

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МЕХАНИКА

В.Т. КОЙТЕР

**ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ
ТЕОРИИ
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ
СРЕД**

**PROGRESS
IN SOLID MECHANICS**

Volume I

**Edited by
I. N. SNEDDON and R. HILL**

Chapter IV

**GENERAL THEOREMS
FOR ELASTIC-PLASTIC SOLIDS**

by

**W. T. KOITER
Technological University, Delft, Netherlands**

1960

**North-Holland publishing company
Amsterdam**

В. Т. КОЙТЕР

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ
ТЕОРИИ
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ
СРЕД

Из сборника
«Успехи механики твердого тела», т. I,
под редакцией И. Снеддона и Р. Хилла

Перевод с английского
В. И. Розенблюма

Под редакцией
Г. С. Шапиро

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1961

АННОТАЦИЯ

Работа видного голландского упругиста В. Т. Койтера включена в сборник «Достижения механики твердого тела», опубликованный в 1960 году в Амстердаме под редакцией И. Снеддона и Р. Хилла. Автор излагает с единой точки зрения общие теоремы математической теории пластичности для малых деформаций упруго-пластических тел. Работа содержит также некоторые неопубликованные результаты автора.

Ясность и строгость изложения придают работе классический характер. Ее с пользой и интересом изучат научные работники, аспиранты и студенты, имеющие дело с вопросами механики пластических деформаций твердых тел.

§ 1. Введение¹⁾

После появления фундаментального труда Хилла [33] и книги Прагера и Ходжа по идеально пластическим средам [67] в математической теории пластичности были достигнуты значительные успехи. Обстоятельный обзор результатов этой теории содержится в недавней статье Фрейдентала и Гейрингер [22], посвященной более широкой проблеме неупругих сред. В частности, были заполнены многие пробелы, относящиеся к общим теоремам; по-видимому, можно считать, что для малых деформаций общие теоремы приблизились к канонической форме. В связи с этим на данной стадии может представлять интерес попытка рассмотрения этих теорем с единой точки зрения, тем более, что изложение теорем пластичности в статье Фрейдентала и Гейрингер по необходимости проведено весьма конспективно. Мы надеемся, что эта цель достигнута в предлагаемой работе.

Мы ограничим рассмотрение вопросами *малых деформаций упруго-пластических тел*. Хотя в последние годы имел место заметный прогресс в изучении больших деформаций, при которых нельзя пренебрегать изменениями геометрии при формулировке уравнений равновесия, попытка объединяющего подхода к этим более трудным проблемам представляется преждевременной. Теория жестко-пластических тел, как таковая, также не будет здесь рассматриваться. Поскольку, однако, жестко-пластическую среду можно интерпретировать как предельный случай упруго-пластической среды, упругие постоянные которой неограниченно возрастают, теория упруго-пластических сред,

¹⁾В основу этой работы положен доклад, прочитанный на четвертом симпозиуме по пластичности в Броуновском университете (США) в сентябре 1953 г. Автор приносит благодарность профессору В. Прагеру за любезное приглашение участвовать в симпозиуме.

конечно, применима и для жестко-пластических тел; специфические трудности возникают лишь в случае, когда жестко-пластическая среда определяется независимо как среда, в которой могут возникать (при подходящих напряжениях) только пластические скорости деформации. Наконец, внимание будет сосредоточено на общей трехмерной теории; приложения к частным типам конструкций не будут рассматриваться. Исключения составляют приложения, имеющие особое значение для общей теории или представляющие исторический интерес, и некоторые другие. В высшей степени интересная теория проектирования конструкций минимального веса также выходит за рамки настоящей статьи.

Наиболее замечательной особенностью общих теорем является их дуальный характер. Каждому минимальному принципу, каждой теореме статического типа, о разрушении или о приспособляемости, т. е. теореме, формулируемой в силовых переменных, соответствует аналогичная теорема кинематического типа, т. е. теорема, формулируемая в терминах деформированного состояния. Исключением является только теорема единственности для идеально пластических тел, где неединственное поле скоростей деформаций может соответствовать единственному полю скоростей изменения напряжений; причина этого явления полностью разъясняется в п. 3.3. Эта ситуация аналогична дуальности вариационных принципов математической теории упругости и может служить дополнительным эвристическим доводом в пользу соотношений между напряжениями и деформациями, на которых основывается теория пластичности. Единственный дефект современной теории, важный с математической точки зрения, заключается в отсутствии теоремы существования решения основной краевой задачи; такая теорема существования явилась бы завершающим доказательством математической непротиворечивости теории пластичности. Хотя отсутствие доказательства существования решения будет казаться более существенным математику, чем инженеру или физiku, можно надеяться, что высказанные в § 7 на базе принципа Дирихле соображения помогут найти отсутствующее доказательство.

Сделаем некоторые замечания относительно расположения материала в работе.

Параграф 2 содержит обзор основных предположений, лежащих в основе теории, и весьма подробное обсуждение соотношений между напряжениями и деформациями. Параграфы, посвященные общим теоремам, открываются пунктом, в котором вводятся некоторые специальные понятия, необходимые для последующей формулировки и доказательства теорем. Чтобы по возможности меньше прерывать ход рассуждений, ссылки на литературу почти везде отнесены в последний пункт каждого параграфа.

Хотя список литературы, приведенный в конце работы, не претендует на полноту, при его составлении мы предполагали включить все основные публикации. Автор, однако, не считает, что это намерение полностью удалось осуществить, и просит извинения у читателя, если некоторые из необходимых источников окажутся ненамеренно пропущенными.

В связи с наличием обширной русской литературы по теории пластичности упоминание только двух русских работ может вызвать недоумение. Отчасти это объясняется недоступностью многих русских публикаций (или, если угодно, недостаточной осведомленностью автора). С другой стороны, русские исследования основаны преимущественно на законах пластичности деформационного типа, которые не рассматриваются в настоящей статье по причинам, излагаемым в п.п. 2.6 и 4.6.

Отметим, что при подготовке настоящего обзора неизбежно должны были выявиться некоторые второстепенные пробелы в существующей библиографии. Была предпринята попытка заполнить по возможности эти пробелы; читателю предоставляется судить, оказалась ли эта попытка успешной.

§ 2. Основные предположения и законы пластичности

2.1. Малые деформации. Все деформации будем считать малыми; при этом симметричный тензор деформаций ε_{ij} выражается через перемещения u_i в прямоугольной декартовой системе координат с помощью хорошо известных формул

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.1)$$

где запятая перед индексом i обозначает частную производную по координате x_i . В этом приближении не существенно, относятся ли координаты к деформированному или к недеформированному состоянию. Аналогично, тензор скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ выражается через скорости $\dot{u}_i$ посредством соотношения

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}). \quad (2.2)$$

Изменения в геометрии, вызванные деформацией, не учитываются также и при составлении уравнений равновесия. Поэтому безразлично, будет ли симметричный тензор напряжений σ_{ij} отнесен к деформированному или к недеформированному состоянию. Обозначая массовые силы на единицу объема через X_i и удельные поверхностные нагрузки через p_i , получим уравнения равновесия в объеме тела

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (2.3)$$

и краевые условия на поверхности

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad (2.4)$$

где через n_i обозначен единичный вектор внешней нормали к поверхности и принято условие суммирования по повторяющимся латинским индексам.

Условия равновесия можно объединить в одном уравнении

$$\int \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \int X_i u_i dv + \int p_i u_i dS, \quad (2.5)$$

справедливым для любого распределения напряжений σ_{ij} , уравновешенного внешними нагрузками X_i , p_i , и для любого поля перемещений u_i с соответствующим ему распределением деформаций ϵ_{ij} (2.1). Объемный интеграл распространен по всему объему тела, поверхностный — по всей его поверхности.

Уравнение виртуальных работ (2.5) является основой при выводе всех общих теорем. Очевидно, что (2.5) останется справедливым, если поле перемещений и соответствующее распределение деформаций заменить полем ско-

ростей $\dot{u}_i$ и соответствующим ему распределением скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ (2.2).

Если внешние нагрузки зависят от времени, но скорости изменения этих нагрузок $\dot{X}_i$, $\dot{p}_i$ достаточно малы, то задачу можно считать квазистатической. В этом случае уравнения равновесия для скоростей изменения напряжений формально идентичны уравнениям (2.3) и (2.4), а уравнение виртуальных работ справедливо для любого распределения скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, уравновешенного скоростями изменения внешних нагрузок $\dot{X}_i$, $\dot{p}_i$.

Мы неявно предполагали выше, что напряжения, скорости изменения напряжений, перемещения и скорости имеют непрерывные первые производные по координатам. Однако, в отличие от классической теории упругости, в теории пластичности следует принимать во внимание возможность разрывов. Разрывы в напряжениях и в скоростях изменения напряжений на некоторых поверхностях внутри тела физически допустимы только тогда, когда непрерывны усилия (на единицу площади), передаваемые через эти поверхности, т. е. непрерывны $\sigma_{ij}n_j$ и $\dot{\sigma}_{ij}n_j$, где n_j — единичный вектор нормали к поверхности разрыва. Такие допустимые разрывы в напряжениях не влияют на уравнение виртуальных работ. Разрывы в перемещениях и скоростях на поверхностях внутри тела допустимы только тогда, когда непрерывны компоненты перемещения и скорости, нормальные к таким поверхностям, т. е. непрерывны $u_i n_i$ и $\dot{u}_i n_i$. Уравнение виртуальных работ (2.5) будет при этом справедливо, если к левой части его добавить выражение

$$\sum_{\mu} \int_{S_{\mu}} \sigma_{ij} n_j \Delta u_i dS_{\mu}, \quad (2.6)$$

где S_{μ} — поверхность разрыва и Δu_i — соответствующий разрыв в перемещениях. В последующем будет молчаливо подразумеваться, что соответствующий дополнительный член (2.6) добавлен к левой части уравнения виртуальных

работ, если это уравнение применяется к разрывным полям перемещений или скоростей.

В задачах о стесненной пластической деформации основное предположение о малости деформаций соответствует степени приближения, принятой в классической линейной теории упругости. Так же, как в теории упругости, это предположение исключает возможность рассмотрения задач выпучивания и родственных им¹⁾.

2.2. Общие соотношения между напряжениями и деформациями. Предполагается, что действительные деформации ϵ_{ij} элемента тела можно представить в виде суммы упругих деформаций ϵ'_{ij} и пластических деформаций ϵ''_{ij} . Упругие деформации определяются законом Гука

$$\epsilon'_{ij} = A_{ijhk} \sigma_{hk}, \quad (2.7)$$

где тензор упругих коэффициентов обладает свойствами симметрии:

$$A_{ijhk} = A_{jihk} = A_{ijkh} = A_{hki j}. \quad (2.8)$$

Энергия упругой деформации единицы объема есть

$$\frac{1}{2} A_{ijhk} \sigma_{ij} \sigma_{hk} > 0 \quad (2.9)$$

при условии, что не все компоненты напряжения равны нулю. Обращение соотношений (2.7) единственно²⁾.

Соотношения между напряжениями и пластическими деформациями выводились различными способами, причем всегда использовались некоторые более или менее приемлемые предположения.

Наиболее удовлетворительный (по мнению автора) подход основан на фундаментальном квазитермодинамиче-

¹⁾ Влияние вызванных деформацией изменений в геометрии на единственность и устойчивость недавно рассматривалось Хиллом [37, 39, 40].

²⁾ Энергия упругой деформации (2.9) в действительности всегда положительна и обращение (2.7) единственно, если только материал не является жестким по отношению к некоторым видам напряженного состояния. Исключением будет, например, (явно гипотетический) случай несжимаемой среды, для которой обращение утрачивает единственность при добавлении произвольного гидростатического напряженного состояния.

ском постулате Друккера [16]. Применительно к элементу тела этот постулат можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим элемент, находящийся в некотором исходном напряженном состоянии; пусть внешним воздействием A (отличным от воздействия, порождающего исходные напряжения) медленно прикладываются и снимаются дополнительные напряжения. В процессе приложения дополнительных напряжений внешнее воздействие A совершает неотрицательную работу; работа «нетто» (net work), совершенная внешним воздействием A за полный цикл приложения и снятия дополнительных напряжений, также неотрицательна. Другими словами, полезная энергия не может быть выделена из элемента и из системы исходных напряжений. В приложениях фундаментального постулата удобно воспользоваться геометрическими образами. Напряженное состояние элемента тела может быть представлено точкой в прямоугольных координатах σ_{ij} девятимерного пространства напряжений. Предполагается, что пластические деформации не изменяются, если точка напряжений лежит в некоторой области, которую мы будем называть *упругой областью*; соответствующее напряженное состояние $\sigma_{ij}^{(s)}$ будем называть «безопасным». Приращения пластической деформации могут возникнуть лишь в том случае, если точка напряжений попадет на границу упругой области. Эту границу будем называть *пределом текучести* или, на геометрическом языке, *поверхностью текучести*. Напряженное состояние $\sigma_{ij}^{(a)}$, соответствующее точке в упругой области или на поверхности текучести, будем называть «допустимым». Фундаментальный постулат теперь приводит к следующим заключениям [16]:

а) Если σ_{ij} — напряженное состояние на поверхности текучести, которому соответствуют скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''$, то для всех «безопасных» напряженных состояний $\sigma_{ij}^{(s)}$ и «допустимых» напряженных состояний $\sigma_{ij}^{(a)}$ имеют место соотношения

$$[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}] \dot{\epsilon}_{ij}'' > 0, \quad (2.10)$$

$$[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(a)}] \dot{\epsilon}_{ij}'' \geq 0. \quad (2.11)$$

б) Если $\dot{\sigma}_{ij}$ — скорости изменения напряжений, которым соответствуют скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$, то

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0. \quad (2.12)$$

в) Вследствие (2.11) поверхность текучести выпукла.

