

И.М. Яглом

**ПРИНЦИП
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
ГАЛИЛЕЯ
И НЕЕВКЛИДОВА
ГЕОМЕТРИЯ**



517.5
Я 29
УДК 513.81

Исаак Моисеевич Яглом

Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия

(Серия: «Библиотека математического кружка»)

М., 1969 г., 304 стр. с илл.

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *С. Н. Емельянова, И. А. Шагас*

Сдано в набор 15/IV 1969 г. Подписано к печати 27/X 1969 г. Бумага 60×90/16.

Физ. печ. л. 19 Условн. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 18,52.

Тираж 50 000 экз. Т-13 293. Цена книги 56 коп. Заказ 84.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, М-54, Валовая, 28

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	13
§ 1. Что такое геометрия?	13
§ 2. Что такое механика?	27
Глава I. Расстояния и углы; треугольники и четырехугольники	45
§ 3. Расстояние между точками и угол между прямыми	45
§ 4. Треугольник	60
§ 5. Принцип двойственности; антипараллелограмм и антитрапеция	67
Глава II. Окружности и циклы	83
§ 6. Определение цикла; радиус и кривизна	83
§ 7. Скольжение цикла по себе; диаметры цикла	98
§ 8. Описанный и вписанный циклы треугольника	112
§ 9. Степень точки относительно окружности или цикла; инверсии	130
Заключение	175
§ 10. Принцип относительности Эйнштейна и преобразования Лоренца	175
§ 11. Геометрия Минковского	193
§ 12. Геометрия Галилея как предельный случай геометрий Евклида и Минковского	222
Приложение А. Девять геометрий на плоскости	235
Приложение Б. Числовые модели плоских геометрий	266
Литература	300

ПРЕДИСЛОВИЕ

В русской научной и научно-популярной литературе, как и в литературе многих других стран, имеется немало сочинений, посвященных неевклидовой геометрии Лобачевского; лишь некоторые из них упомянуты в списке книг и статей на стр. 300—303. Изучение геометрии Лобачевского составляет обязательную часть программы математических отделений большинства наших университетов и всех педагогических институтов — ознакомление с основами этой геометрической системы считается необходимой частью подготовки будущего учителя средней школы. Также и в школьных математических кружках широко культивируются занятия геометрией Лобачевского. При обсуждении путей перестройки математического образования в средней школе некоторыми математиками и педагогами высказывалась даже мысль о желательности включения элементов геометрии Лобачевского в общеобязательную школьную программу, а в рекомендуемые программы факультативных занятий математикой в средней школе (т. е. необязательных занятий, которые, однако, должны носить массовый характер) была включена тема, связанная с неевклидовой геометрией Лобачевского.

Причины столь широкого увлечения геометрией Лобачевского понять нетрудно. Разумеется, увлечение это никак не связано с общематематическими или естественнонаучными приложениями геометрии Лобачевского: приложения эти (к теории автоморфных функций, например) носят достаточно специальный характер, и встретиться с ними придется разве что одному из тысячи учащихся, добросовестно изучающих (а затем излагающих экзаменатору) определение параллельных по Лобачевскому и особенности взаимного расположения прямых на плоскости Лобачевского. Гораздо более важное и принципиальное значение имеет сам факт «неединственности» геометрии, существования разных геометрических систем: он проливает новый свет на основные особенности математической науки; на роль идеализации в научном естествознании; на общее понятие дедуктивной науки («выводной науки» по терминологии Аристотеля), т. е. науки, развиваемой исходя из определенной системы аксиом; на роль системы аксиом в математике и на предъявляемые к любой

аксиоматике требования; на взаимоотношение двух аспектов геометрии — геометрии как абстрактной математической дисциплины и геометрии как естественнонаучной дисциплины, изучающей определенную категорию свойств окружающего нас реального пространства, так сказать, «геометрии-математики» и «геометрии-физики». Именно это (и только это) обстоятельство и обуславливает вывод о том, что наивное представление о «врожденности», «единственности» или «естественности», чуть ли не о «богоданности» геометрической системы Евклида должно быть у будущих учителей математики решительнейшим образом разрушено.

Принимая этот вывод, мы, однако, забываем порой, что и сама геометрическая система Лобачевского вовсе не является единственной *a priori* возможной «неевклидовой» системой, что разных «геометрий» мы знаем сегодня совсем не две только (Евклида и Лобачевского), а очень и очень много.

Хорошо известно, что содержание геометрии в процессе ее исторического развития неоднократно коренным образом менялось. В течение столетий единственная цель геометрических исследований виделась в возможно более полном исследовании свойств «обычного» трехмерного пространства Евклида. Несмотря на то, что в рамках такого понимания геометрии созрели иные точки зрения, не укладывающиеся в привычную схему (так, например, первой изученной людьми «не евклидовой» геометрической системой, по существу, является действующая на поверхности сферы так называемая «сферическая геометрия», хорошо известная еще в глубокой древности¹⁾), до создания неевклидовой геометрии Лобачевского не возникало никаких сомнений в универсальности самого понятия евклидова пространства. Относящиеся к первой трети XIX века революционные открытия Карла Фридриха Гаусса, Николая Ивановича Лобачевского и Яноша Бойаи²⁾ потому то и явились таким огромным событием в истории математики, что они нанесли непоправимый удар этим насчитывающим тысячелетия представлениям.

После появления неевклидовой геометрии Лобачевского укоренилось мнение (а многие думают так еще и сейчас!), что возможно всего две равноправные геометрические системы — Евклида и Лобачевского; сами творцы неевклидовой геометрии были в этом твердо убеждены. Однако эта точка зрения просуществовала недолго:

¹⁾ С полной отчетливостью это было указано лишь Б. Риманом (см. ниже), исследования которого во многом стимулировались фактом существования неевклидовой геометрии Лобачевского.

²⁾ О драматической истории открытия неевклидовой геометрии Лобачевского см., например, указанную на стр. 303 книгу В. Ф. Каганна «Лобачевский». [Отметим, что фамилия венгерского математика Бойаи (*Bolyai de Bolyai*) транскрибируется в русской математической литературе весьма разнообразно — см., например, книги [60], [72] и [73] из приведенного в конце книги списка литературы.]

XIX век был периодом бурного развития геометрических учений. В 1854 г. замечательным немецким математиком Бернгардом Риманом был сформулирован чрезвычайно общий взгляд на геометрию, сразу необычайно широко раздвинувший ее границы; Риман же отметил существование трех родственных друг другу геометрических систем, близких к той геометрии, какую мы все изучали в средней школе: «обычной» геометрии Евклида, «гиперболической» геометрии Лобачевского и «эллиптической» геометрии, весьма близкой к геометрии на поверхности сферы. Этот список геометрий был в 1870 г. продолжен другим немецким математиком Феликсом Клейном (см., например, его книгу «Неевклидова геометрия», указанную в списке литературы на стр. 302): согласно концепции Клейна на плоскости существует девять (!) родственных друг другу «геометрий»¹⁾, тремя из которых являются обычная геометрия Евклида, гиперболическая геометрия Лобачевского и эллиптическая геометрия Римана (см. по этому поводу приложение А в конце книги). Эти исследования Клейна, которые возникли в результате своеобразного синтеза геометрических идей Лобачевского и заинтересовавших Клейна работ английского алгебраиста Артура Кэли, привели к созданию в 1872 г. так называемой «Эрлангенской программы» Клейна (см. его статью [8], указанную в списке литературы на стр. 300), содержащей новый широкий взгляд на всю геометрию, по своей универсальности способный соперничать с концепциями Римана.

Таким образом, подобно тому как исключительное положение геометрии Евклида было разрушено основополагающими исследованиями Лобачевского, Бойаи и Гаусса, опубликованными еще в 1829—1832 гг., исключительное положение геометрии Лобачевского было разрушено классическими трудами Римана и Клейна (1854—1872 гг.). Однако еще и сегодня под «неевклидовой геометрией» часто понимают одну только геометрию Лобачевского (реже слова «неевклидовы геометрии» во множественном числе употребляют для обозначения гиперболической геометрии Лобачевского и эллиптической геометрии Римана); существование же других геометрических систем остается известным лишь узким специалистам. Причина этого, по-видимому, в значительной степени коренится во влиянии дискуссий о природе окружающего нас реального пространства, в своей первоначальной постановке давно уже потерявших всякое научное значение. Так, например, еще в «Неевклидовой геометрии» Ф. Клейна, вышедшей в свет в немецком оригинале в 1928 г., утверждается, что в окружающем нас мире должна реализовываться

¹⁾ Сам Клейн различал на плоскости семь разных геометрических систем (см., например, уже упоминавшуюся книгу Клейна «Неевклидова геометрия»); дальнейшее членение «геометрий Клейна», в силу которого число семь заменилось числом девять, было произведено в 1910 г. английским геометром Д. М. И. Саммервиллем (D. M. Y. Sommerville).

одна из трех «классических» геометрий Евклида, Лобачевского или Римана¹), хотя полная научная несостоятельность этой точки зрения была установлена «специальной теорией относительности» Альберта Эйнштейна (1905 г.) и, особенно, его же «общей теорией относительности» (1916 г.). Гипноз этих устаревших космологических дискуссий привел к тому, что в то время как геометрия Лобачевского в научной и научно-популярной литературе уделяется весьма большое внимание (так, например, даже столь частному вопросу, как теория геометрических построений на плоскости Лобачевского, посвящено несколько книг и бесчисленное множество статей!), все остальные «неевклидовы геометрии Клейна» освещены пока совершенно недостаточно. Настоящая книга и преследует своей целью дать рассчитанное на широкого читателя изложение одной из этих геометрических систем — системы, которая возникает, если принять за «движения» двумерного многообразия «событий» (x, t) (где x — координата точки на прямой, а t — время) преобразования Галилея классической кинематики.

После этого исторического введения я позволю себе снова остановиться на вопросе о педагогической целесообразности увлечения одной лишь неевклидовой геометрией Лобачевского. Важность ознакомления будущих учителей математики (а частично даже и интересующихся математикой учащихся старших классов средней школы) с одной из геометрических систем, отличных от хорошо известной им геометрии Евклида, сомнению, видимо, не подлежит. Но какую геометрию выбрать для такого ознакомления? Этот вопрос, как мне кажется, может служить предметом дальнейших дискуссий. Геометрия Лобачевского исторически является первой «неевклидовой» геометрической системой, — не считая это обстоятельство решающим, и вовсе не склонен полностью его игнорировать. Кроме того, связь этой геометрической системы с установлением недоказуемости аксиомы параллельности и с выяснением роли этой аксиомы в системе Евклида сильно повышает педагогическое значение геометрии Лобачевского²). С другой стороны, геометрия Лобачевского является

¹) Книга Ф. Клейна, напечатанная уже после смерти ее автора, представляет собой обработку литографированного курса лекций, выпущенного Клейном в 1892 г. и повторно в 1893 г. в качестве пособия для студентов Гёттингенского университета; модернизация, которой подвергли этот курс ученики Клейна, подготавливавшие его к печати, кажется мне крайне недостаточной. Также и в русском переводе «Неевклидовой геометрии», появившемся в 1936 г., к сожалению, отсутствует какое бы то ни было редакционное примечание, предупреждающее читателя об архаичности идей, развитию которых посвящены многие страницы книги.

²) Особенно важно последнее соображение в условиях построения школьного курса геометрии в соответствии с общей схемой Евклида — Киселева (см. указанные на стр. 300 учебники [1]—[7]). В случае же перехода на другую систему изложения (на чем настаивают многие математики и педагоги) оно частично утратит свое значение.

относительно сложной; так, например, она определенно сложнее обычной геометрии Евклида. Напротив, излагаемая в этой книге геометрия является самой простой из всех геометрических систем Клейна: можно даже сказать, что она настолько же проще геометрии Евклида, насколько геометрия Евклида проще геометрии Лобачевского. Относительная простота этой геометрии является ее самым главным достоинством; она позволяет без большой затраты времени и интеллектуальной энергии учащихся изучить ее со сравнительно большими подробностями — а ведь только развернутое построение новой геометрической системы позволяет сопоставить ее с евклидовой и только оно психологически способно по-настоящему убедить в непротиворечивости рассматриваемой схемы! Другим достоинством развиваемой в этой книге геометрической системы является возможность ознакомления на ее базе со столь плодотворным геометрическим инструментом, как принцип двойственности. Наконец (последнее, но безусловно не наименее важное обстоятельство!), очень глубокой и содержательной является иллюстрируемая на примере рассматриваемой в настоящей книге геометрии общая идея о связи «Эрлангенской программы» Клейна с физическими принципами относительности, по-новому раскрывающая как содержание концепции Клейна, так и место принципов относительности в физике ¹⁾. Вот почему мне представляется заслуживающим серьезного внимания вариант построения курса математики педагогического института, содержащий параллельное освещение трех самых простых геометрических систем — геометрии Евклида, «геометрии принципа относительности Галилея» и «геометрии принципа относительности Эйнштейна» (геометрии Минковского; см. § 11 этой книги) с одновременным изложением основ (специальной) теории относительности.

Разумеется, настоящая книга, богатая, быть может и любопытными, но мало принципиальными деталями ²⁾ и рассчитанная на учащихся старших классов средней школы, на учителей математики, на студентов и преподавателей университетов и педагогических институтов, готовящих учителей математики, никак не преследует своей целью столь серьезную реформу нашего высшего педагогического

¹⁾ Достоинством геометрии Лобачевского часто считают возможности суждения на ее базе различных космологических гипотез — однако уже сама постановка вопроса о реализуемости во Вселенной геометрии Евклида или геометрии Лобачевского способна затруднить восприятие идей теории относительности. С этой точки зрения мне кажется более ценной связанная с принципом относительности Галилея геометрия, способная сильно облегчить понимание соответствующих идей.

²⁾ Так, например, здесь содержатся даже три доказательства аналога известной из геометрии треугольника теоремы Фейербаха, в силу которой *окружность девяти точек треугольника касается вписанной и трех невписанных окружностей* (см., например, пп. 44—45 указанной на стр. 301 книги Зетеля [33]), между тем как научное значение этой теоремы ничтожно.

ческого образования. Да сейчас определенно еще не время для такой реформы: обсуждение поднятых здесь вопросов требует серьезного знакомства с геометрическими системами, порождаемыми принципами относительности Галилея и Эйнштейна, а эта книга, видимо, является первым сочинением в научно-популярной литературе, в котором подробно анализируется «геометрия принципа относительности Галилея».

Да и в научной литературе эта геометрическая система была серьезно изучена сравнительно недавно. Упоминание о соответствующей геометрической системе можно найти уже у Ф. Клейна (см., например, указанную на стр. 302 книгу «Неевклидова геометрия») и в излагающих идеи Клейна учебниках (см., скажем, указанную на стр. 301 книгу В. Ф. Кагана «Основания геометрии» — однако ссылки на эту геометрию имеют здесь эпизодический характер, и содержание этой геометрической схемы, по существу, остается нераскрытым. Более обстоятельной была трактовка той же темы в относящихся к 1913—1915 гг. научных статьях ряда немецких геометров (Г. Бек, Ф. Бём, Л. Бервальд¹⁾). В 1925—1928 гг. эта геометрия снова всплыла в публикациях английского математика Л. Силберштейна, поляка С. Гласа, казанского геометра А. П. Котельникова и датчанина Д. Фогга²⁾; в этих публикациях, видимо, впервые была отмечена связь рассматриваемой геометрии с принципом относительности Галилея. Однако обстоятельное изучение рассматриваемой в настоящей книге геометрической системы, при котором она в некоторых отношениях была проанализирована даже глубже евклидовой геометрии, относится к 50-м годам нашего столетия; это изучение связано с именами замечательного голландского геометра Николааса Кёйпера, видного немецкого геометра Карла Штрубеккера, а также моей ученицы Нели Михайловны Макаровой (см. список литературы в конце книги).

Отдельно приходится остановиться на вопросе о наименовании рассматриваемой в этой книге геометрической системы. В научной литературе эта геометрия именуется «полуевклидовой», «флаговой», «параболической», «изотропной» или «галилеевой»; однако ни одно из этих названий нельзя признать полностью удачным. Термины «флаговая геометрия», «параболическая геометрия» (или «дважды параболическая геометрия») и «изотропная геометрия» оправдываются обстоятельствами, которые никак не могут быть раскрыты в элемен-

¹⁾ См. Н. Beck, Zur Geometrie in der Minimalebene, Sitzungsberichte der Leipziger und Berliner Math. Gesellschaft 12 (1913), стр. 14—30; F. Böhm, Beiträge zum Äquivalenzproblem der Raumkurven, Sitzungsberichte der Acad. zu München 2 (1915), стр. 257—280; L. Berwald, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie in der Minimalebene, Monatshefte für Math. und Phys. 26 (1915), стр. 211—228.

²⁾ См. L. Silberstein, Projective geometry of Galileian space-time, Philos. Magazin 10 (1925), стр. 681—696; S. Glass, Sur les géométries de Galyley et sur une géométrie plane particulière, Annales de la Société Polonoise de Math. 5 (1926), стр. 20—36; А. П. Котельников, Принцип относительности и геометрия Лобачевского, Сборник «In memoriam Lobatschevskii», вып. 2, Казань, Главнаука (1927), стр. 37—66; D. Fog, Den isotrope Planer elementare Geometri, Math. Tidskrift, Ser. B (1928), стр. 21—33.

тарном сочинении, рассчитанном на лиц, не обладающих серьезной математической подготовкой — поэтому здесь они полностью отпадают. Достоинством термина «полуевклидова геометрия» является его близость к названию «псевдоевклидова геометрия», принятому для геометрии, связанной с принципом относительности Эйнштейна; кроме того этот термин звучит достаточно обыденно и не апеллирует к неизвестным читателю этой книги понятиям вроде «флага», «изотропной плоскости» или «параболической метрики». Однако первое достоинство названия «полуевклидова геометрия» могут оценить лишь лица, знакомые с «псевдоевклидовой геометрией Минковского»; второе же является одновременно и недостатком, поскольку для читателя, нескнушенного в современной научной терминологии, наименование «полуевклидова геометрия» будет звучать слишком уж «чуждо» (это нечто вроде «евклидовой полугеометрии»?). Наконец, наиболее укоренившееся за последние годы название «геометрия Галилея» исторически неточно — Галилео Галилей, творчество которого относится к началу XVII столетия, разумеется, не знал этой геометрии, так как идея о существовании ряда равноправных геометрических систем относится к числу наибольших научных достижений XIX века. Более точным является наименование «геометрия, связанная с принципом относительности Галилея», близкое к названию этой книги, однако оно слишком длинно для того, чтобы его можно было употреблять систематически. Вот почему мы все же остановились здесь на названии «(неевклидова) геометрия Галилея», некоторым оправданием которого может служить та блестящая ясность и полнота, с которой сформулировал Галилей свой «принцип относительности», непосредственно приводящий к рассматриваемой (неевклидовой!) геометрии.

Наконец, несколько слов о структуре книги. Она является нестандартной: наличие в книге обширного Введения, состоящего из двух отдельных параграфов, Заключения, состоящего из трех параграфов, двух Приложений, обстоятельного списка литературы, даже непривычно (или здесь следует сказать «неприлично»?) большой объем настоящего Предисловия — все это, конечно, не часто встречается в сочинениях, рассчитанных на начинающего читателя, частично даже на школьника. Эта сложная структура книги связана как с необычностью темы (предпослать книге длинное Предисловие меня вынудило то обстоятельство, что, как я убедился, даже само ее название вызывает известное недоумение), так и (главным образом!) с ориентацией на разные категории читателей. Ясно, что Литература (в которой, впрочем, собрано много доступных малоопытному читателю книг и статей) обращена в первую очередь к преподавателю; учащийся средней школы может полностью ее игнорировать. Также и текст, напечатанный мелким шрифтом (частично он обращен к учителю математики средней школы) может

быть свободно пропущен без ущерба для понимания остальной части книги. Ознакомление с Введением необходимо для понимания всего последующего. В противоположность этому Заключение вполне может быть при первом чтении и опущено; однако мне кажется, что в дальнейшем, после некоторого перерыва быть может, целесообразно вернуться к §§ 10 и 11 Заключения. При этом следует иметь в виду, что написано Заключение довольно конспективно — так, например, автор никак не имел своей целью увеличить на единицу и без того достаточно обширный список существующих в русской литературе популярных изложений основ (специальной) теории относительности Эйнштейна, и весьма краткий § 10 бесспорно будет легче для тех читателей, которые предварительно ознакомились с какой-либо из перечисленных на стр. 301—302 книг [37]—[53в] (в первую очередь здесь хочется рекомендовать замечательные книги Макса Борна [38]—[38а]). Посвященный «неевклидовой геометрии Минковского» § 11 также является довольно конспективным и не рассчитан на быстрое чтение. В частности, он почти не содержит доказательств упоминаемых в нем теорем; инициативному читателю можно порекомендовать попытаться найти эти доказательства самостоятельно (тут может оказаться полезной литература, указанная в конце книги). Отмечу также, что я всюду стремился сопоставлять феномены «неевклидовой геометрии Галилея» с родственными им фактами обычной («школьной») геометрии Евклида; с этим параллельным изложением двух геометрических систем частично связан сравнительно большой объем книги.

Специального разговора заслуживают завершающие книгу Приложения А и Б. Формально их можно считать рассчитанными на того же читателя, что и основной текст книги: они также не требуют никаких предварительных знаний и поэтому доступны даже достаточно настойчивому школьнику. Следует, однако, предупредить, что слова «достаточно настойчивому» в предыдущей фразе никак не являются лишними: крайне лаконичные по манере изложения (и также почти не содержащие доказательств) Приложения составляют самую сложную часть книги — они заметно труднее для понимания, чем остальные разделы, и рассчитаны на вдумчивого читателя. Мне кажется даже, что хотя в тексте Приложений и отсутствуют прямые ссылки на понятия и теоремы, незнакомые читателю с минимальной подготовкой, на которую рассчитана эта книга, фактически Приложения будут доступны лишь несколько более подготовленному читателю, — скажем, знакомому с аналитической геометрией и владеющему основами неевклидовой геометрии Лобачевского. Понятно, что весь предшествующий Приложениям материал от них никак не зависит, так что эти Приложения можно и не читать. Однако, хотя Приложения А и Б и не составляют органической части книги, они представляются достаточно важными: изложив с большими подробностями

содержание самой простой из известных мне «не евклидовых» систем, я счел уместным также слегка приоткрыть перед читателем дверь в обширный мир иных, более сложных «геометрий», включающих «геометрию Галилея» как простейший частный случай, — и в меру своего умения выполнил это в Приложениях к настоящей книге.

Нумерация формул является независимой в пределах каждой главы книги; иными словами эта нумерация начинается с формулы (1) во Введении и затем снова — в главе I, в главе II, в Заключении и в Приложениях. Поэтому ссылка на какую-либо формулу в тексте книги, не сопровождаемая указанием страницы или номера параграфа, отсылает читателя к формуле с соответствующим номером в той же главе (причем самостоятельными главами считаются также Введение, Заключение и Приложения); во всех остальных случаях наряду с номером формулы обязательно указывается параграф книги, в котором эта формула приведена, или страница, на которой она напечатана.

В основу книги положено содержание лекции, которую я прочел в 1956/57 учебном году учащимся двух старших классов московских школ — участникам Школьного математического кружка при Московском государственном университете. В 1963/64 учебном году эта лекция в несколько расширенном виде была повторена в ряде выступлений перед учащимися восьмых классов, посещавшими Вечернюю математическую школу при МГУ; эти выступления были подытожены зачетом, который сдало несколько десятков школьников. Некоторое отражение в настоящей книге нашел также (менее элементарный и значительно больший по объему) специальный курс «Принципы относительности и неевклидовой геометрии», прочитанный автором некогда в МГПИ им. В. И. Ленина.

Приятная обязанность автора каждой книги состоит в том, чтобы поблагодарить лиц, которые ему помогли. Я рад исполнить здесь этот долг и выразить искреннюю признательность Г. Б. Гуревичу, дружеская критика которого бесспорно пошла на пользу этой книге. Традиционной уже для моих книг становится глубокая благодарность их редактору Ф. И. Кизнер, помощь которой в подготовке окончательного варианта книги я склонен ценить весьма высоко. Наконец, я не могу не отметить того огромного труда, который вложила М. С. Королева в изготовление эскизов чертежей — без ее помощи и энтузиазма настоящая книга вряд ли бы смогла увидеть свет.

И. М. Яглом

Март 1967 г.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Что такое геометрия?

Геометрия, которую каждый из нас хорошо знает из курса средней школы, изучает те или иные свойства плоских фигур или пространственных тел; при этом под *фигурой* (или *телом*) можно понимать просто множество точек плоскости (или пространства). Остановимся теперь на вопросе о том, какие именно свойства фигур и тел интересуют геометра. Этот вопрос допускает две различные трактовки, приводящие, впрочем, к одним и тем же результатам; обе эти трактовки будут нам впоследствии полезны и поэтому заслуживают нашего внимания.

Первая трактовка связана с понятием равенства фигур¹⁾. *Равными* (или *одинаковыми*) в геометрии называют те фигуры, которые имеют одни и те же свойства и потому неразличимы: так, все геометрические свойства изображенного на рис. 1 треугольника

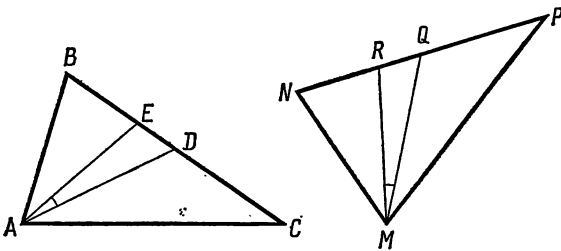


Рис. 1.

ABC совпадают со свойствами изображенного на том же рисунке треугольника MNP (равного треугольнику ABC , т. е. отличающегося от него лишь своим положением на плоскости, но не формой

¹⁾ В настоящей книге мы будем говорить главным образом о геометрии на плоскости (планиметрии), изучающей свойства плоских фигур.

и не размерами!): например, если мы знаем, что угол между медианой AD и биссектрисой AE треугольника ABC равен 15° , то можем быть уверены, что и угол между медианой MQ и биссектрисой MR треугольника MNP имеет ту же величину 15° . Именно по этой причине в геометрии часто такие треугольники, как ABC и MNP , принимают за один треугольник, а не за два: так, утверждение о том, что по двум сторонам $AB=c$ и $AC=b$ и углу $\angle A=\alpha$, заключенному между ними, можно построить лишь один

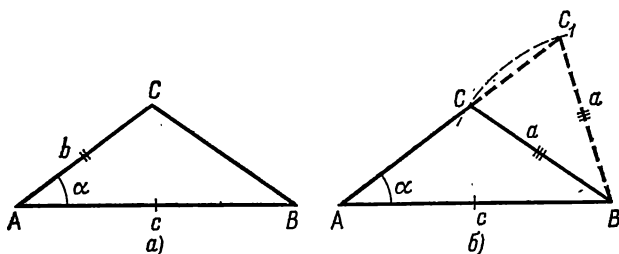


Рис. 2.

треугольник (рис. 2, а)¹), означает лишь, что любые два треугольника ABC и $A'B'C'$, имеющие одни и те же стороны $AB=A'B'$ ($=c$) и $AC=A'C'$ ($=b$) и один и тот же угол $\angle A=\angle A'$ ($=\alpha$), будут одинаковы, т. е. равны между собой. А так как равные фигуры (и только они) получаются одна из другой движением (это утверждение равносильно определению движения!), то из сказанного вытекает, что движение не меняет никаких свойств геометрических фигур. Знаменитый немецкий математик конца XIX и начала XX века Феликс Клейн (1849—1925) предложил положить последнее обстоятельство в основу определения самого предмета геометрии: *содержание геометрии составляет изучение тех свойств фигур, которые сохраняются при всевозможных движениях*²). Именно в силу такого подхода к геометрии можно объяснить, почему угол между какой-либо стороной нарисованного на классной доске треугольника

¹) В противоположность этому по двум сторонам $AB=c$ и $BC=a$ и углу $\angle A=\alpha$, противлежащему одной из них, вообще говоря, можно построить два треугольника ABC и ABC_1 (рис. 2, б).

²) На самом деле определение геометрии по Ф. Клейну является несколько более общим, чем приведенное нами (см. по этому поводу оригинальную статью Клейна [8] или Введения к первой, второй и третьей частям книги Яглома [9]—[10] и § 6 статьи Яглома и Атанасяна [11]); однако для наших целей вполне достаточно ограничиться сказанным выше. (Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы на стр. 300—303.)

и другой его стороной представляет интерес для геометра, в то время как угол той же стороны с краем доски отношения к геометрии не имеет: ведь первый угол сохраняется при любом движении треугольника, тогда как второй угол при таком движении меняется — и значит, он характеризует лишь расположение треугольника на доске, но отнюдь не его геометрические свойства.

Придирчивого критика выделенное курсивом определение геометрии может не удовлетворить: он скажет, что вопрос о том, какие свойства фигур заслуживают названия «геометрических», остается открытым, пока мы не дадим «строго математического» определения движения. То определение движения, которое было намечено выше (движение — это преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в новую точку A' так, что каждая фигура переходит в равную ей), по-видимому, не удовлетворит такого критика: ведь в школе равные фигуры обычно и определяются как такие, *которые можно перевести одну в другую движением*. Однако равенство фигур можно также определить и не апеллируя к понятию движения: *две фигуры F и F' называются равными, если между их точками можно установить такое (взаимно однозначное) соответствие, сопоставляющее каждой*

точке A фигуры F вполне определенную точку A' фигуры F' и наоборот, что расстояние AB между каждыми двумя точками A и B фигуры F равно расстоянию $A'B'$ между соответствующими им точками A' и B' фигуры F' (рис. 3). Конечно, это определение является довольно громоздким и трудным для запоминания, но для понимания оно, как нам кажется, несколько не трудно. А самое главное — это определение не связывает понятие равенства фигур с понятием движения; правда, вместо этого оно ссылается на новое понятие — «расстояние между двумя точками».

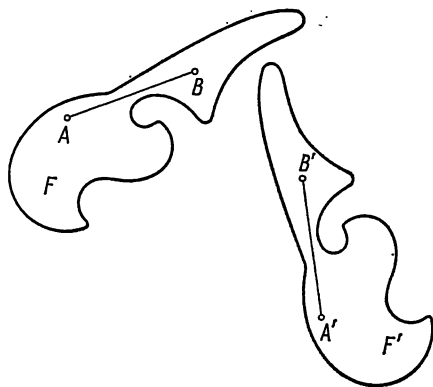


Рис. 3.

Разумеется, тот же вымышленный (или, быть может, как раз в этот момент читающий нашу книгу?) критик, в угоду которому мы пустились в эти пространные объяснения, может спросить: а что такое расстояние между двумя точками? Однако этот вопрос не является очень трудным: для того чтобы определить расстояние между двумя точками A и A_1 плоскости, достаточно ввести на плоскости какую-либо (какую угодно!) декартову прямоугольную систему координат; при этом, если координаты точки A равны x и y , а координаты точки A_1 равны x_1 и y_1 (рис. 4, а), то расстояние

d между точками A и A_1 можно определить по формуле¹⁾

$$d = AA_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}. \quad (1)$$

Таким образом, понятие расстояния между точками может быть сведено к простой алгебраической формуле, которая уже не нуждается в дальнейших пояснениях.

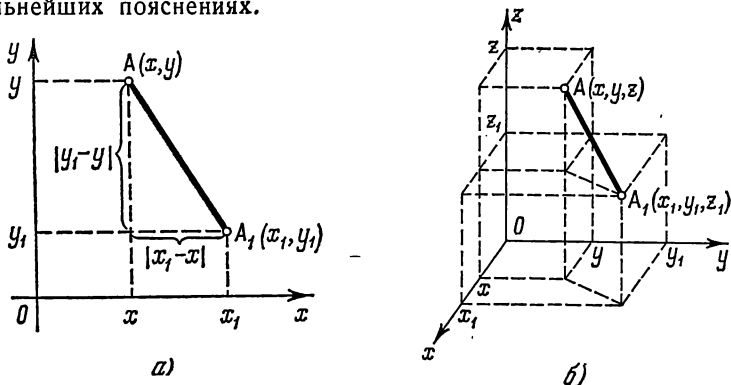


Рис. 4.

Последнее замечание вплотную подводит нас ко второй трактовке вопроса о том, какие свойства фигур относятся к компетенции геометрии. Хорошо известно — это было установлено еще в XVII веке знаменитыми французскими математиками Рене Декартом (1596—1650) и Пьером Ферма (1601—1665), — что всю геометрию можно построить на базе понятия числа, можно свести к алгебре: для этого достаточно только ввести на плоскости какую-либо систему координат (вроде изображенной на рис. 4, а). При этом каждой точке A плоскости будет отвечать пара чисел x и y — координат этой точки, а каждой фигуре, т. е. совокупности точек, — совокупность (множество) пар чисел.

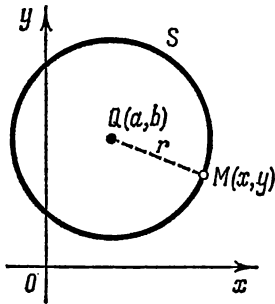


Рис. 5.

Так, например, множеству точек M , удаленных от фиксированной точки $Q(a, b)$ на постоянное расстояние r , — окружности S с центром Q и радиусом r (рис. 5), — отвечает множество таких

¹⁾ Аналогично этому расстоянию d между точками $A(x, y, z)$ и $A_1(x_1, y_1, z_1)$ пространства равно

$$d = AA_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} \quad (1a)$$

(рис. 4, б).

пар чисел (x, y) , что

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad (1')$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \quad (2)$$

т. е.

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = 0, \quad (2')$$

где

$$p = -a, \quad q = -b, \quad f = a^2 + b^2 - r^2. \quad (2a)$$

Точно так же прямой l , пересекающей ось ординат Oy в точке $S(0, s)$, удаленной от начала координат на расстояние $OS = s$ и образующей с осью абсцисс Ox такой угол $\angle xQM = \varphi$, что

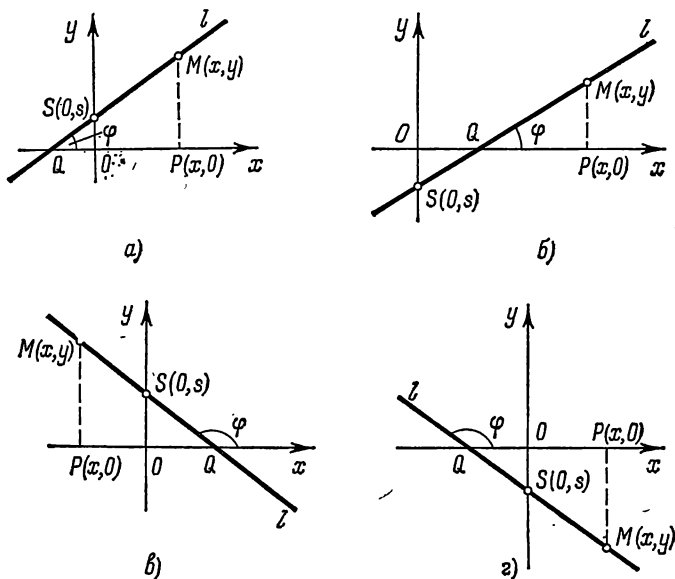


Рис. 6.

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MP}{QP} = k$ (рис. 6), отвечает совокупность всех таких пар чисел (x, y) , что

$$y = kx + s, \quad (3)$$

где как «свободный член» s , так и «угловой коэффициент» k могут быть положительными, отрицательными или равными нулю, — отрицательность углового коэффициента $k = \operatorname{tg} \varphi$ означает лишь, что $\angle xQM = \varphi$ (всегда отсчитываемый в направлении, противопо-

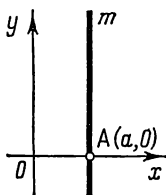
ложном направлении вращения часовой стрелки) тупой (ср. рис. 6, $a - \varepsilon$). Аналогично этому прямой m , параллельной оси ординат и пересекающей ось абсцисс в точке $A(a, 0)$ (удаленной от начала координат на расстояние $OA = a$ — положительное или неположительное), отвечает совокупность всевозможных пар чисел (x, y) , где

$$x = a \quad (4)$$

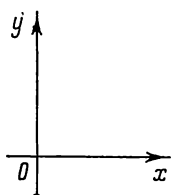
(рис. 7, а). [Прямой n , параллельной оси абсцисс (рис. 7, б) отвечает множество пар чисел (x, y) , где

$$y = b;$$

последнее равенство представляет собой просто частный случай равенства (3) — случай, отвечающий значению $k = 0$.] Иногда говорят



а)



б)

Рис. 7.

также, что окружности S соответствует уравнение (2), а прямая l — уравнение (3), или что окружность S записывается уравнением (2), а прямая l — уравнением (3).

Теперь естественно возникает вопрос о том, какие именно соотношения между координатами точек имеют геометрический смысл, а какие — случайны, зависят лишь от выбора системы координат.

Так, например, в уравнении окружности (2) величина r выражает величину радиуса — основную характеристику окружности; величина же p в уравнении (2') не имеет геометрического смысла — нетрудно найти две совершенно одинаковые (т. е. равные!) окружности, в уравнениях которых, имеющих форму (2'), коэффициенты p будут разными, или две различные (т. е. не равные!) окружности, записываемые двумя уравнениями вида (2') с одинаковыми коэффициентами p ¹⁾. Отчего же происходит это различие: почему одни величины в уравнениях линий имеют геометрический смысл, а другие нет?

Читатель, вероятно, уже сам догадался, как ответить на последний вопрос. Координаты (x, y) точки A зависят не только от самой этой точки, но еще от чего-то, непосредственно с этой точкой не связанного, — от выбора системы координат. Мы можем по-разному выбирать оси Ox и Oy системы (прямоугольных декартовых) координат — и координаты одной и той же точки A каждый раз будут другими; в соответствии с этим и геометрическая фигура, например, определенная линия, будет в разных системах координат описываться разными совокупностями пар чисел. Если какая-либо величина, зада-

¹⁾ Ясно, что $p = -a$ зависит лишь от абсциссы a центра Q окружности; но эта величина определяется не геометрическими свойствами окружности, а лишь выбором системы координат.

ваемая совокупностью пар чисел, отвечающих определенной фигуре F , не зависит от выбора системы координат, т. е. остается одной и той же при переходе от одной системы координат к другой, значит, эта величина имеет «объективный» характер, зависит лишь от фигуры F , связана с ее геометрическими свойствами. Если же при переходе от одной системы координат к другой рассматриваемая величина меняется, то она зависит от расположения фигуры F по отношению к выбранной системе координат, т. е. является характеристикой не самой интересующей нас фигуры F (рис. 8, а), а гораздо более сложного образа — фигуры F и «координатного креста», образованного осями Ox и Oy (рис. 8, б).

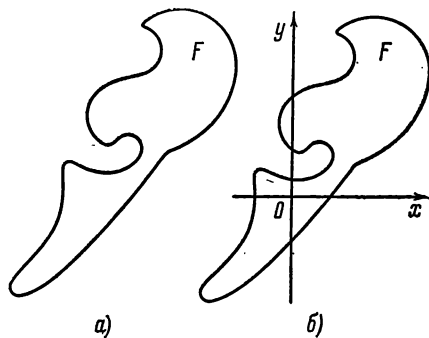


Рис. 8.

Сказанному выше можно придать такую форму, которая помогает реально отличать величины, имеющие геометрический смысл, от тех, которые связаны лишь с выбором определенной системы координат. Пусть точка A имеет в системе координат xOy (или в системе координат $\{x, y\}$, как мы будем писать в дальнейшем) координаты x и y , а в иной системе координат $x'O'y'$ (или $\{x', y'\}$) — координаты x' и y' ; примем еще, что координаты «старого» начала координат O в «новой» системе координат $x'O'y'$ равны a и b , а угол $\angle xOx'$ между осями Ox и $O'x'$ равен α (рис. 9)¹⁾. Наша задача состоит в том, чтобы определить «новые» координаты x', y' точки A , зная ее «старые» координаты x, y , а также величины a, b и α .

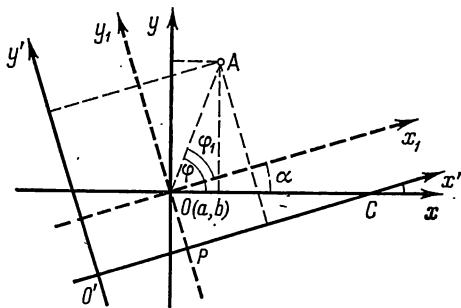


Рис. 9.

Для решения поставленной задачи полезно ввести в рассмотрение угол $\angle xOA = \varphi$ (углы, как всегда, отсчитываются в том направ-

¹⁾ Мы здесь, как это принято в аналитической геометрии, ограничиваемся «правыми» системами координат, т. е. такими, что поворот на 90° положительного луча Ox оси абсцисс, переводящий его в положительный луч Oy оси ординат, происходит в «положительном» направлении, т. е. в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки.

лении, которое в тригонометрии считается положительным), образуемый лучом OA с положительным лучом Ox оси абсцисс, и расстояние $OA=r^1$; при этом координаты x и y точки A определяются по формулам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (5)$$

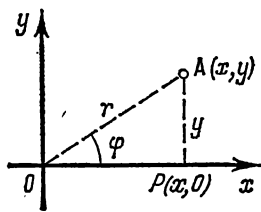


Рис. 10.

Ясно, что с осью Ox_1 луч OA образует угол $\varphi_1 = \varphi - \alpha$ (см. тот же рис. 9); поэтому

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1 = r \cos (\varphi - \alpha) = r (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = \\ &= r \cos \varphi \cdot \cos \alpha + r \sin \varphi \cdot \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y_1 &= r \sin \varphi_1 = r \sin (\varphi - \alpha) = r (\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha) = \\ &= r \sin \varphi \cdot \cos \alpha - r \cos \varphi \cdot \sin \alpha = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

С другой стороны, из того же рис. 9 следует:

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + a, \\ y' &= y_1 + b, \end{aligned}$$

где $a = O'P$, $b = PO$.

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b. \end{aligned} \quad (6)$$

Если нам известны «новые» координаты (x', y') точки, то, решив уравнения (6) относительно «неизвестных» x и y , мы получим формулы, выражающие «старые» координаты через «новые»:

$$\begin{aligned} x &= (x' - a) \cos \alpha - (y' - b) \sin \alpha, \\ y &= (x' - a) \sin \alpha + (y' - b) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6a)$$

Последние формулы можно также записать в виде

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \bar{\alpha} + y' \sin \bar{\alpha} + \bar{a}, \\ y &= -x' \sin \bar{\alpha} + y' \cos \bar{\alpha} + \bar{b}, \end{aligned} \quad (6б)$$

¹⁾ Величины r и φ принято называть *полярными координатами* точки A .

где \bar{a} и \bar{b} — координаты точки O' в системе координат $\{x, y\}$, а $\bar{\alpha} = \angle x' Cx = -\alpha$ — угол между осями $O'x'$ и Ox ¹⁾; это следует из того, что мы, разумеется, имеем право считать $\{x', y'\}$ «старой» системой координат, а $\{x, y\}$ — «новой» и воспользоваться теми же формулами (6) (в которых следует только заменить величины a, b и α имеющими аналогичный смысл величинами \bar{a}, \bar{b} и $\bar{\alpha}$).

Формулы (6) мы заключили в рамку, чтобы подчеркнуть их важность: они играют в геометрии фундаментальную роль, поскольку лишь с их помощью можно выяснить, имеет та или иная величина (определяемая методами аналитической геометрии, т. е. с помощью координат) геометрический смысл или не имеет. Например, расстояние

$$d = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \quad (1)$$

между двумя точками $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ имеет геометрический смысл: в самом деле, если мы перейдем к новой системе координат $\{x', y'\}$, то координаты точки A определяются формулами (6), а координаты точки A_1 — аналогичными формулами

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha + a, \\ y'_1 &= -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha + b. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2 &= \\ &= [(x_1 - x) \cos \alpha + (y_1 - y) \sin \alpha]^2 + \\ &\quad + [- (x_1 - x) \sin \alpha + (y_1 - y) \cos \alpha]^2 = \\ &= (x_1 - x)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (y_1 - y)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \\ &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2, \end{aligned}$$

что и доказывает независимость величины d от выбора системы координат.

Аналогично этому, если уравнение окружности S в «старой» системе координат $\{x, y\}$ имеет вид (2'), то для того, чтобы получить ее уравнение в «новых» координатах $\{x', y'\}$, надо в (2') вместо x и y подставить их выражения через «новые» координаты ((6а) или (6б)). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} [x' \cos \bar{\alpha} + y' \sin \bar{\alpha} + \bar{a}]^2 + [-x' \sin \bar{\alpha} + y' \cos \bar{\alpha} + \bar{b}]^2 + \\ + 2p (x' \cos \bar{\alpha} + y' \sin \bar{\alpha} + \bar{a}) + 2q (-x' \sin \bar{\alpha} + y' \cos \bar{\alpha} + \bar{b}) + f = 0 \end{aligned}$$

¹⁾ Точнее было бы положить $\bar{\alpha} = 360^\circ - \alpha$, так как мы условились отсчитывать углы в положительном направлении. Однако ясно, что эта неточность здесь несущественна, так как она не влияет на вид формул (6б).

или, по раскрытии скобок,

$$x'^2 + y'^2 + 2p'x' + 2q'y' + f' = 0,$$

где

$$p' = \bar{a} \cos \bar{\alpha} - \bar{b} \sin \bar{\alpha} + p \cos \bar{\alpha} - q \sin \bar{\alpha},$$

$$q' = \bar{a} \sin \bar{\alpha} + \bar{b} \cos \bar{\alpha} + p \sin \bar{\alpha} + q \cos \bar{\alpha},$$

$$f' = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2p\bar{a} + 2q\bar{b} + f.$$

Отсюда видно, что величина p , в самом деле, геометрического смысла не имеет (ибо, вообще говоря, $p' = \bar{a} \cos \bar{\alpha} - \bar{b} \sin \bar{\alpha} + p \cos \bar{\alpha} - q \sin \bar{\alpha} \neq p$). А вот величина

$$p^2 + q^2 - f$$

имеет геометрический смысл, ибо, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} p'^2 + q'^2 &= [(\bar{a} \cos \bar{\alpha} - \bar{b} \sin \bar{\alpha}) + (p \cos \bar{\alpha} - q \sin \bar{\alpha})]^2 + \\ &+ [(\bar{a} \sin \bar{\alpha} + \bar{b} \cos \bar{\alpha}) + (p \sin \bar{\alpha} + q \cos \bar{\alpha})]^2 = \\ &= \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + p^2 + q^2 + 2\bar{a}p + 2\bar{b}q \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$p'^2 + q'^2 - f' = p^2 + q^2 - f.$$

И действительно, из формул (2а) (стр. 17) следует, что

$$p^2 + q^2 - f = r^2,$$

где r — радиус окружности S .

Если уравнение прямой l в системе координат $\{x, y\}$ имеет вид (3), то в «новой» системе координат $\{x', y'\}$ эта прямая записывается уравнением

$$-x' \sin \bar{\alpha} + y' \cos \bar{\alpha} + \bar{b} = k(x' \cos \bar{\alpha} + y' \sin \bar{\alpha} + \bar{a}) + s.$$

Если $\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha} \neq 0$, то это уравнение можно переписать в виде

$$y' = k'x' + s',$$

где

$$k' = \frac{k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}}, \quad s' = \frac{k\bar{a} - \bar{b} + s}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}},$$

если же $\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha} = 0$, то в виде

$$x' = a',$$

где

$$a' = \frac{\bar{b} - k\bar{a} - s}{k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}.$$

Отсюда следует, что ни величина k' , ни величина s не имеют геометрического смысла — они связаны лишь с особенностями расположения прямой l по отно-

нению к системе координат. Однако тот факт, что для двух прямых—прямой l с уравнением (3) и прямой l_1 с уравнением

$$y = k_1 x + s_1 \quad (3a)$$

— справедливо равенство $k = k_1$, имеет определенный геометрический смысл, ибо в этом случае при переходе к другой системе координат мы имеем

$$k' = \frac{k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}} = \frac{k_1 \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha}} = k'_1,$$

— и действительно, прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами *параллельны*.

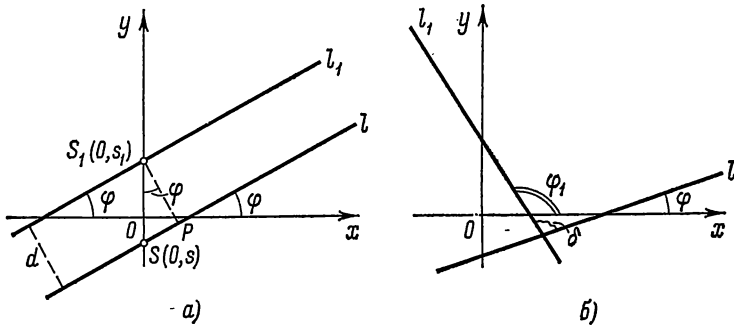


Рис. 11.

Далее, если прямые l и l_1 параллельны, т. е. $k = k_1$, то геометрический смысл имеет величина

$$\frac{|s_1 - s|}{\sqrt{k^2 + 1}};$$

в самом деле, очевидно,

$$s'_1 - s' = \frac{k\bar{a} - \bar{b} + s_1}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}} - \frac{k\bar{a} + \bar{b} - s}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}} = \frac{s_1 - s}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}}$$

и

$$k'^2 + 1 = \left(\frac{k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}} \right)^2 + 1 = \frac{(k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha})^2 + (\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})^2}{(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})^2} = \frac{k^2 + 1}{(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})^2},$$

так что

$$\frac{|s'_1 - s'|}{\sqrt{k'^2 + 1}} = \frac{|s_1 - s|}{|\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}|} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{|\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}|} = \frac{|s_1 - s|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

[Из рассмотрения изображенного на рис. 11, а треугольника SS_1P следует, что

$$\frac{|s_1 - s|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{SS_1}{\sqrt{tg^2 \varphi + 1}} = SS_1 \cos \varphi = S_1P = d$$

— расстояние между прямыми l и l_1 .]

Если прямые l и l_1 с уравнениями (3) и (3а) не параллельны, т. е. если $k \neq k_1$, то геометрический смысл имеет довольно сложная величина

$$\frac{k_1 - k}{k_1 k + 1}$$

— ведь

$$\begin{aligned} k'_1 - k' &= \frac{k_1 \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha}} - \frac{k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}} = \\ &= \frac{(k_1 \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha})(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}) - (k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha})(\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha})}{(\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha})(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})} = \\ &= \frac{k_1 - k}{(\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha})(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} k'_1 k' + 1 &= \frac{k_1 \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha}} \cdot \frac{k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha}} + 1 = \\ &= \frac{(k_1 \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha})(k \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}) + (\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha})(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})}{(\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha})(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})} = \\ &= \frac{k_1 k + 1}{(\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha})(\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha})}, \end{aligned}$$

так что действительно ¹⁾

$$\frac{k'_1 - k'}{k'_1 k' + 1} = \frac{k_1 - k}{k_1 k + 1}.$$

[Нетрудно установить геометрический смысл величины $\frac{k_1 - k}{k_1 k + 1}$: если $k = \operatorname{tg} \varphi$ и $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, где φ и φ_1 — углы, образованные прямыми l и l_1 с лучом Ox (рис. 11, б), то

$$\frac{k_1 - k}{k_1 k + 1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi + 1} = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \operatorname{tg} \delta,$$

где $\delta = \varphi_1 - \varphi$ — угол между прямыми l_1 и l .]

1) Если $\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha} = 0$ или $\cos \bar{\alpha} - k_1 \sin \bar{\alpha} = 0$, то в выражение $\frac{k'_1 - k'}{k'_1 k' + 1}$ вместо k' , соответственно k'_1 , надо подставить символ ∞ ; другими словами, если, например, $\cos \bar{\alpha} - k \sin \bar{\alpha} = 0$ (т. е. «новое» уравнение прямой l имеет вид $x' = a'$), то мы считаем, что

$$\frac{k'_1 - k'}{k'_1 k' + 1} = \lim_{k' \rightarrow \infty} \frac{k'_1 - k'}{k'_1 k' + 1} = \lim_{k' \rightarrow \infty} \frac{\frac{k'_1}{k'} - 1}{k'_1 + \frac{1}{k'}} = -\frac{1}{k'_1}$$

— в соответствии с правилами нахождения пределов. Но и в этом случае

$$\frac{k'_1 - k'}{k'_1 k' + 1} = -\frac{1}{k'_1} = \frac{-\cos \bar{\alpha} + k_1 \sin \bar{\alpha}}{k_1 \cos \bar{\alpha} + \sin \bar{\alpha}} = \frac{-\operatorname{ctg} \bar{\alpha} + k_1}{k_1 \operatorname{ctg} \bar{\alpha} + 1} = \frac{k_1 - k}{k_1 k + 1},$$

так как, очевидно, $k = \operatorname{ctg} \bar{\alpha}$,

Заметим еще, что на формулы (6) можно также взглянуть с несколько иной точки зрения. А именно, можно считать, что эти формулы определяют переход от точки $A(x, y)$ к точке $A'(x', y')$, записанной в той же самой системе (прямоугольных декартовых) координат $\{x, y\}$, т. е. определяют некоторое *преобразование*

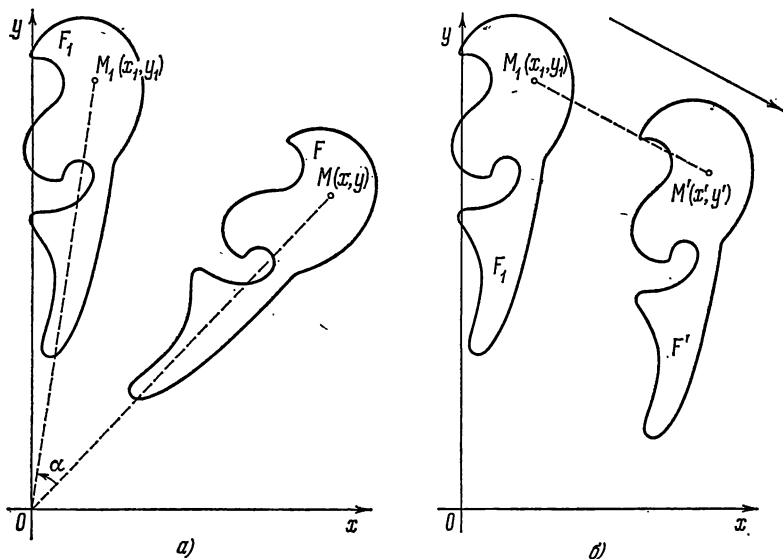


Рис. 12.

плоскости. Так как совокупность точек A и совокупность соответствующих им точек A' обладают в точности одними и теми же геометрическими свойствами (ведь это фактически одна и та же совокупность точек, только записанная в разных системах координат!), то ясно, что преобразование (6) должно переводить каждую фигуру F в точно такую же (т. е. равную первоначальной!) фигуру F' , откуда следует, что это преобразование есть *движение*. И в самом деле, преобразование (6) можно разбить на два преобразования: преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

выражающее *поворот* вокруг начала координат O на угол α (рис. 12, а), и преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + a, \\ y' &= y_1 + b, \end{aligned} \quad (8)$$

выражающее *параллельный перенос* (рис. 12, б). Таким образом, мы снова приходим к утверждению о том, что геометрия изучает свойства

фигур, сохраняющиеся при движениях (6)¹). Из сказанного вытекает также следующее обстоятельство, которое часто оказывается полезным: для того чтобы убедиться в том, что каждое движение (6) сохраняет некоторую величину, достаточно проверить, что *эта величина сохраняется при поворотах (7) и при параллельных переносах (8)*.

Аналогично можно рассмотреть и вопрос о геометрии в пространстве. Каждую точку в пространстве можно отнести к определенной системе (декартовых прямоугольных) координат $\{x, y, z\}$ (см. выше рис. 4, 6); при этом положение точки будет определяться тремя числами x, y и z (*абсцисса, ордината и аппликата*). Переход от одной системы координат $\{x, y, z\}$ к другой системе координат $\{x', y', z'\}$ задается весьма сложными формулами:

$$\begin{aligned} x' &= (\cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha) \cdot x + (\sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha) \cdot y + \\ &\quad + \sin \gamma \sin \alpha \cdot z + a, \\ y' &= -(\cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha) \cdot x + (-\sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha) \cdot y + \\ &\quad + \sin \gamma \cos \alpha \cdot z + b, \\ z' &= \sin \gamma \sin \beta \cdot x - \sin \gamma \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z + c, \end{aligned} \quad (9)$$

где a, b, c — координаты «старого» начала O относительно «новой» системы координат $\{x', y', z'\}$, а α, β, γ — так называемые *углы Эйлера*; эти углы

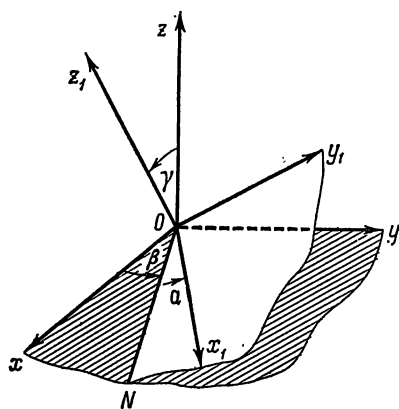


Рис. 13.

изображены на рис. 13, на котором $\{x_1, y_1, z_1\}$ — это «промежуточная» система координат (т. е. система, начало которой совпадает с началом «старой» системы), а оси параллельны осям «новой» системы), а прямая ON — линия пересечения плоскостей Oxy и Ox_1y_1 . При этом можно утверждать, что *стереометрия изучает те соотношения между координатами точек, которые «выдерживают» преобразования (9)*. Можно также смотреть на преобразования (9) и несколько по-другому, считая, что система координат фиксирована, а эти преобразования задают переход от точки $A(x, y, z)$ к новой точке $A'(x', y', z')$, т. е. некоторое *преобразование пространства*. Поскольку описываемые формулами (9) преобразования представляют собой не что иное, как *движения*²), то при этом мы снова приходим к точке зрения Клейна, утверждающей, что *геометрия изучает те свойства фигур и тел, которые сохраняются при движениях*.

¹) В соответствии с тем, что мы ограничиваемся рассмотрением лишь «правых» систем координат (см. подстрочное примечание на стр. 19), формулы (6) выражают не все без исключения движения плоскости, а лишь так называемые «собственные движения» или «движения 1-го рода», переводящие координатный крест, отвечающий «правой» системе координат, в координатный крест, отвечающий также «правой» системе координат (см. по этому поводу книги Перепелкина [5] или Яглома [9]).

²) Точнее, «собственные движения» или «движения 1-го рода» (см., например, книгу Перепелкина [6]).

§ 2. Что такое механика?

Основной целью настоящей книги является установление определенной связи между механикой и геометрией. В основе этой связи лежит глубокая аналогия между ролью в геометрии движений (понимаемых просто как преобразования плоскости или пространства, сохраняющие расстояния между точками, вне всякой связи с такими чисто механическими понятиями, как траектории точек при движении или скорости отдельных точек) и ролью в механике равномерных прямолинейных движений (вот тут уже понятие скорости—как о том свидетельствует само слово «равномерный» —играет основную роль!), или аналогия между ролью в геометрии декартовых прямоугольных координат и ролью в механике так называемых инерциальных систем отсчета. Этой аналогии и будет посвящен настоящий параграф.

Из трех основных разделов механики—кинematики, статики и динамики—нас здесь в первую очередь будет интересовать кинематика, изучающая движения отдельных материальных точек и материальных тел. При этом сам термин «движение» в механике понимается совсем по-другому, чем в геометрии,—настолько по-другому, что даже хотелось бы иметь здесь два разных названия, что, однако, противоречит твердо укоренившейся традиции. Во второй фразе настоящего параграфа мы уже коснулись вскользь этого различия; теперь остановимся на нем подробнее.

Под словом «движение» в геометрии понимается некоторое точечное преобразование, сопоставляющее каждой точке A определенную точку A' ,—и только это преобразование. Таким образом, вопрос о том, «каким образом» точка A перешла в точку A' , для геометра бессмыслен: само сопоставление $A \rightarrow A'$ —это и есть движение, и ни что, кроме этого сопоставления, его не интересует. В противоположность этому в механике «движение»—это всегда процесс, переводящий точку A в новую точку A' ; при этом здесь представляют интерес и траектории отдельных точек, и скорости или ускорения этих точек в отдельные моменты времени. Наиболее принципиальное отличие механических движений от геометрических как раз и состоит в том, что в механике учитывается фактор *времени*, в то время как геометрия вообще не знает этого понятия. Полное описание «механического» движения, переводящего фигуру F в фигуру F' , задается указанием того, как изменяет положение каждая точка A фигуры F с течением времени; используя привычные для математики термины и обозначения, можно говорить о *функциональной зависимости* $A = A(t)$ положения точки A фигуры F от времени t . Эта функциональная зависимость задается в некотором интервале времени: $t_0 \leq t \leq t_1$; при этом в момент t_0 рассматриваемая фигура занимает исходное положение F (так что

$A(t_0) = A$ — это точка фигуры F , а в момент t_1 — положение F' (так что $A(t_1) = A'$ — точка фигуры F' ; см. рис. 14).

Разумеется, главный интерес для механики как технической дисциплины представляют движения трехмерных тел. Мы, однако, наряду с этим будем рассматривать также плоские движения, вроде того, которое изображено на рис. 14. Понятию

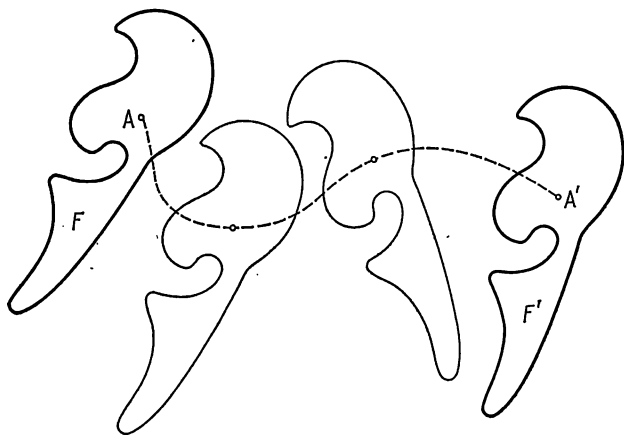


Рис. 14.

плоского движения можно придать следующий реальный смысл. Рассмотрим некоторое тело Φ и так называемое *плоско-параллельное* движение этого тела, т. е. движение, при котором все точки тела Φ смещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости π (рис. 15, а). Ясно, что при этом движение будет полностью характеризоваться процессом перемещения точек параллельного плоскости π сечения этого тела, например движением по плоскости π плоской фигуры F , по которой пересекает тело Φ плоскость π . Наряду с этим мы будем также рассматривать *прямолинейное* движение, при котором все точки тела Φ двигаются с одинаковыми скоростями в направлении определенной прямой o (рис. 15, б). Ясно, что такое движение полностью характеризуется процессом движения произвольно выбранной точки A тела Φ . Скорость прямолинейного движения можно характеризовать не вектором, а просто числом (положительным или отрицательным, в зависимости от того, в какую сторону вдоль прямой происходит движение) — ведь направление движения известно нам заранее. Также и положение точки A на прямой o характеризуется просто (положительным или неположительным!) числом x , измеряющим (взятое с определенным знаком) расстояние точки A от фиксированного на прямой o начала отсчета O ;

число x равно величине направленного отрезка \overline{OA} , т. е. равно длине отрезка, если направление отрезка (от точки O к точке A) совпадает с заранее выбранным на прямой положительным направлением, и числу, противоположному длине, в противном случае. [Указанием на то, что отрезок считается направленным,

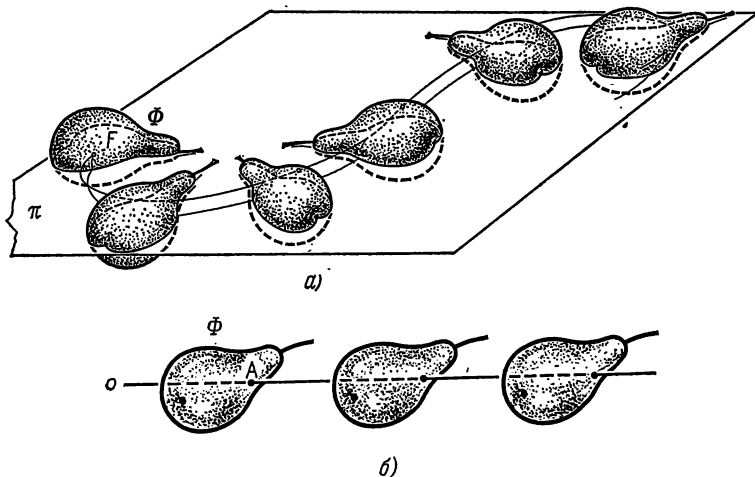


Рис. 15.

будет впоследствии служить черточка над обозначающими отрезок буквами; таким образом, OA —это обычный (ненаправленный) отрезок, а \overline{OA} —направленный отрезок.] То обстоятельство, что как скорость точки, так и положение точки на прямой характеризуются одним числом, бесспорно является преимуществом; также и в других отношениях прямолинейное движение значительно проще плоскопараллельного движения, а тем более самого общего движения тел в пространстве. Стремлением к простоте вызвано то, что в этой книге основное внимание будет уделено прямолинейным движениям (материальной) точки A вдоль прямой o .

Выясним теперь, какие свойства движущихся тел интересуют механика, какие понятия имеют механический смысл, а какие—не имеют. На первый взгляд может показаться, что основными понятиями механики (точнее, кинематики) являются «траектория», «скорость» и «ускорение»: траектория точки A —это просто линия, вычерчиваемая точкой A в процессе ее движения (см., например, рис. 14); средняя скорость точки A на интервале от момента t_0 до момента t_1 определяется как длина пути между точками $A(t_0)$ и $A(t_1)$, деленная на разность $t_1 - t_0$, а мгновенная скорость

в момент t —как предел средней скорости на малом интервале времени от t до $t + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ («производная от пути по времени»); *среднее ускорение* на интервале от t_0 до t_1 определяется как величина приращения скорости на этом интервале, деленная на $t_1 - t_0$ ¹⁾, а *мгновенное ускорение* в момент t —как предел среднего ускорения на малом интервале от t до $t + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ («производная от скорости по времени»). Однако на самом деле положение здесь оказывается совсем иным: ни траектории, ни скорости точек сами по себе никакого механического смысла не имеют и рассматриваться механикой не могут.

Для того чтобы объяснить это положение, которое многим читателям сначала, возможно, покажется удивительным, мы предоставим слово знаменитому Галилео Галилею (1564—1642):

«Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у вас там также большой сосуд с водой и плавающими в нем маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху ведро, из которого вода будет капать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью, и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них вы не сможете установить, движется корабль или стоит неподвижно. Прыгая, вы переместитесь по полу на то же расстояние, что и раньше, и не будете делать больших прыжков в сторону кормы, чем в сторону носа, на том основании, что корабль быстро движется, хотя за то время, как вы будете в воздухе, пол под вами будет двигаться

1) Здесь мы считаем, что интервал времени выбран так, что на протяжении этого интервала скорость все время возрастает (точнее сказать, не убывает) или, наоборот, все время убывает (не возрастает).

в сторону, противоположную вашему прыжку, и, бросая какую-нибудь вещь товарищу, вы не должны будете бросать ее с большей силой, когда он будет находиться на носу, а вы на корме, чем когда ваше взаимное положение будет обратным; капли, как и ранее, будут падать в нижний сосуд, и ни одна не упадет ближе к корме, хотя, пока капля находится в воздухе, корабль пройдет много пядей; рыбы в воде не с большим усилием будут плыть к передней, чем к задней части сосуда; настолько же проворно они бросятся к пище, положенной в какой угодно части сосуда; наконец, бабочки и мухи по-прежнему будут летать во всех направлениях, и никогда не случится того, чтобы они собрались у стенки, обращенной к корме, как если бы устали, следуя за быстрым движением корабля, от которого они были совершенно обособлены, держась долгое время в воздухе; и если от капли зажженного ладана образуется немного дыма, то видно будет, как он восходит вверх и держится наподобие облачка, двигаясь безразлично, в одну сторону не более, чем в другую...»

(«Диалог о двух главнейших системах мира», день второй; ср. также с «Посланием к Франческо Инголи»¹⁾).

В этом пользующемся заслуженной известностью и часто цитируемом отрывке содержится красочное, высокохудожественное описание одного из фундаментальнейших принципов механики, который мы сегодня называем принципом относительности Галилея и который можно кратко сформулировать в виде следующего утверждения: *никакие механические эксперименты, производимые внутри физической системы, не могут позволить обнаружить равномерное и прямолинейное движение этой системы.* Таким образом, механические явления, происходящие в двух «лабораториях», одна из которой движется по отношению к другой равномерно и прямолинейно (например, на покоящемся и на движущемся кораблях, о которых говорит в своем «Диалоге» Галилей), с точки зрения наблюдателей, находящихся в одной и в другой лабораториях, совершенно одинаковы, неразличимы. Из принципа относительности Галилея вытекает, что все изучаемые механикой свойства тел сохраняются при «преобразованиях» физической системы, состоящих в придании ей постоянной по величине и по направлению скорости (эти преобразования называются **преобразованиями Галилея**). Иными словами, *механический смысл имеют только такие свойства (движущихся) тел, которые не меняются при преобразованиях Галилея* (ср. данные в § 1 определением «геометрических свойств» как таких, которые сохраняются при движениях!).

¹⁾ Г а л и л е й [13], стр. 286—287 (ср. также стр. 85—86 там же).

Принципу относительности Галилея можно придать «геометризованную» форму, совершенно непосредственно связывающую его с определением геометрии по Клейну. Предположим, для простоты, что мы ограничиваемся механическими явлениями, которые можно считать происходящими в одной плоскости, например, изучаем движения физических тел на ограниченном участке земной поверхности, который можно мыслить себе плоским. Рассматриваемую плоскость мы, как обычно, отнесем к декартовым прямоугольным координатам $\{x, y\}$; при этом, скажем, механическое движение произвольной

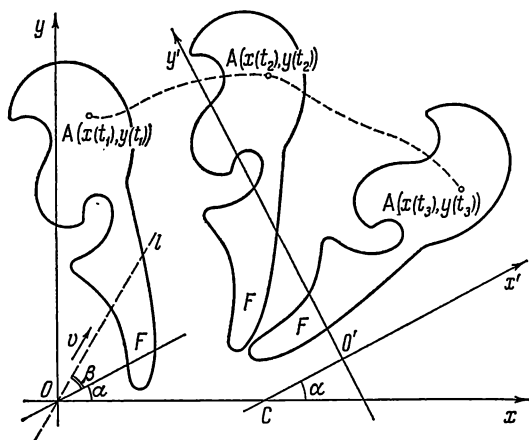


Рис. 16.

точки A будет описываться формулами, указывающими, как изменятся во времени координаты x, y этой точки:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t),\end{aligned}\tag{10}$$

где t — время (а движение фигуры F будет задаваться подобными же формулами, указывающими законы движения в всех точках $A=A(x, y)$ этой фигуры¹⁾). Но совершенно ясно, что переход к иной системе координат $\{x', y'\}$, которая получается из первоначальной системы координат поворотом осей Ox и Oy на произвольный угол α и сдвигом начала O системы координат в какую-то точку O' (рис. 16),

¹⁾ По существу, здесь речь идет о плоско-параллельных движениях пространственных тел (см. стр. 28 и рис. 15, а): так как плоско-параллельное движение тела Φ полностью определяется движением его плоского сечения F , то мы можем ограничиться рассмотрением точек A тела Φ , принадлежащих плоской фигуре F , т. е. определяемых указанием двух координат x, y .

разумеется, никак не может отразиться на содержании физических законов, которые, следовательно, должны одинаково записываться в координатах $\{x, y\}$ и в координатах $\{x', y'\}$, связанных с координатами $\{x, y\}$ формулами (6) (стр. 20):

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a, \\y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b,\end{aligned}\tag{6}$$

где $\alpha = \angle xOx'$ — угол между осями Ox и $O'x'$, а (a, b) — координаты точки O в «новой» системе координат. Поэтому любое предположение, имеющее механический смысл, должно сохранять свою форму при преобразованиях (6). Принцип же относительности Галилея утверждает, что, более того, все механические процессы будут описываться в координатах x, y и в координатах x', y' совершенно одинаково также и в том случае, когда начало и оси системы координат $\{x', y'\}$ движутся равномерно и прямолинейно по отношению к системе координат $\{x, y\}$ или, что то же самое, начало и оси «старой» системы координат $\{x, y\}$ движутся равномерно и прямолинейно по отношению к «новой» системе координат $\{x', y'\}$. Но если начало O системы координат $\{x, y\}$ движется со скоростью v по прямой l , образующей с осью $O'x'$ угол β (см. рис. 16), то координаты $a(t)$ и $b(t)$ начала O «старой» системы в «новой» системе координат $\{x', y'\}$ в момент времени t будут равны

$$\begin{aligned}a(t) &= a + v \cos \beta \cdot t, \\b(t) &= b + v \sin \beta \cdot t\end{aligned}$$

(где a и b — координаты точки O в системе $\{x', y'\}$ в момент $t=0$), и, следовательно, связь между координатами x', y' и x, y одной и той же точки A в «новой» и в «старой» системах координат будет описываться формулами

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + (v \cos \beta) t + a, \\y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + (v \sin \beta) t + b.\end{aligned}\tag{11}$$

Таким образом, все имеющие механический смысл явления должны записываться формулами, сохраняющими свой вид при преобразованиях (11) (или, как привыкли говорить математики, *инвариантными относительно преобразований* (11)).

Формулы (11) можно еще несколько дополнить. Заметим, что как в формулы (10), описывающие закон движения некоторой точки $A = A(x, y)$, так и в сами формулы (11), кроме координат x и y , входит также время t — ведь основное отличие механических движений от геометрических как раз и состоит в том, что в физике учитывается (игнорируемый геометрами!) фактор времени. Но ясно, что выбор того или иного начала отсчета времени никак не может отразиться на записи физических законов. Так, например, древние

греки отсчитывали время от первой олимпиады (1 июля 776 г. до н. э.); древние римляне — от основания Рима (21 апреля 753 г. до н. э.); мы до сих пор отсчитываем время от рождения Христа; мусульмане во многих странах отсчитывают время от дня бегства «пророка» Мухамеда (или Магомета) из Мекки в Медину (так называемая «Хиджра»¹) — 16 июля 622 г. н. э.) и т. д., — и во всех этих системах летосчисления (чаще всего берущих начало от каких-то мифических событий!) все физические законы записываются совершенно одинаково, так что переход от одной календарной эры к другой никак не может отразиться на содержании учебников по физике. Поэтому к формулам (11) следует добавить также формулу

$$t' = t + d,$$

означающую перенос начала отсчета времени; здесь d — время «старого» начала отсчета времени (т. е. момента $t = 0$) в «новой» системе отсчета. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} x' &= (\cos \alpha) x + (\sin \alpha) y + (v \cos \beta) t + a, \\ y' &= -(\sin \alpha) x + (\cos \alpha) y + (v \sin \beta) t + b, \\ t' &= t + d. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) мы также заключили в рамку, чтобы подчеркнуть их фундаментальную важность: математический смысл принципа относительности Галилея и заключается в том, что все *имеющие механический смысл свойства* (плоско-параллельных) *движений записываются формулами, сохраняющими свой вид при всех преобразованиях* (12).

Аналогично формулам (6) предшествующего параграфа, формулы (12) можно понимать двояко. С одной стороны, они описывают переход от одной системы отсчета $\{x, y, t\}$ к другой системе $\{x', y', t'\}$; при этом все системы отсчета, связанные друг с другом преобразованиями вида (12) (с разными параметрами $\alpha, \beta, v, a, b, d$), равноправны между собой и таковы, что механические законы записываются в этих системах отсчета наиболее простым, «естественным» образом. Последнее утверждение имеет следующий смысл. Рассмотрим наряду с исходной системой координат $\{x, y\}$ новую систему координат $\{x', y'\}$, движущуюся относительно системы координат $\{x, y\}$ не равномерно и прямолинейно, а каким-то другим более сложным образом, например вращающуюся

¹) Арабское слово «бегство»; с переезда Магомета в Медину, по существу, начался рост влияния его учения в арабском мире, в силу чего «хиджра» является одним из главных религиозных праздников мусульман.

с угловой скоростью ω вокруг начала O «старой» системы координат $\{x, y\}$ (рис. 17). При этом на тела, покоящиеся по отношению к подвижной системе координат $\{x', y'\}$, будут действовать посторонние силы, связанные с движением системы координат $\{x', y'\}$, — так называемые *силы инерции*; в рассматриваемом случае это будет направленная от центра вращения «центробежная сила», действие которой мы явственно ощущаем на себе при поворотах трамвая, в котором мы едем (с трамваем связана система координат, по отношению к которой мы покоимся). Те же системы отсчета, в которых отсутствуют силы инерции и все физические законы записываются в своем естественном виде (не усложненной необходимостью учета «посторонних» сил инерции), называются *инерциальными системами отсчета*; таких инерциальных систем отсчета существует бесконечно много, и переход от одной из них к другой осуществляется с помощью преобразований (12)¹.

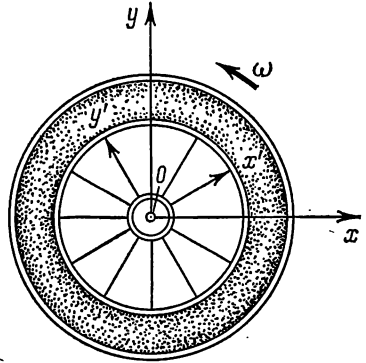


Рис. 17.

С другой стороны, формулы (12) можно понимать как переход от одного *события* $A(x, y, t)$ (характеризуемого указанием места $A(x, y)$ и времени t) к другому событию $A'(x', y', t')$, причем точка $A'(x', y')$ движется относительно точки $A(x, y)$ равномерно и прямолинейно, т. е. эти формулы можно понимать как некоторое преобразование в физическом пространственно-временном мире; эти преобразования (12) представляют собой не что иное, как преобразования Галилея.

Теперь уже совсем просто объяснить, почему, казалось бы, столь простые и важные понятия, как траектория движущейся точки или ее скорость, на самом деле не имеют никакого физического смысла и, стало быть, не могут фигурировать ни в одном физическом законе. В самом деле, траектория движущейся точки очевидным образом зависит от выбора той или иной из инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. По этому поводу также хочется вспомнить Галилея, который сравнивал траекторию конца пера, которым рисует разные фигуры находящийся на корабле художник, по отношению к быстро движущемуся кораблю с траекторией того же конца пера по отношению к находящемуся на суше наблюдателю — последняя представ-

¹ По поводу всех затронутых здесь вопросов читателю можно порекомендовать обстоятельные книги Хайкина [14]—[15] или более краткую брошюру Седова [16].

ляет собой почти прямую линию, направленную по пути следования корабля, и лишь незначительно отклоняется от строгой прямолинейности¹⁾. Точно так же и скорость точки A зависит от выбора той или иной из инерциальных систем отсчета: если корабль движется в море прямолинейно и равномерно, то покоящееся по отношению к кораблю тело может относительно земли двигаться весьма быстро. Однако *относительная скорость* одного тела по отношению к другому, например скорость, с которой некоторый бегун приближается к финишной ленте, имеет строгий механический смысл, поскольку она не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой рассматриваются оба эти тела: и в связанной с землей системой координат, и в системе координат, связанной с неподвижными звездами, в которой и бегун и натянута на финише лента перемещаются с колоссальной, поистине «космической» скоростью, относительная скорость бегуна, характеризующаяся тем, как быстро сокращается расстояние между ним и лентой, имеет одно и то же значение. Еще более важно то, что «абсолютный» смысл (не зависящий от выбора той или иной инерциальной системы отсчета) имеет *ускорение* каждой движущейся точки: ведь ускорение связано с разностью скоростей (ср. выше, стр. 30), а переход от одной инерциальной системы отсчета к другой системе сказывается лишь в том, что все рассматриваемые скорости увеличиваются (или уменьшаются) на одну и ту же величину, так что разность скоростей при этом никак не меняется.

Известно, что скорость точки выражается вектором, т. е. представляет собой векторную величину; при этом скорость v произвольной точки A в «старой» системе координат $\{x, y\}$ (так называемая *абсолютная скорость* точки) отличается от скорости v' той же точки относительно «новой» системы координат $\{x', y'\}$ (от *относительной скорости* точки A) на векторную величину a , совпадающую со скоростью начала O' системы координат $\{x', y'\}$ относительно системы координат $\{x, y\}$ (так называемая *переносная скорость* системы координат $\{x', y'\}$ относительно системы координат $\{x, y\}$):

$$v = v' + a$$

(ср. ниже, стр. 61). Поэтому, если v_1 и v_2 — скорости двух тел (например, бегуна и финишной ленты) в одной системе отсчета, а v'_1 и v'_2 — их скорости в другой системе отсчета, то

$$v_1 = v'_1 + a \quad \text{и} \quad v_2 = v'_2 + a,$$

так что

$$v_1 - v_2 = v'_1 - v'_2.$$

Совершенно так же обстоит дело и в том случае, когда v_1 и v_2 — скорости одного тела в два разные момента времени t_1 и t_2 : поскольку мы считаем, что система $\{x', y'\}$ движется относительно $\{x, y\}$ прямолинейно и равномерно, значит, (векторная) величина a с течением времени не меняется, то и тут

$$v_1 = v'_1 + a, \quad v_2 = v'_2 + a \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 = v'_1 - v'_2.$$

¹⁾ См. Г а л и л е й [13], стр. 270—272.

Поэтому также и среднее ускорение $\omega_{\text{ср}} = \frac{v_1 - v_2}{t_1 - t_2}$ и мгновенное ускорение $\omega_{\text{мгнов}} = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \omega_{\text{ср}}$ не зависят от выбора инерциальной системы отсчета ¹⁾.

До сих пор мы говорили о «двумерных» (точнее, плоскопараллельных) движениях, затрагивающих точки $A(x, y)$ некоторой плоскости (плоскости xOy). Однако ничто не мешает нам ограничиться еще более простыми *прямолинейными движениями*, при которых приходится учитывать лишь движения точек $A = A(x)$ некоторой фиксированной прямой o (прямой Ox). При этом переход от одной инерциальной системы отсчета на прямой к другой задается формулами, указывающими, что начало O системы координат $\{x\}$ движется относительно начала O' системы координат $\{x'\}$ с постоянной скоростью v (рис 18), т. е. что координата $a(t)$ (подвижной!) точки O в «новой» системе координат $\{x'\}$ в момент времени t равна

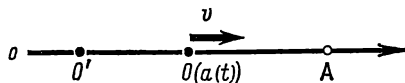


Рис. 18.

$$a(t) = a + vt,$$

где t — время, а a — координата точки O в момент времени $t = 0$. А так как координаты x и x' одной и той же точки A в «старой» системе координат $\{x\}$ с началом O и в «новой» системе координат $\{x'\}$ с началом O' связаны, очевидно, зависимостью

$$x' = x + a(t)$$

(см. тот же рис. 18²⁾), то мы имеем

$$x' = x + vt + a.$$

Присоединив к этой формуле еще формулу

$$t' = t + b,$$

¹⁾ Мы рекомендуем читателю, знакомому с основами дифференциального исчисления, самостоятельно проверить, что если $r = r(x, y)$ — радиус-вектор (движущейся) точки $A(x, y)$, то ускорение $r'' = \frac{d^2 r}{dt^2}$ этой точки сохраняет одно и то же значение при переходе от системы отсчета $\{x, y, t\}$ к системе отсчета $\{x', y', t'\}$ по формулам (12).

²⁾ Мы здесь ограничиваемся рассмотрением, скажем, «правых» систем координат, в которых положительное направление оси Ox (единственная ось координат на прямой!) заранее выбрано (например, является направлением вправо от точки O , если считать рассматриваемую прямую o горизонтальной; ср. с подстрочным примечанием на стр. 19).

указывающую на возможность переноса начала отсчета времени, мы окончательно получим следующие формулы:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + vt + a, \\ t' &= t + b, \end{aligned}} \quad (13)$$

указывающие, как записывается переход от одной инерциальной системы координат к другой (т. е. преобразования Галилея), если ограничиться только прямолинейными движениями.

Разумеется, строго прямолинейные движения встречаются в физике не так уж часто; поэтому механика таких движений представляет меньший интерес, чем механика плоско-параллельных движений или, тем более, механика общих движений пространственных (т. е. «трехмерных») тел. Однако изучение механики естественно начинать с простейшего случая прямолинейного движения, где различие между механическими и чисто геометрическими рассуждениями, связанное с фундаментальным принципом относительности Галилея, выступает в наиболее отчетливом виде, не затушеванном техническими трудностями, возникающими, например, в связи с необходимостью учитывать векторный характер основных механических величин (скоростей, ускорений, сил). При этом изучение прямолинейных движений, включающее, например, учение о (небольших) перемещениях материальных точек под влиянием силы тяжести (эти перемещения направлены по вертикали!), имеет и определенный «прикладной» интерес; с другой стороны, сравнение, скажем, формул (13) с гораздо более сложными формулами (12) (не говоря уже о формулах (16), стр. 42) хорошо иллюстрирует выгоду в простоте изложения при рассмотрении только прямолинейных движений.

Еще один важный аргумент в пользу рассмотрения одних лишь прямолинейных движений связан с возможностью использования в этом последнем случае весьма простых графических иллюстраций. Мы уже знаем, что планиметрия изучает те факты, которые в координатах $\{x, y\}$ записываются формулами, сохраняющими свой вид при движениях (6):

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Аналогично этому в области прямолинейных движений механика интересуют те факты, которые в «координатах» $\{x, t\}$ записываются формулами, сохраняющими вид при преобразованиях Галилея (13):

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + vt + a, \\ t' &= t + b. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Условимся обозначать положение точки $A(x)$ на прямой o в момент времени t с помощью вспомогательной точки $A(x, t)$ (двумерной) плоскости xOt с координатами x и t (рис. 19, а, б). При этом мы придем к своеобразной «геометрии», в которой «геометрический» (точнее было бы сказать, механический!) смысл имеют лишь те факты, которые записываются формулами, сохраняющими свой вид при всевозможных преобразованиях (13), играющих, таким образом, роль «движений» этой геометрии, не меняющих ни одного из интересующих нас свойств фигур. Этой-то геометрии, которой можно присвоить наименование «геометрия принципа относительности Галилея» или, короче, просто «геометрия Галилея», и будут посвящены главы I и II настоящей книги.

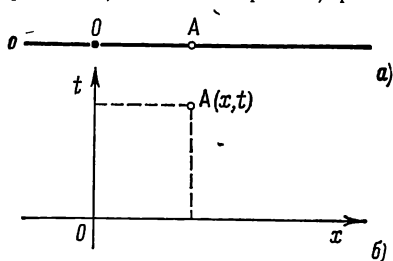


Рис. 19.

Геометрию Галилея мы будем рассматривать параллельно с обычной геометрией или геометрией Евклида, называемой так по имени великого греческого математика Евклида, жившего (и преподававшего) в городе Александрия в Египте в III веке до н. э. и оставившего нам первый из дошедших до нас (и притом замечательный!) учебник геометрии, по которому много веков подряд люди знакомились с этой наукой¹⁾. Геометрия Евклида отличается от геометрии Галилея лишь тем, что в первой из них движения записываются формулами (6), в то время как в «плоскости Галилея» движения имеют совсем иной вид (13). Для того чтобы облегчить сопоставление этих двух замечательных «геометрий», мы будем в дальнейшем обозначать координаты точек плоскости Галилея теми же буквами x и y , что и координаты точек плоскости Евклида (обычной плоскости); другими словами, мы условимся обозначать координату подвижной точки A прямой o буквой y (а не x), а время — буквой x (а не t). При этом геометрию Евклида и геометрию Галилея можно будет охарактеризовать как изучение тех свойств фигур координатной плоскости $\{x, y\}$, которые сохраняются, соответственно, при преобразованиях (6) и при преобразованиях

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (13a)$$

(ср. с формулами (13); заметим, что буквы a и b имеют в формулах (13) и (13a) разный смысл). Эти две «геометрии» мы будем изучать

¹⁾ Учебник Евклида переведен и на русский язык (см. Евклид [1]—[3]).

параллельно; однако при использовании чисто геометрического подхода к фактам геометрии Галилея мы рекомендуем читателю не терять из виду возможности механического истолкования любого из этих фактов.

Заметим, наконец, что каждое преобразование Галилея (13а) можно разбить на два преобразования: преобразование

$$\begin{aligned} x_1 &= x & \left(\begin{array}{l} x_1 = x + vt \\ \text{или} \\ t_1 = t \end{array} \right), \\ y_1 &= vx + y \end{aligned} \quad (14а)$$

отражающее равномерное движение со скоростью v начала O_1 подвижной системы координат $\{x_1\}$ вдоль прямой O^1 , и преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + a & \left(\begin{array}{l} x' = x_1 + b \\ \text{или} \\ t' = t_1 + a \end{array} \right), \\ y' &= y_1 + b \end{aligned} \quad (14б)$$

отражающее перенос в другую точку O' начала отсчета координат на прямой и изменение начала отсчета времени. Геометрический

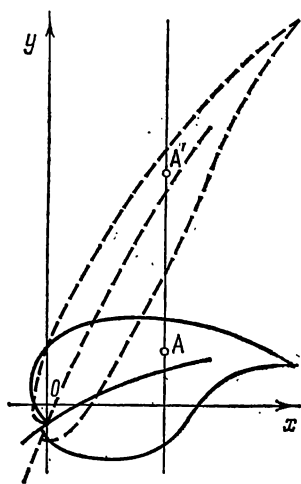


Рис. 20.

смысл преобразования (14б) (или преобразования (8); см. выше, стр. 25) уже известен — это есть *параллельный перенос* (см. рис. 12, б на стр. 25). Что же касается преобразования (14а), то оно представляет собой так называемый *сдвиг* в направлении оси Oy с коэффициентом сдвига v , при котором все точки оси Oy остаются неподвижными, а каждая другая точка смещается в направлении этой оси, причем величина смещения пропорциональна (с коэффициентом пропорциональности v) расстоянию точки от оси Oy (при этом точки, расположенные по одну сторону от оси Oy , сдвигаются в одном направлении, а точки, расположенные по другую сторону оси Oy , — в противоположном направлении; см. рис. 20)²⁾. Таким образом, для того чтобы

(13а) сохраняет значение некоторой величины, достаточно проверить, что значение этой величины *сохраняют сдвиги* (14а) и *параллельные переносы* (14б) — обстоятельство, которое нам ниже часто будет полезно.

¹⁾ Мы считаем, что в момент времени $t=0$ точка O_1 совпадает с началом O «старой» системы координат.

²⁾ Ср. Яглом и Ашкингузе [56], стр. 37—39.

Аналогично этому изучение механики плоско-параллельных движений сводится к своеобразной «геометрии» трехмерного пространства, отнесенного к трем координатам $\{x, y, t\}$, «движения» которого описываются формулами (12).

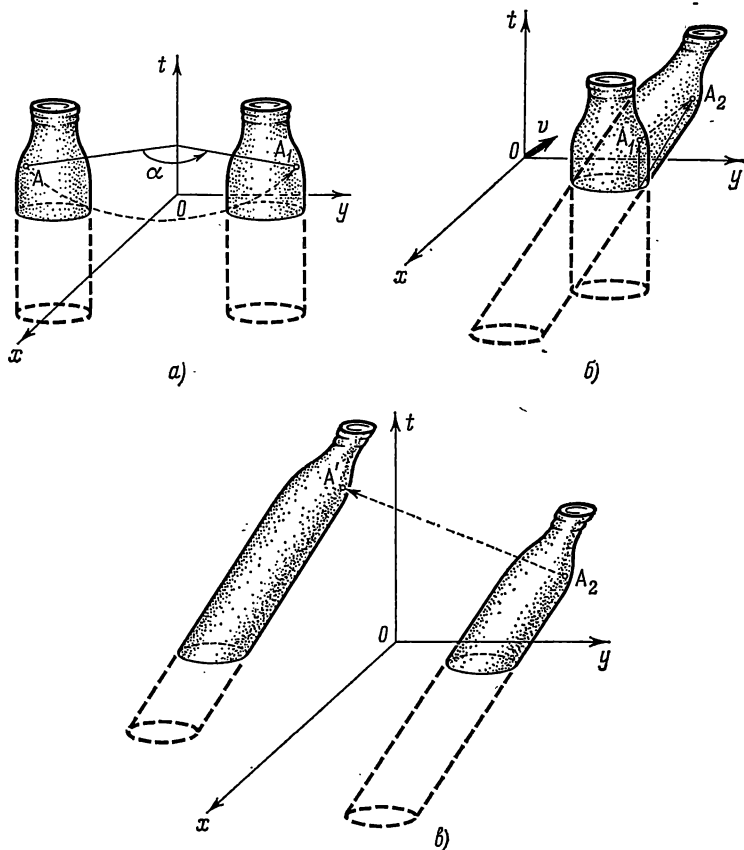


Рис. 21.

Эта «геометрия», которую также можно было бы назвать *(трехмерной) геометрией Галилея* (или стереометрией Галилея), представляет значительный интерес; однако она заметно сложнее геометрии Галилея на плоскости. «Движения» (12) можно «расщепить» на три преобразования: *поворот*

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ t_1 &= t \end{aligned} \quad (15a)$$

вокруг оси Ot (рис. 21, а); *сдвиг*

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + (v \cos \beta) t_1, \\ y_2 &= y_1 + (v \sin \beta) t_1, \\ t_2 &= t_1 \end{aligned} \quad (15b)$$

в направлении вектора $\boldsymbol{v} = (v \cos \beta; v \sin \beta; 0)$ плоскости xOy , при котором точки самой плоскости xOy остаются на месте, а каждая плоскость π , параллельная плоскости xOy , переносится параллельно в направлении вектора \boldsymbol{v} на расстояние vt^1), пропорциональное расстоянию $OQ = t$ плоскости π от плоскости xOy (рис. 21, б), и, наконец, *параллельный перенос*

$$\begin{aligned}x' &= x_2 + a, \\y' &= y_2 + b, \\t' &= t_2 + d\end{aligned}\quad (15\text{в})$$

на вектор $\boldsymbol{c} = (a; b; d)$ (рис. 21, в). Поэтому все имеющие смысл в «стереометрии Галилея» величины должны сохранять свое значение (а все факты «стереометрии Галилея» — сохранять свое содержание) при поворотах (15а), сдвигах (15б) и параллельных переносах (15в).

Еще более сложной является «*четырёхмерная геометрия Галилея*», адекватно отображающая все величины и факты, с которыми приходится сталкиваться в механике при рассмотрении (самых общих!) движений пространственных тел. Эту «геометрию» можно описать как учение о тех свойствах *четырёхмерного*²⁾ пространства, отнесенного к координатам $\{x, y, z, t\}$, которые сохраняются при общих преобразованиях Галилея.

$$\begin{aligned}x' &= (\cos \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha) x + (\sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha) y + \\&\quad + (\sin \gamma \sin \alpha) z + (v \cos \delta_1) t + a, \\y' &= -(\cos \beta \sin \alpha + \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha) x + (-\sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha) y + \\&\quad + (\sin \gamma \cos \alpha) z + (v \cos \delta_2) t + b, \\z' &= (\sin \gamma \sin \beta) x - (\sin \gamma \cos \beta) y + (\cos \gamma) z + (v \cos \delta_3) t + c, \\t' &= t + d,\end{aligned}\quad (16)$$

где $\cos^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_2 + \cos^2 \delta_3 = 1$ (ср. с формулами (9), стр. 26), играющими в этой «геометрии» роль «движений». Мы не имеем возможности остановиться здесь более подробно на содержании этой замечательной геометрии.

В заключение настоящего параграфа хочется коснуться еще одного вопроса. Геометрия Галилея (трехмерная), «движения» которой задаются формулами (12), возникает в результате попытки перевода на геометрический язык основных фактов плоской кинематики. Совсем другая (но не менее интересная!) геометрия получается при «геометризованном» описании феноменов плоской статике — и нам трудно удержаться от соблазна дать здесь краткую характеристику и этой замечательной «геометрии».

