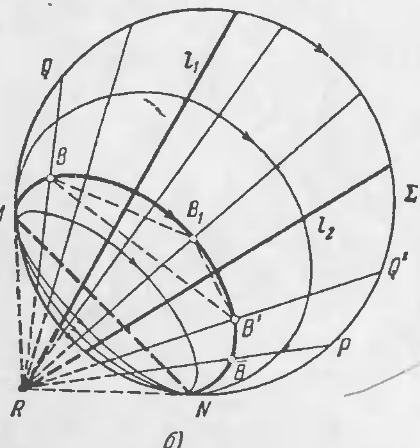
[1]) Читателю рекомендуется самому проверить, что эти определения, а также все рассуждения, напечатанные мелким шрифтом на стр. 65 первого тома книги, могут быть дословно перенесены в неевклидову геометрию Лобачевского.

Аналогично показывается, что в неевклидовой геометрии, как и в обычной (евклидовой) геометрии, каждые две зеркально-равные фигуры можно перевести одну в другую при помощи суммы трёх симметрий относительно прямой.

BA и $B'A$ — прямые пучка II_1, проходящие через точки B и B'. Нетрудно показать, что точка B' симметрична B относительно оси симметрии прямых BA и $B'A$. Действительно, в силу теоремы задачи 206 (применённой к треугольнику BB_1B') ось симметрии точек B и B' принадлежит к тому же пучку II_1, что и прямые l_1 и l_2; в силу результата задачи 200б) она является осью симметрии прямых BA и $B'A$.

Отметим на каждой прямой AP пучка II_1 точку $\overline{B}$, симметричную B относительно оси симметрии прямых AP и AB. Геометрическое место всех точек $\overline{B}$ мы назовём **окружностью** неевклидовой геометрии Лобачевского, а точку A — **центром** этой окружности. Таким образом, мы видим, что при движении типа 1° каждая точка перемещается по окружности с центром A (см. черт. 119, a).

Окружность с центром A можно проще определить как *геометрическое место точек, равноудалённых от точки A* (ибо при движении, оставляющем A на месте, расстояние от перемещающейся точки до A не может изменяться)[1]). Движение типа 1°, которое характеризуется тем, что некоторая точка A неевклидовой геометрии Лобачевского остаётся на месте, можно назвать **неевклидовым вращением** вокруг точки A.



Черт. 119, *б*.

2°. **Сумма симметрий относительно сверхпараллельных прямых** l_1 и l_2, **перпендикулярных к прямой** MN (черт. 119, $б$). При этом движении прямая MN остаётся на

---

[1]) Разумеется, равноудалённых в смысле неевклидовой геометрии. С точки зрения евклидовой геометрии эта кривая, конечно, окружностью являться не будет.

месте и, следовательно, пучок II_2 сверхпараллельных прямых, перпендикулярных к MN, переходит в себя (каждая прямая пучка переходит в прямую того же пучка). Пусть B' — точка, в которую переходит при рассматриваемом движении произвольная точка B неевклидовой геометрии Лобачевского (B симметрична B_1 относительно l_1; B_1 симметрична B' относительно l_2), BQ и $B'Q'$ — прямые пучка II_2, проходящие через точки B и B'. Нетрудно показать, что точка B' симметрична B относительно оси симметрии прямых BQ и $B'Q'$. Действительно, в силу теоремы задачи 206 ось симметрии точек B и B' принадлежит к тому же пучку II_2, что и прямые l_1 и l_2; в силу задачи 200б) она является осью симметрии прямых BQ и $B'Q'$.

Отметим на каждой прямой $\overline{B}P$ пучка II_2 точку $\overline{B}$, симметричную B относительно оси симметрии прямых $\overline{B}P$ и BQ. Геометрическое место точек $\overline{B}$ мы назовём **эквидистантой** неевклидовой геометрии Лобачевского, а прямую MN — **осью** этой эквидистанты. Таким образом, при движении типа 2° каждая точка перемещается по эквидистанте с осью MN (черт. 119,*б*).

Эквидистанту с осью MN можно проще определить как *геометрическое место точек, равноудалённых от прямой* MN и расположенных по одну сторону от MN (ибо при движении, оставляющем прямую на месте, расстояние от перемещающейся точки до этой прямой не может измениться)[1]. Движение типа 2°, которое характеризуется тем, что некоторая прямая MN остаётся неподвижной (скользит сама по себе), можно назвать **неевклидовым переносом** вдоль прямой MN.

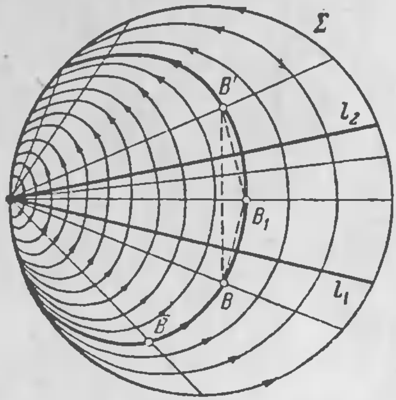
3°. **Сумма симметрий относительно параллельных прямых** l_1 и l_2 (черт. 119, *в*). При этом движении переходит в себя пучок II_3 прямых, параллельных l_1 и l_2 (каждая прямая пучка и при симметрии относительно l_1, и при симметрии относительно l_2 переходит в прямую того же пучка).

---

[1]) Отсюда и происходит слово «эквидистанта» (в переводе с латинского — линия равных расстояний). Заметим, что в силу результатов задач 199а) — в) геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой MN (и расположенных по одну сторону от MN), не может являться прямой линией.

Отметим ещё, что в литературе по неевклидовой геометрии под эквидистантой иногда понимают геометрическое место точек, удалённых от прямой MN на данное расстояние a и расположенных **с обеих сторон** от MN (см. также примечание к решению задачи 300, стр. 603).

Пусть B' — точка, в которую переходит при рассматриваемом движении произвольная точка B неевклидовой геометрии Лобачевского (B симметрична B_1 относительно l_1; B_1 симметрична B' относительно l_2); BP и $B'P$ — прямые пучка II_3, проходящие через B и B'. Нетрудно показать, что точка B' симметрична B относительно оси симметрии прямых BP и $B'P$. Действительно, в силу теоремы задачи 206 ось симметрии точек B и B' принадлежит к тому же пучку II_3, что и прямые l_1 и l_2; в силу задачи 206б) она является осью симметрии прямых BP и $B'P$.



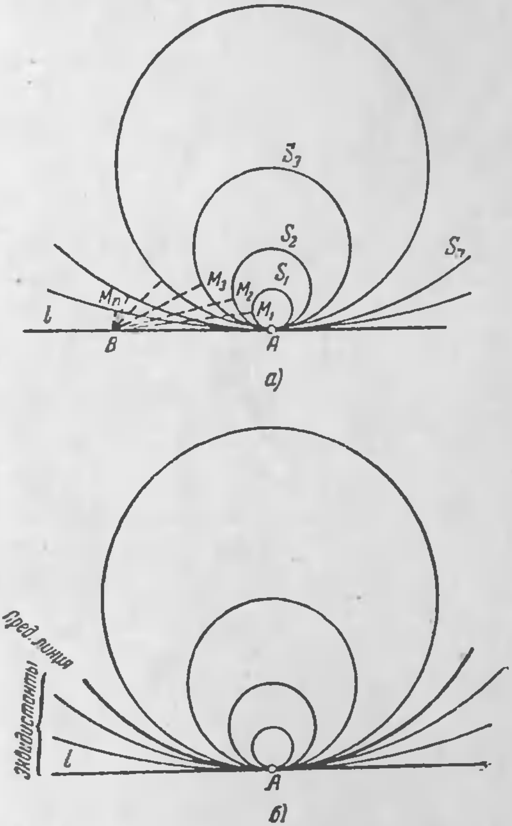
Черт. 119, *в*.

Отметим на каждой прямой AP пучка II_3 точку $\overline{B}$, симметричную B относительно оси симметрии прямых AP и BP. Геометрическое место точек $\overline{B}$ мы назовём **предельной линией** неевклидовой геометрии Лобачевского. Таким образом, при движении типа 3° каждая точка перемещается по предельной линии (черт. 119, *в*).

В евклидовой геометрии последовательность окружностей, проходящих через данную точку A и касающихся в этой точке данной прямой l, при неограниченном увеличении радиуса стремится к самой прямой l — иногда говорят поэтому, что «прямая есть окружность бесконечно большого радиуса» (черт. 120, *а*)[1]. В неевклидовой геометрии

[1]) Это утверждение имеет следующий смысл. **Расстоянием от точки B до кривой Γ** называется расстояние от B **до самой близкой к B точки Γ** (так, расстояние от B до прямой l равно длине перпендикуляра BP, опущенного из B на l, а расстояние от B до окружности S с центром O равно наименьшему из отрезков BM, BN, где M и N — точки пересечения прямой BO с окружностью S). *Если радиусы окружностей $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$, касающихся прямой l в точке A, неограниченно возрастают, то расстояния $BM_1, BM_2, BM_3, \ldots, BM_n, \ldots$ от произвольной точки B прямой l до окружностей $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ стремятся к нулю* (черт. 120, *а*). Аналогичный смысл имеют и нижеследующие утверждения, относящиеся к неевклидовой геометрии Лобачевского.

Лобачевского дело обстоит иначе: нетрудно понять, что там последовательность окружностей, проходящих через точку A и касающихся прямой l, при неограниченном увеличении радиуса будет стремиться к предельной линии, проходящей через A и касающейся l, т. е. «окружностью бесконечно большого радиуса» является предельная линия (но



Черт. 120.

не прямая); отсюда происходит и название «предельная линия». С другой стороны, если мы рассмотрим ещё и всевозможные эквидистанты, проходящие через A и касающиеся l, то при неограниченном увеличении ширины эквидистанты (расстояния от точек эквидистанты до её оси), мы придём снова к той же предельной линии, а при уменьшении ширины эквидистанты до нуля получим прямую l (черт. 120, *б*).

Укажем ещё следующие близкие друг к другу определения окружности, предельной линии и эквидистанты неевклидовой геометрии Лобачевского: окружностью (соответственно предельной линией или эквидистантой) называется кривая, пересекающая под прямым углом все прямые пучка пересекающихся прямых (соответственно пучка параллельных или сверхпараллельных прямых)[1]).

210. Докажите, что вокруг каждого треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского можно описать либо окружность, либо предельную линию, либо эквидистанту.

Отметим, что поскольку точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон (см. выше стр. 144), то в каждый треугольник можно в п и с а т ь окружность.

211. Докажите, что в неевклидовой геометрии Лобачевского отношение длины окружности к радиусу не является постоянной величиной.

Из результата задачи 211 следует, что в неевклидовой геометрии Лобачевского неравные окружности не являются подобными (ср. выше стр. 155)[2]).

На этом мы закончим изучение неевклидовой геометрии Лобачевского[3]). В изложении этой новой геометрии мы исхо-

[1]) Определение угла между произвольными (не обязательно прямыми) линиями плоскости приведено на стр. 182 (см. текст, напечатанный мелким шрифтом).

[2]) Отсюда же следует, что обычное определение радианной меры угла α как отношения длины дуги окружности, отвечающей центральному углу α, к радиусу окружности не может быть перенесено в неевклидову геометрию, ибо здесь это отношение зависит не только от α, но и от величины радиуса. Радианную меру угла в неевклидовой геометрии Лобачевского можно ввести чисто формально, приписав развёрнутому углу величину $\pi = 3{,}14159\ldots$ или же при помощи следующей довольно сложной геометрической конструкции: за радианную меру угла α принимают п р е д е л, к которому стремится отношение дуги окружности, отвечающей центральному углу α, к величине радиуса окружности, если радиус неограниченно уменьшается.

[3]) Читателям, интересующимся бо́льшими подробностями, можно рекомендовать, например, книги: А. П. Н о р д е н, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., Гостехиздат, 1953, или П. А. Ш и р о к о в, Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, М., Гостехиздат, 1955. Из сочинений самого Н. И. Л о б а ч е в с к о г о наиболее доступными являются «Геометрические исследования по теории параллельных линий», М.— Л., Изд. АН СССР, 1945.

дили из её определения, приведенного на стр. 129; при этом все теоремы неевклидовой геометрии сводились к обычным теоремам, относящимся к точкам (и хордам) круга К, и изучение неевклидовой геометрии заключалось в выделении тех (евклидовых) свойств круга К (и помещающихся внутри него фигур), которые сохраняются при проективных преобразованиях, переводящих К в себя. Но существует и иной путь изучения неевклидовой геометрии Лобачевского. Этот путь был намечен на стр. 142—145 (см. доказательство первого признака равенства треугольников и теоремы о том, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке); он состоит в систематическом сведении теорем геометрии Лобачевского к более простым теоремам и, в конечном счете, к нескольким простейшим аксиомам и совершенно аналогичен построению курса (евклидовой) геометрии в средней школе. На этом пути можно доказать все теоремы неевклидовой геометрии Лобачевского; следует только вместо аксиомы параллельных линий школьного курса предположить, что через точку A, расположенную вне прямой PQ, можно провести м н о г о различных прямых, не пересекающих PQ. При таком изложении связь неевклидовой геометрии со свойствами точек и хорд круга К не играет никакой роли; на чертежах совершенно незачем изображать этот круг, а можно ограничиться схематическими чертежами, аналогичными черт. 115, 118 или 120, *б*.

Исторически неевклидова геометрия впервые была построена именно этим последним путем. Она возникла из стремления доказать аксиому параллельных линий, относительно которой долгое время не было известно, что это действительно аксиома, а не очень трудная теорема, доказательство которой ещё не найдено. При попытках доказать эту аксиому многие учёные пользовались методом «доказательства от противного», т. е. предполагали, что аксиома параллельных линий не верна и старались, исходя из этого предположения, придти к какому-либо противоречию. Все подобные попытки оказались безуспешными: теоремы, вытекающие из ложности аксиомы параллельных линий, казались весьма удивительными, но ни одна из них не противоречила другой. Тем не менее попытки всё продолжались, пока Н. И. Лобачевский впервые не заявил вполне определённо, что таким путём и нельзя придти к противоречию, ибо, отвергнув аксиому параллельных линий, мы придём к новой геометрии, столь же безошибочной, как и обычная [1]). При этом он настолько глубоко развил новую геометрию, что она действительно стала в отношении геометрической содержательности и логической стройности ничем не уступающей геометрии Евклида. Создание неевклидовой геометрии (которое обычно датируется 1826 г., когда Н. И. Лобачевский первый раз выступил с публичным докладом о своём открытии) и послужило доказательством недоказуемости аксиомы параллельных линий.

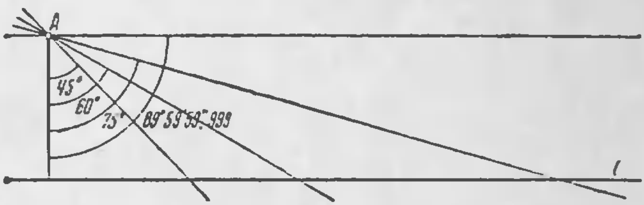
Выше было сказано, что геометрия Лобачевского является столь же безошибочной, как и геометрия Евклида. Кажется, однако, что в окружающем нас пространстве может выполняться лишь одна из этих двух геометрий; при этом кажется очевидным, что этой единственно «правильной» геометрией является геометрия Евклида [2]). Однако на самом деле вопрос об отношении геометрий Лобачевского и Евклида к действительности является более сложным. Непосредственный опыт не позволяет решить вопрос об истинности или ложности аксиомы о параллельных, ибо, разумеется, никак нельзя проверить экспериментально, что существует лишь единственная прямая, проходящая через данную точку A и не пересекающая фиксированную прямую l. Соображения геометрической

---

[1]) Об очень интересной истории открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским, а также о работах в этой же области других учёных (из которых особенно надо отметить знаменитого немецкого математика К. Ф. Гаусса и замечательного венгерского учёного Я. Больаи, независимо от Н. И. Лобачевского пришедших к тем же идеям) см. В. Ф. Каган «Н. И. Лобачевский и его геометрия», М., Гостехиздат, 1955, или обстоятельную книгу того же автора «Лобачевский», Изд. АН СССР, М.— Л., 1948.

[2]) Точнее, здесь следует сказать так: «Кажется, что одна из этих двух геометрий (а именно, геометрия Евклида) должна лучше отражать свойства реального пространства, чем другая». Действительно, строго говоря, вообще нельзя ставить вопрос о том, какая геометрия выполняется в окружающем нас мире, ибо основные понятия геометрии — точки, прямые линии и пр.— не являются реально существующими объектами, а представляют собой лишь результат определённой идеализации свойств окружающих нас предметов (именно поэтому геометрию нельзя относить к числу так называемых «естественных наук», как физика, химия или биология, выводы которых проверяются опытами). Можно лишь говорить о том, какая геометрия более точно описывает свойства мельчайших частиц или областей пространства, принимаемых за точки, и траекторий световых лучей, принимаемых за прямые.

наглядности здесь также ничего не говорят. Разумеется, ясно, что при небольшом расстоянии от A до l прямая, проходящая через A и образующая с перпендикуляром, опущенным из A на l, «достаточно острый» угол (например, 45° или 60°, или 75°; см. черт. 121), пересечёт l; однако вряд ли кто-нибудь будет считать «очевидным», что пересечёт l прямая, образующая с этим перпендикуляром «почти прямой» угол, например угол 89° 59′ 59″, 999. Ещё труднее сослаться на наглядность в том случае, когда расстояние от А до l очень велико, например много больше расстояния от Земли до Солнца. Можно, правда, пытаться экспериментально решить вопрос о сумме углов



Черт. 121.

треугольника (см. задачу 207); этот путь решения вопроса о геометрической природе пространства был указан ещё самим Лобачевским, попытавшимся определить с помощью данных астрономических наблюдений сумму углов очень большого треугольника, образованного тремя звёздами[1]). Однако таким образом принципиально нельзя опровергнуть истинность геометрии Лобачевского, поскольку наши измерения производятся лишь с ограниченной точностью (определяемой свойствами инструментов) и эксперимент позволяет только заключить, что сумма углов треугольника п р и б л и ж ё н н о равна такой-то величине, и оценить ошибку, которая при этом может быть допущена. Поэтому подобный опыт никогда не даст твёрдой уверенности в том, что сумма углов треугольника т о ч н о равна 180°. Напротив того, опыт мог бы доказать, что сумма углов треугольника н е р а в н а 180° и что, следовательно, евклидова геометрия является ложной; однако при всех произведённых измерениях обнаруженное отклонение суммы углов

[1]) Напомним, что в силу результата задачи 208 сумма углов треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского тем более отличается от 180°, чем больше площадь треугольника.

треугольника от 180° не превосходило возможной ошибки измерений.

Таким образом, пока вопрос об истинности или ложности геометрии Лобачевского не решён каким-либо более тонким экспериментом, приходится считать, что обе геометрии — Евклида и Лобачевского, с равным успехом могут быть применены для изучения закономерностей, имеющих место в реальном мире [1]). Попытки выяснить, какая из возможных геометрических схем (которые отнюдь не исчерпываются геометриями Евклида и Лобачевского; см., например, ниже, стр. 167—168) более всего подходит к описанию свойств окружающего нас пространства, вызвали дальнейший значительный прогресс физики. Наиболее замечательным достижением в этом плане идей пока следует считать появление так называемой «теории относительности» («специальная теория относительности» — А. Эйнштейн, 1905; «общая теория относительности» — А. Эйнштейн, 1916), коренным образом изменившей наши представления о геометрии значительных по размерам областей пространства и полностью снявшей вопрос об истинности или ложности геометрии Лобачевского в его первоначальной постановке; к сожалению, мы не можем остановиться на этой теории, весьма своеобразно связанной с темой настоящей книги [2]).

Огромная заслуга Н. И. Лобачевского состоит в том, что он первый сломал существующие представления об единственности и незаменимости евклидовой геометрии. При этом, однако, Н. И. Лобачевский не дал полного доказательства непротиворечивости построенной им новой геометрии: несмотря

---

[1]) Тот факт, что при изучении неевклидовой геометрии Лобачевского неизбежно приходится пользоваться искажёнными чертежами вроде наших черт. 115 или 118, никак не связан с вопросом об истинности или ложности этой геометрии. Действительно, возможность употребления в евклидовой геометрии точных чертежей самым тесным образом связана с существованием преобразований подобия, позволяющих изобразить большую область плоскости «в малом масштабе» (см. том I, введение ко второй части книги). В неевклидовой геометрии Лобачевского преобразования подобия отсутствуют (см. выше стр. 155); поэтому здесь при изображении на листе бумаги больших областей плоскости приходится искажать чертежи (изображать прямые линии искривлёнными и т. д.).

[2]) Геометрические идеи теории относительности коротко намечены в приложении II к книге Б. Н. Делоне, цитированной в подстрочном примечании на следующей странице.

на то, что при значительном развитии этой геометрии ему не удалось обнаружить в ней никаких противоречий, строго говоря, всё же нельзя было считать полностью доказанным, что такое противоречие не может встретиться когда-нибудь в дальнейшем. С этой точки зрения большой интерес представили результаты итальянского математика Е. Бельтрами, который в 1868 г. показал, что неевклидова геометрия Лобачевского имеет место на некоторых замечательных поверхностях обыкновенного (евклидова) пространства (если за расстояние между точками A и B поверхности принимать длину кратчайшей линии, проведённой по поверхности между A и B; эти «кратчайшие» линии играют в геометрии на поверхности роль прямых). Тем самым было окончательно доказано, что геометрии Евклида и Лобачевского вполне равноправны: если только не содержит противоречия геометрия Евклида, то не может содержать противоречия и геометрия специальных поверхностей евклидова пространства — геометрия Лобачевского.

Через два года после работы Е. Бельтрами появились первые публикации Ф. Клейна, посвящённые неевклидовой геометрии. Стремясь в связи с существованием двух различных геометрий выяснить, что же следует назвать геометрией, Клейн пришёл к точке зрения, указанной во введении к третьей части настоящей книги. Эта точка зрения, как мы видели, с самого начала делает геометрию Лобачевского равноправной с евклидовой. Клейну же принадлежит то определение неевклидовой геометрии Лобачевского, которое было принято на стр. 129; вытекающая отсюда возможность осуществить неевклидову геометрию внутри круга K обыкновенной евклидовой плоскости (намеченная уже в работе Бельтрами) также показывает, что эта геометрия не может содержать противоречия, т. е. даёт доказательство недоказуемости аксиомы параллельных [1]). При этом Клейн пошёл даже ещё дальше: рассматривая различные достаточно узкие группы проективных преобразований, он выделил целый ряд (а именно, девять) геометрий на плоскости, в каждой из которых естественно определяются понятия расстояния между точками и угла между

---

[1]) См. по этому поводу книгу Б. Н. Делоне «Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского», М., Изд. АН СССР, 1953, в которой содержится оригинальное изложение неевклидовой геометрии Лобачевского, весьма близкое к идеям настоящего приложения.

прямыми. В настоящее время все те из этих геометрий, которые отличны от геометрии Евклида, называются *неевклидовыми*; таким образом, геометрия Лобачевского является лишь одной (хотя и наиболее важной) из неевклидовых геометрий [1]).

В заключение отметим, что доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, принадлежащие Бельтрами и Клейну, не являются единственно возможными. В евклидовом пространстве можно построить и другие «модели» геометрии Лобачевского, отличные от «модели Бельтрами» (совокупности точек некоторой специальной кривой поверхности, расстояния между которыми измеряются «по поверхности» и «модели Клейна» (совокупности точек круга К, расстояния между которыми определяются отличным от обычного образом) [2]). Ещё одна интересная «модель» этой геометрии будет рассмотрена в приложении к гл. II этой части книги.

---

[1]) Геометрия Лобачевского выделяется из прочих неевклидовых геометрий в том отношении, что в ней сохраняются все аксиомы евклидовой геометрии, кроме одной, самой сложной и наименее очевидной из них — аксиомы параллельных линий. В других неевклидовых геометриях отличия от геометрии Евклида более значительны; так, например, в некоторых из них прямая не может быть неограниченно продолжена в обе стороны, а в других не каждые две точки можно соединить прямой. Подробное изложение относящегося сюда материала содержится в книгах Ф. Клейна «Неевклидова геометрия», М.—Л., ОНТИ, 1936, В. Ф. Кагана, «Основания геометрии», т. II, М., Гостехиздат, 1956 и Б. А. Розенфельда, «Неевклидовы геометрии», М., Гостехиздат, 1955; следует только иметь в виду, что все эти книги довольно трудны и годятся только для достаточно подготовленного читателя (знакомого, в частности, с основами высшей математики). Относительно одной из неевклидовых геометрий, отличных от геометрии Лобачевского (так называемой **геометрии Римана**, указанной немецким математиком Б. Риманом ещё в 1854 г., т. е. значительно раньше работы Клейна), см. также приложение к гл. II настоящей части, стр. 337—345).

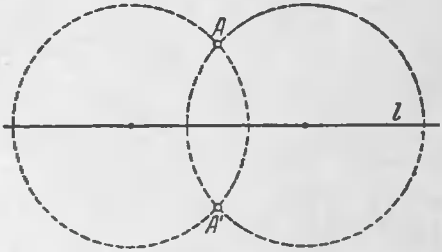
[2]) В нашем кратком изложении мы не останавливаемся на некоторых принципиальных дефектах «модели Бельтрами», вынуждающих считать, что лишь открытие «модели Клейна» доставило безупречное доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского (см., например, конец приложения I к книге Б. Н. Делоне, цитированной в сноске к стр. 167).

ГЛАВА II

КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

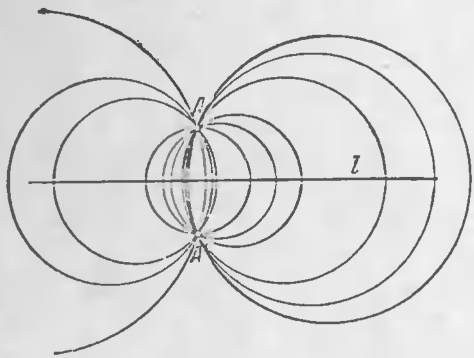
§ 1. Симметрия относительно окружности (инверсия)

Построение точки A', симметричной данной точке A относительно данной прямой l, обыкновенно производят следующим образом. Проводят две произвольные окружности с центрами на прямой l, проходящие через точку A. Вторая точка пересечения этих окружностей и будет симметрична точке A относительно прямой l (черт. 122).



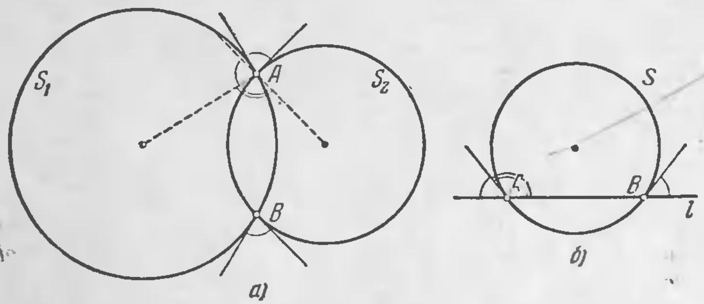
Черт. 122.

Здесь используется то обстоятельство, что в с е окружности с центрами на прямой l, проходящие через некоторую точку A, проходят и через точку A', симметричную A относительно прямой l (черт. 123). Этот факт можно принять за определение симметрии относительно прямой: *точки A и A' называются симметричными относительно прямой l, если каждая окружность с центром на прямой l, проходящая* *через точку A, проходит одновременно и через точку A'.* Такое определение, очевидно, равносильно тому, которое было дано в § 1 гл. II первой части книги.



Черт. 123.

В этом параграфе мы рассмотрим новое преобразование — симметрию относительно окружности. Это преобразование во многом аналогично симметрии относительно прямой и часто оказывается полезным для решения геометрических задач.

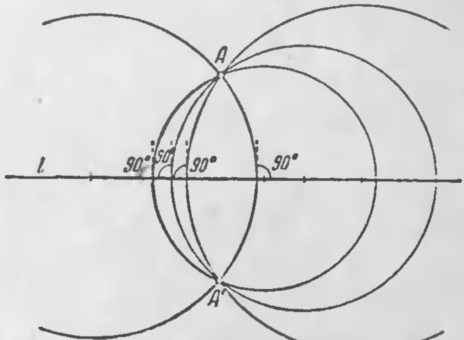


Черт. 124.

Мы будем исходить из определения симметрии относительно прямой, данного в начале параграфа. При этом нам будет удобно несколько видоизменить это определение.

В настоящей главе нам часто придётся говорить об угле между двумя окружностями или между прямой и окружностью.

Углом между двумя окружностями естественно называть угол между касательными к окружностям в точке их пересечения (черт. 124, *а*). Из этого определения следует, что угол между двумя окружностями равен углу между радиусами, проведёнными в точку касания (или смежному углу, поскольку угол между двумя окружностями, как и угол между двумя прямыми, не определяется однозначно: его можно считать равным α или $180° - \alpha$). Точно так же углом между прямой l и окружностью S мы будем называть угол между прямой l и касательной к окружности S в точке пересечения этой окружности с l (черт. 124, *б*)[1].



Черт. 125.

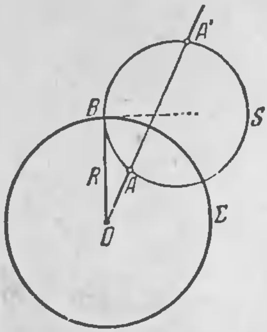
Окружности, центры которых лежат на данной прямой l (и только эти окружности), перпендикулярны к прямой l (черт. 125). Поэтому можно следующим образом определить симметрию относительно прямой: *точка A симметрична точке A' относительно прямой l, если каждая окружность, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой l, проходит через точку A'.*

Докажем теперь следующую теорему.

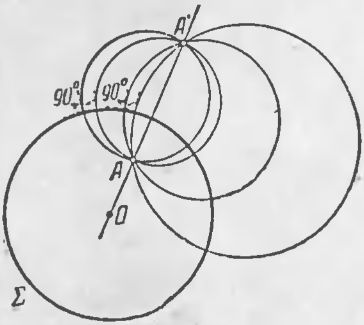
[1]) Если окружности S_1 и S_2 пересекаются в двух точках A и B, то угол между касательными к S_1 и S_2 в точке A, очевидно, равен углу между касательными к S_1 и S_2 в точке B (черт. 124, *а*); аналогично, если прямая l и окружность S пересекаются в точках A и B, то касательные к S в точках A и B образуют с прямой l одинаковые углы (черт. 124, *б*).

Теорема 1. *Все окружности, проходящие через данную точку A и перпендикулярные к данной окружности Σ* (не проходящей через A), *проходят одновременно через некоторую точку A', отличную от A.*

Доказательство. Пусть S — окружность, проходящая через точку A и перпендикулярная к окружности Σ (черт. 126). Проведём прямую через центр O окружности Σ и точку A и соединим O с точкой B пересечения окружностей Σ и S. Так как окружность S перпендикулярна к окружности Σ, то прямая OB является касательной к окружности S. Пусть A' — вторая точка пересечения прямой OA с окружностью S.



Черт. 126.



Черт. 127.

В силу известного свойства касательной к окружности имеем:

$$OA \cdot OA' = OB^2,$$

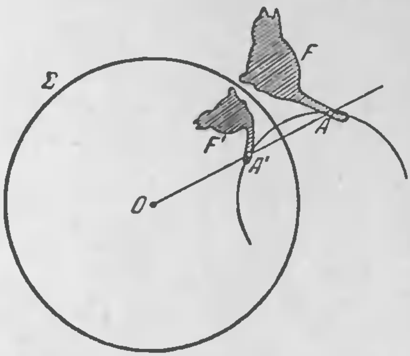
или

$$OA' = \frac{R^2}{OA},$$

где R — радиус окружности S. Отсюда видно, что точка A' пересечения прямой OA с окружностью S не зависит от выбора окружности S. Следовательно, все окружности S, перпендикулярные к Σ и проходящие через точку A, пересекают прямую OA в одной и той же точке A' (черт. 127). А это нам и требовалось доказать.

Теперь становится естественным следующее определение: *Точка A называется симметричной точке A' относительно окружности Σ, если каждая окружность, проходящая через точку A и перпендикулярная к окружности Σ, про-*

ходит через точку A'[1]). Если точка A' симметрична точке A относительно Σ, то, очевидно, и точка A симметрична A' относительно Σ (см. черт. 127); это позволяет говорить о точках, симметричных друг другу относительно окружности. Совокупность всех точек, симметричных точкам некоторой фигуры F относительно окружности Σ, образует фигуру F', симметричную фигуре F относительно Σ (черт. 128). Если точка A' симметрична точке A относительно окружности Σ, то говорят также, что A' получается из A отражением от Σ.



Черт. 128.

Симметрия относительно прямой является предельным случаем симметрии относительно окружности, ибо прямую можно рассматривать как «окружность бесконечно большого радиуса». В дальнейшем мы увидим, что такое включение прямых в число окружностей позволяет сократить многие рассуждения, связанные с изучением симметрии относительно окружности.

Симметрия относительно окружности называется также **инверсией**; в этом случае окружность, относительно которой производится симметрия, называется **окружностью инверсии**, центр этой окружности — **центром инверсии**, а квадрат её радиуса $R^2 = k$ — **степенью инверсии**. Название «инверсия» менее наглядно, чем «симметрия относительно окружности»; однако оно короче и по этой причине имеет большее распространение. Мы в дальнейшем также будем, как правило, пользоваться этим новым названием.

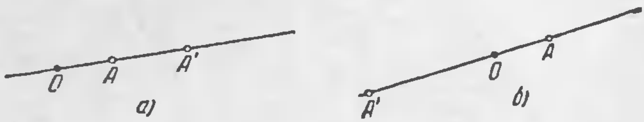
Очевидно, что инверсию можно определить также и следующим образом: *инверсией с центром инверсии в точке* O

[1]) Нетрудно видеть, что если A и A' — две точки, симметричные относительно окружности S, то **каждая** окружность, проходящая через точки A и A', перпендикулярна к S (аналогично тому, как каждая окружность, проходящая через две точки A и A', симметричные относительно прямой l, имеет центр на прямой l).

и степенью инверсии k называется преобразование, переводящее каждую точку A плоскости в точку A', лежащую на луче OA и такую, что

$$OA' = \frac{k}{OA} \qquad (*)$$

(черт. 129, *а*)[1]. Ясно, что это определение равносильно приведённому выше (см. доказательство теоремы 1); оно менее геометрично, чем прежнее определение, но обладает преимуществом большой простоты[2].



Черт. 129.

Иногда оказывается полезным рассматривать преобразование, переводящее точку A в точку A', такую, что A и A' лежат на одной прямой с некоторой фиксированной точкой O по разные стороны от O и $OA' = \frac{k}{OA}$ (черт. 129, *б*). Такое преобразование мы будем называть инверсией с центром в точке O и отрицательной степенью $-k$[3]. Очевидно, что инверсия с центром O и отрицательной степенью $-k$ равносильна инверсии с центром O и положительной степенью k (симметрии относительно окружности S с центром O и радиусом $\sqrt{k}$) и последующей симметрии относительно точки O.

Инверсию с отрицательной степенью также можно определить геометрически аналогично первому определению инверсии с положительной степенью (симметрии относительно окружности). Основную роль здесь играет следующая теорема.

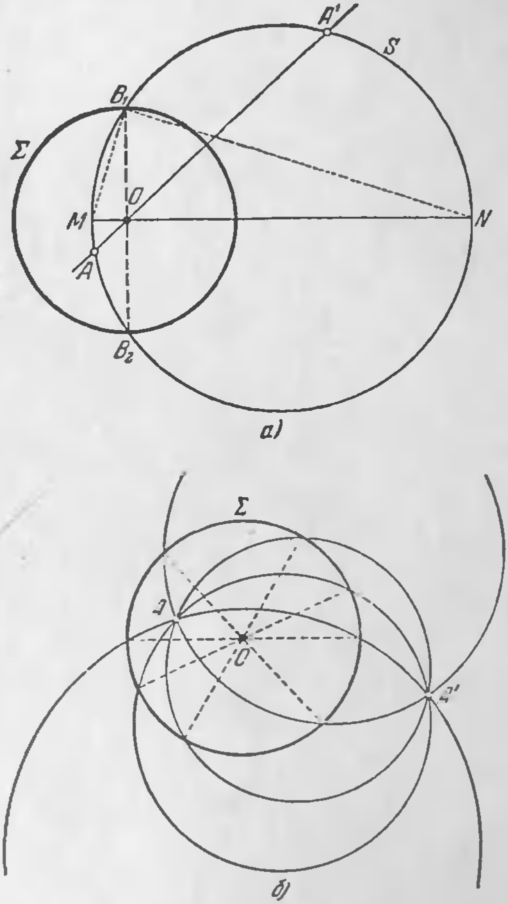
---

[1]) По существу это новое определение симметрии относительно окружности довольно близко к определению симметрии относительно прямой, принятому в § 1 гл. II первой части книги.

[2]) Исходя из этого определения, инверсию иногда называют также преобразованием обратных радиусов. С этим определением связано также название «инверсия» (от латинского слова inversio — обращение).

[3]) Сравните с определением центрально-подобного преобразования с отрицательным коэффициентом подобия (см. § 1 гл. I второй части книги).

Теорема 1′. *Все окружности, проходящие через данную точку A и пересекающие данную окружность Σ в диаметрально противоположных точках, проходят одновременно через некоторую точку A', отличную от A.*



Черт. 130.

Действительно, пусть B_1B_2 — концы диаметра окружности Σ, в которых её пересекает окружность S, проходящая через известную точку A (черт. 130, *a*). Проведём прямую через центр O окружности Σ и точку A и пусть A' — вторая точка пересечения OA с S, MN — диаметр S, проходящий через O. Так как центр S равноудалён от B_1 и B_2, а

O — середина отрезка B_1B_2, то $MN \perp B_1B_2$. Следовательно, OB_1 есть высота прямоугольного треугольника MB_1N и по известной теореме $OB_1^2 = MO \cdot ON$; с другой стороны, по свойству хорд окружности $MO \cdot ON = A'O \cdot OA$. Следовательно,

$$A'O \cdot OA = OB_1^2$$

и, значит,

$$A'O = \frac{R^2}{AO}, \tag{**}$$

где R — радиус окружности Σ. Таким образом, $A'O$ не зависит от выбора окружности S и, следовательно, все окружности, проходящие через A и пересекающие Σ в диаметрально противоположных точках, пересекают OA в одной и той же точке A' (черт. 130, *б*).

Из формулы (**) вытекает, что *точка A' получается из A инверсией с центром O и* (отрицательной!) *степенью $-R^2$, если каждая окружность, проходящая через A и пересекающая в диаметрально противоположных точках окружность Σ с центром O и радиусом R, проходит также и через точку A'.*

Перечислим теперь некоторые основные свойства инверсии.

А. *При инверсии с центром O и степенью k окружность Σ с центром O и радиусом $\sqrt{|k|}$* (окружность инверсии, если k положительно) *переходит в себя. Внутренние точки окружности Σ* (кроме её центра) *переходят во внешние точки, а внешние точки — во внутренние.*

Центр инверсии O является единственной точкой плоскости, которая не переходит при инверсии ни в какую точку плоскости (и соответственно этому в точку O не переходит никакая точка плоскости).

Свойство А инверсии сразу следует из основной формулы (*): если $OA = \sqrt{|k|}$ (точка A лежит на окружности инверсии Σ), то и $OA' = \left|\frac{k}{OA}\right| = \sqrt{|k|}$, т. е. точка A' тоже лежит на Σ; если $OA < \sqrt{|k|}$ (точка A расположена внутри Σ), то $OA' = \left|\frac{k}{OA}\right| > \sqrt{|k|}$, т. е. точка A' расположена вне Σ; если $OA > \sqrt{|k|}$, то $OA' < \sqrt{|k|}$.

Отметим ещё, что если степень инверсии положительна (симметрия относительно окружности Σ), то каждая точка окружности Σ переходит сама в себя (является неподвижной точкой инверсии); если степень инверсии отрицательна, то каждая точка окружности Σ переходит в диаметрально противоположную точку этой окружности (инверсия с отрицательной степенью вовсе не имеет неподвижных точек).

Б$_1$. *Прямая l, проходящая через центр инверсии O, переходит при инверсии сама в себя.*

Доказательство этого предложения сразу вытекает из того, что каждая точка A переходит при инверсии в точку A', лежащую на прямой OA.

Б$_2$. *Прямая l, не проходящая через центр инверсии O, переходит при инверсии в некоторую окружность S, проходящую через точку O.*

Обозначим буквой P основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую l, и пусть P' есть точка, в которую переходит точка P при инверсии (см. черт. 131, a, на котором изображён случай, когда степень инверсии положительна; доказательство почти не меняется и в том случае, когда она отрицательна). Согласно второму определению инверсии мы имеем:

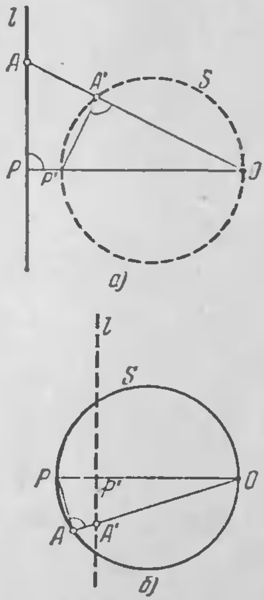
$$OP' = \frac{k}{OP},$$

где k — степень инверсии. Пусть теперь A — произвольная точка прямой l и A' — точка, в которую она переходит при инверсии. В таком случае

$$OP \cdot OP' = OA \cdot OA' = k,$$

откуда следует, что

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA'}{OP'}.$$

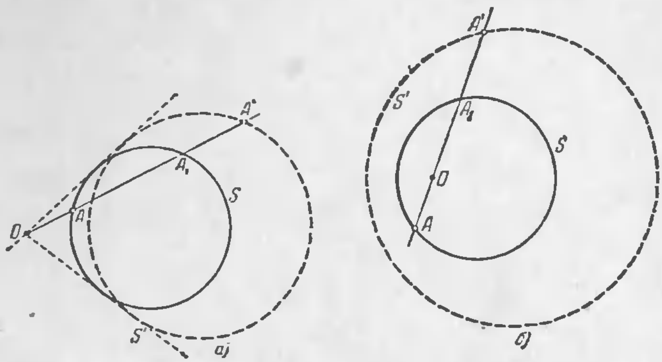


Черт. 131.

Из последнего соотношения вытекает, что треугольники OPA и $OA'P'$ подобны между собой (так как они имеют общий угол и равные отношения сторон, заключающих этот угол). Следовательно, $\angle OA'P' = \angle OPA = 90°$, т. е. точка A' лежит на окружности S, диаметром которой является отрезок OP'.

Б$_3$. *Окружность S, проходящая через центр O инверсии, переходит при инверсии в некоторую прямую l, не проходящую через точку O.*

Пусть P — второй конец диаметра S, проходящего через центр O и P' — точка, в которую переходит P при рассматриваемой инверсии; далее, пусть A — произвольная точка S и A' — точка, в которую переходит A (черт. 131, *б*). Так же как выше, показывается, что треугольники $OP'A'$ и OAP подобны (ибо $OP \cdot OP' = OA \cdot OA' = k$), откуда вытекает, что $\angle OP'A' = \angle OAP = 90°$ и, следовательно, точка A' лежит на прямой, проходящей через точку P' и перпендикулярной к OP.



Черт. 132.

Б$_4$. *Окружность S, не проходящая через центр O инверсии, переходит при инверсии в некоторую окружность S* (тоже не проходящую через O).

Пусть A — произвольная точка окружности S, A' — точка, в которую переходит точка A при инверсии, и A_1 — вторая точка пересечения прямой OA с окружностью S (черт. 132, *а* и *б*). В таком случае мы имеем:

$$OA' = \frac{k}{OA},$$

где k — степень инверсии. С другой стороны, в силу известного свойства окружности

$$OA \cdot OA_1 = k_1, \quad OA = \frac{k_1}{OA_1},$$

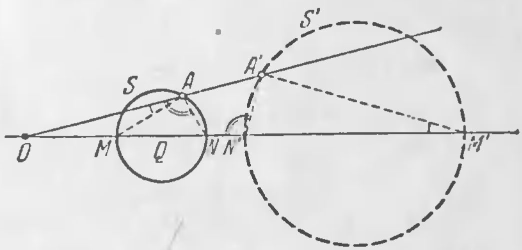
где k_1 не зависит от точки A (так, в случае, когда точка O расположена вне S, k_1 есть квадрат касательной, проведённой из точки O к окружности S).

Из сравнения двух последних формул следует, что

$$OA' = \frac{k}{k_1} \cdot OA_1,$$

т. е. что точка A' центрально-подобна точке A_1 с центром подобия O и коэффициентом подобия $\frac{k}{k_1}$, а следовательно, принадлежит окружности S', центрально-подобной окружности S с центром подобия O и коэффициентом подобия $\frac{k}{k_1}$ [1]). Это и доказывает наше утверждение.

Отметим, что центр окружности S не переходит при инверсии в центр окружности S'.



Черт. 133.

Можно также дать другое доказательство свойства Б$_4$ инверсии более близкое к доказательствам свойств Б$_2$ и Б$_3$.

Пусть Q — центр окружности S, M и N — точки пересечения окружности S с прямой OQ (O — центр инверсии), A — произвольная точка этой же окружности и M', N' и A' — точки, в которые переходят при инверсии точки M, N и A (черт. 133). В точности, как при доказательстве свойств Б$_2$ и Б$_3$, показываем, что $\angle OAM = \angle OM'A'$ и $\angle OAN = \angle ON'A'$. Но, очевидно, $\angle MAN = \angle OAN - \angle OAM$ и $\angle M'A'N' = \angle ON'A' - \angle OM'A'$. Таким образом, мы получаем, что

$$\angle M'A'N' = \angle MAN = 90^\circ$$

и, значит, точка A' лежит на окружности S' с диаметром $M'N'$.

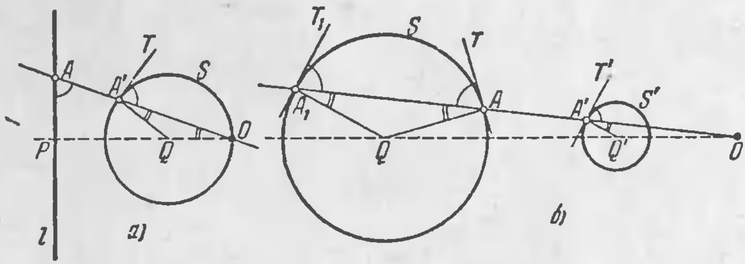
---

[1]) Нетрудно видеть, что если точка O лежит внутри окружности S или степень инверсии отрицательна (но оба эти обстоятельства не имеют места одновременно), то коэффициент подобия окружностей S и S' является отрицательным $\left(\text{равен } -\frac{k}{k_1}\right)$, т. е. точки A' и A_1 лежат по разные стороны от точки O.

Свойства $Б_1$ — $Б_4$ инверсии можно объединить в одно предложение.

Б. *Каждая окружность или прямая линия переходит при инверсии в окружность или прямую линию.*

Отметим ещё, что в силу свойства $Б_3$ *каждую окружность можно при помощи подходяще выбранной инверсии перевести в прямую линию; для этого достаточно принять за центр инверсии какую-либо точку этой окружности.*



Черт. 134.

Нетрудно видеть, что при помощи инверсии всегда можно перевести одну из двух данных окружностей в другую. Если данные окружности не равны, то это можно даже сделать двумя различными способами, принимая за центр инверсии соответственно внешний или внутренний центр подобия этих окружностей (см. доказательство свойства $Б_4$). Если окружности равны, то существует только одна инверсия, переводящая их друг в друга (две равные окружности имеют единственный центр подобия; см. § 1 гл. I части второй книги). Однако в этом случае эти две окружности можно перевести одну в другую при помощи симметрии относительно некоторой прямой — оси симметрии этих окружностей; таким образом, в рассматриваемом случае вторая инверсия заменяется симметрией относительно прямой, которую можно рассматривать как предельный случай инверсии (ср. выше стр. 173).

Аналогично этому существуют две инверсии, переводящие друг в друга данные окружность и прямую, не касающуюся этой окружности; центрами этих инверсий служат два конца диаметра окружности, перпендикулярного к прямой (см. доказательство свойств $Б_2$ и $Б_3$). Если окружность и прямая касаются, то существует только одна инверсия, переводящая их друг в друга.

Две различные прямые никогда не могут быть переведены одна в другую при помощи инверсии, но могут быть переведены одна в другую при помощи симметрии относительно прямой. Таких симметрий будет существовать две, если эти прямые не параллельны (осями этих симметрий являются две биссектрисы углов, образованных прямыми), и только одна, если прямые параллельны.

В. *Угол между двумя окружностями (или окружностью и прямой, или двумя прямыми) сохраняется при инверсии.*

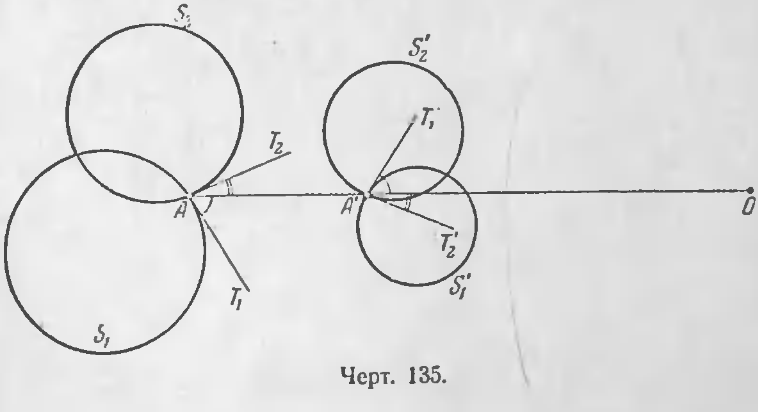
Предположим сначала, что одна из рассматриваемых линий есть прямая, проходящая через центр инверсии. В этом случае для доказательства достаточно рассмотреть черт. 134, *а*, где точка Q есть центр окружности S, в которую переходит прямая l, $A'T$ — касательная к окружности S в точке A' и

$$\angle TA'O = 90^\circ - \angle OA'Q = 90^\circ - \angle A'OQ = \angle PAO$$

(ср. доказательство свойств $Б_2$ и $Б_3$ инверсии), или черт. 134, *б*, где точки Q и Q' — центры окружностей S и S', AT и $A'T'$ — касательные к этим окружностям соответственно в точках A и A' и

$$\angle Q'A'O = \angle QA_1O = \angle QAA_1,$$
$$\angle TAA_1 = 90^\circ - \angle QAA_1 = 90^\circ - \angle QA_1A =$$
$$= 90^\circ - \angle Q'A'O = \angle T'A'O$$

(см. доказательство свойства $Б_4$ инверсии).



Черт. 135.

Пусть теперь S_1 и S_2, например, две окружности, пересекающиеся в точке A и переходящие при инверсии в окружности S_1' и S_2', пересекающиеся в точке A', AT_1 и AT_2, соответственно $A'T_1'$ и $A'T_2'$,— касательные к этим окружностям в точках A и A' (черт. 135). В таком случае из доказанного выше вытекает, что

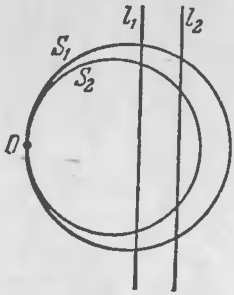
$$\angle T_1'A'O = \angle T_1AO, \quad \angle T_2'A'O = \angle T_2AO,$$

откуда следует

$$\angle T_1'A'T_2' = \angle T_1AT_2,$$

что и требовалось доказать.

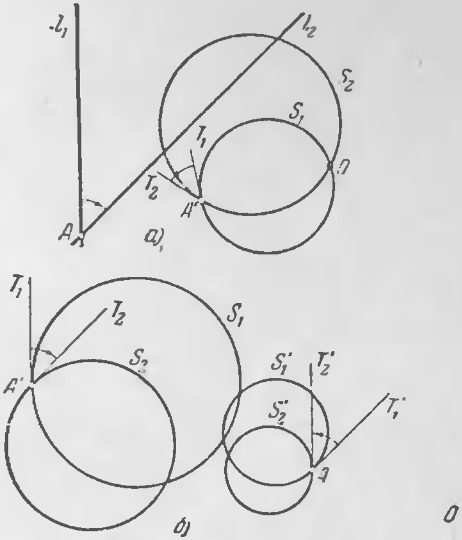
Касающиеся окружности (или окружность и прямая) — это такие окружности (окружность и прямая), угол между которыми равен нулю. Поэтому из свойства В следует, что *касающиеся окружности или касающиеся окружность и прямая переходят при инверсии в касающиеся окружности или касающиеся окружность и прямую.* Исключение могут представлять только окружности (или окружность и прямая), касающиеся в центре инверсии O; такие окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в параллельные прямые, так как точка O не переходит при инверсии ни в какую точку плоскости (черт. 136).



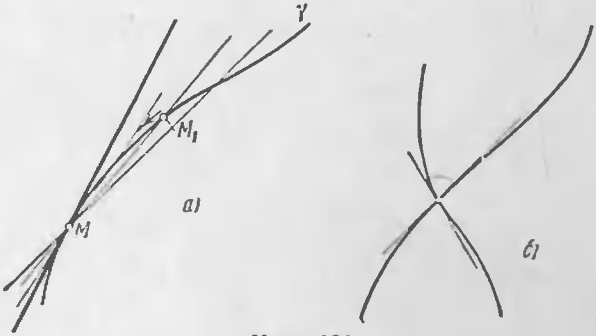
Черт. 136.

Заметим, что *направление угла между окружностями* (или двумя прямыми, или прямой и окружностью) при инверсии (как и при симметрии относительно прямой) *меняется на противоположное*: если угол между двумя окружностями S_1 и S_2 равен α, причём касательная AT_1 к окружности S_1 в точке A пересечения S_1 и S_2 может быть совмещена с касательной AT_2 к окружности S_2 путём поворота на угол α в направлении против часовой стрелки, и S_1 и S_2 переходят соответственно в окружности S_1' и S_2', то касательная $A'T_1'$ к окружности S_1' в точке A', в которую переходит точка A, совмещается с касательной $A'T_2'$ к окружности S_2' при повороте на угол α в направлении по часовой стрелке (черт. 137, *а*, *б*).

Касательной к произвольной кривой γ в некоторой её точке M называется предельное положение, которое занимает секущая MM_1 кривой, когда точка M_1 стремится к точке M (черт. 138, *а*). Углом между двумя произвольными пересекающимися кривыми называется угол между касательными к этим кривым в точке пересечения (черт. 138, *б*; разумеется, если две кривые пересекаются в нескольких точках, они не обязаны образовывать между собой в этих точках равные углы). Нетрудно показать, что *при инверсии произвольные пересекающиеся кривые плоскости переходят в новые кривые, которые образуют* *между собой в точке пересечения тот же угол, что и первоначальные* (другими словами: *при инверсии сохраняются углы между*



Черт. 137.

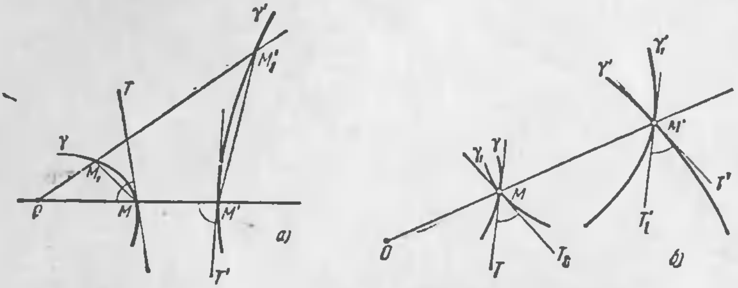


Черт. 138.

кривыми)[1]. Действительно, пусть γ есть некоторая кривая, переходящая при инверсии с центром в точке O и степенью k в новую кривую

[1]) Всякое преобразование, при котором сохраняются углы между кривыми, называется к о н ф о р м н ы м. Таким образом, *инверсия есть конформное преобразование.*

γ', M и M_1 — две близкие точки кривой γ, M' и M_1' — отвечающие им точки кривой γ' (черт. 139, *а*). Треугольники OMM_1 и $OM_1'M'$ будут подобны, ибо $\angle MOM_1 = \angle M_1'OM'$ и $\dfrac{OM}{OM_1} = \dfrac{OM_1'}{OM'}$ (последнее равенство следует из того, что $OM \cdot OM' = OM_1 \cdot OM_1' = k$); поэтому $\angle M_1MO = \angle M'M_1'O$. Пусть точка M_1 стремится к точке M. При этом угол OMM_1 стремится к углу OMT, образованному касательной MT к кривой γ в точке M с прямой OM, угол $OM_1'M'$ стремится к углу $OM'T'$, образованному касательной $M'T'$ к кривой γ' в точке M' с прямой OM'.



Черт. 139.

Из равенства углов, которые образуют с прямой OMM' касательные MT и $M'T'$ (черт. 139, *а*) к кривым γ и γ', в точности, как при доказательстве свойства В, выводится, что угол между двумя кривыми сохраняется при инверсии (черт. 139, *б*).

Отметим, что свойства Б и В инверсии (симметрии относительно окружности) остаются в силе также и для симметрии относительно прямой. Свойство А симметрии относительно окружности аналогично следующему свойству симметрии относительно прямой: *при симметрии относительно прямой l эта прямая переходит сама в себя, а две полуплоскости, на которые разбивает прямая l плоскость, меняются местами.*

Решения всех приведённых ниже задач опираются на свойства А — В инверсии. Относительно некоторых уточнений, которых требуют отдельные задачи, см. ниже стр. 201 и след.

212. Пусть окружность S касается одновременно двух окружностей S_1 и S_2. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через центр подобия окружностей S_1 и S_2.

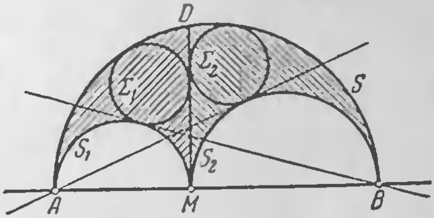
В другой связи эта задача приведена во второй части книги (см. задачу 55 из § 1 гл. I).

213. Дана окружность S и две точки A и B на ней. Проводятся всевозможные пары окружностей S_1, S_2, касающихся S в точках A и B и

а) касающихся между собой;

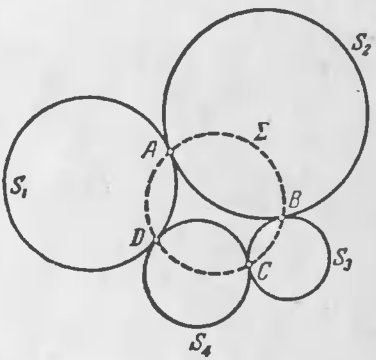
б) перпендикулярных друг к другу.

Найдите геометрическое место точек касания (соответственно точек пересечения) S_1 и S_2.



Черт. 140.

214. Пусть A, B, C и D — четыре произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой или на одной окружности. Докажите, что угол между окружностями, описанными вокруг треугольников ABC и ABD, равен углу между окружностями, описанными вокруг треугольников CDA и CDB.



Черт. 141.

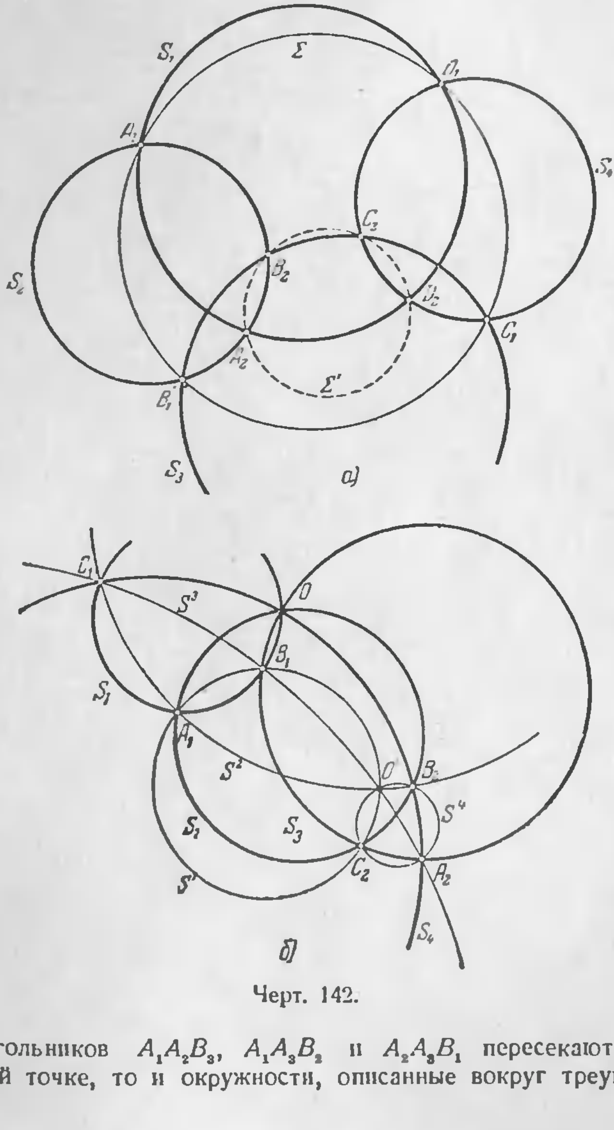
215. На отрезках AM, MB и AB одной прямой как на диаметрах построены полуокружности S_1, S_2 и S (черт. 140). В точке M к прямой AB восставлен перпендикуляр MD и в криволинейные треугольники ADM и BDM вписаны окружности Σ_1 и Σ_2. Докажите, что:

а) окружности Σ_1 и Σ_2 равны;

б) общая касательная к Σ_1 и S_1 в их точке касания проходит через B; общая касательная к Σ_2 и S_2 в их точке касания проходит через A.

216. Докажите, что если каждая из четырёх окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 касается двух соседних («соседними» с S_1 считаются окружности S_2 и S_4; черт. 141), то четыре точки касания лежат на одной окружности Σ.

217. а) На плоскости даны шесть точек A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3. Докажите, что если окружности, описанные вокруг



Черт. 142.

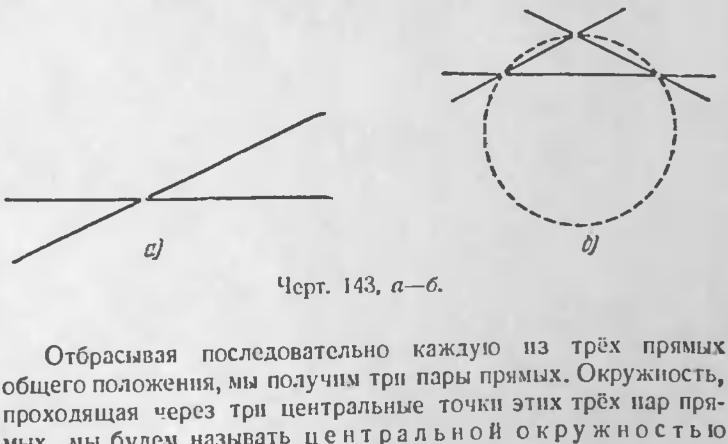
треугольников $A_1A_2B_3$, $A_1A_3B_2$ и $A_2A_3B_1$ пересекаются в одной точке, то и окружности, описанные вокруг треугольников $B_1B_2A_3$, $B_1B_3A_2$ и $B_2B_3A_1$, пересекаются в одной точке (см. черт. 159, *а* на стр. 202).

б) Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4; пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1, A_2, S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, наконец, S_4 и S_1 — в D_1, D_2 (черт. 142, *а*). Докажите, что если A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности (или прямой) Σ, то и A_2, B_2, C_2 и D_2 тоже лежат на одной окружности (или прямой) Σ'.

в) На плоскости даны шесть точек A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Докажите, что если окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, описанные вокруг треугольников $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ и $A_2B_2C_1$, пересекаются в одной точке O, то и окружности S^1, S^2, S^3 и S^4, описанные вокруг треугольников $A_1B_1C_2$, $A_1B_2C_1$, $A_2B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, пересекаются в одной точке O' (черт. 142, *б*).

218. а) Будем называть n прямых плоскости **прямыми общего положения**, если никакие две из этих прямых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке.

Точку пересечения двух прямых общего положения (двух пересекающихся прямых) мы будем называть **центральной точкой двух прямых** (черт. 143, *а*).

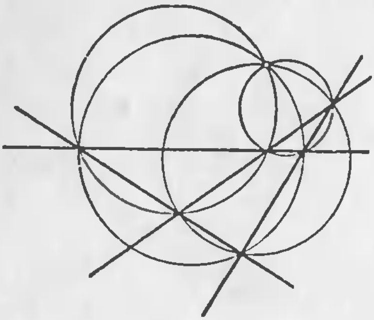


Черт. 143, *а—б*.

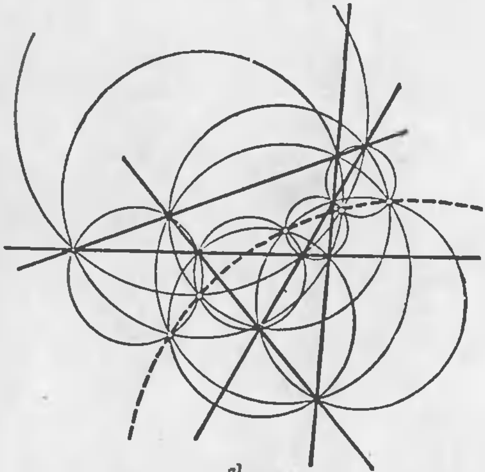
Отбрасывая последовательно каждую из трёх прямых общего положения, мы получим три пары прямых. Окружность, проходящая через три центральные точки этих трёх пар прямых, мы будем называть **центральной окружностью трёх прямых**. [Очевидно, что центральная окружность трёх прямых есть просто окружность, описанная вокруг треугольника, образованного этими прямыми (черт. 143, *б*).]

Отбрасывая последовательно каждую из четырёх прямых общего положения, мы получим четыре тройки прямых.

Докажите, что четыре центральные окружности этих троек прямых пересекаются в одной точке (черт. 143, *в*) [1]). Эту точку мы будем называть **центральной точкой четырёх прямых**.



в)



г)

Черт. 143, *в—г*.

Отбрасывая последовательно каждую из пяти прямых общего положения, мы получим пять четвёрок прямых. Докажите, что пять центральных точек этих четвёрок прямых лежат на одной окружности (черт. 143, *г*). Эту

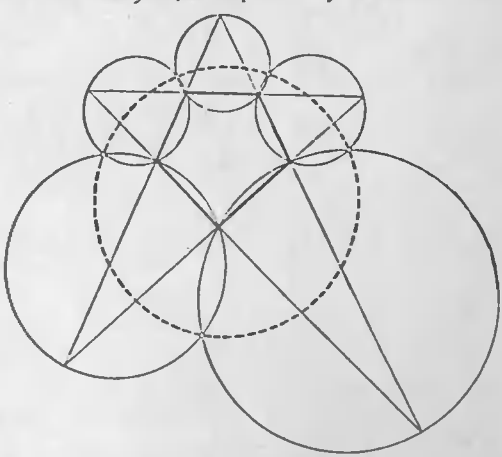
[1]) См. задачу 64 из § 2 гл. I второй части книги.

окружность мы будем называть центральной окружностью пяти прямых[1]).

* Вообще, если продолжить этот ряд определений, то каждому нечётному числу n прямых общего положения будут отвечать n точек — центральных точек всевозможных групп из $n-1$ прямых, получаемых из наших n прямых при отбрасывании одной из них. Докажите, что эти n точек всегда будут лежать на одной окружности — центральной окружности n прямых. Каждому чётному числу n прямых общего положения будут отвечать n окружностей — центральных окружностей всех групп из $n-1$ прямых, которые можно составить из этих n прямых. Докажите, что эти n окружностей всегда будут пересекаться в одной точке — центральной точке n прямых.

б) Окружность, проходящую через две точки, выбранные на двух пересекающихся прямых, и через точку пере-

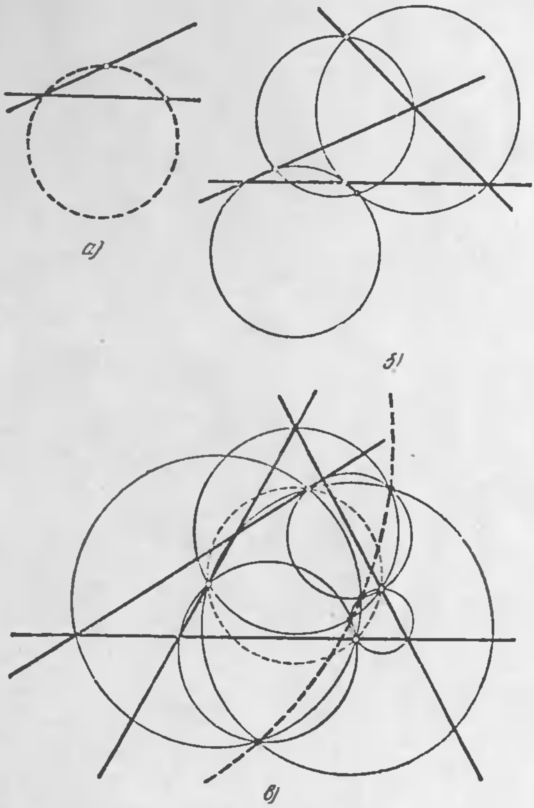
[1]) Нетрудно видеть, что это предложение равносильно следующему: *если продолжить следующие через одну стороны произвольного*



Черт. 144.

(не обязательно выпуклого) *пятиугольника до пересечения и описать окружности вокруг пяти образовавшихся треугольников, то пять точек пересечения соседних окружностей лежат на одной окружности* — центральной окружности сторон пятиугольника (черт. 144).

сечения прямых (черт. 145, *а*), мы будем называть **направляющей окружностью двух прямых** с заданными на них точками.



Черт. 145.

Рассмотрим теперь три прямые общего положения, на каждой из которых задано по точке. Отбрасывая последовательно по одной из этих прямых, мы получим три пары прямых; докажите, что отвечающие им три направляющие окружности пересекаются в одной точке — **направляющей точке трёх прямых** (черт. 145, *б*)[1]).

[1]) См. задачу 82а) из § 1 гл. II второй части книги.

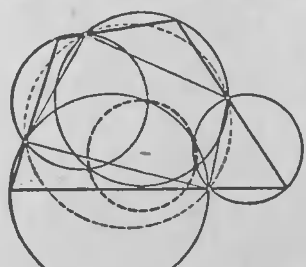
Далее рассмотрим четыре прямые общего положения, на каждой из которых задано по точке; дополнительно потребуем, чтобы все эти точки лежали на одной окружности. Отбрасывая последовательно по одной прямой, мы получим четыре тройки прямых и, следовательно, четыре направляющие точки этих троек. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности — *направляющей окружности четырёх прямых* (черт. 145, *в*)[1]).

Вообще, если продолжить этот ряд определений, то любому *нечётному* числу n прямых общего положения с заданными на них точками, лежащими на одной окружности, будут отвечать n окружностей — направляющих окружностей всевозможных групп из $n-1$ прямых с заданными на них точками, получаемых отбрасыванием какой-то одной из n прямых; докажите, что эти n окружностей будут пересекаться в одной точке — *направляющей точке n прямых*. *Чётному* числу n прямых общего положения с заданными на них точками, лежащими на одной окружности, отвечают n точек — направляющих точек $n-1$ из наших прямых; докажите, что эти n точек лежат на одной окружности — *направляющей окружности n прямых*.

Заметим, что предположение в условии задач 218а), б) о том, что заданные n прямых — прямые общего положения, не является существенным; см. по этому поводу ниже, стр. 203—204.

219. а) Докажите следующее соотношение, связывающее радиусы R и r описанной и вписанной окружностей произвольного треугольника и расстояние d между центрами этих окружностей:

$$\frac{1}{R+d}+\frac{1}{R-d}=\frac{1}{r}. \qquad (*)$$

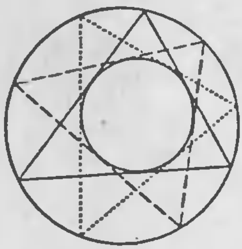


Черт. 146.

[1]) Нетрудно видеть, что это предложение равносильно следующему: *если взять на сторонах произвольного четырёхугольника четыре точки, лежащие на одной окружности, соединить их последовательно и описать окружности вокруг четырёх образовавшихся треугольников, то четыре точки пересечения соседних окружностей лежат на одной окружности* — направляющей окружности сторон четырёхугольника (черт. 146).

Обратно, если радиусы R и r двух окружностей и расстояние d между их центрами связаны соотношением (*), то эти окружности можно рассматривать как описанную и вписанную окружности некоторого треугольника (и даже бесконечного числа их; за вершину такого треугольника можно принять произвольную точку большей окружности; черт. 147).

б) Докажите следующее соотношение, связывающее радиусы R и r_1 описанной и вневписанной окружностей произвольного треугольника и расстояние d_1 между центрами этих окружностей:



Черт. 147.

$$\frac{1}{d_1-R}-\frac{1}{d_1+R}=\frac{1}{r_1}.$$

Примечание. Формулы задач 219а) и б) можно также записать в следующем простом виде:

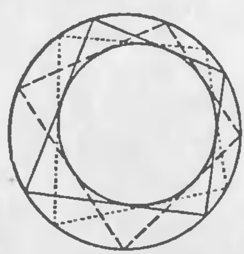
$$d^2=R^2-2Rr \text{ и } d_1^2=R^2+2Rr_1.$$

220. а) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в некоторую окружность и одновременно описан вокруг другой окружности. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон четырёхугольника с вписанной окружностью, взаимно перпендикулярны.

б) Докажите следующее соотношение, связывающее радиусы R и r описанной и вписанной окружностей четырёхугольника $ABCD$ и расстояние d между центрами этих окружностей:

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}. \qquad (**)$$

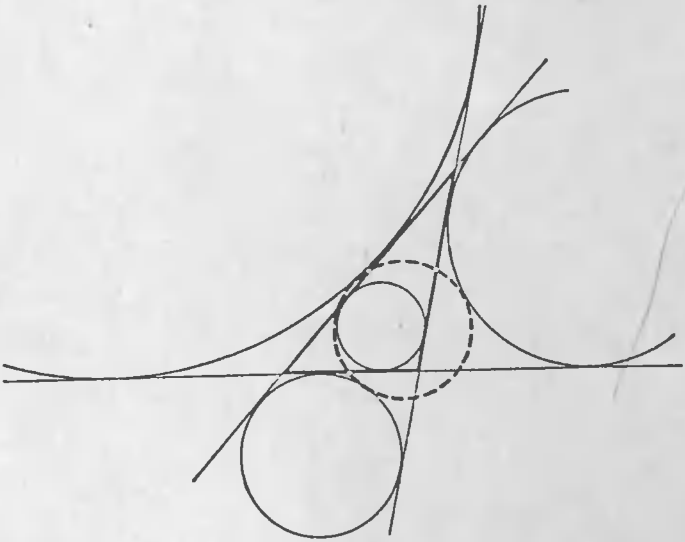
Обратно, если радиусы R и r двух окружностей и расстояние d между их центрами связаны соотношением (**), то эти окружности можно рассматривать как описанную и вписанную окружности некоторого четырёхугольника (и даже бесконечного числа их; за вершину такого четырёхугольника можно принять произвольную точку большей окружности; черт. 148).



Черт. 148.

Из теорем задач 219а) и 220б) следует, что либо вовсе не существует n-угольников (где $n=3$ или 4), вписанных в одну из двух данных окружностей и описанного вокруг второй окружности, либо их существует бесконечно много. Можно показать, что это предложение сохраняет силу и для любого $n>4$ (см. ниже задачу 252 из § 3, стр. 232).

221. Докажите, что радиус r вписанной окружности треугольника не может превосходить половины радиуса R описанной окружности; при этом $r=\frac{1}{2}R$ в том и только в том случае, если треугольник равносторонний.



Черт. 149.

222. Докажите, что окружность девяти точек треугольника (см. задачу 51а) из § 1 гл. I второй части книги) касается вписанной и трёх вневписанных окружностей (черт. 149).

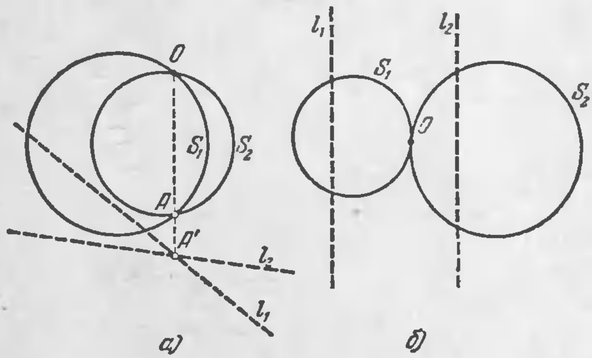
См. также ниже задачу 274 из § 5 (стр. 267).

223. Используя свойства инверсии, выведите теорему Паскаля (см. выше задачу 145 из § 3 гл. I, стр. 80) из теоремы о трёх центрах подобия (см. § 1 гл. I второй части книги).

Докажем теперь теорему, которая неоднократно будет применяться при решении последующих задач этой главы.

Теорема 2. *Каждые две окружности или прямую и окружность можно при помощи инверсии перевести в две прямые (пересекающиеся или параллельные) или в две концентрические окружности.*

Доказательство. Данную окружность S всегда можно перевести при помощи инверсии в прямую линию; для этого достаточно принять за центр инверсии какую-нибудь точку этой окружности (см. выше стр. 180). Прямая при инверсии с центром на этой прямой переходит в себя. Поэтому две окружности или окружность и прямую, имеющие общую точку,

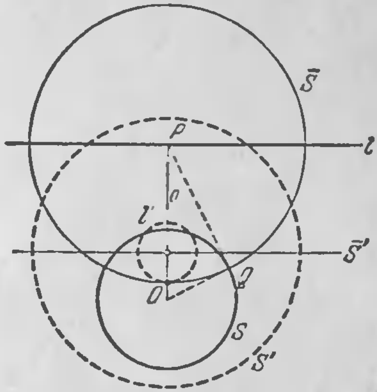


Черт. 150.

всегда можно перевести в две прямые; для этого достаточно принять за центр инверсии эту общую точку. При этом, если окружности (окружность и прямая) имели две общие точки (т. е. пересекались), то полученные прямые будут пересекаться в точке, в которую переходит вторая общая точка (черт. 150, *а*); если две окружности (окружность и прямая) касались, то полученные прямые будут параллельны (черт. 150, *б*).

Нам остаётся только доказать, что *две непересекающиеся окружности или непересекающиеся прямую и окружность можно перевести инверсией в две концентрические окружности*. К доказательству этого предложения мы сейчас и перейдём.

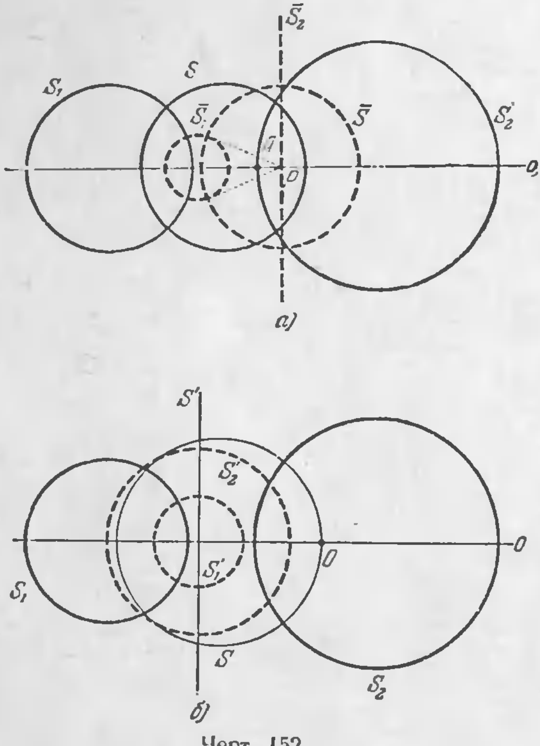
Пусть сначала мы имеем непересекающиеся окружность S и прямую l (черт. 151). Опустим из центра окружности S перпендикуляр o на прямую l; пусть P — основание этого перпендикуляра. Проведём окружность $\overline{S}$ с центром в точке P и радиусом, равным длине касательной PQ, проведённой из P к окружности S; окружность $\overline{S}$, очевидно, будет перпендикулярна как к прямой l, так и к окружности S. Произведём инверсию с центром в одной из двух точек пересечения прямой o и окружности $\overline{S}$, обозначим эту точку через O. При этом прямая o перейдёт сама в себя (см. свойство $Б_1$ инверсии); окружность $\overline{S}$ перейдёт в некоторую прямую $\overline{S}'$ (свойство $Б_3$). Прямая l и окружность S перейдут в две окружности l' и S' (свойства $Б_2$ и $Б_4$); при этом в силу свойства В инверсии обе эти окружности будут перпендикулярны как к o, так и к $\overline{S}'$. Но если окружность перпендикулярна к некоторой прямой, то это значит, что центр этой окружности лежит на прямой (см. выше, стр. 171). Следовательно, центры обеих окружностей l' и S' принадлежат как прямой o, так и прямой $\overline{S}'$, т. е. совпадают с точкой пересечения этих прямых. Итак, мы видим, что наша инверсия действительно переводит окружность S и прямую l в две концентрические окружности.



Черт. 151.

Аналогично доказывается, что две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 можно при помощи инверсии перевести в две концентрические окружности. Покажем прежде всего, что существует окружность S с центром на линии центров o наших окружностей, перпендикулярная как к S_1, так и к S_2. Для этого произведём инверсию с центром в точке A пересечения S_2 и o. При этом (непересекающиеся) окружности S_1 и S_2 перейдут в (непересекающиеся) окружность $\overline{S}_1$ и прямую $\overline{S}_2$ (черт. 152, a). Пусть $\overline{S}$ есть окружность с центром в точке P

пересечения o и $\overline{S}_2$ и радиусом, равным длине касательной, проведённой из P к $\overline{S}_1$; S — окружность, которая переходит в $\overline{S}$ при рассматриваемой инверсии. Окружность $\overline{S}$ перпендикулярна к $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ (см. выше); следовательно, окружность S перпендикулярна к S_1 и S_2 (в силу свойства В инверсии).



Черт. 152.

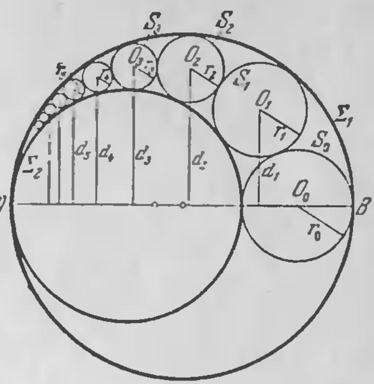
Теперь нам остаётся только произвести инверсию с центром в точке O пересечения окружности S и прямой o. В точности, как выше, показывается, что эта инверсия переводит окружности S_1 и S_2 в концентрические окружности S_1' и S_2' (с общим центром в точке пересечения прямой o и прямой S', в которую переходит при инверсии окружность S; черт. 152, $б$).

224. Пусть Σ_1 и Σ_2 — две окружности, касающиеся внутренним образом. В образованную ими фигуру (черт. 153) вписаны последовательно окружности $S_0, S_1, S_2, \ldots$; при этом центр S_0 лежит на линии центров AB окружностей Σ_1 и Σ_2, а S_n касается S_{n-1} ($n=1, 2, 3, \ldots$). Обозначим радиусы окружностей $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ через $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$, а расстояния их центров от прямой AB — через $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots$

а) Докажите, что

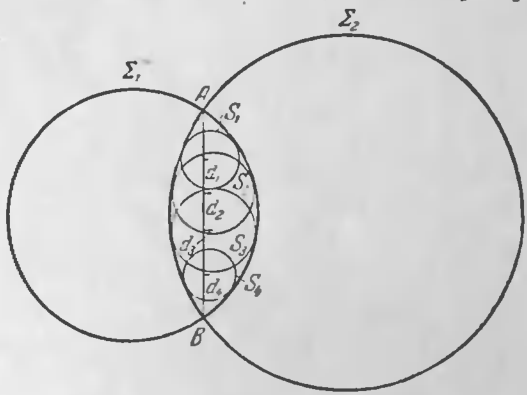
$$d_n = 2nr_n.$$

б) Выразите радиус r_n окружности S_n через радиусы R_1 и R_2 окружностей Σ_1 и Σ_2 и номер n.



Черт. 153.

225. Пусть Σ_1 и Σ_2 — две пересекающиеся окружности, $S_1, S_2, S_3, \ldots$ — какие-то окружности, вписанные в образованную ими луночку (черт. 154). Обозначим радиусы окружностей $S_1, S_2, S_3, \ldots$



Черт. 154.

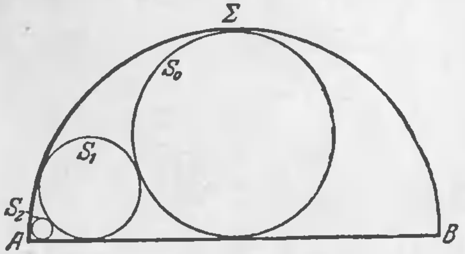
через $r_1, r_2, r_3, \ldots$, а расстояния их центров от общей хорды AB окружностей Σ_1 и Σ_2 — через $d_1, d_2, d_3, \ldots$

Докажите, что

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\frac{r_3}{d_3}=\ldots=\sigma.$$

Какой геометрический смысл имеет величина σ?

226. Пусть S_0, S_1, S_2, S_3, ... — окружности, касающиеся изнутри полуокружности Σ и её диаметра AB; S_0 проходит через центр Σ, а S_n касается S_{n-1} ($n=1, 2, 3, \ldots$)



Черт. 155.

(черт. 155). Обозначим радиусы окружностей Σ, S_0, S_1, S_2, S_3, ... через R, r_0, r_1, r_2, r_3, ..., а отношения $\frac{r_0}{R}$, $\frac{r_1}{R}$, $\frac{r_2}{R}$, ... через $\frac{1}{t_0}$, $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$, ...

а) Выразите радиус r_n окружности S_n через R и номер n.

б) Докажите, что

$$t_0=2,\quad t_1=4,\quad t_2=18,\quad t_3=100,\quad t_4=578,\quad \ldots$$

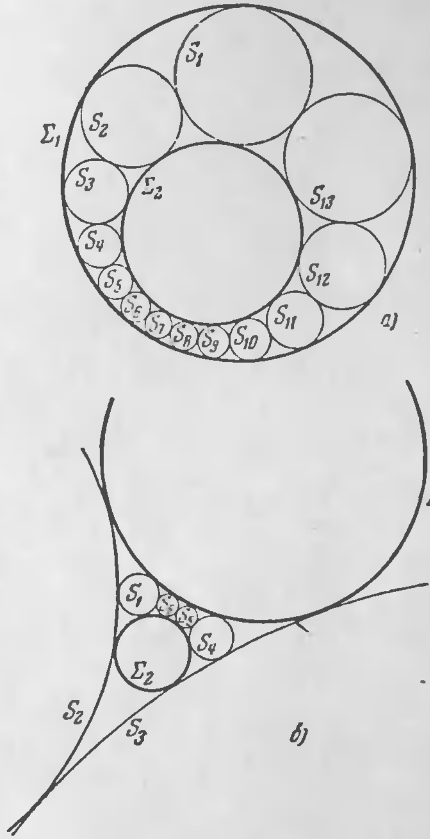
и вообще t_n ($n \geqslant 2$) есть целое число, которое выражается через числа t_{n-1} и t_{n-2} при помощи следующей простой формулы:

$$t_n=6t_{n-1}-t_{n-2}-4.$$

227. Цепью называется совокупность конечного числа окружностей S_1, S_2, ..., S_n, каждая из которых касается двух фиксированных непересекающихся окружностей Σ_1 и Σ_2 (называемых основанием цепи) и двух других окружностей цепи (см. черт. 156, *а* и *б*). Очевидно, что если окружности Σ_1 и Σ_2 расположены одна внутри другой, то окружности цепи касаются этих окружностей различным образом (т. е.

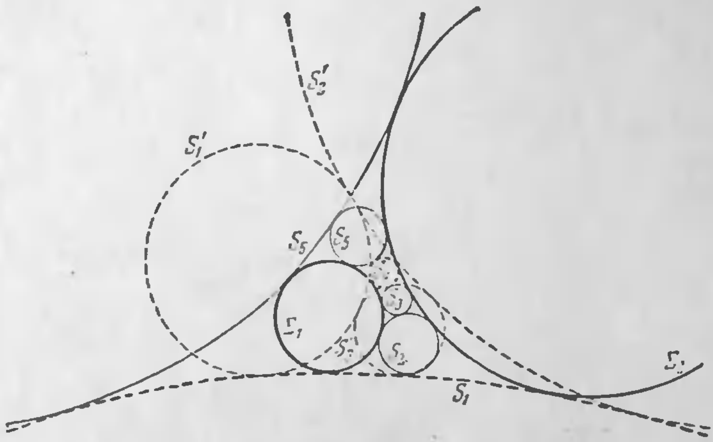
одной внешне, а второй — внутренне; черт. 156, *а*); если окружности Σ_1 и Σ_2 расположены одна вне другой, то окружности цепи касаются обеих окружностей одинаковым образом (обеих внешне или обеих внутренне; черт. 156, *б*). Докажите, что:

а) Если данная пара окружностей Σ_1, Σ_2 является основанием некоторой цепи, то она является основанием бесконечного числа цепей, состоящих из одного и того же числа окружностей. [Точнее: каждая окружность, касающаяся окружностей Σ_1 и Σ_2 (различным образом, если эти две окружности заключены одна внутри другой, и одинаковым образом, если они расположены одна вне другой), может быть включена в какую-нибудь цепь с основанием Σ_1, Σ_2.]



Черт. 156.

б) Для того чтобы данная пара непересекающихся окружностей Σ_1, Σ_2 являлась основанием какой-либо цепи (а следовательно, и бесконечного числа цепей; см. задачу а)), необходимо и достаточно, чтобы угол α, образованный окружностями S^1 и S^2, касающимися окружностей Σ_1 и Σ_2 в точках их пересечения с линией центров, был соизмерим с 360°; при этом S^1 и S^2 должны касаться Σ_1 и Σ_2 одинаковым образом, если Σ_1 и Σ_2 расположены одна внутри другой, и в) Пусть цепь с основанием Σ_1, Σ_2 содержит чётное число окружностей S_1, S_2, ..., S_{2n}. В таком случае «противоположные» окружности этой цепи S_1, S_{n+1} тоже могут быть приняты за основание некоторой цепи (черт. 158). При этом,

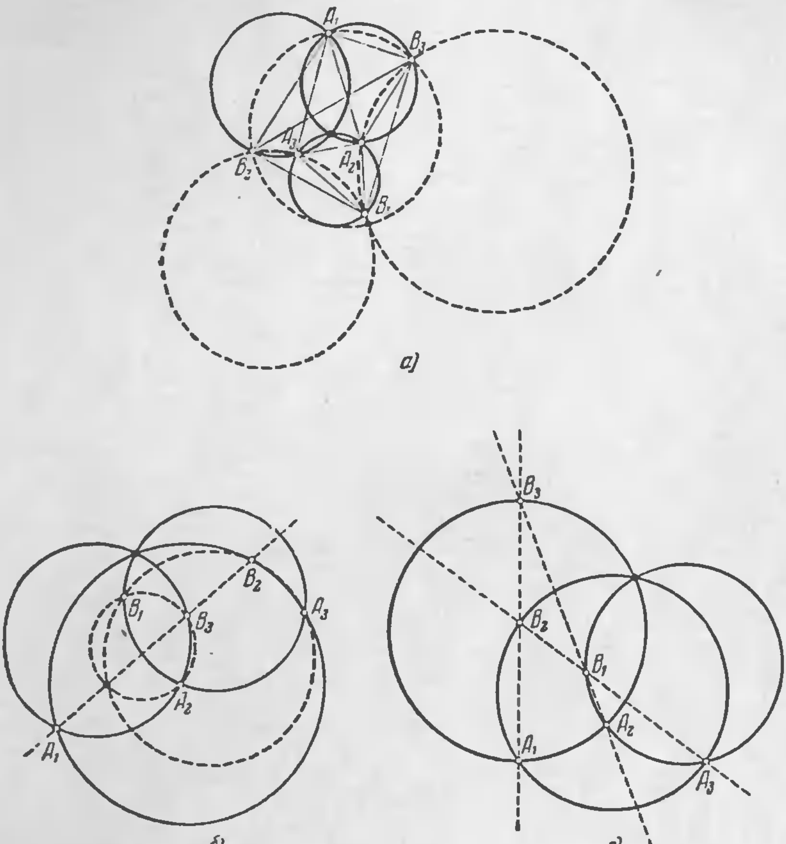


Черт. 158.

если характеристика цепи с основанием Σ_1, Σ_2 равна $\frac{m}{n}$ (см. задачу б)), а характеристика цепи с основанием S_1, S_{n+1} равна $\frac{m'}{n'}$, то

$$\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}=\frac{1}{2}.$$

В заключение этого параграфа отметим, что наличие на плоскости одной особой («выделенной») точки (центра инверсии), которая не переходит при инверсии ни в какую точку, создаёт необходимость некоторых оговорок, которые опускались в предыдущем. Так, например, условие задачи 217а) является не совсем точным: из того, что окружности, описанные около треугольников $A_1A_2B_3$, $A_1A_3B_2$ и $A_2A_3B_1$, пересекаются в одной точке, ещё не следует, что с у щ е с т в у ю т окружности, описанные вокруг треугольников $B_1B_2A_3$, $B_1B_3A_2$, $B_2B_3A_1$,— возможно, что какие-нибудь три точки B_1, B_2, A_3, или B_1, B_3, A_2, или B_2, B_3, A_1 (или даже каждая из этих трёх троек точек), лежат на одной прямой. Точная формулировка задачи имеет следующий вид: *если окружности, описанные около треугольников* $A_1A_2B_3$, $A_1A_3B_2$ *и* $A_2A_3B_1$,



Черт. 159.

пересекаются в одной точке, то или окружности, описанные вокруг треугольников $B_1B_2A_3$, $B_1B_3A_2$ *и* $B_2B_3A_1$, *пересекаются в одной точке* (черт. 159, *а*) — *при этом одна или две из этих окружностей могут быть «бесконечно большого радиуса», т. е. прямыми* (черт. 159, *б*), — *или каждая* *из троек точек* B_1, B_2 *и* A_3; B_1, B_3 *и* A_2; B_2, B_3 *и* A_1, *лежит на одной прямой* (черт. 159, *в*). Аналогичные оговорки должны быть сделаны и в условиях некоторых других из приведённых выше задач.

Необходимость этих оговорок может быть устранена аналогично тому, как мы это делали в случае проективных преобразований (см. выше стр. 51 и след.), а именно введением одной фиктивной «бесконечно удалённой» точки, которая переходит при симметрии относительно окружности Σ в центр O окружности и в которую в свою очередь переходит точка O [1]). [При этом при подходящих соглашениях можно распространить и нижеследующее свойство Г инверсии (см. § 4, стр. 236) на тот случай, когда одна из исходных или преобразованных точек является «бесконечно удалённой»,— сравните выше, стр. 55—56.] Следует также иметь в виду, что в вопросах, связанных с инверсией, всегда надо подразумевать под словом «окружность» обычную окружность или прямую (которую можно рассматривать как «окружность бесконечно большого радиуса» или, точнее, как «окружность, проходящую через бесконечно удалённую точку»).

Так, в условии той же задачи 217а) можно считать, что одна или две, или даже все три тройки точек A_1, A_2, B_3; A_1, A_3, B_2; A_2, A_3, B_1 лежат на одной прямой; при этом в последнем случае не надо требовать, чтобы прямые $A_1A_2B_3$, $A_1A_3B_2$ и $A_2A_3B_1$ пересекались в одной точке (три прямые всегда пересекаются в одной «бесконечно удалённой» точке).

При введении этих соглашений отпадает также необходимость каких бы то ни было оговорок относительно расположения прямых в условиях задачи 218а) и б); в условии задачи 218б), можно, кроме того, считать, что выбранные из прямых точки лежат на одной окружности или одной прямой. Так, в случае, если три прямые l_1, l_2, l_3 пересекаются в одной точке A, то центральной окружностью этих прямых следует считать точку A («окружность нулевого радиуса»); если из трёх прямых l_1, l_2 и l_3 две прямые параллельны, то центральной окружностью этих трёх прямых надо считать третью прямую («окруж-

---

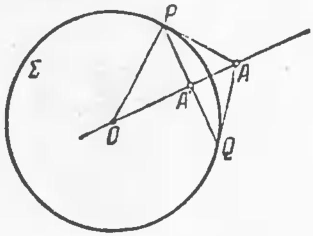
[1]) Название «бесконечно удалённая» точка здесь может быть объяснено аналогично тому, как это делалось в гл. II: оно связано с тем, что если точка M неограниченно приближается к центру O окружности Σ, то точка M', симметричная точке M относительно Σ, неограниченно удаляется от O.

Плоскость, дополненная таким образом одной фиктивной «бесконечно удалённой» точкой, называется конформной или аналагматической плоскостью (ср. с определением проективной плоскости на стр. 56).

ность бесконечно большого радиуса»); если три прямые l_1, l_2, l_3 все параллельны, то за центральную окружность этих прямых следует принять бесконечно удалённую точку плоскости. В таком случае теорема задачи 218а) сохраняет силу независимо от того, являются ли рассматриваемые n прямых прямыми общего положения или нет; при этом центральная точка $n=2k$ прямых может быть как конечной, так и бесконечно удалённой; центральная окружность $n=2k+1$ прямых может быть как обычной окружностью, так и точкой («окружностью нулевого радиуса»; в частности, центральной окружностью может явиться и «бесконечно удалённая точка» плоскости) или прямой («окружность бесконечно большого радиуса»).

§ 2. Применение инверсии к решению задач на построение. Построения с помощью одного циркуля

В этом параграфе мы рассмотрим ряд задач на построение, при решении которых удобно пользоваться инверсией. При этом мы будем опираться на то, что чертёж, получаемый из заданного чертежа при помощи инверсии с известными центром O и степенью k, всегда можно построить циркулем и линейкой. Так, на черт. 160 изображено построение точки A', симметричной данной точке A относительно известной окружности Σ с центром O; действительно, из подобия прямоугольных треугольников OAP и OPA' следует



Черт. 160.

$$\frac{OA}{OP}=\frac{OP}{OA'}$$

и, значит,

$$OA\cdot OA'=OP^2.$$

Итак, если точка A расположена вне Σ, то для построения точки A' надо провести из точки A касательные AP и AQ к окружности Σ; A' есть точка пересечения прямых OA и PQ. Если точка A расположена внутри Σ, то для того, чтобы построить точку A', следует найти точки P и Q пересечения с окружностью Σ перпендикуляра к прямой OA, восставленного в точке A; A' есть точка пересечения прямой OA и касательных к Σ в точках P и Q (здесь надо представлять себе, что точки A и A' на черт. 160 поменялись местами).

Для того чтобы построить окружность или прямую S', симметричную данной окружности или прямой S относительно заданной окружности Σ с центром O, достаточно найти три точки M', N' и P', симметричные каким-то трём точкам M, N и P линии S. Ещё проще при построении окружности или прямой S' исходить из доказательства свойств $Б_1$ — $Б_4$ инверсии (см. выше, стр. 177—179). Так, если S есть прямая, проходящая через O, то S' совпадает с S. Если S есть прямая, не проходящая через O, то диаметром окружности S' служит отрезок OP', где P' есть точка, симметричная относительно Σ основанию P перпендикуляра, опущенного на прямую S из точки O (ср. выше черт. 131, *а*, стр. 177). Если S есть окружность, проходящая через точку O, и OP — её диаметр, то S' есть прямая, перпендикулярная к OP и проходящая через точку P', симметричную P относительно Σ (ср. выше черт. 131, *б*). Наконец, если S есть окружность, не проходящая через O, и M — какая-то её точка, то S' есть окружность, центрально-подобная S с центром подобия O, проходящая через точку M', симметричную M относительно Σ (см. выше черт. 132) [1]).

Отметим, наконец, что нетрудно осуществить циркулем и линейкой инверсию, переводящую заданную окружность в прямую, или две заданные окружности (или прямую и окружность) — в две прямые или в две концентрические окружности (см. теорему 2 § 1, стр. 194). Действительно, для того чтобы перевести заданную окружность S в прямую, достаточно выбрать центр инверсии на этой окружности. Для того чтобы перевести две окружности (или прямую и окружность) S_1 и S_2 в две прямые, следует выбрать за центр инверсии общую точку этих окружностей. Наконец, для того чтобы перевести непересекающиеся окружность S и прямую l в две концентрические окружности, достаточно выбрать за центр инверсии точку пересечения перпендикуляра QP, опущенного из центра окружности S на прямую l, с окружностью $\overline{S}$, имеющей центр в точке P и радиус, равный касательной, проведённой из P к S (см. выше черт. 151, стр. 195). Для того чтобы перевести непересекающиеся окружности S_1 и S_2 в две концентрические окружности, следует выбрать за центр инверсии точку пересечения линии центров O_1O_2 окружностей S_1 и S_2

[1]) Можно также воспользоваться тем, что концы M' и N' диаметра $M'N'$ окружности S', проходящего через O, симметричны относительно Σ концам M и N диаметра S, проходящего через O (см. выше черт. 133).

и какой-либо окружности S, перпендикулярной как к S_1, так и к S_2: при такой инверсии S и O_1O_2 перейдут в две прямые, окружности S_1 и S_2 — в окружности S_1' и S_2', перпендикулярные к этим двум прямым, т. е. имеющим общий центр в точке пересечения прямых (см. доказательство теоремы 2 § 1). Для того чтобы построить окружность S, пересекающую и S_1 и S_2 под прямым углом, найдём сначала окружность $\bar{S}$, пересекающую под прямым углом окружность $\bar{S}_1$ и прямую $\bar{S}_2$, в которые переходят окружности S_1 и S_2 при инверсии с центром в точке A пересечения O_1O_2 и S_2, — эта окружность имеет центр в точке P пересечения O_1O_2 и $\bar{S}_2$ и радиус, равный касательной, проведённой из P к $\bar{S}_1$ (см. черт. 152, *а*, стр. 196). Искомая окружность S отвечает окружности $\bar{S}$ при инверсии, переводящей S_1 и S_2 в $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ (черт. 152, *б*)[1]).

Инверсию с отрицательной степенью тоже легко осуществить циркулем и линейкой, так как такая инверсия равносильна инверсии с положительной степенью (симметрии относительно окружности) и последующей симметрии относительно точки (см. выше, стр. 174).

228. Дан угол MAN и точка O, не лежащая на стороне угла. Проведите через O прямую, пересекающую стороны угла в точках X и Y, таких, что произведение $OX \cdot OY$ имеет заданную величину k.

229. Впишите в данный параллелограмм другой параллелограмм с известной площадью и известным углом между диагоналями.

230. Даны три точки A, B и C. Проведите через точку A прямую l так, чтобы:

а) произведение расстояний от B и C до прямой l имело данную величину;

б) разность квадратов расстояний от B и C до прямой l имела данную величину.

231. В данную окружность S впишите n-угольник, стороны которого проходят через n заданных точек (или некоторые стороны имеют данные направления, а остальные

---

[1]) Можно также принять за окружность S любую окружность, центр O которой лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_2, а радиус равен длине касательной, проведённой из O к S_1 или S_2 (см. ниже стр. 221).

проходят через известные точки). Рассмотрите отдельно случаи чётного и нечётного n.

В другой связи настоящая задача приведена в § 5 гл. I (см. задачу 183а) на стр. 112). См. также задачу 259 из § 4 настоящей главы (стр. 237).

Задачи на построение окружностей

232. Проведите окружность,

а) проходящую через две заданные точки A и B и касающуюся данной окружности (или прямой) S;

б) проходящую через данную точку A и касающуюся двух данных окружностей (или двух прямых, или окружности и прямой) S_1 и S_2.

См. также задачи 49а), б) из § 1 гл. I второй части и 247а) из § 3 настоящей главы (стр. 230). Обобщением задач 232а), б) являются задачи 235а), б).

233. Проведите окружность, проходящую через две данные точки A и B и

а) перпендикулярную к данной окружности (или прямой) S;

б) пересекающую данную окружность S в диаметрально противоположных точках.

Обобщением задачи 233а) является задача 235а).

234. Проведите окружность, проходящую через данную точку A и

а) перпендикулярную к двум данным окружностям (или двум прямым, или окружности и прямой) S_1 и S_2;

б) перпендикулярную к данной окружности (или прямой) S_1 и пересекающую другую данную окружность S_2 в диаметрально противоположных точках;

в) пересекающую две данные окружности S_1 и S_2 в диаметрально противоположных точках.

См. также задачи 248а) — в) из § 3 (стр. 231). Обобщением задачи 234а) является задача 235б).

235. Проведите окружность,

а) проходящую через две данные точки A и B и пересекающую данную окружность (или прямую) S под известным углом α;

б) проходящую через данную точку A и пересекающую две данные окружности (или две прямые, или прямую и окружность) S_1 и S_2 под известными углами α и β.

236. Даны три окружности (или три прямые, или две окружности и прямая, или две прямые и окружность) S_1, S_2 и S_3. Проведите окружность, перпендикулярную к S_1 и S_2 и

а) перпендикулярную к S_3;

б) касающуюся S_3;

в) пересекающую S_3 под известным углом α.

См. также задачи 247б) и 249а) из § 3 (стр. 230—231). Обобщением задач 236 а) — в) является задача 238а).

237. Даны три окружности (или три прямые, или две окружности и прямая, или две прямые и окружность) S_1, S_2 и S_3. Проведите окружность, касающуюся S_1 и S_2 и

а) касающуюся S_3 (задача Аполлония);

б) пересекающую S_3 под известным углом α.

Обобщением задач 237а), б) является задача 238а).

Задачей Аполлония называется задача о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей S_1, S_2 и S_3. Известно много различных решений этой знаменитой задачи, ряд из которых приводится в настоящей книге (см. два решения задачи 237а), решение задачи 272 и два решения задачи 285 из § 5) [1]. Иногда в качестве предельных случаев задачи Аполлония рассматривают также задачи, где некоторые (или все) из окружностей S_1, S_2 и S_3 заменяются точками («окружностями нулевого радиуса») или прямыми («окружностями бесконечно большего радиуса»); при этом под «касанием» окружности и точки понимают, что окружность проходит через точку. При таком более широком понимании задачи Аполлония приходится различать следующие 10 вариантов этой задачи:

Построить окружность, которая

1) проходит через три данные точки;

2) проходит через две данные точки и касается данной прямой;

3) проходит через две данные точки и касается данной окружности;

4) проходит через данную точку и касается двух данных прямых;

[1]) Иные решения той же задачи см., например, в книгах Д. И. Перепёлкин, Курс элементарной геометрии, ч. 1, М.—Л., Гостехиздат, 1948, и Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1948.

5) проходит через данную точку и касается данных прямой и окружности;

6) проходит через данную точку и касается двух данных окружностей;

7) касается трёх данных прямых;

8) касается двух данных прямых и данной окружности;

9) касается данной прямой и двух данных окружностей;

10) касается трёх данных окружностей.

Из этих 10 задач две, а именно задачи 1) и 7), проходятся в школьном курсе геометрии [1]). Задачи 2) и 4) были приведены во второй части книги (см. задачи 49а), б) из § 1 гл. I второй части); там же была приведена и задача 8) (см. задачи 49в) и 56, а также задачу 271 из § 5 настоящей главы); относительно задач 3), 5) и 6) см. задачи 232а), б) настоящего параграфа; наконец, задачи 9) и 10) (собственно задача Аполлония) содержатся в задаче 237а).

238. Даны три окружности S_1, S_2 и S_3. Постройте окружность S так, чтобы

а) углы, образованные S с S_1, S_2 и S_3, имели данные величины α, β и γ;

б) отрезки общих касательных S и S_1, S и S_2, S и S_3, заключённые между точками касания, имели данные длины a, b, c.

См. также задачи 286б), а) из § 5, стр. 307.

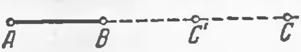
Используя свойства симметрии относительно окружности, легко решить вопрос о том, какие построения элементарной геометрии являются выполнимыми, если пользоваться только одним циркулем. Обычно в задачах на построение предполагается, что при выполнении построения можно пользоваться циркулем и линейкой. В некоторых случаях оказывается возможным обойтись и совсем без помощи циркуля; выше у нас

[1]) Отметим (так как в школьном курсе это обыкновенно опускают), что задача 7) имеет четыре решения, если три прямые образуют треугольник (вписанная и три вневписанные окружности треугольника), два решения, если две прямые параллельны, а третья их пересекает, и ни одного решения, если все три прямые параллельны или все они пересекаются в одной точке.

были приведены некоторые задачи, которые разрешимы, если пользоваться только одной линейкой (см. задачи 109 а), б), 119а) — г), 132 б) из §§ 1, 2 гл. I). В § 5 гл. I мы показали, что все построения, которые можно осуществить с помощью циркуля и линейки, можно выполнить при помощи одной только линейки, если в плоскости чертежа начерчена некоторая окружность с известным центром (см. выше стр. 123—125, где приведена также более точная формулировка этого утверждения). Ещё более поразительным оказывается результат, относящийся к построениям с помощью одного циркуля; оказывается, что *при помощи одного циркуля* (без линейки!) *можно осуществить все построения, которые осуществимы с помощью циркуля и линейки*[1]). Доказательству этого результата (принадлежащего датскому математику XVII века Г. Мору и повторенному после того, как работа Мора была забыта, итальянским математиком конца XVIII века Л. Маскерони) и будут посвящены остальные задачи настоящего параграфа.

239. На плоскости дан отрезок AB. С помощью одного циркуля удвойте этот отрезок (т. е. найдите на продолжении AB за точку B такую точку C, что $AC = 2AB$).

Из решения задачи 239 вытекает, что с помощью одного циркуля можно увеличить любой данный отрезок AB в любое целое число раз n, т. е. найти на продолжении AB за точку B такую точку C, что $AC = n \cdot AB$. Так, например, для того чтобы у т р о и т ь отрезок AB, достаточно найти на его продолжении за точку B такую точку C', что $AC' = 2AB$, а затем построить на продолжении BC' за C' такую точку C, что $BC = 2\,BC'$; в таком случае $AC = 3AB$ (черт. 161).



Черт. 161.

[1]) Это утверждение нуждается в некотором уточнении, аналогичном сделанному выше при рассмотрении вопроса о построениях с помощью одной линейки (см. § 5 гл. I, стр. 124—125). А именно, если в задаче на построение требуется найти некоторую прямую линию или фигуру, состоящую из прямых линий (например, треугольник), то при помощи одного циркуля мы, разумеется, не сможем этого сделать. Однако можно найти сколь угодно много точек каждой из искомых прямых и все точки пересечения искомых прямых и окружностей (например, все вершины искомого треугольника).

240. На плоскости даны окружность Σ с известным центром O и точка A. С помощью одного циркуля найдите точку A', симметричную A относительно окружности Σ.

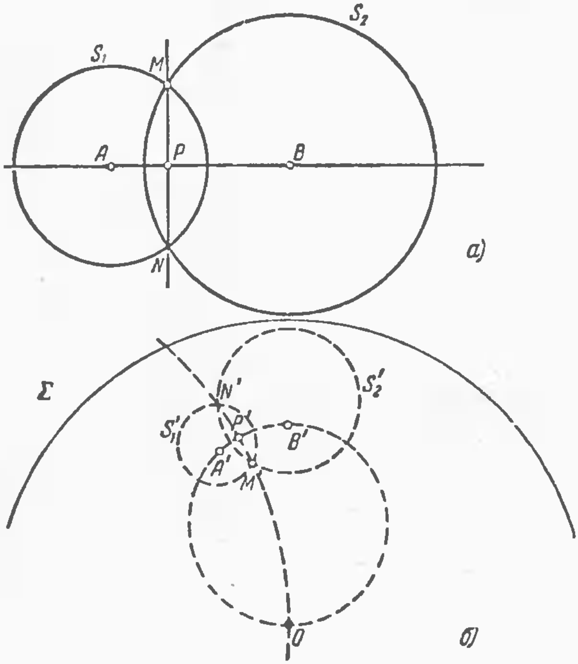
241. На плоскости задана окружность S. С помощью одного циркуля найдите центр этой окружности.

242. С помощью одного циркуля проведите окружность, проходящую через три данные точки A, B и C (не лежащие, разумеется, на одной прямой).

243. а) На плоскости дана окружность Σ и прямая l (заданная, быть может, только двумя своими точками A и B). С помощью одного циркуля найдите окружность l', симметричную прямой l относительно окружности Σ.

б) На плоскости даны две окружности Σ и S. С помощью одного циркуля найдите окружность (или прямую) S', симметричную окружности S относительно окружности Σ.

Результаты задач 240, 242 и 243а), б) уже позволяют утверждать, что всякая задача на построение, которая может быть решена при помощи циркуля и линейки, может быть решена также и при помощи одного циркуля. Действительно, предположим, что мы умеем решать некоторую задачу на построение с помощью циркуля и линейки. Представим себе чертёж $\mathcal{T}$ этого построения, состоящий из каких-то окружностей и прямых линий. Если этот воображаемый чертёж подвергнуть инверсии, выбрав окружность инверсии Σ так, чтобы её центр O не лежал ни на одной из линий чертежа $\mathcal{T}$, то мы придём к новому чертежу $\mathcal{T}'$, состоящему уже из одних лишь окружностей. Покажем, что чертёж $\mathcal{T}'$ можно построить с помощью одного циркуля. Представим себе процесс построения чертежа $\mathcal{T}$, осуществляемый путём последовательного проведения каких-то прямых и окружностей. Точки чертежа $\mathcal{T}$, которые по условию задачи считаются заданными, мы перенесём на чертёж $\mathcal{T}'$ (в силу результата задачи 240 это можно сделать с помощью одного циркуля), а затем будем строить чертёж $\mathcal{T}'$ в той же последовательности, в которой строится чертёж $\mathcal{T}$. Каждая прямая l чертежа $\mathcal{T}$ проводится через какие-то две точки A, B, уже имеющиеся на этом чертеже; на чертеже $\mathcal{T}'$ ей отвечает окружность l', проходящая через точки A', B', соответствующие точкам A и B, и через центр O окружности Σ. В процессе построения $\mathcal{T}'$ точки A', B' будут построены до проведения окружности l'; поэтому l' можно будет построить одним циркулем (см. задачу 242). Каждая окружность S чертежа $\mathcal{T}$ строится по известным центру Q и радиусу MN[1]). При последовательном построении чертежа $\mathcal{T}'$ точки Q', M' и N', отвечающие точкам Q, M и N, определятся до построения окружности S',



Черт. 162.

отвечающей окружности S чертежа $\mathcal{T}$. В силу результата задач 240 и 243б) мы сможем построить с помощью одного циркуля точки Q, M и N чертежа $\mathcal{T}$, затем окружность S и, наконец, искомую окружность S' чертежа $\mathcal{T}'$. Таким образом, мы сумеем полностью построить чертёж $\mathcal{T}'$, т. е. восстановить фигуру F', получающуюся из искомой фигуры F при помощи известной инверсии (возможно, что F и F' состоят

[1]) Наиболее частым является тот случай, когда точка M совпадает с Q.

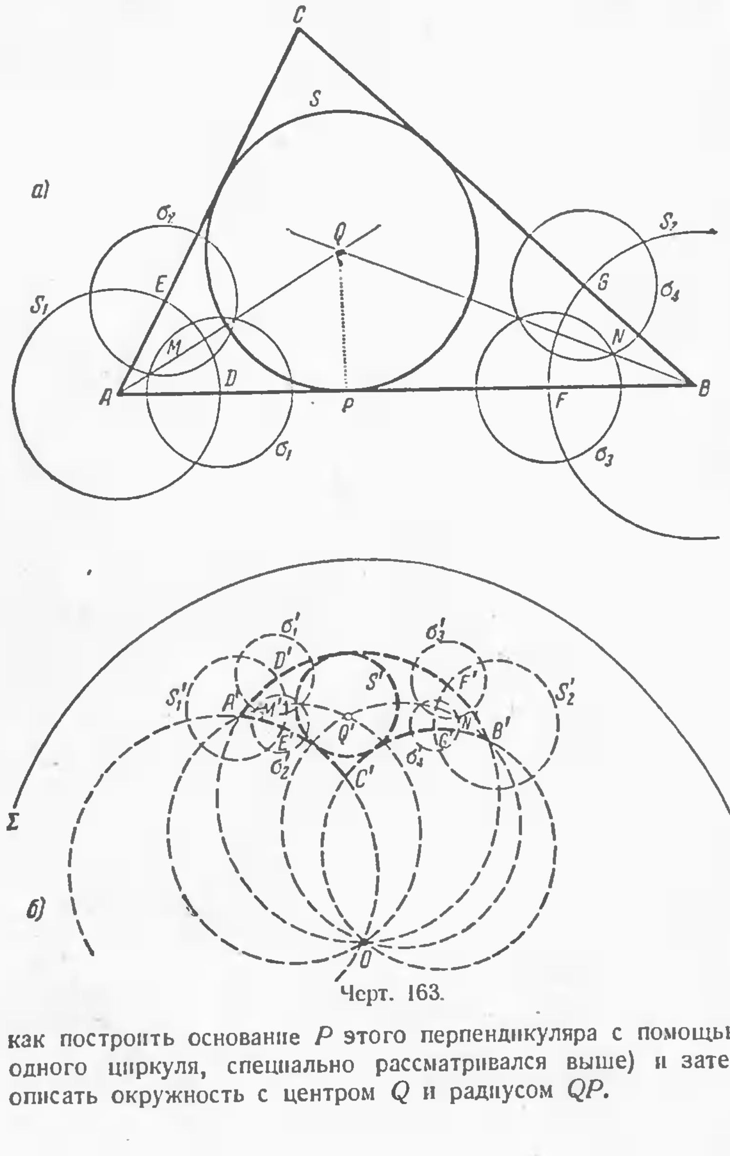
каждая из одной лишь точки). После этого будет уже легко восстановить и фигуру F (см., впрочем, сноску на стр. 210).

Для того чтобы пояснить этот общий метод, рассмотрим подробно два примера. На черт. 162,*а* изображено известное построение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB; это построение предполагает использование и циркуля и линейки. Чтобы найти основание P перпендикуляра при помощи одного циркуля, можно поступить так. Рассмотрим черт. 162,*б*, симметричный чертежу 162,*а* относительно окружности Σ с центром O. Построим точки A', B' и M', симметричные точкам A, B и M относительно Σ (задача 240). Затем проведём окружности S_1 и S_2 с центрами A и B и радиусами AM и BM; им отвечают пересекающиеся в точках M' и N' окружности S_1' и S_2', которые легко найти (задача 243б))[1]). Точка P' черт. 162, *б* может быть найдена как точка пересечения окружностей $A'B'O$ и $M'N'O$ (см. задачу 242), а искомая точка P — как точка, симметричная P' относительно окружности Σ (задача 240). [При помощи одного циркуля можно построить также сколь угодно много точек перпендикуляра MP, симметричных точкам окружности $M'N'O$, но, разумеется, не все точки отрезка MP.]

В качестве второго примера рассмотрим задачу о построении окружности S, вписанной в данный треугольник ABC (черт. 163, *а*; треугольник можно считать заданным лишь своими вершинами). Найдём точки A', B', C', симметричные вершинам треугольника относительно некоторой окружности Σ с центром O (черт. 163, *б*). Построим окружности $A'B'O$, $A'C'O$ и $B'C'O$ (задача 242) и окружности S_1' и S_2', отвечающие произвольным окружностям S_1 и S_2 с центрами A и B (задача 243 б)). Точкам пересечения S_1' с $OA'B'$ и $OA'C'$ и S_2' с $OB'A'$ и $OB'C'$ отвечают точки D и E, F и G на черт. 163, *а* (задача 240); окружностям σ_1 и σ_2, σ_3 и σ_4 одного радиуса с центрами D и E, F и G отвечают окружности σ_1' и σ_2', σ_3' и σ_4' на черт. 163, *б* (задача 243б)). Обозначим точку пересечения σ_1' и σ_2' через M', точку пересечения σ_3' и σ_4' — через N' и точку пересечения окружностей $A'M'O$ и $B'N'O$ (задача 242) через Q'; точка Q' симметрична центру Q вписанной окружности треуголь-

[1]) Проще было бы сразу найти точку N', симметричную относительно Σ точке N пересечения S_1 и S_2. Вообще наш общий метод обычно даёт отнюдь не самое простое из возможных решений задачи на построение с помощью одного циркуля.

ника ABC. Далее остаётся только опустить из точки Q перпендикуляр QP на сторону AB треугольника (вопрос о том,

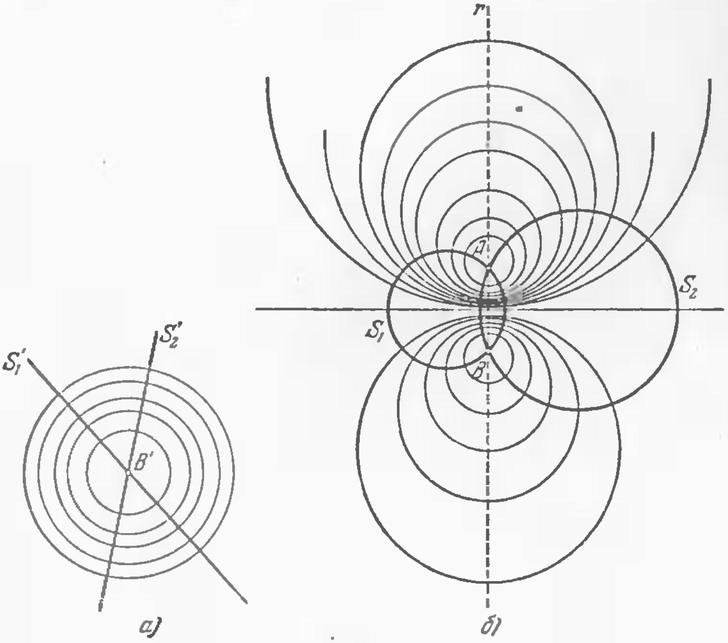


Черт. 163.

как построить основание P этого перпендикуляра с помощью одного циркуля, специально рассматривался выше) и затем описать окружность с центром Q и радиусом QP.

§ 3. Пучки окружностей. Радикальная ось двух окружностей

В доказательстве важной теоремы 2 § 1 (стр. 194) фигурировали окружности, перпендикулярные к двум данным. Так как вопрос о таких окружностях имеет большое принципиальное значение, мы рассмотрим здесь его подробнее.



Черт. 164.

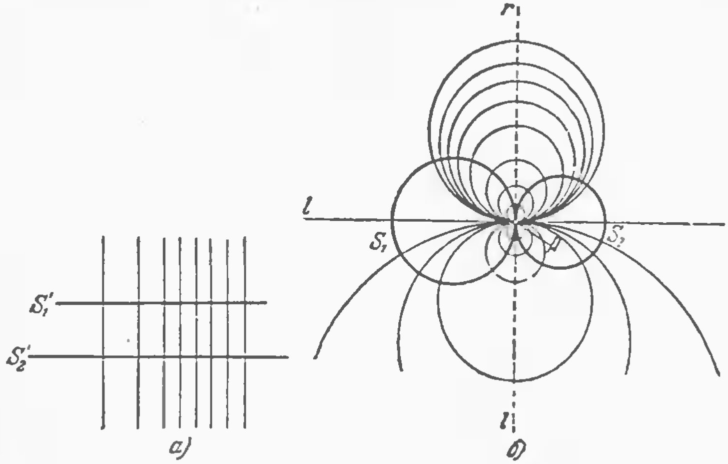
Совокупность всех окружностей (и прямых), перпендикулярных к двум данным окружностям S_1 и S_2 (или к окружности и прямой, или к двум прямым), называется **пучком окружностей**[1]. В зависимости от взаимного расположения S_1 и S_2 пучки окружностей могут быть трёх различных типов.

[1]) Точнее было бы сказать: пучок окружностей и прямых; однако слово «прямых» для краткости обычно опускают.

1°. Если окружности S_1 и S_2 пересекаются, то с помощью инверсии их можно перевести в две пересекающиеся прямые S_1' и S_2' (см. теорему 2 § 2); пучок окружностей, перпендикулярных к S_1 и S_2, перейдёт при этом в совокупность окружностей, перпендикулярных к S_1' и S_2'. Но если окружность перпендикулярна к прямой, то центр её должен лежать на этой прямой; следовательно, все окружности, перпендикулярные к S_1' и S_2', — концентрические с общим центром в точке B' пересечения S_1' и S_2' (черт. 164, *а*). Отсюда следует, что *пучок окружностей, перпендикулярных к пересекающимся окружностям S_1 и S_2, может быть при помощи инверсии переведён в совокупность концентрических окружностей*; никакие две окружности этого пучка не пересекаются между собой (черт. 164, *б*). Та из концентрических окружностей, которая проходит через центр инверсии A, переходит в прямую линию, принадлежащую пучку. Так как среди концентрических окружностей есть малые окружности, сколь угодно близкие к точке B', то среди окружностей нашего пучка есть малые окружности, сколь угодно близкие к точке B; поэтому к пучку условно относят и точку B пересечения S_1 и S_2 (а к совокупности концентрических окружностей причисляют и их общий центр B'). Так как среди концентрических окружностей есть сколь угодно большие, то среди окружностей нашего пучка есть также сколь угодно малые окружности, близкие к центру инверсии A; поэтому к пучку причисляют условно и вторую точку A пересечения S_1 и S_2.