Необходимо отметить, что следствия из фундаментального постулата Друккера имеют место только для *скоростей* пластической деформации; никаких заключений относительно полных пластических деформаций нельзя сделать, если не известна вся история элемента.

2.3. Идеально пластические материалы. Идеально пластический материал характеризуется тем, что он не может воспринимать напряжения, превосходящие определенный фиксированный предел текучести. Таким образом, поверхность текучести и упругая область не зависят от истории нагружения элемента. Кроме того, упругая область должна теперь содержать ненапряженное состояние ($\sigma_{ij} = 0$). Скорость диссипации энергии в единице объема

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = F(\dot{\epsilon}_{ij}) > 0 \quad (2.13)$$

будет однозначной функцией скоростей пластической деформации. В (2.13) σ_{ij} — напряженное состояние на поверхности текучести, соответствующее отличным от нуля скоростям пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$. Пропорциональному возрастанию скоростей пластической деформации отвечает пропорциональное возрастание скорости диссипации энергии.

Для идеально пластического материала вместо неравенства (2.12) имеем

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad (2.14)$$

для *всех* соответственных скоростей изменения напряжений и скоростей пластической деформации. Действительно, если напряженное состояние лежит в упругой области, то (2.14), очевидно, выполняется, так как скорости пластической деформации равны нулю; если же напряженное состояние находится на пределе текучести, то $\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} dt$ должно быть «допустимым» напряженным состоя-

нием; следовательно, на основании (2.11)

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \leq 0. \quad (2.15)$$

Комбинируя (2.12) и (2.15), получаем (2.14). С другой стороны, если $\dot{\sigma}_{ij(1)}$, $\dot{\epsilon}_{ij(1)}$ и $\dot{\sigma}_{ij(2)}$, $\dot{\epsilon}_{ij(2)}$ — две различные пары соответственных скоростей изменения напряжений и скоростей пластической деформации, отвечающих одному и тому же напряженному состоянию на пределе текучести, то условие (2.11) приводит к неравенствам

$$\dot{\sigma}_{ij(1)} \dot{\epsilon}_{ij(2)} \leq 0, \quad \dot{\sigma}_{ij(2)} \dot{\epsilon}_{ij(1)} \leq 0. \quad (2.16)$$

Отмеченные свойства соотношений между напряжениями и деформациями для идеально пластического материала достаточны для доказательства рассматриваемых общих теорем. Тем не менее полезно привести эти соотношения в явной форме. Если поверхность текучести *регулярна* в окрестности точки на этой поверхности, т. е. если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную гиперплоскость, то эта поверхность может быть описана уравнением

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (2.17)$$

где знак *функции текучести* f (симметричной относительно σ_{ij} и σ_{ji}) выбран так, что в упругой области $f < 0$. Теперь скорости пластической деформации определяются соотношениями

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.18)$$

где

$$\lambda = 0, \text{ если } f < 0, \text{ а также если } f = 0, \quad \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0, \quad \left. \vphantom{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}} \right\}$$

и

$$\lambda \geq 0, \text{ если } f = 0 \text{ и } \dot{f} = 0. \quad (2.19)$$

Закон течения, выражаемый соотношениями (2.18), иногда называют *ассоциированным* с функцией текучести $f(\sigma_{ij})$. Как следует из формы этих соотношений, функция текучести играет роль потенциала для скоростей пластической

деформации и поэтому часто называется *пластическим потенциалом*. В геометрических терминах это означает, что если представить скорости пластической деформации в девятимерном пространстве напряжений, то тензор скоростей пластической деформации (изображаемый вектором в девятимерном пространстве) имеет направление внешней нормали к поверхности текучести.

Интенсивность напряженного состояния удобно характеризовать модулем функции текучести. В частности, принято говорить, что имеет место (дополнительное) нагружение, если скорости изменения напряжений таковы, что $\dot{f} > 0$. Разгрузка определяется условием $\dot{f} < 0$. Зависимости (2.19) эквивалентны следующей формулировке: λ всегда неотрицательно и только тогда отлично от нуля, когда напряженное состояние находится на пределе текучести и не происходит разгрузки. Заметим, что λ — неопределенный параметр, имеющий размерность 1/время; он не является константой материала. При этом время можно было бы заменить любым другим монотонно возрастающим с течением времени параметром.

Сингулярные поверхности текучести, имеющие ребра или угловые точки, можно описать некоторым (конечным или бесконечным) числом функций текучести $f_\alpha(\sigma_{ij})$, $\alpha = 1, 2, \dots$. Упругой области соответствуют отрицательные значения *всех* функций текучести. Напряженное состояние на пределе текучести характеризуется обращением в нуль одной или нескольких функций текучести, при этом остальные функции текучести отрицательны.

Скорости пластической деформации выражаются формулами

$$\dot{\epsilon}_{ij}'' = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\alpha} &= 0, \text{ если } f_{\alpha} < 0, \text{ а также если } f_{\alpha} = 0, \dot{f}_{\alpha} \equiv \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0, \\ \text{и} \\ \lambda_{\alpha} &\geq 0, \text{ если } f_{\alpha} = 0 \text{ и } \dot{f}_{\alpha} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Следует отметить, что регулярную поверхность текучести можно также представить бесконечно большим числом функций текучести $f_a(\sigma_{ij})$, т. е. линейными функциями, соответствующими касательным плоскостям к поверхности текучести.

2.4. Упрочняющиеся материалы. В отличие от идеально пластического материала (в котором не равные нулю скорости пластической деформации могут возникать при постоянных напряжениях, достигающих предела текучести) *упрочняющийся материал* характеризуется тем, что для получения отличных от нуля приращений пластических деформаций необходимо увеличение напряжений за пределы текучести.

Для регулярной поверхности текучести направление тензора скоростей пластической деформации, как и прежде, должно совпадать с направлением внешней нормали к поверхности текучести. Очевидно, что пропорциональное возрастание скоростей изменения напряжений должно повлечь за собой пропорциональное возрастание скоростей пластической деформации. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}'' = 0, \text{ если } f < 0, \text{ а также если } f = 0, \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0, \\ \text{и} \\ \dot{\epsilon}_{ij}'' = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f}, \text{ если } f = 0 \text{ и } \dot{f} \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

где положительная функция упрочнения h может зависеть от истории напряжений и деформаций, а также может быть *однородной функцией нулевой степени* от скоростей изменения напряжений. Однако для этого наиболее общего вида функции упрочнения пока еще не установлены какие-либо общие теоремы. Для доказательства таких теорем, по-видимому, необходимо *дополнительное предположение* о независимости функции упрочнения h от скоростей изменения напряжений, или, другими словами, предположение, что при нагружении скорости пластической деформации ($\dot{f} > 0$) являются *линейными функциями* скоростей изменения напряжений. В этом отношении теория идеально пластических материалов представляется более удовлетвори-

тельной, поскольку она не требует введения каких-либо предположений, помимо фундаментального постулата Друккера.

Обобщение на случай сингулярных поверхностей текучести, описываемых некоторым числом функций текучести f_α , теперь достаточно очевидно. Соответствующие формулы для скоростей пластической деформации будут иметь вид

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} h_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f}_{\alpha}, \quad (2.23)$$

где положительные функции упрочнения h_{α} не зависят от скоростей изменения напряжений, но могут зависеть от истории напряжений и деформаций, а c_{α} равно нулю, если $f_{\alpha} < 0$ или $\dot{f}_{\alpha} < 0$, и равно единице, если $f_{\alpha} = 0$ и $\dot{f}_{\alpha} \geq 0$.

2.5. Обращение соотношений между напряжениями и деформациями. Дифференцируя по времени зависимости (2.7) и комбинируя их с (2.20), получаем соотношения между напряжениями и деформациями для идеально пластической среды наиболее общего типа:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk} + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\alpha} &= 0, \text{ если } f_{\alpha} < 0, \text{ а также если } f_{\alpha} = 0, \dot{f}_{\alpha} \equiv \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0, \\ \text{и} \\ \lambda_{\alpha} &\geq 0, \text{ если } f_{\alpha} = 0 \text{ и } \dot{f}_{\alpha} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Аналогично, соотношения между напряжениями и деформациями для упрочняющейся среды общего типа будут иметь вид

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk} + \sum_{\alpha} c_{\alpha} h_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f}_{\alpha}, \quad (2.26)$$

где h_a не зависят от скоростей изменения напряжений и

$$\left. \begin{aligned} c_a = 0, \text{ если } \dot{f}_a < 0 \text{ или } \dot{f}_a \equiv \frac{\partial f_a}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0, \\ \text{и} \\ c_a = 1, \text{ если } \dot{f}_a = 0 \text{ и } f_a \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Соотношения (2.24) и (2.26) определяют скорости деформаций, соответствующие заданным скоростям изменения напряжений. В некоторых проблемах, однако, необходимо обращение этих соотношений, т. е. необходимо вычислить скорости изменения напряжений, соответствующие определенным скоростям деформаций при заданном напряженном состоянии. Это обращение легко выполняется в явной форме для случая материалов с регулярной поверхностью текучести [33]. Сложнее проблема обращения для более общих соотношений (2.24) и (2.26); существование такого обращения даже ставилось под сомнение [85].

Для доказательства *единственности обращения* (2.24) и (2.26) будем рассматривать эти соотношения одновременно, представив их в форме

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk} + \dot{\epsilon}_{ij}'' \quad (2.28)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}''$ — тензор скоростей пластической деформации, соответствующих скоростям изменения напряжений $\dot{\sigma}_{hk}$. Пусть $\dot{\sigma}_{ij(1)}$ и $\dot{\sigma}_{ij(2)}$ — два различных тензора скоростей изменения напряжений, которые удовлетворяют соотношениям (2.28) при заданных скоростях деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$. Вычитание одного из уравнений (2.28), соответствующих указанным скоростям изменения напряжений, из другого, умножение на

$$[\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}]$$

и суммирование по индексам i и j дает

$$\begin{aligned} 0 = A_{ijhk} [\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}] [\dot{\sigma}_{hk(1)} - \dot{\sigma}_{hk(2)}] + \\ + [\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}] [\dot{\epsilon}_{ij}''(1) - \dot{\epsilon}_{ij}''(2)]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Первое слагаемое в (2.29) представляет собой удвоенную энергию упругой деформации единицы объема, соответст-

вующую напряженному состоянию $[\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}]$; оно существенно положительно¹⁾, если только не имеет места равенство $\dot{\sigma}_{ij(1)} = \dot{\sigma}_{ij(2)}$. Второе слагаемое в (2.29) всегда неотрицательно; для идеально пластической среды это немедленно следует из (2.14) и (2.16); для упрочняющейся среды второе слагаемое (2.29) может быть представлено [на основании определения (2.27) параметров c_α] в следующем виде:

$$\sum_{\alpha} h_{\alpha} \{c_{\alpha(1)} \dot{f}_{\alpha(1)}^2 + c_{\alpha(2)} \dot{f}_{\alpha(2)}^2 - [c_{\alpha(1)} + c_{\alpha(2)}] \dot{f}_{\alpha(1)} \dot{f}_{\alpha(2)}\} \geq 0. \quad (2.30)$$

При этом из (2.29) заключаем, что решение уравнений (2.24) и (2.26) относительно скоростей изменения напряжений (если оно существует) является единственным. Следует отметить, что соответствующее решение уравнений (2.24) относительно параметров λ_α не будет необходимо единственным; неединственное решение относительно этих параметров может иметь место, если скорости пластических деформаций, соответствующие «активным» (operative) функциям текучести $\dot{f}_\alpha$ (т. е. тем функциям, для которых $\dot{f}_\alpha = 0$, $\dot{f}_\alpha = 0$), не являются линейно независимыми. Для доказательства существования обращения (2.24) рассмотрим алгебраическую проблему минимизации

$$\frac{1}{2} A_{ijhk} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{hk} - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \min \quad (2.31)$$

при заданных скоростях деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ и добавочных условиях

$$\dot{f}_\beta \equiv \frac{\partial f_\beta}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0, \quad (2.32)$$

налагаемых на те функции текучести f_β , которые могут быть активными, т. е. на те функции, которые существующее напряженное состояние обращают в нуль ($f_\beta = 0$).

Существование решения $\dot{\sigma}_{ij}^*$ указанной алгебраической про-

¹⁾ См. примечание 2) на стр. 10.

блемы обеспечено; это решение характеризуется неравенством

$$\frac{1}{2} A_{ijhk} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{hk} + A_{ijhk} \dot{\sigma}_{ij}^* \Delta \dot{\sigma}_{hk} - \Delta \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0, \quad (2.33)$$

имеющим место для вариаций скоростей изменения напряжений $\Delta \dot{\sigma}_{ij}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\partial f_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \leq 0, \text{ если } \dot{f}_{\beta}^* \equiv \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^* = 0. \quad (2.34)$$

Следует заметить, что функция текучести f_{β} не накладывает никаких ограничений на вариации $\Delta \dot{\sigma}_{ij}$, если она не является активной при решении проблемы минимизации, т. е. $\dot{f}_{\beta}^* < 0$. Первый член в (2.33) всегда положителен, но может быть выбран сколь угодно малым по сравнению со вторым и третьим членами путем неограниченного уменьшения $\Delta \dot{\sigma}_{ij}$. Учитывая это и пользуясь методом множителей Лагранжа, из (2.33) и (2.34) получаем

$$A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk}^* - \dot{\epsilon}_{ij} = - \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.35)$$

где $\lambda_{\beta} \geq 0$, если $\dot{f}_{\beta}^* = 0$, и $\lambda_{\beta} = 0$, если $\dot{f}_{\beta}^* < 0$. Эти уравнения формально эквивалентны (2.24), поэтому решение $\dot{\sigma}_{ij}^*$ проблемы минимизации (2.31) с добавочными условиями (2.32) будет также (единственным) решением (2.24).