Хорошо известно, что каждую систему сил в статике можно изменять, сдвигая как угодно вектор каждой силы вдоль задаваемой этим вектором прямой³⁾, складывая приложенные в одной точке силы по правилу параллеле-

¹⁾ Если величина vt отрицательна (т. е. отрицательна характеризующая плоскость π координата t), то параллельный перенос производится в направлении, противоположном направлению вектора \boldsymbol{v} .

²⁾ Относительно понятия четырехмерного (и многомерного) пространства см., например, Кокстер [19] или Розенфельд и Яглом [20].

³⁾ Вектор, который позволено сдвигать как угодно вдоль прямой, по которой он направлен, но нельзя переносить в точки, не принадлежащие этой прямой, называется *скользящим* вектором; таким образом, система сил в статике — это система скользящих векторов.

лограмма или, наоборот, разлагая одну силу на несколько приложенных в той же точке сил, (векторная) сумма которых равна первоначальной силе¹⁾. Такими преобразованиями (не меняющими механического действия системы сил) каждую систему сил можно привести к одной силе (т. е. к одному «скользящему» вектору; см. примечание³⁾ на стр. 42) или к так называемой «паре» сил, т. е. к двум одинаковым по величине и противоположным по направлению силам, направленным по двум параллельным прямым (но не по одной прямой — в противном случае наши две силы взаимно уравновесились бы!) Еще больший интерес представляет для нас возможность *приведения*

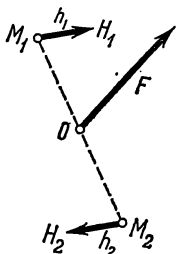
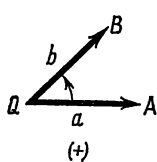
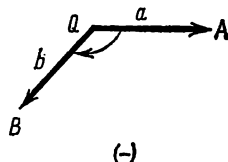


Рис. 22.



(a)



(b)

Рис. 23.

любой системы сил к одному вектору F , приложенному в произвольно фиксированном заранее «начале координат» O (главный вектор системы), и к паре сил $h_1 = \overline{OM_1}H_1$ и $h_2 = -h_1 = \overline{OM_2}H_2$, которые можно считать приложенными в таких точках M_1 и M_2 , что точка O является серединой отрезка M_1M_2 (рис. 22); такая пара сил полностью характеризуется своим «моментом» $u = h \cdot OM_1 \cdot \sin \angle (\overline{OM_1}, h_1) + h \cdot OM_2 \cdot \sin \angle (\overline{OM_2}, h_2) = (\overline{OM_1} \times h_1) + (\overline{OM_2} \times h_2)$

(главный момент системы)²⁾. [В последней формуле косым крестом обозначено так называемое «косое», или «псевдоскалярное», произведение векторов: если векторы $a = \overline{QA} (= (x_1; y_1))$ и $b = \overline{QB} (= (x_2; y_2))$ приложены к одной точке Q , то $a \times b = QA \cdot QB \sin \angle AQB (= x_1y_2 - x_2y_1)$, причём, как всегда, угол AQB считается положительным, если направление вращения, переводящего луч QA в луч QB , противоположно направлению вращения часовой стрелки, и отрицательным в противном случае (рис. 23)³⁾]. При этом главный вектор системы сил f_1, f_2, \dots, f_n , приложенных в точках A_1, A_2, \dots, A_n , равен *сумме этих сил*

$$F = f_1 + f_2 + \dots + f_n,$$

а главный момент той же системы — *сумме моментов всех сил*

$$u = (\overline{OA_1} \times f_1) + (\overline{OA_2} \times f_2) + \dots + (\overline{OA_n} \times f_n).$$

Так как вектор F определяется заданием двух своих координат x и y , то множество всевозможных систем сил на плоскости «трехмерно», т. е. задается указанием трех чисел x, y и u — «координат» этой системы⁴⁾. При переносе

¹⁾ См., например, гл. III книги Ландсберга [17].

²⁾ См., например, гл. I книги Аппеля [21] или гл. IV (и, особенно, § 23 этой главы) книги Бухгольца [22].

³⁾ См., например, § 4 статьи Болтянского и Яглома [23].

⁴⁾ Нетрудно понять, что если координаты системы сил f_1, f_2, \dots, f_n , равны x_1, y_1 и u_1 , а координаты системы сил g_1, g_2, \dots, g_m равны x_2, y_2 и u_2 , то координаты X, Y и U новой системы, включающей как все силы f_1, f_2, \dots, f_n , так и все силы g_1, g_2, \dots, g_m , равны с у м а м соответствующих координат исходных систем сил: $X = x_1 + x_2, Y = y_1 + y_2, U = u_1 + u_2$.

начала системы координат в новую точку O' (a, b) (здесь a и b —координаты точки O' или вектора $\overline{OO'} = c$ по отношению к старой системе координат $\{x, y\}$; рис. 24) главный вектор F системы сил f_1, f_2, \dots, f_n , равный сумме всех сил, очевидно, не изменится, а главный момент станет равным

$$\begin{aligned} u' &= (\overline{O'A_1} \times f_1) + (\overline{O'A_2} \times f_2) + \dots + (\overline{O'A_n} \times f_n) = \\ &= \{(\overline{OA_1} - \overline{OO'}) \times f_1\} + \{(\overline{OA_2} - \overline{OO'}) \times f_2\} + \dots + \{(\overline{OA_n} - \overline{OO'}) \times f_n\} = \\ &= (\overline{OA_1} \times f_1) + (\overline{OA_2} \times f_2) + \dots + (\overline{OA_n} \times f_n) - c \times (f_1 + f_2 + \dots + f_n) = \\ &= u - c \times F = u - (ay - bx) = bx - ay + u \end{aligned}$$

(здесь мы используем дистрибутивность косого произведения векторов по отношению к сложению: $(m+n) \times p = (m \times p) + (n \times p)$, а также то, что $c(a; b) \times F(x; y) = ay - bx$). Наконец, при повороте осей координат на угол α главный момент u , очевидно, не изменится (ибо u вообще не зависит от направления осей координат, а лишь от выбора «начала» O), а координаты x и y вектора F преобразуются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

(ср. формулы (7), стр. 25).

Таким образом, окончательно мы получаем, что при изменении системы координат на плоскости «координаты» x, y, u системы сил преобразуются следующим образом:

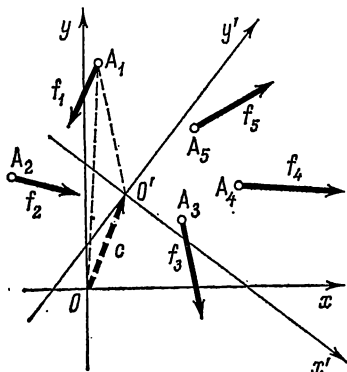


Рис. 24.

$$\left. \begin{aligned} x' &= (\cos \alpha) x + (\sin \alpha) y, \\ y' &= -(\sin \alpha) x + (\cos \alpha) y, \\ u' &= \quad \quad bx \quad \quad -ay + u; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

эти же формулы указывают, как меняются «координаты» (x, y, u) системы сил, если плоскость со всеми приложенными к ней силами двигать как единое целое. Поэтому можно считать, что *плоская статика сводится к изучению трехмерного пространства $\{x, y, u\}$, в котором преобразования (17) играют роль «движений», т. е. не меняют никаких свойств точек этого пространства (систем сил).*

Поскольку общая теория систем сил (приведение любой системы сил к главному вектору и главному моменту) была впервые разработана замечательным французским механиком Луи Пуансо (1777—1859) в его книге «Начала статики» (1804), то «геометрию» трехмерного пространства, «движения» которого задаются формулами (17), можно было бы назвать «геометрией Пуансо». В дальнейшем мы не коснемся этой примечательной геометрии, сосредоточив все наше внимание исключительно на геометрии Галилея.

Г Л А В А I
РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ; ТРЕУГОЛЬНИКИ
И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 3. Расстояние между точками и угол между прямыми

Перейдем теперь к систематическому изучению геометрии Галилея — геометрии плоскости xOy , «движения» которой задаются формулами

$$\begin{array}{l} x' = x + a, \\ y' = vx + y + b. \end{array} \quad (1)$$

Таким образом, в дальнейшем нас будут интересовать лишь те свойства фигур плоскости xOy , которые сохраняются при преобразованиях (1) (другими словами, сохраняются при сдвигах

$$\begin{array}{l} x' = x, \\ y' = vx + y \end{array} \quad (1a)$$

в направлении оси Oy и при параллельных переносах

$$\begin{array}{l} x' = x + a, \\ y' = y + b; \end{array} \quad (16)$$

см. выше, стр. 40): лишь такие свойства фигур имеют геометрический смысл в рамках рассматриваемой нами необыкновенной геометрии. При этом мы не будем забывать, что сама эта геометрия естественно возникла из механических рассуждений, связанных с принципом относительности Галилея, так что слова «имеют геометрический смысл» в нашем случае означают: «имеют механический смысл», т. е. отвечают каким-то фактам «одномерной кинематики» — учения о движениях материальных точек вдоль фиксированной прямой o .

Прежде чем переходить к обсуждению содержания первоначальных понятий геометрии Галилея, полезно перечислить основ-

ные свойства «движений» (1). Заметим, что преобразования (1) переводят

каждую прямую снова в прямую,
 параллельные прямые снова в параллельные прямые,
 два отрезка AB и CD одной прямой в такие отрезки $A'B'$ и $C'D'$,
 что $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$,

каждую фигуру F в фигуру F' той же площади

(доказательство всех этих утверждений мы дадим несколько ниже); поэтому понятия прямой линии, параллельных прямых, отношения отрезков одной прямой, площади фигуры имеют смысл не только в обычной геометрии Евклида, но и в геометрии Галилея. Очень важно также то, что каждое преобразование (1) переводит любую прямую, параллельную оси Oy , снова в прямую, параллельную оси Oy , — так что если в геометрии Евклида понятие «прямая,

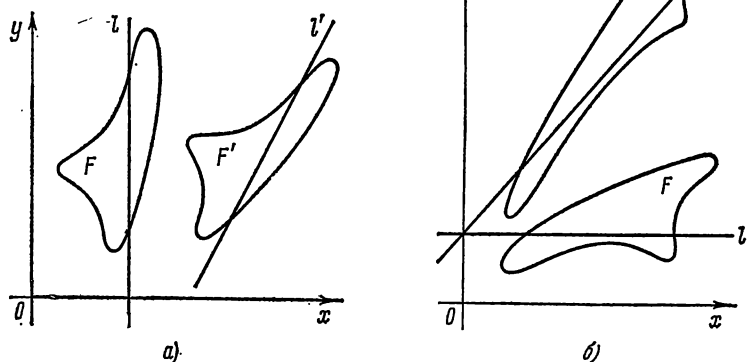


Рис. 25.

параллельная оси Oy » является геометрически бессодержательным (ибо обычным движением такую прямую можно перевести в любую другую; см. рис. 25, а), то в геометрии Галилея параллельные оси Oy прямые играют особую роль, отличную от роли всех остальных прямых. [В противоположность этому «прямые, параллельные оси Ox » не отличаются в геометрии Галилея от других «обыкновенных» (т. е. не параллельных оси Oy) прямых: на рис. 25, б показано, что сдвиг (1а) переводит прямую l , параллельную оси Ox , в прямую l' , не параллельную этой оси.] В дальнейшем мы сохраним термин «прямая», не сопровождаемый никаким прилагательным, только за прямыми, не параллельными оси Oy ; параллельные же оси Oy прямые мы будем называть *особыми прямыми*.

Для доказательства всех перечисленных свойств движений (1) достаточно проверить, что ими обладают сдвиги (1а), поскольку параллельные переносы (1б) заведомо всеми этими свойствами обладают (см. рис. 12, б на стр. 25).

То, что прямую, параллельную оси Oy , сдвиг переводит также в параллельную оси Oy , — а именно в ту же самую прямую, — непосредственно вытекает из определения сдвига (1а) (см. стр. 40, в частности, рис. 20). Далее, пусть сдвиг (1а) с коэффициентом сдвига v переводит точку A прямой l , проходящей через начало координат O , в точку A' (рис. 26). Обозначим прямую OA' через l' , точки пересечения любой параллельной оси Oy прямой m с прямыми l и l' — через M и M' , а точки пересечения прямых m и AA' с осью Ox (которую мы всегда будем изображать перпендикулярной оси Oy ¹⁾) — через Q и P . Из рис. 26 легко получим $\frac{M'Q}{MQ} = \frac{A'P}{AP}$. Но так как точка A' получается из точки A сдвигом (1а), то

$$\frac{A'P}{AP} = \frac{OP \cdot v + AP}{AP} = \frac{OP}{AP} \cdot v + 1.$$

Используя опять рис. 26 (на котором $\frac{OP}{AP} = \frac{OQ}{MQ}$ и $\frac{A'P}{AP} = \frac{M'Q}{MQ}$), имеем

$$\frac{M'Q}{MQ} = \frac{A'P}{AP} = \frac{OP}{AP} \cdot v + 1 = \frac{OQ}{MQ} \cdot v + 1 = \frac{OQ \cdot v + MQ}{MQ},$$

т. е.

$$M'Q = OQ \cdot v + MQ.$$

Но это как раз и означает, что каждую точку M прямой l наш сдвиг переводит в точку M' прямой l' , т. е. что он переводит прямую l в прямую l' .

Пусть теперь l_1 — прямая, параллельная прямой l и не проходящая через точку O (см. тот же рис. 26). Обозначим через d длину

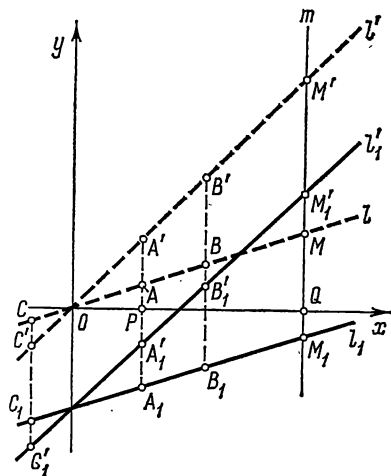


Рис. 26.

¹⁾ Это условие удобно нам в силу привычки к декартовым прямоугольным координатам на плоскости, оси которых перпендикулярны, однако в рамках геометрии Галилея оно бессодержательно: ведь в этой геометрии (евклидово) понятие перпендикулярности прямых геометрического смысла не имеет.

(обычную, т. е. измеряемую как в евклидовой геометрии!) равных между собой вертикальных (т. е. параллельных оси Oy) отрезков AA_1, BB_1, CC_1, \dots , заключенных между прямыми l и l_1 . Вспомним, что сдвиг (1а) сводится к переносу вдоль каждой прямой, параллельной оси Oy , всех точек этой прямой на одно и то же расстояние (но точек разных прямых — на разные расстояния); поэтому все отрезки $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \dots = d$ этот сдвиг переводит в отрезки $A'A_1, B'B_1, C'C_1, \dots$ той же длины:

$$A'A_1 = B'B_1 = C'C_1 = \dots = d.$$

А так как концы A', B', C', \dots этих отрезков принадлежат прямой l' (в которую наш сдвиг переводит прямую l), то вторые их концы A_1, B_1, C_1, \dots попадут на прямую l_1 , параллельную прямой l' и отстоящую от l' на расстояние d в направлении оси Oy . Отсюда и следует, что сдвиг (1а) переводит прямую l_1 в прямую l'_1 . Попутно мы убедились, что все прямые, параллельные фиксированной прямой l , сдвиг (1а) переводит в прямые, параллельные прямой l'_1 , т. е. что параллельные прямые сдвиг переводит в параллельные.

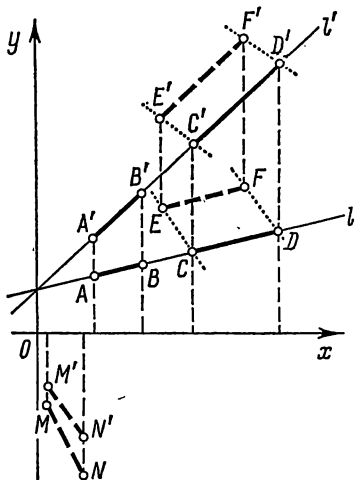


Рис. 27.

Еще проще доказать, что если отрезки AB и CD какой-то прямой l сдвиг (1а) переводит в отрезки $A'B'$ и $C'D'$ прямой l' , то

$$\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB};$$

доказательство этого факта, непосредственно вытекающее из рис. 27, мы предоставим читателю провести самостоятельно. Заметим заодно, что если AB и EF — параллельные друг другу отрезки, то сдвиг переводит их в такие отрезки $A'B'$ и $E'F'$ (также параллельные), что

$$\frac{E'F'}{A'B'} = \frac{EF}{AB}$$

(см. тот же рис. 27, где $EF = CD$ и $E'F' = C'D'$, так как параллелограмм $CDFE$ переходит в параллелограмм $C'D'F'E'$); отсюда следует, что также и понятие отношения длин параллельных отрезков имеет смысл в геометрии Галилея. Однако если $AB \nparallel MN$,

¹⁾ Нетрудно убедиться, что если прямая l образует с осью Ox угол α , а прямая l' — угол α' , то $\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha + v$.

то сдвиг может перевести отрезки AB и MN в такие отрезки $A'B'$ и $M'N'$, что $M'N':A'B' \neq MN:AB$ (см. рис. 27, где $AB < A'B'$, но $MN > M'N'$).

Наконец, площадь фигуры F приближенно равна сумме площадей помещающихся внутри F «маленьких» квадратов, образованных сетью прямых, параллельных осям Ox и Oy и отстоящих друг от друга на одно и то же «малое» расстояние e (т. е. приближенно равно числу таких квадратов, умноженному на площадь e^2 одного квадрата, — рис. 28, наверху); точное же значение площади определяется как предел полученных таким образом величин, отвечающих последовательности неограниченно уплотняющихся сеток квадратов (т. е. таких, что величина e неограниченно уменьшается). Сдвиг (1а) переводит фигуру F в новую фигуру F' , а сетку квадратов — в сетку параллелограммов той же площади (см. рис. 28, внизу) — ведь параллельная оси Oy сторона параллелограмма будет той же, что и сторона квадрата, а опущенная на эту сторону высота параллелограмма также равна стороне квадрата. Поэтому приближенное значение площади фигуры F' , равное произведению числа помещающихся внутри F' параллелограммов сетки на площадь e^2 одного параллелограмма, будет тем же, что и приближенное значение площади фигуры F . А так как приближенное равенство пл. $F' \approx$ пл. F имеет место при любой точности определения площади фигур F и F' (зависящей от размера квадрата сетки), то, очевидно,

$$\text{пл. } F' = \text{пл. } F.$$

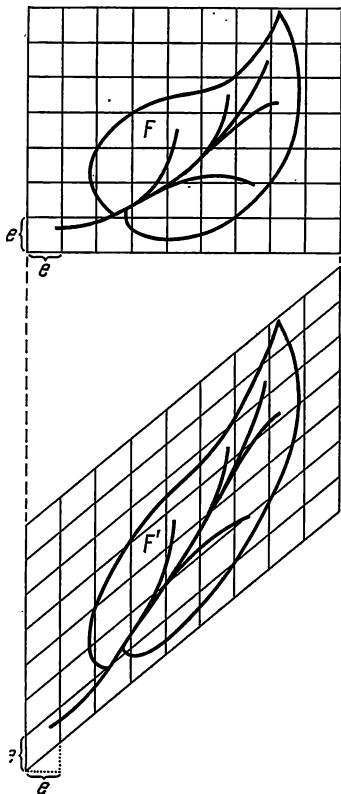


Рис. 28.

После этих предварительных замечаний мы можем приступить к обсуждению смысла понятий «расстояние между точками» и «угол между прямыми» в геометрии Галилея. В евклидовой геометрии расстояние d_{AA_1} между двумя точками $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ определяется формулой

$$d_{AA_1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}; \quad (2)$$

при этом равенство нулю расстояния между двумя точками означает, что эти точки совпадают. Угол δ_{l, l_1} между двумя прямыми l и l_1 , записываемыми уравнениями

$$y = kx + s \quad \text{и} \quad y = k_1x + s_1,$$

можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} \delta_{l, l_1} = \frac{k_1 - k}{kk_1 + 1}, \quad (3)$$

— это следует из того, что прямые l и l_1 образуют с осью Ox углы φ и φ_1 , определяемые равенствами $\operatorname{tg} \varphi = k$ и $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$, так что

$$\operatorname{tg} \delta_{l, l_1} = \operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}$$

(см. выше, стр. 24 и рис. 11, б).

Если $k = k_1$, то прямые l и l_1 параллельны; в этом случае определенный по формуле (3) «угол» δ_{l, l_1} между прямыми равен нулю. Для параллельных прямых можно говорить о *расстоянии* d_{l, l_1} между этими прямыми:

$$d_{l, l_1} = \frac{|s_1 - s|}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad (4)$$

ибо $|s_1 - s| = SS_1$ есть отсекаемый прямыми l и l_1 отрезок оси Oy , а $\sqrt{k^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} = \frac{1}{\cos \varphi}$, где φ — угол, образованный l и l_1

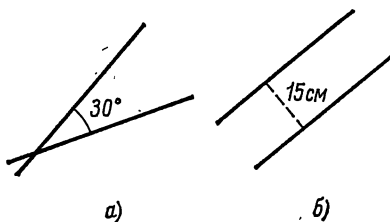


Рис. 29.

с осью Ox (ср. выше, стр. 23, в частности, рис. 11, а). При этом следует иметь в виду, что хотя обе величины δ_{l, l_1} и d_{l, l_1} определяют «отклонение» прямых l и l_1 друг от друга, они имеют совершенно разный характер: угол δ измеряется в «угловых единицах» (в градусах или в радианах), а расстояние d — в единицах длины (в метрах или сантиметрах).

Поэтому эти величины *сравнивать между собой нельзя*; так, например, вопрос: «прямые l и l_1 образуют угол в 30° (рис. 29, а), а (параллельные) прямые m и m_1 удалены друг от друга на 15 см (рис. 29, б); что больше — отклонение друг от друга прямых l и l_1 или отклонение друг от друга прямых m и m_1 ?» — явно бессмыслен. Заметим еще, что *расстояние* (4) *между прямыми может быть определено лишь в том случае, если* определяемый формулой (3) *угол между этими прямыми равен нулю*; прямые l и l_1 совпадают между

собой лишь в том случае, если угол δ между ними равен нулю и, кроме того, равно нулю и расстояние d между этими прямыми.

После этих предварительных замечаний, относящихся к геометрии Евклида, можно перейти к нашей основной теме. Расстояние d_{AA_1} между двумя точками $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ в геометрии Галилея определяется по формуле

$$d_{AA_1} = x_1 - x; \quad (5)$$

оно равно проекции $\overline{PP_1}$ отрезка $\overline{AA_1}$ на ось Ox (рис. 30, а). Так как координата x точки A преобразуется при движении (1) по формуле

$$x' = x + a,$$

то ясно, что разность $x_1 - x$ абсцисс двух точек A_1 и A при движении (1) не меняется. [Так же и из чисто геометрических соображений нетрудно усмотреть, что проекция $\overline{PP_1}$ отрезка $\overline{AA_1}$ на ось Ox

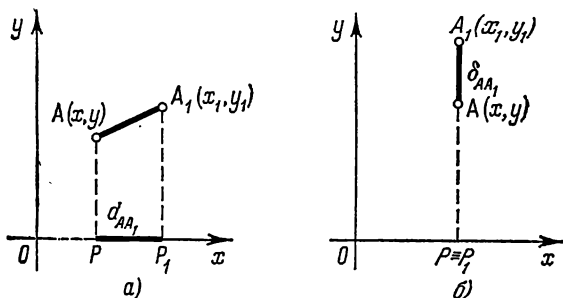


Рис. 30.

имеет смысл в нашей геометрии: ведь и параллельный перенос (16), и сдвиг (1а), очевидно, сохраняют величину этой проекции.]

Если расстояние d_{AA_1} между точками A и A_1 равно нулю, т. е. $x_1 = x$, то точки A и A_1 принадлежат одной особой прямой (прямой, параллельной оси Oy ; рис. 30, б). Для таких двух точек можно определить особое расстояние δ_{AA_1} между точками:

$$\delta_{AA_1} = y_1 - y. \quad (6)$$

В самом деле, если абсциссы двух точек $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ одинаковы (если $x = x_1$), то произвольное движение (1) преобразует их в точки $A'(x', y')$ и $A'_1(x'_1, y'_1)$, где $x' = x'_1 (= x + a)$ и

$$y' = vx + y + b, \quad y'_1 = vx + y_1 + b;$$

поэтому

$$y'_1 - y' = (vx + y_1 + b) - (vx + y + b) = y_1 - y,$$

т. е. разность $y_1 - y$ не меняется при движении, а следовательно, имеет на плоскости Галилея геометрический смысл. Однако если расстояние $d_{AA_1} = x_1 - x$ между точками A и A_1 отлично от нуля, т. е. абсциссы этих точек различны, то разность $y_1 - y$ ординат этих точек не сохраняет своей величины при движении, ибо в этом случае

$$y'_1 - y' = (vx_1 + y_1 + b) - (vx + y + b) = y_1 - y + v(x_1 - x) \neq y_1 - y.$$

Да это и понятно—ведь сдвиг (1а) оставляет на месте начало O системы координат и меняет ординату любой точки M , не принадлежащей оси Oy ; поэтому он никак не может сохранять разность ординат точек M и O .

Очевидно, что две точки A и B плоскости Галилея совпадают в том и только в том случае, когда равно нулю как расстояние d_{AB} между этими точками, так и особое расстояние δ_{AB} между ними.

Окружность S плоскости Галилея мы назовем *множеством точек $M(x, y)$, удаленных от фиксированной точки Q на постоянное (по абсолютной величине) расстояние r* ; при этом точка $Q(a, b)$ называется центром окружности, а (неотрицательное) число r —ее радиусом. Так как

$$d_{QM} = x - a$$

(см. формулу (5)), то уравнение

$$d_{QM}^2 = r^2$$

окружности S имеет вид

$$(x - a)^2 = r^2$$

или

$$x^2 + 2px + q = 0, \tag{7}$$

где

$$p = -a, \quad q = a^2 - r^2. \tag{7a}$$

Ясно, что окружность S радиуса r с центром Q представляет собой совокупность двух особых прямых, отстоящих от точки Q на расстоянии r (рис. 31, а); если радиус r окружности обращается в нуль, то эти две прямые сливаются в одну (рис. 31, б). Заметим еще, что окружность S геометрии Галилея имеет строго определенный радиус (равный половине расстояния между образующими эту окружность прямыми), но бесконечно много центров: любую точку особой прямой, содержащей точку Q , можно принять за центр этой окружности (см. тот же рис. 31).

Угол δ_{ll_1} между прямыми l и l_1 , пересекающимися в точке Q , можно определить как длину заключенной между прямыми l и l_1

дуги NN_1 окружности S единичного радиуса с центром в точке Q (ср. относящиеся к геометрии Евклида и к геометрии Галилея рис. 32, а и 32, б; ясно, что под «длиной дуги» NN_1 окружности S геометрии Галилея надо понимать «особую длину» δ_{NN_1} отрезка NN_1 ,

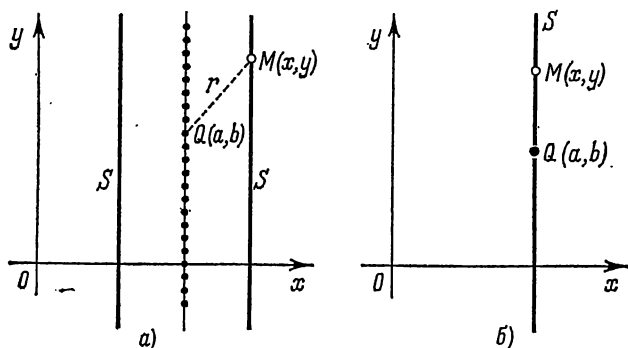


Рис. 31.

т. е. особое расстояние между точками N и N_1 содержащей их особой прямой). Определенная таким образом величина δ_{NN_1} угла, очевидно, имеет смысл в геометрии Галилея, т. е. сохраняется при движении (1): ведь точку Q пересечения прямых l и l_1 движение

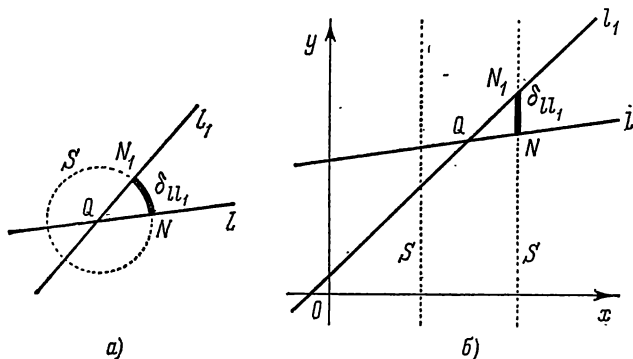


Рис. 32.

переводит в точку Q' пересечения полученных из l и l_1 движением прямых l' и l'_1 , а единичную окружность S и дугу NN_1 этой окружности — в единичную окружность S' с центром Q' и в дугу $N'N'_1$ окружности S' (рис. 33). Это определение угла между прямыми в геометрии Галилея равносильно следующему: для того чтобы найти угол δ_{ll_1} между прямыми l и l_1 , достаточно провести

особую прямую m , удаленную от вершины Q угла на расстояние 1 и пересекающую стороны угла в точках N и N_1 ; тогда

$$\delta_{ll_1} = \overline{NN_1}.$$

Если уравнения прямых l и l_1 имеют привычный вид $y = kx + s$ и $y = k_1x + s_1$, а координаты точки Q равны x_0 и y_0 , то уравнение прямой m таково:

$$x = x_0 + 1.$$

Поэтому точки N и N_1 будут иметь координаты

$$(x_0 + 1, k(x_0 + 1) + s) \text{ и } (x_0 + 1, k_1(x_0 + 1) + s_1),$$

а следовательно,

$$\begin{aligned} \delta_{ll_1} = \delta_{NN_1} &= [k_1(x_0 + 1) + s_1] - [k(x_0 + 1) + s] = \\ &= [(k_1x_0 + s_1) - (kx_0 + s)] + k_1 - k = k_1 - k \end{aligned}$$

(ибо $Q(x_0, y_0)$ — общая точка прямых l и l_1 и поэтому $kx_0 + s = k_1x_0 + s_1 = 0$). Таким образом, окончательно имеем

$$\delta_{ll_1} = k_1 - k; \quad (8)$$

эта формула значительно проще формулы (3) для величины угла между прямыми в евклидовой геометрии.

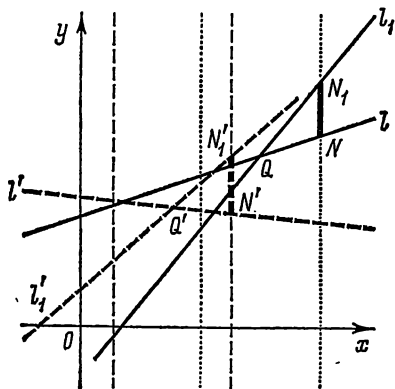


Рис. 33.

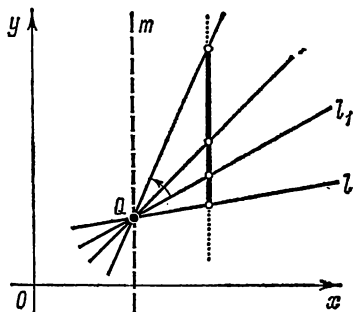


Рис. 34.

Если одну из прямых l и l_1 , например l_1 , поворачивать вокруг точки Q , устремляя ее к особой прямой m , то угол δ_{ll_1} будет неограниченно возрастать (рис. 34) — явление, которое противоречит нашим представлениям, заимствованным из геометрии Евклида. Укажем еще, что в противоположность евклидову случаю «галилеев

угол» δ между двумя прямыми l и l_1 определяется однозначно (ср. рис. 32, *a* и *b*) — это обстоятельство делает весьма многие рассуждения, относящиеся к геометрии Галилея, существенно более простыми, чем соответствующие им факты евклидовой геометрии (ср. с подстрочным примечанием на стр. 68).

Если прямые l и l_1 параллельны, то определяемый по формуле (8) угол δ_{ll_1} между этими прямыми равен нулю. Однако в этом случае можно говорить о *расстоянии* d_{ll_1} между (параллельными) прямыми l и l_1 , понимая под этим (особую) длину заключенного между прямыми l и l_1 отрезка MM_1 особой прямой (любой; рис. 35): так как особые прямые переводятся движениями (1) снова в особые прямые, то определенное таким образом расстояние d_{ll_1} имеет смысл в геометрии Галилея. Если уравнения рассматриваемых прямых l и l_1 имеют вид $y = kx + s$ и $y = kx + s_1$, то, очевидно,

$$d_{ll_1} = s_1 - s; \quad (9)$$

эта формула также значительно проще соответствующей формулы (4) евклидовой геометрии ¹⁾.

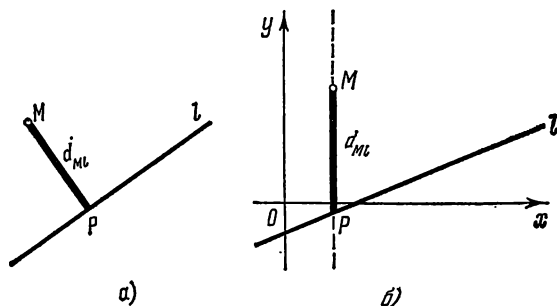


Рис. 36.

Наконец, *расстоянием* d_{Ml} от точки M до прямой l мы условимся называть (особое!) расстояние от точки M до точки пересечения прямой l с особой прямой, проходящей через точку M (рис. 36, б).

¹⁾ Заметим, что в определениях величин d_{AA_1} , δ_{AA_1} , δ_{ll_1} , d_{ll_1} существенным было то, какой из двух объектов A и A_1 (соответственно l и l_1) считать первым, а какой — вторым; это отражено и в формулах (5), (6), (8), (9), из которых, кстати, видно, что каждая из рассматриваемых величин может быть как положительным числом, так и нулем или отрицательным числом.

Это условие можно обосновать следующими соображениями: в евклидовой геометрии расстояние от точки M до прямой l —это расстояние от точки M до самой близкой к M точки P прямой l (рис. 36, а); в геометрии же Галилея «самая близкая» к M точка P прямой l удалена от M на нулевое расстояние, т. е. $d_{MP}=0$; поэтому расстояние от точки M до прямой l приходится измерять особым расстоянием между M и P : $d_{Ml}=\delta_{MP}$. Если прямая l записывается уравнением $y=kx+s$, то координаты точки P (точки пересечения l с проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ особой прямой m) будут иметь вид (x_0, kx_0+s) ; поэтому

$$\overline{MP}=\delta_{MP}=y_0-(kx_0+s).$$

Таким образом,

$$d_{Ml}=y_0-kx_0-s, \quad (10)$$

т. е. расстояние от точки M до прямой l равно результату подстановки в левую часть уравнения

$$y-kx-s=0$$

прямой l (уравнения (3) из § 1; см. стр. 17) координат x_0, y_0 точки M^1). Ясно, что определенное выше расстояние d_{l, l_1} между двумя параллельными прямыми l и l_1 теперь можно описать как расстояние d_{Ml_1} от любой точки M прямой l до прямой l_1 .

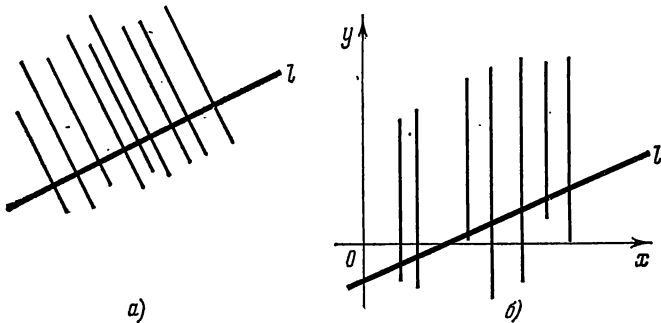


Рис. 37.

Из определения расстояния от точки M до прямой l и расстояния между параллельными прямыми l и l_1 следует, что роль перпендикуляров к прямой в геометрии Галилея играют особые прямые (ср. относящиеся к геометрии Евклида и к геометрии Галилея рис. 37, а и 37, б). К этой аналогии между перпендикулярами к прямой и особыми прямыми мы еще неоднократно будем возвращаться.

¹⁾ Ср. ниже, стр. 258.

Расшифруем теперь механический смысл всех введенных в этом параграфе понятий. Ясно, что точке $M(x, y)$ плоскости Галилея в кинематике прямой o отвечает событие (t, x) , характеризующееся указанием места x на прямой o и времени t (рис. 38); при этом роль «временной координаты» t события на плоскости Галилея играет координата x , а роль «пространственной координаты» x — координата y . Расстояние d между двумя точками A и A_1 плоскости Галилея есть не что иное, как *временной интервал* $t_1 - t$ между отвечающими этим точкам событиями A и A_1 . Если этот интервал равен нулю, т. е. если события A и A_1 одновременны, то между этими событиями существует *пространственный интервал*, равный расстоянию между отвечающими событиям A и A_1 точками прямой o ; этот пространственный интервал совпадает с определенным выше особым расстоянием δ между отвечающими рассматриваемым событиям точками плоскости Галилея. Заметим, что пространственный интервал δ можно определить только для одновременных событий, так как в противном случае расстояние между соответствующими точками прямой o будет существенно зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета и потому не будет иметь смысла в геометрии Галилея. В самом деле, если в системе отсчета, связанной с Землей, расстояние между школой, где вы были днем, и домом, в котором вы ужинаете вечером, сравнительно невелико, то с точки зрения связанной с неподвижными звездами системы отсчета вы днем были на громадном расстоянии от дома, где вы пьете чай вечером, ибо за прошедшее между двумя рассматриваемыми событиями время Земля вместе с вами «ушла» очень далеко. Заметим еще, что «обыкновенное расстояние d » между двумя событиями и «особое расстояние δ » между (одновременными!) событиями — не сравнимые величины, так как измеряются они в совершенно разных единицах: первое из них измеряется в единицах времени (сек, год, век), а второе — в единицах длины (мм, м, км).

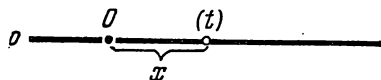


Рис. 38.

Прямая l плоскости Галилея с уравнением $y = kx + s$ отвечает *равномерному движению*

$$x = kt + s$$

точки по прямой o со скоростью k ; впрочем, мы уже знаем, что эта скорость существенно зависит от выбора инерциальной системы отсчета и потому физического смысла не имеет. Зато для двух прямых l и l_1 с уравнениями $y = kx + s$ и $y = k_1x + s_1$, т. е. для двух равномерно движущихся точек L и L_1 прямой o с законами движения

$$x = kt + s \quad \text{и} \quad x = k_1t + s_1,$$

имеет смысл разность

$$\delta_{ll_1} = k_1 - k \tag{8}$$

скоростей этих точек — *относительная скорость* одной движущейся точки относительно другой. Величину δ_{ll_1} — угол между прямыми l и l_1 плоскости Галилея — можно также описать как скорость второй из рассматриваемых точек в системе отсчета, в которой первая точка покоится: в самом деле, если движением (или заменой координат) (1) совместить прямую l с осью Ox , т. е. сопоставить ей неподвижную точку L_0 прямой o , то разность $k_1 - k$ примет вид

$$\delta_{ll_1} = k_1 - k = k'_1 - k' = k'_1 - 0 = k'_1$$

(ибо скорость k' первой точки в «новой» системе отсчета равна нулю); поэтому величина δ_{ll_1} равна скорости k'_1 второй точки в системе отсчета, в которой первая точка покоится. Угол δ_{ll_1} между двумя прямыми l и l_1 (относительную скорость двух равномерно движущихся по прямой o точек L и L_1) можно определить и так: если в момент времени t_0 эти точки занимали одно и то же положение (a) на прямой o (так что точка $Q(t_0, a)$ плоскости Галилея принадлежит обеим прямым l и l_1), то δ_{ll_1} равно «особому» (т. е. «пространственному») расстоянию между точками L и L_1 через единицу времени после момента t_0 . (ср. рис. 39, a и b).

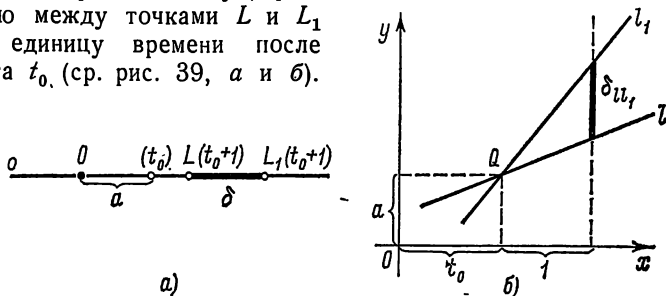


Рис. 39.

Если две прямые l и l_1 плоскости Галилея параллельны, то они отвечают двум равномерно движущимся точкам L и L_1 , скорости движения которых (в любой инерциальной системе отсчета!) одинаковы: законы движений этих точек имеют вид

$$x = kt + s \quad \text{и} \quad x = kt + s_1.$$

Ясно, что относительная скорость δ_{ll_1} этих точек равна нулю. Для таких двух движущихся точек (например, для двух пунктов в Москве, движущихся в пространстве вместе с Землей) можно найти систему отсчета, в которой обе они покоятся. При этом имеет смысл говорить о (пространственном!) *расстоянии* d_{ll_1} между движущимися точками — об (особом!) расстоянии между параллельными

прямыми; это расстояние равно, например, разности

$$s_1 - s$$

координат рассматриваемых точек на прямой o в момент $t=0$ (или в любой другой фиксированный момент времени). Наконец, под расстоянием от точки (события) M до прямой l (т. е. равномерно движущейся вдоль прямой o точки L) естественно понимать *расстояние вдоль прямой o от пункта M этой прямой до движущейся точки L , измеренное в момент времени t , фиксированный указанием события M .*

Особая прямая m плоскости Галилея, описываемая уравнением $x=a$, отвечает определенному моменту времени

$$t=a.$$

Ясно, что фиксирование в этот момент времени одновременно в *с* ех точек прямой o (ибо особой прямой m плоскости Галилея отвечает множество всех событий (a, x) , где x произвольно) представляет собой нечто вроде задания «движения с бесконечной скоростью», — это соответствует тому, что «угловой коэффициент» особой прямой m , равный тангенсу угла, образованного прямой m с осью Ox (т. е. $\operatorname{tg} 90^\circ$), следует считать бесконечным. Наконец, окружность плоскости Галилея с центром Q и радиусом r отвечает *множеству всех событий, удаленных от фиксированного события $Q(t, a)$ на (временной!) интервал r* , т. е. множеству всех событий $(t-r, x)$ и $(t+r, x)$.

Все сказанное можно просуммировать в виде следующего «словаря», в котором слева записаны некоторые понятия геометрии Галилея, а справа — отвечающие им понятия, относящиеся к кинематике прямой o .

Геометрические понятия

Точка
 Прямая (обыкновенная)
 Особая прямая
 Расстояние d между точками

 Особое расстояние δ между точками
 Угол δ между прямыми
 Расстояние d между параллельными прямыми

 Расстояние от точки до прямой

 Окружность радиуса r

Механические понятия

Событие
 Равномерное движение
 Момент времени
 Временной интервал между событиями
 Пространственный интервал между одновременными событиями
 Относительная скорость
 Расстояние между покоящимися друг относительно друга точками прямой o
 Расстояние (в заданный момент времени) от фиксированной точки прямой o до равномерно движущейся точки
 Совокупность всех событий, опережающих фиксированное событие на время r и отстающих от него на то же время.

Укажем еще кинематическое содержание понятия площади фигуры, сохраняющего, как мы видели выше, смысл и в геометрии Галилея. Рассмотрим произвольную фигуру F плоскости Галилея, т. е. какое-то точечное множество; этому множеству точек отвечает определенное множество событий, каждое из которых задается указанием места (на прямой o) и времени.

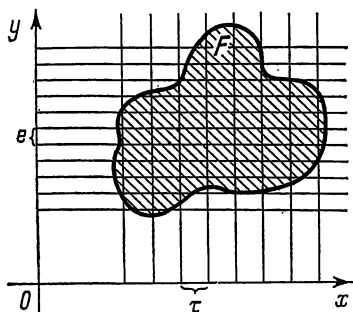


Рис. 40.

Попробуем оценить количественно это множество событий; при этом мы, естественно, должны будем учитывать и пространственную протяженность множества F событий и его длительность во времени. Подобную оценку можно получить, размещая в множестве F событий «элементарные события», характеризующиеся небольшой (но фиксированной!) протяженностью ϵ в пространстве и какой-то заданной наперед малой длительностью τ . Но ясно, что подобному «элементарному событию» на плоскости Галилея отвечает малый прямоугольник со сторонами ϵ и τ ; поэтому размещение в множестве F событий неперекрывающихся «элементарных событий» сводится к заполнению фигуры F плоскости Галилея малыми прямоугольниками сетки, «шаг» которой в направлении оси Ox равен τ , а в направлении оси Oy равен ϵ (рис. 40; ср. с рис. 28 на стр. 49). Полная же «пространственно-временная емкость» множества F событий, оцениваемая количеством заключающихся в этом множестве «элементарных событий», приводит нас к понятию площади фигуры F на плоскости Галилея.

§ 4. Треугольник

Простейшей фигурой плоскости Галилея является *треугольник* ABC , образованный тремя точками A, B и C и тремя соединяющими их (обыкновенными) прямыми $BC \equiv a, CA \equiv b$ и $AB \equiv c$ (рис. 41). При этом мы, как это принято и в геометрии Евклида, условимся обозначать теми же буквами a, b и c также и длины сторон треугольника, т. е. (положительные¹⁾)! расстояния $|d_{BC}| = a, |d_{CA}| = b$ и $|d_{AB}| = c$; буквами A, B и C мы будем обозначать не только точки плоскости — вершины треугольника, но и (положительные¹⁾)! величины его углов: $|\delta_{bc}| = A, |\delta_{ca}| = B, |\delta_{ab}| = C$. Отметим еще, что иногда для обозначения (положительной) длины $|d_{AB}|$ некоторого отрезка AB мы будем употреблять ту же запись AB , что и для самого отрезка (например, такая запись будет встречаться в некоторых равенствах, содержащих длины сторон треугольника).

Длины a, b, c сторон треугольника плоскости Галилея и величины A, B, C его углов не независимы: они связаны некоторыми очень простыми соотношениями. Прежде всего, очевидно, что если c — наи-

¹⁾ См. подстрочное примечание на стр. 55.

большая из трех сторон, то (см. рис. 41)

$$a + b = c.$$

(11)

Механический смысл этого равенства очевиден: если A , B и C — какие угодно три события, то временной интервал между самым ранним и самым поздним из них равен сумме интервалов между первым и вторым событиями и между вторым и последним событиями (аддитивность временных интервалов).

С другой стороны, из того же рис. 41, на котором $CN \parallel AB$ и, следовательно, $\angle 1 = A$ и $\angle 2 = B$, непосредственно следует

$$A + B = C.$$

(12)

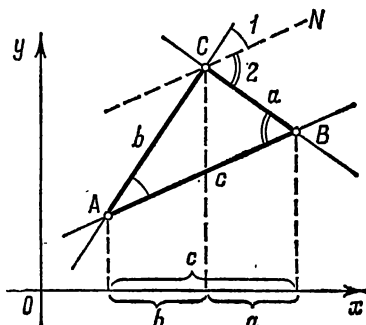


Рис. 41.

Для того чтобы раскрыть механический смысл этого соотношения, выберем (инерциальную) систему отсчета так, чтобы стороне AC треугольника отвечал «покой»¹⁾; при этом углы A и C будут выражать скорости равномерных движений, изображаемых на плоскости Галилея прямыми c и a , а угол B — относительную скорость движения a по отношению к подвижной системе отсчета, задаваемой движением c (иными словами: скорость движения a в такой системе отсчета, в которой прямая c изображает покой). Поэтому формула (12) выражает классический закон сложения скоростей: абсолютная скорость C движения a равна сумме относительной скорости B того же самого движения по отношению к движущейся системе отсчета c и переносной скорости, т. е. скорости A подвижной системы отсчета. Пусть, например, человек идет вдоль вагона движущегося поезда по направлению от конца поезда к его головной части. Тогда скорость пассажира относительно железнодорожного полотна (т. е. его «абсолютная скорость») равна скорости движения пассажира по вагону (его «относительной скорости»), сложенной со скоростью поезда («переносной скоростью», характеризующей движение подвижной системы отсчета, по отношению к которой отсчитывается относительная скорость).

¹⁾ Другими словами: движением (1) совместим сторону AC с осью Ox .

«Формула углов» (12) может быть выведена из «формулы сторон» (11) с помощью следующего соотношения, играющего в геометрии Галилея роль, родственную роли теоремы синусов в геометрии Евклида:

$$\boxed{\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}} \quad (13)$$

Таким образом, длины сторон любого треугольника плоскости Галилея пропорциональны величинам противоположных углов:

$$a = \lambda A, \quad b = \lambda B, \quad c = \lambda C, \quad (14)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, к которому мы еще вернемся ниже (в § 8); поэтому формула (11) получается из формулы (12) умножением обеих частей формулы (12) на λ .

Для доказательства формул (13) достаточно провести «высоты» AP , BQ и CR треугольника ABC , т. е. особые прямые, проходящие через вершины A , B и C треугольника и пересекающие его противоположные стороны в точках P , Q и R . [Относительно соображений, в силу которых особые прямые AP , BQ и CR в геометрии Галилея уместно назвать «высотами» треугольника ABC , см. выше, стр. 56, в частности, рис. 37.] Длины высот мы, как принято и в евклидовой геометрии, обозначим через h_a , h_b и h_c :

$$\begin{aligned} h_a &= AP = |\delta_{AP}|, \\ h_b &= BQ = |\delta_{BQ}|, \\ h_c &= CR = |\delta_{CR}|. \end{aligned}$$

В силу определения углов в геометрии Галилея, очевидно, имеем

$$h_c = B \cdot a = A \cdot b \quad (15)$$

(рис. 42, а; напомним, что $BR = BC = a$ и $AR = AC = b$); поэтому

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B}.$$

Точно так же с использованием высот h_b и h_a доказывается, что

$$\frac{a}{A} = \frac{c}{C}$$

и

$$\frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

Вот еще одно следствие соотношений (15). Нетрудно видеть, что если S — площадь треугольника ABC (это понятие, как мы знаем, сохраняет смысл и в геометрии Галилея!), то

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c. \quad (16)$$

В самом деле, «повернем» (при помощи некоторого движения (1)) треугольник ABC в такое положение $A'B'C'$, чтобы сторона $B'C'$

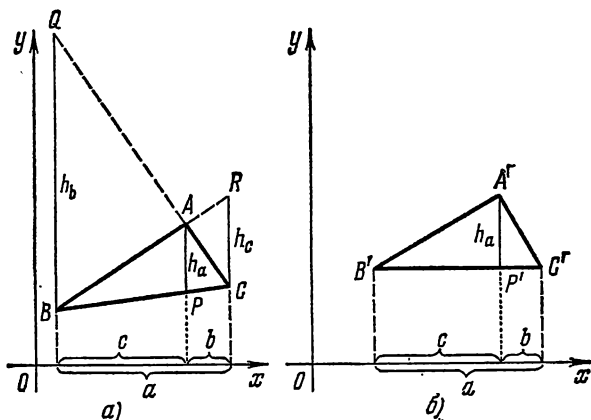


Рис. 42.

треугольника $A'B'C'$ была параллельна оси Ox (рис. 42, б). При этом «галилеева длина» a' стороны $B'C'$ преобразованного треугольника и его «галилеева высота» h'_a станут равными «евклидовой длине» стороны $B'C'$ и «евклидовой длине» высоты $A'P'$, так что

$$S' = \frac{1}{2} a' h'_a,$$

где S' — площадь треугольника $A'B'C'$ (одновременно «галилеева» и «евклидова» — ведь в геометрии Галилея понятие площади имеет тот же смысл, что и в геометрии Евклида!). Но поскольку величины a , h_a и S имеют смысл в геометрии Галилея, то они не меняются при движениях (1): $a' = a$, $h'_a = h_a$ и $S' = S$ (ср. рис. 42, а и б), а значит,

$$S = \frac{1}{2} ah_a.$$

Аналогично доказываются и две другие из формул (16).

Подставляя теперь в первую из формул (16) $h_a = bC$, а в третью — значения (15) высоты h_c , получим

$$S = \frac{1}{2} abC = \frac{1}{2} acB = \frac{1}{2} bcA. \quad (17)$$

Формулы (17) родственны формулам

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A \quad (17')$$

евклидовой геометрии.

Из формул (13) сразу вытекает, что известное свойство равнобедренного треугольника евклидовой геометрии сохраняет силу и в

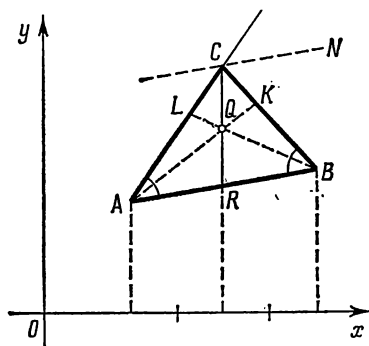


Рис. 43.

геометрии Галилея: если стороны a и b треугольника ABC равны между собой, то равны и противолежащие им углы A и B и наоборот (ибо $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$; см. рис. 43).

Очевидно также, что высота CR равнобедренного треугольника ABC одновременно является также и медианой, т. е. она делит противоположную сторону AB пополам (см. тот же рис. 43, на котором $AR = AC = b$, $BR = BC = a$). Однако биссектрисой угла C прямая CR уже, очевидно, не

является, ибо особая прямая делить угол пополам, разумеется, никак не может. Отсюда сразу следует, что три биссектрисы треугольника в геометрии Галилея не обязаны пересекаться в одной точке¹⁾: так, на рис. 43 биссектрисы AK и BL углов A и B , очевидно, пересекаются в середине Q высоты CR , но прямая CQ (т. е. CR), как мы уже отмечали, не совпадает с биссектрисой CN угла C . В противоположность этому три медианы AD , BE и CF треугольника ABC обязательно пересекаются в одной точке M и делятся в ней в отношении $2:1$, считая от вершины: $AM:MD = BM:ME = CM:MF = 2:1$. Это следует из того, что медианы треугольника ABC геометрии Галилея совпадают с его евклидовыми медианами и отношения, в которых делит медианы точка их пересечения, имеют в геометрии Галилея и в геометрии Евклида одно и то же значение (рис. 44; ср. выше, стр. 46).

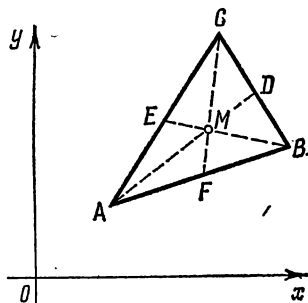


Рис. 44.

¹⁾ Можно показать, что в геометрии Галилея три биссектрисы треугольника никогда не пересекаются в одной точке; см. рис. 48, б.

Отметим еще, что в геометрии Галилея не может быть треугольника, у которого все три стороны равны между собой: ведь если две стороны треугольника одинаковы, то третья обязательно равна их сумме! Аналогичное замечание справедливо и для углов; поэтому равнобедренный треугольник можно также назвать *равноугольным*, так как равенство двух углов (а только такая «равноугольность» возможна в треугольнике) равносильно равнобедренности треугольника.

Если условиться обозначать $\bar{a} = d_{BC}$, $\bar{b} = d_{CA}$, $\bar{c} = d_{AB}$ и $\bar{A} = \delta_{AB, AC}$, $\bar{B} = \delta_{BC, BA}$, $\bar{C} = \delta_{CA, CB}$ направленные (т. е. взятые с определенным знаком) стороны и углы треугольника ABC плоскости Галилея, то формулы (11)–(13) этого параграфа примут следующий простой вид:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0, \quad (11')$$

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = 0, \quad (12')$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{A}} = \frac{\bar{b}}{\bar{B}} = \frac{\bar{c}}{\bar{C}}; \quad (13')$$

таким образом, и здесь имеют место соотношения типа соотношения (14), где также и знаку коэффициента пропорциональности λ можно придать определенный геометрический смысл (ср. с подстрочным примечанием на стр. 118).

Остановимся еще на признаках равенства треугольников в геометрии Галилея. Ясно, что два треугольника ABC и $A'B'C'$, имеющих

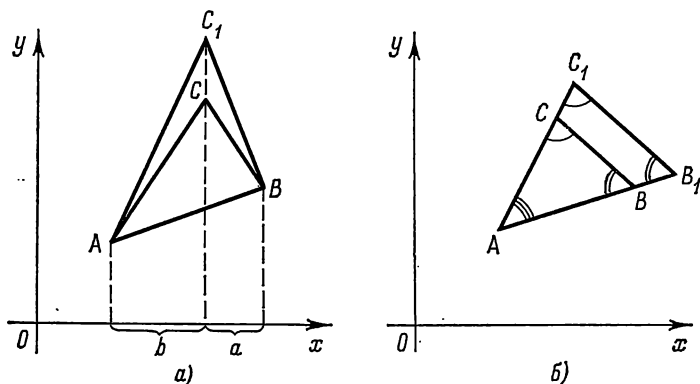


Рис. 45.

одинаковые стороны или одинаковые углы, не обязаны быть равными между собой: ведь две стороны треугольника в геометрии Галилея позволяют найти третью сторону, а два угла—третий угол, в то время как двумя сторонами или двумя углами треугольник плоскости Галилея, очевидно, не определяется (рис. 45, а, б). Также из того, что, скажем, две стороны a и b треугольника ABC и заключенный между ними угол C или сторона a и два примыкающих к ней угла B и C треугольника ABC равны сторонам a' и b' и углу C' , соответственно стороне a' и углам B' и C' треугольника $A'B'C'$, еще не

вытекает равенство треугольников ABC и $A'B'C'$ (так, у треугольников ABC и A_1BC на рис. 46, а сторона $BC=a$ и угол C —общие, а $AC=A_1C$, но $AB=a+b$, а $A_1B=a-b$; у треугольников ABC и A_1BC на рис. 46, б сторона $BC=a$ и угол C —общие и $\angle ABC = \angle A_1BC$, тогда как явно $AB > A_1B$). Однако если направленные (т. е. взятые со знаком $+$ или $-$) стороны $\bar{a}=d_{BC}$ и $\bar{b}=d_{CA}$ треугольника ABC равны направленным сторонам $\bar{a}'=d_{B'C'}$ и $\bar{b}'=d_{C'A'}$ треугольника $A'B'C'$ и $\bar{C}=d_{CB}$, $C A = d_{C'B'}$, $C'A' = \bar{C}'$, то треугольники ABC и $A'B'C'$ равны; также треугольники ABC и $A'B'C'$ равны, если $\bar{a}=d_{BC}=d_{B'C'}=\bar{a}'$ и $\bar{B}=\delta_{BA}$, $BC=\delta_{B'A'}$, $B'C'=\bar{B}'$, $\bar{C}=d_{CB}$, $C A = d_{C'B'}$, $C'A' = \bar{C}'$. Доказательство этих теорем мы предоставим читателю.

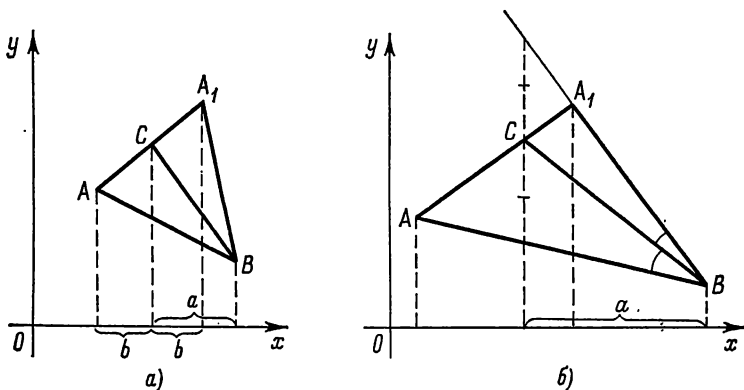


Рис. 46.

Заметим еще, что из соотношений (13) вытекает *пропорциональность сторон* треугольников ABC и $A'C'B'$, имеющих одинаковые углы (ср. выше, рис. 45, б): для таких двух треугольников

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

В этом случае треугольник $A'B'C'$ можно получить из треугольника ABC преобразованием подобия 1-го рода с коэффициентом подобия k —*отображением плоскости Галилея на себя, сохраняющим величины всех углов и увеличивающим все отрезки в одно и то же число k раз* (примером такого преобразования подобия может служить сжатие к точке O или гомотетия—преобразование, переводящее каждую точку A плоскости в такую точку A' луча OA , что $\frac{OA'}{OA} = k$; рис. 47, а). Аналогично этому, если стороны треугольника $A'B'C'$ равны сторонам треугольника ABC (ср. рис. 45, а), то в силу тех же соотношений (13) углы этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k.$$

В этом случае треугольник $A'B'C'$ можно получить из треугольника ABC так называемым преобразованием подобия 2-го рода с коэффициентом подобия κ —отображением плоскости Галилея на себя, сохраняющим величины всех отрезков плоскости Галилея и увеличивающим

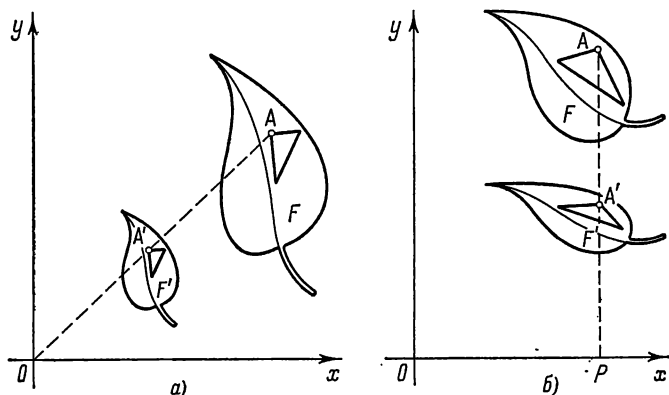


Рис. 47.

величины всех углов в одно и то же число κ раз (примером такого преобразования может служить сжатие к прямой Ox , переводящее каждую точку A плоскости в такую точку A' луча $PA \parallel Oy$, что

$$\frac{PA'}{PA} = \kappa;$$

см. рис. 47, б). Мы здесь не остановимся более подробно на весьма изящном учении о подобных фигурах плоскости Галилея (т. е. о фигурах, переводимых одна в другую преобразованием подобия 1-го рода, преобразованием подобия 2-го рода или, наконец, преобразованием подобия 1-го рода, сопровождаемым преобразованием подобия 2-го рода).

§ 5. Принцип двойственности; антипаралелограмм и антитрапеция

В предыдущем параграфе мы указали, что, в то время как медианы треугольника в геометрии Галилея пересекаются в одной точке (и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершины), биссектрисы треугольника в одной точке не пересекаются. Это обстоятельство может разочаровать читателя, создать у него впечатление, что фигуры в геометрии Евклида устроены более «правильно», более «просто», чем в геометрии Галилея: так, в геометрии Евклида биссектрисы трех углов треугольника всегда сходятся в одной точке (рис. 48, а), тогда как в геометрии Галилея никакая из них никогда не попадает в точку пересечения двух других

(рис. 48, б)¹⁾. Однако на самом деле геометрия Галилея проще геометрии Евклида; в частности, и биссектрисы треугольника в геометрии Галилея обладают весьма простым и изящным свойством, которое вполне может компенсировать нам то, что здесь нет теоремы о точке пересечения биссектрис.

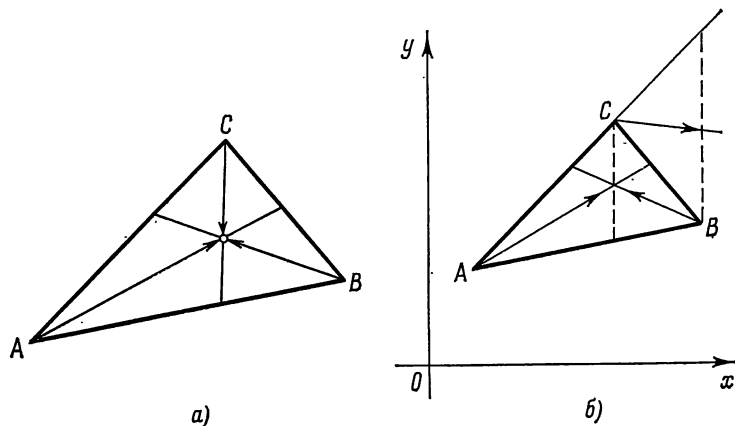


Рис. 48.

Вскоре это замечательное свойство биссектрис треугольника геометрии Галилея будет нами раскрыто. Но вначале поговорим об одной важной особенности геометрии Галилея, которая и поможет нам найти требуемое свойство биссектрис. Хорошо известно, что свойства прямых линий в геометрии Евклида во многом напоминают свойства точек: так, например, через две точки проходит единственная прямая (рис. 49, а) и две прямые могут пересекаться только в одной точке (рис. 49, б); совокупность точек, принадлежащих данной прямой a и расположенных между двумя точками M и N — отрезок MN (см. тот же рис. 49, а), — во многом родственна совокупности прямых, проходящих через данную точку A и расположенных между двумя прямыми m и n , — углу mAn (рис. 49, б); треуголь-

¹⁾ Впрочем, следует отметить, что сравнение рис. 48, а и б не является правомерным: ведь если в геометрии Галилея треугольник имеет всего три биссектрисы, то общее число биссектрис углов треугольника плоскости Евклида следует считать равным шести (три биссектрисы внутренних углов и три биссектрисы внешних углов треугольника!). Эти шесть биссектрис треугольника образуют довольно сложную фигуру: они *сходятся по три в четырех точках* — в центрах вписанной и трех невписанных окружностей треугольника; кроме того, из них можно *составить четыре тройки прямых* таких, что для каждой такой тройки точки пересечения биссектрис с противоположными сторонами треугольника принадлежат одной прямой.

ник можно описать, с одной стороны, как совокупность трех точек, не принадлежащих одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки (рис. 50, а), и, с другой стороны, как совокупность трех прямых, не проходящих через одну точку, и трех углов, образованных этими прямыми (рис. 50, б), и т. д. Однако эта аналогия

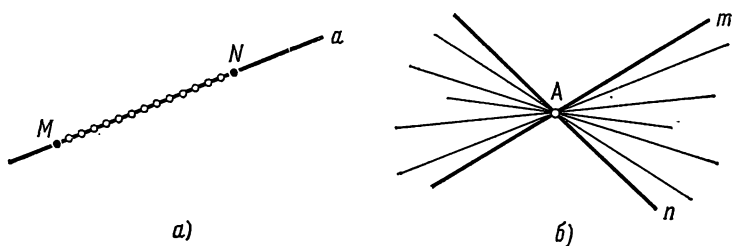


Рис. 49.

между свойствами точек и свойствами прямых не заходит, к сожалению, особенно далеко; поэтому руководствоваться ею в выводе новых свойств точек или прямых было бы довольно рискованно. Основной причиной, нарушающей сходство между свойствами точек

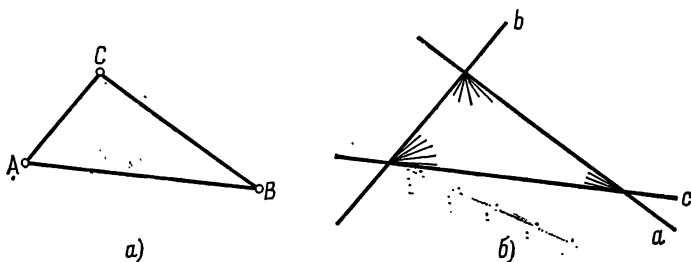


Рис. 50.

и прямых, является существование параллельных прямых, не имеющих ни одной общей точки: если бы свойства точек и прямых были во всем одинаковы, то таким прямым должны были бы отвечать «параллельные точки», т. е. пары точек, которые нельзя соединить ни одной прямой, — но «параллельных точек» в геометрии Евклида нет. Другое различие между свойствами точек и прямых связано с тем, что *расстояние* между точками *A* и *B* может быть сколь угодно большим; если же увеличивать *угол* между прямыми *a* и *b*, поворачивая одну из этих прямых вокруг точки их пересечения, то, когда величина угла поворота достигнет 180° , вращающаяся

прямая займет свое первоначальное положение, так что неограниченно большим угол между двумя прямыми быть не может¹⁾.

По-другому обстоит дело в геометрии Галилея. Прежде всего, там имеются, так сказать, «параллельные точки», т. е. такие точки, которые нельзя соединить никакой (обыкновенной!) прямой; правда, эти точки (см., например, рис. 51) можно соединить особой прямой, но особая прямая геометрии Галилея существенно отлична от обыкновенной прямой, не «равна» ей. С другой стороны, угол между двумя прямыми в геометрии Галилея может быть сколь угодно велик: мы можем провести через точку Q пересечения прямых a и b такую прямую b_1 , что $\angle aQb = \angle bQb_1$; затем такую прямую b_2 , что $\angle bQb_1 = \angle b_1Qb_2$; затем такую прямую b_3 , что $\angle b_1Qb_2 = \angle b_2Qb_3$, и т. д. — и каждый раз это будет новая прямая, более «удаленная» от исходной прямой a (т. е. составляющая с прямой a больший угол), чем все предшествующие (ср. рис. 52, a и b ,

относящиеся к точкам одной прямой q и к прямым, проходящим через одну точку Q). Все это создает новую ситуацию, характеризующуюся

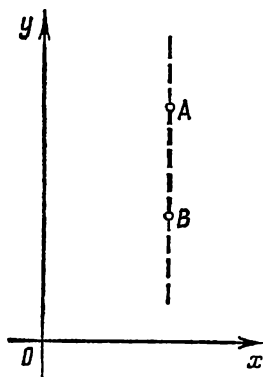


Рис. 51.

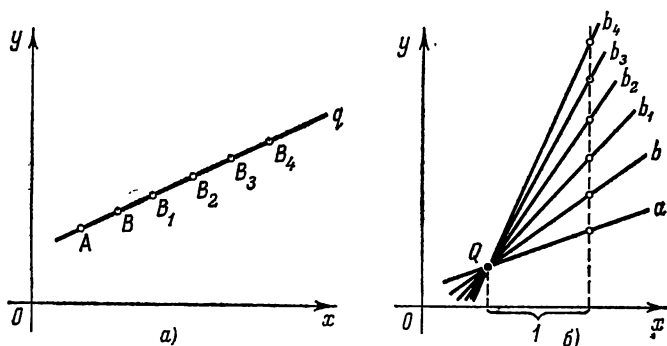


Рис. 52.

полной аналогией свойств точек и свойств прямых — аналогией, проявляющейся в том, что заменив в какой-либо теореме геометрии Галилея слово «точка» словом «прямая» и наоборот, слово «расстоя-

¹⁾ Правда, в тригонометрии рассматривают углы сколь угодно большой величины; однако эти углы не определяются просто парой прямых — «сторон» угла; поэтому они не аналогичны отрезкам, для задания которых достаточно указать пару точек — «концов» рассматриваемого отрезка.

ние» словом «угол», и наоборот, выражение «лежит на» выражением «проходит через» и наоборот, мы приходим к новой теореме, которая тоже будет верной, если только была верна исходная теорема.

Выделенное курсивом утверждение (на вопросе о строгом обосновании которого мы остановимся ниже) носит название принципа двойственности, а теоремы, получаемые одна из другой с помощью этого принципа, — двойственными друг другу теоремами. Этот принцип проливает новый свет на некоторые из известных нам ранее фактов. Так, мы знаем, что в геометрии Галилея, как и в обычной геометрии Евклида, «отклонение» двух прямых друг от друга оценивается величиной образованного этими прямыми угла; если же этот угол равен нулю, т. е. прямые параллельны, то наряду с углом возникает еще одна мера «степени отклонения» прямых, а именно расстояние между ними. Аналогично этому «отклонение» друг от друга двух точек характеризуется расстоянием между ними; если же это расстояние равно нулю, т. е. точки принадлежат одной особой прямой (этот случай родствен случаю параллельности прямых), в качестве новой меры «отклонения» точек появляется особое расстояние, измеряющееся совсем в других единицах, чем обыкновенное расстояние.

Но главным достоинством принципа двойственности является то, что с его помощью можно *выводить новые теоремы из уже известных*. Так, например, ясно, что относящиеся к произвольному треугольнику формулы

$$a + b = c \quad \text{и} \quad A + B = C$$

двойственны друг другу, так что зная одну из них, мы могли бы смело предсказать и другую. В некоторых случаях полученная таким образом новая теорема может и совпасть с исходной: так, заменив в соотношениях $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ стороны углами и наоборот, мы приходим к равенствам $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$, лишь формой отличающимся от первоначальных. Однако в большинстве случаев теорема, двойственная какой-либо теореме геометрии Галилея, будет выражать совершенно новый факт, который без использования принципа двойственности мог бы остаться незамеченным.

Ценность принципа двойственности легко продемонстрировать на примерах. Мы уже знаем, что в *равнобедренном треугольнике* ABC , в котором $AC = BC$, опущенная из вершины C высота (особая прямая) CF совпадает с проведенной из той же вершины медианой; биссектриса же угла C отлична от медианы (и высоты). Последнее утверждение можно еще уточнить. Совпадение медианы CF треугольника ABC с высотой означает, что прямая CF особая, т. е. что *середина* F *сторон* AB , так сказать, «параллельна» вершине C

(рис. 53). Но середине F стороны AB треугольника по принципу двойственности отвечает биссектриса f угла C ; поэтому «параллельности» точек C и F двойственно утверждение о параллельности прямых c и f . Таким образом, мы приходим к следующему утверждению: *биссектриса f угла C при вершине равнобедренного (или равноугольного—см. выше, стр. 65) треугольника ABC , параллельна основанию $AB = c$ этого треугольника.* Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что биссектриса f делит пополам заключенный между сторонами угла C отрезок AP особой прямой, и поскольку прямая FC является средней линией треугольника ABP (ибо $FC \parallel AP$ и $AF = FB$), то прямая f является средней линией того же треугольника ABP (так как она делит пополам его стороны BP и AP) и, значит, $f \parallel BA$.

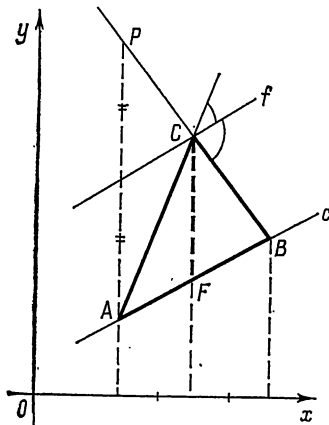


Рис. 53.

В поисках дальнейших примеров мы обратимся к свойствам параллелограммов и трапеций. Ясно, что если противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ плоскости Галилея параллельны (такой четырехугольник мы и здесь будем называть параллелограммом), то противоположные стороны его равны (рис. 54, а);

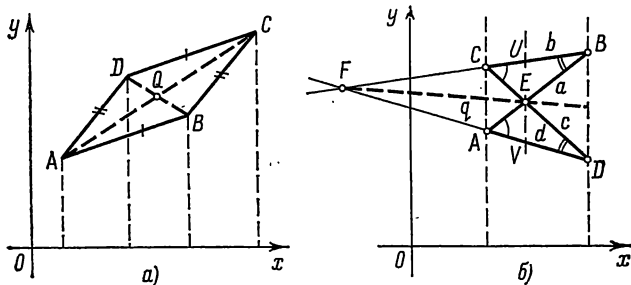


Рис. 54.

далее, диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ в точке пересечения Q делятся пополам (заметим, что «галилеево» содержание последней теоремы ничем не отличается от содержания той же теоремы в геометрии Евклида!). Двойственным параллелограмму объектом геометрии Галилея является четырехугольник $ABCD$, противоположные вершины A и C , B и D которого «параллельны», т. е. такой, что AC и BD —особые прямые (рис. 54, б); обладающий таким свойством (обязательно самопересекающийся!) четырехугольник $ABCD$

со сторонами $AB \equiv a$, $BC \equiv b$, $CD \equiv c$, $DA \equiv d$ мы назовем антипараллелограммом. Ясно, что *противоположные углы антипараллелограмма равны* (т. е. $A = C$, $B = D$); этот факт, двойственный равенству противоположных сторон параллелограмма, с очевидностью вытекает из самого определения величины угла в геометрии Галилея. Далее, диагоналям AC и BD параллелограмма $ABCD$, соединяющим противоположные вершины A и C , B и D , отвечают

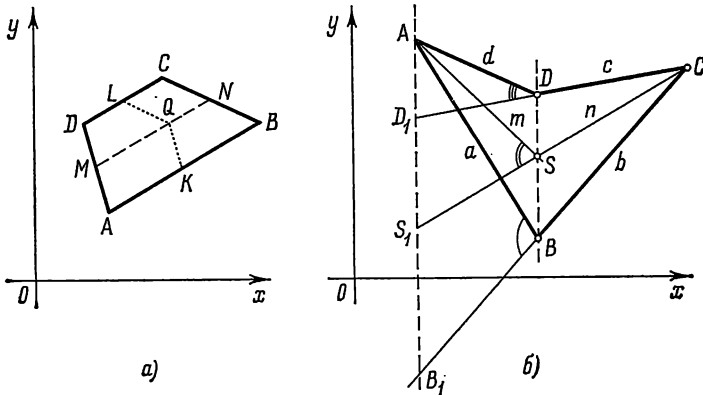


Рис. 55.

точки E и F пересечения противоположных сторон a и c , b и d антипараллелограмма $ABCD$; при этом длинам диагоналей AC и BD параллелограмма в антипараллелограмме отвечают величины углов $aEс$ и bFd . Точке Q пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма отвечает прямая $q \equiv EF$; утверждению о том, что точка Q делит диагонали AC и BD пополам, двойственна следующая теорема: *прямая EF , соединяющая точки E и F пересечения противоположных сторон антипараллелограмма, делит углы между противоположными сторонами пополам*. Для доказательства этой теоремы достаточно провести особую прямую через точку E и заметить, что отрезок UV этой прямой, заключенный между прямыми b и d , делится в точке E пополам (это следует из равенства противоположных углов антипараллелограмма). Отсюда следует, что $\angle bFq = \angle qFd$; но тогда и $\angle aEq = \angle qEc$, так как $\angle aEq = \angle bFq + \angle aBb$ и $\angle qEc = \angle qFd + \angle dDc$.

Трапецией мы, как обычно, будем называть четырехугольник $ABCD$, противоположные стороны AB и DC которого параллельны (рис. 55, а). Так как трапеция плоскости Галилея является и евклидовой трапецией, то средняя линия MN трапеции $ABCD$ (соединяющая середины M и N боковых сторон AD и BC) параллельна

основаниям AB и DC и равна их полусумме¹⁾. Четырехугольник $ABCD$ плоскости Галилея со сторонами $AB \equiv a$, $BC \equiv b$, $CD \equiv c$, $DA \equiv d$, две противоположные вершины B и D которого «параллельны» (т. е. такой, что BD —особая прямая; рис. 55, б), мы назовем антитрапецией. Боковым сторонам BC и DA трапеции $ABCD$ отвечают вершины C и A антитрапеции $ABCD$, а серединам N и M боковых сторон трапеции—биссектрисы $n \equiv CS$ и $m \equiv AS$ углов C и A антитрапеции, пересекающиеся в точке S . Параллельности средней линии MN трапеции $ABCD$ ее основаниям AB и CD двойственно утверждение о том, что точка S пересечения биссектрис m и n углов A и C антитрапеции $ABCD$ «параллельна» вершинам B и D , т. е. принадлежит особой прямой BD ,—но это очевидно, ибо в силу определения биссектрисы угла в геометрии Галилея прямые AS и CS делят отрезок BD пополам. Утверждению же о том, что средняя линия MN трапеции равна полусумме оснований AB и DC , двойственна теорема о том, что угол mSn равен полусумме углов aBb и dDc антитрапеции:

$$\angle mSn = \frac{1}{2} \angle aBb + \frac{1}{2} \angle dDc \quad \left(= \frac{1}{2} \delta_{ab} + \frac{1}{2} \delta_{dc} \right).$$

[Последнее вытекает из того, что в обозначениях рис. 55, б

$$\begin{aligned} \overline{AS}_1 &= \overline{AB}_1 - \overline{S}_1B_1 = \overline{AB}_1 - \frac{1}{2} \overline{D}_1B_1 = \overline{AB}_1 - \frac{1}{2} (\overline{AB}_1 - \overline{AD}_1) = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AB}_1 + \frac{1}{2} \overline{AD}_1; \end{aligned}$$

здесь $B_1D_1 \parallel BD$ —особая прямая.] Частным случаем этой теоремы является утверждение о том, что в треугольнике ABC (который можно рассматривать как «вырожденную антитрапецию» $ABCP$, где BP —высота треугольника) биссектрисы AS и CS углов A и C пересекаются в точке S высоты BP (эта точка, очевидно, делит высоту BP пополам) и образуют угол, равный половине угла B треугольника (ибо на рис. 56, а $AS_1 = \frac{1}{2} AB_1$; ср. с теоремой о средней линии треугольника, рис. 56, б).

Теперь нам уже нетрудно сообразить, какой теореме отвечает в силу принципа двойственности теорема о точке пересечения медиан

¹⁾ Так как $MN \parallel AB \parallel CD$, то это свойство трапеции является одновременно «евклидовым» и «галилеевым»: ведь оно равносильно утверждению, что прямые $KQ \parallel AD$ и $LQ \parallel CB$, проведенные через середины K и L оснований AB и CD трапеции, пересекаются на средней линии MN (ибо при этом, в силу свойств параллелограмма, $MN = MQ + QN = AK + CL = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DC$), — а все фигурирующие в этом утверждении понятия имеют и «галилеев» смысл!

треугольника. Серединам D , E и F сторон BC , CA и AB треугольника ABC отвечают в силу принципа двойственности биссектрисы $d \equiv AU$, $e \equiv BV$ и $f \equiv CW$ его углов A , B и C (ср. рис. 57, а и б); прямым AD , BE и CF —точки U , V и W пересечения биссектрис

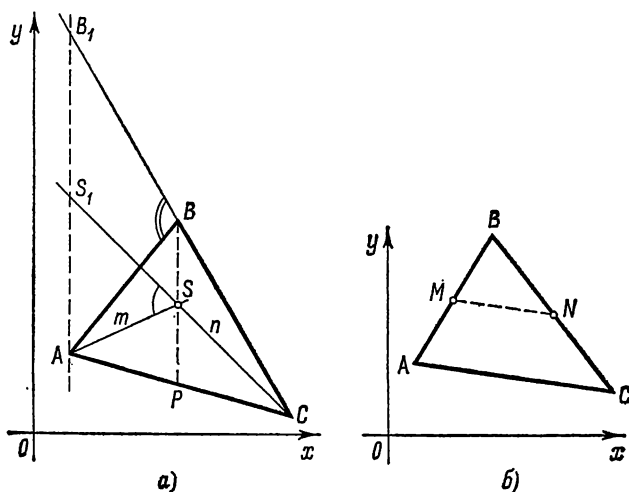


Рис. 56.

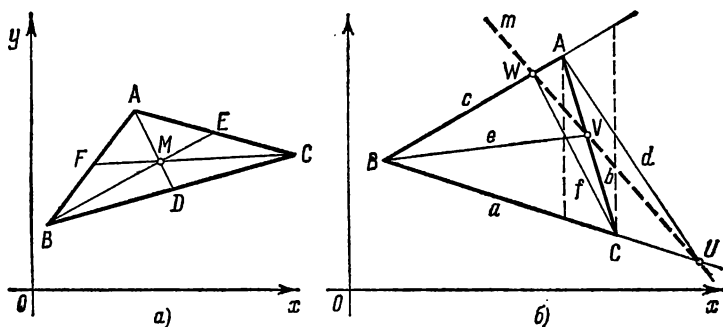


Рис. 57.

треугольника ABC с его противоположными сторонами. Поэтому теореме о том, что *медианы* AD , BE и CF треугольника ABC *пересекаются в одной точке* M (рис. 57, а), двойственно утверждение о том, что *точки* U , V и W *принадлежат одной прямой* m (рис. 57, б). При этом, так как

$$AM:MD = BM:ME = CM:MF = 2:1,$$

то в силу принципа двойственности должно быть также

$$\angle aUm : \angle mUd = \angle bVm : \angle mVe = \angle cWm : \angle mWf = 2 : 1$$

— точки пересечения биссектрис (неравностороннего¹⁾)! треугольника ABC с противоположными сторонами принадлежат одной прямой m , которая делит углы, образованные биссектрисами с противоположными сторонами треугольника, в отношении 2:1, считая от стороны. Это и есть то свойство биссектрис треугольника в геометрии Галилея, с упоминания о котором мы начали этот параграф.

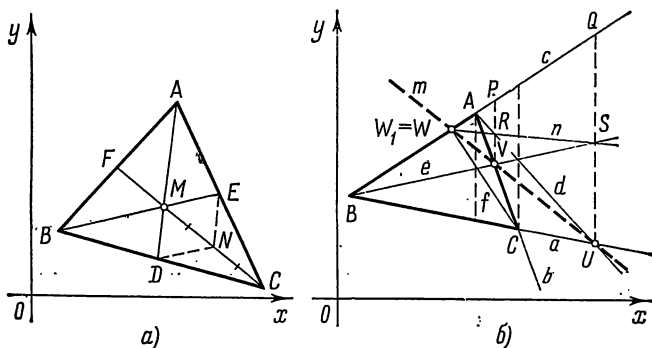


Рис. 58.

Для того чтобы доказать это свойство биссектрис треугольника, вспомним доказательство теоремы о медианах²⁾. Прежде всего покажем, что медианы AD и BE треугольника ABC делятся в точке пересечения M в отношении $AM:MD = BM:ME = 2:1$. Для этого соединим середины D и E сторон BC и CA с серединой N отрезка CM (рис. 58, а; пока мы не можем утверждать, что отрезок CM принадлежит медиане CF треугольника). Так как отрезки DN и EN служат средними линиями треугольников BMC и CMA , то $DN \parallel BE$ и $EN \parallel AD$, так что четырехугольник $MDNE$ — параллелограмм. Отсюда

$$DM = NE = \frac{1}{2} MA \text{ и } EM = ND = \frac{1}{2} MB,$$

что и требовалось доказать. А так как это рассуждение сохраняет силу для любых двух медиан треугольника, то каждые две из них делятся в точке пересечения в отношении 2:1, считая от вершины; отсюда уже вытекает, что все три медианы пересекаются в одной

¹⁾ Если треугольник ABC равнобедренный: $AC = BC$, то прямая m , проходящая через точки пересечения биссектрис AU и BV углов A и B с противоположными сторонами, параллельна основанию AB треугольника и биссектрисе угла при вершине C (ср. выше, стр. 64, в частности, рис. 43).

²⁾ См. Киселев [4], п. 143.

точке (ибо обе медианы, BE и CF , пересекают медиану AD в такой точке M , что $AM:MD = 2:1$).

«Обратим» теперь это рассуждение, заменив в нем точки прямыми и наоборот и отрезки углами и наоборот. Обозначим через m прямую UV , где U и V — точки пересечения биссектрис $d \equiv AU$ и $e \equiv BV$ треугольника с противоположными сторонами. Пусть n — биссектриса угла mW_1c , образованного прямой m со стороной $AB \equiv c$ треугольника ABC (рис. 58, б; пока мы еще не можем утверждать, что точка W_1 совпадает с точкой W пересечения биссектрисы f угла C со стороной c); точки пересечения прямой n с биссектрисами d и e обозначим через R и S . Так как точки R и S , будучи точками пересечения биссектрис d и n , соответственно e и n , треугольников AVW_1 и BUW_1 , принадлежат их высотам VP и UQ (ср. стр. 74 и рис. 56, а), то (самопересекающийся) четырехугольник $RUVS$ — антипараллелограмм; поэтому $\angle mUd = \angle eSn$ и $\angle mVe = \angle dRn$. А теперь, применяя к треугольникам AVW_1 и BUW_1 теорему о величине угла между биссектрисами треугольника, без труда получаем, что

$$\angle dUm = \angle nSe = \frac{1}{2} \angle mUa \text{ и } \angle eVm = \angle nRd = \frac{1}{2} \angle mVb,$$

т. е. что *прямая m делит углы, образованные биссектрисами d и e с противоположными сторонами треугольника в отношении 2:1, считая от стороны*. Наконец, так как прямая $UW \equiv m_1$, где W — точка пересечения биссектрисы $f \equiv CW$ угла C со стороной $AB \equiv c$, в силу точно такого же рассуждения также обладает тем свойством, что $\angle aUm_1 : \angle m_1Ud = 2:1$, то она совпадает с прямой $m \equiv UV$, т. е. точки U , V и W принадлежат одной прямой m такой, что

$$\angle aUm : \angle mUd = \angle bVm : \angle mVe = \angle eWm : \angle mWf = 2:1.$$

Это доказательство «теоремы о биссектрисах» треугольника плоскости Галилея весьма поучительно — ведь оно представляет собой совершенно точное «обращение» (в смысле принципа двойственности) доказательства теоремы о медианах. Последнее обстоятельство раскрывает новые черты самого принципа двойственности — оказывается, что не только формулировки двойственных друг другу теорем можно получить одну из другой с помощью чисто словесных «преобразований» (замены слова «точка» словом «прямая» и т. д.), но и доказательства двойственных теорем получаются одно из другого точно таким же образом! Для того чтобы понять причины этого, следует вспомнить, какой смысл имеет в геометрии само понятие «доказательства» (теоремы); обсуждение связанных с этим вопросов не только поможет глубже понять обстоятельства, обуславливающие принцип двойственности, но и позволит дать этому принципу полноценное обоснование, в то время как до сих пор мы ограничивались лишь иллюстрациями этого принципа, — правда,

иллюстрациями весьма выразительными, но доказательной силы, строго говоря, все же не имеющими.

Хорошо известно, что общий путь доказательства всех геометрических теорем состоит в следующем. С помощью чисто логических умозаключений интересующая нас теорема сводится к каким-то новым, более простым, чем первоначальная; получаемые таким путем новые теоремы также сводятся к более простым и т. д.— до тех пор, пока

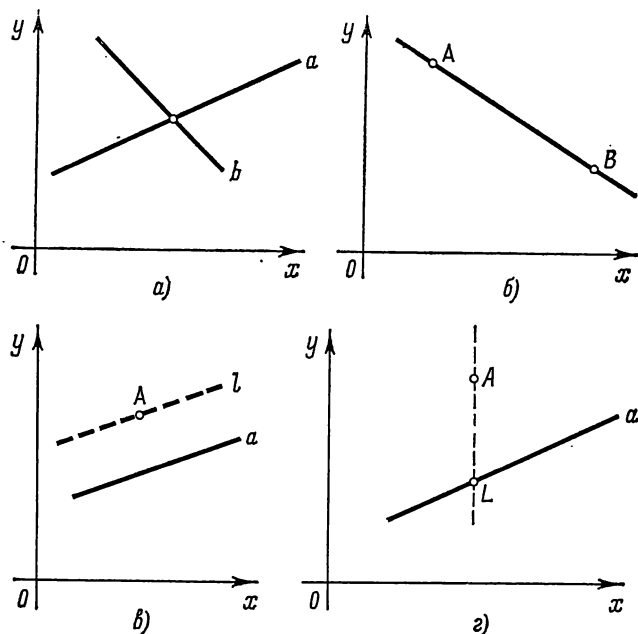


Рис. 59.

мы не придем к простейшим геометрическим теоремам, называемым аксиомами и принимаемым без доказательства. [В реальной практике доказательства теорем их чаще всего сводят не непосредственно к аксиомам, а к известным ранее теоремам; но это ничего не меняет в описанной схеме—просто здесь опускается, как уже известная, некоторая часть всей цепочки дедуктивных умозаключений (выводов).] Но в геометрии Галилея основные свойства точек и прямых, расстояний и углов совершенно равноправны; это означает, что, заменив в формулировке любой аксиомы слово «точка» словом «прямая» и т. д., мы получим также справедливое утверждение: так, например, аксиоме «две прямые имеют не более одной общей точки» (рис. 59, а) отвечает утверждение «две точки можно соединить не более чем одной (обыкновенной) прямой» (рис. 59, б); аксиоме

параллельности, утверждающей, что *через каждую точку A, лежащую вне прямой a, можно провести единственную прямую l, не пересекающую a* (рис. 59, в), — утверждение о том, что *на каждой (обыкновенной) прямой a, не проходящей через точку A, существует единственная точка L, которую нельзя соединить с A (обыкновенной) прямой* (рис. 59, г), и т. д. Отсюда следует, что при такой же замене одних слов другими каждая теорема геометрии Галилея переходит в другую, также верную: в самом деле, эту новую теорему можно доказать аналогично исходной, заменив во всем рассуждении слово «точка» словом «прямая» и т. д. — только это рассуждение приведет не к тем же аксиомам, что и первоначальное доказательство, а к двойственным им предложениям (аксиомам), которые тоже справедливы. Причем это совершенно общее рассуждение избавляет нас даже от необходимости доказывать отдельно двойственные друг другу теоремы: доказав одну из них, мы автоматически убеждаемся и в справедливости второй; поэтому все проведенные выше доказательства теорем, двойственных известным теоремам геометрии Галилея, можно считать излишними!

Вот еще одно доказательство сформулированной на стр. 76 теоремы о точках пересечения биссектрис треугольника плоскости Галилея с противоположными сторонами. Хорошо известно, что теорема о точке пересечения

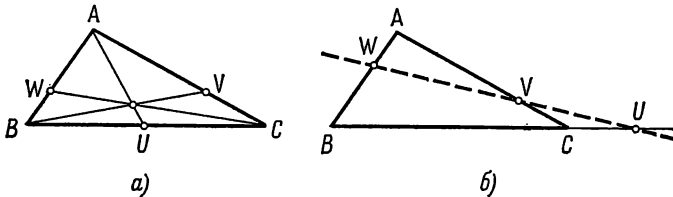


Рис. 60.

медиан (равно справедливая в геометрии Евклида и в геометрии Галилея!) является непосредственным следствием так называемой теоремы Чева, в силу которой *три прямые AU, BV и CW, проходящие через вершины треугольника ABC и пересекающие противоположные стороны в точках U, V и W* (рис. 60, а), *в том и только в том случае пересекаются в одной точке* (или параллельны между собой), *когда*

$$\frac{AW}{WB} \cdot \frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VA} = 1,$$

где отрезки AW и WB , BU и UC , CV и VA считаются направленными, ср. выше, стр. 29¹⁾. [Из этой же теоремы вытекает и (евклидова) теорема

¹⁾ См., например, § 73 книги Перепелкина [5] или задачу 57 б) книги Яглома [9]. (В дальнейшем мы во всех случаях, где это не может вызвать недоразумений, будем обозначать направленный отрезок с концами A и B просто через AB , без черточки сверху!)

о точке пересечения биссектрис треугольника: ведь если AU , BV и CW — евклидовы биссектрисы треугольника ABC с длинами сторон $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, то $AW:WB=b:a$, $BU:UC=c:b$, $CV:VA=a:c$ и из равенства

$$\frac{AW}{WB} \cdot \frac{BU}{UC} \cdot \frac{CV}{VA} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

вытекает, что *прямые AU , BV и CW пересекаются в одной точке.*] Аналогично этому принадлежность трех точек U , V и W рис. 57, б одной прямой является следствием теоремы Менелая, в силу которой *точки U , V и W , принадлежащие сторонам BC , CA и AB треугольника ABC (рис. 60, б), в том и только в том случае принадлежат одной прямой, когда*

$$\frac{AW}{BW} \cdot \frac{BU}{CU} \cdot \frac{CV}{AV} = 1$$

(здесь также отрезки AW и BW , BU и CU , CV и AV считаются *направленными*)¹⁾. В самом деле, если на рис. 57, б $\overline{AB} = d_{AB} = c$, $\overline{BC} = d_{BC} = a$, $\overline{CA} = d_{CA} = b$ (где $a+b+c=0$; обратите внимание на знаки отрезков и углов!), то в силу соотношений (13) из § 4 (стр. 62; ср. также стр. 65) из рассмотрения треугольников ABU и ACU заключаем:

$$BU:AU = \angle BAU : \angle ABU \quad \text{и} \quad CU:AU = \angle UAC : \angle UCA.$$

Но $\angle BAU = \angle UAC$ (ибо AU — биссектриса угла A); поэтому

$$BU:CU = \angle UCA : \angle ABU = \angle C : \angle B = c:b$$

(см. равенства (13) и (13') из § 4). Аналогично доказывается, что

$$CV:AV = a:c \quad \text{и} \quad AW:BW = b:a.$$

А теперь из равенства

$$\frac{AW}{BW} \cdot \frac{BU}{CU} \cdot \frac{CV}{AV} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

сразу следует, что *точки U , V и W принадлежат одной прямой.*

Укажем еще один изящный пример двойственных друг другу теорем. Хорошо известно, что *прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и точку Q пересечения ее непараллельных сторон, делит пополам основания AB и CD трапеции* (рис. 61, а). [Для доказательства этого достаточно заметить, что сжатие к точке Q (гомотетия; см. выше, стр. 66 и

рис. 47, а) с коэффициентом $k_1 = \frac{QD}{QA}$ переводит AB в DC и, значит, переводит середину M отрезка AB в середину N отрезка DC ; поэтому точки M и N лежат на одной прямой с центром Q рассматриваемого сжатия (гомотетии). Аналогично этому сжатие к точке P (гомотетия) с коэффициентом

$k_2 = \frac{PC}{PA}$ (здесь отрезки надо обязательно считать *направленными*, так как k_2 отрицательно) переводит отрезок AB в отрезок CD и середину M

отрезка AB в середину N отрезка CD ; поэтому и точка Q лежит на одной прямой с точками M и N .] Но точка Q пересечения боковых сторон трапеции $ABCD$ по принципу двойственности отвечает прямая q , соединяющая противоположные (и не «параллельные») вершины A и C антитрапеции $ABCD$; точка P пересечения диагоналей трапеции отвечает прямая p , соединяющая точки пересечения

¹⁾ См. § 64 книги Перепелкина [5] или задачу 57 а) книги Яглома [9].