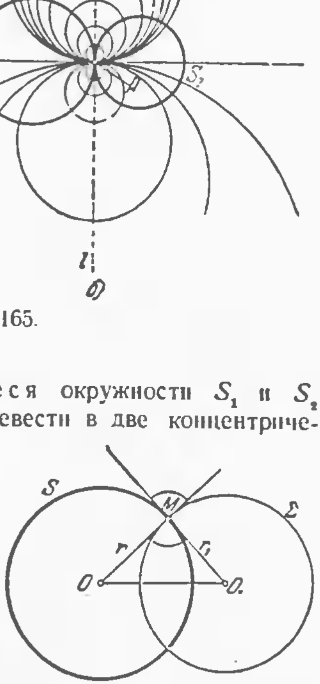
2°. Касающиеся окружности S_1 и S_2 можно при помощи инверсии перевести в две параллельные прямые S_1' и S_2'. Для того чтобы окружность была перпендикулярна к двум параллельным прямым, необходимо, чтобы её центр лежал одновременно на обеих прямых; но это, очевидно, невозможно. Следовательно, пучок окружностей, перпендикулярных к S_1' и S_2', не может содержать ни одной окружности; он состоит только из прямых, перпендикулярных к направлению S_1' и S_2' (черт. 165, *а*). Переходя при помощи инверсии обратно к окружностям S_1 и S_2, мы заключаем, что *пучок окружностей, перпендикулярных к двум касающимся окружностям S_1 и S_2, может быть при помощи инверсии переведён в совокупность параллельных прямых*. Этот пучок состоит из окружностей, проходящих через точку A касания S_1 и S_2 (центр инверсии) и касающихся в этой точке прямой l, перпендикулярной к S_1

и S_2; прямая l тоже принадлежит к пучку (черт. 164, *б*). Точку A иногда тоже условно причисляют к пучку.



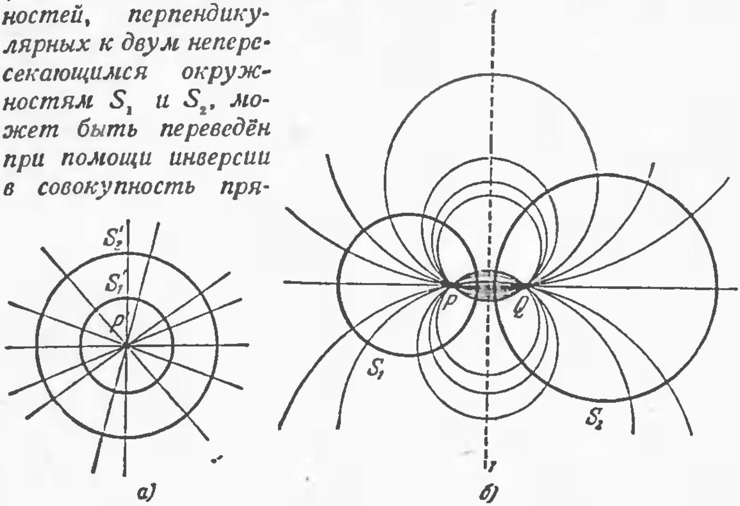
Черт. 165.

3°. Две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 можно при помощи инверсии перевести в две концентрические окружности S_1' и S_2'. Если окружности S и Σ, пересекающиеся в точке M, взаимно перпендикулярны (черт. 166), то касательная к Σ в точке M перпендикулярна к касательной к S в точке M и, следовательно, проходит через центр O кружности S; точно так же касательная к S проходит через центр O_1 окружности Σ. Отсюда вытекает, что треугольник OMO_1 — прямоугольный и, значит, сумма квадратов радиусов окружностей S и Σ равна квадрату расстояния между их центрами. Отсюда с очевидностью вытекает, что *две окружности с разными радиусами, но общим центром (концентрические окружности) не могут быть перпендикулярны к одной и той же окружности*. Следовательно, пучок окружностей, перпендикулярных к S_1' и S_2', не может



Черт. 166.

содержать окружностей; он состоит только из прямых, проходящих через общий центр P' окружностей S_1' и S_2' (черт. 167, *а*). Таким образом, мы видим, что *пучок окружностей, перпендикулярных к двум непересекающимся окружностям S_1 и S_2, может быть переведён при помощи инверсии в совокупность пря-*



Черт. 167.

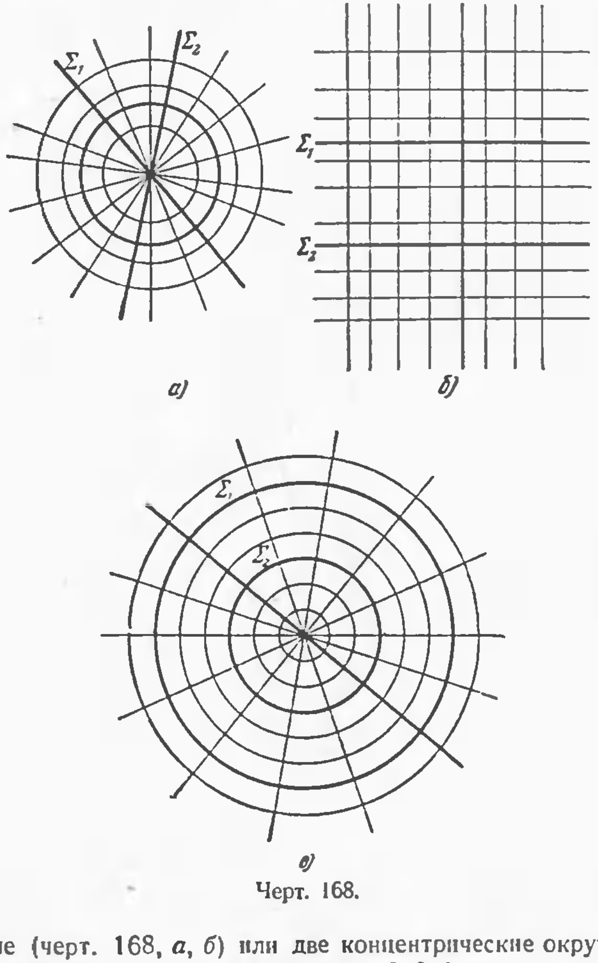
мых, пересекающихся в одной точке; он состоит из всех окружностей, проходящих через две фиксированные точки P (точка, отвечающая при инверсии точке P') и Q (центр инверсии; см. черт. 167, *б*). Прямая, соединяющая точки P и Q, тоже принадлежит пучку [1]).

Из рассмотрения черт. 164, 165, 167 можно усмотреть некоторые общие свойства всех типов пучков. Так, например, во всех случаях через каждую точку плоскости проходит окружность пучка, вообще говоря, единственная. Исключение составляет точка A пучка касающихся окружностей (черт. 165, *б*) и точки P и Q пучка пересекающихся окружностей (черт. 167, *б*), через которые проходят бесконечно много окружностей пучка.

---

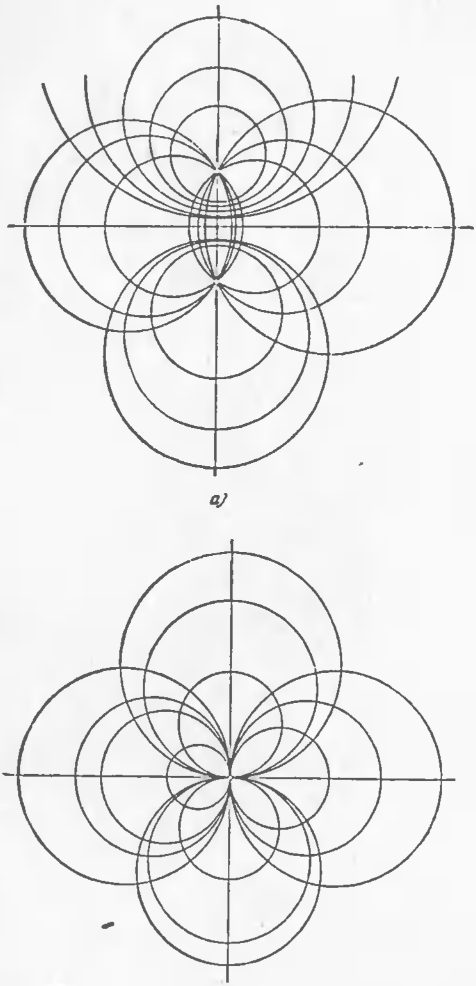
[1]) В литературе пучок окружностей типа 1° (пучок непересекающихся окружностей) обыкновенно называется **гиперболическим**, пучок окружностей типа 2° (пучок касающихся окружностей) — **параболическим** и пучок окружностей типа 3° (пучок пересекающихся окружностей) — **эллиптическим**.

Отметим ещё, что окружности, перпендикулярные к двум окружностям Σ_1 и Σ_2 пучка, перпендикулярны ко всем окружностям пучка. Это совершенно очевидно, если Σ_1 и Σ_2 — две



Черт. 168.

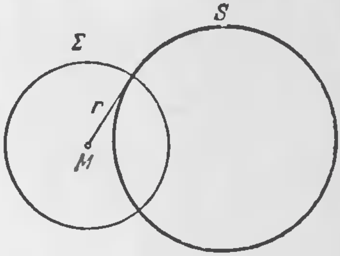
прямые (черт. 168, *а*, *б*) или две концентрические окружности (черт. 168, *в*); отсюда и из теоремы 2 § 1 следует, что это утверждение справедливо во всех случаях. Таким образом, можно говорить в в з а и м н о п е р п е н д и к у л я р н ы х п у ч к а х окружностей. Очевидно, что пучок окружностей, пер-



Черт. 169.

пендикулярный к пучку пересекающихся окружностей, состоит из окружностей, не имеющих общих точек, и наоборот (черт. 169, *а*); пучок, перпендикулярный к пучку касающихся окружностей, сам состоит из касающихся окружностей (черт. 169, *б*).

Для дальнейшего будет существенно заметить, что *центры всех окружностей данного пучка лежат на одной прямой* r. Это совершенно очевидно, если речь идёт о пучке касающихся окружностей (в этом случае r проходит через A и перпендикулярна к l; см. черт. 165, *б*) или о пучке пересекающихся окружностей (r перпендикулярна к PQ и проходит через середину PQ; черт. 167, *б*). В случае пучка непересекающихся окружностей (черт. 164, *б*) наше утверждение вытекает из того, что пучок при помощи инверсии можно перевести в совокупность концентрических окружностей и, следовательно, все окружности пучка центрально-подобны с одним и тем же центром подобия A (по различными коэффициентами подобия; см. доказательство свойства $Б_4$ инверсии, стр. 178—179) окружностям с одним и тем же центром B'; значит, все их центры лежат на одной прямой AB' (совпадающей с AB, ибо B' лежит на прямой AB).

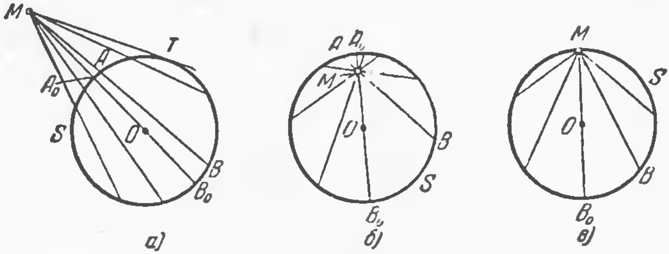


Черт. 170.

Из последнего замечания вытекает одно интересное следствие. Если окружность Σ с центром M и радиусом r перпендикулярна к окружности S, то это значит, что касательная, проведённая из точки M к окружности S, имеет длину r (черт. 170). Поэтому, если окружность с центром M перпендикулярна одновременно к двум окружностям S_1 и S_2, то касательные, проведённые из точки M к этим окружностям, равны; обратно, если касательные MT_1 и MT_2, проведённые из точки M к S_1 и S_2, равны, то окружность с центром M и радиусом $MT_1 = MT_2$ перпендикулярна как к S_1, так и к S_2. Таким образом, из того, что центры всех окружностей пучка лежат на одной прямой, вытекает, что *все точки, из которых можно провести к данным двум окружностям S_1 и S_2 равные касательные, лежат на одной прямой*. Эта прямая называется **радикальной осью** окружностей S_1 и S_2.

Так как понятие радикальной оси весьма важно, то мы подойдём к нему ещё и с другой стороны. Длина отрезка касательной, проведённой к окружности S из точки M, фигурирует в школьном курсе геометрии в следующей теореме:

Теорема 1а. *Произведение $MA \cdot MB$ отрезков секущей, проведённой к окружности S из внешней точки M* (A и B — точки окружности S) *не зависит от выбора секущей, а зависит только от точки M и окружности S; оно равно квадрату касательной, проведённой из точки M к окружности* (черт. 171, *а*).



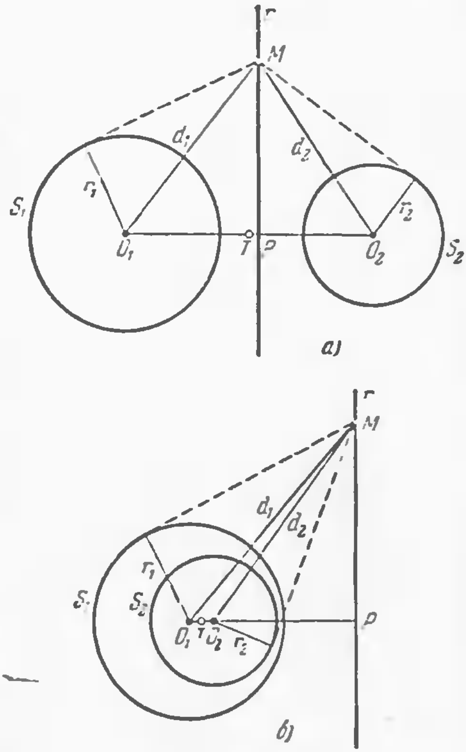
Черт. 171.

Теорема 1а аналогична следующей теореме:

Теорема 1б. *Произведение $MA \cdot MB$ отрезков хорды окружности S, проходящей через внутреннюю точку M* (A и B — точки окружности S), *не зависит от выбора хорды, а зависит только от точки M и окружности S* (черт. 171, *б*).

Таким образом, мы видим, что если через произвольную точку M проводить всевозможные прямые, пересекающие окружность S в точках A и B, то произведение $MA \cdot MB$ не зависит от выбора прямой, а зависит только от точки и от окружности. В соответствии с определением знаков отрезков (см. § 1 гл. I второй части книги) это произведение следует считать положительным, если точка M расположена вне окружности, и отрицательным — в противном случае; если точка M расположена на окружности, то следует считать, что точка A совпадает с M и, следовательно, произведение $MA \cdot MB$ равно нулю (черт. 171, *в*). Произведение $MA \cdot MB$, взятое с соответствующим знаком, называется **степенью точки M относительно окружности S.**

Обозначим расстояние от точки M до центра O окружности S через d, а радиус S — через r. Проведя секущую MA_0B_0 через центр O, мы видим, что отрезки MA_0 и MB_0 будут равны $d+r$ и $d-r$ или $d+r$ и $r-d$ (черт. 171). Учитывая соглашение о знаках отрезков, мы найдём, что *степень точки M относительно окружности S во всех случаях равна d^2-r^2.*



Черт. 172, *а—б*.

Точки, из которых можно провести к окружностям S_1 и S_2 равные касательные, обладают тем свойством, что степени их относительно S_1 и S_2 равны. Поэтому тот факт, что все такие точки лежат на одной прямой, можно сформулировать ещё так: все точки, лежащие вне двух данных окружностей S_1 и S_2 и обладающие тем свойством, что степени их относительно S_1 и S_2 равны, лежат на одной прямой. Докажем теперь, что вообще *геометрическое место точек, степени которых относительно двух окружностей S_1 и S_2 равны, является прямой линией* [1]); эта прямая и называется **радикальной осью** S_1 и S_2.

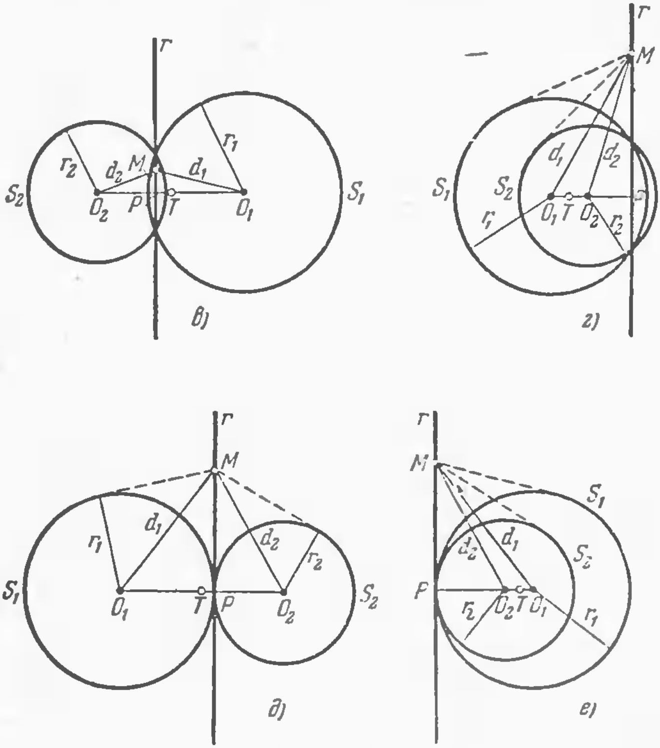
Пусть M — произвольная точка искомого геометрического места, d_1 и d_2 — расстояния от неё до центров O_1 и O_2 дан-

[1]) Если окружности S_1 и S_2 не пересекаются, то все точки, имеющие относительно них равные степени, лежат вне обеих окружностей; таким образом, для этого случая наше утверждение можно считать уже доказанным.

ных окружностей S_1 и S_2 радиусов r_1 и r_2 (черт. 172). В таком случае должно иметь место равенство

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

Опустим из M перпендикуляр MP на линию центров O_1O_2.



Черт. 172, *в—е*.

Очевидно, $d_1^2 = MP^2 + PO_1^2$, $d_2^2 = MP^2 + PO_2^2$; следовательно,

$$MP^2 + PO_1^2 - r_1^2 = MP^2 + PO_2^2 - r_2^2,$$

откуда

$$PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

или

$$(PO_1 + PO_2)(PO_1 - PO_2) = r_1^2 - r_2^2.$$

Пусть $r_1 \geqslant r_2$; в таком случае $PO_1 \geqslant PO_2$, т. е. точка P расположена не дальше от O_2, чем от O_1; другими словами, она лежит с той же стороны от середины T отрезка O_1O_2, что и точка O_2 (центр меньшей окружности). Если P лежит между O_1 и O_2 (черт. 172, *а*, *в*, *д*), то

$$PO_1 + PO_2 = O_1O_2,$$
$$PO_1 - PO_2 = (PT + TO_1) - (TO_2 - PT) = 2PT;$$

если P лежит вне отрезка O_1O_2 (черт. 172, *б*, *г*, *е*), то

$$PO_1 - PO_2 = O_1O_2,$$
$$PO_1 + PO_2 = (PT + TO_1) + (PT - TO_2) = 2PT.$$

Таким образом, во всех случаях $PO_1^2 - PO_2^2 = 2O_1O_2 \cdot TP$, и окончательно имеем $2O_1O_2 \cdot TP = r_1^2 - r_2^2$.

Таким образом, точка P не зависит от выбора точки M искомого геометрического места и, значит, это геометрическое место представляет собой прямую линию, перпендикулярную к линии центров O_1O_2.

Очевидно, что если окружности S_1 и S_2 не имеют общих точек, то радикальная ось не пересекает ни одной из них (черт. 172, *а*, *б*); если S_1 и S_2 пересекаются, то радикальная ось проходит через точки пересечения (имеющие степень нуль относительно обеих окружностей S_1 и S_2; см. черт. 172, *в*, *г*); если S_1 и S_2 касаются, то радикальная ось проходит через точку касания (черт. 172, *д*, *е*). Из формулы

$$TP = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2O_1O_2}$$

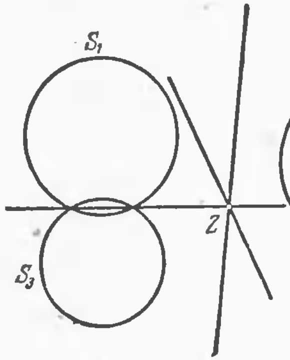
нетрудно вывести, что если S_1 и S_2 лежат одна вне другой, то радикальная ось проходит между ними (черт. 172, *а*), а если S_2 заключена внутри S_1, то радикальная ось проходит вне их (черт. 172, *б*); если S_1 равна S_2 ($r_1 = r_2$), то радикальная ось S_1 и S_2 совпадает с их осью симметрии. Если окружности S_1 и S_2 концентричны ($O_1O_2 = 0$), то они вовсе не имеют радикальной оси [1]).

---

[1]) Это следует также из того, что не существует окружностей, перпендикулярных одновременно к двум концентрическим окружностям (см. выше стр. 217).

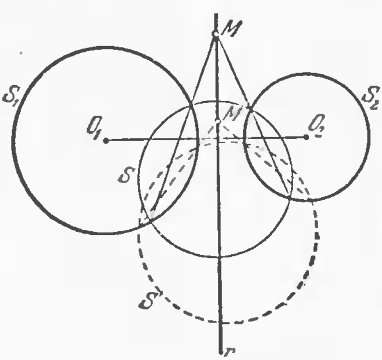
Иногда говорят, что две концентрические окружности имеют «бесконечно удалённую» радикальную ось; при этом руководствуются теми же соображениями, которые побуждали нас к введению бесконечно удалённых элементов на стр. 54 и 203.

Пусть теперь у нас имеются три окружности S_1, S_2 и S_3. Если центры этих окружностей не лежат на одной прямой, то их попарные радикальные оси (перпендикулярные к линиям центров) не параллельны. Если Z есть точка, в которой пересекаются радикальные оси окружностей S_1 и S_2, S_1 и S_3, то эта точка имеет одинаковые степени относительно S_1 и S_2 и относительно S_1 и S_3; отсюда следует, что она имеет также одинаковые степени относительно S_2 и S_3, т. е. лежит на радикальной оси S_2 и S_3. Другими словами: *попарные радикальные оси трёх окружностей S_1, S_2 и S_3, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке* (черт. 173). Эта точка называется **радикальным центром** трёх окружностей.



Черт. 173.

Из сказанного вытекает простое построение радикальной оси r двух **непересекающихся** окружностей S_1 и S_2 (радикальная ось пересекающихся окружностей совпадает с их общей хордой). Построим вспомогательную третью окружность S, пересекающую S_1 и S_2 (черт. 174). Радикальными осями S_1 и S, S_2 и S будут служить их общие хорды. Поэтому точка M пересечения этих общих хорд принадлежит r. Опустив из M перпендикуляр на линию центров S_1 и S_2 или найдя аналогичным образом с помощью другой вспомога-

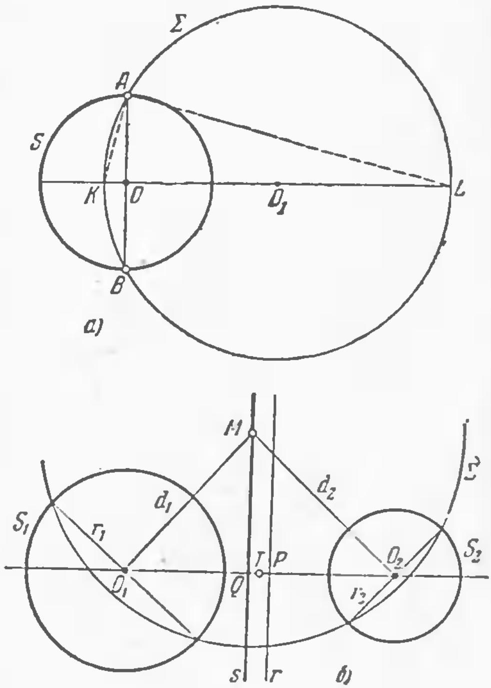


Черт. 174.

тельной окружности S' ещё одну точку M' радикальной оси, мы без труда найдём прямую r.

Отметим, что всюду в предыдущем можно считать, что какие-либо (или даже все) из рассматриваемых окружностей имеют радиус нуль, т. е. являются точками. В частности, степень точки M относительно точки S равна квадрату расстояния MS, радикальная ось двух точек есть их ось симметрии, радикальный центр трёх точек — центр окружности, проходящей через эти точки.

Отметим ещё следующее предложение, аналогичное теореме о центрах окружностей, перпендикулярных к двум данным (см. выше стр. 221): *геометрическое место центров окружностей, пересекающих две данные окружности S_1 и S_2 в диаметрально противоположных точках, есть прямая s, перпендикулярная к линии центров S_1 и S_2* (и, следовательно, параллельная их радикальной оси). Действительно, если окружность Σ пересекает окружность S в диаметрально противоположных точках A, B и линия центров OO_1 этих окружностей пересекает Σ в точках K и L (черт. 175, *а*), то из прямоугольного треугольника KAL находим:



Черт. 175.

$$KO \cdot OL = OA^2,$$

или, обозначая радиусы $O_1K = O_1L$ и OA окружностей Σ и S через R и r и расстояние OO_1 между их центрами через d,

$$(R-d)(R+d) = r^2, \quad R^2 = d^2 + r^2.$$

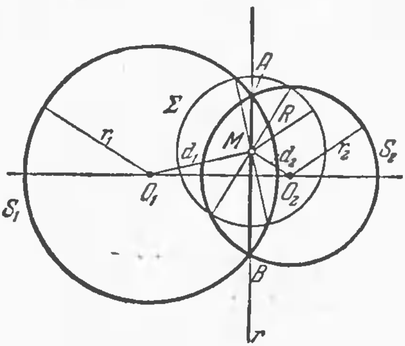
Поэтому если M — центр окружности Σ, пересекающей по диаметру две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2 (черт. 175, *б*), то

$$d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2, \quad d_2^2 - d_1^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

где $d_1 = MO_1$, $d_2 = MO_2$. Отсюда следует, что если $r_1 \geqslant r_2$, то $d_1 \leqslant d_2$; далее, преобразовывая последнее равенство, можно получить:

$$2O_1O_2 \cdot TQ = r_1^2 - r_2^2,$$

где Q — основание перпендикуляра, опущенного из M на O_1O_2, T — середина отрезка O_1O_2 (ср. выше текст на стр. 224—225). Отсюда следует, что искомое геометрическое место точек M есть прямая s, симметричная радикальной оси r окружностей S_1 и S_2 относительно середины T отрезка O_1O_2.



Черт. 176.

Найдём ещё геометрическое место центров таких окружностей Σ, что две данные окружности S_1 и S_2 пересекают Σ в диаметрально противоположных точках (черт. 176). Прежде всего ясно, что центр M окружности Σ должен заключаться как внутри S_1, так и внутри S_2 (см. выше черт. 175, *а*); следовательно, такие окружности существуют только в том случае, если S_1 и S_2 пересекаются. Далее, пусть r_1, r_2 и R — радиусы окружностей S_1, S_2 и Σ; d_1 и d_2 — расстояния от M до центров S_1 и S_2. Так как S_1 и S_2 пересекают Σ в диаметрально противоположных точках, то

$$r_1^2 = R^2 + d_1^2 \quad \text{и} \quad r_2^2 = R^2 + d_2^2,$$

откуда

$$R^2 = r_1^2 - d_1^2 = r_2^2 - d_2^2; \quad d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

Но это равенство показывает, что степени точки M относительно

S_1 и S_2 равны; значит, M принадлежит радикальной оси r окружностей S_1 и S_2. Следовательно, *геометрическим местом центров окружностей Σ, таких, что S_1 и S_2 пересекают Σ в диаметрально противоположных точках, является отрезок радикальной оси r окружностей S_1 и S_2, заключённый внутри S_1 и S_2,— общая хорда S_1 и S_2* (напомним, что часть радикальной оси, внешняя по отношению к S_1 и S_2, есть геометрическое место центров окружностей Σ, таких, что S_1 и S_2 пересекают Σ под прямым углом).

Рассмотрим снова два взаимно перпендикулярных пучка окружностей (см. выше черт. 169, *а*, *б*). Мы отмечали выше, что радикальной осью каких-либо двух окружностей S_1 и S_2 пучка является линия центров пучка, перпендикулярного к первому (см. стр. 221); отсюда вытекает, что *каждые две окружности пучка имеют одну и ту же радикальную ось.* Обратно, *совокупность окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось, представляет собой пучок* (он перпендикулярен к пучку окружностей, перпендикулярных к каким-либо двум окружностям S_1, S_2, выбранным из этой совокупности).

Иногда пучок окружностей определяют как совокупность окружностей, каждые две из которых имеют одну и ту же радикальную ось[1]). Однако это определение менее удобно, чем приведённое выше, так как оно не охватывает совокупностей концентрических окружностей (черт. 164,*а*), параллельных прямых (черт. 165, *а*) и пересекающихся прямых (черт. 167, *а*)[2]).

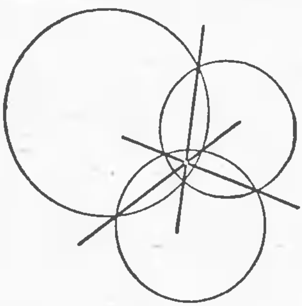
Аналогично пучку окружностей — совокупности окружностей, каждые две из которых имеют одну и ту же радикальную ось,— определяется связка окружностей — совокупность окружностей, каждые три из которых имеют один и тот же радикальный центр Z. [Условно причисляют к числу связок также совокупность всех прямых линий плоскости.] Связки окружностей тоже могут быть трёх различ-

[1]) Любопытно отметить, что при таком определении пучка точки, которые мы чисто условно причисляли к пучкам типов 1° и 2°, естественно включаются в пучок, так как можно говорить о радикальной оси точки и окружности или двух точек. Напротив того, прямые теперь приходится условно присоединять к окружностям пучка (оговорив, что радикальная ось окружностей пучка тоже принадлежит пучку).

[2]) Важным достоинством первого определения пучка окружностей является то, что из него сразу следует, что *при инверсии пучок окружностей переходит снова в пучок окружностей*: второе определение пучка в этом отношении менее удобно.

ных типов, в зависимости от того, лежит ли точка Z вне окружностей связки, на окружностях связки или внутри окружностей связки [1]). Связка второго типа представляет собой совокупность всех окружностей, проходящих через фиксированную точку Z. Что касается связок первого и третьего типов, то можно показать, что они представляют собой совокупности всех окружностей, которые переходят в себя при некоторой определённой фиксированной инверсии I (I имеет положительную степень в первом случае и отрицательную степень во втором случае). Можно также определить связку первого типа как совокупность всех окружностей (и прямых), перпендикулярных к некоторой окружности Σ, а связку третьего типа — как совокупность всех окружностей (и прямых), пересекающих некоторую окружность Σ в диаметрально противоположных точках. По поводу доказательства всех перечисленных предложений см., например, книгу: Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, задачи 273—291 (М. — Л., Гостехиздат, 1950).

244. Докажите, что общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке (черт. 177) или параллельны.



Черт. 177.

245. Докажите, что общая хорда двух пересекающихся окружностей делит пополам отрезок их общей внешней касательной, заключённый между точками касания.

246. Дана окружность S и точка M вне её. Через точку M проводится переменная окружность Σ, пересекающая S в точках A, B. Найдите геометрическое место точек пересечения прямой AB с касательной к Σ в точке M.

247. Постройте окружность,

а) проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности (или прямой) S;

б) перпендикулярную к двум данным окружностям S_1 и S_2 и касающуюся данной окружности (или прямой) S.

См. также задачи 49б) из § 1 гл. I второй части книги и 232а) и 236б) из § 2 настоящей главы (стр. 207 и 208).

[1]) Связка первого типа называется гиперболической, связка второго типа — параболической и связка третьего типа — эллиптической.

248. Постройте окружность, проходящую через данную точку M и

а) перпендикулярную к двум данным окружностям S_1 и S_2;

б) перпендикулярную к данной окружности S_1 и пересекающую другую данную окружность S_2 в диаметрально противоположных точках;

в) пересекающую две данные окружности S_1 и S_2 в диаметрально противоположных точках.

См. также задачи 234а) — в) из § 2 (стр. 207).

249. Даны три окружности S_1, S_2 и S_3. Постройте окружность S,

а) перпендикулярную к S_1, S_2 и S_3;

б) пересекающую S_1, S_2 и S_3 в диаметрально противоположных точках;

в) такую, что S_1, S_2 и S_3 пересекают S в диаметрально противоположных точках.

См. также задачу 236а) из § 2 (стр. 208).

250. Даны две окружности S_1 и S_2. Найдите геометрическое место точек M, таких, что

а) разность квадратов длин касательных, проведённых из M к S_1 и к S_2, имеет данную величину a;

б) отношение длин касательных, проведённых из M к S_1 и к S_2, имеет данную величину k.

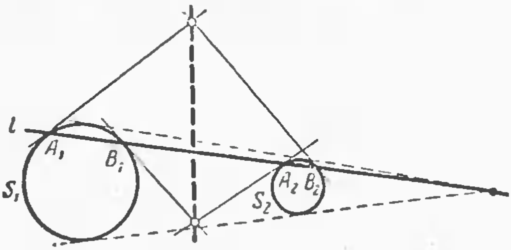
См. также задачу 88 из § 1 гл. II второй части книги и задачу 260 из § 4 настоящей главы (стр. 242).

В задачах 250а), б) можно также одну из двух окружностей S_1, S_2 или даже обе эти окружности заменить точками («окружностями нулевого радиуса»); при этом под длиной касательной, проведённой из M к точке S, следует понимать просто расстояние между этими точками. Таким образом, эти задачи являются обобщением следующих более простых задач:

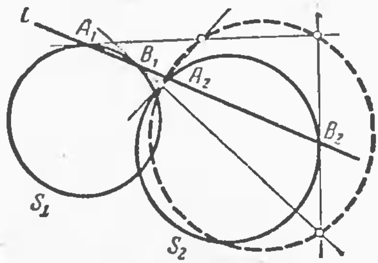
а) найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна;

б) найти геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно.

251. Даны две окружности S_1 и S_2 и прямая l, пересекающая S_1 в точках A_1 и B_1 и S_2 в точках A_2 и B_2. Докажите, что а) если l проходит через центр подобия S_1 и S_2, то касательные к S_1 в точках A_1 и B_1 пересекаются с касательными



а)

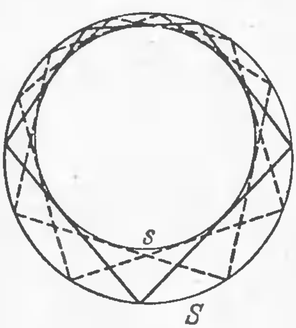


б)

Черт. 178.

к S_2 в точках A_2 и B_2 в двух точках, лежащих на радикальной оси S_1 и S_2 (черт. 178, *а*);

б) если l не проходит через центр подобия S_1 и S_2, то касательные к S_1 в точках A_1 и B_1 пересекаются с касательными к S_2 в точках A_2 и B_2 в четырёх точках, лежащих на одной окружности (черт. 178, *б*).



Черт. 179.

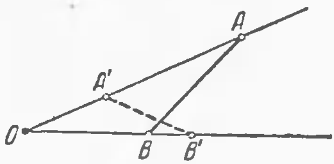
252. Теорема Понселе. Докажите, что если существует n-угольник, вписанный в данную окружность S и одновременно описанный вокруг другой данной окружности s, то существует бесконечно много таких n-угольников; за вершину каждого такого n-угольника можно принять любую точку бо́льшей окружности S (черт. 179).

См. также выше задачи 219а) и 220б) из § 1 (стр. 191—192).

§ 4. Инверсия (окончание)

Продолжим теперь изучение свойств инверсии.

В § 1 мы видели, что **угол** между прямыми (или между прямой и окружностью или между двумя окружностями) не меняется при инверсии (см. свойство В инверсии, стр. 181). Выясним теперь, как изменяется при инверсии **расстояние** между двумя точками. Пусть A и B — две произвольные точки плоскости, A' и B' — точки, в которые они переходят при инверсии с центром O (отличном от A и от B) и степенью k, которую мы для простоты считаем положительной (черт. 180). Треугольники OAB, и $OB'A'$ будут подобны, так как $\angle AOB = \angle B'OA'$ и $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$ (ибо $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = k$). Следовательно,



Черт. 180.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB'}, \quad \text{откуда} \quad A'B' = AB \cdot \frac{OB'}{OA}.$$

Заменяя здесь OB' на $\frac{k}{OB}$, мы получим требуемую формулу:

$$A'B' = AB \frac{k}{OA \cdot OB}. \tag{*}$$

Если k отрицательно, то в формуле (*) достаточно только заменить k на $|k|$.

253. а) Пусть $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ — расстояния от точки M, расположенной на дуге A_1A_n окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$, до вершин $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ этого n-угольника. Докажите, что

$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \frac{1}{d_3d_4} + \ldots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

[В частности, при $n=3$ мы получаем:

$$\frac{1}{d_1 d_2}+\frac{1}{d_2 d_3}=\frac{1}{d_1 d_3},$$

откуда

$$d_3+d_1=d_2,$$

или словами: *сумма расстояний от произвольной точки окружности, описанной около равностороннего треугольника, до двух ближайших вершин треугольника всегда равна расстоянию до третьей вершины.*]

б) Докажите, что если n нечётно, то в обозначениях задачи а) имеет место равенство

$$d_1+d_3+d_5+\ldots+d_n=d_2+d_4+\ldots+d_{n-1}.$$

[В частности, при $n=3$ мы приходим к тому же самому предложению, что и в случае задачи а).]

254. а) Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{2n-1}, p_{2n}$ — расстояния от произвольной точки M окружности S до сторон A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}$, $A_{2n}A_1$ вписанного в S $2n$-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$. Докажите, что

$$p_1 p_3 p_5 \ldots p_{2n-1}=p_2 p_4 p_6 \ldots p_{2n}.$$

б) Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ — расстояния от произвольной точки M окружности S до сторон вписанного в неё n-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ — расстояния от точки M до сторон описанного n-угольника, образованного касательными к окружности в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_n=P_1 P_2 P_3 \ldots P_n.$$

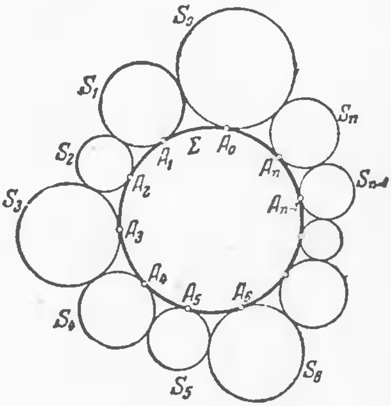
255. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_0$ — длины сторон A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots, A_nA_1$ n-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, вписанного в окружность S, и $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_0$, — расстояния от произвольной точки M дуги A_1A_n окружности до соответствующих сторон. Докажите, что

$$\frac{a_0}{p_0}=\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}.$$

[В частности, если рассматриваемый n-угольник — правильный, то $\dfrac{1}{p_0}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\ldots+\dfrac{1}{p_{n-1}}$.]

256. Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — какие-то $n+1$ точек окружности Σ радиуса R.

а) Докажите, что если n чётно, то всегда можно построить окружности $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, касающиеся Σ соответственно в точках $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ и такие, что S_1 касается S_0 и S_2, S_2 касается S_1 и $S_3, \ldots, S_0$ касается S_n и S_1 (черт. 181). Выразите радиус окружности S_0 через R и расстояния между точками $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$.



Черт. 181.

б) Докажите, что если n нечётно и существуют окружности $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, касающиеся Σ в точках $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, такие, что S_1 касается S_0 и S_2, S_2 касается S_1 и $S_3, \ldots, S_0$ касается S_n и S_1, то

$$A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 \ldots A_{n-1}A_n = \\ = A_1A_2 \cdot A_3A_4 \ldots A_{n-2}A_{n-1} \cdot A_nA_0.$$

Из выражения для расстояния между точками A' и B', получающимися при инверсии из данных точек A и B, вытекает одно интересное следствие. Назовём **двойным** (или **сложным**) отношением четырёх точек A, B, C и D плоскости положительное число

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

(сравните с определением двойного отношения четырёх точек прямой; см. § 2 гл. I, стр. 49). Докажем, что инверсия обладает следующим свойством:

Г. *Двойное отношение четырёх точек плоскости сохраняется при инверсии.*

Действительно, пусть точки A, B, C и D переходят при инверсии в точки A', B', C' и D'. В таком случае формула (*), стр. 233, даёт

$$A'C' = AC \cdot \frac{k}{OA \cdot OC}, \qquad B'C' = BC \cdot \frac{k}{OB \cdot OC},$$

$$A'D' = AD \cdot \frac{k}{OA \cdot OD}, \qquad B'D' = BD \cdot \frac{k}{OB \cdot OD}.$$

Следовательно,

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{OB}{OA}, \quad \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{OB}{OA},$$

откуда

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

что и требовалось доказать (сравните с выводом свойства В центрального проектирования; см. § 2 гл. I, стр. 49).

Отметим ещё, что свойство Г инверсии не имеет смысла, если одна из рассматриваемых четырёх точек совпадает с центром инверсии (так как центр инверсии не переходит при инверсии ни в какую точку плоскости; см., впрочем, выше стр. 203).

257. Найдите геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно.

258. Докажите теорему Птолемея: если четырёхугольник может быть вписан в окружность, то сумма произведений противоположных сторон этого четырёхугольника равна произведению его диагоналей.

См. также ниже задачу 269 (стр. 246), а также задачу 86в) из § 1 гл. II второй части книги[1]).

---

[1]) Ещё одно доказательство и ряд приложений теоремы Птолемея имеются в цитированной на стр. 606 книге Д. О. Шклярского и др., Избранные задачи и теоремы, ч. 2.

259. Воспользуйтесь свойством Г инверсии для решения задачи 231 из § 2 (стр. 206—207).

Докажем теперь ещё одно свойство инверсии, которое можно рассматривать как обобщение свойства Г. Двойным (или сложным) отношением четырёх окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 мы будем называть выражение

$$\frac{t_{13}}{t_{23}} : \frac{t_{14}}{t_{24}},$$

где, например, t_{13} есть отрезок общей касательной окружностей S_1 и S_3 между точками касания, и так же определяются величины t_{23}, t_{14} и t_{24}[1]). При этом здесь некоторые (или даже все) из окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 могут являться точками (которые можно рассматривать как «окружности нулевого радиуса»). Если, например, S_1 и S_2 есть точки, то t_{13} есть просто расстояние S_1S_3 между этими точками; если S_1 есть точка, а S_3 — окружность, то t_{13} есть длина отрезка касательной, проведённой из точки S_1 к окружности S_3.

Имеет место следующее свойство инверсии:

$\bar{\Gamma}$. *Двойное отношение четырёх окружностей сохраняется при каждой инверсии, центр которой лежит вне всех этих окружностей или внутри всех их*[2]).

[При этом если в двойном отношении исходных окружностей фигурировала, например, общая внешняя касательная окружностей S_1 и S_3, то в двойном отношении преобразованных окружностей должна участвовать также общая

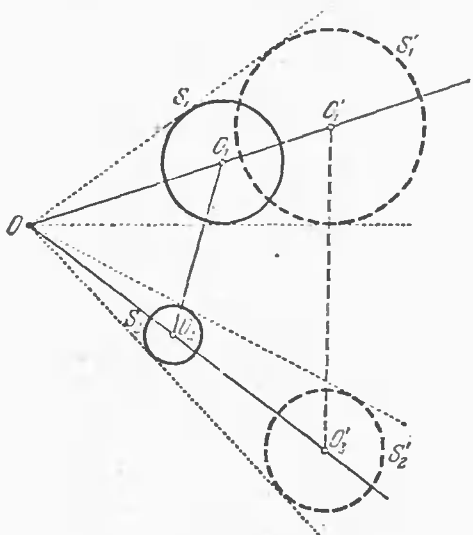
---

[1]) Принимая за t_{13} отрезок общей внешней или общей внутренней касательной окружностей S_1 и S_3 и аналогично для t_{23}, t_{14} и t_{24}, мы получим всего 16 различных двойных отношений четырёх данных попарно непересекающихся окружностей.

[2]) Если центр инверсии O лежит на какой-либо из рассматриваемых окружностей, то эта окружность переходит при инверсии в прямую и свойство $\bar{\Gamma}$ теряет смысл. Если O лежит вне некоторых рассматриваемых четырёх окружностей и внутри других, то свойство $\bar{\Gamma}$ тоже не выполняется. Так, если центр инверсии O лежит вне окружности S_1 и внутри окружности S_3 и эти две окружности лежат одна вне другой, то при инверсии они переходят в окружности S_1' и S_3', лежащие одна внутри другой, так что общей касательной окружностей S_1' и S_3' не существует и поэтому двойное отношение преобразованных окружностей нельзя определить.

внешняя касательная окружностей S_1' и S_3', в которые переходят S_1 и S_3 и т. д.[1]).]

Свойство $\overline{\Gamma}$ инверсии остаётся в силе и в том случае, если некоторые (или даже все) из рассматриваемых окружностей заменяются точками («окружностями нулевого радиуса»). В частности, если все окружности заменить точками, то мы снова приходим к свойству Г (которое, таким образом, действительно можно рассматривать как частный случай свойства $\overline{\Gamma}$).



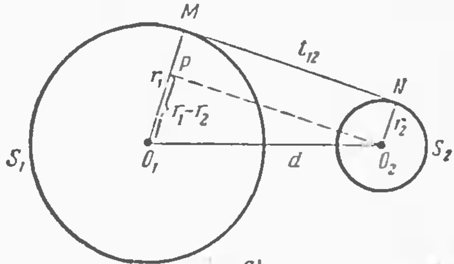
Черт. 182.

Для доказательства определим прежде всего, *как изменяется при инверсии длина отрезка общей касательной двух окружностей между точками касания.* Пусть S_1 и S_2 — две окружности (ни одна из которых не проходит через центр инверсии), S_1' и S_2' — окружности, в которые переходят при инверсии окружности S_1 и S_2 (черт. 182). Центр и степень инверсии мы обозначим соответственно через O и k, центры окружностей S_1, S_2 и S_1', S_2' через O_1, O_2

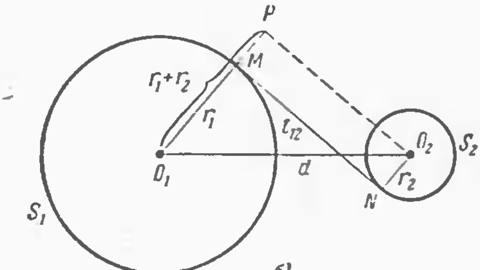
[1]) Если окружности все лежат одна вне другой, то при инверсии с центром вне их сохраняются все 16 двойных отношений этих окружностей (см. сноску [1]) на предыдущей странице).

и O_1', O_2', радиусы этих окружностей через r_1, r_2 и r_1', r_2'. Мы считаем, что центр инверсии O лежит вне S_1 и вне S_2 или внутри S_1 и S_2.

Пусть t_{12} и t_{12}' — длины отрезков общих касательных окружностей S_1 и S_2 и окружностей S_1' и S_2' между точками



а)



б)

Черт. 183.

касания. Из черт. 183, *а*, *б* непосредственно вытекает, что

$$t_{12}^2 = O_1O_2^2 - (r_1 \mp r_2)^2,$$

где знак минус в последней скобке отвечает случаю общей внешней касательной (черт. 183, *а*), а знак плюс — случаю общей внутренней касательной (черт. 183, *б*). Но

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \cos \angle O_1OO_2.$$

Таким образом, получаем:

$$t_{12}^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \cdot \cos \angle O_1OO_2 - r_1^2 - r_2^2 \pm 2r_1r_2,$$

или, несколько преобразуя,

$$t_{12}^2 = (OO_1^2 - r_1^2) + (OO_2^2 - r_2^2) - \\ - 2OO_1 \cdot OO_2 \cos\angle O_1OO_2 \pm 2r_1r_2.$$

Совершенно аналогично имеем:

$$t_{12}'^2 = (OO_1'^2 - r_1'^2) + (OO_2'^2 - r_2'^2) - \\ - 2OO_1' \cdot OO_2' \cos\angle O_1'OO_2' \pm 2r_1'r_2'.$$

Как мы видели при доказательстве свойства Б$_4$ инверсии (стр. 178—179), окружность S_1' центрально-подобна окружности S_1 с центром подобия O. При этом коэффициент подобия равен $\frac{k}{k_1}$, где k_1 — произведение расстояний от O до двух точек пересечения окружности S_1 с какой-либо секущей, проходящей через O, называемое степенью точки O относительно окружности S_1 (см. определение на стр. 222). Проведя секущую через центр O_1 окружности S_1, легко убеждаемся, что

$$k_1 = OO_1^2 - r_1^2$$

(ср. стр. 223). Итак, имеем:

$$OO_1'^2 = \left(\frac{k}{k_1}\right)^2 OO_1^2, \quad r_1'^2 = \left(\frac{k}{k_1}\right)^2 r_1^2$$

и аналогично

$$OO_2'^2 = \left(\frac{k}{k_2}\right)^2 OO_2^2, \quad r_2'^2 = \left(\frac{k}{k_2}\right)^2 r_2^2,$$

где $k_2 = OO_2^2 - r_2^2$ — степень точки O относительно окружности S_2.

Подставим теперь в формулу для $t_{12}'^2$ полученные выражения OO_1', OO_2', r_1' и r_2' и воспользуемся тем, что O_1' и O_2' лежат на прямых OO_1 и OO_2, т. е.

$$\angle O_1'OO_2' = \angle O_1OO_2$$

(см. черт. 182)[1]).

---

[1]) Здесь мы пользуемся тем, что коэффициенты подобия $\frac{k}{k_1}$ и $\frac{k}{k_2}$ оба положительны или оба отрицательны, так как по условию O лежит вне S_1 и вне S_2 или внутри S_1 и внутри S_2.

Мы получим:

$$t_{12}'^2=\frac{k^2}{k_1^2}(OO_1^2-r_1^2)+\frac{k^2}{k_2^2}(OO_2^2-r_2^2)-$$
$$-2\frac{k}{k_1}\cdot\frac{k}{k_2}\cdot OO_1\cdot OO_2\cos\angle O_1OO_2\pm 2\frac{k}{k_1}\cdot\frac{k}{k_2}r_1r_2=$$
$$=\frac{k^2}{k_1^2}\cdot k_1+\frac{k^2}{k_2^2}\cdot k_2-2\frac{k}{k_1}\cdot\frac{k}{k_2}\cdot OO_1\cdot OO_2\cos\angle O_1OO_2\pm$$
$$\pm 2\frac{k}{k_1}\cdot\frac{k}{k_2}r_1r_2=$$
$$=\frac{k^2}{k_1}+\frac{k^2}{k_2}-2\frac{k}{k_1}\cdot\frac{k}{k_2}\cdot OO_1\cdot OO_2\cos\angle O_1OO_2\pm$$
$$\pm 2\frac{k}{k_1}\cdot\frac{k}{k_2}r_1r_2=$$
$$=\frac{k^2}{k_1k_2}(k_2+k_1-2OO_1\cdot OO_2\cos\angle O_1OO_2\pm 2r_1r_2).$$

Учитывая теперь, что

$$k_2+k_1-2OO_1\cdot OO_2\cos\angle O_1OO_2\pm 2r_1r_2=(OO_2^2-r_2^2)+$$
$$+(OO_1^2-r_1^2)-2OO_1\cdot OO_2\cdot\cos\angle O_1OO_2\pm 2r_1r_2=t_{12}^2,$$

будем иметь:

$$t_{12}'=\frac{k}{\sqrt{k_1k_2}}t_{12}. \qquad (**)$$

Отметим, что если одну из двух окружностей S_1 и S_2 заменить точкой (например, считать, что $r_1=0$) или даже заменить точками обе окружности (считать, что $r_1=r_2=0$), то рассуждения, которые привели к формуле (**), останутся в силе; при этом под степенью k_1 точки O относительно точки S_1 надо будет понимать квадрат расстояния OS_1 ($k_1=OO_1^2-r_1^2$, где точка O_1 совпадает с S_1, а $r_1=0$). Следовательно, и формула (**) остаётся справедливой в том случае, когда одна из двух окружностей S_1 и S_2 или даже обе они заменяются точками. В частности, если и S_1 и S_2 — точки, то мы снова приходим к формуле (*) (стр. 233), которую, следовательно, можно считать частным случаем формулы (**).

Заметим ещё, что так как

$$r_1'=\frac{k}{k_1}r_1,\quad r_2'=\frac{k}{k_2}r_2,$$

то

$$r_1'r_2'=\frac{k^2}{k_1k_2}r_1r_2,\qquad \frac{k^2}{k_1k_2}=\frac{r_1'r_2'}{r_1r_2}$$

и, следовательно, полученную формулу можно переписать в виде

$$t'_{12} = \sqrt{\frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2}}\, t_{12}$$

или в виде

$$\frac{t'_{12}}{\sqrt{r'_1 r'_2}} = \frac{t_{12}}{\sqrt{r_1 r_2}}.$$

Последнее соотношение означает, что *выражение* $\frac{t_{12}}{\sqrt{r_1 r_2}}$ (длина отрезка общей касательной двух окружностей между точками касания, делённая на среднее пропорциональное радиусов окружностей) *не меняется при инверсии, центр которой лежит вне обеих окружностей или внутри обеих окружностей.*

Пусть теперь имеются четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 (некоторые из которых могут быть точками); при инверсии они переходят в четыре окружности (или точки) S'_1, S'_2, S'_3 и S'_4. Согласно формуле (**) имеем:

$$t'_{13} = \frac{k}{\sqrt{k_1 k_3}}\, t_{13},$$

$$t'_{14} = \frac{k}{\sqrt{k_1 k_4}}\, t_{14},$$

$$t'_{23} = \frac{k}{\sqrt{k_2 k_3}}\, t_{23},$$

$$t'_{24} = \frac{k}{\sqrt{k_2 k_4}}\, t_{24},$$

откуда сразу получаем:

$$\frac{t'_{13}}{t'_{23}} : \frac{t'_{14}}{t'_{24}} = \frac{t_{13}}{t_{23}} : \frac{t_{14}}{t_{24}},$$

что нам и требовалось доказать (сравните с доказательством свойства Г инверсии).

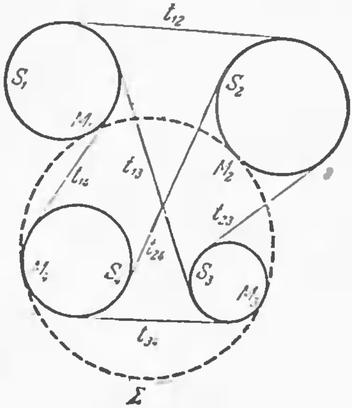
260. Найдите геометрическое место точек M таких, что отношение длин касательных, проведённых из M к двум заданным окружностям S_1 и S_2, имеет постоянную величину.

См. также задачу 88 из § 1 гл. II второй части книги и задачу 250б) из § 3 этой главы (стр. 231). Если считать S_1 и S_2 «окружностями нулевого радиуса», т. е. точками, то мы придём к задаче 257.

261. Докажите следующее обобщение теоремы Птолемея: если окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной и той же пятой окружности (или прямой) Σ (черт. 184), то имеет место соотношение

$$t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}=t_{13}t_{24},$$

где t_{12} есть отрезок общей касательной окружностей S_1 и S_2 и аналогичный смысл имеют величины t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24} и t_{34}.



Черт. 184.

[В условии этой задачи предполагается, что точки M_1, M_2, M_2 и M_4, в которых окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются Σ, располагаются вдоль Σ в порядке: M_1, M_2, M_3, M_4. Далее, например, t_{12} означает отрезок общей внешней касательной окружностей S_1 и S_2, если эти окружности имеют одноимённое касание с окружностью Σ — обе внешнее или обе внутреннее,— и отрезок общей внутренней касательной в противном случае; если Σ есть прямая, то t_{12} означает отрезок общей внешней касательной S_1 и S_2, когда эти две окружности расположены по одну сторону Σ, и отрезок общей внутренней касательной S_1 и S_2 в противном случае.]

Теорема задачи 261 остаётся справедливой и в том случае, когда некоторые из окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 заменяются точками («окружностями нулевого радиуса»). Если все окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 заменить точками, то мы придём к теореме Птолемея (см. задачу 258).

262. Докажите, что если четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 проходят через одну точку Σ, то длины отрезков общих касательных этих окружностей удовлетворяют соотношению задачи 261.

Если рассматривать точку как частный случай окружности («окружность нулевого радиуса»), то теорему задачи 262 следует считать частным случаем теоремы задачи 261. Однако в то время как в формулировке задачи 261 мы объединили те случаи, когда Σ есть окружность и когда Σ есть прямая («окружность бесконечно большого радиуса»), предложение задачи 262 уже требует отдельного доказательства. Это связано с тем, что в теории инверсии окружности и прямые являются равноправными (окружность может при инверсии переходить в прямую, а прямая — в окружность), а точки и окружности не являются равноправными. Соответственно этому в тех случаях, когда в решении задач используется инверсия, часто оказывается возможным заменить участвующую в условии задачи окружность прямой (другими словами, рассматривать прямую как частный случай окружности) или прямую окружностью, без того чтобы в решении что-нибудь изменилось. Однако случай, когда вместо окружности в условии задачи фигурирует точка, всегда требует отдельного рассмотрения [1]).

Заметим, что имеет место также и теорема, обратная предложениям задач 261—262. А именно, *если длины отрезков общих касательных четырёх окружностей удовлетворяют соотношению задачи* 261, *то эти четыре окружности обязательно касаются одной и той же пятой окружности или прямой или проходят все через одну точку* (см. задачу 273б) из § 5, стр. 267).

263. Докажите, что если четыре попарно пересекающиеся окружности S_1, S_2, S_3, и S_4 касаются одной окружности или прямой Σ или проходят через одну точку Σ, то углы между этими окружностями удовлетворяют соотношению

$$\sin\frac{\alpha_{12}}{2}\sin\frac{\alpha_{34}}{2}+\sin\frac{\alpha_{14}}{2}\sin\frac{\alpha_{23}}{2}=\sin\frac{\alpha_{13}}{2}\sin\frac{\alpha_{24}}{2},$$

---

[1]) Исключение составляют формула (**) и свойство Γ инверсии, которые, как было показано выше, сохраняют силу, если часть окружностей или все они заменяются точками. Поэтому в задачах, опирающихся на формулу (**) или свойство Γ, можно часть окружностей заменить точками. Именно поэтому в формулировке задачи 261 мы можем считать, что некоторые из окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 являются «окружностями нулевого радиуса», т. е. точками. Наоборот, прямыми окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 заменить нельзя (ибо формула (**) и свойство Γ инверсии теряют смысл при замене окружностей прямыми).

где, например, α_{12} есть угол между окружностями S_1 и S_2 (точнее, угол между радиусами этих окружностей, проведёнными в точку пересечения).

[Здесь предполагается, что точки касания окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 с окружностью или прямой Σ расположены на Σ в том порядке, который оговорён в условии задачи 261; если же Σ есть точка, то радиусы $O_1\Sigma$, $O_2\Sigma$, $O_3\Sigma$ и $O_4\Sigma$ окружностей S_1, S_2, S_3, S_4 располагаются вокруг Σ в порядке: ΣO_1, ΣO_2, ΣO_3, ΣO_4.]

Применение линейных преобразований к геометрическим задачам на доказательство в §§ 1—3 предыдущей главы сводилось чаще всего к упрощению чертежа задачи при помощи подходящим образом выбранного линейного преобразования. По другой линии шло применение полярного преобразования плоскости в задачах § 4 гл. I: там мы, преобразовывая чертёж какой-либо известной нам теоремы, приходили к новому предложению, которое уже не нуждалось в доказательстве, так как его справедливость вытекала из справедливости исходного предложения. Таким образом, основная ценность полярного преобразования заключалась в том, что с помощью этого преобразования мы могли получать из каких-либо известных теорем совершенно новые предложения.

В задачах 212—227 из § 1 и задачах 253—263 настоящего параграфа инверсия использовалась для упрощения чертежа задачи аналогично применению линейных преобразований в §§ 1—3 гл. I. Ясно, однако, что это преобразование с успехом может быть также использовано и для получения новых теорем из уже известных: инверсия очень сильно изменяет чертежи (переводит прямые линии в окружности), и поэтому полученная таким образом новая теорема может значительно отличаться от первоначальной. Некоторые примеры такого применения инверсии даны в последующих задачах 264—270 [1]).

264. а) Известно, что геометрическим местом центров окружностей, одновременно касающихся двух пересекающихся прямых l_1 и l_2, являются биссектрисы углов, образованных

---

[1]) Отметим, что во всех задачах подобного рода, строго говоря, инверсию надо применять два раза (сравните со сноской на стр. 99).

этими прямыми. В какое предложение переходит эта теорема, если преобразовать её чертёж с помощью инверсии?

б) Геометрическим местом центров окружностей, пересекающих две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 под равными углами, тоже являются биссектрисы углов, образованных прямыми l_1 и l_2. В какое предложение переходит эта теорема, если преобразовать её чертеж с помощью инверсии?

в) Постройте окружность, пересекающую четыре данные попарно пересекающиеся окружности под разными углами.

265. В какое предложение переходит при инверсии теорема: сумма углов треугольника равна 180°?

266. В какое предложение переходит при инверсии теорема:

а) высоты треугольника пересекаются в одной точке?

б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке?

267. В какое предложение переходит теорема о прямой Симсона (см. задачу 85 из § 1 гл. II второй части книги) при инверсии с центром в точке P?

268. В какую теорему переходит при инверсии предложение: окружность есть геометрическое место точек, равноудалённых от одной точки (определение окружности)?

269. а) В какую теорему переходит при инверсии теорема: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон?

б) Докажите теорему, обратную теореме Птолемея (см. выше задачу 258, стр. 236): если сумма произведений противоположных сторон некоторого четырёхугольника равна произведению диагоналей, то вокруг этого четырёхугольника можно описать окружность.

270. В какое предложение переходит при инверсии:

а) теорема Пифагора;

б) теорема косинусов;

в) теорема синусов.

Свойство Б инверсии утверждает, что при этом преобразовании каждая окружность переходит снова в окружность (здесь к числу окружностей мы причисляем также и прямые, которые рассматриваются как «окружности бесконечно большого радиуса»). Все преобразования плоскости, обладающие этим свойством, называются круговыми преобразованиями. Простейшие примеры круговых преобразований дают движения и преобразования подобия. При этом и движения и преобразования подобия переводят также и прямые линии в прямые линии, т. е. являются одновременно и круговыми и линейными преобразованиями (см. § 1 гл. I, стр. 26). Инверсия тоже является примером кругового преобразования, однако более сложного, чем движения или преобразования подобия (это преобразование уже, разумеется, не является линейным).

Можно показать, что всякое преобразование, одновременно и круговое и линейное, есть преобразование подобия, а всякое круговое преобразование, не являющееся линейным, можно свести к инверсии. Точнее, имеют место следующие две замечательные теоремы:

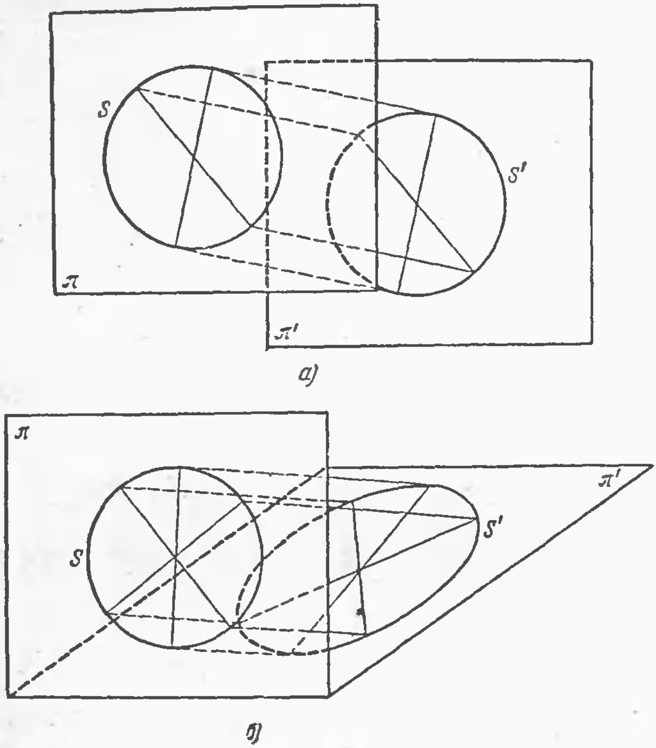
Теорема 1. *Всякое круговое преобразование плоскости, являющееся одновременно и линейным, есть преобразование подобия.*

Теорема 2. *Всякое круговое преобразование плоскости или представляет собой преобразование подобия, или может быть осуществлено при помощи инверсии и последующего преобразования подобия.*

Из теоремы 2 следует, что круговые преобразования плоскости можно определить как преобразования инверсии, сопровождаемые ещё, быть может, преобразованием подобия (см. по этому поводу конец первой части книги, т. I, стр. 67—69). В частности, отсюда вытекает, что все круговые преобразования обладают свойствами А, Б, В и Г инверсии (см. выше стр. 176—180 и 236), поскольку и преобразования подобия, очевидно, обладают этими свойствами. Наконец, теорема 2 позволяет также решить вопрос о сумме двух (или нескольких) инверсий: такая сумма должна представлять собой инверсию, сопровождаемую преобразованием подобия (поскольку эта сумма есть круговое преобразование плоскости).

Доказательство теоремы 1. Выше мы уже видели, что всякое линейное преобразование плоскости представляет собой параллельное проектирование плоскости на себя, сопровождаемое, быть может, последующим преобразованием подобия (см. теорему 2 § 1 гл. I, стр. 26). Таким образом, нам надо только выяснить, в каком случае параллельное проектирование плоскости на себя переводит окружности в окружности.

Совершенно очевидно, что при параллельном проектировании плоскости π на параллельную ей плоскость π' каждая окружность плоскости π переходит в окружность плоскости π': действительно, такое параллельное проектирование представляет собой не что иное, как параллельный перенос плоскости π в пространстве в направлении проектирования до совмещения её с π' [1]) (черт. 185, *а*). С другой стороны, если плоскость π не параллельна π', то параллельное



Черт. 185.

проектирование не может перевести окружность в окружность. Действительно, при таком проектировании диаметр окружности, параллельный линии пересечения плоскостей π и π', переходит в отрезок той же самой длины, а остальные диаметры перейдут в отрезки другой длины; следовательно, кривая, в которую перейдёт окружность, уже не будет окружностью (черт. 185, *б*). Таким образом, *для того чтобы параллельное проектирование плоскости на себя переводило окружности в окружности, необходимо, чтобы новое поло-*

---

[1]) См. сноску на стр. 18.

жение плоскости, из которого производится проектирование на её первоначальное положение (см. выше стр. 25), *было параллельно первоначальному положению.* А так как в этом случае параллельное проектирование можно заменить параллельным переносом плоскости в пространстве, то такое параллельное проектирование плоскости на себя будет равносильно некоторому движению. Отсюда и из теоремы 2 § 1 гл. I следует теорема 1.

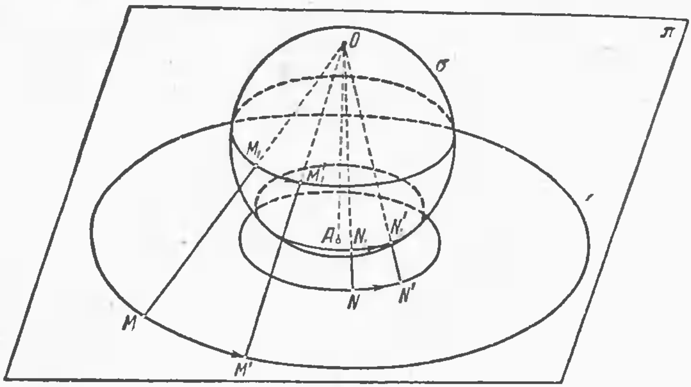
Доказательство теоремы 2. При доказательстве теоремы 2 (которое значительно сложнее доказательства теоремы 1) основную роль играет стереографическая проекция сферы на плоскость (см. § 3 гл. I, стр. 71). Особенно важным оказывается доказанное в § 3 гл. I основное свойство стереографической проекции: *стереографическая проекция переводит каждую окружность плоскости* (к которым, как и всюду в настоящем параграфе, причисляются также и прямые) *в окружность сферы* (см. теорему 2 § 3 гл. I, стр. 71—72).

Пусть K есть какое-нибудь преобразование плоскости π. Спроектировав при помощи стереографической проекции плоскость π на сферу σ, мы получим некоторое преобразование $\overline{K}$ сферы σ, отвечающее преобразованию K плоскости. Так, например, вращению плоскости π вокруг точки A, в которой сфера σ касается плоскости π, отвечает вращение σ вокруг диаметра, проходящего через точку A (черт. 186, *а*); параллельному переносу π в каком-то направлении a соответствует преобразование σ, при котором каждая точка сферы сдвигается по кругу, проходящему через центр проекции и расположенному в плоскости, параллельной направлению a (черт. 186, *б*). Из основного свойства стереографической проекции следует, что *если преобразование* K *плоскости являлось круговым, то преобразование* $\overline{K}$ *сферы тоже будет круговым*, т. е. будет переводить каждую окружность сферы снова в окружность. Обратно, из того, что преобразование $\overline{K}$ сферы является круговым, следует, что и отвечающее ему преобразование K плоскости является круговым.

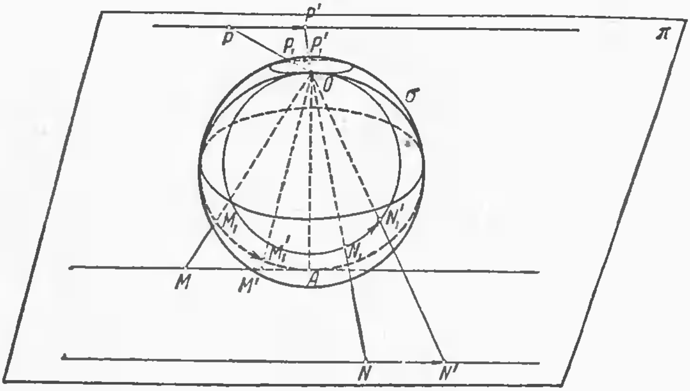
Пусть теперь K — некоторое круговое преобразование плоскости π, $\overline{K}$ — отвечающее ему круговое преобразование сферы σ. *Если преобразование* $\overline{K}$ *оставляет на месте центр проекции* O, *то* K *есть преобразование подобия.*

Действительно, в § 3 гл. I мы видели, что прямые плоскости π переходят при стереографической проекции в окружности сферы σ, проходящие через O (см. черт. 53 на стр. 72). Преобразование $\overline{K}$ сферы σ, оставляющее точку O на месте, переводит, очевидно, каждую окружность, проходящую через O, снова в окружность, проходящую через O. Отсюда следует, что преобразование K плоскости π переводит каждую прямую этой плоскости снова в прямую, т. е. является одновременно круговым и линейным. А это возможно только в том случае, если K есть преобразование подобия (см. теорему 1).

Предположим теперь, что круговое преобразование $\overline{K}$ сферы σ не оставляет точку O на месте. Обозначим через O_1 точку, которую преобразование $\overline{K}$ переводит в точку O, и через δ — диаметральную плоскость сферы, перпендикулярную к отрезку OO_1 (черт. 187). Пусть $\overline{\mathrm{I}}$ — симметрия сферы σ относительно плоскости δ (т. е. $\overline{\mathrm{I}}$ есть преобразование сферы σ, переводящее каждую точку $\overline{M}$ в точку $\overline{M}'$, симметричную M относительно плоскости δ). $\overline{\mathrm{I}}$ есть круговое преобразова-



а)

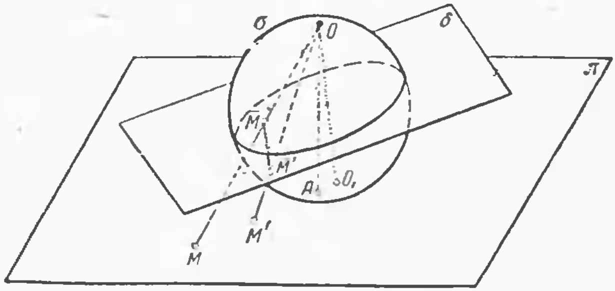


б)

Черт. 186.

ние сферы, тоже переводящее точку O_1 в точку O. Обозначим далее через $\overline{\mathrm{K}}_1$ такое преобразование сферы, что $\overline{\mathrm{K}}$ можно представить как сумму преобразований $\overline{\mathrm{I}}$ и $\overline{\mathrm{K}}_1$ (т. е. преобразование $\overline{\mathrm{K}}$ получается, если последовательно осуществить два преобразования $\overline{\mathrm{I}}$ и $\overline{\mathrm{K}}_1$ [1]). Нетрудно видеть, что $\overline{\mathrm{K}}_1$ есть тоже круговое преобразование сферы: если $\overline{S}_1$ есть окружность сферы, в которую переводит преобразование $\overline{\mathrm{I}}$ окружность $\overline{S}$, а $\overline{\mathrm{K}}$ переводит $\overline{S}$ в $\overline{S}'$, то $\overline{\mathrm{K}}_1$ переводит $\overline{S}_1$ в $\overline{S}'$. Кроме того, преобразование $\overline{\mathrm{K}}_1$ оставляет точку O на месте (ибо $\overline{\mathrm{K}}$ и $\overline{\mathrm{I}}$ переводят O_1 в одну и ту же точку O).

Из того, что $\overline{\mathrm{K}}$ можно представить в виде суммы преобразований $\overline{\mathrm{I}}$ и $\overline{\mathrm{K}}_1$, следует, что исходное круговое преобразование K плоскости можно представить в виде суммы преобразований I и K_1,



Черт. 187.

отвечающих в силу стереографической проекции соответственно преобразованиям $\overline{\mathrm{I}}$ и $\overline{\mathrm{K}}_1$. Так как преобразование $\overline{\mathrm{K}}_1$ оставляет центр проекции O на месте, то K_1 есть преобразование подобия (см. выше). Докажем, что I представляет собой инверсию; этим будет завершено доказательство теоремы 2.

Пусть $\overline{\Sigma}$ есть окружность, по которой пересекает сферу плоскость δ, Σ — окружность плоскости, в которую переходит $\overline{\Sigma}$ при стереографической проекции. Так как симметрия $\overline{\mathrm{I}}$ оставляет все точки $\overline{\Sigma}$ на месте, то при преобразовании I каждая точка окружности Σ переходит в себя. Далее, так как при симметрии $\overline{\mathrm{I}}$ две полусферы, на которые делится сфера плоскостью δ, переходят друг в друга, то преобразование I переводит внешность окружности Σ во внутреннюю область этой окружности, и наоборот. Докажем, что каждая окружность S, перпендикулярная к Σ, переходит при преобразовании I в себя.

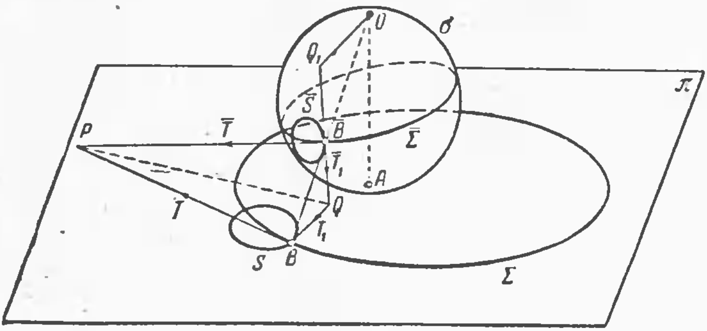
Пусть $\overline{S}$ есть некоторая окружность сферы, перпендикулярная к окружности $\overline{\Sigma}$ (черт. 188); это значит, что плоскость окружности $\overline{S}$ перпендикулярна к плоскости δ. Обозначим через S окружность

---

[1]) Другими словами: если $\overline{M}_1$ есть точка сферы σ, в которую переводит преобразование $\overline{\mathrm{I}}$ некоторую точку $\overline{M}$, а $\overline{\mathrm{K}}$ переводит $\overline{M}$ в точку $\overline{M}'$, то $\overline{\mathrm{K}}_1$ переводит $\overline{M}_1$ в $\overline{M}'$.

(или прямую) плоскости, в которую переходит $\overline{S}$ при стереографической проекции. Очевидно, что при симметрии $\overline{I}$ окружность $\overline{S}$ переходит сама в себя; следовательно, преобразование I переводит в себя S. Покажем, что окружность S перпендикулярна к окружности Σ.

Пусть $\overline{B}\overline{T}$ и $\overline{B}\overline{T}_1$—касательные к окружностям $\overline{\Sigma}$ и $\overline{S}$ в точке $\overline{B}$ их пересечения; $\overline{B}\overline{T}_1 \perp \overline{B}\overline{T}$. При центральном проектировании с центром в точке O прямые $\overline{B}\overline{T}$ и $\overline{B}\overline{T}_1$ переходят в касательные BT и BT_1 к окружностям Σ, соответственно S, в точке их пересечения B. Точки пересечения $\overline{B}\overline{T}$ и $\overline{B}\overline{T}_1$ с плоскостью π обозначим через P и Q;



Черт. 188.

пусть ещё Q_1— точка пересечения $\overline{B}\overline{T}_1$ с плоскостью π_1, параллельной π и проходящей через O (плоскость π_1 не изображена на чертеже). Так как треугольники $\overline{B}OQ_1$ и $\overline{B}BQ$ подобны (ибо $Q_1O \| QB$ как линии пересечения плоскости $\overline{B}QB$ с двумя параллельными плоскостями π_1 и π) и $Q_1\overline{B} = Q_1O$ (как две касательные к сфере σ, проведённые из точки Q_1), то $QB=Q\overline{B}$; точно так же показывается, что $PB=P\overline{B}$. А теперь из равенства треугольников PBQ и $P\overline{B}Q$ заключаем, что [1])

$$\angle PBQ = \angle P\overline{B}Q = 90^\circ,$$

т. е. что окружности S и Σ перпендикулярны.

Таким образом, мы видим, что при преобразовании I все точки окружности Σ остаются на месте и каждая окружность S, перпенди-

[1]) Доказательство равенства углов $\overline{T}\overline{B}\overline{T}_1$ и TBT_1, разумеется, сохраняет силу и в этом случае, когда угол $\overline{T}\overline{B}\overline{T}_1$ не прямой. Отсюда следует, что *углы между окружностями при стереографической проекции сохраняются* (т. е. угол между двумя окружностями $\overline{\Sigma}$ и $\overline{S}$ сферы σ равен углу между окружностями или прямыми Σ и S плоскости π, в которые они переходят). [Вообще стереографическая проекция есть к о н ф о р м н о е отображение сферы σ на плоскость π в смысле определения, приведённого в сноске на стр. 183.]

кулярная к Σ, переходит в себя[1]). Следовательно, совокупность окружностей, перпендикулярных к Σ и проходящих через фиксированную точку A (см. выше черт. 127, стр. 172), переходит в себя. Отсюда, учитывая, что внешность окружности Σ переходит во внутренность Σ и наоборот, мы с необходимостью заключаем, что точка A при преобразовании I переходит в точку A', симметричную A относительно Σ, т. е. что I есть симметрия относительно окружности Σ.

Отметим ещё, что наличие на плоскости особой точки, не переходящей при симметрии относительно окружности ни в какую точку плоскости, не позволяет, строго говоря, считать инверсию преобразованием плоскости в обычном смысле этого слова (обычно от преобразования плоскости требуют, чтобы оно переводило каждую точку A в какую-нибудь точку A'). Соответственно этому формулировка основной теоремы 2 не является вполне аккуратной. Впрочем, нетрудно понять, что преобразование плоскости в обычном смысле никогда не может переводить окружность (являющуюся замкнутой кривой) в прямую (незамкнутую кривую); поэтому все преобразования плоскости в обычном смысле этого слова, которые переводят окружности и прямые снова в окружности и прямые (т. е. являются круговыми преобразованиями), переводят прямые линии в прямые линии и окружности в окружности, т. е. являются преобразованиями подобия (см. теорему 1). То, что мы выше называли круговыми преобразованиями, можно было бы вполне строго определить аналогично обобщённым линейным преобразованиям (см. § 2 гл. I, стр. 68) как преобразования, переводящие некоторую область Ω плоскости в другую область Ω' и каждую окружность или прямую, пересекающую Ω, в окружность или прямую, пересекающую Ω' (*обобщённые круговые преобразования*)[2]). Мы не остановимся подробнее на этом вопросе.

---

[1]) Нетрудно видеть, что *каждая* окружность плоскости, перпендикулярная к Σ, может быть получена стереографической проекцией из некоторой окружности $\overline{S}$, перпендикулярной к $\overline{\Sigma}$ (это следует, например, из того, что таким образом можно получить окружность, перпендикулярную к Σ и пересекающую Σ в произвольной наперёд заданной паре точек); отсюда следует, что *каждая* окружность, перпендикулярная к Σ, переходит при преобразовании I в себя.

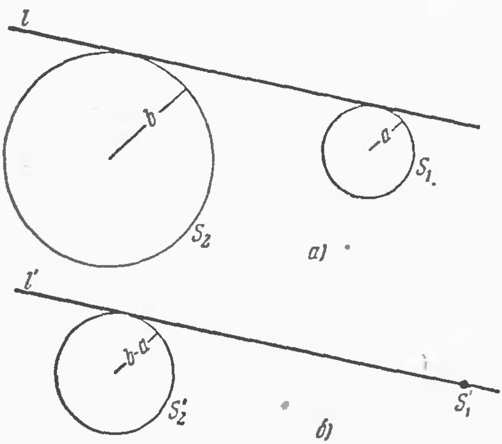
[2]) Вполне строго было бы также говорить о круговых преобразованиях *конформной плоскости* (см. сноску на стр. 203); неявно мы именно так и поступали во всех предыдущих рассуждениях (отметим, что стереографическая проекция есть отображение точек сферы σ на точки *конформной* плоскости π — в «бесконечно удалённую» точку плоскости π переходит точка O сферы).

§ 5. Осевые круговые преобразования

А. Расширение

В начале этого параграфа мы рассмотрим одно простое преобразование, иногда оказывающееся полезным при решении геометрических задач. По своим свойствам это преобразование значительно отличается от всех тех, которые мы изучали до этого.

Вспомним следующую известную задачу, решение которой изложено в школьном учебнике геометрии Киселёва: *построить общую касательную к двум данным окружностям.*

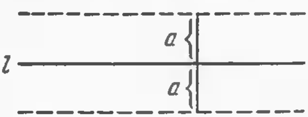


Черт. 189.

Решение этой задачи заключается в следующем. Предположим, что задача решена (черт. 189, *а*; для определённости мы здесь ограничиваемся случаем общей внешней касательной). Теперь преобразуем наш чертёж, уменьшив радиусы a и b ($a < b$) данных окружностей S_1 и S_2 на одну и ту же величину a, а центры их оставив прежними; при этом окружность S_1 перейдёт в точку S_1', а окружность S_2 — в окружность S_2' радиуса $b-a$ (черт. 189, *б*). Очевидно, что касательная l', проведённая из точки S_1' к окружности S_2', параллельна общей касательной l окружностей S_1 и S_2 и расстояние между l и l' равно a. Прямую l' нетрудно построить, используя известное построение касательной, проведённой к данной окружности из данной точки; после этого легко найти и искомую прямую l, сдвинув прямую l' на расстояние a в направлении, перпендикулярном к l'.

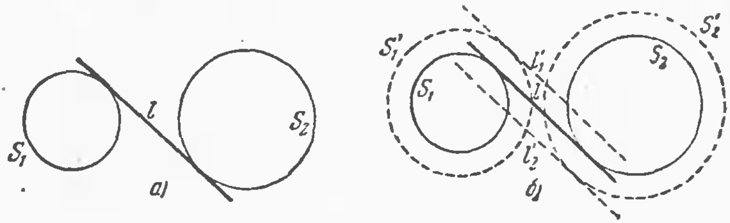
Преобразование, переводящее черт. 189, *б* в черт. 189, *а*, называется расширением на величину a; это преобразование чертежа заключается в том, что *радиусы всех окружностей увеличиваются на одну и ту же величину* a (так что точки, которые можно рассматривать как окружности нулевого радиуса, переходят в окружности радиуса a), *а все прямые сдвигаются в направлении, перпендикулярном к ним, на расстояние* a. Преобразование, переводящее черт. 189, *а* в черт. 189, *б* называется расширением на отрицательную величину $-a$ («сжатием»); при этом преобразовании радиусы всех имеющихся на чертеже окружностей уменьшаются на одно и то же число a.

Теперь, прежде чем идти дальше и изучать свойства расширения, нам необходимо остановиться на одном обстоятельстве, весьма существенном для всего дальнейшего содержания этого параграфа. Дело в том, что данное нами определение расширения без дополнительных разъяснений не имеет смысла. Во-первых, это определение не объясняет, во что переходят при расширении на отрицательную величину $-a$ (т. е. при сжатии) окружности, радиусы которых меньше a (например, точки). Но если даже ограничиться пока лишь расширениями на положительную величину, то и здесь не всё оказывается в порядке. Действительно, мы говорили, что при этом преобразовании каждая прямая сдвигается перпендикулярно к себе на расстояние a. Но ведь прямых, отстоящих от данной прямой l на расстояние a, имеется не одна, а две (черт. 190). Как же определить, в какую именно из этих двух прямых переходит прямая l при расширении?



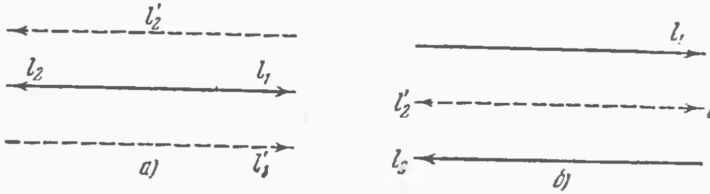
Черт. 190.

В выше разобранной задаче (черт. 189) этот вопрос решался тем, что прямая l касалась окружности S_2: мы сдвигали её так, чтобы после этого она касалась «расширенной» (в этом случае на самом деле «сжатой») окружности S_2'. Однако ясно, что в общем случае это не есть решение вопроса. Если рассмотреть черт. 191, *а*, где прямая l касается сразу двух окружностей, то здесь мы должны бы были предположить, что при расширении чертежа прямая «раздваивается», переходя сразу в две различные прямые l'_1 и l'_2 (черт. 191, *б*). Кроме того, мы совсем не можем определить, в какую прямую переходит при расширении прямая, не касающаяся ни одной окружности чертежа. Таким образом, если мы хотим научиться применять расширение к любому чертежу, то мы обязаны дополнить данное выше определение и, помимо задания величины a, на которую сдвигается каждая прямая, указать ещё, в **какую сторону** эта прямая сдвигается.



Черт. 191.

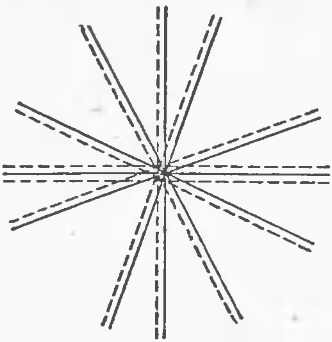
Обе стороны, в которые можно сдвигать заданную прямую, совершенно равноправны, и у нас нет **никакой возможности** выделить какую-либо одну из них. Для того чтобы иметь возможность различать два направления, перпендикулярных к данной прямой, надо предварительно задать **направление** этой прямой; только после этого становится возможным говорить о сдвиге прямой «вправо» или «влево» (аналогично тому, как для того, чтобы иметь возможность говорить о «правой» и «левой» сторонах улицы, необходимо предварительно указать, в каком направлении движется по этой улице человек). Прямая, на которой выделено определённое направление (на чертежах обычно обозначаемое стрелкой), называется **направленной прямой** или **осью**; мы будем чаще употреблять первое название. Таким образом, для того чтобы определить полностью преобразование расширения, необходимо привлечь понятие направленных прямых. Если считать, что все прямые чертежа являются направленными, то можно условиться, что *при расширении на положительную величину a каждая прямая* *сдвигается перпендикулярно к себе самой на расстояние a в определённом направлении* (например, в п р а в о, как мы и будем считать во всём дальнейшем); при этом каждая (направленная) прямая перейдёт во вполне определённую (направленную) прямую и никакие две различные (направленные) прямые не перейдут в одну и ту же (направленную)



Черт. 192.

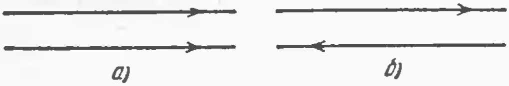
прямую. Ясно, что две прямые l_1 и l_2, отличающиеся только своим направлением, перейдут при расширении в две различные прямые l_1' и l_2' (черт. 192, a); таким образом, мы получаем возможность объяснить «удвоение» прямой l при расширении черт. 191, a. Обратно, в две прямые l_1' и l_2', отличающиеся только направлением, при расширении переходят две различные прямые l_1 и l_2 (черт. 192, $б$); следовательно, при расширении различные по положению на плоскости прямые могут «сливаться».

Необходимость введения направленных прямых можно пояснить ещё так. Предположим, что горизонтальная прямая при расширении сдвигается на расстояние a в в е р х. Естественно требовать, чтобы прямые, соседние с горизонтальной (т. е. прямые, пересекающие горизонталь под очень малыми углами), сдвигались также в направлении, близком к направлению вверх, а не в противоположном направлении (требование н е п р е р ы в н о с т и преобразования). Теперь точно так же можно определить направление, в котором должны сдвигаться прямые, близкие к этим близким к горизонтали прямым, и т. д. Рассмотрим пучок прямых, получающихся из горизонтали вращением её в направлении против часовой стрелки на всевозможные углы от 0° до 180° (черт. 193). Если требовать, чтобы соседние прямые сдвигались в близких направлениях, то из того, что горизонтальная прямая сдвигается вверх, однозначно определится направление сдвига всех прямых пучка: соседние с горизонталью прямые должны будут сдвигаться вверх и слегка налево (здесь слово «налево» означает, разумеется, не «налево относительно прямой», так как прямая считается ненаправленной, а «налево относительно человека, смотрящего на плоскость»), прямая, образующая с горизонталью угол 45°, должна будет сдвигаться вверх и налево, вертикальная прямая — точно налево, прямая, образующая с горизонталью угол 180° (т. е. та же горизонталь),— точно вниз. Итак: если требовать, чтобы расширение было непрерывным преобразованием (а не непрерывные преобразования, при которых соседние точки или соседние прямые расползаются в совершенно различных направлениях, в геометрии не могут быть интересными), то горизонтальная прямая при расширении обязана сдвигаться одновременно и вверх и вниз: иначе мы не сможем объяснить, как преобразуется черт. 193. Единственный выход из этого затруднения: считать прямые «двойными», т. е. различать их не только по положению на плоскости, но ещё и «по направлению». Если ввести такое условие, то при повороте на 180° направленная горизонтальная прямая перейдёт в прямую с противоположным направлением, сдвигающуюся при расширении в противоположную сторону (вниз), что нам и требовалось.



Черт. 193.

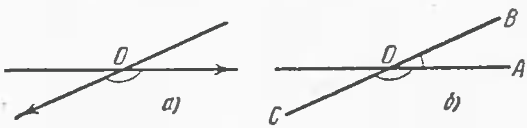
В дальнейшем на всём протяжении этого параграфа мы под словом «прямая» всегда будем подразумевать направленную прямую («ось»); при этом прилагательное «направленная» часто будет опускаться. [Исключение составляют формулировки задач этого параграфа, где прямые считаются ненаправленными.] Две направленные прямые мы будем называть **параллельными** только в том случае, если они параллельны в обычном смысле и одинаково направлены (черт. 194, *а*);



Черт. 194.

таким образом (направленные) прямые, изображённые на черт. 194, *б*, не считаются параллельными. **Углом** между двумя направленными прямыми мы будем называть угол, определяемый лучами, соответствующими направлениям этих прямых, указанным стрелкой (черт. 195, *а*). В то время как углу между двумя ненаправленными прямыми можно по желанию приписывать одно из двух значений (угол AOC или AOB на черт. 195, *б*), угол между двумя направленными прямыми всегда имеет одно определённое значение (разумеется, с точностью до слагаемого, кратного 360°).

Введение направленных прямых устраняет первое из двух затруднений, возникших в связи с приведённым в начале параграфа определением расширения. Теперь можно следующим образом уточнить это определение: *расширением на положительную величину a называется такое преобразование чертежа T*, состоящего из некоторого числа окружностей и направленных прямых (осей), *при котором каждая*

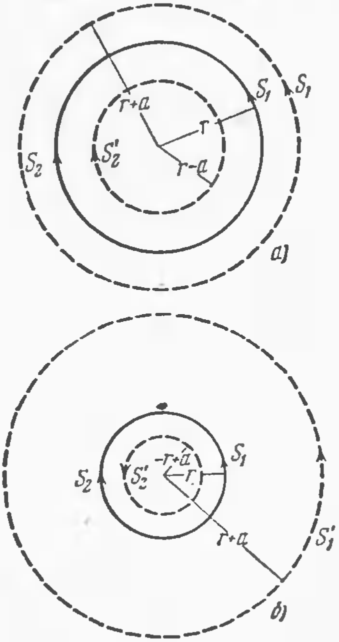


Черт. 195.

окружность заменяется окружностью с тем же центром и радиусом, на a бо́льшим первоначального (в частности, точки, которые здесь рассматриваются как окружности радиуса нуль, переходят в окружности радиуса a), *а каждая* (направленная) *прямая сдвигается вправо на расстояние a*. Однако пока мы ещё не можем определить расширения на отрицательную величину $-a$, так как не ясно, как можно уменьшить на a радиус окружности, если он с самого начала был меньше a. Формально следует считать, что окружность радиуса $r < a$ при расширении на отрицательную величину $-a$ перейдёт в окружность отрицательного радиуса $r - a = -(a - r)$, но пока не ясно, что это должно означать.

Выход из положения здесь подсказывается тем, как было устранено выше затруднение с преобразованием при расширении прямых линий. Будем считать, что все окружности плоскости являются сдвоенными: каждым положению центра и радиусу отвечают две окружности противоположных направлений. На чертежах направление окружности (как и направление прямой) мы будем обозначать стрелкой; окружности с указанным направлением будем называть направленными окружностями или циклами (мы будем чаще употреблять первое название). Примем какое-то определённое направление (например, направление против часовой стрелки, как мы будем считать во всём дальнейшем) за положительное, а противоположное направление (по часовой стрелке) — за отрицательное. Радиус положительно направленных окружностей условимся считать положительным, а радиус отрицательно направленных окружностей — отрицательным.

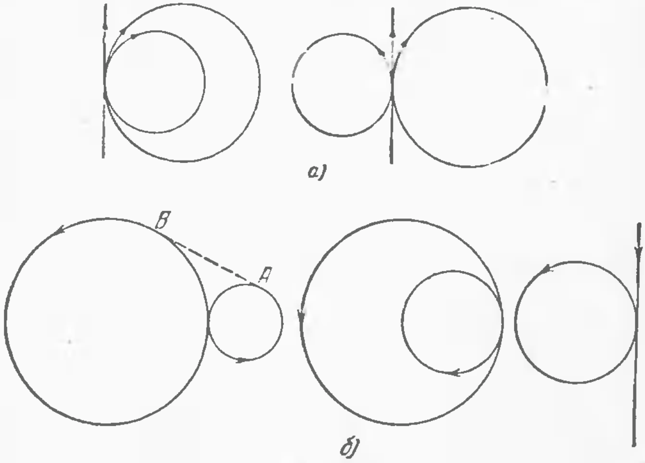
Теперь мы можем дать окончательное определение расширения. А именно, *расширением на величину a* (a может быть как положительным, так и отрицательным) *мы будем называть такое преобразование чертежа*, состоящего из направленных прямых (осей) и направленных окружностей (циклов), *при котором каждая* (направленная) *окружность с центром O и радиусом r переходит в* (направленную) *окружность с тем же центром O и радиусом $r+a$, а каждая* (направленная) *прямая сдвигается вправо на расстояние a*. При этом под сдвигом на отрицательное расстояние $-a$ мы будем подразумевать сдвиг на расстояние a в обратном направлении (т. е. влево).



Черт. 196.

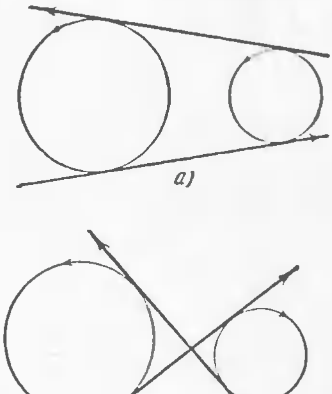
Если расширение на величину a переводит чертёж T в новый чертёж T', то, очевидно, обратно, чертёж T' переходит в T при расширении на величину $-a$. Легко видеть, что при расширении две направленные окружности S_1 и S_2, отличающиеся только направлением (т. е. окружности радиусов r и $-r$), переходят в две различные окружности S_1' и S_2' радиусов $r+a$ и $-r+a$ (окружность «раздвоилась»; см. черт. 196, *а*, *б*, где отдельно изображены случаи $a<r$ и $a>r$); обратно, в две окружности S_1' и S_2', отличающиеся только направлением, переходят при расширении две различные окружности S_1 и S_2.

В дальнейшем на всём протяжении этого параграфа мы под словом «окружность» всегда будем понимать направленную окружность («цикл»); при этом прилагательное «направленная» мы будем часто опускать. [Исключение составляют формулировки задач этого параграфа, где окружности счи-



Черт. 197.

таются ненаправленными.] Две (направленные) окружности или (направленную) окружность и (направленную) прямую мы будем называть **касающимися** только в том случае, если их направления в точке касания совпадают (черт. 197, *а*); таким образом, окружность и прямую или пары окружностей, изображённые на черт. 197, *б*, мы не будем считать касающимися. При этих условиях две (направленные) окружности не могут иметь более двух общих касательных; в случае, если окружности имеют одинаковое направление, это будут общие внешние касательные (черт. 198, *а*), а если окружности имеют противоположные направления, — общие внутренние касательные (черт. 198, *б*). Точки в этом параграфе мы будем

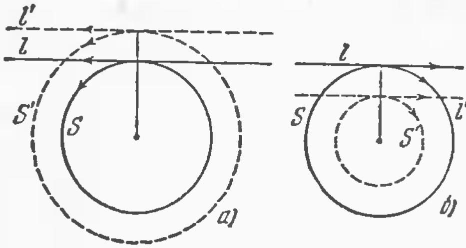


Черт. 198.

всегда рассматривать как «циклы нулевого радиуса»; при этом направления точки, разумеется, не имеют (негде поставить стрелку!). Мы будем считать, что окружность (или прямая) «касается» точки A, если она проходит через A.

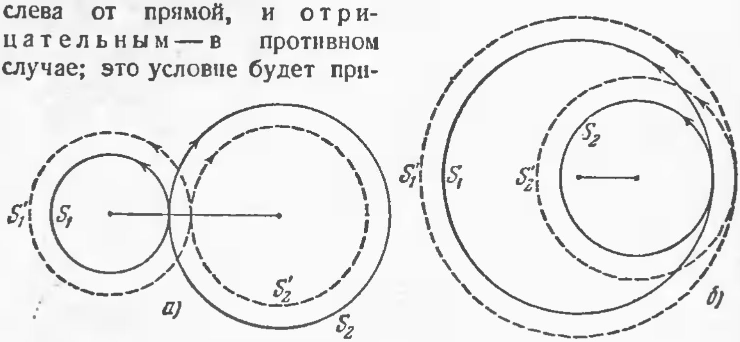
Перечислим теперь основные свойства расширения.

А. *Касающиеся окружность и прямая переходят при расширении в касающиеся окружность и прямую* (черт. 199).



Черт. 199.

Доказательство свойства А (довольно очевидного из черт. 199, *а*, *б*) состоит в следующем. Будем считать расстояние от точки до направленной прямой **положительным**, если точка расположена слева от прямой, и **отрицательным** — в противном случае; это условие будет при-

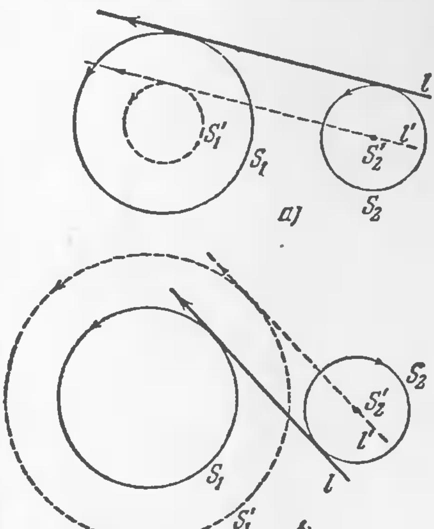


Черт. 200.

меняться и в дальнейшем изложении. В таком случае *условие касания* (направленной) *окружности и* (направленной) *прямой состоит в том, что расстояние от центра окружности до прямой равно* (положительному или отрицательному) *радиусу окружности* (черт. 199, *а*, *б*). Но при расширении на величину a и расстояние от центра окружности S до прямой l и радиус S увеличиваются на одно и то же число a. Отсюда следует, что условие касания прямой и окружности при расширении сохраняется.

Б. *Касающиеся окружности переходят при расширении в касающиеся окружности* (черт. 200).

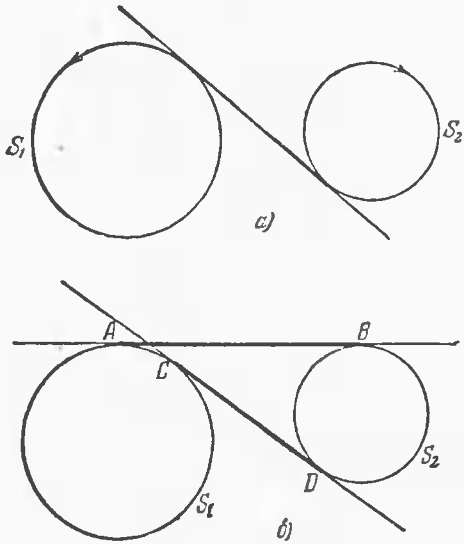
Доказательство свойства Б (довольно очевидного из черт. 200, *а*, *б*) состоит в следующем. Легко проверить, что *две* (направленные) *окружности касаются в том и только в том случае, если расстояние между центрами окружностей равно разности их радиусов* (черт. 200, *а*, *б*). Но при расширении радиусы всех окружностей увеличиваются на одну и ту же величину a, а расстояния между центрами остаются прежними. Отсюда следует, что условие касания двух окружностей при расширении сохраняется.



Черт. 201.

Для того чтобы лучше уяснить себе всё сказанное, рассмотрим снова задачу о проведении общей касательной к двум окружностям S_1 и S_2 радиусов a и b. Мы будем считать, что окружности являются направленными; при этом числа a и b могут быть как положительными, так и отрицательными. В случае, когда a и b имеют одинаковые знаки (черт. 201, *а*), согласно определению касательных к направленным окружностям мы должны рассматривать общие внешние касательные; в случае, когда a и b имеют разные знаки (черт. 201, *б*), мы будем искать общие внутренние касательные. Для решения задачи достаточно произвести расширение на величину $-a$ или $-b$. Это расширение переводит одну из двух окружностей в точку, после чего задача об отыскании общей касательной двух окружностей сводится к задаче об отыскании касательной, проведённой из данной точки к данной окружности. На этом примере хорошо заметна выгода, которую приносит введение направленных прямых и окружностей; разные случаи, изображаемые черт. 201, *а* и *б*, описываются теперь совершенно одинаково (в «Геометрии» Киселёва случаи, изображённые на черт. 201, *а*, *б*, разумеется, рассматриваются отдельно).

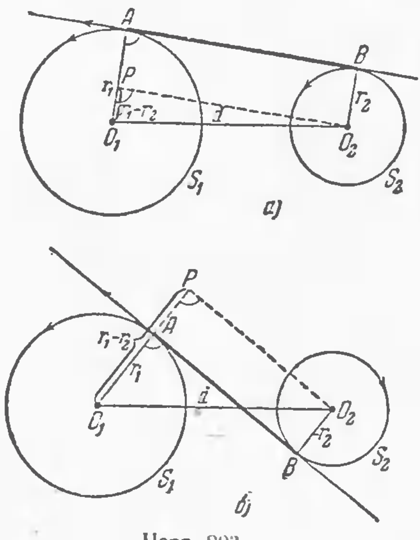
Прежде чем перейти к третьему свойству расширения, нам надо будет ввести понятие **касательного расстояния**, которое будет играть большую роль в этом параграфе.



Черт. 202.

Касательным расстоянием двух окружностей S_1 и S_2 называется длина отрезка общей касательной этих окружностей между точками касания (черт. 202, *а*). Касательному расстоянию двух ненаправленных окружностей можно приписать два разных значения (AB или CD на черт. 202, *б*); однако касательное расстояние направленных окружностей (циклов) имеет строго определённое значение, поскольку направленные окружности могут иметь не более двух общих касательных и длины отрезков этих касательных равны между собой (см. выше черт. 198). [Напомним, что аналогично этому углу между ненаправленными прямыми можно приписать два значения, а угол между направленными прямыми определяется однозначно; см. выше стр. 259, черт. 195, *а*, *б*.]

В случае, если две (направленные) окружности не имеют общих касательных (например, если одна из них заключена внутри другой), эти окружности не имеют касательного расстояния (аналогично тому, как нельзя определить угол между непересекающимися окружностями). Касательное расстояние двух направленных окружностей равно нулю в том и только в том случае, если эти окружности касаются (см. выше черт. 197, *а*; аналогично этому угол между окружностями равен нулю в том и только в том случае, если окружности касаются); касательное расстояние окружностей, изображённых на черт. 197, *б*, которые мы условились не считать касающимися, отлично от нуля (оно равно AB для первой пары изображённых на этом чертеже окружностей и не существует для второй пары).



Черт. 203.

Нетрудно видеть, что *если радиусы двух* (направленных) *окружностей* S_1 *и* S_2 *равны* r_1 *и* r_2, *а расстояние между их центрами равно* d, *то касательное расстояние* t *этих окружностей равно*

$$t = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2} \quad (*)$$

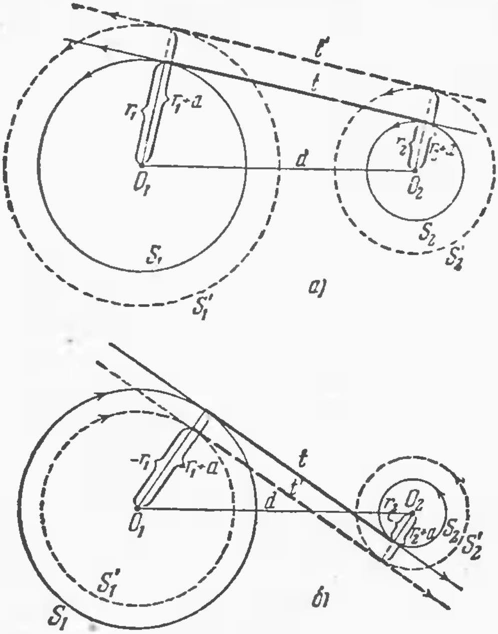
(для доказательства достаточно применить теорему Пифагора к треугольнику O_1O_2P черт. 203; черт. 203, *а* и *б* отдельно изображают случаи, когда r_1 и r_2 имеют одинаковые и различные знаки). Из этой формулы, в частности, следует, что две окружности S_1 и S_2 касаются (т. е. касательное расстояние t этих окружностей равно нулю) в том и только в том случае, если

$$d^2 - (r_1 - r_2)^2 = 0,$$

т. е. если расстояние d между их центрами равно разности радиусов (см. выше, стр. 263).

Отметим теперь следующее важное свойство расширения.

В. *Если расширение переводит* (направленные) *окружности S_1 и S_2 в* (направленные) *окружности S'_1 и S'_2, то касательное расстояние t' окружностей S'_1 и S'_2 равно касательному расстоянию t окружностей S_1 и S_2* (черт. 204).



Черт. 204.

Действительно, согласно определению расширения радиусы r'_1 и r'_2 окружностей S'_1 и S'_2 равны соответственно r_1+a и r_2+a, где a есть величина расширения, а расстояние d' между их центрами равно расстоянию d между центрами S_1 и S_2. Отсюда получаем:

$$t'=\sqrt{d'^2-(r'_1-r'_2)^2}=\sqrt{d^2-[(r_1+a)-(r_2+a)]^2}=$$
$$=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}=t,$$

что и требовалось доказать.

Свойство В преобразования расширения является обобщением свойства Б (которое можно сформулировать следующим образом: *если касательное расстояние двух направленных окружностей равно нулю, то касательное расстояние преобразованных окружностей тоже равно нулю*).

271. Примените расширение для решения задачи 49в) из § 1 гл. I второй части книги (см. т. I, стр. 82).

272. Примените расширение для решения задачи Аполлония (задача 237а) из § 2, стр. 208).

273. а) Примените расширение для решения задачи 261 из § 4 настоящей главы (стр. 243).

б) Докажите теорему, обратную предложениям задач 261 и 262: если касательные расстояния четырёх окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 связаны соотношением

$$t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}=t_{13}t_{24}$$

(или $t_{12}t_{34}+t_{13}t_{24}=t_{14}t_{23}$ или $t_{14}t_{23}+t_{13}t_{24}=t_{12}t_{34}$), то эти окружности или все касаются одной и той же пятой окружности, или касаются одной прямой, или проходят через одну точку.

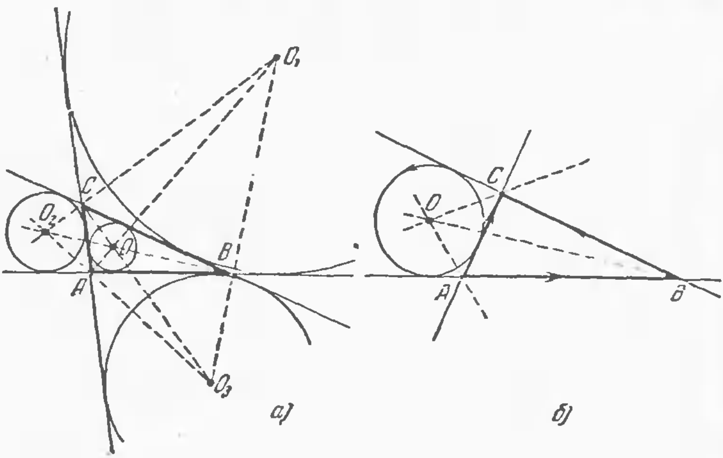
[Здесь t_{12} означает касательное расстояние окружностей S_1 и S_2 и аналогичный смысл имеют величины t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24} и t_{34}. При этом, если, например, t_{12} и t_{13} — отрезки одноимённых общих касательных S_1 и S_2, соответственно S_1 и S_3 (т. е. оба — отрезки общих внешних касательных или оба — отрезки общих внутренних касательных), то под t_{23} надо понимать отрезок общей внешней касательной S_2 и S_3; если же t_{12} и t_{13} — отрезки разноимённых общих касательных (т. е. одной внешней и одной внутренней), то под t_{23} надо понимать отрезок общей внутренней касательной S_2 и S_3; точно так же, если t_{12} и t_{14} — отрезки одноимённых (разноимённых) общих касательных, то t_{24} есть отрезок общей внешней (внутренней) касательной S_2 и S_4 и т. д.]

274. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи для доказательства теоремы задачи 222 из § 1 (стр. 193).

275. Докажите, что если даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, касающиеся каких-то трёх фиксированных окружностей Σ_1, Σ_2 и Σ_3, то эти четыре окружности касаются также и некоторой четвёртой окружности Σ.

[В условии задачи 275 некоторые (или все) из окружностей Σ_1, Σ_2 и Σ_3 можно заменить прямыми («окружностями бесконечно большого радиуса») или точками («окружностями нулевого радиуса»); окружность Σ тоже может оказаться прямой или точкой [1]). В том случае, когда Σ_1, Σ_2 и Σ_3 — три прямые, окружность Σ совпадает с окружностью девяти точек треугольника, образованного этими прямыми (см. задачу 274).]

Введение направленных прямых и окружностей не только необходимо для рассмотрения тех преобразований, которым посвящён этот параграф, но часто оказывается полезным и в других вопросах (см., например, стр. 24—25 и 33 первого тома книги). Определённым преимуществом направленных прямых является то, что угол между ними определяется однозначно; также и то обстоятельство, что две направ-

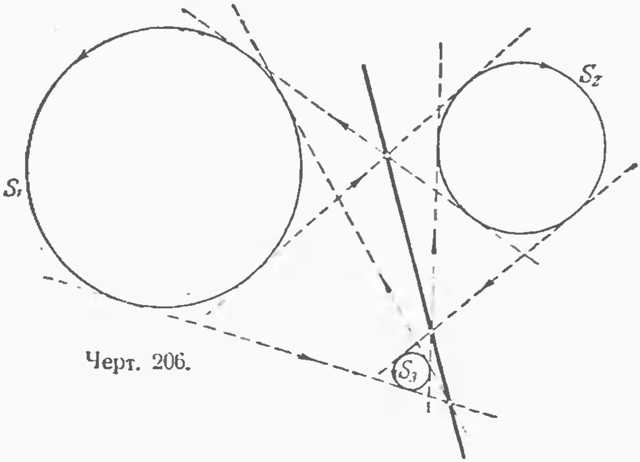


Черт. 205.

ленные окружности не могут иметь больше одной пары общих касательных, в некоторых случаях существенно упрощает дело. Так, треугольник, стороны которого считаются ненаправленными, имеет шесть биссектрис: три внутренние и три внешние, пересекающиеся по три в четырёх точках — центрах четырёх «вписанных» окружностей, касающихся всех сторон треугольника (черт. 205, *а*); эта довольно сложная конфигурация значительно упрощается, если принять стороны треугольника за направленные прямые,— тут остаются всего три бес-

[1]) Некоторые из окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 тоже могут являться точками.

сектрисы и одна «вписанная» окружность (черт. 205, б)[1]. [Предоставляем читателю самостоятельно выяснить, как упрощаются при введении направленных прямых довольно сложные теоремы, фигурирующие в решении задачи 172б).] Две направленные окружности имеют один центр подобия (а не два!): это будут внешний центр подобия для одинаково направленных окружностей и внутренний центр в противном



Черт. 206.

случае; соответственно этому три направленные окружности имеют три попарных центра подобия, которые лежат на одной прямой — (единственной!) оси подобия этих трёх окружностей (сравните черт. 206 со значительно более сложным черт. 72 на стр. 94 первого тома книги). Формулировки теорем, составляющих содержание задач 261, 262, 273 и ряда последующих задач, значительно упрощаются, если считать фигурирующие в этих теоремах окружности направленными; при этом становятся излишними довольно громоздкие разъяснения, приведённые в конце условий задач. Число примеров подобного рода можно ещё увеличить.

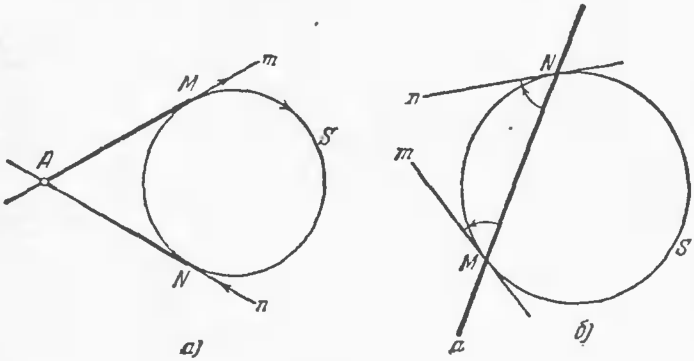
Наконец, отметим ещё одно обстоятельство, чрезвычайно важное для всего содержания этого параграфа. Свойства направленных прямых не только во многом п р о щ е свойств обыкновенных (ненаправленных) прямых; они также б о л ь ш е н а п о м и н а ю т с в о й с т в а

[1]) Биссектрису угла между двумя направленными прямыми можно определить как (направленную) прямую, образующую равные углы с обеими сторонами угла, или как геометрическое место точек, расстояния от которых до сторон угла равны (по величине и по знаку; см. выше, стр. 262); эти два определения н е с о в п а д а ю т. Здесь у нас слово «биссектриса» имеет второй смысл; в противоположность этому в нижеследующей теореме V' слово биссектриса употребляется в первом смысле.

точек. Так, *три направленные прямые касаются единственной направленной окружности* подобно тому, как *три точки лежат на единственной окружности; две направленные окружности имеют две, одну* (если они касаются!) *или ни одной общей* (направленной) *касательной* подобно тому, как *две окружности имеют две, одну* (если они касаются!) *или ни одной общей точки*, и т. д.[1]). Это создаёт известный параллелизм («двойственность») между свойствами точек и направленных прямых, теряющийся, если прямые считать ненаправленными. Для иллюстрации можно привести, например, следующий ряд теорем, где предложение, стоящее справа, получается из соответствующего левого предложения заменой слов «точка», «прямая» и «окружность» соответственно на «направленная прямая», «точка» и «направленная окружность» и выражений «точка лежит на прямой», «окружность касается прямой» и «точка лежит на окружности» на «направленная прямая проходит через точку», «направленная окружность проходит через точку» и «направленная прямая касается направленной окружности»[2]):

---

[1]) Вот ещё один важный пример того же рода: *если из точки A можно провести к направленной окружности S две* (направленные) *касательные m, n и M, N — точки S, лежащие на этих касательных, то отрезки AM и AN равны по величине и противоположны*



Черт. 207.

по направлению (черт. 207, *а*); подобно этому, *если прямая a пересекает окружность S в двух точках M, N и m, n — касательные к S в этих точках, то углы между a и m, a и n равны по величине и противоположны по направлению* (черт. 207, *б*). [По поводу использованной здесь аналогии между отрезками касательных и углами см. ниже, стр. 276—277.]

[2]) Используя отмеченную выше аналогию между основными свойствами точек и направленных прямых, можно без отдельного доказательства вывести справедливость одного из двух соответствующих друг

I. Если каждая из четырёх окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 касается двух соседних (т. е. S_1 касается S_2 и S_4, S_2 касается S_1 и S_3 и т. д.), то четыре точки касания лежат на одной окружности Σ (см. задачу 216 из § 1).

II. Если A_1 и A_2 — точки пересечения окружностей S_1 и S_2; B_1, B_2 — точки пересечения S_2 и S_3; C_1, C_2 — точки пересечения S_3 и S_4 и D_1, D_2 — точки пересечения S_4 и S_1 и точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности, то и A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (см. задачу 217б) из § 1).

III. Пусть S_1, S_2, S_3 — три окружности, пересекающиеся в одной точке O; окружность, проходящую через три отличные от O точки пересечения S_1, S_2 и S_3, назовём **центральной окружностью наших трёх окружностей**. Далее, из четырёх окружностей, пересекающихся в одной точке O, можно выбрать четыре тройки окружностей; соответствующие четыре центральные окружности пересекаются в одной точке — **центральной точке четырёх окружностей** (это утверждение равносильно теореме задачи 217в)). Аналогично из пяти пересекающихся в одной точке окружностей можно выбрать пять четвёрок окружностей; соответствующие пять центральных точек лежат на одной окружности — **центральной окружности пяти окружностей**

I'. Если каждая из четырёх направленных окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 касается двух соседних, то четыре (направленные) общие касательные соседних окружностей касаются одной направленной окружности Σ (см. ниже задачу 284).

II'. Если a_1 и a_2 — общие (направленные) касательные направленных окружностей S_1 и S_2, b_1 и b_2 — общие касательные S_2 и S_3, c_1 и c_2 — общие касательные S_3 и S_4 и d_1 и d_2 — общие касательные S_4 и S_1 и направленные прямые a_1, b_1, c_1, d_1 касаются одной направленной окружности, то и a_2, b_2, c_2, d_2 касаются одной направленной окружности (см. ниже задачу 278а)).

III'. Пусть S_1, S_2, S_3 — три направленные окружности, касающиеся одной направленной прямой o; направленную окружность, касающуюся трёх отличных от o (направленных) общих касательных S_1, S_2 и S_3, назовём **центральной окружностью наших трёх окружностей**. Далее из четырёх направленных окружностей, касающихся одной направленной прямой o, можно выбрать четыре тройки окружностей; соответствующие четыре центральные окружности касаются одной направленной прямой — **центральной прямой четырёх окружностей**. Аналогично из пяти направленных окружностей, касающихся одной направленной прямой, можно выбрать пять четвёрок окружностей; соответствующие пять центральных прямых касаются одной направленной окружности —

другу предложений из справедливости второго (сравните со сказанным на стр. 96—97 о «принципе двойственности» на проективной плоскости). Мы не остановимся подробнее на этом обстоятельстве.

и т. д. (ср. с задачей 218а) из § 1).

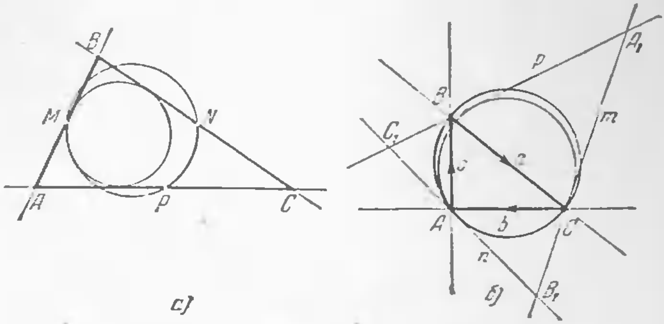
IV. Пусть S_1, S_2, S_3 — три окружности, пересекающиеся в одной точке O, A_1, A_2, A_3 — три точки, взятые соответственно на этих трёх окружностях; тогда окружность Σ_1, проходящая через точки A_1, A_2 и отличную от O точку пересечения S_1 и S_2, и окружности Σ_2, Σ_3, определённые аналогично Σ_1, пересекаются в одной точке — *направляющей точке наших трёх окружностей* (это утверждение равносильно теореме задачи 217а)). Далее пусть заданы четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4, пересекающиеся в одной точке O, и на них четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 — все лежащие на одной окружности; в таком случае четыре направляющие точки четырёх троек окружностей, которые можно выбрать из S_1, S_2, S_3, S_4, лежат на одной окружности — *направляющей окружности наших четырёх окружностей*. Аналогично из пяти пересекающихся в одной точке окружностей S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, на которых заданы пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, лежащих на одной окружности, можно выбрать пять четвёрок окружностей; соответствующие пять направляющих окружностей пересекаются в одной точке — *направляющей точке наших пяти окружностей* и т. д. (ср. с задачей 218б) из § 1).

центральной окружности пяти окружностей и т. д. (докажите!)

IV′. Пусть S_1, S_2, S_3 — три направленные окружности, касающиеся одной направленной прямой o, a_1, a_2, a_3 — какие-то три (направленные) касательные к S_1, S_2 и S_3; тогда направленная окружность Σ_1, касающаяся a_1, a_2 и отличной от o (направленной) общей касательной S_1 и S_2, и окружности Σ_2, Σ_3, определённые аналогично Σ_1, все касаются одной направленной прямой — *направляющей прямой наших трёх окружностей* (см. ниже задачу 278б)). Далее пусть заданы четыре направленные окружности S_1, S_2, S_3, S_4, касающиеся одной направленной прямой o, и какие-то (направленные) касательные a_1, a_2, a_3, a_4 этих окружностей, все касающиеся одной направленной окружности; в таком случае четыре направляющие прямые четырёх троек окружностей, которые можно выбрать из S_1, S_2, S_3, S_4, все касаются одной направленной окружности — *направляющей окружности наших четырёх окружностей*. Аналогично из пяти касающихся одной направленной прямой направленных окружностей с пятью их (направленными) касательными, касающимися одной направленной окружности, можно выбрать пять четвёрок окружностей; соответствующие пять направляющих окружностей касаются одной направленной прямой — *направляющей прямой пяти окружностей* и т. д. (докажите!).

V. Окружность, проходящая через середины сторон треугольника ABC (черт. 208, *а*), касается

V′. Окружность, касающаяся трёх биссектрис треугольника ABC (черт. 208,*б*; см. сноску на стр. 269), «вписанной» окружности, касающейся всех сторон ABC (и даже всех четырёх таких окружностей; см. задачу 222 из § 1).



Черт. 208.

касается описанной окружности, проходящей через все вершины треугольника ABC (и даже все четыре окружности, касающиеся биссектрис треугольника ABC, обладают этим свойством; выбирая же по-разному направления сторон треугольника ABC, а следовательно и биссектрисы, мы получим всего 16 окружностей, касающихся описанной окружности). [Для доказательства достаточно заметить, что на черт. 208, *б* точки A, B, C являются основаниями высот треугольника $A_1B_1C_1$, и воспользоваться результатами задачи 51а) из § 1 гл. I второй части книги и задачи 222 из § 1 этой главы[1]).]

Этот ряд теорем можно было бы значительно увеличить.

Впоследствии мы убедимся, что отмеченный параллелизм между свойствами точек и направленных прямых заходит весьма далеко.

До сих пор мы рассматривали расширение как преобразование, переводящее каждый ч е р т ё ж плоскости в новый чертёж. Посмотрим теперь на это преобразование с несколько иной точки зрения. Ранее, в первом томе этой книги, мы

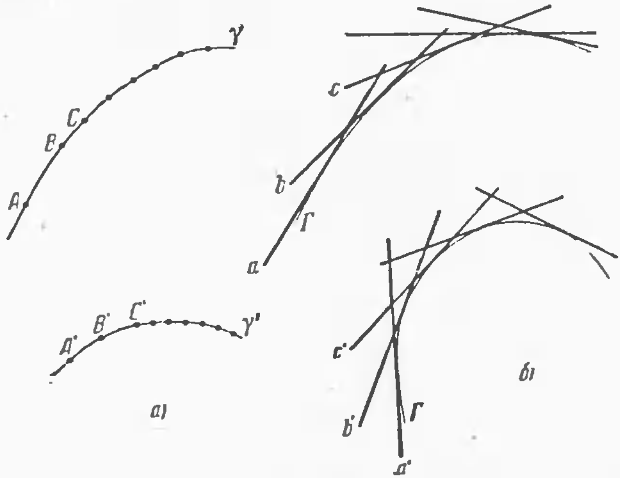
[1]) Здесь снова используется аналогия между расстояниями и углами, встречавшаяся уже в сноске [1]) на стр. 270.

изучали движения (часть первая), преобразования подобия (часть вторая), в настоящем томе мы рассматриваем линейные преобразования (§§ 1—3 гл. I третьей части), инверсии. Все эти преобразования являются **точечными преобразованиями** плоскости, т. е. они переводят каждую точку плоскости (или какой-то её части, как обобщённые линейные преобразования и инверсии — ср. выше стр. 68 и 253) в какую-то новую точку. Выше мы имели также один пример преобразований, отличных от точечных,— это полярные преобразования (см. § 4 гл. I), которые переводят точки в прямые линии и прямые линии в точки. Расширения тоже являются неточечными преобразованиями, однако совсем иной природы, чем полярные преобразования.