Существование обращения (2.26) доказывается аналогично, путем рассмотрения алгебраической проблемы минимизации

$$\frac{1}{2} A_{ijhk} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{hk} + \frac{1}{4} \sum_{\beta} h_{\beta} \dot{f}_{\beta} [f_{\beta} + |\dot{f}_{\beta}|] - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \min, \quad (2.36)$$

где

$$\dot{f}_{\beta} \equiv \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}. \quad (2.37)$$

Здесь также следует учитывать только те функции текучести f_{β} , которые *могут* быть активными в существующем напряженном состоянии, т. е. те функции, для которых $f_{\beta} = 0$. Пусть $\dot{\sigma}_{ij}^*$ обозначает решение проблемы миними-

зации; это решение удовлетворяет уравнениям

$$A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk}^* + \frac{1}{2} \sum_{\beta} h_{\beta} [\dot{f}_{\beta}^* + |\dot{f}_{\beta}^*|] \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}} - \dot{\epsilon}_{ij} = 0, \quad (2.38)$$

$$\dot{f}_{\beta}^* = \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^*, \quad (2.39)$$

которые формально идентичны (2.26). Таким образом, решение проблемы минимизации (2.36) дается обращением (2.26).

2.6. Исторические замечания. Математическая теория пластичности и в особенности основные соотношения между напряжениями и деформациями имеют большую и сложную историю; не удивительно поэтому, что не всегда легко выяснить происхождение отдельных идей. Мы приведем здесь краткий очерк основных этапов развития законов пластичности, хотя это и связано с риском ошибиться при установлении авторов основных результатов. В процессе подготовки материала мы широко использовали обстоятельную, хотя и заведомо неполную, библиографию в обзоре Друккера, посвященном соотношениям между пластическими деформациями и напряжениями [15].

Можно считать, что математическая теория пластичности берет начало в работе Треска, посвященной течению твердых тел [83], которая была опубликована в 1864 году; критерий текучести, основанный на максимальном касательном напряжении, в последующем вполне справедливо был назван в честь этого исследователя его именем. Несколькими годами позже (в 1870 году) Сен-Венан вновь продемонстрировал свою выдающуюся физическую интуицию, предложив соотношения между напряжениями и скоростями деформаций для двумерного пластического течения твердого тела [84]; он ввел для изотропного материала условие коаксиальности тензора напряжений и тензора скоростей деформаций. В 1870 году Леви [55] обобщил это условие для трехмерного случая и предложил закон пропорциональности компонент девиатора напряжений и компонент скоростей пластических деформаций. Эта работа практически оставалась неизвестной до 1913 года, когда Мизес [60] независимо пришел

к аналогичным результатам, дополнив их хорошо известным простым условием текучести для изотропных сред

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij} - k^2 = 0, \quad (2.40)$$

где s_{ij} — девиатор напряжений, k — предел текучести при сдвиге. Функция текучести (2.40) является пластическим потенциалом в теории пластичности Леви — Мизеса.

В 1928 году Мизес [61] распространил свою теорию на *идеально пластические* тела с произвольной регулярной функцией текучести $f(\sigma_{ij})$ и вывел ассоциированный закон течения (2.18). Закон течения, соответствующий сингулярному критерию текучести Треска, рассматривался в 1932 — 1933 годах Рейссом [76, 77]. Это исследование, по-видимому, также осталось незамеченным; насколько известно автору, оно не имело приложений до появления в 1953 году работ Койтера [51] и Прагера [69], и еще несколько лет тому назад результат (2.20) для более общих сингулярных условий текучести представлялся совершенно новым [52]. Введение упругих деформаций в соотношения между напряжениями и деформациями для идеально пластических сред было выполнено в 1924 году Прандтлем [73] для плоской задачи и в 1930 году Рейссом [75] в трехмерной теории. Первоначальные исследования *упрочняющихся* тел были в основном посвящены одноосному случаю, а также пропорциональному нагружению, т. е. пропорциональному возрастанию всех напряжений. Общие пластические соотношения (2.22) между напряжениями и деформациями для сред с регулярной поверхностью текучести были впервые получены в 1938 году Меланом [59] и независимо в 1949 году Прагером [66]. Обобщение (2.23) на случай материалов с сингулярной поверхностью текучести было указано в 1953 году Койтером [52]. Ценные исследования соотношений между напряжениями и деформациями неоднократно публиковались школой Тэйлора и Хилла в Англии [29, 30, 32, 33, 82] и школой Прагера в США [14, 15, 19, 20, 66, 70, 71]; следует также упомянуть недавнюю обстоятельную статью Фрейденталя и Гейрингер [22]. Наиболее удовлетворительной основой теории является, по мнению автора, фундаментальный квазитермодинамический постулат, выдвинутый в 1951 году Друккером [16].

Иное обоснование было предложено в 1951 году Бишопом и Хиллом [4], которые вывели (2.11) для поликристаллического агрегата, основываясь на свойствах отдельных кристаллов. Многообещающие результаты были также получены в 1957—1958 годах Циглером [87, 88], который предпринял попытку включить теорию пластичности в сферу действия принципа Онзагера для необратимых термодинамических процессов.

В случае пропорционального нагружения элемента, т. е. при пропорциональном возрастании всех напряжений, соотношения между напряжениями и деформациями (2.22) или (2.23) можно, конечно, проинтегрировать. Получаемые при этом соотношения между конечными значениями напряжений и полными величинами пластических деформаций часто используются также при произвольных путях нагружения; соответствующую теорию обычно называют *деформационной теорией пластичности* (в отличие от рассмотренной выше *теории течения*).

Деформационная теория для идеально пластических материалов названа именем Генки, предложившего ее в 1924 году [27]. Дефекты деформационной теории с физической точки зрения были отчетливо показаны в 1947 году Хандельманом, Лином и Прагером [28]. Тем не менее, в некоторых случаях теории пластичности деформационного типа можно использовать с определенной уверенностью для получения полезных приближенных решений, если пути нагружения всех элементов тела не слишком сильно отклоняются от пропорционального нагружения. Более того, как недавно показали Сандерс [78], Ходж [43, 44] и Будянский [8], деформационная теория для материалов с сингулярной поверхностью текучести может быть справедлива не только при пропорциональном нагружении, но и при более слабых ограничениях. Однако деформационная теория ни в коем случае не может быть применимой при полностью произвольных путях нагружения. Основные физические соотношения обязательно должны содержать *скорости* пластической деформации.

Наконец, следует также упомянуть о теории скольжения Батдорфа и Будянского [2], вызвавшей большой интерес несколько лет тому назад, и о предложенной в 1950 году Уайтом [86] теории суперпозиции напряже-

ний в связанных элементах идеально пластического материала, которая была независимо развита Бесселингом в 1953 году [3]. Первоначально эти теории были выдвинуты в качестве нового подхода, существенно отличного от теории течения. В последующем более детальное исследование Койтера [51] обнаружило, что эти теории можно рассматривать как частные случаи общих соотношений (2.23) для сред с сингулярной поверхностью текучести.

§ 3. Теоремы единственности

3.1. Краевая задача для скоростей изменения напряжений. Рассмотрим тело, которое произвольным образом деформировано приложенными массовыми силами и поверхностными нагрузками или заданными на поверхности перемещениями. Вообще говоря, при этом некоторая область тела будет в пластическом состоянии, т. е. напряженное состояние каждой точки этой области будет изображаться точкой на поверхности текучести; другая область будет в состоянии разгрузки после предшествовавшей пластической деформации; наконец, в остальной области тела всюду будут иметь место только упругие деформации. Напряженное состояние для двух последних областей лежит внутри поверхности текучести. Следует иметь в виду, что поверхность текучести может меняться от точки к точке тела; такая неоднородность обязательно будет иметь место в упрочняющемся материале вследствие того, что локальная поверхность текучести зависит от степени упрочнения данного элемента.

Предположим, что внешние массовые силы X_i , поверхностные нагрузки p_i на части поверхности S_p (где эти нагрузки заданы) и перемещения u_{i0} на части (поверхности S_u (где заданы перемещения) возрастают с заданными скоростями $\dot{X}_i, \dot{p}_i, \dot{u}_{i0}$.¹⁾

¹⁾ Для упрощения мы не будем рассматривать смешанные краевые условия, когда на части поверхности задаются, например, нормальные (к поверхности) усилия и касательные перемещения. Читатель легко проверит, что теоремы единственности и минимальные принципы справедливы и для таких смешанных краевых условий.

Если нигде на поверхности не заданы перемещения ($S_u = 0$), то поверхностные нагрузки p_i и массовые силы X_i и их скорости должны, конечно, удовлетворять шести уравнениям равновесия твердого тела. При этом *теорема единственности для скоростей изменения напряжений в этой краевой задаче* состоит в том, что не может существовать более одного распределения скоростей изменения напряжений, являющегося решением, т. е. удовлетворяющего следующим требованиям:

а) скорости изменения напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия в объеме тела

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i = 0; \quad (3.1)$$

б) скорости изменения напряжений удовлетворяют краевым условиям для напряжений на S_p :

$$\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i; \quad (3.2)$$

в) соответствующие скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ [(2.24) или (2.26)] совместны, т. е. могут быть выведены из поля скоростей $\dot{u}_i$ по формулам

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}); \quad (3.3)$$

г) скорости удовлетворяют краевым условиям на S_u :

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i0}; \quad (3.4)$$

д) для идеально пластического материала скорости изменения напряжений в пластической области тела таковы, что

$$\dot{f}_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0, \text{ если } f_\alpha = 0. \quad (3.5)$$

3.2. Доказательство единственности для скоростей изменения напряжений. Теорема единственности будет доказана, если показать, что предположение о существовании двух различных решений $\dot{\sigma}_{ij(1)}$ и $\dot{\sigma}_{ij(2)}$ ведет к противоречию. Заметим, что разность этих решений будет являться самоуравновешенным распределением скоростей изме-

нения напряжений с равными нулю на S_p скоростями изменения поверхностных нагрузок.

Разность соответствующих скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij(1)}$ и $\dot{\epsilon}_{ij(2)}$, вычисляемых согласно (2.24) или (2.26), будет полем совместных скоростей деформации, которому отвечает поле скоростей, равных нулю на S_u . Применяя уравнение виртуальных работ (2.5) к скоростям изменения напряжений $[\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}]$ и к скоростям деформации $[\dot{\epsilon}_{ij(1)} - \dot{\epsilon}_{ij(2)}]$, находим

$$\int [\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}] [\dot{\epsilon}_{ij(1)} - \dot{\epsilon}_{ij(2)}] dv = 0. \quad (3.6)$$

С другой стороны, можно показать, что подинтегральное выражение в (3.6) положительно, если $\dot{\sigma}_{ij(1)} \neq \dot{\sigma}_{ij(2)}$; таким образом, будет установлено наличие противоречия. Рассматривая вначале упругие составляющие скоростей деформации в подинтегральном выражении, находим

$$\begin{aligned} & [\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}] [\dot{\epsilon}'_{ij(1)} - \dot{\epsilon}'_{ij(2)}] = \\ & = A_{ijhk} [\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}] [\dot{\sigma}_{hk(1)} - \dot{\sigma}_{hk(2)}] > 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

если $\dot{\sigma}_{ij(1)} \neq \dot{\sigma}_{ij(2)}$ ¹⁾. Для пластических составляющих скоростей деформации имеет место неравенство

$$[\dot{\sigma}_{ij(1)} - \dot{\sigma}_{ij(2)}] [\dot{\epsilon}''_{ij(1)} - \dot{\epsilon}''_{ij(2)}] \geq 0, \quad (3.8)$$

которое в случае *идеально пластического* материала является прямым следствием (2.14) и (2.16); для *упрочняющегося* материала это неравенство может быть выведено путем преобразования левой части с помощью (2.23) — (2.30).

3.3. Единственность скоростей деформации. На основании доказанного *единственность скоростей деформации для упрочняющегося материала* теперь вытекает непосредственно из соотношений между напряжениями и деформациями (2.26). Аналогичное заключение в случае

¹⁾ См. примечание ²⁾ на стр. 10.

идеально пластического материала не следует, однако, из соотношений (2.24). В действительности, *распределение скоростей деформации в теле из идеально пластического материала не обязательно единственно*. Разность между двумя возможными распределениями скоростей деформации дает, конечно, чисто пластическое распределение скоростей; более того, она должна представлять собой поле совместных скоростей деформации, которому соответствует поле скоростей, равных нулю на S_u . Обозначим через λ_α параметры в соотношениях (2.20), отвечающие одному распределению скоростей деформации; другие решения для скоростей деформации можно получить, если можно найти вариации $\Delta\lambda_\alpha$, являющиеся скалярными функциями положения в той области тела, где $\dot{f}_\alpha = 0$ и $\dot{f}_\alpha = 0$, и если при этом

$$\Delta \varepsilon''_{ij} = \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.9)$$

образуют поле совместных скоростей деформации, которому соответствует поле скоростей, равных нулю на S_u и если, наконец, всюду $\lambda_\alpha + \Delta\lambda_\alpha \geq 0$.

Явление пластического разрушения, характеризующееся возникновением ненулевого поля скоростей деформации при постоянных нагрузках, представляет собой наиболее важный пример неединственности распределения скоростей деформации. Отсутствие единственности скоростей деформации может иметь место также и в случае, когда тело еще не находится в стадии пластического разрушения.

В действительности это отсутствие единственности заложено в самой концепции идеально пластического тела и не должно давать повода для необоснованных сомнений. За исключением случая пластического разрушения, единственность скоростей деформации может быть восстановлена, если рассматривать идеально пластический материал как предельный случай упрочняющегося материала, полагая, что обратные функции упрочнения h_{α}^{-1} [ср. с (2.26)] стремятся к нулю. Такой прием был недавно использован Хиллом для преодоления аналогичного затруднения в теории жестко-пластических тел [38].