противоположных сторон антитрапеции; серединам M и N оснований трапеции отвечают биссектрисы m и n углов B и D антитрапеции (рис. 61, б). Таким образом, в силу принципа двойственности мы можем утверждать, что (обыкновенная) прямая $q = AC$, соединяющая противоположные вершины A и C антитрапеции $ABCD$, прямая p , соединяющая точки пересечения противоположных сторон антитрапеции, и биссектрисы m и n углов B и D пересекаются в одной точке.

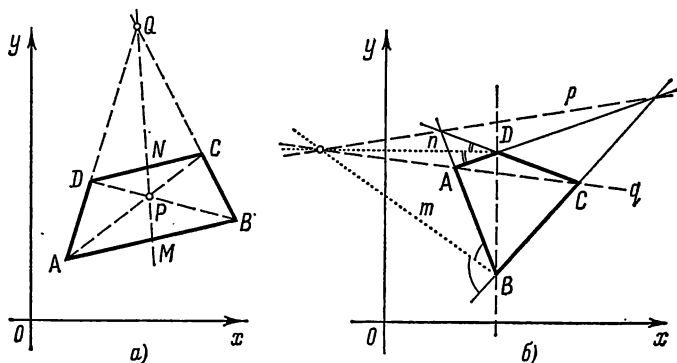


Рис. 61.

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что, скажем, сжатие к прямой p (ср. выше, стр. 67, в частности, рис. 47, б), переводящее точку B в точку D , переводит угол B антитрапеции в угол D и, следовательно, переводит биссектрису m угла B в биссектрису n угла D ; поэтому точка пересечения прямых m и n принадлежит прямой p («оси» рассматриваемого сжатия). Аналогично устанавливается и факт принадлежности точки пересечения прямых m и n прямой q .

Мы рекомендуем читателю самостоятельно придумать другие примеры двойственных друг другу теорем геометрии Галилея.

Заметим, наконец, что также и намеченное на стр. 77—79 доказательство принципа двойственности, в той форме, в какой оно было изложено, вряд ли кто-либо сочтет полноценным: ведь равноправность основных свойств точек и прямых в геометрии Галилея, на которой это доказательство базируется, была лишь проиллюстрирована на отдельных примерах, но не установлена с полной (математической) строгостью. Однако доведение этого доказательства до конца невозможно без апелляции к полному списку аксиом геометрии Галилея, который вряд ли уместно выписывать в книге, многие читатели которой незнакомы даже с полной аксиоматикой геометрии Евклида (обычно ведь опускаемой в элементарных учебниках — см., например, книги [4] или [7]¹⁾). Поэтому мы вынуждены ограничиться здесь вышесказанным, извинившись перед критически настроенным читателем за (неизбежную) неполноту наших рассуждений.

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о механическом содержании принципа двойственности. К геометрии Галилея мы пришли,

¹⁾ Образцы полной системы аксиом планиметрии Евклида читатель может найти, например, в учебниках Перепелкина [5] и Погорелова [7а] или в классической монографии Гильберта [7б].

приняв за точки «события» одномерной кинематики, характеризуемые указанием места на прямой o и времени; роль движений в нашей геометрии играют преобразования Галилея. При этом естественным образом определяется «расстояние» между двумя событиями, измеряемое отвечающим этим событиям интервалом времени; для одновременных событий, для которых это «расстояние» равно нулю, можно определить новое «расстояние» — пространственное расстояние между соответствующими пунктами прямой o . Далее, два (неодновременных!) события определяют «соединяющее» их равномерное движение вдоль o , играющее роль прямой нашей геометрии, — и на этой базе строится содержательная теория, близкая, как мы видели, к евклидовой геометрии. Но никто не мешает нам пытаться строить и другие геометрические системы, принимая за точки не события, а другие объекты механики. В частности, можно объявить «точками» новой геометрической системы всевозможные равномерные движения по прямой o , отождествляя по-прежнему с «движениями» получаемой таким образом «геометрии» преобразования Галилея, состоящие в переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. При этом в множество равномерных движений также естественно вводится «метрика»: за «расстояние» между двумя движениями (или «отклонение» одного равномерного движения от другого) можно принять относительную скорость, имеющую, как мы знаем, «абсолютный» (т. е. не зависящий от выбора системы отсчета) смысл; если же два рассматриваемых движения имеют одну скорость (т. е. относительная скорость одного из них по отношению к другому равна нулю), то можно говорить об обычном расстоянии в этом случае не меняется с течением времени. Далее, два равномерных движения (с разными скоростями!) определяют единственное «событие», принадлежащее обоим движениям; это событие в «геометрии равномерных движений» играет роль «прямой». Принцип двойственности утверждает, что подобная «геометрия равномерных движений» не будет ничем отличаться от той «геометрии событий», которой посвящена основная часть этой книги.

ГЛАВА II

ОКРУЖНОСТИ И ЦИКЛЫ

§ 6. Определение цикла; радиус и кривизна

В элементарной геометрии рассматриваются свойства фигур (обычной) плоскости Евклида, ограниченных отрезками прямых и дугами окружностей (примеры: треугольник, круг, круговой сектор). При этом окружность плоскости Евклида чаще всего определяют как

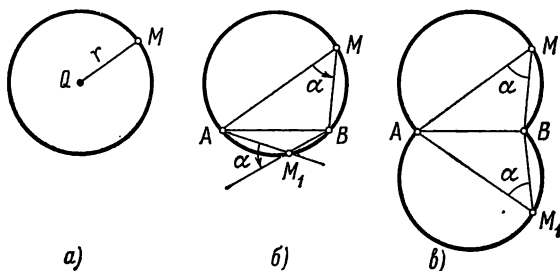


Рис. 62.

множество («геометрическое место») точек, удаленных от фиксированной точки Q на постоянное расстояние r (рис. 62, а); реже используется определение окружности как множества точек, из которых данный отрезок AB виден под постоянным (направленным!) углом α (рис. 62, б). В геометрии Галилея соответствующие два множества точек не совпадают. Выше мы уже видели, что окружность S плоскости Галилея — множество точек, удаленных от фиксированной точки Q на постоянное расстояние r , — является мало интересным геометрическим образом: это есть просто пара особых прямых (рис. 63, а). Гораздо больший интерес представляет множество Z точек M , из которых данный («обыкновенный», т. е. принадлежащий обыкновенной прямой) отрезок AB виден под постоянным углом α ; это множество точек мы назовем **циклом**.

Ни в одном из пунктов школьного курса геометрии не проявляется с такой отчетливостью как здесь неестественность отказа от понятия направленного угла: ведь если считать углы ненаправленными (положительными), то множество точек M , из которых данный отрезок AB виден под данным углом α , приобретает совершенно искусственный вид пары сегментов (рис. 62, в; заметьте, что это множество точек даже не может быть описано «приличным», т. е. не слишком сложным, уравнением!). Но если считать углы между прямыми

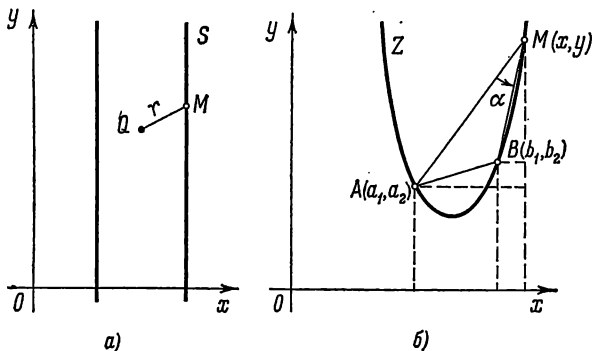


Рис. 63.

направленными (т. е. зафиксировать направление отсчета положительных углов, а также условиться считать, что угол между MA и MB —это угол поворота прямой MA до совмещения ее с прямой MB), то множество точек M обращается в обыкновенную окружность. Действительно, легко видеть, что направленный угол между изображенными на рис. 62, б прямыми M_1A и M_1B равен той же величине α , что и направленный угол между прямыми MA и MB , в то время как направленный угол между изображенными на рис. 62, в прямыми M_1A и M_1B равен $-\alpha$, поскольку он противоположен по направлению углу между прямыми MA и MB .

Не представляет никакого труда установить, какой вид имеет уравнение цикла. Пусть $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ —две произвольные точки плоскости Галилея; $M(x, y)$ —такая точка, что $\angle AMB = \alpha$. Ясно, что (см. рис. 63, б) угловые коэффициенты k и k_1 прямых MA и MB равны

$$k = \frac{y - a_2}{x - a_1} \quad \text{и} \quad k_1 = \frac{y - b_2}{x - b_1}$$

и, значит, в силу формулы (8) из § 3 (стр. 54)

$$\alpha = k_1 - k = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1}.$$

Таким образом, координаты всех точек $M(x, y)$, для которых $\angle AMB = \alpha$, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1} = \alpha$$

или ¹⁾

$$\alpha(x-b_1)(x-a_1) - (x-a_1)(y-b_2) + (x-b_1)(y-a_2) = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$(b_1 - a_1)y = \alpha x^2 + [(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 + a_1)]x + \alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1$$

или

$$y = ax^2 + 2bx + c, \quad (1)$$

где

$$a = \frac{\alpha}{b_1 - a_1} \neq 0, \quad b = \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{2(b_1 - a_1)}, \quad c = \frac{\alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1} \quad (1a)$$

($b_1 - a_1 \neq 0$, поскольку прямая AB является обыкновенной!). Но уравнение (1) нам хорошо известно — оно выражает (евклидову) параболу.

Таким образом, *циклы плоскости Галилея изображаются параболами* (1). Иногда циклом называют множество точек, описываемое уравнением

$$ax^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (2)$$

несколько более общим, чем уравнение (1) и приводимым к виду (1), если $b_2 \neq 0$, $a \neq 0$. При этом частными случаями «цикла» оказываются окружность (пара особых прямых), особая прямая, обыкновенная прямая. Действительно, окружности соответствует случай $b_2 = 0$, $a \neq 0$, $b_1^2 - ac > 0$; особой прямой — случай $b_2 = 0$, $a \neq 0$, $b_1^2 - ac = 0$ ²⁾ или же случай $a = b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$; обыкновенной прямой — случай $a = 0$, $b_2 \neq 0$. [Аналогично этому и уравнение евклидовой окружности (уравнение (2')) из § 1 Введения, стр. 17) можно записать в виде

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (2')$$

охватывающим наряду с окружностями также и прямые линии (случай обращения в нуль коэффициента a уравнения).] Понимание термина «цикл» в смысле «линия, записываемая уравнением (2)» удобно потому, что в таком случае верна теорема: *через любые три точки*

¹⁾ Заметим, что $x - a_1 \neq 0$ и $x - b_1 \neq 0$, поскольку прямые MA и MB — обыкновенные (ибо в противном случае «галилеева» угла между этими прямыми просто не существует).

²⁾ При $b_2 = 0$, $a \neq 0$ уравнение (2) превращается в квадратное уравнение $ax^2 + 2b_1x + c = 0$. Если $b_1^2 - ac > 0$ (т. е. корни x_1 и x_2 уравнения — действительные различные), то это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x = x_1$, и $x = x_2$, т. е. действительно выражает окружность; если $b_1^2 - ac = 0$ (т. е. корни уравнения совпадают), то рассматриваемое уравнение выражает особую прямую («окружность нулевого радиуса»); если же $b_1^2 - ac < 0$ (т. е. корни уравнения мнимые), то уравнение $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ вовсе не определяет никакого множества точек.

A, B, C плоскости Галилея проходит единственный «цикл» (т. е. обыкновенный цикл (1), или окружность, или обыкновенная прямая, или особая прямая; см. рис. 64, а—г). Мы, однако, в дальнейшем всегда будем употреблять термин «цикл» лишь в смысле линии (1) (евклидовой параболы).

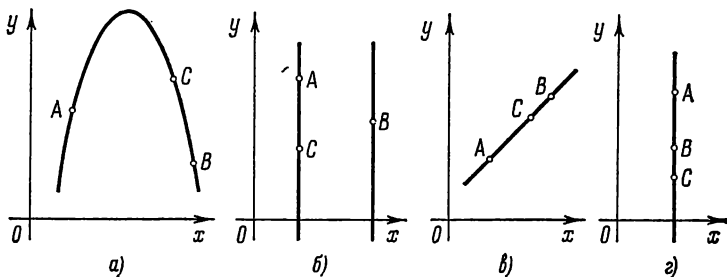


Рис. 64.

Цикл Z определяется тем своим свойством, что все его вписанные углы, опирающиеся на одну хорду AB , имеют одно и то же значение α (ср. рис. 65, а и б, относящиеся к галилееву циклу Z и к евклидовой окружности S). Отсюда можно вывести, что угол между хордой AB цикла Z и проведенной в конце этой хорды касательной

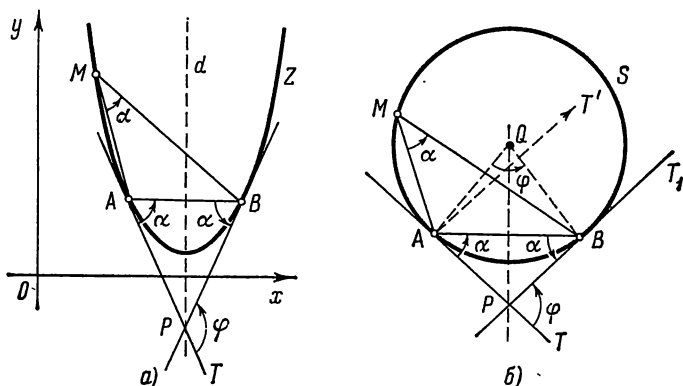


Рис. 65.

также равен α : в самом деле, если точку M (рис. 65) устремить к точке A , то хорда AM будет стремиться к касательной AT в точке A , а хорда MB — к хорде AB ; но поскольку все рассматриваемые прямые AM образуют с прямыми BM один и тот же угол α , то тот же угол α образует касательная AT с хордой AB .

Из последнего же факта в свою очередь следует, что *касательные* PA и PB , проведенные к циклу из одной точки P , равны между собой — ведь изображенный на рис. 65 треугольник PAB равнобедренный, поскольку его углы при основании AB равны (см. стр. 65).

Попытаемся теперь определить «радиус» цикла Z . Поскольку никакого «центра» цикл плоскости Галилея не имеет, мы не можем исходить из определения радиуса евклидовой окружности как расстояния от его центра до любой из точек — необходим какой-то иной подход. Радиус r окружности S можно также определить как коэффициент пропорциональности между длиной s дуги AB окружности и отвечающим этой дуге центральным углом $\varphi = \angle AQB$, измеренным в «естественной», т. е. радианной¹⁾, мере:

$$r = \frac{s}{\varphi} \quad (3)$$

(рис. 65, б); однако это определение радиуса также связано с понятием центра окружности и потому не может быть перенесено на случай цикла. Однако центральный угол φ можно заменить вписанным углом α , равным его половине; другими словами, можно сказать, что *радиус r окружности S равен отношению длины произвольной дуги $s = \overset{\frown}{AB}$ к удвоенной величине 2α опирающегося на эту дугу вписанного угла:*

$$r = \frac{s}{2\alpha}, \quad (3a)$$

а свойство вписанного угла окружности сохраняет силу и для цикла (ведь этим свойством цикл и определяется).

Для того чтобы выделенное курсивом «определение радиуса» можно было перенести на цикл Z плоскости Галилея, надо только убедиться, что *для любой дуги AB данного цикла Z отношение $\frac{s}{\alpha}$, где s есть длина рассматриваемой дуги, а α — опирающийся на нее вписанный угол, не зависит от выбора дуги*. При этом под длиной s дуги AB произвольной линии Γ плоскости Галилея естественно понимать *предел, к которому стремится длина $AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nB$ вписанной в AB ломаной $AA_1A_2\dots A_nB$ (рис. 66) при неограниченном уменьшении всех звеньев ломаной*. Однако такой «евклидов» подход оказывается здесь довольно бессодержательным: легко видеть, что (галилеева!) длина каждой вписанной в дугу AB ломаной $AA_1A_2\dots A_nB$ имеет одно и то же значение, равное длине

¹⁾ Правда, в школьном курсе геометрии радианная мера угла определяется равносильным (3) равенством $\varphi = \frac{s}{r}$; однако это определение отнюдь не является единственно возможным: так, например, радианную меру угла можно определить условием $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$.

хорды AB^1). Поэтому и длину s дуги AB кривой Γ следует считать равной длине $s = d_{AB}$ хорды AB .

Заметим теперь, что в силу формул (1а) отношение $\frac{\alpha}{b_1 - a_1}$ величины α вписанного в цикл Z угла, опирающегося на дугу AB , к длине $s = d_{AB} = b_1 - a_1$ хорды AB с концами в точках $A(a_1, a_2)$ и

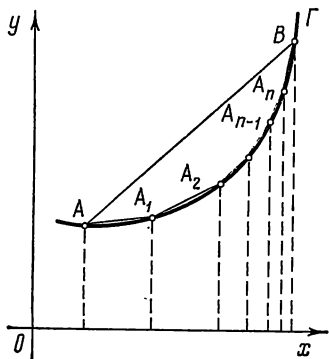


Рис. 66.

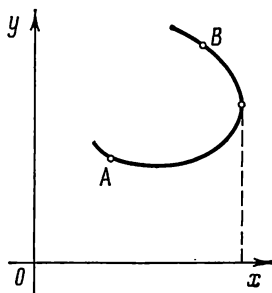


Рис. 66а.

$B(b_1, b_2)$, равно коэффициенту a в уравнении (1) цикла. Поэтому, условившись определять «радиус» r цикла Z как *половину отношения длины s дуги AB цикла (или отвечающей этой дуге хорды AB) к опирающемуся на AB вписанному углу α* (т. е. той же формулой (3а), которой можно определить и радиус евклидовой окружности!), мы получим

$$r = \frac{1}{2} \frac{s}{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{1}{2a} \quad (3б)$$

— радиус r цикла Z равен $\frac{1}{2a}$, где a есть коэффициент при x^2 в уравнении (1) цикла. При этом, в противоположность радиусу окружности S , радиус цикла Z может быть и положительным и отрицательным: циклы положительного радиуса изображаются (евклидовыми) парабололами, уходящими «вверх» (рис. 67, а), а циклы отрицательного радиуса — парабололами, уходящими «вниз» (рис. 67, б).

¹⁾ Здесь мы полагаем, что дуга AB кривой Γ «нигде не поворачивает назад» (по отношению к положительному направлению оси Ox , указываемому, как мы знаем, направлением течения времени), т. е. не имеет вида, изображенного на рис. 66а. [Если кривая Γ плоскости Галилея является «гладкой» в том смысле, что в каждой ее точке существует касательная прямая (ср. с подстрочным примечанием¹⁾ на стр. 92), то такой вид кривой невозможен (напомним, что особые прямые мы условились исключать из числа прямых).]

Введя в геометрию «направленные углы» (т. е. углы, взятые с тем или иным знаком, определяемым как в тригонометрии), мы получим возможность, задавая радиус r окружности S формулой (3) (или (3а)), также считать его *положительным или отрицательным*. Однако при этом знак радиуса окружности S не будет определяться множеством S точек—он будет зависеть от

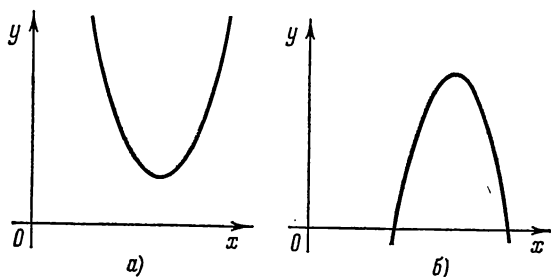


Рис. 67.

выбранного нами направления обхода окружности (а значит, и каждой ее дуги длины s), а именно, будет положительным, если это направление совпадает с направлением вращения часовой стрелки (рис. 68, а), и отрицательным в противном случае; такое соглашение о знаке радиуса (направленной!) окружности часто оказывается полезным (ср., например, Я г л о м [31], стр. 480—482 или Я г л о м [10], стр. 260). По-иному обстоит дело в случае цикла Z геометрии Галилея: так как здесь существует «естественное» направление движения по циклу, указываемое направлением оси Ox (другими словами, направлением течения времени!), то мы имеем возможность установить знак радиуса цикла, не фиксируя направление обхода цикла специально.

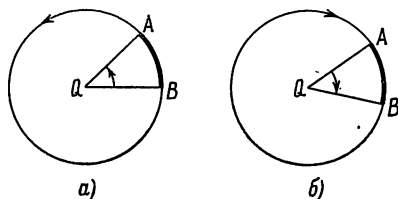


Рис. 68.

Очевидно, что если радиус r евклидовой окружности S неограниченно увеличивается, то окружность все более и более «выпрямляется», становится все более и более похожей на прямую, —недаром прямолинейные дороги на земной поверхности, в действительности представляющие собой окружности очень большого радиуса, расположенные на (сферической!) поверхности земли, мы принимаем за прямые (рис. 69, а). Напротив, если радиус окружности уменьшается, окружность становится все менее похожей на прямую, все более «кривой» (рис. 69, б). На этом основании величину ρ , обратную величине радиуса окружности, называют ее *кривизной*; при этом в силу формулы (3а)

$$\rho = \frac{1}{r} = 2 \frac{\alpha}{s}. \quad (4)$$

Аналогично этому и для цикла Z величину $\rho = \frac{1}{r}$ называют *кривизной*

цикла; в силу формулы (3б)

$$\rho = \frac{1}{r} = 2 \frac{\alpha}{s} = 2\alpha. \quad (4')$$

Основанием для наименования «кривизна» здесь также может

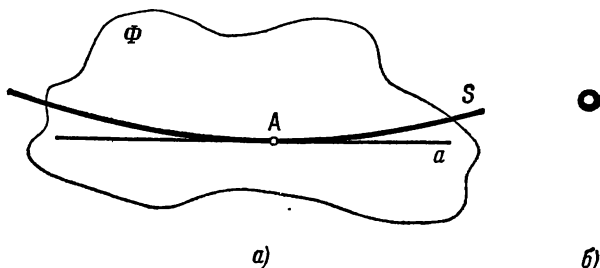


Рис. 69.

служить то, что при $r \rightarrow \infty$ (т. е. при $\rho \rightarrow 0$) цикл Z становится все более похожим на прямую (ср. рис. 70, а и б, на которых изобра-

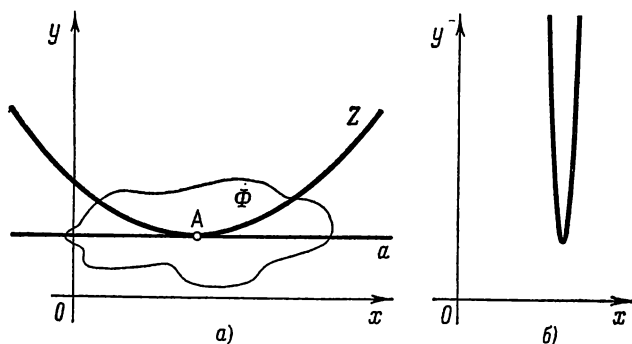


Рис. 70.

жен цикл большого радиуса и цикл малого радиуса)¹⁾. Заметим еще, что, подобно двум окружностям одного радиуса, *два цикла одного*

1) Утверждение о том, что при $r \rightarrow \infty$ окружность S (или цикл Z) радиуса r «неограниченно приближается к прямой», имеет следующий строгий смысл: если радиус r проходящей через точку A и имеющей в этой точке направление a (т. е. касающейся в точке A прямой a) окружности S (или цикла Z) неограниченно увеличивается, то расположенный в любой ограниченной области Φ (содержащей, разумеется, точку A) участок окружности S (цикла Z) стремится к отрезку прямой a в том смысле, что расстояние от самой далекой от a точки этого участка кривой до a стремится к нулю (см. рис. 69, а и рис. 70, а).

Укажем еще, что если $r \rightarrow 0$ (или $\rho \rightarrow \infty$), то окружность S становится все более похожей на точку (рис. 69, б), а цикл — на особую полупрямую (на луч особой прямой, рис. 70, б).

радиуса $r = \frac{1}{2a}$ могут быть совмещены параллельным переносом (ибо хорошо известно, что все параболы $y = ax^2 + 2bx + c$, где a фиксировано, могут быть получены параллельными переносами из одной параболы $y = ax^2$).

Выясним теперь механический смысл понятия цикла. Произвольная кривая Γ плоскости Галилея, записываемая уравнением

$$y = f(x), \quad (5)$$

отвечает движению (материальной) точки по прямой o , описываемому следующим законом изменения положения (x) точки на прямой с течением времени t^1):

$$x = f(t). \quad (5')$$

Циклу Z отвечает специальный вид движения (5'):

$$x = at^2 + 2bt + c. \quad (1')$$

Но хорошо известно, что такая зависимость пути от времени характеризует равноускоренное (или равнозамедленное) движение. В самом деле, скорость v движения (1') в момент времени t , очевидно, равна

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[a(t + \Delta t)^2 + 2b(t + \Delta t) + c] - (at^2 + 2bt + c)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2at\Delta t + a(\Delta t)^2 + 2b\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2at + a \cdot \Delta t + 2b) = 2at + 2b, \end{aligned}$$

а ускорение ω этого движения

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[2a(t + \Delta t) + 2b] - (2at + 2b)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2a \cdot \Delta t}{\Delta t} = 2a.$$

Таким образом, уравнение (1') описывает равноускоренное движение точки по прямой o , причем ускорение этого движения

$$\omega = 2a$$

равно кривизне ρ отвечающего этому движению цикла Z плоскости Галилея; в частности, равноускоренные (в собственном смысле слова) движения отвечают циклам положительной кривизны (рис. 67, а), а равнозамедленные движения — циклам отрицательной кривизны (рис. 67, б).

¹⁾ Здесь, разумеется, снова надо потребовать, чтобы кривая Γ нигде «не возвращалась назад», — см. подстрочное примечание на стр. 88.

Понятие «кривизны» ρ (а также «радиуса» r) можно определить для любой линии Γ плоскости Евклида или плоскости Галилея. Вот как это делается. Прямая линия характеризуется своей «прямизной», отсутствием какого бы ни было «искривления». Последнее утверждение имеет следующий точный смысл. Назовем касательной к линии Γ в ее точке A предельное положение AT , к которому стремится секущая AM при стремлении точки M кривой к точке A (рис. 71; утверждение, что прямая AM стремится к прямой AT , означает, что $\angle MAT \rightarrow 0$). [Это определение касательной уже использовалось выше при доказательстве теоремы об угле между хордой цикла и касательной к циклу в конце этой хорды ¹⁾.] Естественно считать, что касательная AT указывает «направление» линии Γ в точке A . Последнее утверждение можно обосновать следующими механическими соображениями (ср. ниже, стр. 97): если (материальная) точка движется по (евклидовой) линии Γ под действием некоторых сил, причем в момент времени t , когда точка находится в пункте A , на нее прекращают действовать какие бы то ни было силы (в том числе силы, «принуждающие» точку двигаться по линии Γ), то далее точка «по инерции» будет двигаться по прямой AT ²⁾).

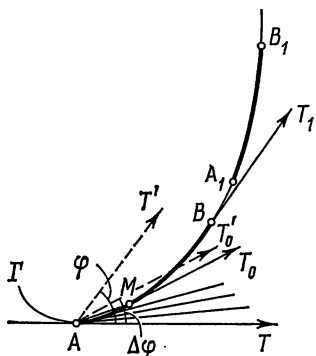


Рис. 71.

«Прямизна» прямой линии l как раз и выражается в том, что *направление прямой во всех ее точках остается одним и тем же*; это означает, что во всех точках будет одной и той же касательная к прямой (совпадающая, очевидно, с самой прямой). Что же касается всех остальных линий, то они обладают большей или меньшей «кривизной», т. е. их направление меняется, являясь разным в разных точках линии. Количественную оценку «степени кривизны» доставляет угол поворота касательной: если при сдвиге вдоль линии Γ из точки A в точку B на расстояние $\sphericalangle AB = s$ касательная поворачивается на угол φ , т. е. угол между касательными AT и BT_1 в точках A и B равен φ ³⁾, то «средняя кривизна» ρ_{cp} линии Γ на участке AB принимается равной

$$\rho_{cp} = \frac{\varphi}{s}, \text{ где } s = \sphericalangle AB \text{ и } \varphi = \sphericalangle TAT' \text{ (} AT' \parallel BT_1 \text{)} \quad (6)$$

(рис. 71). Ясно, что участки линии Γ , которым отвечает большая средняя кривизна ρ_{cp} , более искривлены в наглядном смысле этого слова, чем участки с меньшей средней кривизной (так, изображенная на рис. 71 линия Γ имеет большую среднюю кривизну на участке AB , чем на участке A_1B_1); если

¹⁾ Здесь и далее мы ограничиваемся лишь рассмотрением достаточно «гладких» линий Γ , в каждой точке которых определена касательная AT (которой ведь нет в «угловых точках» кривой) и кривизна ρ .

²⁾ Другими словами, если закон движения материальной точки по линии Γ имеет вид $r = r(t)$, где $r = \overline{OM}$ — радиус-вектор подвижной точки, а t — время, то мгновенная скорость $v = \frac{dr}{dt}$ этой точки в момент t направлена по касательной к линии Γ .

³⁾ Здесь мы считаем, что участок AB линии Γ выбран так, что при движении точки по этому участку в направлении от A к B касательная к Γ поворачивается все время в одном и том же направлении (ср. с подстрочным примечанием на стр. 30).

средняя кривизна ρ_{cp} линии Γ на участке AB равна нулю, то линия на этом участке является прямолинейной. Кривизной же ρ линии Γ в точке A называют «скорость поворота касательной» в этой точке, иными словами, предел, к которому стремится средняя кривизна ρ_{cp} на участке AM при стремлении M к A :

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}, \text{ где } \Delta s = \overset{\frown}{AM} \text{ и } \Delta\varphi = \angle TAT'_0 \text{ (} AT'_0 \parallel MT_0 \text{)} \quad (6a)$$

(рис. 71; ср. выше, стр. 29—30), а ее радиусом r в той же точке — величину, обратную кривизне:

$$\rho = \frac{1}{r}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь (евклидову!) окружность S (рис. 72, а). Эта окружность «устроена одинаково во всех своих точках» (на точном смысле этого

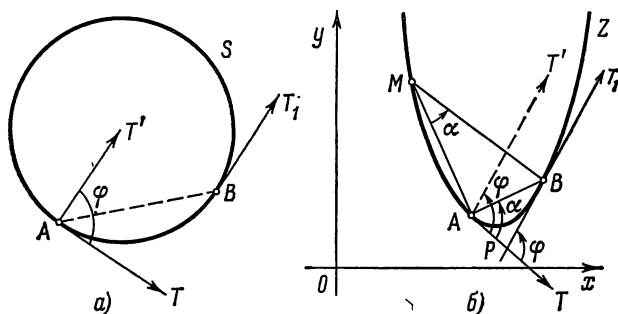


Рис. 72.

интуитивно ясного утверждения мы еще остановимся в следующем параграфе). По этой причине кривизна ρ окружности S во всех ее точках является одной и той же (причем кривизна тем больше, чем меньше радиус окружности — ср. выше стр. 89 и рис. 69, а, б). И в самом деле, в силу формулы (6) средняя кривизна ρ_{cp} окружности S радиуса r на ее участке AB равна $\frac{\varphi}{s}$, где (см. выше рис. 65, б) $\varphi = \angle TAT' = \angle TPT_1$ (здесь $AT' \parallel BT_1$), или, в силу теоремы о внешнем угле треугольника, $\varphi = 2\angle PAB = 2\alpha$; $s = \overset{\frown}{AB} = r\angle AQB = r \cdot 2\angle AMB = r \cdot 2\alpha = r\varphi$. Таким образом, средняя кривизна

$$\rho_{cp} = \frac{\varphi}{s} = \frac{\varphi}{r\varphi} = \frac{1}{r},$$

окружности S радиуса r является одной и той же на любом участке AB окружности, откуда следует, что в любой точке A окружности

$$\rho = 1:r$$

(ср. с формулой (4), которой мы выше определяли кривизну окружности).

Обратимся теперь к геометрии Галилея. Среднюю кривизну ρ_{cp} линии Γ на ее участке AB и ее кривизну ρ в точке A мы определим теми же формулами (6) и (6а), только длину дуги s и угол φ мы будем теперь понимать в «галилеевом» смысле (в частности, длина s дуги AB будет совпадать

с длиной хорды AB ¹⁾). Но если линия Γ является циклом Z (см. рис. 72, б), то средняя кривизна $\rho_{ср}$ на участке AB равна $\frac{\varphi}{s}$, где $s = AB$, а $\varphi = \angle TAT' = \angle TPT_1$ (здесь $AT' \parallel BT_1$). А так как из «формулы углов» (12) § 4 (стр. 61), примененной к треугольнику ABP , легко получить, что

$$\varphi = \angle APB = 2\angle PAB = 2\alpha,$$

где угол $\alpha = \angle PAB = \angle ABP$ равен, как мы знаем, вписанному углу $\angle AMB$ цикла Z , опирающемуся на дугу AB , то окончательно имеем

$$\rho_{ср} = \frac{\varphi}{s} = \frac{2\alpha}{s} = 2a,$$

где a — коэффициент при x^2 в уравнении (1) цикла Z . Мы видим, что средняя кривизна $\rho_{ср} = 2a$ цикла Z на его участке AB не зависит от выбора дуги AB ; поэтому и кривизна ρ цикла Z в любой его точке A будет одной и той же:

$$\rho = 2a. \quad (7а)$$

Если теперь, руководствуясь формулой (7), назвать величину r , обратную кривизне ρ цикла, его *радиусом*, то будем иметь

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2a}. \quad (7б)$$

Полученные таким путем определения кривизны (евклидовой) окружности S и (галилеева) цикла Z позволяют по-новому подойти к определению кривизны ρ и радиуса r произвольной кривой Γ (плоскости Евклида

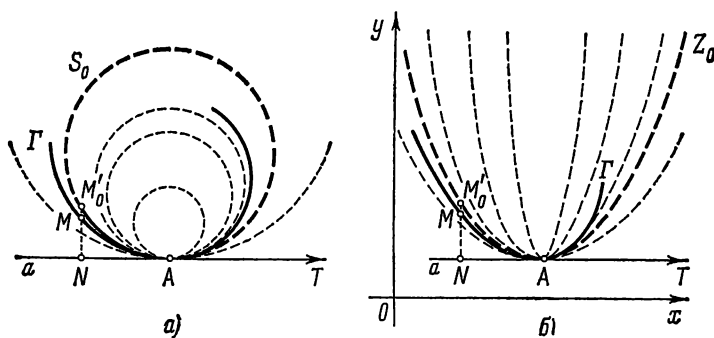


Рис. 73.

или плоскости Галилея) в любой ее точке. Рассмотрим все окружности (соответственно, все циклы), проходящие через точку A линии Γ и имеющие в этой точке то же направление, что и Γ (другими словами, касающиеся в точке A касательной $AT \equiv a$ линии Γ). Среди всех этих окружностей (или циклов) выберем ту линию S_0 (или Z_0), которая теснее всего примыкает к Γ (рис. 73, а и б); например, можно потребовать, чтобы для любой другой окружности S (цикла Z) расстояние MM' между (достаточно близкими к A) точками M и M' линий Γ и S (или Γ и Z), проектирующи-

¹⁾ См. подстрочное примечание на стр. 88.

мися в одну точку N прямой a , было больше расстояния MM_0' между соответствующими точками M и M_0' линий Γ и S_0 (или Γ и Z_0). Окружность S_0 (соответственно, цикл Z_0) называется *соприкасающейся окружностью* (соприкасающимся циклом) линии Γ в точке A , а ее кривизна $\rho = \frac{1}{r}$ (или $\rho = 2a$) — кривизной линии Γ в точке A . Естественно назвать также радиус r окружности S_0 (цикла Z_0) *радиусом* (или *радиусом кривизны*) линии Γ в точке A ¹⁾.

Нетрудно указать аналитические формулы для вычисления кривизны ρ и радиуса кривизны r линии $y = f(x)$ в данной точке $A(x, y)$. Действительно, угловой коэффициент k касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $A(x, y)$ равен,

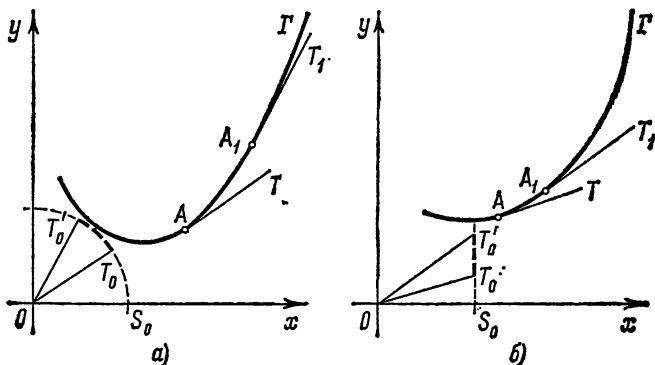


Рис. 74.

как известно, производной $f'(x)$ функции $f(x)$; поэтому единичный (имеющий единичную длину) вектор $\overline{OT_0}$ касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $A(x, y)$ имеет координаты $\left(\frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \right)$ в случае евклидовой геометрии и координаты $(1, f'(x))$ в геометрии Галилея. Рассмотрим теперь два таких вектора $\overline{OT_0}$ и $\overline{OT'_0}$, отвечающих касательным \overline{AT} и $\overline{A_1T_1}$ в соседних точках $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ кривой $y = f(x)$ (рис. 74, а, б); тогда угол $\Delta\varphi = \angle T_0OT'_0$ будет равен «дуге» $T_0T'_0$ единичной окружности S_0 с центром O . Обозначим координаты (x_1, y_1) точки A_1 через $x + \Delta x$ и $y + \Delta y = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$; тогда длина Δs дуги AA_1 будет равна Δx в галилеевом случае и будет примерно равна $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{1+[f'(x)]^2}\Delta x$ в евклидовом случае, а угол $\Delta\varphi$ (или дуга $T_0T'_0$ окружности S_0) —

$$f'(x + \Delta x) - f'(x) \approx f''(x)\Delta x$$

¹⁾ Если ни одна из рассматриваемых окружностей S (ни один из рассматриваемых циклов Z) не примыкает к линии Γ «теснее», чем касательная $AT \equiv a$, то роль «соприкасающейся окружности» S_0 («соприкасающегося цикла» Z_0) играет прямая a ; в этом случае полагают, что кривизна ρ линии Γ в точке A равна нулю (а радиус r обращается в бесконечность).

в галилеевом случае и гораздо более сложному выражению

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{\sqrt{1+[f'(x+\Delta x)]^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right\}^2 + \left\{\frac{f'(x+\Delta x)}{\sqrt{1+[f'(x+\Delta x)]^2}} - \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}\right\}^2} \approx \frac{|f''(x)| \Delta x}{1+[f'(x)]^2}$$

в евклидовом случае¹⁾. Отсюда без труда получаем, что в геометрии Галилея кривизна $\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta s}$ и радиус кривизны $r = \frac{1}{\rho}$ линии $y = f(x)$ в точке $A(x, y)$ выражаются простыми формулами

$$\rho = f''(x) \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{f''(x)}, \quad (8)$$

в то время как в геометрии Евклида соответствующие формулы сложнее¹⁾:

$$\rho = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{\{1+[f'(x)]^2\}^3}} \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\{1+[f'(x)]^2\}^3}}{|f''(x)|}. \quad (8')$$

Из формул (8') и (8) можно снова вывести, что кривизна окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в любой ее точке равна $\frac{1}{r}$, а кривизна цикла $y = ax^2 + 2bx + c$ равна $2a$. Более того, исходя из этих формул можно установить, что только окружности плоскости Евклида и циклы плоскости Галилея имеют во всех своих точках одну и ту же кривизну; однако при этом к числу окружностей (и циклов) в качестве их предельного случая линий нулевой кривизны (или «бесконечно большого радиуса») надо причислять и (обыкновенные) прямые. Так, например, ясно, что если для линии $y = f(x)$ плоскости Галилея

$$\rho = f''(x) = \text{const},$$

то уравнение линии имеет вид

$$y = \frac{1}{2} \rho x^2 + c_1 x + c_2,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, т. е. эта линия является циклом. Вообще, любая линия Γ плоскости Евклида или плоскости Галилея полностью (другими словами, «с точностью до положения на плоскости») определяется заданием своей кривизны во всех точках линии, т. е. уравнением

$$\rho = \rho(s), \quad (9)$$

где ρ — кривизна линии Γ в (переменной) точке A , а s — длина дуги QA линии Γ , отсчитываемая от произвольно выбранного на линии «начала отсчета длин дуг» Q . Последнее утверждение составляет содержание теоремы о натуральном уравнении («натуральным уравнением» кривой Γ называют

¹⁾ Ср., например, Дубнов [35], п. 66, в частности, формулу (380') и задачу 353.

уравнение (9), которую по достоинству считают «самой главной» теоремой теории (кривых) линий плоскости Евклида (или плоскости Галилея)¹⁾.

Нетрудно понять, что в механической интерпретации геометрии Галилея кривизна $\rho = y''(x)$ в точке $A(x, y)$ кривой Γ , определяемой уравнением $y = f(x)$, соответствует мгновенному ускорению $\omega = \frac{d^2x}{dt^2}$ (в момент времени t) материальной точки, движущейся по прямой o по закону $x = f(t)$. Ясно также, что соприкасающийся цикл Z_0 кривой Γ в точке A соответствует равноускоренному движению материальной точки, причем (постоянное!) ускорение, мгновенная скорость и положение этой точки на прямой o в момент времени t совпадают соответственно с мгновенным ускорением ω (выражающимся кривизной соприкасающегося цикла Z_0 , т. е. удвоенным коэффициентом при x^2 в уравнении этого цикла), мгновенной скоростью v и положением $f(t)$ на прямой o в момент времени t точки, движущейся по закону $x = f(t)$. Здесь уместно вспомнить, что касательная a к линии Γ в точке A соответствует равномерному движению со скоростью v , равной мгновенной скорости в данный момент (выражаемой угловым коэффициентом касательной). Отсюда следует, что угловой коэффициент $k = v$ касательной к линии Γ не имеет геометрического смысла в геометрии Галилея (ибо он, очевидно, меняется при «повороте» кривой), а кривизна $\rho = \omega$ и радиус $r = 1 : \rho$ соприкасающегося цикла геометрический смысл имеют (ибо величина ω имеет механический смысл).

В силу «3-го закона Ньютона»

$$f = m\omega,$$

где m — масса материальной точки, а f — действующая на нее сила, «кривизна» $\rho = \omega$ лишь постоянным множителем m отличается от действующей на точку силы. Таким образом, «теорема о натуральном уравнении» геометрии Галилея сводится к утверждению о том, что *движение материальной точки по прямой о полностью определяется действующими на нее силами f (пропорциональными «кривизне» $\rho = \omega = \frac{f}{m}$)*; фундаментальное значение этого факта в механике проливает дополнительный свет на роль «теоремы в натуральном уравнении» в теории кривых.

В заключение этого параграфа укажем, что поскольку кривизна $\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ любой кривой Γ определяется через отношение угла к длине дуги («расстоянию»), а радиус кривизны $r = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \varphi}$ сводится к отношению длины дуги к углу, то *любое преобразование подобия плоскости Евклида*

¹⁾ Ср., например, п. 67 указанной выше книги Дубнова [35]. [В геометрии Галилея в силу формулы (8) линия $y = f(x)$, задаваемая своим «натуральным уравнением» $f''(x) = \rho = \rho(s)$ (или $f''(x) = \rho(x)$, поскольку «длина дуги» QA , где $Q = Q(0, b)$, здесь измеряется значением абсциссы x точки $A(x, y)$), определяется по формуле

$$y = \int \left[\int \rho(x) dx \right] dx = y_0(x) + c_1 x + c_2,$$

где постоянные c_1 и c_2 произвольны; ясно, что все такие линии «равны между собой» в смысле геометрии Галилея.]

(так же как и преобразование подобия 1-го рода плоскости Галилея¹⁾ с коэффициентом подобия k), сохраняющее величину всех углов и умножающее все расстояния на k , в k раз уменьшает (т. е. при $k < 1$ — увеличивает!) кривизну любой кривой Γ и в k раз увеличивает радиус кривизны; так, например, «сжатие к точке O » (гомотетия) с коэффициентом k переводит окружность S или цикл Z радиуса r в окружность S' (цикл Z') радиуса kr (рис. 75, а, б).

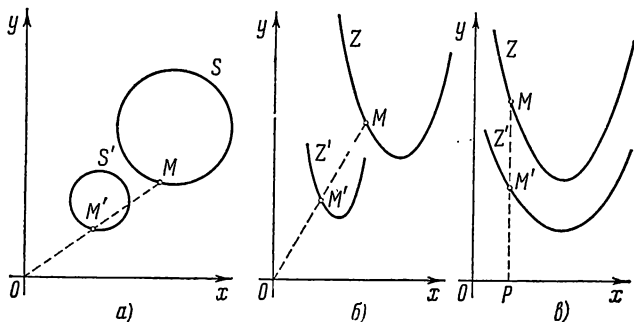


Рис. 75.

Напротив, каждое преобразование подобия 2-го рода¹⁾ плоскости Галилея с коэффициентом подобия κ , сохраняющее величины всех расстояний и умножающее величины всех углов на κ , в κ раз увеличивает (при $\kappa < 1$ — уменьшает!) кривизну любой кривой Γ плоскости Галилея и в κ раз уменьшает радиус кривизны; так, например, «сжатие к прямой Ox » с коэффициентом κ переводит цикл Z радиуса r в цикл Z' радиуса $\frac{r}{\kappa}$ (рис. 75, в).

§ 7. Скольжение цикла по себе; диаметры цикла

«Начала» Евклида (см. подстрочное примечание на стр. 39), о роли которых в истории геометрии мы говорили выше, начинаются с «определений» основных объектов геометрии вроде точки, прямой, линии и поверхности²⁾. В частности, определение 4 Евклида гласит:

Прямая есть линия, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

Если как определение эта довольно туманная фраза совершенно неудовлетворительна, то в качестве описания «самого важного»

¹⁾ См. выше, стр. 66—67.

²⁾ Эти определения мы сегодня считаем самым слабым местом всего замечательного сочинения Евклида: автор «Начал» не понимал, что, не обладая еще никакими знаниями по геометрии, нельзя дать ни одного полноценного определения, так что самые первые понятия геометрии мы должны воспринимать исходя из нашей интуиции, без точных определений (подобно тому как самые первые геометрические предложения — аксиомы — мы должны принять на веру, не доказывая их).

свойства прямой она вполне удачна: в самом деле, основным свойством прямой является ее «однородность», то, что любые два (равные по длине) отрезка прямой совершенно одинаковы, равны; в этом смысле ни одна точка прямой ничем не отличается от любой другой ее точки. Однако это свойство прямой не является характеристическим, не выделяет прямую из всех других линий (евклидовой) плоскости, поскольку наряду с прямой им обладает также и окружность, которая ведь тоже «равно расположена по отношению к точкам на ней», тоже однородна: любые две дуги окружности одной длины одинаковы (равны), так что любые две точки окружности совершенно равноправны. «Однородность» прямой или окружности находит своё выражение в существовании «скольжений вдоль прямой или вдоль окружности» — движений, совмещающих любую точку A прямой l (или окружности S) с любой другой ее точкой A' и переводящих прямую l (окружность S) в себя; роль этих движений играет параллельный перенос в направлении прямой l (рис. 76, а) или в в о р о т вокруг центра Q окружности S (рис. 76, б).

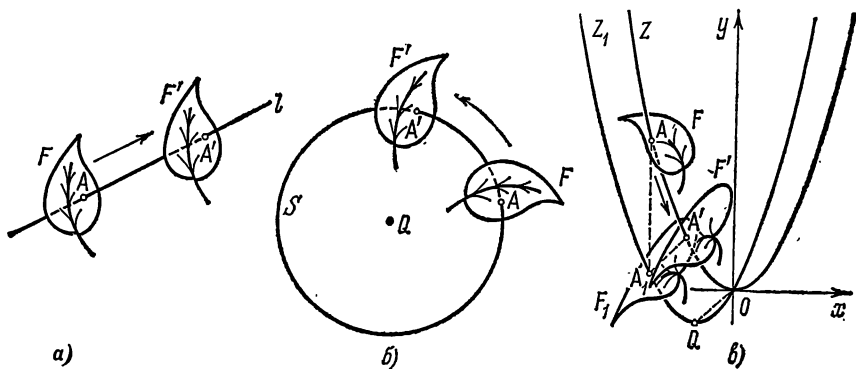


Рис. 76.

Ясно, что и прямая l плоскости Галилея допускает подобные «скольжения по себе»: ведь параллельный перенос (рис. 76, а) является движением и в геометрии Галилея. Несложно показать, что и цикл Z плоскости Галилея допускает такие «скольжения по себе». В самом деле, сдвиг

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= vx + y \end{aligned} \quad (10a)$$

(см. формулы (14a) из § 2, стр. 40), который можно также записать так:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 - vx_1, \end{aligned} \quad (10'a)$$

переводит цикл Z с уравнением

$$y = ax^2 \quad (11)$$

(рис. 76, в) в цикл Z_1 с уравнением

$$y_1 - vx_1 = ax_1^2,$$

которое можно переписать так:

$$y_1 = ax_1^2 + vx_1 = a \left(x_1^2 + \frac{v}{a} x_1 + \frac{v^2}{4a} \right) - \frac{v^2}{4a},$$

или, окончательно так:

$$y_1 + \frac{v^2}{4a} = a \left(x_1 + \frac{v}{2a} \right)^2. \quad (11a)$$

Но ясно, что описываемый уравнением (11a) цикл Z_1 «равен» исходному циклу Z —он переводится в Z параллельным переносом

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + \frac{v}{2a}, \\ y' &= y_1 + \frac{v^2}{4a}. \end{aligned} \quad (106)$$

Поэтому преобразование

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + \frac{v}{2a}, \\ y' &= vx + y + \frac{v^2}{4a}, \end{aligned}} \quad (12)$$

складывающееся из сдвига (10a) и параллельного переноса (106), переводит цикл Z в себя: сдвиг (10a) переводит точку A цикла Z в точку A_1 цикла Z_1 , а параллельный перенос (106)—точку A_1 в точку A' исходного цикла Z (рис. 76, в). Движение (12) плоскости Галилея, переводящее цикл Z в себя, называется (задаваемым циклом Z) *циклическим поворотом* с коэффициентом v (или «циклическим поворотом в направлении цикла Z »)¹⁾. При этом поскольку при сдвиге (10a) каждая точка A плоскости смещается «на нулевое расстояние» (т. е. переходит в такую точку A_1 , что $d_{AA_1} = 0$), а параллельный перенос (106) смещает каждую точку на расстояние $\frac{v}{2a}$ (т. е. переводит точку A_1 в такую точку A' , что $d_{A_1A'} = \frac{v}{2a}$), то

¹⁾ Известно, что *каждое* (собственное!) движение плоскости Евклида представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос (см., например, книги Перепелкина [5] или Яглома [9]). Аналогично этому можно показать, что *каждое* движение плоскости Галилея (см. формулы (1) из § 3, стр. 45) представляет собой либо циклический поворот, либо параллельный перенос; доказательство этого утверждения мы предоставим читателю.

циклический поворот (12) смещает каждую точку на расстояние $\frac{v}{2a}$: точку A он переводит в такую точку A' , что

$$d_{AA'} = \frac{v}{2a}.$$

Но отсюда следует, что, подобрав соответствующим образом коэффициент v циклического поворота, мы можем сдвинуть точку A цикла Z на любое (положительное или неположительное!) расстояние d —для этого достаточно положить $\frac{v}{2a} = d$ или $v = 2ad$.

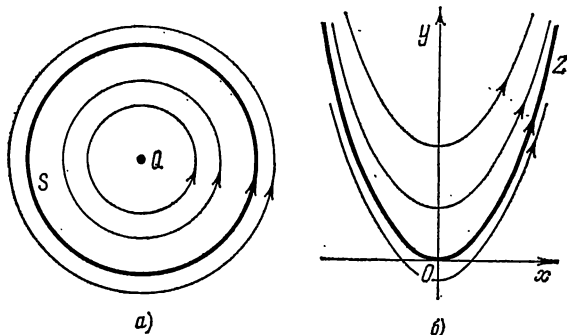


Рис. 77.

Таким образом, каждую точку A цикла Z можно подходящим циклическим поворотом (12) перевести в любую другую точку A' этого цикла. Можно доказать, что на плоскости Галилея такой «однородностью» обладают только циклы и прямые линии, подобно тому как на плоскости Евклида однородностью обладают только окружности и прямые¹⁾.

При повороте плоскости Евклида, переводящем в себя окружность S , каждая точка плоскости смещается по концентрической с S окружности (рис. 77, а). Аналогично этому при циклическом повороте плоскости Галилея, задаваемом циклом Z , каждая точка этой плоскости смещается по циклу, «параллельному» Z , т. е. получаемому из этого цикла «особым» параллельным переносом (т. е. параллельным переносом в направлении особых прямых). В самом деле, цикл

$$y = ax^2 + c, \quad (11')$$

«параллельный» циклу Z , сдвиг (10а) (или (10'а)) переводит в цикл

$$y_1 - vx_1 = ax_1^2 + c$$

¹⁾ Ср. выше, стр. 96.

или (ср. с формулой (11a))

$$y_1 + \frac{v^2}{4a} = ax_1^2 + vx_1 + \frac{v^2}{4a} + c = a \left(x_1 + \frac{v}{2a} \right)^2 + c,$$

а параллельный перенос (10б) переводит последний цикл в цикл

$$y' = ax'^2 + c,$$

т. е. снова в исходный цикл (11'). Таким образом, *циклический поворот* (12) переводит в себя не только цикл Z , но и любой цикл (11') (где c произвольно!), откуда и следует, что *все точки плоскости при этом преобразовании перемещаются по циклам* (11') (рис. 77, б). Аналогия между concentрическими окружностями и параллельными циклами будет далее еще продолжена.

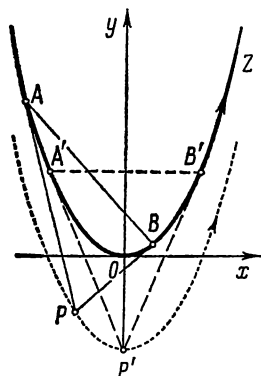


Рис. 78.

Циклические повороты очень удобны для доказательства разнообразных свойств циклов. Мы начнем с уже знакомой нам теоремы, утверждающей, что *касательные PA и PB, проведенные к циклу Z из одной точки P, равны между собой* (ср. выше, стр. 87). Будем считать, что уравнение цикла Z (рис. 78) имеет вид (11); это условие не является ограничением, поскольку каждый цикл имеет уравнение (11) в некоторой специально подобранной системе координат¹⁾. Произведем циклический поворот (12), переводящий цикл Z в себя и совмещающий точку P с точкой P' оси Oy . [В общем случае придется произвести циклический поворот, переводящий цикл Z в себя и совмещающий точку P с точкой P' оси симметрии (евклидовой) параболы Z .] При этом касательные PA и PB цикла Z перейдут в его касательные $P'A'$ и $P'B'$; поскольку понятие касательной цикла имеет смысл в геометрии Галилея, то движение (12) плоскости Галилея, переводящее цикл Z в себя, переводит касательную цикла Z в касательную того же цикла. В силу симметрии параболы $y = ax^2$ относительно оси Oy отрезки $P'A'$ и $P'B'$ (где A' и B' — точки соприкосновения касательных с параболой), очевидно, равны между собой как в евклидовом смысле, так и в смысле геометрии Галилея (т. е. равны проекции отрезков $P'A'$ и $P'B'$ на ось Ox). Но движение (12) плоскости Галилея не меняет (галилеевы!) длин отрезков; поэтому из равенства (в смысле геометрии Галилея)

¹⁾ Для дальнейшего нам надо, чтобы оси этой системы координат с точки зрения евклидовой геометрии были взаимно перпендикулярны; поэтому наше доказательство является «существенно не галилеевым», т. е. оно использует факты и понятия, не имеющие геометрического смысла в геометрии Галилея (ср. с подстрочным примечанием на стр. 47).

отрезков $P'A'$ и $P'B'$ следует также равенство отрезков PA и PB (т. е. равенство $d_{AP} = d_{PB}$)¹⁾.

Вот еще один пример подобного рода. Хорошо известно, что середины всех параллельных между собой хорд окружности S принадлежат одной прямой d — диаметру окружности (рис. 79, а); это утверждение представляет собой лишь переформулировку того факта, что окружность симметрична относительно любого своего

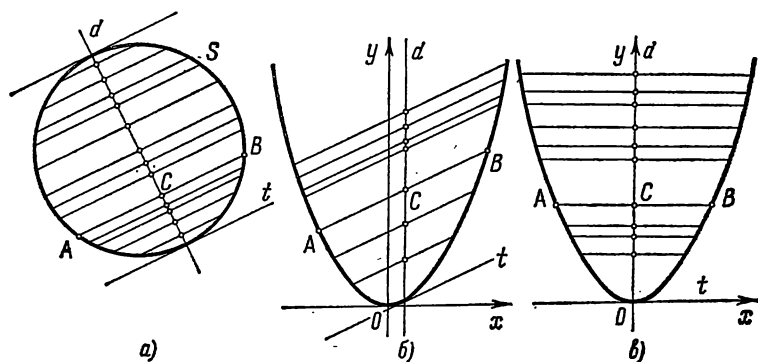


Рис. 79.

диаметра. Рассмотрим теперь совокупность параллельных между собой хорд цикла Z с уравнением $y = ax^2$ — хорд, принадлежащих прямой, имеющим фиксированный угловой коэффициент k_0 (рис. 79, б). Заметим, что сдвиг (10а) (или (10'а)) переводит прямую

$$y = kx + s$$

с угловым коэффициентом k в прямую $y_1 - vx_1 = kx_1 + s$ или

$$y_1 = k_1x_1 + s \quad (k_1 = k + v)$$

с угловым коэффициентом $k_1 = k + v$, а параллельный перенос (10б) сохраняет направления прямых; поэтому циклический поворот (12) с коэффициентом $v = -k_0$ переводит наши хорды цикла Z в хорды с угловым коэффициентом 0 — в хорды, параллельные оси Ox (рис. 79, в). Но середины всех последних хорд, очевидно, принадлежат оси Oy — оси симметрии параболы $y = ax^2$. Поэтому и середины исходных хорд принадлежат одной прямой d , а именно той прямой,

¹⁾ Заметим, что $d_{PA} = -d_{PB}$. [Укажем, что если PA и PB — касательные, проведенные из одной точки P к направленной окружности S (т. е. окружности с выбранным на ней одним из двух возможных направлений обхода; ср. стр. 89), то также естественно считать, что $PA = -PB$ (см., например, стр. 270 книги Яглома [10]).]

которую наш циклический поворот переводит в ось Oy . Так как движение плоскости Галилея переводит d в особую прямую Oy , то и сама прямая d является *особой*. Эта прямая называется *диаметром* цикла Z (отвечающим хордам с угловым коэффициентом k_0).

Таким образом, *середины всех параллельных между собой хорд цикла Z принадлежат одной особой прямой d* — диаметру цикла. При этом легко видеть, что в все особые прямые являются диаметрами цикла Z : в самом деле, особая прямая $x = m$ переводится в ось Oy циклическим поворотом (12) с таким коэффициентом v , что $\frac{v}{2a} = -m$ или $v = -2am$; поэтому рассматриваемая прямая делит пополам все хорды цикла Z , которые этот циклический поворот переводит в параллельные оси Ox прямые. [Нетрудно проверить, что диаметр $x = m$ цикла $y = ax^2$ делит пополам все хорды, отсекаемые циклом на прямых с угловым коэффициентом $k = 2am$.]

Будем теперь сдвигать параллельно хорду AB цикла Z , которую делит пополам диаметр d , таким образом, чтобы длина хорды уменьшалась: При этом, в конце концов, точки A, B и (принадлежащая диаметру d) середина C хорды AB сольются в одну точку, и мы придем к утверждению: *касательная t в конце диаметра d цикла Z параллельна хордам, которые делятся пополам этим диаметром* (ср. рис. 79, б, в с рис. 79, а, относящимся к окружности).

Теорему о диаметрах цикла (т. е. утверждение о том, что середины параллельных хорд принадлежат одной особой прямой) легко доказать и без использования свойств циклического поворота. В самом деле, пусть AB и CD — две параллельные хорды цикла Z , а PA и PB , QC и QD — касательные к циклу в концах этих хорд (рис. 80). Из равенства вписанных углов $\angle ADC$ и $\angle DAB$ цикла следует, что $AC = DB$; с другой стороны, мы знаем, что $AP = PB$ и $CQ = QD$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 0 &= CQ - QD = \\ &= (CA + AP + PQ) - (QP + PB + BD) = 2PQ; \end{aligned}$$

таким образом (обыкновенная!) длина отрезка PQ равна нулю, т. е. прямая PQ особая.

Поэтому высоты PM и QN равнобедренных треугольников PAB и QCD (являющиеся одновременно и медианами этих треугольников!) совпадают, т. е. *середины M и N любых двух параллельных хорд цикла принадлежат одной особой прямой*. Отсюда уже легко выводится, что *середины всех параллельных между собой хорд цикла принадлежат одной особой прямой*.

Теперь мы можем по-новому обосновать использование в геометрии Галилея особых прямых в качестве «перпендикуляров»

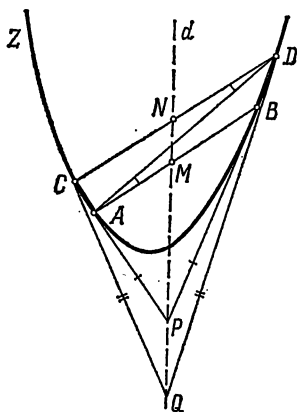


Рис. 80.

(ср. выше, стр. 56; и рис. 36—37). В геометрии Евклида диаметр окружности перпендикулярен касательной, проведенной в конце этого диаметра; поэтому для того, чтобы восстановить перпендикуляр к прямой a в ее точке A , достаточно построить окружность S , касающуюся a в точке A , — диаметр AQ этой окружности и будет искомым перпендикуляром (рис. 81, а). Аналогично этому уславливаются считать, что и в геометрии Галилея диаметр цикла «перпендикулярен» касательной к циклу в конце этого диаметра, т. е. роль «перпендикуляра» к прямой a в ее точке A играет диаметр AP цикла Z , касающегося прямой a в точке A (т. е. проходящая через точку A особая прямая; рис. 81, б).

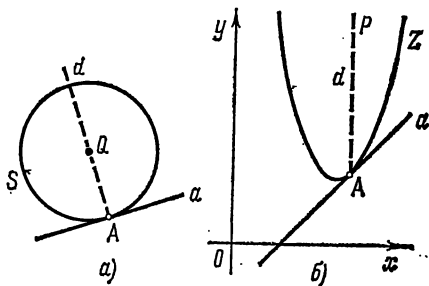


Рис. 81.

Понимая под углом между прямой l и кривой линией Γ угол между l и касательной t к Γ в точке пересечения l и Γ (рис. 82), мы можем сказать, что все диаметры цикла Z «перпендикулярны» этому циклу (подобно тому как все диаметры окружности S перпендикулярны окружности; ср. рис. 81, а и б). Заметим еще, что диаметр d цикла Z , проходящий через некоторую точку P , делит пополам отрезок AB , соединяющий точки прикосновения с циклом касательных PA и PB , проведенных из точки P (ибо d является высотой равнобедренного треугольника PAB ; ср. рис. 65, а и б на стр. 86).

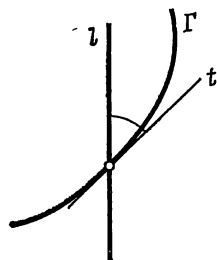


Рис. 82.

Сказанное проливает также новый свет на аналогию между концентрическими окружностями и параллельными циклами, о которой говорилось выше. Назовем расстоянием от точки A до линии Γ расстояние от A до самой близкой к A точки B линии Γ . Можно доказать, что в евклидовом случае это расстояние (во всяком случае для гладкой линии Γ без концов — замкнутой или бесконечной) измеряется по перпендикуляру AB к Γ ; другими словами, прямая AB перпендикулярна касательной t к линии Γ в точке B (рис. 83, а)¹. В геометрии Галилея наименьшее расстояние от точки A до точек линии Γ , вообще говоря, будет равно нулю; при этом расстояние от A до Γ надо будет измерять «кособым расстоянием» δ_{AB} от точки A до точки B линии Γ (рис. 83, б). Назовем

¹) См., например, Болтянский и Яглом [36], стр. 285—286.

теперь линию Γ_1 параллельной линии Γ , если все точки Γ_1 удалены от Γ на одно и то же расстояние (можно показать, что в этом

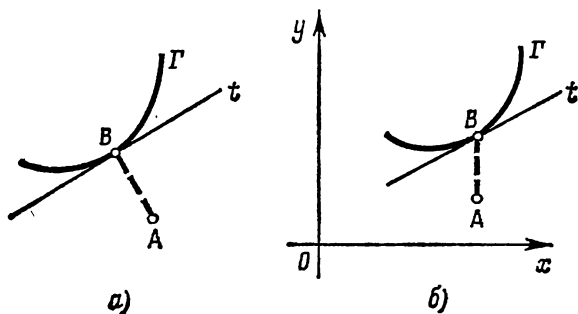


Рис. 83.

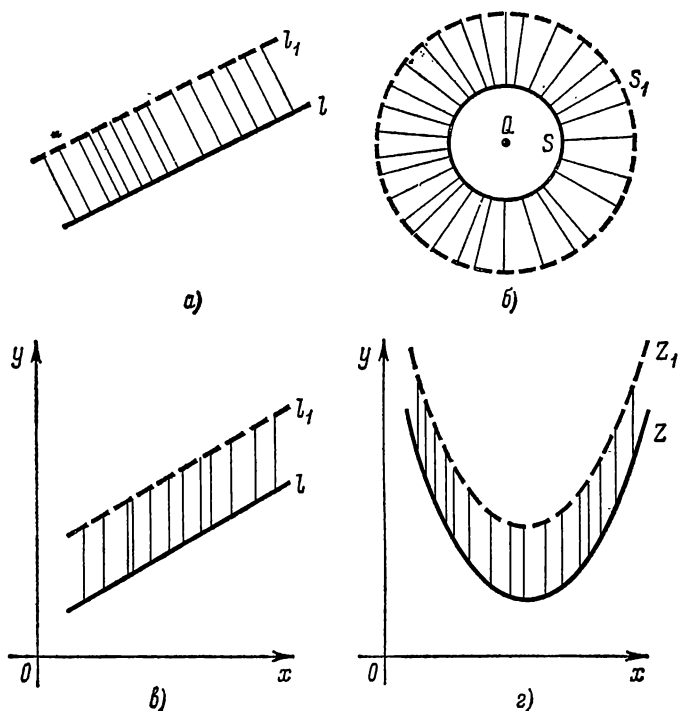


Рис. 84.

случае и Γ «параллельна» Γ_1). В евклидовом случае «параллелью» в этом смысле к прямой l будет прямая $l_1 \parallel l$ (рис. 84, а), а «параллелью» к окружности S — концентрическая с S окружность S_1 ,

причем расстояние от любой точки A окружности S_1 до S измеряется по проходящему через A общему диаметру окружностей S и S_1 (рис. 84, б). В геометрии же Галилея «параллелью» к (обыкновенной) прямой l служит прямая $l_1 \parallel l$ (рис. 84, в), а «параллелью» к циклу Z — цикл Z_1 , параллельный Z в определенном выше смысле, причем расстояние от любой точки A цикла Z_1 до Z измеряется по проходящему через A общему диаметру циклов Z и Z_1 (рис. 84, г).

Наконец, укажем, что теорема о диаметрах цикла имеет достаточно прозрачный механический смысл. Выберем такую систему отсчета, в которой рассматриваемые параллельные прямые отвечают фиксированным точкам прямой o (т. е. такую систему отсчета, в которой эти прямые отвечают состояниям покоя); тогда концы A и B хорды AB цикла Z отвечают событиям, состоящим в том, что двигающаяся равноускоренно материальная точка проходит определенный пункт прямой o — тот пункт, для которого разным моментам времени отвечают все точки прямой AB . Нетрудно понять, что каждый пункт прямой o (скажем, вертикали) равноускоренно движущаяся точка (в качестве которой удобно представлять себе подброшенный вверх камень, движущийся с ускорением $-g$, где $g \approx 9,8$ м/сек² — ускорение силы тяжести), вообще говоря, будет проходить два раза: на пути «вверх» и на пути «вниз». При этом *середины всех определенных таким образом интервалов времени (интервалов между двумя прохождениями «каменем» одного и того же пункта) будут совпадать между собой и совпадать с моментом достижения «каменем» крайней («самой высокой») точки прямой¹*. Это и означает, что соответствующие точки плоскости Галилея принадлежат одной выделенной прямой.

Использование циклического поворота для доказательства относящихся к циклам теорем, мы проиллюстрируем еще одним примером. Нетрудно установить, что множество *середины всех хорд* (евклидовой) окружности S , проходящих через фиксированную точку M , представляет собой окружность s (или дугу окружности s); для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что прямая QP , соединяющая центр Q окружности S с серединой P проходящей через точку M хорды AB , перпендикулярна AB (и, следовательно, точка P принадлежит окружности s с диаметром MQ ; рис. 85, а, б). Однако это доказательство апеллирует к понятию центра окружности, и потому возможность переноса его на циклы плоскости Галилея представляется сомнительной.

Тот же самый факт можно установить еще и по-другому. На каждой проходящей через точку M хорде AB окружности S найдем такую точку N , что $AM = NB$ (или $AN = MB$); нетрудно понять, что все такие точки N принадлежат концентрической с S окружности S_1 , проходящей через точку M (ибо из соображений симметрии вытекает, что любая проходящая через M хорда MN окружности S_1 пересекает S в таких точках A, B , что $AN = MB$;

¹) Эта «крайняя» точка характеризуется тем, что мгновенная скорость в ней равна нулю (т. е. касательная к циклу в соответствующей точке плоскости Галилея параллельна прямым, отвечающим состоянию покоя.)

рис. 86, а, б). С другой стороны, середина P хорды AB является также и серединой хорды MN , так что точка P получается из точки N сжатием к точке M (гомотетией) с коэффициентом $1/2$; поэтому множество точек P принадлежит окружности s , гомотетичной S_1 с центром гомотетии M и коэффициентом $1/2$.

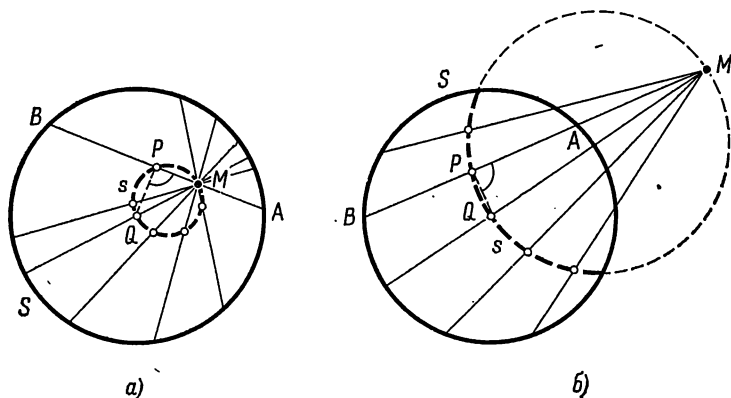


Рис. 85.

Последнее рассуждение уже без труда переносится на циклы геометрии Галилея. Прежде всего заметим, что если прямая l пересекает параллельные циклы Z и Z_1 с уравнениями $y=ax^2$ и $y=ax^2+c$ в точках A, B , соответственно M, N (рис. 87), то $AM=NB$; для доказательства этого достаточно

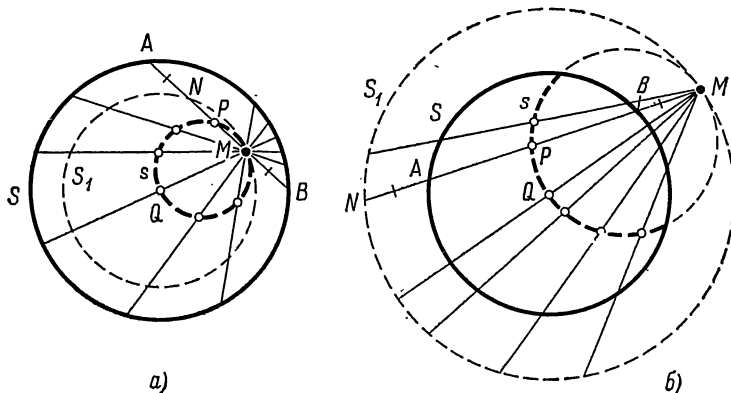


Рис. 86.

с помощью подходящего циклического поворота (12) перевести прямую l в параллельную оси Ox прямую l' , в силу соображений симметрии, очевидно, пересекающую Z и Z_1 в таких точках A', B' и M', N' , что $A'M' = N'B'$. Теперь найдем на каждой проходящей через фиксированную точку M хорде AB заданного цикла Z такую точку N , что $AM = NB$ (или $AN = MB$;

рис. 88, а, б); в силу доказанного все полученные таким образом точки N принадлежат проходящему через точку M циклу Z_1 , параллельному циклу Z . Но середина P отрезка AB является также и серединой отрезка MN ; поэтому она получается из точки N сжатием к точке M (гомотетией) с коэффициентом $1/2$. Отсюда вытекает, что множество середин всех хорд цикла Z , проходящих через фиксированную точку M , представляет собой цикл (или дугу цикла) z (причем цикл z гомотетичен циклу Z_1 с центром гомотетии M и коэффициентом $1/2$).

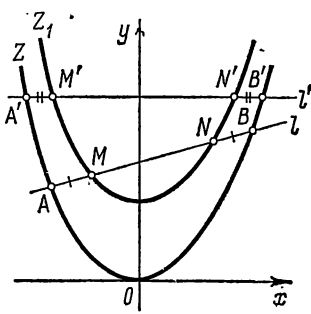


Рис. 87.

Обратимся теперь к *принципу двойственности*, которому был посвящен § 5 гл. I. В силу этого принципа любой теореме геометрии Галилея отвечает двойственная ей теорема, получаемая из первоначальной заменой слов «точка» и «расстояние» словами «прямая» и «угол» и наоборот, выражения «параллельные прямые» выражением «параллельные (принадлежащие одной особой прямой) точки» и наоборот. При этом каждое понятие геометрии Галилея, фигурирующее в исходной теореме, в формулировке двойственной

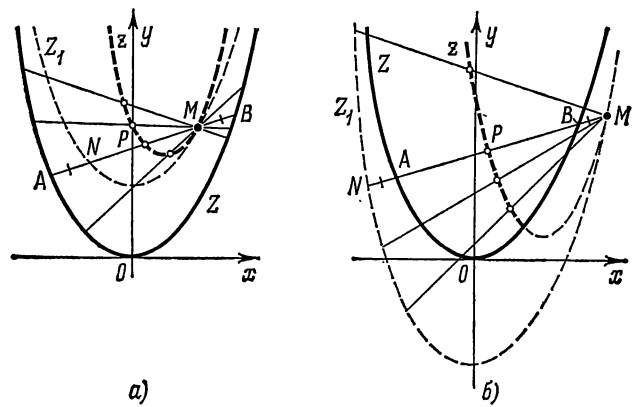


Рис. 88.

теоремы заменяется «двойственным» понятием, получаемым из первоначального той же заменой слов и выражений (пример: параллелограмм и антипараллелограмм). Выясним теперь, какое понятие геометрии Галилея двойственно понятию цикла.

Цикл Z мы определяли как множество точек M , из которых данный отрезок AB виден под постоянным углом α :

$$\angle AMB = \alpha.$$

В определении двойственного циклу понятия роль отрезка AB будет играть угол aLb , образованный прямыми a и b ; точке M будет отвечать прямая m . Прямые MA и MB заменяются теперь точками A и B пересечения m и a ,

соответственно t и b ; угол $\delta_{MA, MB}$ (т. е. $\angle AMB$) — расстоянием AB ($=d_{AB}$). Таким образом, мы приходим к рассмотрению множества Σ прямых t , на которых данный угол aLb высекает отрезок AB постоянной длины d :

$$AB = d$$

(рис. 89).

Из существования «галилеева движения» (циклический поворот), переводящего в себя множество точек M (т. е. цикл Z), в силу принципа двойственности вытекает существование движения, переводящего в себя множество прямых t (напомним, что движение плоскости Галилея определялось как преобразование в множестве точек и множестве прямых, сохраняющее

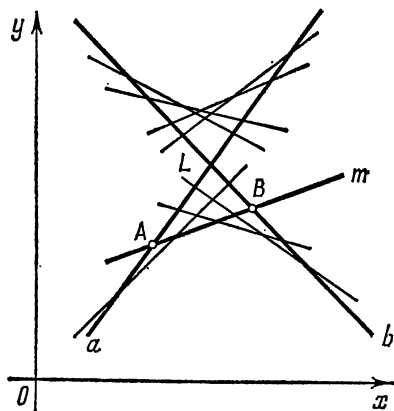


Рис. 89.

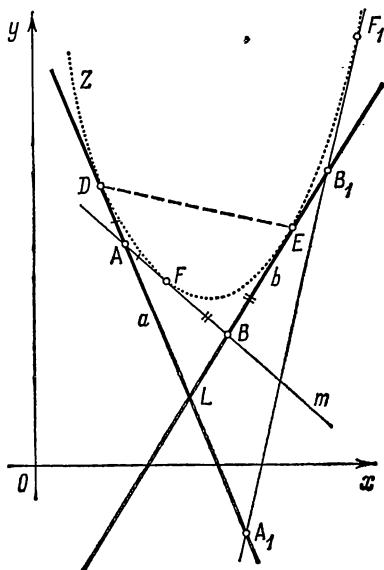


Рис. 90.

расстояния между точками и углы между прямыми; поэтому двойственным движению понятием будет снова движение). Отсюда уже можно вывести, что *прямые t являются касательными некоторого цикла*; однако это можно установить и по-другому. Пусть t — произвольная прямая, пересекающая стороны угла aLb в точках A и B , и пусть Z — цикл, касающийся прямых a , b и t в точках D , E и F (рис. 90)¹⁾. Так как касательные, проведенные к циклу из одной точки, равны, то $DA = AF$ и $FB = BE$. Но поскольку $DE = DA + AB + BE$ (ср. с «формулой сторон» (11) § 4, стр. 61)), то отсюда следует²⁾

$$DE = AF + AB + FB = 2AB.$$

Таким образом, длина AB ($=d$) отрезка касательной t цикла Z , заключенного между сторонами угла aLb , равна половине длины хорды DE цикла Z , откуда следует, что на каждой касательной t цикла Z стороны угла aLb

¹⁾ Относительно существования такого цикла ср. ниже, стр. 112—113.

²⁾ По существу, в этом рассуждении используются направленные (т. е. взятые с тем или иным знаком) длины отрезков (ср. прямые AB и A_1B_1 на рис. 90).

высекают отрезок одной и той же длины $d \left(= \frac{1}{2} DE \right)$. Поэтому множество прямых t , на которых прямые a и b высекают отрезок фиксированной длины d , совпадает с множеством касательных цикла Z .

Теперь уже нетрудно сформулировать предложения, двойственные всем известным нам свойствам цикла. Так, например, мы знаем, что касательные PA и PB , проведенные к циклу Z из одной точки P , равны между собой. Но циклу Z , понимаемому как множество своих точек, двойствен цикл Z , понимаемый как множество своих касательных¹⁾; точке P двойственна прямая p ; проходящим через точку P касательным $PA \equiv a$ и $PB \equiv b$ цикла — принадлежащие прямой p точки A и B цикла; расстояниям PA и PB — углы $\angle aAp$ и $\angle pBb$ (рис. 91). Поэтому из принципа двойственности следует, что произвольная хорда $AB (\equiv p)$ цикла Z образует с касательными a и b к циклу в концах этой хорды одинаковые углы, — теорема, лишь формой отличающаяся от исходной теоремы.

Далее, множество середин параллельных между собой хорд цикла принадлежит одной особой прямой. Параллельным прямым l и l_1 отвечают «параллельные» (т. е. принадлежащие одной особой прямой) точки L и L_1 ; точкам A, B и A_1, B_1 пересечения l и l_1 с циклом Z — проведенные из точек L и L_1 касательные a, b и a_1, b_1 ; серединам M и M_1

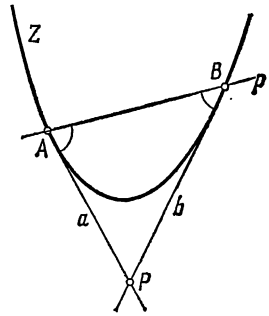


Рис. 91.

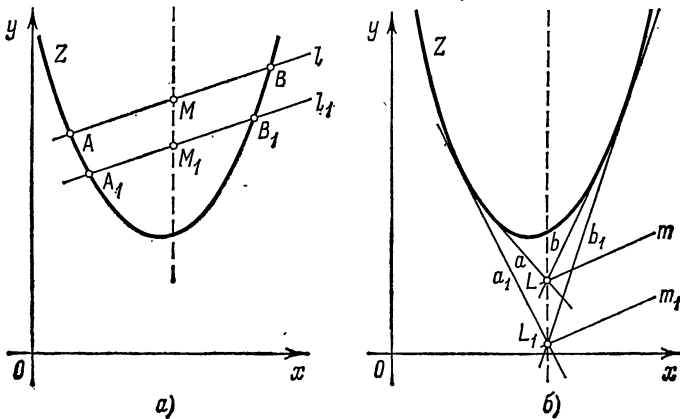


Рис. 92.

отрезков AB и A_1B_1 — биссектрисы t и t_1 углов aLb и $a_1L_1b_1$ (ср. рис. 92, а и б). Таким образом, теореме о диаметрах цикла отвечает утверждение о параллельности биссектрис t и t_1 углов aLb и $a_1L_1b_1$ (ведь точки M и M_1 «параллельны», т. е. принадлежат одной особой прямой!). Доказательство этого утверждения мы предоставим читателю.

¹⁾ Строго говоря, следует считать, что циклу радиуса с двойствен цикл кривизны s (т. е. радиуса $1/s$), поскольку понятие радиуса цикла двойственно понятию его кривизны.

Наконец, мы знаем, что *середины всех проходящих через одну точку M хорд цикла Z принадлежат одному циклу z* . Точке M в силу принципа двойственности отвечает прямая m ; проходящей через точку M прямой l —точка L прямой m ; хорде AB —угол aLb , образованный проходящими через точку L касательными a и b к циклу Z ; середине P хорды AB —биссектриса p угла aLb

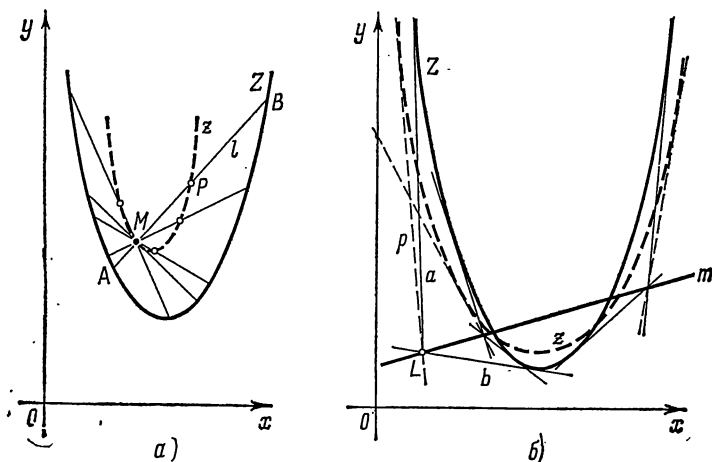


Рис. 93.

(ср. рис. 93, а и б). Таким образом, мы приходим к следующей замечательной теореме, на доказательстве которой также здесь не остановимся: *биссектрисы всех углов, образованных проведенными из точек фиксированной прямой m касательными заданного цикла Z , касаются одного цикла z* .

§ 8. Описанный и вписанный циклы треугольника

Пусть ABC —треугольник плоскости Галилея со сторонами $AB \equiv c$, $BC \equiv a$, $CA \equiv b$; буквами a , b , c мы будем обозначать как (обычные) прямые AB , BC и CA , так и длины соответствующих отрезков. Ясно, что через точки A , B и C проходит (единственный!) цикл, который можно определить, например, как множество точек, из которых отрезок AB виден под углом C ; этот цикл Z (рис. 94) мы назовем *описанным циклом* треугольника ABC . Докажем, что аналогично этому существует единственный цикл, касающийся трех прямых a , b и c ; этот цикл z мы назовем *вписанным циклом* треугольника.

Нетрудно видеть, что вписанный цикл z треугольника ABC (если только он существует!) должен касаться одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон—пусть, например, он касается стороны AB в точке F , а продолжений сторон CA и CB

в точках E и D (см. рис. 94). Так как треугольник DCE — равнобедренный (ибо касательные CD и CE , проведенные к циклу z из точки C , равны между собой), то его высота CP является также и медианой, откуда следует, что проходящая через точку C особая прямая CP пересекает отрезки ED и AB , что возможно лишь в том случае, если $AB \equiv c$ — наибольшая сторона треугольника ABC : $c = a + b$. Далее, поскольку

$$\begin{aligned} CD + CE &= (CB + BD) + (CA + AE) = \\ &= CB + BF + CA + AF = CB + CA + \\ &\quad + (BF + AF) = CB + CA + AB, \end{aligned}$$

то

$$CD = CE = \frac{a+b+c}{2} = c = a + b; \quad (13)$$

поэтому

$$\begin{aligned} AE &= CE - CA = a, \\ BD &= CD - CB = b. \end{aligned} \quad (13a)$$

А так как $AF = AE$ и $BF = BD$, то

$$AF = a, \quad BF = b. \quad (13b)$$

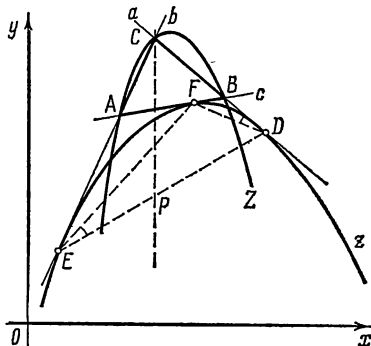


Рис. 94.

Равенства (13)—(13b) полностью определяют положение точек D , E и F на сторонах треугольника ABC . Докажем теперь, что *описанный цикл z треугольника DEF* (а этот цикл во всяком случае существует!) *касается в точках F , D и E сторон AB , BC и CA треугольника ABC* (т. е. является вписанным циклом треугольника ABC). В самом деле, вписанный угол $\angle DEF$ этого цикла равен разности углов $\angle DEC$ и $\angle FEA$; но из равнобедренных треугольников DEC и FEA с известными углами C и A по «формуле углов» (12) § 4 (стр. 61) следует, что

$$\angle DEC = \frac{C}{2}, \quad \angle FEA = \frac{A}{2}$$

и, значит,

$$\angle DEF = \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{C-A}{2} = \frac{B}{2}.$$

С другой стороны, по той же «формуле углов», примененной к равнобедренному треугольнику DFB с известным углом B ,

$$\angle FDB = \frac{B}{2};$$

поэтому прямая $DB \equiv a$, образующая с хордой DF цикла z угол $\angle FDB = \frac{B}{2}$, равный опирающемуся на эту хорду вписанному углу,

является касательной цикла z . Точно так же доказывается, что прямые $EA \equiv b$ и $FA \equiv c$ касаются цикла z в точках E и F .

Радиусы описанного цикла Z и вписанного цикла z (которые, как и стороны и углы треугольника, мы здесь считаем положительными!) обозначим через R и r , а кривизны этих двух циклов — через P и p . В силу определения радиуса цикла мы имеем

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = 2R, \quad (14)$$

что позволяет нам по-новому трактовать коэффициент пропорциональности λ из соотношений (14) § 4 (стр. 62). Формулы (14) позволяют вычислить величину радиуса R описанного цикла Z треугольника ABC по величинам его сторон и углов; они заметно проще родственных им формул евклидовой геометрии, составляющих содержание классической «теоремы синусов»:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (14')$$

(где R — радиус описанной окружности евклидова треугольника ABC). Из формул (14) и формул (17) § 4 (стр. 63) вытекает, что

$$R = \frac{a}{2A} = \frac{abc}{2(ABC)} = \frac{abc}{2 \cdot 2S},$$

где S — площадь треугольника ABC , или, окончательно,

$$R = \frac{abc}{4S}. \quad (15)$$

Любопытно, что последняя формула в точности копирует соответствующую формулу евклидовой геометрии, получающуюся из соотношений $R = \frac{a}{2 \sin A}$ и $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ (см. формулы (14') и формулу (17') из § 4). Однако в противоположность евклидовой геометрии величина радиуса R описанного цикла Z треугольника ABC геометрии Галилея может быть просто выражена также и через площадь S этого треугольника и величины его углов. В самом деле, поскольку в силу (14)

$$a = 2AR, \quad b = 2BR, \quad c = 2CR,$$

то из (15) вытекает

$$R = \frac{2AR \cdot 2BR \cdot 2CR}{4S} = \frac{2ABC}{S} R^3,$$

откуда получаем

$$R^2 = \frac{S}{2ABC}. \quad (16)$$

Заметим также, что из формул (15) и (16) следует

$$P = \frac{4S}{abc} \quad (15a)$$

и

$$P^2 = \frac{2ABC}{S}. \quad (16a)$$

Обратимся теперь к вписанному циклу z треугольника ABC . Мы видели, что этот цикл является описанным для изображенного на рис. 94 треугольника DEF , стороны $EF = d$, $DF = e$, $DE = f$ и углы $\angle EDF = D$, $\angle DEF = E$, $\angle DFE = F$ которого легко найти. Так, выше мы убедились, что $E = \angle DEF = \frac{B}{2}$; аналогично вычисляются и величины двух других углов треугольника DEF :

$$D = \frac{A}{2}, \quad E = \frac{B}{2}, \quad F = \frac{C}{2}.$$

Далее, из равнобедренных треугольников EAF (где $EA = AF = a$), DBF (где $DB = BF = b$) и DCE (где $DC = CE = c$) находим

$$d = 2a, \quad e = 2b, \quad f = 2c.$$

А теперь из формул (14) получаем

$$\frac{d}{D} = \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = 2r,$$

т. е.

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{r}{2}. \quad (14a)$$

Таким образом, мы приходим к следующему замечательному соотношению:

$$r = 4R, \quad (17)$$

откуда следует также, что

$$P = 4p. \quad (17a)$$

Заметим, что неожиданные с первого взгляда соотношения (17) и (17a), не имеющие аналогов в евклидовой геометрии, являются непосредственными следствиями принципа двойственности. В самом деле, ясно, что понятию описанного цикла Z треугольника ABC —цикла, содержащего точки A , B и C ,—двойственно понятие вписанного цикла z треугольника ABC —цикла, для которого прямые a , b и c являются касательными. А так как величины углов треугольника двойственны длинам его сторон и наоборот, а радиусу цикла $r = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \varphi}$ двойственно понятие его кривизны $\rho = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$, то

относящимся к описанному циклу треугольника формулам

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = 2R \quad (14)$$

двойственны относящиеся к вписанному циклу формулы

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = 2\rho,$$

равносильные соотношениям

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{1}{2} r. \quad (14a)$$

Но из сравнения формул (14) и (14a) сразу вытекает соотношение (17)!

В § 4 гл. I мы видели, что формулы, связывающие одноименные элементы произвольного треугольника — «формула сторон» (11) и «формула углов» (12), — имеют совершенно ясный механический смысл: они выражают закон аддитивности временных интервалов и закон

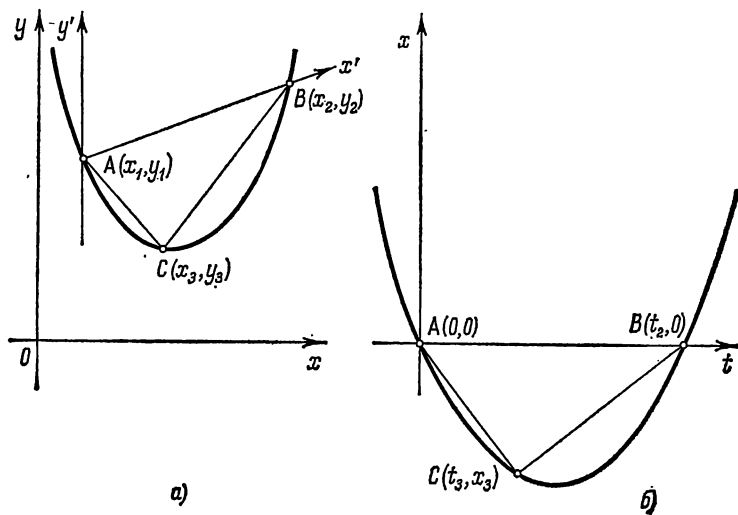


Рис. 95.

сложения скоростей (см. стр. 61). Теперь мы можем истолковать механически также и формулы (13) § 4, составляющие содержание третьей системы основных соотношений, связывающих стороны и углы произвольного треугольника. Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ — три точки плоскости Галилея, являющиеся вершинами треугольника ABC (рис. 95, а); им отвечают три события $A(t_1, x_1)$, $B(t_2, x_2)$ и $C(t_3, x_3)$, никакие два из которых не одновременны.

Можно доказать (мы это сделаем чуть ниже), что существует единственное равноускоренное (в широком смысле слова, т. е. равноускоренное, равномерное или равнозамедленное) движение, которое «соединяет» эти три события; ускорение этого движения, имеющее, как мы знаем, «абсолютный» (т. е. не зависящий от выбора инерциальной системы отсчета) смысл, мы обозначим через w . Выберем теперь инерциальную систему отсчета так, чтобы два из наших событий, скажем A и B , отличались лишь временем, но не местом на прямой o ; кроме того, примем соответствующий событию A пункт прямой o за начало отсчета координат (x), а время, отвечающее событию A , — за момент начала отсчета времени. В таком случае события A , B и C будут иметь следующие «пространственно-временные координаты»: $A(0, 0)$, $B(t_2, 0)$ и $C(t_3, x_3)$ (рис. 95, б; ср. с рис. 95, а, на котором изображены также оси новой системы координат, отвечающей поставленным условиям).