В § 4 гл. I мы отмечали наличие на плоскости **принципа двойственности**. Этот принцип состоит в том, что точки и прямые плоскости в значительной мере равноправны, так что во многих теоремах можно заменить всюду слово «точка» на слово «прямая» и наоборот, и теорема при этом останется справедливой. Но если точки и прямые равноправны, то наряду с точечными преобразованиями естественно рассматривать также и преобразования, которые переводят прямые линии снова в прямые линии, но не обязательно точки в точки. Расширения как раз и представляют собой пример такого преобразования плоскости.

При изучении точечных преобразований каждая геометрическая фигура F рассматривается как совокупность точек; точечное преобразование переводит все эти точки в новые точки, и таким образом фигура F переходит в новую фигуру F'. В частности, каждая кривая линия γ переходит при точечном преобразовании в новую кривую γ' (черт. 209, *а*). При изучении преобразований, переводящих прямые линии в прямые, каждую геометрическую фигуру Φ следует рассматривать как совокупность прямых линий; после преобразования каждая прямая линия переходит в другую прямую и, следовательно, фигура Φ переходит в новую фигуру Φ'. В частности, кривую линию мы будем в этом параграфе рассматривать как совокупность прямых — касательных к этой линии; в результате преобразования, переводящего прямые линии снова в прямые, каждая кривая Γ переходит в новую кривую Γ' (черт. 209, *б*).

При рассмотрении преобразований плоскости, переводящих прямые линии в прямые линии, оказывается более удобным рассматривать направленные прямые (оси)[1]. Всякое преобразование плоскости, переводящее ось в ось (но не обязательно точку в точку), называется осевым преобразованием. Осевые преобразования можно считать отвечающими точечным преобразованиям по принципу двойственности.



Черт. 209.

В § 1 этой главы мы рассматривали точечные круговые преобразования плоскости, т. е. *точечные преобразования, при которых окружности* (к числу которых причисляются также и прямые, рассматриваемые как окружности бесконечно большого радиуса) *переходят снова в окружности*. Расширение есть такое *осевое преобразование, при котором окружности* (к числу которых причисляются также и точки, рассматриваемые как окружности нулевого радиуса) *переходят снова в окружности*[2]. Все преобразо-

---

[1]) О причинах, по которым удобнее считать, что точкам по принципу двойственности отвечают направленные прямые, см. мелкий шрифт на стр. 268 и след.

[2]) Отметим, что если рассматривать расширение как осевое преобразование, то в определении расширения уже не следует указывать, во что переходят при этом преобразовании окруж-

вания, обладающие этим свойством, мы будем называть **осевыми круговыми преобразованиями**[1]). Определение осевых круговых преобразований получается из определения круговых преобразований заменой слова «точка» словом «прямая» (направленная) и наоборот. Сравнение свойств точечных и осевых круговых преобразований хорошо иллюстрирует общий принцип двойственности.

Расширения являются частным случаем осевых круговых преобразований. Другой частный случай таких преобразований представляют преобразования подобия (см. вторую часть книги). С более сложными примерами осевых круговых преобразований мы встретимся дальше.

Из свойства А расширений следует, что это преобразование переводит окружности снова в окружности (см. сноску [2]) на предыдущей странице), свойство Б соответствует аналогичному свойству инверсий («касающиеся окружности переходят при инверсии в касающиеся окружности»). Выясним, какому свойству круговых преобразований отвечает по принципу двойственности свойство В расширения.

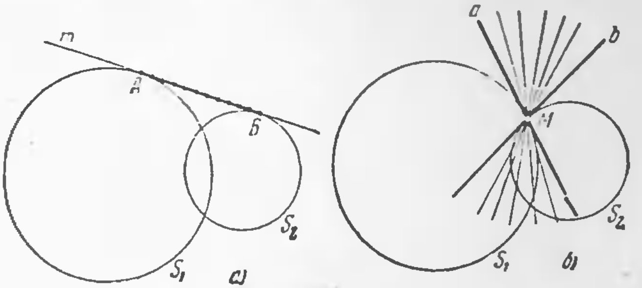
Остановимся подробнее на смысле понятия касательного расстояния двух окружностей. Окружность мы в этом параграфе рассматриваем не как совокупность точек, а как совокупность прямых линий — касательных к окружности. Для определения касательного расстояния двух окружностей S_1 и S_2 мы прежде всего выделим «общую прямую» m этих окружностей, т. е. их общую касательную. Пусть A и B — точки окружностей S_1 и S_2, лежащие на прямой m (черт. 210, a). Длина отрезка AB и есть касательное расстояние S_1 и S_2.

Заменим теперь в этом определении всюду слово «прямая» на слово «точка» и наоборот. Окружности S_1 и S_2 мы теперь будем рассматривать как совокупность точек; вместо

ности (осевое преобразование **полностью** определяется указанием того, в какую прямую переводит преобразование произвольную прямую). То обстоятельство, что при расширении окружности переходят в окружности, с нашей новой точки зрения означает, что при расширении все прямые, касающиеся какой-либо окружности S, переходят в прямые, касающиеся новой окружности S'. Это обстоятельство является следствием правила, определяющего преобразование прямых линий при расширении.

[1]) В литературе эти преобразования чаще называются **преобразованиями Лагерра** (по имени замечательного французского математика, впервые их рассмотревшего).

«общей прямой» рассмотрим «общую точку» этих двух окружностей, т. е. точку M их пересечения. Пусть a и b — «прямые окружностей S_1 и S_2, проходящие через M», т. е. касательные к окружностям в точке M (черт. 210, *б*). Отрезку AB (совокупности точек прямой m, расположенных между точками A и B) отвечает, очевидно, по принципу двойственности угол aMb (совокупность прямых, проходящих через M и расположенных между прямыми a и b); длине отрезка AB



Черт. 210.

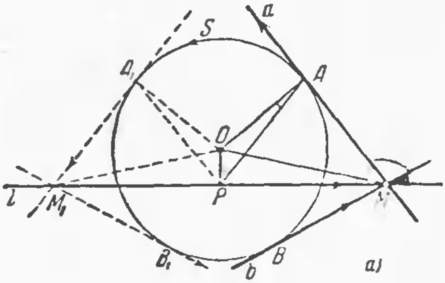
отвечает величина угла aMb. Но угол aMb есть угол между окружностями S_1 и S_2 (см. выше, стр. 170, черт. 124, *а*), следовательно, понятие касательного расстояния двух окружностей соответствует по принципу двойственности понятию угла между окружностями.

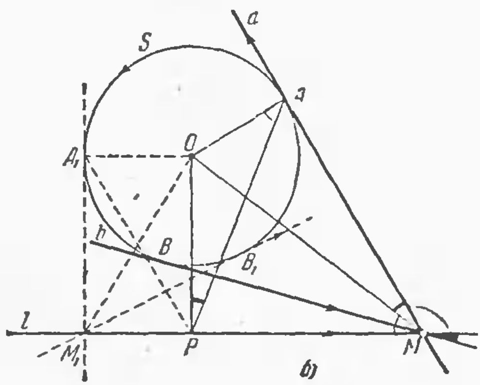
Выше мы видели, что при инверсии угол между двумя окружностями сохраняется (см. свойство В инверсии, стр. 181); в силу основной теоремы 2 § 4 (стр. 247) отсюда следует, что при к а ж д о м точечном круговом преобразовании угол между двумя окружностями не меняется. Этому свойству круговых преобразований и отвечает сохранение касательного расстояния двух окружностей при преобразовании расширения[1]).

[1]) Во избежание недоразумений считаем необходимым подчеркнуть, что содержание этого параграфа п о д с к а з ы в а е т с я принципом двойственности, но н е в ы в о д и т с я из него. Поэтому такое, например, рассуждение: «точечные круговые преобразования сохраняют угол между окружностями, следовательно, осевые круговые преобразования должны сохранять касательное расстояние двух окружностей, отвечающее в силу принципа двойственности понятию угла», разумеется, совершенно необоснованно; известные нам свойства полярного преобразования, на которых мы основывали принцип двойствен-

Б. Осевая инверсия

Перейдём теперь к описанию нового преобразования — осевой инверсии. Это преобразование можно считать отвечающим по принципу двойственности обыкновенной инверсии.





Черт. 211.

Начнём с доказательства следующей теоремы, которая подскажет нам определение осевой инверсии.

Теорема 1. *Пусть мы имеем некоторую окружность S и прямую l* (черт. 211; окружность и прямая считаются

ности (см. § 4 гл. I), не дают никаких оснований к такому заключению. Для того чтобы принцип двойственности можно было бы применить к выводу свойств осевых круговых преобразований из свойств точечных круговых преобразований, надо развить сам этот принцип значительно глубже, чем мы это сделали в настоящей книге; для этого потребовалась бы почти такая же большая книга.

направленными). *Выберем на прямой l произвольную точку M, лежащую вне окружности S, и пусть a и b — касательные к окружности S, проведённые из точки M. В таком случае произведение*[1])

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}$$

зависит только от окружности S и прямой l, но не зависит от выбора точки M на прямой l.

Доказательство. Пусть O есть центр и r — радиус окружности S, A и B — точки касания a и b с окружностью, P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую l, и $d=OP$ — расстояние от центра S до прямой l (черт. 211, *а*, *б*; на обоих чертежах окружность положительно направлена и точка O расположена слева от направленной прямой l). Из треугольника OAP по теореме тангенсов получим:

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\angle OAP-\angle OPA}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\angle OAP+\angle OPA}{2}}=\frac{OP-OA}{OP+OA}.$$

Так как в четырёхугольнике $OAMP$ два противоположных угла прямые, то вокруг него можно описать окружность. Отсюда имеем $\angle OAP=\angle OMP$; $\angle OPA=\angle OMA$ (как углы, опирающиеся на одну дугу). Теперь воспользуемся тем, что

$$\angle OMP+\angle OMA=\angle PMA;$$

$$\angle OMP-\angle OMA=\angle OMP-\angle OMB=\pm\angle PMB.$$

Так как, кроме того, $OP=d$, $OA=r$, то мы будем иметь:

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\angle PMB}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\angle PMA}{2}}=\frac{|r-d|}{r+d}.$$

Но из черт. 211 следует (обратите внимание на направление прямых!)

$$\angle PMB=\widehat{lb};\quad \angle PMA=180^\circ-\widehat{la}$$

---

[1]) Угол между направленными прямыми a и b мы будем обозначать через $\widehat{ab}$.

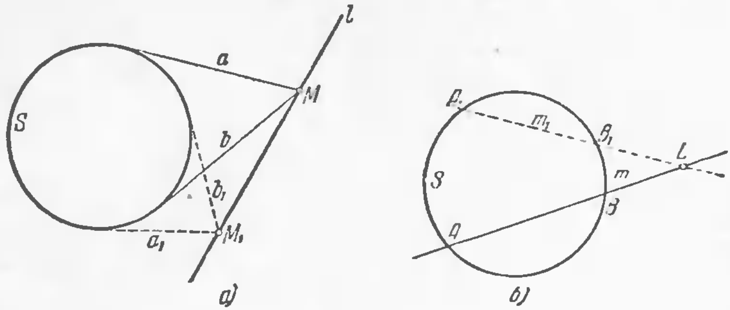
и, значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\angle PMB}{2}=\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2};\ \operatorname{tg}\frac{\angle PMA}{2}=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\widehat{la}}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\widehat{la}}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}}.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}=\frac{|r-d|}{r+d},\qquad (*)$$

откуда видно, что произведение, стоящее слева, действительно не зависит от выбора точки M на прямой l (а только от



Черт. 212.

окружности S и прямой l), что нам и требовалось доказать [1].

Посмотрим теперь, какой теореме отвечает теорема I по принципу двойственности. В теореме 1 рассматриваются окружность S и прямая l (черт. 212, a); очевидно, в двой-

[1]) Нетрудно проверить, что соотношение (*) сохраняет силу и при ином выборе точки M на прямой l (см. пунктир на черт. 211, a, $б$).

Также и в том случае, если окружность S отрицательно направлена или точка O лежит справа от l, или имеют место оба эти обстоятельства одновременно, произведение $\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}$ будет равно $\left|\frac{r-d}{r+d}\right|$, где r есть радиус направленной окружности S (который может быть и положительным и отрицательным; см. выше стр. 260), а d — расстояние точки O от направленной прямой l (которое тоже может быть и положительным и отрицательным; см. выше стр. 262). Рекомендуем читателю самостоятельно разобрать все представляющиеся здесь случаи.

ственной теореме должны фигурировать окружность S и точка L (черт. 212, *б*). Произвольной точке M прямой l будет отвечать произвольная прямая m, проходящая через точку L; касательным a и b к окружности S, проведённым из M,— точки A и B окружности S, лежащие на прямой m; углам $\widehat{la}$ и $\widehat{lb}$ — отрезки LA и LB. Но из школьного курса геометрии хорошо известна следующая

Теорема 1′. *Пусть мы имеем некоторую* (ненаправленную) *окружность S и точку L* (черт. 212, *б*). *Проведём через точку L произвольную прямую m, пересекающую окружность S, и пусть A и B — точки окружности S, лежащие на прямой m. В таком случае произведение*

$$LA \cdot LB \qquad (**)$$

зависит только от окружности S и точки L, но не зависит от выбора прямой, проходящей через L (см. выше теоремы 1а и 1б § 3, стр. 222).

Эта теорема соответствует по принципу двойственности теореме 1.

Произведение $LA \cdot LB$, зависящее только от точки L и окружности S, мы называли выше степенью точки L относительно окружности S (см. стр. 222). Аналогично этому фигурирующее в формулировке теоремы 1 произведение $\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}$ называется степенью (направленной) прямой l относительно (направленной) окружности S[1]).

В § 4 гл. I мы называли две теоремы двойственными друг другу, если каждую из них можно получить, применив полярное преобразование к чертежу другой. Покажем, что с помощью полярного преобразования теорему 1 можно вывести из хорошо известной теоремы 1′, т. е. что эти две теоремы двойственны в строгом смысле § 4 гл. I.

Черт. 212, *б* переходит при полярном преобразовании относительно окружности S в черт. 213. Примем теперь, что окружность S и пря-

---

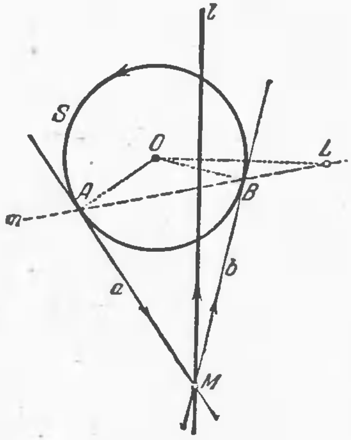
[1]) Хорошо известно, что *если точка L лежит вне окружности S, то её степень относительно S равна квадрату касательного расстояния L и S.* Аналогично этому *если* (направленная) *прямая l пересекает* (направленную) *окружность S, то её степень относительно S равна квадрату тангенса половины угла между l и S*; для доказательства достаточно принять за точку M черт. 211, *а* точку пересечения l и S.

мые l, a, b черт. 213 направлены; при этом, очевидно, $\widehat{la} = \angle LOA$, $\widehat{lb} = \angle LOB$ (см. свойство B полярного преобразования, стр. 101). Далее из треугольников LOA и LOB по так называемым формулам Мольвейде имеем:

$$\frac{LA}{LO+OA} = \frac{\sin\frac{\angle LOA}{2}}{\cos\frac{\angle LAO - \angle ALO}{2}}; \quad \frac{LB}{LO+OB} = \frac{\sin\frac{\angle LOB}{2}}{\cos\frac{\angle LBO - \angle BLO}{2}}.$$

Но, очевидно, $\angle LAO = 180° - \angle LBO$; $\angle OLA = \angle OLB$ (черт. 213), или (если точка L лежит внутри S)

$$\angle LAO = \angle LBO,$$
$$\angle OLA = 180° - \angle OLB.$$



Черт. 213.

Следовательно, во всех случаях

$$\cos\frac{\angle LAO - \angle ALO}{2} = $$
$$= \sin\frac{\angle LBO + \angle BLO}{2} = $$
$$= \sin\frac{180° - \angle LOB}{2} = \cos\frac{LOB}{2};$$
$$\cos\frac{\angle LBO - \angle BLO}{2} = \cos\frac{\angle LOA}{2}.$$

Таким образом, обозначая расстояние OL через D и радиус окружности S через r, имеем:

$$\frac{LA}{D+r} = \frac{\sin\frac{\widehat{la}}{2}}{\cos\frac{\widehat{lb}}{2}}; \quad \frac{LB}{D+r} = \frac{\sin\frac{\widehat{lb}}{2}}{\cos\frac{\widehat{la}}{2}},$$

или, перемножая между собой две последние формулы,

$$\frac{LA\cdot LB}{(D+r)^2} = \operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}.$$

Так как произведение $LA\cdot LB$ зависит только от точки L (теорема 1′), то из полученной формулы вытекает, что произведение $\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}$ зависит только от прямой l (теорема 1) [1]).

---

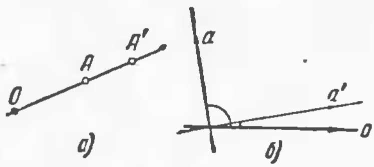
[1]) Произведение $LA\cdot LB$ (степень точки L относительно окружности S) равно $|D^2 - r^2|$, где r — радиус S, D — расстояние точки L от центра O окружности S (см. выше стр. 223). Следовательно, произ-

При этом выводе теоремы 1 из теоремы 1′ мы считали, что окружность S положительно направлена и O лежит слева от l (сравните черт. 213 и 211, *а*). Предоставляем читателям самостоятельно рассмотреть все остальные случаи.

Вспомним теперь определение инверсии. Инверсией с центром O и степенью k называется (точечное) преобразование, при котором каждая точка A переходит в такую точку A', что прямая AA' проходит через O и

$$OA \cdot OA' = k$$

(черт. 214, *а*); при этом точки A и A' лежат по одну сторону от O. Аналогия между теоремами 1 и 1′ подсказывает следующее определение:



Черт. 214.

Осевой инверсией с (направленной) *центральной прямой o и степенью k называется* (осевое) *преобразование, при котором каждая* (направленная) *прямая a переходит в такую* (направленную) *прямую a′, что точка пересечения a и a′ лежит на прямой o и*

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2} = k$$

(черт. 214, *б*); при этом прямые a и a' направлены в одну сторону от o [1]).

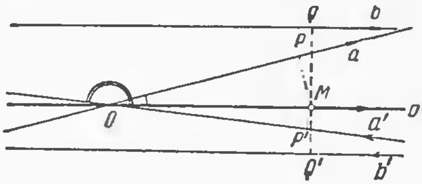
Это определение надо несколько дополнить, так как оно не указывает, как преобразуются прямые, не пересекающиеся с центральной прямой o. При этом можно руководствоваться следующими соображениями. Если угол $\widehat{oa}$ мал $\left(\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}\text{ мал}\right)$,

---

ведение $\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}$ равно $\frac{|D^2-r^2|}{(D+r)^2}=\frac{|D-r|}{|D+r|}$ или, так как $D=\frac{r^2}{d}$, где d есть расстояние прямой l от O (см. задачу 150 из § 4 гл. I, стр. 88), равно $\left|\frac{r-d}{r+d}\right|$ (ср. выше стр. 280).

[1]) Другими словами: в точке пересечения a, a' и o стрелки на прямых a и a' направлены в одну сторону от прямой o.

то угол $\widehat{oa'}$ близок к $180°$ $\left(\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2}\text{ велик}\right)$. Опустим из произвольной точки M прямой o перпендикуляры MP и MP' на



Черт. 215.

прямые a и a' (черт. 215); пусть O — точка пересечения a a' и o. В таком случае имеем:

$$MP = OM\sin\widehat{oa} = OM\frac{2\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{oa}}{2}},$$

$$MP' = OM\sin(180° - \widehat{oa'}) = OM\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa'}}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\widehat{oa'}}{2}}.$$

Разделим теперь почленно первое из этих равенств на второе. Так как $1+\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{oa}}{2}\approx 1$ и $1+\operatorname{ctg}^2\frac{\widehat{oa'}}{2}\approx 1$ $\left(\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}\text{ и }\operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa'}}{2}\text{ малы}\right)$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}:\operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa'}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2} = k,$$

то мы получим:

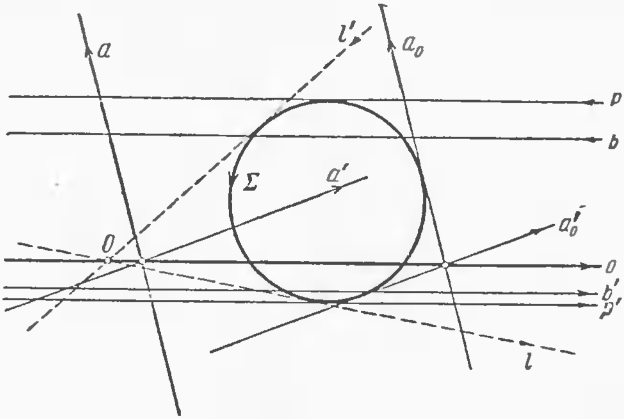
$$\frac{MP}{MP'}\approx k.$$

Поэтому естественно считать, что *при осевой инверсии со степенью k прямая b, параллельная центральной прямой o и отстоящая от o на расстояние MQ, переходит в прямую b', противопараллельную оси o*[1]) *и отстоящую от o*

[1]) То-есть параллельную o и противоположно направленную.

на такое расстояние MQ', что $\frac{QM}{MQ'}=k$ (черт. 215); обратно, прямая b' переходит в b.

Осевую инверсию можно определить и геометрически. Пусть o есть центральная прямая осевой инверсии, Σ — окружность, касающаяся какой-то прямой l и преобразованной прямой l' (такая окружность называется направляющей



Черт. 216.

окружностью осевой инверсии), a_0 и a'_0 — две произвольные (направленные) касательные к окружности Σ, пересекающиеся на прямой o (черт. 216). В силу теоремы 1 мы имеем, очевидно,

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa_0}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'_0}}{2}=\operatorname{tg}\frac{\widehat{ol}}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\widehat{ol'}}{2}=k,$$

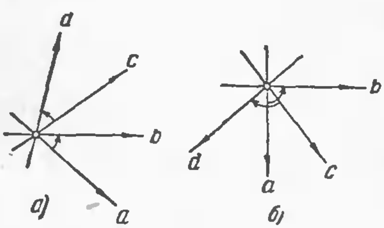
где k — степень осевой инверсии. Отсюда вытекает следующее определение осевой инверсии:

Осевой инверсией с центральной прямой o и направляющей окружностью Σ называется (осевое) *преобразование, переводящее каждую* (направленную) *прямую a в такую* (направленную) *прямую a', что a и a' пересекаются на прямой o и касательные a_0 и a'_0 к окружности Σ, параллельные a и a', пересекаются тоже на прямой o* (черт. 216). [Это определение также не указывает, как преобразуются прямые, не пересекающиеся с центральной прямой o. Его надо дополнить следующим образом: *касательные p и p' направляющей окружности Σ, не пересекающие центральную прямую o, переходят при осевой инверсии друг в друга; каждая прямая b, параллельная p, переходит в прямую b', параллельную p' и такую, что расстояния прямых b и b' от o пропорциональны расстояниям p и p' от o.*]

Задание осевой инверсии центральной прямой o и направляющей окружностью Σ позволяет легко построить прямую a' (или b'), в которую переходит данная прямая a (или b): для этого строим последовательно прямые a_0, a_0', a' (соответственно p, p', b'). Отметим ещё, что так как a_0 и a_0' должны быть направлены в одну сторону от o, то Σ пересекает o.

Направляющая окружность Σ данной осевой инверсии определяется, очевидно, неоднозначно: уже в угол lOl' на черт. 216 можно вписать бесконечно много различных окружностей, а прямые l и l' тоже можно выбирать различными способами.

Аналогично тому, как при рассмотрении отрезков прямой часто оказывается удобным приписывать отрезкам определённые знаки (см. § 1 гл. I второй части книги), иногда приписывают знаки и углам между (направленными) прямыми, пересекающимися в одной точке. А именно, в полном соответствии с тем, как вводятся знаки отрезков, два угла $\widehat{ab}$ и $\widehat{cd}$ считаются имеющими одинаковый знак, если направления этих углов от a к b и от c к d совпадают (черт. 217, a), и имеющими разные знаки, если эти направления различны (черт. 217, $б$). При этом, разумеется, оказывается существенным порядок, в котором выписаны начальный и конечный луч угла; углы $\widehat{ab}$ и $\widehat{ba}$ имеют согласно нашему определению противоположные знаки.



Черт. 217.

Если рассматривать знаки отрезков, то приходится считать, что степень точки L относительно окружности S, равная произведению $LA \cdot LB$, положительна, если точка L расположена вне окружности S (см. черт. 212, $б$; в этом случае отрезки LA и LB одинаково направлены), и отрицательна, если L расположена внутри S (ср., например, черт. 171, *а* и 171, *б* на стр. 222). Если r есть радиус окружности S, а d — расстояние точки L от центра S, то степень L относительно S равна (включая знак!)

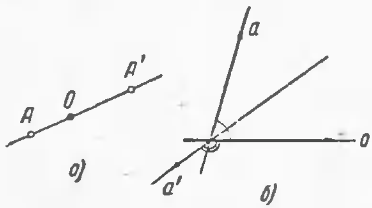
$$d^2 - r^2 = (d - r)(d + r)$$

(см. выше, стр. 223). Аналогично этому, если рассматривать знаки углов, то степень (направленной) прямой l относительно (направленной) окружности S, равная произведению $\operatorname{tg}\frac{\widehat{la}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{lb}}{2}$, будет положительна, если l пересекает S (см. черт. 211, *а*; в этом случае углы $\widehat{la}$ и $\widehat{lb}$ одинаково направлены), и отрицательна, если l не пересекает S (черт. 211, *б*). Если r есть (положительный или отрицательный) радиус окружности S, а d (положительное или отрицательное; см. выше стр. 262) — расстояние центра S от прямой l, то степень l относительно S равна (включая знак!)

$$\frac{r - d}{r + d}$$

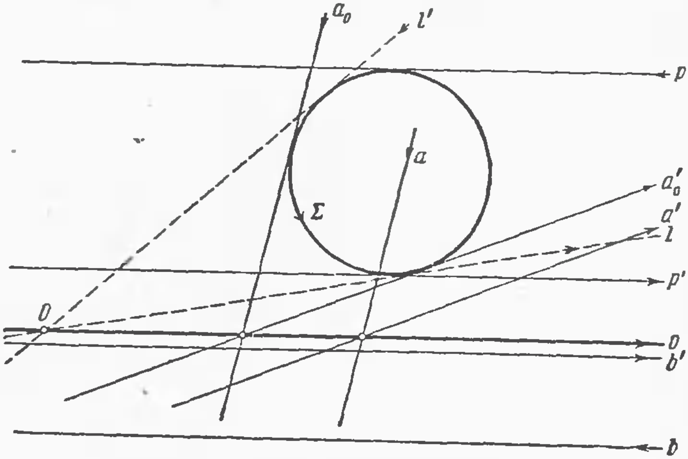
(см. доказательство теоремы 1 на стр. 279—280; рекомендуем читателю самостоятельно разобрать все представляющиеся случаи).

Если рассматривать знаки отрезков, то степень k (обыкновенной) инверсии можно считать как положительной, так и отрицательной; последнее означает, что отрезки OA и OA' имеют разные знаки, т. е. что точки A и A' расположены по разную сторону от O (черт. 218, *а*). При этом инверсия с отрицательной степенью $-k$ равносильна инверсии с положительной степенью k и последующей симметрии относительно центра инверсии O. Совершенно так же, если рассматривать знаки углов, то степень осевой инверсии можно считать как положительной, так и отрицательной; последнее



Черт. 218.

означает, что углы $\widehat{oa}$ и $\widehat{oa'}$ имеют разные знаки, т. е. что прямые a и a' направлены в разные стороны от прямой o (черт. 218, *б*). Осевая инверсия с отрицательной степенью $-k$, очевидно, равносильна осевой инверсии с положительной степенью k и последующей симметрии относительно центральной прямой o. Осевую инверсию с отрицательной степенью можно описать геометрически, вполне аналогично геометрическому определению осевой инверсии с положительной степенью, с



Черт. 219.

тем лишь различием, что в этом случае *направляющая окружность Σ не будет пересекать центральной прямой o* (черт. 219).

Отметим, что *если при осевой инверсии* (с положительной или отрицательной степенью) (направленная) *прямая a переходит в* (направленную) *прямую a', то обратно a' переходит в a.*

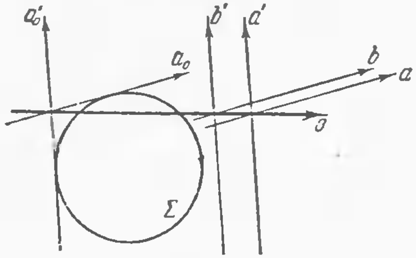
Перечислим важнейшие свойства осевой инверсии.

А. *Осевая инверсия переводит параллельные прямые в параллельные прямые* (черт. 220).

Свойство А непосредственно вытекает и из первого и из второго определения инверсии.

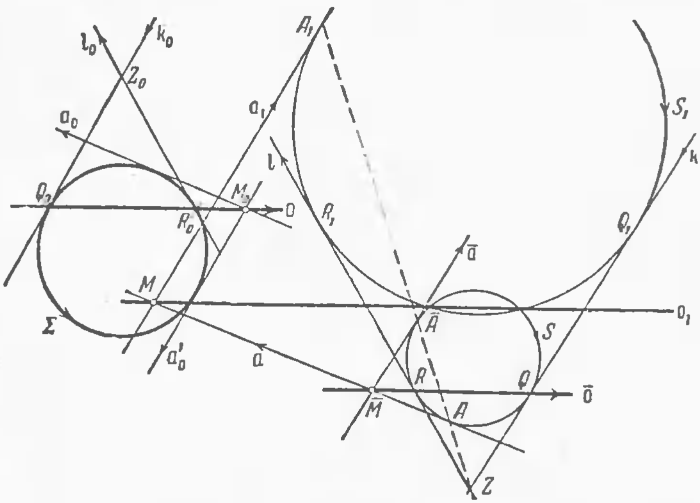
Б. *Каждая* (направленная) *окружность или точка переходит при осевой инверсии в новую* (направленную) *окруж-*

ность или точку (сравните со свойством Б обыкновенной инверсии, § 1, стр. 180).



Черт. 220.

Так как осевая инверсия с отрицательной степенью равносильна осевой инверсии с положительной степенью и последующей симметрии относительно прямой, то нам достаточно



Черт. 221.

доказать свойство Б для того случая, когда степень инверсии положительна и, следовательно, направляющая окружность Σ инверсии пересекает центральную прямую o в точках Q_0 и R_0 (черт. 221). Пусть далее Z_0 — точка пересечения касательных k_0 и l_0 к окружности Σ в точках Q_0 и R_0 [1]), S — произвольная (направленная) окружность (или точка), a — касательная к S, a_0 — касательная к Σ, параллельная a, a_0' — вторая касательная к Σ, проведённая из точки M_0 пересечения a_0 и o, и, наконец, $\bar{a}$ — касательная к S, параллельная a_0'.

Из соображений подобия следует, что точка $\overline{M}$ пересечения a и $\bar{a}$ лежит на прямой $\bar{o}$, параллельной o и расположенной по отношению к окружности S точно так же, как прямая o расположена по отношению к окружности Σ (другими словами, расстояние центра окружности S от прямой $\bar{o}$ так относится к радиусу этой окружности, как расстояние центра окружности Σ от прямой o к радиусу Σ). Обозначим точки пересечения S и $\bar{o}$ через Q и R и точку пересечения касательных k и l к окружности S в точках Q и R через Z (очевидно, прямые k и l соответственно параллельны k_0 и l_0).

Рассмотрим произвольную (направленную) окружность S_1, касающуюся k и l; пусть a_1 — касательная к этой окружности, параллельная $\bar{a}$, M — точка пересечения a и a_1. Мы утверждаем, что M лежит на радикальной оси o_1 окружностей S и S_1 (см. § 3 настоящей главы, стр. 221 и след.). Пусть A, $\overline{A}$ и A_1 — точки касания прямых a, $\bar{a}$ и a_1 с окружностями S, соответственно S_1. Так как S_1, очевидно, центрально-подобна S с центром подобия в точке Z и $\overline{A}$ и A_1 — соответствующие точки этих окружностей, то $\overline{A}A_1$ проходит через Z. С другой стороны, $\bar{o}$ есть поляра точки Z относительно окружности S (см. § 4 гл. I, стр. 84 и след.); так как $\bar{o}$ проходит через $\overline{M}$, то поляра точки $\overline{M}$, т. е. прямая $A\overline{A}$, проходит через Z. Следовательно, точки A, $\overline{A}$ и A_1 лежат на одной прямой, проходящей через Z. Теперь из подобия треугольников $\overline{M}A\overline{A}$ и MAA_1 следует

$$\frac{MA}{MA_1}=\frac{\overline{M}A}{\overline{M}\,\overline{A}}.$$

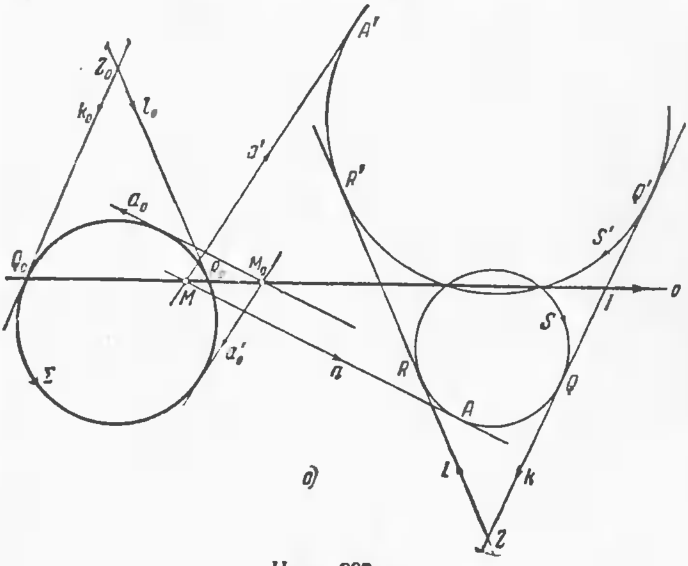
[1]) Если k_0 и l_0 параллельны, то o проходит через центр Σ; в этом случае осевая инверсия сводится к симметрии относительно o с последующим изменением направлений всех прямых, и свойство Б является очевидным.

Отсюда, так как, очевидно, $\overline{MA}=\overline{M}\,\overline{A}$, имеем:

$$MA=MA_1.$$

Но это и означает, что точка M лежит на радикальной оси o_1 окружностей S и S_1. Отметим ещё, что так как линия центров окружностей S и S_1, т. е. биссектриса угла OZR, перпендикулярна к $\bar{o}$ и o, то $o_1 \parallel o$.

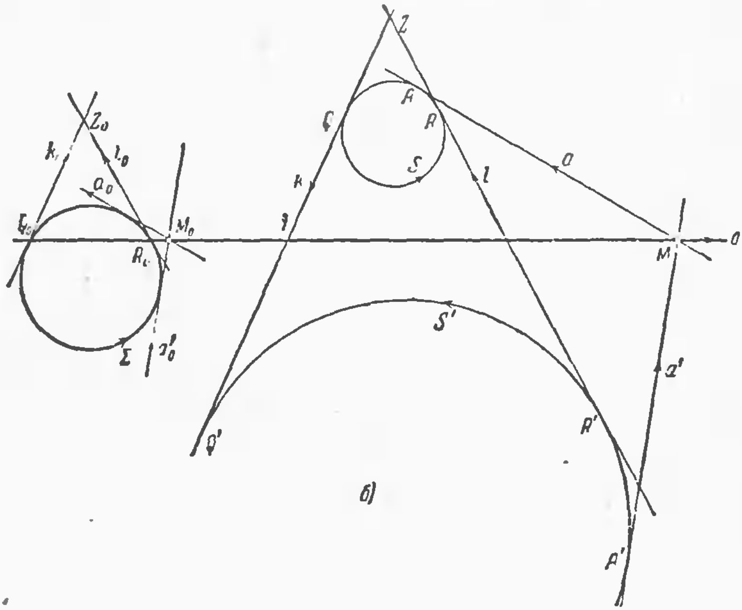
До сих пор мы считали, что S_1 — произвольная окружность, вписанная в угол QZR. Выберем теперь эту окружность специальным образом. А именно, потребуем,



Черт. 222, *а*.

чтобы отрезок QQ_1 прямой k между точками касания с S и с S_1 делился центральной прямой o пополам (черт. 222). В этом случае радикальная ось o_1 окружностей S и S_1 совпадает с o (это следует из того, что точка I, в которой k пересекает центральную прямую o, принадлежит радикальной оси окружностей S и S_1: $IQ=IQ_1$). Но раз прямые a_1 и a пересекаются на центральной прямой o, то прямая a_1 совпадает с прямой a', получающейся из a при помощи осевой инверсии (см. определение осевой инверсии на стр. 285). А это означает, что окружность S переходит в результате осевой инверсии в окружность S_1 (которую мы в этом случае будем обозначать через S'). Этим самым доказательство свойства Б инверсии полностью закончено [1]).

Из доказательства свойства Б непосредственно вытекает построение окружности S', в которую переходит данная



Черт. 222, б.

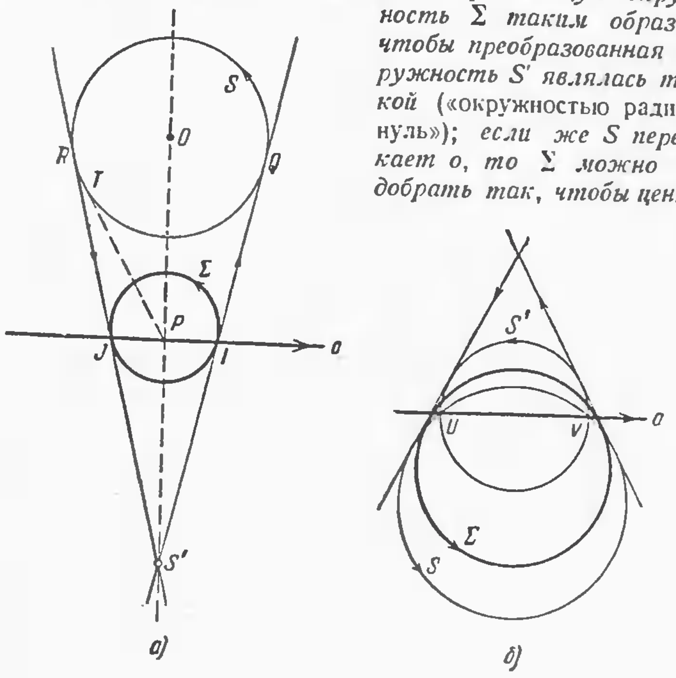
окружность S: *окружность S' касается касательных k и l окружности S, параллельных касательным k_0 и l_0 направляющей окружности Σ в точках пересечения Σ с центральной прямой o; при этом отрезки QQ' и RR' общих касательных окружностей S и S' делятся центральной прямой o пополам.* В случае, когда S пересекает o (черт. 222, a), при построении окружности S' можно исходить из того, что

---

[1]) Рекомендуем читателю самостоятельно разобрать, как надо изменить это доказательство для того, чтобы оно относилось к случаю осевой инверсии отрицательной степени.

o есть общая хорда S и S' (это следует из того, что o есть радикальная ось S и S').

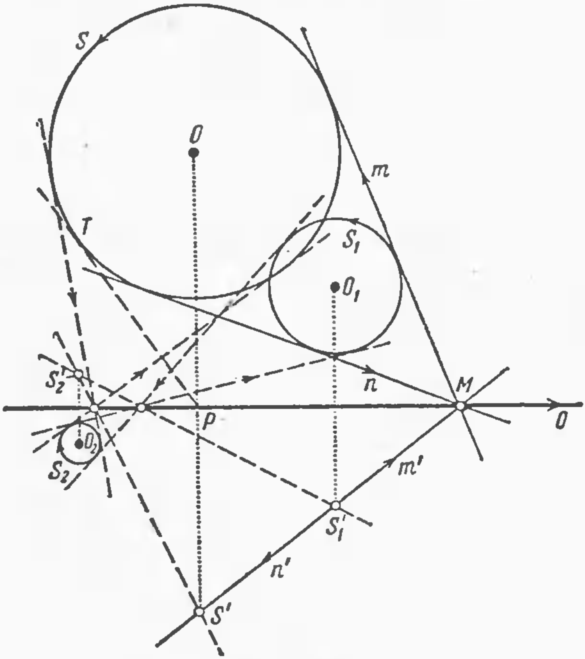
Из этого построения можно сделать несколько важных выводов. Прежде всего легко показать, что *если окружность S не пересекает центральной прямой осевой инверсии, то всегда можно подобрать направляющую окружность Σ таким образом, чтобы преобразованная окружность S' являлась точкой* («окружностью радиуса нуль»); *если же S пересекает o, то Σ можно подобрать так, чтобы центр*



Черт. 223.

S' лежал на o. Действительно, пусть S не пересекает o и P есть основание перпендикуляра, опущенного из центра O окружности S на прямую o, PT — касательная, проведённая из точки P к окружности S, и S' — такая точка на продолжении OP за точку P, что $PS' = PT$ (черт. 223, a). Легко видеть, что в этом случае радикальная ось точки («окружности нулевого радиуса») S' и окружности S совпадает с o (ибо в силу равенства $PT = PS'$ точка P принадлежит радикальной оси). Отсюда следует, что *если направляющая окруж-*

ность Σ *осевой инверсии такова, что касательные к этой окружности в точках пересечения её с осью* o *параллельны касательным* $S'Q$ *и* $S'R$, *проведённым из* S' *к* S (например, если Σ касается отрезков $S'Q$ и $S'R$ в их серединах I и J; черт. 223, *а*), *то осевая инверсия переводит окружность* S



Черт. 224.

в точку S'. *Если же* S *пересекает* o *в точках* U *и* V, *то для того, чтобы перевести* S *в окружность* S' *с диаметром* UV (S' имеет то же направление, что и S), *достаточно потребовать, чтобы касательные к направляющей окружности* Σ *в точках пересечения её с центральной прямой* o *были параллельны общим касательным* S *и* S' (например, чтобы Σ касалась этих общих касательных в точках пересечения их с o; черт. 223, *б*)..

Пусть, далее, осевая инверсия переводит (не пересекающую центральную прямую o) окружность S в точку S', m и n — касательные, проведённые к окружности S из (произвольной) точки M центральной прямой o, S_1 — (произвольная) окружность, касающаяся m и n (черт. 224). Прямые m' и n', в которые переводит m и n наша осевая инверсия, обе проходят через M и S' и, следовательно, могут отличаться только направлением; окружность S'_1, в которую переводит осевая инверсия окружность S_1, касается m' и n'. Но очевидно, что только точка (но не окружность отличного от нуля радиуса) может «касаться» двух прямых, совпадающих по положению, но противоположных по направлению; следовательно, рассматриваемая осевая инверсия переводит в точку и окружность S_1. Отсюда вытекает, *что каждые две окружности S и S_1, имеющие две общие касательные m и n, можно перевести в две точки подходяще выбранной осевой инверсией* (*или расширением*); для этого достаточно только потребовать, чтобы центральная прямая o осевой инверсии проходила через точку пересечения m и n и окружность S переходила в точку (если $m \parallel n$, то S и S_1 можно перевести в точки расширением). Более того, даже *три окружности S, S_1 и S_2, удовлетворяющие тому единственному условию, что ось подобия о этих окружностей* (см. § 1 гл. I второй части книги, т. I, стр. 94)[1]) *не пересекает самих окружностей, можно перевести в три точки подходяще выбранной осевой инверсией*; для этого достаточно произвести осевую инверсию с центральной прямой o, переводящую S в точку (см. черт. 224)[2]).

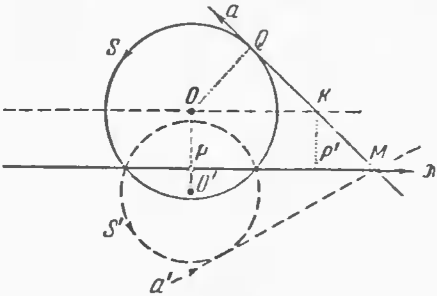
Приведём ещё алгебраическое доказательство свойства Б осевой инверсии, опирающееся на первое определение этого преобразования. Пусть касательная a к окружности S пересекает центральную прямую

---

[1]) В то время как три ненаправленные окружности имеют, вообще говоря, четыре оси подобия, три направленные окружности имеют единственную ось подобия (см. выше стр. 269, в частности черт. 206).

[2]) Отметим имеющееся в этом пункте различие между обыкновенной и осевой инверсией. Случай, когда три заданные окружности можно перевести при помощи обыкновенной инверсии в три прямые, представляет собой редкое исключение (для этого необходимо, чтобы данные окружности пересекались в одной точке). В противоположность этому при помощи осевой инверсии три данные окружности весьма часто можно перевести в три точки (случай, когда ось подобия трёх окружностей не пересекает этих окружностей, нельзя считать исключением; этот случай, грубо говоря, имеет место «столь же часто», как и противный).

o в точке M, r — радиус S и d — расстояние центра O этой окружности от прямой o (черт. 225). Опустим из точки O перпендикуляры OP и OQ на o и a и пусть K есть точка пересечения прямой a с



Черт. 225.

прямой OK, параллельной o, P' — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на o. В таком случае, очевидно [1]),

$$MP = MP' + P'P.$$

Далее из треугольников $MP'K$ и KOQ имеем:

$$MP' = \frac{KP'}{-\operatorname{tg}\widehat{oa}} = -\frac{d}{\operatorname{tg}\widehat{oa}}, \quad PP' = KO = \frac{OQ}{\sin\widehat{oa}} = \frac{r}{\sin\widehat{oa}}$$

и, следовательно,

$$MP = -\frac{d}{\operatorname{tg}\widehat{oa}} + \frac{r}{\sin\widehat{oa}} = -d : \frac{2\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{oa}}{2}} + r : \frac{2\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{oa}}{2}} =$$

$$= -\frac{d\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{oa}}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}} + \frac{r\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\widehat{oa}}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}},$$

или окончательно

$$MP = A\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2} + B\operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa}}{2}. \qquad (*)$$

---

[1]) Для того чтобы сделать всё это рассуждение независимым от чертежа, необходимо привлечь понятие направленных отрезков (ср. со сноской [1]) на стр. 50 первого тома книги).

где

$$A=\frac{d+r}{2}, B=\frac{-d+r}{2}.$$

Теперь произведём осевую инверсию со степенью инверсии k. В таком случае прямая a перейдёт в прямую a', пересекающую o в той же точке M и такую, что

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2}=k,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2}=k\operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa'}}{2}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa}}{2}=\frac{1}{k}\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2}.$$

Следовательно, для новой прямой a' мы будем иметь:

$$MP=Ak\operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa'}}{2}+\frac{B}{k}\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2},$$

или

$$MP=A'\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2}+B'\operatorname{ctg}\frac{\widehat{oa'}}{2}, \tag{**}$$

где

$$A'=\frac{B}{k}, \quad B'=Ak.$$

Из сравнения соотношений (*) и (**) следует, что прямая a' касается окружности S', радиус r' и расстояние $O'P=d'$ центра O' которой от оси o определяются из соотношений

$$\frac{d'+r'}{2}=A', \qquad \frac{-d'+r'}{2}=B'$$

(см. черт. 225). А это нам и требовалось доказать.

Отметим, что из полученных формул вытекает:

$$r'=A'+B'=\frac{B}{k}+Ak=\frac{-d+r}{2k}+\frac{(d+r)k}{2},$$

$$d'=A'-B'=\frac{B}{k}-Ak=\frac{-d+r}{2k}-\frac{(d+r)k}{2}.$$

Таким образом, для того чтобы преобразованная окружность S' была точкой, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$r'=\frac{-d+r}{2k}+\frac{(d+r)k}{2}=0.$$

или

$$k^2=\frac{d-r}{d+r}; \quad k=\sqrt{\frac{d-r}{d+r}}=\frac{\sqrt{d^2-r^2}}{d+r}.$$

Отсюда следует, что *если* (направленная) *прямая* o *не пересекает* (направленной) *окружности* S (т. е. если $d^2 - r^2 > 0$), *то* S *можно перевести в точку при помощи осевой инверсии с центральной прямой* o; *для этого достаточно выбрать степень инверсии* k, *равной*

$$k = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{d + r}.$$

[При этом в точки переходят все окружности, для которых $\frac{d-r}{d+r} = k^2$ или $\frac{d}{r} = \frac{1+k^2}{1-k^2}$; это семейство окружностей характеризуется тем, что центр подобия каждых двух из них лежит на оси o.]

Для того чтобы центр преобразованной окружности лежал на центральной прямой o, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$d' = -\frac{d+r}{2k} - \frac{(d+r)k}{2} = 0$$

или

$$k^2 = \frac{-d+r}{d+r}; \ k = \sqrt{\frac{-d+r}{d+r}} = \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r + d}.$$

Поэтому *если* S *пересекает* o (т. е. если $r^2 - d^2 > 0$), *то* S *можно перевести в окружность, центр которой лежит на* o; *для этого достаточно выбрать степень инверсии* k *равной*

$$k = \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r + d}.$$

В. *При осевой инверсии сохраняется касательное расстояние двух окружностей* (сравните со свойством В обыкновенной инверсии, § 1, стр. 181).

Предположим сначала, что одна из двух окружностей представляет собой точку M («окружность нулевого радиуса»), лежащую на оси инверсии o (черт. 226, a). В таком случае точка M при инверсии перейдёт в себя, а касательное расстояние MA точки M и окружности S будет равно касательному расстоянию MA' точки M и преобразованной окружности S' (ибо o есть радикальная ось S и S'; см. доказательство свойства Б осевой инверсии).

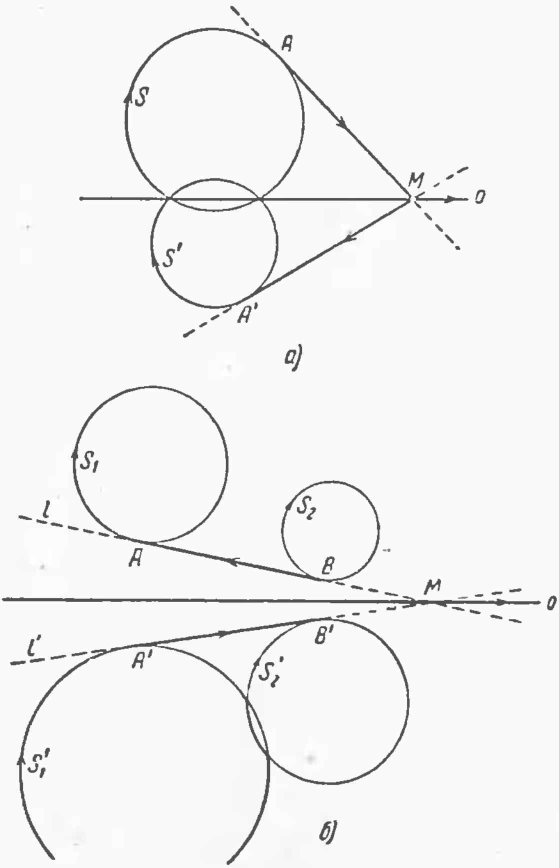
Пусть теперь S_1 и S_2 — две окружности и AB — их общая касательная, пересекающая ось инверсии o в точке M, S_1' и S_2' — окружности, в которые переходят окружности S_1 и S_2 в результате осевой инверсии, и $A'B'$ — их общая касательная (черт. 226, *б*). В силу только что доказанного мы имеем:

$$AM = A'M, \quad BM = B'M,$$

откуда вытекает

$$AB = A'B',$$

что и требовалось доказать.

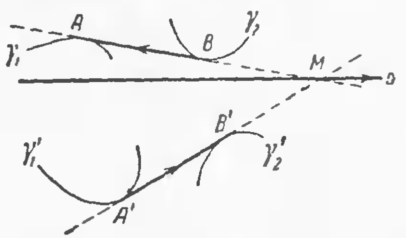


Черт. 226.

Из свойства В осевой инверсии, в частности, вытекает, что *две касающиеся окружности переходят при осевой инверсии в две касающиеся окружности.*

Отметим, что аналогично тому, как при обыкновенной инверсии не меняется угол между окружностями, но меняется направление отсчёта угла (см. выше стр. 182), можно считать, что при осевой инверсии касательное расстояние двух окружностей не меняется по величине, но меняется по направлению. А именно, если AB есть касательное расстояние двух окружностей S_1 и S_2 и направление отрезка AB от A к B противоположно направлению общей касательной l окружностей, которой принадлежит этот отрезок, то касательное расстояние $A'B'$ преобразованных окружностей S_1' и S_2' равно расстоянию AB, но направление отрезка $A'B'$ от A' к B' уже будет совпадать с направлением прямой l', в которую переходит l (см. черт. 226, б).

Аналогично определению касательного расстояния двух окружностей можно определить касательное расстояние пары произвольных кривых γ_1 и γ_2 как длину отрезка общей касательной γ_1 и γ_2 между точками касания (черт. 227; относительно понятия касательной к произвольной кривой см. выше стр. 182). Можно показать, что *если при осевой инверсии две произвольные кривые γ_1 и γ_2 переходят в кривые γ_1' и γ_2', то касательное расстояние γ_1' и γ_2' равно касательному расстоянию γ_1 и γ_2* (другими словами: *при осевой инверсии сохраняются касательные расстояния между кривыми*[1]). Мы не остановимся на доказательстве этого свойства осевой инверсии, так как оно нигде нам не понадобится.



Черт. 227.

276. а) Примените осевую инверсию для решения задачи Аполлония (см. задачу 237а) из § 2, стр. 208) в том случае, когда ось подобия заданных окружностей S_1, S_2 и S_3 не пересекает ни одной из них.

б) Примените осевую инверсию для доказательства теоремы задачи 261 (стр. 243) в том случае, когда ось подобия окружностей S_1, S_2 и S_3 не пересекает ни одной из них.

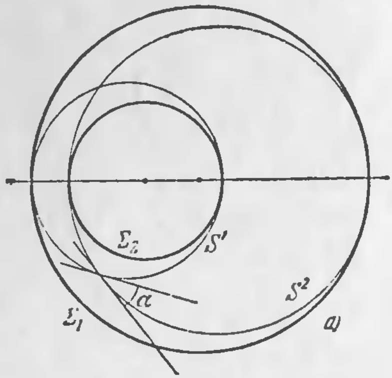
277. Используя свойства осевой инверсии, выведите теорему Брианшона (см. задачу 146 из § 3 гл. I, стр. 80) из того факта, что попарные радикальные оси трёх окружностей пересекаются в одной точке (см. § 3, стр. 226).

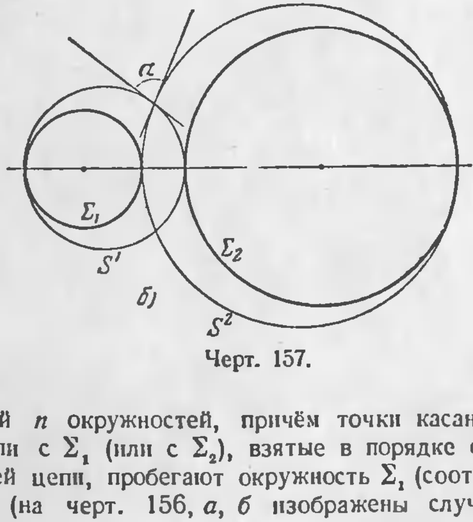
[1]) Всякое преобразование, при котором сохраняются касательные расстояния между кривыми, называется эквилонгальным (ср. с определением конформного преобразования на стр. 183). Таким образом, *осевая инверсия есть эквилонгальное преобразование.*

различным образом, если Σ_1 и Σ_2 расположены одна вне другой (черт. 157, *а* и *б*). А именно, если

$$\alpha = \frac{m}{n} \cdot 360^\circ,$$

то окружности Σ_1 и Σ_2 могут служить основанием цепи,



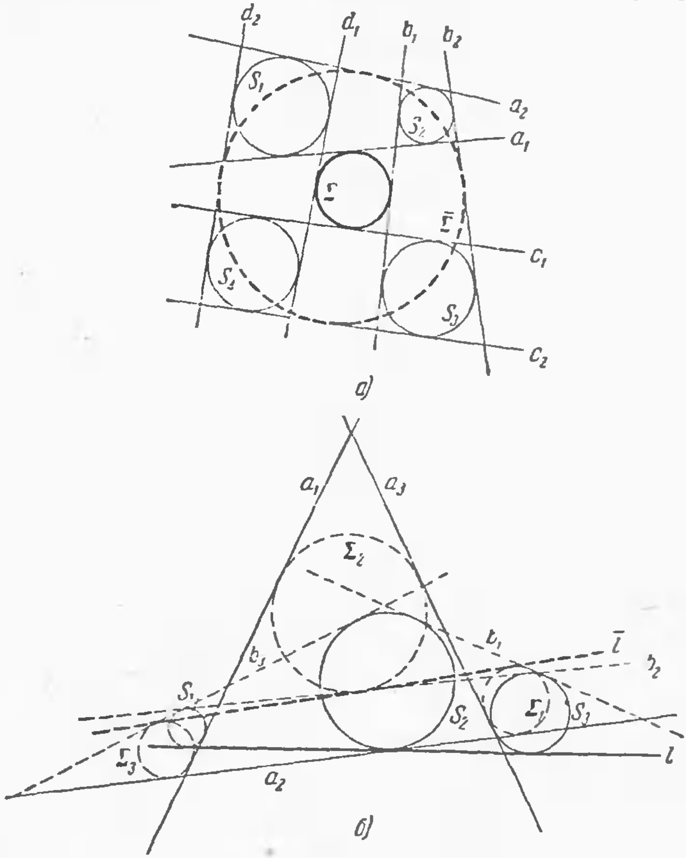


Черт. 157.

содержащей n окружностей, причём точки касания окружностей цепи с Σ_1 (или с Σ_2), взятые в порядке следования окружностей цепи, пробегают окружность Σ_1 (соответственно Σ_2) m раз (на черт. 156, *а*, *б* изображены случаи, когда $m = 1$).

Дробь $\frac{m}{n}$ называется *характеристикой* цепи.

278. а) Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4; пусть a_1, a_2 — общие касательные S_1 и S_2, b_1, b_2 — общие касательные S_2 и S_3, c_1, c_2 — общие касательные S_3 и S_4, d_1, d_2 —



Черт. 228.

общие касательные S_4 и S_1. Докажите, что если a_1, b_1, c_1 и d_1 касаются одной окружности Σ, то a_2, b_2, c_2 и d_2 касаются одной окружности $\overline{\Sigma}$ (черт. 228, *а*)[1]).

---

[1]) В задачах 278—280 следует так выбирать общие касательные окружностей, чтобы их можно было рассматривать как направ-

б) Даны три окружности S_1, S_2, S_3 и касательные a_1, a_2, a_3 этих окружностей; пусть далее b_3, b_2 и b_1 — общие касательные S_1 и S_2, S_1 и S_3, S_2 и S_3; Σ_1, Σ_2, Σ_3 — три окружности, касающиеся соответственно a_2, a_3 и b_1; a_1, a_3 и b_2; a_1, a_2 и b_3 (черт. 228, *б*)[1]). Докажите, что если S_1, S_2 и S_3 касаются одной прямой l (отличной от b_1, b_2, b_3), то Σ_1, Σ_2 и Σ_3 касаются одной прямой l (отличной от a_1, a_2, a_3).

279. Пусть A, B и C — три окружности, попарные касательные расстояния которых равны a, b и c; D — окружность, касающаяся общих касательных K_1L_1 и K_2L_2 окружностей A и B в серединах отрезков K_1L_1 и K_2L_2 (черт. 230)[1]). Чему равно касательное расстояние x окружностей C и D?

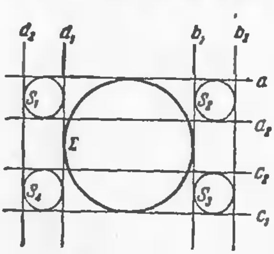
280. Пусть A, B и C — три окружности, D, E и F — окружности, касающиеся общих касательных окружностей A и B, B и C, C и A в серединах отрезков, определяемых точками касания (черт. 230)[1]). Докажите, что

а) общие касательные C и D, A и E, B и F — все касаются одной окружности M;

б) точки касания общих касательных C и D, A и E, B и F с окружностью M делят отрезки этих касательных

ленные касательные направленных окружностей (при каком-то выборе направлений окружностей).

Так, например, в условии задачи 278а) необходимо требовать, чтобы a_1 и a_2 были «одноимёнными» общими касательными S_1 и S_2 (т. е. обе внешними или обе внутренними) и аналогично b_1 и b_2, c_1 и c_2, d_1 и d_2 являлись «одноимёнными» касательными; затем, чтобы среди четырёх пар общих касательных a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 имелось чётное число пар общих внутренних касательных: 0 (см. черт. 228, *а*), 2 или 4. Но даже и выполнение этих двух условий ещё не гарантирует, что предложение задачи имеет место,— надо ещё, чтобы окружностям S_1, S_2, S_3 и S_4 можно было приписать такие направления, чтобы их направленные касательные a_1, b_1, c_1 и d_1 касались одной направленной окружности Σ (см. черт. 229, где так выбрать направления S_1, S_2, S_3 и S_4 невозможно,— на этом чертеже a_2, b_2, c_2 и d_2 не касаются никакой окружности).

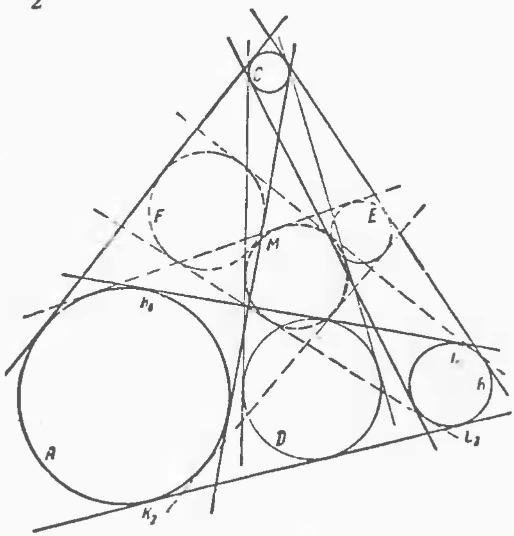


Черт. 229.

[1]) См. предыдущую сноску.

между соответствующими окружностями в отношении 2:1 (считая от окружностей C, A и B)[1]).

281. Двойным отношением четырёх (направленных) прямых a, b; c, d называется выражение $\dfrac{\sin\frac{\widehat{ac}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bc}}{2}} : \dfrac{\sin\frac{\widehat{ad}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bd}}{2}}$ (ср. с определением двойного отношения четы-



Черт. 230.

рёх точек, стр. 235). Докажите, что двойное отношение четырёх прямых сохраняется при осевой инверсии (ср. со свойством Г обыкновенной инверсии, § 4, стр. 236).

282. Найдите геометрическое место точек, которые данная последовательность осевых инверсий переводит снова в точки.

283. Опишите вокруг данной окружности S n-угольник, вершины которого лежат на данных n прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

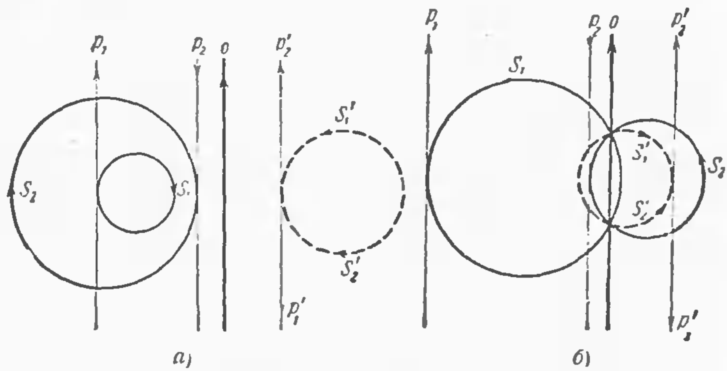
В другой связи задача 283 приведена в § 5 гл. I (см. задачу 183б) на стр. 120).

[1]) Относительно напрашивающейся аналогии содержания этой задачи со свойствами медиан треугольника см. ниже стр. 349.

Докажем теперь одну теорему, которая иногда оказывается полезной при решении задач с помощью осевой инверсии.

Теорема 2. *Каждые две* (направленные) *окружности или* (направленную) *окружность и точку можно при помощи осевой инверсии перевести в две точки, или в точку и проходящую через неё окружность, или в две окружности, отличающиеся только направлением* (ср. с теоремой 2 § 1, стр. 194).

Доказательство. Мы уже видели выше, что две окружности, имеющие две общие касательные, можно при помощи осевой инверсии перевести в две точки (см. стр. 295).



Черт. 231.

Далее, так как каждую окружность можно перевести в точку, то две касающиеся окружности (окружности, имеющие единственную общую касательную) можно осевой инверсией перевести в точку и проходящую через неё окружность — для этого достаточно перевести в точку одну из этих двух окружностей. Таким образом, нам остаётся только доказать, что две окружности S_1 и S_2, не имеющие вовсе общих касательных (черт. 231), можно осевой инверсией перевести в две окружности S_1' и S_2', отличающиеся только направлением.

Если o есть центральная прямая искомой осевой инверсии, то o есть радикальная ось (ненаправленных) окружностей S_1 и S_1' и радикальная ось (ненаправленных) окружностей S_2 и S_1' (см. доказательство свойства Б осевой инверсии). Значит, каждая точка прямой o имеет равные степени относительно

S_1 и S_1' и относительно S_2 и S_1'; отсюда следует, что каждая точка o имеет равные степени относительно S_1 и S_2, т. е. что o есть радикальная ось S_1 и S_2.

Пусть теперь p_1 — касательная S_1, параллельная o, p_2 — касательная S_2, противопараллельная o [1]). Наша осевая инверсия переводит p_1 и p_2 в касательные p_1' и p_2' окружностей S_1' и S_2'; при этом p_1' противопараллельна o, p_2' параллельна o (см. выше стр. 284). Но так как S_1' и S_2' отличаются только направлением, то p_1' и p_2' отличаются только направлением. Обозначим (положительные или отрицательные в соответствии с правилом, определяющим знак расстояния от точки до прямой; см. выше стр. 262) расстояния от прямых p_1, p_2 и p_1' до o через d_1, d_2 и d. В таком случае, если k есть степень осевой инверсии, то [2])

$$\frac{d_1}{d} = -k, \quad \frac{d}{d_2} = -k$$

(см. выше стр. 284; напоминаем, что параллельны o прямые p_1 и p_2'). Перемножая эти равенства, получим:

$$\frac{d_1}{d_2} = k^2,$$

т. е. квадрат степени инверсии равен отношению расстояний от p_1 и p_2 до o. При этом отношение $\frac{d_1}{d_2}$, наверное, положительно (расстояния берутся со знаками!), ибо S_1 и S_2 по условию не имеют общих касательных и, следовательно, лежат одна внутри другой, т. е. по одну сторону от радикальной оси o (черт. 231, *а*), или пересекаются и одинаково направлены и, значит, p_1 и p_2 лежат по одну сторону от общей хорды o (черт. 231, *б*).

Пусть теперь нам известны окружности S_1 и S_2; произведём осевую инверсию, центральной прямой которой служит их радикальная ось o (направление которой мы выбираем произвольно), а степень инверсии равна $\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$, где d_1 и d_2 определяются, как выше В таком случае прямые p_1 и p_2 перейдут в прямые p_1' и p_2', отличающиеся только направлением;

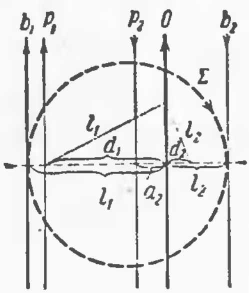
---

[1]) См. сноску на стр. 284.

[2]) Здесь справа стоит знак «минус», ибо при положительном k исходная и преобразованная прямые лежат по разные стороны от o (см. выше стр. 284—285).

S_1 и S_2 переходят в окружности S'_1 и S'_2, обе принадлежащие пучку окружностей, имеющих с S_1 и S_2 общую радикальную ось o (см. выше стр. 229). Но две различные (ненаправленные) окружности пучка не могут касаться одной и той же прямой, параллельной радикальной оси пучка, т. е. перпендикулярной к линии центров (см. черт. 164, *б*; 165, *б*; 167, *б* на стр. 215—218, где изображены пучки непересекающихся, касающихся и пересекающихся окружностей). Отсюда вытекает, что окружности S'_1 и S'_2 отличаются только направлением, чем и завершается доказательство теоремы 2.

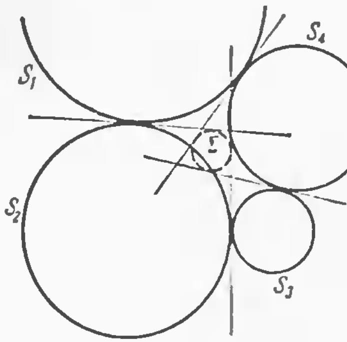
Отметим, что центральную прямую o и направляющую окружность Σ осевой инверсии, переводящей две данные окружности S_1 и S_2, не имеющие общих касательных, в две окружности, отличающиеся только направлением, можно построить циркулем и линейкой. Действительно, o есть радикальная ось S_1 и S_2. Что касается Σ, то отношение расстояний l_1 и l_2 от касательных b и b' этой окружности, соответственно параллельной и противопараллельной o, до центральной прямой o должно равняться степени k инверсии (ср. выше стр. 286 и 284—285); поэтому $\frac{l_1}{l_2}=\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$, т. е. $\frac{l_1}{l_2}$ равно отношению катетов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого разбивается высотой на отрезки d_1 и d_2; это условие позволяет построить окружность Σ (черт. 232). Так же центральную прямую и направляющую окружность осевой инверсии, переводящей две данные окружности в две точки или в точку и проходящую через неё окружность, можно построить циркулем и линейкой (см. выше стр. 293—295).



Черт. 232.

284. Пусть даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, причём S_1 и S_3 обе касаются и S_2 и S_4 (черт. 233). Докажите, что четыре общие касательные касающихся окружностей, проходящие через точки их касания, проходят через одну точку или касаются одной окружности.

[В условии этой задачи надо требовать, чтобы из четырёх пар касающихся окружностей: S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1, чётное число пар (0, 2 или все 4) имели внутреннее касание и чётное число пар имели внешнее касание [1]).]



Черт. 233.

285. Постройте окружность, касающуюся данных:

а) прямой l и двух окружностей S_1 и S_2 (или касающуюся данных прямой l и окружности S_1 и проходящую через данную точку S_2);

б) трёх окружностей S_1, S_2 и S_3 (или касающуюся двух данных окружностей S_1 и S_2 и проходящую через данную точку S_3) (з а д а ч а А п о л л о н и я).

См. также задачи 237а) и 232б) из § 2 (стр. 207—208).

286. Даны три окружности S_1, S_2 и S_3; S_1 заключена внутри S_2. Постройте окружность Σ, такую, что:

а) касательное расстояние S_1 и Σ равно a, касательное расстояние S_2 и Σ равно b, касательное расстояние S_3 и Σ равно c, где a, b и c — заданы;

б) угол между S_1 и Σ равен α, угол между S_2 и Σ равен β, угол между S_3 и Σ равен γ; $90° > \alpha > \beta$.

См. также задачи 238б), а) из § 2 (стр. 209).

287. Даны четыре окружности: S_1, S_2, S_3 и S_4; S_1 заключена внутри S_2. Постройте окружность Σ, такую, что касательные расстояния S_1 и Σ, S_2 и Σ, S_3 и Σ, S_4 и Σ все равны между собой.

Чтобы ярче подчеркнуть двойственность между точечной и осевой инверсией, мы запишем здесь определение и основные свойства этих преобразований, а также другие относящиеся сюда теоремы,

[1]) Это условие обеспечивает возможность считать окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 направленными с соблюдением условий о касании направленных окружностей.

частично доказанные выше, а частично новые, в виде таблицы, в левом и правом столбцах которой расположены двойственные друг другу предложения.

I. Если m есть произвольная прямая, проходящая через фиксированную точку L и пересекающая данную окружность S в двух точках A и B, то произведение

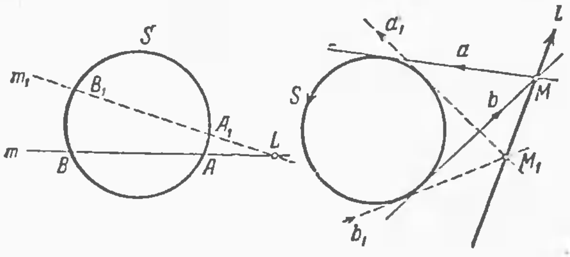
$$LA \cdot LB$$

(черт. 234, *а*) зависит только от точки L и окружности S, но не от прямой m (теорема I′, стр. 281). Это произведение называется **степенью точки относительно окружности** S.

I′. Если M есть произвольная точка, лежащая на фиксированной (направленной) прямой l вне данной (направленной) окружности S, и a, b — касательные, проведённые из точки M к окружности S, то произведение

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{la}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\widehat{lb}}{2}$$

(черт. 234, *б*) зависит только от прямой l и окружности S, но не от точки M (теорема 1, стр. 279). Это произведение называется **степенью прямой** l **относительно окружности** S



б)

а)

Черт. 234.

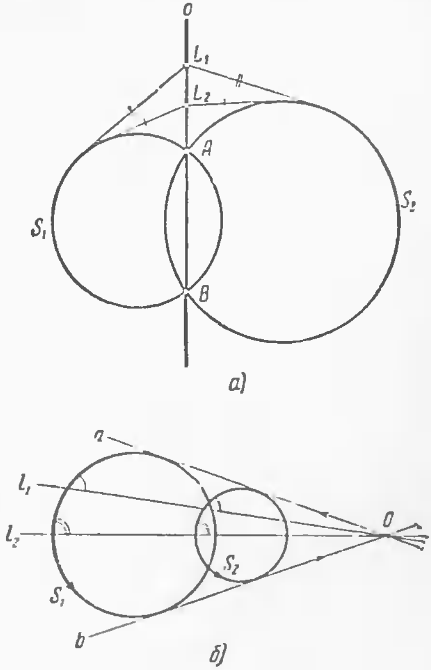
II. Геометрическое место точек L, степени которых относительно данных двух окружностей S_1 и S_2 равны, есть прямая линия o (см. § 3 настоящей главы). Эта прямая называется **радикальной осью** двух окружностей. Если окружности S_1 и S_2 имеют общие точки A и B, то эти точки лежат на радикальной оси (черт. 235, *а*). Радикальную ось двух окружностей можно определить как такую прямую, что ка-

II′. Все (направленные) прямые l, степени которых относительно данных двух (направленных) окружностей S_1 и S_2 равны, проходят через одну точку O. Эта точка является **центром подобия** двух окружностей (докажите!). Если окружности S_1 и S_2 имеют общие касательные a и b, то эти касательные проходят через центр подобия (черт. 235, *б*). Центр подобия двух окружностей можно определить как такую точсательные расстояния от каждой из её точек до окружностей S_1 и S_2 равны.

ку, что все прямые, проходящие через неё, образуют одинаковые углы с обеими окружностями.

III. Геометрическое место точек, отношение степеней которых относительно двух окружностей S_1 и S_2 имеет постоянное значение, отличное от единицы, есть окружность (см. задачу 250б) из § 3 настоящей главы) [1].

III'. Все (направленные) прямые, отношение степеней которых относительно двух (направленных) окружностей S_1 и S_2 имеет постоянное значение, отличное от единицы, касаются некоторой окружности (докажите!) [2].



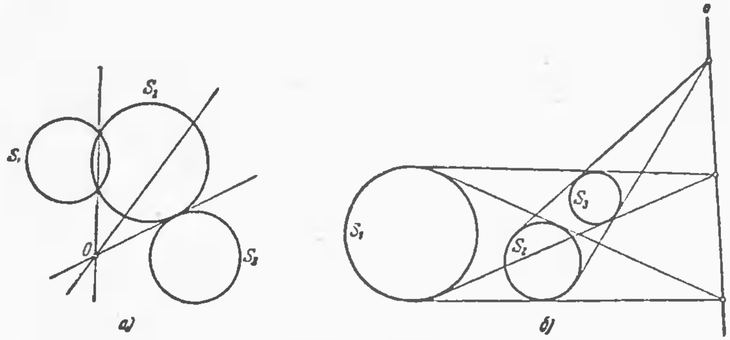
Черт. 235.

[1]) Эта окружность принадлежит к пучку окружностей, определяемых S_1 и S_2 (см. ниже п. XI).

[2]) Эта окружность принадлежит к ряду окружностей, определяемых S_1 и S_2 (см. ниже п. XI').

IV. Попарные радикальные оси трёх окружностей S_1, S_2 и S_3 пересекаются в одной точке O (см., например, черт. 236, *a*). Эта точка называется **радикальным центром** трёх окружностей (см. выше стр. 226).

IV′. Попарные центры подобия трёх окружностей S_1, S_2 и S_3 лежат на одной прямой o (см., например, черт. 236, *б*). Эта прямая называется **осью подобия** трёх окружностей (см. § 1 гл. I части второй, стр. 93—94 первого тома книги)[1].



Черт. 236.

V. **Инверсией** с центром O и степенью k называется преобразование, переводящее точку A в точку A', такую, что три точки A, A' и O лежат на одной прямой и

$$OA \cdot OA' = k.$$

V′. **Осевой инверсией** с центральной прямой o и степенью k называется преобразование, переводящее прямую a в прямую a', такую, что три прямые a, a' и o пересекаются в одной точке и

$$\operatorname{tg}\frac{\widehat{oa}}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\widehat{oa'}}{2} = k.$$

VI. Инверсия переводит окружность S в окружность S' (см. свойство Б инверсии, стр. 180). Здесь к числу окружностей причисляются и прямые — «окружности бесконечно большого радиуса».

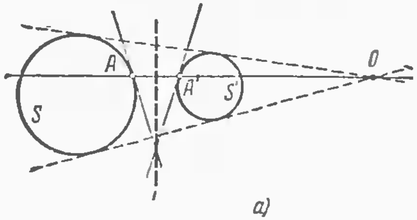
VI′. Осевая инверсия переводит окружность S в окружность S' (см. свойство Б осевой инверсии, стр. 288—289). Здесь к числу окружностей причисляются и точки — «окружности нулевого радиуса».

---

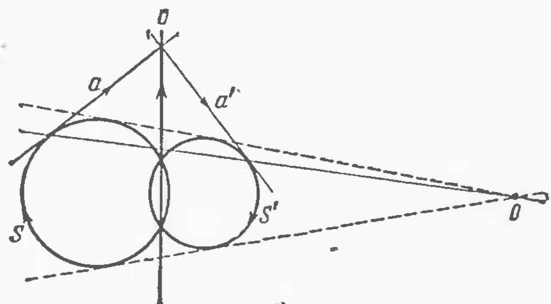
[1]) Это предложение можно доказать совершенно аналогично доказательству теоремы о радикальных осях (ср. выше стр. 226). Отсюда вытекает новое доказательство теоремы о трёх центрах подобия (если рассматриваемые в этой теореме фигуры F, F_1 и F' отличны от окружностей, то для доказательства достаточно описать вокруг трёх соответствующих друг другу точек A, A_1 и A' этих фигур окружности, отношения радиусов которых равны коэффициентам подобия фигур).

VII. Центр O инверсии, переводящей окружность S в окружность S', является центром подобия окружностей S и S' (черт. 237, *а*; см. доказательство свойства Б инверсии, стр. 178—179).

VII'. Центральная прямая *о* осевой инверсии, переводящей окружность S в окружность S', является радикальной осью окружностей S и S' (черт. 237, *б*; см. доказательство свойства Б осевой инверсии, стр. 289—292).



а)



б)

Черт. 237.

VIII. Пусть инверсия переводит окружность S в окружность S'. В таком случае геометрическое место точек пересечения касательных к этим двум окружностям в соответствующих при инверсии точках A и A' есть прямая линия — радикальная ось *о* окружностей S и S' (черт. 237, *а*; см. задачу 251а) из § 3, стр. 231—232).

VIII'. Пусть осевая инверсия переводит окружность S в окружность S'. В таком случае прямые, соединяющие точки касания соответствующих при осевой инверсии касательных a и a' к S и S', проходят через постоянную точку — центр подобия окружностей S и S' (черт. 237, *б*; см. доказательство свойства Б осевой инверсии).

IX. При инверсии сохраняется угол между двумя окружностями (свойство В инверсии, стр. 181).

IX'. При осевой инверсии сохраняется касательное расстояние двух окружностей (свойство В осевой инверсии, стр. 298).

X. При инверсии сохраняется двойное отношение четырёх точек A, B, C и D:

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$$

(свойство Г инверсии, стр. 236).

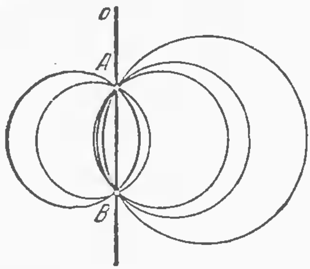
X′. При осевой инверсии сохраняется двойное отношение четырёх прямых a, b, c и d:

$$\frac{\sin\frac{\widehat{ac}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bc}}{2}}:\frac{\sin\frac{\widehat{ad}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bd}}{2}}$$

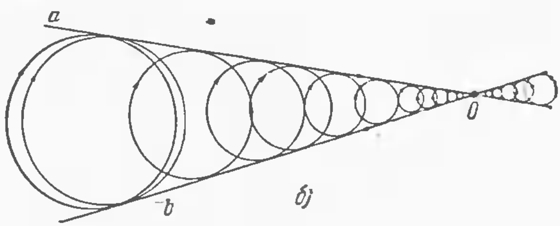
(см. задачу 281, стр. 303).

XI. Совокупность окружностей, каждые две из которых имеют одну и ту же радикальную ось o,

XI′. Совокупность окружностей, каждые две из которых имеют один и тот же центр подобия O,



а)



б)

Черт. 238.

называется пучком окружностей (см. выше стр. 229). Прямая o называется осью пучка. Если две окружности пучка пересекаются в точках A и B, то все окружности пучка проходят через A и B (черт. 238, a).

называется рядом окружностей. Точка O называется центром ряда. Если две окружности ряда имеют общие касательные a и b, то все окружности ряда касаются a и b (черт. 238, b).

XII. Совокупность окружностей, относительно которых данная точка O имеет одну и ту же сте-

XII′. Совокупность окружностей, относительно которых данная прямая o имеет одну и ту же степень, называется связкой окружностей. Точка O называется центром связки. Если центр O лежит вне окружностей связки, то касательное расстояние O и каждой из окружностей связки имеют одно и то же значение.

пень, называется сетью окружностей. Прямая o называется центральной прямой сети. Если окружности сети пересекают центральную прямую o, то все они образуют с ней равные углы.

XIII. Окружности, принадлежащие одновременно двум различным связкам, образуют пучок.

XIII′. Окружности, принадлежащие одновременно двум различным сетям, образуют ряд.

XIV. Инверсия переводит пучок окружностей в новый пучок и связку окружностей — в новую связку.

XIV′. Осевая инверсия переводит ряд окружностей в новый ряд и сеть окружностей — в новую сеть.

XV. Совокупность всех окружностей, пересекающих две данные окружности под одинаковыми углами, образует связку окружностей, центром которой является центр подобия данных двух окружностей [1]).

XV′. Совокупность окружностей, касательные расстояния которых от двух данных окружностей равны, образует сеть окружностей, центральной прямой которой является радикальная ось данных двух окружностей.

XVI. Совокупность окружностей, пересекающих три данные окружности под одинаковыми углами, образует пучок окружностей, осью которого служит ось подобия данных трёх окружностей. Центры всех окружностей этого пучка расположены на перпендикуляре, опущенном из радикального центра трёх окружностей на их ось подобия [1]).

XVI′. Совокупность окружностей, касательные расстояния которых от трёх данных окружностей равны, образует ряд окружностей, центром которого служит радикальный центр данных трёх окружностей. Центры всех окружностей этого ряда расположены на перпендикуляре, опущенном из радикального центра окружностей на их ось подобия.

Этот ряд теорем можно было бы ещё значительно продолжить.

Наконец, отметим следующие две важные теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 § 4 настоящей главы:

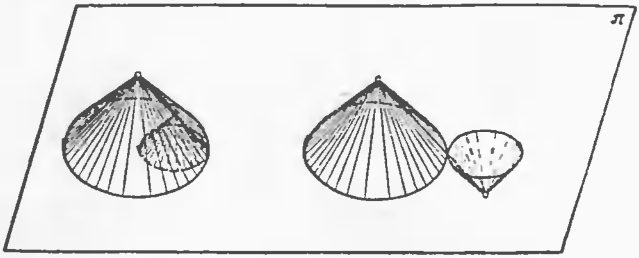
---

[1]) Здесь приходится рассматривать направленные окружности; угол между направленными окружностями однозначно определяется как угол между направленными касательными окружностей в точке пересечения. Совокупность окружностей, пересекающих две ненаправленные окружности под одинаковыми углами, состоит из двух связок с центрами в двух центрах подобия окружностей; совокупность окружностей, пересекающих три ненаправленные окружности под одинаковыми углами, состоит из четырёх пучков, осями которых служат четыре оси подобия окружностей.

Теорема 3. *Всякое осевое круговое преобразование, являющееся точечным преобразованием, есть преобразование подобия* [1].

Теорема 4. *Всякое осевое круговое преобразование, отличное от преобразования подобия, может быть осуществлено при помощи расширения или осевой инверсии, сопровождаемых ещё, быть может, преобразованием подобия* [1].

Теорема 3, очевидно, равносильна теореме 1 § 4. А именно, обе теоремы выражают тот факт, что *всякое преобразование плоскости, которое переводит точки в точки, прямые линии — в прямые линии и окружности — в окружности, есть преобразование подобия.*



Черт. 239.

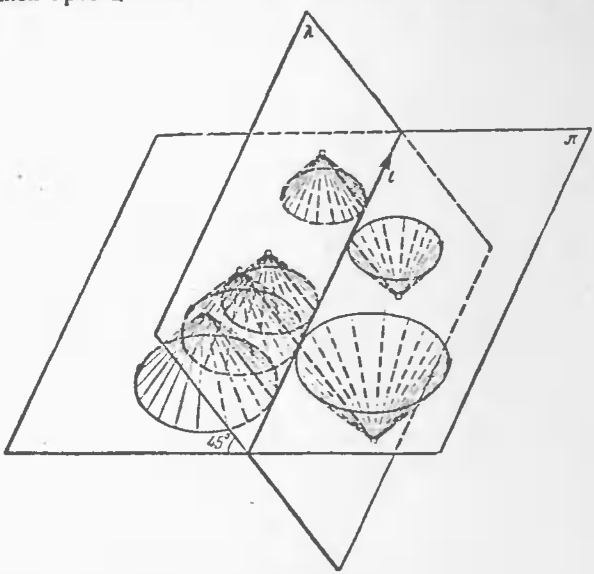
Что касается теоремы 4, то доказательство её (идейно близкое к доказательству теоремы 2 § 4) довольно сложно; мы здесь набросаем его вкратце.

Ключом к теории круговых преобразований плоскости является стереографическая проекция. Так, например, инверсию удобно представлять себе как преобразование плоскости π, соответствующее симметрии сферы σ, на которую плоскость отображена при помощи стереографической проекции (см. выше § 4, стр. 251—253); из этого обстоятельства можно просто вывести все основные свойства инверсии (рекомендуем читателю самостоятельно это сделать). Все же определения инверсии, не подчёркивающие её связь с симметрией в пространстве (см. первое определение на стр. 172—173 и второе определение на стр. 173—174), по существу более искусственны и не выясняют причин, по которым это преобразование играет такую важную роль

[1]) Здесь, как и во всех вопросах, где фигурируют направленные окружности и прямые, под преобразованием подобия следует понимать собственно-подобное или зеркально-подобное преобразование (см. § 2 гл. I второй части книги), сопровождаемое ещё, быть может, переменой направлений всех прямых и окружностей на обратные.

в теории круговых преобразований. Таким же ключом к теории преобразований, двойственных круговым, является **циклографическая проекция Шаля—Фёдорова**, определяемая следующим образом.

Каждой (направленной) окружности плоскости π мы ставим в соответствие точку пространства — вершину конуса с углом 90° при вершине, основанием которого служит данная окружность (черт. 239). При этом конус расположен с одной или с другой стороны плоскости π в зависимости от того, направлена ли окружность против часовой стрелки или по часовой стрелке. Таким образом, циклографическая проекция переводит окружности плоскости в точки трёхмерного пространства. Точки плоскости («окружности радиуса нуль») переходят при циклографической проекции сами в себя.



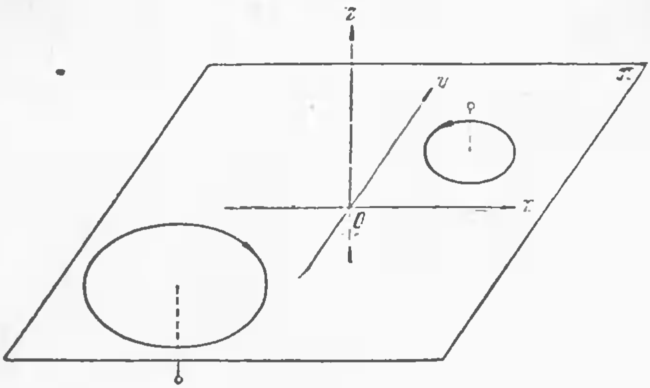
Черт. 240.

Очевидно, что касающимся окружностям отвечают касающиеся конусы (черт. 239); отсюда следует, что прямая, соединяющая точки, в которые переходят две касающиеся окружности, наклонена к плоскости π под углом 45°. Окружностям, касающимся одной и той же прямой l, отвечают точки, расположенные в плоскости λ, проходящей через эту прямую и наклонённой к плоскости π под углом 45° (черт. 240)[1]).

[1]) При этом λ для совмещения с π надо повернуть вокруг l на угол 45° **против часовой стрелки**, если смотреть вдоль направленной прямой l (черт. 240). Это условие выделяет одну из двух плоскостей, пересекающих π по прямой l и образующих с π угол в 45°.

Поэтому естественно считать, что при циклографической проекции прямая l переходит в плоскость λ [1]).

Удобно считать плоскость π координатной плоскостью xOy (черт. 241). В таком случае циклографическую проекцию можно представлять себе следующим образом: лежащей в плоскости π окружности, координаты центра которой равны x и y, а радиус (положительный или отрицательный; см. выше стр. 260) равен r, ставится в соответствие точка пространства с координатами x, y и $z=r$. Двум касающимся



Черт. 241.

окружностям отвечают две такие точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) пространства, что отрезок, соединяющий эти точки, наклонён к плоскости π под углом 45°; в этом случае проекция $|z_1 - z_2|$ отрезка на ось z

[1]) С первого взгляда может показаться непонятным, почему в двойственных друг другу вопросах аналогичную роль играют стереографическая проекция и циклографическая проекция, имеющие, казалось бы, совсем разный характер: первая из них отображает точки плоскости на точки сферы в пространстве, а вторая — окружности плоскости на точки пространства. Однако это нетрудно пояснить. Стереографическую проекцию можно также рассматривать как отображение окружностей плоскости на окружности сферы, или, что то же самое, как *отображение окружностей плоскости на плоскости пространства*, в которых лежат эти окружности. *Точки плоскости стереографическая проекция отображает на некоторые точки пространства* — точки сферы σ. В пространстве по принципу двойственности друг другу соответствуют точки и плоскости (аналогично тому, как на плоскости двойственными друг другу понятиями являются точки и прямые). Поэтому естественно, что в двойственной теории роль стереографической проекции играет проекция, которая *отображает окружности плоскости на точки пространства, а прямые плоскости — на некоторые плоскости пространства*,— циклографическая проекция.

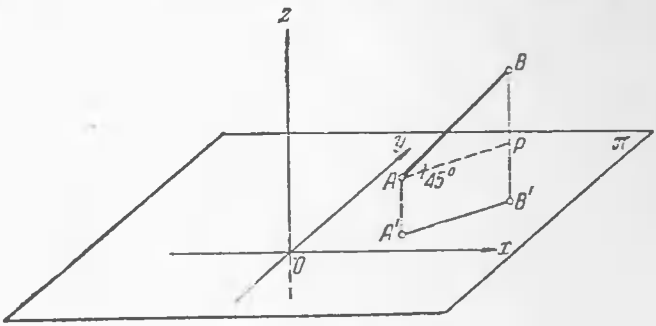
равна его проекции $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ на плоскость π (черт. 242) и, значит, имеет место соотношение

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(z_1-z_2)^2,$$

или

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2=0.$$

Осевые круговые преобразования переводят окружности плоскости снова в окружности; поэтому циклографическая проекция сопоставляет каждому такому преобразованию некоторое т о ч е ч н о е преобразование в пространстве. Кроме того, эти преобразования переводят прямые в прямые; отсюда следует, что *касающиеся окружности* (имеющие



Черт. 242.

единственную общую касательную) *должны переходить в касающиеся окружности*. Это значит, что осевому круговому преобразованию отвечает в силу циклографической проекции такое преобразование пространства, что две точки, для координат которых имеет место соотношение

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2=0,$$

переходят в точки, координаты которых удовлетворяют тому же соотношению.

Можно показать, что каждое преобразование пространства, обладающее рассматриваемым свойством, можно представить в виде суммы преобразования, при котором выражение

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2 \qquad (*)$$

не меняется по величине, и последующего центрально-подобного преобразования пространства с центром в начале координат [1]), при котором выражение (*) изменяется в каком-то определённом отношении (этот результат вытекает, в частности, и из наших дальнейших рассмотре-

[1]) См. сноску [2]) на стр. 95 первого тома книги.

ний). Но легко видеть, что центрально-подобному преобразованию пространства с центром в начале координат циклографическая проекция сопоставляет центрально-подобное преобразование плоскости π. Таким образом, изучение осевых круговых преобразований сводится к изучению *преобразований пространства, при которых сохраняется выражение* (*), т. е. преобразований, при которых любые две точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) пространства переходят в такие две точки (x_1', y_1', z_1') и (x_2', y_2', z_2'), что [1])

$$(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2-(z_1'-z_2')^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2.$$

Преобразования, при которых сохраняется выражение (*), имеют очень много общего с движениями пространства — преобразованиями, при которых сохраняется выражение

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \qquad (**)$$

(см. введение к первой части, в частности сноску на стр. 17 первого тома книги). Мы будем называть такие преобразования пространства **псевдодвижениями**. Науку, изучающую свойства пространственных фигур, сохраняющиеся при псевдодвижениях пространства, можно назвать **псевдогеометрией** (или **псевдоевклидовой геометрией** — последнее название является более распространённым). Псевдогеометрия играет очень большую роль в современной физике (теория относительности). Во многих отношениях она очень близка к обыкновенной геометрии, изучаемой в школе. Вместо расстояния между двумя точками пространства с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) в псевдогеометрии рассматривается **псевдорасстояние**

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2};$$

при этом псевдорасстояние между двумя точками может быть и мнимым. Аналогично обычной геометрии два отрезка AC и BC называются **псевдоперпендикулярными**, если для треугольника ABC имеет место «теорема Пифагора»: квадрат псевдорасстояния AB равен сумме квадратов псевдорасстояний AC и BC [2]). При этом из каждой

---

[1]) Таким преобразованиям пространства циклографическая проекция сопоставляет *осевые круговые преобразования, при которых сохраняются касательные расстояния между окружностями.* Действительно, если

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2=d^2>0,$$

то d равно касательному расстоянию между окружностями плоскости π, которым отвечают точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) пространства (см. формулу (*) на стр. 265).

[2]) Если OA и OB — два отрезка пространства, **взаимно перпендикулярных в обычном смысле**, и (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — координаты точек A и B (точку O мы принимаем за начало координат — любые два отрезка можно перенести параллельно в начало координат), то из теоремы Пифагора

$$OA^2+OB^2=AB^2$$

точки на каждую плоскость можно опустить один псевдоперпендикуляр (т. е. прямую, псевдоперпендикулярную ко всем прямым плоскости); каждые два псевдоперпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны (в обычном смысле: понятие параллельности прямых и плоскостей в псевдогеометрии не отличается от обычного) и т. д. [1]).

Для нас будет важно понятие **псевдосимметрии** относительно плоскости. Точки A и A' пространства называются псевдосимметричными относительно плоскости α, если отрезок AA' псевдоперпендикулярен к этой плоскости и делится ею пополам (в том смысле, что псевдорасстояния AP и $A'P$, где P есть точка пересечения AA' с плоскостью α, равны между собой; впрочем, нетрудно видеть, что в этом случае отрезки AP и $A'P$ равны в обычном смысле). Нетрудно показать, что *при псевдосимметрии относительно α плоскость λ, образующая с исходной плоскостью π угол 45°, переходит в другую плоскость λ', тоже образующую с π угол 45° и пересекающую α по той же прямой l, что и плоскость λ* (черт. 243, *а*) [2]); это обстоятельство можно принять за определение псевдосимметрии относительно α, поскольку оно позволяет определить точку A', в которую переходит при этом

следует, что

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

или

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0;$$

это последнее равенство можно также принять за **определение перпендикулярности** отрезков OA и OB. Совершенно аналогично из «теоремы Пифагора» псевдогеометрии следует, что два отрезка OA и OB будут **псевдоперпендикулярны** в том и только в том случае, если

$$x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2=0$$

(где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — координаты точек A и B, O — начало координат); это равенство можно принять за **определение псевдоперпендикулярности отрезков** OA и OB.

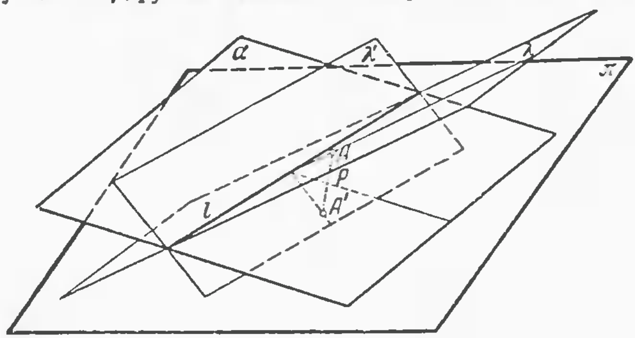
[1]) Уравнение любой плоскости α пространства можно записать в виде

$$Ax+By+Cz=D$$

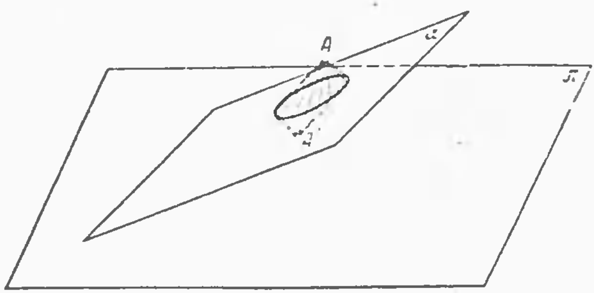
(это доказывается в любом курсе аналитической геометрии). Из сказанного в предыдущей сноске легко вывести, что все прямые, симметричные относительно Π (обыкновенному) перпендикуляру к α, т. е. прямые, параллельные отрезку OA, где O — начало координат, а точка A имеет координаты $(A, B, -C)$ (и только эти прямые), псевдоперпендикулярны α; отсюда уже вытекают все наши утверждения.

[2]) Другими словами, любая прямая m, псевдоперпендикулярная к α (см., например, предыдущую сноску), пересекает λ, α и λ' в таких точках A, P и A', что $AP=A'P$ (здесь равенство отрезков можно понимать как в обычном смысле, так и в смысле псевдогеометрии).

преобразовании произвольно заданная точка A пространства (черт. 243, *б*; изображённые на этом чертеже два конуса с вершинами A и A' таковы, что все плоскости, касающиеся этих конусов, наклонены к π под углом 45°; другими словами, эти конусы образованы прямыми,



а)



б)

Черт. 243.

составляющими с π угол 45°). Нетрудно убедиться, что псевдосимметрия есть частный случай псевдодвижения, т. е. что при этом преобразовании сохраняются псевдорасстояния между точками [1]); далее можно показать, что каждые две плоскости пространства, которые можно перевести одну в другую псевдодвижением, можно также перевести друг в друга при помощи псевдосимметрии относительно некоторой плоскости [2]).

---

[1]) Ср. с доказательством того, что симметрия плоскости относительно прямой является движением, т. е. не меняет длины отрезков (см. § 1 гл. II первой части книги).

[2]) Очевидно, что плоскость μ, образующая с π угол, меньший 45°, не содержит прямых, наклоненных к π под углом 45° (прямых, псевдо-

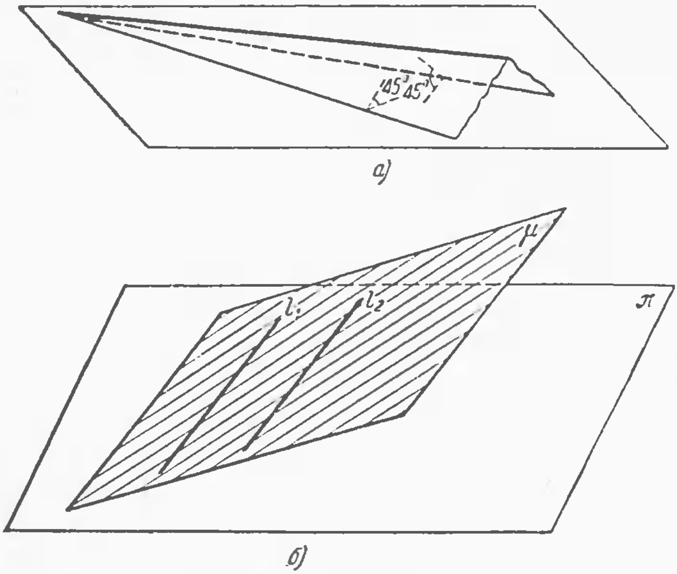
После всех этих предварительных рассмотрений мы можем перейти к доказательству теоремы 4. Каждому осевому круговому преобразованию Λ, переводящему окружности плоскости π снова в окружности, циклографическая проекция сопоставляет точечное преобразование $\bar{\Lambda}$ пространства (ср. с доказательством теоремы 2 § 4). Так как осевое круговое преобразование Λ переводит прямые в прямые, то отвечающее ему преобразование $\bar{\Lambda}$ переводит каждую плоскость λ, образующую с π угол 45°, в подобную же плоскость (эти плоскости отвечают в силу циклографической проекции прямым плоскости π). Докажем теперь, что *преобразование $\bar{\Lambda}$ переводит каждую плоскость пространства в новую плоскость* (т. е. является линейным преобразованием пространства).

Так как через каждую прямую пространства, образующую с π угол, меньший 45°, можно провести две плоскости, образующие с π угол 45° (черт. 244, *а*), то каждую такую прямую преобразование $\bar{\Lambda}$ переводит в подобную же прямую (две плоскости, образующие с π углы 45°, переходят в две новые плоскости и линия пересечения первых плоскостей — в линию пересечения полученных плоскостей). Выберем теперь на произвольной плоскости μ две прямые l_1 и l_2, образующие с π углы, меньшие 45° (на каждой плоскости можно найти сколько угодно таких прямых: можно принять за них даже прямые, образующие с π «нулевые» углы, т. е. параллельные π), и рассмотрим всевозможные прямые, пересекающие l_1 и l_2 и образующие с π углы, меньшие 45° (на черт. 244, *б* изображены параллельные между собой прямые, пересекающие l_1 и l_2, — достаточно рассмотреть лишь такие прямые). Преобразование $\bar{\Lambda}$ переводит прямые l_1 и l_2 в новые прямые l'_1 и l'_2 и пересекающие l_1 и l_2 прямые в прямые, пересекающие l'_1 и l'_2; отсюда следует, что оно переводит заполненную первыми прямыми плоскость μ в новую плоскость μ' (эта плоскость определяется прямыми l'_1 и l'_2).

расстояние между каждыми двумя точками которых равно нулю), а плоскость ν, образующая с π угол, не меньший 45°, содержит такие прямые. Отсюда следует, что псевдодвижение не может перевести μ в ν.

Далее, мы уже отмечали, что каждые две плоскости, образующие с π углы 45°, псевдосимметричны относительно любой плоскости, проходящей через линию их пересечения. Пусть теперь μ_1 и μ_2 — две плоскости, обе образующие с π углы, меньшие 45° (или обе — углы, большие 45°); OM_1 и OM_2 — псевдоперпендикулярные к ним отрезки одинаковой псевдодлины, т. е. такие, что $A_1^2 + B_1^2 - C_1^2 = A_2^2 + B_2^2 - C_2^2$, где $(A_1, B_1, -C_1)$ и $(A_2, B_2, -C_2)$ — координаты точек M_1 и M_2 (см. сноску [1]) на стр. 319; отметим, что если бы плоскость μ_1 образовывала с π угол, больший 45°, а μ_2 — угол, меньший 45°, то псевдодлина отрезка OM_1 была бы вещественной, а отрезка OM_2 — мнимой). В таком случае плоскости μ_1 и μ_2 псевдосимметричны относительно плоскости α, проходящей через линию пересечения μ_1 и μ_2 и псевдоперпендикулярной к «векторной сумме» OA отрезков OM_1 и OM_2 (т. е. к отрезку, соединяющему O с точкой A $(A_1 + A_2, B_1 + B_2, -C_1 - C_2)$.

Заметим теперь, что *если преобразование $\overline{\Lambda}$ пространства оставляет плоскость π на месте, то ему отвечает преобразование подобия плоскости π*. Действительно, точкам пространства, лежащим в плоскости π, циклографическая проекция сопоставляет точки π («окружности радиуса нуль»); поэтому если преобразование $\overline{\Lambda}$ переводит точки π в точки π, то осевое круговое преобразование Λ должно переводить точки в точки, т. е. являться преобразованием подобия (см. теорему 3).



Черт. 244.

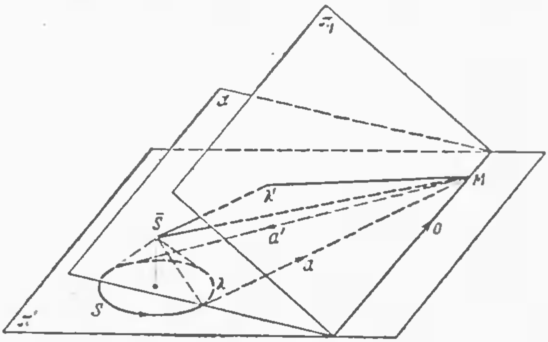
Пусть теперь преобразование $\overline{\Lambda}$ не оставляет π на месте и пусть π_1 есть та плоскость, которую это преобразование переводит в π. Рассмотрим отдельно два случая.

1°. Плоскость π_1 параллельна π. Рассмотрим параллельный перенос $\overline{P}$ пространства в направлении оси z (перпендикулярном к π и π_1), переводящий π_1 в π[1]); $\overline{P}$ есть псевдодвижение, переводящее π_1 в π. Пусть, далее, $\overline{\Lambda}_1$ есть такое преобразование пространства, что $\overline{\Lambda}$ можно представить как сумму преобразований $\overline{P}$ и $\overline{\Lambda}_1$ (ср. выше,

[1]) Определение и свойства параллельного переноса в пространстве аналогичны определению и свойствам этого преобразования на плоскости (см. по этому поводу книги, цитированные в сноске [1]) на стр. 11 первого тома).

стр. 250—251). Очевидно, что $\overline{\Lambda}_1$ оставляет плоскость π на месте (ибо $\overline{\Lambda}$ и $\overline{P}$ переводят π_1 в одну и ту же плоскость π); отсюда следует, что осевое круговое преобразование Λ_1 плоскости π, соответствующее преобразованию $\overline{\Lambda}_1$ пространства, есть преобразование подобия. Преобразованию же $\overline{P}$ пространства, очевидно, отвечает расширение P плоскости π: действительно, $\overline{P}$ переводит точку (x, y, z) пространства в точку с координатами $(x, y, z+a)$, где a — расстояние между π и π_1; следовательно, $\overline{P}$ переводит окружность с центром (x, y) и (положительным или отрицательным) радиусом r в окружность с тем же центром и радиусом $r+a$. Из того, что $\overline{\Lambda}$ представляет собой сумму $\overline{P}$ и $\overline{\Lambda}_1$, следует, что исходное осевое круговое преобразование Λ представляет собой сумму расширения P и преобразования подобия Λ_1.

2°. Плоскость π_1 не параллельна π. Пусть $\overline{\Omega}$ есть псевдосимметрия относительно некоторой плоскости α, переводящая π_1 в π [1]), $\overline{\Lambda}_1$ — такое преобразование пространства, что $\overline{\Lambda}$ есть сумма



Черт. 245.

$\overline{\Omega}$ и $\overline{\Lambda}_1$. Очевидно, что $\overline{\Lambda}_1$ оставляет плоскость π на месте; следовательно, этому преобразованию отвечает преобразование подобия Λ_1 плоскости. Покажем, что псевдосимметрии $\overline{\Omega}$ отвечает осевая инверсия Ω: этим самым доказательство теоремы 4 будет завершено.

Пусть o есть прямая, по которой π_1 пересекает π. Очевидно, что α тоже проходит через o и, следовательно, преобразование $\overline{\Omega}$

---

[1]) Плоскость π_1 должна образовывать с π угол, меньший 45°, так как иначе π_1 содержала бы точки, лежащие на прямой, наклонённой к π под углом 45°, которые преобразование $\overline{\Lambda}$ не может переводить в точки π (ибо осевое круговое преобразование Λ не может переводить касающиеся окружности в точки). Отсюда следует, что π можно получить из π_1 при помощи псевдосимметрии относительно некоторой плоскости α (см. сноску [2]) на стр. 320).

(и отвечающее ему осевое круговое преобразование Ω) оставляет на месте каждую точку прямой o. Далее, пусть $\overline{S}$ есть произвольная точка плоскости α, S — окружность, которой отвечает точка $\overline{S}$ в силу циклографической проекции (черт. 245). Преобразование $\overline{\Omega}$ переводит каждую плоскость λ, проходящую через точку $\overline{S}$ и наклонённую к π под углом 45°, в другую плоскость λ', наклонённую к π под тем же углом и пересекающую α по той же прямой, что и λ (см. выше черт. 243, *а*); следовательно, λ' тоже проходит через $\overline{S}$ и пересекает o в той же точке M, что и λ. Отсюда следует, что преобразование Ω переводит каждую прямую l, касающуюся окружности S, в прямую l', тоже касающуюся S и пересекающую o в той же точке M, что и прямая l (черт. 245). А так как, кроме того, Ω переводит параллельные прямые в параллельные (ибо $\overline{\Omega}$ переводит плоскости, образующие с π угол 45° и параллельные между собой, т. е. пересекающие α по параллельным прямым, в параллельные плоскости), то Ω есть осевая инверсия с центральной прямой o и направляющей окружностью S (см. определение на стр. 285).

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛ. II

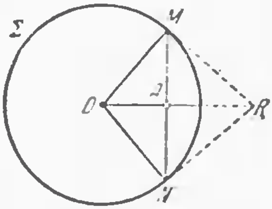
Неевклидова геометрия Лобачевского (второе изложение)

Выберем на плоскости какой-то круг К и рассмотрим все круговые преобразования плоскости (см. выше стр. 246—247), переводящие К в себя. Точки круга К мы будем называть **точками неевклидовой геометрии Лобачевского**, а эти круговые преобразования — **неевклидовыми движениями**; геометрию, изучающую свойства фигур, сохраняющиеся при неевклидовых движениях, мы будем называть **неевклидовой геометрией Лобачевского** (ср. с приложением к гл. I, стр. 129) [1]).

Легко видеть, что каждую точку A неевклидовой геометрии Лобачевского (т. е. каждую внутреннюю точку круга К) можно неевклидовым движением перевести в любую другую такую точку. Покажем, например, как перевести A в центр O круга. Восставим в точке A перпендикуляр к OA, пересекающий окружность Σ круга К в точках M и N; пусть R — точка

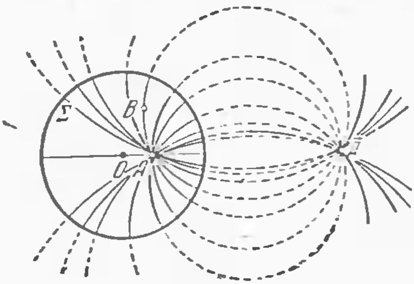
[1]) Ниже мы увидим, что все теоремы так определённой геометрии Лобачевского точно совпадают с теоремами приложения к гл. I; это оправдывает использование в обоих случаях одного и того же названия «геометрия Лобачевского». Подробнее вопрос о связи материала этого приложения с содержанием приложения к гл. I будет рассмотрен ниже (см. стр. 345—354).

пересечения касательных к Σ в точках M и N (черт. 246). Из подобия прямоугольных треугольников ROM и RMA следует, что $\frac{RO}{RM}=\frac{RM}{RA}$, или $RO\cdot RA=RM^2$; поэтому инверсия с центром R и степенью RM^2 (эта инверсия переводит К в себя и, следовательно, является неевклидовым движением) переводит A в O (а O — в A). Если же мы хотим перевести точку A в точку A', отличную от O, то достаточно перевести сначала A в O, а затем O в A' (тем же неевклидовым движением, которое переводит A' в O).


Черт. 246.

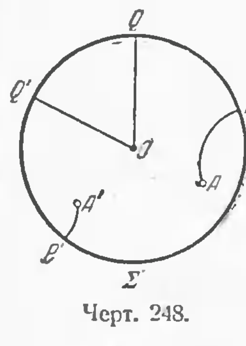
Условимся теперь относительно того, что мы будем называть **прямыми неевклидовой геометрии Лобачевского**. Совершенно ясно, что если желать, чтобы неевклидовы движения переводили прямые линии снова в прямые, то неевклидовыми прямыми нельзя назвать обыкновенные прямые линии, — ведь круговые преобразования, как правило, переводят прямые не в прямые, а в окружности. Можно было бы предложить называть неевклидовыми прямыми все дуги окружностей (и отрезки прямых), пересекающие круг К; в таком случае «прямые» при движении будут переходить в «прямые», но зато через каждые две точки будет проходить очень много различных «прямых», что также противоречит всем привычным нам представлениям. Поэтому естественно назвать «прямыми» лишь некоторые из пересекающих К окружностей и прямых; при этом желательно, чтобы совокупность всех этих окружностей и прямых при неевклидовых движениях переходила в себя и чтобы через каждые две внутренние точки круга К проходила единственная «прямая». Обоим этим условиям удовлетворяют окружности (и прямые), перпендикулярные к окружности Σ. Действительно, каждая такая окружность или прямая переходит при неевклидовом движении в такую же окружность или прямую (см. свойство В инверсии на стр. 181 и замечание о круговых преобразованиях на стр. 247). С другой стороны, все окружности (и прямые), перпендикулярные к Σ и проходящие через определённую точку A, проходят также и через точку $\bar{A}$, симметричную A относительно

Σ (ср. черт. 247 с черт. 127 на стр. 172), т. е. они образуют **пучок пересекающихся окружностей**. Но через каждую точку B плоскости, отличную от A и от $\bar{A}$, проходит единственная окружность такого пучка (через три точки A, B и $\bar{A}$ можно провести **единственную** окружность или прямую; см. также § 3, стр. 218). Таким образом, через каждые две точки A и B геометрии Лобачевского проходит единственная окружность, перпендикулярная к Σ; из того же черт. 247 видно также, что через точку A в любом заданном в этой точке направлении проходит единственная окружность, перпендикулярная к Σ. Условимся поэтому называть дуги перпендикулярных к Σ окружностей (и отрезки перпендикулярных к Σ прямых[1])), заключённые внутри К, прямыми неевклидовой геометрии Лобачевского; в частности, неевклидовыми прямыми, проходящими через центр O круга К, будут диаметры К.



Черт. 247.

Лучом неевклидовой геометрии Лобачевского, выходящим из точки A, мы будем называть дугу перпендикулярной к Σ окружности, проходящей через A, ограниченную точкой A и окружностью Σ. Нетрудно видеть, что неевклидовым движением можно перевести точку A геометрии Лобачевского в любую другую её точку A' так, чтобы заданный в точке A луч AP перешёл в луч $A'P'$, заданный в точке A'. Действительно, пусть неевклидово движение $Д_1$ переводит точку A в центр O круга К и луч AP в какой-то луч OQ (черт. 248) и неевкли-

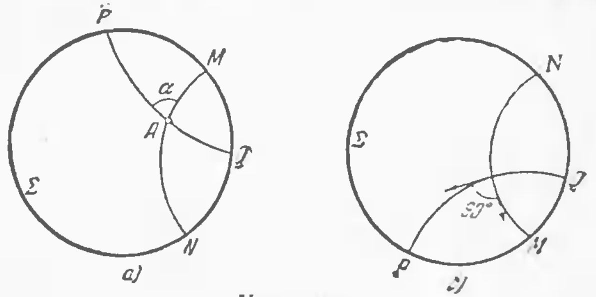


Черт. 248.

[1]) В дальнейшем мы, как правило, будем вместо «окружности и прямые» говорить просто «окружности»; в тех случаях, когда под этим будут подразумеваться также и прямые (т. е. «окружности бесконечно большого радиуса»), это будет достаточно ясно из текста.

дово движение $Д_2$ переводит O в A' и некоторый луч OQ' в луч $A'P'$ (см. выше, стр. 325). В таком случае сумма трёх неевклидовых движений: $Д_1$, вращения B вокруг O на угол $Q'OQ$ и $Д_2$, переводит луч AP в луч $A'P'$ (ср. выше, стр. 130).

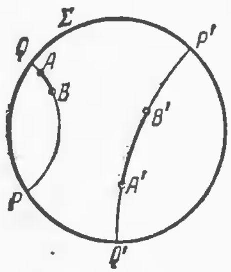
Выясним теперь, что́ следует называть в неевклидовой геометрии Лобачевского расстоянием между точками и углом между прямыми. Наиболее просто определяется угол между прямыми. Так как углы между окружностями сохраняются при круговых преобразованиях (см. свойство В инверсии на стр. 181



Черт. 249.

и замечание на стр. 247), то *неевклидовым углом между двумя прямыми PQ и MN неевклидовой геометрии Лобачевского, пересекающимися в точке A, можно назвать обыкновенный* (евклидов) *угол между окружностями PAQ и NAM* (черт. 249, *а*). Отсюда следует, что в неевклидовой геометрии Лобачевского, как и в обычной (евклидовой) геометрии, все полные углы вокруг точки и все развёрнутые углы равны между собой, причём полный угол равен 360°, развёрнутый угол равен 180°, прямой угол (угол, равный своему смежному) равен 90° и т. д. Две неевклидовы прямые PQ и MN будут перпендикулярны в смысле неевклидовой геометрии (т. е. будут образовывать прямой угол) в том и только в том случае, если окружности PQ и MN будут перпендикулярны в обычном смысле (черт. 249, *б*). Совокупность всех неевклидовых прямых, перпендикулярных к данной прямой PQ, с точки зрения евклидовой геометрии представляет собой пучок окружностей, перпендикулярных к двум пересекающимся окружностям PQ и Σ (см. § 3, стр. 215 и след.). Так как через каждую точку плоскости проходит единственная окружность такого пучка, то *из* *каждой точки A неевклидовой геометрии Лобачевского можно опустить на прямую PQ этой геометрии единственный* (неевклидов) *перпендикуляр.*

Перейдём теперь к вопросу об определении расстояний между точками в неевклидовой геометрии Лобачевского. Здесь можно поступить аналогично тому, как это делалось в приложении к гл. I (см. стр. 130—134). А именно, в силу свойства Г инверсии (стр. 236; см. также замечание на стр. 247) двойное отношение четырёх точек сохраняется при всяком круговом преобразовании; поэтому *если неевклидово движение переводит точки A и B в точки A' и B' и неевклидовы прямые AB и $A'B'$ пересекают окружность Σ в точках P, Q и P', Q'* (черт. 250), *то*



Черт. 250.

$$\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=\frac{A'P'}{B'P'}:\frac{A'Q'}{B'Q'}.$$

С другой стороны, если A, B и C — три последовательные точки одной неевклидовой прямой, пересекающей окружность Σ в точках P и Q, то, очевидно,

$$\left(\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}\right):\left(\frac{BP}{CP}:\frac{BQ}{CQ}\right)=\frac{AP}{CP}:\frac{AQ}{CQ};$$

следовательно, если обозначить

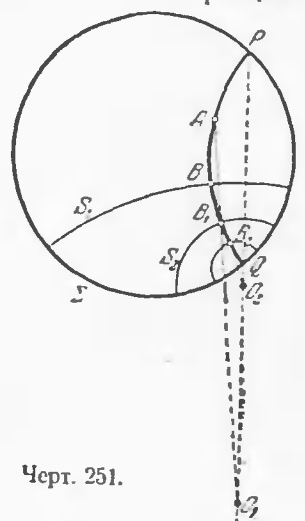
$$\log\left(\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}\right)=d_{AB}, \qquad (*)$$

то будет иметь место равенство

$$d_{AB}+d_{BC}=d_{AC},$$

выполнение которого естественно требовать от длины отрезка. Поэтому число d_{AB}, определяемое по формуле (*), можно назвать **неевклидовой длиной отрезка** AB (или **неевклидовым расстоянием** между точками A и B).

Если точка B неевклидовой прямой PQ стремится к P (черт. 250), то двойное отношение $\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}$ стремится к бесконечности; отсюда вытекает, что в неевклидовой геометрии Лобачевского *длина луча AP* (и *всей прямой PQ*) *бесконечна*, хотя прямая PAQ и изображается конечной дугой окружности. Последнее обстоятельство можно доказать также чисто геометрически. Рассмотрим совокупность всех неевклидовых прямых, перпендикулярных к данной прямой PQ; с евклидовой точки зрения это будет пучок окружностей, перпендикулярных к пересекающимся окружностям Σ и PAQ. Пусть S_1 — та из этих окружностей, которая проходит через точку B, O_1 — её центр (черт. 251). Симметрия относительно окружности S_1 переводит окружность Σ, перпендикулярную к S_1, в себя и, следовательно, оставляет на месте круг K; другими словами, это есть неевклидово движение. Окружность PAQ тоже перпендикулярна к S_1; значит, наша инверсия и её переводит в себя; следовательно, точку A эта инверсия переводит во вторую точку B_1 пересечения прямой O_1A с окружностью PAQ. Так как отрезки AB и BB_1 переводятся один в другой неевклидовым движением, то их неевклидовы длины равны: $d_{AB} = d_{BB_1}$. Далее, точно так же получаем:

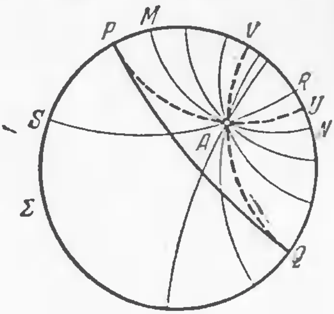


Черт. 251.

$$d_{AB} = d_{BB_1} = d_{B_1B_2} = \\ = d_{B_2B_3} = \ldots = d_{B_{n-1}B_n},$$

где B_2 есть точка пересечения PAQ с прямой O_2B, соединяющей B с центром O_2 окружности пучка, проходящей через B_1; B_3 — точка пересечения PAQ с прямой O_3B_1, соединяющей B_1 с центром O_3 окружности пучка, проходящей через B_2, и т. д. Но отсюда видно, что на неевклидовой прямой PAQ, начиная от произвольной ее точки A, можно сколько угодно раз откладывать произвольный отрезок AB, и всё равно мы никогда не дойдём до конца Q прямой.

Всё вышесказанное подтверждает большую близость неевклидовой геометрии Лобачевского к обычной (евклидовой) геометрии. В обеих геометриях через каждые две точки проходит единственная прямая; точка и заданный в ней луч могут быть переведены движением в любую другую точку и заданный в ней луч; на данной прямой от любой точки в любом направлении можно отложить отрезок произвольной длины (это следует из того, что длина луча бесконечна), и в данной точке от любой прямой в любом направлении (т. е. по часовой стрелке или против) можно отложить произвольно заданный угол и т. д. Поэтому все теоремы евклидовой геометрии, доказательство которых опирается лишь на эти простейшие предложения, переносятся в неевклидову геометрию Лобачевского: это относится ко всем признакам равенства треугольников, к теоремам о сравнительной длине перпендикуляра и наклонной, к теореме о том, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и т. д. (ср. с приложением к гл. I, стр. 142—144). Различие же между неевклидовой геометрией Лобачевского и обычной (неевклидовой) геометрией заключается в том, что *в неевклидовой геометрии Лобачевского нарушается аксиома параллельных линий.* Действительно, если рассмотреть совокупность прямых неевклидовой геометрии, проходящих через некоторую точку A, расположенную вне прямой PQ, то мы увидим, что среди этих прямых имеются как бесконечно много прямых, пересекающих прямую PQ (как прямая RS на черт. 252), так и бесконечно много прямых, не пересекающих PQ (расходящихся с PQ или сверхпараллельных PQ; такой прямой является, например, прямая MN на черт. 252). Те и другие прямые отделяются друг от друга двумя прямыми UP и VQ, которые называются параллельными PQ (ср. выше, стр. 146—148).