3.4. Единственность напряжений. Заметим, что теорема о единственности для краевой задачи, сформулированной

в п. 3.1, относится к *скоростям* изменения напряжений, т. е. к приращениям напряжений, соответствующим заданным приращениям нагрузок или перемещений на поверхности. Отсюда следует, что напряженное состояние тела также единственно, если задана *вся история нагружения* тела, начиная от исходного «естественного» состояния и кончая рассматриваемыми конечными значениями нагрузок и заданных на поверхности перемещений. С другой стороны, распределение напряжений в заключительной стадии нагружения существенно зависит от этой истории нагружения, т. е. от пути, по которому были достигнуты эти конечные значения нагрузок и заданных на поверхности перемещений. Поэтому нельзя ожидать единственности распределения напряжений, если даны только конечные значения нагрузок и перемещений, заданных на поверхности.

Однако единственность распределения напряжений при заданных конечных значениях нагрузок и (или) перемещений на поверхности будет обеспечена, если в добавление к этим конечным значениям нагрузок и перемещений на поверхности будет *задано распределение в теле пластических деформаций* ϵ''_{ij} . Для доказательства этой теоремы покажем, как и ранее, что предположение о существовании двух различных распределений напряжений, $\sigma_{ij(1)}$ и $\sigma_{ij(2)}$, ведет к противоречию. Очевидно, что разность этих двух распределений напряжений самоуравновешена. Упругие деформации $\epsilon'_{ij(1)}$ и $\epsilon'_{ij(2)}$, соответствующие двум распределениям напряжений, не обязательно будут совместны, но поскольку $[\epsilon'_{ij} + \epsilon'_{ij(1)}]$ и $[\epsilon'_{ij} + \epsilon'_{ij(2)}]$ совместны и удовлетворяют краевым условиям для перемещений на S_u , разность $[\epsilon'_{ij(1)} - \epsilon'_{ij(2)}]$ будет совместным распределением деформаций, которому отвечают перемещения, равные нулю на S_u . Применяя уравнение виртуальных работ (2.5) к $[\sigma_{ij(1)} - \sigma_{ij(2)}]$ и $[\epsilon'_{ij(1)} - \epsilon'_{ij(2)}]$, находим

$$\int [\sigma_{ij(1)} - \sigma_{ij(2)}] [\epsilon'_{ij(1)} - \epsilon'_{ij(2)}] dv = 0. \quad (3.10)$$

С другой стороны, из закона Гука (2.7) следует, что подинтегральное выражение в (3.10) положительно, если $\sigma_{ij(1)} \neq \sigma_{ij(2)}$; таким образом, единственность доказана,

Эта теорема о единственности может быть изложена в несколько иной форме, которая часто оказывается более удобной для приложений. Пусть $\sigma_{ij}^{(e)}$ — распределение напряжений в *идеально упругом* материале, соответствующее заданным массовым силам X_i в объеме тела, поверхностным нагрузкам p_i на S_p и перемещениям u_{i0} , заданным на поверхности S_u . Это «упругое» распределение напряжений, очевидно, единственно. Теперь действительные напряжения всегда могут быть представлены в форме

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} + \varrho_{ij}, \quad (3.11)$$

где ϱ_{ij} будем называть *остаточными напряжениями*. Остаточные напряжения возникают вследствие того, что пластические деформации несовместны или отвечающие им перемещения не равны нулю на S_u . Упругие деформации, порождаемые остаточными напряжениями в соответствии с законом Гука, необходимы для того, чтобы результирующие деформации были совместными. Иначе остаточные напряжения могут быть определены как постоянные напряжения, остающиеся в теле после разгрузки, т. е. после снятия внешних нагрузок и возвращения перемещений, заданных на поверхности S_u , к нулевым значениям, *если такая разгрузка происходит без возникновения новых пластических деформаций*. Очевидно, что остаточные напряжения самоуравновешены, т. е. удовлетворяют (2.3) и (2.4) при $X_i = 0$, $p_i = 0$. В этих терминах теорема гласит, что *может существовать не более, чем одно распределение остаточных напряжений ϱ_{ij} , соответствующее заданному распределению пластических деформаций ε_{ij}'' и нулевым перемещениям на S_u* ¹⁾. Аналогично, распределение *скоростей остаточных напряжений $\dot{\varrho}_{ij}$, соответствующее заданному распре-*

¹⁾ Заметим, что обратное утверждение несправедливо. Данное распределение остаточных напряжений может быть вызвано множеством распределений пластических деформаций; добавление любого *совместного* поля пластических деформаций с перемещениями, равными нулю на S_u , не влияет на остаточные напряжения.

лению скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ и скоростям, исчезающим на S_u , также будет единственным¹⁾.

Следует заметить, что данная теорема в некотором смысле является более общей, чем теорема о единственности в краевой задаче для скоростей изменения напряжений (3.1), поскольку здесь не существенно, являются ли заданные пластические деформации ϵ_{ij} действительно пластическими или они имеют иное неупругое происхождение. Поэтому, например, теорема применима также в случае температурных напряжений.

3.5. Исторические замечания. Теорема о единственности решения краевой задачи, сформулированная в п. 3.1, была установлена в 1938 году Меланом в двух важных и в высшей степени оригинальных работах как для упрочняющейся [59], так и для идеально пластической среды [58], причем в обоих случаях для произвольной регулярной поверхности текучести. Теорема единственности в последней работе, по-видимому, осталась не замеченной позднейшими авторами. Она была повторно доказана в 1949 году Гринбергом [23] для идеально пластического материала, подчиняющегося критерию текучести Мизеса [60]; обобщение теоремы на случай произвольной функции текучести Хилл [33] приписывает Ф. Б. Бауэру. Обобщение для сингулярных поверхностей текучести как для упрочняющихся, так и для идеально пластических материалов было получено несколькими годами позже [51].

Все доказательства единственности решения краевой задачи п. 3.1 основаны на достаточном условии (3.8) положительности интеграла (3.6). Возникает естественный вопрос, будет ли это достаточное условие также необходимым; необходимость условия явилась бы дополнительным обоснованием соотношений между напряжениями и деформациями, опирающихся на фундаментальный квазитермодинамический постулат. Доказательства необходимости чрезвычайно трудны, и краткие замечания Мелана по этому поводу [59] едва ли могут быть признаны достаточными. С другой стороны, Друккер показал на простом примере [19].

¹⁾ Теорема единственности для краевой задачи, сформулированной в п. 3.1, также может быть высказана в терминах скоростей изменения остаточных напряжений, однако такая модификация, по-видимому, не имеет каких-либо преимуществ.

что отсутствие единственности для скоростей изменения напряжений может иметь место в случае применения критерия текучести Треска и неассоциированного закона течения Леви — Мизеса. Представляется вероятным, что использование соотношений между напряжениями и деформациями, ассоциированных с условием текучести, действительно необходимо для обеспечения единственности решения краевой задачи.

Теорема о единственности результирующего распределения напряжений при заданном распределении пластических деформаций (п. 3.4) в значительной степени принадлежит Колоннетти [10, 11, 12]. Эта теорема была независимо снова открыта Рейсснером [74] и Меланом [58, 59].

§ 4. Минимальные принципы

4.1. Определения. Чтобы иметь возможность сформулировать минимальные принципы, соответствующие краевой задаче п. 3.1, введем некоторые определения. Распределение скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ в упрочняющемся материале будем называть *статически возможным*, если оно удовлетворяет уравнениям равновесия (3.1) в объеме тела и краевым условиям (3.2) для напряжений на S_p . Статически возможное распределение скоростей изменения напряжений в идеально пластическом теле должно также удовлетворять дополнительному условию (3.5), поскольку материал не может воспринимать напряжения, превосходящие предел текучести. Скорости деформации (2.24) или (2.26), соответствующие статически возможным скоростям изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$, будем обозначать $\dot{\epsilon}_{ij}^*$. Заметим, что для произвольного распределения статически возможных скоростей изменения напряжений скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ несовместны.

Поле скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ будем называть *кинематически возможным*, если оно может быть выведено посредством (3.3) из поля скоростей $\dot{u}_i^0$, удовлетворяющего краевому условию (3.4) на S_u . Скорости изменения напряжений, по (единственному) обращению формул (2.24) или

(2.26), соответствующие кинематически возможному распределению скоростей деформации, будем обозначать $\dot{\sigma}_{ij}^*$. Заметим, что эти скорости изменения напряжений не удовлетворяют уравнениям равновесия (3.1) или краевым условиям (3.2) для напряжений на S_p , если кинематически возможное поле скоростей деформации выбрано произвольно.

4.2. Формулировка принципов для скоростей изменения напряжений и деформации. Минимальный принцип для скоростей изменения напряжений: теперь можно высказать в форме следующего утверждения: абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \dot{u}_{i0} dS; \quad (4.1)$$

определенного для всех статически возможных распределений скоростей изменения напряжений, отвечает действительному распределению скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ (являющемуся решением краевой задачи, сформулированной в п. 3.1).

Аналогично, минимальный принцип для скоростей деформации может быть высказан в форме утверждения: абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 dv - \int_{S_p} \dot{X}_i \dot{u}_i dv - \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS, \quad (4.2)$$

определенного для всех кинематически возможных распределений скоростей деформации, отвечает действительному распределению скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ и соответствующих им скоростей $\dot{u}_i$ (являющемуся решением краевой задачи п. 3.1). В случае идеально пластического тела действительное распределение скоростей деформации не обязательно единственно, и минимум (4.2) достигается при всех распределениях скоростей деформации, являющихся решением краевой задачи.

Посредством равенства

$$\int \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv = \int \dot{X}_i \dot{u}_i dv + \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij} n_j \dot{u}_{i0} dS, \quad (4.3)$$

справедливого для действительных скоростей изменения напряжений, скоростей деформации и поля скоростей, минимальные свойства решения краевой задачи могут быть объединены в следующей цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dv - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \dot{u}_{i0} dS &\geq \frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij} n_j \dot{u}_{i0} dS = \\ &= \frac{1}{2} \int \dot{X}_i \dot{u}_i dv + \frac{1}{2} \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS - \frac{1}{2} \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij} n_j \dot{u}_{i0} dS = \\ &= -\frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv + \int \dot{X}_i \dot{u}_i dv + \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i dS \geq \\ &\geq -\frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 dv + \int \dot{X}_i \dot{u}_i^0 dv + \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i^0 dS. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Первое неравенство переходит в равенство только тогда, когда статически возможное поле скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ совпадает с действительным распределением скоростей изменения напряжений, т. е. с решением краевой задачи; в последнем неравенстве знак равенства имеет место только тогда, когда кинематически возможное поле скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ представляет собой решение краевой задачи.

4.3. Доказательство принципов, сформулированных в п. 4.2. Для доказательства минимального принципа для скоростей изменения напряжений [т. е. для доказательства первого неравенства в (4.4)] заметим, что разность скоростей изменения напряжений $[\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}]$ самоуравновешена и соответствует нулевым нагрузкам на S_p ; действительные скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}$ совместны и соответствуют заданным на S_u скоростям $\dot{u}_{i0}$. Поэтому разность членов, стоящих в левой и правой частях доказываемого неравенства, может быть преобразована с помощью уравнения виртуальных работ к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int [\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}] dv - \int_{S_u} [\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}] n_j \dot{u}_{i0} dS = \\ = \frac{1}{2} \int \{ \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 2 [\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}] \dot{\epsilon}_{ij} \} dv. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь нетрудно показать, что подинтегральное выражение (4.5) всегда положительно (при $\dot{\sigma}_{ij}^* \neq \dot{\sigma}_{ij}$), если учесть, что скорости деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ и $\dot{\epsilon}_{ij}$ связаны со скоростями изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ и $\dot{\sigma}_{ij}$ законами деформирования (2.24) или (2.26). Пользуясь свойствами симметрии коэффициентов упругости (2.8), находим для *упругих* составляющих скоростей деформации в подинтегральном выражении (4.5)

$$A_{ijhk} [\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}] [\dot{\sigma}_{hk}^* - \dot{\sigma}_{hk}] \geq 0. \quad (4.6)$$

Знак равенства здесь имеет место только при $\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij}$. Для идеально пластического материала из (2.14) и (2.16) немедленно следует, что для пластических составляющих скоростей деформации подинтегральное выражение в (4.5) неотрицательно. В случае упрочняющегося материала аналогичный результат можно получить, если подинтегральное выражение (4.5) предварительно преобразовать с помощью (2.23) к виду

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^{*'} + \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' - 2\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}' = \\ & = \sum_a h_a [c_a^* \dot{f}_a^{*2} + c_a \dot{f}_a^2 - 2c_a \dot{f}_a \dot{f}_a^*], \end{aligned} \quad (4.7)$$

где для всех функций текучести, которые *могут* быть активными (т. е. для которых $\dot{f}_a = 0$), следует принимать $c_a^* = 1$ при $\dot{f}_a^* \geq 0$, $c_a^* = 0$ при $\dot{f}_a^* < 0$, $c_a = 1$ при $\dot{f}_a \geq 0$ и $c_a = 0$ при $\dot{f}_a < 0$; при этом (4.7) также неотрицательно.