Найдем теперь «соединяющее» наши три события равноускоренное движение:

$$x = at^2 + 2bt + c \quad (18)$$

(ср. стр. 91). Так как условию (18) удовлетворяет событие $x = 0$, $t = 0$, то

$$c = 0; \quad (18a)$$

так как ему удовлетворяет также событие $x = 0$, $t = t_2$, то

$$at_2^2 + 2bt_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad 2b = -at_2 \quad (18б)$$

(ибо $t_2 \neq 0$). Для того чтобы определить последний неизвестный нам коэффициент формулы (18) — коэффициент a , достаточно подставить в уравнение (18) (для которого выполняются равенства (18a) и (18б)!) значения $x = x_3$ и $t = t_3$. При этом мы получаем

$$x_3 = at_3^2 - at_2t_3,$$

откуда следует

$$a = \frac{x_3}{t_3^2 - t_2t_3} = \frac{x_3}{t_3(t_3 - t_2)}.$$

или, поскольку $\frac{1}{t_3 - t_2} - \frac{1}{t_3} = \frac{t_2}{t_3(t_3 - t_2)}$,

$$a = \left(\frac{x_3}{t_3 - t_2} - \frac{x_3}{t_3} \right) : t_2. \quad (18в)$$

Итак, мы нашли (единственное!) искомое равноускоренное движение (18); коэффициенты a , b , c равенства (18) определяются условиями (18a)—(18в). А так как ускорение w движения (18) равно, как мы знаем, $2a$, то окончательно получаем

$$\frac{w}{2} = \left(\frac{x_3}{t_3 - t_2} - \frac{x_3}{t_3} \right) : t_2.$$

Но величина t_2 , очевидно, равна, (временному!) интервалу между событиями B и A , т. е. стороне $AB = c$ треугольника ABC . Далее, скорость v_2 равномерного движения (материальной) точки, исходящей в момент $t = 0$ из пункта $x = 0$ и достигающей в момент времени t_3 пункта $x = x_3$, равна

$$v_2 = \frac{x_3}{t_3},$$

а скорость v_1 равномерного движения материальной точки, исходящей в момент времени t_2 из пункта $x = 0$ и достигающей в момент времени t_3 пункта $x = x_3$, равна

$$v_1 = \frac{x_3}{t_3 - t_2}.$$

Таким образом, разность

$$\frac{x_3}{t_3 - t_2} - \frac{x_3}{t_3} = v_1 - v_2$$

совпадает с относительной скоростью 2-го из рассматриваемых равномерных движений относительно наблюдателя, совершающего 1-е движение (см. формулу (8) § 3, стр. 58 и 54), т. е. равна величине угла C треугольника ABC . Поэтому полученную нами формулу, выражающую ускорение w через координаты t_2 , t_3 и x_3 событий A , B и C , можно переписать еще и так¹⁾:

$$\frac{|w|}{2} = \frac{C}{c}.$$

А так как наше рассуждение не зависит от того, какое из рассматриваемых трех событий обозначено через A , какое — через B и какое — через C , то аналогично

$$\frac{|w|}{2} = \frac{A}{a} \quad \text{и} \quad \frac{|w|}{2} = \frac{B}{b},$$

откуда и следует, что

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \quad \left(= \frac{|w|}{2} \right).$$

Заметим еще, что (в системе единиц CGS) интервалы времени a , b и c измеряются в *сек*, а скорости A , B и C — в *см/сек*, откуда вытекает, что отношения $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{C}{c}$ измеряются в *см/сек²*, в полном соответствии с тем, что эти отношения выражают ускорение. Другими словами: поскольку стороны

1) Заметим, что если $\bar{c} = \overline{AB} = d_{AB}$ — направленная (т. е. взятая со знаком $+$ или $-$) длина стороны AB , а $\bar{C} = \delta_{CA, CB}$ — направленный угол треугольника, то $\frac{w}{2} = \frac{\bar{C}}{c}$.

треугольника ABC имеют размерность t времени, а углы — размерность l/t скорости, то отношения углов к противолежащим им сторонам имеют размерность l/t^2 ускорения. А так как площадь S треугольника имеет в геометрии Галилея размерность lt (см. сек) пространственно-временного интервала (ср. выше, стр. 60), то отношение

$$\frac{4S}{abc}$$

имеет размерность $(lt):t^3 = l/t^2$ ускорения (ср. формулу (15a)), а отношение

$$\frac{2ABC}{S}$$

— размерность $(l/t)^3:lt = l^2/t^4$ квадрата ускорения (ср. формулу (16a)).

Рассмотрим теперь окружность S_1 , проходящую через середины A_1, B_1 и C_1 сторон BC, CA и AB (евклидова!) треугольника ABC (рис. 96, а) и цикл Z_1 , проходящий через середины A_1, B_1 и C_1

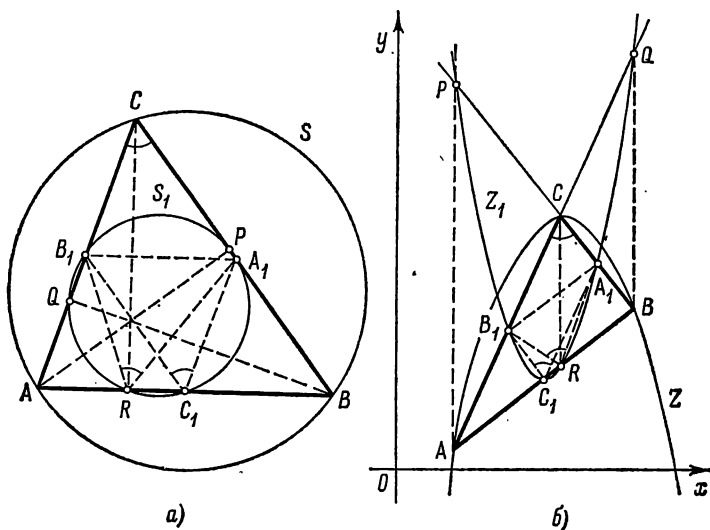


Рис. 96.

сторон (галилеева) треугольника ABC (рис. 96, б). Так как окружность S_1 и цикл Z_1 описаны вокруг треугольника $A_1B_1C_1$ со сторонами $B_1A_1 = \frac{c}{2}$, $C_1B_1 = \frac{a}{2}$, $A_1C_1 = \frac{b}{2}$ и углами $\angle B_1A_1C_1 = \angle CAB = A$, $\angle A_1C_1B_1 = C$, $\angle C_1B_1A_1 = B$ (треугольника, гомотетичного ABC с центром гомотетии в точке M пересечения медиан треугольника

ABC и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$), то радиус R_1 этой окружности (цикла) равен

$$R_1 = \frac{R}{2}, \quad (19)$$

где R — радиус описанной окружности (цикла); поэтому в геометрии Галилея $R_1 = \frac{r}{8}$, где r — радиус вписанного цикла (ср. формулу (17); стр. 115).

Окружность S_1 геометрии Евклида проходит также и через основания P , Q и R высот AP , BQ и CR треугольника ABC , в силу чего ее можно назвать *окружностью шести точек*¹⁾ треугольника ABC . В самом деле, поскольку средняя линия A_1B_1 треугольника ABC делит высоту CR треугольника пополам, то точки C и R симметричны относительно прямой A_1B_1 . Отсюда следует, что

$$\angle A_1RB_1 = \angle ACB; \quad (20)$$

поэтому точка R принадлежит S_1 , ибо угол $\angle A_1C_1B_1$, вписанный в S_1 и опирающийся на хорду A_1B_1 , тоже равен $\angle ACB$ (рис. 96, а)²⁾. [Аналогично доказывается и то, что точки Q и P принадлежат S_1 .] Но легко видеть, что проведенное здесь «евклидово» рассуждение полностью сохраняет силу и для геометрии Галилея, в которой тоже треугольники B_1RA_1 и B_1CA_1 , «симметричные» друг другу относительно прямой A_1B_1 (ср. ниже, стр. 146), равны между собой, и, значит, равенство (20), из которого вытекает, что точка R принадлежит S_1 , полностью остается в силе. [Здесь можно и не ссылаться на свойства симметрии относительно прямой: так как очевидно (см. рис. 96, б), что $B_1C = B_1R$ и $CA_1 = A_1R$, т. е. треугольники B_1CR и A_1CR равнобедренные, то

$$\angle B_1RA_1 = \angle B_1CA_1,$$

откуда (так же как и в евклидовом случае) и вытекает, что точка R принадлежит циклу Z_1 .] Цикл Z_1 называется *циклом шести точек* треугольника ABC .

¹⁾ Можно показать, что окружность S_1 проходит также и через три точки, делящие пополам отрезки высот треугольника от точки их пересечения до вершин, в силу чего эту окружность обычно называют *окружностью девяти точек* треугольника (см., например, § 29 книги Перепелкина [5] или задачу 51а) книги Яглома [9]).

²⁾ Для того чтобы сделать все рассуждения независимыми от чертежа, здесь (и далее!) следует воспользоваться понятием *направленных* (т. е. взятых со знаком $+$ или $-$) углов (ср. принадлежачие Д. И. Перепелкину решения задач к книге Адамара [7], стр. 488—489).

В евклидовой геометрии имеет место замечательная теорема, в силу которой окружность S_1 шести точек (или девяти точек) треугольника ABC касается вписанной окружности s этого треугольника и трех его внеписанных окружностей s_a, s_b и s_c (рис. 97, а). Эта теорема также переносится в геометрию Галилея: цикл Z_1 шести точек треугольника ABC касается вписанного цикла z (рис. 97, б). Отсюда видно, насколько далеко заходит аналогия между геометрией Евклида и геометрией Галилея!

Вот доказательство сформулированной теоремы, которое мы будем одновременно вести и для геометрии Евклида и для геометрии Галилея (ср. также ниже, стр. 154—157); при этом в одном месте нам придется сослаться на результаты нижеследующего § 9. Пусть C_1T — касательная к окружности шести точек S_1 (или к циклу шести точек Z_1) в середине C_1 стороны AB (рис. 98, а, б). Так как

$$\angle AC_1T = \angle AC_1B_1 - \angle TC_1B_1$$

и

$$\angle AC_1B_1 = \angle ABC = B, \quad \angle TC_1B_1 = \angle C_1A_1B_1 = A,$$

то

$$\angle AC_1T = B - A.$$

Точки касания окружности s (цикла z) со сторонами AB, BC и CA треугольника ABC мы обозначим через F, D и E ; точки касания окружности s_c с этими же сторонами — через F_1, D_1 и E_1 . Проведем через вершину C треугольника диаметр CWX окружностей s и s_c , соответственно диаметр CR цикла z ¹⁾; здесь W и R — точки стороны AB треугольника, X — точка на продолжении CW за точку W . Из точек W и R проведем касательные WK, WK_1 к окружностям s, s_c , соответственно касательную RK к циклу z . В силу теоремы о касательных к окружности и к циклу, проведенных из одной точки,

$$WK = WF \quad \text{и} \quad WK_1 = WF_1; \quad FR = RK.$$

[Здесь в первых двух равенствах речь идет о совпадении «евклидовых длин» двух отрезков, а в третьем — о совпадении (положительных или неположительных — ср. подстрочное примечание на стр. 103) «галилеевых длин» отрезков.] Далее, в евклидовом случае (рис. 98, а; напоминаем, что WC — диаметр окружностей s и s_c)

$$\begin{aligned} \angle AWK &= 180^\circ - 2\angle BWC = 180^\circ - 2\left(180^\circ - B - \frac{C}{2}\right) = \\ &= 2B + C - 180^\circ = 2B + C - (A + B + C) = B - A, \end{aligned}$$

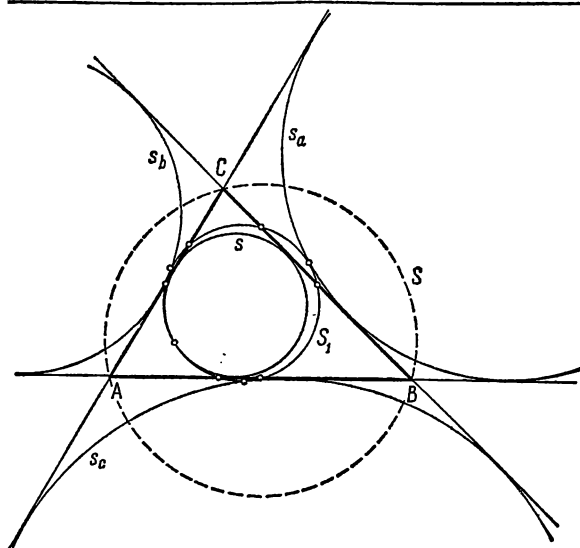
и

$$\begin{aligned} \angle BWK_1 &= 180^\circ - \angle AWK_1 = 180^\circ - 2\angle AWX = 180^\circ - 2\angle BWC = \\ &= \angle AWK = B - A, \end{aligned}$$

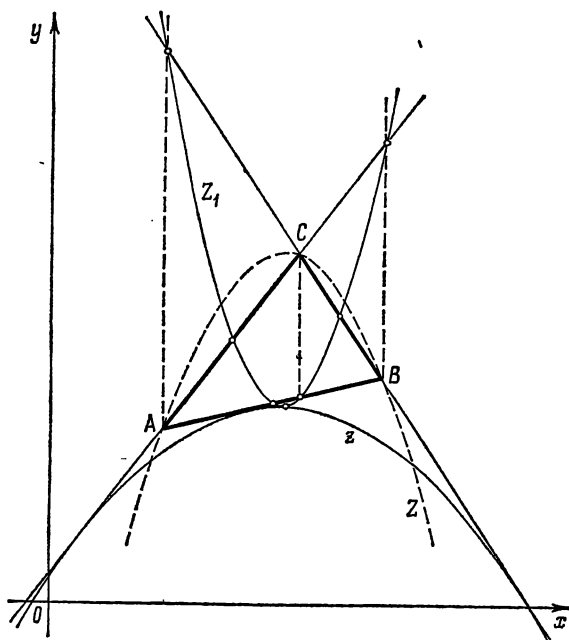
откуда вытекает, что KWK_1 — это одна прямая, параллельная C_1T .

Совершенно по-другому доказывается аналогичное утверждение в галилеевом случае. Здесь можно воспользоваться тем, что $AR = AC = b$ и $AF = CB = a$,

¹⁾ Таким образом, в последующем рассуждении неожиданным образом сходную роль играют биссектриса CW евклидова треугольника ABC и высота CR треугольника ABC плоскости Галилея.

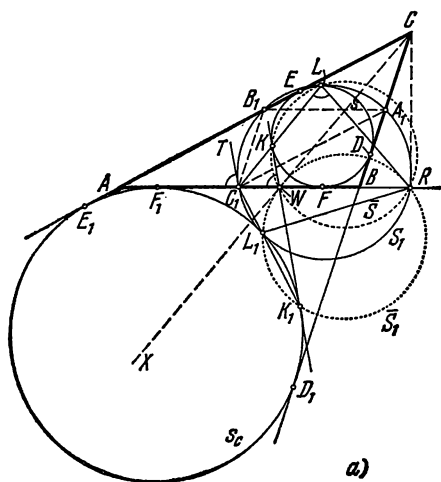


а)

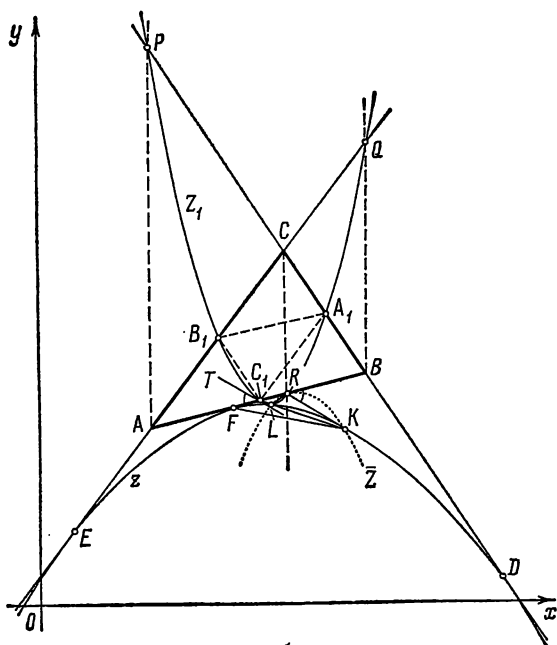


б)

Рис. 97.



a)



б)

Рис. 98.

так что $FR = RK = b - a$ и, следовательно, $FK = FR + RK = 2(b - a)$ (рис. 98, б). Поэтому хорде FK цикла z радиуса r отвечают вписанные углы величины

$$\frac{FK}{2r} = \frac{2(b-a)}{2r} = \frac{b-a}{4R} = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{R} - \frac{a}{R} \right) = \frac{1}{4} (2B - 2A) = \frac{B-A}{2}$$

(см. определение (3а) радиуса цикла и формулы (17), (14)), а значит,

$$\angle KFR = \angle RKF = \frac{B-A}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\angle KRB = \angle KFR + \angle RKF = B - A \quad (= \angle AC_1T),$$

откуда и вытекает, что $RK \parallel C_1T$.

Проведем, наконец, прямую C_1K и обозначим через L вторую точку пересечения этой прямой с вписанной окружностью s , соответственно с вписанным циклом z ; проведем также прямую C_1K_1 и вторую точку пересечения этой прямой с внеписанной окружностью s_c обозначим через L_1 . Мы утверждаем, что *точка L принадлежит окружности S_1 , соответственно циклу Z_1 ; точка L_1 также принадлежит окружности S_1 (более того, мы скоро убедимся в том, что s и S_1 , соответственно z и Z_1 касаются друг друга в точке L , а s_c и S касаются друг друга в точке L_1).*

По теореме о секущей и касательной, проведенным к окружности s , соответственно s_c , из одной точки C_1 , имеем

$$C_1K \cdot C_1L = C_1F^2 \quad (21a)$$

и

$$C_1K_1 \cdot C_1L_1 = C_1F_1^2. \quad (21б)$$

В силу аналогичной теоремы геометрии Галилея (см. ниже, стр. 134) равенство (21а) сохраняет силу и в условиях рис. 98, б. Далее нам опять придется вести доказательство для геометрии Евклида и для геометрии Галилея раздельно, причем во втором случае оно оказывается значительно проще.

Из равенств $AF = a$, $AC_1 = \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}$ и $AR = b$ (рис. 98, б), очевидно, вытекает

$$FC_1 = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} \quad \text{и} \quad C_1R = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2};$$

поэтому равенство (21а) равносильно соотношению

$$C_1K \cdot C_1L = C_1R^2, \quad (22)$$

из которого вытекает, что цикл \bar{Z} , описанный вокруг треугольника KLR (он изображен «мелким» пунктиром на рис. 98, б), касается в точке R прямой AB . Отсюда следует, что

$$\angle KLR = \angle KRB = B - A$$

(вписанный в цикл угол равен углу между касательной и хордой); но, поскольку $\angle AC_1T = B - A$, последнее равенство можно переписать так:

$$\angle RLC_1 = \angle AC_1T.$$

Это равенство означает, что точка L принадлежит циклу Z_1 (действительно, угол $\angle RLC_1$ равен углу $\angle AC_1T$ между хордой AC_1 цикла Z_1 и касательной C_1T к нему, а следовательно, угол $\angle RLC_1$ вписанный).

По существу, очень близки к проведенным рассуждениям, касающиеся рис. 98, а; однако они требуют несколько больших усилий. Обозначим

основание опущенной из вершины C высоты треугольника ABC через R и докажем, что

$$C_1K \cdot C_1L = C_1W \cdot C_1R \quad (22a)$$

и

$$C_1K_1 \cdot C_1L_1 = C_1W \cdot C_1R. \quad (22б)$$

[Заметьте, что роль двух точек W и R рис. 98, a играет одна точка R рис. 98, б! Длины сторон треугольника ABC обозначим, как всегда через a , b и c . Так как

$$BF = BD \text{ и } BD + BF = (a - CD) + (c - AF) = a + c - (CD + AF) = \\ = a + c - (CE + AE) = a + c - b,$$

то $BF = \frac{a + c - b}{2}$, а следовательно,

$$C_1F = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2}.$$

С другой стороны,

$$CE_1 = CD_1$$

и

$$CE_1 + CD_1 = (b + AE_1) + (a + BD_1) = \\ = a + b + (AE_1 + BD_1) = a + b + (AF_1 + BF_1) = a + b + c,$$

откуда вытекает, что

$$CE_1 = \frac{a + b + c}{2}, \quad AF_1 = AE_1 = \frac{a + b + c}{2} - b = \frac{a + c - b}{2}$$

и, значит,

$$C_1F_1 = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2}.$$

Таким образом, произведения $C_1K \cdot C_1L (= C_1F^2)$ и $C_1K_1 \cdot C_1L_1 (= C_1F_1^2)$ равны между собой, в силу чего достаточно доказать одно из равенств (22a) и (22б), скажем, равенство (22a).

Так как

$$BW + AW = c \text{ и } \frac{BW}{AW} = \frac{a}{b}$$

(ведь CW — биссектриса угла C треугольника ABC !), то

$$BW = \frac{a}{a + b} c$$

и, значит,

$$C_1W = \frac{c}{2} - \frac{a}{a + b} c = \frac{(b - a) c}{2(a + b)}.$$

Несколько труднее вычислить длину x отрезка C_1R . Так как

$$x - \frac{c}{2} = C_1R - C_1B = BR$$

и

$$x + \frac{c}{2} = C_1R + AC_1 = AR,$$

то

$$a^2 - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 - \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 \quad (= CR^2),$$

откуда получаем

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2 - a^2,$$

т. е.

$$2cx = b^2 - a^2$$

и, следовательно,

$$C_1R = x = \frac{b^2 - a^2}{2c}.$$

Таким образом,

$$C_1W \cdot C_1R = \frac{(b-a)c}{2(a+b)} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2c} = \frac{(b-a)^2}{4} = C_1F^2 = C_1K \cdot C_1L,$$

что и требовалось доказать.

Теперь заметим, что из равенств (22а) и (22б) вытекает существование окружностей \bar{S} , соответственно \bar{S}_1 , проходящих через точки K, L, W и R , соответственно K_1, L_1, W и R (эти окружности изображены на рис. 98, а «мелким» пунктиром). Из существования окружности \bar{S} следует, что

$$\angle RLK = 180^\circ - \angle KWR = 180^\circ - \angle TC_1B = \angle TC_1A,$$

т. е. угол $\angle RLC_1$ равен углу между хордой RC_1 окружности S_1 и касательной C_1T к этой окружности. Значит, этот угол является вписанным для окружности S_1 , т. е. точка L принадлежит окружности S_1 . Точно так же из существования окружности \bar{S}_1 выводится, что окружности S_1 принадлежит и точка L_1 .

Теперь мы уже находимся у самого конца нашего пути: осталось только доказать, что пересекающиеся в точке L окружности s и S_1 , соответственно циклы z и Z_1 , на самом деле *касаются* друг друга в этой точке и что окружности s_c и S_1 *касаются* друг друга в точке L_1 . Но это немедленно следует из того, что касательные KW и C_1T (соответственно KR и C_1T) окружностей s и S_1 (циклов z и Z_1) в концах K и C_1 хорд LK и LC_1 параллельны. В самом деле, поскольку касательные к этим окружностям (циклам) во втором конце L тех же хорд образуют с этими хордами те же самые углы, что и касательные в точках K и C_1 , то касательные к ним в точке L должны совпасть, т. е. S_1 касается s (соответственно, Z_1 касается z) в точке L . Точно так же из параллельности касательных K_1W и C_1T к окружностям в s_c и S_1 в точках K_1 и C_1 вытекает, что эти две окружности касаются друг друга в точке L_1 .

В заключение этого параграфа приведем второе доказательство теоремы о том, что *цикл шести точек треугольника* плоскости Галилея *касается вписанного цикла*; это доказательство не переносится так непосредственно, как первое в геометрию Евклида, однако оно несколько проще изложенного выше и не апеллирует к содержанию последующих параграфов настоящей книги. Найдем, прежде всего, «центр подобия» описанного цикла Z и вписанного цикла z треугольника ABC , т. е. такую точку Q , что гомотетия с центром Q и коэффициентом 4 (равным отношению радиусов циклов z и Z ; см. формулу (17)) переводит цикл Z в цикл z . Пусть прямая $l \parallel AB$ касается цикла Z в точке F' ; через F мы, как и ранее, обозначим точку соприкосновения цикла z со сто-

роной AB треугольника ABC (рис. 99). Так как $l \parallel AB$, то проходящий через точку F' диаметр d цикла Z делит пополам хорду AB (т. е. проходит через середину C_1 этой хорды). Обозначим теперь через Q такую точку прямой FF' , что

$$QF = 4QF', \text{ т. е. } FQ = \frac{4}{3} FF'.$$

Ясно, что гомотетия с центром Q и коэффициентом 4 как раз и переводит касающийся прямой l в точке F' цикл Z в касающийся прямой AB в точке F

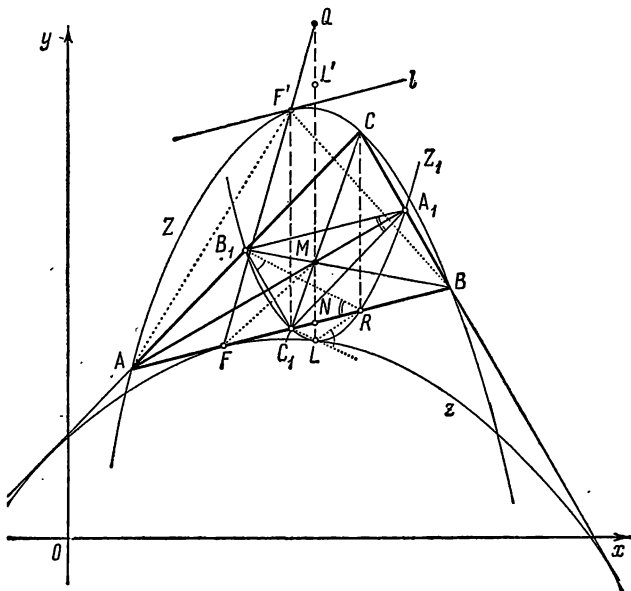


Рис. 99.

цикл z , радиус которого в 4 раза больше радиуса цикла Z . При этом, так как (ср. выше, стр. 113)

$$FB = b \text{ и } AR = b,$$

где R есть основание «высоты» CR треугольника ABC , то $FC_1 = C_1R$ и

$$\begin{aligned} FQ &= \frac{4}{3} FF' = \frac{4}{3} FC_1 = FC_1 + \frac{1}{3} FC_1 = FC_1 + \frac{1}{3} C_1R = \\ &= FC_1 + \frac{1}{3} C_1C = FC_1 + C_1M = FM, \end{aligned}$$

где M — есть точка пересечения медиан треугольника ABC . Поэтому проходящая через Q особая прямая содержит точку M пересечения медиан треугольника ABC .

Итак, цикл z переводится в цикл Z гомотетией γ_1 с центром Q и коэффициентом $\frac{1}{4}$; в свою очередь цикл Z переводится в цикл Z_1 гомотетией γ_2

с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ (ибо последняя гомотетия переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, вокруг которого описан цикл Z_1). Отсюда следует, что цикл z может быть переведен в цикл Z_1 гомотетией γ с коэффициентом $-\frac{1}{8}$; что же касается центра L гомотетии γ , то он принадлежит (особой) прямой QM и удален от точки M на такое расстояние LM , что ¹⁾

$$LM = \frac{1}{3} MQ.$$

В самом деле, точка L принадлежит прямой QM , ибо QM — «неподвижная прямая» гомотетии γ , являющейся «произведением» гомотетии γ_1 с центром Q

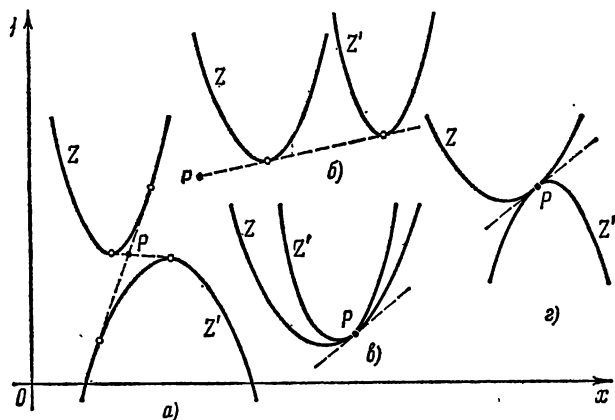


Рис. 100.

и коэффициентом $\frac{1}{4}$ и гомотетии γ_2 с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ (ведь обе эти гомотетии оставляют прямую QM на месте), а все неподвижные прямые гомотетии γ проходят через ее центр L . Равенство же $LM = \frac{1}{3} MQ$ вытекает из того, что определяемая им точка L есть «неподвижная точка» преобразования γ ; действительно, γ_1 переводит L в такую точку L' луча QM , что $QL' = \frac{1}{4} QL$, т. е.

$$\begin{aligned} ML' &= MQ - L'Q = 3LM - \frac{1}{4} LQ = 3LM - \frac{1}{4} (LM + MQ) = \\ &= 3LM - \frac{1}{4} LQ = 3LM - \frac{1}{4} (4LM) = 2LM \end{aligned}$$

(рис. 99), а гомотетия γ_2 переводит L' обратно в L .

Докажем теперь, что найденная точка L принадлежит циклу Z_1 ; отсюда будет следовать, что цикл z , переводимый в Z_1 гомотетией с центром L , касается Z_1 в этой точке (ср. рис. 100, a — z), на которых изображены два

¹⁾ Ср. § 1 гл. I второй части книги Яглома [9].

цикла Z и Z' и их центр гомотетии P). Очевидно, нам достаточно показать, что

$$\angle C_1LR = \angle RB_1C_1. \quad (23)$$

Но $\angle RB_1C_1$ вычислить легко: из рассмотрения треугольника RB_1C_1 следует, что $\angle RB_1C_1 = \angle B_1C_1R - \angle B_1RC_1 = B - \angle B_1RC_1$; с другой стороны, $\angle B_1RC_1 = \angle B_1A_1C_1 = A$ (как опирающиеся на одну хорду вписанные углы цикла Z_1); поэтому

$$\angle RB_1C_1 = B - A.$$

Несколько сложнее подсчитывается величина $\angle C_1LR$. Пожалуй, короче всего здесь рассуждать так: обозначим высоту $F'C_1$ (равнобедренного) треугольника ABF' через H , а высоту CR треугольника ABC через h (разумеется, H и h — это «особые» длины; $H = \delta_{F'C_1}$, $h = \delta_{CR}$); точку пересечения особой прямой QM с основанием AB треугольника обозначим через N . Ясно, что $QN = \frac{4}{3}H$, $MN = \frac{1}{3}h$; таким образом, $QM = \frac{4}{3}H - \frac{1}{3}h$, а значит,

$$NL = ML - MN = \frac{1}{3}QM - MN = \left(\frac{4}{9}H - \frac{1}{9}h\right) - \frac{1}{3}h = \frac{4(H-h)}{9}.$$

Но так как $\angle F'AC_1 = \frac{C}{2}$, $\angle CAB = A$ и $\angle CBA = B$, то (здесь достаточно вспомнить определение величины галилеева угла) $H = \frac{c}{2} \cdot \frac{C}{2}$ и $h = bA = aB$; таким образом,

$$\begin{aligned} NL &= \frac{4(H-h)}{9} = \frac{cC - 2bA - 2aB}{9} = \frac{(a+b)(A+B) - 2bA - 2aB}{9} = \\ &= \frac{aA + bB - bA - aB}{9} = \frac{(b-a)(B-A)}{9}. \end{aligned}$$

А теперь, вычислив величины углов $\angle NC_1L$ и $\angle LRN$:

$$\begin{aligned} \angle NC_1L &= NL : C_1N = NL : C_1M = NL : \frac{1}{3}C_1C = \frac{(b-a)(B-A)}{9} : \frac{\frac{c}{2} - a}{3} = \\ &= \frac{(b-a)(B-A)}{9} : \frac{\frac{a+b}{2} - a}{3} = \frac{(b-a)(B-A)}{9} : \frac{b-a}{6} = \frac{2}{3}(B-A) \end{aligned}$$

и

$$\angle LRN = NL : NR = NL : MC = NL : \frac{2}{3}C_1C = \frac{1}{3}(B-A),$$

получаем

$$\angle C_1LR = \angle NC_1L + \angle LRN = B - A (= \angle RB_1C_1)$$

— этим и завершается доказательство!

Наконец, сформулируем теорему, двойственную теореме о цикле шести точек; она гласит: *цикл, вписанный в треугольник, образованный биссектрисами a_1 , b_1 , c_1 треугольника ABC (этот треугольник двойствен тре-*

угольнику $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC), касается также трех прямых p, q, r , проходящих через вершины треугольника и параллельных противоположным сторонам; этот «цикл шести

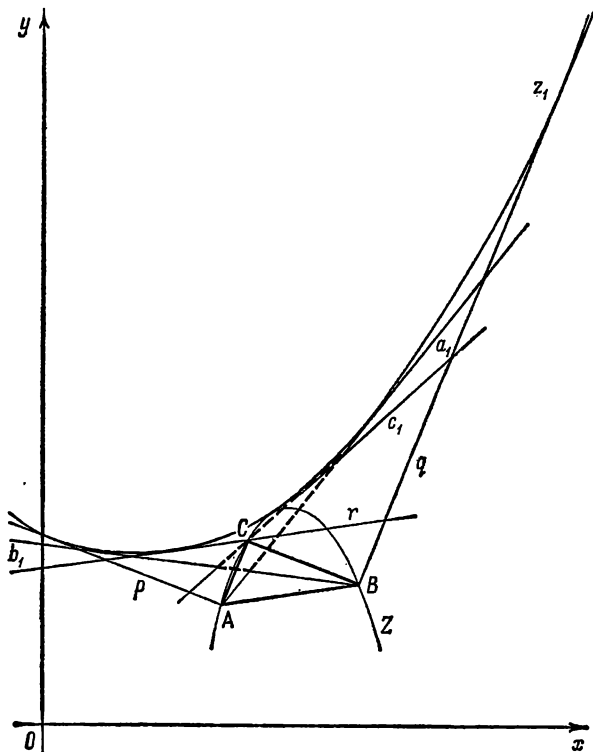


Рис. 101.

прямых» z_1 (радиус которого вдвое больше радиуса вписанного цикла z треугольника) касается описанного цикла Z треугольника (рис. 101).

Доказательство этой теоремы мы предоставим читателю.

§ 9. Степень точки относительно окружности или цикла; инверсии

Хорошо известно, что если проходящая через точку M прямая l пересекает (евклидову) окружность S в точках A и B (рис. 102, $a—b$), то произведение $MA \cdot MB$ зависит лишь от точки M и от окружности S , но не зависит от прямой l . Произведению $MA \cdot MB$ принято приписывать определенный знак, т. е. считать отрезки MA и MB направленными: произведение $MA \cdot MB$ считается положительным, если направления отрезков MA и MB (от M к A ,

соответственно от M к B) совпадают, и отрицательным в противном случае. Взятое со знаком $+$ или $-$ произведение

$$MA \cdot MB \quad (24)$$

называется *степенью точки M относительно окружности S* ; ясно, что эта степень будет положительна, если точка M лежит вне окружности S (рис. 102, а); равна нулю, если M принадлежит S

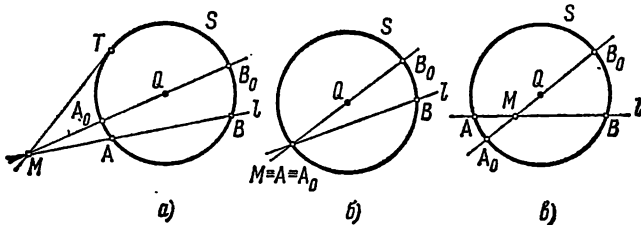


Рис. 102.

(рис. 102, б); отрицательна, если M лежит внутри S (рис. 102, в). Если точка M лежит вне S , то степень M относительно S равна квадрату длины MT касательной, проведенной к окружности S из точки M (ибо за прямую l можно принять MT ; при этом обе точки A и B сольются в одну точку T).

Если $MQ = d$, где Q — центр окружности S радиуса r , а прямая l проходит через точку Q и пересекает S в точках A_0 и B_0 , то длина одного из отрезков MA_0 и MB_0 равна $d + r$, а длина второго равна $|d - r|$. Для учета знака произведения $MA \cdot MB$ достаточно, очевидно, взять со своим знаком разность $(d - r)$, т. е. *степень точки M относительно окружности S всегда равна*

$$d^2 - r^2. \quad (25)$$

Поэтому если координаты точек M и Q равны (x_0, y_0) и (a, b) , то степень точки M относительно S равна

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

А так как уравнение окружности S имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \quad (26)$$

или

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = 0, \quad (26')$$

где $p = -a$, $q = -b$, $f = a^2 + b^2 - r^2$ (см. формулы (2) — (2а) из § 1, стр. 17), то *степень точки $M(x_0, y_0)$ относительно окружности S равна результату подстановки в правую часть уравнения окружности ((26) или (26')) вместо x и y координат x_0, y_0 точки M .*

Из сказанного сразу следует, что множество точек, имеющих относительно данной окружности S с уравнением (26) одну и ту же степень k , описывается уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = k$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - (r^2 - k) = 0,$$

т. е. представляет собой окружность, концентрическую с данной (впрочем, это сразу вытекает из (25)); множество всех точек, имеющих одинаковые степени относительно окружности S с уравнением (26') и окружности S_1 с уравнением

$$x^2 + y^2 + 2p_1x + 2q_1y + f_1 = 0, \quad (26'')$$

описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = x^2 + y^2 + 2p_1x + 2q_1y + f_1$$

или

$$2(p-p_1)x + 2(q-q_1)y + (f-f_1) = 0,$$

т. е. представляет собой прямую l — радикальную ось окружностей S и S_1 (рис. 103)¹. [Исключение составляет случай, когда $p=p_1$ и $q=q_1$ (т. е. когда окружности S и S_1 являются концентрическими!): в этом случае искомое множество вообще не содержит ни одной точки (является *пустым*).] Нетрудно также

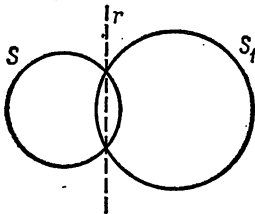


Рис. 103.

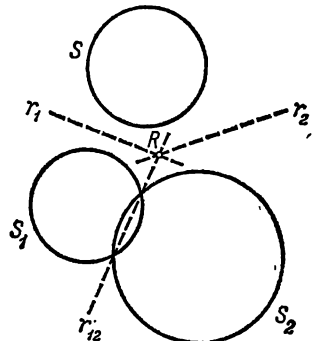


Рис. 104.

понять, что попарные радикальные оси r_1 , r_2 и r_{12} трех окружностей S , S_1 и S_2 либо параллельны, либо пересекаются в одной точке R — радикальном центре окружностей S , S_1 и S_2 (рис. 104; в самом деле, если две радикальные оси пересекаются, то точка R их пересечения имеет одинаковую степень относительно

¹ Теорема о радикальной оси легко доказывается и без использования уравнения окружности (см., например, § 81 книги Перепелкина [5] или § 3 гл. II книги Яглома [10]).

всех трех окружностей, т. е. принадлежит и третьей радикальной оси).

Обратимся теперь к геометрии Галилея. Совершенно ясно, что если l — произвольная (обыкновенная) прямая, проходящая через точку M и пересекающая окружность S в точках A и B , то произведение $MA \cdot MB$ зависит лишь от точки M и окружности S , но не от прямой l : ведь для всех проходящих через M прямых расстояния MA и MB будут одними и теми же (рис. 105). Произведение

$$MA \cdot MB \quad (24)$$

(в котором отрезки MA и MB считаются направленными, так что это произведение может быть положительным или неположительным) называется *степенью точки M относительно окружности S* .

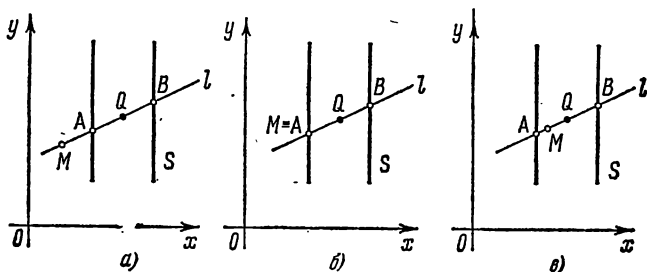


Рис. 105.

Ясно, что степень точки M относительно окружности S положительна, если точка M лежит вне S (рис. 105, а); равна нулю, если M принадлежит S (рис. 105, б); отрицательна, если M заключена внутри S (рис. 105, в). При этом если $d = MQ$ — расстояние от точки M до центра Q окружности S (это расстояние будет одним и тем же для всех центров Q окружности S), а $r = AQ = QB$ — радиус S , который здесь нам удобно считать совпадающим по знаку с d , то один из двух отрезков MA и MB будет равен $d + r$, а второй будет равен $d - r$, так что и в геометрии Галилея *степень точки M относительно окружности S равна*

$$d^2 - r^2. \quad (25)$$

Несколько сложнее проводятся соответствующие рассуждения для циклов. Пусть l и l_1 — две прямые, проходящие через точку M и пересекающие цикл Z в точках A и B , соответственно A_1 и B_1 (рис. 106). Ясно, что если точка M принадлежит Z (рис. 106, б), то $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = 0$. Если же M не принадлежит Z , то $\angle ABB_1 = \angle AA_1B_1$ и $\angle A_1AB = \angle A_1B_1B$ как вписанные углы цикла, опирающиеся на одну дугу; поэтому треугольники MAA_1 и MB_1B

будут иметь одинаковые углы¹⁾. А так как стороны треугольников пропорциональны противоположным углам (см. формулы (13) § 4, стр. 62), то

$$\frac{MA}{MA_1} = \frac{MB_1}{MB} \quad \text{или} \quad MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1,$$

что и доказывает независимость произведения (24) от выбора прямой l . Это произведение называется *степенью точки M относительно цикла Z* . Ясно, что степень M относительно Z будет положительна, если точка M лежит вне Z (рис. 106, а; в этом случае степень точки M относительно цикла Z равна также квадрату длины MT

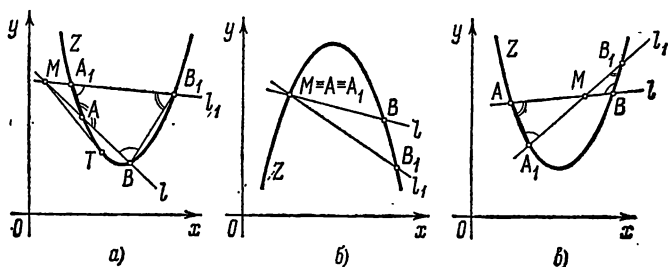


Рис. 106.

касательной, проведенной к Z из M ,—для доказательства этого достаточно принять за l прямую MT); равна нулю, если M принадлежит Z (рис. 106, б); отрицательна, если M лежит внутри Z (рис. 106, в). [Точка M называется внутренней по отношению к циклу Z , если через нее не проходит ни одна не пересекающая Z прямая, и внешней в противном случае; при этом из внешней точки к циклу Z можно провести касательную, а из внутренней нельзя.]

Если координаты точки M суть x_0 и y_0 , а окружность S представляет собой пару (особых) прямых $x = x_1$ и $x = x_2$, то отрезки MA и MB равны $x_1 - x_0$ и $x_2 - x_0$; поэтому степень M относительно S равна

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2).$$

А так как уравнение окружности S имеет в этом случае вид

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (27)$$

или

$$x^2 + 2bx + c = 0, \quad (27')$$

¹⁾ Эти треугольники будут «подобны 1-м образом»—они переводятся один в другой преобразованием подобия 1-го рода (см. текст, напечатанный мелким шрифтом на стр. 66).

где $2b = -(x_1 + x_2)$, $c = x_1 x_2$, то степень точки M относительно окружности S равна результату подстановки в правую часть уравнения (27) или (27') окружности вместо x и y координат x_0, y_0 точки M .

С другой стороны, пусть цикл Z имеет уравнение

$$x^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0 \quad (28)$$

(т. е. уравнение (2) из § 6, стр. 85, где коэффициент a при x^2 равен 1), а прямая l , проходящая через точку $M(x_0, y_0)$, — уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (29)$$

Тогда координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точек A и B пересечения прямой l с циклом Z определяются из системы (28)—(29) двух уравнений с двумя неизвестными. Но из уравнения (29) следует

$$y = kx + (y_0 - kx_0);$$

подставляя это значение y в (28), получим

$$x^2 + 2(b_1 + kb_2)x + [2b_2(y_0 - kx_0) + c] = 0,$$

откуда по формулам Виета имеем

$$x_1 + x_2 = -2(b_1 + kb_2), \quad x_1 x_2 = 2b_2(y_0 - kx_0) + c.$$

Поэтому степень точки $M(x_0, y_0)$ относительно цикла Z

$$MA \cdot MB = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) = x_0^2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_1 x_2$$

равна

$$x_0^2 + 2(b_1 + kb_2)x_0 + 2b_2(y_0 - kx_0) + c = x_0^2 + 2b_1 x_0 + 2b_2 x_0 + c;$$

другими словами, степень точки M относительно цикла Z равна результату подстановки в уравнение (28) цикла вместо x и y координат x_0, y_0 точки M .

Из доказанного непосредственно следует, что множество точек, имеющих относительно окружности (27') или цикла (28) одну и ту же степень k , описывается уравнением

$$x^2 + 2bx + c = k, \quad \text{т. е.} \quad x^2 + 2bx + (c - k) = 0,$$

соответственно

$$x^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = k, \quad \text{т. е.} \quad x^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + (c - k) = 0,$$

т. е. представляет собой окружность, «концентрическую» с данной (имеющую ту же линию центров; это, впрочем, сразу следует и из (25)), или цикл, параллельный данному. Далее, нетрудно видеть, что множество точек, имеющих равные степени относительно данных

двух окружностей S и S_1 с уравнениями (27') и

$$x^2 + 2b_1x + c_1 = 0 \quad (27'')$$

или относительно окружности S с уравнением (27') и цикла Z с уравнением (28), или относительно двух циклов Z и Z_1 с уравнениями (28) и

$$x^2 + 2b_1^{(1)}x + 2b_2^{(1)}y + c_1 = 0, \quad (28')$$

представляет собой (обыкновенную или особую!) прямую r ; эту прямую естественно назвать радикальной осью двух окружностей

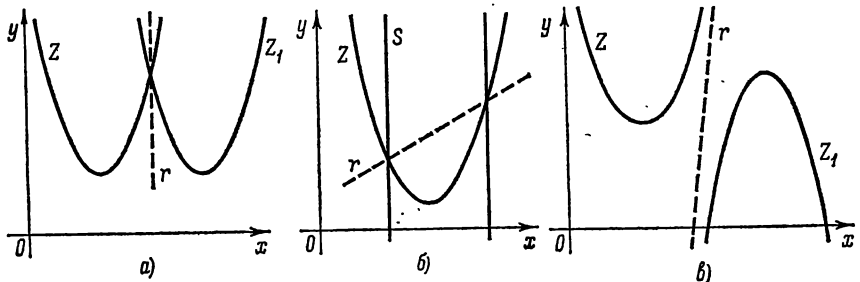


Рис. 107.

(или окружности и цикла, или двух циклов). Ясно, что радикальной осью двух (неконцентрических) окружностей (27') и (27'') будет особая прямая

$$x^2 + 2bx + c = x^2 + 2b_1x + c_1, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{c_1 - c}{2(b - b_1)}$$

(а радикальная ось концентрических окружностей не существует — представляет собой пустое множество точек); также и радикальной осью двух (непараллельных) циклов Z и Z_1 одного радиуса (для таких циклов в уравнениях (28) и (28') $b_2 = b_2^{(1)}$) будет особая прямая

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = x^2 + 2b_1^{(1)}x + 2b_2y + c_1, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{c_1 - c}{2(b_1 - b_1^{(1)})}$$

(рис. 107, а; радикальная ось двух параллельных циклов не существует). Во всех остальных случаях радикальной осью (если она существует) будет обыкновенная прямая (рис. 107, б, в);

¹⁾ Поскольку уравнение (28) можно, очевидно, переписать в виде $y = -\frac{1}{2b_2}x^2 - \frac{b_1}{b_2}x - \frac{c}{2b_2}$, то радиус r цикла (28) равен $-b_2$.

так, например, уравнение радикальной оси циклов (28) и (28') разного радиуса имеет вид

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = x^2 + 2b_1^{(1)}x + 2b_2^{(1)}y + c_1$$

или

$$y = \frac{b_1^{(1)} - b_1}{b_2 - b_2^{(1)}} x + \frac{c_1 - c}{2(b_2 - b_2^{(1)})}.$$

Ясно, что если две линии Σ и Σ_1 — цикл и окружность или два цикла — пересекаются в двух точках P и Q , то радикальной осью Σ и Σ_1 служит прямая PQ (ибо точки P и Q имеют относительно Σ и относительно Σ_1 одну и ту же степень 0, а потому принадлежат радикальной оси Σ и Σ_1).

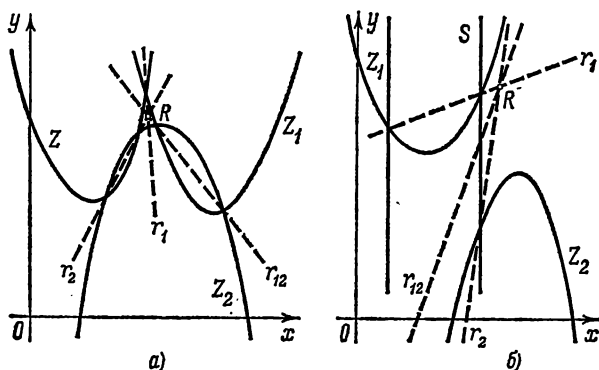


Рис. 108.

Аналогия между учением об евклидовых окружностях и учением о циклах и окружностях геометрии Галилея может быть еще продолжена. Так, например, в точности как в случае евклидовой геометрии, показывается, что если какие-либо две из попарных радикальных осей r_1 , r_2 и r_{12} трех линий Σ , Σ_1 и Σ_2 , каждая из которых является окружностью или циклом, пересекаются в точке R , то через эту точку (имеющую, очевидно, одинаковую степень относительно всех трех линий!) проходит и третья радикальная ось (рис. 108, а, б); эту точку R естественно назвать радикальным центром трех линий Σ , Σ_1 и Σ_2 ¹⁾.

1) В геометрию Галилея можно без особого труда перенести все понятия и теоремы той части евклидовой теории окружностей, которая базируется на понятии степени точки относительно окружности (см., например, гл. X книги Перепелкина [5] или раздел А статьи Яглома [31]). Также и все дальнейшее содержание теории окружностей, связанное с понятиями степени прямой относительно окружности и степени окружности относительно окружности (см., например, разделы Б и В статьи Яглома [31]), может быть перенесено в геометрию Галилея; ср. ниже, стр. 174.

Нетрудно установить механический смысл степени точки относительно цикла. Рассмотрим равноускоренное движение материальной точки по прямой o :

$$x = at^2 + 2bt \quad (30)$$

с ускорением $\omega = 2a$, начинающееся в момент $t = 0$ из точки $x = 0$ (см. формулу (1') § 6, стр. 91), например, движение подброшенного

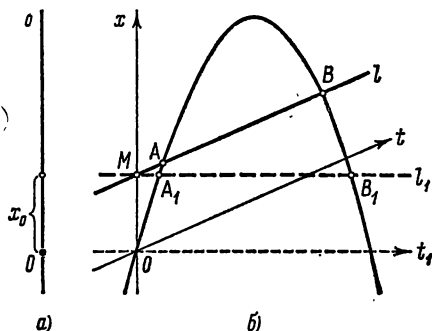


Рис. 109.

вертикально вверх камня, имеющего ускорение $\omega = -g$, где $g \approx 9,8 \text{ м/сек}^2$ — ускорение силы тяжести (см. рис. 109, а, б). Выберем инерциальную систему отсчета так, чтобы изображенной на рис. 109, б прямой l отвечало состояние покоя; тогда эта прямая будет характеризовать определенный пункт $x = x_0$ прямой o («вертикали»). Пусть точка M плоскости Галилея характеризует этот пункт прямой o и момент $t = 0$,

который мы условились считать моментом начала движения; при этом отрезки MA и MB рис. 109, б будут характеризовать интервалы времени между началом движения $t = 0$ и моментом прохождения движущейся точкой (камнем) пункта $x = x_0$. Ясно, что эти интервалы времени t_1 и t_2 определяются из уравнения

$$at^2 + 2bt = x_0 \quad \text{или} \quad at^2 + 2bt - x_0 = 0,$$

из которого в силу формул Виета немедленно следует

$$t_1 t_2 = -\frac{x_0}{a}.$$

Таким образом, мы видим, что интересующее нас произведение $MA \cdot MB = t_1 \cdot t_2$ зависит лишь от ускорения $\omega (= 2a)$ движущейся точки и от величины x_0 и не зависит от выбора инерциальной системы координат! Поэтому, если мы выберем иную систему координат, скажем ту, в которой роль «постоянного пункта» $x = x_0$ рис. 109, а играет прямая l_1 рис. 109, б, то произведение $MA_1 \cdot MB_1$ (см. рис. 109, б) будет иметь то же значение $-\frac{x_0}{a}$, что и раньше.

Обратимся теперь к учению об инверсии. Как известно, *инверсией* с центром Q и степенью $k > 0$ (или *инверсией*, задаваемой окружностью инверсии S с центром Q и радиусом $r = \sqrt{k}$) в евклидовой геометрии называют преобразование, сопо-

ставляющее каждой отличной от Q точке A плоскости такую точку A' луча QA , что

$$QA \cdot QA' = k \quad (31)$$

(рис. 110). Несколько по-другому инверсию можно описать следующим образом: точки окружности S инверсия оставляет на месте; каждую внешнюю по отношению к S точку A она переводит в точку A' пересечения диаметра QA окружности S с хордой KL , соединяющей точки прикосновения с окружностью S проведенных к ней из точки A касательных; точку A' она переводит обратно в A . Последнее следует из того, что прямоугольные треугольники QKA' и QAK с общим острым углом Q подобны между собой, так как из их подобия вытекает

$$\frac{QK}{QA'} = \frac{QA}{QK} \quad \text{или} \quad QA \cdot QA' = QK^2 \quad (= r^2 = k).$$

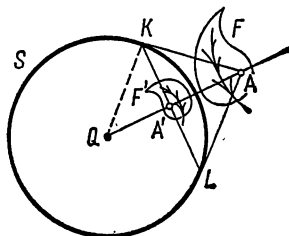


Рис. 110.

Для определения образа A' произвольной (но отличной от Q) точки A при инверсии с окружностью инверсии S можно также провести через A всевозможные окружности s (и прямую l), перпендикулярные окружности S , другими словами, такие, что

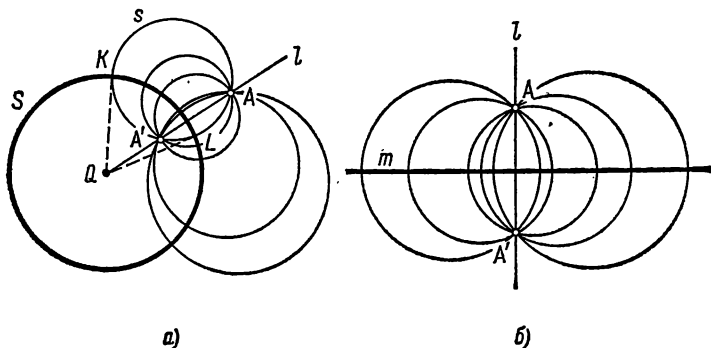


Рис. 111.

касательные к S и к s в точках K и L их пересечения перпендикулярны (т. е. окружность s должна касаться радиусов QK и QL окружности S , проходящих через точки пересечения S и s , а прямая l должна проходить через точку Q). Все такие окружности s и прямая l пересекаются еще в одной точке A' , которая и является образом точки A при инверсии (рис. 111, а). Для обоснования последнего утверждения (оно может служить новым определением

инверсии!) достаточно воспользоваться понятием степени точки относительно окружности (в применении к точке Q и к любой из рассматриваемых окружностей s); из определения этого понятия следует, что если A' — вторая точка пересечения прямой QA с окружностью s , то

$$QA \cdot QA' = QK^2 \quad (=r^2 = k)$$

(ибо QK — касательная к окружности s !). Если точка A принадлежит S , то все проходящие через точку A и перпендикулярные S окружности s (и прямая l) касаются друг друга в точке A ; в этом случае естественно считать, что точка A' совпадает с A . Такое описание инверсии очень близко к описанию симметрии относительно прямой m , при которой каждая точка A плоскости переходит во вторую точку A' пересечения всех проходящих через A окружностей s (и прямую l), перпендикулярных m (рис. 111, б); исходя из этой аналогии, инверсию с окружностью инверсии S часто называют *симметрией*

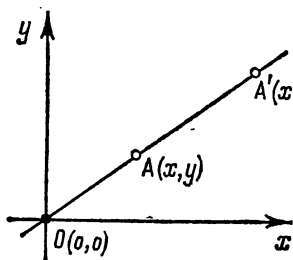


Рис. 112.

относительно окружности S .

Самым важным из свойств инверсии является следующее: *инверсия переводит каждую окружность плоскости* (где к числу окружностей мы причисляем также и прямые, рассматриваемые как «окружности бесконечно большого радиуса») *снова в окружность* (или в прямую). Проще всего доказать это свойство аналитически. Инверсия с центром в начале координат $O(0, 0)$ и степенью k переводит точку $A(x, y)$ в такую точку $A'(x', y')$ или $A'(\lambda x, \lambda y)$ (ибо A' принадлежит лучу OA , рис. 112), что

$$OA \cdot OA' = k, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = k.$$

Отсюда вытекает, что $\lambda = \frac{k}{x^2 + y^2}$ и, значит,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{kx}{x^2 + y^2}, & x &= \frac{kx'}{x'^2 + y'^2}, \\ & \text{или} & & \\ y' &= \frac{ky}{x^2 + y^2}, & y &= \frac{ky'}{x'^2 + y'^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

(Последнее следует из того, что A' переводится в A той же инверсией!) Поэтому *окружность (или прямую) s с уравнением*

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (33)$$

(уравнение (2') из § 6, стр. 85) *инверсия (32) переводит в линию s с уравнением*

$$a \frac{k^2}{x'^2 + y'^2} + 2b_1 \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} + 2b_2 \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} + c = 0,$$

т. е. снова в окружность (или прямую)

$$a' (x^2 + y^2) + 2b'_1 x + 2b'_2 y + c' = 0 \quad (33')$$

(здесь мы отбрасываем ненужные нам более штрихи при x и y), где

$$a' = c, \quad b'_1 = kb_1, \quad b'_2 = kb_2, \quad c' = k^2 a. \quad (33a)$$

При этом, если в уравнении (33)

а) $a = 0, c = 0$ (т. е. s — прямая, проходящая через O);

б) $a = 0, c \neq 0$ (т. е. s — прямая, не проходящая через O);

в) $a \neq 0, c = 0$ (т. е. s — окружность, проходящая через O);

г) $a \neq 0, c \neq 0$ (т. е. s — окружность, не проходящая через O);

то в уравнении (33')

а) $a' = 0, c' = 0$ (т. е. s' — прямая, проходящая через O);

б) $a' \neq 0, c' = 0$ (т. е. s' — окружность, проходящая через O);

в) $a' = 0, c' \neq 0$ (т. е. s' — прямая, не проходящая через O);

г) $a' \neq 0, c' \neq 0$ (т. е. s' — окружность, не проходящая через O).

Это чисто аналитическое рассуждение можно заменить следующим геометрическим. *Проходящая через центр Q инверсии прямая s ,*

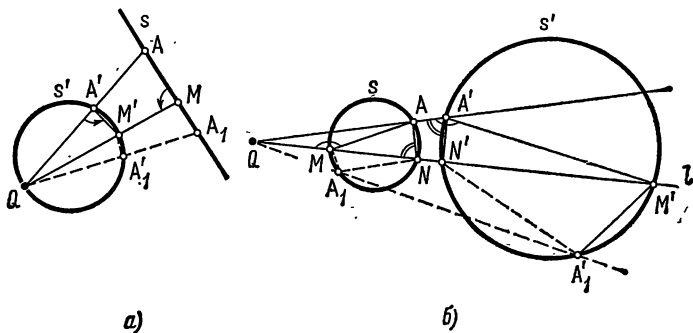


Рис. 113.

очевидно, *переходит при инверсии сама в себя*: ведь каждую точку A прямой s инверсия переводит в точку той же прямой. Пусть теперь s — *прямая, не проходящая через центр инверсии Q* ; M и A — какие-то две точки этой прямой, M' и A' — их образы (рис. 113, а). Из равенства

$$QA \cdot QA' = QM \cdot QM' \quad (= k)$$

следует, что

$$\frac{QA}{QM} = \frac{QM'}{QA}.$$

Поэтому треугольники $QA'M'$ и $QM'A'$ подобны, и, значит,

$$\angle QA'M' = \angle AMQ. \quad (34)$$

Закрепим теперь точки M и M' , а точку A заставим пробегать прямую s . При этом множество точек A' будет определяться условием (34); другими словами, это множество s' будет характеризоваться условием постоянства угла $QA'M'$, под которым виден из точки A' отрезок QM' . Но это и означает, что множество s' точек A' представляет собой *окружность*, проходящую через точки Q и M' . Обратно, если точка A рис. 113, а будет пробегать *проходящую через центр Q инверсии окружность s'* , то множество точек A , являющихся образами точек A' , будет характеризоваться тем же равенством (34), из которого видно, что $\angle AMQ = \angle QA'M' = \text{const}$; следовательно, это множество точек s представляет собой *прямую*, образующую с прямой QM угол $\angle QMA$, равный вписанному углу окружности s' , опирающейся на хорду QM'^1).

Пусть теперь s — *окружность, не проходящая через центр Q инверсии*; l — *проходящая через Q прямая, пересекающая s в точках M и N* ; A — еще одна точка окружности s ; M', N' и A' — образы точек M, N и A при инверсии (рис. 113, б). Из равенств

$$QA \cdot QA' = QM \cdot QM' \quad (=k) \quad \text{и} \quad QA \cdot QA' = QN \cdot QN' \quad (=k)$$

вытекает пропорциональность сторон треугольников QAM и $QM'A'$, QAN и $QN'A'$:

$$\frac{QA}{QM} = \frac{QM'}{QA'} \quad \text{и} \quad \frac{QA}{QN} = \frac{QN'}{QA'},$$

а следовательно, и равенство углов этих треугольников:

$$\angle QA'M' = \angle AMQ; \quad \angle QA'N' = \angle ANQ.$$

А отсюда в свою очередь вытекает, что

$$\angle N'A'M' = \angle QA'M' - \angle QA'N' = \angle AMQ - \angle ANQ = \angle MAN$$

(здесь мы используем теорему о внешнем угле треугольника). Таким образом, когда точка A пробегает окружность s , характеризующуюся постоянством вписанного угла $\angle MAN^1$), опирающегося на

¹⁾ Для того чтобы сделать это рассуждение совсем строгим, надо в соответствии со сказанным на стр. 83—84 ввести в рассмотрение на прав л е н н ы е углы (см. подстрочное примечание ²⁾ на стр. 120; ср. на рис. 113, а прямую QA с изображенной тонким пунктиром прямой QA_1).

хорду MN , точка A' пробегает линию s' , характеризующуюся постоянством угла $\angle N'A'M'$, т. е. тоже окружность.

Наконец, сходные рассуждения показывают, что инверсия обладает свойством конформности, т. е. сохраняет углы между линиями. В самом деле, пусть линию Γ инверсия с центром Q и степенью k переводит в линию Γ' ; A и A' — соответствующие друг другу при инверсии точки этих линий; B — близкая к A точка

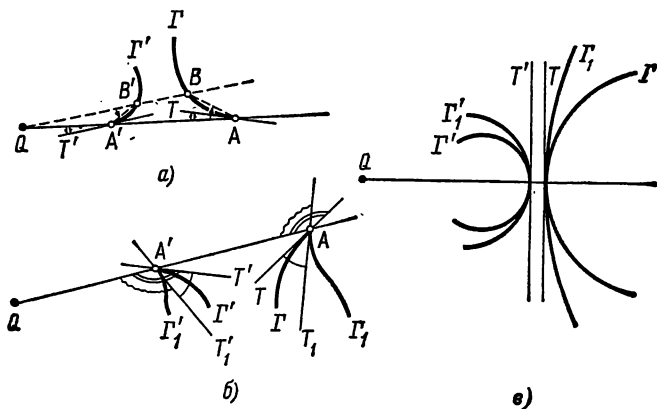


Рис. 114.

линии Γ , переходящая при инверсии в точку B' линии Γ' (рис. 114, а). Так как при этом

$$QA \cdot QA' = QB \cdot QB' (=k), \quad \text{т. е.} \quad \frac{QA}{QB} = \frac{QB'}{QA'},$$

то треугольники QAB и $QB'A'$ подобны, т. е. $\angle BAQ = \angle QB'A'$. Если теперь точка B стремится к точке A , то прямая AB стремится к касательной AT линии Γ в точке A , а прямая $A'B'$ — к касательной $A'T'$ линии Γ' в точке A' (см. рис. 114, а). Поэтому в пределе равенство $\angle BAQ = \angle QB'A'$ переходит в равенство

$$\angle TAQ = \angle QA'T'$$

— линии Γ и Γ' образуют в точках A и A' с прямой QA одинаковые (но противоположно направленные, см. рис. 113, а) углы. Отсюда следует, что если две пересекающиеся в точке A линии Γ и Γ_1 инверсия переводит в пересекающиеся в точке A' линии Γ' и Γ'_1 и AT, AT_1 , соответственно $A'T', A'T'_1$ — касательные к Γ и к Γ_1 в точке A и касательные к Γ' и к Γ'_1 в точке A' (рис. 114, б), то

$$\angle TAT_1 = \angle T'_1A'T'.$$

Но последнее равенство и означает, что угол между Γ и Γ_1 равен углу между Γ' и Γ'_1 , поскольку под углом между двумя

(гладкими, т. е. имеющими касательные) линиями Γ и Γ_1 как раз и понимается *угол между касательными к этим линиям, проведенными в точке их пересечения*. Из конформности инверсии, в частности, вытекает, что *инверсия переводит две касающиеся линии Γ и Γ_1 (линии, угол между которыми равен нулю; рис. 114, в) в касающиеся линии Γ' и Γ'_1 (например, касающиеся окружности — в касающиеся окружности)*.

После этого довольно большого отступления, посвященного некоторым фактам обычной геометрии Евклида, обратимся снова к геометрии Галилея. **Инверсия 1-го рода** с центром Q и степенью $k > 0$ (инверсия с центром Q и окружностью инверсии S радиуса $r = \sqrt{k}^1$) в геометрии Галилея естественно определяется как преобразование, сопоставляющее каждой удаленной от точки Q на ненулевое расстояние точке A плоскости такую точку A' луча QA , что

$$QA \cdot QA' = k \quad (31)$$

(рис. 115). С помощью окружности S инверсию 1-го рода можно описать следующим образом: для определения образа A' произвольной точки A плоскости Галилея (удаленной от Q на ненулевое расстояние) достаточно провести через A всевозможные циклы z , в точках K и L пересечения с окружностью S касающиеся «радиусов» QK и QL этой окружности (а также прямую $l \equiv QA$, то-

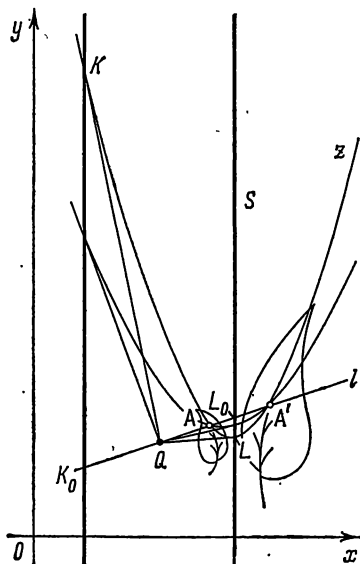


Рис. 115.

же в точках K_0 и L_0 пересечения с S «касающуюся» лучей QK_0 и QL_0); все такие циклы z (и прямая l) пересекаются еще в точке A' , которая и является образом точки A . Для доказательства совпадения этого определения инверсии 1-го рода с исходным определением достаточно воспользоваться понятием степени точки относительно цикла (в применении к точке Q и к любому из рассматриваемых циклов z); из определения этого понятия следует, что если A' — вторая точка

¹⁾ Центр Q инверсии обязательно должен являться центром окружности инверсии S . [В то время как евклидова инверсия полностью определяется указанием окружности инверсии S , в геометрии Галилея для задания инверсии 1-го рода надо указать не только окружность S , но и ее центр Q — ведь S имеет много центров, только один из которых играет роль центра инверсии!]

пересечения прямой QA с циклом z , то

$$QA \cdot QA' = QK^2 \quad (=r^2 = k)$$

(ибо QK —касательная к циклу z). Если точка A принадлежит окружности S , то все касающиеся в этой точке луча QA циклы z касаются друг друга в точке A ; в этом случае естественно считать, что точка A' совпадает с A . [Заметим также, что в точке K пересечения цикла z и окружности S линии S и z «перпендикулярны» (подобно тому как обстояло дело и в евклидовой геометрии); однако здесь последнее свойство является бессодержательным, ибо окружность S плоскости Галилея «перпендикулярна» любой не касающейся ее линии Γ в точке пересечения S и Γ .]

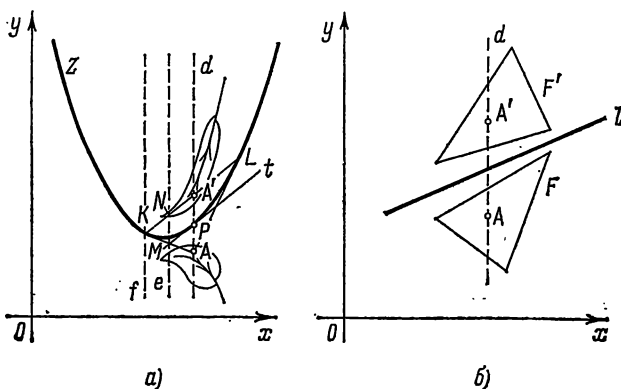


Рис. 116.

В геометрии Галилея инверсию 1-го рода с окружностью инверсии S и центром Q называют также *симметрией относительно окружности S* с центром Q . Другим аналогом евклидовой инверсии в геометрии Галилея является так называемая *инверсия 2-го рода с циклом инверсии Z* или *симметрия относительно цикла Z* . Она определяется так: *точки цикла Z инверсия 2-го рода переводит в себя; любую внешнюю по отношению к Z точку A плоскости она переводит во вторую точку A' пересечения проходящего через A диаметра d цикла Z с хордой KL , соединяющей точки прикосновения с циклом Z проведенных к нему из точки A касательных; точку A' инверсия 2-го рода переводит обратно в точку A* (рис. 116, б). Можно также определить инверсию 2-го рода плоскости Галилея с циклом инверсии Z и по-другому: *каждую точку A плоскости симметрия относительно цикла Z переводит в такую точку A' проходящей через A особой прямой A (диаметра цикла Z), что отрезок AA' делится циклом Z пополам (т. е. переводит A в*

такую точку A' прямой d , что

$$AP = PA' \text{ или, точнее, } \delta_{AP} = \delta_{PA'},$$

где P есть точка пересечения прямой d с циклом Z). В самом деле, $AK = AL$, т. е. прямая d делит отрезок KL пополам; поэтому касательная t к циклу Z в точке P пересечения цикла Z с диаметром d параллельна хорде KL (см. выше, стр. 102 и 104). Но если M есть точка пересечения t и AK , то $PM = MK$, как касательные к Z , проведенные из одной точки M ; другими словами, проходящая через точку M особая прямая e равноудалена от d и от проходящей через K особой прямой f . А отсюда в свою очередь вытекает, что если N есть точка пересечения особой прямой e с хордой KL , то

$$PA' = MN = \frac{1}{2} AA'$$

(в силу теоремы о средней линии треугольника; все расстояния здесь особые).

В последней интерпретации симметрия относительно цикла родственна симметрии относительно (обыкновенной) прямой l — *преобразованию, переводящему каждую точку A плоскости в такую точку A' особой прямой d , проходящей через A , что отрезок AA' делится прямой l пополам* (рис. 116, б; ср. выше, стр. 56). И в дальнейшем мы будем считать симметрию относительно прямой частным случаем симметрии относительно цикла, подобно тому как (обыкновенную) прямую иногда считают частным случаем цикла («цикл бесконечно большого радиуса»).

Очевидно, что как *инверсия 1-го рода* (симметрия относительно окружности), так и *инверсия 2-го рода* (симметрия относительно цикла) *каждую особую прямую p плоскости Галилея переводят снова в особую прямую*: инверсия 2-го рода оставляет прямую p на месте, а инверсия 1-го рода переводит p в такую прямую p' , что произведение расстояний от центра Q инверсии до p и до p' равно степени k инверсии. Поэтому *окружность плоскости Галилея* (т. е. пару особых прямых!) *каждая инверсия* (1-го или 2-го рода) *переводит снова в окружность*. Гораздо более глубоким является следующее свойство инверсии: *каждая инверсия* (1-го или 2-го рода) *переводит любой цикл z* (к числу которых мы причисляем здесь и обыкновенные прямые, рассматриваемые как «циклы бесконечно большого радиуса») *снова в цикл* (или прямую); к доказательству этого свойства мы сейчас и перейдем.

Проще всего доказать это свойство инверсий аналитически. Инверсия 1-го рода с центром в начале $O(0, 0)$ координат и степенью k переводит каждую точку $A(x, y)$ плоскости в такую точку $A'(x', y')$ или $A'(\lambda x, \lambda y)$ луча OA , что

$$OA \cdot OA' = k \text{ или } x \cdot \lambda x = k$$

(рис. 117). Отсюда следует, что $\lambda = \frac{k}{x^2}$ и, значит,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{k}{x}, & x &= \frac{k}{x'}, \\ & \text{или} & & \\ y' &= \frac{ky}{x^2}, & y &= \frac{ky'}{x'^2} \end{aligned} \quad (35)$$

(ведь точку A' наша инверсия переводит в точку A). Поэтому *цикл* (или *прямую*) z с уравнением

$$y = ax^2 + 2bx + c \quad (1)$$

инверсия (35) переводит в линию z' с уравнением

$$\frac{ky'}{x'^2} = a \frac{k^2}{x'^2} + 2b \frac{k}{x'} + c,$$

т. е. снова в *цикл* (или в *прямую*)

$$y = a'x^2 + 2b'x + c', \quad (36)$$

где

$$a' = \frac{c}{k}, \quad b' = b, \quad c' = ka. \quad (36a)$$

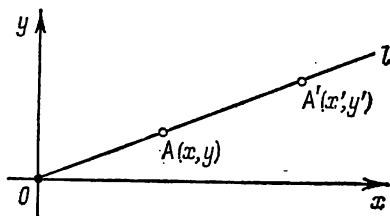


Рис. 117.

В частности, если в уравнении (1)

- а) $a = 0, c = 0$ (т. е. z —прямая, проходящая через O);
- б) $a = 0, c \neq 0$ (т. е. z —прямая, не проходящая через O);
- в) $a \neq 0, c = 0$ (т. е. z —цикл, проходящий через O);
- г) $a \neq 0, c \neq 0$ (т. е. z —цикл, не проходящий через O),

то в уравнении (36)

- а) $a' = 0, c' = 0$ (т. е. z' —прямая, проходящая через O);
- б) $a' \neq 0, c' = 0$ (т. е. z' —цикл, проходящий через O);
- в) $a' = 0, c' \neq 0$ (т. е. z' —прямая, не проходящая через O);
- г) $a' \neq 0, c' \neq 0$ (т. е. z' —цикл, не проходящий через O)

— см. рис. 118, а, б; ср. выше, стр. 141.

С другой стороны, если *цикл* Z имеет уравнение

$$y = \alpha x^2,$$

то симметрия относительно *цикла* Z (инверсия 2-го рода) переводит точку $A(x, y)$ плоскости Галилея в такую точку $A'(x', y')$ или $A'(x, y')$ проходящей через точку A особой прямой $x = \text{const}$, что отрезок AA' делится пополам в точке пересечения $P(x, y_1)$ или $P(x, \alpha x^2)$ этой особой прямой с *циклом* Z (рис. 119, а). Отсюда

$$y' - \alpha x'^2 = \alpha x^2 - y,$$

т. е.

$$\begin{aligned} x' &= x, & x &= x', \\ & \text{или} & & \\ y' &= 2\alpha x^2 - y, & y &= 2\alpha x'^2 - y' \end{aligned} \quad (37)$$

(ведь и здесь точка A' переходит обратно в A). Поэтому цикл (или прямую) z с уравнением (1) инверсия 2-го рода (37) переводит

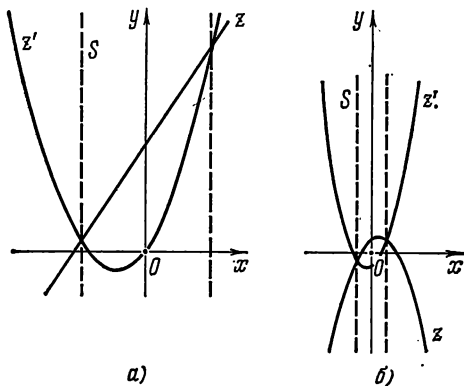


Рис. 118.

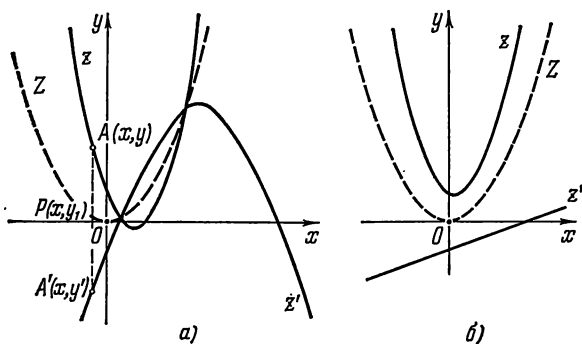


Рис. 119.

в линию z' с уравнением

$$2\alpha x'^2 - y' = \alpha x'^2 + 2bx' + c',$$

т. е. снова в цикл или прямую

$$y = a'x^2 + 2b'x + c', \quad (36')$$

где

$$a' = 2\alpha - a, \quad b' = -b, \quad c' = -c. \quad (366)$$

Таким образом, каждый цикл z кривизны $\rho = 2a$ переводится симметрией относительно цикла Z кривизны $P = 2\alpha$ в цикл z' кривизны

$$\rho' = 2P - \rho \quad (38)$$

(ибо $\rho' = 2a' = 4\alpha - 2a$). В частности, циклы кривизны $\rho = 2R$ симметрия относительно цикла Z переводит в прямые линии (в «циклы нулевой кривизны»), а прямые линии — в циклы кривизны $2R$ (рис. 119, б)¹).

Можно также вывести все эти результаты геометрически, не обращаясь к уравнениям циклов. Для инверсии 1-го рода (симметрии относительно окружности) соответствующие рассуждения

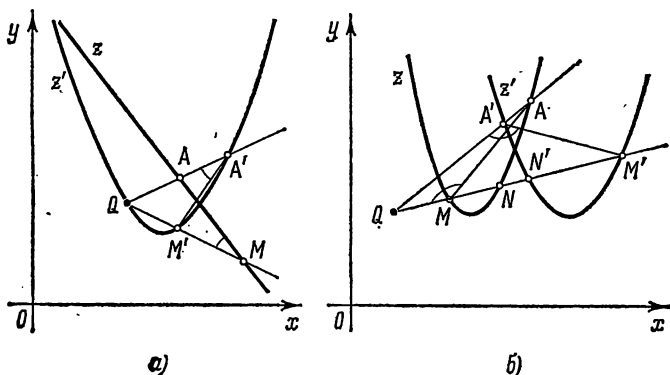


Рис. 120.

почти дословно копируют те, которые мы проводили в евклидовом случае (ср. рис. 120, а, б с рис. 113, а, б на стр. 141). Так, например, здесь также из равенства

$$QA \cdot QA' = QM \cdot QM' \quad (= k)$$

следует, что стороны треугольников QAM и $QM'A'$ рис. 120, а или 120, б пропорциональны:

$$\frac{QA}{QM} = \frac{QM'}{QA'}.$$

Отсюда в силу формул (13) из § 4 (стр. 62) вытекает пропорциональность углов этих треугольников:

$$\frac{\angle QMA}{\angle MAQ} = \frac{\angle M'A'Q}{\angle QM'A'}.$$

А так как в обозначениях рис. 120, а, б

$$\angle MAQ - \angle QMA = \angle QM'A' - \angle M'A'Q \quad (= \angle MQA),$$

¹) Можно показать, что если симметрия относительно цикла Z переводит цикл z в прямую z' , то z' есть радикальная ось циклов Z и z ; доказательство этого мы предоставим читателю провести самостоятельно.

то мы снова приходим к соотношению

$$\angle QA'M' = \angle AMQ, \quad (34)$$

из которого вытекает, что изображенную на рис. 120, а прямую z инверсия 1-го рода переводит в цикл z' , а цикл z' — обратно в прямую z . Аналогично доказывается и то, что в случае, изображенном на рис. 120, б, цикл z переходит в цикл z' и наоборот. Наконец, в точности как в евклидовом случае, показывается, что если инверсия 1-го рода переводит (гладкую) линию Γ в линию Γ' , то в соответствующих друг другу при этой инверсии точках A и A' эти

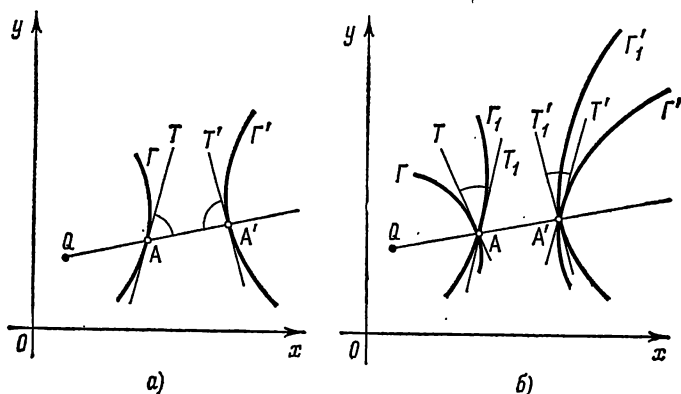


Рис. 121.

линии образуют с прямой QA одинаковые по величине (но обратные по знаку!) углы, т. е. что в обозначениях рис. 121, а

$$\angle QAT = \angle T'A'Q$$

(ср. с рис. 114, а, стр. 143). А отсюда уже выводится конформность инверсии 1-го рода: *если инверсия 1-го рода переводит пересекающиеся в точке A линии Γ и Γ_1 в пересекающиеся в точке A' линии Γ' и Γ'_1 и если AT , AT_1 и $A'T'$, $A'T'_1$ — соответственно касательные в точке A к Γ и Γ_1 и в точке A' к Γ' и к Γ'_1 (рис. 121, б), то*

$$\angle TAT_1 = \angle T'_1A'T'.$$

В частности, *касающиеся между собой линии (например, касающиеся циклы) инверсия 1-го рода переводит в касающиеся линии (в касающиеся циклы).*

Совершенно по-другому приходится рассуждать в случае инверсии 2-го рода (симметрии относительно цикла Z). Пусть симметрия относительно цикла Z переводит точки A , M , N в точки A' , M' ,

N' и пусть P, Q, R — точки пересечения особых прямых AA', MM' и NN' с циклом Z ; точки пересечения прямых $AM, A'M'$ и PQ с особой прямой NN' обозначим через X, Y и U (рис. 122). Прямая PQ , соединяющая середины P и Q оснований AA' и MM' трапеции $AA'M'M$, делит, очевидно, пополам и параллельный основаниям трапеций отрезок XU (ибо PQ есть медиана треугольника с основаниями MM' и боковыми сторонами $M'A'$ и MA , если $M'A' \parallel MA$; если же $M'A' \parallel MA$, то и $PQ \parallel AM \parallel A'M'$).

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} N'Y &= N'U + UY = (N'R - UR) + UY = \\ &= RN - UR + XU = (UN - UR) - UR + \\ &+ XU = (XU + UN) - 2UR = XN - 2UR. \end{aligned}$$

Разделив обе части равенства $N'Y = XN - 2UR$ на длину отрезка $A'N'$ ($= AN = PR$) и воспользовавшись тем, что в силу определения углов в геометрии Галилея

$$\begin{aligned} \frac{N'Y}{A'N'} &= \angle N'A'M', \quad \frac{XN}{AN} = \angle MAN \text{ и} \\ \frac{UR}{PR} &= \angle QPR, \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \angle N'A'M' &= \angle MAN - 2 \angle QPR; \\ \angle M'A'N' &= 2 \angle QPR - \angle MAN. \end{aligned} \quad (39)$$

Предположим теперь, что точки M и N закреплены, а точка A пробегает проходящий через M и N цикл (или прямую) z ; в таком случае и точка A' будет пробегать цикл (или прямую) z' : ведь поскольку $\angle MAN = \alpha = \text{const}$ (вписанный угол цикла z , опирающийся на хорду MN) и $\angle QPR = A = \text{const}$ (вписанный угол цикла Z , опирающийся на хорду QR), то и

$$\angle M'A'N' = \alpha' = 2A - \alpha = \text{const}.$$

Заметив затем, что кривизны ρ, ρ' и R циклов z, z' и Z в силу определения (4') из § 6 (стр. 90) равны $2 \frac{\alpha}{s}, 2 \frac{\alpha'}{s}$ и $2 \frac{A}{s}$, где $s = MN = M'N' = QR$, мы придем к соотношению (38). Наконец, для того чтобы доказать конформность инверсии 2-го рода, достаточно предположить, что в соотношении (39) точки A и N закреплены, а точка M перемещается по какой-то линии γ ,

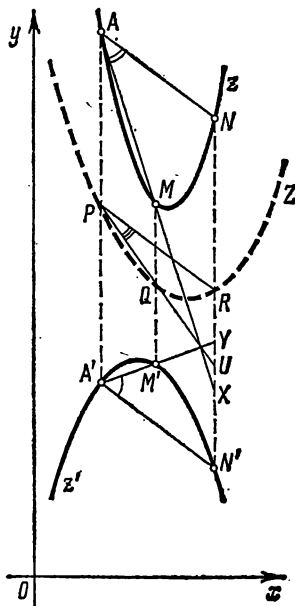


Рис. 122.

стремясь к точке A (рис. 123, а); в пределе мы получим

$$\angle t'A'N' = 2 \angle TPR - \angle tAN,$$

где At , $A't'$ и PT — касательные в точках A , A' и P соответственно к линии γ , к линии γ' (в которую переводит наша инверсия линию γ) и к циклу Z . Отсюда вытекает, что если γ и γ_1 — две линии, пересекающиеся в точке A , а γ' и γ'_1 — пересекающиеся в точке A'

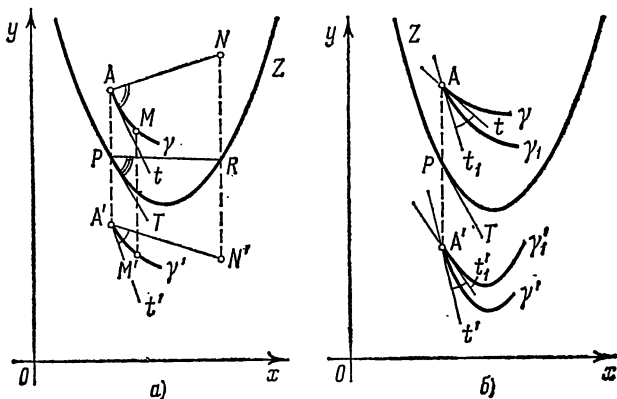


Рис. 123.

линий, в которые инверсия 2-го рода переводит линии γ и γ_1 , если, далее, t , t_1 , соответственно t' , t'_1 — касательные в точке A к γ и к γ_1 и касательные в точке A' к γ' и к γ'_1 (см. рис. 123, б), то

$$\begin{aligned} \angle t'A't'_1 &= \angle t'A'N' - \angle t'_1A'N' = (2 \angle TPR - \angle tAN) - \\ &- (2 \angle TPR - \angle t_1AN) = \angle t_1AN - \angle tAN = \angle t_1At \end{aligned}$$

(на рис. 123, б прямые AN , $A'N'$ и PR не изображены; ср. рис. 123, а). В частности, касающиеся между собой линии (например, касающиеся циклы) инверсия 2-го рода переводит в касающиеся линии (в касающиеся циклы).

Многочисленные применения, которые преобразования инверсии имеют как в евклидовой геометрии¹⁾, так и в геометрии Галилея, мы проиллюстрируем единственным простым примером. Пусть S_1 , S_2 , S_3 и S_4 , соответственно Z_1 , Z_2 , Z_3 и Z_4 — четыре окружности евклидовой плоскости или четыре цикла плоскости Галилея, причем S_1 и S_3 (соответственно Z_1 и Z_3) касаются S_2 и S_4 (Z_2 и Z_4); относительно окружностей мы предположим еще, что S_1 и S_3 , так же

¹⁾ Много примеров использования (евклидовой) инверсии собрано в гл. 2 книги Яглома [10].

как S_2 и S_4 , не имеют общих точек¹⁾ (рис. 124, а, б). Мы утверждаем, что точки A , B , C и D касания этих четырех линий принадлежат одной окружности (соответственно одному циклу).

Для доказательства этого утверждения произведем инверсию (соответственно, инверсию 1-го рода) с центром в точке A касания

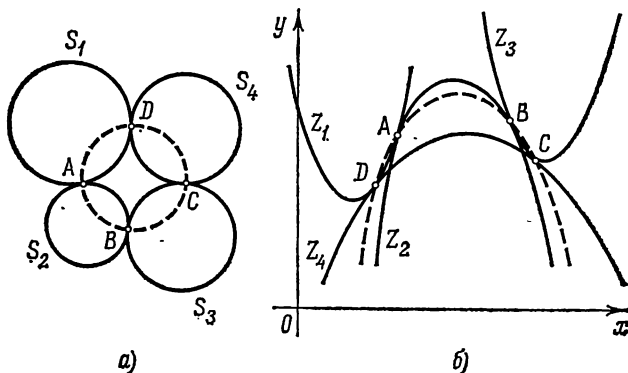


Рис. 124.

S_1 и S_2 (или Z_1 и Z_2) и с какой угодно степенью k . Эта инверсия переводит проходящие через центр инверсии окружности S_1 и S_2 (циклы Z_1 и Z_2) в прямые l_1 и l_2 ; касающиеся окружности S_3 и S_4 (циклы Z_3 и Z_4) переходят при этом в касающиеся окружности S'_3 и S'_4 (циклы Z'_3 и Z'_4), причем S'_3 (соответственно Z'_3) касается l_2 , а S'_4 (соответственно Z'_4) — l_1 (ибо окружность S_3 касалась S_2 , а окружность S_4 касалась S_1 ; соответственно цикл Z_3 касался Z_2 , а цикл Z_4 касался Z_1). Так как окружности S_1 и S_2 (циклы Z_1 и Z_2) не имели отличных от A общих точек, а точка A не имеет образа при инверсии, то прямые l_1 и l_2 не имеют общих точек, т. е. $l_1 \parallel l_2$ (рис. 125, а, б). Проведем еще касательную t к S'_3 и S'_4 (к Z'_3 и Z'_4) в точке C' их касания; точки касания окружностей S'_3 и S'_4 (циклов Z'_3 и Z'_4) с l_2 и с l_1 естественно обозначить через B' и D' ; точки пересечения прямой t с l_1 и с l_2 обозначим через M и N . Треугольники $MC'D'$ и $NC'B'$ будут равнобедренными (ибо

¹⁾ Представляющееся не совсем естественным дополнительное условие, требующее, чтобы рассматриваемые окружности не пересекались, связано с тем, что, по существу, здесь рассматриваются направленные окружности (ср. выше, стр. 89): если никакие две из наших окружностей не пересекаются, то им можно приписать определенные направления с сохранением условия касания окружностей (касающиеся направленные окружности должны иметь в точке соприкосновения одинаковое направление); в противном случае это не всегда можно сделать. На этом примере тоже видно, что геометрия Галилея, циклы которой всегда являются направленными, проще геометрии Евклида.

касательные, проведенные к окружности или циклу из одной точки равны между собой); $\angle C'MD' = \angle C'NB'$ как соответственные углы, образованные секущей t с параллельными прямыми l_1 и l_2 (легко понять, что эти углы равны и в геометрии Галилея). А отсюда вытекает, что $\angle D'C'M = \angle B'C'N$ — в геометрии Евклида эти углы равны $\frac{180^\circ - \alpha}{2}$, а в геометрии Галилея они равны $\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \angle C'MD' = \angle C'NB'$. Но из того, что $\angle D'C'M = \angle B'C'N$ и

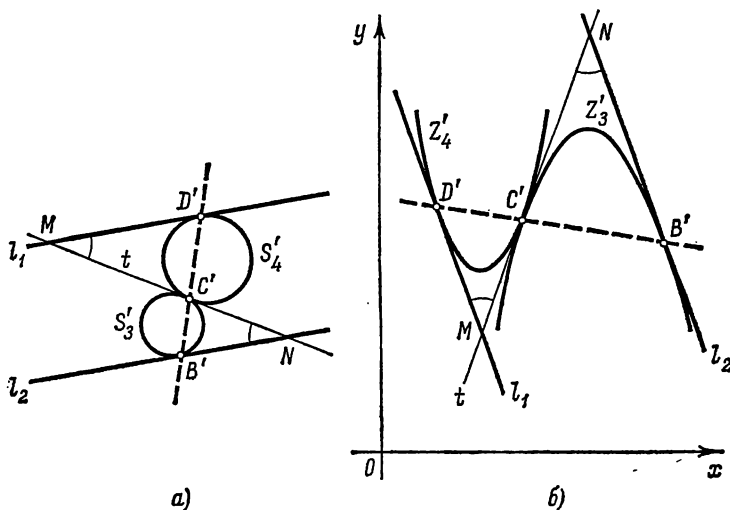
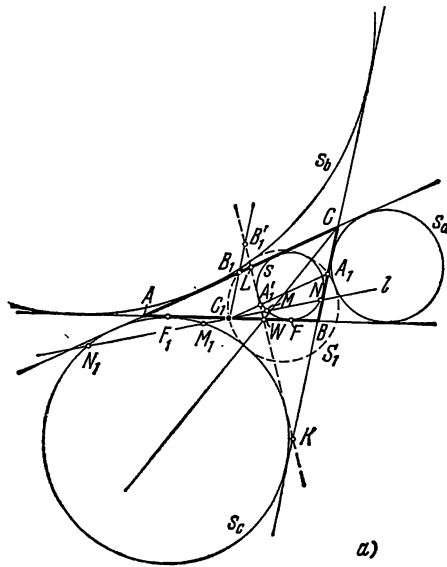


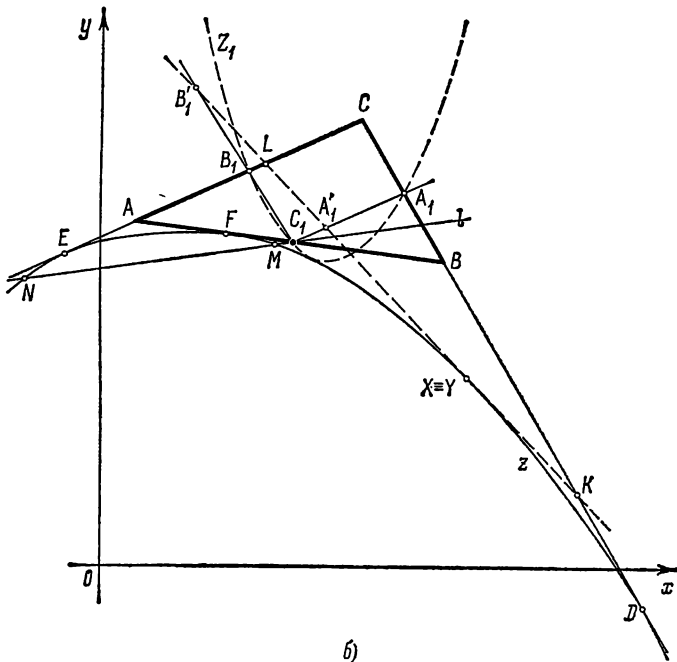
Рис. 125.

в геометрии Евклида и в геометрии Галилея следует, что $B'C'D'$ — это *одна прямая*. Таким образом, наша инверсия с центром A переводит точки B , C и D в точки B' , C' и D' , принадлежащие одной прямой, откуда вытекает, что исходные три точки B , C и D принадлежат одной окружности (соответственно, одному циклу), проходящей (проходящему) через центр A инверсии, т. е. что *точки A , B , C и D принадлежат одной окружности (одному циклу)*.