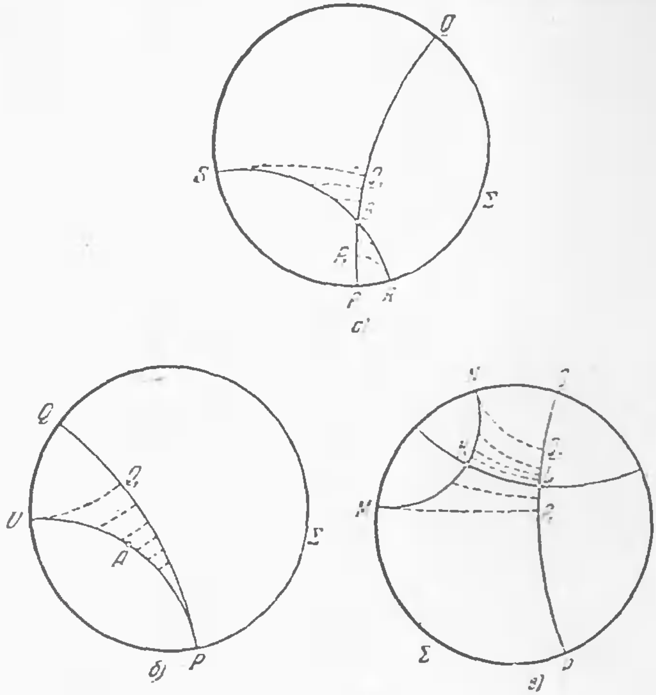
Черт. 252.

288. Какую теорему обыкновенной (евклидовой) геометрии выражает следующая теорема неевклидовой геометрии Лобачевского: биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке? Докажите непосредственно эту теорему.

289. Какую теорему обыкновенной (евклидовой) геометрии выражает следующая теорема неевклидовой геометрии

Лобачевского: если углы при основании треугольника равны, то треугольник равнобедренный? Докажите непосредственно эту теорему.

290. а) Пусть PQ и RS — две прямые неевклидовой геометрии Лобачевского, пересекающиеся в точке B. Докажите, что расстояния от точек прямой RS до прямой PQ



Черт. 253.

(т. е. длины перпендикуляров, опущенных из точек прямой RS на прямую PQ) возрастают неограниченно по обе стороны от точки B. При этом основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой RS на прямую PQ, покрывают лишь конечный отрезок P_1Q_1 последней прямой, т. е. вся прямая RS проектируется в конечный отрезок P_1Q_1 прямой PQ; перпендикуляры, восставленные к PQ в точках P_1 и Q_1, параллельны RS (черт. 253, *а* и схематический черт. 115, *а* на стр. 148).

б) Пусть PQ и UP — две параллельные прямые неевклидовой геометрии Лобачевского. Докажите, что расстояния от точек прямой UP до прямой PQ неограниченно убывают в направлении луча AP (A — произвольная точка прямой UP) и неограниченно возрастают в направлении луча AU. Проекцией всей прямой UP на прямую PQ служит луч Q_1P; перпендикуляр, восставленный к PQ в точке Q_1, параллелен UP (черт. 253, *б* и схематический черт. 115, *б*).

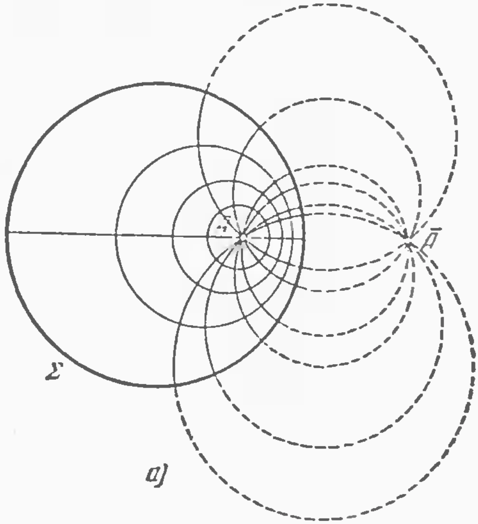
в) Докажите, что расходящиеся прямые PQ и MN неевклидовой геометрии Лобачевского имеют единственный общий перпендикуляр KL; обратно, если две прямые имеют общий перпендикуляр, то эти прямые — расходящиеся. Расстояния от точек прямой MN до прямой PQ неограниченно растут по обе стороны от основания K общего перпендикуляра. Прямая MN проектируется в конечный отрезок P_1Q_1 прямой PQ; перпендикуляры, восставленные к PQ в точках P_1 и Q_1, параллельны MN (черт. 253, *в* и схематический черт. 115, *в*).

291. Докажите, что в неевклидовой геометрии Лобачевского высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке. Сохраняет ли силу эта теорема также и для тупоугольных треугольников?

292. Докажите, что сумма углов всякого треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского меньше 180°.

293. Докажите, что два треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского с соответственно равными углами равны между собой (т. е. переводятся один в другой неевклидовым движением).

Рассмотрим пучок Π_1 прямых неевклидовой геометрии Лобачевского, пересекающихся в точке A; с обычной точки зрения это будет пучок окружностей, проходящих через точки A и $\overline{A}$ (ср. черт. 254, *а* с черт. 127). Пусть $\overline{\Pi}_1$ — пучок окружностей, перпендикулярный к первому пучку (см. § 3, стр. 219); это будет пучок непересекающихся окружностей, включающий также и окружность Σ. Симметрия относительно любой из окружностей S пучка Π_1 переводит круг К в себя, т. е. представляет собой неевклидово движение,— это есть неевклидова симметрия относительно прямой S (см. выше, стр. 156—157). Каждая окружность $\overline{S}$ пучка $\overline{\Pi}_1$ переходит при любой такой симметрии в себя; следовательно, и сумма симметрий относительно двух окружностей S_1 и S_2 пучка II_1 — неевклидово вращение вокруг точки A (см. выше, стр. 157—158) — переводит $\overline{S}$ в себя. Из того, что все окружности пучка $\overline{\mathrm{II}}_1$ переходят в себя при любом вращении вокруг точки A, следует, что те из них, которые заключены внутри Σ, являются *неевклидовыми окружностями*

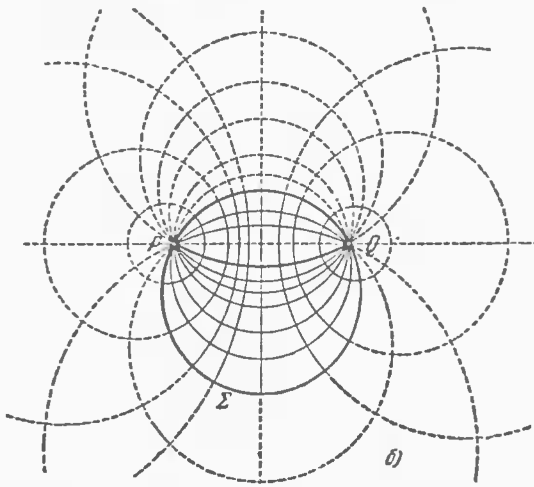


Черт. 254, *а*.

с центром A, т. е. геометрическими местами точек, равноудалённых (в смысле неевклидовой геометрии Лобачевского) от точки A. Таким образом, неевклидовы окружности представляют собой не что иное, как обычные (евклидовы) окружности, не пересекающие Σ; обратно, любая окружность $\overline{S}$, целиком заключённая внутри Σ, является одновременно и неевклидовой окружностью [1]).

[1]) Следует, однако, иметь в виду, что неевклидов центр A окружности $\overline{S}$ не совпадает с её евклидовым центром $\overline{O}$. Для того чтобы найти A, надо рассмотреть пучок окружностей, перпендикулярных к $\overline{S}$ и Σ; A есть точка пересечения окружностей этого пучка, заключённая внутри Σ.

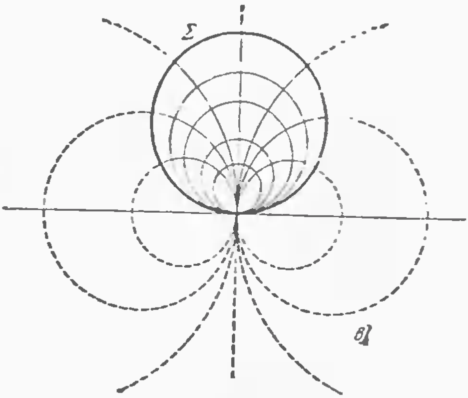
Пусть теперь II_2 есть пучок сверхпараллельных прямых неевклидовой геометрии Лобачевского; с обычной точки зрения это есть пучок окружностей, перпендикулярных к двум пересекающимся (даже взаимно перпендикулярным) окружностям PQ и Σ (черт. 254, *б*). Пусть $\overline{\text{II}}_2$ — пучок окружностей, перпендикулярный к первому пучку; это будет пучок пересекающихся окружностей, включающий окружности Σ и PQ.



Черт. 254, *б*.

Симметрия относительно каждой окружности S пучка II_2 — неевклидова симметрия относительно прямой S — переводит все окружности пучка $\overline{\text{II}}_2$ в себя. Следовательно, и сумма симметрий относительно двух окружностей S_1 и S_2 пучка II_2 — неевклидов перенос вдоль прямой PQ (см. выше, стр. 158—159) — переводит все окружности пучка $\overline{\text{II}}_2$ в себя. Отсюда следует, что каждая окружность $\overline{S}$ пучка $\overline{\text{II}}_2$, отличная от Σ и от PQ, представляет собой эквидистанту неевклидовой геометрии Лобачевского с осью PQ, т. е. геометрическое место точек, равноудалённых (в смысле неевклидовой геометрии) от прямой PQ (см. выше, стр. 159). Таким образом, неевклидовы эквидистанты представляют собой не что иное, как окружности, пересекающие Σ; обратно, каждая окружность $\overline{S}$, пересекающая Σ, является эквидистантой, имеющей осью неевклидову прямую, проходящую через точки пересечения окружностей $\overline{S}$ и Σ.

Пусть, наконец, Π_3 — пучок параллельных прямых неевклидовой геометрии Лобачевского, т. е. пучок касающихся окружностей, перпендикулярных к Σ, $\overline{\Pi}_3$ — пучок касающихся Σ окружностей, перпендикулярный к пучку Π_3 (черт. 254, *в*).



Черт. 254, *в*.

Каждая симметрия относительно окружности S пучка Π_3 — неевклидова симметрия относительно прямой S — переводит все окружности пучка $\overline{\Pi}_3$ в себя. Отсюда следует, что эти окружности представляют собой п р е д е л ь н ы е л и н и и неевклидовой геометрии Лобачевского (см. выше, стр. 160). Итак, предельные линии неевклидовой геометрии представляют собой окружности, касающиеся Σ.

Окружности, эквидистанты, предельные линии, а также и прямые неевклидовой геометрии Лобачевского иногда все вместе называются ц и к л а м и этой геометрии. Угол между двумя циклами S_1 и S_2 определяется как угол между евклидовыми окружностями S_1 и S_2. Циклы S_1 и S_2 называются касающимися, если евклидовы окружности S_1 и S_2 касаются в обычном смысле.

294. Докажите, что вокруг каждого треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского можно описать единственный цикл (т. е. можно описать или окружность, или эквидистанту, или предельную линию).

295. Пусть A, B, C, D — четыре произвольные точки неевклидовой геометрии Лобачевского, не лежащие на одном цикле; S_1, S_2, S_3, S_4 — циклы, описанные вокруг треугольников ABC, ABD, ACD, BCD. Докажите, что:

а) если какие-нибудь два из циклов S_1, S_2, S_3 и S_4 пересекаются в точке P, отличной от заданных четырёх точек, то и все четыре цикла проходят через эту точку;

б) угол между каждыми двумя из циклов S_1, S_2, S_3 и S_4 равен углу между двумя другими циклами.

296. Дан цикл S неевклидовой геометрии Лобачевского и две точки A, B на нём. Проводятся всевозможные циклы S_1 и S_2, касающиеся S в точках A и B и касающиеся между собой. Докажите, что геометрическое место точек касания S_1 и S_2 есть некоторый цикл $\overline{S}$.

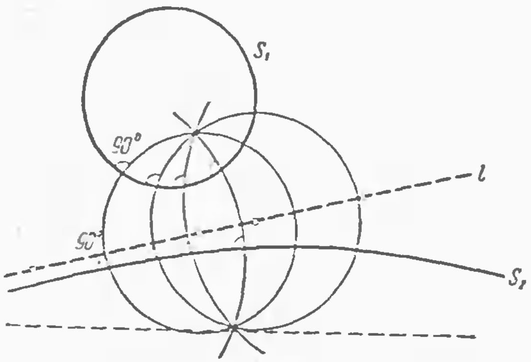
297. Пусть S_1, S_2, S_3 и S_4 — четыре цикла неевклидовой геометрии Лобачевского, такие, что S_1 касается S_2, S_2 — S_3, S_3 — S_4 и S_4 — S_1. Докажите, что четыре точки касания лежат все на одном цикле.

298. Совокупность всех циклов неевклидовой геометрии Лобачевского, перпендикулярных к двум данным циклам S_1 и S_2, называется *пучком циклов*. Перечислите все возможные типы пучков циклов неевклидовой геометрии Лобачевского. Докажите, что для каждого пучка II существует бесконечно много циклов, перпендикулярных ко всем циклам этого пучка; эти циклы образуют новый пучок $\overline{\text{II}}$, который естественно называть *перпендикулярным* к пучку II.

299. Пусть S_1 и S_2 — два цикла неевклидовой геометрии Лобачевского. Докажите, что если существуют окружности, перпендикулярные одновременно к S_1 и S_2, то их центры лежат на одной прямой l (см. схематический черт. 255, на котором S_1 — окружность, а S_2 — эквидистанта). Прямая l называется *радикальной осью* двух циклов S_1 и S_2. Если циклы S_1 и S_2 пересекаются, то их радикальная ось совпадает с общей хордой.

300. а) Докажите, что если два цикла неевклидовой геометрии Лобачевского, перпендикулярные к одному и тому же третьему циклу S и проходящие через некоторую точку A, пересекаются ещё и в другой точке A', то все циклы, перпендикулярные к S и проходящие через A, проходят и через A'. Точка A' называется **симметричной** A **относительно цикла** S.

б) Преобразование, переводящее точку A неевклидовой геометрии Лобачевского в точку A', симметричную A относительно цикла S, называется **симметрией относительно** S.

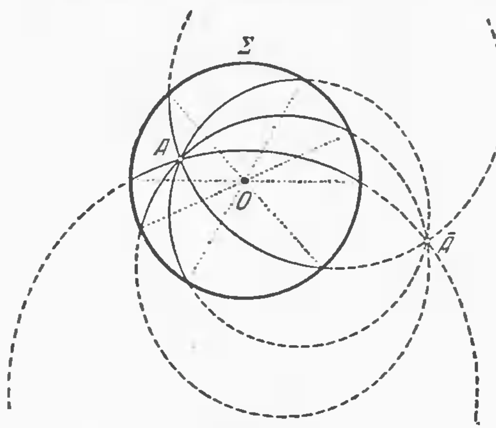


Черт. 255.

Докажите, что симметрия относительно S переводит циклы неевклидовой геометрии Лобачевского снова в циклы и сохраняет углы между циклами.

В приложении к гл. I мы отмечали, что, кроме неевклидовой геометрии Лобачевского, существуют и другие неевклидовы (т. е. отличные от обыкновенной геометрии Евклида) геометрии (см. выше, стр. 167—168). Здесь мы коротко наметим возможное построение одной из таких геометрий — так называемой **неевклидовой геометрии Римана**.

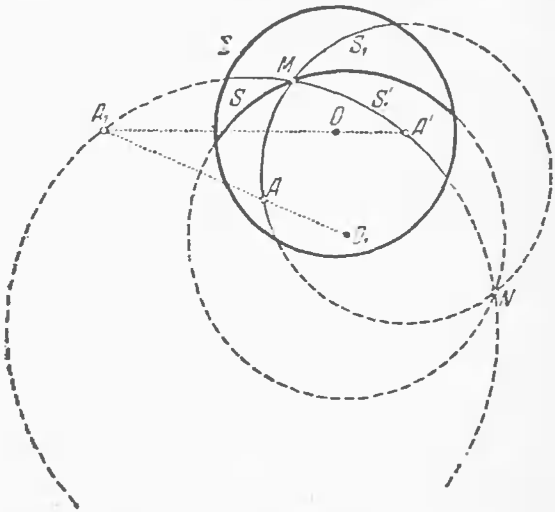
Вспомним снова построение неевклидовой геометрии Лобачевского. Основную роль здесь играет **совокупность всех окружностей, перпендикулярных к фиксированной окружности** Σ (в § 3 мы называли такую совокупность **гиперболической связкой** окружностей; см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 229—230); окружности этой совокупности мы принимали за «прямые» неевклидовой геометрии Лобачевского. Так как все такие «прямые», проходящие через какую-либо точку A, проходят также и через точку $\overline{A}'$, симметричную A относительно Σ, то A и $\overline{A}'$ приходится считать **одной и той же** точкой геометрии Лобачевского; это равносильно тому, что все внешние по отношению к Σ точки плоскости просто отбрасываются и неевклидова геометрия строится лишь внутри Σ (можно было бы, разумеется, наоборот, отбросить все внутренние точки и рассматривать лишь часть плоскости вне Σ; при этом все предшествующие чертежи настоящего приложения пришлось бы симметрично отразить относительно Σ). Симметрию относительно окружности S, перпендикулярной к Σ, мы называли неевклидовой симметрией относительно прямой S; здесь существенно, что такая симметрия переводит «неевклидовые прямые» снова в «прямые». Далее, *все движения неевклидовой геометрии Лобачевского можно определить как всевозможные суммы симметрий*



Черт. 256.

(см. приложение к гл. I, стр. 156—157) *и рассматривать неевклидову геометрию Лобачевского как науку, изучающую свойства фигур, сохраняющиеся при определённых таким образом неевклидовых движениях.*

Рассмотрим теперь совокупность всех окружностей, пересекающих фиксированную окружность Σ в диаметрально противоположных точках (в § 3 мы назвали такую совокупность эллиптической связкой окружностей; см. выше, стр. 130). Совокупность тех из этих окружностей, которые проходят через определённую точку A, представляет собой пучок пересекающихся окружностей; вторая точка $\overline{A}$ пересечения окружностей этого пучка получается из A инверсией с центром O и степенью $-R^2$, где O — центр, а R — радиус окружности Σ (ср. черт. 256 с черт. 130, *б* на стр. 175). Отсюда следует, что через каждую точку плоскости в любом заданном в этой точке направлении проходит единственная такая окружность и что любые две точки, не получающиеся одна из другой инверсией с центром O и степенью $-R^2$, можно соединить единственной такой окружностью. Назовём окружности, пересекающие Σ в диаметрально противоположных точках, а также и саму окружность Σ прямыми неевклидовой геометрии Римана; при этом две точки A и $\bar{A}$, получающиеся одна из другой инверсией с центром O и степенью $-R^2$, приходится считать одной и той же точкой этой геометрии. Иначе говоря, точками неевклидовой геометрии Римана следует называть все точки внутри Σ и половину точек самой этой окружности (две диаметрально противоположные точки Σ получаются одна из



Черт. 257.

другой инверсией с центром O и степенью $-R^2$, и потому их надо считать одной точкой геометрии Римана. так что к этой геометрии следует отнести лишь одну полуокружность Σ и лишь один из двух концов этой полуокружности).

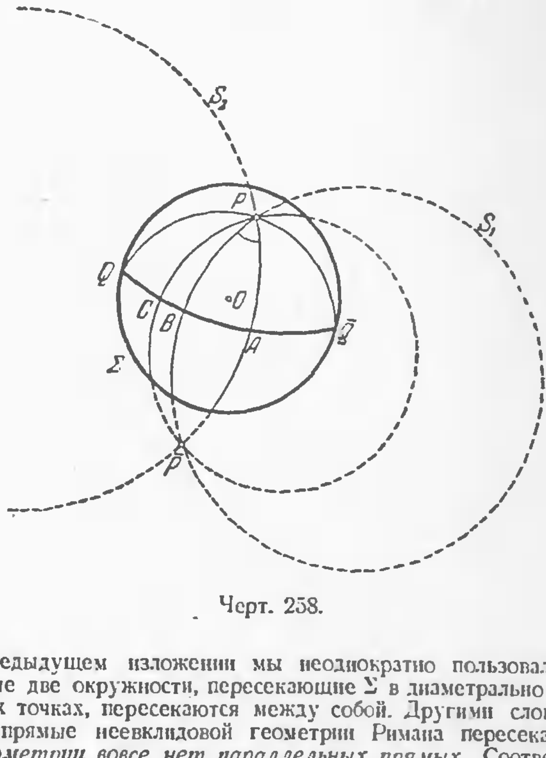
Назовём симметрией относительно прямой S неевклидовой геометрии Римана симметрию относительно евклидовой окружности S. Докажем, что *каждая такая симметрия переводит прямые геометрии Римана снова в прямые.* Действительно, пусть S_1 — какая-то прямая геометрии Римана, т. е. окружность, пересекающая Σ в диаметрально противоположных точках, M и N — точки пересечения S и S_1 (черт. 257; нетрудно видеть, что окружности S и S_1 обязательно пересекаются). Из того, что через точки M и N проходят две разные окружности S и S_1, пересекающие Σ в диаметрально противоположных точках, следует, что эти точки получаются одна из другой инверсией с центром O и степенью $-R^2$. Отсюда вытекает, что окружность S_1', симметричная S_1 относительно S, тоже пересекает Σ в диаметрально противоположных точках (ибо она проходит через те же точки M и N), а это нам и требовалось доказать. Теперь *движения в неевклидовой геометрии Римана естественно определить как всевозможные суммы симметрий относительно прямых этой геометрии, а саму геометрию Римана — как изучение свойств фигур, сохраняющихся при определённых таким образом неевклидовых движениях* [1]).

Дальнейшее построение геометрии Римана близко к приведённому в начале настоящего приложения построению геометрии Лобачевского. Остановимся, например, на вопросе об определении в этой геометрии расстояния между точками и угла между прямыми. Совершенно ясно, что *угол между прямыми* S_1 *и* S_2 *геометрии Римана можно определить как обычный* (евклидов) *угол между окружностями* S_1 *и* S_2. Прямые S_1 и S_2 геометрии Римана будут перпендикулярны (т. е. оба смежные угла между этими прямыми будут равны), если окружности S_1 и S_2 перпендикулярны в обычном смысле. Рассмотрим теперь все перпендикуляры, восставленные к какой-либо прямой $Q\overline{Q}$ геометрии Римана во всех её точках (в каждой точке к прямой можно восставить единственный перпендикуляр, поскольку через каждую точку в каждом направлении проходит единственная прямая). Пусть S_1 и S_2 — два из этих перпендикуляров, P и $\overline{P}$ — точки пересечения окружностей S_1 и S_2 (черт. 258). Так как через P и $\overline{P}$ проходят две окружности S_1 и S_2, пересекающие Σ в диаметрально противоположных точках, то эти точки получаются одна из другой инверсией с центром O и степенью $-R^2$; так как обе окружности S_1 и S_2, кроме того, перпендикулярны к $Q\overline{Q}$, то точки P и $\overline{P}$ симметричны относительно окружности $Q\overline{Q}$. Отсюда вытекает, что каждая окружность, проходящая через точки P и $\overline{P}$, пересекает Σ в диаметрально противоположных точках и перпендикулярна к $Q\overline{Q}$; следовательно, эти окружности и являются перпендикулярами, восставленными к прямой $Q\overline{Q}$ в разных её точках. Так как точки P и $\overline{P}$ следует считать одной точкой геометрии Римана (только одна из них находится внутри Σ), то мы заключаем, что *в неевклидовой геометрии Римана все перпендикуляры к прямой* $Q\overline{Q}$ *проходят через одну точку* P (называемую п о л ю с о м прямой $Q\overline{Q}$). Воспользовавшись этим, *можно определить длину* d_{AB} *отрезка* AB *прямой* $Q\overline{Q}$ *геометрии Римана как угол между перпендикулярами* AP *и* BP, *восставленными к* $Q\overline{Q}$

---

[1]) Отметим одно существенное отличие движений в геометрии Лобачевского от движений в геометрии Римана. В геометрии Лобачевского движения переводят внутренность Σ в себя, так что в этой геометрии можно совсем не принимать во внимание внешние по отношению к Σ точки. В противоположность этому движения в геометрии Римана не переводят внутренности Σ в себя; поэтому здесь приходится все время помнить о том, что точки A и $\overline{A}$, получающиеся одна из другой инверсией с центром O и степенью $-R^2$, считаются о д н о й точкой. Так, например, следует считать, что симметрия относительно S переводит точку $\overline{A}$ черт. 257 в точку A' неевклидовой геометрии Римана (симметрия относительно S переводит A в точку A_1, которую мы отождествляем с точкой A').

в точках A и B; действительно, так определённая величина d_{AB} сохраняется при неевклидовых движениях, и если A, B, C — три последовательные точки прямой $Q\overline{Q}$, то $d_{AB}+d_{BC}=d_{AC}$ (см. черт. 258). При этом оказывается, что вся прямая $Q\overline{Q}$ неевклидовой геометрии Римана имеет конечную величину (равную углу $QP\overline{Q}$ [1])); это обстоятельство обусловливает глубокое отличие геометрии Римана от евклидовой (см. сноску [1]) на стр. 168) [2]).



Черт. 258.

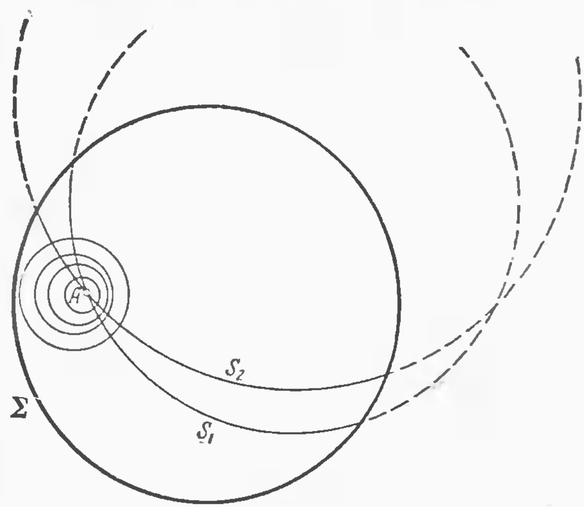
В предыдущем изложении мы неоднократно пользовались тем, что любые две окружности, пересекающие Σ в диаметрально противоположных точках, пересекаются между собой. Другими словами, любые две прямые неевклидовой геометрии Римана пересекаются — *в этой геометрии вовсе нет параллельных прямых.* Соответственно этому сумму симметрий относительно л ю б ы х двух прямых S_1 и S_2 неевклидовой геометрии Римана можно назвать в р а щ е н и е м

---

[1]) Нетрудно доказать, что этот угол является развёрнутым.

[2]) Прямая римановой геометрии является з а м к н у т о й наподобие окружности (напоминаем, что, по нашему соглашению, Q и $\overline{Q}$ — одна точка прямой). Отложив от любой точки A в любом направлении отрезок, длина которого равна длине прямой, мы придём к той же точке A.

(ср. выше, стр. 158). При этом движении точка A пересечения S_1 и S_2 остаётся на месте; так как расстояние между двумя точками при движении не меняется, то каждая другая точка B будет перемещаться по неевклидовой окружности S с центром A — геометрическому месту точек, равноудалённых (в смысле геометрии Римана) от A (черт. 259). Так как симметрии относительно «неевклидовых прямых» S_1 и S_2 — это симметрии относительно окружностей S_1 и S_2 и, следовательно, они переводят в себя каждую окружность, перпендикулярную одновременно к S_1 и S_2, то неевклидовы окружности с



Черт. 259.

центром A совпадают с евклидовыми окружностями, перпендикулярными к S_1 и S_2; все эти окружности образуют пучок II непересекающихся окружностей. Таким образом, окружности неевклидовой геометрии Римана — это обычные (евклидовы) окружности [1]) (кроме окружностей, пересекающих Σ в диаметрально противоположных точках, и самой окружности Σ, являющихся «прямыми», а не окружностями; следует, впрочем, отметить, что в геометрии Римана прямую можно рассматривать как частный случай окружности,— она является геометрическим местом точек, равноудалённых от полюса прямой).

[1]) Следует только иметь в виду, что неевклидов центр A окружности S не совпадает с её евклидовым центром $\overline{O}$. Для того чтобы найти A, надо рассмотреть пучок окружностей, пересекающих Σ в диаметрально противоположных точках и перпендикулярных к S (ср. выше, стр. 340, в частности, черт. 258); A есть точка пересечения окружностей этого пучка, заключённая внутри Σ.

Неевклидова геометрия Римана имеет много общего с обычной геометрией Евклида и с геометрией Лобачевского. Так, например, в этой геометрии:

сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны; отрезок прямой есть кратчайшее расстояние между двумя точками;

два треугольника равны, если три стороны одного треугольника равны трём сторонам второго; если две стороны и заключённый между ними угол одного треугольника равны двум сторонам и заключённому между ними углу второго; если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам второго; если три угла одного треугольника равны трём углам второго (ср. с задачей 293);

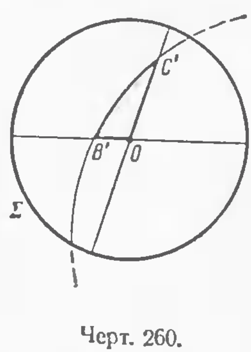
если углы при основании треугольника равны, то треугольник равнобедренный (ср. с задачей 289); в равнобедренном треугольнике проведённые из вершины биссектриса, высота и медиана совпадают между собой;

во всяком треугольнике перпендикуляры, восставленные к сторонам в их серединах, пересекаются в одной точке — центре описанной окружности; биссектрисы пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности (ср. с задачей 288); высоты пересекаются в одной точке (ср. с задачей 291); медианы пересекаются в одной точке (ср. с задачей 204, стр. 154 приложения к гл. I);

сумма углов треугольника всегда больше $180°$ (ср. с задачей 292); сумма углов n-угольника всегда больше чем $180° \cdot (n-2)$ (ср. с задачей 207б), стр. 154 приложения к гл. I);

площадь n-угольника пропорциональна разности между суммой углов и $180° \cdot (n-2)$ (эта разность называется **угловым избытком** n-угольника); в частности, площадь треугольника с углами $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ равна $k(\angle A + \angle B + \angle C - 180°)$, где коэффициент пропорциональности k зависит от выбора единицы измерения площадей (ср. с задачей 208, стр. 154 приложения к гл. I).

Также и теоремы задач 294—300 настоящего приложения можно перенести на неевклидову геометрию Римана; только здесь под «циклами» надо понимать окружности или прямые этой геометрии.

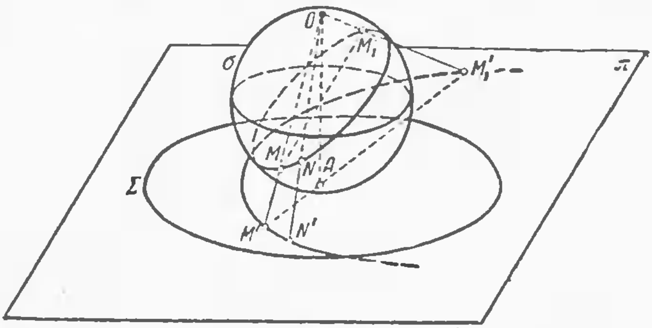


Черт. 260.

Доказательства большинства из этих предложений близки к доказательству соответствующих теорем неевклидовой геометрии Лобачевского. Так, например, для того чтобы показать, что сумма углов треугольника ABC неевклидовой геометрии Римана больше $180°$, достаточно перевести неевклидовым движением вершину A этого треугольника в центр O окружности Σ. При этом треугольник ABC перейдёт в треугольник $OB'C'$, изображённый на черт. 260; но, как видно из этого чертежа, сумма углов криволинейного треугольника $OB'C'$ больше суммы углов прямолинейного треугольника с теми же вершинами, т. е. больше $180°$ (ср. с решением задачи 292). После этого выражение для площади многоугольника геометрии Римана выводится совершенно аналогично решению задачи 208 из приложения к гл. I (стр. 476—477). Мы рекомендуем читателю попытаться доказать самостоятельно и другие сформулированные выше теоремы [1]).

---

[1]) В приложении к гл. I отмечалось, что неевклидова геометрия Лобачевского совпадает с геометрией на некоторых поверхностях трёхмерного пространства. Аналогично этому и геометрия Римана совпадает с геометрией на некоторых поверхностях, а именно *с геометрией на поверхности сферы.* Для того чтобы установить связь геометрии Римана со сферической геометрией, достаточно отобразить сферу σ на плоскость с помощью стереографической проекции (см. § 3 гл. I, стр. 71); окружность плоскости, в которую перейдёт экватор



Черт. 261.

S сферы, обозначим через Σ (черт. 261). При этом большие круги сферы (сечения сферы плоскостями, проходящими через её центр) перейдут в окружности плоскости, пересекающие Σ в диаметрально противоположных точках. Углы между большими кругами сферы будут равны углам между соответствующими окружностями плоскости (ср. со сноской на стр. 252); расстояние между точками M и N сферы, измеренное по поверхности сферы (т. е. длина дуги MN большого круга), при подходящем выборе единицы длины будет точно равно неевклидову расстоянию (в смысле геометрии Римана) между точками M' и N' плоскости, отвечающими точкам M и N. Вращениям сферы σ вокруг её центра будут в силу стереографической проекции отвечать неевклидовы движения плоскости. Условие о том, что две точки M' и M_1' плоскости, получающиеся одна из другой инверсией с центром O и степенью $-R^2$, считаются одной точкой геометрии Римана, означает, что диаметрально противоположные точки M и M_1 сферы σ следует отождествить (считать за одну) — это условие связано с тем, что большие круги сферы, отвечающие прямым геометрии Римана, пересекаются между собой не в одной точке, а в двух диаметрально противоположных точках. Связь между неевклидовой геометрией Римана и сферической геометрией может быть с успехом использована для доказательства теорем геометрии Римана.

Отметим ещё, что, приняв окружности, пересекающиеся в одной точке O (окружности параболической связки; см. выше, стр. 230) за прямые, а всевозможные суммы симметрий относительно этих прямых — за движения, мы придём к обычной геометрии Евклида (аналогично тому, как, исходя из гиперболической связки окружностей, мы приходим к геометрии Лобачевского, а исходя из эллиптической связки,— к геометрии Римана). По этому поводу см. ниже, стр. 347—348.

В заключение остановимся на вопросе о связи материала настоящего приложения с построением неевклидовой геометрии Лобачевского, изложенным в приложении к гл. I. В этих двух приложениях мы часто давали одинаковые названия, казалось бы, совершенно разным объектам (вспомните два определения неевклидовых движений, точек и прямых неевклидовой геометрии Лобачевского, неевклидовых расстояний и углов, наконец, самой неевклидовой геометрии Лобачевского). Естественно спросить, какие основания мы имели для того, чтобы так поступать.

На стр. 163 приложения к гл. I мы отмечали, что все теоремы неевклидовой геометрии Лобачевского, доказываемые в этом приложении при помощи рассмотрения точек и хорд круга K, можно доказывать и иначе — аналогично тому, как доказываются в школьном курсе теоремы обычной (евклидовой) геометрии. Этот «обычный» путь доказательства заключается в систематическом сведении геометрических теорем к более простым предложениям и, в конечном счете, к небольшому числу простейших «аксиом», справедливость которых принимается без доказательства. Естественно, что при таком методе доказательства теоремы будут существенно зависеть от выбора этих исходных аксиом; различным допустимым системам аксиом будут отвечать и различные «геометрии». Аксиомы при этом указывают основные свойства «точек» и «прямых» («через каждые две точки проходит прямая и притом только одна», «на каждой прямой от любой точки в каждом из двух направлений можно сколько угодно раз откладывать отрезок, равный данному», и т. д.), но ничего не говорят о том, что́ именно называется точкой или прямой. Правда, мы привыкли связывать со словами «точка» и «прямая» определённые наглядные представления, которые помогают находить доказательства при помощи чертежа (исходя из этой привычки, мы даже рекомендовали на стр. 163

иллюстрировать теоремы геометрии Лобачевского, в которой точки и прямые обладают «необычными» свойствами, схематическими чертежами типа черт. 115 или 118), но, строго говоря, чертежи при сведении геометрических предложений к простейшим аксиомам вовсе не необходимы — можно было бы доказывать теоремы и без них (только это требовало бы большего труда).

То обстоятельство, что природа основных геометрических понятий в принципе несущественна для доказательства теорем, делает возможными различные истолкования одной и той же геометрической системы. Действительно, предположим, что мы нашли некоторую систему объектов, между которыми можно установить точно такие же соотношения, которые согласно геометрическим аксиомам должны иметь место между точками и прямыми; в таком случае мы можем чисто условно назвать эти объекты «точками» и «прямыми» и, исходя из них, строить «геометрию». Подобное конкретное истолкование какой-либо геометрии, характеризуемой определённым набором аксиом, называется моделью или интерпретацией («истолкованием») этой геометрии. В разных моделях одной и той же геометрии будут выполняться одни и те же теоремы (которые одинаковым образом выводятся из одинаковых аксиом); однако при этом одинаковые теоремы будут в разных моделях иметь совершенно разный конкретный смысл [1]).

Теперь становится ясным, что в приложении к гл. I и в настоящем приложении мы построили две различные модели одной и той же геометрии, которая и называется геометрией Лобачевского (эта геометрия отличается от обычной евклидовой геометрии лишь тем, что в ней не выполняется аксиома параллельных линий; см. выше, стр. 146 и 330). Модель, построенная в приложении к гл. I (точки — точки круга К; прямые — отрезки прямых, заключённые внутри К; движения — линейные преобразования, переводящие К в себя), называется моделью Клейна (или моделью Бельтрами — Клейна). Модель, построенная в настоящем приложении (точки — точки круга К; прямые — заключённые внутри К дуги

---

[1]) По поводу всех вопросов, затронутых в настоящем приложении и в приложении к гл. I, можно рекомендовать книгу В. И. Костин, Основания геометрии, М.—Л., Учпедгиз, 1946 (следует только иметь в виду, что эта книга является довольно трудной).

окружностей, перпендикулярных к окружности Σ этого круга; движения — круговые преобразования, переводящие К в себя), по имени предложившего её французского математика называется моделью Пуанкаре.

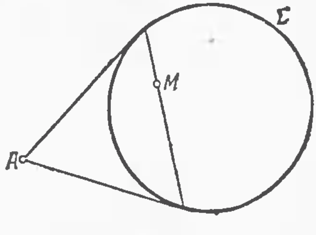
Отметим, что и для обычной (евклидовой) геометрии можно предложить разные модели. Вспомним, например, принцип двойственности, которому был посвящён § 4 гл. I. Согласно этому принципу в геометрических теоремах можно всюду заменить слово «прямая» на слово «точка» и наоборот, выражение «проходит через» выражением «лежит на» и наоборот — теоремы при этом остаются справедливыми. Другими словами, принцип двойственности утверждает законность определённого «переименования» геометрических понятий: согласно этому принципу прямые можно называть «точками», а точки — «прямыми». Перечисленные в § 4 гл. I свойства полярного преобразования устанавливают дальнейшие правила такого переименования; так, например, под углом между двумя «прямыми» (т. е. точками) A и B следует понимать угол AOB, где O — некоторая фиксированная точка плоскости (см. свойство В полярного преобразования, стр. 101). При таком понимании слов «точка»,«прямая», «угол» и т. д. все теоремы геометрии остаются справедливыми; это и означает, что здесь мы имеем некоторую новую модель обычной (евклидовой) геометрии. Все теоремы обычной геометрии имеют место и в этой модели, но они выражают совершенно новые геометрические факты; это обстоятельство обусловливает ценность найденной модели для доказательства геометрических теорем (см. задачи 159, 161—163 и 168—173 из § 4 гл. I, стр. 100 и 103—104)[1].

С другой моделью евклидовой геометрии мы встретились в § 4 этой главы (стр. 245—246). Здесь мы использовали то обстоятельство, что геометрические теоремы при преобразовании чертежа при помощи инверсии переводятся в совершенно

[1]) В § 4 гл. I указывалось, что принцип двойственности имеет наибольшую ценность в применении к проективной геометрии; другими словами, особенно удобна «двойственная модель» проективной геометрии. Что же касается «двойственной модели» евклидовой геометрии, то она имеет тот дефект, что здесь «точками» следует называть прямые плоскости и, кроме того, ещё одну фиктивную «бесконечно удалённую прямую», а «прямыми», кроме точек плоскости, ещё так называемые «бесконечно удалённые точки», под которыми можно понимать направления.

новые предложения (см. задачи 264—270 из § 4). Это обстоятельство равносильно существованию определённой модели евклидовой геометрии, получаемой с помощью преобразования инверсии; в этой модели «точками» называются все точки плоскости, кроме определённой точки O (и ещё фиктивная «бесконечно удалённая точка», в которую переходит O при инверсии); «прямыми» — прямые и окружности, проходящие через O; «окружностями» — прямые и окружности, не проходящие через O; «углом» между «прямыми» (т. е. окружностями) S_1 и S_2 — обычный угол; «расстоянием» между точками A и B — выражение $AB\cdot\frac{k}{OA\cdot OB}$ (см. формулу (*) на стр. 233); «симметрией относительно прямой» S — симметрию относительно окружности S; «движениями» — суммы «симметрий относительно прямых» и т. д. [1]).

[1]) Подчеркнём, что в аксиомах геометрии ничего не говорится не только о характере основных объектов («точек» и «прямых»), но и о смысле основных соотношений между этими объектами (как, например, «равенство» отрезков и углов или понятие «прямая проходит через точку»); поэтому при построении модели обязательно должен быть оговорён смысл этих отношений «точек» и «прямых». Так, например, в модели Клейна неевклидовой геометрии Лобачевского «равенство» фигур понимается в том смысле, что одну фигуру можно перевести в другую линейным преобразованием, оставляющим на месте



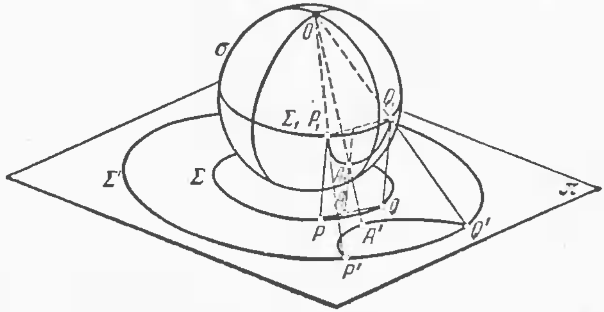
Черт. 262.

круг К, а в модели Пуанкаре — в том смысле, что одна фигура может быть переведена в другую круговым преобразованием, оставляющим К на месте. Если условиться называть «прямыми» не хорды круга К, как в модели Клейна, а их полюсы относительно Σ (см. § 4 гл. I, стр. 84), то мы придём к новой модели, в которой «точками» называются точки К, а «прямыми» — точки вне К и в которой понятие «прямая проходит через точку» приобретает совершенно неожиданный смысл: «прямая (т. е. точка) A проходит через точку M», если проходит через M хорда, соединяющая точки касания с окружностью Σ касательных, проведённых к Σ из A (черт. 262).

Интересную модель трёхмерной евклидовой геометрии можно получить, если отобразить пространство на плоскость с помощью циклографической проекции (см. § 5 настоящей главы, стр. 315); в этой модели «точками» пространства следует называть направленные окружности плоскости. Эта модель тоже может быть полезной для вывода новых теорем; так, например, нетрудно убедиться, что теорема задачи 280б) из § 5 (стр. 302) выражает в этой модели известную теорему: медианы треугольника ABC (как-то расположенного в пространстве) пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершины. Если принять за «расстояние» между «точками» этой модели (т. е. между направленными окружностями) касательное расстояние, то мы придём к интерпретации «псевдогеометрии» трёхмерного пространства (см. выше, стр. 318—320); в таком случае, например, формула решения задачи 280а) определяет «псевдодлину» медианы треугольника (рекомендуем читателю попытаться вывести эту формулу аналогично выводу формулы для длины медианы треугольника в обычной геометрии).

Построенные выше модели геометрии Евклида получаются из обычного истолкования этой геометрии при помощи определённых геометрических преобразований — полярного преобразования (см. § 3 гл. I) и преобразования инверсии. Эти преобразования позволяют установить непосредственную связь между каждой теоремой евклидовой геометрии и её истолкованием на модели (см. указанные на стр. 347 и 348 задачи из § 3 гл. I и § 4 настоящей главы). Такую же прямую связь можно установить между моделями Клейна и Пуанкаре неевклидовой геометрии Лобачевского; другими словами, можно указать преобразование, переводящее модель Клейна в модель Пуанкаре и обратно.

Это преобразование осуществляется следующим образом. Пусть К — круг радиуса R, внутри которого строится модель Клейна неевклидовой геометрии Лобачевского, σ — сфера того же радиуса, касающаяся плоскости π круга К в центре этого круга (черт. 263). Ортогональная проекция нижней полусферы на плоскость устанавливает соответствие между точками полусферы и точками круга К; при этом хордам К, т. е. «прямым» модели Клейна, будут отвечать дуги окружностей сферы σ, перпендикулярных к окружности Σ_1, ограничивающей полусферу («экватору» сферы σ). Отобразим теперь полусферу обратно на плоскость π с помощью стереографической проекции (см. § 3 гл. I, стр. 71). При этом она перейдёт в круг К′ радиуса $2R$, а дуги окружностей, перпендикулярных к экватору Σ_1, — в дуги окружностей, перпендикулярных к окружности Σ′ круга K′, т. е. в «прямые» модели Пуанкаре. Можно показать (см. ниже мелкий шрифт), что «расстояние» в смысле модели Клейна между двумя точками круга K будет равно «расстоянию» в смысле модели Пуанкаре между отвечающими им точками круга K′, а «угол» в смысле модели Клейна между двумя хордами K — углу между



Черт. 263.

отвечающими этим хордам окружностями, перпендикулярными к окружности Σ′, т. е. что *наше преобразование переводит модель Клейна в модель Пуанкаре.*

В приложении к гл. I мы определили неевклидову геометрию Лобачевского как науку, изучающую те свойства точек и хорд круга K, которые не меняются при линейных преобразованиях, переводящих K в себя,— «неевклидовых движениях» рассмотренной в этом приложении модели Клейна; в настоящем приложении мы определили неевклидову геометрию Лобачевского как науку, изучающую свойства точек круга K и заключённых внутри K дуг, перпендикулярных к Σ окружностей, которые не меняются при круговых преобразованиях, переводящих K в себя,— «неевклидовых движениях» модели Пуанкаре (см. выше, стр. 129 и 324). Поэтому, для того чтобы доказать, что указанное на черт. 263 преобразование переводит модель Клейна в модель Пуанкаре, нам достаточно убедиться, что оно переводит совокупность линейных преобразований, оставляющих на месте круг K, в совокупность круговых преобразований, оставляющих на месте круг K′ [1]).

---

[1]) Отсюда уже вытекает, что, например, «неевклидово расстояние» в смысле модели Клейна между двумя точками A и B круга K совпадает с «неевклидовым расстоянием» в смысле модели Пуанкаре между отвечающими им точками A' и B' круга K′ (разумеется, так как единицы измерения длин в обоих случаях можно выбирать совершенно независимо, то, вообще говоря, эти два «неевклидовых расстояния»

Но ясно, что каждому круговому преобразованию, переводящему К' в себя, отвечает линейное преобразование, переводящее в себя К: это вытекает из того, что круг К переходит в круг К', а пересекающие К прямые — в перпендикулярные к Σ' окружности (которые сохраняющее К' круговое преобразование переводит снова в такие же окружности). Далее, среди «неевклидовых движений» модели Пуанкаре имеются ровно два преобразования, переводящих одну в другую две заданные точки A' и A'_1 круга К' с указанными в них направлениями[1]; поэтому среди отвечающих им линейных преобразований круга К имеются ровно два преобразования, переводящих одну в другую две произвольные точки A и A_1 круга К с заданными в этих точках направлениями. А отсюда уже следует, что наше преобразование переводит совокупность всех «неевклидовых движений» модели Клейна в совокупность всех «неевклидовых движений» модели Пуанкаре.

В заключение отметим ещё одно, изящное преобразование модели Клейна в модель Пуанкаре, указанное недавно Я. С. Дубновым; в противоположность первому преобразованию оно не требует пространственных рассмотрений. Пусть К — круг, внутри которого строится модель Клейна геометрии Лобачевского, O — его центр. Сопоставим каждой точке A круга К точку A' луча OA, такую, что

$$d_{OA'} = \frac{1}{2} d_{OA}$$

(черт. 264); здесь d_{OA} и $d_{OA'}$ — неевклидовы длины отрезков OA и OA' (по аналогии с § 1 гл. I второй части книги такое преобразование можно было бы назвать «неевклидовым центрально-подобным преобразованием» с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$). Мы утверждаем, что это преобразование переводит

будут лишь пропорциональны, но не равны друг другу). Действительно, «расстояние» d_{AB} между точками A и B характеризуется следующими условиями:

1° если пара точек A, B переходит в пару A_1, B_1 при некотором «движении» (отрезки AB и A_1B_1 «равны»), то $d_{AB} = d_{A_1B_1}$;

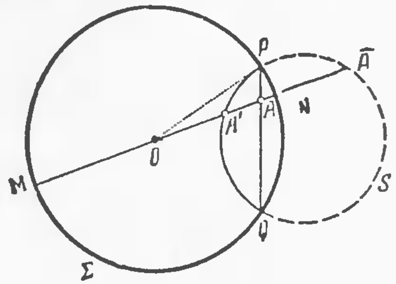
2° если A, B, C — три последовательные точки одной прямой, то $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$ (ср. определение «неевклидова расстояния» на стр. 130—134).

Поэтому из того, что прямая AB переходит в прямую $A'B'$ и «движения» переходят в «движения», с необходимостью следует, что «расстояние» d_{AB} равно «расстоянию» $d_{A'B'}$.

[1]) Эти два преобразования отличаются одно от другого на «неевклидову симметрию» (см. выше, стр. 156—157) относительно прямой, проходящей через точку A'_1 в заданном в ней направлении.

неевклидову прямую PQ модели Клейна (т. е. хорду PQ круга К) в неевклидову прямую PQ построенной в том же круге К модели Пуанкаре (т. е. в дугу PQ окружности S, перпендикулярной к окружности Σ круга К), а модель Клейна — в модель Пуанкаре.

Для доказательства обозначим точки пересечения произвольного диаметра MN круга К с хордой PQ и с дугой PQ окружности S через A и A'; нам надо показать, что



Черт. 264.

$d_{OA'} = \frac{1}{2} d_{OA}$. В силу определения неевклидовой длины отрезка (см. приложение к гл. I, стр. 133—134)

$$d_{OA} = \log\left(\frac{ON}{OM} : \frac{AN}{AM}\right) = \log \frac{AM}{AN} = \log \frac{R + OA}{R - OA} \qquad (*)$$

и

$$d_{OA'} = \log\left(\frac{ON}{OM} : \frac{A'N}{A'M}\right) = \log \frac{A'M}{A'N} = \log \frac{R + OA'}{R - OA'}; \qquad (**)$$

здесь R — радиус круга К. Далее пусть $\bar{A}$ — вторая точка пересечения MN с S; в таком случае $OA' \cdot O\bar{A} = R^2$ и, следовательно, $O\bar{A} = \frac{R^2}{OA'}$. Теперь по известному свойству хорд окружности, применённому к окружностям Σ и S, имеем:

$$MA \cdot AN = PA \cdot AQ = A'A \cdot A\bar{A},$$

или

$$(R + OA)(R - OA) = MA \cdot AN = A'A \cdot A\bar{A} =$$
$$= (OA - OA')(O\bar{A} - OA);$$

значит,

$$R^2 - OA^2 = (OA - OA')\left(\frac{R^2}{OA'} - OA\right) =$$
$$= OA \cdot \frac{R^2}{OA'} - R^2 - OA^2 + OA \cdot OA',$$

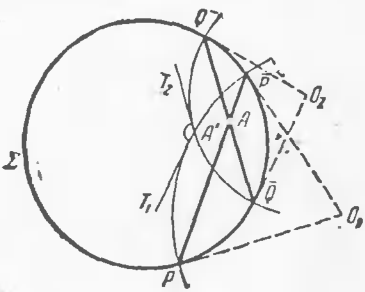
откуда следует, что

$$OA = 2R^2 : \left(\frac{R^2}{OA'} + OA'\right) = \frac{2R^2 \cdot OA'}{R^2 + OA'^2}.$$

Окончательно получаем:

$$d_{OA} = \log\frac{R + OA}{R - OA} =$$
$$= \log\left[\left(R + \frac{2R^2 \cdot OA'}{R^2 + OA'^2}\right) : \left(R - \frac{2R^2 \cdot OA'}{R^2 + OA'^2}\right)\right] =$$
$$= \log\frac{R^3 + R \cdot OA'^2 + 2R^2 \cdot OA'}{R^3 + R \cdot OA'^2 - 2R^2 \cdot OA'} = \log\frac{(R + OA')^2}{(R - OA')^2} =$$
$$= 2\log\frac{R + OA'}{R - OA'} = 2d_{OA'},$$

что и требовалось доказать. Заметим ещё, что так как формулы (*) и (**) могут служить для определения «неевклидовых длин» отрезков OA и OA' также и в модели Пуанкаре (см. выше, стр. 238), то для того, чтобы перейти обратно от модели Пуанкаре к модели Клейна, следует произвести на модели Пуанкаре «неевклидово центрально-подобное преобразование» с коэффициентом подобия 2.



Черт. 265.

Из сказанного вытекает также следующее простое построение, позволяющее найти величину неевклидова угла в модели Клейна. Пусть $P\overline{P}$ и $Q\overline{Q}$ — две пересекающиеся неевклидовы прямые модели Клейна, т. е. две хорды $P\overline{P}$ и $Q\overline{Q}$ круга К, пересекающиеся в точке A (черт. 265). Указанное выше преобразование модели Клейна в модель Пуанкаре переводит эти прямые в дуги $P\overline{P}$ и $Q\overline{Q}$ окружностей S_1 и S_2, перпендикулярных к окружности Σ круга К; построение этих окружностей не представляет затруднений. Далее, неевклидов угол между прямыми $P\overline{P}$ и $Q\overline{Q}$ модели Клейна (величину δ_{PAQ} этого угла нам требуется определить) переходит в неевклидов угол между прямыми S_1 и S_2 модели Пуанкаре, т. е. в обыкновенный (евклидов) угол между окружностями S_1 и S_2 — в угол между касательными $A'T_1$ и $A'T_2$, проведёнными к окружностям S_1 и S_2 в их общей точке A'. Следовательно,

$$\delta_{PAQ} = \angle T_1A'T_2.$$

Это построение неевклидова угла δ_{PAQ}, очевидно, проще приведённого в приложении к гл. I (см. стр. 140 — 142, в частности черт. 110, a).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЛИНЕЙНЫЕ И КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ГЛАВА I

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

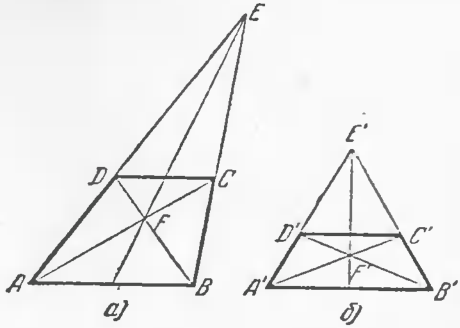
§ 1

107. Пусть ABC — произвольный треугольник. Спроектируем параллельно плоскость π, в которой этот треугольник расположен, на другую плоскость π' так, чтобы треугольник ABC перешёл в п р а в и л ь н ы й треугольник $A'B'C'$. В силу свойства В параллельного проектирования середины сторон треугольника ABC перейдут в середины сторон треугольника $A'B'C'$, и следовательно, медианы треугольника ABC перейдут в медианы треугольника $A'B'C'$. Но так как треугольник $A'B'C'$ — правильный, то его медианы являются одновременно и биссектрисами и поэтому пересекаются в одной точке — в центре вписанного круга. А отсюда следует, что и медианы исходного треугольника ABC пересекаются в одной точке[1]).

108. Пусть $ABCD$ — произвольная трапеция, E — точка пересечения её боковых сторон и F — точка пересечения её диагоналей. Спроектируем параллельно плоскость π, в кото-

[1]) То обстоятельство, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, непосредственно вытекает из того, что биссектриса есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла. Обычное доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, требует некоторых вспомогательных построений, которые становятся ненужными, если воспользоваться приведённым здесь рассуждением.

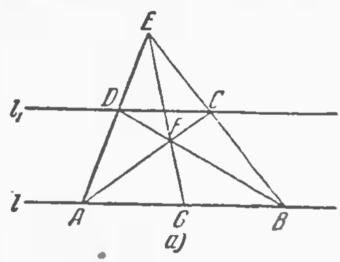
рой расположена трапеция, на другую плоскость π' так, чтобы треугольник ABE перешёл в равнобедренный треугольник $A'B'E'$; при этом в силу свойства Б параллельного проектирования трапеция $ABCD$ перейдёт в трапецию $A'B'C'D'$ (черт. 266). Очевидно, что прямая $E'F'$, в которую перейдёт EF, является осью симметрии равнобедренного треугольника $A'B'E'$ и, следовательно, делит пополам основания $A'B'$ и $C'D'$ трапеции $A'B'C'D'$. В силу свойства В параллельного проектирования отсюда следует, что и прямая EF делит пополам основания AB и CD исходной трапеции $ABCD$.



Черт. 266.

Заметим, что точно так же можно доказать и обратную теорему: если соединить прямыми произвольную точку F медианы EM треугольника ABE с вершинами A и B, то точки C и D пересечения этих прямых с боковыми сторонами треугольника лежат на прямой, параллельной его основанию (из черт. 266, *б* видно, что это обстоятельство обязательно имеет место, если треугольник ABE является равнобедренным).

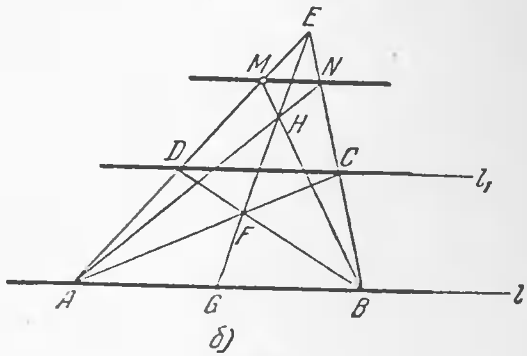
109. а) Выберем на плоскости произвольную точку E, не лежащую на прямых l и l_1, и соединим её с точками A и B прямой l. Пусть D и C — точки пересечения EA и EB с прямой l_1, F — точка пересечения прямых AC и BD (черт. 267, *а*). Прямая EF пересекает прямую l в точке G, являющейся серединой отрезка AB (см. задачу 108).



Черт. 267, *а*.

б) Выберем на прямой l произвольно две точки A и B и найдём середину G отрезка AB (см. задачу а)). Пусть E — произвольная точка прямой AM, H — точка пересечения прямых EG и BM, N — точка пересечения прямых AH и BE

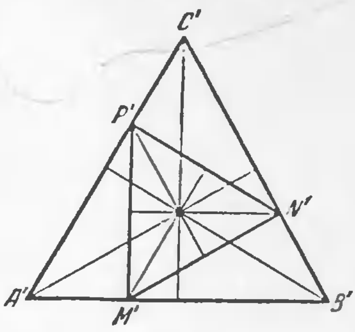
(черт. 267, *б*). Прямая MN будет параллельна прямой l (см. замечание в конце решения задачи 108).



Черт. 267, *б*.

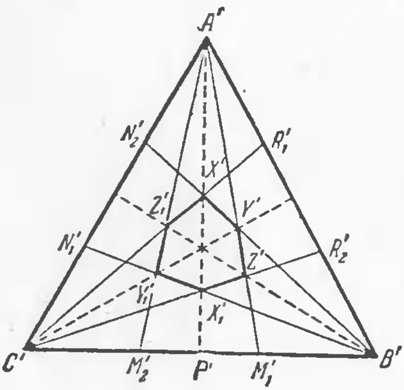
[При построении удобно использовать один и тот же треугольник ABE и для нахождения середины AB и для построения параллельной.]

110. а) Спроектируем параллельно треугольник ABC на некоторую плоскость π' так, чтобы он перешёл в правильный треугольник $A'B'C'$; в силу свойства В параллельного проектирования точки M, N, P перейдут в такие точки M', N' и P', что $\frac{A'M'}{M'B'}=\frac{B'N'}{N'C'}=\frac{C'P'}{P'A'}$ (черт. 268). При повороте треугольника $A'B'C'$ на 120° вокруг его центра сторона $A'B'$ треугольника переходит в сторону $B'C'$, сторона $B'C'$ — в сторону $C'A'$, сторона $C'A'$ — в сторону $A'B'$; точка M' переходит в точку N', точка N' — в точку P' и точка P' — в точку M'. Таким образом, при повороте на 120° вокруг центра треугольника $A'B'C'$ треугольник $M'N'P'$ переходит в себя, откуда следует, что этот треугольник тоже является правильным и что центр его совпадает с центром треугольника $A'B'C'$. Другими словами,



Черт. 268.

точка пересечения медиан треугольника $M'N'P'$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $A'B'C'$. А так как при параллельном проектировании медианы треугольника переходят в медианы (ср. с решением задачи 107), то точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC [1]).



Черт. 269.

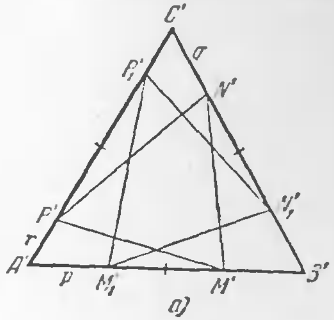
б) Доказательство аналогично решению задачи а).

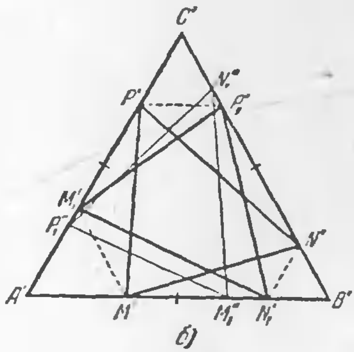
111. Очевидно, достаточно доказать это предложение для р а в н о с т о р о н н е г о треугольника $A'B'C'$ (ср. с решениями задач 107, 110). Прямые $C'R'_1$ и $B'N'_2$ такие, что $A'N'_2 = \frac{1}{3}A'C'$ и $A'R'_1 = \frac{1}{3}A'B'$ симметричны относительно оси симметрии $A'P'$ этого треугольника и, следовательно, точка их пересечения X' лежит на ней (черт. 269). Прямые $B'N'_1$ и $C'R'_2$ такие, что $B'R'_2 = \frac{1}{3}B'A'$, $C'N'_1 = \frac{1}{3}C'A'$, симметричны относительно той же оси симметрии $A'P'$ и их точка пересечения X'_1 тоже

[1]) Центр правильного треугольника совпадает с точкой пересечения биссектрис (центром вписанного круга), с точкой пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам в их серединах (центром описанного круга), с точкой пересечения высот и, наконец, с точкой пересечения медиан. Однако, из того, что точка пересечения биссектрис треугольника $A'B'C'$ совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника $M'N'P'$, разумеется, не следует, что точка пересечения биссектрис первоначального треугольника ABC совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника MNP, так как при параллельном проектировании в биссектрисы треугольника $A'B'C'$ могут перейти прямые, не являющиеся биссектрисами треугольника ABC (*при параллельном проектировании биссектрисы треугольника*, вообще говоря, *не переходят в биссектрисы*). Точно так же нельзя утверждать, что у треугольников ABC и MNP должны совпадать центры описанных кругов или точки пересечения высот. Но точки пересечения медиан этих двух треугольников обязательно должны совпасть, поскольку *медианы треугольника при параллельном проектировании переходят в медианы преобразованного треугольника.*

лежит на $A'P'$. Таким образом, диагональ $X'X'_1$ рассматриваемого шестиугольника совпадает с осью симметрии $A'P'$ равностороннего треугольника $A'B'C'$. Точно так же показывается, что две другие диагонали $Y'Y'_1$ и $Z'Z'_1$ этого шестиугольника совпадают с двумя другими осями симметрии равностороннего треугольника. Следовательно, $X'X'_1$, $Y'Y'_1$ и $Z'Z'_1$ пересекаются в одной точке — центре правильного треугольника. Но в таком случае и в произвольном треугольнике ABC диагонали XX_1, YY_1, ZZ_1 рассматриваемого шестиугольника должны пересекаться в одной точке.

Примечание. Из решения задачи следует также, что прямые XX_1, YY_1, ZZ_1 совпадают с медианами треугольника ABC, а точка их пересечения — с точкой пересечения медиан.





Черт. 270.

112. а) В силу свойств В, Г параллельного проектирования и теоремы 1 на стр. 21 достаточно доказать утверждение задачи для равностороннего треугольника $A'B'C'$ (черт. 270, *а*; ср. с решением задач 107 и 110). Обозначим общую величину отрезков $B'M'$ и $A'M'_1$ буквой p, величину отрезков $A'P'$ и $C'P'_1$ — буквой r, величину отрезков $C'N'$ и $B'N'_1$ — буквой q, и пусть сторона правильного треугольника $A'B'C'$ равна a. В таком случае:

$$S_{A'B'C'} - S_{M'N'P'} = S_{A'P'M'} + S_{B'M'N'} + S_{C'N'P'} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ [r(a-p) + p(a-q) + q(a-r)] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ [a(p+q+r) - (pq+qr+rp)]$$

и

$$S_{A'B'C'} - S_{M_1'N_1'P_1'} = S_{A'P_1'M_1'} + S_{B'M_1'N_1'} + S_{C'N_1'P_1'} =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ[(a-r)p + (a-p)q + (a-q)r] =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ[a(p+q+r) - (pq+qr+rp)].$$

Отсюда следует, что $S_{M'N'P'} = S_{M_1'N_1'P_1'}$.

б) Так же, как и в задаче а), достаточно доказать утверждение задачи для равностороннего треугольника $A'B'C'$ (черт. 270, *б*). Из того, что $M'M_1' \parallel B'C'$, $N'N_1' \parallel C'A'$, $P'P_1' \parallel A'B'$, в этом случае вытекает

$$A'M' = A'M_1',$$
$$B'N' = B'N_1',$$
$$C'P' = C'P_1'.$$

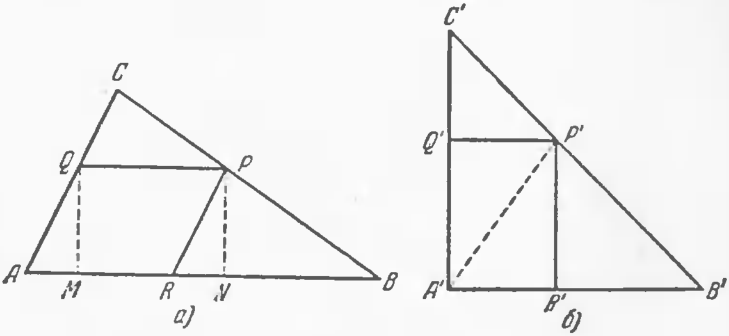
Если мы повернём треугольник $A'B'C'$ вокруг его центра на 120° в направлении от A' к B', то треугольник $A'B'C'$ перейдёт в себя, а так как $A'M' = A'M_1'$, $B'N' = B'N_1'$, $C'P' = C'P_1'$, то треугольник $M_1'N_1'P_1'$ перейдёт в треугольник $M_1''N_1''P_1''$, вершины которого, как легко видеть, будут симметричны вершинам треугольника $M'N'P'$ относительно середин соответствующих сторон треугольника $A'B'C'$. Поэтому в силу результата задачи а)

$$S_{M_1''N_1''P_1''} = S_{M'N'P'}, \text{ а значит, и } S_{M_1'N_1'P_1'} = S_{M'N'P'}.$$

Нетрудно было бы доказать равенство площадей треугольников $M'N'P'$ и $M_1'N_1'P_1'$ и прямым подсчётом аналогично решению задачи а).

113. Наша задача равносильна следующей: вписать в данный треугольник ABC параллелограмм $ARPQ$ известной площади σ, вершина A которого совпадает с вершиной A треугольника, а остальные лежат на сторонах AC, BC и AB. Действительно, из черт. 271, *а* сразу следует, что площади прямоугольника $MNPQ$ и параллелограмма $ARPQ$ одинаковы (они имеют одинаковые основание PQ и высоту QM); поэтому, построив параллелограмм $ARPQ$, мы сможем построить и прямоугольник $MNPQ$.

Если параллельное проектирование переводит треугольник ABC плоскости π в какой-либо треугольник $A'B'C'$ плоскости π', то параллелограмм $ARPQ$, вписанный в ABC, перейдёт в параллелограмм $A'R'P'Q'$, вписанный в $A'B'C'$. [Именно поэтому мы заменили задачу о построении прямоугольника $MNPQ$ задачей о построении параллелограмма $ARPQ$: прямоугольник при параллельном проектировании, вообще говоря, н е п е р е х о д и т в прямоугольник; поэтому использовать свойства параллельного проектирования для решения исходной задачи было бы трудно.] Предположим, что параллелограмм $ARPQ$ вписан; спроектируем параллельно треугольник ABC в р а в н о б е д р е н н ы й п р я м о у г о л ь н ы й т р е у г о л ь н и к $A'B'C'$ (черт. 271, *б*). Будем считать, что треугольники ABC и $A'B'C'$



Черт. 271.

имеют одинаковую площадь S (для этого, может быть, понадобится ещё преобразовать подобно треугольник, полученный параллельным проектированием из треугольника ABC); в силу свойства Г параллельного проектирования параллелограммы $ARPQ$ и $A'R'P'Q'$ (последний параллелограмм, очевидно, является прямоугольником) имеют одинаковую площадь σ. Таким образом, нам известна сумма площадей равнобедренных прямоугольных треугольников $B'R'P'$ и $C'P'Q'$; она равна $S-\sigma$. Но $S_{B'R'P'}=$ $=\frac{1}{2}R'P'^2$, $S_{C'P'Q'}=\frac{1}{2}Q'P'^2$; следовательно, мы получаем:

$$R'P'^2+Q'P'^2=2(S-\sigma),$$

или, так как сумма $R'P'^2+Q'P'^2$ равна квадрату диагонали $A'P'$ прямоугольника, то

$$A'P'=\sqrt{2(S-\sigma)}.$$

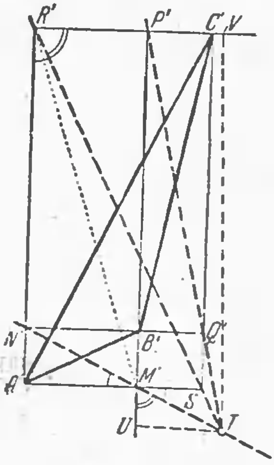
Отсюда вытекает следующее построение. Построим равнобедренный прямоугольный треугольник $A'B'C'$ той же площади S, что и треугольник ABC (катет $A'B'$ этого треугольника должен быть равен среднему геометрическому основания и высоты треугольника ABC); затем найдём на гипотенузе $B'C'$ точку P', такую, что $A'P'=\sqrt{2(S-\sigma)}$. Наконец, разделим сторону BC заданного треугольника ABC в отношении

$$\frac{BP}{PC}=\frac{B'P'}{P'C'}$$

(свойство В параллельного проектирования!). Прямоугольник $MNPQ$ (вершина Q лежит на стороне AC, вершины M и N — на стороне AB) и будет искомым.

Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

114. Спроектируем параллельно черт. 13 текста с плоскости π на другую плоскость π' так, чтобы на новом чертеже углы $A'M'N'$ и $A'R'S'$, в которые перейдут углы AMN и ARS первоначального чертежа, были равны. [Треугольники $A'M'N'$ и $A'R'S'$, в которые перейдут треугольники AMN и ARS, имеют один общий угол A'; для того чтобы они были подобны (т. е. чтобы $\angle A'M'N'=\angle A'R'S'$), надо, чтобы их стороны были пропорциональны: $\frac{A'M'}{A'N'}=\frac{A'R'}{A'S'}$. Но отношения $\frac{A'S'}{A'M'}=\frac{AS}{AM}=\alpha$ и $\frac{A'N'}{A'R'}=\frac{AN}{AR}=\beta$ известны; поэтому надо, чтобы было $\frac{A'M'}{\beta A'R'}=\frac{A'R'}{\alpha A'M'}$ или $\frac{A'M'}{A'R'}=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. В силу теоремы 1 (стр. 21) мы можем спроектировать треугольник AMR в треугольник $A'M'R'$ с данным отношением сторон $\frac{A'M'}{A'R'}=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$; для того чтобы полученный чертёж был проще, потребуем ещё, чтобы было $\angle M'A'R'=90°$ (в последующих рассуждениях это обстоятельство не играет существенной роли).] Таким образом, мы придём



Черт. 272.

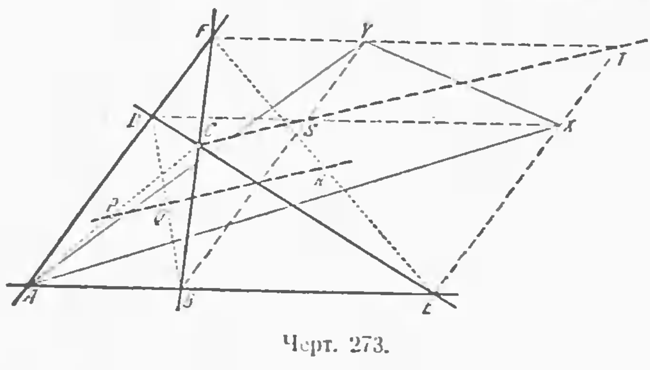
к черт. 272; требуется доказать, что точка T пересечения $M'N'$ и $R'S'$ лежит на прямой $P'Q'$.

Из подобия треугольников $M'S'T$ и $R'N'T$ (имеющих равные углы) следует $\frac{M'T}{R'T}=\frac{M'S'}{R'N'}$; из подобия треугольников TUM' и TVR', где U и V — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на $P'M'$ и на $P'R'$ (в этих прямоугольных треугольниках $\angle TM'U=90^\circ-\angle TM'S'=90^\circ-\angle TR'N'=$ $=TR'V$), следует $\frac{TU}{TV}=\frac{M'T}{R'T}$. Таким образом, имеем

$$\frac{TU}{TV}=\frac{M'T}{R'T}=\frac{M'S'}{R'N'}=\frac{Q'B'}{Q'C'}.$$

Равенство $\frac{TU}{TV}=\frac{Q'B'}{Q'C'}$ и доказывает, что точка T лежит на прямой $P'Q'$.

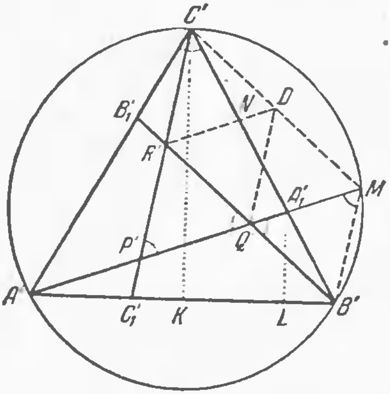
115. Точки P, Q и R черт. 14 в тексте центрально-подобны с центром A и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ точкам C, S и T черт. 273 (где $ABSD$ и $AFTE$ — параллелограммы).



Черт. 273.

Таким образом, достаточно доказать, что точки T, S и C лежат на одной прямой, т. е. что прямая TS проходит через точку C пересечения ED и BF. Но это следует из результата задачи 114: на черт. 273 $ADXE$, $XTYS$ и $YFAB$ — параллелограммы с одним направлением сторон, построенные на сторонах треугольника AXY как на диагоналях; ED, TS и BF — вторые диагонали этих параллелограммов.

116. Первое решение. Очевидно, достаточно решить задачу для случая, когда треугольник ABC равносторонний (черт. 274; ср. с решениями задач 107 и 110). Опишем окружность вокруг равностороннего треугольника $A'B'C'$ и продолжим прямую $A'A_1'$ до пересечения с этой окружностью в точке M. Из соображений симметрии следует, что треугольник $P'Q'R'$, полученный в пересечении прямых $A'A_1'$, $B'B_1'$ и $C'C_1'$, является правильным (этот треугольник переходит в себя при вращении треугольника $A'B'C'$ на $120°$ вокруг своего центра). Далее, из того, что $\angle B'MA' = \angle B'C'A'$ (как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), следует, что и треугольник $B'MQ'$ является правильным (ибо $\angle B'MQ' = \angle B'Q'M = 60°$) и $B'M \parallel C_1'C'$ (см. черт. 274). Далее, так как $B'M = B'Q'$ и $B'Q' = C'R'$ ($\triangle B'Q'A_1' = \triangle C'R'B_1'$), то $B'M = R'C'$ и четырёхугольник $B'MC'R'$ является параллелограммом.



Черт. 274.

Проведём теперь из точки R' прямую параллельно MA_1'; пусть N есть точка пересечения этой прямой с прямой $B'C'$. Так как $\triangle C'R'N = \triangle B'MA_1'$, то $B'A_1' = NC'$; но $B'A_1' = \frac{1}{3} B'C'$ и, следовательно, $B'A_1' = A_1'N = NC'$. А из того, что $B'A_1' = A_1'N$, следует $B'Q' = Q'R'$ и, значит, $\triangle B'Q'M = \triangle P'Q'R'$.

Теперь уже нетрудно определить площадь треугольника $P'Q'R'$. Пусть $Q'D$ есть средняя линия параллелограмма $B'MC'R'$; в таком случае

$$S_{\triangle Q'B'M} = \frac{1}{2} S_{Q'B'MD} = \frac{1}{4} S_{R'B'MC'}.$$

А так как

$$S_{\triangle B'R'C'} = \frac{1}{2} S_{B'MC'R'},$$

то

$$S_{\triangle P'Q'R'} = S_{\triangle Q'B'M} = \frac{1}{2} S_{\triangle B'R'C'}.$$

Но

$$S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle B'C'R'} + S_{\triangle C'A'P'} + S_{\triangle A'B'Q'} + S_{\triangle P'Q'R'} =$$
$$= 3S_{\triangle B'C'R'} + S_{\triangle P'Q'R'} = 7S_{\triangle P'Q'R'}$$

и, следовательно,

$$S_{\triangle P'Q'R'} = \frac{1}{7} S_{\triangle A'B'C'},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Отметим, что так как в равностороннем треугольнике $B'Q' = Q'R'$ и аналогично $C'R' = R'P'$ и $A'P' = P'Q'$, то и в произвольном треугольнике ABC должны иметь место аналогичные соотношения.

Второе решение. Пусть треугольник $A'B'C'$ — правильный; в таком случае и треугольник $P'Q'R'$ — правильный и

$$\triangle A'C'C_1' = \triangle B'A'A_1' = \triangle C'B'B_1',$$
$$\triangle A'P'C_1' = \triangle B'Q'A_1' = \triangle C'R'B_1'$$

(черт. 274; ср. с первым решением задачи). Имеем:

$$S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle P'Q'R'} + S_{\triangle A'C'C_1'} + S_{\triangle B'A'A_1'} + S_{\triangle C'B'B_1'} -$$
$$- S_{\triangle A'P'C_1'} - S_{\triangle B'Q'A_1'} - S_{\triangle C'R'B_1'} =$$
$$= S_{\triangle P'Q'R'} + 3S_{\triangle A'C'C_1'} - 3S_{\triangle A'P'C_1'},$$

или, так как $A'C_1' = \frac{1}{3} A'B'$, $S_{\triangle A'C'C_1'} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'B'C'}$,

$$S_{\triangle P'Q'R'} = 3S_{\triangle A'P'C_1'}.$$

Воспользуемся теперь известной из тригонометрии формулой

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}.$$

Обозначим сторону $A'B'$ через a; в таком случае высота

$$C'K = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad A'C_1' = \frac{a}{3}, \quad A'K = \frac{a}{2}, \quad C_1'K = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6},$$

$B'L=\frac{1}{3}B'K=\frac{a}{6}$ (здесь $A'_1L\perp A'B'$), $A'L=\frac{5}{6}a$, $A'_1L=$ $=\frac{1}{3}C'K=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Следовательно,

$$\sin\angle P'A'C'_1=\frac{A'_1L}{A'A'_1}=\frac{a\sqrt{3}}{6}:\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\frac{5a}{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{a\sqrt{3}}{6}:\frac{a\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}};$$

$$\sin\angle P'C'_1A'=\frac{C'K}{C'_1C'}=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{a\sqrt{7}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}};$$

$$\sin\angle A'P'C'_1=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$$S_{\triangle A'P'C'_1}=\frac{1}{2}\frac{a^2}{9}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{84}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{21}=\frac{1}{21}S_{\triangle A'B'C'}$$

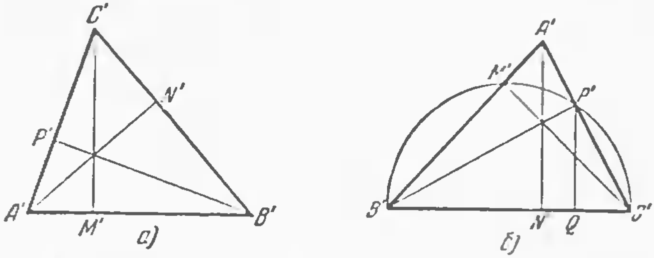
и окончательно

$$S_{\triangle P'Q'R'}=3S_{\triangle A'P'C'_1}=\frac{1}{7}S_{\triangle A'B'C'},$$

что и доказывает теорему.

117. В школьном курсе геометрии доказывается, что в треугольнике три медианы пересекаются в одной точке, три биссектрисы пересекаются в одной точке и три высоты пересекаются в одной точке.

Наша задача будет решена, если мы сумеем параллельно спроектировать рассматриваемый треугольник ABC на другую плоскость таким образом, чтобы прямые AN, BP и CM перешли в три медианы, или в три биссектрисы, или в три высоты получившегося треугольника. Совершенно ясно, что невозможно при помощи параллельного проектирования перевести прямые AN, BP и CM в медианы треугольника (так как при параллельном проектировании в медианы переходят только медианы). Перевести параллельным проектированием прямые AN, BP и CM в биссектрисы треугольника тоже не всегда возможно [1]). Таким образом, нам остаётся попытаться перевести



Черт. 275.

параллельным проектированием прямые AN, BP и CM в высоты некоторого треугольника.

Докажем, что если $A'N'$, $B'P'$ и $C'M'$ — высоты треугольника $A'B'C'$ (черт. 275, a), то

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=1.$$

Действительно, из подобия прямоугольных треугольников $A'N'C'$ и $B'P'C'$ следует, что $\frac{C'P'}{N'C'}=\frac{a}{b}$, где $a=B'C'$ и $b=A'C'$. Точно так же доказывается, что $\frac{B'N'}{M'B'}=\frac{c}{a}$, $\frac{A'M'}{P'A'}=\frac{b}{c}$, где $c=A'B'$. Из этих трёх равенств следует

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{A'M'}{P'A'}\cdot\frac{B'N'}{M'B'}\cdot\frac{C'P'}{N'C'}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1.$$

---

[1]) Можно показать, что три прямые AN, BP и CM, проходящие через вершины некоторого треугольника ABC и пересекающиеся в точке O внутри этого треугольника, можно параллельным проектированием перевести в биссектрисы $A'N'$, $B'P'$ и $C'M'$ некоторого треугольника $A'B'C'$, в том и только в том случае, если точка O лежит внутри малого треугольника, сторонами которого являются средние линии треугольника ABC. Мы рекомендуем читателю самому попытаться доказать эту любопытную теорему.

Построим теперь треугольник $A'B'C'$, основания N', M', P' высот которого делят стороны треугольника в данных отношениях $\frac{A'M'}{M'B'}=\frac{AM}{MB}$, $\frac{B'N'}{N'C'}=\frac{BN}{NC}$, $\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{CP}{PA}$. Для этого разделим произвольный отрезок $B'C'$ в данном отношении $\frac{B'N'}{N'C'}=\frac{BN}{NC}$. В точке N' восставим перпендикуляр к $B'C'$. Затем разделим отрезок $C'N'$ в отношении $\frac{C'Q}{QN'}=\frac{CP}{PA}$ и восставим в точке Q перпендикуляр к $C'B'$ (черт. 275, *б*). Пусть P' — точка пересечения этого перпендикуляра с полуокружностью, построенной на $C'B'$ как на диаметре, A' — точка пересечения прямой $C'P'$ с перпендикуляром к $C'B'$, восставленным в точке N'. Треугольник $A'B'C'$ искомый. Действительно, $A'N'$ и $B'P'$ — две высоты этого треугольника; пусть $C'M'$ — его третья высота. Так как $\frac{B'N'}{N'C'}=\frac{BN}{NC}$ и $\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{C'Q}{QN'}=\frac{CP}{PA}$, то из того, что

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=1=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA},$$

следует, что $\frac{A'M'}{M'B'}=\frac{AM}{MB}$.

Переведём теперь параллельным проектированием треугольник ABC в треугольник, подобный треугольнику $A'B'C'$. В силу свойства В параллельного проектирования точки N, P и M перейдут в основания высот нового треугольника, а прямые AN, BP и CM — в его высоты. Из того, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке, непосредственно следует справедливость утверждения задачи.

Примечание. Из доказанного легко вывести, что имеет место и обратное соотношение: если три прямые, выходящие из вершин A, B и C треугольника ABC и пересекающиеся в одной точке внутри треугольника, пересекают противоположные стороны треугольника в точках N, P и M, то

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1.$$

Действительно, предположим, что это не так и пусть P_1 есть такая точка стороны AC, что

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP_1}{P_1A}=1.$$

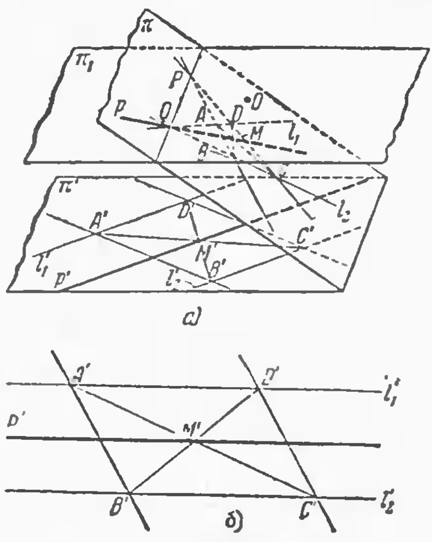
Тогда прямые AN, BP_1 и CM должны пересекаться в одной точке, т. е. BP_1 проходит через точку пересечения AN и CM. Но это возможно только, если BP_1 совпадает с BP, т. е. P_1 совпадает с P, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, имеет место следующая теорема, которую иногда называют *теоремой Чева*: для того чтобы прямые AN, BP и CM, где N, P, M — точки, лежащие на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (но не на их продолжениях!), пересекались в одной точке, *необходимо и достаточно*, чтобы имело место соотношение

$$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1.$$

§ 2

118. а) Пусть прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке Q. Спроектируем плоскость π черт. 24, *а* на другую плоскость π' так, чтобы прямая PQ была выделенной прямой



Черт. 276.

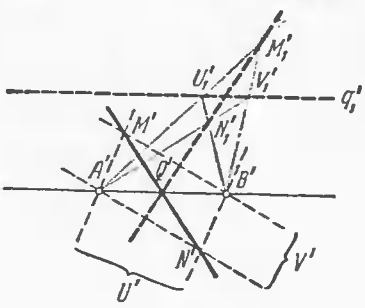
плоскости π (для этого достаточно провести через QP произвольную плоскость π_1, не совпадающую с π, и спроектировать π из точки O плоскости π_1 на плоскость π', параллельную π_1; см. черт. 276, *а*). При этом черт. 24, *а* перейдёт в черт. 276, *б* на плоскости π' черт. 276, *а* и геометрическое место точек M пересечения прямых AC и BD перейдёт в прямую линию p', параллельную l'_1 и l'_2 и равноудалённую от этих прямых. Отсюда согласно свойству А центрального проектирования следует, что искомое геометрическое место является прямой линией p.

В случае, когда $l_1 \parallel l_2$, мы придём к черт. 276, *б*, если спроектируем плоскость π на другую плоскость π' так, чтобы выделенная прямая проходила через точку P и была параллельна l_1 и l_2.

Из свойств Б центрального проектирования непосредственно следует, что если l_1 и l_2 пересекаются в точке Q, то и p пройдёт через Q, а если $l_1 \parallel l_2$, то и прямая p параллельна этим прямым.

Если P_1 — какая-либо точка прямой PQ, то прямые, пересекающиеся в точке P_1, спроектируются в параллельные прямые плоскости π'. Поэтому геометрическое место точек M_1 пересечения прямых A_1C_1 и B_1D_1 черт. 24, *а* спроектируется на плоскость π' в ту же самую прямую p', откуда следует, что это геометрическое место совпадает с p. [Совершенно аналогично, если $l_1 \parallel l_2$ и $PP_1 \parallel l_1$, то точкам P и P_1 соответствует одна и та же прямая p.]

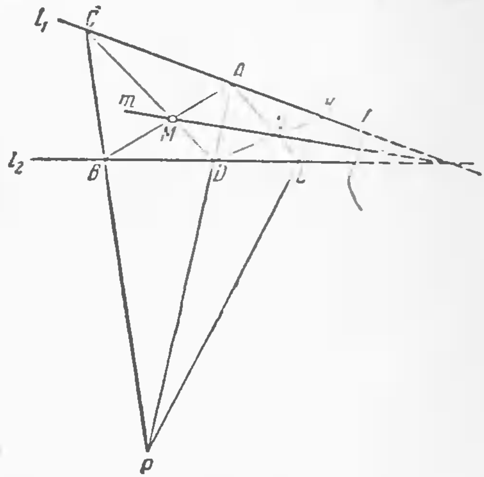
б) Спроектируем плоскость π черт. 24, *б* на новую плоскость π' так, чтобы прямая q явилась выделенной прямой плоскости π. В таком случае прямые UA и UB, VA и VB перейдут в параллельные прямые (черт. 277); прямая MN перейдёт в диагональ $M'N'$ параллелограмма $M'A'N'B'$, которая пересекает вторую диагональ $A'B'$ в её середине Q'. Таким образом, мы видим, что независимо от выбора точек U и V прямая MN проектируется в прямую $M'N'$, которая пересекает $A'B'$ в фиксированной точке Q'; отсюда следует, что все прямые MN пересекают AB в одной точке Q.



Черт. 277.

Пусть теперь q_1 — другая прямая, пересекающая AB в той же точке P. Она спроектируется в прямую $q'_1 \parallel A'B'$; четырёхугольник ABV_1U_1 перейдёт в трапецию $A'B'V'_1U'_1$ и линия M_1N_1 — в прямую $M'_1N'_1$, соединяющую точку пересечения диагоналей и точку пересечения противоположных сторон этой трапеции (черт. 277). Но эта прямая пересекает основание $A'B'$ трапеции в его середине Q' (см. задачу 108 из § 1, стр. 21). Отсюда вытекает второе утверждение настоящей задачи.

119. а) Проведём через точку M произвольную пару прямых, пересекающих l_1 и l_2 в точках A, C и B, D (черт. 278); затем через точку P пересечения AD и BC проведём произвольную прямую, пересекающую l_1 и l_2 в точках K и L. Из

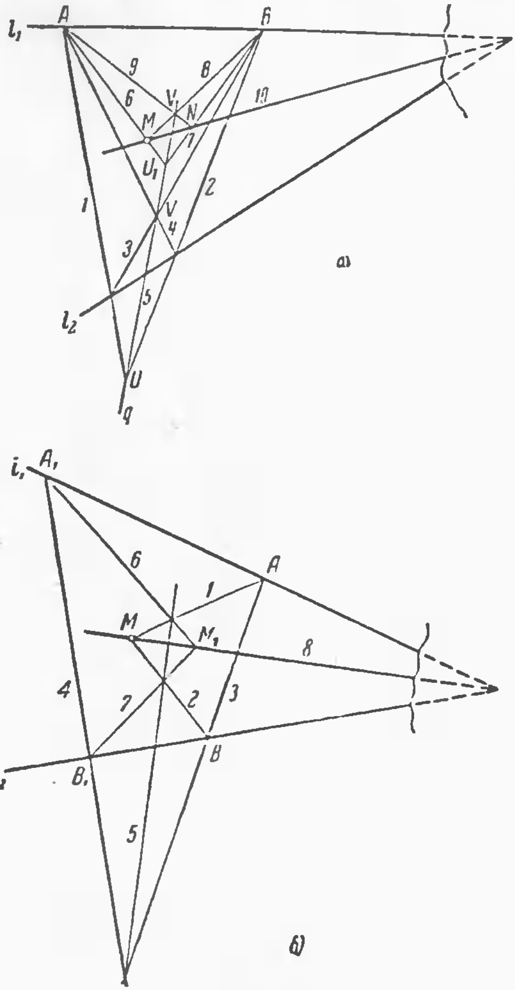


Черт. 278.

предложения задачи 118а) следует, что прямая m, соединяющая точку M с точкой пересечения AL и DK, пройдёт через точку пересечения прямых l_1 и l_2.

Примечание 1. Интересно отметить, что если $l_1 \parallel l_2$ (в этом случае точка пересечения l_1 и l_2 нам недоступна, поскольку этой точки вовсе не существует), то наше построение обращается в построение задачи 109б) из предыдущего параграфа: с помощью одной линейки через данную точку M провести прямую, параллельную данным прямым $l_1 \parallel l_2$. Это обстоятельство не является случайным, а связано с общими свойствами центрального проектирования, позволяющими считать задачу 109б) частным случаем настоящей (см. текст на стр. 51 и след.). Точно так же из построений задач 119б) — г) можно получить некоторые задачи на построение параллельных прямых с помощью одной линейки; мы рекомендуем читателю попытаться самостоятельно это сделать.

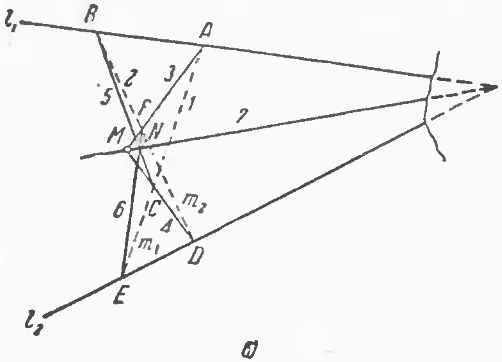
Примечание 2. Приведённое выше решение задачи 119а), основанное на предложении задачи 118а), отнюдь не является едниственно возможным. Так, на черт. 279, *а* изображено решение этой же задачи, опирающееся на предложение задачи 118б) (цифры у прямых



Черт. 279, *а—б*.

указывают порядок построения; на этом чертеже прямые l_2 и MN пересекают l_1 в одной и той же точке); на черт. 279, *б* указано решение задачи, опирающееся на теорему задачи 123 (треугольники ABM

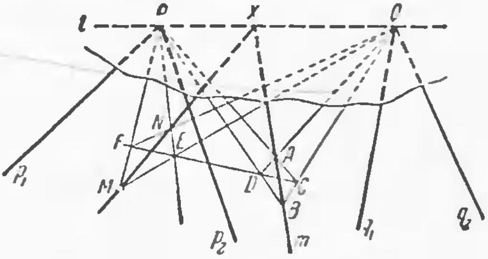
и $A_1B_1M_1$ перспективны; впрочем, и первое построение можно обосновывать с помощью теоремы Дезарга: треугольники CDK и BAL черт. 278 перспективны); на черт. 279, *в* указано построение, опирающееся на теорему задачи 129а) (вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат последовательно на прямых m_1 и m_2), которое легко обосновать также и с помощью теоремы задачи 129б) (стороны шестиугольника $AMDBNE$ проходят последовательно через точки F и C). Можно



Черт. 279, *в*.

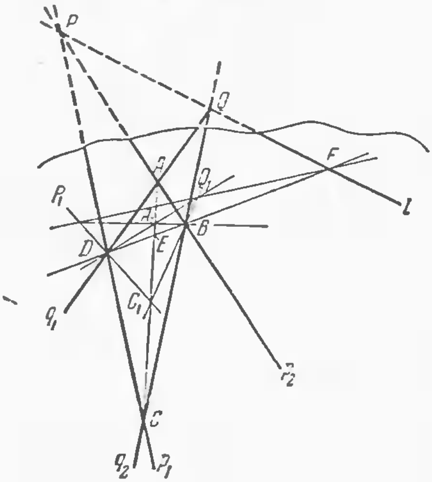
предложить и ряд других решений задачи; кроме того, справедливость каждого из указанных четырёх построений можно обосновать многими различными способами.

Аналогично этому приведённые ниже решения задач 119б) — г), 120 и 121 являются также далеко не единственными; мы рекомендуем читателю самому попробовать отыскать иные построения.



Черт. 280.

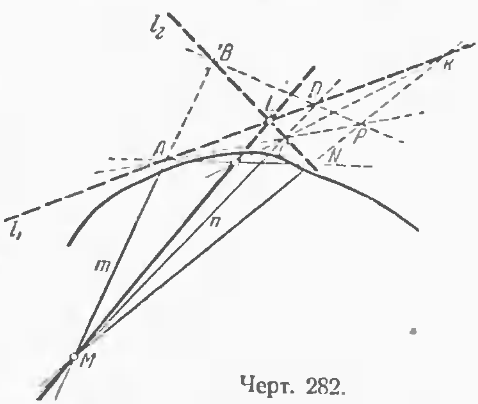
б) Вот одно из возможных построений: две точки A и B прямой m и точку M соединяем с недоступными точками P, Q (см. решение задачи а)); пусть, далее, C и D — точки пересечения AP и BQ, AQ и BP; E, F — точки пересечения MQ и MP с CD (черт. 280). Соединим E с P, а F с Q и пусть N — точка пересечения FQ и EP. В силу предложения задачи 118б) прямая MN пересекает PQ в той же точке X, что и прямая m (на черт. 280 C и D, E и F — две пары точек одной и той же прямой).



Черт. 281.

в) Вот одно из возможных решений: пусть прямые p_1, p_2 и q_1, q_2 пересекаются в точках A, B, C, D, как указано на черт. 281 (если эти прямые не пересекаются в пределах чертежа, то их следует заменить другими, проходящими через те же точки P, Q; см. задачу а)). На прямой AC (или на другой прямой, пересекающей BD в той же точке E) выбираем другие точки A_1, C_1 так, чтобы прямые A_1B и C_1D, A_1D и C_1B пересекались в пределах чертежа в точках P_1, Q_1. В силу предложения задачи 118б) прямая P_1Q_1 пересекает BD в той же точке F, что и прямая PQ; поэтому остаётся только соединить эту точку F с недоступной точкой P (задача а)).

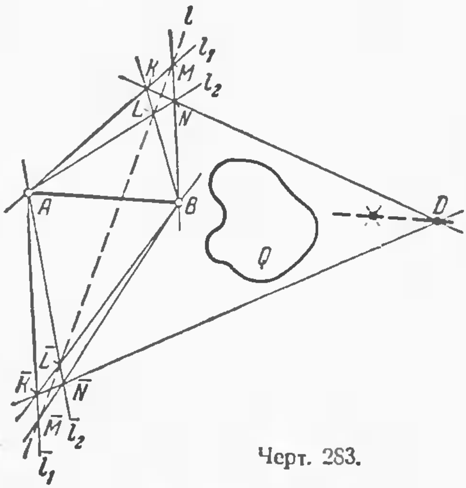
г) Вот одно из возможных построений: через точку M проведём две произвольные прямые m, n (черт. 282). Мы можем провести прямые через недоступные точки A, B, C, D пересечения l_1 и l_2 с m и n (задача б)); можем также соединить A с C и B с D (задача в)). Соединим точку M с точкой P



Черт. 282.

пересечения AC и BD (задача а)), пусть MP пересекает l_1 и l_2 в точках K и N. В силу предложения задачи 118а) точка пересечения KC и NA (эти прямые можно построить; см. задачи б), в)) лежит на искомой прямой.

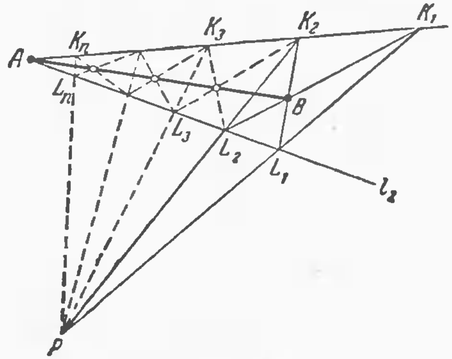
120. Вот одно из возможных построений: через точку A проведём две прямые l_1, l_2, не пересекающие области Q, и



Черт. 283.

через B — две прямые, пересекающие l_1 и l_2 в точках K, L и M, N; прямую ML обозначим через l (черт. 283). Далее проведём через A ещё две прямые $\overline{l}_1$ и $\overline{l}_2$, пересекающие l в точках $\overline{M}$ и $\overline{L}$; пусть прямые $B\overline{L}$ и $B\overline{M}$ пересекают $\overline{l}_1$ и $\overline{l}_2$ в точках $\overline{K}$ и $\overline{N}$. В силу результата задачи 118б) точка D пересечения KN и $\overline{K}\overline{N}$ лежит на прямой AB. Далее найдём таким же образом ещё одну точку прямой AB, расположенную за областью Q, и соединим прямой две полученные точки.

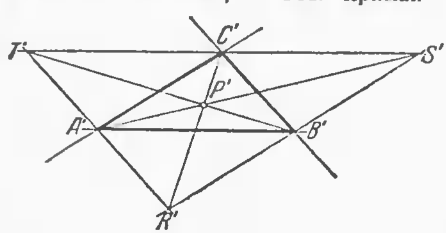
121. Вот одно из возможных построений: проведём через точку A прямые l_1 и l_2, образующие малый угол, внутри которого лежит точка B (черт. 284; сдвигая вдоль прямой нашу короткую линейку, мы сможем, конечно, провести сколь угодно длинный отрезок прямой). Через B проведём две прямые, пересекающие l_1 и l_2 в точках K_1, K_2 и L_1, L_2; точку пересечения K_1L_1 и K_2L_2 обозначим через P. Через P проведём ряд прямых, пересекающих l_1 и l_2 в точках K_3, K_4, ..., K_n и L_3, L_4, ..., L_n (черт. 284). В силу предложения задачи 118а)



Черт. 284.

точки пересечения K_2L_3 и K_3L_2, K_3L_4 и K_4L_3, ... и т. д. лежат на прямой AB. Так можно найти сколь угодно близкие точки этой прямой, которые уже можно соединить нашей короткой линейкой.

122. а) Центрально спроектируем плоскость π черт. 28, *а* на другую плоскость π' так, чтобы прямая p была вы-

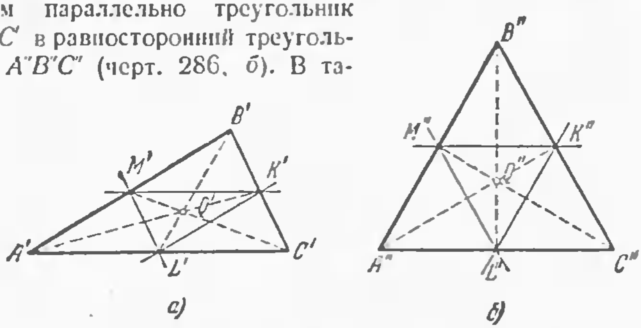


Черт. 285.

деленной прямой плоскости π. В таком случае прямые AM и BC перейдут в параллельные прямые $A'M'$ и $B'C'$; аналогично имеем $B'N' \parallel A'C'$, $C'L' \parallel A'B'$. Прямые AS, BT и CR перейдут при этом в медианы $A'S'$, $B'T'$ и $C'R'$ треугольника $A'B'C'$ (черт. 285), которые пересекаются в одной точке P';

следовательно, и прямые AS, BT и CR пересекаются в одной точке P [1]).

б) Центрально спроектируем плоскость π черт. 28, *б* на другую плоскость π' так, чтобы прямая RS была выделенной прямой плоскости π. Тогда на новом чертеже мы будем иметь $K'L' \parallel A'B'$, $K'M' \parallel A'C'$ (черт. 286, *а*). Спроектируем затем параллельно треугольник $A'B'C'$ в равносторонний треугольник $A''B''C''$ (черт. 286, *б*). В та-



Черт. 286.

ком случае $A''K''$ и $B''L''$ пересекаются на оси симметрии $C''D$ треугольника; $A''K''$ и $C''M''$ пересекаются на оси симметрии $B''E$

---

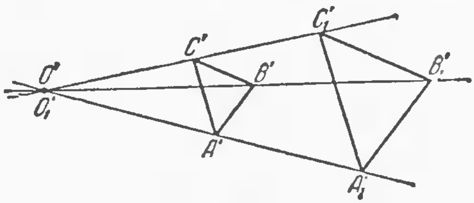
[1]) Отметим, что при центральном проектировании плоскости π на плоскость π' треугольник ABC не обязан перейти в треугольник $A'B'C'$; например, это заведомо будет не так, если прямая p пересекает стороны треугольника ABC (при центральном проектировании треугольник может переходить в довольно сложные фигуры; см. черт. 20 на стр. 34—35). Однако три точки A, B и C перейдут в три новые точки A', B' и C'; прямые, соединяющие попарно точки A, B и C, перейдут в прямые, соединяющие попарно A', B' и C'. Только в этом смысле и следует понимать утверждение о том, что черт. 28, *а* перейдёт при проектировании в черт. 285. Для удобства мы на черт. 28, *а* и 285 не изображаем целиком прямые AB, AC и т. д. и $A'B'$, $A'C'$ и т. д., а ограничиваемся некоторыми отрезками этих прямых. Однако в решении задачи мы опираемся на то, что, например, п р я м а я AB переходит в п р я м у ю $A'B'$; утверждение, что отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$, могло бы оказаться просто неверным. Это замечание относится и к решению ряда других из последующих задач.

Кроме этой, наши рассуждения содержат ещё и другую, более существенную, неточность. Точка P' черт. 285 может оказаться на выделенной прямой плоскости π'; в этом случае прямые AS, BT и CR не пересекутся в одной точке, а окажутся параллельными. Неточности такого рода имеются и в решениях большинства последующих задач; об этом специально сказано на стр. 51 и след.

треугольника. Поэтому точка Q'' должна совпасть с точкой пересечения обеих осей симметрии, т. е. с центром треугольника, а прямые $L''K''$, $K''M''$ и $M''L''$ — с его средними линиями.

Из того, что $L''M'' \parallel B''C''$ в силу свойства Б параллельного проектирования (см. стр. 18), следует, что $L'M' \parallel B'C'$. В силу свойства Б центрального проектирования это означает, что точка T пересечения LM и BC тоже лежит на выделенной прямой плоскости π, т. е. что точки R, S и T лежат на одной прямой.

123. Докажем сначала первое утверждение, содержащееся в задаче. Пусть P, Q, R — точки пересечения прямых BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1. Спроектируем плоскость π черт. 29 на новую плоскость π' так, чтобы прямая QR была



Черт. 287.

выделенной прямой плоскости π. При этом черт. 29 перейдёт в черт. 287, где в силу свойства Б центрального проектирования $A'B' \parallel A_1'B_1'$, $A'C' \parallel A_1'C_1'$. Из параллельности прямых $C'A'$ и $C_1'A_1'$ следует, что $\frac{O'C'}{O'C_1'} = \frac{O'A'}{O'A_1'}$, а из параллельности прямых $A'B'$ и $A_1'B_1'$ — что $\frac{O'A'}{O'A_1'} = \frac{O'B'}{O'B_1'}$, т. е. $\frac{O'B'}{O'B_1'} = \frac{O'C'}{O'C_1'}$; следовательно, прямые $B'C'$ и $B_1'C_1'$ будут тоже параллельны и точка P пересечения BC и B_1C_1 лежит на выделенной прямой плоскости π, т. е. на прямой QR, что и требовалось доказать.

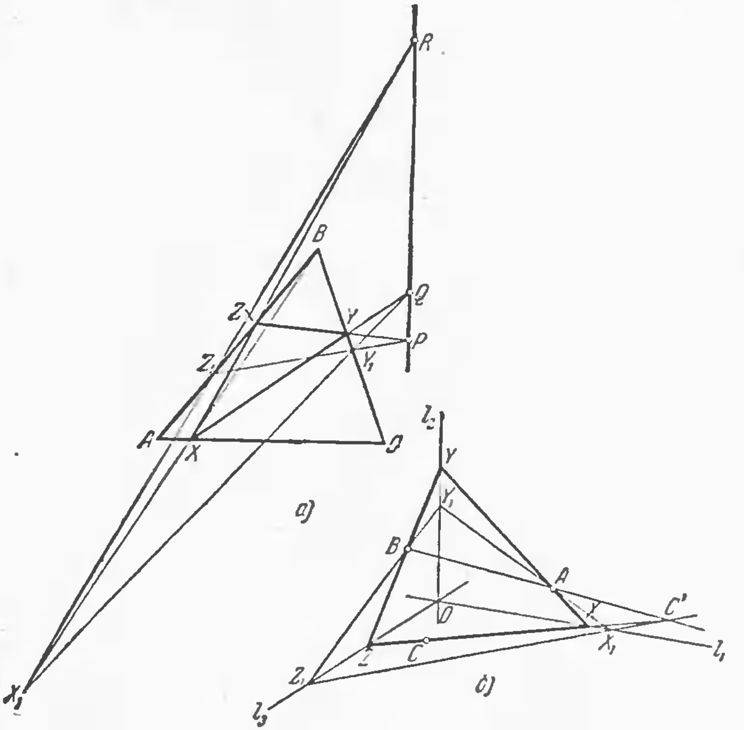
Перейдём теперь к доказательству обратного утверждения. Для этого спроектируем центрально плоскость π черт. 29 на новую плоскость π' так, чтобы прямая, на которой лежат точки P, Q и R, являлась выделенной прямой плоскости π. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перейдут при этом в подобные треугольники $A'B'C'$ и $A'_1B'_1C'_1$ с соответственно параллельными сторонами (черт. 287). Пусть O' — точка пересечения $A'A'_1$ и $B'B'_1$, O'_1 — точка пересечения $A'A'_1$ и $C'C'_1$. В таком случае $\frac{O'A'}{O'A'_1}=\frac{A'B'}{A'_1B'_1}$, $\frac{O'_1A'}{O'_1A'_1}=\frac{A'C'}{A'_1C'_1}$. Но $\frac{A'B'}{A'_1B'_1}=\frac{A'C'}{A'_1C'_1}$ (в силу подобия треугольников) и, значит, $\frac{O'A'}{O'A'_1}=\frac{O'_1A'}{O'_1A'_1}$, т. е. O' совпадает с O'_1. Так как прямые $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ пересекаются в одной точке O', то и прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O.

Отметим, что второе утверждение задачи 123 вытекает из первого утверждения; поэтому его можно было бы и не доказывать отдельно. Действительно, пусть точки P, Q и R черт. 29 лежат на одной прямой. Другими словами, это означает, что прямые PQ, B_1A_1 и BA, соединяющие соответствующие вершины треугольников PB_1B и QA_1A, пересекаются в одной точке R; в силу первой части теоремы отсюда вытекает, что точки пересечения соответствующих сторон этих треугольников C_1, C и O (точка пересечения B_1B и A_1A) лежат на одной прямой, т. е. что C_1C проходит через точку O пересечения B_1B и A_1A. Но в этом и состоит второе утверждение теоремы.

Совершенно аналогично первое утверждение теоремы Дезарга можно вывести из второго её утверждения.

124. а) Проведём через P произвольную прямую, пересекающую стороны AB и BC треугольника ABC в точках Z_1 и Y_1; пусть X_1 есть точка пересечения QY_1 с RZ_1 (черт. 288, *а*). Предположим теперь, что задача решена; тогда треугольники $X_1Y_1Z_1$ и XYZ перспективны (точки P, Q и R пересечения соответствующих сторон треугольников лежат на одной прямой). Поэтому XX_1, YY_1 и ZZ_1 пересекаются в одной точке (см. задачу 123), которой, очевидно, является точка B. Соединив B с X_1, мы получим в пересечении BX_1 и AC вершину X искомого треугольника, после чего построение остальных вершин уже не вызывает затруднений.

б) Проведём через точку A произвольную прямую, пересекающую l_1 и l_2 соответственно в точках X_1 и Y_1; точку Z_1 пересечения Y_1B и l_3 соединим с точкой X_1. Предположим теперь, что задача решена, т. е. треугольник XYZ построен (черт. 288, *б*). Так как прямые XX_1, YY_1, ZZ_1 пересекаются в одной точке O, то точки пересечения X_1Y_1 и XY (т. е. точка A), Y_1Z_1 и YZ (т. е. точка B) и Z_1X_1 и ZX лежат на одной прямой. Отсюда мы легко можем найти точку C' пересечения Z_1X_1 и ZX, так как она совпадает с точкой пересе-

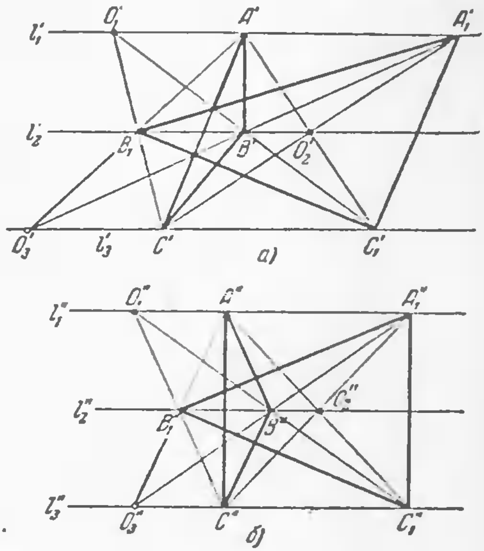


Черт. 288.

чения прямой Z_1X_1 с прямой AB. Соединив точку C' с точкой C, мы найдём сторону ZX искомого треугольника ZXY.

125. Эта теорема лишь по формулировке отличается от теоремы нижеследующей задачи 129б) (роль прямых l, m, n, соответственно l_1, m_1 и n_1, играют прямые AA_1, BB_1, CC_1 и AB_1, BC_1, CA_1; см. черт. 30).

126. Спроектируем плоскость π, на которой расположены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, на другую плоскость π' так, чтобы выделенной прямой плоскости π служила прямая, соединяющая точку O с точкой пересечения прямых AC и A_1C_1. При этом треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перейдут в треугольники $A'B'C'$ и $A'_1B'_1C'_1$ плоскости π', расположенные так, что прямые $A'A'_1$, $B'B'_1$ и $C'C'_1$ параллельны между собой, сторона $A'C'$ треугольника $A'B'C'$ параллельна стороне $A'_1C'_1$ треугольника $A'_1B'_1C'_1$, $A'A'_1$, $B'C'_1$ и $C'B'_1$ пересекаются в одной точке O'_1 и $A'C'_1$, $B'B'_1$ и $C'A'_1$ пересекаются в одной точке O'_2 (черт. 289, a). Обозначим параллельные прямые $A'A'_1$, $B'B'_1$ и $C'C'_1$ через l'_1, l'_2 и l'_3. Из того, что $A'C'_1$, $C'A'_1$ и $B'B'_1$ пересекаются в одной точке, следует, что прямая $B'B'_1$, т. е. l'_2 проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма $A'C'C'_1A'_1$, т. е. что l'_2 проходит между параллельными прямыми l'_1 и l'_3 на равном расстоянии от этих прямых. Нам надо доказать, что прямые $A'B'_1$, $B'A'_1$, $C'C'_1$ пересекаются в одной точке; отсюда будет следовать, что и прямые AB_1, BA_1 и CC_1, проектирующиеся в эти три прямые, пересекаются в одной точке.

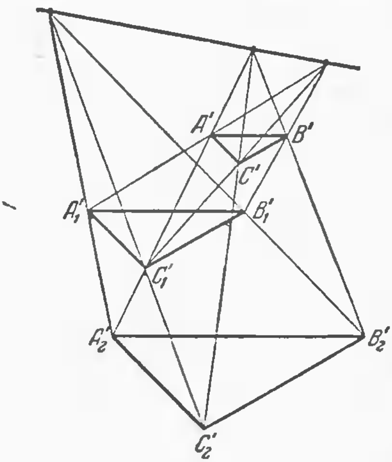


Черт. 289.

Спроектируем теперь параллельно плоскость π' на новую плоскость π'' так, чтобы треугольник $A'C'C'_1$ перешёл в прямоугольный треугольник $A''C''C''_1$ [1]). В таком случае черт. 289, a перейдёт в черт. 289, $б$, имеющий осью симметрии прямую l''_2;

[1]) Если воспользоваться теоремой 1 (см. стр. 60 в тексте), то можно заменить используемые в решении этой задачи центральное проектирование и последующее параллельное проектирование одним центральным проектированием, от которого надо только потребовать, чтобы оно переводило четырёхугольник ACC_1A_1 в прямоугольник (например, в квадрат).

следовательно, прямые $A''B_1''$ и $B''A_1''$ пересекаются в точке O_3'' прямой $C''C_1''$, симметричной точке O_1'' относительно l_2''. Отсюда следует, что и прямые $A'B_1'$, $B'A_1'$ и $C'C_1'$ на черт. 289, *а* пересекаются в одной точке O_3' (а именно в той точке, которая переходит при рассматриваемом параллельном проектировании в точку O_3'').

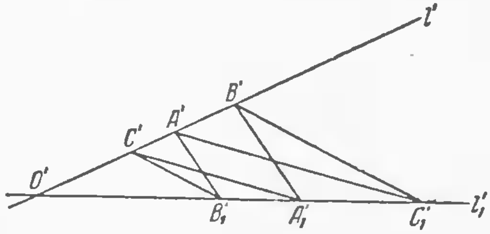


Черт. 290.

127. Спроектируем плоскость π, на которой расположены наши три треугольника, на другую плоскость π' таким образом, чтобы прямая PQR явилась выделенной прямой плоскости π. При этом треугольники ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перейдут в попарно центрально-подобные треугольники $A'B'C'$, $A_1'B_1'C_1'$ и $A_2'B_2'C_2'$ (ср. с решением задачи 123), а три точки пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1; AA_2, BB_2 и CC_2; A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 — в центры подобия этих треугольников, которые в силу теоремы о трёх центрах подобия (§ 1 гл. I второй части книги, стр. 93—94 первого тома) лежат на одной прямой (черт. 290). Следовательно, и точки, которые проектируются в эти точки, лежат на одной прямой.

128. Докажем, прежде всего, что если n-угольник изменяется так, что стороны его всё время проходят через n фиксированных точек, лежащих на одной прямой l, а $n-1$ вершин скользят по данным $n-1$ прямым, то геометрическое место последней вершины тоже будет являться прямой линией. Для доказательства достаточно спроектировать соответствующий чертёж с плоскости π на новую плоскость π' так, чтобы прямая l явилась выделенной прямой плоскости π, и затем использовать результат задачи 48б) из § 1 гл. I второй части книги (сравните, например, с решением задачи 118а)). После этого решение настоящей задачи проводится совершенно аналогично решению задачи 48в) из § 1 гл. I второй части.

129. а) Пусть P, Q и R — точки пересечения прямых AB_1 и A_1B, BC_1 и B_1C, CA_1 и C_1A и O — точка пересечения прямых l и l_1. Спроектируем плоскость π черт. 33, *а* на новую плоскость π' так, чтобы прямая PQ была выделенной прямой плоскости π. При этом черт. 33, *а* перейдёт в черт. 291, где



Черт. 291.

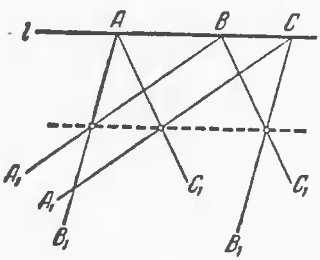
$A'B'_1 \parallel A'_1B'$ и $B'C'_1 \parallel B'_1C'$. Из параллельности прямых $A'B'_1$ и A'_1B' следует, что $\frac{O'A'}{O'B'} = \frac{O'B'_1}{O'A'_1}$, а из параллельности прямых $B'C'_1$ и B'_1C', что $\frac{O'B'}{O'C'} = \frac{O'C'_1}{O'B'_1}$. Перемножая полученные пропорции, получим, что $\frac{O'A'}{O'C'} = \frac{O'C'_1}{O'A'_1}$, откуда следует, что прямые $A'C'_1$ и A'_1C' параллельны, т. е. что точка R также лежит на выделенной прямой PQ плоскости π, что и требовалось доказать.

б) Нам надо доказать, что прямая QQ_1 проходит через точку пересечения PP_1 и RR_1 (см. черт. 33, *б* в тексте), т. е. что три точки — точка пересечения OP_1 и O_1R_1 (точка Q), точка пересечения OR и O_1P (точка Q_1) и точка пересечения PP_1 и RR_1 — лежат на одной прямой. Но так как точки O, P и R_1 лежат на одной прямой и точки O_1, R и P_1 лежат на одной прямой, то это есть теорема задачи 129а), от которой, следовательно, теорема задачи 129б) отличается только обозначениями.

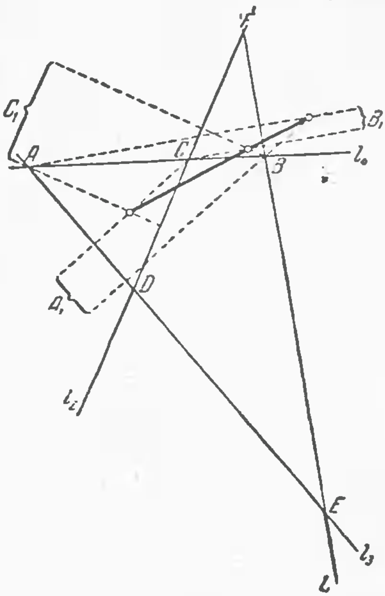
130. а) Пусть A, B, C — три точки на прямой l; через эти точки проведены прямые $AC_1 \parallel BC_1$, $AB_1 \parallel CB_1$ и $BA_1 \parallel CA_1$. В таком случае точки пересечения прямых AB_1 и BA_1, AC_1 и CA_1, BC_1 и CB_1 лежат на одной прямой (черт. 292).

б) Пусть l_1, l_2, l_3 и l_4 — четыре рассматриваемые прямые; точки пересечения этих прямых обозначим буквами A, B, C, D, E и F, как указано на черт. 293. Точки пересечения высот трёх треугольников ABE, ACD и BCF — это точки пересечения прямых $AB_1 \perp l_1$ и $BA_1 \perp l_3$, $AC_1 \perp l_2$ и $CA_1 \perp l_3$, $BC_1 \perp l_2$ и $CB_1 \perp l_1$; в силу предположения задачи а) они лежат на одной прямой. Точно так же доказывается, что любые три из четырёх точек пересечения высот четырёх треугольников лежат на одной прямой. Отсюда следует, что все четыре точки лежат на одной прямой.

131. Обозначим точки пересечения l и l_1, m и m_1, n и n_1 через A, B и C. При проектировании четырёхугольники $APBP_1$, $BQCQ_1$ и $CRAR_1$ перейдут в параллелограммы, диагоналями которых служат стороны треугольника ABC, а сторонами — прямые $l \parallel m \parallel n$ и $l_1 \parallel m_1 \parallel n_1$. Из теоремы задачи 129б) следует, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке, т. е. предложение задачи 114. Обратно, из предложения задачи 114 можно вывести теорему задачи 129б).



Черт. 292.

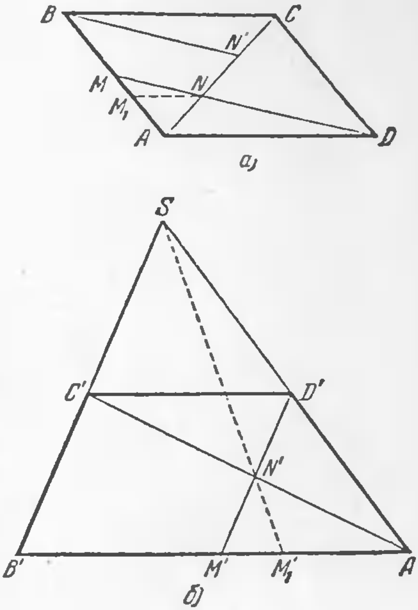


Черт. 293.

132. а) Проведём через вершину B параллелограмма прямую $BN' \parallel MD$ (N' — точка диагонали AC; см. черт. 294, a).

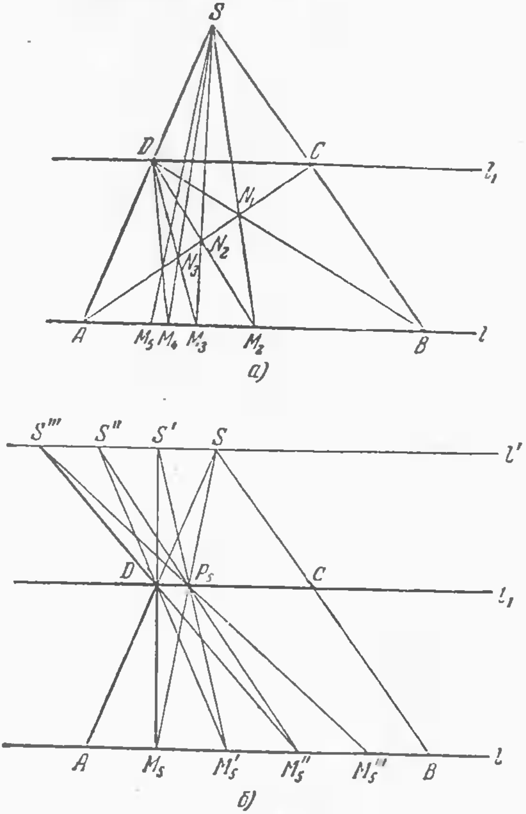
Так как $NM \parallel N'B$, то $\frac{AN'}{AN} = \frac{AB}{AM} = n$. Далее из равенства треугольников ADN и CBN' вытекает, что $AN = CN'$. Отсюда $\frac{AC}{AN} = \frac{AN' + N'C}{AN} = n + 1$, что и требовалось доказать.

Если черт. 294, *а* проектируется на другую плоскость так, что прямая AB параллельна выделенной прямой проектируемой плоскости, то отношение отрезков прямой AB сохраняется (см. выше, стр. 50). Однако отношение отрезков диагонали AC уже не сохраняется при этом проектировании; поэтому, для того чтобы выяснить, в какую теорему переходит доказанное предложение, его необходимо переформулировать так, чтобы в нём не участвовало отношение отрезков диагонали AC, а только отношение отрезков стороны AB. Проще всего это сделать следующим образом. Проведём через точку N прямую $NM_1 \parallel DA$ (M_1 — точка стороны AB); из доказанного выше вытекает, что если $AM = \frac{1}{n} AB$, то $AM_1 = \frac{1}{n+1} AB$.