Аналогично доказывается минимальный принцип для скоростей деформации [т. е. последнее неравенство в (4.4)]. В этом случае используется тот факт, что действительное распределение скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ уравновешено скоростями изменения массовых сил $\dot{X}_i$ в объеме тела и скоростями изменения поверхностных нагрузок $\dot{p}_i$ на S_p , а разность между кинематически возможными и действительными скоростями деформаций $[\dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\epsilon}_{ij}]$ представляет собой поле совместных скоростей деформации, которому отвечают скорости, равные нулю на S_u . При

этом разность между членами, стоящими в левой и правой частях доказываемого неравенства, может быть преобразована посредством уравнения виртуальных работ к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int [\dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}] dv + \int \dot{X}_i (\dot{u}_i - \dot{u}_i^0) dv + \int_{S_p} \dot{p}_i (\dot{u}_i - \dot{u}_i^0) dS = \\ = \frac{1}{2} \int \{ \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - 2 \dot{\sigma}_{ij} [\dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\epsilon}_{ij}] \} dv. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Скорости изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^0$ и $\dot{\sigma}_{ij}$, соответствующие скоростям деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ и $\dot{\epsilon}_{ij}$, определяются (единственным) обращением соотношений между напряжениями и деформациями (2.24) или (2.26). Как и прежде, доказательство завершается установлением положительности подинтегрального выражения (4.8), когда $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ не совпадают с решением $\dot{\epsilon}_{ij}$ краевой задачи. Подробности доказательства вполне аналогичны изложенным выше при доказательстве первого неравенства; проведение полного доказательства мы предоставляем читателю.

4.4. Принципы для напряжений и деформаций. Мгновенное распределение напряжений в упруго-пластической среде зависит от истории нагружения, поэтому не удивительно, что для мгновенных напряжений или полных деформаций не существует общих минимальных принципов. Если, однако, в дополнение к мгновенным значениям массовых сил X_i , поверхностных нагрузок p_i на S_p и перемещений u_{i0} на поверхности S_u , заданы также *пластические деформации*, то результирующее распределение напряжений и деформаций может быть представлено, как решение некоторых вариационных задач. Как и прежде, введем вначале некоторые определения. Распределение напряжений σ_{ij}^* будем называть *статически возможным*, если оно удовлетворяет уравнениям равновесия (2.3) в объеме тела и краевым условиям для напряжений (2.4) на S_p ¹⁾. Распределение деформаций ϵ_{ij}^0 будем называть *кине-*

¹⁾ Следует заметить, что здесь (в отличие от определения статически возможного распределения скоростей изменения напряжений в п. 4.1) для случая идеально пластического тела не вводится

матически возможным, если его можно вывести посредством формул (2.1) из поля перемещений u_i^0 , удовлетворяющего краевому условию $u_i^0 = u_{i0}$ на S_u . Обозначим через σ_{ij}^0 напряжения, соответствующие упругим деформациям $[\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}'']$, т. е.

$$\sigma_{ij}^0 = A_{ijhk}^{-1} [\varepsilon_{hk}^0 - \varepsilon_{hk}''], \quad (4.9)$$

где A_{ijhk}^{-1} — тензор модулей упругости, полученный обращением (2.7).

Теперь минимальный принцип для напряжений может быть высказан в следующей форме: абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2} \int A_{ijhk} \sigma_{ij}^* \sigma_{hk}^* dv + \int \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}'' dv - \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_j u_{i0} dS, \quad (4.10)$$

определенного для заданных пластических деформаций ε_{ij}'' и для всех статически возможных распределений напряжений, отвечает действительному распределению напряжений σ_{ij} . Минимальный принцип для деформаций состоит в следующем: абсолютный минимум выражения

$$\frac{1}{2} \int A_{ijhk}^{-1} [\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}''] [\varepsilon_{hk}^0 - \varepsilon_{hk}''] dv - \int X_i u_i^0 dv - \int_{S_p} p_i u_i^0 dS, \quad (4.11)$$

определенного для заданных пластических деформаций ε_{ij}'' и для всех кинематически возможных распределений деформаций, отвечает действительному распределению деформаций ε_{ij} и соответствующих им перемещений u_i . Отметим, что действительные напряжения и деформации связаны зависимостями

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijhk} \sigma_{hk} + \varepsilon_{ij}'', \quad \sigma_{ij} = A_{ijhk}^{-1} [\varepsilon_{hk} - \varepsilon_{hk}'']. \quad (4.12)$$

никаких дополнительных ограничений относительно недопустимости превышения предела текучести. С другой стороны, задание пластических деформаций в случае идеально пластического тела не может быть вполне произвольным. Эти пластические деформации должны быть такими, чтобы результирующее распределение напряжений (соответствующее мгновенным значениям нагрузок) нигде не превосходило предела текучести.

Используя уравнение виртуальных работ для действительных напряжений, деформаций и перемещений

$$\int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_{S_p} X_i u_i dv + \int_{S_u} p_i u_i dS + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_{i0} dS, \quad (4.13)$$

можно объединить минимальные принципы в цепочке неравенств

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int A_{ijhk} \sigma_{ij}^* \sigma_{hk}^* dv + \int \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}'' dv - \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_j u_{i0} dS \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \int A_{ijhk} \sigma_{ij} \sigma_{hk} dv + \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}'' dv - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_{i0} dS = \\ & = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}'' dv + \frac{1}{2} \int X_i u_i dv + \frac{1}{2} \int_{S_p} p_i u_i dS - \\ & - \frac{1}{2} \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_{i0} dS = -\frac{1}{2} \int \sigma_{ij} [\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}''] dv + \int X_i u_i dv + \\ & + \int_{S_p} p_i u_i dS \geq -\frac{1}{2} \int \sigma_{ij}^0 [\varepsilon_{ij}^0 - \varepsilon_{ij}''] dv + \\ & + \int X_i u_i^0 dv + \int_{S_p} p_i u_i^0 dS. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Для доказательства первого неравенства применим уравнение виртуальных работ к самоуравновешенным напряжениям $[\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}]$ (которым отвечают равные нулю на S_p поверхностные нагрузки) и к действительным деформациям ε_{ij} , заданным соотношениями (4.12). При этом разность членов, стоящих в левой и правой частях неравенства, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int A_{ijhk} [\sigma_{ij}^* \sigma_{hk}^* - \sigma_{ij} \sigma_{hk}] dv + \int [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}] \varepsilon_{ij}'' dv - \\ & - \int_{S_u} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) n_j u_{i0} dS = \\ & = \frac{1}{2} \int A_{ijhk} \{ \sigma_{ij}^* \sigma_{hk}^* - \sigma_{ij} \sigma_{hk} - 2 [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}] \sigma_{hk} \} dv. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Доказательство положительности подинтегрального выражения в (4.15) не вызывает затруднений. Второе неравенство доказывается аналогично, при этом уравнение виртуальных работ применяется к действительным напряжениям и к совместным разностям деформаций $[\epsilon_{ij}^0 - \epsilon_{ij}]$, которым отвечают на S_u перемещения, равные нулю. В результате получим выражение

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \{ \sigma_{ij} [\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}'] - \sigma_{ij}^0 [\epsilon_{ij}^0 - \epsilon_{ij}'] \} dv - \\ & - \int X_i (u_i^0 - u_i) dv - \int_{\bar{S}_p} p_i (u_i^0 - u_i) dS = \\ & = \frac{1}{2} \int A_{ijhk} \{ \sigma_{ij}^0 \sigma_{hk}^0 - \sigma_{ij} \sigma_{hk} - 2 \sigma_{ij} [\sigma_{hk}^0 - \sigma_{hk}] \} dv, \quad (4.16) \end{aligned}$$

где снова подинтегральный член положителен.

Минимальный принцип для напряжений принимает форму, которая оказывается в некоторых случаях более удобной, если принцип сформулировать в терминах остаточных напряжений, определенных соотношениями (3.11)¹.

Любое статически возможное распределение напряжений может быть представлено в виде

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{(e)} + q_{ij}^*, \quad (4.17)$$

где $\sigma_{ij}^{(e)}$ — тензор «упругих» напряжений, т. е. напряжений, которые имели бы место, если бы тело всегда оставалось вполне упругим, q_{ij}^* — тензор остаточных напряжений. Очевидно, что тензор $\sigma_{ij}^{(e)}$ будет одним и тем же для всех статически возможных распределений напряжений. Упругие деформации, отвечающие «упругим» напряжениям

$$\epsilon_{ij}^{(e)} = A_{ijhk} \sigma_{hk}^{(e)}, \quad (4.18)$$

совместны и согласуются с заданными на поверхности S_u перемещениями u_{i0} .

¹ Минимальный принцип для деформаций (и оба минимальных принципа для краевой задачи п. 3.2) можно также преобразовать в принципы, относящиеся к остаточным напряжениям (или к скоростям их изменения), однако такое преобразование, по-видимому, не имеет никаких преимуществ.

Уравнение виртуальных работ для остаточных напряжений q_{ij}^* и поля деформации $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ будет таким:

$$\int A_{ijhk} q_{ij}^* \sigma_{hk}^{(e)} dv = \int_{S_u} q_{ij}^* n_j u_{i0} dS. \quad (4.19)$$

Минимальный принцип для остаточных напряжений теперь формулируется следующим образом: *абсолютный минимум* выражения

$$\frac{1}{2} \int A_{ijhk} q_{ij}^* q_{hk}^* dv + \int q_{ij}^* \varepsilon_{ij}'' dv, \quad (4.20)$$

определенного для заданных пластических деформаций и для всех распределений остаточных напряжений, отвечает действительному распределению остаточных напряжений q_{ij} .

4.5. Исторические замечания. *Минимальный принцип для скоростей изменения напряжений* для упрочняющихся сред с регулярной поверхностью текучести в основном был сформулирован в 1948 году в работе Прагера и Ходжа [42]. Более слабый вариационный принцип, согласно которому действительному распределению скоростей напряжений отвечает относительный минимум (4.1), был ранее получен Прагером [64, 65] для регулярных условий текучести частного вида. В доказательстве Ходжа и Прагера [42] предполагалось, что все конкурирующие статически возможные поля скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ соответствуют разгрузке материала (т. е. $\dot{f}^* \leq 0$), исключая области, в которых действительные скорости изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ приводят к нагружению (т. е. $\dot{f} > 0$); в этих последних областях $\dot{f}^*$ может быть положительно. Это ограничение было снято в 1949 году Гринбергом [23, 24], который, помимо того, установил справедливость принципа минимума для скоростей изменения напряжений в случае идеально, пластических сред с регулярной поверхностью текучести. *Минимальный принцип для скоростей деформации* как для упрочняющихся, так и для идеально пластических сред с регулярной поверхностью текучести установлен Гринбергом в 1949 году [23, 24]. Здесь также принципу абсолютного

минимума предшествовал более слабый вариационный принцип, выведенный Прагером [64, 65]. Обобщение обоих принципов на случай упрочняющихся и идеально пластических материалов с сингулярной поверхностью текучести указано в 1953 году Койтером [51]. Минимальные принципы в теории пластичности в последние годы часто обсуждались с различных точек зрения, в частности в связи с местом, занимаемым ими в более широкой теории неупругих сред (см., например, [36, 20, 22, 45]).

Существенно более старый *минимальный принцип для результирующего поля напряжений при заданных пластических деформациях* был впервые получен Колоннетти в 1918 году [10, 11, 12] и позднее независимо Рейснером [74]. Этот принцип можно рассматривать как обобщение принципа Кастильяно [9] на случай упругой среды с заданными постоянными неупругими деформациями. Дополнительный минимальный принцип для деформаций был получен в 1949 году Гринбергом [23].

4.6. Принцип Хара — Кармана. Некоторые авторы выводили минимальные принципы, основываясь на законах пластичности деформационного типа; в сообщении Гринберга [23] дан обзор таких принципов. Конечно, получаемые при этом теоремы подчинены ограничениям деформационной теории (см. п. 2.6). Более того, минимальные принципы деформационной теории (там, где они применимы) являются, в сущности, хорошо известными принципами теории малых деформаций упругих сред с нелинейным законом деформирования и едва ли могут рассматриваться как минимальные принципы упруго-пластической среды [20, 44]. Поэтому мы считаем возможным опустить обсуждение принципов деформационной теории в данном обзоре общих теорем и ограничимся некоторыми замечаниями относительно принципа Хара — Кармана [26], представляющего значительный исторический интерес.

Принцип Хара — Кармана был сформулирован для идеально пластической среды с условием пластичности Мизеса (2.40). Пусть σ_{ij}^* — любое статически возможное распределение напряжений, не противоречащее условию текучести, т. е. подчиненное дополнительному условию

$$f(\sigma_{ij}^*) = \frac{1}{2} s_{ij}^* s_{ij}^* - k^2 \leq 0, \quad (4.21)$$

где s_{ij}^* — девиатор напряжений, соответствующий σ_{ij}^* ; при этом, согласно принципу Хара — Кармана, действительные напряжения σ_{ij} соответствуют абсолютному минимуму выражения

$$\frac{1}{2} \int A_{ijkl} \sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^* dv - \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_j u_{i0} dS \quad (4.22)$$

по сравнению со значениями этого выражения при всех допустимых напряжениях. Гринберг [23] доказал эту теорему в 1949 году на основе соотношений Генки [27]

$$\varepsilon_{ij}^* = \mu s_{ij} \quad (4.23)$$

(ε_{ij}^* — полная пластическая деформация, μ — неопределенный положительный параметр) с дополнительным предположением, что на всех стадиях действительного процесса деформирования *не происходит разгрузки из состояний, лежащих на поверхности текучести*. Это доказательство, по существу, является обратным по отношению к первоначальному результату Генки. Генки показал, что можно вывести соотношения (4.23), если считать справедливым принцип Хара — Кармана.

Неприемлемость соотношений (4.23) в качестве общего закона пластичности в настоящее время общепризнана. Если эти соотношения заменить *законом течения*, ассоциированным с условием текучести Мизеса

$$\varepsilon_{ij}^* = \lambda s_{ij}, \quad (4.24)$$

то принцип Хара — Кармана будет справедлив при следующем *новом ограничении*: на протяжении всего процесса действительного нагружения напряженное состояние в любой точке, где достигается предел текучести, в последующем должно оставаться *неизменным*. Очевидно, что это дополнительное ограничение включает в себе также и прежнее предположение относительно отсутствия разгрузки.