Вот еще один пример использования инверсии для доказательства теорем. Покажем, что *окружность шести (девяти) точек треугольника евклидовой плоскости касается вписанной и трех внеписанных окружностей, а цикл шести точек треугольника плоскости Галилея касается вписанного цикла треугольника* (ср. выше, стр. 121). Пусть F — точка касания со стороной AB треугольника ABC вписанной в этот треугольник окружности s , соответственно вписанного цикла z ; F_1 — точка касания с AB внеписанной окружности s_c ; C_1 — середина стороны AB (рис. 126, а, б; здесь и ниже сохранены обозначения стр. 119 — 126). Нетрудно убедиться, что в евклидовом случае $C_1F = C_1F_1 = \frac{b-a}{2}$, где a , b , c — длины сторон треугольника (см. стр. 125); также и в



a)



b)

Рис. 126.

геометрии Галилея $FC_1 = \frac{b-a}{2}$ (см. стр. 124). Произведем теперь инверсию (инверсию 1-го рода) с центром в точке C_1 и степенью $k = C_1F_2^2 (=C_1F_1^2)$. Если проходящая через точку C_1 прямая l пересекает окружность s (цикл z) в точках M и N (а окружность s_c — в точках M_1 и N_1), то в силу определения степени точки относительно окружности (цикла)

$$C_1M \cdot C_1N = C_1F^2 \quad (\text{и } C_1M_1 \cdot C_1N_1 = C_1F_1^2);$$

поэтому рассматриваемая инверсия переводит точку M в точку N и наоборот (а точку M_1 — в точку N_1 и наоборот). Отсюда следует, что *окружности s и s_c (цикл z) наша инверсия переводит в себя*. С другой стороны, окружность шести точек C_1 (цикл шести точек Z_1) проходит через центр C_1 инверсии и через середины B_1 и A_1 сторон AC и BC ; поэтому *инверсия переводит окружность S_1 (цикл Z_1) в прямую $A_1'B_1'$, проходящую через такие точки B_1' и A_1' лучей C_1B_1 и C_1A_1 , что 1)*

$$B_1'C_1 = \frac{k}{B_1C_1} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 : \frac{a}{2} = \frac{(b-a)^2}{2a} \quad \text{и} \quad C_1A_1' = \frac{k}{C_1A_1} = \frac{(b-a)^2}{2} : \frac{b}{2} = \frac{(b-a)^2}{2b},$$

т. е. что B_1' и A_1' — образы точек B_1 и A_1 при инверсии. Докажем теперь, что *прямая $A_1'B_1'$ касается окружностей s и s_c (касается цикла z)*; отсюда и будет следовать, что *окружность S_1 касается окружностей s и s_c , соответственно, что цикл Z_1 касается цикла z* .

Точки пересечения прямой $A_1'B_1'$ со сторонами BC и AC треугольника обозначим через K и L . Из сравнения треугольников $A_1A_1'K$ и $C_1A_1'B_1'$, $B_1B_1'L$ и $C_1B_1'A_1'$, очевидно, следует, что

$$\frac{A_1K}{A_1'A_1} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1'} \quad \text{и} \quad \frac{B_1B_1}{B_1L} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1'}.$$

Но $\frac{B_1C_1}{C_1A_1'} = \frac{(b-a)^2}{2a} : \frac{(b-a)^2}{2b} = \frac{b}{a}$ и (см. рис. 126, а, б)

$$A_1'A_1 = C_1A_1 - C_1A_1' = \frac{b}{2} - \frac{(b-a)^2}{2b} = \frac{b^2 - (b-a)^2}{2b} = \frac{a(2b-a)}{2b};$$

$$B_1'B_1 = B_1C_1 - B_1C_1' = \frac{(b-a)^2}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{(b-a)^2 - a^2}{2a} = \frac{b(b-2a)}{2a}.$$

Таким образом, получаем

$$A_1K = \frac{b}{a} \cdot \frac{a(2b-a)}{2b} = b - \frac{a}{2}; \quad B_1L = \frac{a}{b} \cdot \frac{b(b-2a)}{2a} = \frac{b}{2} - a,$$

откуда вытекает, что

$$CK = CA_1 + A_1K = \frac{a}{2} + \left(b - \frac{a}{2}\right) = b \quad \text{и} \quad LC = B_1C - B_1L = \frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2} - a\right) = a.$$

1) Здесь и далее длины a , b , c сторон треугольника считаются положительными; мы исходим также из рис. 126, а, б, где $b > 2a$, так что все фигурирующие ниже выражения (длины тех или иных отрезков) положительны (для того чтобы сделать рассуждения полностью не зависящими от чертежа, надо ввести в рассмотрение направленные отрезки).

Далее удобно вести доказательство по-разному для двух случаев, изображенных на рис. 126, *a* и *б*. В евклидовом случае треугольники CAB и CKL (где $CA=CK=b$ и $CB=CL=a$) переходят один в другой при симметрии относительно биссектрисы CW угла ACB . Но ясно, что поскольку прямая CW проходит через центры окружностей s и s_c , то при рассматриваемой симметрии обе эти окружности переходят в себя; поэтому прямая KL рис. 126, *a* касается s и s_c (ибо, скажем, прямую AB и окружность s , касающиеся друг друга; симметрия относительно CW переводит в прямую KL и окружность s , которые также должны касаться).

В галилеевом случае можно воспользоваться тем, что прямые CB и CA касаются цикла z в таких точках D и E и что $CD=EC=c$ (см. формулу (13) на стр. 113). Проведем теперь из точек K и L касательные KX и LY к циклу z , отличные от KD и LE . Очевидно, что

$$XK=KD=CD-CK=c-b=a \quad \text{и} \quad LY=EL=EC-LC=c-a=b,$$

Но так как

$$LK=CK+LC=a+b,$$

то

$$LY+XK=LK,$$

откуда и следует, что точки X и Y совпадают (ибо эти точки не могут принадлежать одной особой прямой — ведь каждая особая прямая является диаметром цикла и встречает цикл в единственной точке). Из доказанного и вытекает, что прямая LK рис. 126, *б* касается в точке $X \equiv Y$ цикла z , чем завершается доказательство.

В заключение остановимся еще на некоторых принципиальных вопросах, связанных с преобразованием инверсии. Выше мы видели, что евклидова инверсия переводит каждую точку A плоскости, отличную от центра инверсии Q , в некоторую точку A' ; при этом центр Q инверсия не переводит ни в одну точку плоскости (ибо равенство

$$QA \cdot QA' = k \tag{31}$$

при $QA=0$ приводит к бессмысленному «равенству» $QA'=\infty$). Таким образом, строго говоря, инверсия не является преобразованием всей (евклидовой) плоскости: на самом деле следует считать, что областью определения («полем действия») преобразования инверсии является плоскость с одной исключенной («выколотой») точкой — центром инверсии Q . Это обстоятельство сильно осложняет все связанные с инверсией рассуждения; выше мы просто закрывали глаза на все эти трудности, отчего они, разумеется, вовсе не переставали существовать. Так, например, мы не имеем права говорить, что прямая l , не проходящая через центр инверсии Q , переходит при инверсии в окружность s (ср. стр. 141—142, в частности, рис. 113, *a*): ведь в точку Q окружности s не переходит ни как ая точка прямой l ; поэтому на самом деле следовало бы сказать, что прямая l переходит в окружность s с выколотой точкой Q (рис. 127, *a*). Даже более простое утверждение о том, что проходящая через Q прямая l_1 переходит в себя, тоже является нестрогим: более правильно было

бы сказать, что *прямая* l_1 с *выколотой* точкой Q переходит в себя (рис. 127, б); точка же Q вообще никуда не переходит и при использовании инверсии ее следует считать «несуществующей». А если в наших рассмотрениях используется несколько инверсий (довольно частый случай в основанных на применении инверсии задачах!), то геометрический образ, который должен быть положен в основу всех

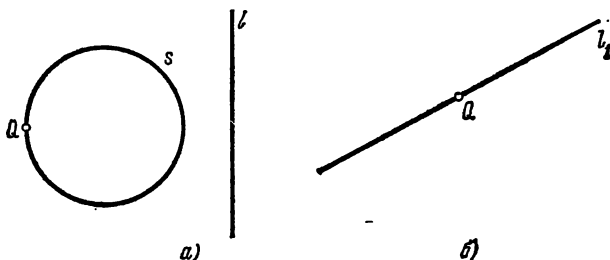


Рис. 127.

построений, будет представлять собой совсем уж непривычную «исклолотую» плоскость — из плоскости надо будет исключить не только центры используемых инверсий, но и точки, которые каким-нибудь из применяемых преобразований переводятся в «несуществующие» центры инверсий¹⁾.

Для устранения всех этих затруднений удобнее всего поступить следующим образом. Вместо того чтобы исключать из плоскости те или иные точки, дополним плоскость еще одной (фиктивной, т. е. с точки зрения элементарной геометрии несуществующей) точкой Ω — «бесконечно удаленной точкой» плоскости. Мы будем считать, что инверсия с центром Q переводит точку Q в бесконечно удаленную точку Ω , а Ω переводит в Q ; это хорошо согласуется с равенством (31), в силу которого из $QA=0$ следует $QA'=\infty$ и наоборот. Евклидова плоскость, дополненная одной бесконечно удаленной точкой Ω , и является «полем действия» инверсии — к каждую точку A «расширенной» плоскости (включая центр инверсии Q и бесконечно удаленную точку Ω) инверсия переводит в строго определенную точку A' ; обратно, точку A' она переводит в точку A . Так как инверсия обладает «круговым свойством» — окруж-

¹⁾ Так, например, приходится считать, что последовательность двух действующих друг за другом инверсий с центрами Q и Q_1 является преобразованием плоскости с тремя выколотыми точками: точкой Q (ведь первая инверсия не переводит Q ни в какую точку плоскости); точкой Q_1' , которую первая инверсия переводит в Q_1 (точку Q_1 не переводит ни в какую точку плоскости вторая инверсия); точкой Q' , которую вторая инверсия переводит в (исключенную уже ранее, т. е., так сказать, «несуществующую») точку Q (и в которую вторая инверсия переводит точку Q).

ности (точнее, обыкновенные окружности и «окружности бесконечно большого радиуса», т. е. прямые) она переводит снова в окружности, — то являющуюся полем действия инверсии плоскость с одной бесконечно удаленной точкой Ω называют (евклидовой) **круговой плоскостью**¹⁾. При этом, поскольку не проходящая через центр инверсии Q прямая l переходит при инверсии в проходящую через точку Q окружность S , а точка Q является образом бесконечно

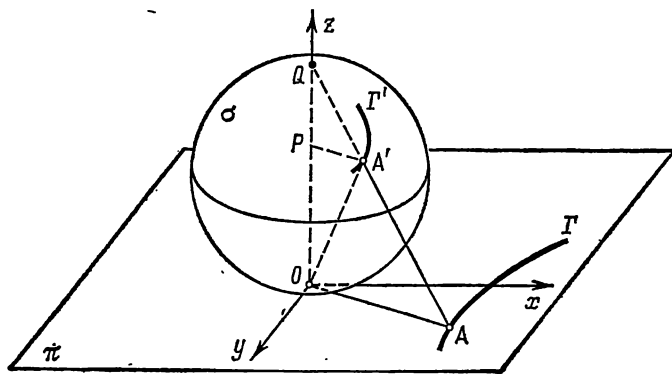


Рис. 128.

удаленной точки Ω , то естественно считать, что каждая прямая l «проходит» через бесконечно удаленную точку Ω ; образом такой дополненной точкой Ω прямой будет полная окружность. Это соглашение снимает также и все затруднения, связанные с вопросом о преобразовании при инверсии прямой l_1 , проходящей через центр Q этой инверсии: эта прямая переходит при инверсии сама в себя, причем точка Q прямой l_1 переходит в ее точку Ω , а точка Ω — в точку Q .

Наглядное представление круговой плоскости очень облегчает стереографическая проекция — центральная проекция плоскости π на сферу σ из точки Q , принадлежащей сфере σ ; при этом еще удобно считать, что сфера σ касается плоскости π в точке O , диаметрально противоположной точке Q (рис. 128). Ясно, что каждой точке A плоскости π стереографическая проекция сопоставляет единственную точку A' сферы σ ; однако обратное соответствие между точками сферы σ и точками плоскости π не является полным, ибо центру Q проекции не отвечает никакая точка плоскости. Заметим теперь, что если мы будем двигаться по какой угодно линии Γ плоскости, удаляясь «в бесконечность», то образ A' точки A линии Γ будет стремиться к центру проекции Q ; это обстоятельство

¹⁾ См. по этому поводу Яглом и Атанасян [11], стр. 56—59.

делает уместным соглашение, по которому точке Q сферы σ отвечает в силу стереографической проекции бесконечно удаленная точка Ω плоскости π . Таким образом, стереографическая проекция осуществляет отображение круговой плоскости π на сферу σ и, следовательно, сфера σ является естественным образом круговой плоскости.

Стереографическая проекция обладает тем замечательным свойством, что она переводит окружности плоскости (к числу которых здесь причисляются также и «окружности бесконечно большого радиуса» — прямые) в окружности сферы (т. е. в сечения сферы плоскостями); при этом прямые переходят в окружности, проходящие через точку Q — образ бесконечно удаленной точки Ω . Последнее обстоятельство проливает дополнительный свет на соглашение о том, что все прямые («окружности» бесконечно большого радиуса) плоскости π проходят через точку Q .

Это свойство стереографической проекции проще всего установить аналитически. Пусть стереографическая проекция переводит точку $A(x, y)$ плоскости π (плоскости xOy) в точку $A'(X, Y, Z)$ сферы σ , записываемой (в системе координат $Oxyz$) уравнением

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 - z = 0, \quad (40)$$

— сферы диаметра 1, касающейся плоскости xOy (совпадающей с плоскостью π) в начале координат $O(0, 0, 0)$; за центр проекции примем точку $Q(0, 0, 1)$, диаметрально противоположную точке O (см. тот же рис. 128). Так как (прямоугольные) треугольники QOA и $QA'O$ с общим углом Q подобны, то высоты OA' и $A'P$ этих треугольников пропорциональны их гипотенузам QA и QO . Но

$$A'P = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{и} \quad OA' = \sqrt{OP^2 + A'P^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

далее

$$QO = 1 \quad \text{и} \quad QA = \sqrt{OA^2 + QO^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{1}, \quad \text{или} \quad \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2} = x^2 + y^2 + 1,$$

или, наконец,

$$\frac{Z^2}{X^2 + Y^2} = x^2 + y^2. \quad (41)$$

Заметим еще, что проекция луча PA' на плоскость π совпадает с лучом OA ; поэтому $X = \lambda x$, $Y = \lambda y$. Подставив эти выражения в формулу (41), мы находим также

$$Z = \sqrt{(X^2 + Y^2)(x^2 + y^2)} = \lambda(x^2 + y^2).$$

А теперь из уравнения (40) сферы σ , которому удовлетворяют координаты X, Y, Z точки A' , следует

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 (x^2 + y^2)^2 - \lambda (x^2 + y^2) = 0, \text{ т. е. } \lambda = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Итак, окончательно получаем

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \\ Y &= \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \\ Z &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}; \end{aligned} \quad (42)$$

поэтому

$$1 - Z = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (42a)$$

Но из формул (42)—(42a) вытекает, что окружность (или прямую) s плоскости π с уравнением

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (33)$$

стереографическая проекция переводит в множество s' таких точек $A'(X, Y, Z)$ сферы σ , что

$$aZ + 2b_1X + 2b_2Y + c(1 - Z) = 0,$$

т. е. в окружность, получающуюся в сечении сферы (40) плоскостью

$$az + 2b_1x + 2b_2y + c(1 - z) = 0. \quad (43)$$

При этом, если в уравнении (33) $a = 0$, т. е. рассматриваемая «окружность» s на самом деле является прямой линией, то и в уравнении (43) $a = 0$, т. е. это уравнение имеет вид

$$2b_1x + 2b_2y - cz + c = 0, \quad (43a)$$

и, следовательно, соответствующая окружность s' содержит точку $Q(0, 0, 1)$, принадлежащую как сфере (40), так и плоскости (43a).

Несколько более сложным является соответствующее чисто геометрическое рассуждение. Прежде всего совершенно ясно, что *прямой l плоскости π в силу стереографической проекции отвечает сечение сферы σ плоскостью, проходящей через центр проекции Q и через прямую l , т. е. проходящая через точку Q окружность l' сферы σ* (рис. 129; также каждой проходящей через точку Q окружности l' сферы σ отвечает прямая l плоскости π , являющаяся линией пересечения плоскости окружности l' с плоскостью π).

Пусть теперь s — окружность плоскости π с центром K , A — произвольная точка этой окружности, A' — отвечающая точке A точка сферы σ (рис. 130). Обозначим еще через K_1 точку пересечения касательной плоскости τ к сфере σ

в точке A' с прямой QK (рис. 130, а; изображенный на рис. 130, б случай, когда плоскость τ параллельна прямой QK , мы рассмотрим отдельно). Пусть π_0 и π_1 — плоскости, параллельные плоскости π и проходящие через точки Q и K_1 соответственно; пусть, далее, K_0 и A_1 — точки пересечения этих

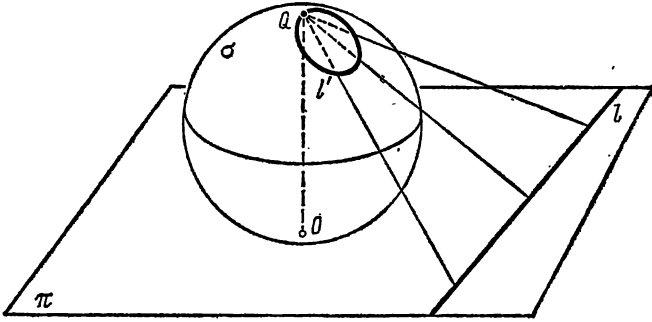


Рис. 129.

плоскостей с прямыми $A'K_1$ и QA . Из подобия треугольников QKA и QK_1A_1 , очевидно, следует

$$\frac{K_1A_1}{QK_1} = \frac{KA}{QK}, \quad \text{т. е.} \quad K_1A_1 = \frac{QK_1}{QK} \cdot KA = \frac{QK_1}{QK} r,$$

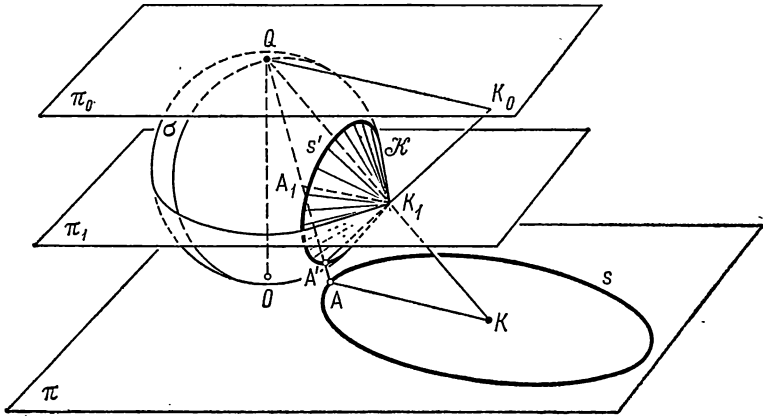
где r — радиус окружности s . С другой стороны, из того, что треугольник $K_1A'A_1$ подобен равнобедренному треугольнику $K_0A'A_1$ (ведь K_0A' и K_0Q — касательные, проведенные к сфере σ из одной точки K_0), вытекает, что треугольник $K_1A'A_1$ также равнобедренный:

$$K_1A' = K_1A_1 = \frac{QK_1}{QK} r.$$

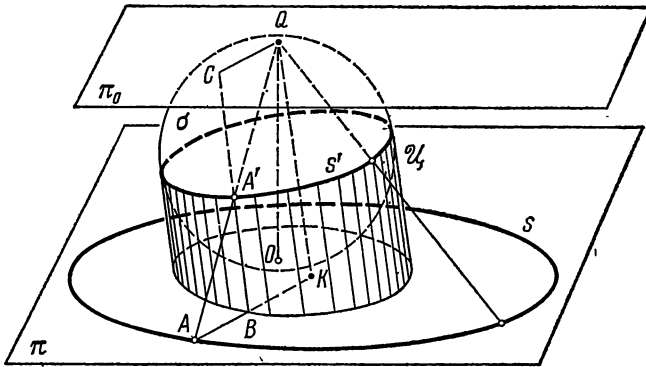
Таким образом, мы видим, что длина K_1A' касательной, проведенной из точки K_1 к сфере σ , не зависит от выбора точки A окружности s ; отсюда следует, что и точка K_1 будет одной и той же для всех точек A окружности s , ибо при приближении точки K_1 к σ или удалении от σ по прямой QK длина проведенной из этой точки касательной к сфере меняется. Итак, отвечающие точкам окружности s точки A' сферы σ суть точки соприкосновения со сферой σ касательных; проведенных к ней из фиксированной точки K_1 . Ясно, что множество всех таких точек представляет собой *окружность*, по которой соприкасается со сферой σ описанный вокруг σ конус \mathcal{K} с вершиной K_1 . Обращая эти рассуждения, можно также показать, что (не проходящей через точку Q) «малой окружности» s' сферы σ , которую можно рассматривать как линию соприкосновения со сферой σ описанного вокруг нее конуса \mathcal{K} с некоторой вершиной K_1 , отвечает в силу стереографической проекции *окружность с плоскости* π с центром в точке K пересечения прямой QK_1 с плоскостью π .

Пожалуй, еще проще случай, когда плоскость τ параллельна прямой QK . Обозначим точки пересечения прямой, проходящей через точку A' параллельно QK , с плоскостью π и с фигурировавшей выше плоскостью π_0 через B и C ; так как $A'B \parallel QK$, то точка B принадлежит прямой KA (рис. 130, б). Из подобия треугольника BAA' и равнобедренного треугольника CQA' (ибо CA' и CQ — касательные, проведенные к сфере σ из одной точки C) следует, что $BA' = BA$; из подобия треугольника ABA' и треугольника AKQ вытекает,

что $KQ = KA$. Обратно, из равенства $KQ = KA$ (не зависящего, очевидно, от выбора точки A окружности s) вытекает, что если BC — проходящая через точку A' прямая, параллельная KQ , то $CA' = CQ$ (см. рис. 130, б), т. е. CA' — касательная к сфере σ . Таким образом, в этом случае (характеризующемся равенством $KQ = KA = r$) множество s' точек A' представляет собой линию



а)



б)

Рис. 130.

соприкосновения сферы σ с описанным вокруг σ цилиндром C , образующие которого параллельны QK ; поэтому и здесь s' — окружность. Обращая эти рассуждения, можно точно так же показать, что *стереографическая проекция переводит (не проходящую через точку Q) «большую окружность» s' сферы σ , являющуюся линией соприкосновения сферы с описанным вокруг нее цилиндром C , в окружность s плоскости π с центром в такой точке K , что QK параллельно образующим цилиндра, и радиусом $r = QK$.*

Доказанное свойство стереографической проекции позволяет использовать ее для представления «круговых преобразований» плоскости, т. е. преобразований, обладающих «круговым свойством», аналогичным свойству инверсий (см. стр. 158—159). Рассмотрим, например, симметрию сферы σ относительно горизонтальной диаметальной

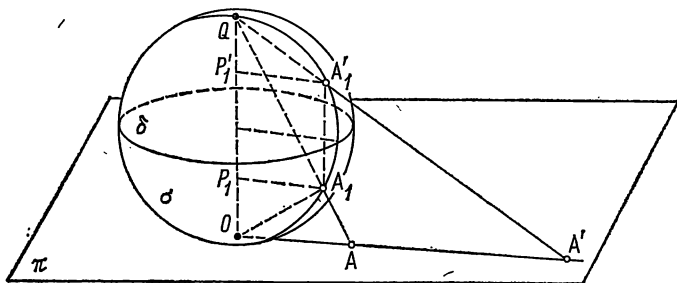


Рис. 131.

плоскости δ , т. е. преобразование, переводящее каждую точку A_1 сферы σ в такую точку A'_1 сферы, что $A_1A'_1 \perp \delta$ (рис. 131). Ясно, что это преобразование переводит окружности сферы снова в окружности; поэтому порожденное им преобразование плоскости π — преобразование, переводящее точку A плоскости π , отвечающую точке A_1 , в точку A' , отвечающую точке A'_1 , — будет обладать «круговым свойством». Нетрудно выяснить, что представляет собой это преобразование плоскости π . Ясно, что точка A' принадлежит прямой OA , являющейся линией пересечения плоскости π и проходящей через QO и $A_1A'_1$ плоскости $\epsilon \perp \pi$. Если P_1 и P'_1 — проекции точек A_1 и A'_1 на прямую QO , то из подобия треугольников QA_1P_1 и QAO , $QA'_1P'_1$ и $QA'O$, очевидно, следует

$$OA = P_1A_1 \cdot \frac{QO}{QP_1} = \frac{P_1A_1}{QP_1} \quad \text{и} \quad OA' = P'_1A'_1 \cdot \frac{QO}{QP'_1} = \frac{P_1A_1}{P_1O}$$

(ибо $QO = 1$, $P'_1A'_1 = P_1A_1$ и $QP'_1 = P_1O$). С другой стороны, поскольку треугольник QA_1O прямоугольный (ибо опирающийся на диаметр QO сферы σ угол QA_1O прямой), то $A_1P_1^2 = QP_1 \cdot P_1O$ и, значит,

$$OA \cdot OA' = \frac{P_1A_1^2}{QP_1 \cdot P_1O} = 1.$$

Таким образом, если точка A'_1 сферы σ получается из точки A_1 симметрией относительно плоскости δ , то (отвечающая точке A'_1) точка A' плоскости π получается из (отвечающей точке A_1) точки A инверсией с центром O и степенью 1.

Представление инверсии в виде симметрии сферы σ , на которую плоскость π отображена с помощью стереографической проекции, очень удобно для изучения свойств инверсии; если (как иногда поступают) принять это представление за определение инверсии, то как «круговое свойство» инверсии, так и ее

конформность могут быть выведены из свойств стереографической проекции. Стереографическая проекция очень полезна и для изучения свойств произвольных «круговых преобразований» — преобразований (круговой!) плоскости π , переводящих каждую окружность или прямую снова в окружность или прямую. Используя стереографическую проекцию, можно доказать теорему: *каждое круговое преобразование (круговой) плоскости π , отличное от преобразования подобия, представляет собой инверсию, сопровождаемую еще, быть может, преобразованием подобия*. На доказательстве этой теоремы, иногда называемой основной теоремой теории круговых преобразований, мы здесь не остановимся ¹⁾.

Перейдем теперь к геометрии Галилея. Здесь положение оказывается еще более сложным, чем в случае евклидовой геометрии: инверсию 1-го рода с центром Q и какой угодно степенью k нельзя

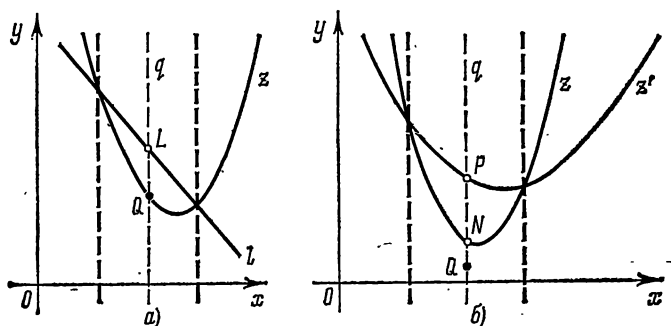


Рис. 132.

считать преобразованием плоскости Галилея, поскольку существует много точек, которые эта инверсия не переводит ни в какие точки плоскости: таковы все точки, удаленные от точки Q на нулевое расстояние, т. е. все точки особой прямой q , проходящей через центр инверсии Q . Это обстоятельство очень осложняет все связанные с инверсией 1-го рода рассуждения. Так, например, строго говоря, надо считать, что эта инверсия, являющаяся преобразованием плоскости Галилея с вырезанной из нее прямой q , переводит не проходящую через центр инверсии Q (обыкновенную) прямую l , из которой исключена точка L ее пересечения с прямой q , в цикл z , из которого также исключена точка Q его пересечения с прямой q (рис. 132, а; ср. с рис. 118, а на стр. 148). Аналогично этому проходящую через точку Q прямую t с выколотой точкой Q рассматриваемая инверсия переводит в ту же прямую с той же выколотой точкой; не проходящий через точку Q цикл z , из которого исключена точка N его пересечения с прямой q , — в цикл z' , из которого также исключена точка P его пересечения с прямой q (ср. рис. 132, б с рис. 118, б):

¹⁾ См., например, Яглом [10], стр. 247—253.

Еще сложнее будут выглядеть геометрические образы, с которыми мы столкнемся в случае последовательного выполнения двух или нескольких инверсий.

После сказанного об евклидовой геометрии нам уже нетрудно понять, как можно устранить возникшие затруднения. Дополним плоскость Галилея «бесконечно удаленными точками» и условимся считать, что в эти точки инверсия 1-го рода переводит точки прямой q ; название «бесконечно удаленные» хорошо согласуется с тем обстоятельством, что в силу соотношения

$$QA \cdot QA' = k \quad (31)$$

при приближении точки A к прямой q (при стремлении к нулю расстояния QA) точка A' неограниченно удаляется от точки Q (расстояние QA' неограниченно растет). Поскольку все проходящие через точку Q циклы (и прямые) наша инверсия переводит в прямые, естественно считать, что

все (обыкновенные) прямые плоскости Галилея «проходят» через бесконечно удаленную точку Ω , в которую инверсия переводит точку Q . Пусть, далее, цикл z пересекает прямую q в точке N , где $QN = n$. Если центр инверсии Q совпадает с началом координат O системы xOy (рис. 133), то цикл z описывается уравнением

$$y = ax^2 + 2bx + c, \quad (1)$$

которому должна удовлетворять точка $N(0, n)$, т. е. уравнением (1), где $c = n$. Инверсия 1-го рода с центром $O(0, 0)$ и степенью k переводит этот цикл z в цикл z' с уравнением

$$y = a'x^2 + 2b'x + c', \quad (36)$$

где

$$a' = \frac{c}{k} = \frac{n}{k}$$

(см. формулы (36)—(36а), стр. 147), т. е. в цикл z' фиксированной кривизны $\rho' = \frac{2n}{k}$, а цикл z она переводит в z' . Поэтому уместно считать, что все циклы одной и той же кривизны ρ проходят через определенную бесконечно удаленную точку Ω_ρ ; при этом точку N прямой q , удаленную от центра инверсии Q на расстояние $\delta_{QN} = n$, инверсия степени k переводит в точку $\Omega_{\frac{2n}{k}}$.

Таким образом, галилееву плоскость оказывается удобным дополнить множеством бесконечно удаленных точек, в которые переходят при инверсии 1-го рода с центром Q точки особой прямой q , проходящей через Q ; так как каждую особую прямую инверсия переводит снова в особую прямую, то можно говорить о «бесконечно

удаленной особой прямой». Точки этой прямой мы будем обозначать через Ω_ρ , где ρ — произвольное (положительное или неположительное) вещественное число; точку Ω_0 можно обозначать также просто через Ω . При этом все циклы плоскости Галилея, имеющие кривизну ρ , проходят через одну бесконечно удаленную точку, а именно, через точку Ω_ρ ; в частности, «циклы кривизны 0», т. е. прямые, проходят

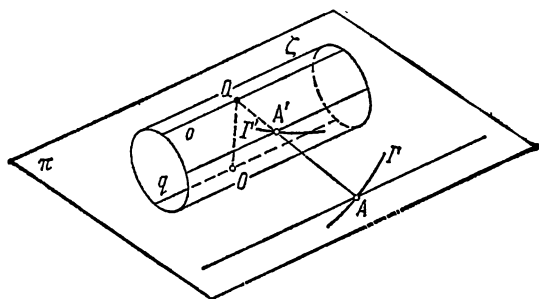


Рис. 134.

через точку $\Omega_0 \equiv \Omega$. Галилееву плоскость, расширенную введением бесконечно удаленных точек Ω_ρ , т. е. дополненную бесконечно удаленной особой прямой, естественно назвать **циклической плоскостью Галилея**; эта плоскость удобна в вопросах теории циклов. Заметим, кстати, что инверсия 2-го рода — симметрия относительно цикла Z кривизны P — переводит цикл кривизны ρ в цикл кривизны $\rho' = 2P - \rho$ (см. формулу (38), стр. 148); это означает, что бесконечно удаленную точку Ω_ρ эта инверсия переводит в бесконечно удаленную точку $\Omega_{2P - \rho}$ (в частности, точку Ω_{2P} она переводит в точку $\Omega \equiv \Omega_0$, а точку Ω — в точку Ω_{2P}).

Наглядно представить себе цилиндрическую плоскость позволяет стереографическая проекция — отображение точек плоскости Галилея π на точки (кругового) цилиндра ζ . Представим себе круговой цилиндр ζ , касающийся плоскости π вдоль особой прямой q , и будем проектировать цилиндр ζ на плоскость π из точки Q цилиндра ζ , диаметрально противоположной какой-то точке O касания цилиндра с плоскостью π и, следовательно, принадлежащей «верхней образующей» o цилиндра (рис. 134). Каждой точке A плоскости π наша стереографическая проекция сопоставляет единственную точку A' цилиндра ζ ; однако обратное соответствие между точками цилиндра и точками плоскости не является полным, так как точкам образующей o цилиндра ζ не отвечают никакие точки плоскости π . Поскольку при стремлении точки A' цилиндра ζ к точке Ω' образующей o образ A точки A' на плоскости π неограниченно удаляется от прямой q , то можно условно считать, что точкам образующей o

отвечают в силу стереографической проекции «бесконечно удаленные точки» плоскости Галилея. Так как каждая образующая цилиндра переводится стереографической проекцией в особую прямую плоскости π , то можно сказать, что стереографическая проекция переводит цилиндр ζ в плоскость π , дополненную одной «бесконечно удаленной особой прямой» — образом образующей o цилиндра; таким

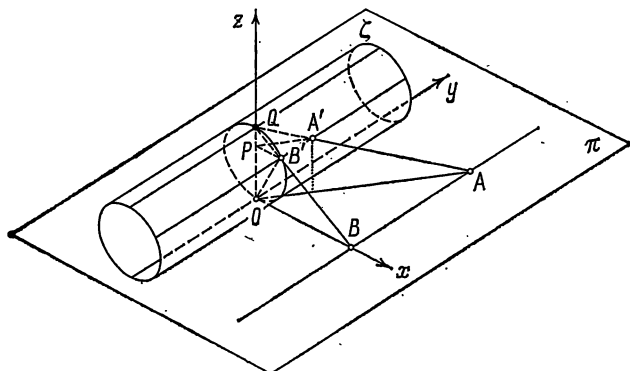


Рис. 135.

образом, стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками цилиндра ζ и точками циклической плоскости Галилея π , в силу чего цилиндр ζ является хорошим образом циклической плоскости.

Сtereoграфическая проекция плоскости π на цилиндр ζ переводит окружности и циклы плоскости Галилея π в плоские сечения цилиндра ζ . Проще всего доказать это свойство стереографической проекции аналитически. Отнесем плоскость π к координатам x и y , а пространство — к координатам x , y и z ; при этом условимся считать, что ось Oy совпадает с прямой q . Диаметр цилиндра ζ мы примем равным 1; за центр проектирования примем точку $Q(0, 0, 1)$ цилиндра, диаметрально противоположную точке $O(0, 0, 0)$ (рис. 135). Уравнение

$$x^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 + z^2 - z = 0 \quad (40')$$

окружности, получающейся в сечении цилиндра ζ плоскостью xOz , будет, очевидно, совпадать с уравнением цилиндра ζ , поскольку сечение цилиндра любой плоскостью $y = \text{const}$ представляет собой точно такую же окружность, как (40'). Пусть теперь стереографическая проекция сопоставляет точке $A(x, y)$ плоскости π точку $A'(X, Y, Z)$ цилиндра ζ ; обозначим еще через $B'(X, 0, Z)$ точку пересечения проходящей через точку A' образующей цилиндра с плоскостью xOz , а через $B(x, 0)$ — точку плоскости π , отвечаю-

щую точке B' цилиндра (рис. 135). Из подобия прямоугольных треугольников QOB' и $QB'O$ с общим углом Q и опущенными на гипотенузы QB и QO высотами OB' и $B'P$ следует, что $OB' : PB' = QB : OQ$, или, так как $OQ = 1$, $PB' = X$, $QB = \sqrt{OB^2 + OQ^2} = \sqrt{x^2 + 1}$ и $OB' = \sqrt{PB'^2 + OP^2} = \sqrt{X^2 + Z^2}$ (ср. выше, стр. 160), — что

$$\frac{\sqrt{X^2 + Z^2}}{X} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{1}, \text{ т. е. } \frac{X^2 + Z^2}{X^2} = x^2 + 1.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\frac{Z}{X} = x \text{ и } Z = xX. \quad (41')$$

Теперь из уравнения (40') цилиндра, которому удовлетворяют координаты точки $A'(X, Y, Z)$, без труда находим

$$X^2 + x^2 X^2 - xX = 0 \text{ и, значит, } X = \frac{x}{x^2 + 1},$$

откуда также следует, что $Z = xX = x^2/(x^2 + 1)$. Наконец, поскольку проекция луча P_1A' на плоскость π совпадает с лучом OA и, значит,

$X : Y = x : y$, то $Y = \frac{y}{x} \cdot X = \frac{y}{x^2 + 1}$. Таким образом, окончательно

получаем

$$X = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad Y = \frac{y}{x^2 + 1}, \quad Z = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad (42')$$

и, значит,

$$1 - Z = \frac{1}{x^2 + 1}. \quad (42'a)$$

Теперь ясно, что окружность или цикл

$$ax^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (2)$$

стереографическая проекция (42') переводит в сечение цилиндра (40') плоскостью

$$az + 2b_1x + 2b_2y + c(1 - z) = 0. \quad (43)$$

При этом, если в уравнении (2) $b_2 = 0$, т. е. линия (2) является окружностью s (или особой прямой), то стереографическая проекция переводит ее в сечение цилиндра ζ плоскостью (43), где также $b_2 = 0$, т. е. плоскостью λ , параллельной оси Oy (параллельной оси цилиндра ζ ; см. рис. 136, а). Если же линия (2) является циклом z (или обыкновенной прямой; другими словами, если в уравнении (2) $b_2 \neq 0$), то стереографическая проекция сопоставляет этой линии

сечение цилиндра ζ плоскостью μ , не параллельной оси (рис. 136, б¹). Всевозможным циклом фиксированной кривизны ρ , т. е. циклом,

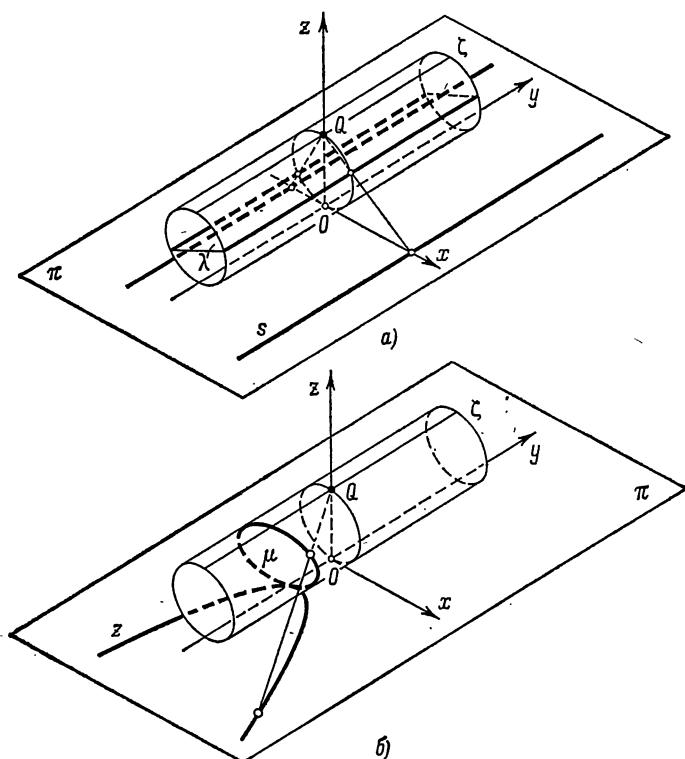


Рис. 136.

в уравнении (2) которых можно положить $b_2 = -1$ и $a = \rho$, отвечают сечения цилиндра ζ плоскостями

$$\rho z + 2b_1 x - 2y + c(1 - z) = 0,$$

пересекающими, очевидно, прямую o с уравнениями $x = 0$, $z = 1$ в точке $R\left(0, \frac{\rho}{2}, 1\right)$, откуда следует, что эту точку R надо считать образом на цилиндре ζ точки Ω , циклической плоскости Галилея π , т. е. надо положить $R \equiv \Omega_\rho$. В частности, все прямые

¹ Линия пересечения цилиндра с такой плоскостью представляет собой эллипс (см., например, п. 15 книги Яглома и Ашкинзуе [56]).

плоскости Галилея—«циклы кривизны 0»—переходят в плоские сечения цилиндра ζ , проходящие через точку $Q(0, 0, 1) (\equiv \Omega'_0)$.

Доказанное свойство стереографической проекции, отображающей плоскость π на цилиндр ζ , очень удобно для исследования с помощью этой проекции «циклических преобразований» плоскости π , т. е. таких преобразований (циклической!) плоскости Галилея, которые переводят циклы плоскости (к числу которых здесь причисляются также «циклы бесконечно большого радиуса» или «циклы

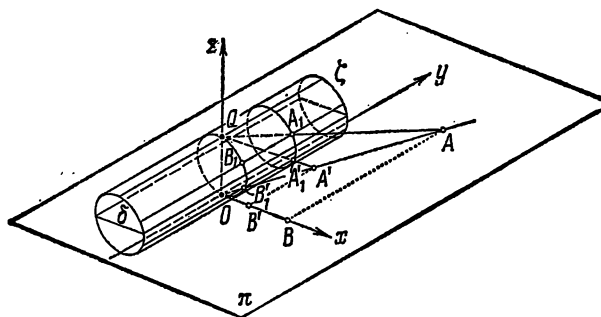


Рис. 137.

нулевой кривизны»—прямые) снова в циклы (или прямые). Рассмотрим, в частности, какое преобразование плоскости отвечает в силу стереографической проекции симметрии цилиндра ζ относительно горизонтальной диаметральной плоскости δ , т. е. преобразованию, переводящему каждую точку A_1 цилиндра ζ в такую его точку A'_1 , что $A_1A'_1 \perp \delta$ (рис. 137). Ясно, что эта симметрия переводит плоские сечения цилиндра снова в плоские сечения цилиндра;

поэтому отвечающее ей преобразование плоскости π , — т. е. преобразование, переводящее точку A плоскости π , соответствующую в силу стереографической проекции точке A_1 цилиндра, в точку A' , соответствующую точке A'_1 цилиндра, — должно переводить циклы в циклы. Поскольку ортогональная проекция обоих лучей QA_1 и QA'_1 на плоскость π совпадает с лучом OA ,

то точка A' принадлежит лучу OA . Далее, из сравнения рис. 137а, изображающего сечение конструкции рис. 137 плоскостью xOz (точки B_1 и B'_1 рис. 137а суть точки пересечения проходящих через A_1 и A'_1 образующих цилиндра ζ с плоскостью xOz , а B и B' — соответ-

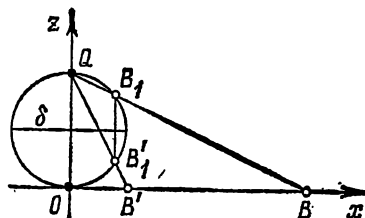


Рис. 137а.

ствующие им в силу стереографической проекции точки плоскости π) с рис. 131 (стр. 164) следует, что

$$OB \cdot OB' = 1,$$

или, так как $AB \parallel Oy$ и $A'B' \parallel Oy$ (вспомним, что называется длиной отрезка в геометрии Галилея!), что

$$OA \cdot OA' = 1.$$

Поэтому преобразование, переводящее A в A' , есть не что иное, как инверсия 1-го рода с центром O и степенью 1.

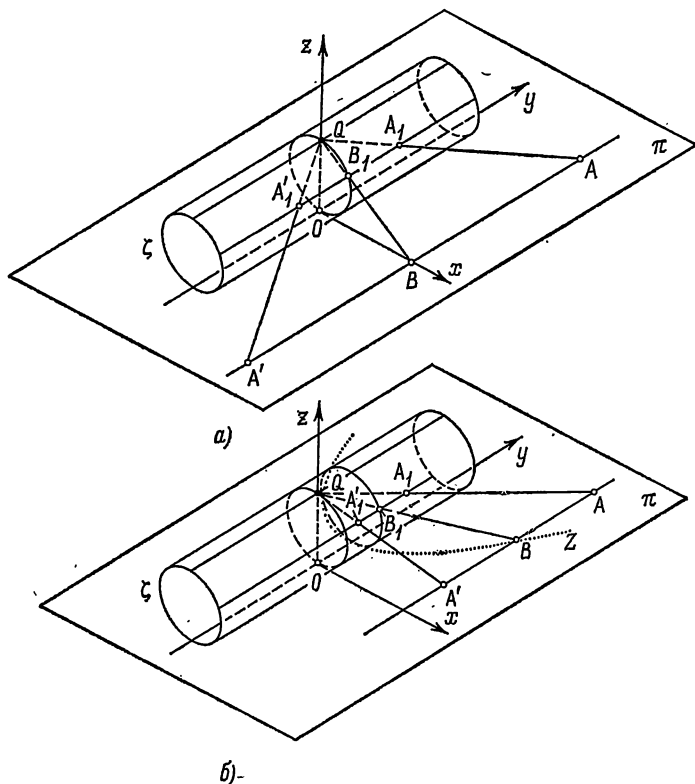


Рис. 138.

Рассмотрим теперь симметрию цилиндра ζ относительно плоскости ε , параллельной плоскости xOz . Прежде всего, совершенно ясно, что если A_1 и A'_1 — точки цилиндра ζ , симметричные друг другу относительно плоскости xOz , то отвечающие им точки A и A' плоскости π будут симметричны друг другу относительно оси Ox (рис.138,а);

таким образом, симметрии цилиндра относительно плоскости xOz на плоскости π отвечает симметрия относительно прямой Ox . Пусть теперь точки A_1 и A'_1 цилиндра ξ симметричны друг другу относительно плоскости ε с уравнением $y = \rho$, параллельной плоскости xOz (рис. 138, б). Из сравнения формул (43) и (2) (стр. 169), следует, что сечению цилиндра ξ плоскостью

$$y - \rho = 0$$

отвечает линия

$$\rho x^2 - y + \rho = 0 \quad \text{или} \quad y = \rho x^2 + \rho \quad (44)$$

плоскости π , т. е. цикл Z кривизны 2ρ . Далее, если B_1 есть точка пересечения прямой $A_1A'_1$ с плоскостью ε , то тройка точек A_1, B_1, A'_1 сбазующей $A_1A'_1$ цилиндра ξ проектируется из центра проекции Q на плоскость π в тройку точек A, B, A' прямой $AA' \parallel Oy$, причем, поскольку $A_1B_1 = B_1A'_1$, то и $AB = BA'$; таким образом, отрезок AA' выделенной прямой плоскости π делится пополам точкой B пересечения этого отрезка с циклом (44). Таким образом, симметрии относительно плоскости ε отвечает инверсия 2-го рода плоскости π — симметрия относительно цикла Z .

Связь инверсии 1-го или 2-го рода на плоскости Галилея с симметрией цилиндра ξ относительно плоскости δ или ε очень удобна для изучения свойств инверсии. Кроме того, подобное представление инверсий и «круговое свойство» стереографической проекции плоскости Галилея на цилиндр позволяют доказать следующую теорему, которую можно назвать основной теоремой теории циклических преобразований плоскости Галилея, отличное от преобразования подобия, представляет собой инверсию 1-го или 2-го рода, сопровождаемую еще, быть может, преобразованием подобия. При этом под преобразованием подобия плоскости Галилея с 1-м коэффициентом подобия k и со 2-м коэффициентом подобия \varkappa здесь понимается такое преобразование плоскости, переводящее точки в точки и прямые в прямые, при котором все расстояния увеличиваются в k раз, а все углы увеличиваются в \varkappa раз, т. е. преобразование, переводящее точки A и B в такие точки A' и B' , а прямые a и b в такие прямые a' и b' , что

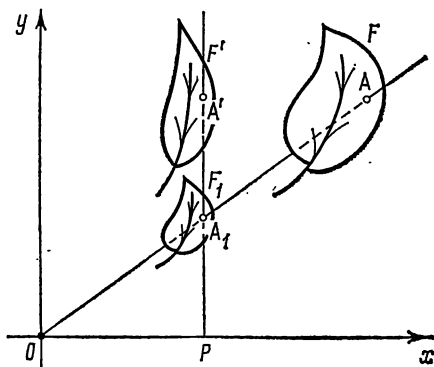


Рис. 139.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{d_{A'B'}}{d_{AB}} = k; \quad \frac{\angle(a', b')}{\angle(a, b)} = \frac{\delta_{a'b'}}{\delta_{ab}} = \varkappa;$$

здесь числа k и \varkappa могут быть положительными или отрицательными. [Примером такого общего преобразования подобия может служить преобразование,

получаемое в результате последовательного выполнения сжатия к точке O (гомометии) с коэффициентом k и сжатия к прямой Ox с коэффициентом κ (рис. 139).] На доказательстве этой основной теоремы теории циклических преобразований плоскости Галилея¹⁾ мы здесь не остановимся.

Отметим еще в заключение, что принцип двойственности (см. § 5 гл. I) позволяет получить целый ряд новых результатов, двойственных тем, которые были получены в этой главе. Так, например, понятию степени точки M относительно цикла Z — произведения

$$\angle aLm \cdot \angle bLm, \quad (24a)$$

где a и b — касательные, проведенные к циклу Z из любой точки L прямой m (рис. 140, а; произведение (24а) не зависит от выбора точки L прямой m); инверсии 1-го рода — *осевая инверсия 1-го рода*, т. е. преобразование, сопоставляющее каждой прямой a плоскости π прямую a' , проходящую через точку A пересечения прямой a с фиксированной «осью инверсии» q и такую, что

$$\angle qAa \cdot \angle qAa' = k, \quad (31a)$$

где k — фиксированная «степень осевой инверсии» (рис. 140, б); инверсии 2-го рода или симметрии относительно цикла Z — *осевая инверсия 2-го рода* или *осевая симметрия относительно цикла Z* , переводящая каждую прямую a плоскости в такую прямую $a' \parallel a$, что касательная t к циклу Z , параллельная a и a' , одинаково отстоит от прямых a и a' (рис. 140, в), и т. д. Мы не

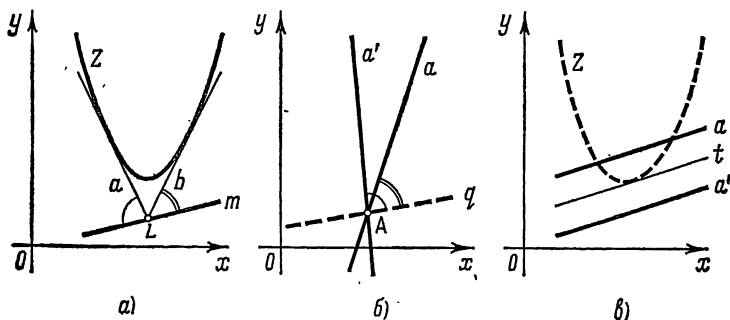


Рис. 140.

станем развивать здесь всех этих построений, предоставив читателю сделать это самостоятельно; отметим только, что соответствующая теория несравненно проще той, к которой мы приходим в евклидовой геометрии при попытке рассмотреть окружность не как множество точек, а как множество прямых²⁾.

¹⁾ См. Макарова [28], ч. III.

²⁾ См., например, § 5 гл. II книги Яглома [10] или раздел Б статьи Яглома [31]; по поводу соответствующих построений геометрии Галилея см. Макарова [28], ч. III и Макарова [34].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ 10. Принцип относительности Эйнштейна и преобразования Лоренца

В § 2 Введения к этой книге мы сформулировали принцип относительности Галилея как утверждение о том, что *никакие физические эксперименты, производимые внутри механической системы, не могут обнаружить равномерное и прямолинейное движение этой системы* (см. выше, стр. 31); таким образом, преобразование механической системы, состоящее в придании ей постоянной по величине и направлению скорости, не меняет никаких экспериментально наблюдаемых свойств этой системы. Однако кроме этого принципа при выводе формул, выражающих преобразования Галилея, мы неявно использовали еще одно чрезвычайно важное положение, на котором теперь остановимся более подробно.

Принцип относительности Галилея полностью покончил с представлением о существовании какого-то «абсолютного», неподвижного по самой своей сути пространства, по отношению к которому можно определять положения и измерять скорости движения всех материальных тел. Все движущиеся друг относительно друга тела равноправны, — декларировал Галилей, — мы никогда не сумеем выяснить, движется ли какое-нибудь из них или стоит на месте, а следовательно, само понятие «абсолютного» покоя лишено содержания. «Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным», — пишет Исаак Ньютон в своих бессмертных «Математических началах натуральной философии», — но далее, почти цитируя Галилея, подчеркивает, что «совершенно невозможно ни видеть, ни как-нибудь иначе различать при помощи наших чувств отдельные части этого пространства... и вместо них приходится обращаться к измерениям, доступным чувствам», т. е. к измерениям в «относительном», движущемся пространстве, после чего он наносит понятию «абсолютного» пространства последний удар: «Может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и

движения прочих)¹⁾. Таким образом, «абсолютное пространство» Ньютона — это фикция: его нельзя обнаружить никаким прямым наблюдением, никаким экспериментом и для точного описания законов природы оно совершенно не нужно.

По-другому обстоит дело со второй из основных категорий, с которыми связано наше восприятие мира, — со временем. Правда, Ньютон намеренно связывает эти две категории: «абсолютное, истинное, математическое время, — говорит он, — само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно и иначе называется длительностью» (сравните с формулировкой, касающейся понятия «абсолютного» пространства!) и почти сразу прибавляет: «возможно, что не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться...»¹⁾. Однако на самом деле и Галилей, и Ньютон всегда предполагали существование «абсолютного» времени, не связанного (если исключить произвольность в выборе «начального» момента, для которого $t=0$) ни с какой системой отсчета

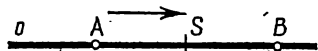


Рис. 141.

и протекающего одинаково во всех пунктах Вселенной. Теперь, следуя А. Эйнштейну, мы проанализируем предположки, на которых покоится убеждение в «абсолютном характере» категории времени.

Предположим, что мы имеем два пункта A и B прямой o , неподвижные друг относительно друга (рис. 141); покоятся они или движутся относительно выбранной инерциальной системы отсчета — мы не знаем, да это и не важно, ибо сам выбор системы отсчета произволен, не может быть мотивирован никакими физическими соображениями. У находящихся в пунктах A и B наблюдателей есть часы, позволяющие измерять время в этих двух пунктах; задача состоит в том, чтобы установить «абсолютный», не зависящий от выбора пункта (A или B) характер времени, добившись «абсолютной синхронности» имеющихся у наших наблюдателей часов.

Сверку имеющихся в пунктах A и B часов можно осуществить двумя различными методами. Можно сравнить, скажем, в точке A ход двух часов, а затем перенести один из них в точку B ; так, на каждом корабле имеется хронометр, ход которого был урегулирован до выхода в море путем сравнения с имеющимися на суше «эталонными» часами. Однако этот метод синхронизации часов принципиально мало удовлетворителен, поскольку он позволяет лишь установить, что некогда, когда часы находились в одном месте A , они шли синхронно; проверить, что также и в разных пунктах A и B часы по-прежнему идут одинаково, он не

¹⁾ См. Ньютон [54], стр. 30.

позволяет (а вдруг на ход часов влияет их механическое перемещение и в процессе переноса часов из точки A в точку B они отстали или начали спешить?). Второй метод заключается в том, чтобы настраивать часы в пункте B в соответствии с подаваемыми из A сигналами — так, часы на корабле всегда проверяются по подаваемым с суши радиосигналам «точного времени». Но для того чтобы сигнал прошел путь от точки A до точки B , вообще говоря, требуется некоторое время; это время можно было бы точно рассчитать, но для этого необходимо знать как расстояние между пунктами A и B , так и скорость распространения сигнала, а эту скорость нельзя определить совсем точно до тех пор, пока мы не имеем синхронизированных часов, указывающих время в разных пунктах, т. е. пока мы не имеем того, для чего нам только и нужно знание скорости распространения сигнала. Таким образом, и второй путь синхронизации часов приводит к элементарному логическому кругу и, следовательно, не позволяет прийти ни к каким удовлетворительным выводам.

Конечно, можно условиться подавать сигнал не из пункта A , а из точки S , расположенной точно посередине между пунктами A и B ; в момент поступления этого сигнала в оба пункта A и B на расположенных в этих пунктах часах устанавливается одинаковое время. Однако такая процедура явно предполагает, что пункты A и B неподвижны; если же оба эти пункта движутся, скажем, в направлении, указанном стрелкой на рис. 141, то посланный из «средней» точки S сигнал дойдет раньше до точки A , чем до точки B , — ведь точка A движется навстречу сигналу, в то время как точка B , напротив, от него удаляется. Но выше мы видели, что утверждения «точки A и B неподвижны» или «точки A и B (равномерно и прямолинейно) движутся» не имеют физического смысла, т. е. справедливость или несправедливость каждого из них не может быть установлена никаким механическим экспериментом. А если так, то мы опять оказываемся не в состоянии проверить, идут ли часы в точках A и B одинаково или ход их несколько различен.

С этим же связана известная неопределенность в определении временно́го упорядочивания событий, происходящих в двух разных точках A и B прямой o . Ранее мы считали, что всем пунктам прямой o отвечают «оси времени t », которые можно считать параллельными (см. рис. 142). При этом на отвечающей пункту B «временной оси» $t^{(B)}$ можно указать отметку $t_0^{(B)}$, соответствующую определенному моменту времени $t_0^{(A)}$ в пункте A ; предшествующие этой отметке $t_0^{(B)}$ моменты в пункте B следует считать предшествующими и для момента $t_0^{(A)}$, а следующие за $t_0^{(B)}$ моменты — следующими и за моментом $t_0^{(A)}$. Однако, насколько обосновано это предположение об «абсолютной упорядоченности» во времени любых двух событий, даже относимых к разным пунктам прямой o ?

Конечно, если из пункта B в момент $t_1^{(B)}$ посылается какой-либо сигнал (письмо, телеграмма) в пункт A , причем этот сигнал приходит в A в момент $t_0^{(A)}$, то любое предшествующее $t_1^{(B)}$ событие в пункте B надо считать предшествующим и моменту $t_0^{(A)}$: иначе наблюдатель в пункте A мог бы получить информацию об относящемся к пункту B событии еще до того, как это событие произошло, что явно противоречит принципу причинности, согласно которому следствие из какого-либо события никак не может иметь места раньше самого события. Точно так же, если посланный из A в момент $t_0^{(A)}$ сигнал приходит в B в момент $t_2^{(B)}$, то любое следующее за моментом $t_2^{(B)}$ событие в пункте B следует считать последующим также и для момента $t_0^{(A)}$. Таким образом, лишь для событий в пункте B , принадлежащих интервалу между $t_1^{(B)}$ и $t_2^{(B)}$, их расположение во времени по отношению к событию, происшедшему в пункте A в момент $t_0^{(A)}$, остается нераскрытым.

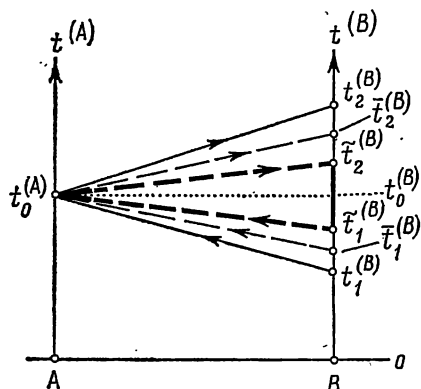


Рис. 142.

Предположим теперь, что мы имеем в своем распоряжении сигналы, распространяющиеся с большей быстротой, чем посланные ранее; в таком случае мы сможем укоротить «интервал неопределенности» ($t_1^{(B)}$, $t_2^{(B)}$) (или $t_1^{(B)} < t^{(B)} < t_2^{(B)}$) в пункте B , отвечающий моменту $t_0^{(A)}$ в пункте A (см. тот же рис. 142, где пунктирные линии $\tilde{t}_1^{(B)}$ $t_0^{(A)}$ и $t_0^{(A)}$ $\tilde{t}_2^{(B)}$ соответствуют этому более быстрому сигналу). Если в принципе существуют сколь угодно быстрые сигналы, то с помощью таких сигналов можно упорядочить во времени любые два события, происшедшие в разных пунктах A и B прямой o ; таким образом, в этом случае «интервал неопределенности» может быть сведен к единственной точке $t_0^{(B)}$, — и мы приходим к той концепции одновременности событий, которая неявно подразумевалась во всей предшествующей части книги (см., в частности, § 2 Введения). Если же существуют какие-то «самые быстрые» сигналы, то отвечающий этим сигналам «интервал временной неопределенности» ($\tilde{t}_1^{(B)}$, $\tilde{t}_2^{(A)}$) (см. рис. 442, где изображенные жирным пунктиром линии $\tilde{t}_1^{(B)}$ $t_0^{(A)}$ и $t_0^{(A)}$ $\tilde{t}_2^{(B)}$ отвечают «самому быстрому» сигналу) далее уже не может быть уменьшен, т. е. «абсолютное»

(не зависящее от места) время Ньютона является такой же фикцией, как и его «абсолютное» пространство.

Самым быстрым из известных нам сигналов является луч света, — является ли он принципиально самым быстрым из всех возможных сигналов? На этот вопрос ответил физический эксперимент. Совершенно ясно, что в рамках механики Галилея — Ньютона никакой сигнал не может быть «самым быстрым»: классический закон сложения скоростей (см., в частности, § 4 настоящей книги, стр. 61) показывает, что имеющий скорость c сигнал, посланный из пункта A

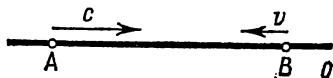


Рис. 143.

в сторону движущегося ему навстречу со скоростью v «приемника сигнала» B (рис. 143), имеет по отношению к B (большую c) скорость $c + v$. В частности, и скорость света должна существенно зависеть от того, движется

ли приемник светового сигнала навстречу световому лучу, остается ли он на месте, или удаляется от источника света.

Эти соображения сделали сенсационными результаты тонких экспериментов замечательного американского физика Альберта Абрагама Майкельсона (1881 г.; в 1887 г. А. А. Майкельсон совместно со своим другом, химиком Эдвардом Вильямом Морли повторил этот опыт, сделав его еще более убедительным), показавших, что *скорость света во всех инерциальных системах отсчета одна и та же и не зависит от направления движения (подвижной) системы отсчета по отношению к световому лучу*¹⁾. Опыты Майкельсона — Морли пробили глубокую брешь в классической картине мира, базирующейся на принципах, положенных в основу механики Галилеем и Ньютоном.

Объяснение экспериментов Майкельсона — Морли дал в 1905 г. Альберт Эйнштейн (1879—1955), предложивший совершенно новое обоснование всей механики. А именно, Эйнштейн полностью принимает принцип относительности Галилея в той его формулировке, которую мы повторили в начале настоящего параграфа. Но вот принцип существования «абсолютного» (т. е. не зависящего от выбора места и системы отсчета) времени Эйнштейн решительно отвергает, заменяя его принципом постоянства (т. е. независимости от выбора инерциальной системы отсчета) скорости света; таким образом, так называемый принцип относительности Эйнштейна состоит из двух постулатов, один из которых утверждает *равноправность всех инерциальных систем отсчета* (этот постулат впервые выдвинул еще Галилей), а второй — *посто-*

¹⁾ Описание опытов Майкельсона — Морли имеется буквально во всех книгах, посвященных специальной теории относительности Эйнштейна (см. список литературы, стр. 301—302).

явство скорости света во всех инерциальных системах отсчета¹⁾. Ясно, что с механикой Галилея—Ньютона, базирующейся на преобразованиях Галилея, постулат постоянства скорости света несовместим; поэтому механика Эйнштейна заменяет преобразования Галилея, указывающие, как меняются координаты x ; t (пространственно-временнó!) события S при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, совершенно иными преобразованиями, указанными впервые (исходя из других соображений) замечательным голландским физиком Хендриком Антоном Лоренцом (1853—1928) и по его имени называемых **преобразованиями Лоренца**.

Наметим вывод преобразований Лоренца. Мы и здесь будем использовать геометрические иллюстрации, послужившие основой

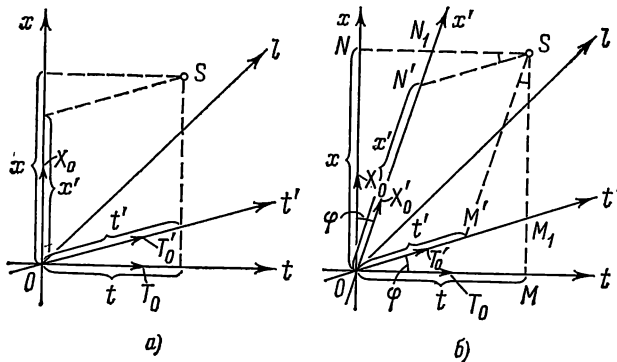


Рис. 144.

для перехода от преобразований Галилея классической механики к геометрии Галилея. А именно, выбрав фиксированную систему отсчета, сопоставим всевозможным «событиям» одномерной кинематики (кинематики прямой o) точки плоскости, отнесенной к координатам x (абсцисса точки прямой o) и t (время); при этом, аналогично тому как мы поступали прежде, условимся изображать ось Ot горизонтальной, а ось Ox вертикальной (рис. 144). Выберем еще единицы измерения длины и времени OX_0 и OT_0 так, чтобы скорость света (ее обычно обозначают буквой c) была равна 1; таким образом, если время мы измеряем в секундах, то единицу измерения длины придется взять близкой к 300 000 км (ибо скорость света приблизительно равна 300 000 км/сек). При этом линия l рис. 144 с уравнением

$$x = t \quad \text{или} \quad x - t = 0$$

¹⁾ Аналогично этому и принцип относительности Галилея на самом деле состоит из двух постулатов: постулата *равноправности всех инерциальных систем отсчета* и постулата, утверждающего *абсолютный характер категории времени*.

будет изображать траекторию (или «мировую линию») светового луча, распространяющегося со скоростью $c=1$ в направлении возрастания x от «события» $O(0, 0)$, отвечающего начальному моменту времени $t=0$ и началу $x=0$ отсчета координат x на прямой o .

Рассмотрим теперь наряду с первоначальной инерциальной системой отсчета $\{x, t\}$ другую систему отсчета $\{x', t'\}$, для которой начало отсчета абсцисс x' в момент $t=0$ совпадает с началом отсчета абсцисс x , но далее двигается по прямой o с определенной скоростью v . Таким образом, в старой системе координат начало $x'=0$ новой системы координат описывается линией Ot' , уравнение которой имеет вид

$$x = vt.$$

В рамках механики Галилея—Ньютона переход от системы отсчета $\{x, t\}$ к системе отсчета $\{x', t'\}$ характеризовался заменой осей координат Ot, Ox осями Ot', Ox' (рис. 144, а); при этом переход от координат $\{x, t\}$ к координатам $\{x', t'\}$ (где ось Ox' совпадает с осью Ox !) записывался формулами Галилея

$$\begin{aligned} x' &= x + vt, \\ t' &= t \end{aligned} \quad (1)$$

(здесь мы игнорируем постоянные a и b в формулах (13) из § 2, отражающие изменение «начального пункта» $x=0$ прямой o и «начального момента времени» $t=0$). Однако при этом скорость светового луча в новой системе отсчета («галилеев угол», образованный линией l рис. 144, а с осью Ox') будет равна уже не 1, а величине $1-v$, что противоречит опыту Майкельсона—Морли.

Таким образом, для того чтобы наши преобразования не противоречили постулату постоянства скорости света, приходится отказаться от положения об «абсолютном» времени, геометрическим выражением которого является неизменность направления оси Ox (оси $t=0$). Поэтому преобразования Лоренца геометрически должны означать переход от системы координат $\{x, t\}$ к системе координат $\{x', t'\}$, где уже обе новые оси Ot' и Ox' имеют направления, отличные от направлений старых осей Ot и Ox (рис. 144, б). При этом, если единичные отрезки $O\dot{X}'_0$ и $O\dot{T}'_0$ осей Ox' и Ot' по-прежнему имеют одинаковую (евклидову) длину и «мировая линия» светового луча изображается той же прямой l , что и раньше, то оси Ot' и Ox' будут образовываться с осями Ot и Ox одинаковые (евклидовы) углы: $\angle tOt' = \angle x'Ox = \varphi$. Это следует из того, что прямая l должна являться также биссектрисой и угла $t'Ox'$, поскольку ее уравнение в системе координат $\{x', t'\}$ по-прежнему имеет вид

$$x' = t' \quad \text{или} \quad x' - t' = 0,$$

— ведь скорость света в системе отсчета $\{x', t'\}$ тоже должна равняться 1!

Найдем теперь формулы, связывающие старые координаты (x, t) некоторого события S и его новые координаты (x', t') (рис. 144, б). Ясно, что координата x равна длине дл MS отрезка MS , измеренной в единицах длины, равных единичному отрезку OX_0 оси Ox ; координата же x' равна «новой длине» дл $M'S$ отрезка $M'S$, измеренного в единицах, равных единичному отрезку OX'_0 оси Ox' . Но (измеренная в единицах OX_0) длина дл M_1S отрезка M_1S , очевидно, равна $x - vt$: ведь в координатах x, t прямая Ot' имеет уравнение $x = vt$. Далее, отношение дл $M'S$:дл M_1S зависит, очевидно, от углов $\angle M'SM_1 = \angle x'Ox$ ($=\varphi$) и $\angle M_1M'S = \angle t'Ox'$ и от единичных отрезков OX_0 и OX'_0 осей Ox и Ox' , но не зависит от выбора события S . Поэтому, если мы обозначим коэффициент пропорциональности $\frac{\text{дл}'M'S}{\text{дл}M_1S}$ (т. е. $\frac{x'}{x-vt}$) через k , то будем иметь¹⁾

$$x' = k(x - vt). \quad (2a)$$

Совершенно аналогично находится зависимость между новой временной координатой t' события S и старыми координатами x, t этого события. Из рис. 144, б следует

$$t = \text{дл}NS, \quad t' = \text{дл}'N'S,$$

где длины отрезков NS и $N'S$ измеряются в «единицах» OT_0 ($=OX_0$) и OT'_0 ($=OX'_0$). Далее, из подобия (на рис. 144, б — прямоугольных) треугольников ONN_1 и OMM_1 находим

$$\frac{\text{дл}NN_1}{\text{дл}ON} = \frac{\text{дл}MM_1}{\text{дл}OM},$$

где длины всех отрезков измеряются в одних и тех же единицах $OX_0 = OT_0$, или

$$\frac{\text{дл}NN_1}{x} = \frac{vt}{t}.$$

Таким образом,

$$\text{дл}NN_1 = \frac{vt}{t} x = vx$$

и, следовательно,

$$\text{дл}N_1S = \text{дл}NS - \text{дл}NN_1 = t - vx.$$

¹⁾ Заметим, что формула (2a) отличается от первой из формул (1), выражающих классические преобразования Галилея, лишь коэффициентом k (вообще говоря, зависящим от скорости v движения «новой» системы отсчета относительно «старой», определяющей «угол» φ между осями Ot и Ot').

А поскольку треугольник $SN'N_1$, как легко видеть, подобен треугольнику $SM'M_1$ (и $OT_0 = OX_0'$, а $OT_0 = OX_0$), то

$$\frac{дл'N'S}{длN_1S} = \frac{дл'M'S}{длM_1S} = k \quad \text{или} \quad \frac{t'}{v-tx} = k.$$

Окончательно мы приходим ко второй из формул, выражающих преобразования Лоренца

$$t' = k(t - vx). \quad (26)$$

Прежде чем идти дальше, заметим, что из формул (2а—б) вытекает одно довольно неожиданное следствие. Рассмотрим некоторый стержень длины d , покоящийся в системе отсчета $\{x, t\}$;

пусть начало этого стержня совпадает с точкой $x=0$ прямой o , а конец — с точкой $x=d$; этим двум пунктам прямой o будут отвечать «мировые линии», изображаемые на рис. 145 прямыми Ot и e , где $e \parallel Ot$ и e пересекает ось Ox в точке $E(d, 0)$. Измерим теперь длину стержня в системе отсчета $\{x', t'\}$, относительно которой он, очевидно, движется с абсолютной скоростью v (со скоростью $-v$, если учитывать и направление движения). Для того чтобы определить «новую длину» этого стержня, нам надо зафиксировать его начало и конец в один и тот же момент времени t' , скажем, в момент времени $t' = 0$ (точки O и E' на рис. 145). Ясно, что координаты (x', t') точки O имеют вид $(0, 0)$; что же касается координат события E' , то (поскольку для этой точки $t' = 0$) в силу формулы (2б) $t = vx$; с другой стороны, так как для этой точки $x = d$ (ибо $x = d$ — это уравнение прямой e), то $t = vd$. Подставив теперь эти значения x и t в равенство (2а), мы находим

$$x' = k(x - vt) = k(d - v^2d) = k(1 - v^2)d.$$

Таким образом, в момент $t' = 0$ конец нашего стержня имеет пространственную координату $x' = k(1 - v^2)d$; поэтому новая его длина d' равна

$$d' = k(1 - v^2)d. \quad (3)$$

Итак, мы видим, что длина стержня существенно зависит от выбора системы отсчета, в которой эта длина измеряется: если по отношению к системе отсчета стержень перемещается с абсолютной скоростью v , то длина его умножается на величину $k(1 - v^2)$, где коэффициент пропорциональности k также зависит от v . Немного ниже мы раскроем характер зависимости k от v и увидим,

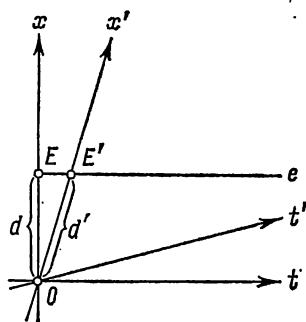


Рис. 145.

что $k(1-v^2) < 1$, так что длина движущегося стержня оказывается меньшей, чем длина того же самого стержня в состоянии покоя. Так как предположение о сокращении длин движущихся предметов впервые выдвинул ирландский физик Джордж Фрэнсис Фитцджеральд, который усмотрел в этом возможность чисто формального оправдания результатов опыта Майкельсона—Морли, то изменение в $k(1-v^2)$ раз длин движущихся с абсолютной скоростью v предметов обычно называют *фитцджеральдовым сокращением*.

Вернемся теперь к формулам (2а—б). Выразим из них старые координаты (x, t) события через его новые координаты (x', t') ; для этого раскроем скобки в равенствах (2а) и (2б), предварительно умножив второе из них на v :

$$x' = kx - kv t; \quad v t' = kv t - k v^2 x.$$

Сложив получившиеся уравнения, имеем

$$x' + v t' = k(1-v^2)x,$$

откуда следует

$$x = \frac{1}{k(1-v^2)}(x' + v t'). \quad (2'а)$$

Напротив, оставив без изменения равенство (2б), а равенство (2а) умножив на v , получим

$$v x' = kv x - k v^2 t, \quad t' = k t - kv x;$$

сложив, наконец, полученные уравнения, мы приходим к формуле

$$v x' + t' = k(1-v^2)t,$$

откуда вытекает, что

$$t = \frac{1}{k(1-v^2)}(t' + v x'). \quad (2'б)$$

Формулы (2'а—б) и указывают правила перехода от новых координат $\{x', t'\}$ к старым координатам $\{x, t\}$.

Сравним теперь системы формул (2а—б) и (2'а—б). Они отличаются друг от друга в двух отношениях. Во-первых, фигурирующая в формулах (2) скорость v заменяется в формулах (2') на величину

$$v' = -v$$

(ибо $x' + v t' = x' - v' t'$ и $t' + v x' = t' - v' x'$), — этого, разумеется, и следовало ожидать, поскольку, в то время как система отсчета $\{x', t'\}$ движется по отношению к системе отсчета $\{x, t\}$ со скоростью v , скорость v' системы отсчета $\{x, t\}$ по отношению к системе отсчета $\{x', t'\}$ будет равна $-v$. Во-вторых, множитель k формул (2) заменяется в формулах (2') новым множителем

$$k' = \frac{1}{k(1-v^2)}. \quad (4)$$

Из формулы (4), в частности, следует, что покоящийся по отношению к системе отсчета $\{x', t'\}$ стержень длины d имеет в системе отсчета $\{x, t\}$ (по отношению к которой он движется с той же абсолютной скоростью v , что и раньше) новую длину

$$d' = k' (1 - v^2) d = \frac{1}{k} d. \quad (3')$$

Но ясно, что это «новое» фитцджеральдово сокращение по своей величине никак не может отличаться от того, которое получается в результате сравнения измеренных в системах отсчета $\{x, t\}$ и $\{x', t'\}$ длин стержня, покоящегося в системе $\{x, t\}$: ведь противное коренным образом противоречило бы основному принципу равноправия всех инерциальных систем отсчета, принципу, который принимают и Галилей и Эйнштейн! Таким образом, мы вынуждены считать, что

$$k' = \frac{1}{k(1-v^2)} = k,$$

откуда

$$k^2 = \frac{1}{1-v^2}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (5)$$

При этом фигурирующие в формулах (3) и (3') «коэффициенты фитцджеральдова сокращения» действительно оказываются одинаковыми (и меньшими единицы!):

$$k(1-v^2) = \frac{1}{k} = \sqrt{1-v^2},$$

так что *длина стержня в движущейся системе отсчета действительно оказывается меньшей длины того же самого стержня, пребывающего в состоянии покоя:*

$$d' = \sqrt{1-v^2} \cdot d. \quad (6a)$$

Подставляя теперь значение (5) коэффициента k в формулы (2), мы приходим к окончательным выражениям преобразований Лоренца:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\ t' &= \frac{-vx+t}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}} \quad (7)$$

Формулы (7) и были положены в 1905 г. Альбертом Эйнштейном в основу всей механики. При этом, однако, оказалось, что замена преобразований Галилея (1) преобразованиями Лоренца (7)

приводит к многим совершенно неожиданным физическим феноменам, настолько неожиданным, что довольно долгое время они серьезно препятствовали признанию теории относительности. Об одном из таких феноменов, так называемом «фитцджеральдовом сокращении» (ба) движущихся предметов, мы уже говорили выше. Еще более поражает воображение «удлинение (при движении) времени». Эта гипотеза, на которой мы сейчас остановимся подробнее, принадлежала Лоренцу, дополнившему ею идею Фитцджеральда о сокращении движущихся предметов, причем она также была высказана еще

до создания теории относительности и внесла еще большую путаницу в умы физиков и философов: ведь при сохранении «абсолютного характера» фактора времени, от чего впервые отказался только Эйнштейн, формальные построения Фитцджеральда и Лоренца оставались, по существу, совершенно необъяснимыми.

Для того чтобы пояснить эффект «удлинения (или укорочения) времени», рассмотрим двух наблюдателей H и H' , связанных с системами отсчета $\{x, t\}$ и $\{x', t'\}$ и имеющих часы, фиксирующие время в этих двух системах отсчета. Рассмотрим

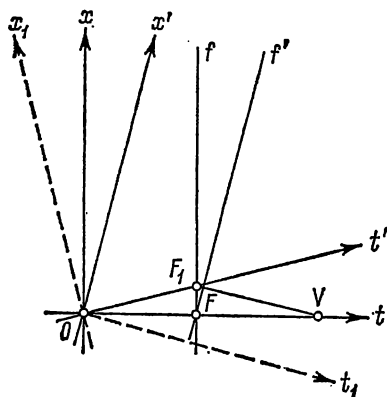


Рис. 146.

определенный интервал $(0, \tau)$ времени длительности τ в системе отсчета $\{x, t\}$; момент $t=0$ характеризуется «мировой линией» Ox рис. 146, а момент $t=\tau$ — мировой линией $f \parallel Ox$, пересекающей ось Ot в точке F с координатами $(0, \tau)$. Пусть наблюдатель H' в момент $t'=0$ находится в пункте $x=0$ прямой o ; этому положению наблюдателя в пространстве и во времени отвечает точка O рис. 146. В системе отсчета $\{x', t'\}$ значению времени $t'=0$ отвечает «мировая линия» Ox' — точки этой линии отвечают всевозможным событиям, «одновременным» с точки зрения наблюдателя H' . Аналогично этому одновременными с событием F с точки зрения наблюдателя H' будут события, графически изображаемые точками проходящей через F прямой $f' \parallel Ox'$; сама точка F имеет в системе $\{x, t\}$ координаты $(0, \tau)$, а в системе отсчета $\{x', t'\}$ — координаты

$$x' = \frac{-v\tau}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{и} \quad t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2}}$$

(см. выше, формулы (7)). Таким образом, с точки зрения наблюдателя H' событие F произойдет в момент времени $\frac{\tau}{\sqrt{1-v^2}} > \tau$, т. е.

позже, чем для наблюдателя H : интервал времени $t = \tau$, разделяющий происшедшие в одном пункте $x=0$ прямой o события O и F , для наблюдателя H' , движущегося со скоростью v относительно рассматриваемого пункта (т. е. относительно системы отсчета, в которой события O и F представляются происшедшими в одном месте!), будет иметь длительность t' , большую t :

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot t. \quad (66)$$

Кажущуюся парадоксальной формулу (66) можно вывести еще и по-другому. Рассмотрим тонкий стержень AB длины t (этой буквой нам здесь будет удобно обозначить длину стержня), движущийся со скоростью v в направлении прямой o , перпендикулярной AB (см. рис. 146а, на котором представлена плоскость xOy , в которой происходит движение стержня; ось времени здесь не изображена). Для наблюдателя H , неподвижного относительно стержня, световой сигнал, направленный вдоль стержня, пройдет путь AB за время t (ибо скорость света по нашему соглашению равна 1). С другой стороны, для наблюдателя H' , неподвижного относительно системы отсчета, в которой стержень движется, путь светового сигнала от A до B (точнее, от A до пункта B' , в котором, с точки зрения этого наблюдателя, будет находиться конец B стержня в момент поступления туда светового сигнала) будет равен

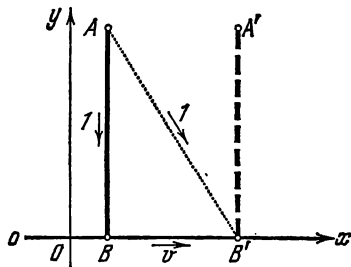


Рис. 146а.

$$AB' = \sqrt{(AB)^2 + (BB')^2} = \sqrt{t^2 + (vt')^2},$$

где $BB' = vt'$ — путь, пройденный движущейся со скоростью v точкой B за время t' , протекшее, по часам наблюдателя H' , между выходом сигнала из точки A и поступлением его в пункт B (рис. 146а; заметим, что, поскольку стержень не движется в направлении AB , его длина для наблюдателей H и H' будет одинаковой, — ср. с формулами (10) ниже). А так как скорость светового сигнала будет равна 1 как в связанной с наблюдателем H системе отсчета, так и в системе отсчета, относительно которой покоится наблюдатель H' (принцип постоянства скорости света!), то (измеренное по часам наблюдателя H') время t' , за которое луч света пройдет путь

$$AB' = \sqrt{t^2 + v^2 t'^2},$$

должно быть равно этому пути; отсюда получаем

$$t' = \sqrt{t^2 + v^2 t'^2}, \quad \text{т. е.} \quad t'^2 = t^2 + v^2 t'^2$$

или

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot t. \quad (66)$$

Особенно удивительным представляется последнее рассуждение, если облечь его в форму «парадокса близнецов», и сегодня еще

иногда вызывающего споры и превратные толкования, хотя Эйнштейн исчерпывающим образом объяснил этот «парадокс» более чем полвека тому назад. Предположим, что наши наблюдатели H и H' — братья-близнецы, один из которых остается в точке $x=0$ прямой o , с которой связано начало системы отсчета $\{x, t\}$, а второй — движется относительно H с большой скоростью v , например совершает космический перелет. «Мировой линией» наблюдателя H' мы первоначально объявим прямую Ot' рис. 146; это значит, что H' перемещается относительно H с (положительной) скоростью v . Затем, начиная с момента времени τ по часам наблюдателя H , т. е. с точки F_1 пересечения прямых f и Ot' , «путешественник» H' изменяет направление своего движения, начиная приближаться к (неподвижному) наблюдателю H с той же абсолютной скоростью v . Теперь он движется относительно H со скоростью $-v$; это отвечает тому, что мировой линией наблюдателя H становится проходящая через точку F_1 линия F_1V , параллельная линии Ot_1 , симметричной Ot' относительно Ot . Через некоторое время оба брата снова встретятся в пункте $x=0$ прямой o ; точке (и моменту!) встречи отвечает точка V пересечения прямых Ot и F_1V (рис. 146).

Ясно, что по часам наблюдателя H между событиями O и V пройдет

$$\tau + \tau = 2\tau \text{ ед. времени;}$$

выясним теперь, сколько времени займет путь между «мировыми точками» O и V по часам его брата-близнеца H' : Так как в системе отсчета $\{x, t\}$ точка F_1 имеет временную координату $t=\tau$, а в системе отсчета $\{x', t'\}$ — пространственную координату $x'=0$, то в силу первой из формул (7) получаем

$$x = v\tau.$$

А теперь из второй формулы (7) следует

$$t' = \frac{-v^2\tau + \tau}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\tau(1-v^2)}{\sqrt{1-v^2}} = \tau\sqrt{1-v^2},$$

т. е. в «мировой точке» F_1 наблюдателю H' отвечает «собственное время» $\tau' = \tau\sqrt{1-v^2}$. Далее, время движений от «мировой точки» F до «мировой точки» V должно согласовываться с системой отсчета $\{x_1, t_1\}$ (рис. 146), относительно которой теперь покоится наблюдатель H' ; при этом из соображений симметрии вытекает, что за время движения между «мировыми точками» F_1 и V наблюдатель H' «постареет» еще на

$$\tau\sqrt{1-v^2} \text{ ед. времени}$$

(подтвердите это прямой выкладкой!). Таким образом, все путешествие наблюдателя H' от «мировой точки» O до «мировой точки» V

займет

$$\tau \sqrt{1-v^2} + \tau \sqrt{1-v^2} = 2\tau \sqrt{1-v^2} \text{ ед. времени,}$$

т. е. (поскольку $2\tau \sqrt{1-v^2} < 2\tau$) H' по возвращении из путешествия окажется моложе своего брата-близнеца!

Конечно, этот результат (для практической реализации которого мы должны располагать космическими кораблями, передвигающимися со скоростью, близкой к скорости света, и должны суметь перенести нагрузки на организм, связанные с огромными ускорениями, развиваемыми космическим кораблем в моменты пуска, остановки и почти мгновенного изменения направления движения в мировой точке F_1) никак не может быть использован для удлинения жизни — ведь все физические и физиологические процессы в «движущейся»¹⁾ среде пристекают в полном соответствии со свойственным этой среде «собственным временем»: так, H' за время пути проживет ровно $2\tau' = 2\tau \sqrt{1-v^2}$ ед. времени, не больше и не меньше. Неправильные толкования этого результата чаще всего апеллируют к равноправию любых инерциальных систем отсчета; «поэтому, — говорят противники теории относительности, не давая себе труда тщательнее продумать все рассуждение, — H тоже двигался относительно H' и, следовательно, при встрече он также должен оказаться моложе своего брата H' ». Однако это рассуждение является совершенно несостоятельным — ведь система отсчета, с которой связан наблюдатель H' , никак не является инерциальной, поскольку в «мировой точке» F_1 он резко изменил направление движения (ср. сказано выше о возникающих ускорениях и связанных с ними перегрузках, вызванных силами инерции); поэтому ни о каком равноправии системы отсчета $\{x, t\}$, связанной с наблюдателем H , и «системы отсчета» $\{x', t'\} = \{x_1, t_1\}$, в которой живет его брат H' , здесь не может быть и речи²⁾.

Наконец, остановимся еще на эйнштейновском законе сложения скоростей. Предположим, что система отсчета $\{x', t'\}$ движется относительно системы отсчета $\{x, t\}$, которую мы условимся называть «неподвижной», с какой-то скоростью u ; в системе отсчета $\{x', t'\}$ рассматривается некоторый объект A , движущийся со скоростью v . Нам требуется найти скорость w объекта A в системе отсчета $\{x, t\}$. Величины v , u и w играют здесь роль «относительной скорости», «переносной скорости» и «абсолютной скорости»; поэтому в рамках классической механики Галилея — Ньютона мы имели бы (ср. выше, стр. 61)

$$w = u + v. \quad (8)$$

¹⁾ Кавычки здесь призваны напомнить читателю, что без фиксирования системы отсчета это прилагательное вообще не имеет никакого смысла; здесь мы употребляем его с позиций брата H .

²⁾ Ср. также Скобелев ²⁾ [53].

Совсем по-другому обстоит дело в теории относительности Эйнштейна. Пусть прямая a (рис. 147) — «мировая линия» движущегося объекта A ; точки O и S — два положения этого объекта, в системе отсчета $\{x', t'\}$ имеющие координаты $(0, 0)$ и (d', τ') , где $d' = v\tau'$: ведь скорость объекта A в этой системе отсчета равна v и, следовательно, $\frac{d'}{\tau'} = v$. В системе отсчета $\{x, t\}$ точка (событие) O имеет те же координаты $(0, 0)$; координаты же точки S в

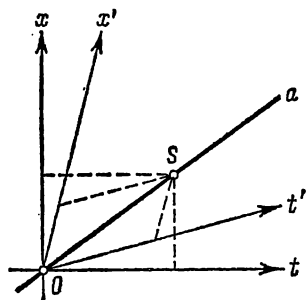


Рис. 147.

системе отсчета $\{x, t\}$ можно определить по формулам (7), в которых надо только вместо x' и t' подставить x и t , а вместо x и t — величины $x' = d'$ и $t' = \tau'$ и заменить v на $-u$ (скорость системы отсчета $\{x, t\}$ по отношению к системе отсчета $\{x', t'\}$). Таким образом, получаем

$$x = \frac{d' + u\tau'}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{и} \quad t = \frac{ud' + \tau'}{\sqrt{1-u^2}},$$

откуда вытекает, что за время $\tau = \frac{ud' + \tau'}{\sqrt{1-u^2}}$ (измеренное в системе отсчета

$\{x, t\}$) наш объект A проходит по отношению к этой системе путь $d = \frac{d' + u\tau'}{\sqrt{1-u^2}}$, т. е. его скорость и в этой системе отсчета равна

$$\omega = \frac{d}{\tau} = \frac{d' + u\tau'}{\sqrt{1-u^2}} : \frac{ud' + \tau'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{d' + u\tau'}{ud' + \tau'} = \frac{v\tau' + u\tau'}{uv\tau' + \tau'} = \frac{u+v}{uv+1}.$$

Итак, формула (8) заменяется в теории относительности формулой

$$\omega = \frac{u+v}{uv+1}. \quad (9)$$

В частности, если рассматриваемый объект A — луч света, распространяющийся со скоростью $v=1$ (ведь единицей скоростей является у нас именно скорость света!), то и

$$\omega = \frac{u+1}{u \cdot 1 + 1} = 1.$$

— скорость света остается одной и той же во всех (инерциальных) системах отсчета. Заметим также, что наличие в выражающих преобразования Лоренца формулах (7) корня квадратного из величины $1-v^2$ свидетельствует о невозможности существования сигналов, распространяющихся быстрее света (т. е. имеющих скорость $v > 1$).

В заключение мы снова вернемся к вопросу об одновременности и о понятиях «раньше — позже» в теории относительности. Так как

скорость инерциальной системы $\{x', t'\}$ по отношению к системе $\{x, t\}$ может быть любой (с тем лишь ограничением, что по абсолютной величине она должна быть меньше скорости света, т. е. меньше 1), то ось Ot' «подвижной» системы отсчета может занимать любое положение в угле mOn рис. 148; соответственно этому ось Ox' должна располагаться в угле nOm_1 . События S и S_1 в какой-то системе отсчета $\{x', t'\}$ являются «одновременными», если они принадлежат прямой, параллельной оси Ox' . Поэтому любое событие R , изображаемое какой-либо точкой одного из двух вертикальных углов nOm_1 и m_1On , является «одновременным» с O по отношению к какой-то специально выбранной (инерциальной) системе отсчета $\{x', t'\}$; при ином выборе системы отсчета это событие окажется предшествующим событию O (так будет обстоять дело в системе отсчета $\{x_1, t_1\}$ рис. 148) или будет следовать за O (как, например, в системе $\{x_2, t_2\}$ рис. 148). Что же касается событий, изображаемых точками углов mOn и m_1On_1 , то первые из них образуют

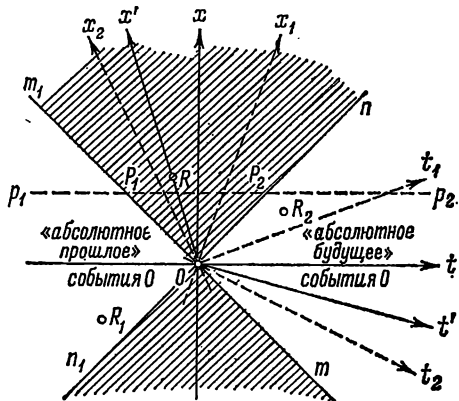


Рис. 148.

«абсолютное будущее» события O , а вторые — его «абсолютное прошлое»; при этом причинная связь может связывать лишь такие события R_1 и R_2 , что одно из них («причина» R_1) является «абсолютно предшествующим» второму («следствию» R_2 ; см. тот же рис. 148). В частности, если Ot и $p_1p_2 \parallel Ot$ — «оси времени», соответствующие в какой-то инерциальной системе отсчета $\{x, t\}$ двум пунктам прямой o — началу отсчета на прямой и некоторой точке M , то все события, происходящие в пункте M , по отношению к событию O делятся на три категории: луч P_1P_1 изображает множество событий, предшествующих O ; луч P_2P_2 — множество событий, следующих за O ; наконец, отрезок P_1P_2 изображает множество событий, «временнó нейтральных» по отношению к O : каждое из этих событий в зависимости от выбора инерциальной системы отсчета может считаться происходящим «раньше» O , «одновременно» с O или «позже» O (ср. рис. 148 с рис. 142 на стр. 178). При этом, разумеется, лишь события, изображаемые точками луча P_1P_1 , могут служить «причинами» события O и лишь события, изображаемые точками луча P_2P_2 , — являться его «следствиями».

Экспериментальную проверку «релятивистских» (т. е. связанных с теорией относительности) эффектов очень затрудняет то обстоятельство, что в случае «земных», т. е. встречающихся в обыденной жизни на Земле, скоростей v (которые мы условились измерять в такой системе единиц, что скорость света равна 1) коэффициент $k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ в формулах (2а — б) (стр. 182—183) или (7) (стр. 185), так же как и коэффициент $\sqrt{1-v^2}$ Фитцджеральдова сокращения, очень мало отличается от 1. Так, например, если

$$v \approx 1000 \text{ км/час} \approx 0,3 \text{ км/сек} \approx 0,000001 \text{ скор. света}$$

(такой порядок величины имеют скорости реактивных самолетов), то

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \approx 1,0000000000005 \text{ и } \sqrt{1-v^2} \approx 0,9999999999995.$$

Однако в явлениях, относящихся к «физике микромира» (т. е. к физике ядра и элементарных частиц) или к «физике макромира» (астрофизике и физике космоса), где приходится сталкиваться с колоссальными скоростями, вполне сравнимыми со скоростью света, пренебрежение теорией относительности Эйнштейна может привести к серьезным ошибкам. К этому вопросу мы еще вернемся в § 12.

Следует иметь в виду, что в классической физике принцип относительности Галилея применим только к механическим явлениям; это связано с тем, что основные законы механики (знаменитые законы Ньютона, известные каждому школьнику) инвариантны относительно преобразований Галилея (1)», т. е. сохраняют свою форму при этих преобразованиях. Напротив, основные законы теории электромагнитного поля — законы (или уравнения) Максвелла, впервые выписанные в 1864 г. великим английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом (1831—1879) и составившие основу его «Трактата об электричестве и магнетизме» (1873), — инвариантны не относительно преобразований Галилея (1), а относительно преобразований Лоренца (7); поэтому к явлениям электромагнетизма (в том числе и к явлению распространения света, согласно теории Максвелла связанному с электромагнетизмом!) принцип относительности Галилея неприменим. Эти соображения легли в основу рассуждений замечательного французского математика и физика Анри Пуанкаре (1854—1912), который пришел к идеям специальной теории относительности одновременно с А. Эйнштейном (т. е. в 1905 г.) и независимо от него.