Черт. 294.

Теперь уже ясно, что при рассматриваемом проектировании мы придём к следующему предложению: если точка M' делит основание $A'B'$ трапеции $A'B'C'D'$ в отношении $\frac{A'M'}{A'B'} = \frac{1}{n}$, то прямая SN', соединяющая точку S пересечения боковых сторон трапеции с точкой N' пересечения $D'M'$ с диагональю $A'C'$, отсекает от $A'B'$ отрезок $A'M'_1 = \frac{1}{n+1} A'B'$ (черт. 294, *б*). [Параллелограмм $ABCD$ переходит при проектировании в трапецию $A'B'C'D'$, так как прямые AB и CD, параллельные выделенной прямой плоскости, остаются параллельными. Параллельные прямые AD, BC и M_1N пере-



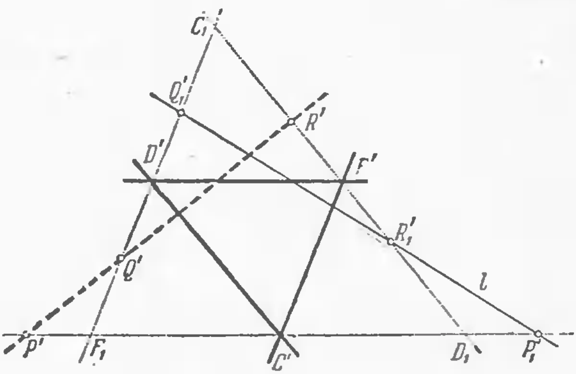
Черт. 295.

ходят в прямые $A'D'$, $B'C'$ и $M_1'N'$, пересекающиеся в одной точке S. Отношение отрезков прямой AB, параллельной выделенной прямой плоскости, при проектировании сохраняется.]

б) Соединим произвольную точку S плоскости с точками A и B; пусть D и C — точки пересечения SA и SB с прямой l_1. Если N_1 — точка пересечения DB и AC, то прямая

SN_1 пересекает AB в такой точке M_2, что $AM_2 = \frac{1}{2} AB$ (см. решение задачи 108). Далее, если DM_2 пересекает AC в точке N_2, то SN_2 пересекает AB в точке M_3 такой, что $AM_3 = \frac{1}{3} AB$; если DM_3 пересекает AC в точке N_3, то SN_3 пересекает AB в точке M_4 такой, что $AM_4 = \frac{1}{4} AB$; если DM_4 пересекает AC в точке N_4, то SN_4 пересекает AB в точке M_5, такой, что $AM_5 = \frac{1}{5} AB$, и т. д. (черт. 295, *а*; см. решение задачи а)).

[После того как найдена точка M_n, такая, что $AM_n = \frac{1}{n} AB$, уже легко найти остальные точки, делящие отрезок AB на n равных частей. Действительно, проведём через точку S прямую l', параллельную l и l_1 (см. задачу 109б)). Теперь, если SM_n пересекает DC в точке P_n, M_nD пересекает l' в точке S', а $S'P_n$ пересекает AB в точке M'_n, то $AM_n = M_nM'_n$ и, следовательно, $AM'_n = \frac{2}{n} AB$ и т. д.; см. черт. 295, *б*.]



Черт. 296.

133. Спроектируем черт. 14 (стр. 24) на новую плоскость π' так, чтобы прямая ABE явилась выделенной прямой первоначальной плоскости. При этом мы придём к черт. 296. Диагонали CA, DB и FE полного четырёхсторонника перейдут в прямые $C'A' \parallel F'D'$, $D'B' \parallel F'C'$ и $F'E' \parallel D'C'$; точки пересечения этих прямых мы обозначим буквами C_1, D_1 и F_1 (см. черт. 296). Очевидно, что C', D' и F' — середины сторон треугольника $C_1D_1F_1$.

Выясним теперь, в какие точки перейдут середины P, Q и R диагоналей CA, DB и FE полного четырёхсторонника. Середина P отрезка CA есть такая точка, что $\frac{AP}{CP} = -1$, или, если обозначить через P_1 «бесконечно удалённую точку» прямой CA, $\frac{AP}{CP} : \frac{AP_1}{CP_1} = -1$. В силу свойства В центрального проектирования должно быть

$$\frac{A'P'}{C'P'} : \frac{A'P_1'}{C'P_1'} = -1,$$

где P_1' есть образ «бесконечно удалённой точки» P_1, т. е. точка пересечения $C'A'$ с выделенной прямой l плоскости π'. Это равенство можно переписать в виде

$$\frac{C'P_1'}{C'P'} : \frac{A'P_1'}{A'P'} = -1, \quad \text{или} \quad \frac{C'P_1'}{C'P'} = -1,$$

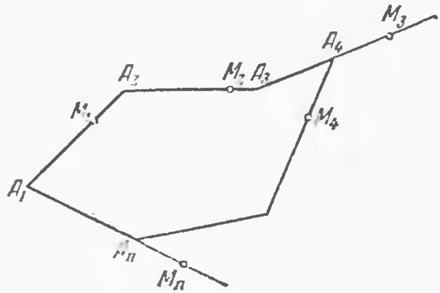
так как A' есть «бесконечно удалённая точка» и $\frac{A'P_1'}{A'P'} = 1$; отсюда следует, что C' есть середина отрезка $P'P_1'$, т. е. P' — точка, симметричная точке P_1' пересечения D_1F_1 и l относительно середины C' стороны D_1F_1 треугольника $C_1D_1F_1$.

Точно так же показывается, что середины Q и R диагоналей DB и FE полного четырёхсторонника переходят в точки Q' и R', симметричные точкам Q_1' и R_1' пересечения выделенной прямой l со сторонами C_1F_1 и C_1D_1 треугольника $C_1D_1F_1$ относительно середин D' и F' этих сторон. Таким образом, теорема о полном четырёхстороннике (точки P, Q и R лежат на одной прямой) переходит в теорему: *точки, симметричные точкам P_1', Q_1' и R_1' пересечения сторон треугольника $C_1D_1F_1$ с прямой l относительно середин соответствующих сторон треугольника, лежат на одной прямой*. Эта теорема составляет частный случай предложения задачи 112а) из § 1 (стр. 23); из неё можно в свою очередь вывести теорему о полном четырёхстороннике.

134. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — произвольный многоугольник, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — точки, расположенные на его сторонах или их продолжениях (черт. 297). Докажем, что выражение

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

сохраняется при центральном проектировании. Действительно, если $A_1', A_2', \ldots, A_n'; M_1', M_2', \ldots, M_n'$ — точки, в которые



Черт. 297.

переходят при центральном проектировании с центром O точки $A_1, A_2, \ldots, A_n; M_1, M_2, \ldots, M_n$, то согласно формуле (*) (стр. 49)

$$\frac{A_1'M_1'}{A_2'M_1'}=\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{OA_1'}{OA_1}:\frac{OA_2'}{OA_2},$$

$$\frac{A_2'M_2'}{A_3'M_2'}=\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\frac{OA_2'}{OA_2}:\frac{OA_3'}{OA_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_n'M_n'}{A_1'M_n'}=\frac{A_nM_n}{A_1M_n}\cdot\frac{OA_n'}{OA_n}:\frac{OA_1'}{OA_1}.$$

Перемножая все эти выражения, получим:

$$\frac{A_1'M_1'}{A_2'M_1'}\cdot\frac{A_2'M_2'}{A_3'M_2'}\cdots\frac{A_n'M_n'}{A_1'M_n'}=\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n},$$

что и требовалось доказать.

Это предложение можно рассматривать как обобщение свойства В центрального проектирования (мы придём к свойству В, если будем считать, что многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$

вырождается в дважды взятый отрезок AB). Из него непосредственно следуют теоремы Менелая и Чева.

а) Спроектируем плоскость π треугольника ABC на новую плоскость π' так, чтобы прямая MN была выделенной. Если точки M, N и P лежали на одной прямой l, то она перейдёт в «бесконечно удалённую» прямую и точки M', N' и P', в которые перейдут точки M, N, P, будут «бесконечно удалёнными точками» прямых $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$; следовательно, $\frac{A'M'}{B'M'}=1$, $\frac{B'N'}{C'N'}=1$, $\frac{C'P'}{A'P'}=1$ и $\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=1$. Но в таком случае согласно доказанному выше и произведение $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$ должно равняться единице.

Пусть теперь обратно $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$. Так как точки M и N при нашем проектировании перейдут в «бесконечно удалённые точки» M' и N', то $\frac{A'M'}{B'M'}=1$ и $\frac{B'N'}{C'N'}=1$. А так как по доказанному должно быть $\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=1$, то $\frac{C'P'}{A'P'}=1$, т. е. P' — «бесконечно удалённая точка» прямой $A'C'$. Но это означает, что и точка P лежит на выделенной прямой плоскости π, т. е. точки M, N и P лежат на одной прямой.

Примечание. Совершенно так же можно доказать и более общую теорему: если M_1, M_2, ..., M_n — точки пересечения сторон n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ с прямой линией l, то

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}=1.$$

Однако при $n>3$ из равенства

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}=1$$

уже не следует, что и, обратно, точки M_1, M_2, ..., M_n все лежат на одной прямой.

б) Спроектируем плоскость π треугольника ABC на новую плоскость π' так, чтобы прямая MN была выделенной прямой плоскости π. Если прямые AN, BP, CM пересекались в одной точке O или были параллельны, то черт. 44 перейдёт в черт. 298, где $A'N' \parallel B'C'$, $C'M' \parallel B'A'$; поэтому точка P' будет являться серединой стороны $A'C'$ (как точка пересечения диагоналей параллелограмма $A'B'C'O'$). Таким образом, мы будем иметь $\frac{A'M'}{B'M'}=1$, $\frac{B'N'}{C'N'}=1$ (ибо M' и N' — «бесконечно удалённые точки») и $\frac{C'P'}{A'P'}=-1$; следовательно,

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=-1.$$

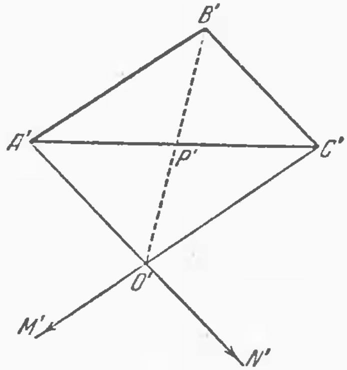
А в таком случае в силу доказанного должно быть также

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1.$$

Обратно, пусть

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1.$$

Так как точки M и N при нашем проектировании перейдут



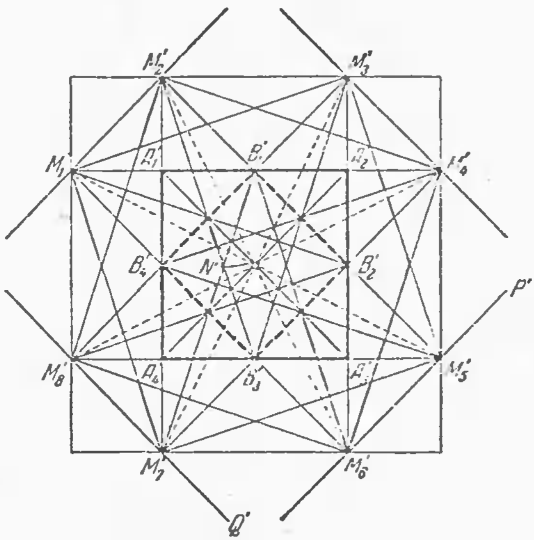
Черт. 298.

в «бесконечно удалённые» точки M' и N', то $\frac{A'M'}{B'M'}=1$ и $\frac{B'N'}{C'N'}=1$. А так как в силу доказанного выше

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=-1,$$

то $\frac{C'P'}{A'P'}=-1$, т. е. P' есть середина отрезка $A'C'$. Но в таком случае прямые $A'N' \parallel B'C'$, $C'M' \parallel B'A'$ и $B'P'$ пересекаются в одной точке O' (см. черт. 298); следовательно, прямые AN, CM и BP пересекаются в одной точке или параллельны между собой.

135. Спроектируем четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$ в квадрат $A'_1A'_2A'_3A'_4$ (это возможно в силу теоремы 1, стр. 60). При этом точки P и Q перейдут в «бесконечно удалённые точки», отвечающие направлениям сторон квадрата; прямые PN и QN перейдут в средние линии квадрата, точки B_1, B_2, B_3 и B_4 перейдут в середины B'_1, B'_2, B'_3 и B'_4 сторон квадрата; точки



Черт. 299.

$M_1, M_2, \ldots, M_8$ перейдут в точки $M'_1, M'_2, \ldots, M'_8$ (черт. 299). Утверждения задачи следуют из того, что, как нетрудно видеть:

а) точки M'_1 и M'_5; M'_2 и M'_6; M'_3 и M'_7; M'_4 и M'_8 симметричны относительно центра N' квадрата и, следовательно, прямые $M'_1M'_5$, $M'_2M'_6$, $M'_3M'_7$ и $M'_4M'_8$ проходят через N';

б) прямые $M'_2M'_3$ и $M'_6M'_7$ параллельны $A'_1A'_2$; прямые $M'_1M'_8$ и $M'_4M'_5$ параллельны $A'_2A'_3$;

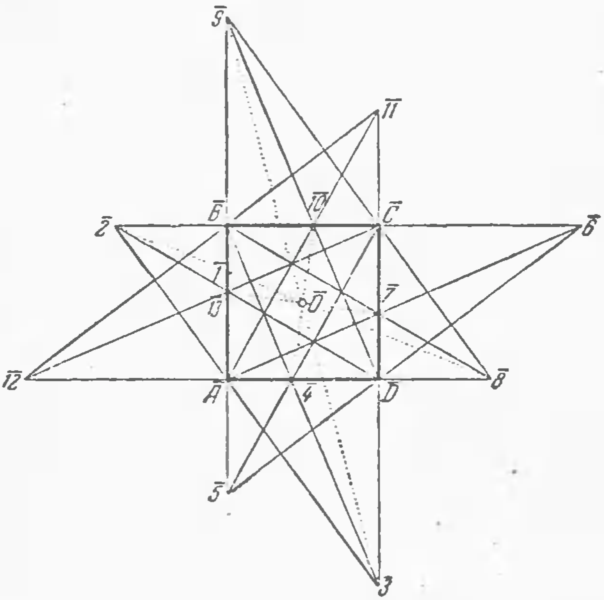
в) прямые $M'_1M'_2$, $M'_3M'_8$, $M'_4M'_7$ и $M'_5M'_6$ параллельны диагонали $A'_2A'_4$ квадрата; прямые $M'_3M'_4$, $M'_2M'_5$, $M'_1M'_6$ и $M'_7M'_8$ параллельны диагонали $A'_1A'_3$ квадрата;

г) $M'_1M'_3 \parallel M'_5M'_7 \parallel B'_4M'_4 \parallel B'_2M'_8$; $M'_2M'_4 \parallel M'_6M'_8 \parallel B'_4M'_5 \parallel B'_2M'_1$; $M'_8M'_5 \parallel M'_1M'_7 \parallel B'_1M'_6 \parallel B'_3M'_2$ и $M'_4M'_6 \parallel M'_2M'_8 \parallel B'_1M'_7 \parallel B'_3M'_3$.

136. Спроектируем четырёхугольник $ABCD$ в квадрат $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$; пусть при этом точки $1, 2, 3$ и т. д. перешли в точки $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots$ и т. д. (черт. 300). Положение этих точек на сторонах квадрата $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ определим отношениями

$$\bar{\lambda}_1=\frac{\overline{A1}}{\overline{B1}},\quad \bar{\lambda}_2=\frac{\overline{B2}}{\overline{C2}},\quad \bar{\lambda}_3=\frac{\overline{C3}}{\overline{D3}} \text{ и т. д.,}$$

которые могут быть как положительными, так и отрицательными.



Черт. 300.

Из подобия треугольников $\bar{A}\bar{D}\bar{1}$ и $\bar{B}\bar{2}\bar{1}$ черт. 300 следует

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{B2}}=\frac{\overline{A1}}{\overline{B1}},$$

откуда

$$\frac{\overline{C2}}{\overline{B2}}=\frac{\overline{CB}+\overline{B2}}{\overline{B2}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{B2}}+1=\frac{\overline{DA}}{\overline{B2}}+1=\frac{\overline{A1}}{\overline{B1}}+1.$$

Так как $\bar{\lambda}_2 = \dfrac{\overline{B2}}{\overline{C2}}$ положительно, а $\bar{\lambda}_1 = \dfrac{\overline{A1}}{\overline{B1}}$ отрицательно, то получаем отсюда

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_2} = -\bar{\lambda}_1 + 1,$$

или

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{1-\bar{\lambda}_1}. \qquad (*)$$

Нетрудно проверить, что формула (*) остаётся справедливой и в том случае, если точка $\bar{1}$ лежит на продолжении стороны $\overline{AB}$ за точку $\bar{A}$ или за точку $\bar{B}$.

Теперь с помощью формулы (*) последовательно находим

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{1-\bar{\lambda}_1}, \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{1}{1-\bar{\lambda}_2} = 1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1}, \quad \bar{\lambda}_4 = \frac{1}{1-\bar{\lambda}_3} = \bar{\lambda}_1,$$

$$\bar{\lambda}_5 = \frac{1}{1-\bar{\lambda}_4} = \bar{\lambda}_2, \quad \bar{\lambda}_6 = \frac{1}{1-\bar{\lambda}_5} = \bar{\lambda}_3 \text{ и т. д.},$$

т. е.

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_4 = \bar{\lambda}_7 = \bar{\lambda}_{10} = \bar{\lambda}_{13} = \bar{\lambda}_{16} = \ldots,$$

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_5 = \bar{\lambda}_8 = \bar{\lambda}_{11} = \bar{\lambda}_{14} = \bar{\lambda}_{17} = \ldots = \frac{1}{1-\bar{\lambda}_1},$$

$$\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_6 = \bar{\lambda}_9 = \bar{\lambda}_{12} = \bar{\lambda}_{15} = \bar{\lambda}_{18} = \ldots = 1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1}.$$

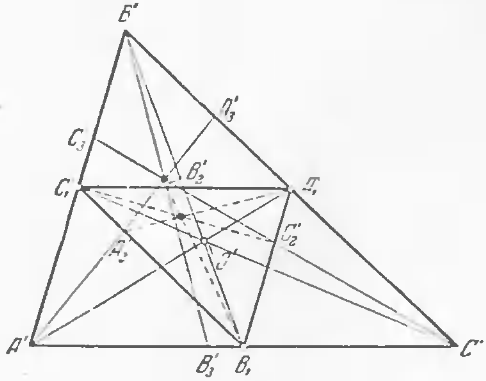
Отсюда следуют все утверждения задачи.

а) $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_{13}$ означает, что точка $\overline{13}$ совпадает с точкой $\bar{1}$. В силу свойства центрального проектирования отсюда следует, что точка 13 совпадает с точкой 1.

б) $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_7$, $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_8$, $\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_9$ и т. д. означает, что точки $\bar{1}$ и $\bar{7}$; $\bar{2}$ и $\bar{8}$; $\bar{3}$ и $\bar{9}$ и т. д. симметричны относительно центра $\bar{O}$ квадрата, т. е. прямые $\bar{1}$—$\bar{7}$, $\bar{2}$—$\bar{8}$, $\bar{3}$—$\bar{9}$ и т. д. проходят через $\bar{O}$. В силу свойств центрального проектирования отсюда следует, что прямые 1—7, 2—8, 3—9 и т. д. проходят через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

в) Прямые $\bar{1}$—$\bar{2}$ и $\bar{7}$—$\bar{8}$; $\bar{2}$—$\bar{3}$ и $\bar{8}$—$\bar{9}$; $\bar{3}$—$\bar{4}$ и $\bar{9}$—$\overline{10}$ и т. д. симметричны относительно центра $\bar{O}$ квадрата (см. задачу б)) и, следовательно, параллельны. В силу свойств центрального проектирования отсюда следует, что прямые $1-2$ и $7-8$; $2-3$ и $8-9$; $3-4$ и $9-10$ и т. д. пересекаются на прямой, соединяющей точки S и S_1 пересечения противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$ (при нашем проектировании эта прямая переходит в бесконечно удалённую прямую).

137. Спроектируем центрально четырёхугольник $ABCO$ в новый четырёхугольник $A'B'C'O'$ так, чтобы точка O' являлась точкой пересечения медиан треугольника $A'B'C'$. Это



Черт. 301.

можно сделать в силу теоремы 1 (стр. 60). В таком случае стороны треугольника $A_1'B_1'C_1'$ будут параллельны сторонам треугольника $A'B'C'$ (черт. 301), и следовательно, если A_3', B_3', C_3' есть точки пересечения прямых $A'A_2'$, $B'B_2'$, $C'C_2'$ с противоположными сторонами треугольника $A'B'C'$, то

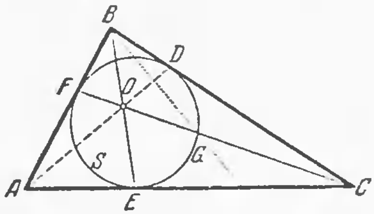
$$\frac{A'C_3'}{B'C_3'}=\frac{B_1'C_2'}{A_1'C_2'},\quad \frac{B'A_3'}{C'A_3'}=\frac{C_1'A_2'}{B_1'A_2'},\quad \frac{C'B_3'}{A'B_3'}=\frac{A_1'B_2'}{C_1'B_2'}.$$

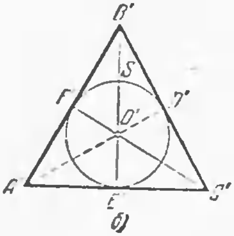
Таким образом, если $\frac{A_1'C_2'}{B_1'C_2'}\cdot\frac{B_1'A_2'}{C_1'A_2'}\cdot\frac{C_1'B_2'}{A_1'B_2'}=\pm 1$ (в силу теорем Чева и Менелая — см. задачу 134 — это означает, что прямые $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$ пересекаются в одной точке или что точки A_2', B_2', C_2' лежат на одной прямой), то и

$\dfrac{A'C'_3}{B'C'_3}\cdot\dfrac{B'A'_3}{C'A'_3}\cdot\dfrac{C'B'_3}{A'B'_3}=\pm 1$. Но в силу тех же теорем Чева и Менелая это и означает, что прямые $A'A'_3$, $B'B'_3$ и $C'C'_3$ пересекаются в одной точке или, соответственно, что точки A'_3, B'_3 и C'_3 лежат на одной прямой.

§ 3

138. а) Первое решение (опирающееся на теорему 1). Пусть D, E, F — точки касания вписанной окружности S со сторонами треугольника ABC (черт. 302, *а*). Точка O пересечения прямых BE и CF лежит внутри окружности S: так как прямая BG, где G — вторая точка пересечения CF с окружностью S, пересекает отрезок EC стороны AC, то прямая BE пересекает хорду FG окружности S. Спроектируем теперь наш чертёж на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а точка O — в центр O' окружности S'; при этом черт. 302, *а* перейдёт в черт. 302, *б*. Легко видеть, что прямые $B'E'$ и $C'F'$ являются одновременно биссектрисами и высотами треугольника $A'B'C'$; следовательно, $A'B'=B'C'$ и $C'A'=B'C'$. Таким образом, треугольник $A'B'C'$ — равносторонний и прямая $A'D'$ также проходит через точку O'. Из того, что прямые $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ пересекаются в одной точке, следует, что и прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

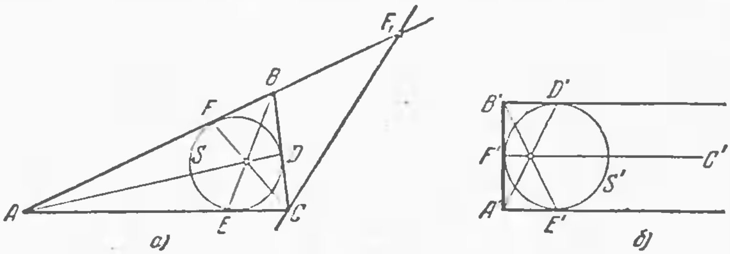




Черт. 302.

Второе решение (опирающееся на теорему 1'). Сохраняя обозначения предыдущего решения, найдём на продолжении стороны AB точку F_1, такую, что $\dfrac{F_1A}{F_1B}=\dfrac{FA}{BF}$ (черт. 303, *а*).

Прямая CF_1 лежит целиком вне треугольника ABC и, следовательно, не имеет общих точек с вписанной окружностью S. Спроектируем наш чертёж на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а прямая CF_1 перешла в бесконечно удалённую прямую плоскости π'; при этом черт. 303, *а* перейдёт в черт. 303, *б*, где $A'E' \parallel B'D' \parallel F'C'$



Черт. 303.

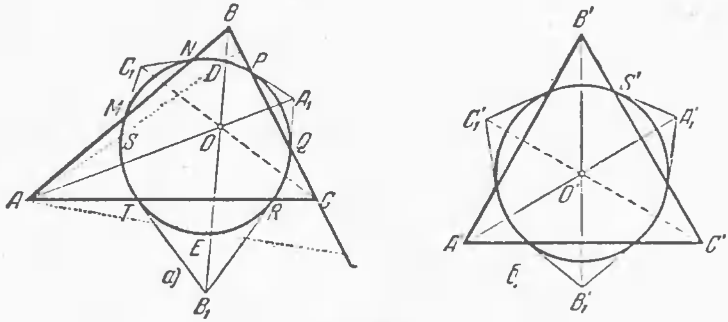
и F' — середина отрезка $A'B'$ (ибо в силу свойства В центрального проектирования

$$\frac{F_1'A'}{F_1'B'} : \frac{F'A'}{F'B'} = -1, \quad \frac{F'A'}{B'F'} = \frac{F_1'A'}{F_1'B'},$$

где F_1' — «бесконечно удалённая точка» прямой $A'B'$, т. е. $\left.\frac{F'A'}{B'F'} = 1\right)$. Из того, что $A'F' = F'B'$, следует, что $\angle D'B'F' = \angle F'A'E'$ (эти углы симметричны относительно прямой $F'O'$, где O' — центр S'), а так как $\angle D'B'F' + \angle E'A'F' = 180°$, то эти углы — прямые. Поэтому прямая $F'C'$ есть ось симметрии полученной фигуры, на которой, очевидно, лежит точка пересечения прямых $A'D'$ и $B'E'$. Из того, что прямые $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ пересекаются в одной точке, следует, что и AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

б) Эта задача является обобщением задачи а) (в которую она переходит, когда S есть вписанная окружность треугольника ABC) и может быть решена аналогично задаче а). Отметим, прежде всего, что точка O пересечения AA_1 и BB_1 лежит внутри окружности S: действительно, прямые AA_1 и BB_1 пересекают хорды PQ и TR окружности S (черт. 304, *а*); так как AD и AE, где D и E — точки пересечения BB_1 с S, пересекают BC вне PQ по разные стороны от этого отрезка, то AA_1 пересекает хорду DE.

Теперь спроектируем черт. 304, *а* на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а точка O — в центр O' окружности S'; при этом черт. 304, *а* перейдёт в черт. 304, *б*. Из того, что $A'A'_1$ и $B'B'_1$ проходят через O', следует, что $A'A'_1 \perp B'C'$ и $B'B'_1 \perp A'C'$. Таким образом, $A'A'_1$ и $B'B'_1$ — высоты треугольника $A'B'C'$ и O' — точка пересечения высот; следовательно, и прямая $O'C'$ — высота этого треугольника. Но очевидно, что перпендикуляр, опущенный из



Черт. 304.

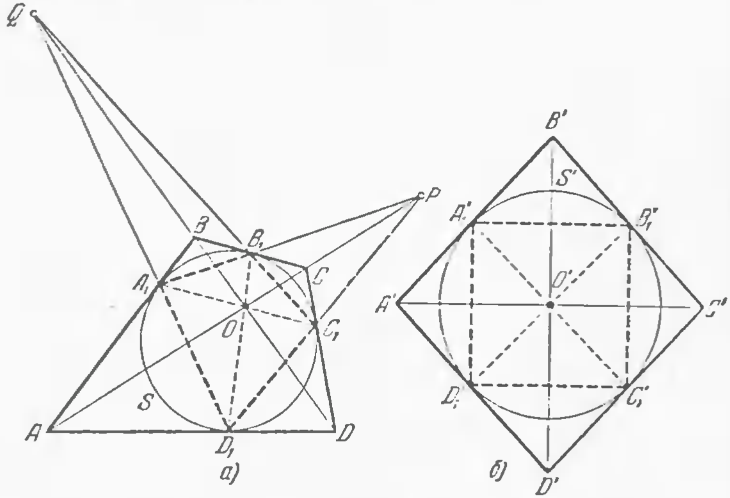
центра O' окружности S' на сторону $A'B'$ треугольника $A'B'C'$, проходит через точку C'_1.

Поэтому прямые $A'A'_1$, $B'B'_1$ и $C'C'_1$ пересекаются в одной точке O', откуда следует, что и прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O.

139. Спроектируем черт. 305, *а* на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S' и точка O пересечения диагоналей четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ — в центр O' окружности S'. При этом черт. 305, *а* перейдёт в черт. 305, *б*, где $A'B' \parallel C'D' \perp A'_1C'_1$ и $B'C' \parallel A'D' \perp B'_1D'_1$; следовательно, $A'B'C'D'$ — параллелограмм, а так как в него вписана окружность, то это ромб. Далее:

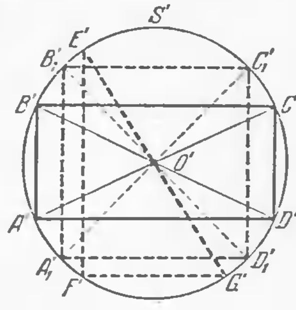
а) Точка пересечения диагоналей ромба $A'B'C'D'$, как известно, совпадает с центром O' вписанной окружности; таким образом, точки пересечения диагоналей четырёхугольников $A'B'C'D'$ и $A'_1B'_1C'_1D'_1$ совпадают, а следовательно, и точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают.

б) Из соображений симметрии очевидно, что $A'_1B'_1 \parallel D'_1C'_1 \parallel A'C'$ и $B'_1C'_1 \parallel A'_1D'_1 \parallel B'D'$; отсюда следует, что AC проходит через точку P и BD проходит через точку Q.



Черт. 305.

140. Спроектируем чертёж задачи на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в новую окружность S', а точка O — в центр O' окружности S'. При этом четырёхугольник $ABCD$ перейдёт во вписанный в окружность S' прямоугольник $A'B'C'D'$ (ибо диагонали его пересекаются в центре окружности) и, следовательно, точки P и Q перейдут в «бесконечно удалённые точки» P' и Q' плоскости π', соответствующие направлениям сторон прямоугольника (черт. 306).



Черт. 306.

а) Если стороны $E'F'$ и $F'G'$ вписанного в окружность S' треугольника $E'F'G'$ проходят через «бесконечно удалённые точки» P' и Q', т. е. $E'F' \parallel A'B'$ и $F'G' \parallel B'C'$, то сторона $E'G'$ проходит через центр O' окружности (ибо вписанный прямой угол опирается на диаметр); если

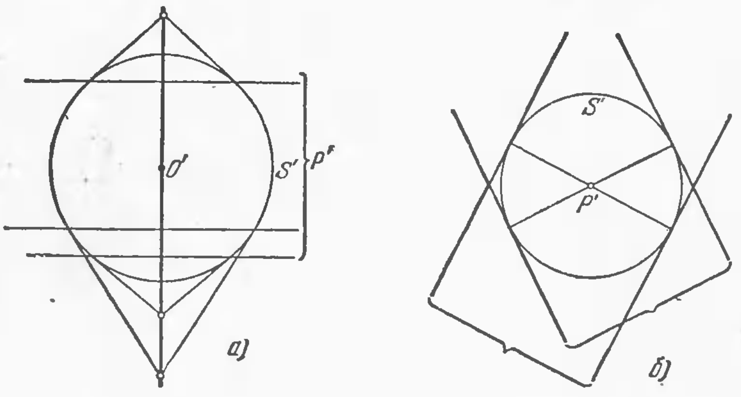
$E'G'$ проходит через центр O' и $E'F'$ «проходит через P'», т. е. $E'F' \parallel A'B'$, то $F'G' \parallel B'C'$, т. е. $F'G'$ «проходит через Q'» (ибо вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой). Отсюда следует утверждение задачи а).

б) Если стороны $A_1'B_1'$ и $D_1'C_1'$ вписанного четырёхугольника $A_1'B_1'C_1'D_1'$ «проходят через P'» и $B_1'C_1'$ «проходит через Q'» (т. е. $A_1'B_1' \parallel D_1'C_1' \parallel A'B'$ и $B_1'C_1' \parallel B'C'$), то $A_1'D_1' \parallel B'C' \parallel A'D'$ и $A_1'C_1'$ и $B_1'D_1'$ пересекаются в центре O' окружности S'. Отсюда следует утверждение задачи б).

в) Если диагонали $A_1'C_1'$ и $B_1'D_1'$ вписанного четырёхугольника $A_1'B_1'C_1'D_1'$ пересекаются в центре O' окружности S' и сторона $A_1'B_1'$ «проходит через P'», т. е. $A_1'B_1' \parallel A'B'$, то $D_1'C_1' \parallel A'B'$ и $B_1'C_1' \parallel A_1'D_1' \parallel B'C'$. Отсюда следует утверждение задачи в).

141. Рассмотрим отдельно два возможных случая.

1°. Точка P расположена вне S. Спроектируем чертёж задачи на другую плоскость π' так, чтобы окружность S



Черт. 307.

перешла в новую окружность S', а точка P — в «бесконечно удалённую точку» P' плоскости π'. Искомое геометрическое место перейдёт при этом в прямую линию — диаметр окружности S', перпендикулярный к направлению, определяемому «бесконечно удалённой точкой» P' (черт. 307, a). Отсюда следует, что и искомое геометрическое место — прямая линия [1]).

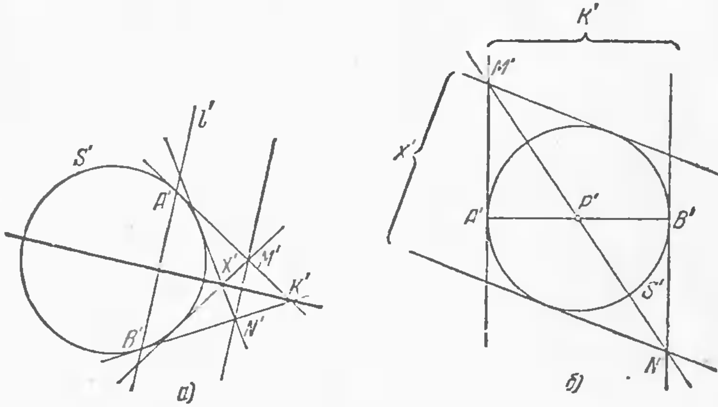
[1]) Точнее, часть прямой линии, расположенная вне окружности S,

2°. Точка P расположена внутри S. Спроектируем чертёж задачи на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в новую окружность S', а точка P — в центр P' окружности S'. Искомое геометрическое место перейдёт при этом, очевидно, в «бесконечно удалённую прямую» плоскости π' (черт. 307, *б*), откуда следует, что оно является прямой линией.

Отметим, что и в том случае, когда точка P принадлежит окружности S, рассматриваемое геометрическое место будет прямой линией, а именно касательной к окружности S в точке P[1]).

142. а) Разберём отдельно два возможных случая.

1°. Точка P расположена вне S (см. черт. 58, *а* в тексте). Спроектируем чертёж задачи на другую плоскость π



Черт. 308.

так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а точка P — в «бесконечно удалённую точку» P' плоскости π'. При этом прямые AB и MN перейдут в параллельные прямые $A'B'$ и $M'N'$ (черт. 308, *а*). Из соображений симметрии следует, что точки K' и X' черт. 308, *а* лежат на диаметре окружности S', перпендикулярном к прямой l', в которую перешла l. Таким образом, геометрическим местом точек X' служит прямая, проходящая через точку K' и перпендикулярная к l'. Возвращаясь к исход-

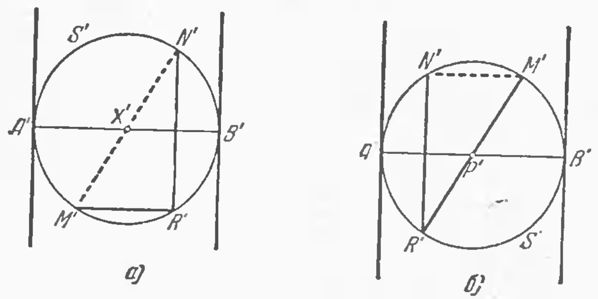
[1]) Рассматриваемое геометрическое место совпадает с полярой точки P относительно окружности S (см. § 4, стр. 84).

ному чертежу, получим, что геометрическим местом точек X является прямая линия, проходящая через K.

2°. Точка P расположена внутри окружности S. Спроектируем чертёж задачи на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а точка P — в центр P' этой окружности (черт. 308, *б*). Прямые $A'B'$ и $M'N'$ черт. 308, *б* будут диаметрами окружности S'. Следовательно, касательные $A'K'$ и $B'K'$ окружности S' будут параллельны; параллельными будут и касательные к S', проведённые из точек пересечения $A'K'$ и $B'K'$ с $M'N'$. Таким образом, геометрическим местом точек X' в этом случае является «бесконечно удалённая прямая», на которой лежит также и точка K'. Переходя обратно к исходному чертежу, получим требуемый результат.

Очевидно, что случай, когда точка P лежит на окружности S, исключён условиями задачи (если P совпадает с A, то и M совпадает с A и через M проходит единственная касательная KA окружности).

б) В случае, когда точка P лежит на окружности S, предложение задачи является очевидным (если P совпадает с A, то и M совпадает с A и X совпадает с A). Таким образом, нам остаётся рассмотреть следующие два случая.



Черт. 309.

1°. Точка P лежит вне окружности S. Спроектируем чертёж задачи на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а прямая PK — в «бесконечно удалённую прямую» плоскости π' (черт. 309, *а*). Прямая AB перейдёт при этом в диаметр $A'B'$ окружности S, а прямые AK и BK — в касательные, проведённые к S в концах этого диаметра. Поэтому прямые $R'M'$ и $R'N'$ на черт. 309, *а* будут взаимно перпендикулярны, а прямая $M'N'$ явится диаметром окружности S'. Таким образом, независимо от выбора точки R' прямая $M'N'$ пересекает $A'B'$ в центре X' окружности S'. Возвращаясь к исходному чертежу, мы получаем требуемый результат.

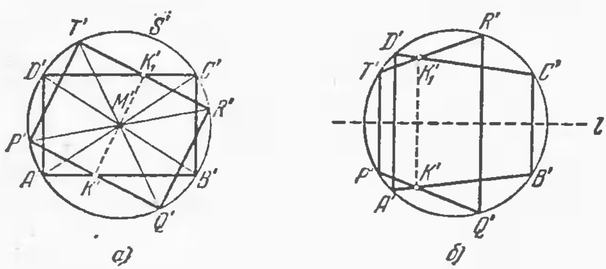
2°. Точка P лежит внутри окружности S (см. черт. 58, *б* в тексте). Спроектируем чертёж задачи на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в новую окружность S', а точка P — в её центр P' (черт. 309, *б*). При этом AB перейдёт в диаметр $A'B'$ окружности S', а точка K — в «бесконечно удалённую точку» K' диаметра, перпендикулярного к $A'B'$. Так как $R'N' \perp A'B'$ и $M'N' \perp R'N'$, то $M'N' \parallel A'B'$, т. е. независимо от выбора точки R' прямая $M'N'$ пересекает $A'B'$ в «бесконечно удалённой точке» X' этой прямой. Отсюда сразу следует желаемый результат.

143. а) Пусть $ABCD$ — искомый четырёхугольник, точка пересечения диагоналей которого совпадает с данной точкой M, а стороны AB и CD проходят через данные точки K и L. Спроектируем чертёж задачи на новую плоскость π' так, чтобы описанная окружность S перешла в окружность S', а точка M — в центр M' этой окружности. Четырёхугольник $ABCD$ перейдёт при этом в прямоугольник $A'B'C'D'$, так как точка пересечения диагоналей $A'B'C'D'$ совпадает с центром описанной окружности.

Если сторона $P'Q'$ вписанного в окружность S' четырёхугольника $P'Q'R'T'$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с центром M' (т. е. прямоугольника), проходит через точку K', то сторона $R'T'$ проходит через точку K'_1, симметричную K' относительно точки M' (черт. 310, *а*). Таким образом, стороны $R'T'$ всех вписанных в S' четырёхугольников, точка пересечения диагоналей которых совпадает с M', а сторона $P'Q'$ проходит через K', проходят через фиксированную точку K'_1. Значит, и стороны RT всех вписанных в S четырёхугольников $PQRT$ с точкой пересечения диагоналей M, стороны PQ которых проходят через K, проходят через фиксированную точку K_1; для того чтобы определить её, достаточно построить два таких четырёхугольника. Соединив точку K_1 с L, мы получим сторону CD искомого четырёхугольника.

Если K_1 не совпадает с L, то задача имеет единственное решение, когда K_1L пересекает S, и ни одного — в противном случае. Если K_1 совпадает с L, то решение задачи будет неопределённым.

б) Пусть $ABCD$ — искомый четырёхугольник, стороны BC и DA которого пересекаются в известной точке M, а стороны AB и CD проходят через известные точки K и L. Спроектируем чертёж задачи на другую плоскость π' таким образом,



Черт. 310.

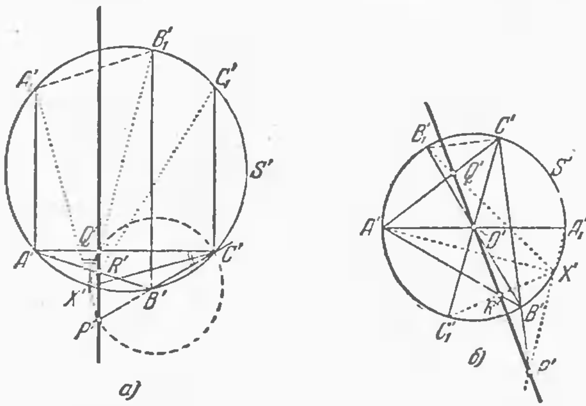
чтобы описанная окружность S перешла в окружность S', а точка M — в «бесконечно удалённую точку» плоскости π'. При этом четырёхугольник $ABCD$ перейдёт в трапецию $A'B'C'D'$ с основаниями $B'C'$ и $D'A'$ (см. черт. 310, *б*); эта трапеция будет равнобочной, так как она вписана в окружность.

Четырёхугольник $P'Q'R'T'$, вписанный в окружность S', точка пересечения сторон $Q'R'$ и $T'P'$ которого совпадает с данной «бесконечно удалённой точкой» M', представляет собой равнобочную трапецию, осью симметрии которой служит диаметр l окружности S', перпендикулярный к направлению, определяемому «бесконечно удалённой точкой» M'. Поэтому, если сторона $P'Q'$ четырёхугольника проходит через какую-либо точку K', то сторона $R'T'$ проходит через точку K'_1, симметричную K' относительно l. Отсюда следует, что и стороны RT всех вписанных в S четырёхугольников $PQRT$, стороны QR и PT которых пересекаются в M, а сторона PQ проходит через K, проходят через определённую точку K_1; для того чтобы найти её, достаточно построить два таких четырёхугольника. Соединив K_1 с L, мы найдём сторону искомого четырёхугольника.

Если K_1 не совпадает с L, то задача имеет одно или ни одного решения (в зависимости от того, пересекает или не пересекает окружность S прямая K_1L). Если K_1 совпадает с L, то решение задачи является неопределённым.

144. Задача, очевидно, не имеет смысла, если точка O лежит на окружности S. Рассмотрим теперь отдельно два случая.

1°. Точка O лежит вне окружности S (см. черт. 59 в тексте). Спроектируем черт. 59 на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S',



Черт. 311.

а точка O — в «бесконечно удалённую точку» O' плоскости π'. При этом черт. 59 перейдёт в черт. 311, *а*, где $A'A_1' \parallel B'B_1' \parallel C'C_1'$.

Докажем, что прямая $P'Q'$ параллельна прямой $A'A_1'$. Трапеция $A'B'B_1'A_1'$ равнобедренная, так как она вписана в окружность; следовательно, $A'B' = A_1'B_1'$ и $\smile A'B' = \smile A_1'B_1'$. Отсюда вытекает, что $\angle A'C'B' = \angle A_1'X'B_1'$; значит, X', C', P' и Q' лежат на одной окружности. Поэтому $\angle X'P'Q' = \angle X'C'Q' = \angle X'C'A'$. Но $\angle X'C'A' = \angle X'A_1'A'$ (как углы, опирающиеся на одну дугу); таким образом, $\angle X'P'Q' = \angle X'A_1'A'$ и, следовательно, $P'Q' \parallel A'A_1'$.

Точно так же докажем, что $Q'R' \parallel B'B_1'$. Но из того, что $P'Q' \parallel Q'R' \parallel A'A_1'$, следует, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой, «проходящей через бесконечно удалённую точку O'». Поэтому и точки P, Q и R черт. 59 лежат на одной прямой, проходящей через точку O.

2°. Точка O лежит внутри окружности S. Спроектируем соответствующий чертёж на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а точка O — в центр O' окружности S'; при этом мы придём к черт. 311, *б*. Докажем, что прямая $P'Q'$ проходит через точку O'. Для этого покажем прежде всего, что

$$\frac{S_{P'O'A_1'}}{S_{P'O'B'}}=\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B_1'}}. \qquad (*)$$

Действительно, пусть $h_{B'C'}$ — расстояние хорды $B'C'$ до центра O'; аналогично обозначим расстояния до центра и всех других хорд окружности S'. В таком случае:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_{P'O'A_1'}}{S_{P'O'B'}}&=\frac{P'A_1'\cdot h_{X'A_1'}}{P'B'\cdot h_{B'C'}},\\ \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B_1'}}&=\frac{Q'A'\cdot h_{C'A'}}{Q'B_1'\cdot h_{X'B_1'}}.\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Но высота $h_{X'A_1'}$ треугольника $P'O'A_1'$ является средней линией треугольника $X'A_1'A'$, следовательно, $h_{X'A_1'}=\frac{1}{2}X'A'$; аналогично из рассмотрения треугольника $B'C'B_1'$ вытекает $h_{B'C'}=\frac{1}{2}B_1'C'$. Далее, из подобия треугольников $A'Q'X'$ и $B_1'Q'C'$ следует $A'X':B_1'C'=Q'A':Q'B_1'$ и, значит, $h_{X'A_1'}:h_{B'C'}=X'A':B_1'C'=Q'A':Q'B_1'$. Так же докажем, что $h_{C'A'}:h_{X'B_1'}=P'A_1':P'B'$. Подставляя эти отношения в равенства (**), мы докажем соотношение (*).

Обозначим теперь через Q_1' точку пересечения прямой $P'O'$ со стороной $A'C'$ треугольника $A'B'C'$. Пусть ещё h_1, h_2, h_3 и h_4 — длины перпендикуляров, опущенных на прямую $P'O'Q_1'$ из точек A_1', B', A' и B_1'; так как $O'A_1'=O'A'$, то, очевидно, $h_1=h_3$ и аналогично $h_2=h_4$. Отсюда мы имеем:

$$\frac{S_{P'O'A_1'}}{S_{Q_1'O'A'}}=\frac{P'O'}{Q_1'O'}, \quad \frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q_1'O'B_1'}}=\frac{P'O'}{Q_1'O'},$$

а следовательно,

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'_1O'A'}}=\frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}$$

и, значит,

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}}=\frac{S_{Q'_1O'A'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}. \qquad (***)$$

Сравнивая равенство (***) с равенством (*), получаем:

$$\frac{S_{Q'_1O'A'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}=\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}},$$

откуда следует, что точка Q'_1 совпадает с точкой Q'.

Аналогично доказывается, что точка R' лежит на прямой $O'P'$, откуда следует, что точки P', Q' и R' все лежат на одной прямой, проходящей через точку O'. Возвращаясь к исходному чертежу, мы заключаем отсюда, что точки P, Q и R лежали все на одной прямой, проходящей через O.

145. Из того, что касательные, проведённые к окружности S из точки N пересечения сторон AB и DE вписанного шестиугольника $ABCDEF$ (черт. 312, *а*), касаются окружности в точках дуг AB и DE, следует, что прямая NM (M — точка пересечения BC и EF) не пересекает окружности S. Поэтому мы можем спроектировать черт. 312, *а* на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а прямая NM — в «бесконечно удалённую прямую» плоскости π'. При этом черт. 312, *а* перейдёт в черт. 312, *б*, где $A'B' \parallel E'D'$ и $B'C' \parallel E'F'$. Следовательно,

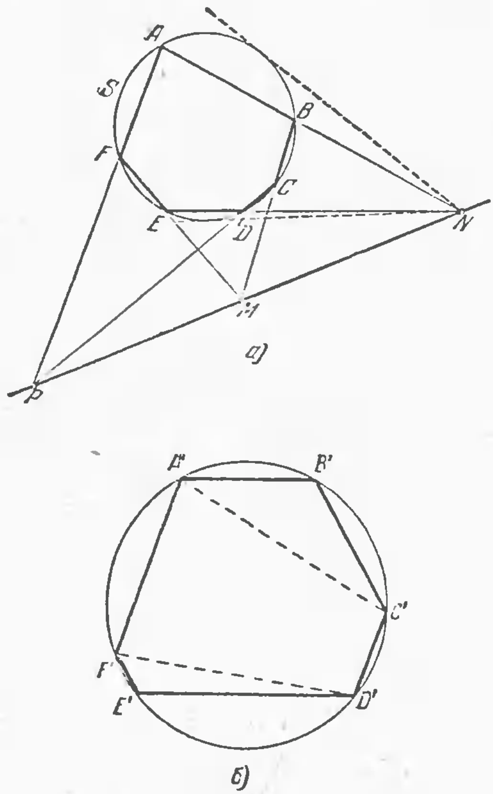
$$\angle A'B'C' = \angle D'E'F', \text{ т. е. } \smile A'B'C' = \smile D'E'F'.$$

Отсюда вытекает, что

$$\angle F'A'C' + \angle D'C'A' =$$
$$= \frac{1}{2}(\smile C'D' + \smile D'E'F') + \frac{1}{2}(\smile F'A' + \smile D'E'F') =$$
$$= \frac{1}{2}(\smile C'D' + \smile D'E'F' + \smile F'A' + \smile A'B'C') = 180^\circ;$$

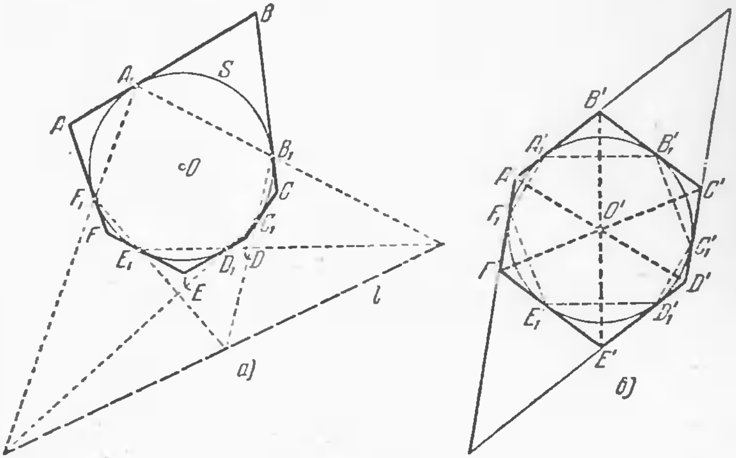
следовательно, $A'F' \parallel C'D'$, или, другими словами, $A'F'$ и $D'C'$

«пересекаются в бесконечно удалённой точке». Таким образом, точки P', M' и N' пересечения противоположных сторон шестиугольника $A'B'C'D'E'F'$ лежат на одной прямой — на «бесконечно удалённой прямой» плоскости π'. Следовательно, точки P, M и N черт. 312, *а* также лежали на одной прямой.



Черт. 312.

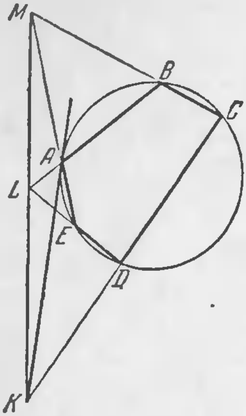
146. Обозначим точки, в которых стороны описанного вокруг окружности S шестиугольника $ABCDEF$ касаются окружности, через A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1. Шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ вписан в окружность S и к нему можно применить теорему Паскаля (задача 145; см. черт. 313, *а*). Спроектируем теперь наш чертёж на новую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в окружность S', а прямая l, на которой лежат точки пересечения противоположных сторон шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, — в «бесконечно удалённую прямую» плоскости π'. Шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ перейдёт при этом в шестиугольник $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'F_1'$, у которого противоположные стороны параллельны (черт. 313, *б*). Рассмотрим



Черт. 313.

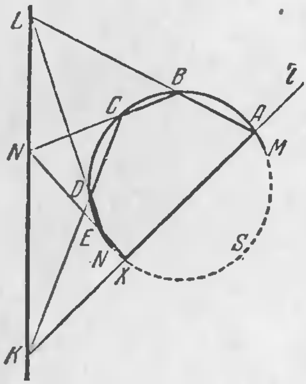
касательные $A'B'$, $A'F'$, $D'C'$ и $D'E'$ окружности S'. Из того, что $A_1'F_1' \parallel C_1'D_1'$, следует, что четырёхугольник, сторонами которого являются эти четыре касательные, имеет ось симметрии $A'D'$, проходящую через центр O' окружности S' и перпендикулярную к $A_1'F_1'$ и $C_1'D_1'$. Точно так же доказывается, что и прямые $B'E'$ и $C'F'$ проходят через центр O' окружности S'. Из того, что прямые $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ пересекаются в одной точке, следует, что и прямые AD, BE и CF пересекались в одной точке.

147. Рассмотрим вписанный в окружность пятиугольник $ABCDE$ (где точки B, C, D, E выбраны произвольно). Из теоремы Паскаля вытекает, что точка K пересечения касательной к окружности в точке A и стороны CD лежит на одной прямой с точками L и M пересечения сторон AB и DE, AE и BC (сравните черт. 314 с черт. 62, a в тексте). Следовательно, эту точку можно построить с помощью одной линейки (как точку пересечения прямых CD и LM). Соединив A с K, мы найдём искомую касательную.

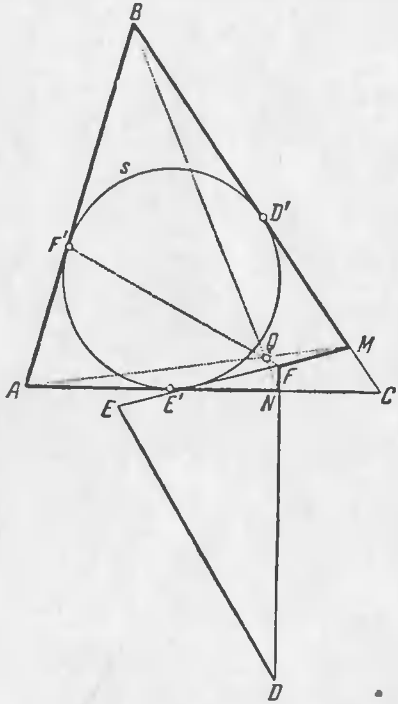


Черт. 314.

Примечание. Отметим, что в этом построении можно обойтись сколь угодно малой дугой окружности, содержащей точку A (можно выбрать точки C, D, E, F на этой дуге). Это обстоятельство впоследствии окажется для нас полезным.



Черт. 315.



Черт. 316.

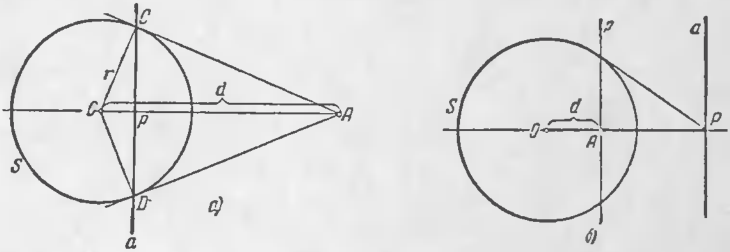
148. Рассмотрим вписанный в окружность S шестиугольник $ABCDEX$, где A и X — точки пересечения прямой l с окруж-

ностью S; B, C, D, E — произвольные точки дуги MN (см. черт. 315). Точки K, L и N пересечения AX (т. е. l) и CD, AB и DE, BC и EX лежат на одной прямой (в силу теоремы Паскаля; см. задачу 145). Поэтому можно с помощью одной линейки найти точку N (как точку пересечения BC и KL), а затем и искомую точку X (как точку пересечения EN и l).

149. Применяя теорему Брианшона к (вырожденному) шестиугольнику $AF'BMFN$ черт. 65, мы получим, что прямая FF' проходит через точку пересечения AM и BN, т. е. через точку Q (черт. 316). Точно так же показывается, что прямые DD' и EE' проходят через Q.

§ 4

150. Пусть точка A лежит вне S ($d>r$), AC и AD — касательные, проведённые из A к S, P — точка пересечения CD и OA (черт. 317, a). Очевидно, a совпадает с CD (см. выше, стр. 86). Но из подобия треугольников OCA и OPC



Черт. 317.

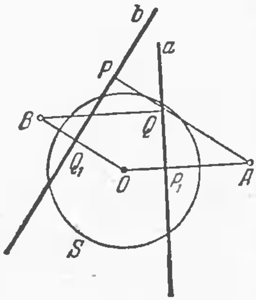
($a \perp OA$; см. стр. 86) следует $\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OP}$ или $OP=\frac{OC^2}{OA}$, что и требовалось доказать.

Если A лежит на окружности S ($d=r$), то утверждение задачи очевидно.

Пусть, наконец, A лежит внутри S ($d<r$); p — прямая, проходящая через A перпендикулярно к OA, P — полюс p (черт. 317, $б$). Очевидно, что P лежит вне S на прямой OA; поэтому в силу уже доказанного $OA=\frac{r^2}{OP}$ или $OP=\frac{r^2}{OA}$.

Но поляра a точки A есть перпендикуляр к OA, проведённый через точку P (см. теорему 2 на стр. 87); поэтому OP есть расстояние от O до a и равенство $OP=\frac{r^2}{OA}$ есть как раз то, которое требуется доказать.

151. Пусть P_1 и Q_1 — точки пересечения OA с a и OB с b (черт. 318). Рассмотрим прямоугольные трапеции $OAPQ_1$ и $OBQP_1$. У них $\angle AOQ_1=\angle BOP_1$ и стороны пропорциональны: $\frac{OA}{OB}=\frac{OQ_1}{OP_1}$ (ибо в силу результата предыдущей задачи $OA\cdot OP_1=OB\cdot OQ_1=r^2$). Отсюда вытекает, что эти две трапеции подобны между собой ($OAPQ_1$ получается из $OBQP_1$ центрально-подобной симметрией с коэффициентом $k=\frac{OA}{OB}=\frac{OQ_1}{OP_1}$, осью которой служит биссектриса угла AOB, а центром — точка O). Из подобия трапеций вытекает, что $\frac{OA}{AP}=\frac{OB}{BQ}$ (ибо OA и OB, AP и BQ — пары соответствующих сторон), что и требовалось доказать.



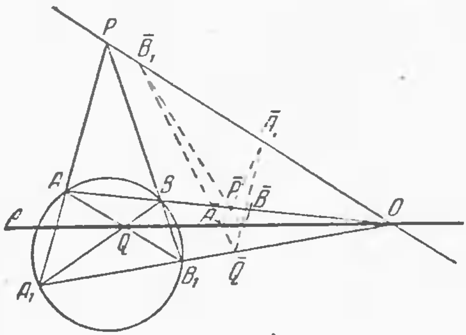
Черт. 318.

152. а) Пусть P и Q — точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность S четырёхугольника, а R — точка пересечения диагоналей; в таком случае в силу теоремы 1 (стр. 84) R есть полюс PQ (см. черт. 66, *а* на стр. 84). Отсюда и следует утверждение задачи (см. стр. 86).

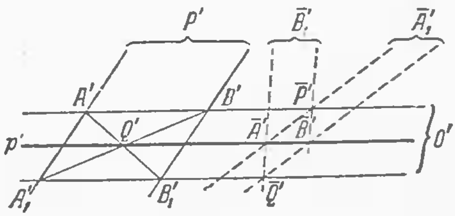
б) Если A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания сторон четырёхугольника $ABCD$ с окружностью S, то точки пересечения диагоналей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают (см. задачу 139а) из § 3); также и прямые, соединяющие точки пересечения противоположных сторон обоих четырёхугольников, совпадают между собой (доказательство аналогично решению задачи 139а)). Далее см. задачу а).

153. Точки касания окружности S и касательных, проведённых к ней из точки A, совпадают с точками пересечения S с полярой a точки A (см. стр. 86). Но поляру a легко построить с помощью одной линейки (см. черт. 66, *б* в тексте). После этого остаётся только соединить точку A с точками пересечения прямой a и окружности S.

154. Если у вписанного в окружность S четырёхугольника ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P, то полярой p точки P будет прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей AB_1 и BA_1 и точку пересечения противоположных сторон AB и A_1B_1 (черт. 319, *а*). Но отсюда



а)

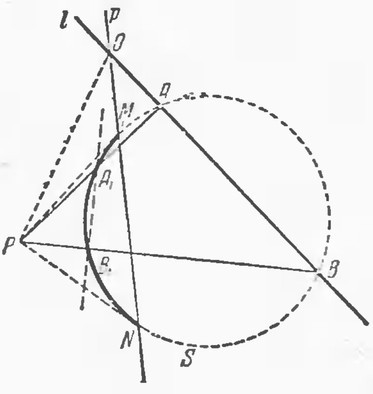


б)

Черт. 319.

следует, что p является полярой точки P относительно пары прямых AB, A_1B_1 (см. задачу 118а) из § 2, стр. 38). Итак, p есть поляра относительно пары прямых AB, A_1B_1 любой из точек прямой OP, где O — точка, в которой сходятся прямые AB, A_1B_1 и p (см. ту же задачу 118а) из § 2); отсюда можно также вывести, что A_1B_1 *является полярой любой из точек прямой* AB *относительно пары прямых* OP, p. [Для доказательства достаточно спроектировать четвёрку прямых AB, A_1B_1, OP и p с плоскости π на новую плоскость

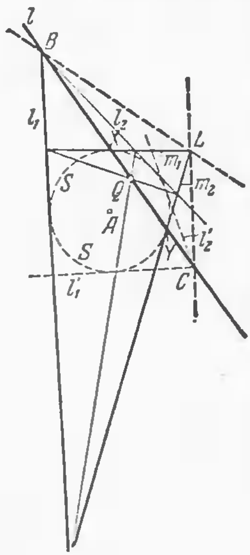
π' так, чтобы прямая OP являлась выделенной прямой плоскости π. При этом прямые AB и A_1B_1 перейдут в параллельные прямые $A'B'$ и $A_1'B_1'$; OP перейдёт в «бесконечно удалённую прямую» $O'P'$ плоскости π', а p — в среднюю линию p' полосы, образованной прямыми $A'B'$ и $A_1'B_1'$. Из черт. 319, *б* согласно определению поляры точки относительно пары прямых следует, что $A_1'B_1'$ есть поляра точки $\overline{P}'$ прямой $A'B'$ относительно прямых p', $O'P'$ (ср. с решением задачи 118а)). Но в таком случае A_1B_1 является и полярой точки $\overline{P}$ прямой AB относительно прямых p, OP.] Поэтому, зная прямые OP, p и AB, мы можем построить прямую A_1B_1 с помощью одной линейки: для этого надо провести две пары прямых $\overline{P}\overline{A}\overline{A}_1$ и $\overline{P}\overline{B}\overline{B}_1$, пересекающихся в точке $\overline{P}$ прямой AB ($\overline{A}$ и $\overline{B}$ — точки p, $\overline{A}_1$ и $\overline{B}_1$ — точки OP), и соединить точку $\overline{Q}$ пересечения $\overline{A}\overline{B}_1$ и $\overline{B}\overline{A}_1$ с точкой O пересечения p и AB.



Черт. 320.

Перейдём теперь к нашей задаче. Пусть p — произвольная прямая, пересекающая l в точке O и данную дугу в точках M и N (которые могут совпадать с концами дуги; нам надо только, чтобы p была не параллельна l и дуга MN была меньше полуокружности). Полюс P прямой p относительно S совпадает с точкой пересечения касательных к S в точках M и N; его можно построить с помощью одной линейки (см., например, задачу 147 из § 3, в частности примечание в конце решения этой задачи; можно также воспользоваться теоремой 1 на стр. 84). Пусть l пересекает окружность S в точках A и B (которые нам требуется определить), PA и PB пересекают S ещё в точках A_1 и B_1 (черт. 320). Как мы уже видели, зная прямые AB (прямую l) и p, мы можем построить прямую A_1B_1 с помощью одной линейки; при этом если прямая l проходит вне угла MOP (а лишь в этом случае l пересекает S, но не пересекает дугу

MN), то A_1B_1 проходит внутри угла MOP и, следовательно, или совсем не пересекает S (в этом случае l тоже не пересекает S и точек A, B не существует), либо пересекает дугу MN в точках A_1 и B_1. Точки пересечения прямых PA_1, PB_1 с прямой l и будут искомыми точками пересечения l и S. Предоставляем читателю самому разобрать подробнее случай, когда A_1 и B_1 совпадают, т. е. прямая A_1B_1 касается S в точке A_1; в этом случае и l касается S в точке A пересечения PA_1 и l и p есть поляра точки P_1 относительно пары прямых OA, OA_1.



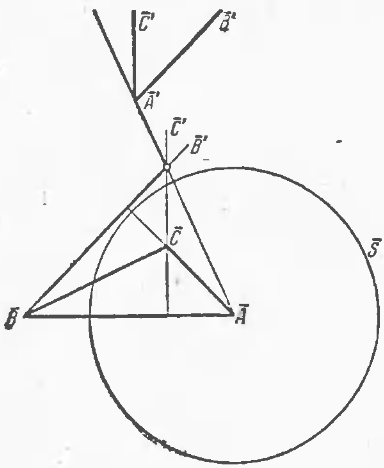
Черт. 321.

155. Прямая l_2 на черт. 72, *б* в тексте есть касательная, проведённая из B к окружности с центром A и радиусом a. Поэтому с помощью параллельной линейки можно из любой точки B провести касательные l_1 и l_2 к неначерченной окружности S с центром A и радиусом a (черт. 321; разумеется, B должна лежать вне S). Пусть точка B лежит на прямой l; обозначим ещё через L полюс l относительно S и через m_1 и m_2 — касательные к S, проведённые из точки L. Точка пересечения Q диагоналей четырёхугольника, образованного прямыми l_1, l_2; m_1, m_2, лежит на прямой l (см. задачу 139 из § 3, стр. 77); отсюда вытекает, что BQ (т. е. l) есть поляра точки L относительно пары прямых l_1, l_2 и BL есть поляра точки Q относительно пары прямых l_1, l_2 (см. задачу 118а) из § 2, стр. 38). Но если так, то каждая точка прямой l имеет своей полярой относительно пары прямых l_1, l_2 прямую BL (см. ту же задачу 118а)); так как прямая l нам дана, а l_1 и l_2 можно построить, то прямую BL можно найти с помощью одной линейки.

Точно так же можно найти прямую CL, где C — ещё какая-то точка l (расположенная вне S). В пересечении прямых BL и CL мы найдём точку L. Касательные m_1 и m_2, проведённые из L к S (их можно построить с помощью параллельной линейки), пересекают l в искомых точках X и Y.

[Если l не пересекает S, то точка L окажется внутри S и из неё нельзя будет провести касательные к S.]

156. Пусть a — поляра точки A относительно окружности S. Если перевести центральным проектированием окружность S в новую окружность $\bar{S}$ и точку A — в точку $\bar{A}$, то прямая a перейдёт в поляру $\bar{a}$ точки $\bar{A}$ относительно $\bar{S}$; точно так же полюс B произвольной прямой b относительно S перейдёт при этом проектировании в полюс $\bar{B}$ относительно $\bar{S}$ прямой $\bar{b}$, в которую перейдёт b.



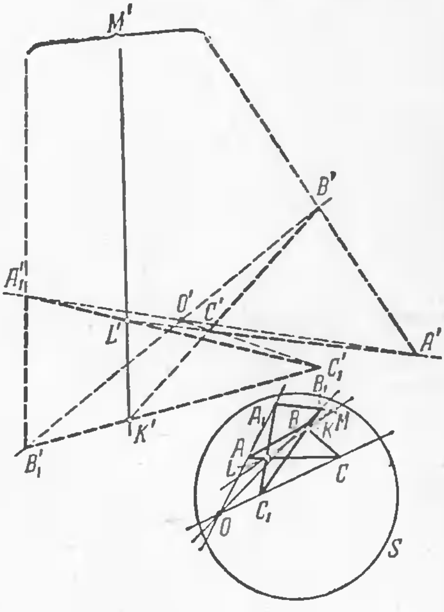
Черт. 322.

Рассмотрим теперь отдельно несколько возможных случаев расположения полярных треугольников ABC и $A'B'C'$ относительно S.

1°. Пусть хоть одна вершина A треугольника ABC расположена внутри S. Спроектируем плоскость π чертежа на новую плоскость $\bar{\pi}$ так, чтобы окружность S перешла в окружность $\bar{S}$, а точка A — в центр $\bar{A}$ окружности $\bar{S}$. В таком случае мы придём к черт. 322, где $\bar{A}'$ — полюс прямой $\bar{B}\bar{C}$; полюсы B' и C' прямых AC и AB перейдут при этом в полюсы диаметров $\bar{A}\bar{C}$ и $\bar{A}\bar{B}$ окружности $\bar{S}$, т. е. в «бесконечно удалённые точки» $\bar{B}'$ и $\bar{C}'$, отвечающие направлениям, перпендикулярным к $\bar{A}\bar{C}$ и $\bar{A}\bar{B}$ (см. черт. 67, *б* в тексте). Отсюда вытекает, что прямые BB' и CC' перейдут в высоты $\bar{B}\bar{B}'$ и $\bar{C}\bar{C}'$ треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. А так как прямая $\bar{A}\bar{A}'$ есть третья высота (ибо полюс $\bar{A}'$ прямой $\bar{B}\bar{C}$ лежит на перпендикуляре, опущенном на $\bar{B}\bar{C}$ из центра $\bar{A}$ окружности $\bar{S}$), то $\bar{A}\bar{A}'$, $\bar{B}\bar{B}'$ и $\bar{C}\bar{C}'$ пересекаются в одной точке. Отсюда вытекает, что и прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

2°. Пусть хоть одна из сторон треугольника ABC не пересекает окружности S. В этом случае соответствующая вершина треугольника $A'B'C'$ лежит внутри S, и мы можем в точности повторить предыдущее рассуждение, поменяв ролями треугольники ABC и $A'B'C'$.

3°. Если ни одна из вершин треугольника ABC не лежит внутри S и ни одна сторона этого треугольника не лежит вне этой окружности, то теорема настоящей задачи совпадает с предложением задачи 138б) из § 3 (стр. 76—77).

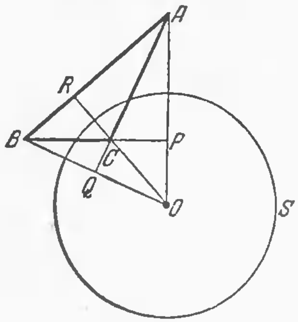


Черт. 323.

157. Пусть A', B', C' — полюсы сторон треугольника ABC и A_1', B_1', C_1' — полюсы сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (черт. 323). В силу теоремы 2 полярой точки A является прямая $B'C'$, а полюсом прямой AA_1 — точка K' пересечения прямых $B'C'$ и $B_1'C_1'$. Точно так же полюсами прямых BB_1 и CC_1 являются точки L' и M' пересечения $A'C'$ и $A_1'C_1'$, $A'B'$ и $A_1'B_1'$. Поэтому полярой точки O пересечения AA_1 и BB_1 является прямая $K'L'$. По условию задачи прямая CC_1 проходит через O; следовательно, полюс M' этой прямой лежит на прямой $K'L'$. Таким образом, мы убеждаемся, что точки K', L' и M' лежат на одной прямой, откуда в силу теоремы Дезарга (задача 123 из § 2, стр. 42) следует, что прямые $A'A_1'$, $B'B_1'$ и $C'C_1'$ пересекаются в одной точке. А это нам и требовалось доказать.

158. Рассмотрим треугольник ABC, автополярный относительно некоторой окружности S с центром O (черт. 324).

Так как поляра BC точки A перпендикулярна к прямой OA, то точка O должна лежать на высоте AP треугольника ABC. Точно так же показывается, что точка O лежит на двух других высотах BQ и CR треугольника; таким образом, O совпадает с точкой пересечения высот треугольника ABC. Так как точки A и P, B и Q, C и R должны лежать по одну сторону от точки O пересечения высот, то треугольник ABC должен быть тупоугольным.



Черт. 324.

Радиус r окружности S, относительно которой заданный тупоугольный треугольник ABC с точкой пересечения высот O является автополярным, определяется из соотношения $r^2 = OA \cdot OP = OB \cdot OQ = OC \cdot OR$ (см. задачу 150); равенство последних трёх произведений следует из подобия треугольников OAQ и OBP, OAR и OCP. [Нетрудно проверить, что $r = 2R\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$, где R есть радиус описанной окружности треугольника ABC.]

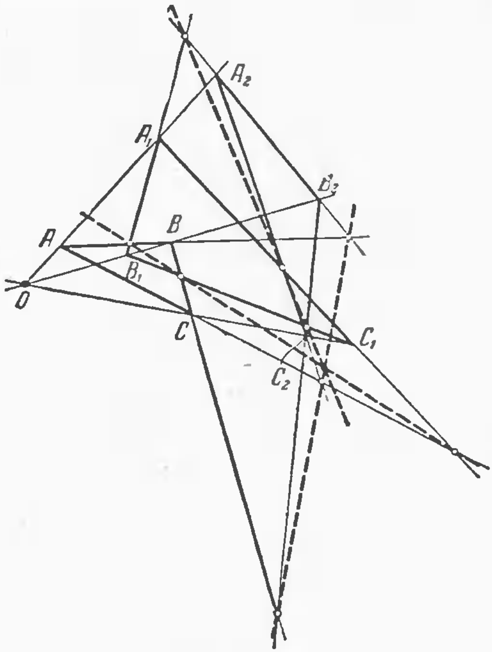
159. Теоремы задач 118а) и б) при полярном преобразовании переходят одна в другую (и следовательно, достаточно было бы доказать только одну из этих теорем).

Теоремы задач 122а) и б) также переходят друг в друга (и опять достаточно было бы доказать одну из этих теорем).

Прямая и обратная теоремы задачи 123 переходят друг в друга; и здесь применение полярного преобразования не приводит к новым результатам, ибо эти две теоремы равносильны (см. замечание в конце решения задачи 123).

Так же и применение полярного преобразования к теоремам задач 125 и 126 не приводит к новым результатам — эти теоремы тоже переходят сами в себя (только в новых формулировках этих теорем, получаемых из приведённых в тексте § 2 по принципу двойственности, перспективность треугольников будет пониматься не так, как в формулировке первоначальных теорем, а в том смысле, что точки пересечения соответствующих сторон треугольников лежат на одной прямой; в силу теоремы Дезарга эти два определения перспективности равносильны).

Теорема задачи 127 переходит в следующую: если три треугольника ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что точки A, A_1, A_2 лежат на одной прямой q, точки B, B_1, B_2 — на прямой r и точки C, C_1, C_2 — на прямой p, причём три прямые p, q и r проходят через одну точку (черт. 325),



Черт. 325.

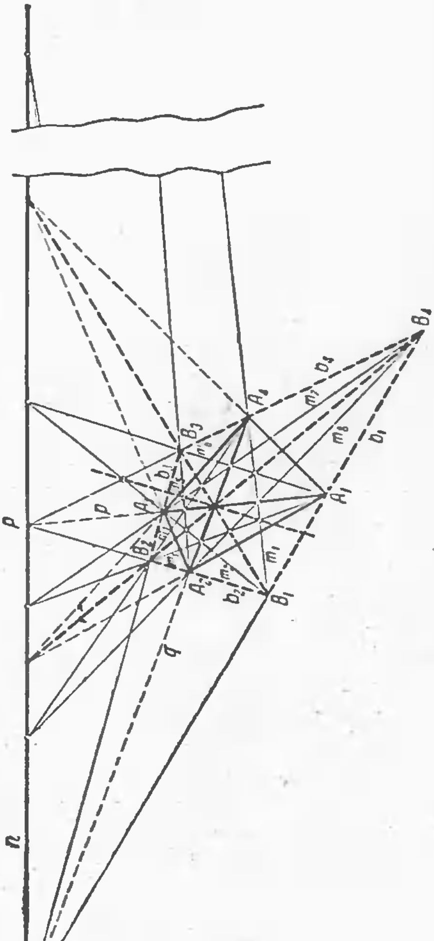
то три прямые, на которых согласно теореме задачи 123 лежат точки пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, ABC и $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, пересекаются в одной точке (другими словами: если центры перспективы трёх попарно перспективных треугольников совпадают, то их оси перспективы пересекаются в одной точке).

Теоремы задач 129а) и б) переходят в результате полярного преобразования одна в другую; так как эти две теоремы равносильны (см. решение задачи 129б)), то и здесь можно сказать, что эти теоремы переходят сами в себя.

160. Эта задача двойственна задаче 128 из § 2. Поэтому её можно было бы решить следующим образом. Произведём полярное преобразование (относительно произвольной окружности S); при этом прямые l_1, l_2, ..., l_n перейдут в n точек L_1, L_2, ..., L_n, расположенных на одной прямой, а точки M_1, M_2, ..., M_n перейдут в n прямых m_1, m_2, ..., m_n. Согласно задаче 128 в n-угольник, образованный прямыми m_1, m_2, ..., m_n, можно вписать n-угольник $B_1B_2 \ldots B_n$, стороны которого проходят через точки L_1, L_2, ..., L_n. Искомый n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$ получается из n-угольника $B_1B_2 \ldots B_n$ при помощи полярного преобразования относительно окружности S.

Однако в настоящем случае нет необходимости строить предварительно вспомогательный n-угольник $B_1B_2 \ldots B_n$. В решении задачи 128 было доказано, что если $n-1$ вершин n-угольника лежат на $n-1$ фиксированных прямых, а стороны его проходят через n фиксированных точек, лежащих на одной прямой, то последняя вершина обязательно лежит на некоторой прямой l; эту прямую можно найти, если построить два таких n-угольника. Принцип двойственности позволяет заключить отсюда, что *если $n-1$ сторон n-угольника проходят через $n-1$ точек M_1, M_2, ..., M_{n-1}, а вершины лежат на прямых l_1, l_2, ..., l_n, проходящих через одну точку, то последняя сторона обязательно проходит через некоторую точку M* (обыкновенную или «бесконечно удалённую»); эту точку можно найти, построив два таких n-угольника. Соединив M и M_n, мы получим сторону A_nA_1 искомого n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$; после этого не представляет труда определение и всех остальных его сторон. Если M — обыкновенная точка и не совпадает с M_n, то задача имеет единственное решение; если M совпадает с M_n, то она неопределённа. Если точка M_n является «бесконечно удалённой», то решение задачи единственно, если отвечающее M_n направление не параллельно ни l_1, ни l_n, и не существует в противном случае.

161. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырёхугольник, b_1, b_2, b_3, b_4 — прямые, соединяющие его вершины с точками P и Q, в которых диагонали p и q четырёхугольника пересекают прямую n, соединяющую точки пересечения противоположных сторон. Прямые, соединяющие вершины четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ и описанного вокруг него четырёхугольника $B_1B_2B_3B_4$,



Черт. 326.

образованного прямыми b_1, b_2, b_3 и b_4, обозначим через m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 и m_8, как указано на черт. 326. Из теорем задач 135а) — г) в силу принципа двойственности следует, что:

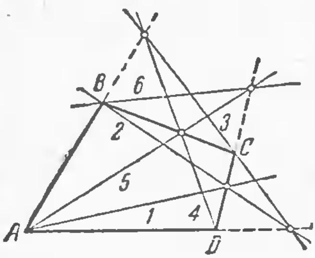
а) точки пересечения m_1 и m_5, m_2 и m_8, m_3 и m_7, m_4 и m_8 все лежат на прямой n;

б) точки пересечения m_2 и m_3, m_6 и m_7 лежат на прямой p; точки пересечения m_1 и m_8, m_4 и m_5 лежат на прямой q;

в) точки пересечения m_1 и m_2, m_3 и m_8, m_4 и m_7, m_5 и m_6 все лежат на прямой, соединяющей точку пересечения диагоналей $A_1A_2A_3A_4$ с точкой пересечения сторон A_2A_3 и A_4A_1; точки пересечения m_3 и m_4, m_2 и m_5, m_1 и m_6, m_7 и m_8 все лежат на прямой, соединяющей точку пересечения диагоналей $A_1A_2A_3A_4$ с точкой пересечения сторон A_1A_2 и A_3A_4;

г) точки пересечения m_1 и m_3, m_5 и m_7, b_4 и m_2, b_2 и m_6; m_2 и m_4, m_6 и m_8, b_4 и m_5, b_2 и m_7; m_3 и m_5, m_1 и m_7, b_1 и m_6, b_3 и m_2; m_4 и m_8, m_2 и m_8, b_1 и m_7, b_3 и m_3 лежат на четырёх прямых, проходящих через точку пересечения диагоналей.

Из предложений задач 136а) — в) в силу принципа двойственности вытекают следующие теоремы. Пусть $ABCD$ — произвольный четырёхугольник, 1 — какая-то прямая, проходящая через вершину A, 2 — прямая, соединяющая вершину B с точкой пересечения прямых CD и 1, 3 — прямая, соединяющая вершину C с точкой пересечения прямых DA и 2, 4 — прямая, соединяющая вершину D с точкой пересечения прямых AB и 3, и т. д. (черт. 327). В таком случае:



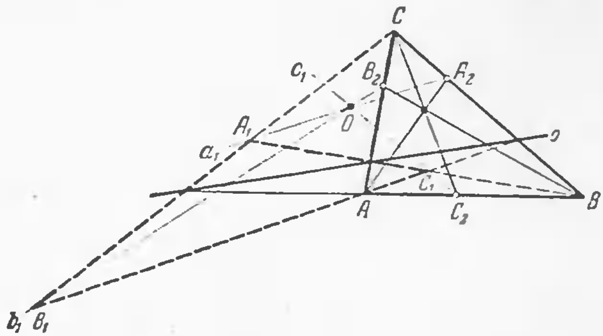
Черт. 327.

а) прямая 13, к которой мы приходим, обойдя три раза все вершины четырёхугольника, совпадает с первоначальной прямой 1 (очевидно, эта теорема равносильна теореме задачи 136а));

б) точки пересечения прямых 1 и 7, 2 и 8, 3 и 9 и т. д. лежат на прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника;

в) прямые, соединяющие точки пересечения 1 и 2, 7 и 8; 2 и 3, 8 и 9; 3 и 4, 9 и 10 и т. д., проходят через точку пересечения диагоналей четырёхугольника.

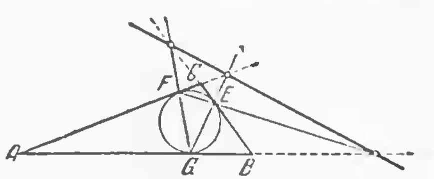
Теорема задачи 137б) переходит в следующую. Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник, образованный тремя прямыми, соединяющими точки пересечения сторон заданного треугольника ABC с некоторой прямой o и противоположные вершины T, O — произвольная точка, a_1, b_1, c_1 — прямые, соединяющие



Черт. 328.

вершины $A_1B_1C_1$ с точкой O, A_2, B_2, C_2 — точки пересечения этих прямых с соответствующими сторонами $\triangle ABC$ (черт. 328). В таком случае три прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

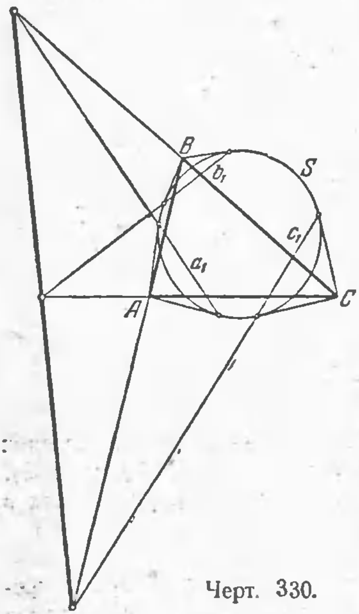
162. Теорема задачи 138а) переходит при полярном преобразовании в следующую теорему: точки пересечения сторон



Черт. 329

произвольного треугольника ABC с соответствующими сторонами треугольника, вершинами которого служат точки касания сторон ABC с вписанной в треугольник окружностью, лежат на одной прямой (черт. 329).

Теорема задачи 138б) переходит в следующую. Дан треугольник ABC и окружность S, пересекающая все стороны этого треугольника. Обозначим через a_1, b_1, c_1 прямые, соединяющие точки касания S с касательными, проведёнными к S из точек A, B, C (черт. 330). В таком случае точки пересечения прямых a_1, b_1 и c_1 с соответствующими сторонами треугольника лежат на одной прямой [1]).



Черт. 330.

Теорема задачи 139а) переходит в следующую. Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — четырёхугольник, описанный вокруг окружности S; A, B, C, D — точки касания его сторон с окружностью (черт. 331). В таком случае точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$ лежат на прямой, соединяющей точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$. Что же касается теоремы задачи 139б), то она при полярном преобразовании переходит сама в себя (точке P пересечения противоположных сторон четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ отвечает в силу полярного преобразования диагональ AC четырёхугольника $ABCD$, а диагонали AC отвечает точка P).

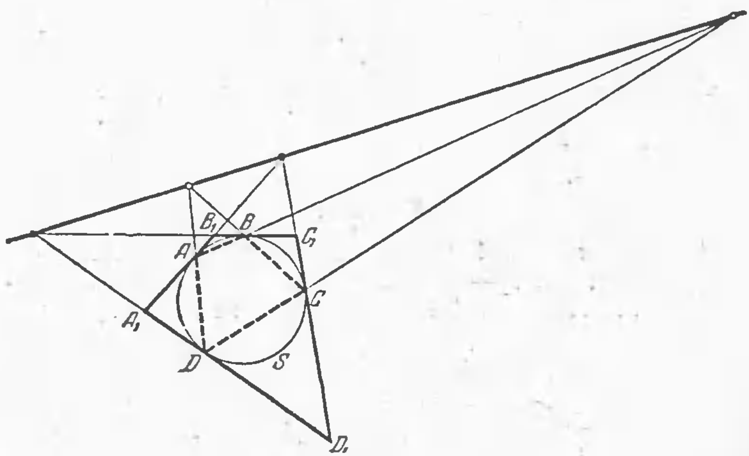
Теоремы задач 140а)—в) переходят в следующие. Пусть l — прямая, соединяющая точки пересечения противоположных сторон произвольного четырёхугольника $ABCD$, описанного вокруг окружности S, m и n — прямые, на которых лежат диагонали этого четырёхугольника. В таком случае:

---

[1]) Нетрудно видеть, что теоремы, которые получаются с помощью полярного преобразования из теорем задач 138а) и б) в силу теоремы Дезарга (задача 123 из § 2, стр. 42), равносильны первоначальным теоремам.

а) если две вершины описанного вокруг S треугольника лежат на двух из прямых l, m, n, то третья вершина лежит на третьей прямой;

б) существует бесконечно много описанных вокруг S четырёхугольников, диагонали которых лежат на прямых m и n; прямые, соединяющие точки пересечения противоположных сторон всех этих четырёхугольников, совпадают с l;



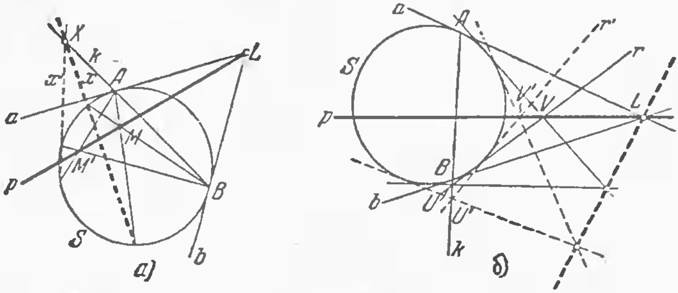
Черт. 331.

в) существует бесконечно много описанных вокруг S четырёхугольников, одна из диагоналей которых лежит на прямой m, а прямая, соединяющая точки пересечения противоположных сторон, совпадает с l; вторая диагональ каждого из этих четырёхугольников лежит на прямой n.

Теоремы задач 142а) и б) переходят в следующие. Даны окружность S, точка L вне окружности и прямая p, проходящая через L; прямую, соединяющую точки A и B, в которых касаются S касательные a и b, проведённые из L, обозначим через k. В таком случае:

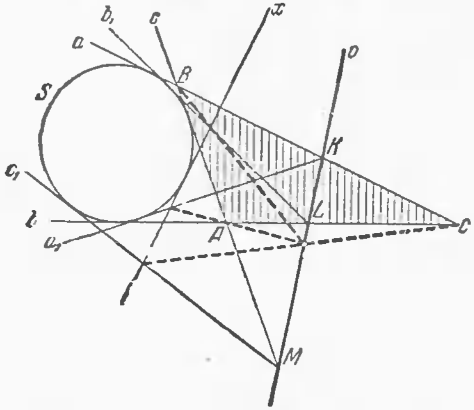
а) если переменную точку M прямой p соединить прямыми с точками A и B, то прямые x, соединяющие вторые точки пересечения с S проведённых прямых, пересекают k в фиксированной точке X (черт. 332, a);

б) пусть касательная r к окружности S пересекает прямые p и k в точках V и U; в таком случае точка пересечения вторых касательных к окружности S, проведённых из точек U и V, лежит на фиксированной прямой, проходящей через точку L (черт. 332, б).



Черт. 332.

Теорема задачи 144 переходит в следующую. Пусть a и a_1, b и b_1, c и c_1 — касательные к окружности S, проведённые из точек K, L и M, лежащих на одной прямой o,

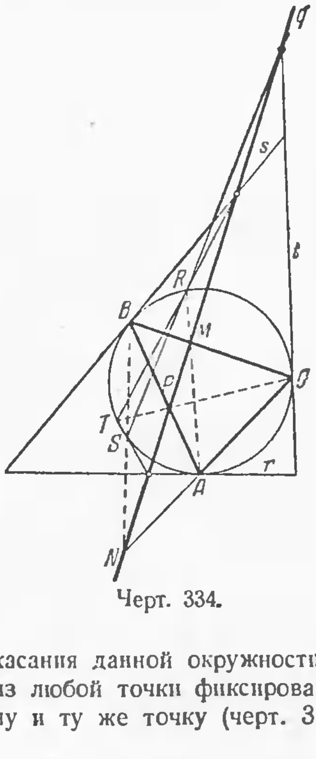


Черт. 333.

x — произвольная касательная к той же окружности. В таком случае прямые, соединяющие вершины образованного a, b и c треугольника с соответствующими точками пересечения x с прямыми a_1, b_1 и c_1, пересекаются в одной точке, лежащей на прямой o (черт. 333).

Теоремы задач 145 и 146 переходят при полярном преобразовании одна в другую (так что достаточно было бы доказать лишь одну из этих теорем).

Теорема задачи 149 переходит в следующую: пусть r, s, t — касательные к описанной окружности треугольника ABC в вершинах треугольника A, B, C; M, N, P — три точки на сторонах BC, CA и AB этого треугольника, лежащие на одной прямой q. Обозначим вторые точки пересечения прямых AM, BN и CP с описанной окружностью соответственно через R, S и T. В таком случае точки пересечения прямых RS и t, ST и r, TR и s лежат на прямой q (черт. 334).



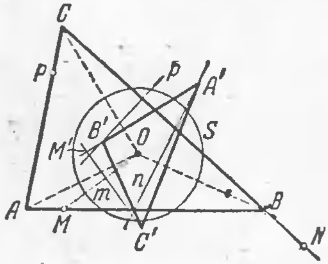
Черт. 334.

163. Результат задачи 141 переходит при полярном преобразовании в следующее предложение: все хорды, соединяющие точки касания данной окружности S с касательными, проведёнными из любой точки фиксированной прямой p, проходят через одну и ту же точку (черт. 335).

Черт. 335.

164. Эта задача является двойственной задаче 143 предыдущего параграфа (задачам 143а) и б) отвечают случаи, когда прямая l не пересекает окружность S или пересекает её). Таким образом, эту задачу можно решить следующим образом: произведя полярное преобразование относительно данной окружности, мы придём к задаче 143. Решив эту задачу, мы получим некоторый четырёхугольник, из которого искомый четырёхугольник получается полярным преобразованием.

Однако в настоящем случае нет необходимости решать предварительно задачу 143. Действительно, в решении задачи 143 мы видели, что если одна сторона четырёхугольника, вписанного в заданную окружность S и имеющего заданную точку пересечения диагоналей (или заданную точку пересечения соседних к рассматриваемой стороне сторон), проходит через известную точку, то и противоположная сторона четырёхугольника обязательно проходит через фиксированную точку. Полярное преобразование переводит это предложение в следующее: если вершины A и C четырёхугольника $ABCD$, описанного около заданной окружности, лежат на прямой l и вершина B лежит на прямой l_1, то вершина D обязательно лежит на некоторой фиксированной прямой m. С помощью этого предложения уже нетрудно решить поставленную задачу (решение аналогично решениям задач 143а) и б)).



Черт. 336.

165. Пусть M, N и P — три точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC или на их продолжениях (черт. 336). Произведём полярное преобразование; при этом треугольник ABC перейдёт в треугольник $A'B'C'$, сторонами которого являются поляры a, b и c точек A, B и C, а точки M, N и P перейдут в прямые m, n и p, проходящие соответственно через точки C', A' и B'. Пусть M', N' и P' — точки, в которых прямые m, n и p пересекают стороны треугольника $A'B'C'$; постараемся найти зависимость между выражениями

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

и

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}.$$

Отношение $\frac{A'M'}{B'M'}$ по абсолютной величине равно частному двух отношений $\frac{A'M'}{C'M'} : \frac{B'M'}{C'M'}$. Но в силу теоремы синусов $\frac{A'M'}{C'M'} = \frac{\sin\angle A'C'M'}{\sin\angle C'A'M'}$ и $\frac{B'M'}{C'M'} = \frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle C'B'M'}$. Таким образом, отношение $\frac{A'M'}{B'M'}$ по абсолютной величине равно

$$\frac{\sin\angle A'C'M'}{\sin\angle C'A'M'} : \frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle C'B'M'} = \frac{\sin\angle C'B'M'}{\sin\angle C'A'M'} \cdot \frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle A'C'M'}.$$

Мы знаем, что поляра точки A перпендикулярна к прямой OA, где O есть центр окружности S полярного преобразования (см. выше стр. 86). Поэтому $C'B' \perp OA$, $C'A' \perp OB$, $A'B' \perp OC$ и, следовательно, $\sin\angle C'B'M' = \sin\angle AOC$, $\sin\angle C'A'M' = \sin\angle BOC$ (углы $C'B'M'$ и AOC равны или смежные, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами и точно так же углы $C'A'M'$ и BOC). Таким образом,

$$\frac{\sin\angle C'B'M'}{\sin\angle C'A'M'} = \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}.$$

Точно так же, учитывая, что $C'M' \perp OM$, мы получим:

$$\frac{\sin\angle B'C'M'}{\sin\angle A'C'M'} = \frac{\sin\angle AOM}{\sin\angle BOM}.$$

Преобразуем это последнее выражение. Вычисляя двумя способами площади треугольников AOM и BOM и составляя отношение этих площадей, мы будем иметь:

$$\frac{S_{\triangle AOM}}{S_{\triangle BOM}} = \frac{\frac{1}{2}AO\cdot OM\cdot\sin\angle AOM}{\frac{1}{2}BO\cdot OM\cdot\sin\angle BOM} = \frac{\frac{1}{2}AM\cdot h_{AB}}{\frac{1}{2}BM\cdot h_{AB}}$$

(здесь h_{AB} есть общая высота треугольников AOM и BOM). Из последнего равенства без труда находим:

$$\frac{\sin\angle AOM}{\sin\angle BOM} = \frac{OB}{OA}\cdot\frac{AM}{BM}.$$

Таким образом, окончательно мы получаем, что отношение $\frac{A'M'}{B'M'}$ по абсолютной величине равно

$$\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC} : \left(\frac{OB}{OA}\cdot\frac{AM}{BM}\right) = \frac{1}{\frac{AM}{BM}}\cdot\left(\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}\cdot\frac{OA}{OB}\right).$$

Точно так же показывается, что отношения $\frac{B'N'}{C'N'}$ и $\frac{C'P'}{A'P'}$ по абсолютной величине равны соответственно

$$\frac{1}{\frac{BN}{CN}}\cdot\left(\frac{\sin\angle BOA}{\sin\angle COA}\cdot\frac{OB}{OC}\right)$$

и

$$\frac{1}{\frac{CP}{AP}}\cdot\left(\frac{\sin\angle COB}{\sin\angle AOB}\cdot\frac{OC}{OA}\right).$$

Перемножая эти три выражения, мы убеждаемся, что *выражения* $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$ *и* $\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}$ *обратны по абсолютной величине.*

Теперь остаётся только выяснить, как связаны между собой знаки этих выражений. Предположим для простоты, что центр O окружности S лежит внутри треугольника ABC. Так как $OA \perp B'C'$, $OB \perp A'C'$ и $OM \perp C'M'$, то когда OM между OA и OB, $C'M'$ будет проходить вне угла $A'C'B'$; когда же OM проходит вне угла AOB, $C'M'$ пройдёт между $C'A'$ и $C'B'$ (ср. расположение прямых на черт. 336). Отсюда следует, что отношения $\frac{AM}{BM}$ и $\frac{A'M'}{B'M'}$ имеют разные знаки. Точно так же показывается, что отношения $\frac{BN}{CN}$ и $\frac{B'N'}{C'N'}$, $\frac{CP}{AP}$ и $\frac{C'P'}{A'P'}$ имеют разные знаки; следовательно, *знаки выражений* $\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$ *и* $\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}$ *обязательно будут противоположны* [1]).

---

[1]) Можно показать, что это заключение остаётся в силе и в том случае, когда центр окружности S лежит вне треугольника ABC. Предоставляем читателю самостоятельно рассмотреть все возможные случаи.

Итак, окончательно имеем:

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} = -\frac{1}{\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP}}. \qquad (*)$$

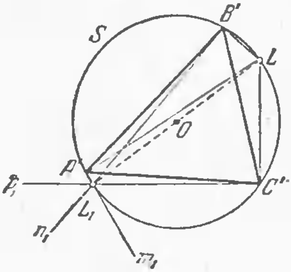
Но в силу свойства А полярного преобразования прямые $A'N'$, $B'P'$ и $C'M'$ пересекаются в одной точке (или параллельны) в том и только в том случае, когда M, N и P лежат на одной прямой. Отсюда и из формулы (*) следует, что полярное преобразование переводит теорему Менелая в теорему Чева и обратно — теорему Чева в теорему Менелая. Поэтому достаточно доказать только одну из этих двух теорем.

166. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, таких, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Возьмём окружность S с центром в точке O и произведём полярное преобразование плоскости относительно этой окружности. В силу свойства Б полярного преобразования при этом точки A и A_1 перейдут в параллельные прямые a' и a'_1, точки B и B_1 — в параллельные прямые b' и b'_1, точки C и C_1 — в параллельные прямые c' и c'_1.

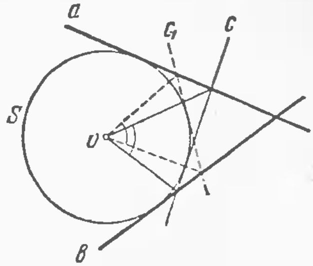
Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перейдут в треугольники с соответственно параллельными сторонами. Но такие треугольники центрально-подобны или получаются один из другого параллельным переносом (см. первый том книги, стр. 22—23 и 90); следовательно, прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке или параллельны. Отсюда в силу свойства А полярного преобразования вытекает, что точки пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ лежат на одной прямой.

Вторая часть теоремы Дезарга — утверждение о том, что если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ точки пересечения соответствующих сторон лежат на одной прямой, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке,— следует из первой части в силу принципа двойственности (для этого надо преобразовать чертёж, выражающий первое утверждение теоремы, с помощью полярного преобразования относительно произвольно расположенной окружности; см. выше задачу 159).

167. Произведём полярное преобразование относительно окружности S. Стороны BC, CA, AB треугольника ABC перейдут при этом в точки A', B', C' окружности S', так что описанный треугольник ABC перейдёт во вписанный треугольник $A'B'C'$ (т. е. стороны $\triangle ABC$ перейдут в вершины $\triangle A'B'C'$ и наоборот). Касательная l перейдёт в точку L окружности S; точки M, N и P — в прямые LA', LB' и LC'; точки M_1, N_1 и P_1 — в прямые m_1, n_1 и p_1, проходящие соответственно



Черт. 337.

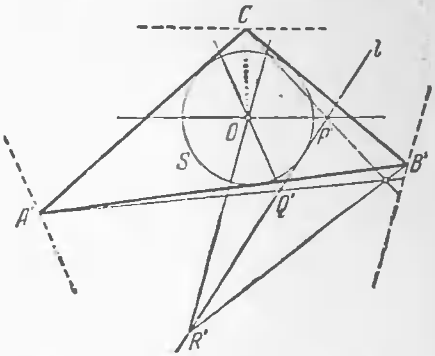


Черт. 338.

через A', B' и C' и в силу свойства В полярного преобразования перпендикулярные к $A'L$, $B'L$ и $C'L$ (черт. 337). Теорема, сформулированная в условии задачи, переходит при полярном преобразовании в следующую теорему: *прямые m_1, n_1 и p_1 пересекаются в одной точке окружности S*; таким образом, доказать достаточно только одну из этих двух теорем. Но то, что прямые m_1, n_1 и p_1 сходятся в одной точке окружности S, совершенно ясно: так как $m_1 \perp A'L$, то m_1 пересекает S в точке L_1, диаметрально противоположной L; точно так же доказывается, что и прямые n_1 и p_1 проходят через L_1. [Отметим, кстати, что из того, что L и L_1 — диаметрально противоположные точки окружности S, следует, что на черт. 83 в тексте $l_1 \parallel l$; см. свойство Б полярного преобразования.]

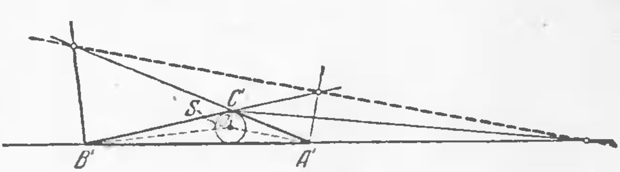
168. В теорему: *отрезки, высекаемые парой касательных a и b окружности S на переменной третьей касательной c, видны из центра S под постоянным углом* (черт. 338; сравните с черт. 81, *б* на стр. 101).

169. При полярном преобразовании относительно окружности S вписанный треугольник ABC переходит в описанный треугольник $A'B'C'$, произвольная точка L окружности S — в произвольную касательную l к той же окружности, а основание P перпендикуляра, опущенного из L на сторону AB, — в прямую $C'P'$, где P' — точка на касательной l, такая, что $\angle C'OP' = 90^\circ$, т. е. точка пересечения l с прямой OP', параллельной биссектрисе внешнего угла при вершине C' (ибо OC' — биссектриса внутреннего угла). Окончательно мы приходим к следующей теореме: *прямые, соединяющие вершины треугольника $A'B'C'$ с точками пересечения произвольной касательной l к вписанной окружности S треугольника с прямыми, проведёнными через центр O окружности S параллельно биссектрисам внешних углов при тех же вершинах, пересекаются в одной точке* (черт. 339).



Черт. 339.

170. При полярном преобразовании относительно описанной окружности S треугольник ABC переходит в описанный вокруг S

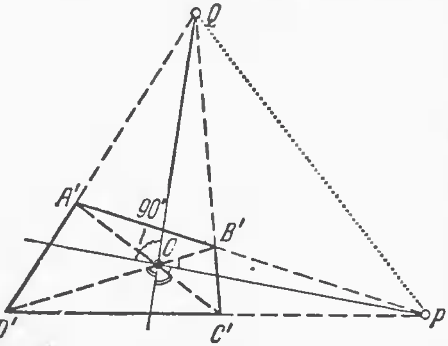


Черт. 340.

треугольник $A'B'C'$, середины сторон $\triangle ABC$ — в прямые, проведённые через вершины $\triangle A'B'C'$ перпендикулярно к биссектрисам OA', OB' и OC' (O — центр S), т. е. в биссектрисы внешних углов $\triangle A'B'C'$, медианы $\triangle ABC$ — в точки пересечения биссектрис внешних углов $\triangle A'B'C'$ с противоположными сторонами $\triangle A'B'C'$ (черт. 340). Итак, мы приходим к теореме:

точки пересечения биссектрис внешних углов произвольного треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой.

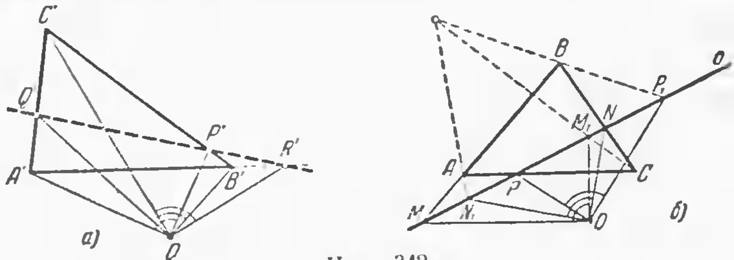
171. При полярном преобразовании относительно окружности S параллелограмм $ABCD$ переходит в четырёхугольник $A'B'C'D'$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с центром O окружности S (см. свойство Б полярного преобразования). Диагоналям AC и BD параллелограмма отвечают точки P и Q пересечения противоположных сторон четырёхугольника $A'B'C'D'$; если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны (т. е. параллелограмм является ромбом), то отрезок PQ виден из точки O под прямым углом (черт. 341; см. свойство В полярного преобразования). Сформулированная в условии теорема переходит при полярном преобразовании в следующую: *если отрезок, соединяющий точки P и Q, в которых пересекаются противоположные стороны четырёхугольника $A'B'C'D'$, виден из точки пересечения диагоналей O под прямым углом, то OP и OQ — биссектрисы углов, образованных диагоналями четырёхугольника.*



Черт. 341.

172. а) Полярное преобразование переводит треугольник ABC в новый треугольник $A'B'C'$, а высоты AP, BQ и CR треугольника ABC — в такие точки P', Q' и R' сторон треугольника $A'B'C'$, что $\angle A'OP' = \angle B'OQ' = \angle C'OR' = 90°$, где O — центр окружности S, относительно которой производится полярное преобразование (черт. 342, *а*; см. свойство В полярного преобразования). Таким образом, мы приходим к следующей теореме: *если через какую-либо точку O в плоскости треугольника $A'B'C'$ проведены три прямые,* *перпендикулярные к прямым OA', OB' и OC', то точки пересечения этих прямых с соответствующими сторонами треугольника лежат на одной прямой.*

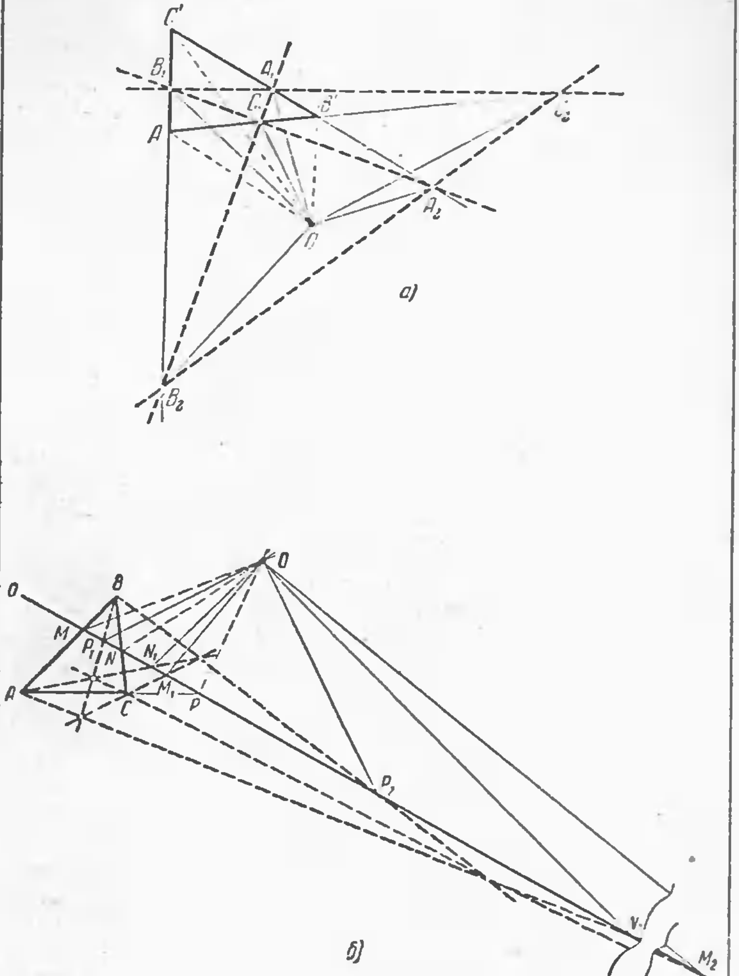
Примечание. Любопытная теорема получается, если применить ещё раз полярное преобразование к черт. 342, *а*. Она формулируется следующим образом: *пусть о — произвольная прямая и О — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, M, N и P — точки*



Черт. 342.

пересечения прямой о со сторонами AB, BC и CA треугольника, M_1, N_1 и P_1 — три такие точки прямой о, что $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \angle POP_1 = 90°$; в таком случае прямые AN_1, BP_1 и CM_1 пересекаются в одной точке (черт. 342, *б*).

б) Пусть прямая l является биссектрисой угла, образованного прямыми m и n. При полярном преобразовании прямые m, n и l переходят в точки M, N и L, лежащие на одной прямой, причём отрезки ML и NL видны из центра O окружности S, относительно которой производится преобразование, под равными или смежными углами (см. свойство В полярного преобразования); другими словами, L есть точка пересечения прямой MN с биссектрисой одного из двух углов, образованных прямыми OM и ON. Так как мы не знаем, на какой именно из этих двух биссектрис лежит точка L, то будем рассматривать сразу обе биссектрисы углов, образованных прямыми m и n; они переходят в точки пересечения прямой MN с биссектрисами двух смежных углов, образованных прямыми OM и ON. Поэтому оказывается удобным ввести в рассмотрение и биссектрисы внешних углов треугольника ABC и сформулировать теорему о точке пересечения биссектрис таким образом: шесть биссектрис внутренних и внешних углов треугольника ABC пересекаются по три в четырёх точках.



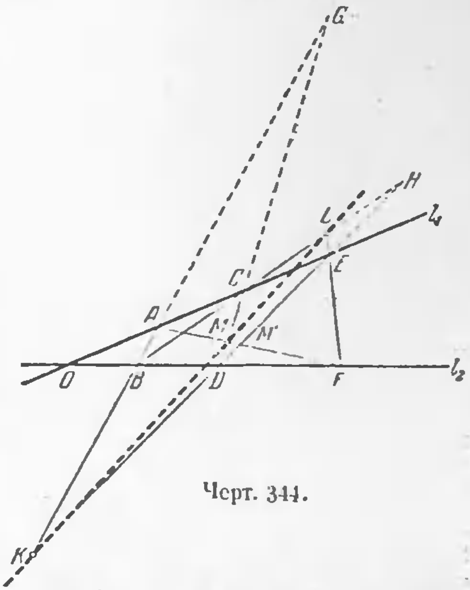
Черт. 343.

Эта теорема переходит при полярном преобразовании в следующее предложение: *каковы бы ни были четыре точки* A', B', C' *и* O (никакие три из которых не лежат на одной прямой), *точки пересечения шести биссектрис углов, образованных прямыми* OA' *и* OB', OB' *и* OC', OC' *и* OA' *с соответствующими сторонами треугольника* $A'B'C'$, *лежат по три на четырёх прямых* (черт. 343, *а*).

Примечание. Если применить ещё раз полярное преобразование к черт. 343, *а*, то мы придём к следующей теореме: *пусть* o — *произвольная прямая и* O — *произвольная точка в плоскости треугольника* ABC, M, N *и* P — *точки пересечения прямой* o *со сторонами* AB, BC *и* CA *треугольника*, M_1 *и* M_2, N_1 *и* N_2, P_1 *и* P_2 — *точки пересечения прямой* o *с биссектрисами углов, образованных соответственно* ON *и* OP, OP *и* OM, OM *и* ON; *в таком случае шесть прямых* AN_1, AN_2, BP_1, BP_2, CM_1 *и* CM_2 *пересекаются по три в четырёх точках* (черт. 343, *б*; сравните с примечанием к предыдущей задаче).

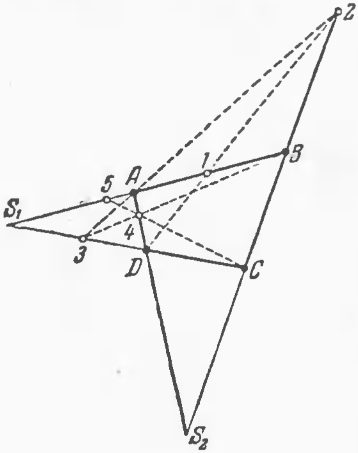
§ 5

174. Обозначим точки, лежащие на прямых l_1 и l_2, буквами A, C, E и B, D, F; точки пересечения прямых AB и ED, CD и AF, EF и CB — соответственно буквами K, M и L и точку пересечения прямых KL и CD — буквой M' (черт. 344; обозначения здесь взяты не те, что в формулировке задачи 129 а) с тем, чтобы было легче сопоставить это решение с решением задачи 179). Нам надо доказать, что M' совпадает с M. Обозначим ещё через G и H точки пересечения AB и CD, CB и ED и через O — точку пересечения l_1 и l_2 (может случиться, что некоторые из фигурирующих в решении точек являются «бесконечно удалёнными»). Спроектируем прямую CD из центра A



Черт. 344.

на прямую l_2; точки C, G, D и M перейдут при этом в точки O, B, D и F. Далее спроектируем прямую l_2 из центра E на прямую CB; точки O, B, D и F перейдут в точки C, B, H и L. Наконец, спроектируем прямую CB из центра K обратно на прямую CD; точки C, B, H и L перейдут в точки C, G, D и M'. В результате мы получим проективное преобразование прямой CD (состоящее из трёх последовательных проектирований), которое переводит точки C, G, D, M в точки C, G, D, M'. Но так как существует единственное проективное преобразование прямой, переводящее три данные точки в три известные точки, то *проективное преобразование прямой, оставляющее три её точки на месте* (в нашем случае точки C, G и D), *является тождественным преобразованием*. Отсюда и вытекает, что M' совпадает с M, что и требовалось доказать.

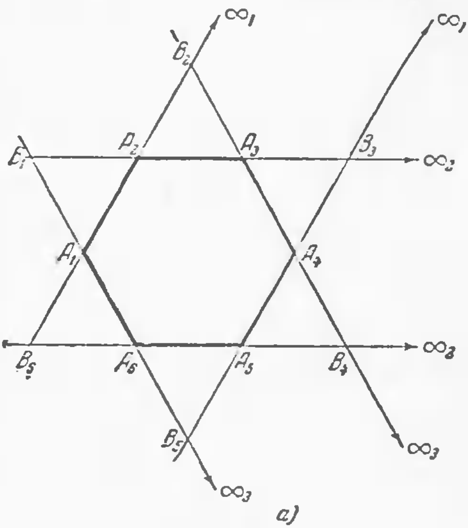


Черт. 345.

175. Обозначим точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$ через S_1 и S_2 (черт. 345). Проектирование прямой AB на прямую BC из центра D переводит точки S_1, A, B прямой AB в точки C, S_2, B прямой BC; проектирование прямой BC на прямую DC из центра A переводит эти точки в точки C, D, S_1 прямой CD; проектирование прямой CD на прямую DA из центра B переводит эти точки в точки S_2, D, A прямой DA; наконец, проектирование прямой DA на прямую AB из центра C переводит точки S_2, D, A в точки B, S_1, A первоначальной прямой AB. Таким образом, четырёхкратное проектирование определяет проективное преобразование прямой AB, при котором точки S_1, A, B переходят соответственно в точки B, S_1, A. При двукратном повторении этого проективного преобразования точки S_1, A, B переходят в точки A, B, S_1 (сначала в B, S_1, A; затем в A, B, S_1); при трёхкратном повторении его точки S_1, A, B переходят сами в себя (сначала в B, S_1, A; затем в A, B, S_1; затем в S_1, A, B). Но так как существует единственное проективное преобразование прямой, переводящее три данные точки в три известные точки, то проективное преобразование, оставляющее три точки прямой на месте, есть тождественное преобразование. Следовательно, после трёхкратного обхода всех сторон четырёхугольника произвольная точка I стороны AB переходит сама в себя, что и требовалось доказать.

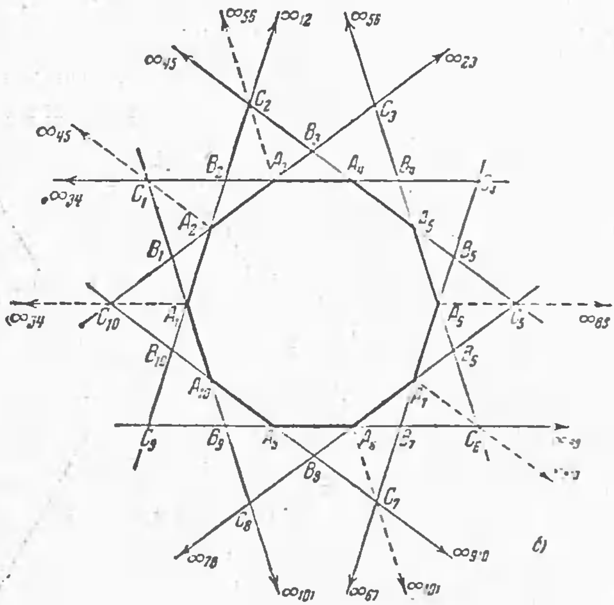
176. а) Эта задача представляет собой частный случай предыдущей (когда рассматриваемый четырёхугольник является квадратом; в этом случае точки S_1 и S_2 решения предыдущей задачи будут бесконечно удалёнными).

б) Обозначим точки пересечения продолжений сторон шестиугольника соответственно через B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 и B_6 (черт. 346, *а*); бесконечно удалённые точки, отвечающие направлениям A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4, обозначим соответственно через ∞_1, ∞_2 и ∞_3. При проектировании прямой A_1A_2 на прямую A_2A_3 из центра A_6 точки A_1, A_2, B_6, ∞_1 прямой A_1A_2 переходят в точки B_1, A_2, ∞_2, A_3 прямой A_2A_3; при последующем проектировании из центра A_1 они переходят в точки ∞_3, B_2, A_4, A_3 прямой A_3A_4; затем в точки A_5, ∞_1, A_4, B_3 прямой A_4A_5; затем в точки A_5, A_6, B_4, ∞_2 прямой A_5A_6; затем в точки B_5, A_6, ∞_3, A_1 прямой A_6A_1; наконец, в точки ∞_1, B_6, A_2, A_1 первоначальной прямой A_1A_2. Таким образом, шестикратное проектирование определяет проективное преобразование прямой A_1A_1, переводящее точки A_1, A_2, B_6, ∞_1 в точки ∞_1, B_6, A_2, A_1. Двукратное применение этого проективного преобразования переводит точки A_1, A_2, B_6, ∞_1 в те же точки



Черт. 346, *а*.

A_1, A_2, B_6, ∞_1 (сначала в ∞_1, B_6, A_2, A_1; затем снова в A_1, A_2, B_6, ∞_1), т. е. представляет собой тождественное преобразование прямой A_1A_2 (для того чтобы это доказать, достаточно было бы убедиться, что три точки прямой остаются на месте; сравните с решением задачи 175).



Черт. 346, *б*.

в) Обозначим точки пересечения продолжений сторон десятиугольника буквами B_1, B_2, ..., B_{10}; C_1, C_2, ..., C_{10}, как указано на черт. 346, *б*; бесконечно удалённые точки прямых A_1A_2, A_2A_3 и т. д. условимся обозначать значками ∞_{12}, ∞_{23} и т. д. Проектирование с центром A_{10} переводит точки A_1, A_3, B_{10} прямой A_1A_2 в точки B_1, A_2, C_{10} прямой A_2A_3; при последующем проектировании из центра A_1 они переходят в точки C_1, B_2, ∞_{34} прямой A_3A_4; затем в точки ∞_{45}, C_2, A_5 прямой A_4A_5; затем в точки A_6, ∞_{56}, A_5 прямой A_5A_6; затем в точки A_6, A_7, B_5 прямой A_6A_7; затем в точки B_6, A_7, C_5 прямой A_7A_8; затем в точки C_6, B_7, ∞_{89} прямой A_8A_9; затем в точки $\infty_{9,\,10}$, C_7, A_{10} прямой A_9A_{10}; затем в точки A_1, $\infty_{10,\,1}$, A_{10} прямой $A_{10}A_1$; наконец, в точки A_1, A_2, B_{10} первоначальной прямой A_1A_2. Таким образом, десятикратное проектирование определяет проективное преобразование прямой A_1A_2, при котором три точки A_1, A_2, B_{10} этой прямой остаются на месте, т. е. тождественное преобразование прямой A_1A_2 (ср. с решением задачи б)).

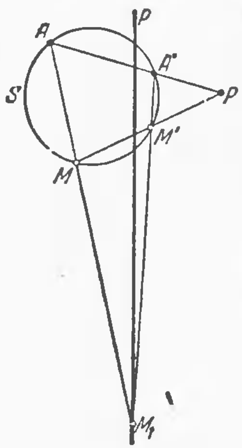
177. Если спроектировать окружность S на прямую AB из точки M, то четвёрка точек A, B, N, P окружности перейдёт в точки A, B, O, E прямой AB; если спроектировать S на AB из точки Q, то та же четвёрка точек перейдёт в точки A, B, F, O. Следовательно, двойные отношения четвёрок точек A, B; O, E и A, B; F, O равны

$$\frac{AO}{BO}:\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{BF}:\frac{AO}{BO}=\frac{BO}{AO}:\frac{BF}{AF}.$$

Таким образом, двойные отношения четвёрок точек A, B; O, E и B, A; O, F тоже равны. Отразим теперь четвёрку точек A, B, O, E симметрично от середины O хорды AB; при этом она перейдёт в четвёрку точек B, A, O, F_1, где F_1 симметрична E относительно O. Таким образом, двойные отношения четвёрок точек B, A; O, F и B, A; O, F_1 равны, откуда следует, что F совпадает с F_1, что и требовалось доказать.

П р и м е ч а н и е. Для решения этой задачи можно также воспользоваться теоремой 1 § 3 этой главы (стр. 71): спроектировав черт. 93 в тексте книги на другую плоскость π' так, чтобы окружность S перешла в новую окружность S', а точка O — в центр O' окружности S', и воспользовавшись затем свойством В центрального проектирования (см. выше, стр. 49), мы легко докажем равенство двойных отношений четвёрок точек A, B; O, E и B, A; O, F.

178. Докажем прежде всего, что *преобразование окружности S, при котором каждая точка M переходит во вторую точку M' пересечения с окружностью S прямой PM, где P — какая-то фиксированная точка* (это преобразование мы будем называть п р о е к т и р о в а н и е м о к р у ж н о с т и н а с е б я и з т о ч к и P), *является проективным преобразованием* (черт. 347). Действительно, выберем какую-то определённую (безразлично какую!) пару точек A и A', соответствующих друг другу в силу нашего преобразования, и пусть M и M' — другая пара соответствующих точек. В силу теоремы 1 § 4 (см. выше, стр. 84) точка пересечения прямых AM и $A'M'$ лежит на фиксированной прямой p — поляре точки P относительно окружности S. Поэтому преобразование, переводящее M в M', можно описать так: сначала проектируем окружность S из фиксированной точки A этой окружности на прямую p (точка M переходит при этом в точку M_1; черт. 347), а затем проектируем прямую p обратно на окружность S из другой точки A' (точка M_1 переходит при этом в M'). Отсюда следует, что рассматриваемое преобразование является проективным.



Черт. 347.

Теперь перейдём к доказательству теорем задач 140а) — в).

а) Рассмотрим следующую последовательность проективных преобразований окружности: сначала окружность проектируется сама на себя из точки P, затем ещё раз проектируется на себя из точки Q, затем ещё раз проектируется на себя из точки O. Нетрудно видеть, что вершины A, B, C, D вписанного четырёхугольника преобразуются при этом следующим образом: $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$, $B \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow B$, $C \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow C$ и $D \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow D$. Таким образом, все эти четыре точки в результате полученного проективного преобразования [1]) переходят сами в себя, откуда следует, что это преобразование является тождественным (сравните с решением задач 175—176; достаточно было бы убедиться, что три точки окружности в результате нашего преобразования остаются на месте). Поэтому если проектирование окружности S на себя из точки P переводит какую-либо её точку E в точку F, а проектирование из точки Q переводит точку F в точку G, то проектирование из точки O переводит G в E. Но это и означает, что если две стороны

[1]) Последовательность проективных преобразований окружности (или прямой) представляет собой снова проективное преобразование (так как эта последовательность, очевидно, не меняет двойного отношения четырёх точек).

EF и FG вписанного треугольника проходят через точки P и Q, то сторона EG проходит через O.

Точно так же показывается, что последовательность проектирований окружности на себя с центрами O, P и Q есть тождественное преобразование (так как она оставляет вершины четырёхугольника $ABCD$ на месте); отсюда следует, что если две стороны вписанного треугольника проходят соответственно через точки O и P, то третья сторона проходит через Q.