В 1955 году Прагер [71] указал примеры, в которых принцип Хара — Кармана для материалов с законом течения (4.24) остается справедливым, хотя нарушается условие неизменности напряженного состояния в точках, где в процессе действительного нагружения достигался предел

текучести. Эти примеры дали повод предположить, что область применимости принципа может оказаться более широкой [71]. Здесь поэтому уместно отметить без доказательства, что можно указать противоположные примеры, из которых следует, что принцип может оказаться непригодным, если упомянутое условие (неизменность напряжений после достижения предела текучести) нарушается; такие примеры существуют даже для случая пропорционального увеличения внешних нагрузок.

§ 5. Теоремы о пластическом разрушении и теория предельного равновесия

5.1. Определения. Поскольку внутренние напряжения в *идеально пластической среде* не могут где-либо пре-
 зойти локальный предел текучести, внешние нагрузки на тело из идеально пластического материала не могут увеличиваться беспредельно. При достижении нагрузками некоторых критических значений наступает *пластическое разрушение, т. е. неограниченное возрастание деформаций при постоянных нагрузках*¹⁾, вследствие которого тело оказывается неспособным воспринимать дальнейшее увеличение внешних нагрузок. Такую критическую систему нагрузок называют системой *предельных нагрузок*. Распределение скоростей деформации при разрушении $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ часто называют *механизмом разрушения*.

Для упрощения при выводе основных теорем о пластическом разрушении ограничимся наиболее важным случаем, когда значения перемещений, заданные на части поверхности S_u , равны нулю ($u_{i0} = 0$)²⁾. Как и прежде, начнем

1) Следует помнить, что все деформации предполагаются малыми и соответствующие им изменения в геометрии не учитываются при составлении уравнений равновесия. Поэтому данное определение пластического разрушения и последующие теоремы относятся только к *начальной стадии* разрушения.

2) Читатель может убедиться, что теоремы будут также справедливы, если участки поверхности S_u испытывают жесткие смещения и если на этих участках S_u заданы результирующие внешних нагрузок (результирующие силы и результирующие моменты).

с введения некоторых определений. Распределение напряжений σ_{ij}^* будем называть *статически возможным*, если оно удовлетворяет уравнениям равновесия (2.3) в объеме тела и краевым условиям для напряжений (2.4) на той части поверхности S_p , где заданы поверхностные нагрузки. Такое распределение напряжений $\sigma_{ij}^{*(s)}$ будем называть *безопасным статически возможным*, если всюду напряжения ниже предела текучести, и *статически допустимым* полем $\sigma_{ij}^{*(a)}$, если всюду напряжения ниже предела текучести или равны ему. Распределение скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ будем называть *кинематически возможным*, если оно может быть выведено посредством формул (2.2) из поля равных нулю на S_u скоростей $\dot{u}_i^0$. Такое поле скоростей деформации иногда называют *кинематически возможным механизмом разрушения*. Коэффициентом запаса n , соответствующим заданной системе внешних нагрузок X_i , p_i , будем называть положительный множитель, обладающий тем свойством, что нагрузки nX_i , np_i образуют систему предельных нагрузок.

5.2. Формулировка теорем. *Первая теорема о разрушении* заключается в следующих утверждениях. Тело может выдерживать внешние нагрузки, прилагаемые в любой последовательности, если на каждом этапе программы нагружения можно найти безопасное статически возможное распределение напряжений $\sigma_{ij}^{*(s)}$. С другой стороны, тело не сможет воспринимать систему внешних нагрузок, для которой не существует статически допустимого распределения напряжений $\sigma_{ij}^{*(a)}$. Другими словами, существование статически допустимого распределения напряжений является необходимым условием, а существование безопасного статически возможного распределения напряжений — достаточным условием способности тела выдерживать внешние нагрузки.

Вторая теорема о разрушении заключается в следующих утверждениях. Тело не может воспринимать заданную систему внешних нагрузок, если существует поле кинематически возможных скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$, для которого скорость изменения работы заданных внешних нагрузок превышает скорость пластической диссипации

энергии в теле при скоростях пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}'' = \dot{\epsilon}_{ij}^0$:

$$\int X_i \dot{u}_i dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_i dS > \int F(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dv, \quad (5.1)$$

где $F(\dot{\epsilon}_{ij}'')$ — скорость диссипации энергии в единице объема¹). С другой стороны, тело может выдерживать внешние нагрузки, если для всех кинематически возможных полей скоростей деформации выполняется условие, получаемое из (5.1) путем замены знака неравенства на обратный²). Другими словами, неравенство

$$\int X_i \dot{u}_i dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_i dS \leq \int F(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dv, \quad (5.2)$$

имеющее место для всех кинематически возможных механизмов разрушения, является необходимым условием, а усиленное неравенство (знак равенства отброшен) — достаточным условием способности тела воспринимать внешние нагрузки.

Очевидно, что первую теорему можно использовать для получения *нижней оценки коэффициента запаса*, соответствующего заданной системе нагрузок X_i , p_i , выбирая для этих нагрузок подходящее статически возможное распределение напряжений σ_{ij}^* ; тогда напряжения $n\sigma_{ij}^*$ будут статически возможны для нагрузок nX_i , np_i . Потребовав, чтобы напряжения $n\sigma_{ij}^*$ нигде не превосхо-

¹) Если поле скоростей имеет разрывы на поверхности S_μ внутри тела, то к правой части (5.1) следует добавить пластическую диссипацию энергии на этой поверхности разрыва

$$\int_{S_\mu} \sigma_{ij} n_j \Delta \dot{u}_i^0 dS_\mu,$$

где $\Delta \dot{u}_i^0$ — величина скачка тангенциальной скорости, а σ_{ij} — соответствующее значение предела текучести на поверхности разрыва (см. п. 2.1).

²) Если допускаются жесткие смещения участков S_u , то класс кинематически возможных полей скоростей деформации должен быть соответственно расширен и скорость изменения работы результирующих внешних нагрузок на этих участках S_u должна быть добавлена к левым частям неравенств (5.1) и (5.2).

дили предел текучести, получим нижнюю оценку для n . Напротив, вторая теорема приведет к *верхней оценке коэффициента запаса*, если выбрать подходящий кинематически возможный механизм разрушения $\dot{\epsilon}_{ij}^0$, для которого левая часть (5.2) положительна, и определить коэффициент n из условия

$$n \left\{ \int X_i \dot{u}_i^0 dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_i^0 dS \right\} = \int F(\dot{\epsilon}_{ij}^0) dv. \quad (5.3)$$

5.3. Доказательство теорем. Для доказательства *первой теоремы* заметим, что в состоянии пластического разрушения, когда при *постоянных* нагрузках могут иметь место отличные от нуля скорости деформации, соответствующие скорости изменения напряжений обращаются в нуль в силу теоремы единственности. Поэтому *действительный механизм разрушения* $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ должен быть *чисто пластическим кинематически возможным полем скоростей деформации* $\dot{\epsilon}_{ij}''$. Если при этом, несмотря на предположенное наличие безопасного статически возможного распределения напряжений $\sigma_{ij}^{*(s)}$, на некоторой стадии программы нагружения может произойти разрушение, то действительные напряжения в теле σ_{ij} в момент разрушения должны быть на пределе текучести во всех тех точках, где скорости пластической деформации отличны от нуля, причем скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''$ должны согласовываться с указанным распределением напряжений на пределе текучести. Уравнение виртуальных работ для самоуравновешенной разности напряжений $[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*(s)}]$ и кинематически возможного поля скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''$ при этом дает

$$\int [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*(s)}] \dot{\epsilon}_{ij}'' dv = 0, \quad (5.4)$$

что противоречит основному неравенству (2.10).

Таким образом, предположение о возможности пластического разрушения на некоторой стадии нагружения несовместимо с наличием безопасного статически возможного распределения напряжений на каждой стадии программы нагружения; этим доказывается первое утвержде-

ние первой теоремы. Второе утверждение (тело не может воспринимать систему внешних нагрузок, для которой не существует статически возможного распределения напряжений, не нарушающего условие текучести) является самоочевидным.

Вторая теорема о разрушении также доказывается от противного. Если первое утверждение этой теоремы ошибочно, то, согласно первой теореме, для некоторого кинематически возможного механизма разрушения $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ должно существовать [вопреки неравенству (5.1)] статически допустимое распределение напряжений $\sigma_{ij}^{*(a)}$. Уравнение виртуальных работ для распределения напряжений $\sigma_{ij}^{*(a)}$ и поля скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ со скоростями $\dot{u}_i^0$ дает

$$\int X_i \dot{u}_i^0 dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_i^0 dS = \int \sigma_{ij}^{*(a)} \dot{\epsilon}_{ij}^0 dv. \quad (5.5)$$

Напомним, что по условию теоремы механизмом разрушения $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ в (5.1) является поле скоростей *пластической* деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''$; диссипативная функция в правой части определена соотношением (2.13), где σ_{ij} — напряженное состояние на пределе текучести, соответствующее скоростям пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''$. Комбинируя (5.1) и (5.5) с учетом сказанного, находим

$$\int [\sigma_{ij}^{*(a)} - \sigma_{ij}] \dot{\epsilon}_{ij}'' dv > 0, \quad (5.6)$$

что противоречит основному неравенству (2.11); это противоречие доказывает первую часть второй теоремы. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Действительно, предположим, что тело не может воспринимать заданные нагрузки, несмотря на то, что строгое неравенство (5.2), в котором знак равенства опущен, выполняется для всех кинематически возможных механизмов разрушения. Тогда разрушение произойдет при меньших нагрузках nX_i, np_i ($0 < n \leq 1$), т. е. коэффициент запаса не превосходит единицу. Пусть $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}''$ — механизм разрушения при этих уменьшенных нагрузках, $\dot{u}_i$ — соответствующие

скорости, σ_{ij} — напряжения, достигающие предела текучести в тех точках, где скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''$ отличны от нуля. При этом уравнение виртуальных работ для состояния разрушения дает

$$\int n X_i \dot{u}_i dv + \int_{S_p} n p_i \dot{u}_i dS = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' dv, \quad (5.7)$$

где $0 < n \leq 1$. Противоречие между равенством (5.7) и строгим неравенством (5.2) (где знак равенства опущен), доказывает вторую часть второй теоремы.

5.4. Единственность напряжений в состоянии разрушения. Как было отмечено в п. 3.4, распределение напряжений в упруго-пластическом теле существенно зависит от истории нагружения, начинающейся от «естественного» состояния тела, в котором напряжения и деформации отсутствуют. Поэтому едва ли можно ожидать, что окончательное распределение напряжений при действии системы предельных нагрузок будет единственным, если указаны только конечные, предельные значения нагрузок. С другой стороны, основное свойство системы предельных нагрузок, т. е. возможность пластического разрушения при постоянных нагрузках, очевидно, не зависит от предшествовавшей истории нагружения тела, поскольку для доказательства и формулировки теорем разрушения эта история нагружения несущественна. Поэтому можно предполагать наличие единственности в некотором более ограниченном смысле. Действительно, можно показать, что распределение напряжений при действии предельных нагрузок *существенно единственно в тех областях тела, где отличны от нуля скорости пластической деформации в действительном механизме разрушения*, соответствующем рассматриваемой системе предельных нагрузок.

Пусть σ_{ij} — напряжения при действии предельной нагрузки, достигнутой в некоторой программе нагружения, $\dot{\epsilon}_{ij}''$ — соответствующий механизм разрушения. Обозначим через σ_{ij}^* предположительно существующее, отличное от σ_{ij} распределение напряжений, отвечающее той же предельной нагрузке, но при другой программе нагружения; очевидно, что напряжения σ_{ij}^* всюду являются допустимыми. Из уравнения виртуальных работ для самоуравновешен-

ных разностей напряжений $[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*]$ и кинематически возможного поля скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''$ получаем

$$\int [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*] \dot{\epsilon}_{ij}'' dv = 0. \quad (5.8)$$

Вследствие (2.11) подинтегральное выражение всегда неотрицательно и, следовательно, всюду в теле должно обращаться в нуль. Для напряженных состояний σ_{ij}^* , лежащих внутри поверхности текучести, имеет место соотношение (2.10), поэтому напряжения σ_{ij}^* должны достигать предела текучести в тех областях тела, где $\dot{\epsilon}_{ij}'' \neq 0$. Далее, из (2.10) и (2.11) следует, что в тех областях тела, где $\dot{\epsilon}_{ij}''$ не равны нулю, тензор этих скоростей пластической деформации соответствует как напряжениям σ_{ij} , так и напряжениям σ_{ij}^* , поскольку

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^{(s)}] \dot{\epsilon}_{ij}'' &> 0, \\ [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^{(a)}] \dot{\epsilon}_{ij}'' &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Если поверхность текучести *строго выпукла*, т. е. если эта поверхность не имеет прямолинейных образующих или плоских граней, то направление нормали определяет единственную точку на поверхности и, следовательно, $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$. В этом случае распределение напряжений при действии предельной нагрузки действительно единственно в тех областях тела, где механизму разрушения отвечают ненулевые скорости деформации. Если поверхность текучести содержит прямолинейную образующую или плоскость, проходящую через точку напряжений σ_{ij} , то точки напряжений σ_{ij} и σ_{ij}^* в тех областях тела, где $\dot{\epsilon}_{ij}'' \neq 0$, могут различаться не более, чем на вектор в пространстве напряжений, лежащий на этой образующей или в этой плоскости. Например, в случае условия текучести Мизеса напряжения σ_{ij} и σ_{ij}^* в тех областях тела, где $\dot{\epsilon}_{ij}'' \neq 0$, могут различаться не более, чем на величину гидростатического давления.