Укажем, наконец, что до сих пор мы говорили о принципе относительности Эйнштейна и о преобразованиях Лоренца только в применении к «одномерной механике» — к кинематике прямолинейных движений в направлении фиксированной прямой o . Однако принцип относительности Эйнштейна в той его формулировке, которая указана на стр. 179—180, применим, разумеется, и к плоско-параллельным (двумерным) или к произвольным (трехмерным) движениям; при этом переход от одной инерциальной системы отсчета к другой будет задаваться более сложными преобразованиями Лоренца трехмерного «мира событий» (x, y, t) (где x, y — координаты точки на плоскости, а t — время) или общего четырехмерного «мира» (x, y, z, t). Преобразования Лоренца четырехмерного мира событий (x, y, z, t), оси координат в котором выбраны таким образом, что направление движения «подвижной системы

отсчета $\{x', y', z', t'\}$ относительно «неподвижной системы отсчета» $\{x, y, z, t\}$ совпадает с общей осью $Ox \equiv O'x'$ этих двух систем, а оси $O'y'$ и $O'z'$ «подвижной» системы отсчета все время остаются параллельными соответствующим осям «неподвижной» системы отсчета (рис. 149), можно, разумеется, записать так:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} t, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} t, \end{aligned} \quad (10)$$

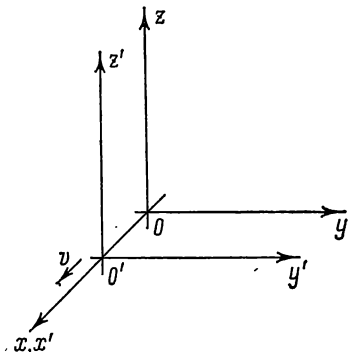


Рис. 149.

где v — скорость движения «подвижной» системы отсчета относительно «неподвижной»; однако в случае общего расположения координатных осей систем отсчета $\{x, y, z, t\}$ и $\{x', y', z', t'\}$ эти формулы приобретают значительно более сложный вид. Поскольку настоящая книга посвящена геометрическому истолкованию фактов «одномерной кинематики», мы не останавливаемся здесь на этом вопросе.

§ 11. Геометрия Минковского

Выше мы видели, что переход от принципа относительности Галилея к принципу относительности Эйнштейна равносильен замене элементарных преобразований Галилея классической кинематики

$$\begin{aligned} x' &= x + vt, \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (1)$$

задающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, несколько более сложными преобразованиями Лоренца

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\ t' &= \frac{-vx + t}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

С другой стороны, основное содержание настоящей книги составляло изучение геометрической системы, возникающей на координатной плоскости $\{x, t\}$, где роль «движений» играют преобразования Галилея; соответствующую «геометрию», каждый факт которой может быть интерпретирован в терминах кинематики прямой o , мы назвали «геометрией Галилея». В этой связи также является совершенно естественным изучение «геометрии» плоскости $\{x, t\}$, роль «движений» которой играют преобразования Лоренца. Эта геометрическая система была указана выдающимся немецким математиком и физиком

Германом Минковским (1864—1909), который в 1907—1908 гг. предложил использовать ее для «геометризованного» описания феноменов релятивистской механики; ее обычно называют (псевдоевклидовой) **геометрией Минковского**¹⁾.

Движениями плоскости Галилея служат преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= vx + y + b. \end{aligned} \quad (1')$$

От записанных в форме (1) преобразований Галилея эти движения отличаются, во-первых, тем, что координаты точки на плоскости теперь обозначаются не через t , x , а через x , y , как обычно (причем координата x играет роль времени t , а координата y заменяет абсциссу x точки на прямой o); далее, к числу движений причисляются также и всевозможные параллельные переносы:

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b, \end{aligned} \quad (1a)$$

отвечающие изменениям начала отсчета времени t и начала отсчета координат $\{x\}$ на прямой o . Соответственно этому и *под геометрией Минковского мы будем понимать изучение тех свойств фигур координатной плоскости $\{x, y\}$, которые сохраняются при движениях*

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} y + a, \\ y' &= -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} y + b, \end{aligned}} \quad (11)$$

где v , a , b — произвольные «параметры» движения. От преобразований (7) преобразования (11) отличаются тем, что координаты точки на плоскости теперь обозначены через x , y (где можно считать, что x — это время t , а y — абсцисса движущейся точки на прямой o), а также тем, что к числу движений присоединены всевозможные параллельные переносы (1a), отвечающие изменениям начала отсчета времени и начала отсчета абсцисс на прямой o . В настоящем параграфе мы дадим краткий набросок геометрии Минковского, почти полностью отвлекаясь здесь от механического истолкования фактов этой замечательной геометрии в рамках теории относительности Эйнштейна.

Наряду с координатами (x, y) точки в геометрии Минковского используются также координаты (X, Y) , связанные с координатами

¹⁾ Происхождение термина «псевдоевклидова геометрия» связано с большой близостью геометрии Минковского к геометрии Евклида, факты которой, впрочем, иногда в геометрии Минковского своеобразно искажаются (об этом см. ниже).

(x, y) соотношениями:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y),$$

или

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \quad (12)$$

(рис. 150). Складывая и вычитая друг из друга первую и вторую

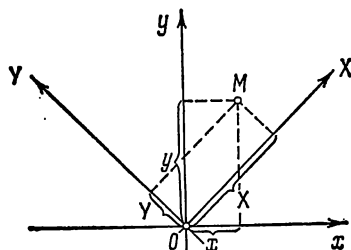


Рис. 150.

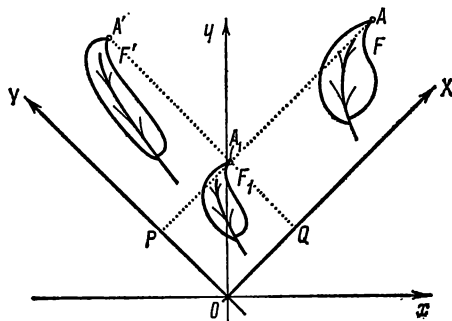


Рис. 151.

из формул (11), мы без труда выразим движения плоскости Минковского в координатах X, Y :

$$\sqrt{2}X' = \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X+Y}{\sqrt{2}} + \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X-Y}{\sqrt{2}} + (a+b),$$

$$\sqrt{2}Y' = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X+Y}{\sqrt{2}} - \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{X-Y}{\sqrt{2}} + (a-b),$$

или

$$\boxed{\begin{aligned} X' &= \lambda X + A, \\ Y' &= \frac{1}{\lambda} Y + B, \end{aligned}} \quad (11a)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} = \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}}$ (так что $\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}}$), $A = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $B = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$ — параметры преобразования. Движение (11a) складывается из преобразования

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda X, \\ Y_1 &= \frac{1}{\lambda} Y, \end{aligned} \quad (18a)$$

представляющего собой комбинацию сжатия к оси OY с коэффициентом сжатия λ^1) и одновременного сжатия к оси OX с коэффициентом $\frac{1}{\lambda}$ (см. рис. 151, где изображен случай $\lambda < 1 < \frac{1}{\lambda}$) и из параллельного переноса

$$\begin{aligned} X' &= X_1 + A, \\ Y' &= Y_1 + B. \end{aligned} \quad (13б)$$

Преобразование (13а) играет в геометрии Минковского роль поворота; такое преобразование евклидовой координатной плоскости $\{X, Y\}$ называется *гиперболическим поворотом* (причины, обуславливающие это название, будут разъяснены ниже). В координатах $\{x, y\}$ поворот (13а) записывается формулами

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} y, \\ y' &= -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} y \end{aligned} \quad (13)$$

(ср. с формулами (7), выражающими преобразование Лоренца).

Аналогично тому как это сделано было в § 3 гл. I для сдвига (см. стр. 47), можно показать, что *сжатие к прямой*, а следовательно, и преобразование (13а), переводит каждую прямую снова в прямую; переводит параллельные прямые в параллельные прямые; сохраняет величину отношения двух отрезков одной прямой (или параллельных прямых),— следовательно, понятия прямой линии, параллельных прямых, отношения отрезков одной прямой (или параллельных прямых) сохраняют смысл в геометрии Минковского. Далее, из формул (11а) следует, что любая прямая, параллельная оси OY или оси OX :

$$X = \text{const} \quad \text{или} \quad Y = \text{const},$$

переводится движением (11) или (11а) в прямую того же направления. Таким образом, в геометрии Минковского мы имеем даже два семейства «особых прямых», переводимых каждым движением в прямую, параллельную первоначальной; через каждую точку плоскости проходит по одной особой прямой каждого семейства. Наконец, квадрат, стороны которого параллельны осям OX и OY , переводится движением (11а) в прямоугольник той же площади (если стороны квадрата равны ε , ε , то стороны прямоугольника равны

¹⁾ Сжатие к оси OY с коэффициентом сжатия λ переводит каждую точку $A(X, Y)$ плоскости, удаленную от оси OY на расстояние X , в такую точку $A_1(\lambda X, Y)$ перпендикуляра AP , опущенного из точки A на прямую OY , которая удалена от OY на расстояние λX ; при $\lambda > 1$ слово «сжатие» в названии этого преобразования лучше заменить словом «растяжение» (ср. выше, стр. 67, в частности, рис. 47, б).

$\lambda\varepsilon, \frac{1}{\lambda}\varepsilon$); поэтому сеть равных квадратов плоскости Минковского переводится движением (11а) в сеть равновеликих им прямоугольников и, следовательно, каждая фигура F переводится движением (11) или (11а) плоскости Минковского в фигуру F' той же площади

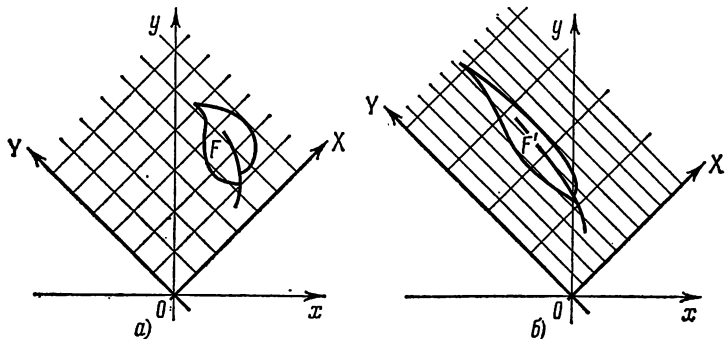


Рис. 152.

(рис. 152, а, б; ср. выше, § 3 гл. I, в частности, рис. 28 на стр. 49). Таким образом, мы видим, что и понятие площади фигуры сохраняет смысл в геометрии Минковского.

Рассмотрим теперь произвольный отрезок AB , относительно которого нам пока будет удобно считать, что он не параллелен ни оси OX ,

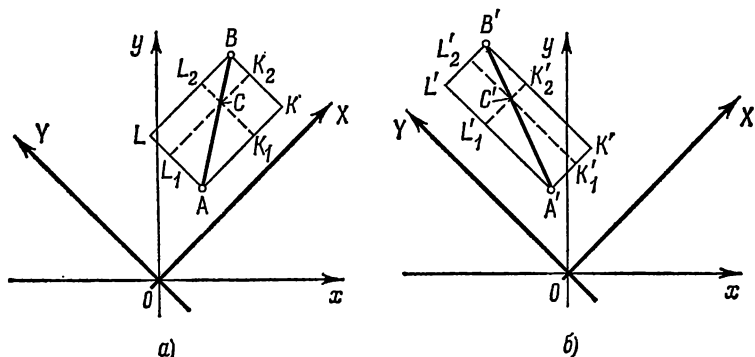


Рис. 153.

ни оси OY . Пусть $AKBL$ — прямоугольник с параллельными осям OX и OY сторонами, диагональю которого служит отрезок AB (рис. 153, а). Преобразование (11) или (11а) переводит этот прямоугольник снова в прямоугольник с параллельными осям OX и OY сторонами; при этом площадь полученного прямоугольника $A'K'B'L'$

(рис. 153, б) будет равна площади прямоугольника $AKBL$: движения плоскости Минковского площадь прямоугольника $AKBL$ не изменяют. Ясно, что при близких точках A и B площадь прямоугольника $AKBL$ мала; поэтому можно считать, что величина $плAKBL$ доставляет своеобразную «меру отклонения» точек A и B друг от друга, стремящуюся к нулю при неограниченном сближении точек A и B и, кроме того, одинаковую для двух «равных» (в смысле геометрии Минковского) пар точек A, B и A', B' . Это как будто позволяет принять величину $плAKBL$ за «расстояние Минковского» между точками A и B ; однако поскольку площадь фигуры измеряется в «квадратных» (а не в «линейных») единицах¹⁾, то удобнее считать, что в геометрии Минковского расстояние d_{AB} между точками A и B пропорционально корню квадратному из площади прямоугольника $AKBL$, т. е. равно $k\sqrt{плAKBL}$. Выбор коэффициента пропорциональности k , очевидно, определяется заданием единиц измерения длин и площадей; нам будет удобно считать, что

$$d_{AB} = \sqrt{2 \cdot плAKBL}. \quad (14)$$

Ясно, что если точка C принадлежит отрезку AB , то

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB}$$

(ибо площади изображенных на рис. 153, а подобных между собой прямоугольников $AKBL$, AK_1CL_1 и CK_2BL_2 пропорциональны квадратам диагоналей AB , AC и BC этих прямоугольников).

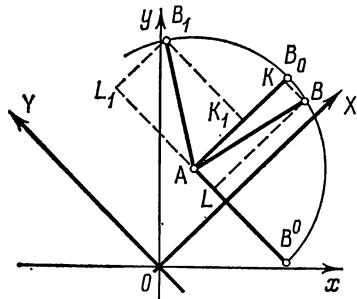


Рис. 154.

Начнем теперь поворачивать отрезок AB вокруг его конца A , сохраняя, скажем, его евклидову длину (рис. 154). Легко видеть, что по мере приближения к положению $AB_0 \parallel OX$ (или $AB^0 \parallel OY$) площадь прямоугольника $AKBL$ становится все меньше; для положения $AB_0 \parallel OX$ (или $AB^0 \parallel OY$) отрезка AB соответствующий ему «прямоугольник» вырождается в отрезок AB_0 (или AB^0), так что площадь его обращается в нуль. Поэтому считают, что длина лю-

бого отрезка особой прямой равна нулю. Когда отрезок AB в процессе вращения вокруг точки A проходит положение $AB_0 \parallel OX$ (или $AB^0 \parallel OY$), площадь прямоугольника $AKBL$ снова начинает расти; при этом, однако, ориентация прямоугольника $AKBL$ (направление обхода его вершин $A \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow L$; здесь $AK \parallel LB \parallel OX$ и

¹⁾ Другими словами, площадь фигуры умножается на r^2 при увеличении всех линейных размеров фигуры в r раз.

$AL \parallel KB \parallel OY$) меняется на противоположную (ср. прямоугольники $AKBL$ и $AK_1B_1L_1$ на рис. 154). В силу последнего обстоятельства расстояния между точками A и B и между точками C и D , так расположенными на плоскости, что отрезки $OM \parallel AB$ и $ON \parallel CD$ принадлежат двум смежным углам, образованным прямыми OX и OY , удобно считать качественно разными: два таких отрезка всегда несравнимы между собой. Отрезки и прямые, параллельные проходящим через начало координат прямым, заполняющим ту пару вертикальных углов, образованных осями OX и OY , которая содержит ось Ox , мы будем называть *отрезками* (соответственно *прямыми*) *1-го рода*, а отрезки и прямые, параллельные (проходящим через начало координат) прямым, заполняющим пару вертикальных углов, содержащих ось Oy , — *отрезками* (прямыми) *2-го рода*;

отрезки особых прямых (отрезки, параллельные прямой OX или прямой OY), можно назвать *отрезками нулевого рода*, а сами эти прямые — *прямыми нулевого рода*. Каждый отрезок плоскости Минковского движением (11) или (11а) переводится в отрезок того же самого рода: *необходимым и достаточным условием равенства отрезков AB и $A'B'$* (т. е. возможности совмещения этих отрезков движением (11) или (11а)) *является совпадение их длин и то, что оба отрезка суть отрезки одного рода* (если AB и $A'B'$ — отрезки нулевого рода, то оба они, кроме того, должны принадлежать одному семейству особых прямых, т. е. должны быть параллельны между собой).

Пусть теперь координаты точек A и B в системе координат $\{X, Y\}$ равны (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) , а в системе координат $\{x, y\}$ равны (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Нетрудно видеть, что стороны прямоугольника $AKBL$ равны $|X_2 - X_1|$ и $|Y_2 - Y_1|$ (рис. 155); поэтому $пЛАКBL = |(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)|$ и, значит,

$$d_{AB} = \sqrt{2 |(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)|}. \quad (15)$$

Переходя с помощью формул (12) от координат X, Y к координатам x, y , мы получим, что расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ равно

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \left| \frac{1}{2} [(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)] [(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)] \right|} &= \\ &= \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2|}, \end{aligned}$$

т. е.

$$d_{AB} = \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2|} \quad (15a)$$

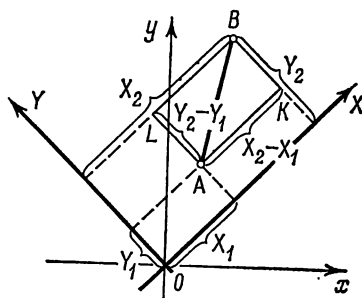


Рис. 155.

(ср. с формулой (1) на стр. 16, относящейся к евклидовой геометрии). Легко видеть, что если отбросить знак абсолютной величины под корнем, то подкоренное выражение в правой части формул (15) и (15а) будет положительно, когда AB — отрезок 1-го рода, и отрицательно, когда AB — отрезок 2-го рода; поэтому иногда также пишут

$$d_{AB} = \sqrt{2(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)} \quad (15')$$

или

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}. \quad (15'a)$$

В этих формулах уже отражено то, что длины отрезков 1-го и 2-го рода измеряются в разных (причем несравнимых между собой!) единицах: длины отрезков 1-го рода — в действительных числах, а длины отрезков 2-го рода — в мнимых.

Если ось Ox имеет механический смысл оси времени, а Oy есть ось, характеризующая положение «события» на прямой o , то любой отрезок 1-го рода совпадает с интервалом между двумя событиями, которые в некоторой инерциальной системе отсчета (понимаемой так, как это принято в теории относительности Эйнштейна) *происходят в одном и том же месте*, и длина отрезка есть не что иное, как временной интервал между рассматриваемыми событиями в этой инерциальной системе отсчета. Аналогично, имея отрезок 2-го рода, мы можем так подобрать инерциальную систему отсчета, что концы отрезка будут отвечать *одновременным событиям*; при этом измеренная в смысле геометрии Минковского длина отрезка совпадает с пространственным расстоянием между соответствующими точками прямой o . Таким образом, можно считать, что длины отрезков 1-го рода измеряются в единицах времени (*сек*), а длины отрезков 2-го рода — в единицах расстояния (*см*). В соответствии с этим прямые 1-го рода геометрии Минковского часто называют *временными* прямыми, а прямые 2-го рода — *пространственными* прямыми.

Окружность S геометрии Минковского с центром Q и радиусом CD (где CD — какой-то отрезок 1-го или 2-го рода) естественно определить как *множество таких точек M , что отрезок QM равен отрезку CD* . Условимся обозначать координаты центра Q окружности S в системе координат $\{X, Y\}$ через (A, B) , а в системе координат $\{x, y\}$ — через (a, b) ; координаты концов C и D отрезка CD обозначим через (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) , соответственно через (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Величину

$$2(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) = (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$$

(она может быть и положительной и отрицательной!) назовем *квадратом радиуса* окружности S и обозначим через $\pm r^2$ (где $r > 0$). Ясно, что уравнение окружности S с центром Q и квадратом радиуса $\pm r^2$ будет иметь вид

$$2(X - A)(Y - B) = \pm r^2, \quad (16)$$

соответственно

$$(x - a)^2 - (y - b)^2 = \pm r^2 \quad (16a)$$

(ср. с уравнением (2) на стр. 17, т. е. с уравнением евклидовой окружности!). Последнее уравнение также можно переписать следующим образом:

$$x^2 - y^2 + 2px + 2qy + f = 0, \quad (16')$$

где

$$p = -a, \quad q = b, \quad f = a^2 - b^2 \mp r^2.$$

В частности, окружность с центром в начале координат $O(0, 0)$ имеет в геометрии Минковского уравнение

$$XY = \text{const} \quad (17)$$

или

$$x^2 - y^2 = \text{const}. \quad (17a)$$

Ясно, что с точки зрения обычной евклидовой геометрии окружность (16) или (16a) представляет собой гиперболу, асимптотами которой являются проходящие через центр окружности особые прямые (рис. 156). Окружность S мы назовем окружностью 1-го рода или окружностью 2-го рода, в зависимости от того, является ее радиус отрезком 1-го или отрезком 2-го рода. На рис. 156 сплошной линией и пунктиром изображены окружности S и \bar{S} (1-го и 2-го рода) с общим центром Q и квадратами радиуса $+r^2$ и $-r^2$;

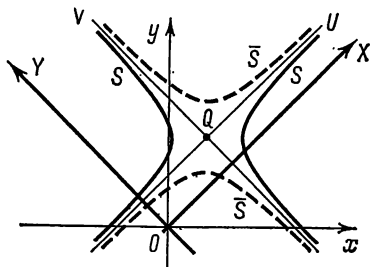


Рис. 156.

такие две окружности мы будем называть сопряженными. «Крест», образованный проходящими через точку Q особыми прямыми QU и QV , представляет собой множество точек, удаленных от точки Q на нулевое расстояние; это множество точек иногда называют *окружностью нулевого радиуса* (или *окружностью нулевого рода*). Нетрудно видеть, что *через любые три точки плоскости Минковского проходит единственная прямая* (1-го, 2-го или нулевого рода) *или единственная окружность* (1-го, 2-го или нулевого рода).

С тем обстоятельством, что окружности плоскости Минковского с евклидовой точки зрения являются гиперболами, связано евклидово название преобразований (13a) или (13): эти преобразования называют «гиперболическими поворотами», так как они переводят в себя окружности (17) или (17a) с центром O , т. е. евклидовы гиперболы (см. рис. 157 — гиперболы S и \bar{S} с уравнениями $XY = \pm c$ преобразование $X_1 = \lambda X$, $Y_1 = Y$ переводит в гиперболы S_1 и \bar{S}_1 ; последующее преобразование $X' = X_1$, $Y' = \frac{1}{\lambda} Y_1$ переводит, очевидно, гиперболы S_1 и \bar{S}_1 в исходные гиперболы S и \bar{S}).

Обратимся теперь к вопросу об угле между прямыми. Углом δ_{ll_1} между прямыми l и l_1 плоскости Минковского, пересекающимися в точке Q , естественно назвать длину заключенной между прямыми l и l_1 дуги NN_1 «единичной окружности» S с центром Q ; под единичной окружностью здесь понимается окружность, квадрат радиуса которой равен $+1$ или -1 .

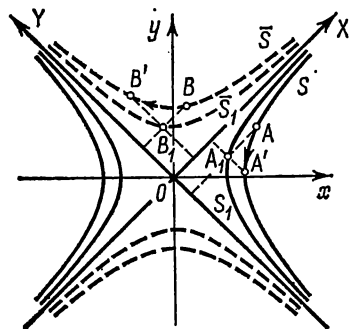


Рис. 157.

Однако это определение угла имеет смысл лишь в том случае, когда обе прямые l_1 и l_2 суть прямые 1-го рода (рис. 158, а) или когда обе они — прямые 2-го рода (рис. 158, б): лишь в этих случаях обе прямые пересекают одну и ту же «единичную окружность» и, следовательно, высекают некоторую дугу NN_1 этой окружности. Длину дуги NN_1 можно определить как предел длины вписанной в NN_1 ломаной $NM_1M_2 \dots M_nN_1$, все звенья которой неограниченно уменьшаются; при этом любопытно отметить, что все звенья ломаной, вписанной в окружность 1-го рода,

будут отрезками 2-го рода и, наоборот, звенья ломаной, вписанной в окружность 2-го рода, являются отрезками 1-го рода (на рис. 158 эти ломаные не обозначены). Поскольку такое определение величины

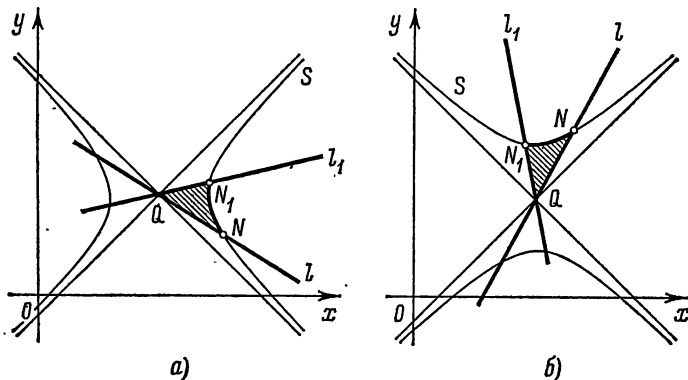


Рис. 158.

угла, связывающее ее с длиной дуги, вычисляемой с помощью некоторого бесконечного процесса, является довольно сложным, то его удобно заменить следующим: величина δ_{ll_1} угла, образованного двумя пересекающимися в точке Q прямыми l и l_1 , равна удвоенной площади сектора NQN_1 единичного круга с центром Q

(см. те же рис. 158, а, б)¹⁾. Угол δ_{ll_1} между прямыми l и l_1 можно считать также направленным, приписывая ему знак $+$ или $-$ в зависимости от того, происходит вращение, переводящее луч QN в луч QN_1 , в направлении, обратном направлению вращения часовой стрелки, или оно совпадает с направлением вращения часовой стрелки. Два угла APB и CQD , оба образованные прямыми одного и того же (1-го или 2-го) рода, равны в смысле геометрии Минковского (т. е. переводятся один в другой движением (11) или (11а)) в том и только в том случае, если *все отрезки* PA , PB , QC и QD — отрезки одного рода и если $\delta_{PA, PB} = \delta_{QA, QC}$. О «величинах» углов, образованных прямыми разного рода, и об условиях равенства таких углов мы еще скажем ниже.

Пусть теперь l и l_1 — две прямые, скажем, 1-го рода, пересекающиеся в точке Q ; $\sim NN_1$ — дуга единичной окружности S с центром в точке Q , отсекаемая прямыми l и l_1 (рис. 159). Произведем «гиперболический поворот», переводящий луч QN в луч QN_1 ; луч QN_1 этот поворот переведет в некоторый луч QN_2 ; луч QN_2 — в луч QN_3 ; луч QN_3 — в луч QN_4 и т. д.; здесь $N, N_1, N_2, N_3, N_4, \dots$ — точки окружности S . Поскольку все прямые QN ($\equiv l$), QN_1 ($\equiv l_1$), QN_2, QN_3, QN_4, \dots — прямые 1-го рода, то все лучи QN, QN_k (где $k = 1, 2, 3, \dots$) заключены внутри угла UQV ; ограниченного проходящими через точку Q особыми прямыми QU и QV , отделяющими прямые 1-го рода от прямых 2-го рода. Поэтому в геометрии Минковского мы можем «неограниченно» вращать луч QN вокруг точки Q , поворачивая его на сколь угодно большой угол (ибо $\delta_{QN, QN_k} = k \cdot \delta_{QN, QN_1}$), — и при этом мы никогда не достигнем особой прямой QU , образующей с прямой QN «бесконечно большой угол». Точно так же показывается, что и прямую 2-го рода можно повернуть на угол любой величины: особые прямые образуют с этой прямой угол, который следует считать «бесконечно большим».

Оставив временно без внимания вопрос об угле между «разноименными» прямыми (прямой 1-го рода и прямой 2-го рода), обратимся к определению расстояния от точки до прямой, а затем и расстояния между параллельными прямыми. Для того чтобы иметь возможность измерить эти расстояния, необходимо указать, какие прямые плоскости Минковского мы будем называть перпендикулярными. Однако определение перпенди-

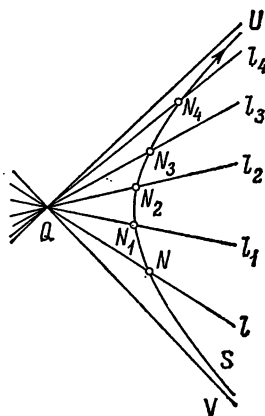


Рис. 159.

¹⁾ Напомним, что обычное («евклидово» или «аффинное») понятие площади сохраняет свой смысл и в геометрии Минковского (см. выше, стр. 197).

кулярных прямых не составляет затруднения: условимся, по образцу (обычной) геометрии Евклида, называть все проходящие через центр окружности прямые ее диаметрами и считать, что *каждый диаметр d окружности S перпендикулярен проведенной в конце этого диаметра касательной t к окружности S* (т. е. прямой 1-го или 2-го рода, имеющей с этой окружностью единственную общую точку¹⁾). Поэтому естественно считать, что прямая l_1 перпендикулярна прямой l , если для произвольной окружности S с диаметром $d \parallel l$ касательная, проведенная к этой окружности в конце диаметра d , параллельна l_1 (см. рис. 160). Легко видеть, что *перпендикуляром к прямой 1-го рода всегда будет прямая 2-го рода и наоборот*.

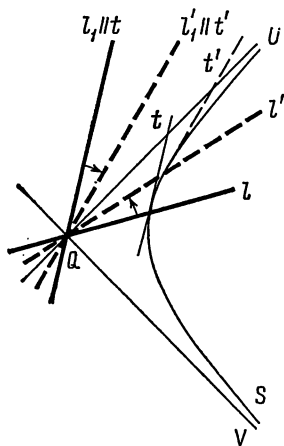


Рис. 160.

Если прямая l поворачивается вокруг принадлежащей ей точки Q , приближаясь к особой прямой QU , то проходящая через Q прямая $l_1 \perp l$ (знак перпендикулярности прямых в геометрии Минковского мы сохраним таким же, как в геометрии Евклида) поворачивается вокруг Q не в том же направлении, что и l , как в евклидовой геометрии, а в противоположном направлении (рис. 160); при этом обе прямые, l и l_1 , одновременно приближаются к прямой QU .

Последнее вытекает также из того, что *каждые две перпендикулярные (в смысле геометрии Минковского!) прямые l и l_1 симметричны (в евклидовом смысле!) относительно проходящих через точку Q их пересечения особых прямых QU и QV (докажите!)²⁾*.] В силу этого естественно считать, что *каждая особая прямая плоскости Минковского перпендикулярна сама себе*.

Заметим, что из нашего определения перпендикулярности симметричности отношения перпендикулярности двух прямых (т. е. то, что из $l_1 \perp l$ вытекает $l \perp l_1$) автоматически не следует. Однако на самом деле эта симметричность имеет место: *если прямая l_1 перпендикулярна прямой l , то и l перпендикулярна l_1* (рис. 161). При этом нетрудно показать, что *если $l \perp l_1$, то имеющий направление прямой l диаметр окружности S делит пополам все хорды окружности, параллельные прямой l_1* ; это обстоятельство также отражено на рис. 161.

1) Каждая особая прямая (проведенная в конце диаметра d) также имеет с S единственную общую точку; эти прямые мы, естественно, не будем называть касательными к S .

2) Отсюда уже вытекает симметричность отношения перпендикулярности (ср. ниже).

Теперь расстоянием d_{Ml} от точки M до прямой l 1-го или 2-го рода естественно назвать длину d_{MP} перпендикуляра MP , опущенного из точки M на прямую l (рис. 162). Расстоянием d_{l_1l} между двумя параллельными прямыми l_1 и l 1-го или 2-го рода мы назовем

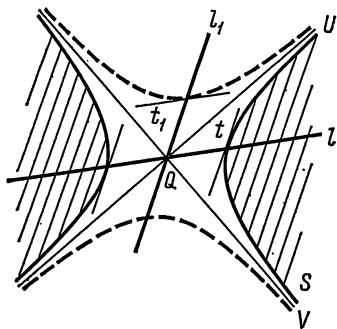


Рис. 161.

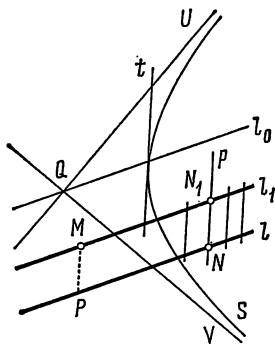


Рис. 162.

расстояние d_{Ml} от произвольной точки M прямой l_1 до прямой l ; легко видеть, что это расстояние не зависит от выбора точки M (см. тот же рис. 162). Расстояние d_{l_1l} между прямыми l_1 и l можно также определить как длину d_{N_1N} отрезка N_1N , высекаемого прямыми l_1 и l на произвольной перпендикулярной к ним прямой p ; ясно, что это определение равносильно первоначальному. Величина расстояния между параллельными особыми прямыми k и k_1 или расстояния от точки M до особой прямой k в геометрии Минковского никак не определяется¹⁾.

Заметим, что в геометрии Минковского нельзя уже, разумеется, говорить, что перпендикулярные прямые образуют между собой угол $\frac{\pi}{2}$, — напротив, так как эти две прямые всегда будут разного рода, то ни о какой «величине» угла между ними мы пока не можем говорить. Однако сам факт наличия перпендикулярных прямых уже

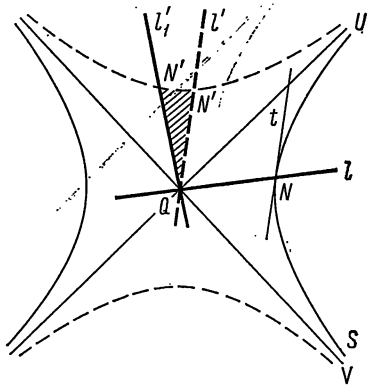


Рис. 163.

¹⁾ Это связано с тем, что если k, k_1 — две произвольные (параллельные между собой) особые прямые и M, M_1 — две произвольные точки (либо одновременно принадлежащие k и k_1 , либо одновременно не принадлежащие этим прямым), то существует движение (11) или (11а), переводящее k в k_1 и M в M_1 .

позволяет сопоставить двум разноименным прямым (т. е. прямым, одна из которых 1-го рода, а другая—2-го) l и l_1 некоторое число так, что совпадение этого числа для двух пар прямых равносильно «равенству» этих пар (т. е. возможности перевести одну из них в другую движением (11) или (11a)): это число равно (направленному!) углу $\delta_{l'l_1}$, где $l' \perp l$ (рис. 163). Разумеется, определенную таким образом величину мы должны считать несравнимой с величиной угла между двумя прямыми 1-го рода или с величиной угла между двумя прямыми 2-го рода.

Укажем еще, что если A, B, M_0 —три точки плоскости Минковского и прямые AB, AM_0, BM_0 —все неособые (т. е. прямые 1-го или 2-го рода), то множество всех таких точек M , что (направленный) угол между MA и MB равен углу между M_0A и M_0B (здесь считается, что MA —прямая того же рода, что и M_0A , а MB —того же рода, что и M_0B ; если же прямые MA и M_0A , а также MB и M_0B —разного рода, то надо требовать, чтобы угол между MA и MB был равен углу между M_0A' и M_0B' , где $M_0A' \perp M_0A, M_0B' \perp M_0B$), представляет собой окружность S , проходящую через точки A, B и M_0 (рис. 164, а). В частности, если точки A и B фиксированы, то множество всевозможных точек M таких, что $MA \perp MB$, представляет собой окружность с диаметром AB (рис. 164, б).

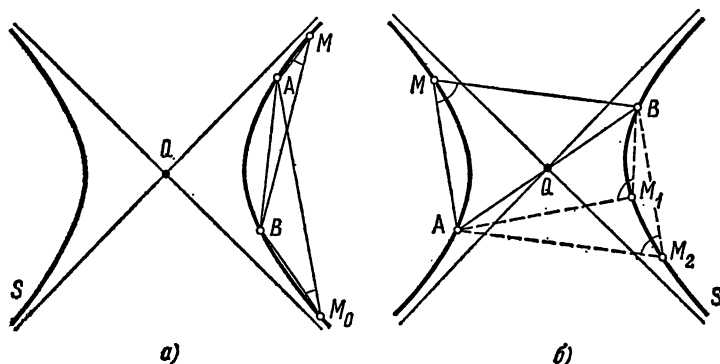


Рис. 164.

Далее нам понадобятся некоторые сведения, касающиеся «тригонометрии гиперболы». Пусть S —«единичная окружность»

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (18)$$

плоскости Минковского с центром $O(0, 0)$ и пусть OA —неподвижный радиус окружности S (причем $A(1, 0)$ —вершина гиперболы (18)), а OM —подвижный радиус (ср. рис. 165 с рис. 165а, на

котором изображены евклидова окружность

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{18a}$$

и два ее радиуса OA и OM). Направленный угол $\delta_{OA, OM} = \varphi$ (понимаемый в смысле геометрии Минковского, т. е. равный взятой со

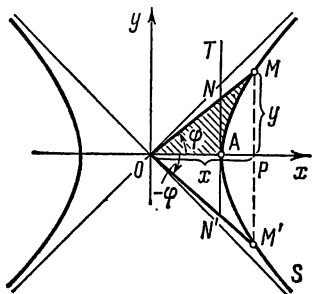


Рис. 165.

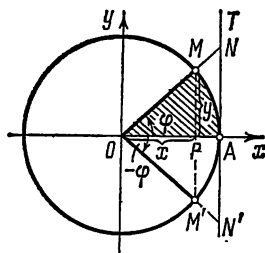


Рис. 165a.

знаком $+$ или $-$ удвоенной площади заштрихованного на рис. 165 сектора AOM гиперболы S) называют также *гиперболическим углом* между прямыми OA и OM ; координаты $x = OP > 0$ и $y = PM$ подвижной точки M называют *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом* угла φ и обозначают $ch \varphi$ и $sh \varphi$. Отношение $\frac{PM}{OP} = \frac{sh \varphi}{ch \varphi}$, по абсолютной величине равное длине отрезка AN , отсекаемого «подвижным радиусом» OM на касательной AT к гиперболе S в ее вершине A , называют *гиперболическим тангенсом* угла φ и обозначают через $th \varphi$.

Из рис. 165 видно, что при неограниченном увеличении угла φ величины $ch \varphi$ и $sh \varphi$ также растут неограниченно, а $th \varphi$ стремится к 1; далее, при $\varphi = 0$ имеем $ch \varphi = 1$, $sh \varphi = 0$ и $th \varphi = 0$. Наконец, из того же рис. 165 вытекает, что

$$ch(-\varphi) = ch \varphi \tag{19a}$$

(подобно тому как $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$);

$$sh(-\varphi) = -sh \varphi \tag{19б}$$

(подобно тому как $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$); в силу этого и $th(-\varphi) = -th \varphi$ (19в)

(подобно тому как $tg(-\varphi) = -tg \varphi$). Графики функций $u = ch \varphi$, $u = sh \varphi$ и $u = th \varphi$ изображены на рис. 166.

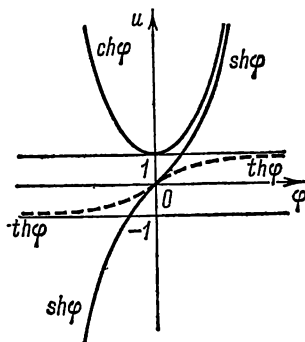


Рис. 166.

Гиперболические функции обладают многими свойствами, родственными свойствам тригонометрических функций $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ и $\operatorname{tg} \varphi$; эти свойства могут быть несложно доказаны с использованием поворотов (13а) или (13) ¹⁾. Так, например, из уравнения (18) гиперболы S следует, что *при любом угле* φ

$$\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1. \quad (20)$$

Далее, *при любых значениях углов* φ и ψ

$$\operatorname{sh}(\varphi \pm \psi) = \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \psi \pm \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \psi \quad (21a)$$

и

$$\operatorname{ch}(\varphi \pm \psi) = \operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \psi \pm \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \psi, \quad (21б)$$

откуда в свою очередь следует, что

$$\operatorname{th}(\varphi \pm \psi) = \frac{\operatorname{th} \varphi \pm \operatorname{th} \psi}{1 \pm \operatorname{th} \varphi \operatorname{th} \psi}. \quad (21в)$$

Из формул (21a) — (21в) легко получаем также, что

$$\operatorname{sh} 2\varphi = 2 \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi, \quad (22a)$$

$$\operatorname{ch} 2\varphi = \operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi, \quad \operatorname{th} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{th} \varphi}{1 + \operatorname{th}^2 \varphi};$$

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{2 \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \operatorname{th} \varphi = \frac{2 \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (22б)$$

и т. д.

Заметим, наконец, что фигурирующие в формулах (11) коэффициенты $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ и $\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$ связаны между собой соотношением

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 - \left(\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 = 1,$$

сходным с равенством (20), связывающим гиперболические функции $\operatorname{ch} \varphi$ и $\operatorname{sh} \varphi$. Поэтому если мы подберем такой гиперболический угол α , что $\operatorname{sh} \alpha = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$, то будем иметь $\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, в силу чего формулы (11) можно переписать так:

$$\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} \alpha + y \operatorname{sh} \alpha + a, \\ y' &= x \operatorname{sh} \alpha + y \operatorname{ch} \alpha + b \end{aligned} \quad (23)$$

¹⁾ См., например, книгу Шерватова [57], гл. IX книги Нордена [62] или п. 27 книги Яглома и Ашкингузе [56].

(ср. с формулами (6) на стр. 20, выражающими движения евклидовой плоскости).

Обратимся теперь к учению о треугольниках плоскости Минковского; при этом всегда будем считать, что стороны $AB \equiv c$, $BC \equiv a$ и $CA \equiv b$ рассматриваемого треугольника ABC являются неособыми прямыми. Если все эти стороны являются прямыми одного рода, то отрезки $AB=c$, $BC=a$ и $CA=b$ (длины сторон треугольника мы будем обозначать теми же буквами a , b , c , что и соответствующие прямые) можно сравнивать между собой; при этом если только точки A , B и C не принадлежат одной прямой, то *большая сторона треугольника ABC обязательно будет больше суммы двух других сторон* (см. рис. 167, где $AM=AC=b$ и $BN=BC=a$, так

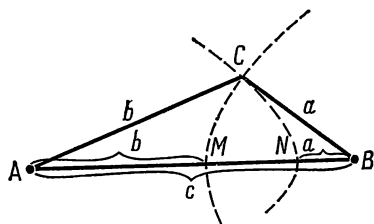


Рис. 167.

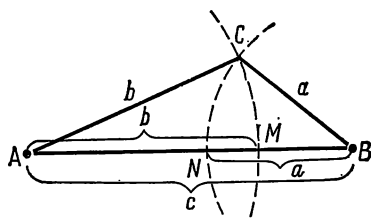


Рис. 167а.

что $a + b = BN + AM < AB = c$; ср. с рис. 167а, иллюстрирующим известное неравенство $a + b > c$, связывающее стороны треугольника в геометрии Евклида).

Неравенство

$$a + b < c.$$

(где c — наибольшая сторона треугольника ABC), можно также вывести и из так называемой «теоремы косинусов» геометрии Минковского: *если все стороны треугольника ABC — прямые одного рода, то*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{ch} A, \quad (24a)$$

где $A = \delta_{AB, AC}$ — (ненаправленный, т. е. положительный) угол между сторонами AB и AC треугольника ABC (понимаемый, разумеется, в смысле геометрии Минковского¹⁾). Далее, площадь треугольника может быть определена по формуле

$$\text{пл}ABC = \frac{1}{2} ab \operatorname{sh} C. \quad (25)$$

¹⁾ Выше у нас были определены лишь функции $\operatorname{ch} \varphi$, $\operatorname{sh} \varphi$ и $\operatorname{th} \varphi$, где φ — угол между двумя прямыми 1-го рода; функции $\operatorname{ch} \psi$, $\operatorname{sh} \psi$ и $\operatorname{th} \psi$, где ψ — угол (в смысле геометрии Минковского) между прямыми m и m_1 2-го рода, можно определить, например, равенством их тем же функциям угла между прямыми $l \perp m$ и $l_1 \perp m_1$.

Из формулы (25), в частности, следует, что

$$\frac{1}{2} ab \operatorname{sh} C = \frac{1}{2} ac \operatorname{sh} B = \frac{1}{2} bc \operatorname{sh} A,$$

откуда без труда получаем

$$\frac{a}{\operatorname{sh} A} = \frac{b}{\operatorname{sh} B} = \frac{c}{\operatorname{sh} C} \quad (246)$$

(«теорема синусов»). Формулы (24а, б) и (25) можно также перенести и на случай треугольника ABC , имеющего стороны разного рода; мы, однако, здесь на этом не остановимся.

Скажем еще несколько слов о «равнобедренных» и «прямоугольных» треугольниках плоскости Минковского (из неравенства $c > a + b$ следует, что «равносторонний» треугольник, все

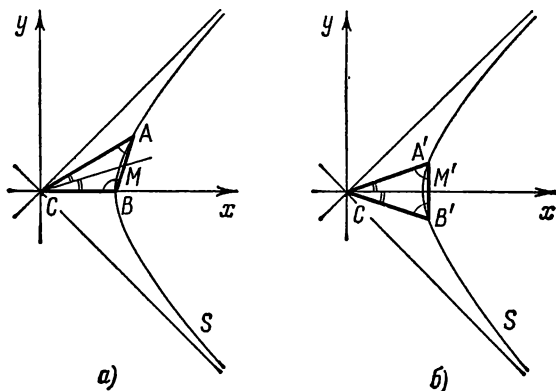


Рис. 168.

стороны которого равны между собой, в плоскости Минковского существовать не может). Если стороны AC и BC треугольника ABC равны (и, значит, AC и BC — прямые одного рода), то вершины A и B треугольника принадлежат окружности S с центром C и радиусом $CA = CB$ (рис. 168, а). Примем точку C за начало координат; тогда с помощью «поворота» (13а) или (13) медиану CM треугольника (где M — середина стороны AB) можно совместить с осью Ox . Стороны CA' и CB' полученного таким образом треугольника $A'B'C$ расположатся симметрично (в евклидовом смысле!) прямой Ox (рис. 168, б), откуда следует, что медиана CM равнобедренного треугольника одновременно является его биссектрисой и «высотой». [Из того, что $CM \perp AB$, вытекает, что основание AB равнобедренного треугольника всегда является прямой другого рода, чем его боковые стороны.] Нетрудно вывести из рис. 168, б также и аналог

теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника.

Пусть теперь ABC — «прямоугольный» треугольник, т. е. $AC \perp BC$ (рис. 169, а). При этом катеты AC и BC треугольника обязательно

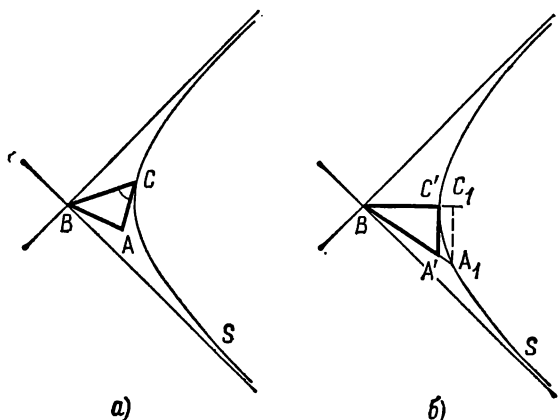


Рис. 169.

будут прямыми разного рода; предположим, что «гипотенуза» AB является прямой того же рода, что и катет BC . В таком случае, как нетрудно показать (ср. рис. 169, а с рис. 169, б, где точка C' — вершина гиперболы S),

$$a = c \operatorname{ch} B, \quad b = c \operatorname{sh} B, \quad b = a \operatorname{th} B. \quad (26)$$

Из первых двух формул (26) и соотношения (20) вытекает «теорема Пифагора»:

$$a^2 - b^2 = c^2. \quad (27)$$

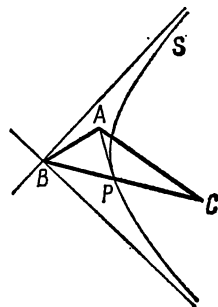
Заметим также, что из сравнения второй из формул (26) и формулы (25) следует, что площадь произвольного треугольника ABC можно также определить так:

$$\text{пл}ABC = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \quad (25')$$

Рис. 170.

где $h_a = b \operatorname{sh} C$ — длина d_{AP} «высоты» AP треугольника ABC , опущенной на сторону $BC \equiv a$ (рис. 170).

Теорема о точке пересечения медиан треугольника переносится на случай геометрии Минковского без всякого изменения: (евклидово) доказательство этой теоремы (ср. § 4 гл. I, в частности, стр. 64) полностью сохраняет силу и в плоскости Минковского. Также и три перпендикуляра, восстановленных к сторонам треугольника ABC



в его серединах, пересекаются в одной точке O — в центре описанной окружности S треугольника (рис. 171, а). [Заметим, что если стороны треугольника ABC одного рода и длина радиуса

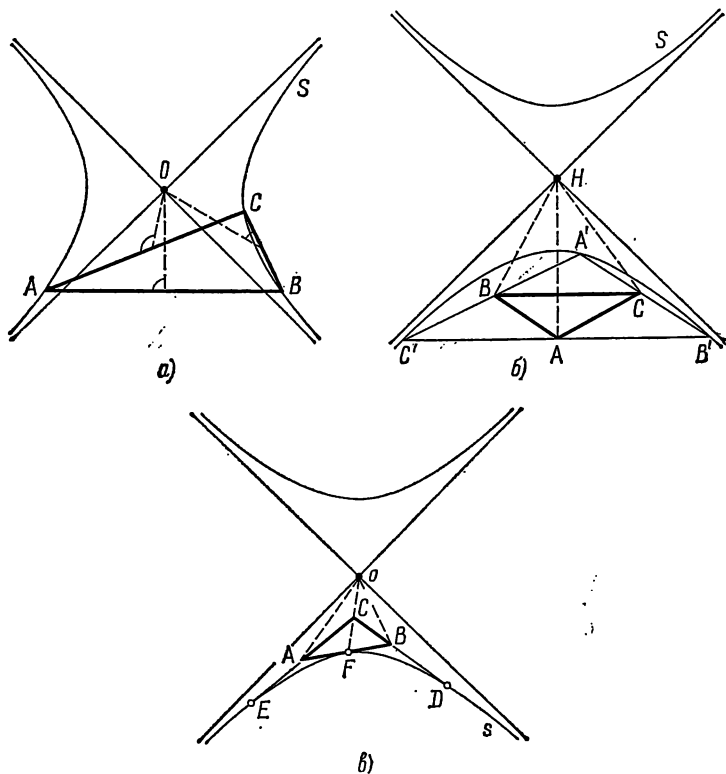


Рис. 171.

описанной вокруг треугольника окружности равна R , то

$$\frac{a}{\operatorname{sh} A} = \frac{b}{\operatorname{sh} B} = \frac{c}{\operatorname{sh} C} = 2R$$

(докажите!).] Отсюда, в точности как в случае евклидовой геометрии, устанавливается, что также и *три высоты* треугольника ABC *пересекаются в одной точке* (рис. 171, б).

Треугольник плоскости Минковского имеет три биссектрисы лишь в том случае, когда все стороны его — прямые одного рода: ведь угол, образованный разноименными прямыми l и l_1 , никак не может иметь биссектрису, т. е. прямой, образующей с l и l_1 равные

углы¹⁾. Однако, если треугольник ABC имеет три биссектрисы (мы знаем, что, например, в случае равнобедренного или прямоугольного треугольника дело обстоит заведомо не так), то они пересекаются в одной точке; эта точка o является центром вписанной окружности s , касающейся всех сторон треугольника (рис. 171, в). [Ясно, что если не все стороны треугольника являются прямыми одного рода, то окружности, касающейся всех сторон треугольника, существовать не может, ибо, например, все касательные окружности 1-го рода являются прямыми 2-го рода.]

Нетрудно видеть, что в геометрии Минковского, как и в геометрии Евклида, касательные PA и PB , проведенные к окружности S с центром Q из одной точки P , равны между собой и что прямая QP (т. е. проходящий через точку P диаметр окружности S) делит пополам отрезок AB и перпендикулярна прямой AB (рис. 172). Укажем еще, что середины всех проходящих

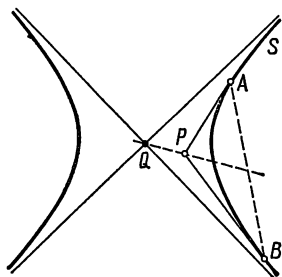


Рис. 172.

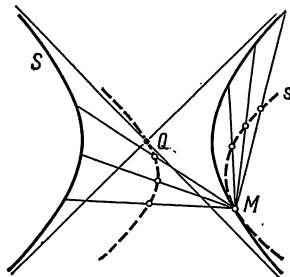


Рис. 173.

через фиксированную точку M хорд окружности S принадлежат одной окружности s (ср. рис. 173, где точка M принадлежит S). Наконец, середины сторон треугольника ABC и основания его высот (а также точки, делящие пополам отрезки высот, заключенные между точкой пересечения высот и вершинами треугольника) принадлежат одной окружности S_1 , радиус которой равен половине радиуса описанной окружности S треугольника. Окружность S_1 можно назвать окружностью шести (деяти) точек треугольника ABC плоскости Минковского; если треугольник ABC имеет вписанную окружность s , то окружность шести (деяти) точек S_1 треугольника ABC касается его вписанной окружности s (рис. 174).

Рассмотрим теперь окружность S плоскости Минковского и точку M (рис. 175). Нетрудно показать, что произведение

$$MA \cdot MB = d_{MA} \cdot d_{MB}, \quad (28)$$

1) Биссектрису угла, образованного прямыми l и l_1 , можно описать как множество точек, равноудаленных от l и от l_1 (отсюда, кстати сказать, сразу вытекает сформулированная ниже теорема о точке пересечения биссектрис треугольника). Но если прямые l и l_1 разноименные, то равноудаленных от l и l_1 точек не существует вовсе, ибо расстояние от точки до прямой 1-го рода и расстояние от точки до прямой 2-го рода принципиально несравнимы: первое из них измеряется в единицах длин отрезков 2-го рода (так сказать, в «мнимых» единицах; ср. выше, стр. 200), а второе — в единицах длин отрезков 1-го рода (в «действительных» единицах).

где A и B — точки пересечения проходящей через точку M прямой l с окружностью S , зависит только от окружности S и от точки M ,

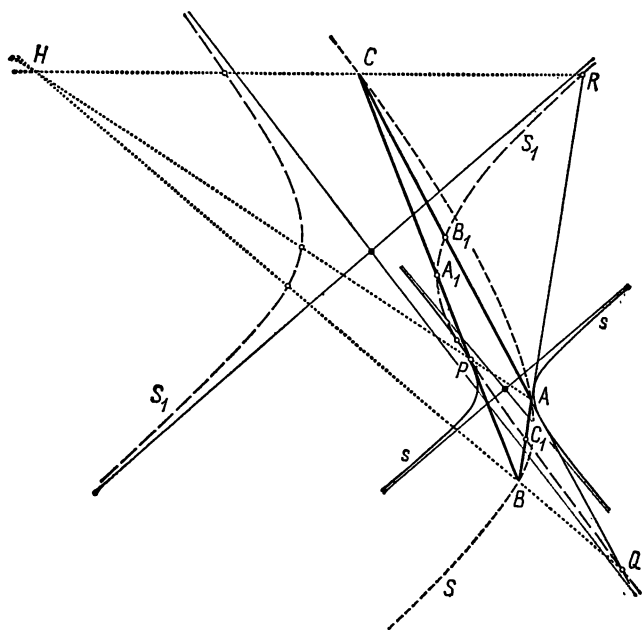


Рис. 174.

но не от выбора прямой l . Это произведение, которому мы еще условимся приписывать знак плюс, если направления отрезков MA и MB (от M к A , соответственно от M к B) одинаковы и l — прямая 1-го рода или если направления отрезков MA и MB противоположны и l — прямая 2-го рода, и знак минус в обратном случае¹⁾, называется степенью точки M относительно окружности S .

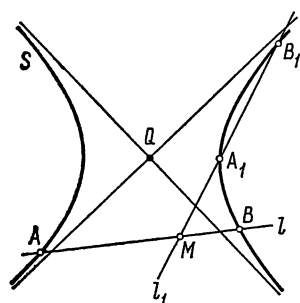


Рис. 175.

Можно показать, что степень точки $M(x_0, y_0)$ относительно окружности S , записываемой уравнением (16') (стр. 201), равна

$$x_0^2 - y_0^2 + 2px_0 + 2qy_0 + f,$$

т. е. равна результату подстановки в уравнение (16') окружности S

¹⁾ Вот здесь нам очень удобно условиться считать длины отрезков 2-го рода мнимыми: при этом определение знака произведения (28) остается таким же, как в геометрии Евклида или в геометрии Галилея.

координат x_0, y_0 точки M . Отсюда без труда получаем, что множество точек плоскости Минковского, имеющих относительно данной окружности S данную степень k , представляет собой окружность,

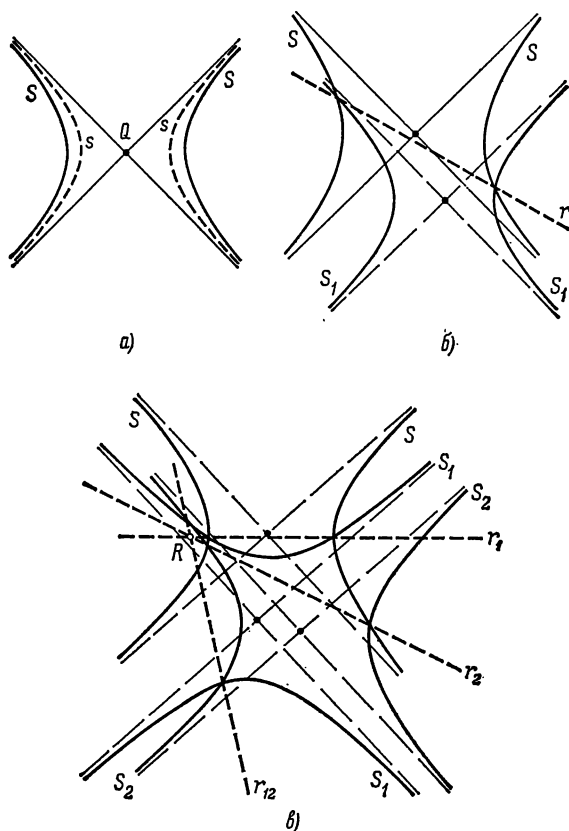


Рис. 176.

концентрическую с окружностью S (т. е. окружность s , центр которой совпадает с центром окружности S ; рис. 176, а), и что множество точек, имеющих одинаковые степени относительно двух окружностей S и S_1 с уравнениями (16') и

$$x^2 - y^2 + 2p_1x + 2q_1y + f_1 = 0, \quad (16'а)$$

представляет собой прямую линию

$$2(p - p_1)x + 2(q - q_1)y + (f - f_1) = 0$$

(рис. 176, б); эту прямую линию r (проходящую через точки пересечения окружностей S и S_1 , если эти точки существуют!) естественно назвать радикальной осью окружностей S и S_1 . Далее, в точности как в случае геометрии Евклида или геометрии Галилея, показывается, что попарные радикальные оси трех окружностей S , S_1 и S_2 плоскости Минковского либо все параллельны между собой, либо пересекаются в одной точке R (рис. 176, в) — радикальном центре трех окружностей, и т. д.

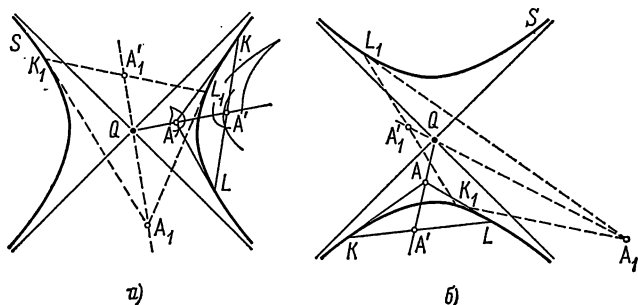


Рис. 177.

Не представляет труда также перенесение в геометрию Минковского учения об инверсии. *Инверсией* с центром Q и степенью k , или инверсией с окружностью инверсии S (причем точка Q является центром этой окружности, а число $k = \pm r^2$ равно квадрату радиуса окружности S), называется *преобразование плоскости Минковского, переводящее каждую точку A в такую точку A' прямой QA , что*

$$QA \cdot QA' = d_{QA} \cdot d_{QA'} = k, \quad (28a)$$

причем при $k > 0$ отрезки QA и QA' имеют одинаковое направление (от Q к A , соответственно от Q к A'), если оба они — 1-го рода, и противоположное, если это — отрезки 2-го рода; если же $k < 0$, то направление отрезка QA' определяется по обратному правилу¹⁾ (см. рис. 177, а, б). Можно показать, что каждую внешнюю по отношению к окружности S точку A инверсия с окружностью инверсии S переводит в точку A' пересечения диаметра QA окружности S с прямой KL , соединяющей точки прикосновения с окружностью S проведенных к ней из точки A касательных AK и AL (см. тот же

¹⁾ Здесь также соглашение о действительных и мнимых длинах отрезков (см. выше, стр. 201) может упростить изложение (ср. со сноской на стр. 214).

рис. 177); точку A' эта инверсия переводит обратно в A ; каждую точку окружности S инверсия оставляет на месте. При этом точку A мы называем внешней по отношению к окружности S плоскости Минковского, если через эту точку проходят две касательные к S ; через точки, принадлежащие S , проходит единственная касательная; точки, через которые не проходит ни одна касательная S , называются внутренними по отношению к S .

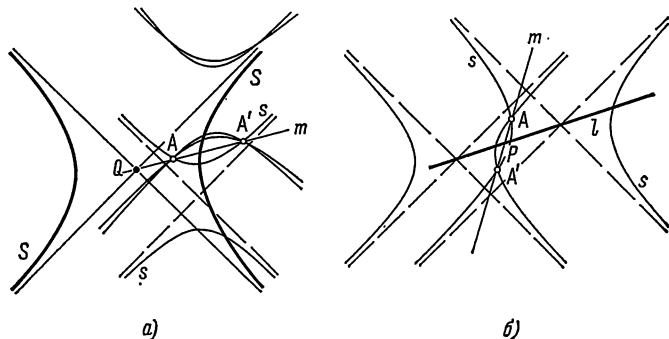


Рис. 178.

Иное определение инверсии с окружностью инверсии S таково: проведем через каждую точку A плоскости всевозможные окружности s (и прямую m), перпендикулярные окружности S (т. е. такие, что касательные к S и к s в точках пересечения S и s перпендикулярны в смысле геометрии Минковского); все эти окружности пересекутся еще в одной точке A' (которая будет совпадать с A , если A принадлежит S), являющейся, по определению, образом точки A при инверсии (рис. 178, а). Исходя из этого определения, инверсии, частным ее случаем часто считают симметрию относительно (неособой) прямой l , переводящую каждую точку A плоскости в такую точку A' прямой $AA' \perp l$, что точка P пересечения AA' и l делит отрезок AA' пополам: в самом деле, симметрию относительно прямой l можно также описать как преобразование, переводящее каждую точку A плоскости Минковского во вторую точку A' пересечения всех проходящих через A окружностей s (и прямой m), перпендикулярных l (т. е. таких, что касательная к s в точке пересечения s с l перпендикулярна прямой l ; см. рис. 178, б). Инверсию с окружностью инверсии S также и в геометрии Минковского часто называют *симметрией относительно окружности S* .

Из определения (28а) инверсии без труда получаем, что точку $A(x, y)$ или $A(X, Y)$ инверсия с центром в начале координат $O(0, 0)$ и степенью k переводит в такую точку $A'(x', y')$ или $A'(X', Y')$,

что

$$x' = \frac{kx}{x^2 - y^2}, \quad X' = \frac{k}{2Y},$$

или

$$y' = \frac{ky}{x^2 - y^2}, \quad Y' = \frac{k}{2X}.$$
(29)

Отсюда, используя уравнение (16') окружности плоскости Минковского, без труда устанавливаем, что *прямую 1-го или 2-го рода, проходящую (соответственно, не проходящую) через центр инверсии Q, это преобразование переводит в ту же самую прямую (в окружность, проходящую через центр инверсии; рис. 179, а), а окружность, проходящую (не проходящую) через центр инверсии,— в прямую, не*

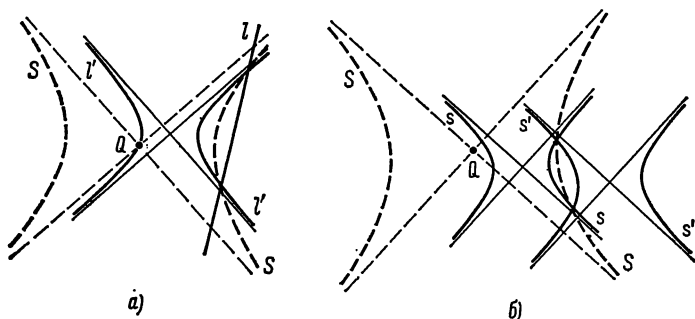


Рис. 179.

проходящую через центр инверсии (в окружность, также не проходящую через центр инверсии; рис. 179, б); особые прямые инверсия переводит снова в особые прямые. Можно также показать, что инверсия является конформным преобразованием плоскости Минковского: две линии Γ и Γ_1 , пересекающиеся в точке A , инверсия переводит в две такие линии Γ' и Γ'_1 , пересекающиеся в точке A' , что угол, образованный проведенными в точке A касательными t и t_1 к линиям Γ и Γ_1 , равен (в смысле геометрии Минковского) углу, образованному проведенными в точке A' касательными t' и t'_1 к линиям Γ' и Γ'_1 . Все эти свойства инверсии могут быть использованы для доказательства многочисленных теорем геометрии Минковского; примеры этого (ср., например, выше, стр. 152—157) мы предоставим читателю отыскать самостоятельно.

Остановимся еще в заключение на некоторых важных общих моментах, связанных с преобразованием инверсии. Ясно, что определение (28а) инверсии не позволяет найти образ A' такой точки A , расстояние d_{QA} которой от центра инверсии Q равно нулю (ибо в этом случае соотношение (28а) приводит к нелепому выводу: $d_{QA'} = \infty$). Но множество точек M плоскости

Минковского, определяемое равенством

$$QM = d_{QM} = 0, \quad (30)$$

представляет собой совокупность двух проходящих через точку Q особых прямых q_1 и q_2 , т. е. оно еще более богато точками, чем в случае плоскости Галилея¹⁾. Поэтому положение здесь оказывается даже более сложным, чем в геометрии Галилея: строго говоря, следует считать, что на плоскости Минковского инверсия представляет собой преобразование, «полем действия» которого является не вся плоскость Минковского, а *плоскость с исключенными из нее двумя прямыми q_1 и q_2* ; если точка Q совпадает с началом системы координат $\{x, y\}$, то уравнения прямых q_1 и q_2 имеют вид $x = y$, $x = -y$. Ясно, что столь сложный характер «поля действия» инверсии в геометрии Минковского влечет за собой многочисленные осложнения, с которыми мы сталкиваемся при изучении свойств инверсии и при всех применениях этого преобразования.

Устранить все эти затруднения можно тем же путем, каким мы шли в случае геометрии Евклида или геометрии Галилея. Условимся считать, что «полем действия» инверсии с центром инверсии $O(0, 0)$ является плоскость Минковского π , дополненная множеством «бесконечно удаленных точек» — образов точек особых прямых q_1 и q_2 , проходящих через начало координат; иными словами, будем считать, что каждой точке $M(m, m)$ особой прямой q_1 отвечает некоторая бесконечно удаленная точка $\Omega_m^{(1)}$, а каждой точке $N(n, -n)$ особой прямой q_2 — бесконечно удаленная точка $\Omega_n^{(2)}$, в которые переводит точки M и N инверсия с центром O и степенью 1; самому же центру инверсии O сопоставим бесконечно удаленную точку $\Omega \equiv \Omega_0^{(1)} \equiv \Omega_0^{(2)}$, в которую переводится точка O любой инверсией с центром O . Плоскость Минковского, дополненную бесконечно удаленными точками $\Omega_m^{(1)}$, $\Omega_n^{(2)}$, Ω (где m и n пробегают множество всех действительных чисел), можно назвать *круговой плоскостью Минковского*²⁾; эта круговая плоскость представляет собой естественное поле действия инверсии и других «круговых преобразований», т. е. преобразований, переводящих каждую окружность (16') плоскости Минковского (в частности, прямую — при $a=0$ в (16')) снова в окружность (или в прямую).

Наглядно представить себе круговую плоскость Минковского позволяет стереографическая проекция (ср. § 9 гл. II, стр. 159—173). Предположим, что наша плоскость Минковского π , отнесенная к координатам x, y , совпадает с плоскостью $z=0$ трехмерного пространства $\{x, y, z\}$. Рассмотрим однополостный гиперболоид γ с уравнением

$$x^2 - y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + z^2 - z = 0, \quad (31)$$

касающийся плоскости π (плоскости $z=0$) в точке $O(0, 0, 0)$ и одновременно пересекающий ее по (особым) прямым q_1 и q_2 с уравнениями $y=x$ и $y=-x$

¹⁾ Это множество точек мы выше назвали «окружностью нулевого радиуса» или «окружностью нулевого рода» с центром Q .

²⁾ Некоторые соображения, на которых мы здесь не остановимся, заставляют дополнять круговую плоскость Минковского еще двумя фиктивными «бесконечно удаленными точками» Σ_1 и Σ_2 , переводимыми в себя инверсией с центром O (ср. ниже, стр. 287; см. также, например, § 5 книги Яглома [77] или статью Яглома [78]).

(рис. 180). Условимся теперь сопоставлять каждой точке $A(x, y)$ плоскости π точку $A'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ пересечения гиперboloида γ с прямой QA (отличную от A), где $Q(0, 0, 1)$ — точка гиперboloида γ , «диаметрально противоположная» точке O (т. е. симметричная с точкой O относительно центра симметрии гиперboloида); нетрудно видеть, что при этом

$$\bar{x} = \frac{x}{x^2 - y^2 + 1}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x^2 - y^2 + 1}, \quad \bar{z} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2 + 1} \quad (32)$$

(ср. с формулами (42) и (42'), стр. 161 и 169). Стереографическая проекция (32) сопоставляет к каждой точке плоскости π единственную точку гиперboloида γ ;

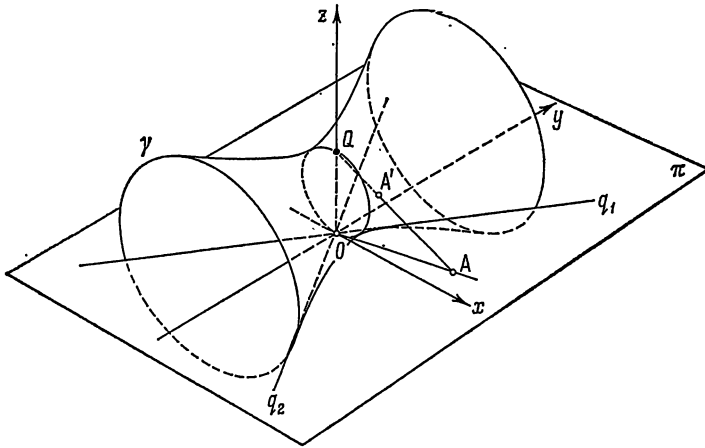


Рис. 180.

однако обратное соответствие между точками гиперboloида и точками плоскости не является полным, поскольку точкам проходящих через центр проекции (через точку Q) прямых o_1 и o_2 с уравнениями $y=x, z=1$ и $y=-x, z=1$, параллельных плоскости π , не отвечают никакие точки плоскости π . Таким образом, оказывается удобным считать, что гиперboloид γ является образом плоскости π , дополненной двумя фиктивными «прямыми», так сказать, «проектирующимися» в прямолинейные образующие o_1 и o_2 гиперboloида γ ¹⁾.

1) Нетрудно убедиться, что прямолинейные образующие

$$x - y = c(1 - z), \quad x + y = \frac{1}{c}z \quad \text{и} \quad x + y = d(1 - z), \quad x - y = \frac{1}{d}z$$

гиперboloида γ отвечают в силу стереографической проекции (32) особым прямым

$$y = x - c \quad \text{и} \quad y = -x + d$$

плоскости Минковского π ; поэтому следует считать, что прямолинейным образующим o_1 и o_2 отвечают «бесконечно удаленные особые прямые» плоскости π . Это словупотребление хорошо отвечает тому факту, что инверсия плоскости Минковского переводит каждую особую прямую снова в особую прямую; поэтому уместно считать, что особые прямые q_1 и q_2 она переводит в «бесконечно удаленные особые прямые» круговой плоскости Минковского.

Сопоставив точки прямых α_1 и α_2 бесконечно удаленным точкам $\Omega_m^{(1)}$ и $\Omega_n^{(2)}$ плоскости π , а центр проекции Q — точке Ω , мы сможем говорить, что стереографическая проекция (32) представляет собой отображение гиперболоида γ на круговую плоскость Минковского π , что позволяет рассматривать (однополостный) гиперболоид как «модель» круговой плоскости Минковского.

Из формул (32) следует, что *точки окружности (или прямой) (16') плоскости Минковского стереографическая проекция отображает на точки сечения гиперболоида γ плоскостью*

$$ax + 2b_1x + 2b_2y + c(1 - z) = 0; \quad (16'')$$

обратно, каждому плоскому сечению гиперболоида γ отвечает окружность (или прямая) плоскости π . При этом прямым отвечают сечения гиперболоида γ плоскостями, проходящими через точку $Q(0, 0, 1)$; особым — прямыми — сечения γ плоскостями, проходящими через γ и содержащими прямую — сечения γ плоскостями, касающимися γ (и в силу этого содержащими пару прямолинейных образующих). В самом деле, например, точкам прямой, записываемой уравнением (16'), где $a=0$, стереографическая проекция сопоставляет точки сечения гиперболоида γ плоскостью

$$2b_1x + 2b_2y + c(1 - z) = 0,$$

очевидно, проходящей через точку $Q(0, 0, 1)$. Поскольку в силу нашего соглашения точка $Q(0, 0, 1)$ отвечает точке Ω круговой плоскости Минковского, то приходится считать, что все прямые «проходят» через бесконечно удаленную точку Ω . Произвольная же окружность (16') «содержит» одну бесконечно удаленную точку $\Omega_m^{(1)}$ и одну бесконечно удаленную точку $\Omega_n^{(2)}$; эти точки изображаются точками пересечения плоскости (16'') с прямыми α_1 и α_2 .

То обстоятельство, что стереографическая проекция (32) переводит окружности (и прямые) плоскости Минковского в плоские сечения гиперболоида, позволяет использовать эту проекцию для представления «круговых преобразований» (круговой) плоскости Минковского π . Рассмотрим, например, столь простое преобразование гиперболоида γ как *симметрию относительно горизонтальной плоскости δ — плоскости $z=1/2$* , т. е. преобразование, переводящее каждую точку A_1 гиперболоида γ в такую его точку A'_1 , что $A_1A'_1 \perp \delta$ (рис. 181). Ясно, что эта симметрия переводит каждое плоское сечение гиперболоида снова в плоское сечение. Поэтому отвечающее нашей симметрии в силу стереографической проекции преобразование плоскости π , т. е. преобразование, переводящее точку A плоскости π (соответствующую точке A_1 гиперболоида γ в силу стереографической проекции) в точку A' плоскости π (соответствующую точке A'_1 гиперболоида γ), должно быть *круговым*. Нетрудно обнаружить, что это преобразование плоскости Минковского является не чем иным, как инверсией с центром O и степенью 1 (инверсий с окружностью инверсии S , отвечающей в силу стереографической проекции сечению гиперболоида γ плоскостью δ), — это обстоятельство может быть принято за определение инверсии и позволяет вывести все свойства этого преобразования из свойств стереографической проекции. Использование стереографической проекции позволяет также установить, что *все круговые преобразования плоскости Минковского π , отличные от преобразований подобия* (т. е. от преобразований, переводящих каждые две точки A и B плоскости π

в такие точки A' и B' , что $\frac{A'B'}{AB} = \frac{dA'B'}{dAB} = k$, где k — фиксированный коэффи-

цент подобия), можно представить в виде инверсии, сопровождаемой преобразованием подобия; на доказательстве этой основной теоремы теории

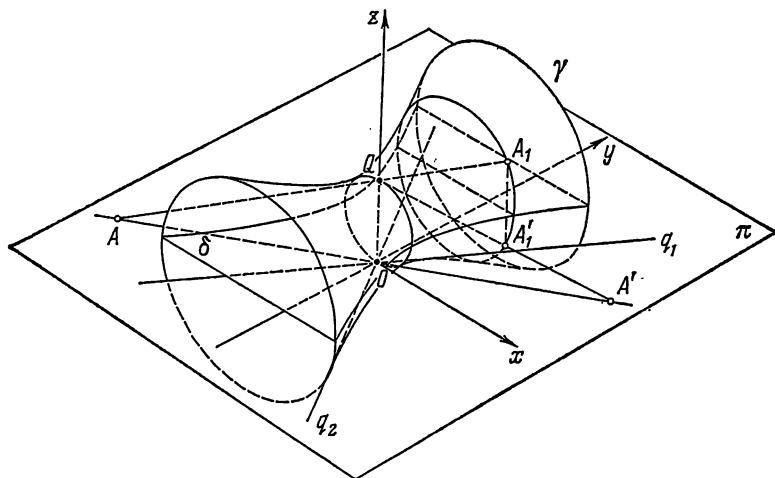


Рис. 181.

круговых преобразований плоскости Минковского мы здесь не остановимся.

§ 12. Геометрия Галилея как предельный случай геометрий Евклида и Минковского

Итак, нам уже известны три различные геометрические системы, действующие на обычной (аффинной) плоскости: геометрия Евклида (школьная геометрия), геометрия Галилея, которой и была посвящена основная часть этой книги, и геометрия Минковского, с которой мы вкратце познакомимся в предыдущем параграфе. В процессе всего изложения мы неоднократно обращали внимание на большую близость этих трех «геометрий». Многие теоремы формулируются во всех трех геометриях совершенно одинаково; сюда относятся, например: теорема о точке пересечения медиан треугольника; теорема об окружности (цикле) шести точек; теорема о степени точки относительно окружности (или цикла); определение и свойства инверсии (инверсии 1-го рода) и т. д. Другие теоремы видоизменяются при переходе от одной геометрии к другой, сохраняя, однако, какие-то общие черты,— трудно, например, не признать «родственниками» евклидову теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad (33a)$$

«теорему синусов» геометрии Галилея (см. формулу (13) на стр. 62):

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}, \quad (33)$$

и соответствующую теорему геометрии Минковского (формула (24б) на стр. 210):

$$\frac{a}{\operatorname{sh} A} = \frac{b}{\operatorname{sh} B} = \frac{c}{\operatorname{sh} C}. \quad (33б)$$

При этом в тех случаях, когда те или иные факты выглядят в трех геометриях различно, геометрия Галилея, зачастую, оказывается как бы «промежуточной» между геометриями Евклида и Минковского: так, например, если $a \leq b \leq c$ — стороны (невыврожденного, т. е. не обращающегося в отрезок) треугольника, то

$$a + b > c \quad (34а)$$

в геометрии Евклида,

$$a + b = c \quad (34)$$

в геометрии Галилея (см. формулу (11) на стр. 61) и

$$a + b < c \quad (34б)$$

в геометрии Минковского (стр. 209)¹); уравнение окружности имеет в геометрии Евклида в «естественных» (т. е. в декартовых прямоугольных) координатах вид

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (35а)$$

(см. выше, стр. 85), в то время как уравнение цикла геометрии Галилея имеет вид

$$ax^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (35)$$

(см. формулу (2) на той же стр. 85), а уравнение окружности плоскости Минковского — вид

$$a(x^2 - y^2) + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \quad (35б)$$

(ср. с формулой (16') на стр. 201) и т. д.

Вот еще один выразительный пример того же рода. При представлении круговой плоскости Евклида весьма полезной была стереографическая проекция — центральная проекция плоскости $z=0$ трехмерного пространства $\{x, y, z\}$ из точки $Q(0, 0, 1)$ на сферу σ с уравнением

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 \quad (36а)$$

¹ Разумеется, уже неравенства $a \leq b \leq c$ предполагают, что все стороны рассматриваемого треугольника плоскости Минковского сравнимы между собой, т. е. суть отрезки одного рода.

(см. формулу (40) на стр. 160 и рис. 128). В случае геометрии Галилея сходную роль играет отображение плоскости $z=0$ на цилиндр ξ :

$$x^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 + z^2 - z = 0 \quad (36)$$

(формула (40') на стр. 168 и рис. 134), а в случае геометрии Минковского — отображение той же плоскости на (однополостный) гиперболоид γ :

$$x^2 - y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + z^2 - z = 0 \quad (366)$$

(формула (31) на стр. 219 и рис. 180). При этом само понятие круговой (или циклической) плоскости связано с наличием на плоскости «особых» точек, не переводимых инверсией с центром Q ни в какие точки плоскости; это множество точек («окружность нулевого радиуса» с центром Q) в геометрии Евклида состоит из единственной точки Q , в то время как в геометрии Галилея оно представляет собой одну прямую, проходящую через точку Q , а в геометрии Минковского — две прямые, проходящие через Q .

Связь геометрии Евклида (и геометрии Минковского) с геометрией Галилея можно пояснить следующим образом. Выше (см. стр. 192) мы уже указывали, что в случае земных скоростей, весьма малых по сравнению со скоростью света, принцип относительности Эйнштейна почти не отличается от классического принципа относительности Галилея. В «геометризированной» форме это утверждение означает, что если единица измерения длин вдоль оси Oy плоскости Минковского (оси, указывающей положение точки на прямой o в терминах «одномерной кинематики») является очень большой по сравнению с единицей измерения длин вдоль оси Ox (оси времени; выше мы так выбирали единицу измерения длин вдоль прямой o , чтобы скорость света была равна 1, т. е. принимали за единицу длины расстояние, которое свет проходит в единицу времени, — брали ее равной 300 000 км, если за единицу времени принята 1 сек), то геометрия Минковского оказывается весьма близкой к геометрии Галилея. В физике с этим обстоятельством связана возможность использования классической механики Галилея — Ньютона во всех физических задачах, не связанных с рассмотрением космических скоростей, близких к скорости света (см. конец настоящего параграфа); в геометрии же оно проливает дополнительный свет на близость псевдоевклидовой геометрии Минковского к геометрии Галилея.

«Промежуточный» характер геометрии Галилея по отношению к геометриям Евклида и Минковского определяется аналогией формул для расстояния d между точками $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ в плоскости Евклида

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \quad (37a)$$

(ср. с формулой (1) на стр. 16), в плоскости Галилея

$$d^2 = (x_1 - x)^2 \quad (37)$$

(см. формулу (5) на стр. 51) и в плоскости Минковского

$$d^2 = (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 \quad (37б)$$

(формула (15'а) на стр. 200). Предположим теперь, что в геометрии Евклида или в геометрии Минковского единица OE_2 измерения длин вдоль оси Oy заменяется новой единицей $OE'_2 = \frac{1}{c} OE_2$, а единица $OE_1 \equiv OE'_1$ измерения длин вдоль оси Ox не меняется (рис. 182). В таком случае, если x, y — старые координаты точек на плоскости, в которых расстояние между двумя точками определяется по формуле (37а), соответственно (37б), а x', y' — новые координаты, возникающие после указанного изменения единицы измерения длин вдоль оси Oy , то

или

$$\begin{aligned} x' &= x \quad \text{и} \quad y' = cy \\ x &= x' \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{c} y'. \end{aligned} \quad (38)$$

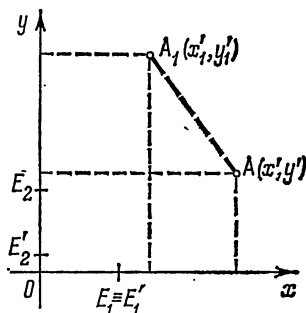


Рис. 182.

Отсюда следует, что в координатах x', y' расстояние d между двумя точками $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ или $A(x', y')$ и $A_1(x_1', y_1')$ записывается так:

$$d^2 = (x_1' - x')^2 + \frac{1}{c^2} (y_1' - y')^2$$

и

$$d^2 = (x_1' - x')^2 - \frac{1}{c^2} (y_1' - y')^2$$

или, если снова отбросить штрихи, обозначая новые координаты по-прежнему через x и y , так:

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + \frac{1}{c^2} (y_1 - y)^2, \quad (37'а)$$

соответственно

$$d^2 = (x_1 - x)^2 - \frac{1}{c^2} (y_1 - y)^2. \quad (37'б)$$

Если теперь устремить c к бесконечности, т. е. считать «натуральную» единицу OE_1 измерения длин вдоль оси Ox исчезающе малой по сравнению с единицей OE_2 измерения длин вдоль оси Oy , то мы придем к знакомой формуле

$$d^2 = (x_1 - x)^2, \quad (37)$$

выражающей расстояние между двумя точками плоскости Галилея.

Мы и далее будем обозначать «новые» координаты, в которых расстояние между двумя точками A и A_1 измеряется по формулам (37'а)—(37'б), теми же буквами x , y , что и раньше; на чертежах мы будем изображать принятые единицы OE_1' и OE_2' измерения длин вдоль осей Ox и Oy по-прежнему равными и даже будем применять для них обозначения OE_1 и OE_2 , помня, однако, что «равноценная» OE_1 единица \bar{OE}_2 измерения длин вдоль оси Oy представляет

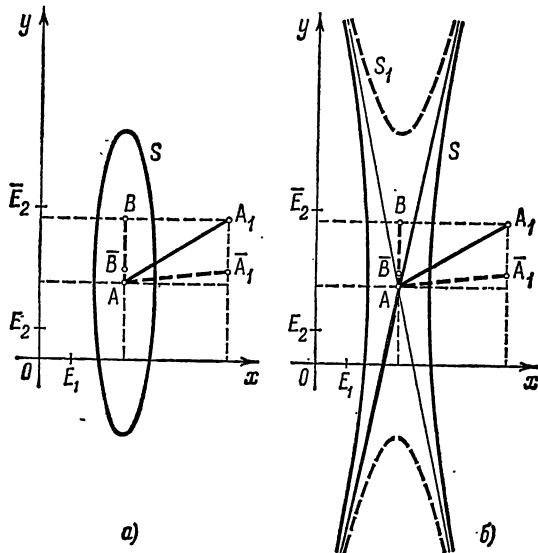


Рис. 183.

собой c -кратное от единицы OE_2 (см. рис. 183, а, б, где $c=5$). При этом (измеренная по формуле (37'а), соответственно (37'б)) длина отрезка AA_1 будет совпадать с понимаемой в смысле геометрии Евклида или геометрии Минковского (т. е. измеренной по формуле (37а) или (37б)) длине отрезка $\bar{A}\bar{A}_1$, имеющего ту же, что и отрезок AA_1 , проекцию на ось Ox , но в c раз меньшую проекцию на ось Oy . Устремляя c к бесконечности, мы в пределе как раз и приходим к концепции геометрии Галилея, где длина отрезка определяется исключительно его проекцией на ось Ox .

Заменим теперь отрезок AA_1 отрезком AB , параллельным оси Oy . В этом случае отрезок $\bar{A}\bar{B}$ будет попросту составлять $\frac{1}{c}$ -ю часть первоначального отрезка AB (см. тот же рис. 183); неограниченно увеличивая c , мы придем к сравнению отрезка AB с исчезающе малым отрезком $\bar{A}\bar{B}$ геометрии Евклида или геометрии Минковского

с одинаковыми единицами измерения длин вдоль обеих осей, откуда и следует, что при $c \rightarrow \infty$ длина d подобного отрезка стремится к нулю: $d \rightarrow 0$. Последнее обстоятельство особенно легко усмотреть в случае предельного перехода к геометрии Галилея от геометрии Минковского. Рассмотрим две прямые

$$y = \pm cx, \quad (39)$$

любой отрезок которых имеет в геометрии Минковского нулевую длину; выше (стр. 199) мы назвали такие прямые (а также и параллельные им прямые) особыми прямыми геометрии Минковского. Из рис. 183, б, на котором изображены «косые» прямые, пересекающиеся в точке A , видно, что при $c \rightarrow \infty$ такие прямые неограниченно приближаются к вертикали (т. е. к прямой, параллельной оси Oy); в пределе их можно считать совпавшими с вертикалью, которая тем самым обращается в (единственную при закрепленной точке A) прямую нулевых длин отрезков.

Последнее обстоятельство можно проиллюстрировать еще и по-другому. На рис. 183, а, б изображена также «единичная окружность» S с центром A , т. е. множество точек, удаленных от точки A (координаты которой мы теперь обозначим через a , b) на расстоянии 1. Из формул (37'а) и (37'б) следует, что уравнение этой «окружности» имеет вид

$$(x-a)^2 + \frac{(y-b)^2}{c^2} = 1, \quad (40а)$$

соответственно

$$(x-a)^2 - \frac{(y-b)^2}{c^2} = 1, \quad (40б)$$

т. е. что линия S представляет собой эллипс или гиперболу с полуосями 1 и c . Ясно, что при возрастании c линия S все более «вытягивается» в направлении оси Oy ; можно считать, что при $c \rightarrow \infty$ линия S обращается в пару (параллельных) прямых

$$(x-a)^2 = 1 \quad (40)$$

— единичную окружность плоскости Галилея. [На рис. 183, б имеется также линия S_1 с уравнением

$$(x-a)^2 - \frac{(y-b)^2}{c^2} = -1, \quad (40в)$$

представляющая собой множество точек, тоже удаленных от A на расстояние 1, но на качественно иное расстояние 1, отвечающее длинам отрезков оси Oy . При $c \rightarrow \infty$ эта «окружность» S_1 сжимается в соответствии с уменьшением того угла между особыми прямыми (пересекающимися в точке A), внутри которого она расположена, и, кроме того, неограниченно удаляется от точки A ,

неизбежно исчезая из пределов сколь угодно обширного чертежа — это соответствует исчезновению отрезков ненулевой длины, имеющих иную природу, чем отрезок OE_1 .]

Перейдем теперь к вопросу о трансформации (евклидовых) углов при описанном изменении единиц измерения длин. Мы знаем, что (евклидов) угол δ между прямыми

$$y = kx + s \quad \text{и} \quad y = k_1x + s_1 \quad (41)$$

определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{k_1 - k}{kk_1 + 1} \quad (42a)$$

(см. формулу (3) на стр. 50). Замена переменных по формулам (38) обращает уравнения (41) в следующее:

$$y' = ckx' + cs \quad \text{и} \quad y' = ck_1x' + cs_1 \quad \text{или} \quad y' = k'x' + s' \quad \text{и} \quad y' = k'_1x' + s'_1, \quad (41')$$

где, в частности, $k' = ck$ и $k'_1 = ck_1$, т. е.

$$k = \frac{1}{c} k' \quad \text{и} \quad k_1 = \frac{1}{c} k'_1.$$

Подставляя теперь эти значения угловых коэффициентов k и k_1 в исходную формулу (42a) и условившись не только обозначать новые координаты x' , y' по-прежнему через x и y , но также и новые угловые коэффициенты k' , k'_1 по-прежнему записывать символами k и k_1 , мы получим, что после изменения координат по формулам (38) угол δ между прямыми (41) определится по формуле

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{1}{c} k_1 - \frac{1}{c} k}{\frac{1}{c^2} kk_1 + 1} \quad (42')$$

Но при $c \rightarrow \infty$ правая часть формулы (42'), очевидно, обращается в нуль; другими словами, мы имеем $\operatorname{tg} \delta \rightarrow 0$, а следовательно, и $\delta \rightarrow 0$ — неожиданный результат!

Впрочем, постигшая нас беда не принадлежит к числу особенно серьезных. Из формулы (42') видно, что при очень большом c величина $\frac{1}{c} \frac{k_1 - k}{1 + \frac{kk_1}{c^2}}$ тангенса угла δ между прямыми (41) является очень

малой — она имеет порядок величины $\frac{1}{c}$ (1). Но известно, что при

1) Другими словами, при $c \rightarrow \infty$ как $\operatorname{tg} \delta \rightarrow 0$, так и $\frac{1}{c} \rightarrow 0$, причем отношение $\operatorname{tg} \delta : \frac{1}{c}$ стремится к конечному числу $a \neq 0$.

малом угле δ величина $\operatorname{tg} \delta$ близка к величине самого угла δ , измеренного, разумеется, в «естественной», т. е. в радианной, мере: в самом деле, поскольку, как известно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta = 1$, то, очевидно,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\delta} = 1. \quad (43)$$

Таким образом, и величина (измеренного по формуле (42')!) угла δ между прямыми (41) при большом c является весьма малой: она имеет порядок величины $\frac{1}{c}$.

Изменим теперь единицы измерения величин углов в новых координатах x' , y' , связанных со старыми формулами (38): примем, что новая единица ϵ' измерения углов связана со старой единицей ϵ (радианом!) равенством $\epsilon' = \frac{1}{c} \epsilon$. При этом новая величина δ' угла окажется в c раз большей, чем прежняя величина угла δ :

$$\delta' = c\delta \quad \text{или} \quad \delta = \frac{1}{c} \delta'. \quad (44)$$

Подставляя теперь это значение δ в формулу (42') и заменяя затем обозначение δ' «новой» величины угла на прежнее обозначение δ (к этой операции мы, кажется, уже привыкли!), получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{c} = \frac{1}{c} \frac{k_1 - k}{1 - \frac{1}{c^2} k k_1}$$

или

$$c \operatorname{tg} \frac{\delta}{c} = \frac{k_1 - k}{1 + \frac{1}{c^2} k k_1}. \quad (42'')$$

Наконец, переходя к пределу при $c \rightarrow \infty$ и учитывая, что

$$\lim_{c \rightarrow \infty} c \operatorname{tg} \frac{\delta}{c} = \delta \lim_{\delta/c \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{c}}{\frac{\delta}{c}} = \delta \cdot 1 = \delta,$$

окончательно получаем

$$\delta = k_1 - k, \quad (42)$$

т. е. получаем формулу для угла δ между прямыми (41) плоскости Галилея (см. формулу (8) на стр. 54). Совершенно аналогично можно получить формулу (42) подстановкой (38) и из формулы

$$\operatorname{th} \delta = \frac{k_1 - k}{1 - k_1 k} \quad (426)$$

для величины угла δ между двумя (одноименными) прямыми (41) плоскости Минковского; (формулу (42б) легко вывести из формулы (21в), стр. 208).