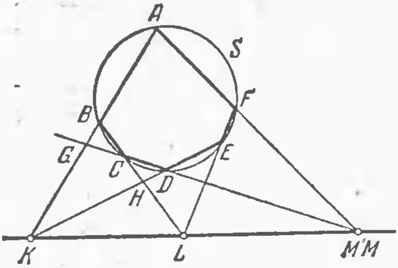
б) Рассмотрим последовательность проектирований окружности S на себя из точек P, Q, снова P и снова Q. Вершины четырёхугольника $ABCD$ преобразуются при этом следующим образом: $A \to B \to C \to D \to A$, $B \to A \to D \to C \to B$, $C \to D \to A \to B \to C$ и $D \to C \to B \to A \to D$. Таким образом, мы видим, что это проективное преобразование окружности является тождественным преобразованием. Поэтому, если проектирование окружности S на себя из точки P переводит точку A_1 в точку B_1, проектирование из точки Q переводит B_1 в C_1, проектирование из точки P переводит C_1 в D_1, то проектирование из точки Q переводит D_1 в A_1. Но это и означает, что если стороны A_1B_1 и C_1D_1 вписанного в окружность четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ проходят через точку P, а сторона B_1C_1 проходит через точку Q, то и сторона D_1A_1 тоже проходит через точку Q.

Точка O пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ есть центр проектирования окружности на себя, равносильного последовательности проектирований окружности на себя из точек P и Q. Но и точка пересечения диагоналей построенного четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$ обладает тем же свойством; поэтому она обязательно совпадает с O.

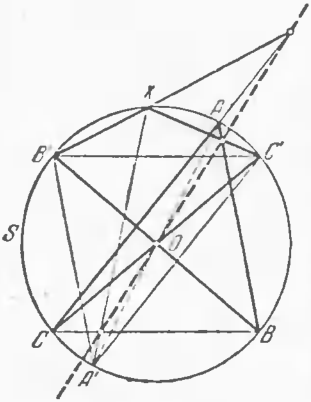
в) Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы задачи 140б) и предоставляется читателю.

179. Обозначим точки пересечения AB и DE, BC и EF, CD и FA соответственно буквами K, L, M и буквой M' — точку пересечения KL и CD; нам надо доказать, что M' совпадает с M. Обозначим ещё через G и H точки пересечения AB и CD, BC и DE (черт. 348). Спроектируем точки G, C, D и M прямой CD из точки A на окружность S; тогда они перейдут в точки B, C, D и F. Далее спроектируем точки B, C, D, F из E на прямую BC; они перейдут в точки B, C, H, L. Наконец, спроектируем точки B, C, H, L из точки K

на прямую CD; они перейдут в точки G, C, D, M'. Следовательно, существует проективное преобразование прямой CD, переводящее четвёрку точек G, C, D, M в четвёрку точек G, C, D, M'; отсюда следует, что точка M' совпадает с точкой M (сравните с решением задачи 174).

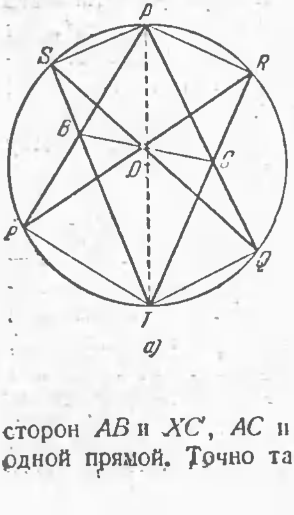


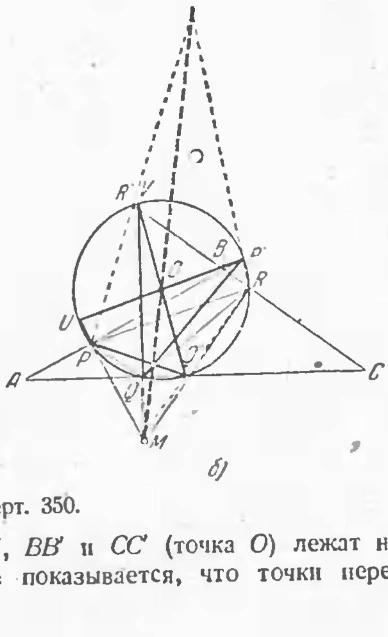
Черт. 348.



Черт. 349.

180. а) Рассмотрим вписанный в окружность шестиугольник $ABB'XC'C$ (черт. 349; обратите внимание на порядок вершин!). В силу теоремы Паскаля точки пересечения





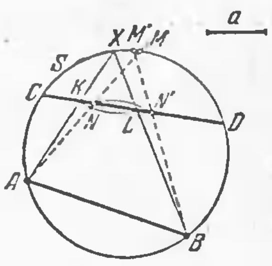
Черт. 350.

сторон AB и XC', AC и XB', BB' и CC' (точка O) лежат на одной прямой. Точно так же показывается, что точки пересечения AB и XC', BC и XA' и точка O лежат на одной прямой, откуда и следует утверждение задачи.

б) Рассмотрим шестиугольник $APRTSQ$ (обратите внимание на порядок вершин!), вписанный в окружность, диаметром которой является отрезок AT (черт. 350, *а*). Из теоремы Паскаля следует, что точки пересечения сторон AP и ST, AQ и RT, RP и QS лежат на одной прямой. А это нам и требовалось доказать.

в) Пусть U и V — точки пересечения PM и $P'O$, QM и $Q'O$ (черт. 350, *б*). Так как $\angle P'PM = \angle Q'QM = 90°$, то точки U и V лежат на окружности S (они диаметрально противоположны P' и Q'). Рассмотрим теперь вписанный в эту окружность шестиугольник $P'QVQ'PU$ (обратите внимание на порядок вершин!). В силу теоремы Паскаля точки пересечения сторон QV и PU, $Q'V$ и $P'U$, $P'Q$ и $Q'P$ этого шестиугольника, т. е. точки M, O и точка пересечения $P'Q$ и $Q'P$, лежат на одной прямой. Точно так же доказывается, что точки пересечения $P'R$ и PR', $Q'R$ и QR' лежат на прямой MO.

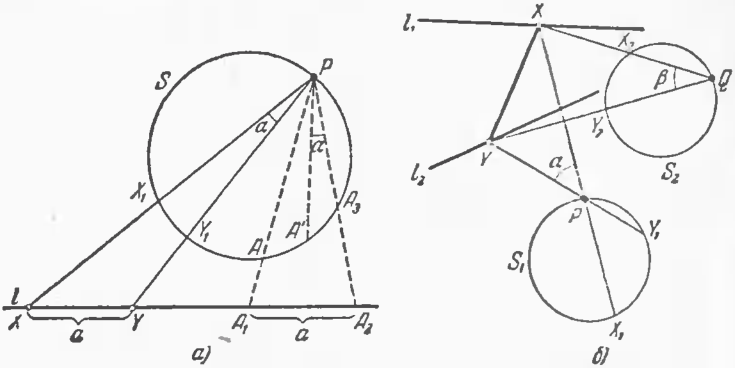
181. а) Рассмотрим следующее проективное преобразование окружности S: точка M окружности проектируется из центра A на прямую CD; затем полученная точка N прямой CD сдвигается вдоль этой прямой на расстояние $NN' = a$ (проективное преобразование прямой CD); наконец, точка N' проектируется из центра B в точку M' окружности S (черт. 351). Искомая точка X является неподвижной точкой этого проективного преобразования; её можно определить, найдя, в какие три точки переходят при этом преобразовании три произвольно выбранные точки окружности S. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.



Черт. 351.

б) Решение отличается от решения задачи а) лишь тем, что вместо сдвига вдоль прямой CD на расстояние a следует использовать симметрию относительно данной точки E (тоже являющуюся проективным преобразованием прямой CD).

182. а) Проведём произвольную окружность S, проходящую через точку P; пусть искомые прямые PX и PY пересекают её в точках X_1 и Y_1 (черт. 352, *а*). Рассмотрим следующее проективное преобразование окружности S: окружность проектируется из точки P на прямую l, затем прямая сдвигается параллельно вдоль самой себя на расстояние a, затем прямая



Черт. 352.

снова проектируется на окружность из точки P и, наконец, окружность поворачивается вокруг центра на угол 2α (в таком направлении, чтобы точки пересечения прямой l с лучами PM, где M — точка окружности S, при повороте точки M двигались в направлении, обратном направлению параллельного переноса) [1]). Очевидно, что точка X_1 преобразуется при этом следующим образом: $X_1 \to X \to Y \to Y_1 \to X_1$ (ибо $\smile X_1Y_1 = 2\angle X_1PY_1 = 2\alpha$), поэтому она является неподвижной точкой этого преобразования. Выберем три произвольные точки A, B, C окружности S и построим три точки A', B', C', в которые они переходят в результате нашего преобразования (см. черт. 352, *а*: A_1 — точка пересечения PA с l; $A_1A_2 = a$; A_3 — точка пересечения PA_2 с S, $\smile A_3A' = 2\alpha$; так же строятся точки B' и C'). Точка X_1 может быть построена как неподвижная точка проективного преобразования

[1]) Это преобразование является проективным, так как каждое из преобразований, из которых оно состоит, не меняет двойного отношения четырёх точек.

окружности S, переводящего три точки A, B, C в три точки A', B', C'.

Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

б) Проведём произвольные окружности S_1 и S_2, проходящие соответственно через точки P и Q; пусть PX и PY пересекают окружность S_1 в точках X_1 и Y_1, а QX и QY окружность S_2 в точках X_2 и Y_2 (черт. 352, *б*). Рассмотрим следующее проективное преобразование окружности S_1: S_1 проектируется из точки P на прямую l_1, затем l_1 проектируется из точки Q на окружность S_2; затем S_2 поворачивается вокруг центра на угол 2β; затем S_2 проектируется из точки Q на прямую l_2; затем l_2 проектируется из точки P на окружность S_1; наконец, S_1 поворачивается вокруг центра на угол 2α. Очевидно, что точка X_1 преобразуется при этом следующим образом: $X_1 \longrightarrow X \longrightarrow X_2 \longrightarrow Y_2 \longrightarrow Y \longrightarrow Y_1 \longrightarrow X_1$; поэтому она является **неподвижной точкой** этого преобразования. Выберем три произвольные точки A_1, B_1, C_1 окружности S_1 и построим точки A_1', B_1', C_1', в которые они переходят в результате нашего преобразования. Точка X_1 может быть найдена как неподвижная точка проективного преобразования окружности S_1, переводящего три точки A_1, B_1, C_1 в три точки A_1', B_1', C_1'.

Так как вращение окружности S_1 на угол 2α можно производить в любом из двух направлений, то всего задача может иметь до четырёх решений.

183. а) Произведём последовательно n проектирований окружности на себя из точек M_1, M_2, ... , M_n (см. начало решения задачи 178). При этом, очевидно, вершина A_1 многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ (см. черт. 99, *а* в тексте) перейдёт последовательно в точки A_2, A_3, ... , A_n и, наконец, снова в A_1; следовательно, A_1 есть **неподвижная точка** проективного преобразования окружности, состоящего из n последовательных проектирований её на себя. Найдя точки A', B', C', в которые переходят в результате этого проективного преобразования какие-то три произвольно выбранные точки A, B, C окружности, мы сможем построить A_1 как неподвижную точку проективного преобразования, переводящего точки A, B, C в точки A', B', C'; после этого нахождение остальных вершин n-угольника уже не будет представлять затруднений.

Задача может иметь два, одно или ни одного решения; в частном случае, когда полученное проективное преобразование окружности является тождественным, задача может оказаться и неопределённой (относительно таких частных случаев см. задачи 140а), б) из § 3, а также решение задачи 40а) из § 2 гл. II первой части книги).

Интересно отметить, что построение многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ может быть осуществлено без помощи циркуля (одной линейкой).

Если какие-либо из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ являются «бесконечно удалёнными», т. е. если нам известны направления некоторых сторон искомого n-угольника, а не точки, через которые эти стороны проходят, то соответствующие проектирования окружности на себя заменяются симметриями относительно диаметров, перпендикулярных к известным направлениям сторон (ср. с решением задачи 40а) первой части книги, где рассматривается случай, когда все точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ являются «бесконечно удалёнными»).

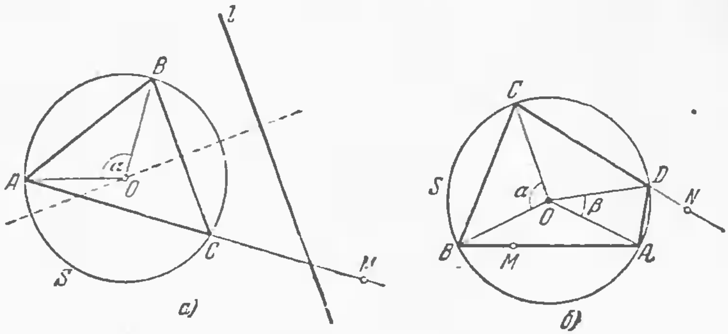
б) Преобразуем полярно относительно заданной окружности прямые $l_1, l_2, \ldots, l_n$; они перейдут при этом в точки $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Построим теперь многоугольник $A'_1A'_2 \ldots A'_n$, вписанный в данную окружность, стороны которого проходят через точки $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (см. задачу а)). Из свойства А полярного преобразования (см. выше, стр. 97) вытекает, что многоугольник, стороны $a_1, a_2, \ldots, a_n$ которого являются полярами вершин $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ первого многоугольника, удовлетворяет условию задачи.

Как и в случае задачи а), мы можем иметь два, одно, ни одного или бесконечно много решений задачи. Это построение тоже может быть осуществлено при помощи одной линейки (без циркуля).

184. а) Обозначим через α центральный угол, отвечающий хорде окружности S известной длины AB; пусть, далее, прямая l определяет направление стороны BC и M — точка, через которую должна проходить сторона AC (черт. 353, a). Рассмотрим следующее проективное преобразование окружности: S поворачивается вокруг центра на угол α, затем отражается симметрично от диаметра, перпендикулярного к l, затем проектируется на себя из точки M (см. начало решения задачи 178).

При этом, очевидно, точка A переходит последовательно в точки B, C и снова в A; значит, A есть **неподвижная точка** этого преобразования. Итак, A можно найти как неподвижную точку известного проективного преобразования (ср. с решением задач 181—183). Задача может иметь два, одно или ни одного решения (нетрудно показать, что рассматриваемое проективное преобразование окружности не может быть тождественным).

б) Пусть стороны AB и CD четырёхугольника проходят через точки M и N; центральные углы окружности, отвечающие известным хордам BC и AD, равны α и β (черт. 353, *б*).



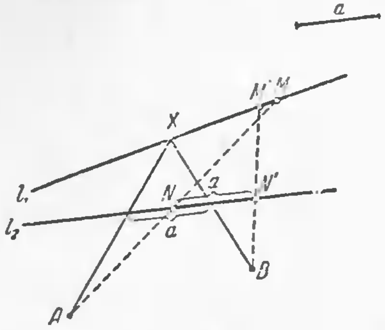
Черт. 353.

Рассмотрим следующее проективное преобразование окружности: S проектируется на себя из точки M, затем поворачивается вокруг центра на угол α, затем проектируется на себя из точки N, наконец, ещё раз поворачивается вокруг центра на угол β. Очевидно, что точка A преобразуется при этом следующим образом: $A \to B \to C \to D \to A$; значит, A есть **неподвижная точка** этого проективного преобразования окружности, что позволяет её построить.

Задача может иметь два, одно или ни одного решения; в исключительных случаях она может являться неопределённой.

185. а) Рассмотрим следующее проективное преобразование прямой l_1: точка M этой прямой проектируется из центра A на прямую l_2; затем полученная точка N прямой l_2 сдвигается вдоль l_2 на расстояние $NN' = a$; наконец, точка N'

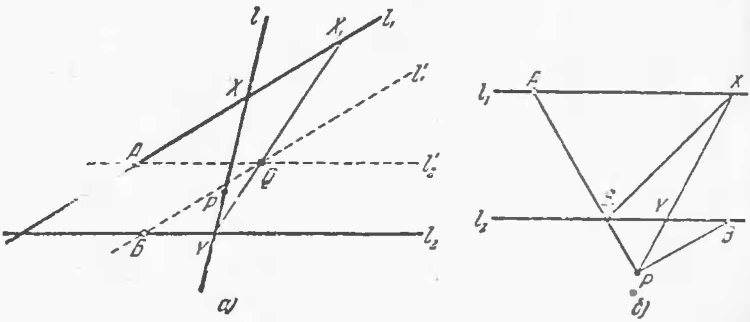
проектируется из центра B в точку M' прямой l_1 (черт. 354). Искомая точка X есть неподвижная точка этого проективного преобразования; отсюда её можно определить (ср. с решением задачи 181а)). Задача может иметь два, одно или ни одного решения.



Черт. 354.

б) Решение отличается от решения задачи а) лишь тем, что вместо сдвига прямой l_2 на расстояние a следует использовать симметрию относительно данной точки E этой прямой (ср. с решением задачи 181б)).

186. а) Пусть X и Y — точки пересечения искомой прямой с прямыми l_1 и l_2 (черт. 355, a). Спроектируем прямую l_1 на прямую l_2 из точки P. Совместим, далее, прямую l_2 с прямой l_1 таким образом, чтобы точка B совпала с точкой A, и затем подвергнем прямую l_2 центрально-подобному преобразованию с центром подобия A и коэффициентом подобия $\frac{m}{n}$.



Черт. 355.

Полученное преобразование прямой l_1 будет проективным, так как оно составляется из проектирования и центрально-подобного преобразования. Точка X в результате этого преобразования перейдёт сначала в точку Y, а затем снова в точку X; следовательно, X является неподвижной точкой этого проективного преобразования и поэтому может быть найдена (ср. с решениями задач 181—184).

Так как центрально-подобное преобразование можно производить так же с коэффициентом $-\frac{m}{n}$, то задача может иметь до четырёх решений; в частном случае, когда полученное проективное преобразование будет тождественным, задача оказывается неопределённой (это будет, если прямая l_1 центрально-подобна l_2 с центром P и коэффициентом $\pm\frac{m}{n}$ и точка A соответствует в этом центрально-подобном преобразовании точке B).

б) Предположим, что l_1 не параллельна l_2, и спроектируем прямую l_1 на прямую l_2 из точки P; при этом искомая точка X прямой l_1 перейдёт в точку Y прямой l_2. Далее спроектируем прямую l_2 обратно на l_1 из точки Q пересечения прямых $l'_1 \parallel l_1$ и $l'_2 \parallel l_2$, проведённых соответственно через точки B и A (черт. 355, *а*). Пусть X_1 есть точка прямой l_1, в которую перешла при этом точка Y прямой l_2. Из подобия треугольников AQX_1 и BYQ мы получаем $\frac{AX_1}{AQ}=\frac{BQ}{BY}$, т. е.

$$AX_1 \cdot BY = AQ \cdot BQ = p^2,$$

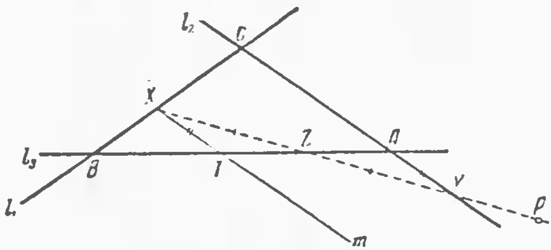
где p^2 можно определить. Если после этого произвести центрально-подобное преобразование прямой l_1 с центром A и коэффициентом $\frac{k^2}{p^2}$, то точка X_1 перейдёт в такую точку X', что $AX' = \frac{k^2}{p^2}\cdot AX_1 = \frac{k^2}{p^2}\cdot\frac{p^2}{BY} = \frac{k^2}{BY} = AX$, т. е. X' совпадёт с X. Таким образом, точка X есть неподвижная точка рассматриваемого проективного преобразования прямой l_1, что позволяет её построить.

Так как центрально-подобное преобразование можно производить также с коэффициентом $-\frac{k^2}{p^2}$, то задача может иметь до четырёх решений (тождественным рассматриваемое проективное преобразование в этом случае быть не может).

Если $l_1 \parallel l_2$ и B_1 — точка пересечения PA с l_2, то $B_1Y = \frac{PB_1}{PA}\cdot AX$. Поэтому условие $AX\cdot BY = k^2$ равносильно следующему: $BY\cdot B_1Y = \frac{PB_1}{PA}\cdot k^2$ (черт. 355, *б*). А так как, кроме произведения $BY \cdot B_1Y$ отрезков BY и B_1Y, нам известна ещё сумма (или разность) этих отрезков, равная BB_1, то эти отрезки легко построить.

Примечание. В условии настоящей задачи можно также требовать, чтобы искомая прямая имела известное направление (а не проходила через заданную точку P); в решении при этом придётся заменить центральное проектирование с центром P параллельным проектированием.

187. Пусть A, B, C — попарные точки пересечения прямых l_1, l_2 и l_3; X, Y, Z — точки пересечения искомой прямой l с прямыми l_1, l_2 и l_3; по предположению, $XZ = ZY$ (черт. 356). Пусть T — точка пересечения прямой l_3 с прямой



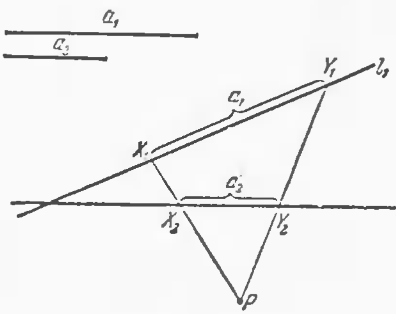
Черт. 356.

$m \parallel l_2$, проходящей через точку X; очевидно, что $XT = AY$. Из подобия треугольников XTB и CAB следует, что $\frac{XB}{XT} = \frac{CB}{CA}$, откуда $\frac{BX}{YA} = \frac{CB}{CA}$, т. е. известно. Поэтому наша задача сводится к тому, чтобы провести через точку P прямую, пересекающую две заданные прямые l_1 и l_2 соответственно в точках X и Y, таких, что отношение $\frac{BX}{YA}$ равно $\frac{CB}{CA}$, т. е. к задаче 186а).

Предоставляем читателям самим разобрать тот случай, когда какие-нибудь две из прямых l_1, l_2, l_3 или все три эти прямые являются параллельными.

188. Рассмотрим проективное преобразование прямой l_1, которое составляется следующим образом: l_1 проектируется на l_2 из точки P, затем l_2 сдвигается параллельно себе на расстояние a_2, затем l_2 снова проектируется на l_1 из точки P, наконец, l_1 сдвигается параллельно себе на расстояние a_1. Очевидно, что искомая точка X_1 преобразуется при этом следующим образом (черт. 357): $X_1 \to X_2 \to Y_2 \to Y_1 \to X_1$; значит, X_1 есть неподвижная точка этого преобразования, что позволяет её построить (ср. с решением предыдущих задач).

Так как сдвиг прямой l_2 можно произвести в двух направлениях, то задача может иметь до четырёх решений. В частном случае, когда полученное проективное преобразование будет тождественным, задача может оказаться неопределённой (так будет обстоять дело, когда прямая l_1 центрально-подобна прямой l_2 с центром P и коэффициентом $\pm \frac{a_1}{a_2}$).



Черт. 357.

189. Спроектируем прямую l_1 на прямую l_2 из точки M_1, затем прямую l_2 на прямую l_3 из точки M_2, затем l_3 на l_4 из точки M_3 и т. д., наконец, прямую l_n снова на прямую l_1 из точки M_n (см. черт. 101 в тексте). Неподвижные точки полученного проективного преобразования прямой l_1 будут являться вершинами искомого n-угольника (сравните с решением задачи 183а)). Задача может иметь два, одно или ни одного решения; в исключительных случаях, когда полученное преобразование прямой l_1 будет тождественным, задача оказывается неопределённой.

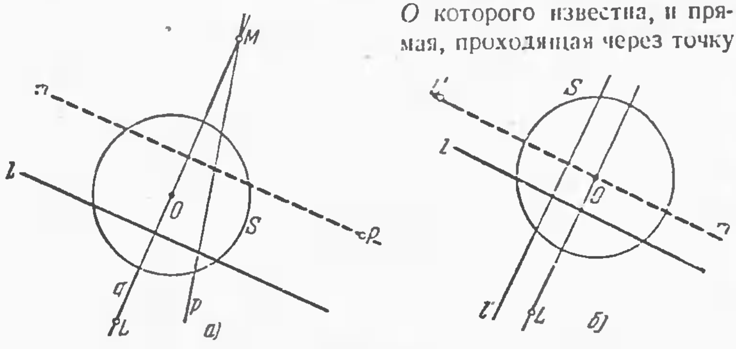
Если для некоторых сторон искомого n-угольника известно их направление, а не точка, через которую проходит сторона, то соответствующее центральное проектирование заменяется параллельным.

190. а) Можно считать, что положение искомой прямой m (см. черт. 358, *а*) определяется двумя точками: точкой P и бесконечно удалённой точкой прямой l. Следовательно, точка M, являющаяся полюсом m относительно заданной окружности S, является точкой пересечения поляры p точки P и поляры q бесконечно удалённой точки прямой l. Прямую p нетрудно построить при помощи одной линейки (см. выше стр. 87).

Что же касается прямой q, то она должна проходить через полюс L заданной прямой l, который мы можем найти при помощи одной линейки, и через полюс «бесконечно удалённой прямой» плоскости, т. е. через известный центр O окружности S.

Таким образом, положение точки M определяется при помощи одной линейки. Зная же эту точку, найдём также одной линейкой искомую прямую m, являющуюся полярой точки M относительно окружности S.

Очевидно, что это решение не проходит в том случае, когда прямая l проходит через центр O окружности S. Но тогда пересечение этой прямой с окружностью S определяет некоторый отрезок, середина O которого известна, и прямая, проходящая через точку



Черт. 358.

P и параллельная прямой l, может быть построена так, как это указано в решении задачи 109б) из § 1 настоящей главы.

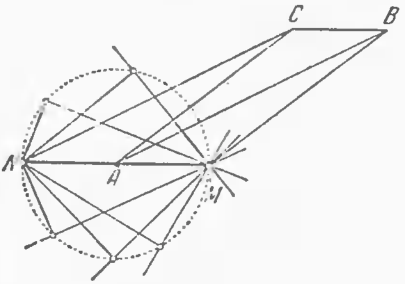
Предложенное построение не проходит также и в том случае, когда заданная точка P совпадает с центром O окружности S. В этом случае построение производится следующим образом: строим точку L, являющуюся полюсом заданной прямой l относительно окружности S. Прямая OL перпендикулярна к прямой l. Проводим, далее, произвольную прямую l', параллельную OL, и строим полюс L' прямой l' относительно окружности S. Прямая OL' перпендикулярна к l' и, следовательно, параллельна l, т. е. является искомой прямой (черт. 358, б).

б) Проведём через точку M прямую, параллельную AB, а через точку B — прямую, параллельную AM; точку пересечения этих прямых обозначим буквой N. Очевидно, что отрезок MN будет искомым.

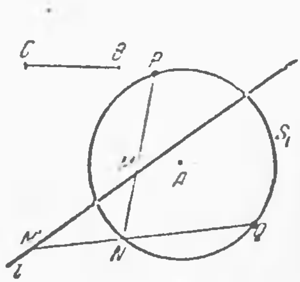
в) Пусть L есть полюс прямой l относительно окружности S. Прямая OL перпендикулярна к прямой l. Проведя через точку P прямую, параллельную прямой OL, найдём искомый перпендикуляр.

Это решение не проходит в том случае, когда прямая l проходит через центр O окружности S; однако в этом случае мы можем построить прямую l', параллельную l, и опустить из P перпендикуляр на эту прямую.

191. Проведём через заданную точку A прямую, параллельную прямой BC, и отложим на этой прямой отрезки MA и AN, равные по величине отрезку BC (см. задачу 190б)). Отрезок MN будет диаметром искомой окружности. Проведём теперь через точку M произвольную прямую и опустим на неё перпендикуляр из точки N (см. задачу 190в)). Основание этого перпендикуляра будет точкой искомой окружности. Проводя через точку M различные прямые, мы можем получить таким образом сколь угодно много точек искомой окружности (черт. 359).



Черт. 359.

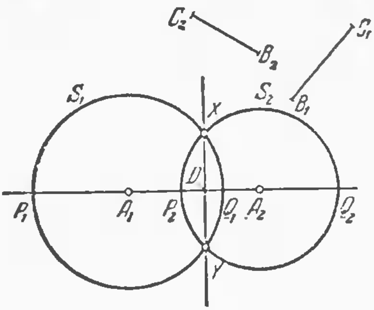


Черт. 360.

192. Пусть P и Q — две произвольные точки окружности S_1 (черт. 360). Спроектируем прямую l из точки P на окружность S_1, а затем спроектируем окружность S_1 из точки Q обратно на прямую l. Очевидно, точки пересечения окружности S_1 с прямой l будут неподвижными точками полученного проективного преобразования [1]). Мы легко можем определить, куда переводит наше проективное преобразование

[1]) Это преобразование будет проективным, так как оно, очевидно, сохраняет двойное отношение четырёх точек (см. выше стр. 113).

какие-нибудь три точки R, S, T прямой l, спроектировав произвольные три точки $\overline{R}$, $\overline{S}$, $\overline{T}$ окружности S_1 на прямую l сначала из точки P в точки R, S, T, а затем из точки Q в точки R', S', T' (построение пяти точек P, Q, $\overline{R}$, $\overline{S}$, $\overline{T}$ окружности S_1 производится по методу задачи 191). Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы определить с помощью одной линейки неподвижные точки проективного преобразования прямой l, определённого тем, что три известные точки R, S, T переходят в три другие известные точки R', S', T' прямой. Решение этой задачи при наличии на плоскости некоторой окружности S осуществляется с помощью одной линейки (см. выше стр. 121).



Черт. 361.

193. Найдём прежде всего точки P_1, Q_1 и P_2, Q_2 пересечения линии центров A_1A_2 с окружностями S_1 и S_2 (черт. 361; см. задачу 192). Очевидно, что если отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 лежат один вне другого, либо один внутри другого, то окружности S_1 и S_2 не пересекаются. Оставляя в стороне эти случаи, предположим, что точка P_2 лежит внутри отрезка P_1Q_1, а точка Q_1 — внутри отрезка P_2Q_2.

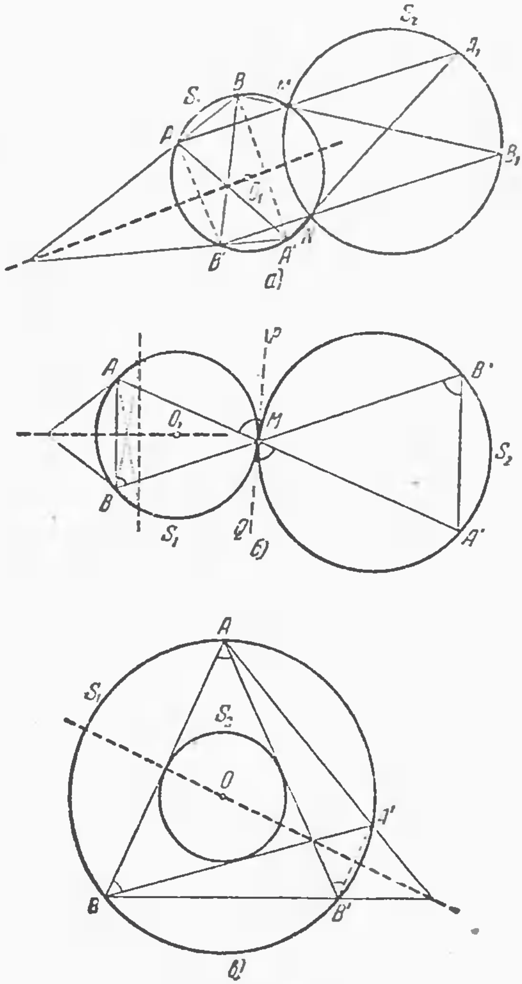
Определим теперь точку D, в которой линия центров A_1A_2 пересекается с общей хордой XY окружностей S_1 и S_2 (X и Y — искомые точки пересечения окружностей). Для этого рассмотрим преобразование прямой A_1A_2, переводящее каждую её точку R в такую точку R', что $\angle RXR' = 90^\circ$. Это есть проективное преобразование прямой, поскольку его можно описать так: A_1A_2 проектируется из точки X на произвольную окружность S, проходящую через X, затем S поворачивается вокруг центра на 180° и, наконец, S снова проектируется из X на прямую A_1A_2 (сравните с решением задачи 182а)). Очевидно, что в результате этого преобразования точка P_1 переходит в точку Q_1, точка Q_1 — в точку P_1 и точка P_2 — в точку Q_2. Таким образом, мы знаем, в какие точки переходят три точки прямой l. При помощи одной линейки мы можем определить точку, в которую переходит при рассматриваемом проективном преобразовании любая наперёд заданная точка M прямой l: действительно, мы легко можем осуществить наше преобразование при помощи проектирования прямой l на некоторую другую прямую l_1, последующего проектирования прямой l_1 на другую прямую l_2 и последующего проектирования l_2 обратно на l (см. выше черт. 89 на стр. 109)[1]. В частности, точку D мы найдём как точку, в которую переходит «бесконечно удалённая точка» прямой l (при этом нам придётся проводить прямую, параллельную l, что мы можем сделать при помощи одной линейки; см. задачу 190а)).

Прямая XY является перпендикуляром, восставленным в точке D к прямой A_1A_2; этот перпендикуляр мы можем построить согласно решению задачи 190в). Искомые точки X и Y найдём теперь как точки пересечения построенной прямой XY с одной из окружностей S_1 или S_2 (см. задачу 192).

194. а) Пусть M и N — точки пересечения окружностей S_1 и S_2 (черт. 362, *а*). Произвольные точки A и B окружности S_1 спроектируем из точки M на окружность S_2; затем полученные точки A_1 и B_1 спроектируем из точки N обратно на окружность S_1. Если A' и B' — полученные точки, то $\smile AB = \smile A'B'$ (ибо $\angle AMB = \angle A'NB'$; эти углы равны соответственно вписанным углам A_1MB_1 и A_1NB_1 окружности S_2, опирающимся на одну дугу). Следовательно, $AB' \parallel BA'$ и, значит, прямая, соединяющая точки пересечения AB и $A'B'$, AA' и BB', является диаметром S_1 (это очевидно из соображений симметрии; можно также исходить из того, что эта прямая есть поляра «бесконечно удалённой точки», в которой сходятся прямые AB' и BA'). Точно так же можно найти второй диаметр окружности S_1; точка пересечения этих двух диаметров и есть искомый центр окружности.

б) Пусть M — точка касания окружностей S_1 и S_2 (черт. 362, *б*). Спроектируем произвольные точки A и B окружности

[1]) Можно также спроектировать точки P_1, Q_1, P_2, Q_2 и M из любой точки O окружности S в точки $\overline{P}_1$, $\overline{Q}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}_2$ и $\overline{M}$ этой окружности; затем с помощью построения, изображённого на черт. 98, найти точку $\overline{M}'$, в которую переводит $\overline{M}$ проективное преобразование окружности, переводящее три известные точки $\overline{P}_1$, $\overline{Q}_1$ и $\overline{P}_2$ в три известные точки $\overline{Q}_1$, $\overline{P}_1$ и $\overline{Q}_2$, наконец, спроектировать $\overline{M}'$ из точки O обратно на прямую l.



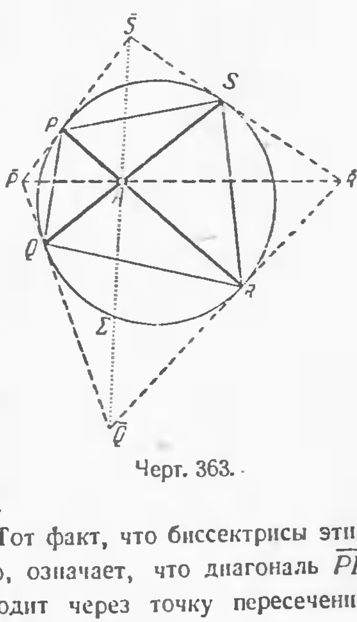
Черт. 362.

S_1 из точки M на окружность S_2; пусть они перейдут в точки A' и B'. Хорды AB и $A'B'$ параллельны (если PQ — общая касательная окружностей S_1 и S_2, то $\angle ABM = \angle AMP$, так как оба они измеряются половиной дуги AB; точно так же $\angle A'B'M = \angle A'MQ$ и, следовательно, $\angle ABM = \angle A'B'M$). Теперь с помощью одной линейки можно провести хорду окружности S_1, параллельную AB (см. задачу 109б) из § 1, стр. 22), и, следовательно, найти диаметр этой окружности (см. решение задачи а)). Точно так же можно построить ещё один диаметр окружности S_1, а следовательно, и определить её центр.

в) Проведём из произвольной точки A большей окружности S_1 касательные AB и AB' ко второй окружности S_2 (см. задачу 153 из § 4, стр. 88) и из точки B пересечения первой касательной с S_1 — вторую касательную BA' к S_2 (черт. 362, *в*). Очевидно, $\angle BAB' = \angle ABA'$ (например, из соображений симметрии), $\angle ABA' = \angle A'B'A$ (как опирающиеся на одну дугу). Поэтому $\angle BAB' = \angle A'B'A$ и, следовательно, $AB \parallel A'B'$; поэтому точки пересечения AA' и BB', AB' и BA' лежат на одном диаметре S_1 (см. решение задачи а)). Точно так же можно найти ещё один диаметр окружности S_1, а следовательно, и определить её центр.

Приложение к гл. I

195. Пусть PAQ и RAS — два вертикальных угла неевклидовой геометрии Лобачевского, $\overline{PQRS}$ — четырёхугольник, сторонами которого служат касательные к окружности Σ в точках P, Q, R и S (черт. 363). Прямые $\overline{PA}$ и $\overline{RA}$ (вернее, отрезки этих прямых, заключённые внутри круга K) суть биссектрисы углов PAQ и RAS. Тот факт, что биссектрисы этих углов составляют одну прямую, означает, что диагональ $\overline{PR}$ четырёхугольника $\overline{PQRS}$ проходит через точку пересечения

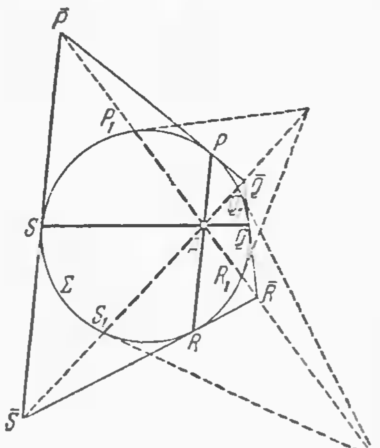


Черт. 363.

диагоналей четырёхугольника $PQRS$. Но это и утверждает теорема задачи 139а) из § 3.

Так как теорема о том, что биссектрисы вертикальных углов составляют одну прямую, в неевклидовой геометрии Лобачевского, как и в евклидовой геометрии, доказывается в два слова (она следует из того, что $\delta_{\bar{P}AP} + \delta_{PAS} + \delta_{SA\bar{R}} = \delta_{\bar{R}AR} + \delta_{RAQ} + \delta_{QA\bar{P}}$), то мы получаем отсюда новое простое решение задачи 139а).

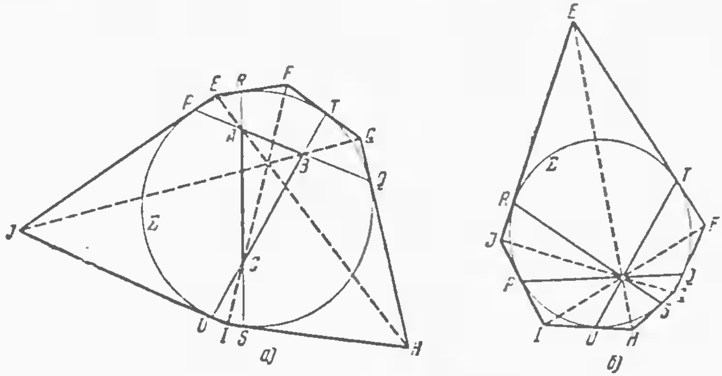
196. Пусть $\overline{PQRS}$ — четырёхугольник, описанный вокруг окружности Σ; P, Q, R и S — точки касания его сторон с окружностью; P_1R_1 и Q_1S_1 — хорды, высекаемые окружностью Σ на диагоналях $\overline{PR}$ и $\overline{QS}$ этого четырёхугольника (биссектрисы неевклидовых углов PAQ и QAR, где A — точка пересечения PR и QS; см. предыдущую задачу). В таком случае *касательные к окружности Σ в точках P_1 и R_1 пересекаются на прямой $\overline{QS}$ и касательные к Σ в точках Q_1 и S_1 пересекаются на прямой $\overline{PR}$* (черт. 364).



Черт. 364.

197. Пусть PQ, RS и TU — неевклидовы прямые, образующие треугольник ABC, $EFGHIJ$ — описанный вокруг Σ шестиугольник, стороны которого касаются Σ в точках P, R, T, Q, S и U (черт. 365). В таком случае неевклидовыми биссектрисами углов треугольника будут прямые EH, FI и GJ (см. задачу 195). То, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, означает, что прямые EH, FI и GJ пересекаются в одной точке; но это и есть утверждение теоремы Брианшона.

Примечание. В решении задачи показано только, что из теоремы Брианшона следует предложение о пересечении в одной точке биссектрис треугольника геометрии Лобачевского. Что же касается обратного утверждения: что из теоремы о биссектрисах треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского следует теорема Брианшона,— то оно, строго говоря, не верно. Дело в том, что прямые PQ, RS и TU черт. 365, *а*, могут пересечься в одной точке (черт. 365, *б*). В этом случае (который, разумеется, следует считать исключительным) мы не будем иметь треугольника ABC, и теорема Брианшона будет следовать не из теоремы о точке пересечения биссектрис неевклидовой геометрии Лобачевского, а из более простой теоремы о биссектрисах вертикальных углов (сравните черт. 365, *б* с черт. 363).



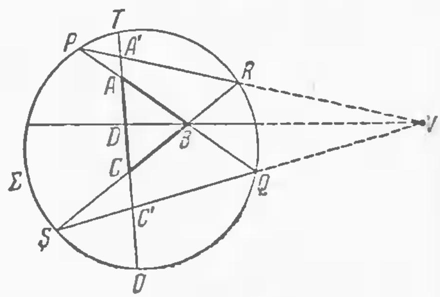
Черт. 365.

198. Пусть PQ, RS и TU — три неевклидовы прямые, образующие треугольник ABC, V — точка пересечения прямых PR и SQ, A', C' и D — точки, в которых прямые VP, VS и VB пересекают прямую TU (черт. 366). Тогда

$$d_{AB} = \log\left(\frac{AQ}{BQ} : \frac{AP}{BP}\right),$$

$$d_{BC} = \log\left(\frac{BS}{CS} : \frac{BR}{CR}\right),$$

$$d_{AC} = \log\left(\frac{AU}{CU} : \frac{AT}{CT}\right).$$



Черт. 366.

Следовательно, нам надо доказать, что имеет место неравенство

$$\log\left(\frac{AQ}{BQ} : \frac{AP}{BP}\right) + \log\left(\frac{BS}{CS} : \frac{BR}{CR}\right) > \log\left(\frac{AU}{CU} : \frac{AT}{CT}\right).$$

т. е. что

$$\left(\frac{AQ}{BQ}:\frac{AP}{BP}\right)\left(\frac{BS}{CS}:\frac{BR}{CR}\right)>\frac{AU}{CU}:\frac{AT}{CT}.$$

Но $\frac{AQ}{BQ}:\frac{AP}{BP}=\frac{AC'}{DC'}:\frac{AA'}{DA'}$, так как точки A, D; C', A' получаются из точек A, B; Q, P при проектировании прямой PQ на прямую UT из центра V, и $\frac{BS}{CS}:\frac{BR}{CR}=\frac{DC'}{CC'}:\frac{DA'}{CA'}$, так как точки D, C; C', A' получаются из точек B, C; S, R при проектировании прямой RS на прямую UT из центра V. Поэтому

$$\left(\frac{AQ}{BQ}:\frac{AP}{BP}\right)\left(\frac{BS}{CS}:\frac{BR}{CR}\right)=\left(\frac{AC'}{DC'}:\frac{AA'}{DA'}\right)\left(\frac{DC'}{CC'}:\frac{DA'}{CA'}\right)=\frac{AC'}{CC'}:\frac{AA'}{CA'}.$$

Замечая, что $\frac{AC'}{CC'}>\frac{AU}{CU}$ (так как $\frac{AC'}{CC'}-\frac{AU}{CU}=$

$$=\frac{AC'\cdot CU-CC'\cdot AU}{CC'\cdot CU}=\frac{AC'(CC'+C'U)-CC'(AC'+C'U)}{CC'\cdot CU}=$$

$$=\frac{C'U(AC'-CC')}{CC'\cdot CU}=\frac{C'U\cdot AC}{CC'\cdot CU}>0\Big)$$ и $\frac{AA'}{CA'}<\frac{AT}{CT}$ (так как

$$\frac{AA'}{CA'}-\frac{AT}{CT}=\frac{AA'\cdot CT-CA'\cdot AT}{CA'\cdot CT}=\frac{AA'(CA'+A'T)-CA'(AA'+A'T)}{CA'\cdot CT}=$$

$$=\frac{A'T(AA'-CA')}{CA'\cdot CT}=-\frac{AT\cdot AC}{CA'\cdot CT}\leqslant 0\Big),$$ получаем отсюда

$$\left(\frac{AQ}{BQ}:\frac{AP}{BP}\right)\left(\frac{BS}{CS}:\frac{BR}{CR}\right)=\frac{AC'}{CC'}:\frac{AA'}{CA'}>\frac{AU}{CU}:\frac{AT}{CT},$$

что и требовалось доказать.

199. а) Второе утверждение задачи немедленно вытекает из черт. 367, *а*. Таким образом, остаётся доказать, что расстояния от точек прямой RS до прямой PQ растут по мере удаления от B, т. е. что в обозначениях черт. 367, *а*

$$d_{A_1T_1}<d_{A_2T_2} \text{ или } \frac{A_1L_1}{T_1L_1}:\frac{A_1K_1}{T_1K_1}<\frac{A_2L_2}{T_2L_2}:\frac{A_2K_2}{T_2K_2}.$$

Но

$$\frac{A_2L_2}{T_2L_2}:\frac{A_2K_2}{T_2K_2}=\frac{A_1\overline{L}}{T_1\overline{L}}:\frac{A_1\overline{K}}{T_1\overline{K}}$$

(ибо точки A_1, T_1; $\overline{K}$, $\overline{L}$ получаются из точек A_2, T_2; K_2, L_2 проектированием из центра B) и

$$\frac{A_1L_1}{T_1L_1} < \frac{A_1\overline{L}}{T_1\overline{L}}, \quad \frac{A_1K_1}{T_1K_1} > \frac{A_1\overline{K}}{T_1\overline{K}}$$

(ср. с решением предыдущей задачи); поэтому

$$\frac{A_1L_1}{T_1L_1} : \frac{A_1K_1}{T_1K_1} < \frac{A_1\overline{L}}{T_1\overline{L}} : \frac{A_1\overline{K}}{T_1\overline{K}} = \frac{A_2L_2}{T_2L_2} : \frac{A_2K_2}{T_2K_2},$$

что и требовалось доказать. Расстояния от точек прямой RS до прямой PQ растут неограниченно, ибо лучи P_1R и Q_1S бесконечны; см. выше стр. 134.

б) Второе утверждение задачи непосредственно вытекает из черт. 367, *б*. Таким образом, остаётся показать, что расстояния от точек прямой UP до прямой QP растут в направлении PU, т. е. что в обозначениях черт. 367, *б*

$$d_{T_1A_1} < d_{T_2A_2}, \text{ или } \frac{T_1K_1}{A_1K_1} : \frac{T_1L_1}{A_1L_1} < \frac{T_2K_2}{A_2K_2} : \frac{T_2L_2}{A_2L_2}.$$

Но

$$\frac{T_2K_2}{A_2K_2} : \frac{T_2L_2}{A_2L_2} = \frac{T_1\overline{K}}{A_1\overline{K}} : \frac{T_1\overline{L}}{A_1\overline{L}}$$

(точки T_1, A_1; $\overline{K}$, $\overline{L}$ получаются из точек T_2, A_2; K_2, L_2 проектированием из центра P) и

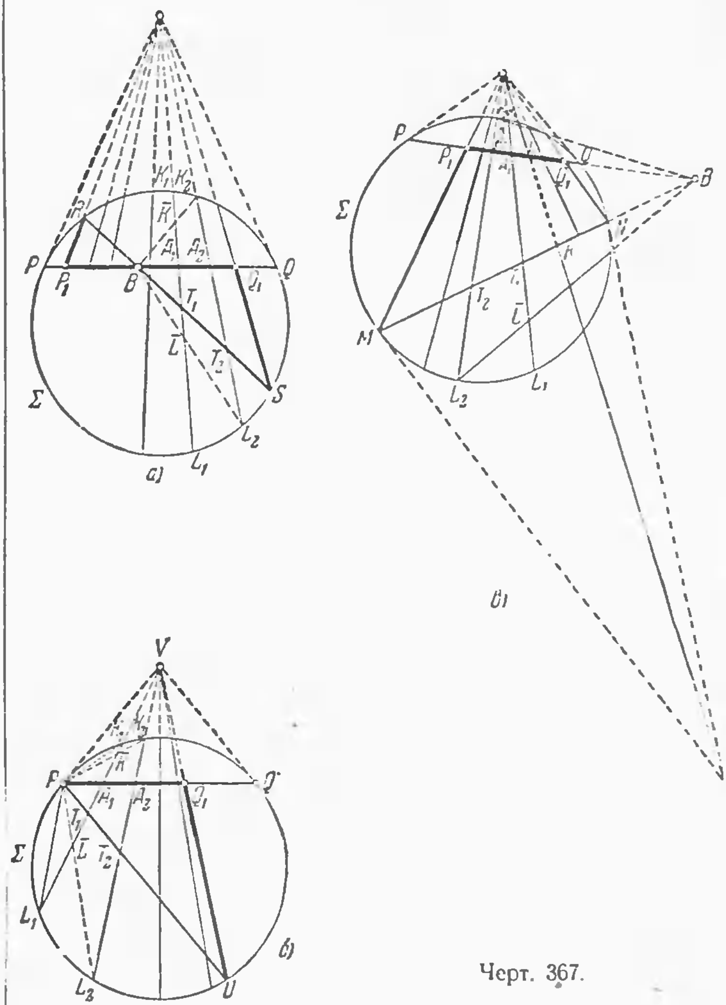
$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1} < \frac{T_1\overline{K}}{A_1\overline{K}}, \quad \frac{T_1L_1}{A_1L_1} > \frac{T_1\overline{L}}{A_1\overline{L}}$$

(ср. с решением задачи 198). Поэтому

$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1} : \frac{T_1L_1}{A_1L_1} < \frac{T_1\overline{K}}{A_1\overline{K}} : \frac{T_1\overline{L}}{A_1\overline{L}} = \frac{T_2K_2}{A_2K_2} : \frac{T_2L_2}{A_2L_2},$$

что и требовалось доказать.

В направлении PU расстояния от точек прямой PU до прямой PQ растут неограниченно, ибо луч Q_1U бесконечен (см. выше, стр. 134). В направлении UP расстояния уменьшаются неограниченно, ибо когда точка A_1 стремится



Черт. 367.

к P, то отношение $\frac{A_1K_1}{T_1K_1}$ стремится к единице (ибо $\frac{A_1K_1}{T_1K_1}=$

$$=\frac{S_{\triangle PA_1K_1}}{S_{\triangle PT_1K_1}}=\frac{\frac{1}{2}PA_1\cdot PK_1\cdot\sin\angle A_1PK_1}{\frac{1}{2}PT_1\cdot PK_1\cdot\sin\angle T_1PK_1}=\frac{PA_1}{PT_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle T_1PK_1}=$$

$$=\frac{\sin\angle PT_1A_1}{\sin\angle PA_1T_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle T_1PK_1}=\frac{\sin\angle PT_1A_1}{\sin\angle T_1PK_1}\cdot\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle PA_1T_1},$$

а когда $A_1\to P$, то $\angle PT_1A_1=\angle UT_1L_1\to 180^\circ-\angle UPV$,

$$\angle T_1PK_1\to UPV,\ \frac{\sin\angle PT_1A_1}{\sin\angle T_1PK_1}\to 1 \text{ и } \angle A_1PK_1\to\angle QPV,$$

$\angle PA_1T_1=\angle QA_1K_1\to QPV$, $\left.\frac{\sin\angle A_1PK_1}{\sin\angle PA_1T_1}\to 1\right)$; отношение $\frac{A_1L_1}{T_1L_1}$ стремится к единице (доказательство аналогично); следовательно, $\frac{A_1K_1}{T_1K_1}:\frac{A_1L_1}{T_1L_1}\to 1$ и

$$d_{A_1T_1}=\log\left(\frac{A_1K_1}{T_1K_1}:\frac{A_1L_1}{T_1L_1}\right)\to 0.$$

в) Общим перпендикуляром двух прямых PQ и MN неевклидовой геометрии Лобачевского является прямая, соединяющая точки пересечения касательных к окружности Σ в точках P и Q, M и N (черт. 367, *в*), т. е. полюсы прямых PQ и MN относительно Σ (см. начало § 4, стр. 84—88). Эта прямая является полярой точки B пересечения прямых PQ и MN (см. теорему 2 § 4, стр. 87); она пересекает Σ в том и лишь в том случае, если точка B находится вне Σ. Отсюда вытекает первое утверждение задачи.

Последнее утверждение задачи непосредственно следует из черт. 367, *в*. Таким образом, остаётся только показать, что расстояния точек прямой MN от прямой PQ растут по мере удаления от основания общего перпендикуляра, т. е. что в обозначениях черт. 367, *в*

$$d_{T_1A_1}<d_{T_2A_2}, \text{ или } \frac{T_1K_1}{A_1K_1}:\frac{T_1L_1}{A_1L_1}<\frac{T_2K_2}{A_2K_2}:\frac{T_2L_2}{A_2L_2}.$$

Но

$$\frac{T_2K_2}{A_2K_2}:\frac{T_2L_2}{A_2L_2}=\frac{T_1\overline{K}}{A_1\overline{K}}:\frac{T_1\overline{L}}{A_1\overline{L}}$$

(точки A_1, T_1; $\overline{K}$, $\overline{L}$ получаются из точек A_2, T_2; K_2, L_2 проектированием из центра B) и

$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1}<\frac{T_1\overline{K}}{A_1\overline{K}},\qquad \frac{T_1L_1}{A_1L_1}>\frac{T_1\overline{L}}{A_1\overline{L}}$$

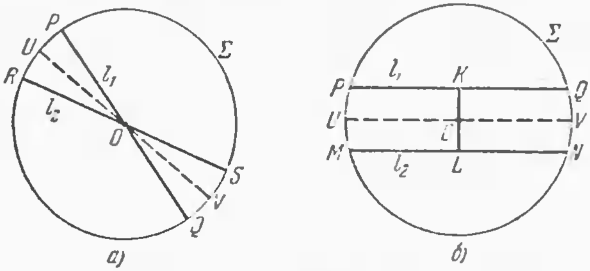
(ср. с решением задачи 198). Поэтому

$$\frac{T_1K_1}{A_1K_1}:\frac{T_1L_1}{A_1L_1}<\frac{T_1\overline{K}}{A_1\overline{K}}:\frac{T_1\overline{L}}{A_1\overline{L}}=\frac{T_2K_2}{A_2K_2}:\frac{T_2L_2}{A_2L_2},$$

что и требовалось доказать.

Расстояния точек прямой MN от прямой PQ возрастают неограниченно, ибо лучи P_1M и Q_1N бесконечны (см. выше стр. 134).

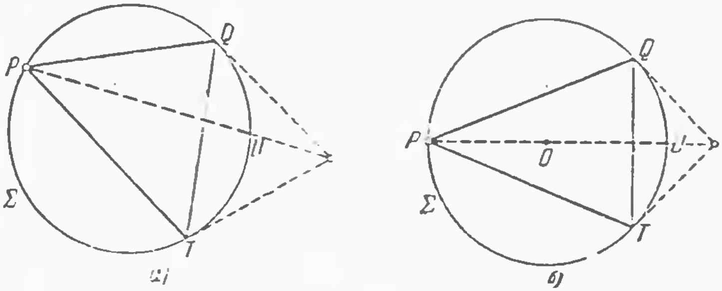
200. а) Пусть сначала l_1 и l_2 — две пересекающиеся прямые неевклидовой геометрии Лобачевского. Совместим неевклидовым движением их точку пересечения с центром



Черт. 368.

O круга К (черт. 368, a). Нетрудно видеть, что биссектриса (евклидова и неевклидова одновременно; см. выше стр. 139) UV образованного этими прямыми угла POR является (неевклидовой) осью симметрии прямых. Действительно, (евклидова) симметрия относительно UV переводит PQ в RS; но это преобразование является одновременно и неевклидовой симметрией относительно UV, поскольку евклидовы перпендикуляры к диаметру UV круга К являются и неевклидовыми перпендикулярами.

Рассмотрим теперь две расходящиеся прямые l_1 и l_2. Совместим неевклидовым движением середину общего перпендикуляра KL этих прямых (см. задачу 199в)) с центром O круга К (черт. 368, *б*). В таком случае прямые l_1 и l_2 станут евклидовыми перпендикулярами к KL; отрезки OK и OL будут равны в евклидовом смысле (ср. выше, стр. 136). Перпендикуляр (евклидов и неевклидов одновременно) UV, восставленный в точке O к прямой KL, будет являться (евклидовой и неевклидовой одновременно) осью симметрии l_1 и l_2.



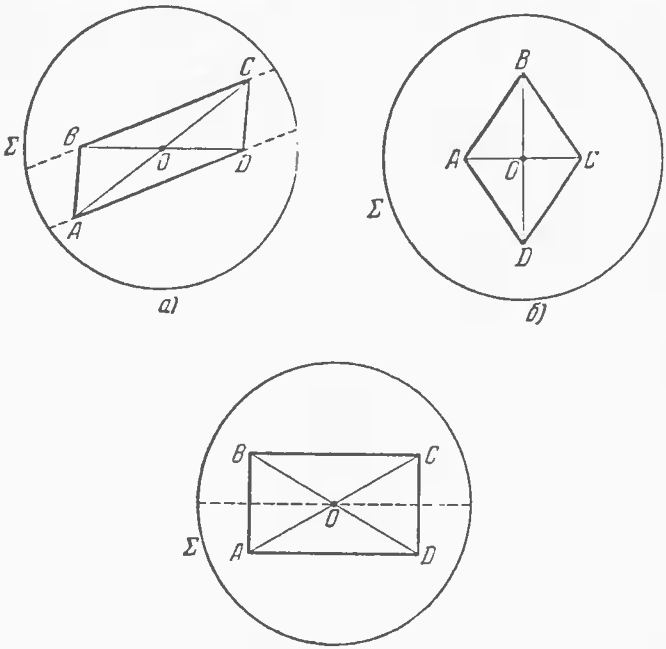
Черт. 369.

Несколько сложнее доказательство существования оси симметрии параллельных прямых PQ и PT. Проведём прямую TQ, параллельную одновременно PQ и PT; затем проведём прямую PU, параллельную PQ и PT и перпендикулярную QT (черт. 369, *а*). Эта прямая и явится (неевклидовой) осью симметрии PQ и PT; для доказательства достаточно совместить неевклидовым движением прямую PU с диаметром круга К (черт. 369, *б*).

б) Симметрия относительно l переводит l_1 в прямую l_1', проходящую через точку A_2 (ибо l_1 проходит через A_1) и принадлежащую к тому же пучку, что и прямые l_1 и l. Так как такая прямая, очевидно, единственна, то l_1' совпадает с l_2.

201. Пусть $ABCD$ — неевклидов параллелограмм. Совместим неевклидовым движением точку пересечения его диагоналей с центром O круга К. Из того, что неевклидовы длины отрезков OA и OC (соответственно OB и OD) равны, следует, что эти отрезки равны и в обычном (евклидовом) смысле (ср. выше, стр. 136). Таким образом, четырёхугольник $ABCD$ является и евклидовым параллелограммом (черт. 370, *а*).

а) $d_{AB}=d_{CD}$, ибо отрезки AB и CD переводятся один в другой неевклидовым движением — симметрией относительно



Черт. 370.

центра O круга К (вращением вокруг O на 180°). Так же доказывается, что $d_{AD}=d_{BC}$.

б) $\delta_A=\delta_C$, ибо углы A и C переводятся один в другой неевклидовым движением — вращением вокруг O на 180°. Так же доказывается, что $\delta_B=\delta_D$.

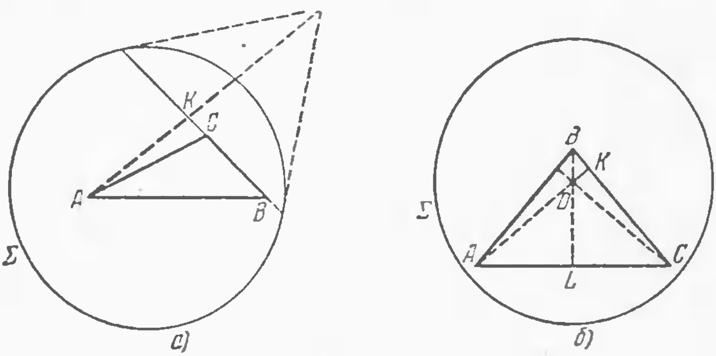
в) Если диагонали AC и BD перпендикулярны в неевклидовом смысле, то они перпендикулярны и в евклидовом смысле; следовательно, $ABCD$ есть евклидов ромб (черт. 370, *б*). В этом случае $d_{AB}=d_{AD}$, ибо отрезки AB и AD переводятся один в другой неевклидовым движением — симметрией относительно прямой AC; $\delta_{BAC}=\delta_{DAC}$, ибо углы BAC и DAC переводятся один в другой тем же неевклидовым движением.

г) Если $d_{OA}=d_{OB}$, то отрезки OA и OB равны и в обыкновенном (евклидовом) смысле (ср. выше, стр. 136); поэтому $ABCD$ есть евклидов прямоугольник (черт. 370, *в*). В этом случае $\delta_A=\delta_B$, ибо углы A и B переводятся один в другой неевклидовым движением — симметрией относительно диаметра К, перпендикулярного (в евклидовом и неевклидовом смысле) к AB и DC.

д) См. задачи в) и г).

Примечание. Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в том, что теоремы задач а)—д) евклидовой геометрии можно доказать, не опираясь на аксиому параллельных линий, откуда уже следует, что все они справедливы и в неевклидовой геометрии Лобачевского.

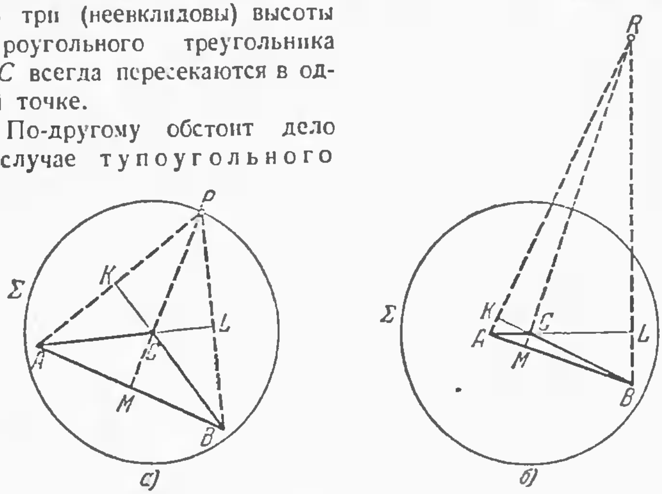
202. Нет; они будут сверхпараллельны (см. черт. 370, *а*).



Черт. 371.

203. Пусть H — точка пересечения высот AK и BL остроугольного треугольника ABC. [Эти высоты пересекаются, так как обе они проходят внутри треугольника: если бы высота, опущенная из вершины A, пересекала продолжение стороны BC за точку C, то угол C треугольника был бы тупым в силу теоремы о внешнем угле треугольника, сохраняющей силу и в неевклидовой геометрии Лобачевского; черт. 371, *а*.] Совместим неевклидовым движением точку H с центром O круга К (черт. 371, *б*). В этом случае и в обычном (евклидовом) смысле $AK \perp BC$, $BL \perp AC$. Поэтому O — точка пересечения евклидовых высот треугольника ABC и $CO \perp AB$. Но из того, что прямая AB перпендикулярна в обычном (евклидовом) смысле к диаметру CO круга К, вытекает, что CO есть неевклидова высота треугольника ABC. Отсюда следует, что три (неевклидовы) высоты остроугольного треугольника ABC всегда пересекаются в одной точке.

По-другому обстоит дело в случае тупоугольного

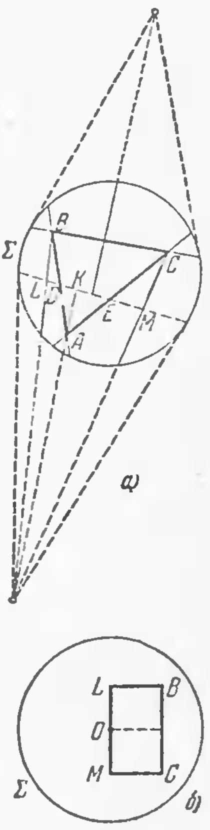


Черт. 372.

треугольника. Если две высоты AK и BL тупоугольного треугольника ABC пересекаются в одной точке H, то и третья высота проходит через ту же точку, — доказательство этого ничем не отличается от вышеизложенного. Предположим теперь, что высоты AK и BL тупоугольного треугольника ABC (угол C — тупой) параллельны; совместим неевклидовым движением вершину C треугольника с центром круга К (черт. 372, a). В таком случае $AK \perp BC$ и $BL \perp AC$ и в евклидовом смысле; следовательно, точка P окружности Σ, в которой сходятся прямые AK и BL, есть точка пересечения евклидовых высот треугольника ABC и $CP \perp AB$ (в евклидовом смысле). Но отсюда вытекает, что CP есть и неевклидова высота треугольника ABC. Таким образом, *если высоты AK и BL тупоугольного треугольника ABC параллельны, то и все три высоты AK, BL и CM параллельны между собой* (предлагаем читателю самому сформулировать соответствующую евклидову теорему, относящуюся к хордам круга К).

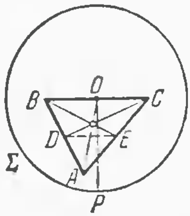
Наконец, предположим, что высоты AK и BL треугольника ABC — расходящиеся прямые. Совместим неевклидовым движением вершину C треугольника с центром круга К (черт. 372, *б*). В таком случае $AK \perp BC$ и $BL \perp AC$ (в евклидовом смысле); следовательно, точка R, в которой пересекаются прямые AK и BL (и которая находится вне К!), есть точка пересечения евклидовых высот треугольника ABC и, значит, $CR \perp AB$ (в евклидовом смысле). Но отсюда вытекает, что CR есть и неевклидова высота треугольника ABC. Таким образом, *если высоты AK и BL тупоугольного треугольника ABC сверхпараллельны, то и все три высоты AK, BL и CM сверхпараллельны* (см. выше, стр. 150).

204. Докажем прежде всего, что *прямая DE, соединяющая середины сторон AB и AC треугольника ABC неевклидовой геометрии Лобачевского, и перпендикуляр, восставленный к стороне BC из её середины, взаимно перпендикулярны.* Опустим из вершин треугольника перпендикуляры AK, BL и CM на среднюю линию DE (черт. 373, *а*). Из признака равенства прямоугольных треугольников (сохраняющего силу и в неевклидовой геометрии; см. выше, стр. 142—143) следует, что треугольники ADK и BDL, AEK и CEM равны; поэтому $d_{BL} = d_{AK} = d_{MC}$. Совместим теперь неевклидовым движением середину отрезка LM с центром O круга К (черт. 373, *б*). При этом мы получим $OL = OM$, $BL \perp LM$ и $CM \perp LM$ (в евклидовом смысле); поэтому из равенства $d_{LB} = d_{MC}$ следует, что отрезки LB и MC равны и в евклидовом смысле (иначе симметрия относительно диаметра К, перпендикулярного к LM, являющаяся неевклидовым движением,



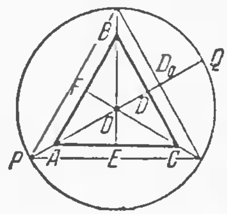
Черт. 373.

переводила бы один из этих отрезков в часть второго); поэтому четырёхугольник $LMCB$ есть евклидов прямоугольник. Перпендикуляр (евклидов), восставленный из точки O к прямой LM, будет и в неевклидовом смысле перпендикулярен к этой прямой; кроме того, он будет (одновременно в евклидовом и неевклидовом смысле) перпендикулярен к прямой BC и будет (одновременно в евклидовом и неевклидовом смысле) делить эту прямую пополам. Отсюда и вытекает наше утверждение.



Черт. 374.

Совместим теперь середину стороны BC произвольного треугольника ABC с центром O круга К (черт. 374). Перпендикуляр (евклидов) OP к стороне BC в точке O будет одновременно и неевклидовым перпендикуляром; средняя линия DE треугольника, перпендикулярная к OP в неевклидовом смысле, будет и в евклидовом смысле перпендикулярна к OP. Отсюда следует, что четырёхугольник $BCED$ есть евклидова трапеция. Медианы AO, BE и CD треугольника ABC пересекутся в одной точке в силу теоремы задачи 108 из § 1[1]).



Черт. 375.

205. Нет. Для доказательства достаточно рассмотреть равносторонний треугольник ABC с центром в центре O круга К (черт. 375). Евклидовы медианы AD, BE и CF этого треугольника будут являться одновременно и неевклидовыми медианами. При этом $d_{OA} \neq 2d_{OD}$, ибо если неевклидова длина стороны треугольника ABC неограниченно возрастает (т. е. вершины его неограниченно приближаются к окружности Σ), то

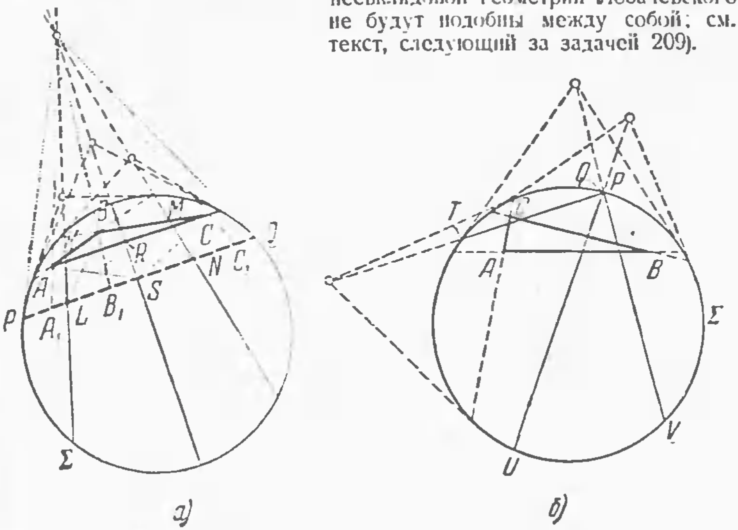
$$d_{OD} \to d_{OD_0} = \log\left(\frac{OQ}{D_0Q} : \frac{OP}{D_0P}\right) = \log\left(2 : \frac{2}{3}\right) = \log 3,$$

а

$$d_{OA} \to d_{OP} = \infty.$$

[1]) Из того, что теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке» справедлива и в евклидовой и в неевклидовой геометрии, следует, что она не зависит от аксиомы параллельных линий. Интересно отметить, что доказательства этой теоремы, не опирающегося на аксиому параллельных линий (и, следовательно, годного одновременно для обеих геометрий), до сих пор ещё никому найти не удалось.

Примечание. Из доказанного следует, что отношение $\frac{OA}{OD}$, в котором точка O пересечения медиан треугольника делит медиану AD, даже для равносторонних треугольников не может оставаться постоянным, а должно зависеть от длины стороны треугольника (это связано с тем, что разные по величине равносторонние треугольники в неевклидовой геометрии Лобачевского не будут подобны между собой; см. текст, следующий за задачей 209).

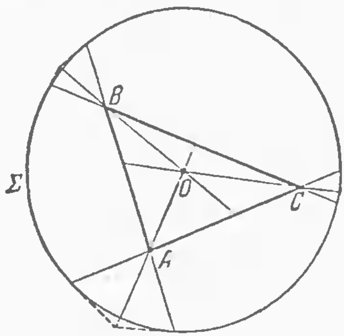


Черт. 376.

206. Если перпендикуляры, восставленные к двум сторонам треугольника ABC в их серединах, пересекаются в одной точке O, то и третий перпендикуляр проходит через O,— доказательство этого ничем не отличается от обычного (ср. с доказательством того, что в неевклидовой геометрии Лобачевского три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; см. выше, стр. 144). Предположим теперь, что перпендикуляры KL и MN, восставленные к сторонам AB и BC в их серединах, расходятся, т. е. имеют общий перпендикуляр PQ (черт. 376, a). Докажем, что третий перпендикуляр RS тоже перпендикулярен к PQ (то, что RS пересекает PQ, можно усмотреть непосредственно из черт. 376, a). Опустим из вершины треугольника перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 на прямую PQ. Прямоугольные треугольники AKL

и BKL равны (по двум катетам); следовательно, $AL = BL$ и $\delta_{ALK} = \delta_{BLK}$, $\delta_{ALA_1} = \delta_{BLB_1}$. Поэтому и прямоугольные треугольники ALA_1 и BLB_1 равны (по гипотенузе и острому углу); следовательно, $AA_1 = BB_1$. Точно так же доказывается, что $BB_1 = CC_1$; отсюда имеем $AA_1 = CC_1$. Далее, прямоугольные треугольники ARS и CRS равны (по двум катетам), следовательно, $AS = CS$ и $\delta_{ASR} = \delta_{CSR}$; прямоугольные треугольники ASA_1 и CSC_1 равны (по катету и гипотенузе), следовательно, $\delta_{ASA_1} = \delta_{CSC_1}$. Окончательно получаем $\delta_{RSA_1} = \delta_{RSA} + \delta_{ASA_1} = \delta_{RSC} + \delta_{CSC_1} = \delta_{RSC_1}$; но это и означает, что RS перпендикулярна к PQ.

Пусть, наконец, перпендикуляры UP и VP, восставленные к сторонам AB и BC, параллельны (см. черт. 376, *б*). В таком случае третий перпендикуляр QT параллелен и UP и VP (ибо если бы, например, прямые UP и QT были бы расходящимися, то, как доказано выше, и прямые UP и VP должны были бы быть расходящимися). А так как из черт. 376, *б* видно, что QT не может совпадать с UV, то и в этом случае UP, VP и QT принадлежат к одному пучку.



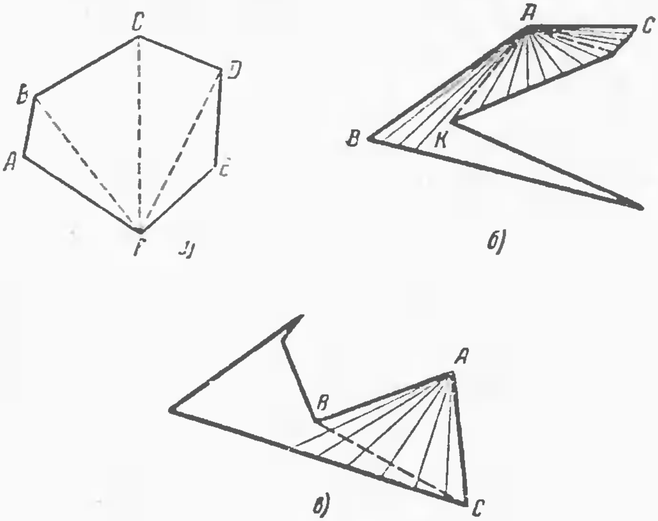
Черт. 377.

207. а) Сдвинем треугольник ABC так, чтобы точка пересечения его биссектрис (см. выше, стр. 144) совпала с центром O круга К (черт. 377). При этом каждый из углов OAB, OAC, OBA, OBC, OCA и OCB будет острым (одновременно в евклидовом и неевклидовом смысле); следовательно, $\delta_A < \angle A$, $\delta_B < \angle B$, $\delta_C < \angle C$ (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 142). Поэтому

$$\delta_A + \delta_B + \delta_C < \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

что и требовалось доказать.

б) Докажем прежде всего, что каждый *n-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на n — 1 треугольников.* Так как каждый многоугольник неевклидовой геометрии Лобачевского есть одновременно евклидов многоугольник, заключённый внутри круга К, то доказательство достаточно провести для **евклидовых** многоугольников. Наше утверждение является очевидным в том случае, когда рассматриваемый n-угольник — выпуклый (черт. 378, *а*); докажем, что оно остаётся в силе и для невыпуклых n-угольников. Покажем, что каждый (может быть невыпуклый!) n-угольник М ($n > 3$



Черт. 378.

можно разбить диагональю на два меньших многоугольника. Пусть A — какая-то вершина М, AB и AC — выходящие из неё стороны. Рассмотрим все отрезки с концом A, заключённые внутри М (черт. 378, *б*, *в*). Если среди этих отрезков есть диагональ AK многоугольника М (черт. 378, *б*), то эта диагональ разбивает М на две меньшие части. Если же среди рассматриваемых отрезков нет диагоналей М, т. е. концы их лежат на одной стороне М (черт. 378, *в*), то диагональ BC пересекает все эти отрезки и, следовательно, целиком лежит внутри М; эта диагональ и разбивает многоугольник М на два меньших.

Продолжая далее таким же образом делить на меньшие части каждый из многоугольников, на которые разбивается М, мы в конце концов разобьём М на треугольники. При этом если для разбиения М на треугольники придётся провести k диагоналей, то общее число треугольников будет равно $k+1$ (ибо, проведя одну диагональ, мы увеличиваем на единицу число частей, на которые разбит М); общее число сторон этих $k+1$ треугольников равно $3(k+1)$, причём среди этих $3(k+1)$ сторон будут n сторон многоугольника М и $2k$ диагоналей (каждая диагональ является стороной двух треугольников). Поэтому имеем:

$$3(k+1)=n+2k, \quad k=n-3,$$

откуда следует, что n-угольник М разбивается на $k+1=$ $=n-2$ треугольников.

Так как сумма углов каждого из $n-2$ треугольников меньше 180° (см. задачу а)), то сумма углов n-угольника М меньше $180^\circ(n-2)$, что и требовалось доказать.

208. Найти площадь многоугольника — это значит поставить в соответствие каждому многоугольнику М число $S(\mathrm{M})$ («площадь» М), которое удовлетворяет следующим трём условиям:

1°. *Если многоугольники* M_1 *и* M_2 *равны, то* $S(\mathrm{M}_1)=$ $=S(\mathrm{M}_2)$.

2°. *Если многоугольник* М *есть «сумма» многоугольников* M_1 *и* M_2 (т. е. М можно разбить на два многоугольника M_1 и M_2), *то* $S(\mathrm{M})=S(\mathrm{M}_1)+S(\mathrm{M}_2)$.

3°. *Если* M_0 *есть многоугольник, который мы условливаемся считать «единичным»* (в евклидовой геометрии за «единичный» многоугольник обыкновенно принимают квадрат со стороной единица), *то* $S(\mathrm{M}_0)=1$ [1]).

Угловой дефект многоугольника неевклидовой геометрии Лобачевского (см. текст, следующий за условием задачи 208), очевидно, удовлетворяет первому условию. Покажем, что и второму условию он тоже удовлетворяет. Действительно, пусть n-угольник М ломаной AB разбивается на k-угольник M_1 и l-угольник M_2 (черт. 379); докажем, что *угловой дефект многоугольника* М *равен сумме угловых дефектов многоугольников* M_1 *и* M_2. Предположим, что ломаная AB состоит из m звеньев (т. е. имеет, кроме A и B, ещё $m-1$ внут-

[1]) Последнее условие определяет «единицу измерения» площадей.

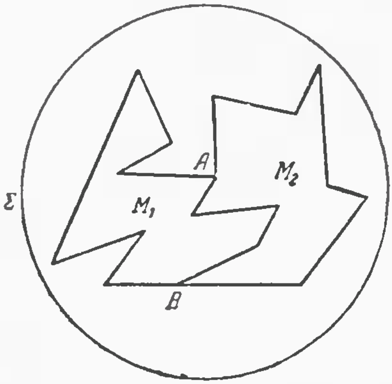
ренних вершин); пусть ещё для определённости вершина A ломаной AB совпадает с вершиной многоугольника M, а вершина B лежит на его стороне (другие случаи во всём аналогичны этому). В таком случае

$$k+l=n+2m+1,$$

ибо сумма k вершин M_1 и l вершин M_2 включает n вершин M и $2m+1$ лишних вершин (каждая из $m-1$ внутренних вершин ломаной AB и вершина B входят по два раза в сумму $k+l$ и ни одного раза — в выражение n; вершина A входит в сумму $k+l$ два раза, а в выражение n — лишь один раз). Далее, если обозначить через $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}$ суммы углов многоугольников M_1, M_2 и M, то

$$\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2= \\ =\mathcal{A}+(2m-1)180^\circ,$$

ибо в сумму $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$, кроме всех углов, фигурирующих в сумме $\mathcal{A}$, входят ещё $m-1$ полных углов, равных 360° при внутренних вершинах ломаной AB, и развёрнутый угол (равный 180°) при точке B.



Черт. 379.

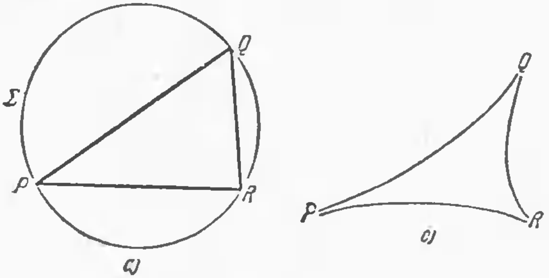
А теперь имеем:

$$\begin{aligned}[(k-2)\,180^\circ-\mathcal{A}_1]+[(l-2)\,180^\circ-\mathcal{A}_2]&= \\ =(k+l-4)\,180^\circ-(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2)&= \\ =(n+2m-3)\,180^\circ-\mathcal{A}-(2m-1)\,180^\circ&= \\ =(n-2)\,180^\circ-\mathcal{A},&\end{aligned}$$

что нам и требовалось доказать.

Из того, что угловой дефект многоугольника обладает свойствами 1° и 2°, вытекает, что он пропорционален площади (если угловой дефект «единичного многоугольника» M_0 равен $\frac{1}{k}$, то угловой дефект любого многоугольника равен площади, делённой на k).

Примечание 1. Из доказанного следует, что площадь треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского не может быть сколь угодно велика (ибо угловой дефект треугольника не может превосходить 180°). Самую большую площадь (равную $k\cdot 180°$, где k — фигурирующий в условии задачи 208 коэффициент пропорциональности) имеют «треугольники», все стороны которых попарно параллельны (черт. 380, *а*; на черт. 380, *б* этот же треугольник изображён схематически аналогично черт. 115 и 118 текста).

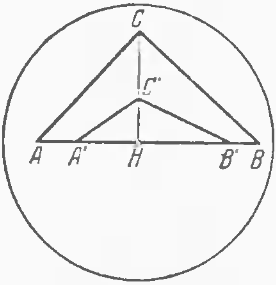


Черт. 380.

Примечание 2. Приведённое доказательство пропорциональности углового дефекта многоугольника и его площади, разумеется, сохраняет силу и в евклидовой геометрии. Однако здесь, как известно, коэффициент пропорциональности равен нулю: угловой дефект каждого n-угольника равен нулю, ибо сумма углов n-угольника в евклидовой геометрии равна $180° (n-2)$. Поэтому приведённое рассуждение не имеет в этом случае никакой ценности; при выводе формулы площади многоугольника в евклидовой геометрии приходится идти другим, значительно более сложным путём. [Уже формула для площади треугольника, определённого, например, заданием величин сторон и углов, много сложнее формулы для площади треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского; что же касается случая n-угольника, где $n > 3$, то в евклидовой геометрии вообще не существует обозримой общей формулы, определяющей площадь n-угольника по его элементам.]

Интересно ещё отметить, что приведённое доказательство полностью переносится также в геометрию на поверхности сферы (где многоугольником следует называть область сферы, ограниченную дугами «больших кругов», т. е. кругов, радиус которых равен радиусу сферы; эти круги играют в сферической геометрии ту же роль, что прямые на плоскости). Угловой дефект сферического n-угольника всегда является отрицательным числом; это можно усмотреть хотя бы из того, что на сфере имеются треугольники с тремя прямыми углами. Поэтому коэффициент пропорциональности здесь должен быть отрицательным; следовательно, *площадь сферического n-угольника пропорциональна разности суммы углов этого многоугольника и* $180° (n-2)$ (эта разность называется угловым избытком сферического n-угольника; ср. также стр. 343 и 344 приложения к гл. II).

209. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника неевклидовой геометрии Лобачевского с соответственно равными углами, C и C' — наибольшие углы этих треугольников. Высоты CH и $C'H'$ этих треугольников проходят внутри них (ибо углы A, A' и B, B' — острые в силу теоремы задачи 207а); далее см. начало решения задачи 203). Если $AH = A'H'$, то прямоугольные треугольники AHC и $A'H'C'$ равны (по катету и прилежащему острому углу); поэтому $CH = C'H'$, и треугольники BHC и $B'H'C'$ также равны (по катету и при-



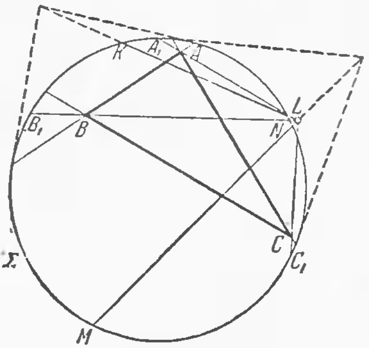
Черт. 381.

лежащему острому углу), отсюда и треугольники ABC и $A'B'C'$ были бы равны. Докажем теперь, что предположение $AH \neq A'H'$, например $AH > A'H'$, приводит к противоречию. Сдвинем (неевклидовым движением) оба треугольника так, чтобы точки H и H' совпали с центром круга К и прямые AB и $A'B'$ совпали (черт. 381). Так как $AH > A'H$ и $\delta_A = \delta_{A'}$, то $\angle A > \angle A'$ (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 141). Поэтому $HC > HC'$ и $\angle HCA < \angle HC'A'$; из последнего следует, что $\delta_{HCA} < \delta_{HC'A'}$. Если бы было $HB' > HB$, то мы аналогично вывели бы, что $HC' > HC$, что противоречит полученному выше неравенству $HC > HC'$. Поэтому $HB > HB'$ и, как выше, $\delta_{HCB} < \delta_{HC'B'}$. Значит,

$$\delta_C = \delta_{HCA} + \delta_{HCB} < \delta_{HC'A'} + \delta_{HC'B'} = \delta_{C'};$$

но это противоречит условию $\delta_{C'} = \delta_C$.

210. Восставим в серединах сторон AB и AC треугольника ABC перпендикуляры KL и MN к этим сторонам и проведём через вершины прямые AA_1, BB_1 и CC_1, принадлежащие к тому же пучку, что и KL и MN (т. е. проходящие через их точку пересечения, если KL и MN пересекаются; перпендикулярные к их общему перпендикуляру, если KL и MN сверхпараллельны; параллельные им, если KL и MN параллельны; черт. 382). В силу теоремы задачи 200б) KL есть ось симметрии AA_1 и BB_1 и MN — ось симметрии прямых AA_1 и CC_1. А отсюда следует, что все вершины треугольника ABC лежат на окружности (или эквидистанте, или предельной линии), которая получится, если на каждой прямой l пучка, определённого прямыми KL и MN, отметить точки, симметричные A относительно оси симметрии AA_1 и l (см. выше, стр. 156—160).



Черт. 382.

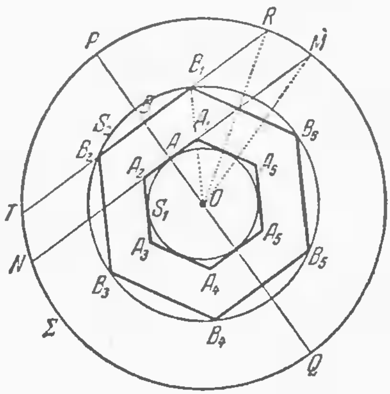
То, что возможны все случаи, перечисленные в условии задачи, совершенно ясно: ведь в каждую окружность, эквидистанту или предельную линию можно вписать сколько угодно треугольников. [Нетрудно видеть также, что эти случаи исключают друг друга: если вокруг ABC можно описать окружность, то существует точка O, равноудалённая от его вершин, и, следовательно, прямые KL и MN должны пересечься в точке O; аналогично можно показать, что если вокруг ABC можно описать эквидистанту, то прямые KL и MN должны быть перпендикулярны к одной прямой, а если вокруг ABC можно описать предельную кривую, то прямые KL и MN должны быть параллельны.]

211. Рассмотрим две окружности S_1 и S_2 неевклидовой геометрии Лобачевского радиусов r_1 и r_2 и правильные шестиугольники $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, описанный вокруг S_1, и $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, вписанный в S_2 [1]).

[1]) Определение правильных шестиугольников в неевклидовой геометрии Лобачевского не отличается от обычного. Отметим ещё, что в неевклидовой геометрии не вокруг каждой окружности можно описать правильный шестиугольник; поэтому сказанное до сих пор уже накладывает некоторое ограничение на величину r_1.

Если s_1 и s_2 — (неевклидовы) длины окружностей, p_1 и p_2 — периметры шестиугольников, то $\frac{s_1}{r_1} < \frac{p_1}{r_1}$, $\frac{s_2}{r_2} > \frac{p_2}{r_2}$; поэтому, если мы сумеем подобрать r_1 и r_2 так, чтобы было $\frac{p_1}{r_1} < \frac{p_2}{r_2}$, то отсюда будет следовать неравенство $\frac{s_1}{r_1} < \frac{s_2}{r_2}$, доказывающее утверждение задачи.

Если центры S_1 и S_2 совпадают с центром O круга К, то эти две кривые будут и евклидовыми окружностями



Черт. 383.

(черт. 383). Пусть их евклидовы радиусы равны a_1 и a_2 (радиус круга К принят за единицу). В этом случае будем иметь:

$$r_1 = \log\left(\frac{OP}{AP} : \frac{OQ}{AQ}\right) = \log\frac{AQ}{AP} = \log\frac{1+a_1}{1-a_1}, \quad r_2 = \log\frac{1+a_2}{1-a_2},$$

$$AA_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{3}, \quad b_1 = AM = \sqrt{1-a_1^2},$$

$$d_{AA_1} = \log\left(\frac{AM}{A_1M} : \frac{AN}{A_1N}\right) = \log\frac{A_1N}{A_1M} = \log\frac{b_1 + \frac{a_1\sqrt{3}}{3}}{b_1 - \frac{a_1\sqrt{3}}{3}},$$

$$p_1 = 12 d_{AA_1}$$

и

$$BB_1 = \frac{a_2}{2}, \quad OB = \frac{a_2\sqrt{3}}{2}, \quad b_2 = BR = \sqrt{1 - \frac{3a_2^2}{4}},$$

$$d_{BB_1} = \log\left(\frac{BR}{B_1R} : \frac{BT}{B_1T}\right) = \log\frac{B_1T}{B_2T} = \log\frac{b_2 + \frac{a_2}{2}}{b_2 - \frac{a_2}{2}}, \quad p_2 = 12d_{BB_1}.$$

В частности, если $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = 0{,}9$, то

$$r_1 = \log\frac{1{,}1}{0{,}9} \approx 0{,}08715, \quad r_2 = \log\frac{1{,}9}{0{,}1} \approx 1{,}27875,$$

$$\frac{a_1\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}05774, \quad b_1 \approx 0{,}99499,$$

$$d_{AA_1} \approx \log\frac{1{,}05273}{0{,}93725} \approx 0{,}05046, \quad p_1 \approx 0{,}6055$$

$$b_2 \approx 0{,}6265, \quad d_{BB_1} \approx \log\frac{1{,}0765}{0{,}1765} \approx 0{,}78627, \quad p_2 \approx 9{,}435.$$

Отсюда

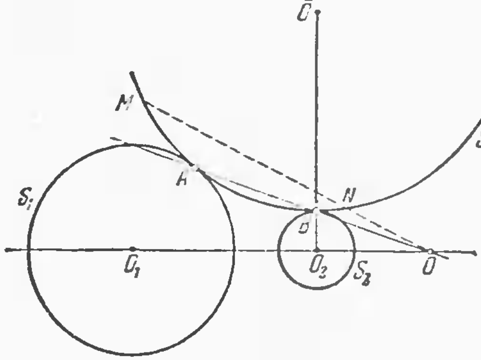
$$\frac{s_1}{r_1} < \frac{p_1}{r_1} < 7 \quad \text{и} \quad \frac{s_2}{r_2} > \frac{p_2}{r_2} > 7.$$

Примечание. Можно показать, что в неевклидовой геометрии Лобачевского отношение длины s окружности S к радиусу r растёт с увеличением r; при $r \to 0$ это отношение стремится к $\pi = 3{,}14159...$, а при $r \to \infty$ возрастает безгранично.

ГЛАВА II
КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1

212. Пусть окружность S касается S_1 и S_2 в точках A и B; O_1, O_2 и $\bar{O}$ — центры S_1, S_2 и S, O — точка пересечения AB и O_1O_2 (черт. 384). Произведём инверсию с центром O и степенью $k = OA \cdot OB$. При этом точка A переходит в точку B и обратно; окружность S переходит в себя (ибо любая

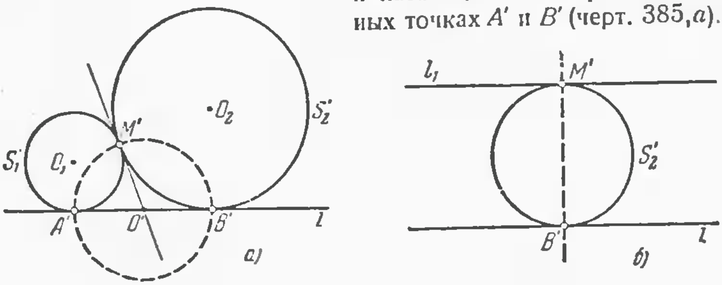


Черт. 384.

прямая, проходящая через O, пересекает S в точках M и N, таких, что $OM \cdot ON = OA \cdot OB = k$). Окружность S_1, касающаяся S в точке A, переходит в окружность S'_1, касающуюся S в точке B. При этом центр S'_1 лежит на прямой OO_1 (см. доказательство свойства $Б_4$, стр. 178—179), т. е. совпадает с точкой O_3 пересечения прямых $\bar{O}B$ и OO_1. Отсюда вытекает, что S_1' совпадает с S_2. Следовательно, инверсия с центром O переводит S_1 в S_2, т. е. O есть центр подобия S_1 и S_2 (см. доказательство свойства $Б_4$), что и требовалось доказать.

[Если AB совпадает с O_1O_2, то утверждение задачи очевидно. Если $AB \parallel O_1O_2$, то инверсию с центром O следует заменить симметрией относительно прямой, переводящей A в B; так же, как выше, показывается, что эта симметрия переводит S_1 в S_2. Следовательно, окружности S_1 и S_2 равны и не имеют внешнего центра подобия; этот случай представляет собой исключение.]

213. а) Первое решение. Произведём инверсию с центром в некоторой точке O окружности S. При этом окружность S перейдёт в некоторую прямую l, а окружности S_1 и S_2 — в окружности S_1' и S_2', касающиеся между собой и касающиеся l в фиксированных точках A' и B' (черт. 385,*а*).



Черт. 385.

Пусть M' — точка касания S_1' и S_2', O' — точка пересечения общей касательной к S_1' и S_2' в точке M' с прямой l. Тогда, очевидно,

$$O'A' = O'M' \text{ и } O'B' = O'M',$$

т. е.

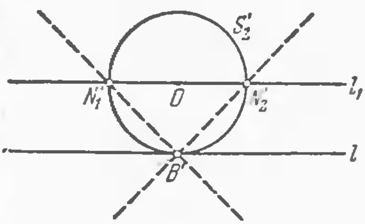
$$O'A' = O'B' = O'M'.$$

Таким образом, точка M' принадлежит окружности с центром в середине O' отрезка $A'B'$ и радиусом, равным половине $A'B'$. Отсюда следует, что и геометрическим местом точек M касания S_1 и S_2 является окружность, проходящая через точки A и B и перпендикулярная к окружности S.

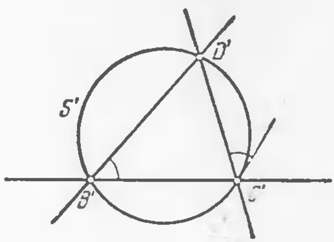
Второе решение. Ещё более можно упростить чертёж задачи, если произвести инверсию с центром в точке A.

При этом окружность S перейдёт в прямую l, а окружности S_1 и S_2, касающиеся S в точках A и B, — в прямую l_1, параллельную l, и окружность S_2', касающуюся прямой l в фиксированной точке B' (черт. 385, *б*). Очевидно, что геометрическим местом точек M' касания l_1 и S_2' будет являться прямая, перпендикулярная к прямым l и l_1 и проходящая через точку B'. Отсюда следует, что геометрическим местом точек M касания S_1 и S_2 является окружность (проходящая через точки A и B и перпендикулярная к окружности S).

б) При инверсии с центром в точке A окружность S перейдёт в прямую l, окружность S_2 — в окружность S_2', касающуюся l в фиксированной точке B', а окружность S_1 — в прямую l_1, параллельную l и перпендикулярную к окружности S_2', т. е. проходящую через центр S_2' (черт. 386). Очевидно, что геометрическим местом точек N_1' и N_2' пересечения l_1 и S_2' будут служить две (взаимно перпендикулярные) прямые, проходящие через B' и образующие с l углы в 45°. Отсюда следует, что геометрическим местом точек N_1 и N_2 пересечения S_1 и S_2 будут являться две (взаимно перпендикулярные) окружности, проходящие через точки A и B и образующие с S углы в 45°.



Черт. 386.



Черт. 387.

214. Произведём инверсию с центром в точке A. При этом окружности, описанные вокруг треугольников ABC, ABD и ADC, перейдут в прямые, и мы придём к черт. 387. Из этого чертежа видно, что угол между окружностью S', описанной вокруг треугольника $B'C'D'$ и прямой $C'D'$, равен углу между прямыми $B'C'$ и $B'D'$ (оба угла измеряются половиной дуги $C'D'$ окружности S'), откуда и вытекает утверждение задачи.

215. а) Пусть r_1, r_2 и r — радиусы окружностей S_1, S_2 и S; $r = r_1 + r_2$. При инверсии с центром M и (отрицательной!) степенью $k = MA \cdot MB$ окружность S и прямая MD переходят в себя, окружности S_1 и S_2 — в касательные к S в точках B и A, а окружности Σ_1 и Σ_2 — в окружности Σ_1' и Σ_2' радиусов r_2 и r_1, изображённые на черт. 388. Окружности Σ_1 и Σ_1' центрально-подобны с центром M и коэффициентом подобия $\frac{k}{k_1}$, где $k = MA \cdot MB = 4r_1r_2$, а k_1 есть квадрат касательной MP, проведённой из M к окружности Σ_1' (см. доказательство свойства $Б_4$ инверсии, стр. 178—179); из треугольника OO_1E на черт. 388 следует, что

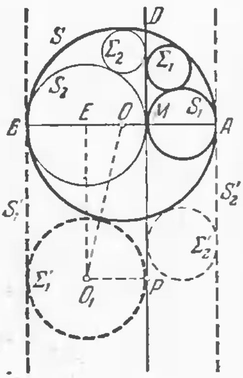
$$MP^2 = O_1E^2 = OO_1^2 - OE^2 = (r + r_2)^2 - (r - r_2)^2 = 4rr_2.$$

Отсюда вытекает, что радиус Σ_1 равен

$$r_2 \frac{k}{k_1} = r_2 \frac{4r_1r_2}{4rr_2} = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

Точно так же доказывается, что и радиус Σ_2 равен $\frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

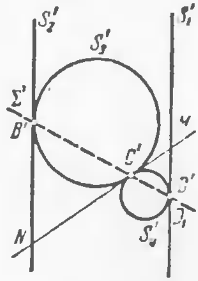
б) При инверсии с центром B и (положительной!) степенью $BM \cdot BA$ окружность S_1 перейдёт в себя, окружность S — в прямую MD и прямая MD — в окружность S. Таким образом, криволинейный треугольник AMD черт. 140 переходит в себя и окружность Σ_1, вписанная в этот треугольник, тоже перейдёт в себя.



Черт. 388.

Точка T касания S_1 и Σ_1 остаётся на месте (ибо и S_1 и Σ_1 переходят в себя); следовательно, T лежит на окружности инверсии. Точка T_1 касания S_1 с проведённой из B касательной к S_1 тоже остаётся на месте (ибо и S_1 и BT_1 переходят в себя); следовательно, T_1 тоже лежит на окружности инверсии. Но полуокружность S_1 пересекается с окружностью инверсии в единственной точке; значит, T_1 совпадает с T и касательная к S_1 и Σ_1 в T проходит через B. Точно так же доказывается, что касательная к S_2 и Σ_2 в их точке касания проходит через A.

216. Инверсия с центром в точке A касания S_1 и S_2 переводит черт. 141 в черт. 389; нам, очевидно, достаточно показать, что точки B', C' и D' этого последнего чертежа лежат на одной прямой Σ'. Пусть MN — общая касательная к S'_3 и S'_4 в точке C', D_1 — точка пересечения прямых $B'C'$ и S'_1. В таком случае $\angle NB'C' = \angle NC'B'$ (как измеряющиеся половиной одной дуги $B'C'$ окружности S'_3), $\angle NC'B' = \angle MC'D_1$ (как вертикальные) и $\angle NB'C' = \angle MD_1C'$ (как накрестлежащие при параллельных S'_1 и S'_2). Значит, $\angle MC'D'_1 = \angle MD'_1C'$ и, следовательно, $MD_1 = MC'$; а так как $MD' = MC'$ (как касательные, проведённые к S'_4 из одной точки M), то D_1 совпадает с D', что нам и требовалось доказать.



Черт. 389.

217. а) Произведём инверсию с центром в точке P пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников $A_1A_2B_3$, $A_1A_3B_2$ и $A_2A_3B_1$. В таком случае эти три окружности перейдут в прямые, и мы придём к следующей задаче: *доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников $B'_1B'_2A'_1$, $B'_1B'_3A'_2$ и $B'_2B'_3A'_1$, где B'_1, B'_2 и B'_3 — точки на сторонах $A'_2A'_3$, $A'_3A'_1$ и $A'_1A'_2$ треугольника $A'_1A'_2A'_3$, пересекаются в одной точке*, т. е. к задаче 82а) из § 1 гл. II второй части книги [1]).

б) Эту задачу можно сформулировать так. *Даны шесть точек A_1, C_1, D_2, C_2, A_2, B_1; доказать, что если окружности, описанные вокруг треугольников $A_1C_1B_1(\Sigma)$, $C_1D_2C_2(S_4)$ и $D_2A_1A_2(S_1)$, пересекаются в одной точке (D_1), то окружность, описанная вокруг треугольника $C_2A_2D_2(\Sigma')$, пройдёт через точку (B_2) пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников $A_2A_1B_1(S_2)$ и $B_1C_2C_1(S_3)$*. Но это есть та же задача а).

в) Инверсия с центром O переводит окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 в четыре прямые; тем самым наша задача переходит в задачу: *доказать, что четыре окружности, описанные вокруг четырёх треугольников, образованных четырьмя по-*

[1]) Эта задача может быть несложно решена и без использования материала второй части книги (см., например, литературу, указанную на стр. 281 первого тома).

парно пересекающимися прямыми (никакие три из которых не пересекаются в одной точке), *пересекаются в одной точке*, т. е. в задачу 64 из § 2 гл. I второй части книги [1]).

218. а) Для случая $n=4$ наше утверждение совпадает с теоремой задачи 64 из § 2 гл. I второй части книги. Предположим теперь, что утверждение задачи уже доказано для всех значений числа n, меньших какого-то фиксированного, и покажем, что в таком случае и для этого значения n утверждение останется справедливым; этот путь решения задачи, опирающийся на метод математической индукции, подсказывается самой её формулировкой.

Предположим сначала, что n ($\geqslant 5$) нечётно. Мы имеем n прямых $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$; каждой системе $n-1$ из них, получаемой отбрасыванием прямой l_i ($i=1, 2, \ldots, n$), отвечает центральная точка A_i этих $n-1$ прямых; каждым $n-2$ из них, получаемым отбрасыванием двух прямых l_i и l_j ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), отвечает центральная окружность S_{ij} этих $n-2$ прямых; каждым $n-3$ из них, получаемым отбрасыванием прямых l_i, l_j и l_k ($i, j, k=1, 2, \ldots, n$), отвечает центральная точка A_{ijk} этих $n-3$ прямых; каждым $n-4$ из них, получаемым отбрасыванием прямых l_i, l_j, l_k и l_m ($i, j, k, m=1, 2, \ldots, n$), отвечает центральная окружность S_{ijkm} этих $n-4$ прямых (если $n=5$, то, например, вместо окружности S_{1234} выступает прямая l_5). Нам надо доказать, что все n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на одной окружности; для этого достаточно показать, что лежат на одной окружности каждые четыре из этих точек, например точки A_1, A_2, A_3 и A_4.

Согласно определению центральных точек и центральных окружностей в точке A_1 пересекаются окружности S_{12}, S_{13}, $S_{14}, \ldots, S_{1n}$ и аналогично для точек $A_2, A_3, \ldots, A_n$; на окружности S_{12} лежат точки $A_{123}, A_{124}, \ldots, A_{12n}$ и т. д.; в точке A_{123} пересекаются окружности $S_{1234}, S_{1235}, \ldots, S_{123n}$ и т. д. Таким образом, мы видим, что

окружности	S_{12}	и	S_{23}	пересекаются	в	точках	A_2	и A_{123};
»	S_{23}	»	S_{34}	»	»	»	A_3	» A_{234};
»	S_{34}	»	S_{41}	»	»	»	A_4	» A_{134};
»	S_{41}	»	S_{12}	»	»	»	A_1	» A_{124}.

[1]) Эта задача может быть несложно решена и без использования материала второй части книги (см., например, литературу, указанную на стр. 281 первого тома).

Но так как четыре точки A_{123}, A_{234}, A_{134} и A_{124} лежат на одной окружности S_{1234}, то четыре точки A_1, A_2, A_3 и A_4 в силу теоремы задачи 217б) тоже лежат на одной окружности, что нам и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай чётного n; мы примем и здесь обозначения, аналогичные употребляемым выше, с той разницей, что теперь мы будем иметь центральную окружность S_1 $n-1$ прямых l_2, l_3, ..., l_n, центральную точку A_{12} $n-2$ прямых l_3, l_4, ..., l_n и т. д. Нам надо доказать, что n окружностей S_1, S_2, ..., S_n пересекаются в одной точке; для этого достаточно показать, что каждые три из них, например S_1, S_2 и S_3, пересекаются в одной точке [1]).

Из определения центральных точек и окружностей следует, что

окружность	S_1	проходит	через	точки	A_{12},	A_{13}	и	A_{14};
»	S_3	»	»	»	A_{13},	A_{23}	»	A_{34};
»	S_2	»	»	»	A_{23},	A_{12}	»	A_{24};
»	S_{134}	»	»	»	A_{14},	A_{34}	»	A_{13};
»	S_{234}	»	»	»	A_{34},	A_{24}	»	A_{23};
»	S_{124}	»	»	»	A_{24},	A_{14}	»	A_{12}.

Но последние три из этих окружностей проходят через одну точку A_{1234}; значит, в силу теоремы задачи 217а) и первые три из них пересекаются в одной точке, что нам и требовалось доказать [2]).

б) Для случая $n=3$ наше утверждение совпадает с задачей 82а) из § 1 гл. II второй части книги; для случая $n=4$ оно вытекает из предложения задачи 217б) (см. формулировку задачи для этого случая, приведённую в подстрочном примечании на стр. 191). Предположим теперь, что для всех значений числа n, меньших некоторого определённого, предложение

---

[1]) Четыре окружности, каждые три из которых пересекаются в одной точке, не обязаны пересекаться все в одной точке (такие четыре окружности можно получить инверсией из трёх сторон треугольника и его описанной окружности). Но если n ($\geqslant 5$) попарно различных окружностей таковы, что каждые три из них пересекаются в одной точке, то все n окружностей обязательно пересекаются в одной точке.

[2]) Приведённое решение задачи 218а) опирается на теоремы задач 217а), б). Можно также решать эту задачу, опираясь на теорему задачи 217в) (ср. решение задачи 125 из книги Д. О. Шклярского и др., указанной на стр. 606).

задачи уже доказано, и покажем, что в таком случае это предложение справедливо и для этого значения n.

Пусть сначала n ($\geqslant 5$) нечётно. Мы имеем n прямых l_1, l_2, l_3, ..., l_n, на каждой из которых взята точка (все точки лежат на одной окружности); каждым $n-1$ из этих прямых, получаемым отбрасыванием прямой l_i, отвечает направляющая окружность S_i; каждым $n-2$ прямым, получаемым отбрасыванием прямых l_i и l_j, отвечает направляющая точка A_{ij}; каждым $n-3$ прямым, получаемым отбрасыванием l_i, l_j и l_k, отвечает направляющая окружность S_{ijk}; каждым $n-4$ прямым, получаемым отбрасыванием l_i, l_j, l_k и l_m, отвечает направляющая точка A_{ijkm} (если $n=5$, то вместо точки A_{1234}, например, выступает точка, взятая на прямой l_5). Нам надо доказать, что n окружностей S_1, S_2, S_3, ..., S_n пересекаются в одной точке; для этого достаточно показать, что пересекаются в одной точке любые три из этих окружностей, например S_1, S_2 и S_3. Из определения направляющих точек и окружностей следует, что

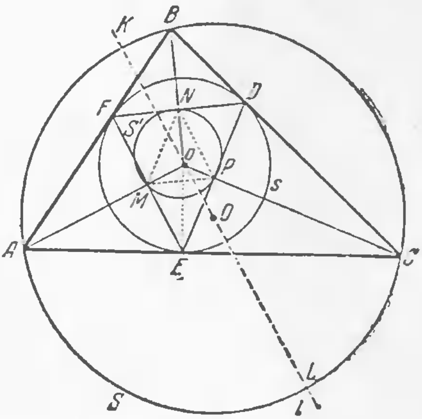
окружность	S_1	проходит	через	точки	A_{12},	A_{13}	и	A_{14};
»	S_3	»	»	»	A_{13},	A_{23}	»	A_{34};
»	S_2	»	»	»	A_{23},	A_{12}	»	A_{24};
»	S_{134}	»	»	»	A_{14},	A_{34}	»	A_{13};
»	S_{234}	»	»	»	A_{34},	A_{24}	»	A_{23};
»	S_{124}	»	»	»	A_{24},	A_{14}	»	A_{12}.

Далее см. конец решения задачи а).

Совершенно аналогично, очень похоже на первую часть решения задачи а), рассматривается случай чётного n.

219. а) Пусть S и s — описанная и вписанная окружности треугольника ABC, O и o — их центры, R и r — их радиусы, D, E и F — точки касания s со сторонами треугольника, M, N и P — точки пересечения сторон треугольника DEF с oA, oB и oC, совпадающие, очевидно, с серединами сторон DEF (черт. 390). Докажем, что при симметрии относительно окружности s точки A, B, C перейдут в точки M, N, P. Действительно, например, из подобия прямоугольных треугольников oME и oAE следует $\frac{oA}{oE}=\frac{oE}{oM}$ или $oA\cdot oM=oE^2=r^2$, откуда и вытекает, что точки A и M при рассматриваемой инверсии перейдут друг в друга.

Теперь мы видим, что при нашей инверсии окружность S, описанная около треугольника ABC, переходит в окружность S', описанную около треугольника MNP. Так как треугольники MNP и DEF подобны с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, то радиус окружности S' равен $\frac{r}{2}$. С другой стороны, окружности S' и S центрально-подобны с центром подобия o и коэффициентом подобия $-\frac{r^2}{k}$, где $k = oK \cdot oL$, K и L — точки пересечения с S произвольной прямой l, проходящей через o (см. доказательство свойства $Б_3$ инверсии). Примем за l прямую oO; в этом случае $oK = R - d$, $oL = R + d$ и, следовательно, $k = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$.



Черт. 390.

Таким образом, мы видим, что окружности S' и S радиусов $\frac{r}{2}$ и R центрально-подобны с коэффициентом подобия $\frac{r^2}{R^2 - d^2}$. Отсюда получаем:

$$\frac{\frac{r}{2}}{R} = \frac{r^2}{R^2 - d^2}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{2R}{R^2 - d^2},$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{(R-d) + (R+d)}{R^2 - d^2} = \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d},$$

что и требовалось доказать.

Справедливость обратного утверждения проще всего показать следующим образом. Пусть радиусы R и r каких-то двух окружностей S и s связаны с расстоянием d между их центрами соотношением

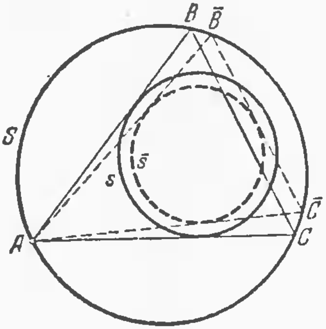
$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

Отсюда прежде всего следует, что

$$2Rr = R^2 - d^2, \quad d^2 = R^2 - 2Rr < R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2,$$

$$d < R - r,$$

т. е. окружность s целиком заключена внутри S. Пусть A — произвольная точка окружности S; проведём хорды AB и AC этой окружности, касающиеся s, и соединим B и C (черт. 391). Предположим, что прямая BC не касается s, а, например, пересекает её. Будем непрерывно уменьшать радиус окружности s, не меняя её центра, пока не придём к такой окружности $\bar{s}$, что хорда $\bar{B}\bar{C}$ окружности S, где $A\bar{B}$ и $A\bar{C}$ — хорды S, касающиеся $\bar{s}$, сама касается $\bar{s}$ (черт. 391). В силу доказанного радиус $\bar{r}$ окружности $\bar{s}$ связан с величинами R и d соотношением



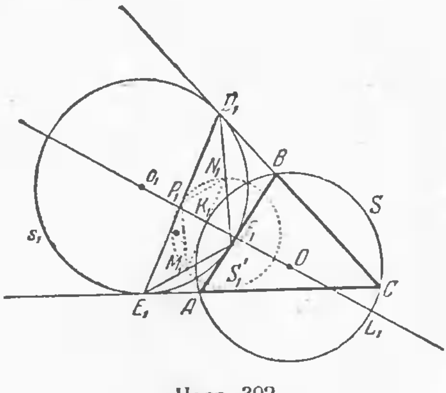
Черт. 391.

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{\bar{r}},$$

которое невозможно, так как $\bar{r} < r$, а по условию

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

Точно так же доказывается, что хорда BC не может проходить вне окружности s (в этом случае нам придётся увеличивать окружность s).



Черт. 392.

б) Аналогично решению задачи а) показывается, что симметрия относительно вневписанной окружности s_1 треугольника ABC переводит вершины треугольника в середины M_1, N_1 и P_1 сторон треугольника $D_1E_1F_1$ с вершинами в точках касания s_1 со сторонами ABC (черт. 392). Отсюда следует, что описанная окружность S перейдёт в окружность S_1' радиуса $\frac{r_1}{2}$ (сравните с решением задачи а)). С другой стороны, окружности S_1' и S центрально-подобны с центром подобия o_1 и коэффициентом подобия $\frac{r_1^2}{k}$, где

$$k = o_1K_1 \cdot o_1L_1 = (d_1 - R)(d_1 + R) = d_1^2 - R^2$$

(см. черт. 392). Отсюда получаем:

$$\frac{\frac{r_1}{2}}{R} = \frac{r_1^2}{d_1^2 - R^2},$$

а следовательно,

$$\frac{1}{d_1 - R} - \frac{1}{d_1 + R} = \frac{1}{r_1},$$

что и требовалось доказать.

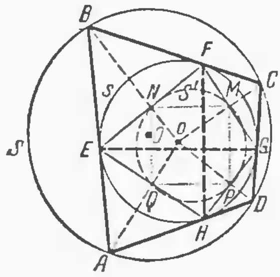
Примечание. Можно доказать, что и обратно, если радиусы R и r_1 двух окружностей и расстояние между их центрами d_1 связаны соотношением

$$\frac{1}{d_1 - R} - \frac{1}{d_1 + R} = \frac{1}{r_1}$$

и первая окружность не заключается целиком внутри второй (это обстоятельство не вытекает из соотношения задачи и его надо потребовать отдельно), то эти окружности можно рассматривать как описанную и вневписанную окружности некоторого треугольника (и даже бесконечного числа их; за вершину такого треугольника можно принять любую точку первой окружности, расположенную вне второй окружности).

220. а) Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S (с центром O радиуса R) и описан около окружности s (с центром o радиуса r), E, F, G, H — точки касания s со сторонами четырёхугольника, M, N, P и Q — точки пересечения oC, oB, oA и oD с FG, EF, HE и GH (середины сторон четырёхугольника $EFGH$; черт. 393, a). При симметрии относительно окружности s вершины четырёхугольника $ABCD$ перейдут в вершины четырёхугольника $MNPQ$ и окружность S — в окружность S', описанную вокруг $MNPQ$

(сравните с решением задачи 219а)). Но MN и PQ — средние линии треугольников EFG и GEH; значит, $MN \| PQ \| EG$; точно так же показывается, что $MP \| NQ \| FH$. Значит, четырёхугольник $MNPQ$ есть параллелограмм, стороны которого параллельны FH и EG. Так как вокруг этого параллелограмма описана окружность S', то он является прямоугольником и, следовательно, $FH \perp EG$, что и требовалось доказать.



а)

Черт. 393, *а*.

б) Докажем прежде всего, что если существует единственный четырёхугольник $ABCD$, вписанный в данную окружность S и описанный вокруг второй окружности s, то таких четырёхугольников существует бесконечно много. Мы видели, что $FH \perp EG$ (черт. 393, *б*; мы сохраняем здесь обозначения решения задачи а)). Проведём теперь через точку T пересечения FH и EG произвольную другую пару взаимно перпендикулярных хорд $F'H'$ и $E'G'$ окружности s. Мы утверждаем, что середины M', N', P' и Q' сторон четырёхугольника $E'F'G'H'$ лежат на той же окружности S', которая фигурировала в решении задачи а).

Нам достаточно показать, что *геометрическое место середин M' хорд $E'F'$ окружности s, таких, что $TE' \perp TF'$, лежит на одной окружности $\bar{S}'$*; в таком случае из того, что точки M, N, P и Q принадлежат этому геометрическому месту, будет следовать, что $\bar{S}'$ совпадает с S', а из того, что точки M', N', P' и Q' принадлежат этому геометрическому месту, — требуемое утверждение. Соединим точку M' с T и с центром o окружности s и рассмотрим параллелограмм $M'TR'o$. В силу известного свойства параллелограмма

$$M'R'^2 + To^2 = 2TM'^2 + 2oM'^2,$$

или

$$O'M'^2 + O'T^2 = \frac{1}{2}(TM'^2 + oM'^2),$$

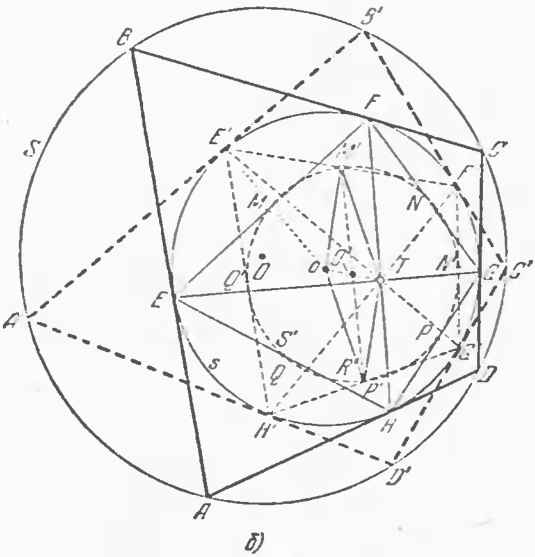
где O' — середина To. Но так как TM' — медиана прямоугольного треугольника $TE'F'$, то $TM' = M'E' = M'F'$; с другой стороны, так как M' есть середина хорды $E'F'$ окружности s, то $oM' \perp E'F'$. Следовательно,

$$oM'^2 + TM'^2 = oM'^2 + M'E'^2 = oE'^2 = r^2$$

(r — радиус окружности s) и, значит,

$$O'M'^2 = \frac{r^2}{2} - O'T^2$$

не зависит от выбора хорды $E'F'$. Этим и завер-



б)

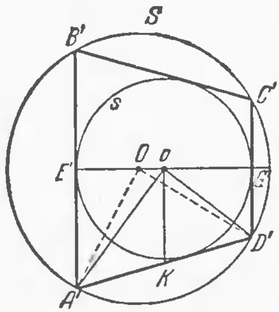
Черт. 393, б.

шается доказательство нашего утверждения: искомое геометрическое место есть окружность с центром O' и радиусом

$$\sqrt{\frac{r^2}{2} - O'T^2}.$$

Пусть теперь $A'B'C'D'$ — четырёхугольник, образованный касательными к окружности s в точках E', F', G', H'. Как в решении задачи 219а), показывается, что точки A', B', C', D' симметричны точкам M', N', P', Q' относительно окружности s. А так как последние точки по доказанному лежат на окружности S', то вершины $A'B'C'D'$ будут лежать на окружности S (симметричной S' относительно s); следовательно, четырёхугольник $A'B'C'D'$ одновременно описан вокруг s и вписан в S.

Теперь мы можем перейти к доказательству основного утверждения задачи. Пусть прямая $E'G'$ совпадает с линией центров oO окружностей s и S; из соображений симметрии очевидно, что в этом случае четырёхугольник $A'B'C'D'$ будет трапецией (черт. 394). Так как эта трапеция вписана в окружность, то она будет равнобочной, а так как она описана вокруг окружности, то сумма боковых сторон будет равна сумме оснований, т. е. средняя линия будет равна боковой стороне. Поэтому если o есть середина $E'G'$ (это есть центр s, $oE'=oG'=r$), а K — середина боковой стороны $A'D'$, то медиана oK треугольника $oA'D'$ будет равна половине стороны $A'D'$; следовательно, треугольник $oA'D'$ будет прямоугольным. Отсюда следует, что $\angle A'oE'+\angle D'oG'=90^\circ$, т. е. прямоугольные треугольники $oA'E'$ и $oD'G'$ будут подобны.



Черт. 394.

Но если O есть центр S, $oO=d$, то

$$OE'=r-d, \quad OG'=r+d,$$

$$A'E'=\sqrt{OA'^2-OE'^2}=\sqrt{R^2-(r-d)^2},$$

$$D'G'=\sqrt{OD'^2-OG'^2}=\sqrt{R^2-(r+d)^2}$$

и из подобия треугольников $oA'E'$ и $oD'G'$ следует

$$\frac{r}{\sqrt{R^2-(r-d)^2}}=\frac{\sqrt{R^2-(r+d)^2}}{r},$$

откуда

$$r^4=R^4-2(r^2+d^2)R^2+(r^2-d^2)^2,$$
$$r^4=(R^2-d^2)^2-2r^2R^2+r^4-2r^2d^2,$$
$$(R^2-d^2)^2=r^2(2R^2+2d^2).$$

Остаётся только заменить правую часть последнего равенства на $r^2[(R+d)^2+(R-d)^2]$ и разделить затем обе части на

$r^2(R^2-d^2)^2=r^2(R+d)^2(R-d)^2$, чтобы получить требуемое соотношение

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}.$$

[Мы не доказали, что любую точку окружности S можно принять за вершину четырёхугольника, вписанного в S и описанного вокруг s; однако это легко усмотреть из решения задачи или доказать самостоятельно вполне аналогично соответствующему рассуждению из решения задачи 219а).]

221. Из равенства

$$\frac{1}{R+d}+\frac{1}{R-d}=\frac{1}{r}$$

(см. задачу 219а)) следует

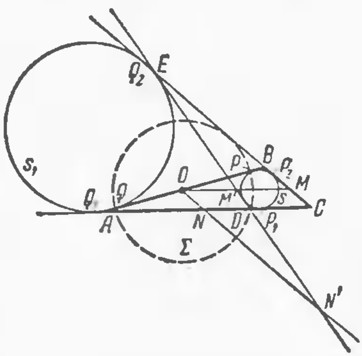
$$d^2=R^2-2Rr=R(R-2r)$$

и, значит,

$$R-2r\geqslant 0,\quad r\leqslant\frac{R}{2},$$

что и требовалось доказать.

Если $r=\frac{R}{2}$, то $d=0$, т. е. описанная и вписанная окружности треугольника концентричны (точка пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах, совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника). Отсюда легко вывести, что треугольник равносторонний.



Черт. 395.

222. Пусть O — середина стороны AB треугольника ABC, P и Q — точки касания вписанной окружности s и вневписанной окружности s_1 с этой стороной (черт. 395). Покажем, что $OP=OQ$. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника; P, P_1 и P_2, Q, Q_1 и Q_2 — точки касания s и s_1 со сторонами треугольника. В таком случае

$$AP = \frac{1}{2}(AP + AP_1) = \frac{1}{2}[(c - BP) + (b - CP_1)] =$$
$$= \frac{1}{2}[c + b - (BP + CP_1)] = \frac{1}{2}[c + b - (BP_2 + CP_2)] =$$
$$= \frac{1}{2}(c + b - a).$$
$$OP = AP - AO = \frac{1}{2}(c + b - a) - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(b - a);$$

аналогично показывается, что

$$BQ = \frac{1}{2}(c + b - a), \quad OQ = \frac{1}{2}(b - a).$$

Произведём инверсию с центром O и степенью $OP^2 = OQ^2$. При этом окружности s и s_1 перейдут в себя. Действительно, например, вписанная окружность s перейдёт в окружность s', пересекающую окружность инверсии Σ в тех же двух точках, что и s, и в силу свойства В инверсии также перпендикулярную к Σ (ибо нетрудно видеть, что s перпендикулярна к Σ: эти окружности образуют в точке пересечения P угол $90°$). Отсюда сразу следует, что s' совпадает с s; аналогично доказывается, что и окружность s_1 переходит в себя.