Следует заметить, что механизм разрушения, отвечающий заданной системе предельных нагрузок, не является

необходимо единственным (очевидно, что возможность введения постоянного положительного множителя для скоростей пластической деформации, отвечающих механизму разрушения, тривиальна и не нуждается в обсуждении). Пусть λ_α — параметры в законе течения (2.20), отвечающие некоторому механизму разрушения. Дополнительные механизмы разрушения можно получить, если можно найти вариации этих параметров $\Delta\lambda_\alpha$, являющиеся функциями координат в той части тела, где $f_\alpha = 0$, причем поле скоростей деформации

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij}'' = \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.10)$$

совместно и соответствует скоростям, равным нулю на S_u ; кроме того, всюду должно выполняться условие $\lambda_\alpha + \Delta\lambda_\alpha \geq 0$. Это отсутствие единственности можно устранить, если, как и прежде (см. п. 3.3), рассматривать идеально пластическую среду как предельный случай упрочняющейся среды. В результате из множества возможных механизмов разрушения идеально пластической среды будет выбран один определенный механизм разрушения. Такой прием был предложен недавно Хиллом [38] для аналогичной ситуации в теории жестко-пластической среды.

5.5. Пределы общей деформации. Теоремы о пластическом разрушении являются, вероятно, наиболее важными общими теоремами теории пластичности, поскольку на них опирается широко распространенный в настоящее время метод расчета конструкций *по предельному равновесию*. Расчет по предельному равновесию обеспечивает существенно более рациональный подход к выбору коэффициента запаса для конструкций из мягкой стали, чем расчет классическими «упругими» методами. Кроме того, расчет по предельному равновесию обычно значительно проще и может быть также использован для получения более рациональных конструкций, обеспечивающих экономию материала и снижение стоимости. Полный анализ напряжений в упруго-пластической стадии чрезвычайно сложен (он требует интегрирования уравнений для *скоростей* изменения напряжений шаг за шагом, по всей программе нагружения конструкции, что почти всегда оказывается

слишком громоздким для практического осуществления); в то же время коэффициент запаса для заданной совокупности нагрузок не зависит от предшествовавшей истории нагружения и может быть легко вычислен приближенно либо с помощью одной из теорем разрушения, либо с помощью обеих теорем.

Следует, однако, помнить, что теоремы о разрушении не охватывают явления выпучивания и им подобные, которые связаны с влиянием изменений геометрии на условия равновесия; такие явления нуждаются в отдельном рассмотрении. Другое ограничение практических приложений теории предельного равновесия связано с возможностью чрезмерных деформаций конструкции при приближении нагрузки к предельному значению. Для оценки значения последнего ограничения было бы желательно установить пределы величины пластических деформаций. К сожалению, нельзя указать такие пределы для локальных пластических деформаций. С другой стороны, резко локализованные значительные деформации обычно совершенно не влияют на общую деформацию конструкции. Высказывалось мнение, что подходящим критерием для оценки общей пластической деформации может служить затраченная в конструкции пластическая работа. Если принять эту точку зрения, то можно показать, что *в любой программе нагружения, имеющей конечную длительность, общая пластическая деформация ограничена* при условии, что коэффициент запаса для нагрузок на каждой стадии программы нагружения всегда превышает единицу.

Пусть $n > 1$ — наименьший коэффициент запаса во всей программе нагружения. Тогда на каждой стадии программы нагружения можно выбрать статически возможное распределение напряжений σ_{ij}^* так, чтобы $n\sigma_{ij}^*$ всюду было допустимым напряженным состоянием. Пусть σ_{ij} — действительные напряжения и $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}' + \dot{\epsilon}_{ij}''$ — действительные скорости деформаций в рассматриваемой программе нагружения. Уравнение виртуальных работ для этих скоростей деформации и самоуравновешенных разностей напряжений $[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*]$ дает

$$\int [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*] [\dot{\epsilon}_{ij}' + \dot{\epsilon}_{ij}''] dv = 0. \quad (5.11)$$

С другой стороны, согласно (2.11),

$$[\sigma_{ij} - n\sigma_{ij}^*] \dot{\epsilon}_{ij}'' \geq 0. \quad (5.12)$$

Интегрируя (5.12) по всему объему тела, деля на n и вычитая из (5.11), получаем неравенство

$$\frac{n-1}{n} \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' dv \leq \int [\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}] \dot{\epsilon}_{ij}' dv. \quad (5.13)$$

Интеграл в левой части представляет собой скорость изменения пластической работы для тела в целом; интегрируя (5.13) по времени, находим, что величина пластической работы для любой конечной программы нагружения ограничена.

Как следует из (5.13), для того чтобы общая пластическая деформация оставалась в приемлемых пределах, обычно достаточно, чтобы минимальный коэффициент запаса лишь незначительно превосходил единицу, *если программа нагружения достаточно проста*. С другой стороны, если рассматривается *сложная* программа нагружения, например состоящая из многократных повторений простой программы, то соответствующая пластическая работа и общая деформация могут тем не менее оказаться чрезмерными. Одного лишь условия $n > 1$ недостаточно для обеспечения ограниченности общей деформации в сколь угодно сложных программах нагружения. Для обеспечения такой ограниченности при произвольно сложном нагружении необходимы более сильные ограничения, налагаемые на нагрузки; эти ограничения обсуждаются в § 6.

5.6. Исторические замечания. Несущая способность конструкции из пластического материала не будет исчерпана до тех пор, пока возможно существование распределений внутренних напряжений, уравновешенных внешними нагрузками и нигде не превосходящих предел текучести; этот факт, по-видимому, интуитивно угадывался инженерами-строителями. Действительно, лишь немногие сооружения соответствовали бы своему назначению, если бы разрушение происходило немедленно при достижении предела текучести в критической точке! Тем не менее, по-видимому, впервые *первая теорема о разрушении* была отчетливо высказана менее чем 50 лет назад

Казинчи [47] и независимо несколькими годами позже Кистом [48], причем только для частного случая неразрезных балок. Первой книгой, посвященной анализу пластического разрушения и предельному проектированию, по-видимому, была книга Ван Ден Брека «Теория предельного проектирования» [6], вышедшая в 1948 году¹⁾. Значительные успехи в приложении общих принципов к проектированию и расчетам имели место во время последней войны и в предвоенные годы, главным образом в Англии, где экономия строительной стали рассматривалась как важный военный фактор. Эти результаты доступно изложены в недавно вышедшей обстоятельной книге Бэйкера и его сотрудников [1]; меньшие по объему книги Нийла [63] и Прагера [71] могут служить прекрасным введением в теорию и содержат обширную библиографию. Удовлетворительное доказательство первой теоремы, а также отчетливая формулировка и доказательство *второй теоремы о разрушении*, по-видимому, не были известны до опубликования в 1949 году работы Гринберга и Прагера [25] (также посвященной только расчету балок и рам). Оценка величины общей деформации конструкции в состоянии разрушения была получена в 1950 году Саймондсом [79].

Законченная формулировка первой теоремы в ее общей форме принадлежит, по-видимому, Фейнбергу [21]. Удовлетворительное доказательство теоремы для материалов с регулярной поверхностью текучести, а также дополнительная вторая теорема были предложены Друккером, Гринбергом и Прагером сначала (в 1951 году) для плоской деформации [17], а годом позже — для общей трехмерной задачи [18]. В 1952 году Прагер распространил теорию на случай сингулярного условия текучести [68]. Проблема единственности механизма разрушения и распределения напряжений при действии предельных нагрузок обсуждалась в 1952 году Ли [54], который применил результаты, полученные ранее Хиллом [34] для случая жестко-пластической среды. Извилистый путь развития

¹⁾ Обзор работ по теории предельного равновесия, выполненных в СССР, см., напр., в сборнике «Строительная механика в СССР, 1917—1957», М., 1957.—Прим. ред.

математической теории пластичности хорошо иллюстрируется тем фактом, что общая теорема Мелана (относящаяся к упруго-пластическим средам, подвергающимся воздействию нагрузок, которые произвольно изменяются в заданных пределах), заключающая в себе более общий принцип, была получена Меланом уже в 1938 году [58, 59]; при этом до настоящего времени, по-видимому, не было замечено, что теорема Мелана в некотором смысле содержит в себе, как частный случай, первую теорему о разрушении (см. п. 6.6).

Следует отметить, что доказательство теорем о разрушении опирается на положительность объемного интеграла от выражения, стоящего в левой части неравенства (2.10), и на неотрицательность объемного интеграла от выражения, стоящего в левой части неравенства (2.11). Возникал вопрос, будут ли несомненно достаточные для этого условия (2.10) и (2.11) также и необходимыми [52]. Если бы ответ оказался утвердительным, то эвристически приемлемые теоремы о разрушении явились бы дополнительным обоснованием фундаментального постулата Друкера (см. также п. 3.5). Окончательного ответа на этот вопрос, по-видимому, еще нет, но было показано на примере, что теоремы о разрушении несправедливы для среды, подчиняющейся критерию текучести Треска и неассоциированному закону течения Леви — Мизеса [52].

Наконец, следует упомянуть, что обе теоремы о разрушении для упруго-пластической среды тесно связаны с двумя теоремами о пределе текучести жестко-пластических тел [34, 35, 54, 71]. В среде последнего типа всякие деформации отсутствуют, пока нагрузки не достигли значений нагрузок текучести, после чего может возникнуть неограниченное пластическое течение. Эквивалентность критической нагрузки жестко-пластической среды и разрушающей нагрузки упруго-пластической среды едва ли удивительна, поскольку доказательство теорем о разрушении не связано с какими-либо ограничениями величины упругих постоянных (исключая основное подразумеваемое условие о малости предела текучести по сравнению с модулем упругости, которое обеспечивает малость упругих деформаций).

Теория предельного состояния жестко-пластического

тела, выведенная в 1951 году Хиллом [34] из его принципа максимума пластической работы [31] и соответствующей дополнительной теоремы [33, 34] (являющейся обобщением принципа Маркова [56]), развивалась одновременно с теорией пластического разрушения, разработанной Друккером, Гринбергом и Прагером на основе законов деформирования упруго-пластических сред [17, 18]. Пока еще не существует единого мнения относительно преимуществ этих различных подходов к теории предельного равновесия. Иногда предпочтение отдается жестко-пластическому анализу [35, 37], поскольку он исключает возможность появления больших (или даже бесконечных) локальных деформаций, характерных для упруго-пластического анализа разрушения. С другой стороны, с физической точки зрения нет существенной разницы между идеализированными схемами, лежащими в основе обоих подходов [54, 71]. Мы используем здесь упруго-пластическую схему, которая обнаруживает глубокую связь между теорией разрушения при постоянных нагрузках и проблемой приспособляемости при меняющихся нагрузках, рассматриваемой в § 6. Жестко-пластическая теория, очевидно, неприменима для анализа последней задачи, поскольку упругие деформации оказывают существенное влияние на поведение тела под действием меняющихся нагрузок.

§ 6. Теоремы о приспособляемости

6.1. Определения. Конструкция обычно подвергается воздействию нескольких нагрузок, каждая из которых может независимо изменяться в определенных пределах. Для предотвращения пластического разрушения конструкции из идеально пластического материала необходимо, чтобы никакая комбинация нагрузок, лежащих в этих заданных пределах, не являлась системой предельных нагрузок в смысле, указанном в п. 5.1. Однако это необходимое условие отнюдь не является достаточным для предотвращения пластического разрушения. Как было отмечено в п. 5.5, величина пластической работы и общая деформация тела при сложных программах нагружения могут неограниченно возрастать, даже если никакая

отдельная комбинация нагрузок не вызывает пластического разрушения. Основная причина этого заключается в том, что при одном или нескольких определенных циклах изменения нагрузки в теле возникают *циклы скоростей пластической деформации*, которые могут повторяться всякий раз, когда такой критический цикл изменения нагрузки имеет место. Этот второй тип пластического разрушения можно назвать *разрушением вследствие циклических пластических деформаций*. В этом случае конструкция обычно выходит из строя вследствие недопустимого накопления общей деформации, поскольку каждый повторяющийся критический цикл изменения нагрузки влечет за собой увеличение этой деформации. Иногда в некоторой области тела могут чередоваться циклы скоростей пластической деформации противоположных направлений; в этом случае чрезмерная деформация не является неизбежной, но после сравнительно небольшого числа циклов изменения нагрузки может иметь место разрушение вследствие пластической усталости.

Характерная особенность разрушения вследствие циклических пластических деформаций заключается в том, что такое разрушение не будет иметь места тогда и только тогда, когда пластическое течение не возобновляется после начального периода такого течения на ранних стадиях программы нагружения. Таким образом, пластическое деформирование на ранних стадиях программы нагружения должно привести к возникновению остаточных напряжений, сумма которых с напряжениями, соответствующими вполне упругому поведению тела ¹⁾ при последующем воздействии нагрузок (изменяющихся в заданных пределах), ни в одной точке не нарушает условия текучести. Говорят, что при этом тело *приспособилось* к состоянию остаточных деформаций и соответствующих остаточных напряжений.

Для упрощения мы ограничим изложение основных теорем о приспособляемости наиболее важным случаем, когда заданные на поверхности S_u значения перемещений

¹⁾ Следует помнить, что все нагрузки прикладываются медленно; можно поэтому пренебрегать силами инерции и не учитывать динамические эффекты при анализе упругого поведения тела.

равны нулю¹⁾. Введем вначале некоторые определения и обозначения. Обозначим через $\sigma_{ij}(t)$, $\epsilon'_{ij}(t)$ и $\epsilon''_{ij}(t)$ действительные напряжения, упругие и пластические деформации на любой стадии программы нагружения. *Вполне упругое поведение* в той же программе нагружения характеризуется «упругими» напряжениями $\sigma_{ij}^{(e)}(t)$ и соответствующими упругими деформациями $\epsilon_{ij}^{(e)}(t)$. Остаточные напряжения и соответствующие им упругие деформации обозначим через $\varrho_{ij}(t)$ и $\epsilon'_{ijr}(t)$. Все введенные тензоры являются медленно меняющимися функциями времени; они связаны зависимостями

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} + \varrho_{ij}, \quad (6.1)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij} = \epsilon_{ij}^{(e)} + \epsilon'_{ijr} + \epsilon''_{ij}. \quad (6.2)$$

Введем представление о допустимом цикле скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}''_{ij0}(t)$, который характеризуется тем свойством, что приращения пластической деформации в таком цикле за некоторый интервал времени T , равные

$$\Delta \epsilon''_{ij0} = \int_0^T \dot{\epsilon}''_{ij0} dt, \quad (6.3)$$

образуют кинематически возможное распределение деформаций. Следовательно, деформации (6.3) могут быть выведены посредством (2.1) из поля перемещений Δu_{i0} , равных нулю на S_u .