Заметим теперь, что из проведенного рассуждения следует, что описанная выше процедура изменения единиц измерения длин, приводящая в результате последующего предельного перехода $c \rightarrow \infty$ к замене геометрии Евклида (или геометрии Минковского) геометрией Галилея, сопровождается уменьшением всех углов, так что только лишь в результате изменения (44) единицы измерения углов мы получаем конечные выражения для величин углов. Соответственно этому при переходе от геометрии Евклида к геометрии Галилея мы должны во всех формулах, в которых фигурируют углы, произвести подстановку

$$\delta \rightarrow \frac{\delta}{c} \quad (44')$$

(см. вторую из формул (44)) и, кроме того,

$$\sin \delta \rightarrow \sin \frac{\delta}{c} \approx \frac{\delta}{c}, \quad \cos \delta \rightarrow \cos \frac{\delta}{c} \approx 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \delta \rightarrow \operatorname{tg} \frac{\delta}{c} \approx \frac{\delta}{c} \quad (43')$$

(ср. выше формулу (43) и родственные ей). В соответствии с этим из евклидовой теоремы синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (33a)$$

предельным переходом получаем

$$\frac{a}{A/m} = \frac{b}{B/m} = \frac{c}{C/m}$$

(здесь мы временно, вплоть до вывода формулы (46), употребляем букву m в том значении, которое ранее имела буква c , к сожалению, «занятая», для обозначения длины стороны AB треугольника ABC), т. е. «теорему синусов» геометрии Галилея:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \quad (33)$$

Аналогично из евклидовой теоремы косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (45a)$$

выводим:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 1 \quad (= (c - b)^2),$$

т. е. известную формулу

$$c = a + b \quad (34)$$

геометрии Галилея (здесь мы считаем, что $c > a$, $c > b$); из формулы

для площади треугольника в геометрии Евклида

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

заменой $\sin C \rightarrow \frac{C}{m}$, а также заменой $S \rightarrow \frac{S}{m}$ (изменение единицы измерения площадей!) получаем формулу

$$S = \frac{1}{2} ab C \quad (46)$$

для площади треугольника в геометрии Галилея (см. формулы (17') и (17) на стр. 63—64) и т. д. Наконец, из формул

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{aligned} \quad (47a)$$

для евклидовых движений (формулы (6), стр. 20) с помощью подстановки

$$x \rightarrow x, y \rightarrow \frac{1}{c} y, \sin \alpha \rightarrow \frac{\alpha}{c}, \cos \alpha \rightarrow 1$$

(см. (38) и (43')) получаем

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot 1 + \frac{y}{c} \cdot \frac{\alpha}{c} + a, \\ \frac{y'}{c} &= -x \cdot \frac{\alpha}{c} + \frac{y}{c} \cdot 1 + b \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{1}{c^2} \alpha y + a, \\ y' &= -\alpha x + y + cb, \end{aligned}$$

откуда, обозначая cb просто через b , величину $-\alpha$ — через v и устремляя c к бесконечности, имеем

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= vx + y + b, \end{aligned} \quad (47)$$

т. е. формулы движений плоскости Галилея (формулы (1) из § 3, см. стр. 45). Аналогично могут быть получены формулы (33), (34), (46) и (47) из соответствующих им формул геометрии Минковского (например, формулы (47) из формул (23), стр. 208); при этом только приходится учитывать легко доказываемые соотношения

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{sh } \delta}{\delta} = 1, \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{ch } \delta = 1, \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{th } \delta}{\delta} = 1. \quad (43')$$

Обратимся теперь к вопросу об отношении евклидовой окружности к циклу плоскости Галилея. Цикл мы определяли как множество точек, из которых данный отрезок AB виден под постоянным углом α

(см. § 6 гл. II); поэтому и окружность мы здесь вынуждены понимать как множество S точек $M(x, y)$ плоскости Евклида, из которых данный отрезок AB виден под постоянным (направленным) углом α (рис. 184). Обозначив, в соответствии с § 6, координаты точек A и B через (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , мы получим, что угловые коэффициенты k и k_1 прямых AM и BM равны

$$k = \frac{a_2 - y}{a_1 - x} \quad \text{и} \quad k_1 = \frac{b_2 - y}{b_1 - x}$$

(см. выше, стр. 84). В силу формулы (42а) для (евклидова) угла между прямыми получаем отсюда, что уравнение рассматриваемого множества S точек $M(x, y)$ имеет вид

$$\frac{\frac{b_2 - y}{b_1 - x} - \frac{a_2 - y}{a_1 - x}}{\frac{b_2 - y}{b_1 - x} \cdot \frac{a_2 - y}{a_1 - x} + 1} = \operatorname{tg} \alpha,$$

или

$$(b_2 - y)(a_1 - x) - (b_1 - x)(a_2 - y) - \operatorname{tg} \alpha [(b_2 - y)(a_2 - y) + (b_1 - x)(a_1 - x)] = 0$$

или, наконец,

$$\operatorname{tg} \alpha (x^2 + y^2) + [(b_2 - a_2) - \operatorname{tg} \alpha (b_1 + a_1)] x + [(a_1 - b_1) - \operatorname{tg} \alpha (a_2 + b_2)] y + [(b_1 a_2 - b_2 a_1) + \operatorname{tg} \alpha (a_1 b_1 + a_2 b_2)] = 0. \quad (48a)$$

Ясно, что это есть уравнение окружности (на рис. 184 она изображена жирным пунктиром).

Произведем теперь в нашем уравнении замену переменных:

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow \frac{y}{c}, \quad a_1 \rightarrow a_1, \quad a_2 \rightarrow \frac{a_2}{c}, \quad b_1 \rightarrow b_1, \quad b_2 \rightarrow \frac{b_2}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \frac{\alpha}{c};$$

тогда получим

$$\frac{\alpha}{c} (x^2 + \frac{y^2}{c^2}) + \left[\left(\frac{b_2}{c} - \frac{a_2}{c} \right) - \frac{\alpha}{c} (b_1 + a_1) \right] x + \left[(a_1 - b_1) - \frac{\alpha}{c} \left(\frac{a_2}{c} + \frac{b_2}{c} \right) \right] \frac{y}{c} + \left[\left(b_1 \frac{a_2}{c} - b_2 \frac{a_1}{c} \right) + \frac{\alpha}{c} \left(a_1 b_1 + \frac{a_2 b_2}{c} \right) \right] = 0,$$

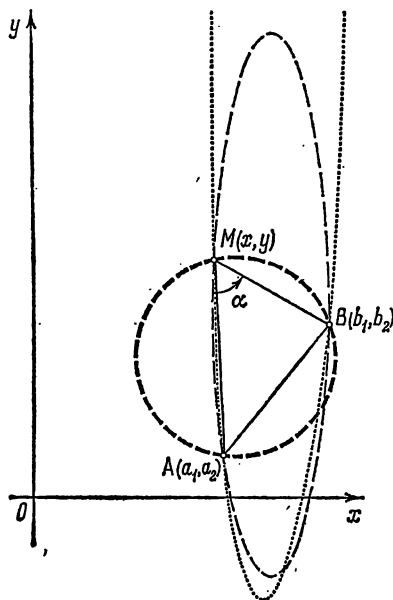


Рис. 184.

или

$$\alpha \left(x^2 + \frac{y^2}{c^2} \right) + [(b_2 - a_2) - \alpha (b_1 + a_1)] x + \\ + \left[(a_1 - b_1) - \frac{\alpha}{c^2} (a_2 + b_2) \right] y + \\ + \left[(b_1 a_2 - b_2 a_1) + \alpha \left(a_1 b_1 + \frac{a_2 b_2}{c^2} \right) \right] = 0, \quad (486)$$

т. е. уравнение эллипса (на рис. 184 он изображен тонким пунктиром). Наконец, предельный переход $c \rightarrow \infty$ переводит уравнение (486) в уравнение

$$\alpha x^2 + [(b_2 - a_2) - \alpha (b_1 + a_1)] x + (a_1 - b_1) y + [(b_1 a_2 - b_2 a_1) + \alpha a_1 b_1] = 0 \quad (48)$$

(евклидовой или аффинной) параболы, которая играет роль цикла плоскости Галилея (она изображена на рис. 184 точками; ср. выше, стр. 84—85). Также и все относящиеся к геометрии Галилея результаты § 9 гл. II могут быть получены предельным переходом из соответствующих предложений геометрии Евклида (доказанных в том же параграфе) или геометрии Минковского (см. § 11).

После всего сказанного не вызывает никаких затруднений и вопрос о взаимоотношении «классической» и «релятивистской» механики, другими словами, принципов относительности Галилея и Эйнштейна. В § 10 мы всюду выбирали единицы длины и времени таким образом, чтобы скорость света была равна 1; именно при таком выборе единиц геометрическую картину кинематики прямой o , базирующейся на принципе относительности Эйнштейна, доставляет геометрия Минковского в той форме, как она строилась в § 11. Однако более обычным является иной выбор единиц измерения длин, при котором единица длины в c раз больше рассматриваемой ранее единицы; это отвечает следующей подстановке, которую надо произвести во всех формулах из § 10:

$$t \rightarrow t, \quad x \rightarrow \frac{x}{c}, \quad v \rightarrow \frac{v}{c} \quad (49)$$

(ср. с формулами (38), стр. 225). В частности, равенство $v = 1$ из § 10 сейчас заменяется следующим

$$\frac{v}{c} = 1, \quad \text{т. е. } v = c;$$

таким образом, c — это скорость света в рассматриваемой (вообще говоря, произвольной) системе единиц длины и времени.

Произведя подстановку (49) в основных формулах (7) из § 10, мы получим более распространенную запись преобразований

Лоренца:

$$\frac{x'}{c'} = \frac{\frac{x}{c} - \frac{v}{c} t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{-\frac{v}{c} \cdot \frac{x}{c} + t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

или

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2} x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},} \quad (50)$$

— именно так записываются преобразования Лоренца во всех книгах [37]—[39] и [46]—[53б].¹⁾ Ясно, что предельный переход $c \rightarrow \infty$ переводит формулы (50) в формулы, выражающие преобразования Галилея:

$$x' = x - vt, \quad t' = t. \quad (50')$$

Коэффициент $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ фитцджеральдова сокращения длин (стр. 185), так же как и коэффициент $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (релятивистского) замедления времени (стр. 187) при $c \rightarrow \infty$, обращаются в 1, т. е. в классической механике соответствующие эффекты не имеют места. Наконец, формула

$$w = \frac{u + v}{uv + 1} \quad (51)$$

сложения скоростей (формула (9), стр. 190) при нашей подстановке переходит в формулу

$$\frac{w}{c} = \frac{\frac{u}{c} + \frac{v}{c}}{\frac{u}{c} \cdot \frac{v}{c} + 1} \quad \text{или} \quad w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}},$$

которая при $c \rightarrow \infty$ обращается в классическую формулу сложения скоростей в механике Галилея—Ньютона:

$$w = u + v \quad (51')$$

(формула (8), стр. 189).

¹⁾ Элементарные книги [40]—[43] вообще почти не содержат формул, а авторы книг [44], [45] и [53в] принимают скорость света за 1 и записывают преобразования Лоренца формулами (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ДЕВЯТЬ ГЕОМЕТРИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Основное содержание настоящей книги составляло параллельное рассмотрение двух геометрических систем, которые можно определить на (обычной или аффинной) плоскости, — хорошо известной *геометрии Евклида* и более простой, но в ряде отношений неожиданной для незнакомого с ней читателя *геометрии Галилея*. Однако в Заключении (см. § 11) мы познакомились с третьей геометрической системой — с *геометрией Минковского*, очень близкой к двум предшествующим; с другой стороны, большинство читателей этой книги, видимо, знает о существовании неевклидовой *геометрии Лобачевского* (четвертая геометрия!) или даже знакомо с ее основами.

В настоящем Приложении мы поставим своей целью кратко охарактеризовать ряд плоских геометрий, включающий, в частности, как геометрии Евклида, Галилея и Минковского, так и геометрию Лобачевского. Все рассматриваемые в настоящем Приложении геометрии часто называют «неевклидовыми геометриями»; однако это название, бесспорно уместное в отношении геометрий Галилея, Минковского или Лобачевского, никак не подходит к самой геометрии Евклида. Кроме того, современная наука знает множество геометрических систем, отличных как от классической геометрии Евклида (т. е. бесспорно «не евклидовых»), так и от всех геометрий, о которых мы здесь будем говорить; это обстоятельство также делает термин «неевклидовы геометрии» довольно неудобным. Так как те геометрии, о которых будет идти речь в настоящем Приложении, были впервые указаны в 1871 г. знаменитым Феликсом Клейном¹⁾, опиравшимся на несколько более ранние исследования англичанина Артура Кэли (1821—1895)²⁾, то для их наименования мы будем

¹⁾ См. указанную в списке литературы статью Клейна [76] (немецкий оригинал этой статьи вышел в свет в 1871 г.) или книгу Клейна [55].

²⁾ Относительно истории открытия рассматриваемых здесь геометрий см. краткий § 7 гл. X книги Клейна [55], обстоятельный учебник Кагана [25] или стр. 184—193 очень интересной, но довольно трудной книги Клейна [81], посвященной истории математики.

использовать тоже часто употребляющийся в литературе термин *геометрии Кэли—Клейна*.

Согласно схеме Кэли и Клейна на прямой линии o мы имеем три существенно различные геометрии: (обычную) *геометрию Евклида*, «*эллиптическую*» *геометрию Римана* и «*гиперболическую*» *геометрию Лобачевского*. Евклидова геометрия на прямой возникает при знакомом нам еще из средней школы правиле

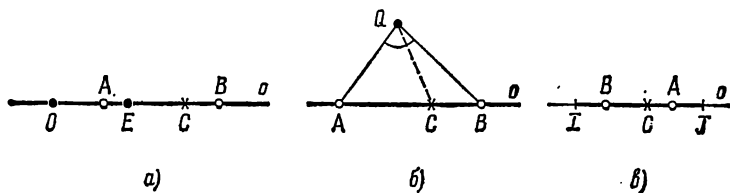


Рис. 185.

измерения длин отрезков: на прямой фиксируется «единица длины» OE и расстояние $d_{AB}^{(E)}$ между точками A и B прямой o определяется формулой

$$d_{AB}^{(E)} = \frac{AB}{OE} \quad (1)$$

(рис. 185, а)¹⁾. При этом все «евклидовы движения» прямой o , т. е. преобразования прямой, сохраняющие евклидово расстояние $d_{AB}^{(E)}$ между точками, сводятся к

- а) параллельным переносам (в направлении прямой o);
- б) центральным симметриям (относительно точек прямой o).

Эллиптическую геометрию Римана можно воссоздать на прямой o , если фиксировать вне o некоторую точку Q и положить, что «риманово расстояние» $d_{AB}^{(P)}$ между точками A и B прямой o равно (обычному, т. е. евклидову) углу $\angle AQB$:

$$d_{AB}^{(P)} = \angle AQB \quad (1a)$$

(рис. 185, б). Ясно, что если A, C, B —три последовательные точки прямой o , то

$$d_{AC}^{(P)} + d_{CB}^{(P)} = d_{AB}^{(P)}$$

(см. тот же рис. 185, б). Роль «эллиптических движений» прямой o , сохраняющих «римановы расстояния» $d_{AB}^{(P)}$ между точками будут играть:

1) Отношение $\frac{AB}{OE}$ двух отрезков прямой o можно определить и не развивая полностью всю геометрию Евклида; мы здесь на этом не остановимся.

а) преобразования, порождаемые поворотами проходящих через точку Q прямых — прямых пучка с центром Q , как мы будем говорить впоследствии, — на фиксированный угол α ; такое преобразование переводит точку A прямой o в точку A' , для которой $\angle AQA' = \alpha$;

б) преобразования, порождаемые осевыми симметриями в пучке прямых с центром Q относительно проходящей через Q фиксированной прямой l ; это преобразование переводит точку A прямой o в такую точку A' , что прямая l является биссектрисой угла AQA' .

Наконец, гиперболическая геометрия Лобачевского определяется на прямой o несколько более сложным образом. Для определения «расстояния Лобачевского» $d_{AB}^{(Л)}$ между двумя точками A и B прямой o надо зафиксировать две точки I и J этой прямой; тогда

$$d_{AB}^{(Л)} = k \log \left(\frac{AI}{AJ} : \frac{BI}{BJ} \right) \quad (16)$$

(рис. 185, в). Число k в этой формуле можно выбирать произвольно; замена одного k другим (при сохранении одного и того же основания системы логарифмов, равно, скажем, 10) означает изменение единицы измерения расстояний (длин отрезков). В «двойном отношении»

$$W(A, B; I, J) = \frac{AI}{AJ} : \frac{BI}{BJ} \quad (2)$$

четырёх точек A, B, I и J все фигурирующие в правой части равенства (2) отрезки удобно считать направленными; при этом, для того чтобы двойное отношение W всегда было положительно (а неположительные числа логарифмов¹⁾ не имеют!), необходимо условиться, скажем, о том, что обе точки A и B принадлежат отрезку IJ . Таким образом, «гиперболическая прямая» (или «прямая Лобачевского») изображается отрезком IJ . Нетрудно проверить, что если A, C, B — три последовательные точки отрезка IJ (см. тот же рис. 185, в), то

$$d_{AC}^{(Л)} + d_{CB}^{(Л)} = d_{AB}^{(Л)}$$

в самом деле, очевидно,

$$\begin{aligned} W(A, C; I, J) \cdot W(C, B; I, J) &= \left(\frac{AI}{AJ} : \frac{CI}{CJ} \right) \cdot \left(\frac{CI}{CJ} : \frac{BI}{BJ} \right) = \\ &= \left(\frac{AI}{AJ} : \frac{BI}{BJ} \right) = W(A, B; I, J) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\log W(A, C; I, J) + \log W(C, B; I, J) = \log W(A, B; I, J).$$

¹⁾ Во всяком случае действительных.

Далее, поскольку двойное отношение четырех точек прямой равно двойному отношению четырех других прямолинейно расположенных точек, полученных из первых четырех точек центральным проектированием¹⁾, то «гиперболические движения» прямой o (точнее, «прямой Лобачевского», т. е. отрезка IJ), сохраняющие «расстояния Лобачевского» $d_{AB}^{(Л)}$, порождаются

а) симметрией относительно середины S отрезка IJ (ясно, что эта симметрия не меняет двойных отношений четверок точек: если точки A, B она переводит в точки A', B' , то $W(A, B; I, J) = W(A', B'; J, I)$);

б) центральными проектированиями отрезка IJ на отрезок IJ_1 из некоторой точки O_1 , сопровождающимися обратным проектированием IJ_1 на IJ из некоторой точки O_2 прямой J_1J (рис. 186, а).

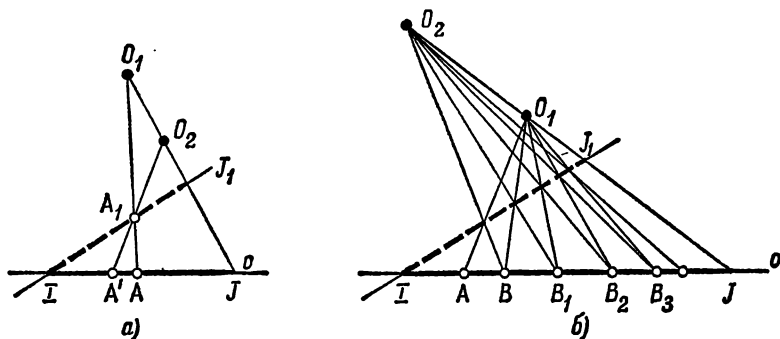


Рис. 186.

На рис. 186, б изображены полученные описанным методом «равные» (в смысле геометрии Лобачевского) отрезки $AB, BB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$. Из этого рисунка видно, что, откладывая последовательно от произвольной точки A «прямой» IJ любое число равных отрезков

$$AB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$$

(где равенство отрезков понимается в смысле геометрии Лобачевского!), мы никогда не выйдем за пределы IJ , т. е. «прямая Лобачевского» IJ имеет бесконечную длину. [Последнее следует также и из того, что если на рис. 185, в точка B стремится к I , то $W(A, B; I, J) = \frac{AI}{AJ} \cdot \frac{BI}{BJ} \rightarrow \infty$ (ибо $BI \rightarrow 0$); поэтому $d_{AB}^{(Л)} \rightarrow \infty$.]

Аналогично трем геометриям на прямой o можно ввести три «геометрии» в пучке прямых с центром O , иными словами,

¹⁾ См., например, книги Кокстера [19], Яглома [10], Нордена [62] или статью Яглома и Атанасяна [11].

ввести три системы измерения углов между прямыми пучка. Обычное «меропределение углов» в пучке с центром O

$$\delta_{ab}^{(P)} = \angle aOb \quad (3a)$$

(рис. 187, а; символ \angle мы здесь и дальше употребляем лишь в смысле обычного — евклидова — угла) называется *эллиптическим*, или *римановым*. *Евклидово* мероопределение углов, напротив, не

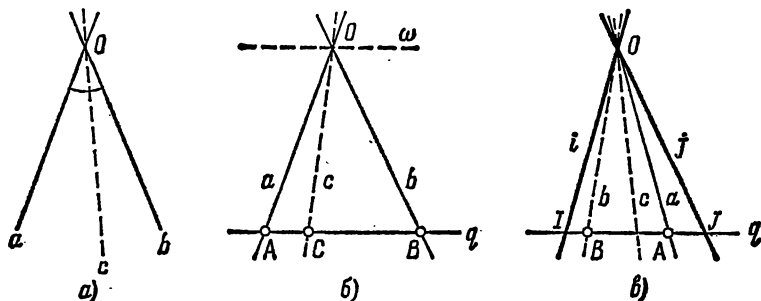


Рис. 187.

совпадает с принятым в евклидовой геометрии; его можно определить, зафиксировав не проходящую через точку O прямую q и положив

$$\delta_{ab}^{(E)} = AB \quad (= d_{AB}^{(E)}), \quad (3)$$

где A и B — точки пересечения прямых a и b с q (рис. 187, б). Ясно, что в пучке прямых имеется единственная прямая $\omega \parallel q$, образующая с любой другой прямой «бесконечно большой угол». Наконец, *гиперболическое мероопределение*, или *меропределение Лобачевского*, вводится в пучке прямых следующим образом: фиксируются две прямые i и j пучка и для любых двух других прямых a и b полагается

$$\delta_{ab}^{(L)} = k \log \left(\frac{\sin \angle (a, i) \cdot \sin \angle (b, j)}{\sin \angle (a, j) \cdot \sin \angle (b, i)} \right) \quad (3б)$$

(рис. 187, в); постоянная k здесь зависит от выбора единицы измерения углов. В «двойном отношении четырех прямых» a, b, i и j

$$W(a, b; i, j) = \frac{\sin \angle (a, i) \cdot \sin \angle (b, j)}{\sin \angle (a, j) \cdot \sin \angle (b, i)} \quad (2')$$

все участвующие в образовании правой части равенства (2') углы удобно считать направленными; для того чтобы это двойное отношение было положительным, надо, скажем, условиться, что все прямые a, b, \dots принадлежат какой-то одной определенной паре

образуемых i и j вертикальных углов. Поскольку двойное отношение $(2')$ четырех прямых пучка равно двойному отношению (2) четырех точек пересечения этих прямых с произвольной пятой прямой q (не проходящей, разумеется, через центр пучка)¹⁾, то величину $\delta_{ab}^{(J)}$ можно также определить равенством

$$\delta_{ab}^{(J)} = d_{AB}^{(J)}, \quad (3в)$$

где A и B — точки пересечения произвольно фиксированной прямой q с прямыми a и b (см. тот же рис. 187, в). Из равенства (3в), в частности, следует, что каждая из прямых i и j образует с любой другой прямой «бесконечно большой угол» (в смысле мероопределения Лобачевского).

Теперь мы можем уже описать девять геометрий, которые, согласно схеме Кэли—Клейна, определяются на плоскости. Предположим, что мероопределение расстояний на любой прямой плоскости имеет какой-то один наперед указанный тип из трех возможных типов «мероопределения длин» на прямой, т. е. оно может быть евклидовым, эллиптическим (римановым) или гиперболическим (мероопределением Лобачевского). Точно так же и мероопределение углов в пучке прямых с центром в любой точке O плоскости будем считать имеющим фиксированный тип — это мероопределение углов также является евклидовым, эллиптическим или гиперболическим. Комбинируя все возможные типы мероопределения расстояний и мероопределения углов, мы получим $3 \cdot 3 = 9$ вариантов; в таблице I перечислены все эти варианты с указанием названий соответствующей геометрической схемы.

Т а б л и ц а I. Девять геометрий Кэли—Клейна на плоскости

Тип мероопределения длин \ Тип мероопределения углов	Римана	Евклида	Лобачевского
Римана	Эллиптическая геометрия Римана	Геометрия Евклида	Гиперболическая геометрия Лобачевского
Евклида	Антиевклидова геометрия	Геометрия Галилея	Антипсевдоевклидова геометрия
Лобачевского	Антигиперболическая геометрия	Псевдоевклидова геометрия Минковского	Дважды гиперболическая геометрия

¹⁾ См. подстрочное примечание на стр. 239.

Знакомые нам геометрии Евклида, Галилея и Минковского занимают средний столбец этой таблицы. Во всех этих трех геометриях метрика длин на прямой является евклидовой: длина отрезка AB определяется как отношение $\frac{AB}{OE}$, где OE — «единичный отрезок» этой прямой. При этом в евклидовой геометрии концы отложенных от одной точки O отрезков единичной длины заполняют (обыкновенную или евклидову) окружность S (рис. 188, а); мероопределение углов в любом пучке прямых является «обычным», т. е. эллиптическим (или римановым) и совпадает с исчислением длин дуг

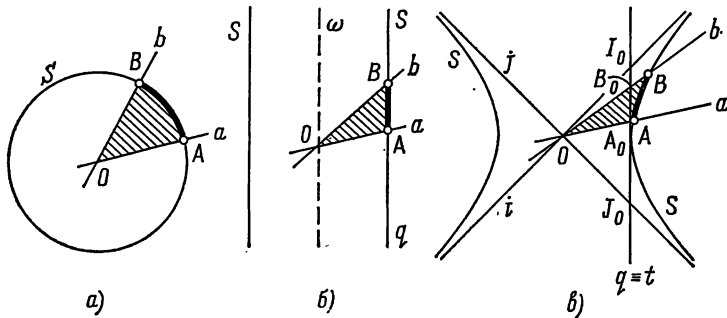


Рис. 188.

единичной окружности S , отсекаемых соответствующими прямыми: так, в обозначениях рис. 188, а, $\delta_{ab} = \angle aOb = \sim AB$.

В случае геометрий Галилея длины единичных отрезков, отложенных от одной точки O , с привычной нам «евклидовой» точки зрения будут различны: концы этих отрезков заполняют «окружность» S геометрии Галилея (рис. 188, б), представляющую собой пару параллельных («особых») прямых (о таких прямых мы еще будем говорить ниже). Мероопределение углов в любом пучке прямых будет евклидовым, т. е. не обычным: величина δ_{ab} угла между прямыми a и b будет равна (евклидовой!) длине отрезка AB , отсекаемого этими прямыми на «окружности», т. е. на прямой q рис. 188, б (ср. этот рисунок с рис. 187, б). Заметим еще, что «окружность» S не позволяет определить единичный отрезок на прямой $\omega \parallel q$; сравнивая отрезки этой прямой с иными отрезками, мы вынуждены считать, что все они имеют нулевую длину. Но такая «метрика» (определяемая тождеством $d_{PQ} = 0$ для любых точек P и Q прямой ω) не принадлежит ни к одному из трех указанных выше типов «мероопределения длин»; между тем при определении плоских геометрий Кэли—Клейна мы специально требовали, чтобы мероопределения длин на всех прямых имели один и тот же характер. Однако при рассмотрении геометрии Галилея

мы, строго говоря, должны вообще исключить «особые прямые» (т. е. прямые, параллельные q) из числа прямых (выше мы часто так и поступали!): ведь в геометрии естественно требовать, чтобы все прямые плоскости были одинаковыми (или «равными»), в то время как «особая прямая» плоскости Галилея существенно отличается от обыкновенной и не может быть совмещена с ней никаким движением. Поэтому надо считать, что объектом изучения геометрии Галилея является плоскость (ее можно назвать «плоскостью Галилея»), состоящая из всех точек плоскости и всех обыкновенных прямых (ср. выше, стр. 70). Эта «плоскость» полностью удовлетворяет наложенным нашей таблицей условиям.

Перейдем теперь к (псевдоевклидовой) геометрии Минковского. В этой геометрии «единичная окружность» S — множество концов всех отложенных от одной точки O отрезков единичной длины — с евклидовой точки зрения представляет собой гиперболу (рис. 188, в). Угол δ_{ab} между двумя прямыми a и b мы выше определяли равенством

$$\delta_{ab} = 2s_{AOB},$$

где s_{AOB} — площадь заштрихованного на рис. 188, в сектора «окружности Минковского» S ¹⁾. Однако эту величину можно определить и равенством

$$\delta_{ab} = k \log \left(\frac{\sin \angle(a, i)}{\sin \angle(a, j)} : \frac{\sin \angle(b, i)}{\sin \angle(b, j)} \right), \quad (36)$$

где i и j — асимптоты гиперболы S , или равенством

$$\delta_{ab} = k \log \left(\frac{A_0 J_0}{A_0 J_0} : \frac{B_0 J_0}{B_0 J_0} \right), \quad (3в)$$

где A_0, B_0, I_0 и J_0 — точки пересечения прямых a, b, i и j с фиксированной прямой q ; например, с касательной t к гиперболе в ее вершине (докажите это!)²⁾; число k в формулах (36) и (3в) определяется выбором основания системы логарифмов. Таким образом, в плоскости Минковского «меропределение углов» в пучке прямых с центром в любой точке O плоскости является гиперболическим.

Заметим еще, что в соответствии с требованием «равенства» любых двух прямых плоскости естественно считать, что «плоскость

¹⁾ Заметим, что в евклидовой геометрии и в геометрии Галилея угол δ_{ab} между прямыми a и b , пересекающимися в точке O , можно тоже определить формулой

$$\delta_{ab} = 2s_{AOB},$$

где s_{AOB} — площадь высекаемого прямыми a и b сектора единичной евклидовой окружности, соответственно «окружности Галилея».

²⁾ Величина δ_{ab} равна также (понимаемой в смысле геометрии Минковского!) длине дуги AB «единичной окружности» S , где A и B — точки пересечения с S прямых a и b .

Минковского» образуется всеми точками (обычной) плоскости и прямыми какого-то одного рода, скажем, прямыми 1-го рода. При этом в геометрии Евклида каждую точку прямой a можно соединить прямой с какой-то фиксированной вне a точкой A (рис. 189, а); в геометрии Галилея, как мы знаем, на (обыкновенной) прямой a имеется единственная точка, которую нельзя соединить с A (обыкновенной) прямой, — так сказать, точка, «параллельная» точке A (рис. 189, б); в плоскости же Минковского на прямой (1-го рода) a имеется бесконечно много точек, которые нельзя соединить с A прямыми 1-го рода (рис. 189, в). С другой стороны, во

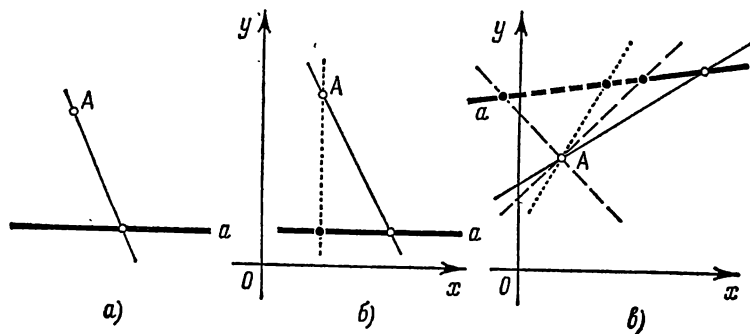


Рис. 189.

всех трех геометриях — Евклида, Галилея и Минковского — через точку A , не принадлежащую прямой a , проходит единственная прямая, не пересекающая a (прямая, параллельная a).

Нам осталось описать шесть других геометрий Кэли — Клейна на плоскости: (эллиптическую) геометрию Римана, (гиперболическую) геометрию Лобачевского, дважды гиперболическую геометрию, а также три геометрии, названия которых снабжены приставкой «анти», — антиевклидову, антипсевдоевклидову и антигиперболическую. Это нетрудно сделать. Эллиптическая геометрия Римана, по существу, является самой старой из известных людям «неевклидовых» геометрий: в ином обличии ее знали еще в глубокой древности, хотя впервые сопоставил ее с классической геометрией Евклида и с (в те годы не так давно открытой) геометрией Лобачевского только великий немецкий математик Бернгард Риман (1826 — 1866) в своей замечательной речи «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854 г.)¹.

¹) Лекция Б. Римана, с которой он выступил в 1854 г. перед Ученым советом Гёттингенского университета в качестве претендента на профессорскую кафедру, содержала весьма общую концепцию геометрии, по широте охвата и важности вполне способную соперничать с концепцией Ф. Клейна,

Рассмотрим единичную сферу Σ трехмерного евклидова пространства (т. е. сферу радиуса 1) и условимся называть *прямыми* «большие окружности» сферы Σ , т. е. сечения сферы Σ плоскостями, проходящими через ее центр O (рис. 190, а). Если при этом назвать «точками» просто точки сферы Σ , то некоторым неудобством явится то, что каждые две прямые будут пересекаться в двух, а не в одной точке. Для того чтобы устранить это неудобство, мы назовем *точкой* эллиптической плоскости Римана сразу

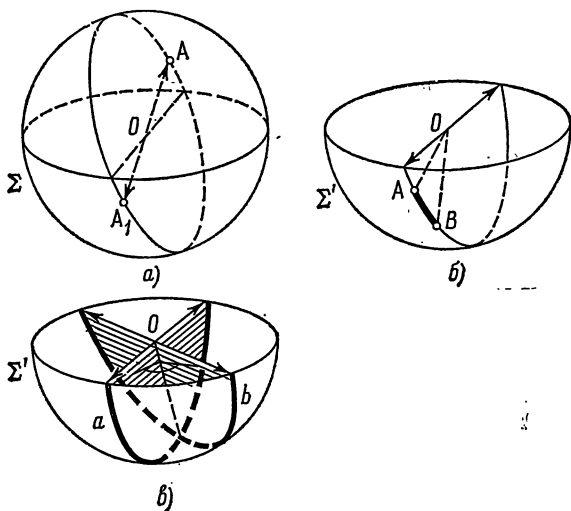


Рис. 190.

п а р у диаметрально противоположных точек сферы; таким образом, роль эллиптической плоскости будет играть не вся сфера Σ , а полусфера Σ' , причем надо еще отождествить между собой («склеить») диаметрально противоположные точки окружности, ограничивающей Σ' (ср. рис. 190, б). Далее, под расстоянием d_{AB} между двумя точками A и B прямой плоскости Римана (большой окружности или, точнее, большой полуокружности) мы будем понимать длину дуги \widehat{AB} ; ясно, что это «меропределение» является эллиптическим. Под углом δ_{ab} между двумя прямыми a и b эллиптической плоскости Римана мы будем понимать просто двугранный угол между плоскостями, содержащими большие полуокружности a и b (рис. 190, в); при этом, как нетрудно видеть, меропределение

развитой последним в 1872 г. в лекции [8], произнесенной в аналогичной обстановке в Эрлангенском университете; выделение эллиптической геометрии является лишь одним (и притом весьма частным) результатом исследований Римана (по этому поводу см., например, стр. 210—212 книги К л е й н а [81]).

углов в пучке прямых эллиптической плоскости будет «обычным», т. е. эллиптическим. Роль «движений» определенной таким образом плоскости Римана играют всевозможные повороты сферы Σ (рассматриваемой как множество пар диаметрально противоположных точек) вокруг ее центра O^1).

Сходным образом можно также описать гиперболическую геометрию Лобачевского и дважды гиперболическую геометрию. Заменяем (обычное) трехмерное пространство

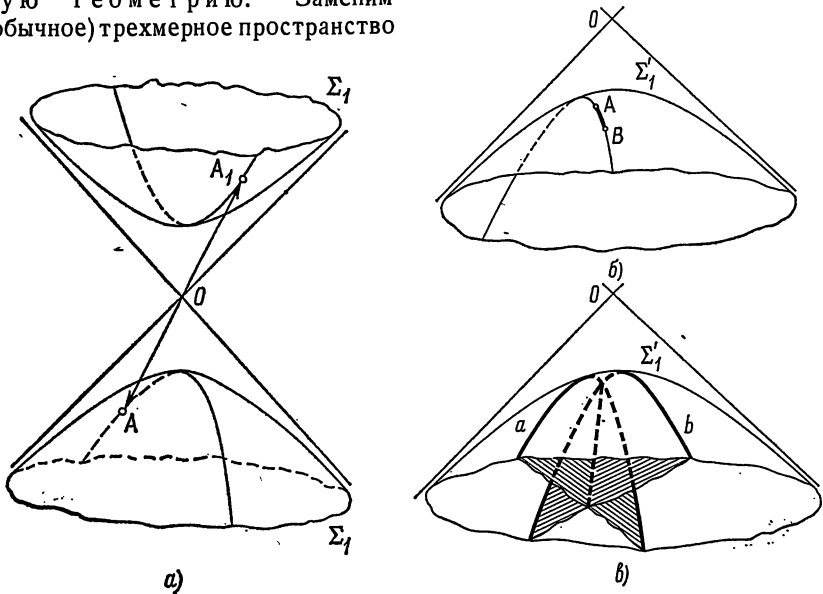


Рис. 191.

Евклида псевдоевклидовым пространством, в котором расстояние d между двумя точками $A(x, y, z)$ и $A_1(x_1, y_1, z_1)$ (где x, y, z — обычные декартовы координаты в пространстве) измеряется по формуле

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2, \quad (4)$$

в то время как в евклидовом пространстве расстояние d между точками $A(x, y, z)$ и $A_1(x_1, y_1, z_1)$ вычисляется по формуле ²⁾

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2. \quad (4')$$

¹⁾ Таким образом, эллиптическая геометрия Римана оказывается очень близкой к так называемой «сферической геометрии», изучающей геометрические образы на поверхности сферы (см. по этому поводу, например, статьи Розенфельда [79] и Розенфельда и Яглома [24]).

²⁾ Ср. подстрочное примечание на стр. 16.

Из формулы (4) вытекает, что в трехмерном псевдоевклидовом пространстве имеются «единичные сферы» двух родов: «сфера» Σ_1 с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ записывается уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \quad (5)$$

(с евклидовой точки зрения это будет двуполостный гиперболоид, рис. 191, а); «сфера» Σ_2 записывается уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (5')$$

(она представляет собой однополостный гиперболоид, рис. 192, а). Условимся теперь называть *точками* гиперболической плоскости Лобачевского пары диаметрально противоположных

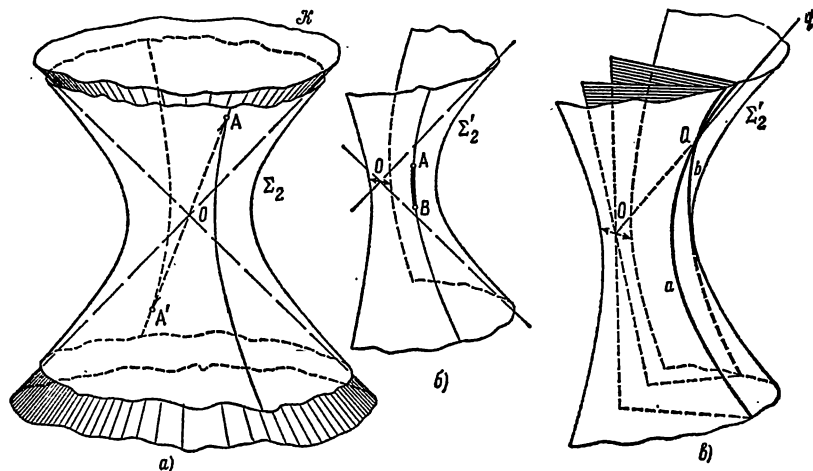


Рис. 192.

точек сферы Σ_1 (так что вся плоскость Лобачевского совпадает с одной «полостью» Σ'_1 двуполостного гиперболоида, рис. 191, б), а *прямыми* — «большие круги сферы» Σ_1 , т. е. сечения гиперболоида Σ_1 плоскостями, проходящими через его центр O . Ясно, что каждая такая «прямая» будет представлять собой гиперболу (точнее, одну ветвь гиперболы; см. те же рис. 191, а, б), «метрику расстояний» на которой можно определить подобно тому, как определяется метрика углов в пучке прямых плоскости Минковского, — эта «метрика» будет, разумеется, гиперболической¹⁾. «Пучок прямых»

¹⁾ Расстояние d_{AB} между двумя точками A и B можно также определить как псевдоевклидову длину отрезка AB соответствующей «прямой», т. е. как предел длин вписанных в $\sphericalangle AB$ ломаных, где под длиной ломаной понимается сумма длин всех ее звеньев, причем длина отрезка с концами в точках (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) определяется по формуле

$$d^2 = |(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2|.$$

определенной таким образом гиперболической плоскости Лобачевского (изображаемый сечениями поверхности Σ_1' пучком плоскостей, проходящих через одну прямую; ср. рис. 191, в) будет иметь такой же характер, как и пучок прямых на плоскости Евклида; в этом пучке можно ввести эллиптическое (т. е. обычное) «мероопределение углов», что совпадает с указанными приведенной выше таблицей признаками плоскости Лобачевского — первой «неевклидовой» плоскости, на существование которой указал в 1829 г. замечательный казанский геометр Николай Иванович Лобачевский (1792—1856)¹⁾. «Движения» плоскости Лобачевского определяются как «вращения сферы» Σ_1 (или «полусферы» Σ_1'), т. е. как такие преобразования трехмерного пространства $\{x, y, z\}$, которые оставляют на месте начало координат O и сохраняют расстояния (4) между точками (ясно, что эти преобразования переводят сферу Σ_1 в себя)²⁾.

Обратимся теперь к «сфере» Σ_2 (рис. 192, а). отождествим и здесь диаметрально противоположные точки, т. е. рассмотрим «полусферу» Σ_2' с отождествленными диаметрально противоположными точками ограничивающей ее «окружности» (рис. 192, б). Условимся точки этой «полусферы» Σ_2' называть *точками* конструируемой «плоскости»; *прямыми* же мы назовем сечения «сферы» Σ_2 (или «полусферы» Σ_2') плоскостями, проходящими через центр O и пересекающими Σ_2 по гиперболе (не по эллипсу!). В таком случае на каждой прямой (т. е. на гиперболе) можно будет ввести гиперболическое мероопределение длин³⁾. С другой стороны, пучок прямых нашей геометрии, проходящих через одну точку Q , задается пучком плоскостей, содержащих прямую $OQ \equiv q$ и пересекающих конус \mathcal{K}^e с уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (5a)$$

(см. рис. 192, а, в). Устроен этот пучок подобно пучку прямых в плоскости Минковского — так, например, определяющий его пучок плоскостей содержит две «предельные» плоскости i и j , касающиеся конуса \mathcal{K}^e , и состоит из плоскостей, заключенных внутри двугранного угла, образованного плоскостями i и j . В таком пучке можно ввести «гиперболическое мероопределение углов», определив δ_{ab}

¹⁾ Почти одновременно с Н. И. Лобачевским и независимо от него к новой геометрической схеме пришли также знаменитый немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) и венгерский офицер Янош Бойан (1802—1860) (см. подстрочное примечание²⁾ на стр. 5).

²⁾ Такой подход к геометрии Лобачевского позволяет, опираясь на аналогию между евклидовым и псевдоевклидовым пространством, развить эту геометрию весьма широко (см., например, статью Розенфельда и Яглома [24] или написанное Б. А. Розенфельдом Дополнение к книге Каяна [25]).

³⁾ См. подстрочное примечание на стр. 246.

между двумя прямыми a и b знакомой уже нам формулой

$$\delta_{ab} = k \log \left(\frac{\sin \angle(a, i)}{\sin \angle(a, j)} : \frac{\sin \angle(b, i)}{\sin \angle(b, j)} \right) \quad (36)$$

(где, скажем, через $\angle(a, i)$ обозначен обычный, т. е. евклидов, двугранный угол между плоскостью i и плоскостью, определяющей «прямую» a). «Плоскость» с введенными таким образом расстояниями и углами является дважды гиперболической плоскостью; ее «движения» и здесь порождают «повороты сферы» Σ_2 псевдоевклидова пространства (понимаемой как множество пар

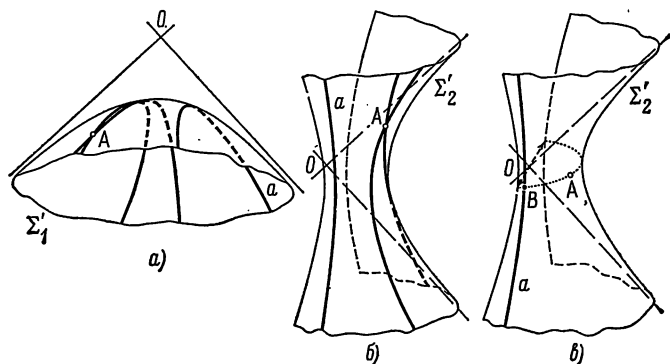


Рис. 193.

диаметрально противоположных точек!) вокруг ее центра O . Заметим еще, что как в гиперболической геометрии Лобачевского, так и в дважды гиперболической геометрии через точку, лежащую вне прямой a , проходит бесконечно много не пересекающихся \dot{a} прямых (рис. 193, а, б); при этом в геометрии Лобачевского через любые две точки A и B проходит единственная прямая (так как через три точки A , B и O пространства можно провести единственную плоскость), в то время как в дважды гиперболической геометрии на не проходящей через точку A прямой a можно указать бесконечно много точек, не соединимых никакой прямой с точкой A (ибо не все плоскости AOB , где B — переменная точка гиперболы a , будут пересекать Σ_2 по гиперболе; см. рис. 193, в).

Наконец, заметим, что из каждой известной нам геометрии можно получить новую (но чрезвычайно близкую к исходной!) «геометрию», условившись называть точки «прямыми», а прямые — «точками» (и, соответственно этому, расстояния между точками — «углами между прямыми», а углы между прямыми — «расстояниями между точками»). Такое, чисто словесное, «преобразование» переводит, как мы знаем,

геометрию Галилея в себя (см. § 5 гл. I); оно также переводит в себя эллиптическую геометрию Римана и дважды гиперболическую геометрию (в которых также справедлив принцип двойственности). Каждую же из трех других известных нам геометрий — Евклида, Минковского и Лобачевского — оно переводит в геометрию, «двойственную» исходной, или «антигеометрию»: геометрию Евклида — в антиевклидову, геометрию Минковского — в антипсевдоевклидову, геометрию Лобачевского — в антигиперболическую.

В заключение приведем таблицы, характеризующие девять геометрий Кэли—Клейна с точки зрения свойств «параллельности» прямых и точек, а также укажем без доказательства (см., впрочем, ниже, стр. 290—292) основные зависимости, связывающие в каждой из рассматриваемых геометрий элементы произвольного треугольника ABC . При этом буквы «Р», «Е» и «Л» в таблицах II—IV указывают соответственно на эллиптический (Риман!), евклидов или гиперболический (Лобачевский!) характер соответствующего мероопределения; буквы a и A обозначают в таблицах II и III произвольную прямую и произвольную точку, не принадлежащую прямой a ; через A, B, C обозначены в таблице IV величины углов треугольника ABC , а через $a \equiv BC, b \equiv CA, c \equiv AB$ — длины его сторон¹⁾.

Таблица II. Число проходящих через точку A прямых, не пересекающих прямую a

Мероопределение углов \ Мероопределение длин	Мероопределение длин		
	Р	Е	Л
Р	0	1	∞
Е	0	1	∞
Л	0	1	∞

Таблица III. Число принадлежащих прямой a точек, несоединимых прямой с точкой A

Мероопределение углов \ Мероопределение длин	Мероопределение длин		
	Р	Е	Л
Р	0	0	0
Е	1	1	1
Л	∞	∞	∞

Истолкование геометрии Лобачевского на плоскости через посредство псевдоевклидовой геометрии в пространстве определяет любопытную связь геометрии Лобачевского с теорией относительности Эйнштейна, которая иногда проходит незамеченной. Рассмотрим релятивистскую (т. е. связанную с идеа-

¹⁾ В ряде отношений оказывается удобным считать фигурирующие в таблице IV величины $a, b, c; A, B, C$ снабженными знаком $+$ или $-$, т. е. считать стороны и углы треугольника направленными; мы здесь на этом не остановимся. Также не остановимся мы на принятом в таблице IV истолковании понятий «сторона» и «угол», позволяющем, например, утверждать, что в евклидовой геометрии $A = B + C$ (теорема о внешнем угле треугольника).

Таблица IV. Метрические соотношения между элементами треугольника

Метропре- деление длин Метро- опреде- ление углов	P	E	Л
P	$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$ $\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ $A = B + C$	$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos A$ $\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} c}$ $\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} a$
E	$a = b + c$ $\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$ $A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \cos a$	$a = b + c$ $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ $A = B + C$	$a = b + c$ $\frac{A}{\operatorname{sh} a} = \frac{B}{\operatorname{sh} b} = \frac{C}{\operatorname{sh} c}$ $A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \operatorname{ch} a$
Л	$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \operatorname{ch} A$ $\frac{\operatorname{sh} A}{\sin a} = \frac{\operatorname{sh} B}{\sin b} = \frac{\operatorname{sh} C}{\sin c}$ $\operatorname{ch} A = \operatorname{ch} B \operatorname{ch} C + \operatorname{sh} B \operatorname{sh} C \cos a$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{ch} A$ $\frac{\operatorname{sh} A}{a} = \frac{\operatorname{sh} B}{b} = \frac{\operatorname{sh} C}{c}$ $A = B + C$	$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \operatorname{ch} A$ $\frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{sh} a} = \frac{\operatorname{sh} B}{\operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{sh} C}{\operatorname{sh} c}$ $\operatorname{ch} A = \operatorname{ch} B \operatorname{ch} C + \operatorname{sh} B \operatorname{sh} C \operatorname{ch} a$

ми теории относительности) кинематику плоских (или, точнее, плоско-параллельных) движений (ср. выше, стр. 28). Нетрудно видеть, что геометрически эта кинематика равносильна учению о трехмерном пространстве $\{x, y, t\}$, «движения» которого определяются формулами, родственными формулам (7) и (10) из § 10 (стр. 185 и 193); так, например, переход от системы отсчета $\{x, y, t\}$ к системе отсчета $\{x', y', t'\}$, движущейся относительно первоначальной системы отсчета в направлении оси Ox со скоростью v , определяется формулами

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} x - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} t + a, \\ y' &= y + b, \\ t' &= -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} x + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} t + d. \end{aligned} \quad (6)$$

Но легко видеть, что если (x, y, t) и (x_1, y_1, t_1) — координаты двух «событий» в первой системе отсчета, а (x', y', t') и (x_1', y_1', t_1') — их координаты во второй системе, то

$$\begin{aligned} (x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2 - (t_1' - t')^2 &= \\ &= \frac{1}{1-v^2} [(x_1 - x) - v(t_1 - t)]^2 + (y_1 - y)^2 - \frac{1}{1-v^2} [-v(x_1 - x) + (t_1 - t)]^2 = \\ &= \frac{1}{1-v^2} [(1-v^2)(x_1 - x)^2 + (v^2 - 1)(t_1 - t)^2] + (y_1 - y)^2 = \\ &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (t_1 - t)^2. \end{aligned}$$

И вообще, можно показать, что двумерная релятивистская кинематика сводится к геометрии трехмерного псевдоевклидова пространства $\{x, y, z\}$ с метрикой

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2, \quad (4)$$

где время обозначено не буквой t , а буквой z .

Рассмотрим, далее, множество равномерных движений по плоскости. Как выше, можно показать, что каждому такому движению отвечает некоторая прямая линия в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, изображающем множество всех событий (характеризующихся двумя пространственными и одной временной координатами); таким образом, множество всех равномерных движений по плоскости с точки зрения теории относительности эквивалентно множеству всевозможных прямых трехмерного псевдоевклидова пространства. При этом для каждых двух движений естественным образом определяется «отклонение» одного из них от другого: это «отклонение» задается скоростью одного из рассматриваемых движений по отношению к другому, принятому за состояние покоя («относительной скоростью» в терминах §§ 3 и 10). Это своеобразное «меропределение» в множестве всех равномерных движений заставляет отождествить между собой все движения с одной и той же (по величине и направлению!) скоростью, поскольку «расстояние» между двумя такими движениями оказывается равным нулю; таким образом, множество всевозможных равномерных движений сводится к множеству равномерных движений, включающих фиксированное «событие» $O(0, 0, 0)$ (ибо для каждого равномерного движения можно найти движение с той же скоростью v , «исходящее» из «пункта» $O(0, 0, 0)$). Но такие равномерные движения изображаются прямыми трехмерного пространства, проходящими через начало координат O и заключающимися внутри конуса \mathcal{K} с уравнением (5а)

(рис. 194); последнее условие равносильно условию $v < 1$, где v — скорость рассматриваемого движения в какой-то инерциальной системе отсчета (здесь за единицу скоростей, как и в § 10, принята скорость света¹⁾).

Заменяем теперь каждую из рассматриваемых прямых точкой ее пересечения с «полусферой» Σ_1 — одной полостью (евклидова) гиперboloида

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1. \quad (5)$$

Если вспомнить, что скорость одного равномерного движения относительно другого совпадает с «углом» между двумя изображающими эти движения прямыми в смысле псевдоевклидовой геометрии, а этот угол в свою очередь равен «расстоянию» между точками пересечения соответствующих прямых с Σ_1 в смысле действующей на Σ_1 неевклидовой геометрии Лобачевского, то

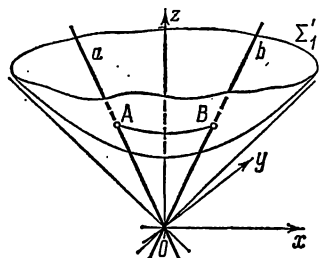


Рис. 194.

мы приходим к выводу, что с точки зрения теории относительности Эйнштейна множество всевозможных равномерных движений по плоскости совпадает с плоскостью Лобачевского, если за «расстояние» между движениями a и b принята относительная скорость движения a по отношению к движению b .

Точно так же показывается, что множество всевозможных равномерных движений в пространстве с точки зрения теории относительности Эйнштейна совпадает с трехмерным пространством Лобачевского (относительно которого см., например, книги Нордена [62], Кагана [75] или статью Розенфельда и Яглома [24]), если за расстояние между

движениями a и b принята скорость движения a по отношению к движению b .

«Поле действия» геометрий Евклида, Галилея и Минковского является (обычная или аффинная²⁾) плоскость; геометрии Римана, Лобачевского и дважды гиперболическая геометрия определяются на «единичных сферах» трехмерного евклидова пространства с метрикой

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \quad (4')$$

и трехмерного псевдоевклидова пространства с метрикой

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2, \quad (4)$$

рассматриваемых как множество пар диаметрально противоположных точек. Этот путь построения плоских геометрий Кэли — Клейна с помощью стереометрических конструкций может быть еще продолжен. Заметим, прежде всего, что «сферу» Σ_2 псевдоевклидова пространства с уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad (5)$$

¹⁾ В теории относительности, как мы знаем, движения со скоростью $v \geq 1$ считаются невозможными!

²⁾ См. по этому поводу, например, книгу Яглома и Ашкинзуе [56].

рассматриваемую как множество пар диаметрально противоположных точек, можно принять также и за «поле действия» антигиперболической геометрии — достаточно только считать *точками* антигиперболической плоскости точки «полусферы» Σ'_2 (рис. 192, б), а *прямыми* — линии пересечения Σ'_2 с плоскостями, проходящими через начало координат O и пересекающими гиперболоид Σ_2 по эллипсу (не по гиперболе!)¹). При этом под «движениями» антигиперболической плоскости по-прежнему понимаются преобразования, порождаемые «поворотами» псевдоевклидова пространства вокруг точки O .

Наряду с евклидовым пространством и псевдоевклидовым пространством рассмотрим еще вырожденное евклидово пространство (или полупсевдоевклидово пространство) — трехмерное пространство $\{x, y, z\}$, в котором расстояние d между точками (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) вычисляется по формуле

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2, \quad (7)$$

и вырожденное псевдоевклидово пространство (или полупсевдоевклидово пространство), в котором расстояние между теми же двумя точками определяется так:

$$d^2 = (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2. \quad (7')$$

«Движения» вырожденных евклидова и псевдоевклидова пространств записываются формулами

$$\begin{aligned} x' &= \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y & + a, \\ y' &= -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y & + b, \\ z' &= ux + vy + wz + c, \end{aligned} \quad (8)$$

соответственно

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{ch} \alpha \cdot x + \operatorname{sh} \alpha \cdot y & + a, \\ y' &= \operatorname{sh} \alpha \cdot x + \operatorname{ch} \alpha \cdot y & + b, \\ z' &= ux + vy + wz + c. \end{aligned} \quad (8')$$

В самом деле, легко видеть, что если, например, координаты x', y', z' связаны с координатами x, y, z формулами (8), то

$$\begin{aligned} (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2 &= [(x_1 - x) \cos \alpha + (y_1 - y) \sin \alpha]^2 + \\ &+ [-(x_1 - x) \sin \alpha + (y_1 - y) \cos \alpha]^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \end{aligned}$$

(ср. формулы (8) и (8') с формулами (6) из § 1 и (23) из § 11, стр. 20 и 208, выражающими движения на плоскостях Евклида и Минковского).

¹ Другими словами, плоскостями, не пересекающими конуса \mathcal{K} с уравнением (5а).

«Единичные сферы» σ и σ_1 вырожденных евклидова и псевдо-евклидова пространств записываются уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (9)$$

и

$$x^2 - y^2 = 1, \quad (9')$$

т. е. с евклидовой точки зрения они представляют собой круговой и гиперболический цилиндры (рис. 195, а и 196, а). Точку $O(0, 0, 0)$,

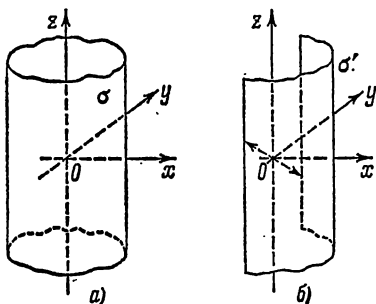


Рис. 195.

находящуюся на оси каждого из этих цилиндров, будем считать центром цилиндра; далее, условимся рассматривать каждый из цилиндров (9) и (9') как множество пар своих диаметрально противоположных (т. е. симметричных относительно центра O) точек. В таком случае цилиндры σ и σ_1 (точнее, полуцилиндры σ' и σ'_1 с отождествленными диаметрально противоположными точками края полуцилиндра σ' ; см. рис. 195, б и 196, б) можно принять за изображение («модель»)

антиевклидовой и антипсевдоевклидовой плоскостей. При этом роль точек рассматриваемых плоскостей играют точки «полусфер» σ' и σ'_1 , а роль прямых — сечения σ' и σ'_1 плоскостями, проходящими через точку $O(0, 0, 0)$; расстояние между

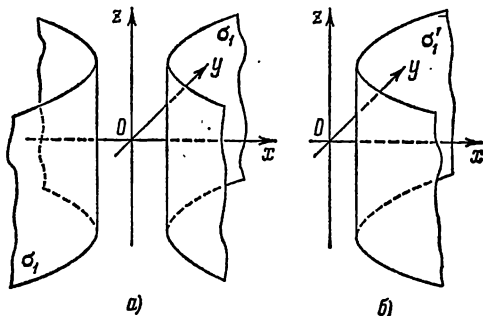


Рис. 196.

точками A и B совпадает с измеренными в смысле вырожденной евклидовой или псевдоевклидовой геометрии длиной отрезка AB «прямой», а «угол между прямыми» a и b — с углом между соответствующими плоскостями в смысле той же действующей в трехмерном пространстве вырожденной евклидовой или псевдоевклидовой

геометрии (мы здесь не останавливаемся на точном определении содержания последнего понятия). «Движения» антиевклидовой или антипсевдоевклидовой плоскости порождаются движениями (8) или (8') трехмерного пространства, оставляющими на месте центр $O(0, 0, 0)$ сферы σ или σ_1 .

Также и три оставшиеся геометрии Кэли—Клейна,— а именно геометрии Евклида, Галилея и Минковского,— могут быть описаны сходным образом. Наряду с евклидовой метрикой (4') и псевдоевклидовой метрикой (4), вырожденной евклидовой метрикой (7) и вырожденной псевдоевклидовой метрикой (7') расстояние d между точками $A(x, y, z)$ и $A_1(x_1, y_1, z_1)$ трехмерного пространства можно определить и по формуле

$$d^2 = (x_1 - x)^2, \quad (10)$$

аналогичной формуле (37) из § 12, стр. 224, выражающей расстояние между точками $A(x, y)$ и $A_1(x_1, y_1)$ плоскости Галилея. Меропределиению (10), которое нам будет удобнее записывать так:

$$d^2 = (z_1 - z)^2, \quad (10a)$$

отвечают три геометрии в пространстве; «движения» в этих трех геометриях задаются формулами

$$\begin{aligned} x' &= \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y + v_1 z + a, \\ y' &= -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y + v_2 z + b, \\ z' &= z + c \end{aligned} \quad (11)$$

(трехмерное пространство Галилея; ср. формулы (11) с формулами (12) из § 2, стр. 34), соответственно

$$\begin{aligned} x' &= \operatorname{ch} \alpha \cdot x + \operatorname{sh} \alpha \cdot y + v_1 z + a, \\ y' &= \operatorname{sh} \alpha \cdot x + \operatorname{ch} \alpha \cdot y + v_2 z + b, \\ z' &= z + c \end{aligned} \quad (11')$$

(псевдогалилеево пространство; ср. с формулами (23) из § 11, стр. 208) и

$$\begin{aligned} x' &= x + uy + vz + a, \\ y' &= y + wz + b, \\ z' &= z + c \end{aligned} \quad (11a)$$

(вырожденное галилеево или «флаговое» пространство). При этом во всех этих трех геометриях «единичная сфера» σ_0 задается уравнением

$$z^2 = 1 \quad \text{или} \quad z = \pm 1; \quad (12)$$

т. е. представляет собой пару параллельных плоскостей (рис. 197, а).

Рассмотрим теперь «сферу» σ_0 как множество пар диаметрально противоположных, т. е. симметричных относительно начала координат $O(0, 0, 0)$, точек; другими словами, ограничимся рассмотрением одной «полусферы» σ'_0 (плоскости; рис. 197, б). Если принять сечения этой «полусферы» проходящими через точку O плоскостями за «прямые» соответствующей геометрии и назвать «движениями»

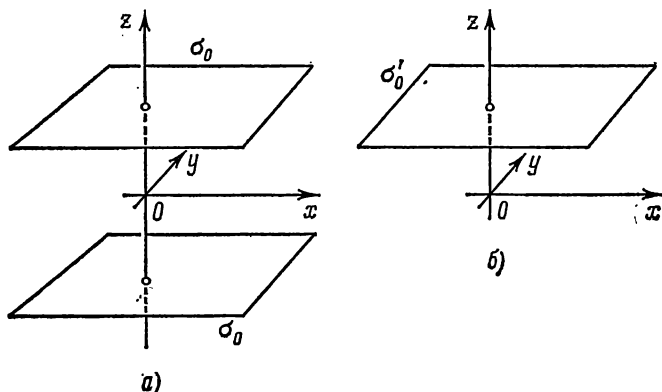


Рис. 197.

«повороты» (11), (11') или (11а), оставляющие на месте центр $O(0, 0, 0)$ сферы σ_0 , то мы приходим к евклидовой геометрии, псевдоевклидовой геометрии и к геометрии Галилея на плоскости σ'_0 .

Представление шести плоских геометрий Кэли—Клейна в виде сфер в обыкновенном (евклидовом), псевдоевклидовом или вырожденном евклидовом пространстве очень удобно для распознавания линий, играющих в каждой из этих геометрий роль (евклидовых) окружностей. Условимся называть *циклами* такие линии плоскости Кэли—Клейна, которые устроены одинаково в каждой своей точке, иными словами, линии, допускающие «скольжения» по себе, причем «скольжения», позволяющие совместить каждую точку линии с любой другой ее точкой (ср. с § 7 гл. II). При таком понимании термина «цикл» приходится считать циклами плоскости Евклида окружности и прямые линии (записываемые уравнением (35а) из § 12, стр. 223); циклами плоскости Галилея—линии, которые мы называли «циклами» раньше и которым теперь придется присвоить какое-либо новое наименование, например «невыврожденные циклы», а также окружности и (обыкновенные и особые) прямые (все эти линии записываются уравнением (35), стр. 223); циклами плоскости Минковского—«окружности» и прямые (эти линии записываются уравнением (35б), стр. 223). Можно доказать, что *все циклы каждой из шести геометрий Кэли—Клейна—эллиптической (Римана), гиперболической (Лобачевского), дважды гиперболической, антигиперболической, антиевклидовой и антипсевдоевклидовой—изображаются плоскими сечениями соответствующей «сферы»* (Σ , Σ_1 , Σ_2 , σ_1 или σ_2). Так, например, роль циклов (эллиптической) геометрии Римана играют *прямые и окружности*, где окружность, как и в евклидовой геометрии, определяется как *множество точек, равноудаленных*

от одной точки, называемой центром окружности; если плоскость Римана изображает евклидова сфера Σ , то циклы этой плоскости изображаются плоскими сечениями сферы Σ —как проходящими через центр $O(0, 0, 0)$ сферы Σ (прямые плоскости Римана), так и не проходящими через O (окружности плоскости Римана, рис. 198). [Заметим, что в сферической геометрии каждая окружность имеет два центра, изображаемых точками касания сферы с плоскостями α_1 и α_2 , параллельными содержащей окружность плоскости α ; однако соответствующие точки Q_1 и Q_2 сферы Σ служат образом одной точки плоскости Римана, так что в геометрии Римана окружность имеет только один центр.]

Обратимся теперь к (гиперболической) геометрии Лобачевского. Список всевозможных циклов геометрии Лобачевского хорошо известен: это суть *прямые, окружности* (окружность радиуса r —множество точек, удаленных на расстояние r от одной точки Q , называемой центром окружности), *эквилистанты* (эквилистанта ширины h —множество точек, удаленных на фиксированное расстояние h от одной прямой q , называемой базой эквидистанты), *предельные линии* (предельная линия—предельное положение проходящей через фиксированную точку A и касающейся в этой точке заданной прямой a окружности, радиус r которой неограниченно увеличивается, или предел касающейся в точке A прямой a эквидистанты, ширина h которой неограниченно увеличивается)¹⁾. Мы уже знаем,

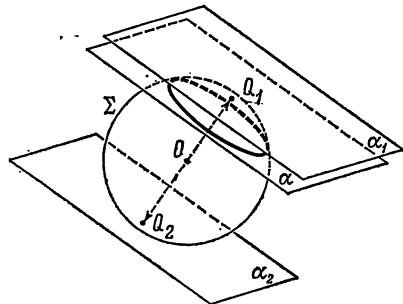


Рис. 198.

что в связанной со «сферой» Σ_1 «модели» плоскости Лобачевского прямые изображаются сечениями Σ_1 плоскостями, проходящими через центр $O(0, 0, 0)$ «сферы» Σ_1 и пересекающими конус \mathcal{K} с уравнением (5а) (ибо иные плоскости, проходящие через точку O , не пересекают «сферу» Σ_1). Можно также показать, что окружности плоскости Лобачевского изображаются сечениями «сферы» Σ_1 плоскостями α , не проходящими через O и пересекающими конус \mathcal{K} (и «сферу» Σ_1) по эллипсу (рис. 199, а); эквидистанты—сечениями Σ_1 плоскостями β , не проходящими через O и пересекающими \mathcal{K} по гиперболе (рис. 198, б); предельные линии—сечениями Σ_1 плоскостями γ , не проходящими через O и пересекающими \mathcal{K} по параболе (рис. 199, в). Заметим также, что в плоскости Лобачевского центром окружности, изображаемой сечением «сферы» Σ_1 плоскостью α , служит точка касания Σ_1 с плоскостью $\alpha_0 \parallel \alpha$ (рис. 199, а), а базой эквидистанты, изображаемой сечением Σ_1 плоскостью β ,— линия q пересечения Σ_1 с проходящей через точку $O(0, 0, 0)$ плоскостью $\beta_0 \parallel \beta$ (эта линия изображает прямую плоскости Лобачевского).

Аналогично этому можно описать и циклы дважды гиперболической, антигиперболической, антиевклидовой и антисевдоевклидовой геометрии; на случае антиевклидовой геометрии мы еще остановимся несколько ниже. Заметим еще, что из сказанного следует, что так называемые круговые преобразования каждой из шести перечисленных геометрий, т. е. такие преобразования каждой из этих плоскостей, которые переводят циклы снова в циклы, изображаются преобразованиями трехмерного пространства, пере-

¹⁾ См., например, Норден [62], Каган [75], Кокстер [19], Клейн [55], Розенфельд и Яглом [24], Яглом [10] или [77].

водящими плоскости снова в плоскости ¹⁾ и переводящими соответствующую «сферу» (Σ , Σ_1 , Σ_2 , σ или σ_1) в себя.

Поучительно проиллюстрировать все сказанное выше на примере представления антиевклидовой геометрии в виде геометрии «сферы» σ (или «полусферы» σ'). Мы знаем, что под «точками» антиевклидовой плоскости можно понимать прямые обыкновенной плоскости Евклида. Но хорошо известно, что уравнение каждой

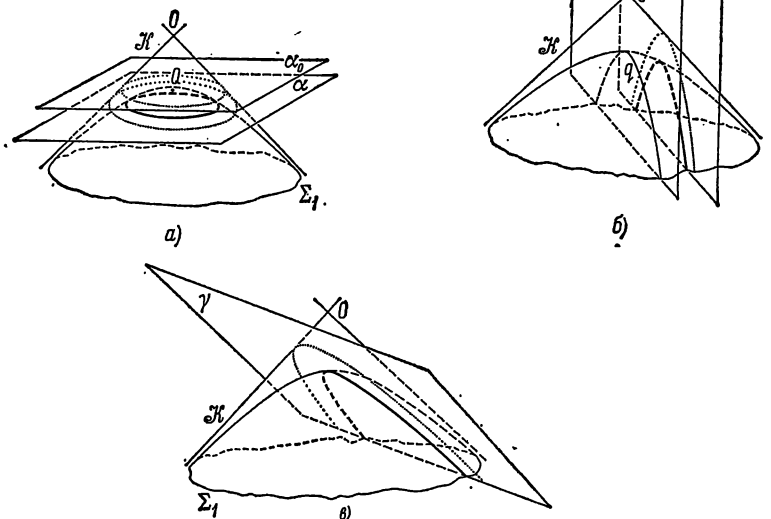


Рис. 199.

прямой l евклидовой плоскости можно записать в так называемой «нормальной форме»:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0; \quad (13)$$

здесь α — угол, образованный перпендикуляром n к прямой l с положительным направлением оси Ox , а p — расстояние от начала координат O до прямой l (рис. 200). Нормальная форма уравнения прямой удобна тем, что позволяет легко определить расстояние $d = d_{Ml}$ от произвольной точки $M(x_0, y_0)$ плоскости до прямой l ; это расстояние равно результату подстановки в уравнение (13) прямой координат точки M ²⁾

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \quad (13a)$$

¹⁾ То есть так называемыми проективными преобразованиями трехмерного пространства (см., например, Кокстер [19]).

²⁾ См., например, Дубнов [35], стр. 116—117.

Если при этом каждую прямую l плоскости считать направленной, т. е. снабженной стрелкой, указывающей то направление движения по прямой, которое мы считаем положительным, то и перпендикуляр n можно будет считать направленным, условившись, скажем, что поворот на 90° , переводящий положительное направление l в положительное направление n , происходит в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки (рис. 200а). В таком случае углу α можно будет придать любое значение:

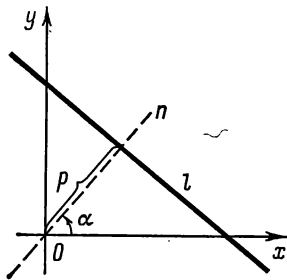


Рис. 200.

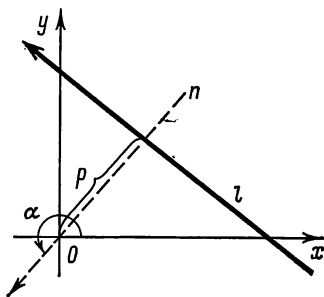


Рис. 200а.

$0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$; с другой стороны, если условиться считать расстояние от точки до (направленной!) прямой положительным или отрицательным, в зависимости от того, лежит точка слева или справа от прямой, то и расстоянию p от O до l можно будет придать любое значение: $-\infty < p < \infty$. Таким образом, множество всевозможных направленных прямых l (евклидовой) плоскости можно сопоставить множеству всевозможных троек чисел

$$\cos \alpha, \sin \alpha, -p, \quad (14)$$

являющихся коэффициентами уравнения (13) прямой, т. е. множеству точек $(\cos \alpha, \sin \alpha, -p)$ цилиндра σ трехмерного пространства $\{x, y, z\}$ (рис. 201). Уравнение этого цилиндра σ имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (9)$$

т. е. σ есть «сфера» вырожденного евклидова пространства $\{x, y, z\}$. При этом две прямые l и l_1 , отличающиеся только направлением, характеризуются тройками чисел (14) и

$$\begin{aligned} &(\cos(\alpha + 180^\circ), \sin(\alpha + 180^\circ), -(-p)) = \\ &= (-\cos \alpha, -\sin \alpha, p) \end{aligned}$$

(см. рис. 201), т. е. этим прямым отвечают «диаметрально противоположные» (другими словами, симметричные относительно начала координат $O(0, 0, 0)$) точки цилиндра σ ; поэтому, если считать «точки» антиевклидовой плоскости совпадающими с ненаправленными и прямыми обыкновенной плоскости Евклида, то каждая такая точка будет изображаться парой диаметрально противоположных точек «сферы» σ .

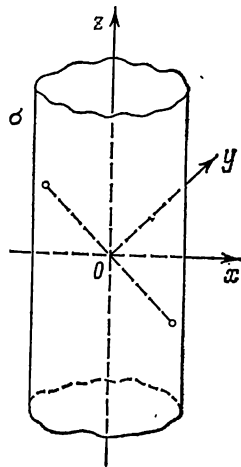


Рис. 201.

парой диаметрально

Однако в теории циклов антиевклидовой геометрии удобнее считать «точками» направленные евклидовы прямые¹⁾! При этом если сохранить принятое выше соглашение о знаке расстояния от точки до прямой, то (направленное, т. е. взятое со знаком + или -) расстояние $d = d_{Ml}$ от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l с уравнением (13) будет равно

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p. \quad (136)$$

При этом сечение «сферы» σ (т. е. цилиндра (9)) плоскостью

$$Ax + By + Cz = D \quad (15)$$

или

$$ax + by + z = d, \quad (15')$$

где $a = \frac{A}{C}$, $b = \frac{B}{C}$; $d = \frac{D}{C}$ — это множество тех точек цилиндра, $x^2 + y^2 = 1$,

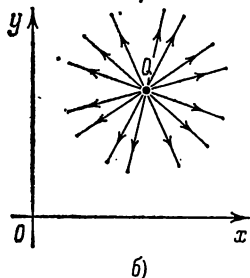
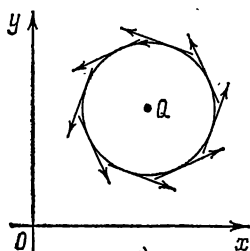


Рис. 202.

которые изображают (направленные) прямые евклидовой плоскости, удаленные от фиксированной точки $Q(a, b)$ на постоянное расстояние d (величина d может быть и отрицательной). [Мы здесь исключаем из рассмотрения плоскости, в уравнении (15) которых $C = 0$, т. е. плоскости, параллельные оси цилиндра σ .] Таким образом, изображенные плоскими сечениями «сферы» σ циклы антиевклидовой геометрии суть не что иное, как направленные *окружности*, понимаемые в смысле множества своих (направленных) касательных (рис. 202, а); к числу этих окружностей относятся и точки (окружности радиуса нуль), точнее, пучки проходящих через одну точку прямых (рис. 202, б). Точки на нашей модели антиевклидовой плоскости изображаются сечениями (15') цилиндра σ , где $d = 0$, т. е. сечениями σ плоскостями, проходящими через начало координат $O(0, 0, 0)$.

Круговые преобразования антиевклидовой плоскости — это такие преобразования в множестве (направленных) прямых евклидовой плоскости (совпадающих с точками антиевклидовой плоскости!), которые переводят *окружности снова в окружности*. Преобразования евклидовой плоскости, обладающие этим свойством, впервые рассмотрел замечательный французский математик Эдмонд Лагерр (1834—1886); поэтому их обычно называют *преобразованиями Лагерра*²⁾. Преобразования Лагерра изображаются такими преобразованиями цилиндра σ , которые переводят плоские сечения цилиндра снова в его плоские

¹⁾ Соответственно этому в вопросах антиевклидовой геометрии, связанных с теорией циклов и с учением о круговых преобразованиях, естественно считать точки антиевклидовой плоскости «направленными», т. е. рассматривать каждую точку как пару точек, совпадающих по положению на (антиевклидовой) плоскости, но различающихся своим «направлением». [«Направление» точки удобно задавать, например, указанием окружающей точку дуги со стрелкой, выделяющей то из двух направлений вращения вокруг этой точки, которое принимается за положительное; ср. рис. 224—226, стр. 295—296.] Также и точки плоскостей Римана, Лобачевского, дважды гиперболической, антигиперболической и антипсевдоевклидовой в ряде случаев удобно считать направленными; ср. ниже, стр. 295—296 или книги Яглома [10] и [77].

²⁾ Ср. Яглом [31], [10] или [77].

сечения. Примером такого преобразования может служить центральное проектирование цилиндра σ на себя из некоторого центра M , переводящее каждую точку A цилиндра во вторую точку A' пересечения σ с прямой MA (рис. 203); если прямая MB касается цилиндра σ_1 (в точке B), то точка B' считается совпадающей с B . Можно доказать, что описанное преобразование (отвечающее так называемой «осевой инверсии», близкой к обычной инверсии) переводит каждое плоское сечение цилиндра σ снова в его плоское сечение.

От стереометрических «моделей» плоских геометрий Кэли—Клейна трудно перейти к известным представлениям этих геометрий на плоскости. Спроектируем каждую из сфер Σ , Σ_1 , Σ_2 , σ и σ_1 трехмерного пространства $\{x, y, z\}$ из ее «центра» $O(0, 0, 0)$ на плоскость $z=1$ (рис. 204)¹⁾. При этом каждая пара диаметрально противоположных точек «сферы» перейдет в одну точку плоскости $z=1$ и мы сможем считать, что точки нашей «плоскости Кэли—Клейна» изображаются точками (обыкновенной²⁾ плоскости. При этом эллиптическая плоскость Римана изобразится *всей* плоскостью $z=1$ (рис. 204, а), гиперболическая плоскость Лобачевского — внутренностью круга $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 204, б), дважды гиперболическая плоскость и антигиперболическая плоскость — внешностью того же круга (рис. 204, в), антиевклидова плоскость — плоскостью $z=1$ без одной точки $x=y=0$ (рис. 204, г), наконец, антипсевдоевклидова плоскость — парой вертикальных углов $|x/y| < 1$ плоскости $z=1$ (рис. 204, д). Ясно, что проходящие через точку $O(0, 0, 0)$ плоские сечения любой из «сфер» Σ , Σ_1 , Σ_2 , σ и σ_1 центральная проекция этой «сферы» на плоскость $z=1$ из точки O переводит в прямые линии; поэтому в наших моделях шести плоских геометрий Кэли—Клейна *прямые* этих плоскостей *изображаются прямыми линиями* плоскости $z=1$. Полученные таким путем «модели» плоских геометрий Кэли—Клейна и явились исходным пунктом всех построений Кэли (алгебраических) и Клейна (геометрических); они называются моделями Клейна этих геометрий³⁾.

Иное представление тех же шести плоских геометрий Кэли—Клейна на плоскости можно получить, используя вместо центральной так называемую *стереографическую проекцию*, отображающую точки «сфер» Σ , Σ_1 , Σ_2 , σ и σ_1 на точки плоскости (см. выше, стр. 159, 167 и 219). «Сферы» Σ и Σ_1 содержат точку $Q(0, 0, -1)$; спроектируем их из этой точки на плоскость $z=1$, касающуюся «сферы» в диаметрально противоположной Q точке $Q_1(0, 0, 1)$ (рис. 205, а, б). При этом мы получим отображение сферы Σ на (всю) плоскость $z=1$; если же мы захотим ограничиться, скажем, верхней полусферой Σ' , то нам придется считать, что «полем действия» геометрии Римана на плоско-

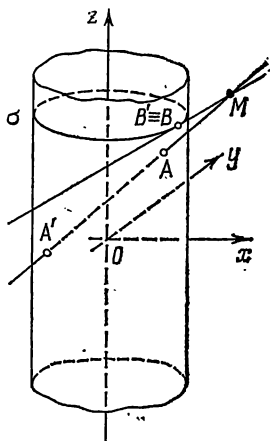


Рис. 203.

¹⁾ Геометрия Евклида, Галилея и Минковского с самого начала были нами определены как «действующие» на (обычной) плоскости; разумеется, эти представления также можно получить в результате центральной проекции «сферы» σ_0 на плоскость $z=1$, т. е. на «полусферу» σ_6 .

²⁾ Точнее, проективной.

³⁾ См. по этому поводу Клейн [55] или Каган [25]; по поводу модели Клейна геометрии Лобачевского см. также Норден [62], Александров [64] или Яглом [10].

сти $z=1$ является (довольно причудливая) область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 4$ и включающая половину точек самой этой окружности (ибо к полусфере Σ' следует причислить половину точек ограничивающей ее окружности; ср. выше, стр. 244, в частности, рис. 190, б). Часто оказывается более удобным считать, что «полем действия» геометрии Римана является вся плоскость $z=1$; при этом, однако, точки плоскости будут являться образами

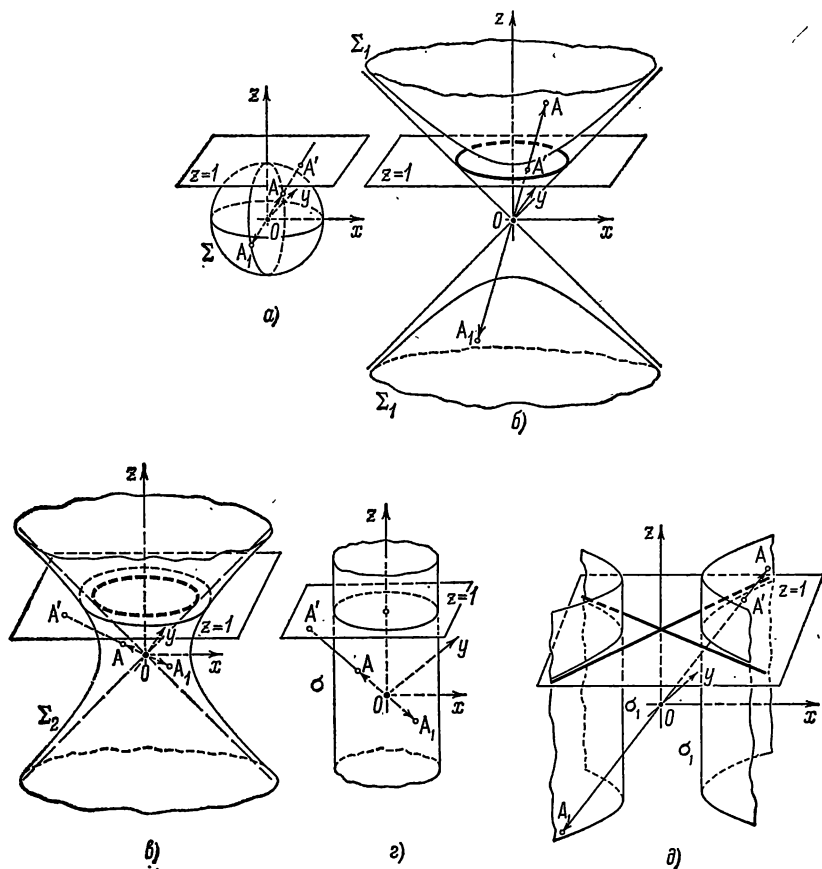


Рис. 204.

«направленных» точек плоскости Римана (ср. выше, стр. 260), изображаемых всеми точками сферы Σ . Заметим еще, что в силу свойств стереографической проекции (см. стр. 160—163) *окружности и прямые плоскости Римана*, изображаемые плоскими сечениями сферы Σ , на нашей модели представляются в виде (евклидовых) *окружностей*; в частности, прямые плоскости Римана, представляемые «большими окружностями» сферы Σ , изображаются *окружностями* плос-

кости $z=1$, пересекающими окружность $x^2 + y^2 = 4$ в диаметрально противоположных точках. Аналогично этому «верхнюю полусферу» Σ_1 стереографическая проекция переводит в круг $x^2 + y^2 < 4$ плоскости $z=1$, являющийся естественным «полем действия» геометрии Лобачевского; однако в некоторых случаях (например, при построении теории круговых преобразований геометрии Лобачевского) приходится считать точки плоскости Лобачевского направленными и полагать, что «область действия» геометрии Лобачевского совпадает со всей плоскостью $z=1$, на которую стереографическая проекция отображает

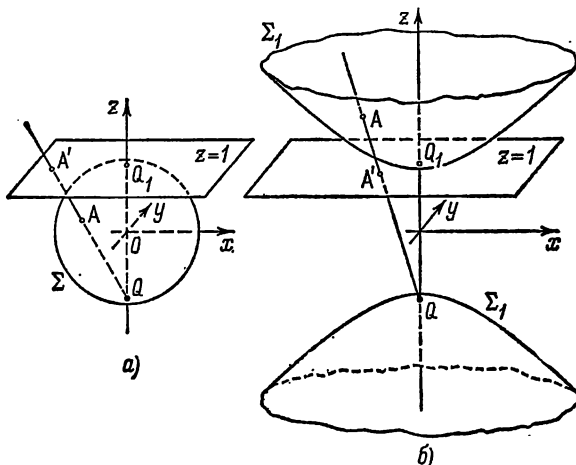


Рис. 205.

всю «сферу» Σ_1 . Так как стереографическая проекция «сферы» Σ_1 на плоскость $z=1$ переводит плоские сечения «сферы» Σ_1 в окружности плоскости (ср. выше, стр. 160—161), то в нашей модели геометрии Лобачевского все прямые линии и все циклы (окружности, предельные линии и эквидистанты) изображаются (евклидовыми) окружностями.

«Сферы» Σ_2 , σ и σ_1 содержат точку $P(-1, 0, 0)$; спроектируем их на плоскость $x=1$, касающуюся «сферы» в «диаметрально противоположной» P точке $P_1(1, 0, 0)$ (рис. 206, $a-\epsilon$). Полученное таким образом отображение поверхностей Σ_2 , σ и σ_1 на плоскость позволяет построить на плоскости «модели» дважды гиперболической, антигиперболической, антиевклидовой и антипсевдоевклидовой геометрий, «действующих» на поверхности рассматриваемых «сфер»; при этом также удобно считать точки соответствующих геометрий Кэли—Клейна «направленными», ибо только в этом случае образами точек плоскостей Кэли—Клейна будут в себе точки «сфер» Σ_2 , σ и σ_1 ¹⁾. Отметим еще, что

1) Заметим, что на самом деле «полем действия» получаемых описанным путем «моделей» шести геометрий Кэли—Клейна служит не хорошо знакомая нам евклидова (или аффинная) плоскость, а более сложный геометрический образ. А именно, стереографическая проекция сферы Σ_2 и двуполостного гиперboloида Σ_1 на плоскость $z=1$ отображает Σ_2 и Σ_1 на евклидову круговую плоскость (см. выше, стр. 159); стереографическая проекция цилиндров σ и σ_1 на плоскость $x=1$ отображает σ и σ_1 на циклическую плоскость Галилея (стр. 167); стереографическая проекция однополостного гиперboloида Σ_2 на плоскость $x=1$ отображает его на круговую плоскость Минковского (см. стр. 219).

плоские сечения сферы Σ_2 стереографическая проекция переводит в гиперболы плоскости $x=1$, а плоские сечения сфер σ и σ_1 стереографическая проекция переводит в параболы; поэтому прямые и циклы дважды гиперболической и антигиперболической плоскостей изображаются на нашей модели

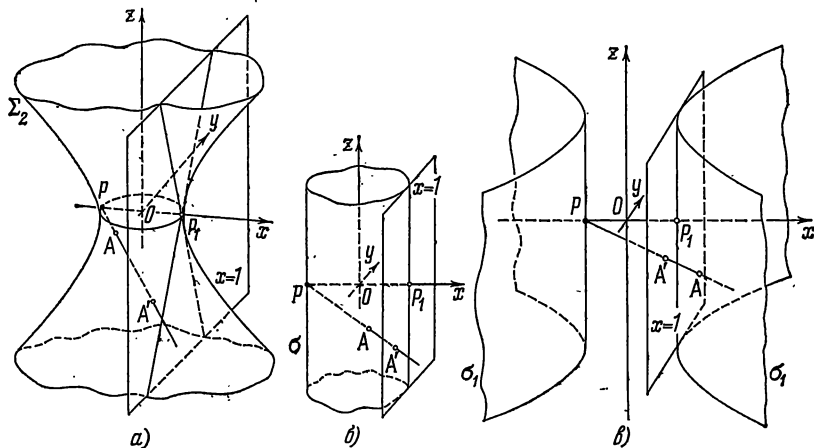


Рис. 206.

гиперболами, а прямые и циклы антиевклидовой и антипсевдоевклидовой плоскостей — параболлами.

Так как получаемые с помощью стереографической проекции модели плоских геометрий Лобачевского и Римана (весьма, кстати сказать, близкие к тем «моделям», изучение которых составляет предмет нижеследующего Приложения Б) впервые рассмотрел знаменитый французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912), то все эти модели называются моделями Пуанкаре геометрий Кэли—Клейна¹⁾.

В заключение укажем, что, подобно тому как на плоскости существует $3^2 = 9$ геометрий Кэли—Клейна, в трехмерном пространстве существует $3^3 = 27$ подобных геометрических систем, отвечающих всевозможным комбинациям мероопределений расстояний между точками на прямой, плоских углов в пучке прямых (совокупности прямых, принадлежащих фиксированной «плоскости пучка» и проходящих через фиксированную точку — центр пучка) и двугранных углов в пучке плоскостей (т. е. в совокупности всевозможных плоскостей, проходящих через фиксированную прямую — ось пучка): каждое из этих мероопределений может быть эллиптическим, евклидовым или гиперболическим! При этом три типа мероопределений расстояний и три типа мероопределений плоских углов были определены выше. Аналогично этому определяются и три типа мероопределений двугранных углов: обычное (т. е. принятое в евклидовой стереометрии) мероопределение двугранных углов называется эллиптическим, или римановым; мероопределение, определяемое условием о том, что величина угла между плоскостями α и β равна (евклидовой) длине отрезка AB , высекаемого плоскостями α и β на некоторой (не параллельной ребру

¹⁾ См. Яглом [78] или [77]; по поводу моделей Пуанкаре геометрий Лобачевского и Римана см. также Клейн [55], Каган [25] или Яглом [10].

двугранного угла) фиксированной прямой q , называется *евклидовым*; наконец, мероопределение, задаваемое формулой

$$\delta_{\alpha\beta} = k \log \left(\frac{\angle(\alpha, \iota)}{\angle(\alpha, \varepsilon)} : \frac{\angle(\beta, \iota)}{\angle(\beta, \varepsilon)} \right),$$

где знак \angle применяется в смысле обычного двугранного угла между плоскостями, а ι и ε — какие-то две фиксированные плоскости, принадлежащие рассматриваемому пучку плоскостей, называется *гиперболическим*, или *меропределением Лобачевского*.

Примерами пространственных геометрий Кэли—Клейна являются как обычная геометрия Евклида, так и псевдоевклидова геометрия, вырожденная евклидова и вырожденная псевдоевклидова геометрии, галилеева геометрия, псевдогалилеева геометрия и вырожденная галилеева геометрия (см. выше, стр. 252—253 и 255). Условившись характеризовать метрику на прямой, в пучке прямых и в пучке плоскостей буквами «Р», «Е» и «Л» в зависимости от того, является она эллиптической, евклидовой или гиперболической, и относя первую букву к метрике расстояний, вторую — к метрике плоских углов и третью — к метрике двугранных углов, мы сможем сказать, что евклидова геометрия в пространстве относится к типу ЕРР, а псевдоевклидова — к типу ЕРЛ, ЕЛР или ЕЛЛ в зависимости от того, считаем ли мы «плоскостями» нашей «геометрии» плоскости, пересекающие конус \mathcal{K} с уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (5a)$$

по эллипсам или по гиперболам, причем здесь следует отдельно рассмотреть пространство, «прямыми» которого являются прямые, параллельные тем, которые заключены внутри конуса \mathcal{K} , и пространство, «прямыми» которого параллельны проходящим через точку $O(0,0,0)$ и лежащим вне \mathcal{K} прямым¹⁾. Аналогично этому вырожденная евклидова геометрия относится к типу ЕРЕ, а вырожденная псевдоевклидова геометрия — к типу ЕЛЕ; при этом «прямыми» вырожденной псевдоевклидовой геометрии мы должны считать (евклидовы) прямые, параллельные проходящим через точку $O(0,0,0)$ прямым, принадлежащим любой (но только какой-то одной!) паре вертикальных углов, образованных плоскостями

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ или } (x+y)(x-y) = 0.$$

Наконец, галилеева, псевдогалилеева и вырожденная галилеева геометрии относятся к типам ЕЕР, ЕЕЛ и ЕЕЕ.

Таким образом, выше мы уже встретились с девятью из двадцати семи трехмерных геометрий Кэли—Клейна, а именно с теми геометриями, в которых метрика расстояний является евклидовой. [Эти девять геометрий естественно сравнить с тремя плоскими геометриями Кэли—Клейна, служащими основным объектом изучения в настоящей книге: с геометриями Евклида, Галилея и Минковского, в которых также метрика расстояний является евклидовой.] Остальные $27 - 9 = 18$ пространственных геометрий Кэли—Клейна можно определить на сферах четырехмерных²⁾ обыкновенных и вырожденных евклидовых и псевдоевклидовых пространств; однако эти построения³⁾ уже выходят за рамки настоящей книги.

1) Если все «плоскости» нашей геометрии Кэли—Клейна пересекают конус \mathcal{K} по (евклидовым) эллипсам, то «прямыми» мы неизбежно должны считать (евклидовы) прямые, параллельные проходящим через точку O прямым, лежащим вне \mathcal{K} (ибо наши «плоскости» содержат только такие «прямые»).

2) См. Кокстер [19]; Розенфельд и Яглом [20].

3) См., например, книгу Розенфельда [82].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ЧИСЛОВЫЕ МОДЕЛИ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЙ

Хорошо известно, что точки евклидовой плоскости можно отождествить с *комплексными числами*, сопоставив точку с декартовыми прямоугольными координатами (x, y) или с полярными координатами (r, φ) комплексному числу

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (16)$$

(рис. 207). Величины x и y называются соответственно действительной (вещественной) и мнимой частью числа z и обозначаются символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ ¹⁾; величины r и φ называются модулем и аргументом числа z и обозначаются символами $|z|$ и $\operatorname{Arg} z$. [Аргумент числа $z \neq 0$ определен с точностью до произвольного слагаемого, кратного 2π , т. е. наряду с аргументом z является любой угол $\varphi + 2\pi k$, где k — целое число; число $z = 0$ не имеет аргумента.] Модуль $|z|$

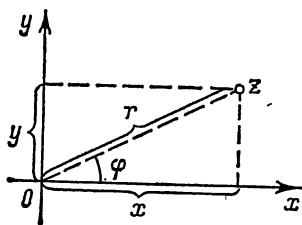


Рис. 207.

числа z можно определить по формулам

$$(a) |z|^2 = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \text{ или } (b) |z|^2 = z\bar{z}, \quad (17)$$

где \bar{z} — число, сопряженное числу z :

$$(a) \operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z \text{ или } (b) |\bar{z}| = |z|, \operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z \quad (18)$$

[т. е. если $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $\bar{z} = x - iy = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$]. Аргумент $\operatorname{Arg} z$ числа z задается соотношениями

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \cos(\operatorname{Arg} z), \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \sin(\operatorname{Arg} z), \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z), \quad (19)$$

¹⁾ Первые буквы французских слов *reel* — действительный и *imaginaire* — мнимый.

которые уместно также переписать в более привычном большинстве читателей виде

$$\frac{x}{r} = \cos \varphi, \frac{y}{r} = \sin \varphi, \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (19a)$$

Важно иметь в виду, что

$$\operatorname{Re}(z \pm z_1) = \operatorname{Re} z \pm \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im}(z \pm z_1) = \operatorname{Im} z \pm \operatorname{Im} z_1 \quad (20)$$

(т. е. $(x + iy) \pm (x_1 + iy_1) = (x \pm x_1) + i(y \pm y_1)$),

$$|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|, \operatorname{Arg}(z \cdot z_1) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z_1 \quad (20a)$$

(т. е. $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) =$
 $= rr_1[\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)]$), а

$$\left| \frac{z}{z_1} \right| = \frac{|z|}{|z_1|}, \operatorname{Arg} \left(\frac{z}{z_1} \right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z_1 \quad (20б)$$

(т. е. $\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)]$). Из соотношений (18) — (20б) также следует, что

$$\overline{z + z_1} = \bar{z} + \bar{z}_1, \quad \overline{z - z_1} = \bar{z} - \bar{z}_1, \quad \overline{z \cdot z_1} = \bar{z} \cdot \bar{z}_1 \quad \text{и} \quad \overline{\left(\frac{z}{z_1} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \quad (21)$$

и что сумма $z + \bar{z} (= 2\operatorname{Re} z)$ и произведение $z\bar{z} (= |z|^2)$ двух сопряженных чисел будут числами вещественными, а разность $z - \bar{z} (= 2i\operatorname{Im} z)$ — числом чисто мнимым (т. е. имеющим вид ib , где b вещественно). Равенство $z = \bar{z}$ имеет место лишь для вещественных чисел z , для которых $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Arg} z = 0$ или π , а равенство $z = -\bar{z}$ — лишь для чисто мнимых чисел z , для которых $\operatorname{Re} z = 0$, а $\operatorname{Arg} z = \pm \frac{\pi}{2}$.