Выясним теперь, во что переходит при этой симметрии окружность девяти точек $\overline{S}$. Тремя общими касательными окружностей s и s_1 являются стороны треугольника ABC. Проведём четвёртую общую касательную этих окружностей; пусть D и E, M' и N' — точки пересечения её со сторонами AC и BC, соответственно со средними линиями OM и ON. Докажем, что *при симметрии относительно Σ окружность $\overline{S}$ девяти точек перейдёт в прямую $M'N'$.*

Прежде всего из соображений симметрии[*] следует, что $CD = CB = a$, $CE = CA = b$ (см. черт. 395). Далее, из подобия треугольников $MM'E$ и CED имеем:

$$\frac{MM'}{ME} = \frac{CD}{CE} \quad \text{или} \quad \frac{MM'}{b - \frac{a}{2}} = \frac{a}{b},$$

откуда

$$MM' = \frac{a}{b}\left(b - \frac{a}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$OM' = OM - MM' = \frac{b}{2} - \frac{a}{b}\left(b - \frac{a}{2}\right) = \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{2b} = \\ = \frac{(b-a)^2}{2b}.$$

Точно так же (из подобия треугольников $NN'D$ и CED) выводится, что

$$ON' = \frac{(b-a)^2}{2a}.$$

Таким образом,

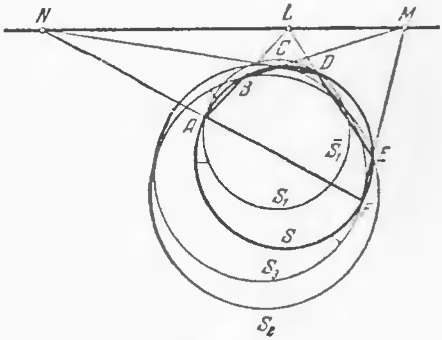
$$OM' \cdot OM = \frac{(b-a)^2}{2b} \cdot \frac{b}{2} = \frac{(b-a)^2}{4} = OP^2 = OQ^2$$

и аналогично

$$ON' \cdot ON = OP^2 = OQ^2.$$

Эти равенства показывают, что точки M' и N' симметричны относительно Σ точкам M и N. Отсюда и вытекает, что окружность девяти точек, проходящая через M, N и O, перейдёт при симметрии относительно Σ в прямую $M'N'$.

Из того, что при симметрии относительно Σ окружности s, s_1 переходят в себя, а окружность $\overline{S}$ — в прямую $M'N'$, касающуюся s и s_1, следует, что $\overline{S}$ касается s и s_1.



Черт. 396.

223. Пусть L, M и N — точки пересечения сторон AB и DE, BC и EF, CD и FA вписанного в окружность S шестиугольника $ABCDEF$ (черт. 396). Проведём через точки A и D произвольную окружность S_1 и произведём инверсию с центром L и степенью $k_1 = LB \cdot LA = LD \cdot LE$. При этом точка A перейдёт в B, B — в A, D — в E и E — в D; окружность S перейдёт в себя, а окружность S_1 — в окружность S_2, проходящую через точки B и E.

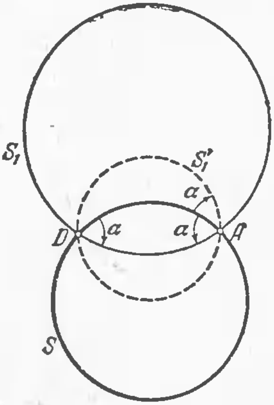
Произведём теперь инверсию с центром M и степенью $k_2 = MC \cdot MB = ME \cdot MF$. При этом окружность S снова перейдёт в себя, а окружность S_2 — в окружность S_3, проходящую через точки C и F. Наконец, произведём инверсию с центром N и степенью $k_3 = NC \cdot ND = NA \cdot NF$. Окружность S при этом снова перейдёт в себя, а окружность S_3 — в окружность $\overline{S}_1$, пересекающую S в точках D и A.

В силу свойства В инверсии все окружности S_1, S_2, S_3 и $\overline{S}_1$ образуют с окружностью S одни и те же углы. Но из того, что окружности S_1 и $\overline{S}_1$, пересекающие S в одних и тех же точках A и D, образуют с S одинаковые углы, следует, что эти окружности совпадают [1]).

Таким образом, мы видим, что точки L, M и N суть центры инверсий, переводящих S_1 в S_2, S_2 в S_3 и S_3 в S_1. Но это означает, что эти точки совпадают с попарными цент-

---

[1]) Для того чтобы утверждать с полной уверенностью, что $\overline{S}_1$ совпадает с S_1, мы должны показать, что углы, образованные этими окружностями с S, не только равны, но и одинаково направлены (ибо окружности S_1 и S'_1 на черт. 397 тоже образуют с S одинаковые углы и пересекают её в одних и тех же точках, а между тем они не совпадают).

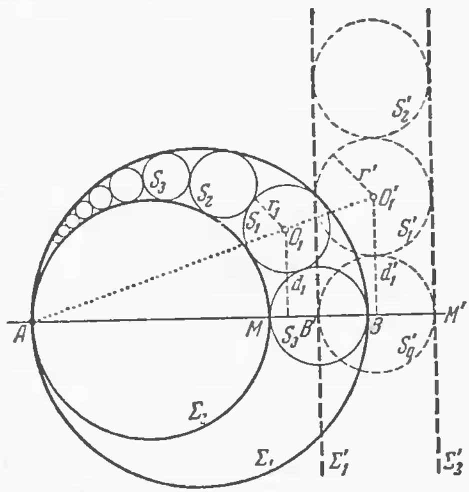


Черт. 397.

Нетрудно доказать, что это условие на самом деле выполняется. Действительно, предположим, что угол в точке A между окружностями S и S_1 равен α, причём он отсчитывается в направлении против часовой стрелки (т. е. касательную в точке A к окружности S можно совместить с касательной к S_1, повернув её на угол α против часовой стрелки); в таком случае, очевидно, угол между S и S_1 в точке D будет тоже равен α, но отсчитываться будет уже по часовой стрелке (см., например, черт. 397). Далее, в силу свойств инверсии (см. замечание на стр. 182) угол между S и S_2 в точке B будет равен α и будет отсчитываться по часовой стрелке, угол между S и S_3 в точке C будет равен α и будет отсчитываться в направлении против часовой стрелки и, наконец, угол между S и $\overline{S}_1$ в точке D будет равен α и будет отсчитываться по часовой стрелке. Таким образом, действительно S_1 и $\overline{S}_1$ образуют с S углы, совпадающие не только по величине, но и по направлению.

рами подобия этих трёх окружностей (см. доказательство свойства $Б_4$ инверсии). А отсюда в силу теоремы о трёх центрах подобия (см. § 1 гл. I второй части, стр. 93—94 первого тома) мы можем заключить, что L, M и N лежат на одной прямой [1]).

Доказательство теоремы полностью сохраняет свою силу и для того случая, когда шестиугольник $ABCDEF$ — самопересекающийся.



Черт. 398.

224. а) Произведём инверсию, переводящую окружности Σ_1 и Σ_2 в две параллельные прямые Σ'_1 и Σ'_2 (см. теорему 2 на стр. 194); центром этой инверсии будет служить точка A касания Σ_1 и Σ_2. При этом окружности S_0, S_1, S_2, ... перейдут в окружности S'_0, S'_1, S'_2, ..., касающиеся параллельных прямых Σ'_1 и Σ'_2; очевидно, все они будут равны (черт. 398). Обозначим общий радиус окружностей S'_0, S'_1, S'_2, ... через r', а расстояния центров этих окружностей от AB — соответст-

[1]) Предоставляем читателю самостоятельно доказать, что во всех случаях три попарных центра подобия L, M и N окружностей S_1, S_2 и S_3 будут лежать на одной прямой (вообще, три окружности имеют шесть попарных центров подобия, которые лежат по три на четырёх прямых; см. § 1 гл. I второй части книги).

венно через d'_0, d'_1, d'_2, ... Очевидно, $d'_n = 2nr'$, т. е. $\frac{r'}{d'_n} = \frac{1}{2n}$. Но окружности S_n и S'_n центрально-подобны с центром подобия в точке A (см. доказательство свойства Б$_4$ инверсии). Отсюда следует, что

$$\frac{r_n}{d_n} = \frac{r'}{d'_n} = \frac{1}{2n}, \quad \text{т. е.} \quad d_n = 2nr_n,$$

что и требовалось доказать.

б) Будем считать для простоты, что степень инверсии, использованной в решении задачи а), равна $(2R_1)^2$. В таком случае точка B' черт. 398 совпадает с точкой B, а

$$AM' = \frac{(2R_1)^2}{AM} = \frac{4R_1^2}{2R_2} = \frac{2R_1^2}{R_2}.$$

Следовательно, общий радиус r' окружностей S'_0, S'_1, S'_2, ... будет равен

$$\frac{1}{2}(AM' - AB') = \frac{1}{2}\left(\frac{2R_1^2}{R_2} - 2R_1\right) = \frac{R_1(R_1 - R_2)}{R_2}.$$

Далее, коэффициент подобия окружностей S_n и S'_n равен $\frac{k}{k_n}$, где $k = 4R_1^2$ — степень инверсии, k_n — квадрат касательной, проведённой из точки A к окружности S'_n (см. доказательство свойства Б$_4$ инверсии). Но квадрат касательной, проведённой из точки A к окружности S'_n, очевидно, равен $AO_n'^2 - r'^2$, где O'_n — центр окружности S'_n и

$$AO_n'^2 = AO_0'^2 + O_0'O_n'^2$$

(O'_0 — центр S'_0, т. е. середина отрезка $B'M'$). Следовательно,

$$AO'_0 = 2R_1 + r' = \frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2}; \qquad O'_0O'_n = d'_n = 2nr',$$

$$AO_n'^2 = \left[\frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2}\right]^2 + 4n^2r'^2$$

и коэффициент подобия окружностей S_n и S'_n равен

$$\frac{k}{k_n} = 4R_1^2 : \left\{\left[\frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2}\right]^2 + 4n^2r'^2 - r'^2\right\} =$$

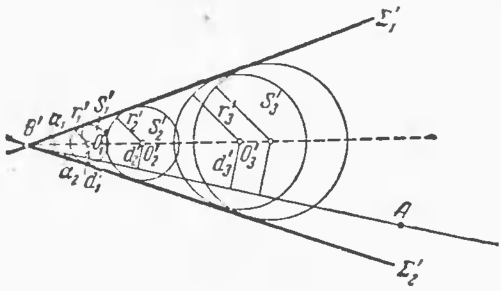
$$= 4R_1^2 : \left\{\left[\frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_2}\right]^2 + (4n^2 - 1)\left[\frac{R_1(R_1 - R_2)}{R_2}\right]^2\right\} =$$

$$= 4R_1^2 : \left\{[(R_1 + R_2)^2 + (4n^2 - 1)(R_1 - R_2)^2]\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right\}.$$

Значит, искомый радиус r_n равен

$$r_n = \frac{k}{k_n} r' = \frac{4R_1R_2(R_1 - R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (4n^2 - 1)(R_1 - R_2)^2}.$$

225. Произведём инверсию, переводящую окружности Σ_1 и Σ_2 в две пересекающиеся прямые Σ_1' и Σ_2'; центром этой инверсии будет служить точка A пересечения Σ_1 и Σ_2. При этом окружности $S_1, S_2, S_3, \ldots$ перейдут в окружности $S_1', S_2', S_3' \ldots$, вписанные в угол, образованный прямыми Σ_1' и Σ_2' (черт. 399);



Черт. 399.

очевидно, если $r_1', r_2', r_3', \ldots$ — радиусы окружностей S_1', S_2', $S_3', \ldots$, а $d_1', d_2', d_3', \ldots$ — расстояния их центров от прямой AB, то

$$\frac{r_1'}{d_1'} = \frac{r_2'}{d_2'} = \frac{r_3'}{d_3'} = \ldots$$

(окружности $S_1', S_2', S_3', \ldots$ все центрально-подобны с центром подобия B'). Но окружности $S_1, S_2, S_3, \ldots$ центрально-подобны соответственно окружностям $S_1', S_2', S_3', \ldots$ с центром подобия A; отсюда

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_1'}{d_1'}, \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_2'}{d_2'}, \quad \frac{r_3}{d_3} = \frac{r_3'}{d_3'},$$

откуда и следует, что

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_3}{d_3} = \ldots$$

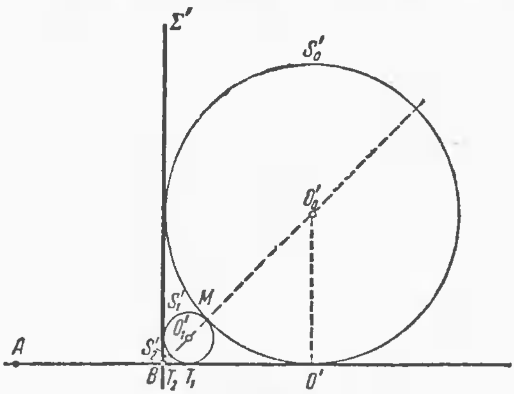
Далее, в обозначениях черт. 399 имеем:

$$\frac{r_1'}{d_1'}=\frac{r_1'}{O_1'B'}:\frac{d_1'}{O_1'B'}=\frac{\sin\angle O_1'B'P}{\sin\angle O_1'B'Q}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\alpha_2\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}.$$

Следовательно, $\sigma=\dfrac{\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}$, где в силу свойства В инверсии α_1 и α_2 суть углы, образованные окружностями Σ_1 и Σ_2 с их общей хордой AB.

226. а) Произведём инверсию, переводящую окружность Σ и прямую AB в две пересекающиеся прямые Σ' и AB (центром этой инверсии будет служить конец A диаметра); в силу



Черт. 400.

свойства В инверсии прямая Σ' перпендикулярна к AB. Степень инверсии мы положим равной $2R$; при этом точка B останется на месте. Окружности S_0, S_1, $S_2, \ldots$ перейдут в окружности S_0', S_1', $S_2', \ldots$, вписанные в прямой угол, образованный прямыми AB и Σ' (черт. 400).

Центр O окружности Σ перейдёт в точку O', такую, что $AO' = \frac{AB^2}{AO} = \frac{4R^2}{R} = 4R$; отсюда следует, что радиус $r_0' = BO'$ окружности S_0' равен $4R - 2R = 2R$. Далее, пара окружностей S_2', S_1' центрально-подобна паре окружностей S_1', S_0' с центром подобия B; следовательно,

$$\frac{r_2'}{r_1'} = \frac{r_1'}{r_0'}$$

(здесь $r_1', r_2', \ldots$ — радиусы окружностей $S_1', S_2', \ldots$), и значит, если обозначить отношение $\frac{r_1'}{r_0'}$ через ω, то

$$r_1' = r_0'\omega, \quad r_2' = r_1'\omega = r_0'\omega^2.$$

Точно так же показывается, что

$$r_3' = r_2'\omega = r_0'\omega^3, \quad r_4' = r_0'\omega^4, \ldots, r_n' = r_0'\omega^n.$$

Нетрудно найти величину ω. Обозначим центры окружностей S_0' и S_1' через O_0' и O_1', а точку их касания — через M. Очевидно,

$$O_0'B = r_0'\sqrt{2}, \quad O_1'B = O_0'B - (r_0' + r_1') = r_0'(\sqrt{2} - 1) - r_1'$$

и

$$O_1'B = r_1'\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$r_0'(\sqrt{2} - 1) - r_1' = r_1'\sqrt{2}, \quad \omega = \frac{r_1'}{r_0'} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

и

$$r_n = r_0'\omega^n = 2R\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right)^n \quad (n = 0,\ 1, 2, \ldots).$$

Теперь воспользуемся тем, что окружности S_n и S_n' центрально-подобны с коэффициентом подобия $\frac{k}{k_n}$, где $k = 4R^2$ — степень инверсии, k_n — квадрат касательной, проведённой из точки A к окружности S_n'. Обозначим точки касания окружностей $S_1, S_2, \ldots$ с прямой AB через $T_1, T_2, \ldots$; из соображений подобия очевидно, что

$$\frac{BT_n}{BO'} = \frac{r'_n}{r'_0} = \omega^n$$

и, следовательно,

$$BT_n = BO' \cdot \omega^n = 2R\omega^n, \qquad AT_n = 2R + 2R \cdot \omega^n = 2R(1 + \omega^n).$$

Таким образом,

$$\frac{k}{k_n} = \frac{4R^2}{4R^2(1+\omega^n)^2} = \frac{1}{(1+\omega^n)^2}.$$

Теперь окончательно получаем:

$$r_n = \frac{k}{k_n} r'_n = \frac{1}{(1+\omega^n)^2} 2R\omega^n = 2R\frac{\omega^n}{(1+\omega^n)^2},$$

где $\omega = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

б) В силу результата задачи а) имеем:

$$2t_n = \frac{2R}{r_n} = \frac{(1+\omega^n)^2}{\omega^n} = \frac{1+2\omega^n+\omega^{2n}}{\omega^n} = \omega^n + \frac{1}{\omega^n} + 2,$$

где $\omega = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, $\frac{1}{\omega} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. Уничтожив радикалы в знаменателях дробей ω и $\frac{1}{\omega}$, получим:

$$\omega = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = 3 - 2\sqrt{2}; \quad \frac{1}{\omega} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 3 + 2\sqrt{2};$$

следовательно,

$$2t_n = (3-2\sqrt{2})^n + (3+2\sqrt{2})^n + 2.$$

[Из этой формулы уже легко усмотреть, что t_n есть целое число при всяком n.]

Сумма $\omega + \frac{1}{\omega}$ есть целое число: $\omega + \frac{1}{\omega} = 6$. Так как произведение $\omega \cdot \frac{1}{\omega} = 1$, то ω и $\frac{1}{\omega}$ — корни квадратного уравнения

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Докажем теперь, что

$$t_n = 6t_{n-1} - t_{n-2} - 4.$$

Очевидно, имеем:

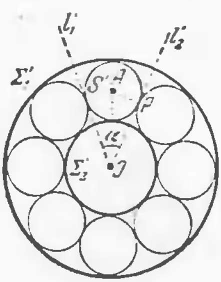
$$2t_n - 6\cdot 2t_{n-1} + 2t_{n-2} + 8 =$$
$$= \left[\omega^n + \left(\frac{1}{\omega}\right)^n + 2\right] - 6\left[\omega^{n-1} + \left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-1} + 2\right] +$$
$$+ \left[\omega^{n-2} + \left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-2} + 2\right] + 8 =$$
$$= \omega^{n-2}(\omega^2 - 6\omega + 1) + \left(\frac{1}{\omega}\right)^{n-2}\left[\left(\frac{1}{\omega}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{\omega}\right) + 1\right] = 0,$$

так как $\omega^2 - 6\omega + 1 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 - 6\frac{1}{\omega} + 1 = 0$. Отсюда и вытекает требуемая формула.

Теперь, для того чтобы завершить решение задачи, достаточно только заметить, что

$$2t_0 = (3 - 2\sqrt{2})^0 + (3 + 2\sqrt{2})^0 + 2 = 4;$$
$$2t_1 = (3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) + 2 = 8.$$

227. Решение этой задачи, довольно сложной по своей формулировке, оказывается относительно простым. Из самого определения цепи следует, что при инверсии всякая цепь окружностей переходит снова в цепь окружностей. Но каждую пару непересекающихся окружностей можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей (см. теорему 2 на стр. 194). Таким образом, каждую цепь можно при помощи инверсии перевести в простейшую цепь, основанием которой является пара концентрических окружностей (черт. 401). Из этого замечания непосредственно вытекают все утверждения задачи.

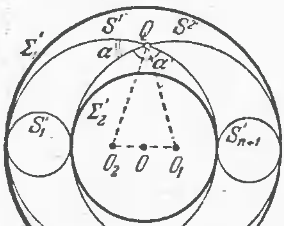


Черт. 401.

а) Предложение этого пункта является совершенно очевидным для пары концентрических окружностей Σ'_1, Σ'_2; отсюда следует, что оно справедливо и для всякой пары непересекающихся окружностей Σ_1, Σ_2.

б) Очевидно, что, для того чтобы пара концентрических окружностей Σ'_1, Σ'_2 могла служить основанием цепи окружностей, необходимо и достаточно, чтобы был соизмерим с 360° угол α между касательными l'_1, l'_2, проведёнными из общего центра O окружностей Σ'_1 и Σ'_2 к какой-либо окружности S', касающейся Σ'_1 и Σ'_2 (одной внешне, а другой внутренне; см. черт. 401).

При этом, если $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 360°$, то, очевидно, цепь с основанием Σ'_1, Σ'_2 содержит n окружностей и точки касания окружностей цепи с Σ'_1, взятые в том порядке, в котором располагаются окружности в цепи, пробегают окружность Σ'_1 m раз. Возвращаясь при помощи инверсии от пары Σ'_1, Σ'_2 к произвольной паре Σ_1, Σ_2 непересекающихся окружностей, мы получим, что эта пара может служить основанием цепи в том и только в том случае, если соизмерим с 360° угол α между двумя окружностями l_1, l_2, перпендикулярными к Σ_1 и Σ_2 и касающимися какой-либо окружности S, которая в свою очередь касается обеих окружностей Σ_1 и Σ_2 (причём именно так, как должны касаться Σ_1 и Σ_2 окружности цепи, т. е. одинаковым образом, если Σ_1 и Σ_2 расположены одна вне другой, и разным образом, если меньшая из окружностей Σ_1, Σ_2 расположена внутри другой); при этом мы попутно получаем, что этот угол зависит лишь от пары окружностей Σ_1, Σ_2, а не от выбора окружности S. Однако можно найти и более удобное выражение для угла α.



Черт. 402.

Вернёмся опять к случаю пары концентрических окружностей Σ'_1, Σ'_2. Пусть $S^{1'}$, $S^{2'}$ есть пара окружностей, касающихся Σ'_1 и Σ'_2 так, как показано на черт. 402. Докажем, что угол между окружностями $S^{1'}$ и $S^{2'}$ равен α. Обозначим радиусы окружностей Σ'_1 и Σ'_2 соответственно через r_1 и r_2; пусть для определённости $r_1 > r_2$. Очевидно, что радиус окружности S', касающейся Σ'_1 и Σ'_2, равен $\frac{r_1 - r_2}{2}$, а радиус окружностей $S^{1'}$ и $S^{2'}$ равен $\frac{r_1 + r_2}{2}$; расстояние от точки O до центра S'

равно $\frac{r_1+r_2}{2}$, а расстояние от O до центров $S^{1'}$ и $S^{2'}$ равно $\frac{r_1-r_2}{2}$. Отсюда легко вывести, что угол α равен $2\arcsin\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$ (в прямоугольном треугольнике OAP на черт. 401

$$OA=\frac{r_1+r_2}{2},\ AP=\frac{r_1-r_2}{2}\Big).$$

Соединив теперь центры $S^{1'}$ и $S^{2'}$ с точкой Q их пересечения, мы получим равнобедренный треугольник с основанием $2\frac{r_1-r_2}{2}$ и боковой стороной $\frac{r_1+r_2}{2}$; отсюда следует, что угол между радиусами $S^{1'}$ и $S^{2'}$, проведёнными в точку их пересечения, или, что то же самое, угол между окружностями $S^{1'}$ и $S^{2'}$ тоже равен $2\arcsin\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$, что и требовалось доказать.

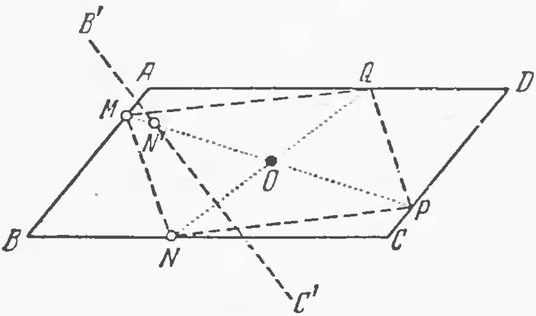
Переходя теперь при помощи инверсии обратно от пары Σ_1', Σ_2' к произвольной паре непересекающихся окружностей Σ_1, Σ_2, мы получим, что угол α равен углу между парой окружностей S^1, S^2, касающихся Σ_1 и Σ_2 в точках пересечения Σ_1 и Σ_2 с какой-либо окружностью, перпендикулярной как к Σ_1, так и к Σ_2 (в эту окружность переходит общий диаметр Σ_1' и Σ_2'), причём S^1 и S^2 касаются Σ_1 и Σ_2 не так, как должны касаться Σ_1 и Σ_2 окружности цепи с этим основанием (т. е. S^1 и S^2 касаются Σ_1 и Σ_2 одинаковым образом, если Σ_1 и Σ_2 расположены одна внутри другой, и разным образом, если они расположены одна вне другой). Отсюда, в частности, следует утверждение задачи 227б).

в) Опять рассмотрим пару Σ_1', Σ_2' концентрических окружностей. Пусть S_1' и S_{n+1}' — окружности, касающиеся Σ_1' и Σ_2' в диаметрально противоположных точках (причём так, как должны касаться Σ_1' и Σ_2' окружности цепи; см. черт. 402).

Очевидно, что при этом окружности $S^{1'}$ и $S^{2'}$, о которых говорится в условии задачи 227б), будут одинаковыми как для пары Σ_1', Σ_2', так и для пары S_1' и S_{n+1}'. Предоставляем читателю самому разобраться в том, почему углы α и α', отвечающие этим двум парам, следует считать не равными, а составляющими в сумме 180° $\left(\alpha+\alpha'=180^\circ=\frac{1}{2}\cdot 360^\circ\right)$.

§ 2

228. Предположим, что задача решена. Из того, что $OX \cdot OY = k$, следует, что X получается из точки Y прямой AN инверсией с центром O и степенью k; поэтому X лежит на окружности S, которая получается из прямой AN инверсией с центром O и степенью k (или $-k$), т. е. X есть точка пересечения прямой AM и окружности S (которую можно построить). Всего задача может иметь до четырёх решений.

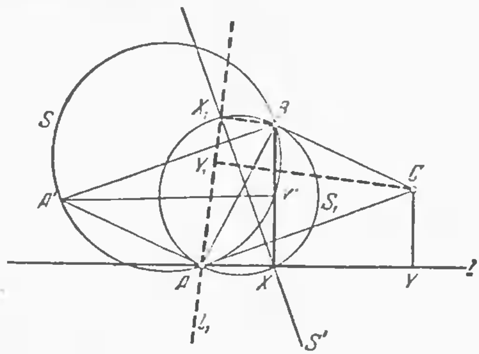


Черт. 403.

229. Предположим, что задача решена и $MNPQ$ — искомый параллелограмм. Центр $MNPQ$ совпадает с центром O данного параллелограмма $ABCD$ (черт. 403; см. решение задачи 60б) из § 2 гл. 1 второй части книги). Угол $MON = \alpha$ нам известен по условию; кроме того, известно $2OM \cdot ON \sin\alpha = S$ (S — площадь $MNPQ$). Если N' есть точка, которая получается из N поворотом на угол α вокруг O, то $ON'M$ — одна прямая и $OM \cdot ON' = \frac{S}{2\sin\alpha} = k$ — известной величине. Так как точка N' лежит на прямой $B'C'$, которая получается из прямой BC поворотом на угол α вокруг точки O, то мы приходим к предыдущей задаче: требуется провести через O прямую, которая пересекает известные прямые AB и $B'C'$ в таких двух точках M и N', что $OM \cdot ON' = k$.

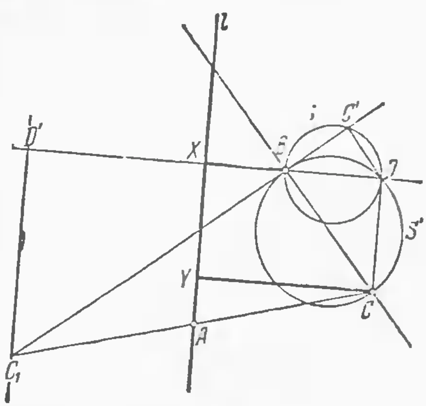
230. а) Предположим, что прямая l проведена, и пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных на неё из точек B и C; $BX \cdot CY = k$ (черт. 404). Перенесём треугольник

AYC параллельно отрезку CB на величину CB в положение $A'Y'B$; при этом точка A' легко определяется по точкам A, B, C. Так как угол $A'Y'B$ — прямой, то точка Y' лежит на



Черт. 404.

окружности S диаметра $A'B$; так как $BX \cdot BY' = BX \cdot CY = k$, то точка X получается из Y' инверсией с центром B и степенью k (или $-k$). Поэтому X лежит на прямой S', получаемой из S этой инверсией. Кроме того, X лежит на окружности S_1 с диаметром AB (ибо $\angle AXB = 90°$); таким образом, X есть точка пересечения прямой S' и окружности S_1. Задача может иметь до четырёх решений.



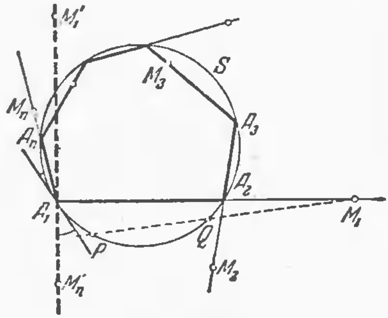
Черт. 405.

б) Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C на искомую прямую l, $CY^2 - BX^2 = k_1$ (черт. 405). Отложим на прямой BX в обе стороны от точки X отрезки XD и XD', равные YC; тогда

$$BD \cdot BD' = (CY - BX)(CY + BX) = k_1.$$

Пусть точка C_1 симметрична C относительно точки A; в таком случае $C_1D' \parallel CD \parallel l$. Произведём инверсию с центром B и степенью k_1 (или $-k_1$); пусть C' — точка, в которую перейдёт при этом точка C_1. Прямая C_1D' перейдёт в окружность S, проходящую через точки B, C' и D; так как $C_1D' \perp BD'$, то диаметром S будет являться отрезок BD. Отсюда следует, что точка D лежит на перпендикуляре, восставленном к прямой BC_1 в точке C'. Так как, кроме того, $\angle BDC = 90°$ (ибо $CD \parallel l$), то точка D лежит ещё и на окружности S_1 с диаметром BC. Задача может иметь два решения.

231. Пусть $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — искомый многоугольник, стороны A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 которого проходят через заданные точки M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n (черт. 406). Произведём инверсию I_1 с центром в точке M_1 и степенью $\pm M_1A_1 \cdot M_1A_2$ (здесь знак плюс или минус берётся в зависимости от того, расположена ли точка M_1 вне окружности S или внутри этой окружности); степень этой инверсии легко определить, проведя через точку M_1 произвольную секущую окружности M_1PQ, ибо $M_1A_1 \cdot M_1A_2 = M_1P \cdot M_1Q$ в силу известного свойства окружности. При этой инверсии окружность S переходит в себя, а вершина A_1 искомого многоугольника — в вершину A_2. Затем осуществим инверсию I_2 с центром M_2 и степенью $\pm M_2A_2 \cdot M_2A_3$, затем инверсию I_3 с центром M_3 и степенью $\pm M_3A_3 \cdot M_3A_4$ и т. д., наконец, инверсию I_n с центром M_n и степенью $\pm M_nA_n \cdot M_nA_1$. Все инверсии I_1, I_2, I_3, ..., I_n переводят S в себя; A_1 переводится последовательностью этих инверсий сначала в A_2, затем в A_3, затем в A_4 и т. д., наконец, обратно в A_1.



Черт. 406.

Пусть теперь S_1 — некоторая окружность или прямая, проходящая через точку A_1. В результате последовательных инверсий I_1, I_2, ..., I_n S_1 перейдёт в некоторую окружность (или прямую) S_1', тоже проходящую через A_1; при этом, зная S_1', мы можем определить исходную окружность или прямую S_1 (ибо S_1 получается из S_1' последовательностью инверсий I_n, I_{n-1}, I_{n-2}, ..., I_2, I_1, произведённых в порядке: сначала I_n, затем I_{n-1} и т. д.).

Очевидно, для того чтобы окружность (или прямая) S_1 перешла в прямую S_1', надо, чтобы окружность или прямая S_n, получаемая из S_1 $n-1$ последовательными инверсиями I_1, I_2, ..., I_{n-1}, проходила через центр M_n последней инверсии, или, что то же самое, чтобы S_1 проходила через точку M_n', которая в результате $n-1$ последовательных инверсий I_1, I_2, ..., I_{n-1} переходит в M_n; обратно, если S_1 проходит через точку M_n', то S_1' — прямая. Точку M_n' легко найти — в неё переходит точка M_n в результате $n-1$ последовательных инверсий I_{n-1}, I_{n-2}, ..., I_2, I_1, произведённых в том порядке, в котором они выписаны. Совершенно аналогично, если S_1 есть прямая, то окружность (или прямая) S_1' проходит через точку M_1', в которую переходит в результате $n-1$ последовательных инверсий I_2, I_3, ..., I_n точка M_1 (ибо инверсия I_1 переводит прямую S_1 в окружность S_2, проходящую через M_1).

Рассмотрим теперь прямую A_1M_n'. Так как она проходит через M_n', то в результате n последовательных инверсий она перейдёт в прямую; так как A_1M_n' — прямая, то полученная прямая пройдёт через M_1'. Но точку A_1 последовательность n инверсий переводит в себя; поэтому мы можем утверждать, что *последовательность n инверсий I_1, I_2, ..., I_n переводит прямую A_1M_n' в прямую A_1M_1'*. Далее, следует различать два случая.

1°. n есть число чётное (черт. 406). В этом случае угол, образованный прямой $M_n'A_1$ с окружностью S в результате n последовательных инверсий, не изменится ни по величине, ни по направлению (см. свойство В инверсии на стр. 181 и замечание на стр. 182). Отсюда следует, что прямые $M_n'A_1$ и $M_1'A_1$, образующие в точке A_1 одинаковый угол с окружностью S, совпадут. Точка A_1 может быть найдена как точка пересечения прямой $M_n'M_1'$ с окружностью S. В зависимости от взаимного расположения прямой $M_n'M_1'$ и окружности S задача может иметь два, одно или ни одного решения; в том исключительном случае, когда точки M_n' и M_1' совпадают, задача оказывается неопределённой (в этом случае за вершину A_1 искомого многоугольника можно принять любую точку окружности S).

2°. n есть число нечётное. В этом случае прямые M'_1A_1 и M'_nA_1 образуют с окружностью S углы, равные по величине, но имеющие противоположное направление. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы найти на окружности S такую точку A_1, что прямые M'_1A_1 и M'_nA_1 образуют с окружностью S одинаковые, но различно направленные углы (т. е. что прямые M'_1A_1 и M'_nA_1 симметричны относительно радиуса OA_1 окружности S, проведённого в точку A_1). Эта задача является весьма сложной. Поэтому оказывается удобнее не решать эту задачу, а свести случай нечётного n к более простому случаю чётного n при помощи следующего искусственного приёма. Рассмотрим последовательность $n+1$ инверсий I_1, I_2, I_3, ..., I_n, I, где I — симметрия относительно самой окружности S. Эта последовательность $n+1$ инверсий переводит окружность S в себя; точку A_1 — снова в точку A_1; всякую окружность, проходящую через A_1 и точку O', в которую переводит центр окружности O последовательность n инверсий I_n, I_{n-1}, I_{n-2}, ..., I_1, — в прямую, проходящую через A_1; всякую прямую, проходящую через A_1, — в окружность или прямую, проходящую через A_1 и точку M', в которую переводит точку M_1 последовательность n инверсий I_2, I_3, ..., I_n, I. Так как $n+1$ есть число чётное (ибо n нечётно), то отсюда, как и выше, вытекает, что A_1 есть точка пересечения окружности S и прямой $M'O'$. В зависимости от числа точек пересечения этой прямой и окружности S задача имеет два, одно или ни одного решения; если точки M' и O' совпадают, задача является неопределённой.

В том случае, когда известны направления части сторон многоугольника (а не точки, через которые проходят эти стороны), соответствующие инверсии заменяются симметриями относительно диаметров окружности S, перпендикулярных к заданным направлениям. При этом, если в ряду I_1, I_2, I_3, ..., I_n, (I) инверсий или симметрий относительно прямых первые k I_1, I_2, ..., I_k и последние $n-l$ I_{l+1}, I_{l+2}, ..., I_n суть симметрии относительно прямой, а I_{k+1} и I_l — инверсии (здесь $k+1$ может быть равно 1 и l может быть равно n; если n нечётно, ряд заканчивается инверсией $I_n=I$ и I_l совпадает с этой инверсией), то роль точки M'_n предыдущих рассуждений играет точка M'_l, в которую последовательность инверсий или симметрий относительно прямой $I_{l-1}, I_{l-2}, \ldots, I_1$ переводит центр M_l инверсии I_l, а роль точки M'_1 — точка M'_{k+1}, в которую последовательность инверсий или симметрий относительно прямой $I_{k+2}, I_{k+3}, \ldots$ $\ldots, I_n$ (I) переводит центр M_{k+1} инверсии I_{k+1}.

Примечание 1. Можно было бы решить задачу для случая нечётного n и не вводя в рассмотрение дополнительной инверсии I. Действительно, можно показать, что *точки M'_1 и M'_n предыдущего рассуждения обязательно будут равноудалены от центра O окружности S*; это специальное обстоятельство делает весьма простой задачу нахождения точки A_1. Для доказательства достаточно заметить, что при n нечётном последовательность n инверсий $I_1, I_2, \ldots, I_n$ переводит прямую $M'_1M'_n$ уже не в себя, а в какую-то прямую a, проходящую через M'_1 (ибо $M'_1M'_n$ — прямая и проходит через M'_n), и переводит в неё прямую b, проходящую через M'_n. В силу свойства В инверсии угол между b и $M'_1M'_n$ равен углу между $M'_1M'_n$ и a; с другой стороны, в силу того же свойства все эти три прямые образуют одинаковые углы с S (мы здесь считаем, что они пересекают S). Отсюда уже вытекает, что M'_1 и M'_n равноудалены от O.

Примечание 2. Настоящее решение по своей идее близко к первому решению задачи 13 из § 2 гл. 1 первой части книги. Можно было бы также предложить решение задачи 231, близкое по идее ко второму решению задачи 13. Такое решение является более содержательным, чем приведённое; мы отказались от него только потому, что для этого надо развить довольно сложную теорию сложения инверсий (сумма двух инверсий, т. е. преобразование, равносильное двум последовательно выполненным преобразованиям инверсии, уже не будет представлять собой инверсию), которая нам нигде в дальнейшем не понадобится. [Эта теория развита, например, в книге: Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, Учпедгиз, 1948 г.; см. составленный Д. И. Перепёлкиным отдел «Решения задач», решения задач 252 и 253, стр. 424—427.]

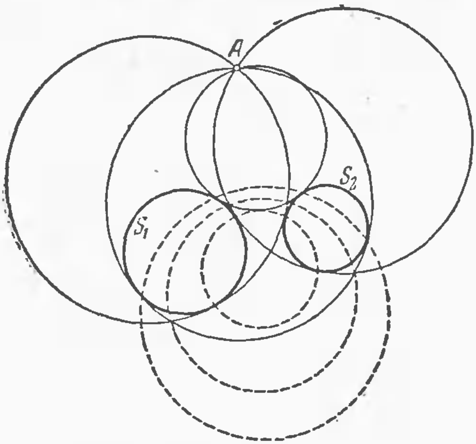
232. а) Произведём инверсию с центром A. При этом точка B перейдёт в другую точку B', окружность (или прямая) S — в окружность (или прямую) S', искомая окружность Σ — в прямую Σ', которая проходит через точку B' и касается окружности S' (или параллельна прямой S'). Построив Σ', мы затем без труда найдём искомую окружность (или прямую) Σ.

Задача имеет два, одно или ни одного решения.

б) Решение этой задачи вполне аналогично решению задачи а). Произведём произвольную инверсию с центром в точке A. В таком случае окружности S_1 и S_2 перейдут в новые окружности S'_1 и S'_2, а искомая окружность Σ — в общую касательную Σ' окружностей S'_1 и S'_2, которую можно построить.

Задача может иметь до четырёх решений (черт. 407).

Примечание. Если S_1' и S_2' имеют четыре общие касательные, то из соображений симметрии вытекает, что точки касания окружностей S_1' и S_2' с общими внешними касательными лежат на одной окружности, точки касания S_1' и S_2' с общими внутренними касательными лежат на одной окружности и точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности (нетрудно даже показать, что эти три окружности концентричны; их общим



Черт. 407.

центром служит середина отрезка $O_1'O_2'$, где O_1' и O_2' — центры S_1' и S_2'). Отсюда в силу свойства $Б_4$ инверсии следует, что восемь точек касания S_1 и S_2 с проходящими через A четырьмя окружностями, касающимися S_1 и S_2 (мы здесь считаем, что таких окружностей существует четыре), лежат по четыре на двух окружностях, и отличные от A точки пересечения окружностей, касающихся S_1 и S_2 одноимённо, с окружностями, касающимися S_1 и S_2 разноимённо, лежат на одной окружности (черт. 407; отметим, что так как при инверсии центр окружности не переходит в центр преобразованной окружности, то эти три окружности уже не будут концентрическими).

233. а) Первое решение. Согласно определению симметрии относительно окружности (см. выше, стр. 172—173) искомая окружность (или прямая) Σ должна проходить также через точку A', симметричную A относительно окружности (или прямой) S. Задача имеет единственное решение, если A' не совпадает с B; в противном случае задача неопределённа.

Второе решение. При инверсии с центром A точка B переходит в новую точку B', окружность (или прямая) S — в окружность (или прямую) S', искомая окружность (или прямая) Σ — в прямую Σ', проходящую через точку B' и перпендикулярную к окружности (или прямой) S' (т. е. проходящую через центр S', если S' — окружность). Построив Σ', мы затем без труда найдём и Σ. Задача имеет, вообще говоря, одно решение; если B' совпадает с центром S', то задача неопределённа.

б) Пусть O — центр и r — радиус окружности S. Искомая окружность (или прямая) Σ должна проходить через точку A', получающуюся из A инверсией с центром O и степенью $-r^2$ (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 174—176). Задача имеет, вообще говоря, единственное решение; если A' совпадает с B — задача неопределённа.

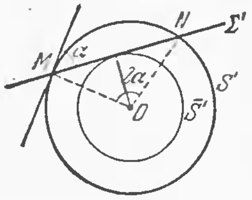
234. а) Первое решение. Согласно определению симметрии относительно окружности искомая окружность (или прямая) Σ должна проходить через точки A' и A'', симметричные A относительно окружностей (или прямых) S_1 и S_2. Задача имеет, вообще говоря, единственное решение (если A' совпадает с A'', задача неопределённа, но если A есть одна из двух точек пересечения S_1 и S_2, задача не имеет решения).

Второе решение. При инверсии с центром A окружности S_1 и S_2 переходят в окружности (или окружность и прямую, или две прямые) S_1' и S_2', а искомая окружность (или прямая) Σ — в прямую Σ', перпендикулярную к S_1' и S_2' (т. е. проходящую через центры S_1' и S_2', если это окружности). Построив Σ', мы затем без труда найдём и Σ. Задача имеет, вообще говоря, единственное решение; если S_1' и S_2' — концентрические окружности или параллельные прямые, задача неопределённа; если S_1' и S_2' — пересекающиеся прямые, задача не имеет решения.

б) Пусть O_1 и O_2 — центры, r_1 и r_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. Искомая окружность (или прямая) Σ должна проходить через точки A' и A'', получающиеся из A инверсией с центром O_1 и степенью r_1^2 (если S_1 — прямая, то точка A' симметрична A относительно S_1) и с центром O_2 и степенью $-r_2^2$ (ср. с решением задач 233а), б)). Задача имеет, вообще говоря, единственное решение; если A' совпадает с A'' — задача неопределённа.

в) Пусть O_1 и O_2 — центры, r_1 и r_2 — радиусы окружностей S_1 и S_2. Искомая окружность (или прямая) Σ должна проходить через точки A' и A'', получающиеся из A инверсиями с центрами O_1 и O_2 и степенями $-r_1^2$ и $-r_2^2$. Задача имеет, вообще говоря, единственное решение; если A' совпадает с A'' — задача неопределённа.

235. а) Инверсия с центром A переводит точку B в другую точку B', а окружность (или прямую) S — в окружность (или прямую) S'; искомая окружность (или прямая) Σ переходит при этом в прямую Σ', проходящую через B' и пересекающую S' под известным углом α. Но если прямая Σ' пересекает известную окружность S' под определённым углом α (черт. 408), то дуга MN, высекаемая Σ' на окружности $\overline{S}'$, равна 2α и, следовательно, расстояние Σ' от центра S' нам известно; другими словами, Σ' касается окружности $\overline{S}'$, концентрической S', которую можно построить. Построив Σ', мы найдём затем и Σ. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.



Черт. 408.

б) Инверсия с центром A переводит S_1 и S_2 в окружности (или прямые, или окружность и прямую) S_1' и S_2', а искомую окружность (или прямую) Σ — в прямую Σ', пересекающую S_1' и S_2' под углами α и β, т. е. в общую касательную вспомогательных окружностей $\overline{S}_1'$ и $\overline{S}_2'$, если S_1' и S_2' — окружности (см. решение задачи а)). Построив Σ', мы найдём затем и Σ. Задача может иметь до четырёх решений; если S_1' и S_2' — прямые, задача не имеет решения или неопределённа.

236. Рассмотрим отдельно три случая.

1°. S_1 и S_2 *пересекаются*. В этом случае инверсией S_1 и S_2 можно перевести в пересекающиеся прямые S_1' и S_2' (см. теорему 2 § 1, стр. 194; возможно, что S_1 и S_2 уже суть две прямые, и тогда задача упрощается). Искомая окружность (или прямая) Σ переходит при этой инверсии в окружность Σ' с центром в точке O пересечения S_1' и S_2' (ибо центр окружности, перпендикулярной к S_1' и S_2', должен лежать одновременно на обеих прямых). Если мы сумеем построить Σ', то после этого легко будет построить и Σ.

2°. S_1 и S_2 касаются. В этом случае S_1 и S_2 можно инверсией перевести в параллельные прямые (см. теорему 2 § 1; если S_1 и S_2 уже суть параллельные прямые, то решение задачи упрощается). Искомая окружность (или прямая) Σ перейдёт при этом в окружность или прямую Σ', перпендикулярную к S_1' и S_2'; очевидно, Σ' есть прямая, перпендикулярная к общему направлению S_1' и S_2'. Если мы сумеем построить Σ', то после этого легко будет построить и Σ.

3°. S_1 и S_2 не имеют общих точек. В этом случае S_1 и S_2 инверсией можно перевести в две концентрические окружности S_1' и S_2' (см. теорему 2 § 1; если S_1 и S_2 — две концентрические окружности, решение задачи упрощается). Искомая окружность (или прямая) Σ переходит в окружность или прямую Σ', перпендикулярную к S_1' и S_2', т. е. в прямую, проходящую через общий центр O окружностей S_1' и S_2' (см. стр. 217—218). Если мы сумеем построить Σ', то после этого легко будет построить и Σ.

Разберём теперь отдельно задачи а), б) и в).

а) В случае 1° задача сводится к построению окружности Σ' с данным центром O, перпендикулярной к окружности (или прямой) S_3', в которую наша инверсия переводит S_3 (если S_3' — окружность, то радиус Σ' равен отрезку касательной, проведённой из точки O к S_3'); в случае 2° — к построению прямой Σ' данного направления, перпендикулярной к окружности (или прямой) S_3' (если S_3' — окружность, то Σ' проходит через центр S_3'); в случае 3° — к построению прямой Σ', проходящей через данную точку O и перпендикулярной к окружности (или прямой) S_3' (если S_3' — окружность, то Σ' проходит через центр S_3'). Задача имеет, вообще говоря, единственное решение; в случае 1°, когда O лежит внутри S_3', задача решения не имеет; в случае 3°, когда O есть центр S_3', задача неопределённа; если S_1', S_2', S_3' — три прямые, задача либо не имеет решения, либо неопределённа.

б) В случае 1° задача сводится к построению окружности Σ' с данным центром O, касающейся окружности (или прямой) S_3', в которую наша инверсия переводит S_3; в случае 2° — к построению прямой Σ' данного направления, касающейся окружности S_3' (или параллельной прямой S_3'); в случае 3° — к построению прямой Σ', проходящей через данную точку O и касающейся окружности S_3' (или параллельной прямой S_3').

Задача может иметь два, одно или ни одного решения; в случае, когда S'_1, S'_2 и S'_3 — три прямые, задача или не имеет решения или неопределённа.

в) В случае 1° задача сводится к построению окружности Σ' с данным центром O, пересекающей окружность (или прямую) S'_3, в которую наша инверсия переводит S_3, под данным углом α. Если S'_3 — окружность с центром O'_3, пересекающая Σ' в точке A, то $\angle OAO'_3 = \alpha$ нам известен (см. выше, стр. 171); это позволяет определить A, а следовательно, и Σ'. Если S'_3 — прямая, пересекающая Σ' в точках A и B, то нам известны углы равнобедренного треугольника AOB; это позволяет определить Σ'.

В случае 2° задача сводится к построению прямой Σ' данного направления, пересекающей окружность (или прямую) S'_3 под углом α (если S'_3 — окружность, то Σ' касается определённой окружности $\overline{S'_3}$, концентрической с S'_3; ср. с решением задачи 235а)).

В случае 3° задача сводится к построению прямой Σ', проходящей через данную точку O и пересекающей известную окружность (или прямую) S'_3 под углом α (если S'_3 — окружность, то прямая Σ' касается определённой окружности $\overline{S'_3}$).

Задача может иметь два, одно или ни одного решения; если S'_1 и S'_2 — параллельные прямые, решение задачи может быть также неопределённо.

237. Задачу можно решить аналогично задаче 236. Рассмотрим отдельно три случая.

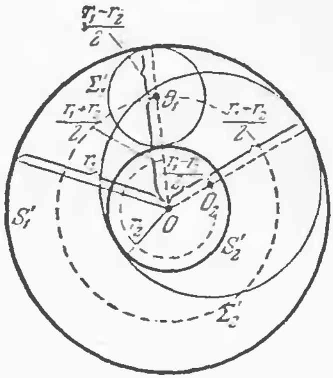
1°. S_1 и S_2 *пересекаются*. В этом случае S_1 и S_2 можно инверсией перевести в пересекающиеся прямые S'_1 и S'_2; искомая окружность (или прямая) Σ переходит при этом в окружность Σ', касающуюся этих прямых.

2°. S_1 и S_2 *касаются*. В этом случае S_1 и S_2 можно инверсией перевести в две параллельные прямые S'_1 и S'_2; искомая окружность (или прямая) Σ переходит при этом в окружность Σ', касающуюся S'_1 и S'_2, или в прямую Σ', параллельную S'_1 и S'_2 (если Σ' — окружность, то её центр лежит на средней линии полосы, образованной S'_1 и S'_2, а радиус равен половине расстояния между S'_1 и S'_2).

3°. S_1 и S_2 *не имеют общих точек*. В этом случае S_1 и S_2 можно инверсией перевести в две концентрические окружности S_1' и S_2'; искомая окружность (или прямая) Σ переходит при этом в окружность Σ', касающуюся S_1' и S_2' (центр Σ' лежит на окружности, концентрической с S_1' и S_2', радиус которой равен полусумме или полуразности радиусов S_1' и S_2', а радиус Σ' равен соответственно полуразности или полусумме радиусов S_1' и S_2'; черт. 409).

Перейдём теперь к нашим задачам а) и б).

а) Первое решение. В случаях 1° и 2° задача сводится к построению окружности Σ', касающейся прямых S_1' и S_2' и известной окружности (или прямой) S_3', в которую наша инверсия переводит S_3 (если S_3' — окружность, это есть задача 49в) из § 1 гл. I второй части книги). В случае 3° задача сводится к построению окружности Σ', касающейся концентрических окружностей S_1' и S_2' и известной окружности (или прямой) S_3', — эта задача легко решается, так как нам известны радиус Σ' и окружность, на которой лежит её центр (см. черт. 409).



Черт. 409.

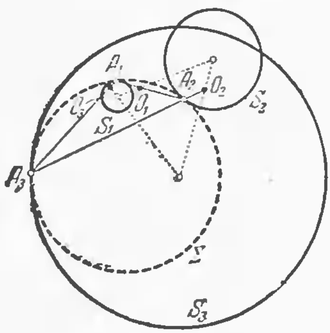
Задача может иметь до восьми решений; если S_1', S_2' и S_3' — параллельные прямые (т. е. S_1, S_2 и S_3 касаются в одной точке), задача неопределённа.

Ещё одно решение этой задачи приведено после решения задачи б).

б) В случаях 1° и 2° задача сводится к задаче 63 из § 2 гл. I второй части книги. Перейдём теперь к случаю 3°. Пусть S_3' — окружность с центром O_3', пересекающая искомую окружность Σ' с центром O' в точке A. В треугольнике $O'AO_3'$ нам известны стороны $O_3'A$ и $O'A$ (последняя равна $\frac{r_1 \pm r_2}{2}$, где r_1 и r_2 — радиусы S_1' и S_2') и угол $O'AO_3'$; поэтому мы можем определить расстояние $O_3'O'$ и затем найти Σ'. Если S_3' — прямая, пересекающая окружность Σ' с центром O' в точках A и B, то в равнобедренном треугольнике $O'AB$ нам известны углы и боковые стороны; это позволяет определить высоту треугольника — расстояние O' от S'_3, и затем построить Σ' [1]).

Задача может иметь до восьми решений; если S'_1, S'_2, S'_3 — прямые, задача может быть также неопределённой.

Второе решение задачи а). Пусть A_1, A_2, A_3 — точки касания искомой окружности Σ с данными окружностями S_1, S_2, S_3 (черт. 410; мы ограничиваемся общим случаем, когда S_1, S_2, S_3 — окружности). В таком случае прямая A_1A_2 проходит через центр подобия O_1 окружностей S_1 и S_2 и инверсия I_1 с центром O_1, переводящая S_1 в S_2, переводит A_1 в A_2 (см. задачу 212 из § 1 и решение этой задачи). Точно так же прямая A_2A_3 проходит через центр подобия O_2 окружностей S_2 и S_3 и инверсия I_2 с центром O_2, переводящая S_2 в S_3, переводит точку A_2 в точку A_3; наконец, прямая A_3A_1 проходит через центр O_3 подобия S_3 и S_1 и инверсия I_3 с центром в точке O_3, переводящая S_3 в S_1, переводит точку A_3 в точку A_1.



Черт. 410.

Произведём теперь последовательно инверсии I_1, I_2, I_3. Эта последовательность инверсий переводит окружность S_1 в себя и оставляет на месте точку A_1 этой окружности. Таким образом, A_1 есть такая точка окружности S_1, которую данная последовательность трёх инверсий I_1, I_2, I_3 оставляет на месте. Точку A_1 можно найти так же, как в решении задачи 231; то обстоятельство, что в решении задачи 231 *каждая* из рассматриваемых инверсий I_1, I_2, $\ldots$, I_n переводила окружность S в себя, а здесь окружность S_1 переводится в себя лишь *последовательностью* всех трёх инверсий I_1, I_2, I_3, нисколько не меняет положения. Так как три есть число

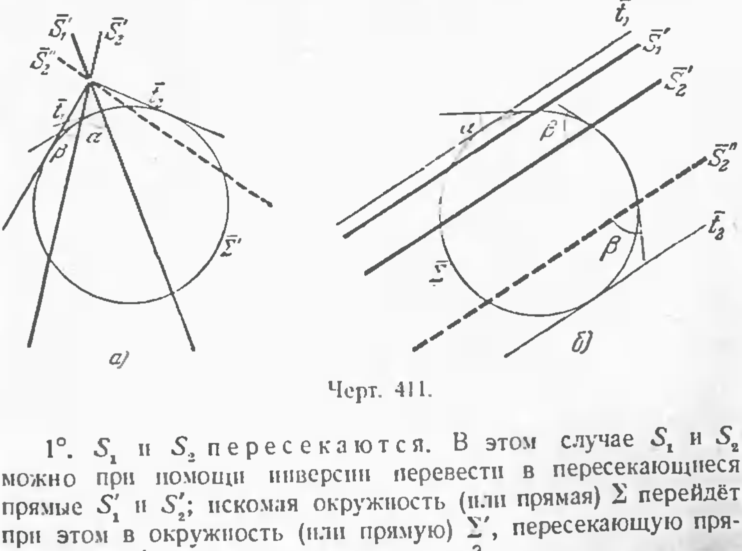
---

[1]) Можно показать, что окружность Σ' известного радиуса $\frac{r_1 \pm r_2}{2}$, пересекающая данную окружность (или прямую) S'_3, касается определённой окружности (или прямой) $\overline{S'_3}$, концентрической с S'_3 (или параллельной S'_3).

нечётное, то нам следует ввести в рассмотрение ещё симметрию I относительно окружности S_1 и искать на окружности S_1 точку A_1, которая переводится в себя последовательностью четырёх инверсий I_1, I_2, I_3, I. После того как мы найдём точку A_1, построение окружности Σ уже не представляет труда.

Каждую из инверсий I_1, I_2, I_3, переводящих две данные окружности одну в другую, можно выбрать двумя разными способами (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 180; если окружности S_1 и S_2 равны, то вместо инверсии I_1 можно взять симметрию относительно перпендикуляра, восставленного к отрезку, соединяющему центры S_1 и S_2, в его середине). Отсюда следует, что всего задача может иметь до восьми решений.

238. а) Эта задача является обобщением задач 236—237 и решается аналогично им. Рассмотрим опять те же три случая, что и в решении предыдущих задач.



Черт. 411.

1°. S_1 и S_2 пересекаются. В этом случае S_1 и S_2 можно при помощи инверсии перевести в пересекающиеся прямые S_1' и S_2'; искомая окружность (или прямая) Σ перейдёт при этом в окружность (или прямую) Σ', пересекающую прямые S_1' и S_2' под данными углами α и β.

Пусть $\bar{\Sigma}'$ — произвольная окружность, $\bar{S}_1'$ и $\bar{S}_2'$ — две прямые, образующие между собой тот же угол, что и прямые S_1' и S_2', и пересекающие окружность $\bar{\Sigma}'$ под углами α и β (черт. 411, *а*). Углы, образованные с прямыми $\bar{S}_1'$ и $\bar{S}_2'$ касательными $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$, проведёнными к $\bar{\Sigma}'$ из точки пересечения $\bar{S}_1'$ и $\bar{S}_2'$, зависят только от величин α, β и угла между $\bar{S}_1'$ и $\bar{S}_2'$, но не от радиуса $\bar{\Sigma}'$; поэтому их можно определить, построив произвольно окружность $\bar{\Sigma}'$ и затем прямые $\bar{S}_1'$, $\bar{S}_2'$. Проведём теперь через точку пересечения S_1' и S_2' пару прямых t_1, t_2, образующих с S_1' и S_2' те же углы, что и прямые $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ с прямыми $\bar{S}_1'$, $\bar{S}_2'$; эти прямые будут являться касательными к окружности Σ'. Таким образом, наша задача сводится к построению окружности Σ', касающейся двух известных прямых t_1 и t_2 и пересекающей под данным углом γ окружность (или прямую) S_3', в которую наша инверсия переводит S_3, т. е. к частному случаю задачи 237б).

2°. S_1 и S_2 касаются. В этом случае S_1 и S_2 можно инверсией перевести в две параллельные прямые S_1' и S_2'; искомая окружность (или прямая) Σ перейдёт при этом в окружность Σ', пересекающую две параллельные прямые S_1' и S_2' под известными углами α и β.

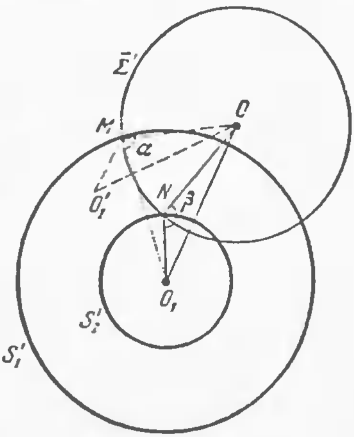
Пусть $\bar{\Sigma}'$ — произвольная окружность, $\bar{S}_1'$ и $\bar{S}_2'$ — две параллельные прямые, пересекающие окружность $\bar{\Sigma}'$ под углами α и β (черт. 411, *б*). Проведём касательные $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$ окружности $\bar{\Sigma}'$, параллельные $\bar{S}_1'$ и $\bar{S}_2'$. Расстояния между прямыми $\bar{S}_1'$, $\bar{S}_2'$ и $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ зависят, очевидно, только от углов α и β, но не от окружности $\bar{\Sigma}'$; их можно определить, построив произвольную окружность $\bar{\Sigma}'$ и затем прямые $\bar{S}_1'$ и $\bar{S}_2'$. Построив теперь прямые t_1, t_2, такие, что четвёрка прямых S_1', S_2'; t_1, t_2 подобна четвёрке прямых $\bar{S}_1'$, $\bar{S}_2'$; $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, мы снова придём к задаче построения окружности Σ', касающейся известных (параллельных) прямых t_1 и t_2 и пересекающей под известным углом γ окружность (или прямую) S_3', в которую переходит при инверсии S_3.

3°. S_1 и S_2 не имеют общих точек. В этом случае S_1 и S_2 можно инверсией перевести в концентрические окружности S_1' и S_2'; искомая окружность (или прямая) Σ перейдёт при этом в окружность (или прямую) Σ', пересекающую S_1' и S_2' под углами α и β.

Построим окружность $\bar{\Sigma}'$, пересекающую окружности S_1' и S_2' под углами α и β, причём первую из них в данной точке M

(см. задачу 235 б) [1])). Задача построения $\overline{\Sigma}'$ может иметь до четырёх решений; при этом радиус $\overline{\Sigma}'$ и расстояние между центрами $\overline{\Sigma}'$ и S_1' зависят только от радиусов окружностей S_1' и S_2' и от углов α и β, но не от положения точки M. Поэтому все окружности, пересекающие концентрические окружности S_1' и S_2' под углами α и β, распадаются на четыре, вообще говоря, семейства, каждое из которых состоит из равных между собой окружностей, центры которых имеют одно расстояние от общего центра S_1' и S_2'. Нам надо найти те из окружностей этих семейств, которые пересекают данную окружность (или прямую) S_3' под данным углом γ. Воспользовавшись тем обстоятельством, что все окружности данного радиуса, пересекающие окружность (или прямую) S_3' под данным углом γ, касаются некоторой окружности $\overline{S}_3'$, концентрической с S_3' (или прямой $\overline{S}_3'$, параллельной S_3'), мы без труда построим окружность Σ', а вслед за тем и искомую окружность Σ.

Задача может иметь до восьми решений; если S_1', S_2' и S_3' — прямые, она может также оказаться неопределённой.



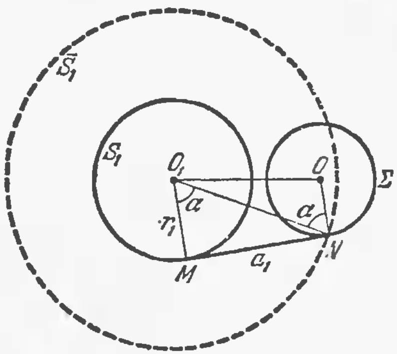
Черт. 412.

б) Настоящая задача сводится к предыдущей при помощи следующего приёма. Пусть длина общей касательной MN некоторой окружности Σ и известной окружности S_1 с центром O_1 и радиусом r_1 равна заданному отрезку a_1; для определённости предположим, что MN есть общая внешняя касательная окружностей S_1 и Σ (черт. 413). В таком случае точка N

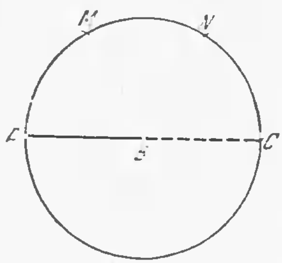
---

[1]) Вот ещё одно построение. Пусть N — точка пересечения $\overline{\Sigma}'$ с S_2', O_1 и O — центры S_1' (и S_2') и $\overline{\Sigma}'$ (черт. 412). Повернём треугольник ONO_1 вокруг O на угол NOM в положение OMO_1'. Точку O_1' можно построить, так как нам известны расстояние $MO_1' = NO_1$ и угол O_1MO_1' (ибо $\angle OMO_1 = \alpha$, $\angle OMO_1' = \angle ONO_1 = \beta$); после этого легко найти O (ибо $\angle O_1MO = \alpha$ и $O_1O = O_1'O$).

лежит на окружности $\bar{S}_1$, концентрической с S_1, радиуса $O_1N=\sqrt{r_1^2+a_1^2}$. Так как радиус ON окружности Σ, проведённый в точку N, перпендикулярен к прямой MN, то угол α между окружностями $\bar{S}_1$ и Σ имеет известное значение $\angle ONO_1=\angle NO_1M\left(=\operatorname{arctg}\frac{a_1}{r_1}\right)$. Точно так же можно построить ещё две окружности $\bar{S}_2$ и $\bar{S}_3$, концентрические с S_2, соответственно с S_3, с которыми искомая окружность Σ образует известные углы. После этого останется только построить окружность Σ, образующую данные углы с окружностями S_1, S_2 и S_3, т. е. задача б) сведётся к задаче а).



Черт. 413.

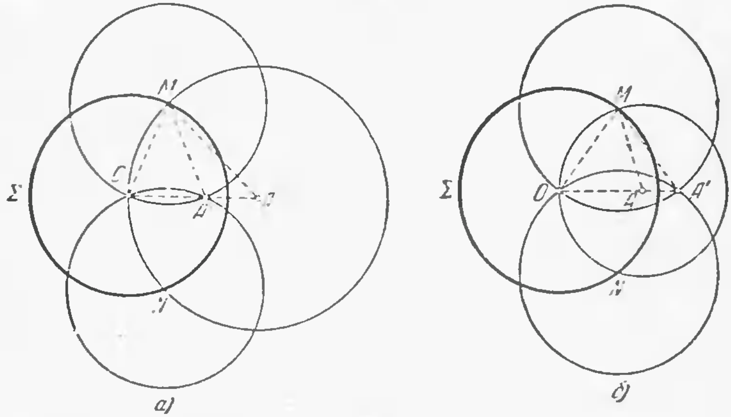


Черт. 414.

239. Проведём окружность с центром в точке B и радиусом BA и сделаем на этой окружности засечки M, N, C, такие, что $AM=MN=NC=BA$ (черт. 414). Очевидно, что AM, MN и NC — стороны вписанного в окружность шестиугольника; следовательно, C и A — диаметрально противоположные точки окружности, т. е. C, B и A лежат на одной прямой и $AB=BC$.

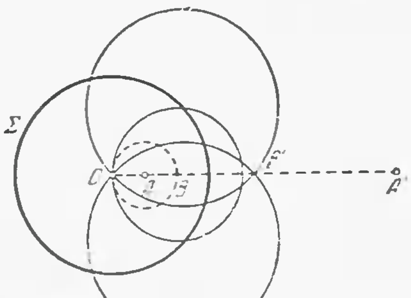
240. Пусть точка A находится в н е окружности Σ (черт. 415, a). Проведём из A как из центра окружность радиуса AO (где O — центр Σ); пусть M и N — точки пересечения этой окружности с окружностью Σ. Из точек M и N как из центров проведём две окружности радиусов MO и NO. Точка A' пересечения этих двух окружностей и будет искомой: действительно, из подобия равнобедренных треугольников AOM

и MOA' с общим углом при основании следует $\frac{AO}{OM}=\frac{OM}{OA'}$, откуда $OA\cdot OA'=OM^2$, что и требовалось доказать. [Отметим,



Черт. 415.

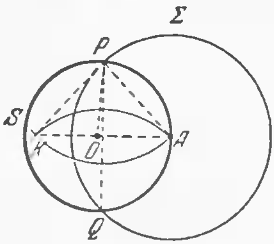
что это построение является более простым, чем приведённое в тексте построение (стр. 204), использующее и циркуль и линейку.]



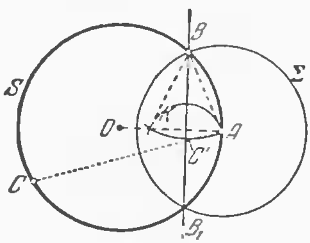
Черт. 416.

Если точка A расположена внутри окружности Σ, то приведённое построение применимо лишь в том случае, когда окружность с центром в точке A и радиусом AO пересекает Σ в двух точках (т. е. когда расстояние OA точки A от центра Σ больше половины радиуса Σ; см. черт. 415, б). Однако для каждой точки A можно найти такое целое число n, что расстояние $n\cdot OA$ уже больше половины радиуса Σ. Найдём на продолжении OA за точку A такую точку B, что $OB=n\cdot OA$ (см. замечание в тексте после задачи 239), и затем построим точку B', симметричную B относительно S (на черт. 416 $n=2$). Теперь, если A' есть такая точка прямой OA, что $OA'=n\cdot OB'$, то $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$, т. е. A' — искомая точка, симметричная A относительно Σ.

241. Проведём произвольную окружность Σ с центром в точке A данной окружности S, пересекающую окружность S в двух точках P и Q; пусть, далее, K — точка, симметричная A относительно прямой PQ (черт. 417; построение точки K с помощью одного циркуля является очевидным). Из подобия равнобедренных треугольников APK и APO (O — искомый центр S) с общим углом при основании следует $\frac{AP}{AK} = \frac{AO}{AP}$, т.е. $AK \cdot AO = AP^2$. Итак, точка O симметрична точке K относительно окружности Σ; поэтому её можно построить (см. предыдущую задачу).



Черт. 417.

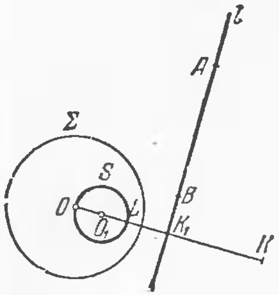


Черт. 418.

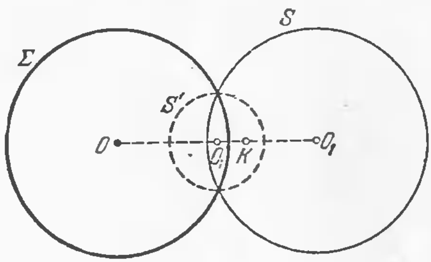
242. Решение этой задачи очень близко к решению предыдущей задачи. Проведём окружность Σ с центром в точке A и радиусом AB (черт. 418). Точка B играет роль точки P предыдущего построения; однако вторая точка B_1 пересечения Σ с искомой окружностью S нам неизвестна, и поэтому мы не можем построить точку K, симметричную точке A относительно общей хорды S и Σ. Для того чтобы устранить это затруднение, заметим, что при симметрии относительно окружности Σ окружность S переходит в прямую BB_1 (ибо S проходит через центр Σ); поэтому точка C', симметричная C относительно Σ (см. задачу 240), принадлежит этой прямой. Зная точки B и C', мы уже можем без труда найти точку K, симметричную A относительно общей хорды BC'. Дальнейшее построение центра окружности S не отличается от вышеприведённого; найдя центр S, мы сразу сможем построить и саму окружность.

243. а) *Первое решение.* Возьмём три точки A, B и C на прямой l (относительно нахождения третьей точки прямой см., например, задачу 239), найдём точки A', B' и C', симметричные точкам A, B и C относительно окружности Σ (см. задачу 240), и затем построим окружность S, проходящую через точки A', B' и C' (задача 242). Очевидно, что S и есть искомая окружность.

Второе решение. Пусть O есть центр окружности Σ (задача 241), K — точка, симметричная точке O относительно прямой AB, и O_1 — точка, симметричная точке K относительно окружности Σ (черт. 419). Мы утверждаем, что O_1 есть центр искомой окружности S; окружность S мы можем теперь построить по центру O_1 и одной точке O. Действительно, пусть K_1 — точка пересечения прямых OK и l, L — вторая



Черт. 419.



Черт. 420.

точка пересечения искомой окружности S с прямой OK. Точки L и K_1 симметричны относительно Σ (см. доказательство свойства $Б_2$ инверсии, стр. 177), а так как $OL = 2O\bar{O}_1$, где $\bar{O}_1$ — центр S, $OK_1 = \frac{1}{2}OK$, то точки $\bar{O}_1$ и K также будут симметричны относительно Σ, т. е. $\bar{O}_1$ совпадает с O_1.

б) *Первое решение.* Пусть A, B и C — три точки окружности S, A', B' и C' — точки, симметричные этим точкам относительно Σ (задача 240). Окружность S', проходящая через точки A', B' и C' (задача 242), и будет, очевидно, искомой.

Второе решение. Пусть O и O_1 — центры, R и r — радиусы окружностей Σ и S, $d = OO_1$ — расстояние между их центрами, K — точка, симметричная O относительно S (задача 240), и O_1' — точка, симметричная K относительно Σ (черт. 420). Мы утверждаем, что O_1' есть центр искомой окружности S'; саму эту окружность мы сможем построить, зная её центр O_1' и найдя одну её точку A' (симметричную относительно Σ какой-нибудь точке A окружности S [1])). Действительно, имеем $O_1O \cdot O_1K = r^2$, откуда $O_1K = \frac{r^2}{d}$, $KO = d \pm \frac{r^2}{d} = \frac{d^2 \pm r^2}{d}$. Если теперь воспользоваться ещё равенством $OK \cdot OO_1' = R^2$, то получим:

$$\frac{OO_1'}{OO_1} \cdot \frac{OK}{KO_1} = \frac{R^2}{r^2}, \quad \frac{OO_1'}{OO_1} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{KO_1}{OK} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{d^2 \pm r^2};$$

окончательно

$$\frac{OO_1'}{OO_1} = \frac{k}{k_1},$$

где

$$k = R^2, \quad k_1 = d^2 \pm r^2.$$

Таким образом, точка O_1' центрально-подобна O_1 с центром подобия O и коэффициентом подобия $\frac{k}{k_1}$, откуда и вытекает наше утверждение (см. доказательство свойства $Б_4$ инверсии, стр. 178—179).

§ 3

244. Утверждение задачи является частным случаем теоремы: три попарные радикальные оси трёх окружностей пересекаются в одной точке или параллельны (см. выше, стр. 226).

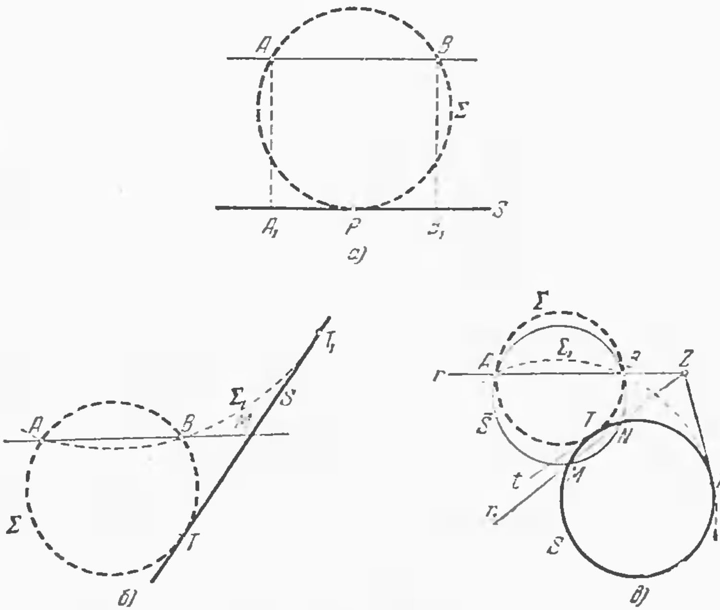
245. Так как общая хорда является радикальной осью двух окружностей, то касательные, проведённые к окружностям из какой-либо её точки, должны быть равны.

246. Если P — точка искомого геометрического места, то $PA \cdot PB = PM^2$ (по свойству касательной и секущей окружности Σ). Следовательно, степень $PA \cdot PB$ точки P относительно S равна степени PM^2 этой точки относительно точки M (см. выше, стр. 222). Отсюда следует, что P принадлежит радикальной оси r точки M и окружности S.

---

[1]) На черт. 420 изображён случай, когда S и Σ пересекаются; в этом (более простом) случае за A' можно принять точку пересечения S и Σ.

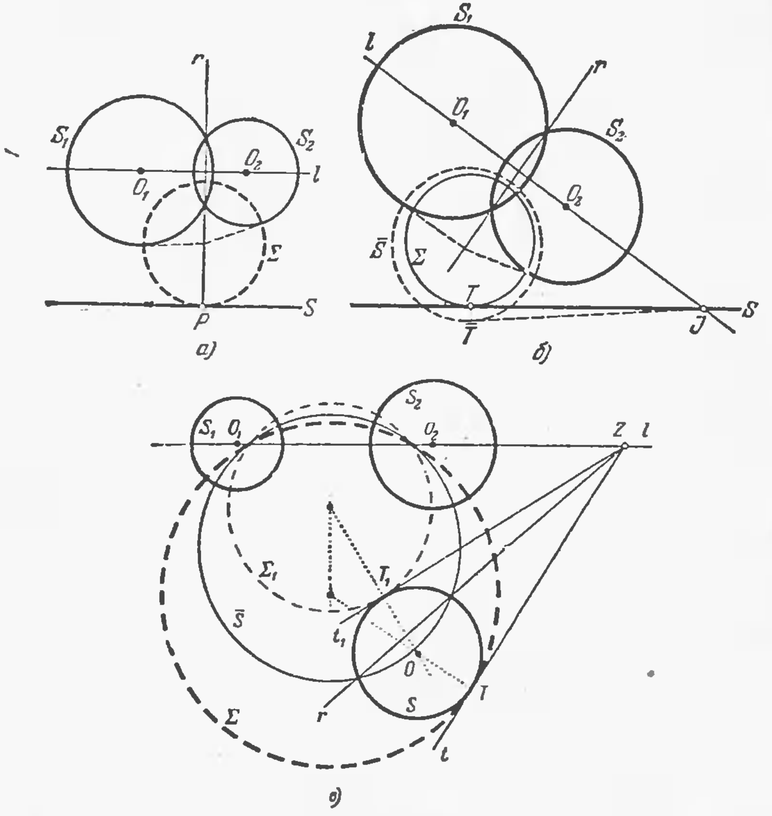
247. а) Если S прямая, параллельная AB, то искомая окружность Σ касается S в середине отрезка A_1B_1, где A_1 и B_1 — проекции A и B на S (черт. 421, *а*). Если S — прямая, пересекающая AB в точке M, то нам известна степень $MA \cdot MB$ точки M относительно искомой окружности Σ и, значит, длина отрезка MT между M и точкой касания S с Σ; задача



Черт. 421.

может иметь два решения (черт. 421, *б*). Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда S — окружность. Проведём произвольную окружность $\bar{S}$, проходящую через A и B и пересекающую S в точках M и N (черт. 421, *в*). Радикальная ось искомой окружности Σ и $\bar{S}$ есть прямая AB; радикальная ось $\bar{S}$ и S есть прямая MN; радикальная ось Σ и S есть их общая касательная t. Следовательно, t есть касательная к S, проходящая через точку Z пересечения прямых AB и MN — радикальный центр S, $\bar{S}$ и Σ (а если $MN \parallel AB$, то и $t \parallel AB$). Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

б) Если S_1 и S_2 не пересекаются, то все окружности, перпендикулярные к S_1 и S_2, проходят через некоторые две точки A и B (см. выше, стр. 218); следовательно, задача б) сводится к задаче а). [Для определения A и B достаточно



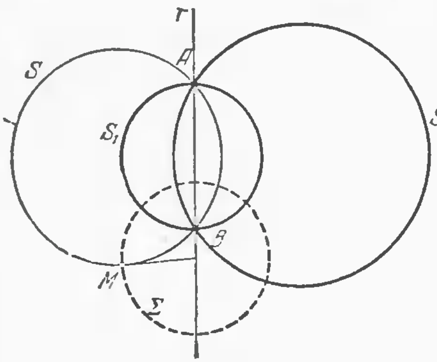
Черт. 422.

провести две окружности, перпендикулярные к S_1 и S_2; центрами этих окружностей служат какие-либо две точки радикальной оси S_1 и S_2, а радиусы равны длинам касательных, проведённых из центров к S_1 и S_2.] Если S_1 и S_2 касаются, то все окружности, перпендикулярные к S_1 и S_2, проходят через их точку касания A и центры всех этих окружностей лежат на радикальной оси r окружностей S_1 и S_2 (проходящей через A); кроме того, центр искомой окружности Σ равноудалён от центра O окружности S и точки D прямой r, такой, что AD равно радиусу S (или от прямой S и прямой, проходящей через A перпендикулярно к r). Если S_1 и S_2 пересекаются, S — прямая, параллельная линии центров l окружностей S_1 и S_2 (радикальной оси пучка, перпендикулярного к S_1 и S_2), то искомая окружность Σ касается S в точке пересечения S и радикальной оси r окружностей S_1 и S_2 (линии центров пучка, перпендикулярного к S_1 и S_2; черт. 422, *а*); её центр находится в точке пересечения r и радикальной оси r_1 окружности S_1 и точки P. Если прямая S пересекает l в точке J, $\bar{S}$ — какая-то окружность, перпендикулярная к S_1 и S_2, то касательная $J\bar{T}$, проведённая из J к $\bar{S}$, равна касательной JT, проведённой из J к искомой окружности Σ (ибо l — радикальная ось $\bar{S}$ и Σ) (черт. 422, *б*; сравните с решением задачи а)); задача может иметь два решения. Если S — окружность, $\bar{S}$ — какая-то окружность, перпендикулярная к S_1 и S_2 (черт.422, *в*), то радикальной осью $\bar{S}$ и искомой окружности Σ является линия центров l окружностей S_1 и S_2; радикальную ось r окружностей $\bar{S}$ и S можно построить. Следовательно, радикальная ось t окружностей Σ и S — их общая касательная, проходит через точку Z пересечения l и r или параллельна l, если $l \parallel r$ (сравните с решением задачи а)).

Задача может иметь два, одно или ни одного решения; если S_1 и S_2 касаются, а S проходит через их точку касания и перпендикулярна к ним, то задача будет неопределённа.

248. а) Первое решение. Окружности, перпендикулярные к S_1 и S_2, образуют пучок; требуется найти окружность этого пучка, проходящую через M. Если S_1 и S_2 не пересекаются, то все окружности пучка проходят через две определённые точки A и B (ср. с решением задачи 247 б)); искомая окружность S проходит через A, B и M. Если S_1 и S_2 касаются в точке A, то центр искомой окружности S лежит на пересечении общей касательной r окружностей S_1 и S_2 (их радикальной оси) и перпендикуляра, восставленного к отрезку AM в его середине. Наконец, если S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B (черт. 423), то проведём окружность S через точки A, B и M — окружность пучка, которому принадлежат S_1 и S_2. Искомая окружность Σ перпендикулярна ко всему этому пучку; следовательно, центр Σ находится в точке пересечения радикальной оси r окружностей S_1 и S_2 и касательной к S в точке M.

Второе решение. Центр искомой окружности Σ совпадает с точкой пересечения радикальной оси r окружностей S_1 и S_2 и радикальной оси r_1 окружности S_1 и точки M (рассматриваемой как «окружность нулевого радиуса»; радикальная ось r_1 проходит через середины касательных, проведённых из M к S_1).



Черт. 423.

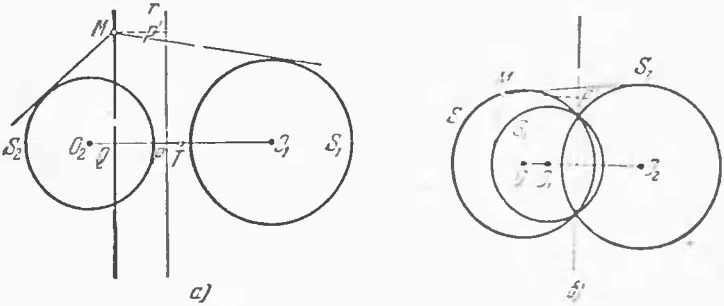
б) Центр искомой окружности Σ находится в точке пересечения радикальной оси r окружности S_1 и точки M и прямой s, симметричной радикальной оси r_1 окружности S_2 и точки M относительно середины отрезка O_2M (O_2 — центр S_2; см. выше текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 227 — 228).

в) Центр искомой окружности Σ совпадает с точкой пересечения прямой s, симметричной радикальной оси r окружностей S_1 и S_2 относительно середины отрезка O_1O_2 (O_1 и O_2 — центры S_1 и S_2), и прямой s_1, симметричной радикальной оси r_1 окружности S_1 и точки M относительно середины отрезка MO_1.

249. а) Центр O искомой окружности Σ совпадает с радикальным центром S_1, S_2 и S_3 (см. выше, стр. 226); радиус равен длине касательной, проведённой из O к S_1. Задача имеет одно решение, если O лежит вне S_1, S_2, S_3, и ни одного в противном случае.

б) Центр O искомой окружности Σ совпадает с точкой пересечения прямых s_3 и s_2, симметричных радикальным осям r_3 и r_2 окружностей S_1 и S_2, S_1 и S_3 относительно середины отрезков O_1O_2, соответственно O_1O_3 (O_1, O_2, O_3 — центры окружностей S_1, S_2, S_3; см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 227—228); Σ проходит через точки пересечения S_1 с перпендикуляром, восставленным в O_1 к OO_1. Задача всегда имеет единственное решение.

в) Центр O искомой окружности Σ совпадает с радикальным центром окружностей S_1, S_2 и S_3 (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 228—229); Σ пересекает S_1 в точках A и B, таких, что AB проходит через O и $AB \perp OO_1$ (O_1 — центр S_1). Задача имеет единственное решение, если O лежит внутри окружностей S_1, S_2, S_3, и ни одного в противном случае.



Черт. 424.

250. а) Пусть M — произвольная точка искомого геометрического места, Q — проекция M на линию центров O_1O_2 данных окружностей S_1 и S_2 радиусов r_1 и r_2 (черт. 424, a). Из рассуждений, аналогичных приведённым на стр. 224—225, получаем:

$$2\,O_1O_2 \cdot TQ = r_1^2 - r_2^2 + a,$$

где T — середина O_1O_2. Отсюда следует, что искомое геометрическое место представляет собой прямую, перпендикулярную к линии центров $\left(TQ = \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + a}{2O_1O_2}\ \text{известно}\right)$, а следовательно, параллельную радикальной оси.

б) Из формул $2\,O_1O_2 \cdot TP = r_1^2 - r_2^2$ (см. стр. 225) и $2O_1O_2 \cdot TQ = r_1^2 - r_2^2 + a$ (см. решение задачи а)) следует

$$2O_1O_2 \cdot QP = a,$$

или словами: *разность степеней a точки M относительно двух окружностей S_1 и S_2 равна удвоенному произведению* *расстояния* O_1O_2 *между центрами* S_1 *и* S_2 *на расстояние* $QP = MP'$ *от точки* M *до радикальной оси* r *окружностей* S_1 *и* S_2 (черт. 424, *а*).

Пусть теперь S есть окружность, принадлежащая тому же пучку окружностей, что S_1 и S_2, M — точка окружности S, O_1, O_2 и O — центры окружностей S_1, S_2 и S (черт. 424, *б*). В таком случае, *степень точки* M *относительно* S *равна нулю*, и следовательно, сформулированная теорема даёт

$$2OO_1 \cdot MP' = a_1, \quad 2OO_2 \cdot MP' = a_2,$$

где a_1 и a_2 — степени точки M относительно S_1 и S_2. Таким образом, получаем:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{OO_1}{OO_2},$$

или словами: *отношение степеней точки* M *относительно окружностей* S_1 *и* S_2 *равно отношению расстояний от центра* O *проходящей через* M *окружности пучка, содержащего* S_1 *и* S_2, *до центров* S_1 *и* S_2 (здесь мы считаем, что M не принадлежит радикальной оси r окружностей S_1 и S_2; напомним, что через каждую точку, не принадлежащую r, проходит единственная окружность пучка, содержащего S_1 и S_2; см. выше, стр. 218).

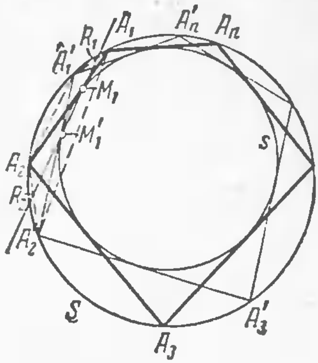
Отсюда следует, что искомое геометрическое место есть окружность, если $k \neq 1$, и прямая, если $k = 1$. Зная k, это искомое место легко построить.

251. а) Пусть l проходит через центр подобия O окружностей S_1 и S_2 (см. черт. 178, *а* в тексте). В таком случае центрально-подобное преобразование с центром O переводит S_1 в S_2 и l в себя; следовательно, l образует с S_1 и S_2 одинаковые углы, равные α. Отсюда вытекает, что касательные к S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2, соответствующих друг другу в центрально-подобном преобразовании, параллельны; точно так же параллельны касательные к S_1 и к S_2 в точках B_1 и B_2. Пусть, далее, касательные к S_1 и к S_2 в точках A_1 и B_2 пересекаются в точке M; в таком случае $\angle MA_1B_2 = \angle MB_2A_1 = \alpha$, откуда $MA_1 = MB_2$, т. е. M — точка радикальной оси S_1 и S_2. Точно так же показывается, что касательные к S_1 и S_2 в точках B_1 и A_2 пересекаются в точке N радикальной оси.

б) Пусть M — точка пересечения касательных к S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2 (см. черт. 178, *б* в тексте). Обозначим углы, образованные l с S_1 и S_2, через α_1 и α_2. В таком случае $\frac{MA_1}{MA_2} = \frac{\sin \angle MA_2A_1}{\sin \angle MA_1A_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$, откуда следует, что точка M лежит на окружности Σ — геометрическом месте точек, отношение степеней которых относительно S_1 и S_2 равно $\frac{\sin^2\alpha_2}{\sin^2\alpha_1}$ (см. задачу 250). Так же показывается, что на окружности Σ лежат и остальные три точки пересечения касательных к S_1 в точках A_1, B_1 с касательными к S_2 в точках A_2, B_2.

Примечание. Из результата задачи 250б) следует, что окружность Σ, фигурирующая в условии задачи 251б), принадлежит к одному пучку с окружностями S_1 и S_2.

252. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — n-угольник, вписанный в S и описанный вокруг s. Нам надо доказать, что если двигать точку A_1 по окружности S и рассматривать непрерывно изменяющийся n-угольник $A_1'A_2'A_3'\ldots A_n'$, все вершины которого лежат на S и все стороны, кроме последней стороны $A_n'A_1'$, касаются s, то и сторона $A_n'A_1'$ будет касаться s.



Черт. 425.

Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ и $A_1'A_2'A_3'\ldots A_n'$ — два близких положения изменяющегося n-угольника (черт. 425). Рассмотрим четырёхугольник $A_1A_1'A_2A_2'$. Пусть прямая M_1M_1', соединяющая точки M_1 и M_1' касания A_1A_2 и $A_1'A_2'$ с s, пересекает A_1A_1' и A_2A_2' в точках R_1 и R_2. Из черт. 425 имеем:

$$\angle A_1R_1R_2 = \angle R_1M_1'A_1' + \angle R_1A_1'A_2',$$
$$\angle A_2'R_2R_1 = \angle R_2M_1A_2 + \angle R_2A_2A_1.$$

Но $\angle R_1A_1'A_2' = \angle R_2A_2A_1$ (они измеряются половиной дуги A_1A_2' окружности S) и $\angle R_1M_1'A_1' = \angle R_2M_1A_2$ (они измеряются половиной дуги M_1M_1' окружности s). Следовательно,

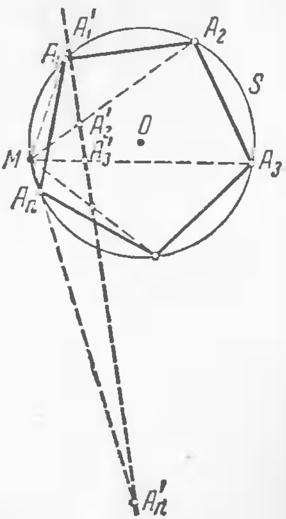
$$\angle A_1R_1R_2 = \angle A_2'R_2R_1,$$

откуда вытекает, что существует окружность s', касающаяся $A_1A'_1$ и $A_2A'_2$ в точках R_1 и R_2. При этом окружность, проходящая через точки пересечения касательных к s и s' в точках M_1, M'_1 и R_1, R_2, т. е. окружность S, проходящая через точки A_1, A'_1, A_2, A'_2, принадлежит к одному пучку с окружностями s и s' (см. примечание в конце решения задачи 251б)); другими словами, *s' принадлежит к одному пучку с окружностями S и s.*

Точно так же показывается, что существует окружность, касающаяся $A_2A'_2$ и $A_3A'_3$ в точках пересечения $A_2A'_2$ и $A_3A'_3$ с прямой, соединяющей точки касания A_2A_3 и $A'_2A'_3$ с s; эта окружность s'' тоже принадлежит к одному пучку с S и s. Очень важно заметить, что *окружность s'' должна совпадать с окружностью s'.* Действительно, существуют, вообще говоря, две окружности данного пучка, содержащего S и s, касающиеся прямой $A_2A'_2$ (см. решение задачи 247б); это следует также из того, что каждый пучок окружностей можно инверсией перевести в совокупность концентрических окружностей или параллельных прямых, или прямых, проходящих через фиксированную точку). Предположим, что s' и s'' — это две разные окружности, и станем непрерывно изменять n-угольник $A'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$, стремя его к n-угольнику $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. При этом окружности s' и s'' будут изменяться также непрерывно; поэтому они будут стремиться к разным окружностям пучка, содержащего S и s, касающимся касательной к S в точке A_2 (к этой касательной стремится прямая $A_2A'_2$). Но это противоречит тому, что и s' и s'' стремятся к одной и той же окружности S (ибо $A_1A'_1$ и $A_3A'_3$ стремятся к касательным к S в точках A_1 и A_3).

Таким образом, мы доказали, что окружность s' касается прямых $A_1A'_1$, $A_2A'_2$ и $A_3A'_3$. Точно так же показывается, что она касается и прямых $A_4A'_4$, $A_5A'_5$, ..., $A_nA'_n$. Таким образом, мы видим, что существует окружность s', касающаяся $A_1A'_1$ и $A_nA'_n$. Рассмотрим теперь четырёхугольник $A_1A'_1A_nA'_n$; в точности как выше, покажем, что существует окружность $\bar{s}$, принадлежащая к тому же пучку, что и s и s', касающаяся A_1A_n и $A'_1A'_n$ (в точках пересечения этих прямых с прямой, соединяющей точки R_1 и R_n касания $A_1A'_1$ и $A_nA'_n$ с s'). Но A_1A_n касается окружности s этого пучка; отсюда следует, что в процессе изменения n-угольника сторона A_1A_n всё время будет касаться той же самой окружности s. [A_1A_n касается ещё одной окружности s_1 пучка, содержащего s, S и s'; однако точки пересечения R_1R_n с A_1A_n и с $A_1'A_n'$, как легко видеть, лежат внутри отрезков A_1A_n и $A_1'A_n'$, откуда следует, что $\bar{s}$ совпадает с s, а не с s_1.]

Примечание. Точно так же можно доказать следующую более общую теорему: *если n-угольник $A_1A_2A_3\ldots A_n$ непрерывно изменяется, всё время оставаясь вписанным в некоторую окружность S, так что стороны A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ его всё время касаются окружностей s_1, s_2, ..., s_{n-1}, принадлежащих к одному пучку с окружностью S, то последняя сторона A_nA_1 всё время касается некоторой окружности s_n, принадлежащей к тому же пучку.* При этом и каждая диагональ n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ всё время касается некоторой окружности, принадлежащей тому же пучку; в частности, *если n-угольник непрерывно изменяется, оставаясь всё время вписанным в окружность S и описанным вокруг окружности s, то каждая из его диагоналей всё время касается некоторой окружности, принадлежащей к одному пучку с S и с s.*



Черт. 426.

§ 4

253. а) Произведём инверсию с центром в точке M и степенью 1. При этом точки A_1, A_2, A_3, ..., A_n перейдут в точки A_1', A_2', A_3', ..., A_n', расположенные на одной прямой (черт. 426). Обозначим длину стороны правильного n-угольника через a. Из формулы (*) (стр. 233) следует

$$A_1'A_2'=\frac{1}{d_1d_2}\,a;\quad A_2'A_3'=\frac{1}{d_2d_3}\,a,$$

$$A_3'A_4'=\frac{1}{d_3d_4}\,a,\ \ldots,\ A_{n-1}'A_n'=$$

$$=\frac{1}{d_{n-1}d_n}\,a,\quad A_1'A_n'=\frac{1}{d_1d_n}\,a.$$

Подставляя все эти выражения в очевидное соотношение

$$A_1'A_n'=A_1'A_2'+A_2'A_3'+A_3'A_4'+\ldots+A_{n-1}'A_n'$$

и сокращая обе части получившегося равенства на a, приходим к требуемому результату.

б) Обозначим через a сторону правильного n-угольника; через b — хорду, стягивающую две стороны n-угольника. Пусть $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots, A'_n$ — точки, в которые переходят вершины n-угольника при инверсии с центром M и степенью 1. Имеем (см. решение задачи а)):

$$A'_1A'_2 = \frac{1}{d_1d_2}a, \quad A'_2A'_3 = \frac{1}{d_2d_3}a, \ \ldots, \quad A'_1A'_n = \frac{1}{d_1d_n}a;$$

$$A'_1A'_3 = \frac{1}{d_1d_3}b, \quad A'_2A'_4 = \frac{1}{d_2d_4}b, \ \ldots, \quad A'_{n-2}A'_n = \frac{1}{d_{n-2}d_n}b,$$

$$A'_{n-1}A'_1 = \frac{1}{d_1d_{n-1}}b, \quad A'_nA'_2 = \frac{1}{d_2d_n}b.$$

Далее,

$$A'_1A'_2 + A'_2A'_3 = A'_1A'_3, \text{ т. е. } \frac{1}{d_1d_2}a + \frac{1}{d_2d_3}a = \frac{1}{d_1d_3}b,$$

или

$$ad_1 + ad_3 = bd_2,$$

$$A'_2A'_3 + A'_3A'_4 = A'_2A'_4, \text{ т. е. } \frac{1}{d_2d_3}a + \frac{1}{d_3d_4}a = \frac{1}{d_2d_4}b,$$

или

$$ad_2 + ad_4 = bd_3,$$

$$A'_3A'_4 + A'_4A'_5 = A'_3A'_5, \text{ т. е. } \frac{1}{d_3d_4}a + \frac{1}{d_4d_5}a = \frac{1}{d_3d_5}b,$$

или

$$ad_3 + ad_5 = bd_4,$$

$$A'_4A'_5 + A'_5A'_6 = A'_4A'_6, \text{ т. е. } \frac{1}{d_4d_5}a + \frac{1}{d_5d_6}a = \frac{1}{d_4d_6}b,$$

или

$$ad_4 + ad_6 = bd_5,$$

. . . .

$$A'_{n-2}A'_{n-1} + A'_{n-1}A'_n = A'_{n-2}A'_n,$$

т. е.

$$\frac{1}{d_{n-2}d_{n-1}}a + \frac{1}{d_{n-1}d_n}a = \frac{1}{d_{n-2}d_n}b,$$

или

$$ad_{n-2} + ad_n = bd_{n-1},$$

$$A'_{n-1}A'_n + A'_{n-1}A'_1 = A'_nA'_1, \text{ т. е. } \frac{1}{d_{n-1}d_n}a + \frac{1}{d_{n-1}d_1}b = \frac{1}{d_nd_1}a,$$

или

$$ad_1 + bd_n = ad_{n-1},$$

$$A'_nA'_2 + A'_2A'_1 = A'_1A'_n, \text{ т. е. } \frac{1}{d_2d_n}b + \frac{1}{d_1d_2}a = \frac{1}{d_1d_n}a,$$

или

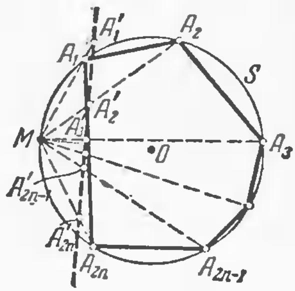
$$bd_1 + ad_n = ad_2.$$

Складывая все последние равенства, получаем:

$$(2a+b)(d_1+d_3+d_5+\ldots+d_n) =$$
$$= (2a+b)(d_2+d_4+\ldots+d_{n-1}),$$

откуда и вытекает требуемый результат.

254. а) Произведём инверсию с центром в точке M. При этом вершины $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$ вписанного $2n$-угольника перейдут в $2n$ точек $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots, A'_{2n}$, расположенных на одной прямой (черт. 427). Из подобия треугольников MA_1A_2 и $MA'_1A'_2$ (ср. выше, стр. 233) имеем:



Черт. 427.

$$\frac{p_1}{p'} = \frac{MA_1}{MA'_2} = \frac{MA_2}{MA'_1},$$

или

$$\frac{p_1^2}{p'^2} = \frac{MA_1 \cdot MA_2}{MA'_1 \cdot MA'_2};$$

здесь p' — расстояние от M до прямой $A'_1A'_2\ldots A'_n$, т. е. высота треугольника $MA'_1A'_2$. Точно так же получаем:

$$\frac{p_2^2}{p'^2} = \frac{MA_2 \cdot MA_3}{MA'_2 \cdot MA'_3}, \quad \frac{p_3^2}{p'^2} = \frac{MA_3 \cdot MA_4}{MA'_3 \cdot MA'_4}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{p_{2n-1}^2}{p'^2} = \frac{MA_{2n-1} \cdot MA_{2n}}{MA'_{2n-1} \cdot MA'_{2n}}, \quad \frac{p_{2n}^2}{p'^2} = \frac{MA_{2n} \cdot MA_1}{MA'_{2n} \cdot MA'_1},$$

откуда имеем:

$$\left(\frac{p_1p_3p_5\ldots p_{2n-1}}{p'^n}\right)^2 = \frac{MA_1 \cdot MA_2 \cdot MA_3 \cdot MA_4 \ldots MA_{2n-1}MA_{2n}}{MA'_1 \cdot MA'_2 \cdot MA'_3 \cdot MA'_4 \ldots MA'_{2n-1} \cdot MA'_{2n}}$$

и

$$\left(\frac{p_2p_4p_6\cdots p_{2n}}{p'^n}\right)^2=\frac{MA_2\cdot MA_3\cdot MA_4\cdot MA_5\ldots MA_{2n}\cdot MA_1}{MA'_2\cdot MA'_3\cdot MA'_4\cdot MA'_5\ldots MA'_{2n}\cdot MA'_1},$$

т. е.

$$p_1p_3p_5\,\ldots\,p_{2n-1}=p_2p_4p_6\,\ldots\,p_{2n},$$

что и требовалось доказать.

б) Эту теорему можно рассматривать как предельный случай теоремы задачи а); если вершину A_2 вписанного $2n$-угольника стремить к вершине A_1, вершину A_3 — к вершине A_4, вершину A_5 — к вершине A_6 и т. д., то стороны A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, ... вписанного $2n$-угольника будут стремиться к касательным к окружности в вершинах A_1, A_2, A_3, ... вписанного n-угольника $A_1A_3A_5\ldots A_{2n-1}$.

255. Произведём инверсию с центром в точке M. Вершины A_1, A_2, A_3, ..., A_n n-угольника перейдут в n точек A'_1, A'_2, A'_3, ..., A'_n, расположенных на одной прямой (черт. 427); при этом

$$A'_1A'_n=A'_1A'_2+A'_2A'_3+A'_3A'_4+\ldots+A'_{n-1}A'_n. \qquad (*)$$

Обозначим через p' длину перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $A'_1A'_n$ — общую высоту треугольников $A'_1MA'_2$, $A'_2MA'_3$, ..., $A'_{n-1}MA'_n$ и $A'_1MA'_n$. Из подобия треугольников A_1MA_2 и $A'_1MA'_2$ (ср. выше, стр. 541) следует

$$\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2}=\frac{p_1}{p'}$$

— сходственные стороны подобных треугольников относятся как высоты, опущенные на эти стороны. Отсюда имеем:

$$A'_1A'_2=\frac{A_1A_2}{p_1}p'=\frac{a_1}{p_1}p',$$

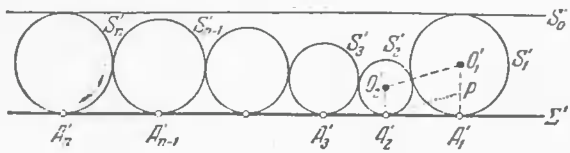
аналогично

$$A'_2A'_3=\frac{a_2}{p_2}p',\ A'_3A'_4=\frac{a_3}{p_3}p',\ \ldots,\ A'_{n-1}A'_n=\frac{a_{n-1}}{p_{n-1}}p',$$

$$A'_1A'_n=\frac{a_0}{p_0}p'.$$

Подставляя все эти выражения в соотношение (*) и сокращая обе части получившегося равенства на p', мы приходим к требуемому результату.

256. Произведём инверсию с центром в точке A_0 и степенью 1. При этом окружности Σ и S_0 перейдут в параллельные прямые Σ' и S_0', а черт. 181 текста — в черт. 428. Радиусы преобразованных окружностей S_1', S_2', ..., S_n' обозна-



Черт. 428.

чим через r_1', r_2', ..., r_n'; очевидно, что $r_1' = r_n'$. Из черт. 428 получим:

$$A_1'A_2'^2 = O_1'O_2'^2 - A_1'P^2 = (r_1' + r_2')^2 - (r_1' - r_2')^2 = 4r_1'r_2'$$

и аналогично

$$A_2'A_3'^2 = 4r_2'r_3', \quad A_3'A_4'^2 = 4r_3'r_4', \quad \ldots, \quad A_{n-1}'A_n'^2 = 4r_{n-1}'r_n'.$$

а) Пусть n чётно. Имеем:

$$r_2' = \frac{A_1'A_2'^2}{4r_1'}, \quad r_3' = \frac{A_2'A_3'^2}{4r_2'} = \frac{A_2'A_3'^2}{A_1'A_2'^2} r_1', \quad r_4' = \frac{A_3'A_4'^2}{4r_3'} =$$

$$= \frac{A_1'A_2'^2 \cdot A_3'A_4'^2}{A_2'A_3'^2} \frac{1}{4r_1'}, \quad \ldots, \quad r_n' = \frac{A_1'A_2'^2 \cdot A_3'A_4'^2 \ldots A_{n-1}'A_n'^2}{A_2'A_3'^2 \cdot A_4'A_5'^2 \ldots A_{n-2}'A_{n-1}'^2} \frac{1}{4r_1'}.$$

Таким образом, условие $r_n' = r_1'$ позволяет определить диаметр окружности S_1' — расстояние между прямыми Σ' и S_0':

$$2r_1' = \frac{A_1'A_2' \cdot A_3'A_4' \ldots A_{n-1}'A_n'}{A_2'A_3' \cdot A_4'A_5' \ldots A_{n-2}'A_{n-1}'}$$

или, так как

$$A_1'A_2' = \frac{A_1A_2}{A_0A_1 \cdot A_0A_2}, \quad A_2'A_3' = \frac{A_2A_3}{A_0A_2 \cdot A_0A_3}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad A_{n-1}'A_n' = \frac{A_{n-1}A_n}{A_0A_{n-1} \cdot A_0A_n} \qquad (**)$$

(см. формулу (*) на стр. 233),

$$2r_1' = \frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n}{A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 \ldots A_{n-2}A_{n-1} \cdot A_nA_0}.$$

Обозначим расстояние от полюса инверсии A_0 до прямой Σ' через d; тогда расстояние от A_0 до S'_0 будет равно $d \pm 2r'_1$. В таком случае $2R = \frac{1}{d}$, $2r_0 = \frac{1}{d \pm 2r'_1}$ (см. доказательство свойства $Б_3$ инверсии), и окончательно получаем:

$$d = \frac{1}{2R}, \ r_0 = \frac{1}{\frac{1}{R} \pm 2\,\frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n}{A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 \ldots A_{n-2}A_n \cdot A_nA_0}}$$

(знак плюс соответствует внутреннему касанию $S_0, S_1, \ldots, S_n$ с S, а знак минус — внешнему касанию).

б) Совершенно аналогично решению задачи а) получаем:

$$r'_n = \frac{A'_2A'^2_3 \cdot A'_4A'^2_5 \ldots A'_{n-1}A'^2_n}{A'_1A'^2_2 \cdot A'_3A'^2_4 \ldots A'_{n-2}A'^2_{n-1}}\, r'_1,$$

откуда вытекает следующее соотношение между взаимными расстояниями точек $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$:

$$A'_1A'_2 \cdot A'_3A'_4 \ldots A'_{n-2}A'_{n-1} = A'_2A'_3 \cdot A'_4A'_5 \ldots A'_{n-1}A'_n.$$

Воспользовавшись формулами (**) решения задачи а), получим искомое соотношение между взаимными расстояниями точек $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 \ldots A_{n-2}A_{n-1} \cdot A_nA_0 = A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 \ldots A_{n-1}A_n.$$

257. Очевидно, что искомое геометрическое место характеризуется тем, что двойное отношение $\frac{AM_1}{BM_1} : \frac{AM_2}{BM_2}$, где M_1, M_2 — две какие угодно точки этого геометрического места, равно единице. В силу свойства Г отсюда следует, что если некоторая инверсия переводит точки A, B в точки A', B', то она переводит искомое геометрическое место в геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до точек A', B' постоянно (хотя это отношение и не равно, быть может, отношению расстояний точек исходного геометрического места от A и B).

Пусть теперь центр инверсии O сам принадлежит искомому геометрическому месту. В таком случае отношение расстояний от точки M', в которую переходит произвольная точка M геометрического места, до точек A' и B' равно единице:

$$M'A':M'B' = MA\frac{k}{OM\cdot OA}:MB\frac{k}{OM\cdot OB} = \frac{MA}{MB}:\frac{OA}{OB} = 1$$

(см. формулу (*) на стр. 233; $\frac{MA}{MB}=\frac{OA}{OB}$ в силу выбора точки O). Следовательно, рассматриваемое геометрическое место переходит в геометрическое место точек, равноудалённых от A' и B', т. е. в прямую линию. Отсюда вытекает, что само это геометрическое место есть прямая линия или окружность.

Очевидно, что искомое геометрическое место представляет собой прямую лишь в том случае, если фигурирующее в условии задачи отношение равно единице.

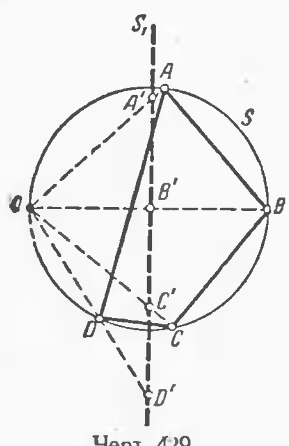
258. Отношение суммы произведений противоположных сторон произвольного четырёхугольника $ABCD$ к произведению его диагоналей

$$\frac{AB\cdot CD + AD\cdot BC}{AC\cdot BD}$$

можно представить в виде

$$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}+\frac{AD\cdot BC}{AC\cdot BD}=$$
$$=\frac{AB}{DB}:\frac{AC}{DC}+\frac{DA}{CA}:\frac{DB}{CB},$$

т. е. оно равно сумме двойных отношений точек A, D; B, C и D, C; A, B (обратите внимание на порядок!) и, следовательно, не меняется при инверсии.



Черт. 429.

Пусть теперь вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность S. Произведём инверсию с центром в какой-либо точке O окружности S; при этом точки A, B, C и D перейдут в точки A', B', C' и D', лежащие на одной прямой.

Пусть для определённости точки A', B', C', D' следуют на прямой одна за другой в выписанном порядке (черт. 429); это будет иметь место, если точка O лежит на дуге AD

окружности S); длины отрезков $A'B'$, $B'C'$ и $C'D'$ обозначим через a, b и c. Тогда

$$A'D'=a+b+c,\ A'C'=a+b,\ B'D'=b+c,$$

откуда

$$\frac{A'B'\cdot C'D'+A'D'\cdot B'C'}{A'C'\cdot B'D'}=\frac{ac+(a+b+c)b}{(a+b)(b+c)}=\frac{ac+ab+b^2+bc}{ab+b^2+ac+bc}=1,$$

что и доказывает утверждение задачи.

259. Пусть P, Q, R, T — четыре произвольные точки окружности S; P', Q', R', T' — точки, в которые они переходят в результате последовательности инверсий I_1, $I_2, \ldots, I_n$ (см. решение задачи 231). Так как каждая инверсия сохраняет двойное отношение четырёх точек, то

$$\frac{PR}{QR}:\frac{PT}{QT}=\frac{P'R'}{Q'R'}:\frac{P'T'}{Q'T'}.$$

Но, очевидно,

$$PR=2r\sin\frac{\breve{PR}}{2},\ QR=2r\sin\frac{\breve{QR}}{2}\qquad \text{и т. д.,}$$

где r есть радиус окружности S; следовательно, равенство двойных отношений можно переписать так:

$$\frac{\sin\frac{\breve{PR}}{2}}{\sin\frac{\breve{QR}}{2}}:\frac{\sin\frac{\breve{PT}}{2}}{\sin\frac{\breve{QT}}{2}}=\frac{\sin\frac{\breve{P'R'}}{2}}{\sin\frac{\breve{Q'R'}}{2}}:\frac{\sin\frac{\breve{P'T'}}{2}}{\sin\frac{\breve{Q'T'}}{2}}.$$

Пусть, наконец, O — произвольная фиксированная точка окружности S. Тогда $\breve{PR}=\breve{PO}-\breve{RO}$[1]) и т. д.; таким образом,

$$\sin\frac{\breve{PR}}{2}=\sin\frac{\breve{PO}-\breve{RO}}{2}=\sin\frac{\breve{PO}}{2}\cos\frac{\breve{RO}}{2}-\sin\frac{\breve{RO}}{2}\cos\frac{\breve{PO}}{2}=$$
$$=\cos\frac{\breve{PO}}{2}\cos\frac{\breve{RO}}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\breve{PO}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\breve{RO}}{2}\right)\quad\text{и т. д.}$$

---

[1]) Здесь дуги берутся со знаками аналогично правилу отсчёта углов в тригонометрическом круге.

Отсюда получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile PO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile RO}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile QO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile RO}{2}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile PO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile TO}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile QO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile TO}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile P'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile R'O}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile Q'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile R'O}{2}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile P'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile T'O}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile Q'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile T'O}{2}}.$$

Предположим теперь, что T есть точка A_1, которую мы здесь обозначим через X (она неизвестна); тогда T' тоже совпадает с A_1 (A_1 в результате n последовательных инверсий переходит в себя). Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile PO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile RO}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile QO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile RO}{2}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile PO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile XO}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile QO}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile XO}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile P'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile R'O}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile Q'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile R'O}{2}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{\smile P'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile XO}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\smile Q'O}{2}-\operatorname{tg}\frac{\smile XO}{2}}. \quad (*)$$

Выберем произвольно точки P, Q, R; после этого точки P', Q', R' нетрудно будет найти. Равенство (*) можно рассматривать как квадратное уравнение относительно неизвестной величины $\operatorname{tg}\frac{\smile XO}{2}$. Решив это уравнение, мы найдём $\operatorname{tg}\frac{\smile XO}{2}$, а следовательно, сможем построить отвечающий дуге $\smile XO$ центральный угол и найти точку $X=A_1$; после этого нахождение всех остальных вершин искомого n-угольника уже не представляет труда. Построение легко проводится циркулем и линейкой.

Задача имеет два, одно или ни одного решения в зависимости от числа вещественных корней уравнения (*).

260. Эта задача очень близка к задаче 257. Прежде всего очевидно, что если отношение длин касательных, проведённых из некоторой точки M_1 к двум окружностям S_1 и

S_2, равно отношению длин касательных, проведённых из другой точки M_2 к тем же окружностям, то двойное отношение $\frac{t_{S_1M_1}}{t_{S_2M_1}} : \frac{t_{S_1M_2}}{t_{S_2M_2}}$ четырёх окружностей S_1, S_2, M_1 и M_2 (здесь точки M_1 и M_2 рассматриваются как «окружности нулевого радиуса»; так, например, $t_{S_1M_1}$ означает длину отрезка касательной, проведённой из точки M_1, к окружности S_1) равно единице. Отсюда следует, что если инверсия с центром вне S_1 и вне S_2 переводит эти окружности в окружности S'_1 и S'_2, то искомое геометрическое место переходит в геометрическое место точек таких, что отношение длин касательных, проведённых из этих точек к окружностям S'_1 и S'_2, имеет постоянную величину.

Пусть теперь O есть какая угодно точка искомого геометрического места; так как из неё можно провести касательные к S_1 и к S_2, то она находится вне обеих этих окружностей. *Инверсия с центром в точке O переводит рассматриваемое геометрическое место в геометрическое место точек, таких, что касательные, проведённые из них к преобразованным окружностям S'_1 и S'_2, равны между собой.* Действительно, если точка M_1 рассматриваемого геометрического места переходит в точку M'_1, то по формуле (**) (см. стр. 241) имеем:

$$t_{S'_1M'_1} : t_{S'_2M'_1} = \left(t_{S_1M_1}\frac{k}{\sqrt{OM_1^2\cdot k_1}}\right) : \left(t_{S_2M_1}\frac{k}{\sqrt{OM_1^2\cdot k_2}}\right) =$$

$$= \frac{t_{S_1M_1}}{t_{S_2M_1}} : \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_2}} = \frac{t_{S_1M_1}}{t_{S_2M_1}} : \frac{\sqrt{t^2_{S_1O}}}{\sqrt{t^2_{S_2O}}} = \frac{t_{S_1M_1}}{t_{S_2M_1}} : \frac{t_{S_1O}}{t_{S_2O}} = 1$$

(степени k_1 и k_2 точки O относительно S_1 и S_2 равны $t^2_{S_1O}$ и $t^2_{S_2O}$; $\frac{t_{S_1O}}{t_{S_2O}} = \frac{t_{S_1M_1}}{t_{S_2M_1}}$ согласно выбору точки O). Итак, мы видим, что при инверсии с центром в точке O искомое геометрическое место переходит в геометрическое место таких точек M', что $t_{M'S'_1} = t_{M'S'_2}$, т. е. в отрезок радикальной оси окружностей S'_1 и S'_2, внешний по отношению к обеим окружностям (см. § 3, стр. 221).

Отсюда вытекает, что само это геометрическое место, вообще говоря, представляет собой окружность или часть окружности (дугу окружности, проходящей через точки пересечения S_1 и S_2, внешнюю по отношению к S_1 и S_2); если фигурирующее в условии задачи отношение равно единице, то геометрическое место представляет собой прямую или часть прямой (часть общей хорды окружностей, внешнюю по отношению к обеим окружностям).

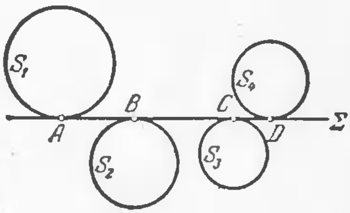
261. Настоящая задача очень близка к задаче 258. Прежде всего нетрудно видеть, что если S_1, S_2, S_3 и S_4 — четыре окружности, то отношение

$$\frac{t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}}{t_{13}t_{24}}$$

можно переписать в виде

$$\frac{t_{21}}{t_{31}}:\frac{t_{24}}{t_{34}}+\frac{t_{41}}{t_{31}}:\frac{t_{42}}{t_{32}},$$

откуда видно, что оно не меняется при инверсии, центр которой лежит вне окружностей S_1, S_2, S_3, S_4 или внутри всех их.

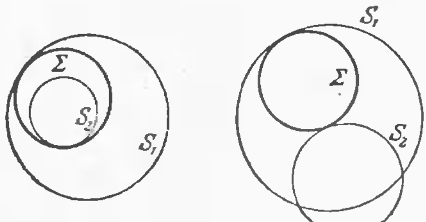


Черт. 430.

Если окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной прямой Σ в точках A, B, C и D (черт. 430), то соотношение настоящей задачи принимает вид

$$\frac{AB\cdot CD+AD\cdot BC}{AC\cdot BD}=1;$$

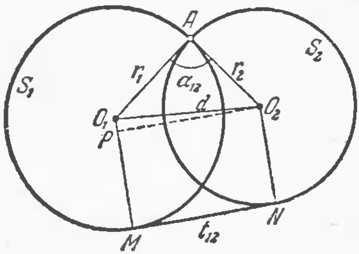
нетрудно проверить, что это равенство действительно имеет место (см. решение задачи 258).



Черт. 431.

Пусть теперь четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружности Σ. Если, например, окружность S_1 содержит Σ внутри себя, а S_2 не содержит Σ внутри, то либо S_1 и S_2 имеют одноимённое касание с Σ, но общая внешняя касательная S_1 и S_2 не существует (черт. 431, *а*), либо S_1 и S_2 имеют разноимённое касание с Σ, но общая внутренняя касательная S_1 и S_2 не существует (черт. 431, *б*). Поэтому условие задачи имеет смысл только в том случае, если окружность Σ

расположена внутри всех окружностей S_1, S_2, S_3, S_4, либо вне всех их. Пусть O есть какая-либо точка окружности Σ. Инверсия с центром в точке O переводит четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4 в четыре окружности S_1', S_2', S_3', S_4', касающиеся одной прямой Σ', для которых, как мы видели выше, имеет место соотношение настоящей задачи. Отсюда вытекает, что это соотношение выполняется и для исходных четырёх окружностей.



Черт. 432.

262. Пусть S_1, S_2 — две окружности, пересекающиеся в точке A, O_1, O_2 — центры и r_1, r_2 $(r_1 \geqslant r_2)$ — радиусы этих окружностей, а $MN = t_{12}$ — отрезок их общей касательной (черт. 432). Обозначим расстояние O_1O_2 через d. В таком случае

$$t_{12}^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2$$

(см. выше, стр. 239); следовательно,

$$\frac{t_{12}^2}{r_1r_2} = \frac{2r_1r_2 - (r_1^2 + r_2^2 - d^2)}{r_1r_2} = 2 - \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{r_1r_2}.$$

Но из треугольника O_1O_2A легко усмотреть, что

$$\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{r_1r_2} = 2\,\frac{O_1A^2 + O_2A^2 - O_1O_2^2}{2O_1A \cdot O_2A} = 2\cos\alpha_{12},$$

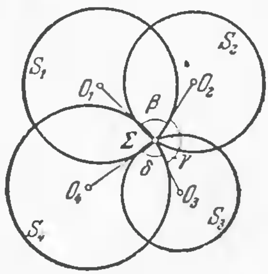
где $\alpha_{12} = \angle O_1AO_2$ — угол между радиусами O_1A и O_2A окружностей S_1 и S_2, равный углу между окружностями S_1 и S_2. Таким образом, имеем [1]):

$$\frac{t_{12}^2}{r_1r_2} = 2(1 - \cos\alpha_{12}) = 4\sin^2\frac{\alpha_{12}}{2}. \qquad (*)$$

---

[1]) Отсюда видно, что для пересекающихся окружностей сохранение при инверсии выражения $\dfrac{t_{12}}{\sqrt{r_1r_2}}$ (см. выше, стр. 242) является прямым следствием свойства В инверсии.

Теперь предположим, что четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 пересекаются в одной точке Σ. Обозначим центры этих окружностей через O_1, O_2, O_3 и O_4 (черт. 433), а попарные углы между прямыми $O_1\Sigma$, $O_2\Sigma$, $O_3\Sigma$, $O_4\Sigma$ (углы между



Черт. 433.

окружностями) — через α_{12}, α_{13}, α_{14}, α_{23}, α_{24} и α_{34}. В таком случае в обозначениях черт. 433 имеем:

$$\alpha_{12}=\beta,\ \alpha_{13}=\beta+\gamma,\ \alpha_{14}=\beta+\gamma+\delta,$$
$$\alpha_{23}=\gamma,\ \alpha_{24}=\gamma+\delta,\ \alpha_{34}=\delta$$

и, следовательно,

$$\sin\frac{\alpha_{12}}{2}\sin\frac{\alpha_{34}}{2}+\sin\frac{\alpha_{14}}{2}\sin\frac{\alpha_{23}}{2}-\sin\frac{\alpha_{13}}{2}\sin\frac{\alpha_{24}}{2}=$$
$$=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}=$$
$$=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}+\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}-$$
$$-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\right)=$$
$$=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=$$
$$=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}-\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\delta}{2}=$$
$$=\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}-\sin\frac{\beta+\gamma-\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=0.$$

Подставляя в полученное соотношение вместо синусов половинных углов между окружностями их выражения из формулы (*), получаем:

$$\frac{1}{2}\frac{t_{12}}{\sqrt{r_1r_2}}\,\frac{1}{2}\frac{t_{34}}{\sqrt{r_3r_4}}+\frac{1}{2}\frac{t_{14}}{\sqrt{r_1r_4}}\,\frac{1}{2}\frac{t_{23}}{\sqrt{r_2r_3}}-\frac{1}{2}\frac{t_{13}}{\sqrt{r_1r_3}}\,\frac{1}{2}\frac{t_{24}}{\sqrt{r_2r_4}}=0,$$

или, сокращая на $\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{r_1r_2r_3r_4}}$ и перенося один член в правую часть,

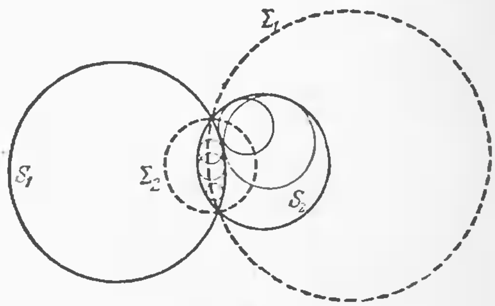
$$t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}=t_{13}t_{24},$$

что и требовалось доказать.

263. Для случая, когда окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 пересекаются в одной точке, формула настоящей задачи уже была нами доказана в решении предыдущей задачи. Для случая, когда окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружности (или прямой) Σ, эта формула является непосредственным следствием предложения задачи 261; для того чтобы её получить, достаточно подставить в соотношение задачи 261 выражения для t_{12} и т. д., полученные из формулы (*) решения задачи 262 $\left(t_{12}=2\sin\frac{\alpha_{12}}{2}\sqrt{r_1r_2}\text{ и т. д.}\right)$.

264. а) Так как при инверсии центр исходной окружности не переходит в центр преобразованной окружности, то фигурирующее в условии задачи свойство биссектрис углов, образованных пересекающимися прямыми, надо переформулировать так, чтобы в новую формулировку входили только понятия, сохраняющиеся при инверсии. Нетрудно видеть, как это сделать: вместо того чтобы говорить о геометрическом месте центров окружностей, касающихся двух пересекающихся прямых, следует сказать, что эти окружности пересекают перпендикулярно одну или другую из биссектрис. Применив инверсию, мы получим теорему: *окружности, касающиеся двух пересекающихся окружностей S_1 и S_2, пересекают перпендикулярно одну из двух окружностей Σ_1 и Σ_2, проходящих через точки пересечения S_1 и S_2 и делящих пополам углы между этими окружностями* (черт. 434). Эти две вспомогательные окружности называются биссектральными окружностями двух первых окружностей.

Отметим, что аналогичная теорема не имеет места в том случае, если окружности S_1 и S_2 не пересекаются. В этом случае окружности S_1 и S_2 можно при помощи инверсии перевести в две концентрические окружности S_1' и S_2' (см. теорему 2 § 1, стр. 194). Все окружности, касающиеся S_1' и S_2', распадаются на два семейства, одно из которых состоит из окружностей, перпендикулярных к определённой окружности Σ', концентрической с S_1' и S_2', второе же состоит из окружностей, никакие три из которых не перпендикулярны к одной окружности. Отсюда следует, что все окружности, касающиеся окружностей S_1 и S_2, распадаются на два семейства, одно из которых состоит из окружностей, перпендикулярных к определённой окружности Σ (принадлежащей к пучку, определяемому окружностями S_1 и S_2), а второе — из окружностей, никакие три из которых не перпендикулярны к одной окружности.



Черт. 434.

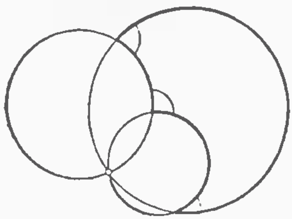
Наконец, переводя две касающиеся окружности в две параллельные прямые, нетрудно убедиться, что все окружности, касающиеся двух касающихся окружностей S_1 и S_2, распадаются на два семейства, одно из которых состоит из окружностей, проходящих через точку T касания S_1 и S_2, а второе — из окружностей, пересекающих перпендикулярно некоторую окружность Σ, проходящую через T и касающуюся в этой точке S_1 и S_2.

б) *Каждая окружность, пересекающая две данные пересекающиеся окружности S_1 и S_2 под равными углами, перпендикулярна к одной из двух биссектральных окружностей S_1 и S_2* (см. решение задачи 264а)); обратно, *каждая окружность, перпендикулярная к биссектральной окружности S_1 и S_2, пересекает S_1 и S_2 под равными углами.*

в) Из результата задачи б) следует, что наша задача равносильна следующей: построить окружность, пересекающую перпендикулярно три биссектральные окружности окружностей

S_0 и S_1, S_0 и S_2, S_0 и S_3 данных окружностей S_0, S_1, S_2, S_3 (которые, очевидно, можно построить), т. е. к частному случаю задачи 238а) из § 2 (см. также задачу 249а) из § 3). Этот частный случай задачи 238а) может иметь только одно решение. Так как каждую из участвующих в построении биссектральных окружностей можно выбирать одним из двух возможных способов, то всего задача может иметь до восьми решений.

265. В теорему: если три окружности пересекаются в одной точке, то сумма углов криволинейного треугольника, обра-



Черт. 435.

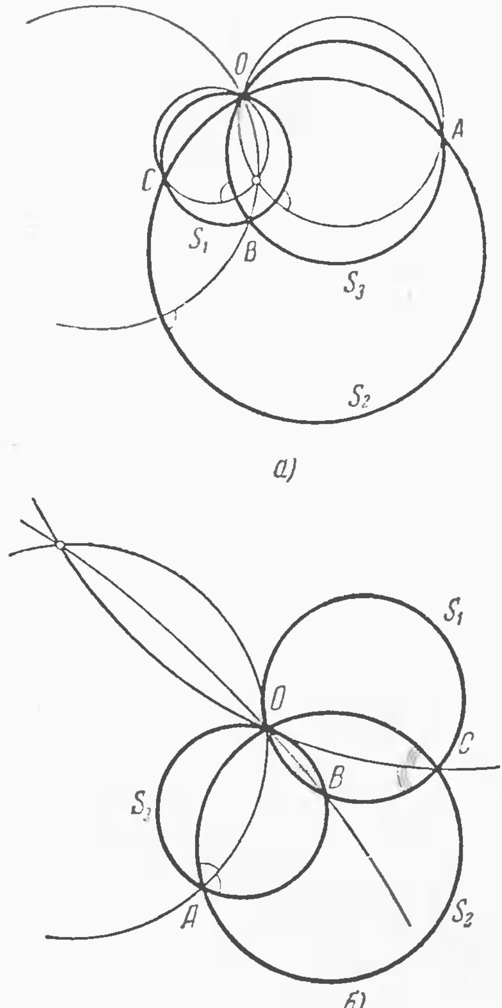
зованного в пересечении этих окружностей (черт. 435), равна 180°.

266. Пусть S_1, S_2 и S_3 — три окружности, проходящие через одну точку O; A, B и C — вторые точки пересечения S_3 и S_2, S_1 и S_3, S_2 и S_1. В таком случае:

а) три окружности, проходящие через точки O и A, O и B, O и C перпендикулярно соответственно к S_1, S_2 и S_3, пересекаются в одной точке (черт. 436, *а*);

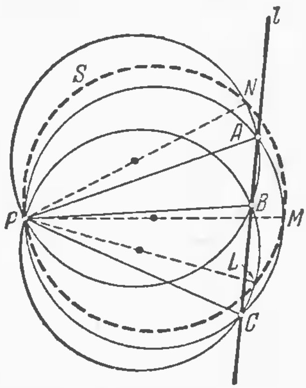
б) три окружности, проходящие через точки O и A, O и B, O и C и делящие пополам углы соответственно между S_3 и S_2, S_1 и S_3, S_2 и S_1, пересекаются в одной точке (черт. 436, *б*).

267. Пусть A, B, C — три точки, расположенные на одной прямой, P — точка вне этой прямой. Опишем вокруг треугольников PAB, PAC, PBC окружности; пусть PN, PM, PL — диаметры этих окружностей, проходящие через точку P. В таком случае точки P, N, M и L лежат на одной окруж-



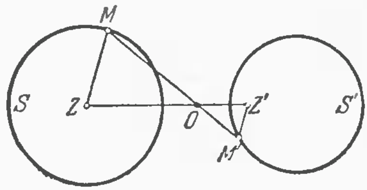
Черт. 436.

ности S (черт. 437). Обратно, если PN, PM, PL — три хорды окружности S, то вторые точки пересечения окружностей, построенных на отрезках PN, PM, PL как на диаметрах, лежат на одной прямой (см. задачу 86б) из § 1 гл. II второй части книги).



Черт. 437.

268. При инверсии, центр O которой не лежит на данной окруж-



Черт. 438.

ности S, S переходит в некоторую другую окружность S'. Пусть Z' — точка, в которую переходит центр Z окружности S, M' — точка, в которую переходит какая-то точка M окружности S (черт. 438). Согласно формуле (*) стр. 233 имеем:

$$M'Z' = MZ\frac{k}{OZ\cdot OM} = MZ\frac{OM'}{OZ},$$

так как $\frac{k}{OM} = OM'$, откуда

$$\frac{M'Z'}{M'O} = \frac{MZ}{OZ} = \frac{r}{OZ},$$

где r — радиус окружности S. Таким образом, мы видим, что окружность S' можно определить как геометрическое место таких точек M', что отношение $\frac{M'Z'}{M'O}$ равно $\frac{r}{OZ}$, т. е. не зависит от выбора точки M' окружности.

Таким образом, наряду с обычным определением окружности как геометрического места точек, равноудалённых от данной точки, *можно* также *определить окружность как геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная* (ср. с задачей 257).

269. Произведём инверсию с центром в точке O; пусть A', B' и C' — три точки, в которые переходят при этой инверсии вершины A, B, C треугольника ABC (черт. 439, a).

По формуле (*) стр. 233 имеем:

$$AB = A'B'\frac{k}{OA'\cdot OB'},\quad BC = B'C'\frac{k}{OB'\cdot OC'},\quad AC = A'C'\frac{k}{OA'\cdot OC'}.$$

Подставляя эти выражения в неравенство

$$AB + BC > AC,$$

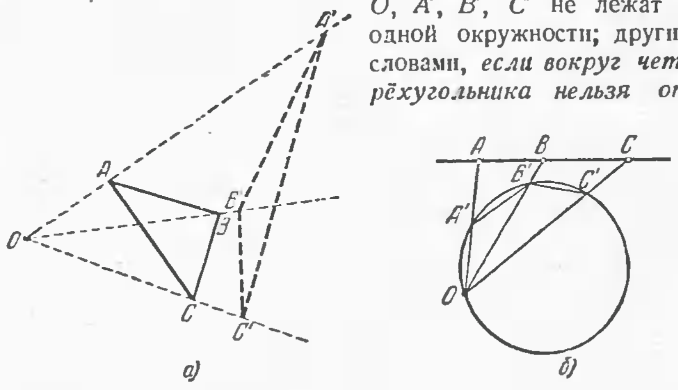
приходим к соотношению

$$A'B'\frac{k}{OA'\cdot OB'} + B'C'\frac{k}{OB'\cdot OC'} > A'C'\frac{k}{OA'\cdot OC'},$$

или

$$A'B'\cdot OC' + B'C'\cdot OA' > A'C'\cdot OB'.$$

Так как точки A, B, C не лежат на одной прямой, то точки O, A', B', C' не лежат на одной окружности; другими словами, *если вокруг четырёхугольника нельзя описать окружность, то сумма произведений его противоположных сторон больше произведения диагоналей.*



Черт. 439.

С другой стороны, если точки A, B и C лежат на одной прямой, т. е. точки O, A', B', C' лежат на одной окружности (черт. 439, $б$), то

$$AB + BC = AC,$$

откуда

$$A'B'\frac{k}{OA'\cdot OB'} + B'C'\frac{k}{OB'\cdot OC'} = A'C'\frac{k}{OA'\cdot OC'},$$

или

$$A'B' \cdot OC' + B'C' \cdot OA' = A'C' \cdot OB'.$$

Отсюда вытекает как теорема Птолемея, так и теорема, ей обратная.

270. а) Произведём инверсию с центром в точке O; пусть A', B', C' — три точки, в которые переходят при этой инверсии вершины прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B (черт. 440). Из подобия треугольников OAB и $OB'A'$, OBC и $OC'B'$ имеем:

$$\angle OBA = \angle OA'B',$$
$$\angle OBC = \angle OC'B',$$

так что

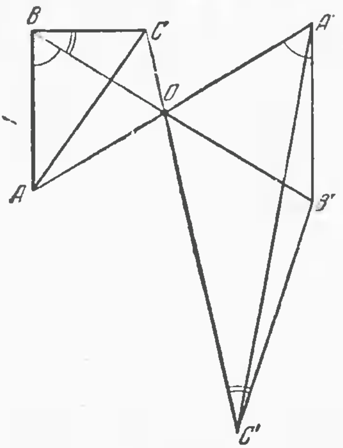
$$\angle OA'B' + \angle OC'B' = 90°.$$

Далее, по формуле (*) стр. 233

$$AB = A'B' \frac{k}{OA' \cdot OB'},$$

$$BC = B'C' \frac{k}{OB' \cdot OC'},$$

$$AC = A'C' \frac{k}{OA' \cdot OC'}.$$



Черт. 440.

Следовательно, теорема Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2$ даёт

$$A'B'^2 \frac{k^2}{OA'^2 \cdot OB'^2} + B'C'^2 \frac{k^2}{OB'^2 \cdot OC'^2} = A'C'^2 \frac{k^2}{OA'^2 \cdot OC'^2},$$

или

$$A'B'^2 \cdot OC'^2 + B'C'^2 \cdot OA'^2 = A'C'^2 \cdot OB'^2.$$

Таким образом, мы приходим к теореме: *если сумма противоположных углов выпуклого четырёхугольника равна* 90°, *то сумма произведений квадратов противоположных сторон равна произведению квадратов диагоналей.*

Интересно сопоставить полученное предложение с теоремой Птолемея, которую можно сформулировать следующим образом: *если сумма противоположных углов выпуклого четырёхугольника равна* 180°, *то сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.*

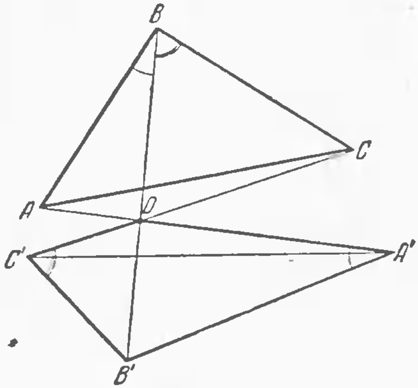
б) Совершенно аналогично решению предыдущей задачи получаем из теоремы косинусов следующее предложение, обобщающее как теорему Птолемея, так и теорему задачи а): *если сумма противоположных углов четырёхугольника равна φ, то сумма произведений квадратов противоположных сторон без удвоенного произведения всех четырёх сторон четырёхугольника на косинус угла φ равна произведению квадратов диагоналей*. Вывод предоставляем читателю.

в) Попрежнему пусть A', B', C' — точки, в которые переходят при инверсии вершины треугольника ABC (черт. 441). По формуле (*) стр. 233

$$AB = A'B'\frac{k}{OA'\cdot OB'},$$

$$BC = B'C'\frac{k}{OB'\cdot OC'},$$

$$AC = A'C'\frac{k}{OA'\cdot OC'}.$$



Черт. 441.

Найдём теперь связь между углами треугольника ABC и углами четырёхугольника $OA'B'C'$. Прежде всего мы имеем:

$$\angle OBA = \angle OA'B', \quad \angle OBC = \angle OC'B'$$

и, следовательно,

$$\angle ABC = \angle OA'B' + \angle OC'B'$$

— обстоятельство, которое использовалось в решении задач а) и б).

Далее,

$$\angle OAB = \angle OB'A'; \quad \angle OAC = \angle OC'A'$$

и, следовательно,

$$\angle BAC = \angle OAB - \angle OAC = \angle OB'A' - \angle OC'A',$$

т.е. угол BAC треугольника равен разности углов, которые образуют диагонали OB' и $A'C'$ четырёхугольника $OA'B'C'$

соответственно со сторонами $B'A'$ и $C'O$. Точно так же

$$\angle BCA = \angle OB'C' - \angle OA'C',$$

т. е. угол BCA равен разности углов, которые образуют диагонали OB' и $C'A'$ четырёхугольника $OA'B'C'$ соответственно со сторонами $B'C'$ и $A'O$.

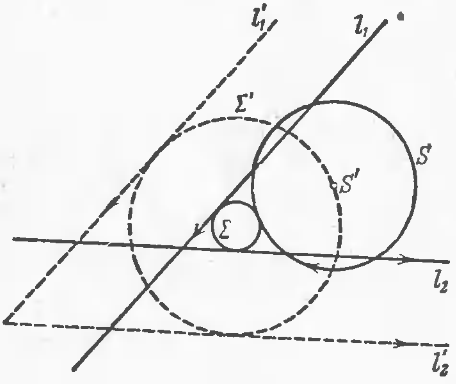
Подставляя эти выражения в теорему синусов

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$$

мы получаем после упрощения

$$\frac{A'C' \cdot OB'}{\sin \varphi} = \frac{A'B' \cdot OC'}{\sin \psi} = \frac{B'C' \cdot OA'}{\sin \chi}, \qquad (*)$$

где φ есть сумма противолежащих углов $OA'B'$ и $OC'B'$ четырёхугольника $OA'B'C'$, ψ — разность двух углов, образованных диагоналями и сторонами четырёхугольника, опирающихся на сторону OC', χ — разность двух углов, образованных диагоналями и сторонами четырёхугольника, опирающихся на сторону OA'. Формула (*) и выражает теорему, в которую переходит при инверсии теорема синусов.



Черт. 442.

§ 5

271. Будем считать прямые l_1 и l_2 и окружность S направленными. Произведём расширение, переводящее окружность S в точку S'. При этом прямые l_1 и l_2 перейдут в какие-то новые прямые l_1' и l_2', а искомая окружность Σ (которую тоже придётся считать направленной), касающаяся l_1, l_2 и S, — в окружность Σ', касающуюся прямых l_1', l_2' и проходящую через точку S' (черт. 442). Таким образом, построение окружности Σ, касающейся двух данных прямых и данной окружности, сводится к построению окружности Σ', касающейся двух данных прямых и проходящей через данную точку, т. е. к задаче 49а) из § 1 гл. I второй части книги.

Так как задача 49а) имеет в общем случае два решения и, зафиксировав произвольно направление окружности S, мы можем четырьмя различными способами выбирать направление прямых l_1 и l_2, то задача имеет, вообще говоря, восемь решений.

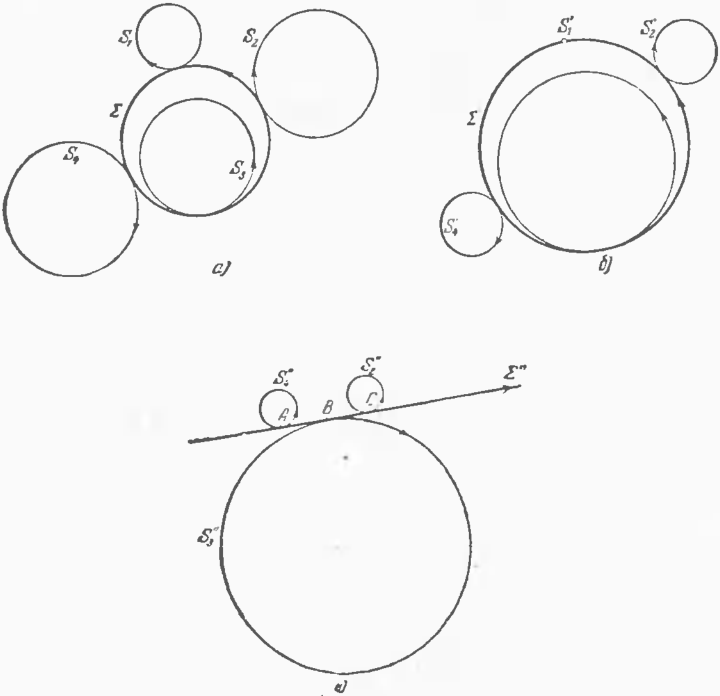
Это решение, очевидно, более просто, чем решения задач 49в) и 56 из § 1 гл. I второй части и 232б) из § 2 настоящей главы.

272. Будем считать все три окружности S_1, S_2, S_3 направленными. Произведём расширение, переводящее одну из этих окружностей в точку (например, окружность S_1 в точку S_1'). При этом окружности S_2 и S_3 перейдут в новые окружности S_2' и S_3', а искомая (направленная) окружность Σ, касающаяся S_1, S_2 и S_3, — в окружность Σ', проходящую через точку S_1' и касающуюся S_2' и S_3'. Таким образом, задача Аполлония сводится к нахождению окружности Σ', касающейся двух окружностей S_2' и S_3' и проходящей через точку S_1', т. е. к задаче 232б) из § 2 настоящей главы (стр. 207). Решив эту задачу, мы затем сразу найдём и искомую окружность.

Задача 232б) сводится к нахождению общей касательной двух окружностей (см. стр. 515) и, следовательно, имеет в случае направленных окружностей, вообще говоря, два решения (см. стр. 261). А так как фиксировав произвольно направление окружности S_1, мы можем выбирать направления окружностей S_2 и S_3 четырьмя различными способами, то всего задача Аполлония имеет, вообще говоря, восемь решений.

Это решение задачи Аполлония, как легко видеть, более просто, чем оба решения задачи 237а).

273. Рассматриваемая задача, очевидно, представляет обобщение теоремы Птолемея (см. выше задачу 258 из § 4 настоящей главы, стр. 236). В § 3 указывалось два доказательства теоремы Птолемея при помощи инверсии. Одно из этих доказательств сводило соотношение Птолемея к такому же соотношению $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, существующему между попарными расстояниями четырёх точек *прямой*; оно позволяло доказать только то, что соотношение Птолемея *необходимо* для того, чтобы четыре точки лежали на одной окружности (см. задачу 258). Второе доказательство сводило соотношение Птолемея к соотношению $AB+BC=AC$, существующему между попарными расстояниями трёх точек прямой; оно позволило показать, что условие Птолемея необходимо и достаточно для того, чтобы четыре точки



Черт. 443.

лежали на одной окружности (см. решение задачи 269). Решение задачи 261 из § 4 аналогично первому доказательству теоремы Птолемея. При помощи расширения возможно также дать доказательство теоремы задачи 261, аналогичное второму доказательству теоремы Птолемея; при этом оказывается возможным также показать достаточность условия теоремы задачи 261 для того, чтобы четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касались одной окружности (или прямой) Σ (т. е. доказать теорему задачи б)). Это и составляет содержание настоящей задачи.

Пусть мы имеем четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 (черт. 443, *а*), которые мы будем считать направленными (это равносильно тому, что указано, какие из величин t_{12} и т. д. означают отрезки общих внешних касательных и какие — отрезки общих внутренних касательных). Произведём расширение, переводящее одну из этих окружностей в точку (окружность S_1 в точку S_1'), при этом остальные три окружности S_2, S_3, S_4 перейдут в новые окружности S_2', S_3' и S_4' (черт. 443, *б*). Далее произведём инверсию с центром S_1'; при этом окружности S_2', S_3' и S_4' перейдут в новые окружности S_2'', S_3'', S_4'' (черт. 443, *в*).

Далее, отдельно докажем необходимость и достаточность условия задачи для того, чтобы окружности S_1, S_2, S_3, S_4 касались одной окружности; первое представляет собой решение задачи а), а второе — решение задачи б).

Доказательство необходимости. Если окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружности или прямой Σ или проходят через одну точку Σ, то окружности S_2', S_3' и S_4' касаются одной окружности (или прямой) Σ', проходящей через точку S_1' [1]), и окружности S_2'', S_3'' и S_4'' касаются одной прямой Σ''. Предположим, для определённости, что точка B касания S_3'' с Σ'' расположена между точками C и A касания с Σ'' окружностей S_2'' и S_4'' (черт. 443, *в*); в таком случае

$$AB+BC=AC \text{ или } t_{23}''+t_{34}''=t_{24}'',$$

где t_{23}'' есть касательное расстояние окружностей S_2'' и S_3'' и аналогичный смысл имеют величины t_{34}'' и t_{24}''.

Далее, в силу формулы (**) стр. 241 [2])

$$t_{23}''=t_{23}'\frac{k}{\sqrt{k_2k_3}},\quad t_{34}''=t_{34}'\frac{k}{\sqrt{k_3k_4}},\quad t_{24}''=t_{24}'\frac{k}{\sqrt{k_2k_4}},$$

---

[1]) Направленные касающиеся окружности S_1 и Σ не могут иметь одинаковые (по величине и знаку!) радиусы — иначе они совпадали бы. Поэтому расширение, переводящее S_1 в точку S_1', не может перевести Σ в точку.

[2]) Эта формула здесь применима, ибо точка S_1' лежит вне всех окружностей S_2', S_3', S_4' (это следует из того, что из точки S_1' можно привести касательную, например, к окружности S_2'; длина отрезка этой касательной между S_1' и точкой касания равна t_{12} в силу свойства B расширения).

где t'_{23}, t'_{34}, t'_{24} — попарные касательные расстояния окружностей S'_2, S'_3, S'_4; k_2, k_3 и k_4 — квадраты длин касательных, проведённых из точки S'_1 к окружностям S'_2, S'_3, S'_4, которые мы будем обозначать через t'^2_{12}, t'^2_{13}, t'^2_{14}; k — степень инверсии. Итак, имеем:

$$t'_{23}\frac{k}{t'_{12}\,t'_{13}}+t'_{34}\frac{k}{t'_{13}\,t'_{14}}=t'_{24}\frac{k}{t'_{12}\,t'_{14}}.$$

Сокращая последнее равенство на k и избавляясь от дробей, получим $t'_{23}t'_{14}+t'_{34}t'_{12}=t'_{24}t'_{13}$, что совпадает с соотношением, которое требуется доказать, так как в силу свойства В расширения $t'_{12}=t_{12}$, $t'_{13}=t_{13}$, $t'_{14}=t_{14}$, $t'_{23}=t_{23}$, $t'_{24}=t_{24}$ и $t'_{34}=t_{34}$.

Доказательство достаточности. Пусть теперь, обратно, имеет место, скажем, соотношение

$$t_{12}t_{34}-t_{13}t_{24}+t_{14}t_{23}=0.$$

Как выше, имеем:

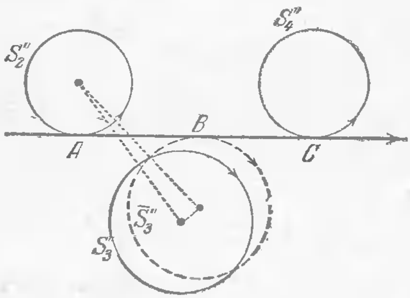
$$t''_{23}=t'_{23}\frac{k}{t'_{12}\,t'_{13}}=t_{23}\frac{k}{t_{12}t_{13}},\quad t''_{34}=t_{34}\frac{k}{t_{13}t_{14}},\quad t''_{24}=t_{24}\frac{k}{t_{12}t_{14}}.$$

Разделив обе части соотношения $t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}=t_{13}t_{24}$ на $t_{12}t_{13}t_{14}$ и умножив на k, получим:

$$t_{34}\frac{k}{t_{13}t_{14}}+t_{23}\frac{k}{t_{12}t_{13}}=$$
$$=t_{24}\frac{k}{t_{12}t_{14}},$$

или

$$t''_{34}+t''_{23}=t''_{24}.$$



Черт. 444.

Теперь предположим, что окружности S''_2, S''_3 и S''_4 не касаются одной прямой. Повернём S''_3 вокруг центра окружности S''_2 в положение $\bar{S}''_3$, так чтобы $\bar{S}''_3$ касалась общей касательной AC окружностей S''_2 и S''_4 (см. черт. 444). В таком случае, очевидно, будем иметь:

$$\bar{t}''_{34}+\bar{t}''_{23}=t''_{24},$$

где $\bar{t}''_{34}$ и $\bar{t}''_{23}$ есть касательные расстояния окружностей $\bar{S}''_3$ и S''_4 соответственно $\bar{S}''_3$ и S''_2. Но $\bar{t}''_{23}=t''_{23}$ (так как $\bar{S}''_3$ получена из S''_3 вращением вокруг центра S''_2); следовательно, $\bar{t}''_{34}=t''_{24}-\bar{t}''_{23}=t''_{24}-t''_{23}=t''_{34}$, что невозможно, если $\bar{S}''_3$ отлична от S''_3 (касательные расстояния окружностей $\bar{S}''_3$ и S''_4, S''_3 и S''_4, где $\bar{S}''_3$ и S''_3 равны, совпадают только в том случае, если $\bar{S}''_3$ получается из S''_3 вращением вокруг центра S''_4). Таким, образом, мы вынуждены заключить, что S''_2, S''_3 и S''_4 касаются одной прямой Σ'', откуда следует, что S'_2, S'_3 и S'_4 касаются одной окружности (или прямой) Σ', проходящей через S'_1, и, следовательно, S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружности (или прямой) Σ или проходят через одну точку Σ.

Примечание. Отметим ещё следующее простое доказательство теоремы задачи 273а), совсем не использующее инверсии. Если четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной прямой, то условие задачи 261 может быть доказано очень просто (см. начало решения задачи 261). Если окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 проходят через одну точку, то это соотношение тоже доказывается несложно (см. решение задачи 262). Если же четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружности Σ, то при помощи расширения можно эту окружность перевести в точку Σ'; окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 перейдут при этом в окружности S'_1, S'_2, S'_3 и S'_4, проходящие через точку Σ'. Теорема задачи 261 в силу свойства В расширения сводится к теореме задачи 262, которая доказывается без помощи инверсии (и доказательство которой значительно проще решения задачи 261, которое опирается на сложное свойство Г инверсии).

274. Докажем, прежде всего, что окружность Σ, проходящая через середины D, E и F сторон AB, AC и CB треугольника ABC (окружность девяти точек треугольника ABC), касается вписанной окружности s треугольника. Действительно, пусть a, b и c — длины сторон треугольника ABC ($a \geqslant b \geqslant c$); P, Q и R — точки касания сторон AB, AC и CB с окружностью s (черт. 445, a). В таком случае длина отрезка касательной, проведённой из точки D к окружности s, равна $DP=AD-AP$. Но

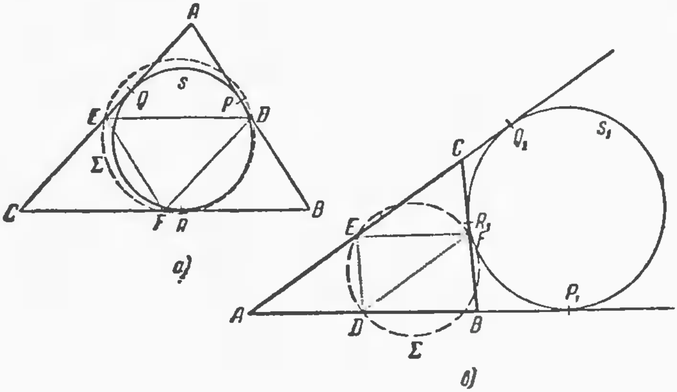
$$AP=\frac{1}{2}(AP+AQ)=\frac{1}{2}(AB-BP+AC-CQ)=$$
$$=\frac{1}{2}(AB+AC-BR-CR)=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)=\frac{c+b-a}{2},$$

откуда

$$DP = AD - AP = \frac{c}{2} - \frac{c+b-a}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Точно так же доказывается, что длины отрезков касательных, проведённых из точек E и F к окружности s, равны $\frac{a-c}{2}$ и $\frac{b-c}{2}$.

Теперь примем точки D, E, F и окружность s за окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 предыдущей задачи (то, что в этом



Черт. 445.

случае три из рассматриваемых четырёх окружностей представляют собой точки, т. е. окружности нулевого радиуса, разумеется, не существенно; доказательство теоремы задачи 273 переносится без изменения и на тот случай, когда некоторые из окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 заменяются точками). В таком случае мы будем иметь:

$$t_{12} = DE = \frac{a}{2},\ t_{13} = DF = \frac{b}{2},\ t_{23} = EF = \frac{c}{2},$$

$$t_{14} = DP = \frac{a-b}{2},\ t_{24} = EQ = \frac{a-c}{2},\ t_{34} = FR = \frac{b-c}{2}.$$

Отсюда видно, что соотношение предыдущей задачи выполняется; действительно,

$$t_{14}t_{23} + t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} = \frac{a-b}{2}\,\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\,\frac{b-c}{2} - \frac{b}{2}\,\frac{a-c}{2} = 0.$$

Следовательно «окружности» D, E и F и окружность s касаются одной окружности Σ, что в нашем случае означает, что окружность Σ, проходящая через точки D, E и F, касается s.

Точно так же показывается, что окружность девяти точек касается вневписанных окружностей s_1, s_2 и s_3 треугольника. Действительно, пусть, например, s_1 есть окружность, вневписанная в угол A треугольника, P_1, Q_1, R_1 — точки касания этой окружности со сторонами треугольника (черт. 445, б). В этом случае длины отрезков касательных, проведённых из точек D, E и F к окружности s_1, равны

$$DP_1 = AP_1 - AD = \frac{1}{2}(AP_1 + AQ_1) - AD =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + BP_1 + AC + CQ_1) - AD =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + AC + BQ_1 + CR_1) - AD =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + AC + BC) - AD = \frac{a+b+c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2};$$
$$EQ_1 = \frac{a+c}{2};$$
$$FR_1 = BR_1 - BF = BP_1 - BF = (AP_1 - AB) - BF =$$
$$= \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right) - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$$

и, следовательно,

$$DE \cdot FR_1 - DF \cdot EQ_1 + EF \cdot DP_1 =$$
$$= \frac{a}{2}\,\frac{b-c}{2} - \frac{b}{2}\,\frac{a+c}{2} + \frac{c}{2}\,\frac{a+b}{2} = 0,$$

что и доказывает, что окружность Σ касается s_1.

Примечание. Используя теорему задачи 273, можно сразу показать, что окружности s, s_1, s_2 и s_3 касаются одной и той же окружности Σ (причём Σ имеет касание одного рода с s_1, s_2 и s_3 и касание другого рода с окружностью s, т. е. касается внешне с s_1, s_2 и s_3 и внутренне с s, или наоборот — внутренне с s_1, s_2 и s_3 и внешне с s; нетрудно убедиться, что на самом деле может иметь место только первая из этих возможностей). Действительно, обозначим касательные расстояния окружностей s и s_1, s и s_2, s и s_3 (длины отрезков общих внутренних касательных) через t_{01}, t_{02}, t_{03}, а попарные касательные расстояния окружностей s_1, s_2 и s_3 (длины отрезков общих внешних касательных) — через t_{12}, t_{13}, t_{23}. В таком случае, очевидно, имеем:

$$t_{01} = RR_1 = BR_1 - BR = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a-b+c}{2} = \frac{b-c}{2}$$

и аналогично

$$t_{02}=\frac{a-c}{2}, \quad t_{03}=\frac{a-b}{2};$$

точно так же, если P_2 есть точка касания окружности s_2 со стороной AB,

$$t_{12}=P_1P_2=AP_1+BP_2+AB=\frac{a+b-c}{2}+\frac{a+b-c}{2}+c=a+b$$

и аналогично

$$t_{13}=a+c, \quad t_{23}=b+c.$$

Отсюда мы видим, что

$$t_{01}t_{23}-t_{02}t_{13}-t_{03}t_{12}=\frac{b-c}{2}(b+c)-\frac{a-c}{2}(a+c)+\frac{a-b}{2}(a+b)=0,$$

откуда следует, что s, s_1, s_2 и s_3 касаются одной окружности Σ. Однако, для того чтобы доказать, что Σ совпадает с окружностью девяти точек треугольника, необходимо пойти по другому пути, который и проведён в решении настоящей задачи.

275. Предположим для определённости, что окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются Σ_1, Σ_2 и Σ_3 таким образом, как изображено на черт. 446. В таком случае, обозначая отрезок общей внешней касательной окружностей S_1 и S_2 через t_{12}, а отрезок общей внутренней касательной этих же окружностей — через $\bar{t}_{12}$ и аналогично для остальных пар окружностей, мы получим, используя теорему задачи 273а):

$$\bar{t}_{13}t_{24}=\bar{t}_{12}t_{34}+\bar{t}_{14}t_{23},$$

ибо окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружности Σ_1;

$$t_{12}\bar{t}_{34}=\bar{t}_{13}t_{24}+t_{14}\bar{t}_{23},$$

ибо S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружность Σ_2;

$$t_{13}\bar{t}_{24}=\bar{t}_{12}t_{34}+t_{14}\bar{t}_{23},$$

ибо S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются одной окружности Σ_3.

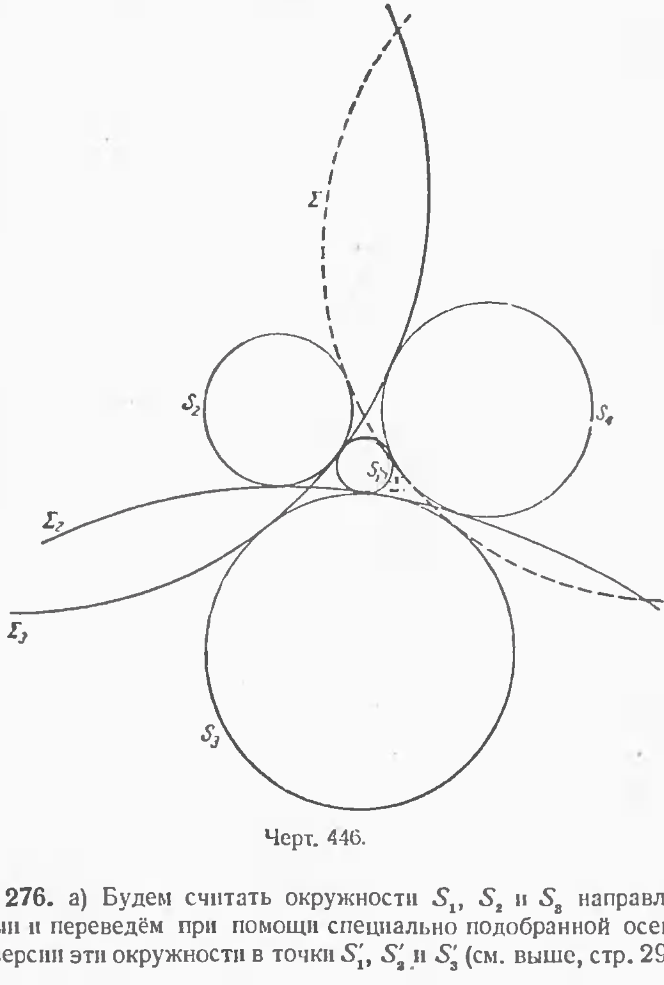
Складывая первое и второе из этих равенств и вычитая третье, получим:

$$\bar{t}_{13}t_{24}+t_{12}\bar{t}_{34}-t_{13}\bar{t}_{24}=\bar{t}_{14}t_{23}+\bar{t}_{13}t_{24},$$

или

$$t_{12}\bar{t}_{34} = t_{13}\bar{t}_{24} + \bar{t}_{14}t_{23}.$$

В силу теоремы задачи 273б) отсюда следует, что S_1, S_2, S_3 и S_4 все касаются ещё некоторой окружности Σ (которая имеет с S_1, S_2 и S_3 одноимённое касание, а с S_4 — касание другого рода).

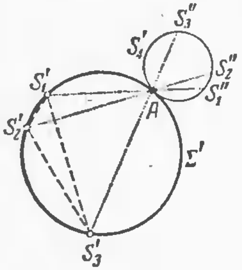


Черт. 446.

276. а) Будем считать окружности S_1, S_2 и S_3 направленными и переведём при помощи специально подобранной осевой инверсии эти окружности в точки S_1', S_2' и S_3' (см. выше, стр. 295).

При этом окружность Σ, касающаяся S_1, S_2 и S_3, перейдёт в окружность Σ', проходящую через точки S_1', S_2' и S_3'. Построив Σ', мы затем найдём и отвечающую ей в нашей осевой инверсии окружность Σ. Так как окружности Σ можно приписать два противоположных направления, то задача при определённом выборе направлений S_1, S_2 и S_3 имеет два решения; всего задача может иметь до восьми решений (ср. с решением задачи 272).

б) Переведём при помощи осевой инверсии окружности S_1, S_2 и S_3 (которые мы будем считать направленными; ср. с решением задачи 273) в три точки S_1', S_2' и S_3' (см. выше, стр. 295); окружность S_4 перейдёт в новую окружность S_4', касающуюся окружности Σ', проходящей через точки S_1', S_2' и S_3' (черт. 447). Касательные расстояния t_{12}, t_{13} и t_{23} переходят в отрезки $S_1'S_2'$, $S_1'S_3'$ и $S_2'S_3'$; касательные расстояния t_{14}, t_{24} и t_{34} — в длины касательных, проведённых из точек S_1', S_2' и S_3', к окружности S_4'.



Черт. 447.

Обозначим точку касания окружностей S_4' и Σ' через A, а точки пересечения прямых AS_1', AS_2' и AS_3' с окружностью S_4' — через S_1'', S_2'' и S_3''. Окружности Σ' и S_4' центрально-подобны с центром подобия в точке A; следовательно,

$$AS_1''=\frac{r_4'}{r'}AS_1', \quad AS_2''=\frac{r_4'}{r'}AS_2', \quad AS_3''=\frac{r_4'}{r'}AS_3',$$

где r_4' и r' — радиусы окружностей S_4' и Σ'. Но, очевидно,

$$t_{14}^2=S_1'A\cdot S_1'S_1'',$$

откуда

$$t_{14}=\sqrt{AS_1'(AS_1'+AS_1'')}=\sqrt{AS_1'\left(AS_1'+\frac{r_4'}{r'}AS_1'\right)}=$$
$$=AS_1'\sqrt{1+\frac{r_4'}{r'}},$$

и аналогично

$$t_{24}=AS_2'\sqrt{1+\frac{r_4'}{r'}}, \quad t_{34}=AS_3'\sqrt{1+\frac{r_4'}{r'}}.$$

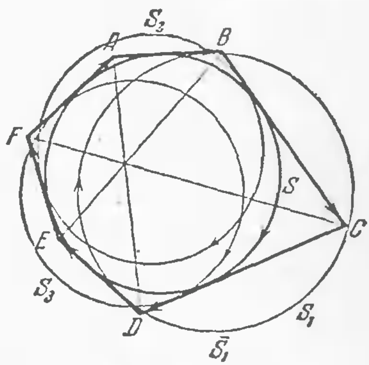
Точки A, S_1', S_2' и S_3' расположены на одной окружности Σ'. Отсюда, используя теорему Птолемея[1]), имеем:

$$AS_1' \cdot S_2'S_3' + AS_3' \cdot S_1'S_2' = AS_2' \cdot S_1'S_3'$$

(здесь мы считаем, что точки A, S_1', S_2' и S_3' расположены на окружности Σ' в том порядке, как это изображено на черт. 447). Умножая последнее равенство на $\sqrt{1+\frac{r_4'}{r'}}$, заменяя $S_1'S_2'$ на t_{12} и т. д., $\sqrt{1+\frac{r_4'}{r'}}\, AS_1'$ на t_{14} и т. д. (см. свойство В осевой инверсии), мы окончательно получим:

$$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = t_{13}t_{24},$$

что и требовалось доказать.



Черт. 448.

277. Настоящая задача близка к задаче 223 из § 1 (двойственна задаче 223). Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, описанный вокруг окружности S; S_1 — произвольная окружность, касающаяся сторон AB и DE этого шестиугольника (черт. 448; окружности и прямые мы здесь считаем направленными, причём направление S может быть выбрано произвольно). Осевая инверсия с центральной прямой BE и направляющей окружностью S переводит окружность S_1 в окружность S_2, касающуюся BC и EF (так как AB переходит в BC, а DE — в EF); последующая осевая инверсия с центральной прямой CF и направляющей окружностью S переводит окружность S_2 в окружность S_3, касающуюся прямых CD и FA, наконец, осевая инверсия с центральной прямой DA и направляющей

[1]) В решении настоящей задачи естественно доказывать теорему задачи 261, не пользуясь обыкновенной инверсией (относительно доказательств, использующих инверсию, см. решения задач 261, 273). То, что нам приходится опираться на теорему Птолемея, не противоречит этому условию, так как теорема Птолемея легко может быть доказана и без помощи инверсии (см., например, решение задачи 86в) из § 1 гл. II второй части книги).

окружностью S переводит окружность S_3 в окружность $\overline{S}_1$, касающуюся прямых DE и AB.

В силу свойства В осевой инверсии все окружности S_1, S_2, S_3 и $\overline{S}_1$ имеют одно и то же касательное расстояние с окружностью S (которую все рассматриваемые осевые инверсии переводят в себя). Но из того, что окружности S_1 и $\overline{S_1}$ обе касаются прямых AB и DE и имеют одинаковое касательное расстояние с окружностью S, следует, что эти окружности совпадают [1]).

Таким образом, мы видим, что прямые BE, CF и DA являются центральными прямыми осевых инверсий, переводящих соответственно S_1 в S_2, S_2 в S_3 и S_3 в S_1. Но отсюда следует, что эти прямые являются попарными радикальными осями этих трёх окружностей (см. доказательство свойства Б осевой инверсии). А если так, то эти три прямые должны пересекаться в одной точке — радикальном центре окружностей S_1, S_2 и S_3 (см. выше, стр. 226), что нам и требовалось доказать.

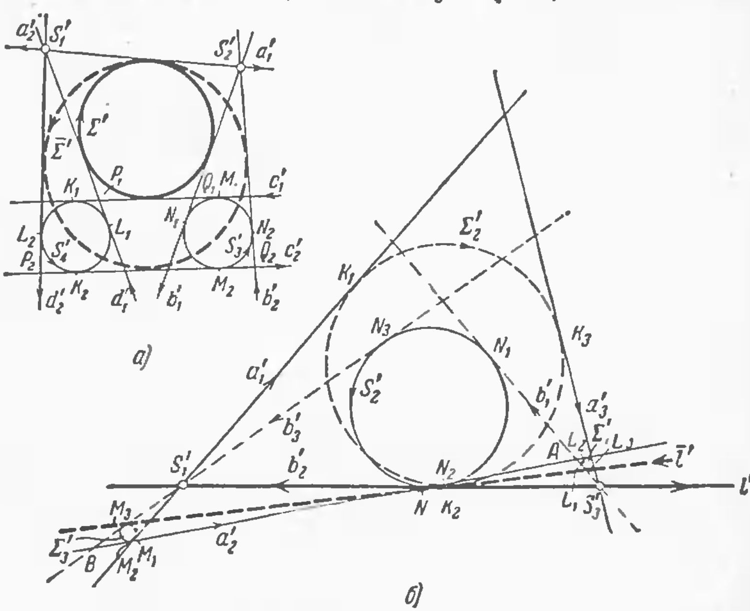
278. а) При помощи осевой инверсии переведём окружности S_1 и S_2, имеющие общие касательные a_1 и a_2, в точки S_1' и S_2' (см. выше, стр. 295; все окружности и прямые считаются направленными). При этом черт. 228, *а* перейдёт в

---

[1]) Для того чтобы утверждать с полной определённостью, что окружности S_1 и $\overline{S}_1$ совпадают, мы должны показать, что касательные расстояния этих окружностей с окружностью S совпадают не только по величине, но и по направлению (см. выше, стр. 300; в противном случае можно было бы думать, что $\overline{S}_1$ касается AB и DE в точках, симметричных точкам касания S_1 с этими же прямыми относительно точек касания AB и DE с окружностью S). Но это последнее утверждение нетрудно доказать. Действительно, в результате трёх последовательных осевых инверсий прямая AB переходит в DE (AB переходит сначала в BC, затем в CD и, наконец, в DE). Касательное расстояние между S и S_2, измеренное по общей касательной BC, противоположно касательному расстоянию окружностей S и S_1, измеренному по AB (см. замечание на стр. 300); касательное расстояние S и S_2, измеренное по CD, имеет то же направление, что и касательное расстояние S и S_1, измеренное по AB; наконец, касательное расстояние S и $\overline{S}_1$, измеренное по DE, противоположно касательному расстоянию S и S_1, измеренному по AB (см. черт. 448). Отсюда следует, что отрезки общей касательной AB между S и S_1 и между S и $\overline{S}_1$ совпадают не только по величине, но и по направлению и, значит, $\overline{S}_1$ совпадает с S_1 (ср. с подстрочным примечанием на стр. 500).

черт. 449, *а*; нам надо доказать, что если прямые a'_1, b'_1, c'_1 и d'_1 касаются одной окружности Σ', то и прямые a'_2, b'_2, c'_2 и d'_2 касаются одной окружности $\overline{\Sigma}'$.

Обозначим точки пересечения рассматриваемых прямых и точки касания их с окружностями S'_3 и S'_4 так, как обозначено



Черт. 449.

на черт. 449, *а*. Так как в четырёхугольник $S'_1P_1Q_1S'_2$ вписана окружность Σ', то $S'_1S'_2+P_1Q_1=S'_1P_1+S'_2Q_1$; прибавляя к левой части последнего равенства отрезки P_1K_1 и Q_1M_1, а к правой части — равные им отрезки P_1L_1 и Q_1N_1, получим:

$$S'_1S'_2+K_1M_1=S'_1L_1+S'_2N_1$$

или

$$S'_1S'_2+K_2M_2=S'_1L_2+S'_2N_2$$

(ибо $K_1M_1=K_2M_2$, $S'_1L_1=S'_1L_2$, $S'_2N_1=S'_2N_2$). Прибавим теперь к левой части полученного равенства отрезки K_2P_2 и M_2Q_2, а к правой части — равные им отрезки L_2P_2 и N_2Q_2; получим:

$$S'_1S'_2+P_2Q_2=S'_1P_2+S'_2Q_2,$$

откуда и следует, что в четырёхугольник $S_1'P_2Q_2S_2'$ можно вписать окружность $\overline{\Sigma}'$ [1]).

б) Произведём осевую инверсию, переводящую окружности S_1 и S_3, имеющие общие касательные l и l_2, в точки S_1' и S_3'; черт. 228, *б* перейдёт при этом в черт. 449, *б* (см. выше, стр. 295; все окружности и прямые считаются направленными). Нам надо доказать, что окружности Σ_1', Σ_2' и Σ_2' этого последнего чертежа касаются одной прямой $\bar{l}'$, т. е. что

$$t_{12}+t_{23}=t_{13},$$

где t_{12} — касательное расстояние Σ_1 и Σ_2 и т. д. (ср. с решением задачи 273б)). Но из черт. 449, *б* имеем:

$$t_{12}=K_3L_3=S_3'K_2-S_3'L_1,\quad t_{23}=K_1M_1=S_1'K_2+S_1'M_3,$$
$$t_{13}=M_2L_2=AB-BM_2+AL_2=AB-BM_3+AL_1,$$

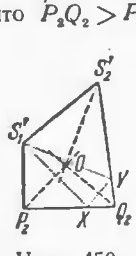
откуда

$$\begin{aligned}
&t_{12}+t_{23}-t_{13}=\\
&\quad=(S_3'K_2+S_1'K_2)-(S_3'L_1-AL_1)+(S_1'M_3+BM_3)-AB=\\
&\quad=S_3'S_1'-S_3'A+S_1'B-AB=\\
&\quad=S_3'S_1'-S_3'A-(AN_2+BN_2)+S_1'B=\\
&\quad=S_2'S_1'-(S_3'A+AN_1)-(BN_3-S_1'B)=\\
&\quad=S_3'S_1'-S_3'N_1-S_1'N_3=S_3'S_1'-S_3'N-S_1'N=0,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать [2]).

---

[1]) Вот одно из простейших доказательств этого. Предположим, что $P_2Q_2>P_2S_1'$; тогда $Q_2S_2'>S_2'S_1'$ (случай, когда все стороны $S_1'P_2Q_2S_2'$ равны, не нуждается в доказательстве). Отложим на P_2Q_2 и $S_2'Q_2$ отрезки $P_2X=P_2S_1'$ и $S_2'Y=S_2'S_1'$ (черт. 450); тогда $Q_2X=Q_2Y$ (ибо $S_1'S_2'+P_2Q_2=$ $=S_1'P_2+S_2'Q_2$) и биссектрисы углов P_2, S_2' и Q_2 четырёхугольника $S_1'P_2Q_2S_2'$ перпендикулярны к сторонам треугольника $S_1'XY$ в их серединах; точка пересечения этих трёх биссектрис равноудалена от всех сторон $S_1'P_2Q_2S_2'$ и, следовательно, является центром вписанной в этот четырёхугольник окружности.



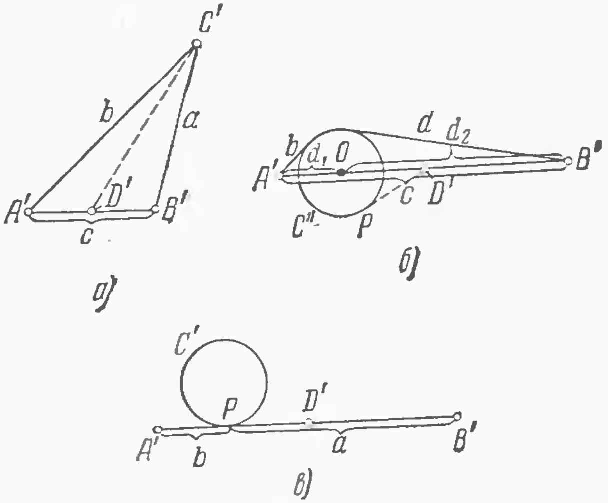
Черт. 450.

Отметим ещё, что наши рассуждения исходят из черт. 449, *а*; чтобы сделать их не зависящими от чертежа, надо привлечь понятие направленных отрезков (см. стр. 24—25 первого тома книги).

[2]) Для того чтобы сделать это рассуждение не зависящим от чертежа, надо ввести в рассмотрение направленные отрезки.

279. Рассмотрим отдельно три случая.

1°. Ось подобия окружностей A, B и C (которые мы будем считать направленными) не пересекает ни одной из них. В таком случае эти окружности при помощи осевой инверсии могут быть переведены в три точки A', B', C'; чертёж задачи перейдёт при этом в черт. 451, *а*. Касательное расстояние x



Черт. 451.

равно длине отрезка $C'D'$, т. е. длине медианы треугольника $A'B'C'$; по известной формуле имеем:

$$x^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

2°. Переведём при помощи осевой инверсии окружности A и B в точки A' и B'; пусть окружность C перешла в окружность C', пересекающую $A'B'$ в точках M и N (если бы C' не пересекала $A'B'$, мы имели бы первый случай). При помощи осевой инверсии с центральной прямой $A'B'$ окружность C' можно перевести в окружность C'' с диаметром MN (см. выше, стр. 294); чертёж задачи перейдёт при этом в черт. 451, *б*, и задача сведётся к тому, чтобы определить длину отрезка $D'P$ касательной, проведённой из середины D' отрезка $A'B'$ к окружности C''. Пусть расстояния $A'O$ и $B'O$

(O — центр C'') равны d_1 и d_2, а радиус C'' равен r; в таком случае

$$d_1^2 - r^2 = b^2 \quad \text{и} \quad d_1^2 - r^2 = a^2,$$

откуда

$$d_1^2 - d_2^2 = b^2 - a^2.$$

Теперь в зависимости от того, лежит ли O между A' и B' (черт. 451, *б*) или вне $A'B'$, имеем [1]:

$$d_1 \pm d_2 = c, \quad d_1 \mp d_2 = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

и в обоих случаях

$$d_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad r^2 = d_1^2 - b^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 - b^2 =$$
$$= \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4c^2}.$$

А так как $D'O = A'D' - A'O = \frac{c}{2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{a^2 - b^2}{2c}$, то окончательно приходим к той же формуле

$$x^2 = D'P^2 = D'O^2 - r^2 =$$
$$= \left(\frac{a^2 - b^2}{2c}\right)^2 - \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4c^2} =$$
$$= \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

3°. Переведём при помощи осевой инверсии A и B в точки A' и B'; пусть окружность C перешла в окружность C', **касающуюся** $A'B'$ в точке P (черт. 451, *в*). Задача сводится к тому, чтобы определить длину отрезка $D'P$ касательной, проведённой из середины D' отрезка $A'B'$ к окружности C'. Очевидно, $A'P = b$, $B'P = a$ и, например, для случая черт. 451, *в*, имеем [1]:

$$x = D'P = A'D' - A'P = \frac{c}{2} - b.$$

[Отметим, что и этот случай тоже охватывается формулой $x^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$: действительно, здесь $c = a + b$,

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 574.

и поэтому $\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)=\frac{1}{4}\left[2a^2+2b^2-(a+b)^2\right]=$
$=\frac{1}{4}(a-b)^2=\frac{1}{4}\left[(c-b)-b\right]^2=\left(\frac{c}{2}-b\right)^2\Big]$.

Примечание. Случай 1° характеризуется тем, что больший из отрезков a, b, c меньше суммы двух других (из отрезков a, b, c можно построить треугольник; см. черт. 451, *а*); случай 2° — тем, что больший из отрезков a, b, c больше суммы двух других; наконец, в случае 3° больший из отрезков a, b, c равен сумме двух других.

280. Рассмотрим отдельно те же три случая, которые фигурировали в решении предыдущей задачи.

1°. Три окружности A, B, C можно осевой инверсией перевести в три точки A', B', C'. При этом черт. 230 переходит в черт. 452, *а*, и все утверждения задачи сразу следуют из свойств медиан треугольника.

2°. Двумя осевыми инверсиями окружности A, B, C можно перевести в две точки A', B' и окружность C'', центр O которой лежит на прямой $A'B'$; при этом черт. 230 перейдёт в черт. 452, *б*. Пусть M_1, M_2 и M_3 — три окружности, касающиеся касательных, проведённых из A' к E'', из B' к F'' и из D' к C'', и делящие отрезки этих касательных в отношении 2:1 (считая от A', B' и C''); нам надо доказать, что эти три окружности совпадают между собой.

Обозначим центры E'', F'', M_1, M_2 и M_3 через $\overline{O}$, o, O_1, O_2 и O_3, а радиусы этих же окружностей — через $\overline{r}$, r, r_1, r_2 и r_3; далее пусть $A'O=d_1$ и $B'O=d_2$[1]), а $A'B'=c$, кроме того, радиус C'' обозначим R. Окружности E'' и C'' центрально-подобны с центром подобия B' и коэффициентом подобия 1:2; отсюда имеем $B'\overline{O}=\frac{d_2}{2}$, $\overline{r}=\frac{R}{2}$. Окружности E'' и M_1 центрально-подобны с центром подобия A' и коэффициентом подобия 2:3; следовательно,

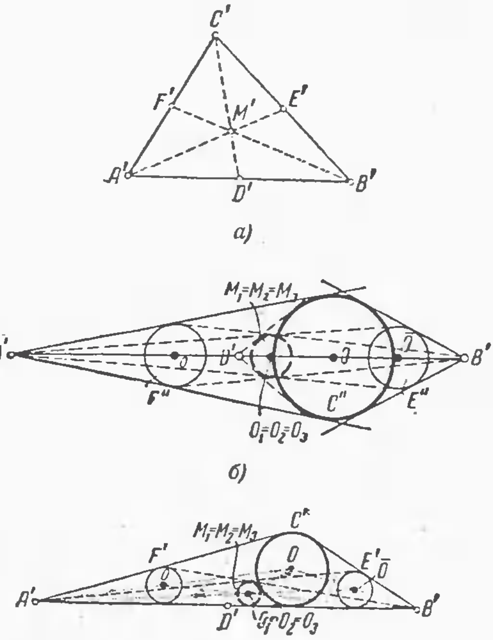
$$A'O_1=\frac{2}{3}A'\overline{O}=\frac{2}{3}\left(c-\frac{d_2}{2}\right)=\frac{2}{3}c-\frac{d_2}{3},\quad r_1=\frac{2}{3}\overline{r}=\frac{1}{3}R.$$

Точно так же получаем:

$$B'O_2=\frac{2}{3}c-\frac{d_1}{3},\quad r_2=\frac{1}{3}R;$$

[1]) См. сноску [2]) на стр. 574.

отсюда уже вытекает, что окружности M_1 и M_2 совпадают (ибо их радиусы равны, а центры совпадают, так как $A'O_1+B'O_2=\frac{4}{3}c-\frac{d_1+d_2}{3}=c=A'B'$). Наконец, окружности



Черт. 452.

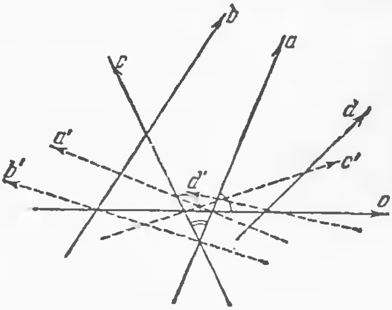
M_3 и C'' центрально-подобны с центром подобия D' и коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$; отсюда

$$r_3=\frac{R}{3},\quad D'O_3=\frac{1}{3}D'O=\frac{1}{3}\left(d_1-\frac{c}{2}\right)=\frac{d_1}{3}-\frac{c}{6}$$

и, значит, M_3 совпадает с M_1 и с M_2 (ибо их радиусы равны, а центры совпадают, так как $A'O_3=A'D'+D'O_3=$ $=\frac{c}{2}+\frac{c-d_2}{3}-\frac{c}{6}=\frac{2}{3}c-\frac{d_2}{3}\Big)$.

3°. Окружности A, B и C можно осевой инверсией перевести в точки A', B' и окружность C', касающуюся прямой

$A'B'$; при этом черт. 230 перейдёт в черт. 452, *в*. Окружности M_1, M_2 и M_3 определим, как выше; нам надо доказать, что они совпадают. Сохраним прежние обозначения для центров и радиусов окружностей E', F', M_1, M_2 и M_3. В точности как в случае 2°, показывается, что $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{R}{3}$; таким образом, остаётся только убедиться, что центры этих окружностей совпадают. Но, очевидно, точки O_1, O_2 и O_3 делят в отношении $2:1$ медианы $A'\overline{O}$, $B'o$ и OD' треугольника $A'B'O$ (где O — центр C'); поэтому эти три точки совпадают с одной точкой пересечения медиан треугольника $A'B'O$.



Черт. 453.

281. Если o — центральная прямая осевой инверсии, то $\widehat{ac} = \widehat{ao} - \widehat{co}$ и т. д. (см. черт. 453; углы $\widehat{ac}$ и т. д. здесь берутся со знаком в соответствии с соглашением на стр. 286). Таким образом

$$\sin\frac{\widehat{ac}}{2} = \sin\frac{\widehat{ao} - \widehat{co}}{2} = \sin\frac{\widehat{ao}}{2}\cos\frac{\widehat{co}}{2} - \sin\frac{\widehat{co}}{2}\cos\frac{\widehat{ao}}{2} =$$

$$= \cos\frac{\widehat{ao}}{2}\cos\frac{\widehat{co}}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\widehat{ao}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{co}}{2}\right) \text{ и т. д.}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\sin\frac{\widehat{ac}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bc}}{2}} : \frac{\sin\frac{\widehat{ad}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bd}}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{ao}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{co}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{bo}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{co}}{2}} : \frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{ao}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{do}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{bo}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{do}}{2}}.$$

Аналогично выводим:

$$\frac{\sin\frac{\widehat{a'c'}}{2}}{\sin\frac{\widehat{b'c'}}{2}} : \frac{\sin\frac{\widehat{a'd'}}{2}}{\sin\frac{\widehat{b'd'}}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{a'o}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{c'o}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{b'o}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{c'o}}{2}} : \frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{a'o}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{d'o}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{b'o}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\widehat{d'o}}{2}}.$$

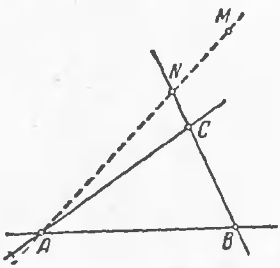
Но в силу определения осевой инверсии $\operatorname{tg}\frac{\widehat{a'o}}{2}=\frac{k}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{ao}}{2}}$ и т. д.

Подставив все эти выражения в последнюю формулу, мы без труда убеждаемся, что

$$\frac{\sin\frac{\widehat{a'c'}}{2}}{\sin\frac{\widehat{b'c'}}{2}}:\frac{\sin\frac{\widehat{a'd'}}{2}}{\sin\frac{\widehat{b'd'}}{2}}=\frac{\sin\frac{\widehat{ac}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bc}}{2}}:\frac{\sin\frac{\widehat{ad}}{2}}{\sin\frac{\widehat{bd}}{2}},$$

что и требовалось доказать.

282. Если последовательность $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ осевых инверсий переводит две различные точки A и B снова в точки A' и B', то она переводит все точки прямой AB снова в точки. Действительно, в этом случае две (направленные) прямые l_1 и l_2, проходящие через A и B и отличающиеся только направлением, переходят в прямые l'_1 и l'_2, проходящие через A' и B' и отличающиеся только направлением; так как никакая окружность радиуса, отличного от нуля, не может касаться одновременно l'_1 и l'_2, то все точки прямой AB переходят в точки прямой $A'B'$ (ср. выше, стр. 294—295). Отсюда следует, что если последовательность осевых инверсий переводит три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, снова в точки, то она переводит все точки плоскости снова в точки: действительно, если M — произвольная точка и N — точка пересечения AM с BC (черт. 454), то N переходит в точку, так как N лежит на прямой BC, и M переходит в точку, так как M лежит на прямой AN. Таким образом, могут представиться следующие четыре случая:



Черт. 454.

Последовательность осевых инверсий $I_1, I_2, \ldots, I_n$

1° не переводит в точку ни одну точку плоскости;

2° переводит в точку единственную точку O (ниже будет показано, что этот случай является невозможным);

3° переводит в точки точки некоторой прямой o (и только эти точки);

4° переводит в точки все точки плоскости.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы выяснить, какой именно из этих случаев имеет место и если имеет место случай 3° (который является общим: случаи 1° и 4° представляют собой исключения), отыскать прямую o — искомое геометрическое место.

Рассмотрим теперь произвольную прямую AB плоскости. Две (направленные) прямые l_1 и l_2, проходящие через точки A и B и отличающиеся только направлением, переходят в какие-то две новые прямые l_1' и l_2'. Разберём отдельно все представляющиеся возможности.

1) Прямые l_1' и l_2' тоже *отличаются только направлением*. Тогда все точки прямой AB переходят в точки, принадлежащие совпадающим по положению на плоскости прямым l_1' и l_2'. Поэтому здесь может иметь место лишь случай 3° (причём прямая o совпадает с AB) или 4°. Для того чтобы выяснить, какой из этих случаев имеет место, достаточно проверить, переходит ли произвольно выбранная точка C, не лежащая на прямой AB, в окружность или в точку.

2) Направленные прямые l_1' и l_2' *параллельны*. Эта возможность может быть отвергнута сразу, так как точки прямой AB должны перейти в окружности, касающиеся одновременно l_1' и l_2', в то время как (направленных) окружностей, касающихся параллельных прямых, вовсе не существует.

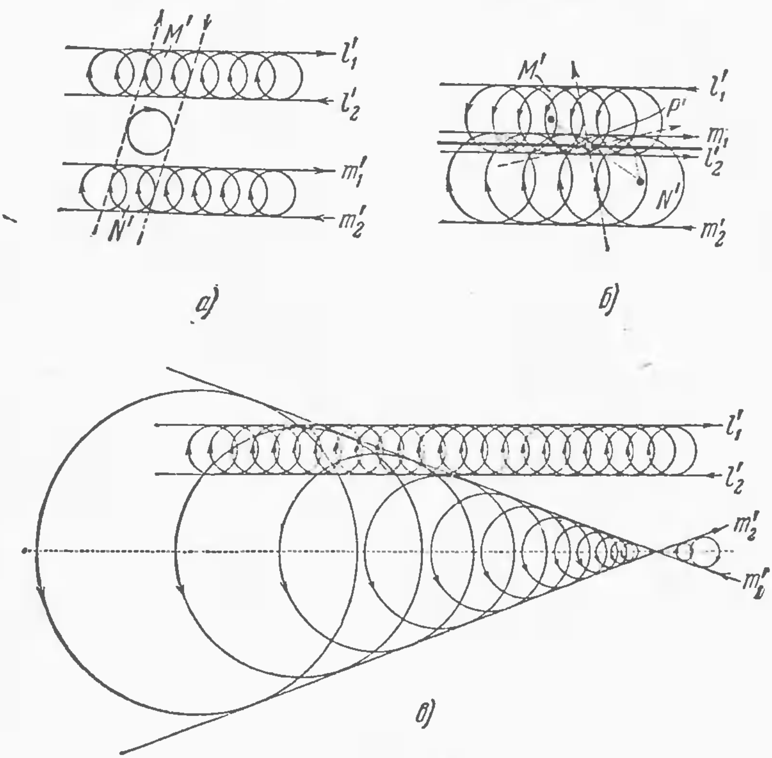
3) Прямые l_1' и l_2' *противопараллельны*; точки прямой AB переходят в окружности одинакового радиуса, касающиеся l_1' и l_2' (черт. 455). Пусть CD — произвольно выбранная прямая, параллельная AB (и отличная от AB); прямые m_1 и m_2, проходящие через точки C и D и отличающиеся только направлением, переходят в прямые m_1' и m_2'.

Далее рассмотрим ряд случаев.

а. Если m_1' и m_2' *отличаются только направлением*, то мы снова приходим к возможности 1); здесь имеет место случай 3° и o совпадает с CD.

б. Параллельными прямые m_1' и m_2' быть не могут (см. выше случай 2)).

в. Если m_1' и m_2' *противопараллельны*, то точки прямой CD переходят в окружности постоянного радиуса, касающиеся m_1' и m_2'. При этом линия центров этих окружностей должна быть параллельна линии центров окружностей, в которые переходят точки AB: в противном случае можно было бы найти точку прямой AB и точку прямой CD, переходящие в концентрические окружности, что противоречит тому, что



Черт. 455.

касательное расстояние между этими окружностями должно быть равно расстоянию между исходными точками (и, значит, должно существовать). Далее, если радиусы последних окружностей равны (по величине и знаку) радиусам окружностей, в которые переходят точки прямой AB (черт. 455, *а*), то точки любой прямой MN, где M — точка AB, N — точка CD, переходят в окружности, имеющие общие касательные с окружностями M' и N' одинакового радиуса, т. е. в окружности того же радиуса; следовательно, все точки плоскости переходят в окружности одного радиуса и, значит, имеет место случай 1°. Если же точки прямой AB и точки прямой CD переходят в окружности разного радиуса (черт. 455, *б*), то точки любой прямой MN, где M — точка AB, N — точка CD, переходят в окружности, имеющие общие касательные с окружностями M' и N' разных радиусов; отсюда следует, что одна из точек P прямой MN переходит в точку P'; положение этой точки P определяется тем, что

$$\frac{MP}{NP}=\frac{\text{касательное расстояние окружности } M' \text{ и точки } P'}{\text{касательное расстояние окружности } N' \text{ и точки } P'}=$$

$$=\frac{\text{радиус } M'}{\text{радиус } N'}$$

(см. черт. 455, *б*). Геометрическим местом всех таких точек P является прямая o, параллельная AB и CD; таким образом, мы снова приходим к случаю 3°.

г. Наконец, легко показать, что **пересекающимися** прямыми m_1' и m_2' быть не могут. Действительно, пусть точки прямой CD переходят в окружности, касающиеся пересекающихся прямых m_1' и m_2'. Каждая из этих окружностей должна иметь определённое касательное расстояние с любой из окружностей, касающихся l_1' и l_2' (это касательное расстояние равно расстоянию между соответствующими точками). Поэтому линия центров всех этих окружностей (биссектриса угла, образованного m_1' и m_2') должна быть параллельна l_1' и l_2' — иначе среди этих окружностей нашлась бы окружность, концентрическая с одной из окружностей, касающихся l_1' и l_2'. Но и в этом последнем случае можно найти две окружности, одну, касающуюся m_1' и m_2', и вторую, касающуюся l_1' и l_2', не имеющие касательного расстояния, — для доказательства достаточно заметить, что окружности, касающиеся m_1' и m_2', могут быть сколь угодно большими и поэтому некоторые из них заключают внутри себя окружности, касающиеся l_1' и l_2' (черт. 455, *в*).

4) Прямые l_1' и l_2' **пересекаются**. В таком случае определённая точка P прямой AB переходит в точку P' пересечения l_1' и l_2'; точку P легко найти, так как расстояние её от A равно касательному расстоянию точки P' и окружности A' (в которую переходит точка A). Рассмотрим затем какую-либо другую прямую CD, не проходящую через точку P; проходящие через C и D прямые m_1 и m_2 перейдут в пере-

секающиеся прямые m'_1 и m'_2 (ибо предыдущий анализ показывает, что если прямые l'_1 и l'_2 пересекаются, то прямые m'_1 и m'_2 уже не могут ни отличаться только направлением, ни быть противопараллельными). Таким образом, мы найдём ещё одну точку Q, переходящую в точку Q'; поэтому здесь имеет место случай 3° и o совпадает с PQ.

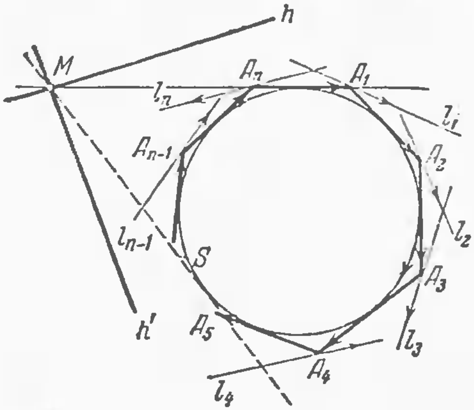
283. Эта задача близка к задаче 231 (двойственна задаче 231). Предположим, что наша задача решена и $A_1A_2A_3 \dots A_n$ — искомый n-угольник, вершины $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ которого лежат на заданных прямых $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{n-1}, l_n$ (черт. 456). Все прямые и окружности, фигурирующие в решении этой задачи, мы будем считать направленными; при этом направления окружности S и прямых $l_1, l_2, \dots, l_n$ можно выбрать произвольно. Произведём теперь последовательно n осевых инверсий с центральными прямыми $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n$ и одной и той же направляющей окружностью S. Эти инверсии переведут сторону A_nA_1 n-угольника последовательно в A_1A_2, $A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ и, наконец, снова в A_nA_1. Таким образом, мы видим, что совокупность n известных осевых инверсий переводит прямую A_nA_1 в себя. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти касательную A_nA_1 к окружности S, которую оставляет на месте известная последовательность осевых инверсий. Далее можно идти разными путями.

Первое решение (близкое к решению задачи 231). Все точки, которые переводятся нашей последовательностью осевых инверсий снова в точки, лежат на одной прямой h, которая переводится в прямую h' (см. задачу 282) [1]. Пусть M

[1]) Если наша последовательность осевых инверсий переводит все точки плоскости снова в точки, то это есть преобразование подобия (см. теорему 3 на стр. 314). Так как это преобразование подобия должно переводить окружность S в себя, то это есть движение, а именно вращение вокруг центра O окружности S (в этом случае задача не имеет решений), или симметрия относительно диаметра d окружности S (в этом случае A_1A_n есть касательная s, перпендикулярная к d, и задача имеет два решения). Если последовательность осевых инверсий не переводит ни одной точки снова в точку, то она переводит все точки в окружности одного радиуса (см. решение задачи 282); в силу той же теоремы 3 отсюда вытекает, что это есть преобразование подобия, сопровождаемое расширением. Так как это преобразование должно переводить s в себя, то это есть центрально-подобное вращение с центром O, сопровождаемое расширением; при этом задача не имеет решения, если угол поворота отличен от нуля, и неопределённа в противном случае.

есть точка пересечения h и A_1A_n. В результате n осевых инверсий эта точка перейдёт в точку прямой h'; так как A_1A_n переходит в себя, то это будет точка M' пересечения h' и A_1A_n. Далее аналогично решению задачи 231 приходится отдельно рассмотреть два случая.

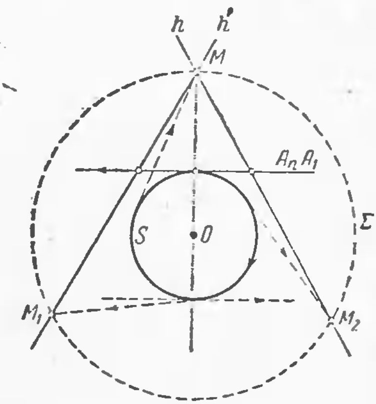
1°. n есть число чётное. В этом случае касательное расстояние M и S по величине и направлению равно касательному расстоянию M' и S (см. мелкий шрифт на стр. 300).



Черт. 456.

Следовательно, M совпадает с M'; поэтому это есть точка пересечения h и h'. Проведя из M касательную к S, мы найдём сторону A_1A_n искомого n-угольника. Если M лежит вне S, задача имеет два решения; если M лежит на S, — одно решение; если M лежит внутри S или $h \| h'$, задача вовсе не имеет решений. В частном случае, когда h совпадает с h', задача является неопределённой.

2°. n есть число нечётное. В этом случае касательное расстояние M и S равно касательному расстоянию M' и S по величине, но противоположно по направлению; таким образом, задача сводится к тому, чтобы найти такую касательную A_nA_1 окружности S, отрезок которой между известными прямыми h и h' делится точкой касания A_1A_n с S пополам (черт. 457). Эта задача в общем случае является весьма сложной; однако в нашем случае она весьма облегчается тем, что *прямые h и h' равноотстоят от центра O окружности S*. Действительно, при n нечётном точка M пересечения h и h' не отвечает сама себе: наши n осевых инверсий переводят её в некоторую точку M_1 прямой h' и переводят в M некоторую точку M_2 прямой h. В силу свойства В осевой инверсии (касательные) расстояния M_2M и MM_1 равны; с другой стороны, касательное расстояние M_2 и S равно касательному расстоянию M и S и равно касательному расстоянию M_1 и S. Отсюда следует, что M_2, M и M_1 лежат на окружности Σ, концентрической с S, и прямые M_1M и MM_2 равноудалены от центра S (ср. с текстом, напечатанным мелким шрифтом на стр. 515). Из соображений симметрии следует, что искомая прямая A_nA_1 перпендикулярна к биссектрисе MO угла между h и h' (черт. 457). Задача имеет два решения.



Черт. 457.

Второе решение (близкое к решению задачи 259). Пусть p, q, r — три произвольные (направленные) прямые, которые наши n последовательных осевых инверсий переводят в (направленные) прямые p', q', r'; искомую прямую A_1A_n, которая переходит сама в себя, обозначим через x. Так как каждая осевая инверсия сохраняет двойное отношение четырёх прямых (см. задачу 281), мы имеем:

$$\frac{\sin\frac{\widehat{pr}}{2}}{\sin\frac{\widehat{qr}}{2}}:\frac{\sin\frac{\widehat{px}}{2}}{\sin\frac{\widehat{qx}}{2}}=\frac{\sin\frac{\widehat{p'r'}}{2}}{\sin\frac{\widehat{q'r'}}{2}}:\frac{\sin\frac{\widehat{p'x}}{2}}{\sin\frac{\widehat{q'x}}{2}}.$$

Пусть теперь o — произвольная (направленная) прямая плоскости. Последнюю формулу можно переписать также в следующем виде:

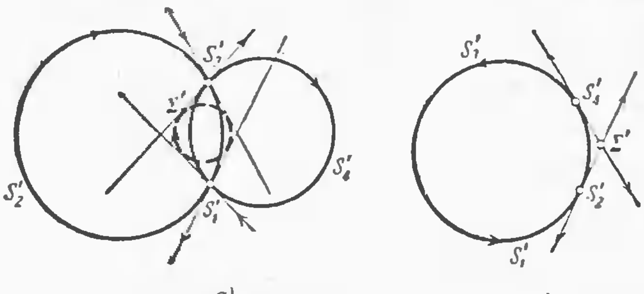
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{po}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{ro}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{qo}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{ro}}{2}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{po}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{xo}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{qo}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{xo}}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{p'o}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{r'o}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{q'o}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{r'o}}{2}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{p'o}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{xo}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{q'o}}{2}-\operatorname{tg}\frac{\widehat{xo}}{2}} \qquad (*)$$

(ср. с решением задачи 281). Но полученное равенство есть уравнение второго порядка относительно неизвестной величины $\operatorname{tg}\frac{\widehat{xo}}{2}$. Решив это уравнение, мы найдём $\operatorname{tg}\frac{\widehat{xo}}{2}$, а следовательно, и угол $\widehat{xo}$; зная направление (направленной) прямой x, касающейся (направленной) окружности S, мы без труда найдём саму эту прямую. После этого легко строятся и все остальные стороны искомого n-угольника. Построение осуществляется циркулем и линейкой.

Задача имеет два, одно или ни одного решения в зависимости от числа вещественных корней уравнения (*) (предоставляем читателям самостоятельно выяснить, почему решение не зависит от выбора направлений окружности S и прямых l_1, l_2, ..., l_n).

284. В соответствии с теоремой 2 (стр. 304) рассмотрим отдельно три случая.

1°. Окружности S_1 и S_3 имеют две общие касательные (все окружности и прямые мы считаем направленными). В этом случае при помощи осевой инверсии их



а) *б)*

Черт. 458.

можно перевести в точки S_1' и S_3'; черт. 233 перейдёт при этом в черт. 458, *а*. То, что касательные к окружностям S_2' и S_4' этого чертежа в точках S_1' и S_3' касаются одной окружности Σ', следует из соображений симметрии.

2°. Окружности S_1 и S_3 не имеют общих касательных. В этом случае при помощи осевой инверсии их можно перевести в окружности S_1' и S_3', отличающиеся только направлением; черт. 233 перейдёт при этом в черт. 458, *б* (окружность отличного от нуля радиуса не может касаться одновременно S'_1 и S'_3). Касательные к окружностям S'_1 и S'_3 в точках S'_2 и S'_4 отличаются только направлениями; они пересекаются в точке Σ', в которую переводит рассматриваемая осевая инверсия окружность Σ, касающуюся четырёх общих касательных к исходным окружностям S_1, S_2, S_3 и S_4, проходящих через точки их касания.

3°. Случай, когда окружности S_1 и S_3 касаются, не представляет интереса, поскольку при этом все четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 должны касаться в одной точке и четыре общие касательные, фигурирующие в условии задачи, все совпадут между собой. [Если каждые две из трёх направленных окружностей S_1, S_2 и S_3 касаются между собой, то три точки касания обязательно совпадают — никакие другие случаи попарного касания трёх ненаправленных окружностей не могут удовлетворить условиям касания направленных окружностей.]

285. а) Будем считать окружности S_1 и S_2 и прямую l направленными и рассмотрим отдельно три возможных случая.

1°. Окружности S_1 и S_2 не имеют общих касательных. В этом случае S_1 и S_2 можно при помощи подходяще выбранной осевой инверсии перевести в окружности S'_1 и S'_2, отличающиеся только направлением (см. теорему 2 на стр. 304); пусть l при этом перейдёт в прямую l'. Искомая окружность Σ перейдёт в окружность Σ', касающуюся S'_1, S'_2 и l' (или в точку Σ', общую S'_1, S'_2 и l'). Но окружность отличного от нуля радиуса не может касаться одновременно двух окружностей, отличающихся только направлением; следовательно, Σ' есть точка пересечения S'_1 и l'. Найдя Σ', мы построим затем и искомую окружность Σ, отвечающую точке Σ' в рассматриваемой осевой инверсии.

Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

2°. Окружности S_1 и S_2 имеют одну общую касательную (касаются). В этом случае при помощи осевой инверсии S_1 и S_2 можно перевести в точку S'_1 и проходящую через неё окружность S'_2; пусть l перейдёт при этом в некоторую прямую l'. Искомая окружность Σ перейдёт в окружность Σ', касающуюся S'_2 в точке S'_1 и касающуюся l'; её нетрудно построить (центр Σ' лежит на прямой OS'_1, где O — центр

S_2', и на биссектрисе угла, образованного l' и касательной к S_2' в точке S_1'). Задача может иметь до двух решений; если l' касается S_2' в S_1' (т. е. S_1, S_2 и l касаются в одной точке), то она неопределённа.

3°. Окружности S_1 и S_2 имеют две общие касательные. В этом случае S_1 и S_2 можно осевой инверсией перевести в две точки S_1' и S_2'; искомая окружность Σ перейдёт в окружность Σ', проходящую через точки S_1' и S_2' и касающуюся известной прямой l'. Эту окружность нетрудно построить (см., например, решение задачи 247а)); задача может иметь до двух решений.

Так как направления S_1, S_2 и l можно выбирать разными способами, то задача, если её решение определённо, может иметь до восьми решений (ср. с решением задачи 271).

б) Первое решение (близкое к первому решению задачи 237а) из § 2). Будем считать окружности S_1, S_2 и S_3 направленными и рассмотрим отдельно ряд случаев.

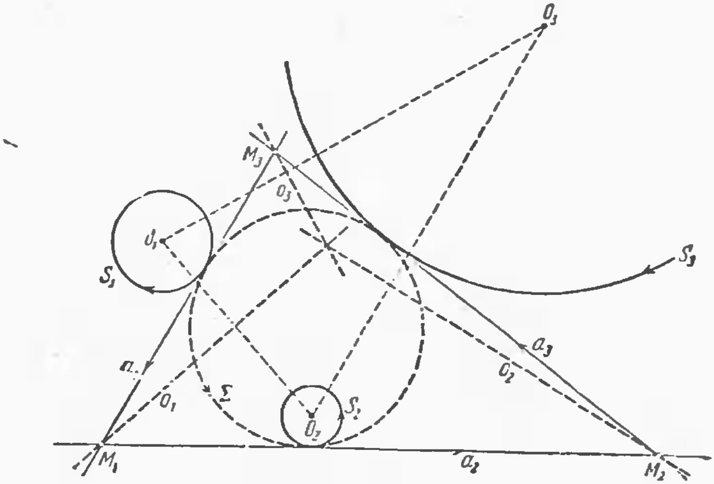
1°. Окружности S_1 и S_2 не имеют общих касательных. В этом случае S_1 и S_2 можно осевой инверсией перевести в две окружности S_1' и $\bar{S}_2'$, отличающиеся только направлением. Если S_3 перейдёт при этом в S_3', то искомая окружность Σ перейдёт в точку Σ' пересечения S_1' и S_3' (ср. с решением задачи а)). Задача может иметь до двух решений.

2°. Окружности S_1 и S_2 имеют одну общую касательную (касаются). В этом случае S_1 и S_2 можно осевой инверсией перевести в точку S_1' и проходящую через неё окружность S_2'; пусть S_3 перейдёт при этом в S_3'. Искомая окружность Σ перейдёт в окружность Σ', касающуюся S_2' в точке S_1' и касающуюся окружности S_3'; её нетрудно построить. [Центр Σ' лежит на прямой OS_1', где O — центр S_2'; он равноудалён от центра $\bar{O}$ окружности S_3' и от такой точки A прямой OS_1', что $S_1'A$ равно радиусу S_3'.] Задача может иметь до двух решений.

3°. Окружности S_1' и S_2' имеют две общие касательные. Осевой инверсией S_1 и S_2 можно перевести в точки S_1' и S_2'; пусть S_3 перейдёт при этом в окружность S_3'. Искомая окружность Σ перейдёт в окружность Σ', проходящую через точки S_1' и S_2' и касающуюся окружности S_3' (см. задачу 247а)). Задача может иметь до двух решений.

Так как направления S_1, S_2 и S_3 можно выбирать по-разному, то всего задача может иметь до восьми решений.

Второе решение (близкое ко второму решению задачи 237а)). Пусть Σ — искомая окружность, a_1, a_2, a_3 — общие касательные Σ и S_1, Σ и S_2, Σ и S_3; все окружности и прямые считаем направленными (черт. 459). Очевидно, что прямые a_1 и a_2 пересекаются в точке M_1 радикальной оси o_1 окружностей S_1 и S_2 (ибо касательные, проведённые из M_1



Черт. 459.

к S_1 и к S_2, равны, так как они одновременно являются касательными, проведёнными из M к Σ) и осевая инверсия с осью o_1, переводящая S_1 в S_2, переводит a_1 в a_2. Точно так же осевая инверсия, осью которой служит радикальная ось o_2 окружностей S_2 и S_3, переводящая S_2 в S_3, переводит a_2 в a_3; осевая инверсия, осью которой служит радикальная ось o_3 окружностей S_3 и S_1, переводящая S_3 в S_1, переводит a_3 в a_1. Таким образом, прямая a_1 переходит в себя в результате трёх последовательно произведенных осевых инверсий. Прямую a_1 можно найти аналогично решению задачи 283; найдя a_1, мы затем без труда построим искомую окружность Σ. Задача нахождения a_1 может иметь до двух решений; так как направления S_1, S_2 и S_3 можно выбирать разными способами, то всего задача может иметь до восьми решений.

286. а) Произведём осевую инверсию, переводящую окружности S_1 и S_2 в окружности S_1' и S_2', отличающиеся только направлением (см. теорему 2 на стр. 304); пусть S_3 перейдёт при этом в некоторую окружность (или точку!) S_3'. Искомая окружность Σ перейдёт в окружность Σ', такую, что касательные расстояния Σ' и S_1', Σ' и S_2', Σ' и S_3' равны a, b и c. Пусть d — расстояние между центрами Σ' и S_1', r — (неизвестный!) радиус Σ', r_1 — радиус S_1' (и $-r_1$ — радиус S_2'). Из формулы (*) стр. 265 следует

$$d^2-(r-r_1)^2=a^2,\quad d^2-(r+r_1)^2=b^2.$$

Отсюда находим

$$(r+r_1)^2-(r-r_1)^2=4rr_1=a^2-b^2;$$

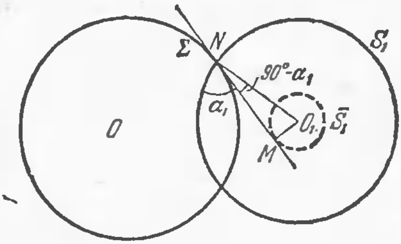
это соотношение позволяет определить радиус r окружности Σ.

Произведём теперь сжатие на величину r. Пусть окружности S_1', S_2' и S_3' перейдут при этом в окружности S_1'', S_2'' и S_3''; окружность Σ' перейдёт в точку Σ''. Точку Σ'', касательные расстояния которой и трёх известных окружностей S_1'', S_2'' и S_3'' имеют данные значения a, b и c, легко найти, если воспользоваться тем, что геометрическое место точек, касательное расстояние которых и некоторой окружности S постоянно, есть окружность $\overline{S}$, концентрическая с S (для того чтобы построить $\overline{S}$, достаточно отложить на какой-либо касательной S отрезок данной длины); затем построим окружность Σ' и, наконец, искомую окружность Σ. Задача может иметь два, одно или ни одного решения или быть неопределённой; так как направления окружностей S_1, S_2 и S_3 можно выбирать по-разному, то задача, если она не является неопределённой, может иметь до восьми решений.

Примечание. Осевая инверсия может быть использована для решения задачи и в том случае, если S_1 не лежит внутри S_2. Предоставляем читателю самостоятельно разобраться в этом вопросе.

б) Настоящая задача легко может быть сведена к предыдущей. Действительно, пусть некоторая окружность Σ пересекает известную окружность S_1 под углом α_1, N есть точка пересечения окружностей S_1 и Σ; O и O_1 — их центры (черт. 460). Касательная NM к окружности Σ в точке N образует с радиусом O_1N окружности S_1 известный угол $90°-\alpha_1$; расстояние O_1M точки O_1 от этой касательной тоже известно

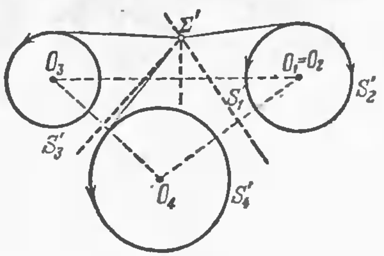
($O_1M = r_1 \cos \alpha_1$, где r_1 — радиус S_1). Проведём окружность $\overline{S}_1$ с центром O_1 и радиусом $O_1M = r_1 \cos \alpha$. В таком случае отрезок MN общей касательной окружностей $\overline{S}_1$ и Σ равен $r_1 \sin \alpha_1$, т. е. касательное расстояние окружности Σ и окружности $\overline{S}_1$ (которую можно построить, если окружность S_1 и угол α_1 нам известны) равно $r_1 \sin \alpha_1$.



Черт. 460.

Таким образом, мы видим, что окружность Σ, пересекающая три заданные окружности S_1, S_2 и S_3 радиусов r_1, r_2 и r_3 под данными углами α_1, α_2 и α_3, имеет известные касательные расстояния $r_1 \sin \alpha_1$, $r_2 \sin \alpha_2$ и $r_3 \sin \alpha_3$ с тремя другими известными окружностями $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$ (концентрическими окружностями S_1, S_2 и S_3); при этом, если S_1 лежит внутри S_2 и $90° > \alpha > \beta$, то $\overline{S}_1$ лежит внутри $\overline{S}_2$, и решение задачи б) сводится к решению задачи а).

287. Окружности S_1 и S_2 при помощи осевой инверсии можно перевести в окружности S_1' и S_2', отличающиеся только направлением (см. теорему 2 на стр. 304; все окружности S_1, S_2, S_3, S_4 мы считаем здесь направленными). Пусть при этом окружности S_3 и S_4 перейдут в окружности S_3' и S_4', а искомая окружность Σ — в некоторую новую окружность (или точку) Σ' (черт. 461). Из того, что касательные расстояния Σ' и окружностей S_1' и S_2', отличающихся только направлением, равны между собой, следует, что Σ' есть **точка** («окружность нулевого радиуса»; см. формулу (*) на стр. 265). Так как касательные расстояния этой точки и окружностей S_1' и S_3' равны, то Σ' принадлежит радикальной оси r_1 окружностей S_1' и S_3' (см. § 3); точно так же доказывается, что Σ' принадлежит



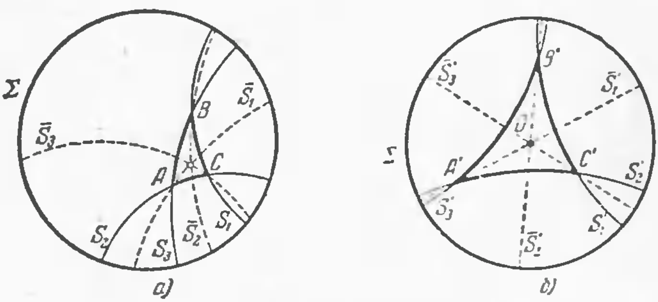
Черт. 461.

радикальной оси r_2 окружностей S_2' и S_4'. Следовательно, Σ' есть радикальный центр окружностей S_2', S_3' и S_4' (см. выше, стр. 226). Найдя Σ', мы затем без труда построим и окружность Σ. Задача имеет единственное решение; если же считать окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 ненаправленными, то в силу произвольности выбора их направлений задача может иметь до восьми решений.

Примечание. Осевая инверсия может быть использована для решения той же задачи также и в том случае, когда окружность S_1 не лежит внутри S_2 (см. также выше п. XVI' на стр. 313).

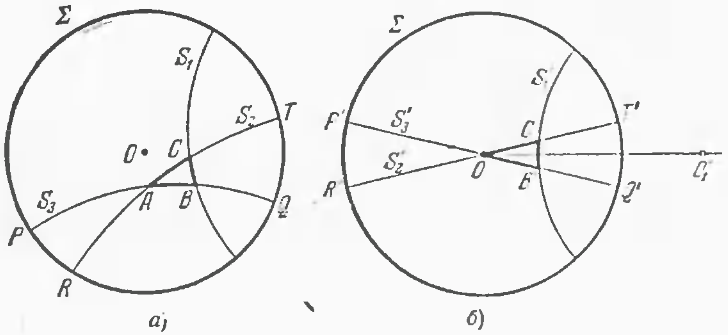
Приложение к гл. II

288. Пусть ABC — криволинейный треугольник, образованный тремя окружностями S_1, S_2 и S_3, перпендикулярными к окружности Σ; $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$ — три другие окружности, перпендикулярные к Σ, проходящие через вершины треугольника ABC и делящие пополам его углы; в таком случае $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$ пересекаются в одной точке (черт. 462, *а*; треугольник ABC — внутри Σ).



Черт. 462.

Для доказательства переведём неевклидовым движением (круговым преобразованием, переводящим внутренность окружности Σ в себя) точку пересечения окружностей $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$ (заключённую внутри Σ) в центр O окружности Σ; при этом окружности $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$ перейдут в диаметры $\overline{S}_2'$ и $\overline{S}_3'$ окружности Σ. На черт. 462, *б* диаметр $\overline{S}_2'$ образует одинаковые углы с окружностями S_3' и S_1', перпендикулярными к Σ, и диаметр $\overline{S'_3}$ составляет одинаковые углы с окружностями S'_1 и S'_2, перпендикулярными к Σ; отсюда вытекает, что S'_3 совпадает с окружностью S''_1, получаемой из S'_1 симметрией относительно прямой $\overline{S'_2}$, и S'_2 совпадает с окружностью S''_1, получаемой из S'_1 симметрией относительно прямой $\overline{S'_3}$. Таким образом, радиусы окружностей S'_1, S'_2 и S'_3 равны. Но если так, то S'_3 совпадает с окружностью S''_2, получаемой из S'_2 симметрией относительно прямой OA' (ибо среди проходящих через данную точку A' окружностей, перпендикулярных к Σ, нет трёх окружностей одинакового радиуса; см. черт. 247 в тексте, стр. 326). Поэтому OA' образует с S'_2 и S'_3 одинаковые углы, т. е. OA' совпадает с окружностью (или прямой) $\overline{S'_1}$, в которую наше неевклидово движение переводит окружность $\overline{S_1}$. Из того, что $\overline{S'_1}$, $\overline{S'_2}$ и $\overline{S'_3}$ пересекаются в одной точке O, вытекает, что $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ и $\overline{S_3}$ пересекались в одной точке.



Черт. 463.

289. Пусть S_1, S_2 и S_3 — три окружности, перпендикулярные к одной окружности Σ, причём S_2 и S_3 образуют одинаковые углы с S_1; в таком случае в обозначениях черт. 463, *а*

$$\frac{AQ}{BQ}:\frac{AP}{BP}=\frac{AT}{CT}:\frac{AR}{CR}.$$

Для доказательства переведём неевклидовым движением точку A в центр O окружности Σ; при этом черт. 463, *а* перейдёт в черт. 463, *б*. Из того, что прямые S'_2 и S'_3 пересекают окружность S_1' под одинаковыми углами, следует, что они симметричны относительно прямой, соединяющей O с центром O_1' окружности S_1'. Но тогда из соображений симметрии следует $OB' = OC'$ и, значит, $\frac{OQ'}{B'Q'} : \frac{OP'}{B'P'} = \frac{OT'}{C'T'} : \frac{OR'}{C'R'}$, так как все отрезки в правой части равенства равны соответствующим отрезкам в левой части равенства. Далее остаётся только воспользоваться тем, что двойное отношение четырёх точек сохраняется при круговых преобразованиях.

Примечание. Нетрудно видеть, что прямая OO_1' делит угол $B'OC$ пополам, перпендикулярна к S_1' и делит дугу $B'C'$ окружности S_1' пополам. Отсюда непосредственно выводится, что *в равнобедренном треугольнике неевклидовой геометрии Лобачевского биссектриса, высота и медиана, проведённые из вершины, совпадают между собой.*

290. а) Инверсия с центром в точке P переводит черт. 253, *а* в черт. 464, *а*; здесь пунктиром изображены линии, в которые переходят (неевклидовы) перпендикуляры, опущенные из точек прямой $R'S'$ на прямую $P'Q'$. Из этого чертежа непосредственно вытекают все утверждения задачи (для того чтобы доказать, что расстояния от точек прямой RS до прямой PQ растут по обе стороны от точек B, достаточно заметить, что на черт. 464, *а*

$$\frac{A_1'K_1'}{T_1'K_1'} : \frac{A_1'L_1'}{T_1'L_1'} = \frac{\overline{A}_1'K_2'}{T_2'K_2'} : \frac{\overline{A}_1'L_2'}{T_2'L_2'} < \frac{A_2'K_2'}{T_2'K_2'} : \frac{A_2'L_2'}{T_2'L_2'}\Bigg).$$

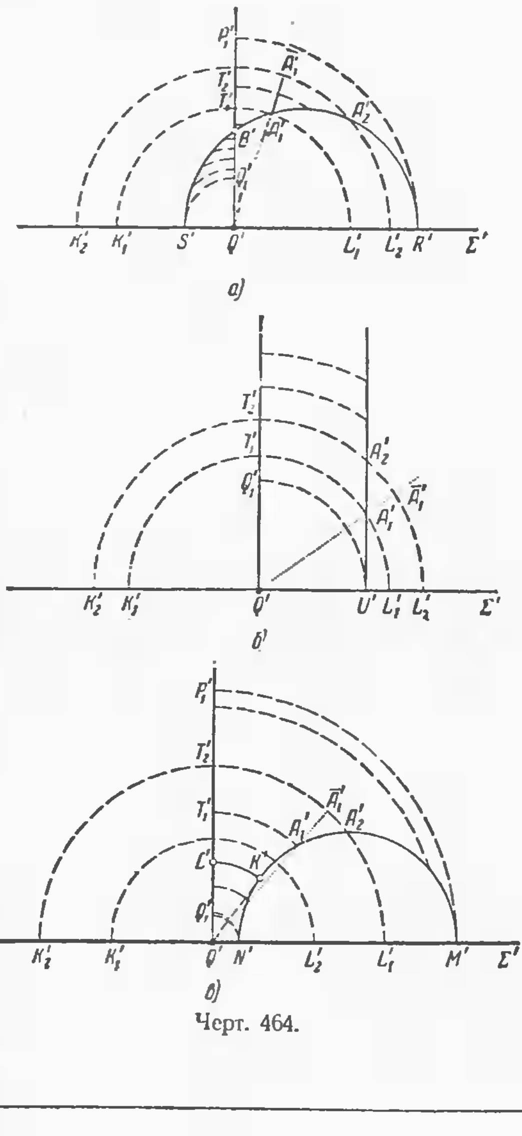
б) Инверсия с центром в точке P переводит черт. 253, *б* в черт. 464, *б*, из которого непосредственно вытекают все утверждения задачи (заметим, что

$$\frac{A_1'K_1'}{T_1'K_1'} : \frac{A_1'L_1'}{T_1'L_1'} = \frac{\overline{A}_1'K_2'}{T_2'K_2'} : \frac{\overline{A}_1'L_2'}{T_2'L_2'} < \frac{A_2'K_2'}{T_2'K_2'} : \frac{A_2'L_2'}{T_2'L_2'}\Bigg).$$

в) Инверсия с центром в точке P переводит черт. 253, *в* в черт. 464, *в* из которого непосредственно вытекают все утверждения задачи (заметим, что

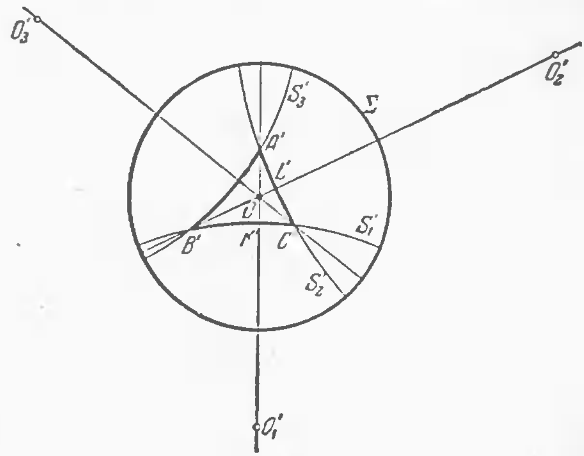
$$\frac{A_1'K_1'}{T_1'K_1'} : \frac{A_1'L_1'}{T_1'L_1'} = \frac{\overline{A}_1'K_2'}{T_2'K_2'} : \frac{\overline{A}_1'L_2'}{T_2'L_2'} < \frac{A_2'K_2'}{T_2'K_2'} : \frac{A_2'L_2'}{T_2'L_2'}\Bigg).$$

291. Переведём неевклидовым движением точку пересечения высот AK и BL остроугольного треугольника ABC


P'₁
A'₁
T'₂
T'₁
A'₂
B'
Q'₁
K'₂
K'₁
S'
O'
L'₁
L'₂
R'
Σ'
a)
T'₂
T'₁
Q'₁
A'₂
A'₁
K'₂
K'₁
O'
U'
L'₁
L'₂
Σ'
б)
P'₁
T'₂
T'₁
A'₁
A'₂
C'
K'
Q'₁
K'₂
K'₁
O'
N'
L'₂
L'₁
M'
Σ'
в)

Черт. 464.

в центр O круга К (высоты остроугольного треугольника обязательно пересекаются в его внутренней точке; см. начало решения задачи 203); мы придём в таком случае к черт. 465. Пусть O_1', O_2', O_3' — центры окружностей S_1', S_2', S_3' (образующих треугольник $A'B'C'$), а r_1, r_2, r_3 — их радиусы; пусть далее $O_1'O_2' = d_3$, $O_1'O_3' = d_2$, $O_2'O_3' = d_1$. Центр O окружности Σ



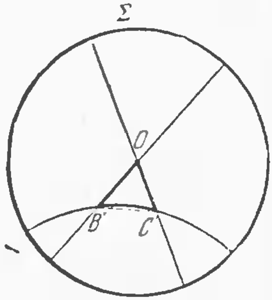
Черт. 465.

есть радикальный центр окружностей S_1', S_2', S_3', перпендикулярных к Σ (см. выше, стр. 228 и 226). Прямая OA' есть радикальная ось S_2' и S_3' (их общая хорда); так как она перпендикулярна к S_1', то O_1' лежит на этой прямой. Итак, O_1' имеет равные степени относительно S_2' и S_3'; следовательно, $d_3^2 - r_2^2 = d_2^2 - r_3^2$ или $d_2^2 + r_2^2 = d_3^2 + r_3^2$ (см. выше, стр. 224). Точно так же показывается, что $d_1^2 + r_1^2 = d_3^2 + r_3^2$. Следовательно,

$$d_1^2 + r_1^2 = d_2^2 + r_2^2,\quad d_1^2 - r_2^2 = d_2^2 - r_1^2,$$

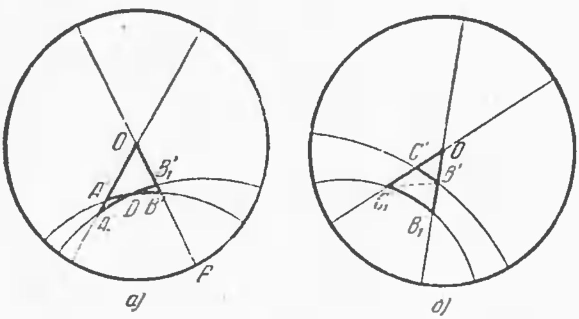
т. е. центр O_3' окружности S_3' имеет равные степени относительно S_1' и S_2', т. е. лежит на их радикальной оси OC'; отсюда вытекает, что OC' перпендикулярна к S_3'. Таким образом, (неевклидовыми) высотами треугольника $A'B'C'$ являются прямые OA', OB' и OC', т. е. три высоты пересекаются в одной точке; отсюда вытекает, что и высоты исходного треугольника ABC пересекались в одной точке.

Если треугольник ABC является тупоугольным, но высоты AK и BL пересекаются в одной точке, то доказательство сохраняет силу; в этом случае все три высоты пересекаются в одной точке. Однако может случиться, что высоты AK и BL вовсе не пересекаются; в этом случае теорема теряет силу (ср. с решением задачи 203).



Черт. 466.

292. Переведём неевклидовым движением вершину A произвольного треугольника ABC в центр O окружности Σ; тогда треугольник ABC перейдёт в треугольник $OB'C'$, изображённый на черт. 466. Очевидно, что сумма углов треугольника $OB'C'$ (равная сумме углов треугольника ABC) меньше, чем сумма углов прямолинейного треугольника с теми же вершинами, т. е. меньше $180°$.



Черт. 467.

293. Переведём неевклидовым движением вершину A первого треугольника ABC в центр O круга K; второй треугольник $A_1B_1C_1$ неевклидовым движением перенесём так, чтобы его вершина A_1 совпала с той же точкой O, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 пошли по соответствующим сторонам первого треугольника (это возможно в силу равенства углов при вершине A). Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не равны, то мы придём к черт. 467, *а* или *б*. Но на черт. 467, *а* сумма углов треугольника $B'B'_1D$ больше 180° (ибо $\angle DB'_1B' + \angle DB'B'_1 = \angle DB'_1B' + \angle DB'_1O = 180^\circ$), что невозможно в силу результата предыдущей задачи; на черт. 467, *б* сумма углов четырёхугольника $B'C'C'_1B'_1$ равна 360° (ибо $\angle B'_1B'C' = 180^\circ - \angle B' = 180^\circ - \angle B'B'_1C'_1$, $\angle C'_1C'B' = 180^\circ - \angle C' = 180^\circ - \angle C'C'_1B'_1$), и один из двух треугольников, на которые $B'C'C'_1B'_1$ разбивается своей диагональю, имеет сумму углов не меньше 180°. Полученное противоречие и доказывает равенство треугольников.

294. Сразу вытекает из того, что вокруг каждого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

295. а) Следует из результата задачи 64 из § 2 гл. I второй части книги.

Примечание. В неевклидовой геометрии Лобачевского имеет место и значительно более общая теорема, вытекающая из предложения задачи 218а) из § 1 этой главы (см. также примечание к решению задачи 300).

б) Следует из результата задачи 214 из § 1.

296. Следует из результата задачи 213а) из § 1.

Примечание. Аналогично этому геометрическое место точек пересечения перпендикулярных между собой циклов S_1 и S_2, касающихся фиксированного цикла S в двух заданных его точках A и B, состоит из двух циклов (см. задачу 213б)).

297. Следует из результата задачи 216 из § 1.

298. Очевидно, что пучок циклов неевклидовой геометрии Лобачевского не отличается от пучка окружностей обычной (евклидовой) геометрии (см. § 3 настоящей главы); только в соответствии с определением точек неевклидовой геометрии здесь следует рассматривать не полные окружности пучка, а лишь дуги их, заключённые внутри круга К (см., впрочем, примечание к решению задачи 300). Соответственно этому последнее утверждение задачи непосредственно вытекает из результатов § 3 (см. стр. 219—221).

Эллиптический пучок окружностей определяется заданием двух точек P и Q, через которые проходят все окружности пучка. Поэтому в неевклидовой геометрии Лобачевского имеются шесть различных «эллиптических пучков циклов», отвечающих шести возможным вариантам расположения точек P и Q:

1° точки P и Q расположены внутри К;

2° точка P расположена внутри К, а Q — на окружности Σ;

3° точка P расположена внутри К, а Q — вне К;

4° точки P и Q расположены на окружности Σ (ср. черт. 254, *б* на стр. 334);

5° точка P расположена на окружности Σ, а Q — вне К;

6° точки P и Q расположены вне К.

Гиперболический пучок окружностей может быть определён как пучок, перпендикулярный к эллиптическому пучку. Поэтому шести типам «эллиптических пучков циклов» неевклидовой геометрии Лобачевского отвечают шесть типов перпендикулярных им «гиперболических пучков циклов». Однако здесь целесообразно выделить ещё один специальный случай — когда окружность Σ сама принадлежит к рассматриваемому пучку (ср. черт. 254, *а* на стр. 333); перпендикулярный к этому пучку эллиптический пучок типа 3° характеризуется тем, что точки P и Q симметричны относительно окружности Σ — с определённой точки зрения этот тип «эллиптических пучков циклов» тоже следует считать специальным. Таким образом, всего мы будем иметь семь типов «гиперболических пучков циклов».

Наконец, параболический пучок окружностей характеризуется заданием точки A и проходящей через эту точку прямой l — все окружности пучка касаются прямой l в точке A. Соответственно этому естественно различать следующие шесть типов «параболических пучков циклов» неевклидовой геометрии Лобачевского:

1° точка A лежит внутри круга К;

2° точка A лежит на окружности Σ, прямая l пересекает Σ;

3° точка A лежит на окружности Σ; прямая l касается Σ (ср. черт. 254, *в* на стр. 335);

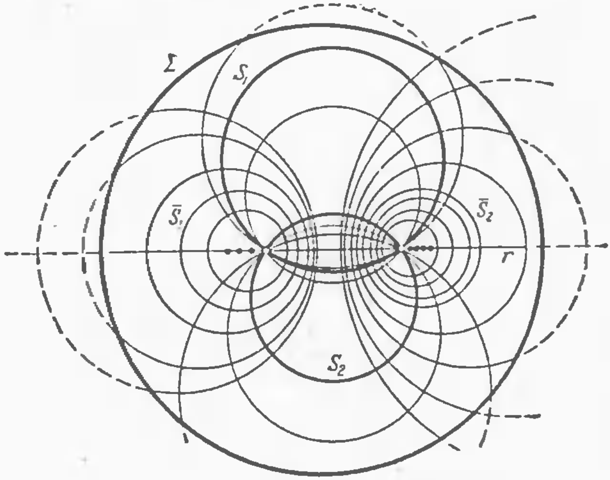
4° точка A лежит вне круга К, прямая l пересекает Σ;

5° точка A лежит вне К; прямая l касается Σ;

6° точка A лежит вне К, прямая l не имеет общих точек с Σ.

Таким образом, всего имеется $6+7+6=19$ различных типов пучков циклов. Мы рекомендуем читателю самому сделать соответствующие чертежи и разобрать, какого рода циклы входят в пучок каждого из перечисленных типов.

299. Рассмотрим два пучка циклов неевклидовой геометрии Лобачевского: пучок $\overline{\text{II}}$, состоящий из всех циклов, перпендикулярных одновременно к S_1 и S_2, и пучок II, перпендикулярный к $\overline{\text{II}}$ (и, следовательно, содержащий циклы S_1 и S_2).



Черт. 468.

Предположим, что среди циклов пучка $\overline{\text{II}}$ есть неевклидовы окружности; пусть $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ — какие-то две из них и r линия центров этих двух окружностей. Неевклидовым движением всегда можно совместить r с диаметром окружности Σ; в таком случае r будет являться прямой неевклидовой геометрии Лобачевского (черт. 468).

Прямая r перпендикулярна к $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$; следовательно, она принадлежит пучку II. Но отсюда вытекает, что все циклы пучка $\overline{\text{II}}$ перпендикулярны к r; из этого следует, что центры всех окружностей пучка $\overline{\text{II}}$ лежат на r.

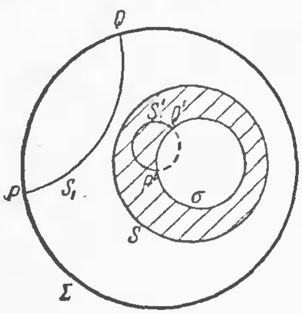
Если циклы S_1 и S_2 пересекаются, то все циклы пучка II проходят через их точки пересечения; следовательно, в этом случае и радикальная ось r проходит через эти две точки (и, значит, совпадает с общей хордой S_1 и S_2).

Примечание. Можно доказать, что попарные радикальные оси трёх циклов S_1, S_2 и S_3 всегда принадлежат к одному пучку неевклидовых прямых. В частности, если две радикальные оси пересекаются в одной точке Z, то и третья радикальная ось проходит через ту же точку. В этом случае точка Z называется **радикальным центром** трёх циклов S_1, S_2 и S_3.

300. а) Следует из теоремы 1 на стр. 172.

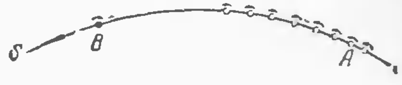
б) Следует из свойств Б и В симметрии относительно окружности (см. § 1 этой главы).

Примечание. Следует иметь в виду, что симметрия относительно цикла S не является преобразованием неевклидовой геометрии Лобачевского, переводящим **каждую** точку в какую-то другую точку. Так, например, симметрия относительно изображённой на черт. 469 окружности S переводит внешность этой окружности в «кольцо», заключённое между окружностями S и σ (окружность σ симметрична Σ относительно S); что же касается точек, заключённых внутри σ, то им в этом преобразовании не отвечают никакие точки (соответственно этому, например, эквидистанта S_1 переходит при симметрии относительно S в дугу $P'Q'$ окружности S'_1). Это обстоятельство очень сильно усложняет все рассмотрения, связанные с симметрией относительно цикла.

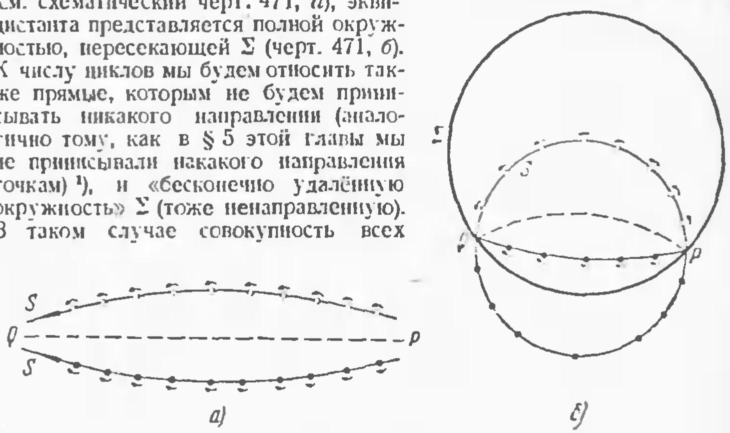


Черт. 469.

Затруднение здесь близко к тому, с которым мы встретились в § 5 этой главы при определении расширения на отрицательную величину $-a$ (см. выше, стр. 259),— тут у нас некоторые точки не переходят ни в какие точки, а там некоторые окружности (окружности радиуса, меньшего a) не переходили ни в какие окружности. Это неудобство может быть устранено подобно тому, как мы поступали в § 5. А именно, будем считать все точки неевклидовой геометрии Лобачевского **двойными**, т. е. в полной аналогии с § 5 этой главы будем говорить о **направленных точках**, приписывая каждой точке определённое направление вращения — по или против часовой стрелки (его можно указать дугой со стрелкой). Далее условимся, что все точки круга К имеют направление обхода против часовой стрелки и что точки, отличающиеся одна от другой лишь направлением обхода, симметричны друг другу относительно окружности Σ. Если ещё уговориться считать точки окружности Σ **бесконечно удалёнными точками** (этим точкам мы не будем приписывать никакого направления обхода), то множество всех (направленных или бесконечно удалённых) точек неевклидовой геометрии Лобачевского будет совпадать с множеством всех точек плоскости (дополненном «бесконечно удалённой точкой», отвечающей центру круга К, направленному по часовой стрелке). Циклы неевклидовой геометрии Лобачевского мы тоже теперь будем считать направленными; при этом (направленную) точку A следует считать принадлежащей (направленному) циклу S лишь в том случае, если направление обхода вокруг A согласовано с направлением вращения при движении по циклу S (см. схематический черт. 470, где точка A принадлежит циклу S, а точка B не считается принадлежащей ему). Под эквидистантой с осью PQ мы теперь понимаем геометрическое место точек, имеющих постоянное расстояние от прямой PQ и расположенных с обеих сторон от PQ; при этом точки верхней и нижней ветвей эквидистанты должны быть направлены по-разному (см. схематический черт. 471, *а*); эквидистанта представляется полной окружностью, пересекающей Σ (черт. 471, *б*). К числу циклов мы будем относить также прямые, которым не будем приписывать никакого направления (аналогично тому, как в § 5 этой главы мы не приписывали никакого направления точкам)[1], и «бесконечно удалённую окружность» Σ (тоже ненаправленную). В таком случае совокупность всех



Черт. 470.



а) *б)*

Черт. 471.

циклов неевклидовой геометрии Лобачевского будет совпадать с совокупностью всех окружностей и прямых плоскости.

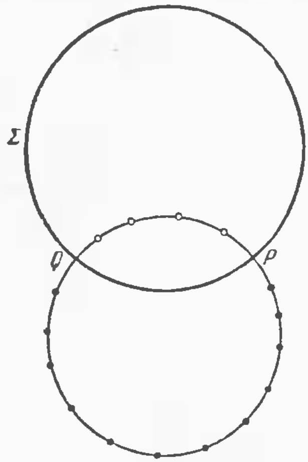
При таком расширенном понимании понятий «точка неевклидовой геометрии Лобачевского» и «цикл неевклидовой геометрии Лобачевского» симметрия относительно цикла становится преобразованием, переводящим каждую (направленную или бесконечно удалённую) точку в новую (направленную или бесконечно удалённую) точку и каждый

---

[1]) Мы ввели понятие направленных циклов для того, чтобы установить направление точек, принадлежащих этому циклу: направление стрелки на окружающей точку дуге, проведённой со стороны выпуклости цикла, должно совпадать с направлением цикла (см. черт. 470). Однако, так как прямая вовсе не выпукла, то мы всё равно не сможем выделить направление принадлежащих ей точек (см. схематический черт. 472, *а*). Поэтому приходится считать пря-

цикл в новый цикл; это преобразование сохраняет также углы между циклами. Все преобразования неевклидовой геометрии Лобачевского, переводящие циклы снова в циклы, естественно называть **круговыми преобразованиями**; преобразования, переводящие прямые линии снова в прямые, можно назвать **линейными преобразованиями**. В таком случае в полной аналогии с теоремами 1 и 2 § 4 этой главы (стр. 247) *всякое преобразование неевклидовой геометрии Лобачевского, являющееся одновременно и круговым и линейным, представляет собой неевклидово движение, а всякое круговое преобразование, не являющееся линейным, можно осуществить*

а)



б)

Черт. 472.

с помощью симметрии относительно некоторого цикла S, сопровождаемой ещё, быть может, неевклидовым движением[1]). Для доказательства первого из этих утверждений достаточно заметить, что каждое круговое преобразование, переводящее Σ в себя, есть неевклидово движение (см. определение неевклидовых движений на стр. 324). Пусть теперь круговое преобразование K переводит в Σ некоторый цикл σ, и пусть S — окружность, относительно которой окружности Σ и σ симметричны между собой (см. мелкий шрифт на стр. 180). В таком случае круговое преобразование K можно представить в виде суммы симметрии I относительно S и ещё какого-то кругового преобразова-

---

мые ненаправленными, а принадлежащие им точки двойными; это означает, что прямая представляется полной окружностью, перпендикулярной к окружности Σ (черт. 472, *б*).

[1]) Таким образом, в неевклидовой геометрии Лобачевского все круговые преобразования в определённом смысле сводятся к следующим трём существенно различным преобразованиям: а) симметрия относительно окружности; б) симметрия относительно предельной линии; в) симметрия относительно эквидистанты.

Неевклидово движение, о котором говорится в тексте, может ещё сопровождаться изменением направления обхода всех точек на обратное (этому преобразованию отвечает симметрия относительно окружности Σ).

ния $\overline{K}$, уже переводящего Σ в себя; отсюда и следует наше утверждение (ср. с доказательством теоремы 2 на стр. 249—253). Теперь, для того чтобы завершить доказательство первой из сформулированных теорем, достаточно заметить, что симметрия относительно цикла S, отличного от прямой и от окружности Σ, не может переводить все прямые линии неевклидовой геометрии Лобачевского снова в прямые линии.

Введение в неевклидовой геометрии Лобачевского направленных точек удобно не только в теории круговых преобразований, но также и во многих других вопросах, связанных с циклами. Так, например, в условии теоремы задачи 295 теперь не приходится требовать, чтобы какие-нибудь два из циклов S_1, S_2, S_3 и S_4 пересекались в двух точках,— это условие выполняется автоматически; также и формулировка более сложной теоремы, о которой говорится в примечании к решению задачи 295, значительно упрощается введением направленных точек.

Аналогично точечным круговым преобразованиям неевклидовой геометрии Лобачевского — преобразованиям в множестве направленных точек, переводящим циклы (к числу которых причисляются и прямые, считаемые ненаправленными) снова в циклы, можно было бы рассмотреть и *осевые круговые преобразования* — преобразования в множестве направленных прямых, переводящие циклы (к числу которых причисляются также и точки, считаемые ненаправленными) снова в циклы. Теория осевых круговых преобразований неевклидовой геометрии Лобачевского имеет много общего с теорией точечных круговых преобразований. [См. по этому поводу статью: И. М. Яглом, Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. VII, М.— Л., Гостехиздат, 1949; следует только иметь в виду, что эта статья является довольно сложной и рассчитана на квалифицированного читателя.]

СПИСОК ЗАДАЧ, ИНЫЕ РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ СОДЕРЖАТСЯ В ДРУГИХ КНИГАХ

В этом списке приведены номера задач, другие решения которых содержатся в одной из следующих книг:

1° Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1948 (книга содержит свыше 400 задач, к которым Д. И. Перепёлкиным написаны подробные решения). Обозначается буквой «А».

2° Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, М.— Л., Гостехиздат, 1952. Обозначается буквой «Д».

3° Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии, ч. 2, М., Гостехиздат, 1952. Обозначается буквой «Ш».

№ задач	Где содержится	№ задач	Где содержится
108	Д. 158	177	Ш. 104
112а) (частный случай)	А. 224; Ш. 138а)	183а)	А. 391; Ш. 80
115	А., стр. 184; Д. 209; Ш. 114, 132а)	190а), в)	Ш. 59а), б)
118а)	А., стр. 192	213а)	А. 394
123	А., стр. 185; Д. 159, 391; Ш. 127, 132б)	217б)	А. 345
124б) (частный случай)	Д. 390	218а)	Ш. 125
134а)	А., стр. 182; Ш. 131	218б) (частный случай)	А. 348; Д. 65
134а) (частный случай)	А. 223	219	А. 377, 411; Ш. 107
134б)	А., стр. 187; Ш. 133	220	А. 282; Ш. 108
137б)	Ш. 57г)	221	Ш. 106
138а)	А.228; Ш. 134д)	232б)	Д. 189
139а)	Ш. 105	237а)	А., стр. 211; Д. 190
145	А., стр. 185; Д. 395; Ш. 129, 132в)	238а)	А. 403
146	Д. 394; Ш. 130	241	Ш. 62в)
168	А. 89	244 (частный случай)	Д. 393; Ш.116
176	Ш. 28	254 (частный случай)	А. 147
		257	А. 141, стр. 115
		258	Д. 249; Ш. 117
		261	Ш. 123б)
		264в)	А. 402
		278а)	А. 347

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Указатель относится к обоим томам книги.
Страницы первого тома указываются курсивом.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Вып. 1. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 1. Арифметика и алгебра.

Вып. 2. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 2. Геометрия (планиметрия).

Вып. 3. **Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом,** Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 3. Геометрия (стереометрия).

Вып. 4. **И. М. Яглом и В. Г. Болтянский,** Выпуклые фигуры.

Вып. 5. **А. М. Яглом и И. М. Яглом,** Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

Вып. 6. **Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский,** Математические беседы.

Вып. 7. **И. М. Яглом,** Геометрические преобразования, I. Движения и преобразования подобия.

Вып. 8. **И. М. Яглом,** Геометрические преобразования, II. Линейные и круговые преобразования.