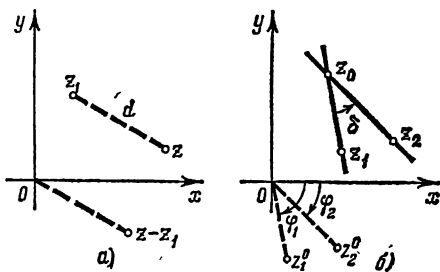


Рис. 208.

Расстояние d_{z, z_1} между двумя точками евклидовой плоскости, отвечающими комплексным числам z и z_1 , — между точками z и z_1 , как мы будем говорить в дальнейшем, — определяется формулой

$$d_{z, z_1} = |z - z_1| \quad \text{или} \quad d_{z, z_1}^2 = (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) \quad (22)$$

(рис. 208, а). Угол $\delta(z_0, z_1)(z_0, z_2)$ между прямыми, соединяющими точки z_1 и z_2 с одной и той же точкой z_0 , — между прямыми (z_0, z_1) и (z_0, z_2) ,

как бы будем дальше говорить,— задается равенством

$$\delta_{(z_0, z_1), (z_0, z_2)} = \text{Arg } V(z_2, z_1; z_0) = \text{Arg} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}, \quad (23)$$

где выражение $V(z_2, z_1; z_0) = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ можно назвать (*простым*) *отношением трех точек* z_2, z_1 и z_0 . Формула (23) следует из того, что $\delta_{(z_0, z_1), (z_0, z_2)} = \varphi_2 - \varphi_1$, где φ_2 и φ_1 — аргументы комплексных чисел $z_2^0 = z_2 - z_0$ и $z_1^0 = z_1 - z_0$ (рис. 208, б). При этом следует иметь в виду, что угол $\delta_{(z_0, z_1), (z_0, z_2)}$ — это направленный угол между направленными прямыми (z_0, z_1) и (z_0, z_2) , т. е. угол, на который надо повернуть положительный луч направленной прямой (z_0, z_1) (луч, ведущий от z_0 к z_1) для совмещения его с положительным лучом второй направленной прямой (z_0, z_2) .

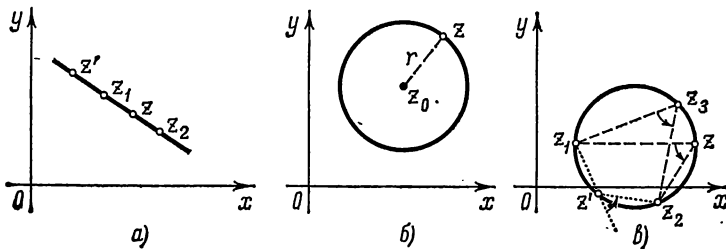


Рис. 209.

Ясно, что прямая (ненаправленная) (z_1, z_2) — это множество таких точек z , что

$$\text{Arg } V(z, z_1; z_2) = \text{Arg} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = 0 \quad (\text{или } = \pi) \quad (24)$$

(рис. 209, а). Отсюда следует, что прямую (z_1, z_2) можно определить как множество таких точек z , что

$$\text{Im } V(z, z_1; z_2) = \text{Im} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = 0, \quad (24a)$$

т. е. что число $V(z, z_1; z_2)$ вещественно. Последнее условие можно также записать так:

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z - z_2}}{\overline{z_1 - z_2}}. \quad (25)$$

Другими словами, уравнение прямой (z_1, z_2) имеет вид (25), т. е. имеет вид

$$(\overline{z_1 - z_2})z - (z_1 - z_2)\overline{z} + (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0$$

или,

$$Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad \text{Re } C = 0, \quad (26)$$

где $B = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ и $C = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$, т. е. C — чисто мнимое число. Обратное, можно показать, что *каждое уравнение вида (26) задает некоторую прямую линию*, а именно прямую, проходящую через такие точки z_1 и z_2 , что $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = B$, $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = C$.

Окружность с центром z_0 и радиусом r представляет собой множество таких точек z , что

$$|z - z_0| = r \quad \text{или} \quad (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \quad (27)$$

(рис. 209, б). Таким образом, *уравнение окружности имеет вид*

$$z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + (z_0\bar{z}_0 - r^2) = 0,$$

или вид

$$azz\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \quad \text{Im } a = \text{Im } c = 0. \quad (28)$$

Верно и обратное: *всякое уравнение вида (28) определяет некоторую окружность*, а именно окружность, центр z_0 и радиус r которой определяются равенствами $\bar{z}_0 = -\frac{b}{a}$, $z_0\bar{z}_0 - r^2 = \frac{c}{a}$. Ясно, что уравнения (26) и (28) можно записать в единой форме (28), где только в случае уравнения (26) надо считать, что

$$a = 0 \quad (29)$$

(для того чтобы придать уравнению (26) вид (28), надо умножить все члены уравнения (26) на мнимую единицу i). Можно также придать уравнениям (26) и (28) единый вид

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad \text{Re } A = \text{Re } C = 0, \quad (28a)$$

причем в случае прямой линии (уравнение (26))

$$A = 0. \quad (29a)$$

Окружность, проходящую через три точки z_1 , z_2 и z_3 , можно также описать как множество таких точек z , что

$$\delta_{(z_3, z_1)(z_3, z_2)} - \delta_{(z, z_1)(z, z_2)} = 0 \quad (\text{или} = \pi)$$

(здесь углы и прямые — направленные; рис. 209, в) или что

$$\text{Arg} \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \text{Arg} \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = 0 \quad (\text{или} = \pi). \quad (30)$$

Но (двойное) равенство (30) равносильно, очевидно, условию

$$\text{Im} (W(z_1, z_2; z_3, z)) = \text{Im} \frac{V(z_1, z_2; z_3)}{V(z_1, z_2; z)} = \text{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right) = 0, \quad (30a)$$

где выражение $W(z_1, z_2; z_3, z) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z}{z_2 - z}$ можно называть (сложным или двойным) отношением четырех точек z_1, z_2, z_3 и z . Таким образом, условие принадлежности четырех точек z_1, z_2, z_3 и z_4 одной окружности (или одной прямой) имеет вид

$$\operatorname{Im} W(z_1, z_2; z_3, z_4) = \operatorname{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right) = 0. \quad (31)$$

Уравнение (30а) окружности, проходящей через точки z_1, z_2 и z_3 , можно еще записать так:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} \cdot \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}}, \quad (30б)$$

или так:

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} C = 0, \quad (28а)$$

т. е. в том же виде, что и раньше; теперь в уравнении (28а)

$$\begin{aligned} A &= (z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_2 - z_3), \\ B &= \bar{z}_2(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_2 - z_3) - \bar{z}_1(z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3), \\ C &= \bar{z}_1 z_2 (z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) - z_1 \bar{z}_2 (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_2 - z_3). \end{aligned} \quad (28б)$$

Движения евклидовой плоскости представляют собой такие преобразования плоскости, переводящие точку z в точку z' , что¹⁾

$$(а) \quad z' = pz + q \quad \text{или} \quad (б) \quad z' = p\bar{z} + q \quad (p\bar{p} = 1). \quad (32)$$

В самом деле, легко показать, что если z' и z'_1 связаны с z и z_1 , скажем, соотношением (32а), то

$$\begin{aligned} (z'_1 - z')(\bar{z}'_1 - \bar{z}') &= [(pz_1 + q) - (pz + q)][(\bar{p}\bar{z}_1 + \bar{q}) - (\bar{p}\bar{z} + \bar{q})] = \\ &= p(z_1 - z) \cdot \bar{p}(\bar{z}_1 - \bar{z}) = p\bar{p}(z_1 - z)(\bar{z}_1 - \bar{z}), \end{aligned}$$

т. е. преобразование (32а) сохраняет расстояние (22) между точками:

$$d_{z'_1, z'} = d_{z_1, z}. \quad (33)$$

В частности, простейшие преобразования

$$(а) \quad z' = -z \quad \text{и} \quad (б) \quad z' = \bar{z} \quad (34)$$

¹⁾ Нетрудно видеть, что формулой (32а) записываются так называемые «собственные движения» («движения 1-го рода»), а формулой (32б) — «зеркальные движения», или «движения 2-го рода» (ср. Перепелкин [5], Яглом [9]).

выражают симметрию относительно точки 0 (рис. 210, а) и симметрию относительно прямой $\text{Im } z = 0$ (рис. 210, б), а общее преобразование (32а) представляет собой поворот, вокруг

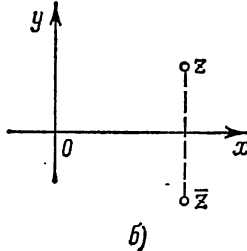
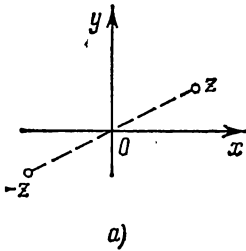


Рис. 210.

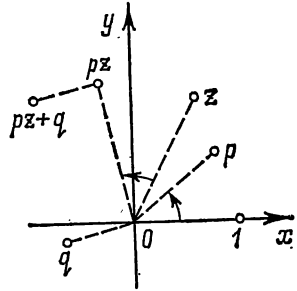


Рис. 211.

точки 0 на угол $\text{Arg } p$, сопровождаемый параллельным переносом на вектор q с началом 0 и концом q (рис. 211).

Заметим, наконец, что преобразования

$$(a) z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{или} \quad (б) z' = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \quad (ad-bc \neq 0) \quad (35)$$

(которые родственны движениям (32), если $c=0$), обладают тем свойством, что *сохраняют значение двойного отношения* $W(z_1, z_2; z_3, z_4)$ *четырёх точек* (случай преобразований (35а)) *или заменяют его комплексно сопряжённым* (случай преобразований (35б)). В самом деле, если, например, точки z'_1, z'_2, z'_3 и z'_4 связаны с точками z_1, z_2, z_3 и z_4 формулой (35а), то

$$\begin{aligned} W(z'_1, z'_2; z'_3, z'_4) &= \frac{z'_1 - z'_3}{z'_2 - z'_3} : \frac{z'_1 - z'_4}{z'_2 - z'_4} = \\ &= \left[\left(\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} \right) : \left(\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} \right) \right] : \left[\left(\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d} \right) : \right. \\ &\quad \left. : \left(\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d} \right) \right] = \left[\frac{(ad-bc)(z_1-z_3)}{(cz_1+d)(cz_3+d)} : \frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)} \right] : \\ &\quad : \left[\frac{(ad-bc)(z_1-z_4)}{(cz_1+d)(cz_4+d)} : \frac{(ad-bc)(z_2-z_4)}{(cz_2+d)(cz_4+d)} \right] = \\ &= \left[\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \cdot \frac{cz_2+d}{cz_1+d} \right] : \left[\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4} \cdot \frac{cz_2+d}{cz_1+d} \right] = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4} = W(z_1, z_2; z_3, z_4). \end{aligned}$$

Поэтому, если для четырех точек z_1, z_2, z_3 и z_4 отношение $W(z_1, z_2; z_3, z_4)$ вещественно, то вещественно также и число $W(z'_1, z'_2; z'_3, z'_4)$, где z'_1, z'_2, z'_3 и z'_4 — точки, полученные из z_1, z_2, z_3 и z_4 преобразованием (35а) или (35б); другими словами, *четыре*

точки, принадлежащие одной окружности (или прямой), преобразование (35) переводит в четыре точки, также принадлежащие одной окружности (или прямой). Таким образом, преобразования (35) евклидовой плоскости переводят окружности (и прямые линии) снова в окружности (и прямые линии), т. е. являются круговыми преобразованиями (см. выше, стр. 164). Более того, можно показать, что каждое круговое преобразование евклидовой плоскости можно представить в виде (35а) или (35б). В частности, инверсия с центром 0 и степенью 1 (ср. стр. 138—139) записывается следующим образом:

$$z' = \frac{1}{z} \quad (36)$$

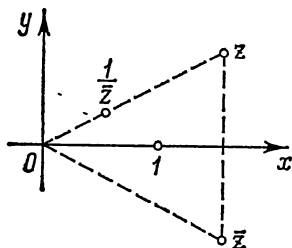


Рис. 212.

(рис. 212; равенство (35б) обращается в (36), если в нем положить $a = d = 0$, $b = c = 1$).

Ясно, что преобразования (32) переводят каждую точку z евклидовой плоскости в новую точку z' . Однако для преобразований (35а, б), где $c \neq 0$, это уже неверно — такие преобразования не являются взаимно однозначными преобразованиями (евклидовой) плоскости. В самом деле, точку $z = -\frac{d}{c}$, соответственно $z = -\frac{d}{c}$, обращающую в нуль знаменатель дроби, стоящей в правой части равенства (35), преобразование (35а) (соответственно (35б)) не переводит ни в какую точку плоскости.

Последнее обстоятельство связано с тем, что, в то время как операции сложения, вычитания и умножения в области комплексных чисел всегда осуществимы, операция деления осуществима не всегда: частное $\frac{z_1}{z_2}$ не имеет смысла, если $z_2 = 0$. Для того, чтобы устранить возникшее затруднение, иногда условно полагают

$$\frac{1}{0} = \infty$$

и считают, что

$$z + \infty = \infty, \quad z - \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0,$$

где z — произвольное комплексное число (причем в 3-м равенстве $z \neq 0$, а во 2-м, 4-м и 5-м $z \neq \infty$). Поэтому, если дополнить «плоскость комплексного переменного» одной фиктивной «бесконечно удаленной точкой» ∞ , то на расширенной таким образом плоскости преобразования (35а, б) будут уже взаимно однозначными; в частности, преобразование (35а) переводит точку $z = -\frac{d}{c}$ в точку

$$z' = \frac{-a \cdot \frac{d}{c} + b}{0} = \frac{-ad - bc}{0} = \infty$$

в точку $z = \infty$ в точку

$$z' = \frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d} = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} = \frac{a + 0}{c + 0} = \frac{a}{c}.$$

Таким образом, естественным «полем действия» круговых преобразований (35а, б) является не обычная плоскость Евклида, а круговая плоскость, получаемая из евклидовой плоскости пополнением последней одной «бесконечно удаленной точкой» ∞ .

Намеченные выше построения могут быть еще расширены. Наряду с комплексными числами математика знает две другие системы «чисел» — так называемые «дуальные числа» и «двойные числа». *Дуальное число* определяется как выражение $z = x + \varepsilon y$, где x, y — числа вещественные, а «дуальная единица» ε удовлетворяет условию $\varepsilon^2 = 0$; при этом, разумеется, «дуальная единица» ε , подобно «комплексной единице» i , является «числом особого рода», никак не сравнимым с обыкновенными (вещественными) числами. Аналогично этому под *двойным числом* понимается выражение $z = x + e y$, где x, y — вещественные, а «двойная единица» e (это тоже есть «число особого рода», несравнимое с вещественными числами) удовлетворяет условию $e^2 = +1$.

Дуальные числа, как будто, впервые рассматривал известный немецкий геометр Эйген Штуди (1862—1930), в силу чего в литературе их зачастую называют «дуальными числами Штуди»; двойные числа, по-видимому, впервые ввел современник Штуди, видный английский математик Вильям Клиффорд (1845—1879)¹⁾.

Сложение и вычитание дуальных и двойных чисел определяется аналогично сложению и вычитанию комплексных чисел:

$$(x + \varepsilon y) \pm (x_1 + \varepsilon y_1) = (x + x_1) + \varepsilon (y \pm y_1), \quad (37')$$

$$(x + e y) \pm (x + e y_1) = (x \pm x_1) + e (y + y_1), \quad (37'')$$

а умножение производится так:

$$\begin{aligned} (x + \varepsilon y) (x_1 + \varepsilon y_1) &= x x_1 + \varepsilon (x y_1) + \varepsilon (y x_1) + \varepsilon^2 (y y_1) = \\ &= x x_1 + \varepsilon (x y_1 + y x_1), \end{aligned} \quad (38')$$

$$\begin{aligned} (x + e y) (x_1 + e y_1) &= x x_1 + e (x y_1) + e (y x_1) + e^2 (y y_1) = \\ &= (x x_1 + y y_1) + e (x y_1 + y x_1) \end{aligned} \quad (38'')$$

¹⁾ Заметим, что иногда выражение «комплексные числа» употребляют, так сказать, в «обобщенном смысле», т. е. имея в виду сразу три системы чисел — (обычные) комплексные, дуальные и двойные числа. Мы, однако, далее будем употреблять термин «комплексные числа» лишь в его обычном смысле.

(ср. с равенством $(x + iy)(x_1 + iy_1) = (xx_1 - yy_1) + i(xy + yx_1)$). Таким образом, если и для чисел $z = x + iy$ и $z_1 = x_1 + iy_1$ условиться писать $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, то, как и в случае комплексных чисел,

$$\operatorname{Re}(z \pm z_1) = \operatorname{Re} z \pm \operatorname{Re} z_1, \quad \operatorname{Im}(z \pm z_1) = \operatorname{Im} z \pm \operatorname{Im} z_1. \quad (20)$$

Кроме того, для всех трех типов чисел (комплексных, дуальных и двойных)

$$\operatorname{Im}(z \cdot z_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z_1; \quad (39)$$

однако, в то время как для комплексных чисел

$$\operatorname{Re}(z \cdot z_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z_1, \quad (40)$$

для дуальных и двойных чисел соответственно

$$\operatorname{Re}(z \cdot z_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z_1 \quad (40')$$

и

$$\operatorname{Re}(z \cdot z_1) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z_1. \quad (40'')$$

Операция деления в множестве дуальных и двойных чисел тесно связана с операцией образования числа \bar{z} , сопряженного к данному числу z ; эта операция для всех трех типов чисел определяется единообразно:

$$\text{если } z = x + Iy, \text{ то } \bar{z} = x - Iy, \text{ где } I = i, \varepsilon, e \quad (41)$$

(обозначение I мы будем применять и в дальнейшем). Таким образом, для всех трех типов чисел

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z. \quad (18a)$$

Сумма двух сопряженных чисел (для любого типа чисел) является числом вещественным, т. е. таким числом z , что $\operatorname{Im} z = 0$; разность же сопряженных чисел является числом «чисто мнимым», т. е. таким числом z , что $\operatorname{Re} z = 0$:

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2\operatorname{Im} z \cdot I, \quad I = i, \varepsilon, e. \quad (42)$$

Условие $z = \bar{z}$ характеризует вещественные числа, а условие $z = -\bar{z}$ — чисто мнимые числа. Еще важнее, что также и произведение $z\bar{z}$ двух сопряженных чисел всегда является числом вещественным:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2, \quad (x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y) = x^2, \\ (x + ey)(x - ey) = x^2 - y^2. \quad (43)$$

Поэтому для определения значения дроби $\frac{z_1}{z}$ достаточно домножить ее числитель и знаменатель на число \bar{z} ; при этом знаменатель $z\bar{z}$

полученного выражения $\frac{z_1 \bar{z}}{z \bar{z}}$ будет уже числом вещественным, и для того, чтобы разделить на него число $z_1 \bar{z}$, будет достаточно поделить на $z \bar{z}$ отдельно $\text{Re}(z_1 \bar{z})$ и $\text{Im}(z_1 \bar{z})$:

$$\frac{z}{z_1} = \begin{cases} \frac{x_1 + iy_1}{x + iy} = \frac{(x_1 + iy_1)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{(xx_1 + yy_1) + i(xy_1 - x_1y)}{x^2 + y^2} = \\ = \frac{xx_1 + yy_1}{x^2 + y^2} + i \frac{xy_1 - x_1y}{x^2 + y^2}; & (44) \\ \frac{x_1 + \varepsilon y_1}{x + \varepsilon y} = \frac{(x_1 + \varepsilon y_1)(x - \varepsilon y)}{(x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y)} = \frac{xx_1 + \varepsilon(xy_1 - x_1y)}{x^2} = \\ = \frac{x_1}{x} + \varepsilon \frac{xy_1 - x_1y}{x^2}; & (44') \\ \frac{x_1 + \varepsilon y_1}{x + \varepsilon y} = \frac{(x_1 + \varepsilon y_1)(x - \varepsilon y)}{(x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y)} = \frac{xx_1 - yy_1 + \varepsilon(xy_1 - x_1y)}{x^2 - y^2} = \\ = \frac{xx_1 - yy_1}{x^2 - y^2} + \varepsilon \frac{xy_1 - x_1y}{x^2 - y^2}. & (44'') \end{cases}$$

Из формул (44) — (44'') следует, что, в то время как в области комплексных чисел невозможно деление лишь на такое число $z = x + iy$, что $x^2 + y^2 = 0$, т. е. на число 0 ($= 0 + i0$), в области дуальных или двойных чисел имеется больше чисел, деление на которые невозможно. А именно, в области дуальных чисел невозможно деление на такое число $z = x + \varepsilon y$, что $x = 0$, т. е. на все числа вида εy ($= 0 + \varepsilon y$); в области двойных чисел невозможно деление на такое число $z = x + \varepsilon y$, что $x^2 - y^2 = 0$ (т. е. $(x + y)(x - y) = 0$), — другими словами, на числа вида $x + \varepsilon x$ и $x - \varepsilon x$.

Мы знаем, что первое из равенств (43) кладется в основу определения модуля $|z|$ комплексного числа z :

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad \text{где } |z| \geq 0$$

(см. (17)). Аналогично этому в области дуальных и двойных чисел (сохраняя то же обозначение $|z|$ для модуля z) положим соответственно

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2, \tag{17a}$$

$$|z|^2 = z\bar{z} = \pm(x^2 - y^2). \tag{17б}$$

Точнее, для дуального числа $z = x + \varepsilon y$ мы условимся считать, что

$$|z| = x \tag{17'}$$

(таким образом, модуль дуального числа может быть как положительным, так и отрицательным!), а для двойного числа $z = x + ey$

$$|z| = \begin{cases} \pm \sqrt{x^2 - y^2} & \text{при } |x| \geq |y|, \\ \pm \sqrt{y^2 - x^2} & \text{при } |x| \leq |y|. \end{cases} \quad (17'')$$

Кроме того, удобно считать, что знак модуля двойного числа совпадает со знаком большего по абсолютной величине из чисел x и y (таким образом, модуль двойного числа также может быть отрицательным!).

Теперь мы можем утверждать, что во всех трех системах чисел (комплексных, дуальных и двойных) *невозможно деление лишь на числа нулевого модуля* (на такие числа z , что $|z| = 0$). Такие числа называют также *делителями нуля*, ибо для каждого подобного числа z существует такое отличное от нуля число z_1 , что $zz_1 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \cdot (a + ib) &= 0; & (ey) \cdot (eb) &= 0; \\ (x + ex)(a - ea) &= (1 + e)(1 - e)(xa) = (1 - e^2)(xa) = 0. \end{aligned}$$

Пусть z — число ненулевого модуля: $|z| = r \neq 0$. Вынесем в выражении $z = x + ey$ или $z = x + ey$ числа z модуль $|z| = r$ этого числа за скобку как множитель:

$$z = x + ey = r \left(\frac{x}{r} + e \frac{y}{r} \right); \quad z = x + ey = r \left(\frac{x}{r} + e \frac{y}{r} \right).$$

В случае дуального числа $z = x + ey$ модуль $|z| = r$ числа z , как мы знаем, равен x ; поэтому можно написать

$$z = x + ey = r \left(1 + e \frac{y}{x} \right).$$

Отношение $\frac{y}{x} = \varphi$ называют *аргументом* дуального числа $z = x + ey$ ненулевого модуля и обозначают через $\text{Arg } z$; таким образом, *каждое дуальное число ненулевого модуля можно записать так*:

$$z = x + ey = r(1 + e\varphi), \quad \text{где } r = |z| \text{ и } \varphi = \text{Arg } z, \quad (16')$$

причем модуль $|z|$ и аргумент $\text{Arg } z$ числа z определяются по формулам

$$|z| = x = \text{Re } z \quad (17')$$

и

$$\text{Arg } z = \frac{y}{x} = \frac{y}{|z|} = \frac{\text{Im } z}{|z|} = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}. \quad (19')$$

В случае двойного числа $z = x + ey$ надо отдельно рассмотреть случаи $|x| > |y|$ и $|x| < |y|$. В случае $|x| > |y|$ модуль r

числа z определяется по формуле

$$(a) \quad r = |z| = \pm \sqrt{x^2 - y^2} \quad (17'')$$

(где знак числа r совпадает со знаком числа x). Поэтому

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 - y^2}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1,$$

и, следовательно, существует такое число φ (которое можно понимать как некоторый угол в геометрии Минковского; см. выше, стр. 207), что

$$(a) \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{z}, \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \quad \operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \quad (19'')$$

(причем, естественно, $\operatorname{ch} \varphi = \frac{x}{r} > 0$; см. стр. 207). Если же $|x| < |y|$, то

$$(б) \quad r = |z| = \pm \sqrt{y^2 - x^2} \quad (17'')$$

(где знак числа r совпадает со знаком числа y); поэтому

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 - x^2}{r^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - x^2} = 1.$$

В этом случае существует такое число φ , что

$$(б) \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \quad \operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \quad (19'')$$

(и здесь $\operatorname{ch} \varphi = \frac{y}{r} > 0$). Определенное формулами (19''а, б) число φ называется *аргументом* двойного числа z и обозначается через $\operatorname{Arg} z$. Таким образом, *каждое двойное число $z = x + ey$ ненулевого модуля можно записать в одной из форм*

$$(a) \quad z = r(\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi) \quad \text{или} \quad (б) \quad z = r(\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi), \quad (16'')$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$, причем модуль $|z|$ числа $z = x + ey$ определяется формулами (17'') (где знак числа $|z|$ совпадает со знаком x для чисел вида (16''а) и со знаком y для чисел вида (16''б)), а аргумент $\operatorname{Arg} z$ этого числа задается соотношениями (19''а, б). Числа вида (16''а) (числа $x + ey$, где $|x| > |y|$) мы условимся называть *двойными числами 1-го вида*, а числа вида (16''б) (числа $z = x + ey$, где $|x| < |y|$) — *двойными числами 2-го вида*.

Заметим еще, что

$$\text{если } z = x + ey = r(1 + e\varphi), \text{ то } \bar{z} = x - ey = r(1 + e(-\varphi));$$

таким образом, для дуальных чисел также справедливы формулы

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z. \quad (18б)$$

Эти формулы сохраняют силу и для двойных чисел 1-го вида, ибо

$$\text{если } z = x + ey = r(\text{ch } \varphi + e \text{ sh } \varphi), \text{ то } \bar{z} = x - ey = r(\text{ch } (-\varphi) + e \text{ sh } (-\varphi))$$

(ср. с формулами (19а, б) из § 11, стр. 207). Однако для двойных чисел 2-го рода они заменяются формулами

$$|\bar{z}| = -|z|, \quad \text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z, \quad (18в)$$

ибо

$$\text{если } z = x + ey = r(\text{sh } \varphi + e \text{ ch } \varphi),$$

$$\text{то } \bar{z} = x - ey = -r(\text{sh } (-\varphi) + e \text{ ch } (-\varphi))$$

(см. те же формулы (19а, б) из § 11).

Составим теперь произведение двух дуальных чисел $z = r(1 + e\varphi)$ и $z_1 = r_1(1 + e\varphi_1)$:

$$\begin{aligned} zz_1 &= r(1 + e\varphi) \cdot r_1(1 + e\varphi_1) = rr_1[(1 + e\varphi)(1 + e\varphi_1)] = \\ &= rr_1(1 + e\varphi + e\varphi_1 + e^2 \cdot \varphi\varphi_1) = rr_1(1 + e(\varphi + \varphi_1)). \end{aligned}$$

Таким образом, для дуальных чисел выполняются (знакомые нам по комплексным числам) формулы

$$|zz_1| = |z| \cdot |z_1|, \quad \text{Arg } (zz_1) = \text{Arg } z + \text{Arg } z_1 \quad (20а)$$

(соотношения (20а) для комплексных чисел называются формулами Муавра; их можно так назвать и в области дуальных чисел). Следствиями (20а) являются правила

$$\left| \frac{z}{z_1} \right| = \frac{|z|}{|z_1|}, \quad \text{Arg} \left(\frac{z}{z_1} \right) = \text{Arg } z - \text{Arg } z_1 \quad (20б)$$

(т. е. $\frac{r(1 + e\varphi)}{r_1(1 + e\varphi_1)} = \frac{r}{r_1}(1 + e(\varphi - \varphi_1))$). Аналогично этому, если

$$z = r(\text{ch } \varphi + e \text{ sh } \varphi) \text{ и } z_1 = r_1(\text{ch } \varphi_1 + e \text{ sh } \varphi_1), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} zz_1 &= r(\text{ch } \varphi + e \text{ sh } \varphi) \cdot r_1(\text{ch } \varphi_1 + e \text{ sh } \varphi_1) = \\ &= rr_1[(\text{ch } \varphi + e \text{ sh } \varphi)(\text{ch } \varphi_1 + e \text{ sh } \varphi_1)] = \\ &= rr_1[(\text{ch } \varphi \text{ ch } \varphi_1 + \text{sh } \varphi \text{ sh } \varphi_1) + e(\text{ch } \varphi \text{ sh } \varphi_1 + \text{sh } \varphi \text{ ch } \varphi_1)] = \\ &= rr_1[\text{ch }(\varphi + \varphi_1) + e \text{ sh }(\varphi + \varphi_1)] \end{aligned}$$

(ср. с формулами (21а, б) из § 11, стр. 208); если $z = r(\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)$ и $z_1 = r_1(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)$, то

$$\begin{aligned} zz_1 &= r(\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi) \cdot r_1(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1) = \\ &= rr_1 [(\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)] = \\ &= rr_1 [(\operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \varphi_1) + e(\operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi_1)] = \\ &= rr_1 [\operatorname{ch}(\varphi + \varphi_1) + e \operatorname{sh}(\varphi + \varphi_1)]; \end{aligned}$$

наконец, если $z = r(\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)$ и $z_1 = r_1(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)$, то

$$\begin{aligned} zz_1 &= r(\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi) \cdot r_1(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1) = \\ &= rr_1 [(\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)] = \\ &= rr_1 [(\operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi_1 + \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi_1) + e(\operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} \varphi_1 + \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \varphi_1)] = \\ &= rr_1 [\operatorname{sh}(\varphi + \varphi_1) + e \operatorname{ch}(\varphi + \varphi_1)] \end{aligned}$$

(см. те же формулы (21а, б) из § 11). Таким образом, для двойных чисел также справедливы формулы Муавра

$$|zz_1| = |z| \cdot |z_1|, \quad \operatorname{Arg}(zz_1) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z_1; \quad (20a)$$

однако здесь надо еще помнить, что произведение двух одноименных двойных чисел (двух чисел 1-го вида или двух чисел 2-го вида) является двойным числом 1-го вида, а произведение двух разноименных двойных чисел (т. е. числа 1-го вида и числа 2-го вида) — двойным числом 2-го вида. Из формул (20а) также следует, что

$$\left| \frac{z}{z_1} \right| = \frac{|z|}{|z_1|}, \quad \operatorname{Arg} \left(\frac{z}{z_1} \right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z_1; \quad (20б)$$

однако и здесь важно учитывать, что частное двух одноименных двойных чисел всегда является числом 1-го вида, а частное двух разноименных двойных чисел — числом 2-го вида:

$$\frac{r(\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)}{r_1(\operatorname{ch} \varphi_1 + e \operatorname{sh} \varphi_1)} = \frac{r(\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)}{r_1(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)} = \frac{r}{r_1} [\operatorname{ch}(\varphi - \varphi_1) + e \operatorname{sh}(\varphi - \varphi_1)]$$

и

$$\frac{r(\operatorname{ch} \varphi + e \operatorname{sh} \varphi)}{r_1(\operatorname{sh} \varphi_1 + e \operatorname{ch} \varphi_1)} = \frac{r(\operatorname{sh} \varphi + e \operatorname{ch} \varphi)}{r_1(\operatorname{ch} \varphi_1 + e \operatorname{sh} \varphi_1)} = \frac{r}{r_1} [\operatorname{sh}(\varphi - \varphi_1) + e \operatorname{ch}(\varphi - \varphi_1)].$$

Заметим, наконец, что, как следует уже из формул (20), (39) и (40) — (40"), (44) — (44") и определения (41) сопряженного числа (или из формул (20а, б) и (18а—в), если речь идет об умножении и делении), для всех трех типов чисел

$$\overline{z + z_1} = \overline{z} + \overline{z_1}, \quad \overline{z - z_1} = \overline{z} - \overline{z_1}, \quad \overline{z \cdot z_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1} \quad \text{и} \quad \overline{\left(\frac{z}{z_1} \right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z_1}}. \quad (21)$$

Укажем еще, что в области дуальных чисел для вещественных чисел $\text{Arg } z = 0$, а для чисто мнимых чисел $\text{Arg } z$ не существует; в области же двойных чисел и для вещественных чисел и для чисто мнимых чисел $\text{Arg } z = 0$ (причем первые из этих чисел являются числами 1-го вида, а вторые — числами 2-го вида).

После этого аналитического введения перейдем к геометрии. Условимся сопоставлять точке плоскости Галилея (см. §§ 3—9) с декартовыми координатами x, y или с *полярными координатами* r, φ (т. е. такой точке M , что $OM = d_{OM} = r$ и $\angle xOM = \delta_{Ox, OM} = \varphi$; разумеется, расстояния и углы здесь понимаются в смысле геометрии Галилея!) дуальное число

$$z = x + ey = r(1 + e\varphi) \quad (16')$$

(рис. 213, а). Далее, *полярными координатами* точки M плоскости Минковского (см. § 11) мы будем называть (понимаемое в смысле геометрии Минковского!) расстояние $OM = d_{OM} = r$

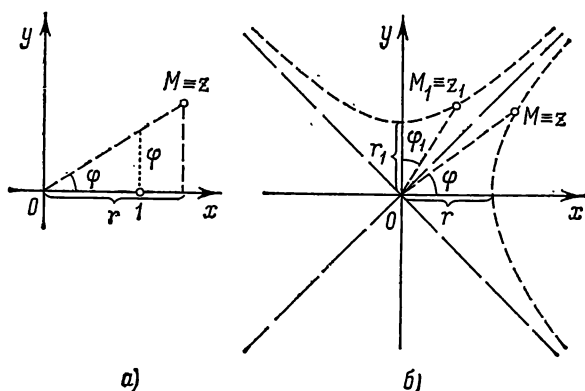


Рис. 213.

и один из углов $\angle xOM = \delta_{Ox, OM} = \varphi$ и $\angle yOM = \delta_{Oy, OM} = \varphi$, в зависимости от того, является OM прямой 1-го или 2-го рода (ср. выше, стр. 209); затем условимся сопоставлять точке плоскости Минковского с декартовыми координатами x, y или с полярными координатами r, φ двойное число

$$z = x + ey = r(\text{ch } \varphi + e \text{ sh } \varphi) \text{ или } z = x + ey = r(\text{sh } \varphi + e \text{ ch } \varphi) \quad (16'')$$

в соответствии с тем, какое из равенств $\varphi = \angle xOM$ или $\varphi = \angle yOM$ имеет место (рис. 213, б). Сопоставим еще точкам «особой прямой» $x = 0$ плоскости Галилея («прямой нулевой длины»; ср. выше, стр. 46 и 51) делители нуля в области дуальных чисел, а точкам двух «особых»

прямых» $x = y$ и $x = -y$ плоскости Минковского («прямым нулевой длины»; ср. выше, стр. 196 и 198) делители нуля в области двойных чисел. Таким образом мы отождествляем точки плоскости Галилея с дуальными числами (и поэтому в дальнейшем будем говорить «точка z плоскости Галилея», понимая под этим ту точку плоскости Галилея, которой сопоставлено дуальное число z), а точки плоскости Минковского — с двойными числами (и здесь мы тоже будем свободно употреблять выражения типа «точка z »).

Расстояние d_{z, z_1} между двумя точками z и z_1 плоскости Галилея или плоскости Минковского будет определяться той же формулой

$$d_{z, z_1} = |z - z_1| \quad \text{или} \quad d_{z, z_1}^2 = (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1), \quad (22)$$

к которой мы пришли, отождествляя точки евклидовой плоскости с комплексными числами (рис. 214, а, б), — это следует из определения (17а, б) модуля числа и из формул (5) из § 3 (стр. 51) и

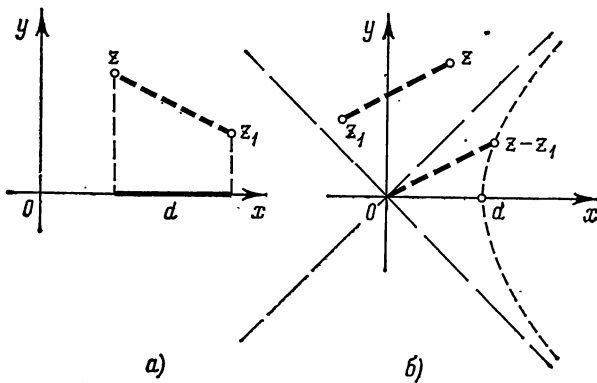


Рис. 214.

(15)—(15'а) из § 11 (стр. 199—200). Далее, угол $\delta_{(z_0, z_1)(z_0, z_2)}$ между прямыми (z_0, z_1) и (z_0, z_2) , соединяющими точки z_1 и z_2 с одной и той же точкой z_0 (если этот последний угол существует; ср. выше, стр. 54 и 203), выражается уже знакомой нам формулой

$$\delta_{(z_0, z_1), (z_0, z_2)} = \text{Arg } V(z_2, z_1; z_0) = \text{Arg } \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}, \quad (23)$$

где величину $V(z_2, z_1; z_0) = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ по-прежнему называют (*простым*) *отношением трех точек* z_2, z_1 и z_0 (плоскости Галилея или плоскости

Минковского). Соотношения (23) следуют из того, что $\delta_{(z_0, z_1), (z_0, z_2)} = \varphi_2 - \varphi_1$, где

$$\varphi_1 = \text{Arg } z_1^0 = \text{Arg } (z_1 - z_0), \quad \varphi_2 = \text{Arg } z_2^0 = \text{Arg } (z_2 - z_0)$$

(см., например, рис. 215, а — в случае плоскости Галилея и рис. 215, а, б, в — в случае плоскости Минковского; при этом на рис. 215, в $z_1^0 = z_1 - z_0$, где $(z_0, z_1) \perp (z_0, z_1)$, в соответствии с определением угла между

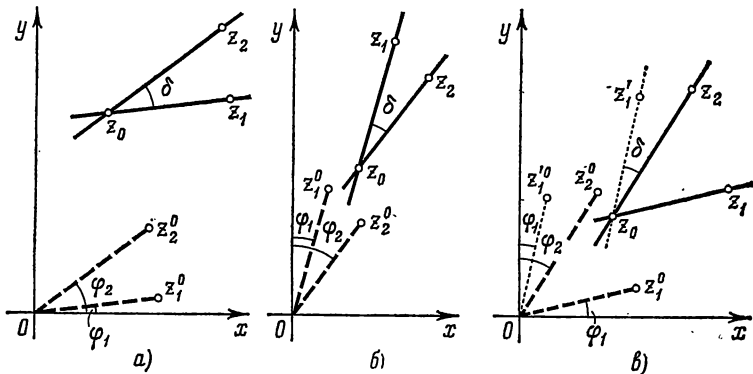


Рис. 215.

разноименными прямыми в плоскости Минковского). Заметим, что как в случае плоскости Галилея, так и в случае плоскости Минковского формула (23) фактически определяет величину направленного угла между прямыми (z_0, z_1) и (z_0, z_2) (ср. выше, стр. 268).

Поскольку прямая (z_1, z_2) , очевидно, представляет собой множество таких точек z , что

$$\text{Im } V(z, z_1; z_2) = 0, \quad (24a)$$

где $V(z, z_1; z_2) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}$ (простое) отношение трех точек z, z_1, z_2 (ср. рис. 209, а выше), то уравнение прямой плоскости Галилея или плоскости Минковского имеет знакомый нам уже вид

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \overline{\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}} \quad (25)$$

или

$$Bz - \overline{B} \overline{z} + C = 0, \quad \text{Re } C = 0. \quad (26)$$

Обратно, как и в случае евклидовой плоскости, каждое уравнение вида (26) задает некоторую прямую линию плоскости Галилея или плоскости Минковского (разумеется, в зависимости от того, являются

числа z и коэффициенты B и C дуальными числами или двойными), а именно прямую, соединяющую такие точки z_1 и z_2 , что $\bar{z}_1 - z_2 = B$, $z_1 \bar{z}_2 - z_1 z_2 = C$.

Окружность с центром z_0 и квадратом радиуса ρ , где $\rho = r^2$ в случае геометрии Галилея и $\rho = \pm r^2$ в случае геометрии

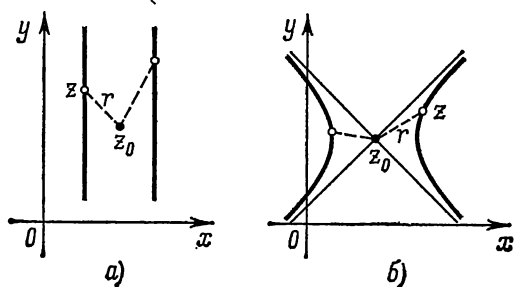


Рис. 216.

Минковского, причем $r > 0$ (рис. 216, а, б; ср. выше, стр. 200), представляет собой множество таких точек z , что

$$|z - z_0| = r \text{ или } (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \rho; \quad (27)$$

при этом в случае геометрии Минковского надо еще потребовать, чтобы все разности $z - z_0$ были числами одноименными (числами одного вида). Таким образом, уравнение окружности имеет вид

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + (z_0 \bar{z}_0 - \rho) = 0$$

или вид

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \text{ Im } a = \text{Im } c = 0. \quad (28)$$

Обратно, каждое уравнение вида (28) определяет окружность плоскости Галилея или плоскости Минковского, центр z_0 и квадрат радиуса ρ которой определяются из соотношений

$$\bar{z}_0 = -\frac{b}{a}, \quad z_0 \bar{z}_0 - \rho = \frac{c}{a}.$$

Цикл плоскости Галилея, проходящий через три точки z_1, z_2 и z_3 (рис. 217, а), и окружность плоскости Минковского, проходящая через точки z_1, z_2 и z_3 (рис. 217, б), — это множество таких точек z , что

$$\delta_{(z, z_1), (z_3, z_2)} = \delta_{(z, z_1), (z, z_2)}$$

(ср. выше, стр. 83 и 206), т. е. что

$$\operatorname{Im} W(z_1, z_2; z_3, z) = \operatorname{Im} \frac{V(z_1, z_2; z_3)}{V(z_1, z_2; z)} = \operatorname{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right) = 0, \quad (30a)$$

где $W(z_1, z_2; z_3, z) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z}$ — (сложное или двойное) отношение четырех точек z_1, z_2, z_3, z плоскости Галилея или плоскости

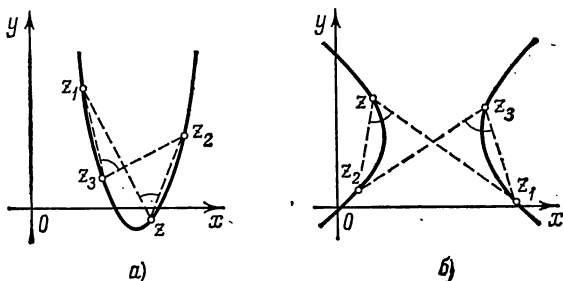


Рис. 217.

Минковского. Таким образом, уравнение рассматриваемого цикла или рассматриваемой окружности имеет вид

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} : \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}}, \quad (30б)$$

или вид

$$Azz\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} C = 0, \quad (28a)$$

где коэффициенты A, B и C записываются теми же формулами (28б), стр. 270, что и в случае евклидовой геометрии. Однако, в то время как в геометрии Минковского, так же как и в геометрии Евклида, уравнения (28) и (28a) равносильны (для того чтобы обратить обратящиеся к случаю геометрии Минковского уравнение (28) в уравнение (28a) или наоборот, достаточно умножить все члены уравнения на «двойную единицу» e), в геометрии Галилея эти уравнения различны (ибо сокращать все члены уравнения на «дуальную единицу» ε нельзя, поскольку ε является делителем нуля, деление на который является незаконным). Это отвечает тому, что в геометрии Галилея окружность (28) и цикл (28a) представляют собой две существенно различные линии, в то время как на плоскостях Евклида и Минковского линии (28) и (28a) не отличаются одна от другой.

Уравнение (26) прямой в случае геометрии Минковского можно считать частным случаем обоих уравнений (28) и (28a), которые

принимают форму (26) (или эквивалентную (26) форму), если

$$a = 0, \quad (29)$$

соответственно если

$$A = 0. \quad (29a)$$

Однако в геометрии Галилея прямую (26) можно считать частным¹⁾ случаем цикла (28a) (уравнение (28a) обращается в уравнение (26), если имеет место равенство (29a)), но не окружности (28). [Уравнение окружности плоскости Галилея (28) в случае выполнимости условия (29) принимает вид

$$bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \quad \text{Im } c = 0;$$

если положить здесь $b = b_1 + \varepsilon b_2$, $z = x + \varepsilon y$, то мы получим $(b_1 + \varepsilon b_2)(x + \varepsilon y) + (b_1 - \varepsilon b_2)(x - \varepsilon y) + c = 0$ или $2b_1x + c = 0$, т. е.

$$x = -\frac{c}{2b_1}$$

— уравнение «особой прямой» плоскости Галилея.]

Соотношение

$$\text{Im } W(z_1, z_2; z_3, z_4) = \text{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}; \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} \right) = 0 \quad (31)$$

представляет собой (необходимое и достаточное) условие принадлежности четырех точек z_1, z_2, z_3, z_4 плоскости Галилея одному циклу (или прямой) или принадлежности четырех точек z_1, z_2, z_3, z_4 плоскости Минковского одной окружности (или прямой).

Движения плоскости Галилея или плоскости Минковского можно описать как такие преобразования, переводящие точку z в точку z' , что

$$(a) z' = pz + q \quad \text{или} \quad (б) z' = p\bar{z} + q \quad (p\bar{p} = 1). \quad (32)$$

В частности, преобразования

$$(a) z' = -z \quad \text{и} \quad (б) z' = \bar{z}, \quad (34)$$

как и в случае евклидовой плоскости, представляют собой симметрию относительно точки 0 и симметрию относительно прямой $\text{Im } z = 0$ (см. выше рис. 210, а, б). Общее же преобразование (32a) на плоскости Галилея при $|p| = 1$ есть не что иное, как сдвиг с коэффициентом сдвига $\text{Arg } p$ (ср. выше, стр. 40), сопровождаемый параллельным переносом на вектор q с началом 0

¹⁾ Точнее, предельным (ср. выше, стр. 90).

и концом q (рис. 218, а); на плоскости Минковского это преобразование при $|p|=1$ представляет собой (гиперболический) поворот вокруг точки 0 на угол $\text{Arg } p$, сопровождаемый параллельным переносом на вектор q (рис. 218, б).

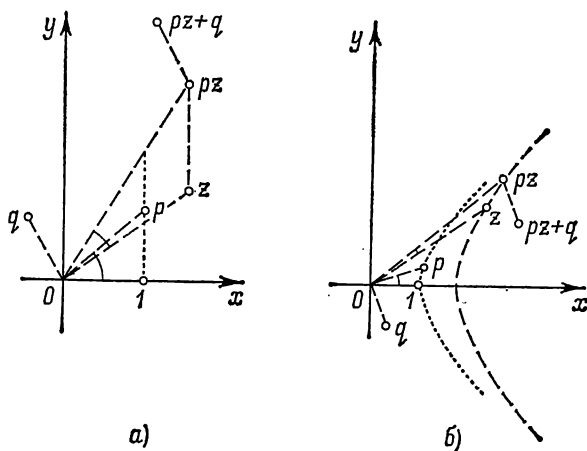


Рис. 218.

Нетрудно проверить, что если точки z' и z_1' получаются из точек z и z_1 преобразованием (32а) или (32б), то $d_{z',z_1'} = d_{z,z_1}$, где буквой d обозначено расстояние между двумя точками плоскости Галилея или Минковского (ср. выше, стр. 270); таким образом, преобразования (32а, б) сохраняют расстояния между точками. Разумеется, движения плоскости Галилея или плоскости Минковского также обладают этим свойством; однако, несмотря на это, множество преобразований (32а, б) не совпадает с множеством рассматриваемых в гл. I движений плоскости Галилея (см. на стр. 45 формулы (1)) и рассматриваемых в § 11 заключения движений плоскости Минковского (см. на стр. 194 формулы (11) или на стр. 208 формулы (23)). Это связано с тем, что выше мы всегда ограничивались лишь так называемыми «собственными движениями» («движениями 1-го рода»), в то время как формулы (32а, б) описывают множество «собственных и зеркальных движений» («движений 1-го и 2-го рода»; ср. со сноской 1) на стр. 26). Так, например, «движения» (32а, б) плоскости Галилея в координатах x, y записываются формулами

$$\begin{aligned}x' &= \pm x + a, \\y' &= vx \pm y + b\end{aligned}$$

(ср. Макарова [28], ч. II). Мы предоставим читателю самостоятельно расшифровать строение «обобщенных движений» (32а, б) плоскостей Галилея и Минковского.

Наконец, более общие, чем движения (32а, б), преобразования

$$(а) z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{и} \quad (б) z' = \frac{\bar{a}\bar{z}+b}{\bar{c}\bar{z}+d} \quad (|ad-bc| \neq 0) \quad (35')$$

переводят четыре точки плоскости Галилея, принадлежащие одному циклу (или одной прямой) в четыре точки, также принадлежащие одному циклу (или одной прямой). Преобразования (35') плоскости Минковского переводят четыре точки, принадлежащие одной окружности (или одной прямой) в четыре точки, также принадлежащие одной окружности (или одной прямой). Эти утверждения, равносильные теореме о том, что (35'а, б) суть круговые преобразования плоскости Галилея или плоскости Минковского, следуют из критерия (31) принадлежности четырех точек одному циклу или одной окружности и из того, что если точки z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 получаются из точек z_1, z_2, z_3, z_4 преобразованием (35'а), то $W(z'_1, z'_2; z'_3, z'_4) = W(z_1, z_2; z_3, z_4)$, а если они получаются из точек z_1, z_2, z_3, z_4 преобразованием (35'б), то $W(z'_1, z'_2; z'_3, z'_4) = W(z_1, z_2; z_3, z_4)$. В частности, преобразование

$$z' = \frac{1}{z}, \tag{36}$$

являющееся частным случаем преобразования (35'б), представляет собой инверсию (1-го рода) с центром 0 и степенью 1 на плоскости Галилея, если z и z' — дуальные числа (ср. выше, стр. 138—139), и инверсию с центром 0 и степенью 1 на плоскости Минковского, если z и z' — двойные числа (ср. стр. 216).

При $c \neq 0$ преобразования (35') в области дуальных чисел и в области двойных чисел не являются взаимно однозначными: такую точку z , что $cz + d$ (или $\bar{c}z + \bar{d}$) является делителем нуля, преобразование (35'а) (соответственно (35'б)) не переводит ни в какую точку z' (ибо деление на делитель нуля невозможно). Последнее обстоятельство заставляет расширить множество дуальных и двойных чисел, введя в рассмотрение фиктивные (или «идеальные») числа

$$\lambda\omega = \frac{-1}{\frac{1}{\lambda}e} \quad \left(\text{и } \infty = \frac{1}{0} \right),$$

соответственно

$$\lambda\omega_1 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}(1+e)}, \quad \mu\omega_2 = \frac{1}{\frac{1}{\mu}(1-e)} \quad \left(\text{и } \sigma_1 = \frac{1-e}{1+e}, \sigma_2 = \frac{1+e}{1-e}, \infty = \frac{1}{0} \right),$$

где λ, μ — всевозможные вещественные числа, и положив

$$\bar{\omega} = \omega, \quad \bar{\infty} = \infty,$$

соответственно

$$\bar{\omega}_1 = \omega_2, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_1, \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_2, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_1 \quad \text{и} \quad \bar{\infty} = \infty.$$

После такого расширения области дуальных и двойных чисел можно, например, положить

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \frac{a \frac{1}{\varepsilon} + b}{c \frac{1}{\varepsilon} + d} = \frac{a + b\varepsilon}{c + d\varepsilon},$$

соответственно

$$\frac{a\omega_2 + b}{c\omega_2 + d} = \frac{a \frac{1}{1-e} + b}{c \frac{1}{1-e} + d} = \frac{a + b(1-e)}{c + d(1-e)} = \frac{(a+b) - be}{(c+d) - de}$$

или

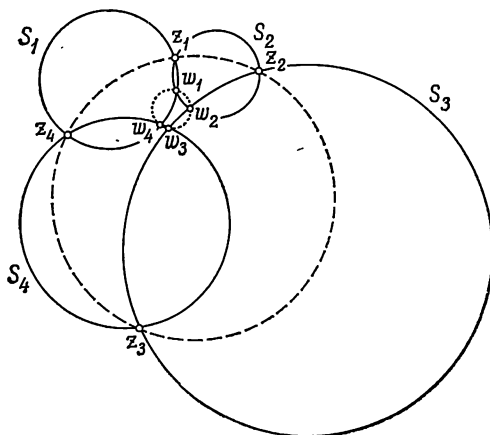
$$\frac{a\sigma_1 + b}{c\sigma_1 + d} = \frac{a \frac{1-e}{1+e} + b}{c \frac{1-e}{1+e} + d} = \frac{a(1-e) + b(1+e)}{c(1-e) + d(1+e)} = \frac{(a+b) - (a-b)e}{c+d - (c-d)e}.$$

В расширенном таким образом множестве дуальных или двойных чисел отображения (35') являются уже взаимно однозначными: каковы бы ни были (дуальные, соответственно двойные) коэффициенты a, b, c, d преобразования (такие, что $|ad - bc| \neq 0$, т. е. $ad - bc$ не является делителем нуля), каждому числу z отвечает единственное число $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ (или $z' =$

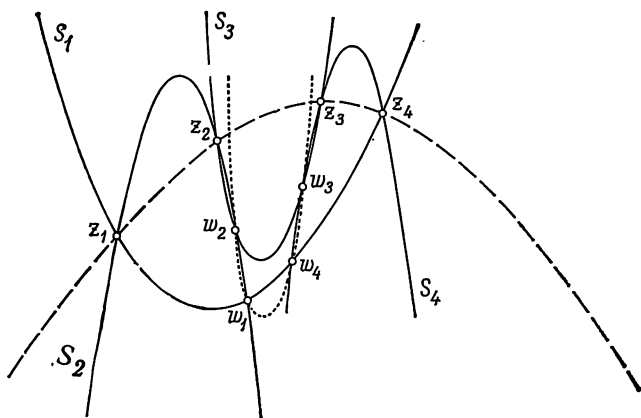
$= \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}}$). Таким образом, круговые преобразования естественно рассматривать как преобразования циклической плоскости Галилея, соответственно круговой плоскости Минковского; эти плоскости получаются из «обыкновенных» плоскостей Галилея и Минковского дополнением последних «идеальными» или «бесконечно удаленными» точками, отмечаемыми числами $\lambda\omega, \infty$, соответственно $\lambda\omega_1, \mu\omega_2, \sigma_1, \sigma_2, \infty$. На более детальном изучении «расширенных» множеств дуальных и двойных чисел и отвечающих этим числам геометрических образов мы здесь не остановимся.

Сходство свойств комплексных чисел, дуальных чисел и двойных чисел часто позволяет доказывать с помощью единой выкладки (фигурирующие в которой числа можно считать числами любого из рассматриваемых трех типов!) теоремы, относящиеся как к евклидовой геометрии, так и к геометрии Галилея или Минковского. Пусть, например, S_1, S_2, S_3, S_4 — четыре окружности плоскости Евклида или Минковского, соответственно четыре цикла плоскости Галилея; точки пересечения S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 мы обозначим через z_1 и w_1, z_2 и w_2, z_3 и w_3, z_4 и w_4 . Докажем, что если точки z_1, z_2, z_3 и z_4 принадлежат одной окружности или прямой (соответственно одному циклу или прямой), то также и точки w_1, w_2, w_3 и w_4 принадлежат одной окружности или прямой (соответственно одному циклу или прямой; см. рис. 219, а, б, относящиеся к геометриям Евклида и Галилея).

Воспользуемся тем, что точки z_1, z_2, w_1 и w_2 принадлежат одной окружности (или одному циклу) S_2 ; точки z_2, z_3, w_2 и w_3



а)



б)

Рис. 219.

принадлежат одной окружности (одному циклу) S_3 ; точки z_3, z_4, w_3 и w_4 принадлежат одной окружности (одному циклу) S_4 ; наконец, точки z_4, z_1, w_4 и w_1 принадлежат одной окружности (одному циклу).

S_1 . Отсюда вытекает, что четыре двойных отношения

$$W(z_1, w_2; z_2, w_1) = \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} : \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1},$$

$$W(z_2, w_3; z_3, w_2) = \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} : \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2},$$

$$W(z_3, w_4; z_4, w_3) = \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} : \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3}$$

и

$$W(z_4, w_1; z_1, w_4) = \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} : \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}$$

вещественны (ср. (31)). Поэтому и выражение

$$\frac{W(z_1, w_2; z_2, w_1) \cdot W(z_3, w_4; z_4, w_3)}{W(z_2, w_3; z_3, w_2) \cdot W(z_4, w_1; z_1, w_4)} = \left\{ \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right\} \cdot \left\{ \frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} : \frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4} \right\} = \\ = W(z_1, z_3; z_2, z_4) \cdot W(w_1, w_3; w_2, w_4)$$

вещественно. Следовательно, из вещественности двойного отношения $W(z_1, z_3; z_2, z_4)$ вытекает вещественность и двойного отношения $W(w_1, w_3; w_2, w_4)$, и, значит, четверки точек z_1, z_2, z_3, z_4 и w_1, w_2, w_3, w_4 одновременно принадлежат или не принадлежат одной окружности (одному циклу)!

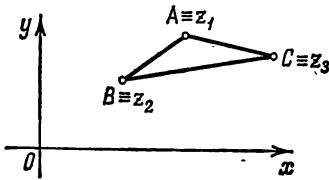


Рис. 220.

обозначим через a, b, c , а величины углов — через A, B, C . Пусть вершины этого треугольника соответствуют числам (комплексным, дуальным или двойным!) z_1, z_2 и z_3 (рис. 220). Очевидно, что если

$$w_1 = z_3 - z_2, \quad w_2 = z_1 - z_3, \quad w_3 = z_2 - z_1,$$

то¹⁾

$$|w_1| = a, \quad |w_2| = b, \quad |w_3| = c. \quad (45)$$

Поэтому, обозначив

$$\text{Arg } w_1 = \varphi_1, \quad \text{Arg } w_2 = \varphi_2, \quad \text{Arg } w_3 = \varphi_3$$

(откуда следует, что

$$\text{Arg } \bar{w}_1 = -\varphi_1, \quad \text{Arg } \bar{w}_2 = -\varphi_2, \quad \text{Arg } \bar{w}_3 = -\varphi_3,$$

см. формулы (186) и (18в), стр. 266 и 278) и предположив для простоты, что в случае геометрии Минковского w_1, w_2 и w_3 — двойные числа 1-го вида, будем иметь

$$w_1 = a(\text{Cos } \varphi_1 + I \text{ Sin } \varphi_1), \quad w_2 = b(\text{Cos } \varphi_2 + I \text{ Sin } \varphi_2), \quad w_3 = c(\text{Cos } \varphi_3 + I \text{ Sin } \varphi_3),$$

¹⁾ Таким образом, в случае геометрий Галилея и Минковского a, b, c суть направленные длины сторон треугольника (ср. выше, стр. 65).

где $I=i$, ε или e , а символами $\text{Cos } \varphi$ и $\text{Sin } \varphi$ обозначены обыкновенные («евклидовы») тригонометрические функции $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, соответственно «галилеевы тригонометрические функции» $\text{Cos } \varphi=1$, $\text{Sin } \varphi=\varphi$ (ср. выше, стр. 276 и 229) или гиперболические функции («тригонометрические функции Минковского») $\text{Cos } \varphi=\text{ch } \varphi$, $\text{Sin } \varphi=\text{sh } \varphi$. Наконец, заметим еще, что

$$\varphi_2 - \varphi_3 = A, \quad \varphi_3 - \varphi_1 = B, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = C \quad (46)$$

(см. тот же рис. 220¹⁾), так что в силу формул (20а) (стр. 267 и 278—279)

$$\overline{\omega_2 \omega_3} = bc (\text{Cos } A + I \text{Sin } A),$$

$$\overline{\omega_3 \omega_1} = ca (\text{Cos } B + I \text{Sin } B),$$

$$\overline{\omega_1 \omega_2} = ab (\text{Cos } C + I \text{Sin } C),$$

соответственно

$$\overline{\omega_2 \omega_3} = bc (\text{Cos } A - I \text{Sin } A),$$

$$\overline{\omega_3 \omega_1} = ca (\text{Cos } B - I \text{Sin } B),$$

$$\overline{\omega_1 \omega_2} = ab (\text{Cos } C - I \text{Sin } C).$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \quad | = (z_3 - z_2) + (z_1 - z_3) + (z_2 - z_1)|,$$

т. е.

$$-\omega_1 = \omega_2 + \omega_3,$$

и, значит,

$$-\overline{\omega_1} = \overline{\omega_2} + \overline{\omega_3}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} a^2 &= |\omega_1|^2 = \overline{\omega_1 \omega_1} = (\omega_2 + \omega_3) (\overline{\omega_2} + \overline{\omega_3}) = \overline{\omega_2 \omega_2} + \overline{\omega_3 \omega_3} + \overline{\omega_2 \omega_3} + \overline{\omega_3 \omega_2} = \\ &= |\omega_2|^2 + |\omega_3|^2 + bc (\text{Cos } A + I \text{Sin } A) + bc (\text{Cos } A - I \text{Sin } A) = b^2 + c^2 + 2bc \text{Cos } A. \end{aligned}$$

Но это есть не что иное, как теорема косинусов геометрий Евклида, Галилея и Минковского, в геометрии Евклида имеющая вид

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A \quad (47)$$

(заметим, что в обозначениях рис. 220, который мы теперь считаем относящимся к евклидовой геометрии $\angle A = 180^\circ - \angle BAC$, и поэтому формула (47) равносильна соотношению $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BAC$), в геометрии Галилея — вид

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot 1 = (b + c)^2$$

(ср. с формулой (11) из § 4 стр. 61) и в геометрии Минковского — вид

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \text{ch } A.$$

Образуем, далее, три выражения:

$$\overline{\omega_2 \omega_3} - \overline{\omega_3 \omega_2} = bc (\text{Cos } A + I \text{Sin } A) - bc (\text{Cos } A - I \text{Sin } A) = 2bc \text{Sin } A \cdot I,$$

$$\overline{\omega_3 \omega_1} - \overline{\omega_1 \omega_3} = ca (\text{Cos } B + I \text{Sin } B) - ca (\text{Cos } B - I \text{Sin } B) = 2ca \text{Sin } B \cdot I,$$

$$\overline{\omega_1 \omega_2} - \overline{\omega_2 \omega_1} = ab (\text{Cos } C + I \text{Sin } C) - ab (\text{Cos } C - I \text{Sin } C) = 2ab \text{Sin } C \cdot I.$$

Но

$$\begin{aligned} \overline{\omega_2 \omega_3} - \overline{\omega_3 \omega_2} &= (z_1 - z_3) (\overline{z_2} - \overline{z_1}) - (\overline{z_1} - \overline{z_3}) (z_2 - z_1) = \\ &= z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1} - \overline{z_1} z_2 - \overline{z_2} z_3 - \overline{z_3} z_1 \end{aligned}$$

¹⁾ Таким образом, A, B, C суть направленные углы треугольника (ср. выше, стр. 65).

и, как легко показать, также

$$\overline{w_3 w_1} - \overline{w_3 w_2} = \overline{w_1 w_3} - \overline{w_1 w_2} = z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1} - \overline{z_1 z_2} - \overline{z_2 z_3} - \overline{z_3 z_1}.$$

[Заметим, что стоящее справа выражение симметрично относительно z_1 , z_2 и z_3 !] Таким образом, имеем $2bc \sin A \cdot I = 2ca \sin B \cdot I = 2ab \sin C \cdot I$ или

$$bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C,$$

откуда без труда получаем

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

— теорему синусов геометрий Евклида, Галилея и Минковского:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (48)$$

(геометрия Евклида);

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \quad (48')$$

(геометрия Галилея; ср. выше, стр. 61) и

$$\frac{a}{\operatorname{sh} A} = \frac{b}{\operatorname{sh} B} = \frac{c}{\operatorname{sh} C} \quad (48'')$$

(геометрия Минковского, стр. 210).

Известно, что и точки неевклидовой геометрии Лобачевского можно представить в виде комплексных чисел (см., например, Маркушевич [80] или Яглом [77]). Для этого на плоскости комплексного переменного выделяется круг K_a определяемый условием $zz < 1$; точки этого круга сопоставляются точкам плоскости Лобачевского. Расстояние d_{z, z_1} между точками z и z_1 круга K , понимаемое в смысле геометрии Лобачевского, действующей внутри K , измеряется по формуле

$$\operatorname{th}^2 \frac{d_{z, z_1}}{2} = \frac{(z_1 - z)(\overline{z_1} - \overline{z})}{(1 - z\overline{z_1})(1 - \overline{z}z_1)}, \quad (49)$$

а роль движений Лобачевского играют «дробно-линейные преобразования» (35), переводящие круг K в себя, т. е. преобразования

$$(a) \quad z' = \frac{pz + q}{qz + p} \quad \text{и} \quad (б) \quad z' = \frac{p\overline{z} + q}{q\overline{z} + p} \quad (p\overline{p} - q\overline{q} \neq 0). \quad (50)$$

Простейшими частными случаями движений (50а, б) являются преобразования

$$(a) \quad z' = -z \quad \text{и} \quad (б) \quad z' = \overline{z} \quad (34)$$

— симметрия относительно точки 0 плоскости Лобачевского (ср. выше рис. 210, а) и симметрия относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$ (рис. 221).

Дуга MM' на рис. 221 изображает отрезок «прямой» плоскости Лобачевского, «перпендикулярной» «прямой» $\operatorname{Im} z = 0$; при этом кавычки в последней фразе указывают, что соответствующий термин понимается в смысле геометрии Лобачевского, отличном, разумеется, от того, какой имеют те же самые понятия в геометрии Евклида. Образцом «неевклидовой прямой» может служить

отрезок IJ прямой $\text{Im } z=0$ — диаметр круга K ; расстояние (49) между двумя точками A и B этого отрезка совпадает с «гиперболическим расстоянием» (16) (стр. 237) между точками «прямой Лобачевского» (отрезка) IJ . Все остальные «прямые» плоскости Лобачевского могут быть получены из отрезка IJ прямой $\text{Im } z=0$ или прямой

$$z-\bar{z}=0 \tag{51}$$

движениями (50а, б); отсюда следует, что общее уравнение «прямой» плоскости Лобачевского имеет вид

$$azz\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+a=0, \quad \text{Im } a=0 \tag{52}$$

или

$$Azz\bar{z}+Bz-\bar{B}\bar{z}+A=0, \quad \text{Re } A=0. \tag{52a}$$

Геометрически «прямые» плоскости Лобачевского изображаются диаметрами круга K и заключенными внутри K дугами окружностей, перпендикулярных

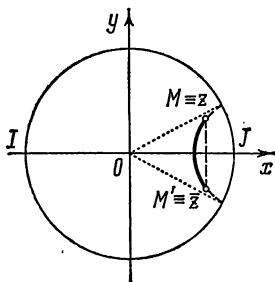


Рис. 221.

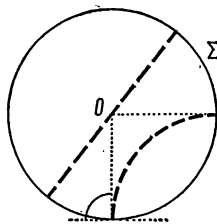


Рис. 222.

окружности Σ , ограничивающей круг K (рис. 222; под углом между двумя пересекающимися окружностями понимается угол между касательными к окружностям в точке их пересечения).

Произвольные окружности

$$azz\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+c=0, \quad \text{Im } a=\text{Im } c=0 \tag{28}$$

или

$$Azz\bar{z}+Bz-\bar{B}\bar{z}+C=0, \quad \text{Re } A=\text{Re } C=0 \tag{28a}$$

(точнее, дуги окружностей, заключенные внутри K) изображают циклы неевклидовой геометрии Лобачевского (т. е. линии, «устроенные» в каждой своей точке одинаково, линии, допускающие «скольжения» по себе, с помощью которых любую точку линии можно перевести в любую другую ее точку). Мы уже знаем, что в «прямую» цикл (28) или (28а) обращается, если

$$a=c \tag{53}$$

или

$$A=C \tag{53a}$$

(ср. выше уравнения (52) и (52а)). «Окружность» плоскости Лобачевского (т. е. множество точек, равноудаленных от одной точки—центра окружности); см. стр. 257) евклидова окружность (28) или (28а) изображает в том

случае, если она целиком заключена внутри Σ (рис. 223, а); предельную линию (стр. 257) она изображает, если касается (изнутри) окружности Σ (рис. 223, б); наконец, эквидистанту (множество точек, равноудаленных от одной прямой — базы эквидистанты; см. стр. 257) — в том случае, если она пересекает Σ в двух точках M и N .

В последнем случае изображением эквидистанты, разумеется, служит лишь заключенная внутри Σ дуга MN окружности (28) (или (28а)): ведь не принадлежащие кругу K точки в нашей модели вообще исключаются из рассмотрения. Впрочем, точнее будет сказать, что эквидистанта плоскости Лобачевского изображается двумя дугами MN (евклидовых) окружностей

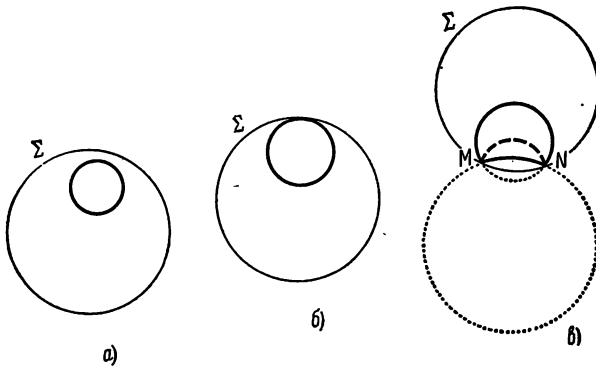


Рис. 223.

(рис. 223, в), каждая из которых изображает множество точек, расположенных по одну сторону от базы эквидистанты (на рис. 223, в изображаемой пунктирной дугой MN) и удаленных на одно и то же расстояние от базы.

Последнее замечание подчеркивает один принципиальный дефект рассматриваемой модели плоскости Лобачевского, изображаемой внутренностью круга K . Несложные уравнения (52) и (52а), равно как и уравнения (28) и (28а) или даже совсем простое уравнение (51), нельзя рассматривать как уравнения прямых или циклов геометрии Лобачевского: необходимо все время помнить, что геометрический смысл в нашей модели имеют лишь такие точки z плоскости комплексного переменного, для которых $zz < 1$. Соответственно этому задача отыскания аналитических выражений для «круговых преобразований» плоскости Лобачевского, переводящих циклы в циклы, становится весьма сложной: на нашей модели эти преобразования должны переводить дуги окружностей (28) или (28а) снова в дуги тех же окружностей, но сами эти дуги трудно описать достаточно простым уравнением (которому должны удовлетворять лишь точки дуг, но не все точки окружностей)¹⁾. Да и представление эквидистанты в виде изображенной на рис. 223, в линзы из пары дуг окружностей с общими концами вряд ли может показаться кому-нибудь простым и изящным!

Впрочем, читатель, внимательно прочитавший все предыдущее, вероятно, уже догадывается, как можно устранить возникшие затруднения. Условимся считать точки плоскости Лобачевского направленными, т. е. снабжен-

¹⁾ Рекомендуем читателю попытаться самому продумать вопрос о возможном уравнении, описывающем отрезок IJ рис. 221.

ными указанием того, какое направление вращения вокруг точки принимается за положительное; на чертежах положительное направление вращения вокруг точки задается окружающей точку маленькой дугой со стрелкой (рис. 224). Далее будем считать, что две точки плоскости Лобачевского, отличающиеся только направлениями, изображаются такими комплексными числами z и z' , что

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}, \quad (36)$$

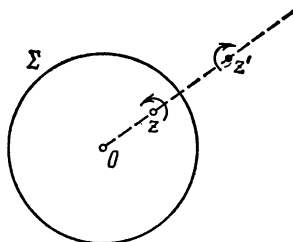


Рис. 224.

т. е. z' получается из z инверсией с окружностью инверсии Σ (инверсией с центром O и степенью 1; см. тот же рис. 224). Кроме того, условимся причислять к точкам плоскости Лобачевского также все точки окружности Σ с уравнением $\bar{z}z = 1$; эти точки мы будем называть «бесконечно удаленными точками» плоскости Лобачевского и будем считать их направленными (последнее условие можно объяснить тем, что вокруг такой «точки» нельзя нарисовать кружок, так как она является в известном смысле «граничной» точкой плоскости Лобачевского). «Бесконечно удаленную точку» плоскости Лобачевского можно представлять себе как пучок («сходящихся в этой точке») параллельных между собой (в смысле геометрии Лобачевского) прямых, подобно тому как «бесконечно удаленную точку» евклидовой плоскости часто понимают как пучок евклидовых параллелей.

Таким образом, теперь у нас множество всех (направленных и бесконечно удаленных) точек плоскости Лобачевского изображается множеством всех

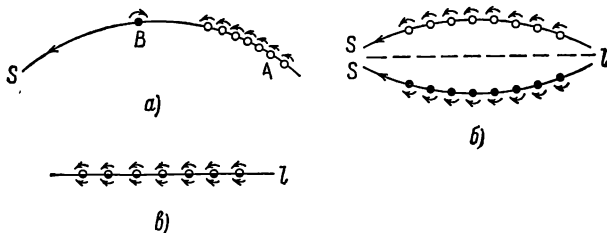


Рис. 225.

комплексных чисел z (включая и «число» ∞ , отвечающее взятой с «отрицательным направлением обхода» точке O). Циклы плоскости Лобачевского мы также будем считать направленными, т. е. снабженными указанием положительного направления движения по циклу; при этом направленную точку A мы только в том случае будем считать принадлежащей направленному циклу S , если направление вращения вокруг A «согласовано» с направлением движения вдоль S (см. схематический рис. 225, а, где точка A считается принадлежащей циклу S , а точка B — не принадлежащей ему). Далее, под (направленной!) эквидистантой с базой l мы будем понимать множество точек, удаленных от l на одно и то же расстояние h , причем точки, расположенные по разные стороны от l , по условию имеют разное направление (рис. 225, б; таким образом, эквидистант с данной базой l и данной шириной $h > 0$ существует две и им можно условиться приписывать разные ширины h и $-h$). Прямые плоскости Лобачевского уместно считать направленными; для сравнения напомним, что в антиевклидовой геометрии (см. выше,

стр. 258—261) мы нашли удобным считать основным образом геометрии направленные прямые евклидовой плоскости; при этом окружности антиевклидовой плоскости («циклы») мы также считали направленными, однако точки — ненаправленными (негде поставить стрелку!). При этом все точки прямой плоскости Лобачевского рассматривают как «двойные» (рис. 225, θ), т. е. считают, что прямой l принадлежат точки обоих направлений¹⁾. Наконец, к числу циклов плоскости Лобачевского причисляют и (ненаправленную) «окружность бесконечно удаленных точек», изображаемую окружностью Σ (окружностью $z\bar{z}=1$) нашей модели. При этом совокупность всех (направленных) циклов и всех прямых плоскости Лобачевского изображается совокупностью всех окружностей и прямых плоскости (обыкновенных) комплексных чисел (см., в частности, рис. 226, на котором изображена прямая l плоскости Лобачевского и эквидистанта S с базой l). Уравнение каждой прямой плоскости Лобачевского будет иметь вид (52) (или (52а)), а уравнение цикла — (28) (или (28а)).

Условие принадлежности четырех (направленных) точек z_1, z_2, z_3 и z_4 плоскости Лобачевского одному циклу или одной прямой будет иметь хорошо знакомый нам вид:

$$\text{Im } W(z_1, z_2; z_3, z_4) = 0. \quad (31)$$

Отсюда следует, что преобразования

$$(a) \quad z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{и} \quad (б) \quad z' = \frac{\bar{a}z+b}{\bar{c}z+d} \quad (35)$$

$$(ad - bc \neq 0)$$

переводят четыре точки, принадлежащие одной прямой или одному циклу, в четыре точки, также обладающие аналогичным свойством, т. е. что (35) суть круговые преобразования плоскости Лобачевского.

Это обстоятельство позволяет геометрически описать все возможные круговые преобразования плоскости Лобачевского²⁾.

Выше мы видели, что точки плоскостей Евклида, Галилея и Минковского можно представлять в виде «чисел» разной природы: комплексных чисел $z = x + iy$, где $i^2 = -1$, дуальных чисел $z = x + ey$, где $e^2 = 0$ и двойных чисел $z = \dot{x} + ey$, где $e^2 = +1$. С другой стороны, и (направленные) точки плоскости

¹⁾ Понятие направленного цикла было введено для того, чтобы установить направление принадлежащих этому циклу точек: направление стрелки на окружающей точку дуге, проведенной со стороны выпуклости цикла, должно совпадать с направлением цикла (рис. 225, a). Однако для прямой понятие «стороны выпуклости» теряет смысл; поэтому мы не имеем возможности указать направление принадлежащих ей точек и, следовательно, все точки прямой следует считать обладающими обоими возможными направлениями (рис. 225, θ). [Также и из представления о прямой как об «эквидистанте нулевой ширины», обе ветви которой совпадают с «базой» эквидистанты, следует, что точкам прямой надо приписывать оба возможных направления; ср. рис. 225, b и v].

²⁾ См., например, Яглом [77] или [78].

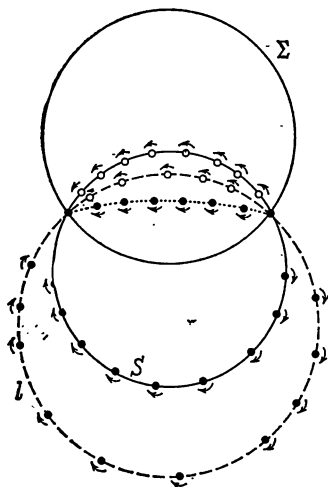


Рис. 226.

Лобачевского можно представлять в виде комплексных чисел. Эта система истолкований плоских геометрий Кэли—Клейна может быть еще продолжена: (направленные) точки (эллиптической) плоскости Римана тоже можно представлять в виде комплексных чисел $z = x + iy$; с другой стороны, (направленные) точки антиевклидовой и антипсевдоевклидовой плоскостей можно изображать дуальными числами $z = x + ey$, а (направленные) точки дважды гиперболической и антигиперболической плоскостей—двойными числами $z = x + ey$. Таким образом, *точки трех плоскостей Кэли—Клейна с эллиптической (римановой) метрикой углов—плоскостей Римана, Евклида и Лобачевского—изображаются комплексными числами; точки трех плоскостей с евклидовой метрикой углов—плоскостей антиевклидовой, Галилея и антипсевдоевклидовой—изображаются дуальными числами; точки трех плоскостей с гиперболической метрикой углов (метрика Лобачевского)—плоскостей антигиперболической, Минковского и дважды гиперболической—изображаются двойными числами.* При этом расстояние d_{z, z_1} между точками z и z_1 плоскости с эллиптической (римановой) метрикой расстояний (т. е. плоскости Римана, антиевклидовой или антигиперболической) определяется формулой

$$\operatorname{tg}^2 \frac{d_{z, z_1}}{2} = \frac{(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)}{(1 + z\bar{z}_1)(1 + \bar{z}z_1)}; \quad (49')$$

на плоскости с евклидовой метрикой расстояний (плоскости Евклида, Галилея или Минковского) оно определяется более простой формулой

$$d_{z, z_1}^2 = (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1), \quad (22)$$

а на плоскости с гиперболической метрикой расстояний (метрика Лобачевского; иными словами, на плоскости Лобачевского, антипсевдоевклидовой или дважды гиперболической) расстояние d_{z, z_1} определяется (знакомой нам уже) формулой

$$\operatorname{th}^2 \frac{d_{z, z_1}}{2} = \frac{(z_1 - z)(\bar{z}_1 - \bar{z})}{(1 - z\bar{z}_1)(1 - \bar{z}z_1)}. \quad (49)$$

Движения на плоскости Кэли—Клейна, на которой расстояние определяется формулой (49'), задаются как преобразования

$$z' = \frac{pz + q}{qz - p} \quad \text{или} \quad z' = \frac{\bar{p}\bar{z} + \bar{q}}{\bar{q}\bar{z} - \bar{p}} \quad (|p\bar{p} + q\bar{q}| \neq 0); \quad (50')$$

на плоскости, где метрика расстояния указывается формулой (22), движения имеют вид

$$z' = pz + q \quad \text{или} \quad z' = p\bar{z} + q \quad (p\bar{p} = 1), \quad (32)$$

а на плоскости, где расстояние между точками z и z_1 указывается формулой (49), движения имеют вид

$$z' = \frac{pz + q}{qz + p} \quad \text{или} \quad z' = \frac{\bar{p}\bar{z} + \bar{q}}{\bar{q}\bar{z} + \bar{p}} \quad (|p\bar{p} - q\bar{q}| \neq 0). \quad (50a)$$

Уравнение прямой линии в этих трех случаях, отвечающих формулам (49), (22) и (49') для расстояния между точками, имеет вид ¹⁾

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + A = 0, \quad \operatorname{Re} A = 0, \quad (52a)$$

соответственно

$$Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad \operatorname{Re} C = 0 \quad (26)$$

или

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} - A = 0, \quad \operatorname{Re} A = 0. \quad (52b)$$

Однако уравнение цикла во всех трех случаях имеет один и тот же вид ¹⁾

$$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} C = 0. \quad (28a)$$

Таким образом, в соответствии с тремя видами (49), (22) или (49') формулы для расстояния между точками, условие обращения цикла (52a) в прямую имеет вид

$$A - C = 0, \quad (53a)$$

$$A = 0 \quad (29a)$$

или

$$A + C = 0 \quad (53b)$$

(ср. с § 12 Заключения).

Используя уравнение (28a) цикла или условие принадлежности четырех точек z_1, z_2, z_3, z_4 одному циклу

$$\operatorname{Im} W(z_1, z_2; z_3, z_4) = 0, \quad (31)$$

можно установить, что во всех девяти плоскостях Кэли—Клейна преобразования

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{или} \quad z' = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} \quad (|ad - bc| \neq 0) \quad (35)$$

переводят циклы плоскости снова в циклы, т. е. являются круговыми преобразованиями соответствующей плоскости Кэли—Клейна.

¹⁾ Если фигурирующие в формулах (52b), (26), (52a) и (28a) числа являются комплексными или двойными, то эти уравнения можно также записать в виде (28) или в виде аналогичных вариантов равенств (52b), (26) или (52a) (см., например, формулу (52)); однако если коэффициенты A, B, C и переменные z являются дуальными числами, то формулы (28a) и (28) перестают быть равносильными.

Все сказанное выше просуммировано в следующих таблицах:

Таблица V. Числа, изображающие точки плоскостей Кэли—Клейна

Мероопределение углов	Тип чисел
Р	$z = x + iy, i^2 = -1$
Е	$z = x + ey, e^2 = 0$
Л	$z = x + ey, e^2 = +1$

Таблица VI. Расстояние d_{z, z_1} между точками z и z_1 плоскости Кэли—Клейна

Мероопределение расстояний	
Р	$\operatorname{tg}^2 \frac{d_{z, z_1}}{2} = \frac{(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)}{(1 + z\bar{z}_1)(1 + \bar{z}z_1)}$
Е	$d_{z, z_1}^2 = (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)$
Л	$\operatorname{th}^2 \frac{d_{z, z_1}}{2} = \frac{(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1)}{(1 - z\bar{z}_1)(1 - \bar{z}z_1)}$

Таблица VII. Движения плоскости Кэли—Клейна

Мероопределение расстояний	Движения
Р	$z' = \frac{pz + q}{qz - p}$
Е	$z' = pz + q, p\bar{p} = 1$
Л	$z' = \frac{pz + q}{qz + p}$

Таблица VIII. Уравнения прямых плоскости Кэли—Клейна

Мероопределение расстояний	Уравнение прямой
Р	$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} - A = 0,$ $\operatorname{Re} A = 0$
Е	$Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0,$ $\operatorname{Re} C = 0$
Л	$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + A = 0,$ $\operatorname{Re} A = 0$

Мы не остановимся здесь на применениях развитого аппарата к доказательству конкретных теорем, ограничившись лишь в качестве единственного (и весьма простого) примера указанием на то, что проведенные на стр. 288—290 выкладки доказывают сразу для всех девяти геометрий Кэли—Клейна на плоскости следующую теорему: *если циклы S_1 и S_2 пересекаются в точках z_1 и w_1 , циклы S_2 и S_3 —в точках z_2 и w_2 , циклы S_3 и S_4 —в точках z_3 и w_3 и циклы S_4 и S_1 —в точках z_4 и w_4 , причем точки z_1, z_2, z_3 и z_4 принадлежат одному циклу (или одной прямой), то и точки w_1, w_2, w_3 и w_4 принадлежат одному циклу (или одной прямой).*

Иные примеры подобного рода можно порекомендовать читателю отыскать самостоятельно.

ЛИТЕРАТУРА

Учебники евклидовой геометрии

- [1] — [3] Евклид, Начала, тт. I—III, М.—Л., Гостехиздат, 1948; 1949; 1950.
[4] Киселев А. П., Геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1962.
[5] — [6] Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, чч. 1—2, М.—Л., Гостехиздат, 1948; 1949.
[7] Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. 1, М., Учпедгиз, 1957.
[7а] Погорелов А. В., Элементарная геометрия (планиметрия), М., «Наука», 1969.
[76] Гильберт Д., Основания геометрии, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
См. также книги Кокстера [19] и Яглома [9] — [10].

Литература к § 1 Введения

- [8] Клейн Ф., Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа), Сборник «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1950, стр. 399—434.
[9] — [10] Яглом И. М., Геометрические преобразования, тт. I—II, М., Гостехиздат, 1955; 1956.
[11] Яглом И. М. и Атанасян Л. С., Геометрические преобразования, Энциклопедия элементарной математики (ЭЭМ), кн. IV, М., Физматгиз, 1963, стр. 49—158.

Основы аналитической геометрии на плоскости

- [12] Дубнов Я. С., Введение в аналитическую геометрию, М., Физматгиз, 1959.

Литература к § 2 Введения

- [13] Галилей Галилео, Избранные сочинения в двух томах, т. I, М., «Наука», 1964.
[14] — [15] Хайкин С. Э., Что такое силы инерции, М.—Л., Гостехиздат, 1939; Силы инерции и невесомость, М., «Наука», 1967.
[16] Седов Л. И., Галилей и основы механики, М., «Наука», 1964.
[17] Ландсберг Г. С. (ред.), Элементарный учебник физики, т. I, М., «Наука», 1969.
[18] Хайкин С. Э., Механика, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
См. также книгу Шварца [40].

Что такое четырехмерное пространство?

- [19] Кокстер Г. С. М., Введение в геометрию, М., «Наука», 1966.
[20] Розенфельд Б. А. и Яглом И. М., Многомерные пространства, ЭЭМ, кн. V, М., «Наука», 1966, стр. 349—392.

Системы сил в статике и скользящие векторы

- [21] Аппель П., Теоретическая механика, т. I, М., Физматгиз, 1960.
 [22] Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, ч. I, М., «Наука», 1965.
 [23] Болтянский В. Г. и Яглом И. М., Векторы и их применения в геометрии, ЭЭМ, кн. IV, стр. 291—381.
 См. также книги Ландсберга [17] и Хайкина [18].

Геометрия Галилея

- [24] Розенфельд Б. А. и Яглом И. М., Неевклидовы геометрии, ЭЭМ, кн. V, стр. 394—476.
 [25] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. II, М., Гостехиздат, 1956.
 [26] Кёйпер Н. (Kuiper N.), Одна геометрия на плоскости (Een vlakke meetkunde), Simon Stevin 30, 1954, стр. 94—105.
 [27] Штрубеккер К. (Strubecker K.), Геометрия в изотропной плоскости I—III (Geometrie in einer isotropen Ebene I—III), Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 15 (1962—1963), стр. 297—306; 343—351; 385—394.
 [28] Макарова Н. М., Геометрия Галилея—Ньютона I—III, Ученые записки Орехово-Зуевского пединститута 1, вып. I (1955), стр. 83—95; 7, вып. 2 (1957), стр. 7—27; 29—59.
 [29] Макарова Н. М., Кривые второго порядка в плоской параболической геометрии, Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии (Ученые записки Моск. гос. пед. ин-та им. Ленина), М., 1963, стр. 222—251.
 [30] Макарова Н. М., Двумерная неевклидова геометрия с параболической метрикой длин и углов, Кандидатская диссертация, Л., 1962.
 См. также книгу Клейна [55].

Литература к гл. II

- [31] Яглом И. М., Окружности, ЭЭМ, кн. IV, стр. 448—517.
 [32] Кулидж Дж. Л. (Coolidge J. L.), Трактат об окружности и сфере (A treatise on the circle and the sphere), Oxford, 1916.
 [33] Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1962.
 [34] Макарова Н. М., К теории циклов параболической геометрии на плоскости, Сибирский матем. журнал 2, № 1 (1961), стр. 68—81.
 См. также книги Перепелкина [5], Адамара [7], Кокстера [19], Яглома [10] и [77] и статьи Кёйпера [26], Штрубеккера [27], Макаровой [28].

Общие свойства плоских кривых

- [35] Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. I, М.—Л., Гостехиздат, 1950, гл. V.
 [36] Болтянский В. Г. и Яглом И. М., Геометрические задачи на максимум и минимум, ЭЭМ, кн. V, стр. 270—348.

Литература к § 10. Заключение¹⁾

- [37] Эйнштейн А., О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение), Петроград, Научное книгоиздательство, 1923; Физика и реальность, М., «Наука», 1963, стр. 167—235; Собрание сочинений, т. I, М., «Наука», 1965, стр. 530—600.

¹⁾ См. также (более полные) аннотированные списки литературы, приложенные к книгам [47] и [536].

- [38] — [38а] Борн М., Эйнштейновская теория относительности, М., «Мир», 1964; Теория относительности Эйнштейна и ее физические основы, М.—Л., ОНТИ, 1938.
- [39] Дюрелл К., Азбука теории относительности, М., «Мир», 1964.
- [40] Шварц Дж., Как это произошло, М., «Мир», 1965.
- [41] Ландау Л. Д. и Румер Ю. Б., Что такое теория относительности, М., «Сов. Россия», 1963.
- [42] Гарднер М., Теория относительности для миллионов, М., Атомиздат, 1966.
- [43] Блохинцев Д. И. и Драбкина С. И., Теория относительности Эйнштейна, М.—Л., Гостехиздат, 1940.
- [44] Соколовский Ю. И., Теория относительности в элементарном изложении, М., «Наука», 1964.
- [45] Бонди Г., Относительность и здравый смысл, М., «Мир», 1967.
- [46] Эддингтон А. С., Пространство, время и тяготение, Одесса, «Матезис», 1923.
- [47] Неванлинна Р., Пространство, время и относительность, М., «Мир», 1966.
- [48] Смилга В. П., Очевидное? Нет, еще неизведанное М., «Молодая гвардия», 1966
- [49] Жуков А. И., Введение в теорию относительности, М., Физматгиз, 1961.
- [50] Румер Ю. Б. и Рывкин М. С., Теория относительности, М., Учпедгиз, 1960.
- [51] Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, М., ИЛ, 1947.
- [52] Бом Д., Специальная теория относительности, М., «Мир», 1967.
- [53] Скобельцин Д. В., Парадокс близнецов в теории относительности, М., «Наука», 1966.
- [53а] Курганов В., Введение в теорию относительности, М., «Мир», 1968.
- [53б] Угаров В. А., Специальная теория относительности, М., «Наука», 1969.
- [53в] Тейлор У. и Уилер Дж., Физика пространства — времени, М., «Мир», 1969.
- [54] Ньютон И., Математические основы натуральной философии, в книге: Крылов А. Н., Собрание трудов, т. VII, М.—Л., Изд-во Академии наук СССР, 1936.

Литература к § 11 Заключения

- [55] Клейн Ф., Неевклидова геометрия, М.—Л., ОНТИ, 1935.
- [56] Яглом И. М. и Ашкинuze В. Г., Иден и методы аффинной и проективной геометрии, ч. 1, М., Учпедгиз, 1963.
- [57] Шерватов В. Г., Гиперболические функции, М., Гостехиздат, 1958.
- См. также книги Кагана [25], Борна [38] — [38а] и статью Розенфельда и Яглома [24].

Пособия по неевклидовой геометрии Лобачевского¹⁾

- [58] Лобачевский Н. И., Геометрические исследования по теории параллельных линий, М.—Л., Изд-во Академии наук СССР, 1945; Полное собрание сочинений, т. 1, М.—Л., Гостехиздат, 1946, стр. 29—176.
- [59] Лобачевский Н. И., Отрывки из работ «О началах геометрии», «Воображаемая геометрия», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», Сборник «Об основаниях геометрии» (см. [8]), стр. 27—70.

¹⁾ Значительно более полный список литературы по этой теме (впрочем, также совсем не претендующий на полноту и на сегодняшний день частично устаревший) приложен к книге [75].

- [60] Больяи Я., Appendix. М.—Л., Гостехиздат, 1950; Сборник «Об основаниях геометрии», стр. 71—100.
- [61] Гаусс К. Ф., Отрывки из писем и черновые наброски, относящиеся к неевклидовой геометрии, Сборник «Об основаниях геометрии», стр. 101—120.
- [62] Норден А. П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., Гостехиздат, 1953.
- [63] Делоне Б. Н., Элементарное доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского, М., Гостехиздат, 1956.
- [64] Александров П. С., Что такое неевклидова геометрия, М., Учпедгиз, 1950.
- [65] Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Николай Иванович Лобачевский, М.—Л., Гостехиздат, 1943.
- [66] Широков П. А., Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, М., Гостехиздат, 1955.
- [67] Каган В. Ф., Лобачевский, М.—Л., Изд-во Академии наук СССР, 1948.
- [68] Каган В. Ф., Лобачевский и его геометрия, М., Гостехиздат, 1955.
- [69] Смилга В. П., В погоне за красотой, М., «Молодая гвардия», 1968.
- [70] Каган В. Ф., Очерк геометрической системы Лобачевского, Одесса, «Матезис», 1900.
- [71] Бонола Р., Неевклидова геометрия, Спб., «Общественная польза», 1910.
- [72] Успенский Я., Введение в неевклидову геометрию Лобачевского—Болиаи, Пг., «Сеятель», 1922.
- [73] Лукьянченко С., Элементы неевклидовой геометрии Лобачевского—Болье, М.—Л., Гостехиздат, 1933.
- [74] Бальдус Р., Неевклидова геометрия, М.—Л., Гостехиздат, 1933.
- [75] Каган В. Ф., Основания геометрии, т. 1, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
- См. также книги: Кокстера [19], Клейна [55], Кагана [25], Яглома [10] и [77] и статью Розенфельда и Яглома [24].

Литература к Приложениям

- [76] Клейн Ф., О так называемой неевклидовой геометрии, Сборник «Об основаниях геометрии», стр. 253—303.
- [77] Яглом И. М., Комплексные числа и их применение в геометрии, М., Физматгиз, 1963.
- [78] Яглом И. М., Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа, Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. 7, М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 276—318.
- [79] Розенфельд Б. А., Основные понятия сферической геометрии и тригонометрии, ЭЭМ, кн. IV, стр. 518—557.
- [80] Маркушевич А. И., Элементы теории аналитических функций, М., Учпедгиз, 1944, § 4, гл. V.
- [81] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. 1, М.—Л., ОНТИ, 1937.
- [82] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., «Наука», 1969.
- См. также книги Кагана [25], Клейна [55] и статью Розенфельда и Яглома [24].