Полю скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}''_{ij0}(t)$ соответствует единственное распределение скоростей остаточных напряжений $\dot{\varrho}_{ij0}(t)$ (см. п. 3.4).

Пусть $\dot{\epsilon}'_{ij0}(t)$ — скорости упругой деформации, соответствующие скоростям остаточных напряжений $\dot{\varrho}_{ij0}(t)$, и пусть $\dot{u}_{i0}(t)$ — поле скоростей, которому по соотношениям

¹⁾ Читатель может убедиться, что теоремы справедливы также в тех случаях, когда участки S_u могут испытывать жесткие смещения и при этом указаны пределы изменения результирующих нагрузок (результирующих сил и результирующих моментов) на участках S_u .

(2.2) отвечает кинематически возможное поле скоростей деформации

$$\dot{\varepsilon}_{ij0} = \dot{\varepsilon}_{ij0}'' + \dot{\varepsilon}_{ij0}'. \quad (6.4)$$

Приращения перемещений в допустимом цикле скоростей пластической деформации будут равны

$$\Delta u_{i0} = \int_0^T \dot{u}_{i0} dt. \quad (6.5)$$

Поскольку приращения пластических деформаций за цикл кинематически возможны, остаточные напряжения в момент времени $t = T$ возвращаются к своим начальным значениям, имевшим место при $t = 0$; вследствие этого

$$\int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij0}' dt = 0. \quad (6.6)$$

Наконец, коэффициентом запаса по приспособляемости m будем называть верхнюю границу положительных чисел k , обладающих следующим свойством: приспособляемость имеет место для всех нагрузок, пределы изменения которых получены путем умножения заданных пределов на k .

6.2. Формулировка теорем. *Первая теорема о приспособляемости, или теорема Мелана*, заключается в следующих утверждениях. Если можно найти такое не зависящее от времени распределение остаточных напряжений $\bar{Q}_{ij}$, что их сумма с «упругими» напряжениями $\sigma_{ij}^{(e)}$ в каждой точке тела образует безопасное напряженное состояние

$$\sigma_{ij}^{(e)} + \bar{Q}_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)}$$

(т. е. напряженное состояние внутри поверхности течения) при всевозможных комбинациях нагрузок, лежащих в заданных пределах, то конструкция приспособится к некоторому не зависящему от времени (но обычно зависящему от действительной программы нагружения) распределению остаточных напряжений, и при последующих изменениях нагрузок в заданных пределах поведение конструкции будет вполне упругим. С другой стороны, приспособляемость невозможна, если не существует ника-

кого не зависящего от времени распределения остаточных напряжений с тем свойством, что при всех возможных комбинациях нагрузок сумма остаточных и «упругих» напряжений является в каждой точке тела допустимым напряженным состоянием.

Вторая теорема о приспособляемости заключается в следующих утверждениях. Приспособляемость невозможна (т. е. тело в конечном счете разрушится вследствие циклических пластических деформаций), если можно найти такие внешние нагрузки $X_i(t)$, $p_i(t)$, величины которых лежат в заданных пределах, и такой допустимый цикл скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij0}''(t)$, что будет справедливо неравенство

$$\int_0^T \left\{ \int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS \right\} dt > \int_0^T dt \int F(\dot{\epsilon}_{ij0}'') dv, \quad (6.7)$$

где $F(\dot{\epsilon}_{ij0}'')$ — диссипативная функция для пластической энергии (2.13) в цикле скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij0}''(t)$ ¹⁾. С другой стороны, конструкция приспособится, если можно найти число $k > 1$, обладающее тем свойством, что для любых внешних нагрузок $X_i(t)$, $p_i(t)$, величины которых лежат в заданных пределах, и для любых допустимых циклов скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij0}''(t)$ будет справедливо неравенство

$$k \int_0^T \left\{ \int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS \right\} dt \leq \int_0^T dt \int F(\dot{\epsilon}_{ij0}'') dv. \quad (6.8)$$

Верхняя граница таких чисел k будет, очевидно, коэффициентом запаса по приспособляемости.

6.3. Доказательство теоремы Мелана. Справедливость второго утверждения *теоремы Мелана* почти очевидна;

¹⁾ Если участки S_u могут испытывать жесткие смещения, то определение допустимого цикла скоростей следует расширить, отметив допустимость на участках S_u скоростей жесткого смещения $\dot{u}_{i0}$; кроме того, в левые части неравенств (6.7) и (6.8) следует также добавить интеграл от скорости изменения работы результирующих внешних нагрузок на S_u .

приспособляемость явно невозможна, если не существует распределения остаточных напряжений, сумма которых с напряжениями, отвечающими упругому поведению тела под нагрузками, не нарушает условия текучести.

Для доказательства первого утверждения *теоремы Мелана* рассмотрим существенно положительную энергию упругой деформации A , соответствующую остаточным напряжениям $q_{ij} - \bar{q}_{ij}$:

$$A = \int \frac{1}{2} A_{ijhk} (q_{ij} - \bar{q}_{ij}) (q_{hk} - \bar{q}_{hk}) dv, \quad (6.9)$$

где q_{ij} — мгновенные значения действительных остаточных напряжений, $\bar{q}_{ij}$ — не зависящие от времени остаточные напряжения, удовлетворяющие условию Мелана.

Производная от A по времени

$$\dot{A} = \int (q_{ij} - \bar{q}_{ij}) \dot{\epsilon}'_{ijr} dv$$

с помощью (6.2) приводится к виду

$$\dot{A} = \int (q_{ij} - \bar{q}_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(e)} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(s)}) dv. \quad (6.10)$$

Распределение остаточных напряжений $q_{ij} - \bar{q}_{ij}$ самоуравновешено, а поле скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(e)}$ кинематически возможно (поскольку оно представляет собой разность двух кинематически возможных полей скоростей деформации). При этом соотношение (6.10) на основании уравнения виртуальных работ принимает вид

$$\dot{A} = - \int (q_{ij} - \bar{q}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^{(s)} dv. \quad (6.11)$$

По определению $q_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}$, где σ_{ij} — действительные напряжения; принимая также во внимание условие Мелана $\bar{q}_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} - \sigma_{ij}^{(e)}$, находим

$$\dot{A} = - \int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^{(s)} dv. \quad (6.12)$$

Теперь из (2.20) следует, что производная $\dot{A}$ будет отрицательной, если в действительной программе нагружения возникают отличные от нуля скорости пластической деформации. Поскольку A не может иметь отрицательных значений, пластическое течение не может продолжаться

беспредельно; таким образом, конструкция должна приспособиться к некоторому распределению остаточных напряжений, после чего поведение конструкции при всех последующих изменениях нагрузок в заданных пределах будет вполне упругим.

Можно было бы возразить, что в этом доказательстве (так же, как в доказательстве первой теоремы о разрушении) ничего не сказано о величинах пластических деформаций, которые могут появиться, прежде чем конструкция достигнет состояния приспособляемости. К сожалению, здесь невозможно дать оценку локальных пластических деформаций. Если, однако, снова принять в качестве критерия общей деформации величину пластической работы, затраченной в программе нагружения, то можно доказать, что при коэффициенте запаса по приспособляемости $m > 1$ общая деформация конструкции остается ограниченной. Действительно, наличие коэффициента запаса $m > 1$ обеспечивает существование распределения остаточных напряжений $\bar{q}_{ij}$, обладающего тем свойством, что

$$m(\bar{q}_{ij} + \sigma_{ij}^{(e)}) = m\sigma_{ij}^{(s)} \quad (6.13)$$

будет допустимым распределением напряжений при всех нагрузках, лежащих в заданных пределах. Следовательно, с помощью (2.11) получим

$$(\sigma_{ij} - m\sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}'' \geq 0. \quad (6.14)$$

При этом подинтегральное выражение в (6.12) удовлетворяет неравенству

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}'' \geq \frac{m-1}{m} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' \quad (6.15)$$

Комбинируя (6.12) и (6.15), мы получаем такое неравенство для скорости изменения пластической работы $\dot{W}_p$, затраченной в программе нагружения:

$$\dot{W}_p = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' dv \leq -\frac{m-1}{m} \dot{A}. \quad (6.16)$$

Интегрируя это неравенство по времени от $t=0$ до $t=T$, находим

$$W_p \leq \frac{m}{m-1} [A(0) - A(T)] \leq \frac{m}{m-1} \int \frac{1}{2} A_{ijhk} \bar{q}_{ij} \bar{q}_{hk} dv. \quad (6.17)$$

Очевидно, что для обеспечения приемлемых пределов общей пластической деформации достаточно, чтобы коэффициент запаса по приспособляемости m лишь незначительно превосходил единицу.

6.4. Доказательство первой части второй теоремы. Первую часть второй теоремы о приспособляемости будем доказывать от противного, т. е. покажем, что предположение об ошибочности этой теоремы ведет к противоречию. Допустим, что приспособляемость имеет место, хотя существуют некоторые нагрузки $X_i(t)$, $p_i(t)$ (величины которых лежат в заданных пределах) и некоторый допустимый цикл скоростей пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij0}''(t)$, удовлетворяющие неравенству (6.7). Тогда, согласно теореме Мелана, должно существовать не зависящее от времени распределение остаточных напряжений $\bar{q}_{ij}$, сумма которых с «упругими» напряжениями $\sigma_{ij}^{(e)}(t)$, отвечающими мгновенным значениям нагрузок $X_i(t)$, $p_i(t)$, образует допустимые напряжения $\sigma_{ij}^{(a)}(t)$:

$$\sigma_{ij}^{(e)} + \bar{q}_{ij} = \sigma_{ij}^{(a)}. \quad (6.18)$$

Поскольку скорости деформации (6.4) кинематически возможны и соответствуют скоростям $\dot{u}_{i0}(t)$, уравнение виртуальных работ дает

$$\int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS = \int \sigma_{ij}^{(a)} \dot{\epsilon}_{ij0} dv. \quad (6.19)$$

Член в правой части может быть преобразован к виду

$$\int \sigma_{ij}^{(a)} \dot{\epsilon}_{ij0} dv = \int \sigma_{ij}^{(a)} \dot{\epsilon}_{ij0}'' dv + \int \sigma_{ij}^{(e)} \dot{\epsilon}_{ij0}' dv + \int \bar{q}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij0}' dv. \quad (6.20)$$

Напомним, что $\dot{\epsilon}_{ij0}'(t)$ являются скоростями упругих деформаций, соответствующими скоростям остаточных напряжений $\bar{q}_{ij0}(t)$ в цикле пластических скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij0}''(t)$; при этом теорема взаимности Бетти и уравнение виртуальных работ для скоростей изменения остаточных напряжений $\bar{q}_{ij0}(t)$ и кинематически возможных дефор-

маций $\epsilon_{ij}^{(e)}(t)$ дают

$$\int \sigma_{ij}^{(e)} \dot{\epsilon}_{ij0} dv = \int \dot{Q}_{ij0} \epsilon_{ij}^{(e)} dv = 0. \quad (6.21)$$

Интегрируя последний член в (6.20) по времени от $t=0$ до $t=T$, находим [см. (6.6)]

$$\int_0^T dt \int \bar{Q}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij0} dv = \int \bar{Q}_{ij} dv \int_0^T \dot{\epsilon}_{ij0} dt = 0. \quad (6.22)$$

Интегрирование соотношений (6.19) и (6.20) по времени от $t=0$ до $t=T$ дает

$$\int_0^T \left\{ \int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS \right\} dt = \int_0^T dt \int \sigma_{ij}^{(a)} \dot{\epsilon}_{ij0} dv. \quad (6.23)$$

Принимая во внимание основное неравенство (2.11), обнаруживаем противоречие между (6.7) и (6.23), наличие которого доказывает первую часть второй теоремы о приспособляемости.

6.5. Доказательство второй части второй теоремы. Для доказательства *второй части второй теоремы* покажем, что полная величина пластической работы при любой программе нагружения (величины нагрузок лежат в заданных пределах) будет ограниченной, если для всех допустимых циклов скоростей пластической деформации выполняется условие (6.8). Рассмотрим программу нагружения $X_i(t)$, $p_i(t)$ произвольной сложности (но согласующуюся с заданными пределами) в интервале времени $0 < t < t_1$, где $t=0$ соответствует *естественному* исходному состоянию (остаточные напряжения отсутствуют). Действительные скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''(t)$ при произвольной программе нагружения $X_i(t)$, $p_i(t)$ сами по себе не обязательно образуют допустимый цикл в интервале времени $0 < t < t_1$, т. е. распределение деформаций

$$\Delta_1 \epsilon_{ij}'' = \int_0^{t_1} \dot{\epsilon}_{ij}'' dt \quad (6.24)$$

не обязательно будет кинематически возможным. С другой стороны, скорости пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij}''(t)$ в интер-

вале времени $0 < t < t_1$ можно рассматривать как первую часть допустимого цикла, если закончить этот цикл в интервале времени $t_1 < t < T$ подходящими скоростями пластической деформации $\dot{\epsilon}_{ij0}''(t)$ так, чтобы

$$\Delta \epsilon_{ij0}'' = \Delta_1 \epsilon_{ij}'' + \int_{t_1}^T \dot{\epsilon}_{ij0}'' dt \quad (6.25)$$

было кинематически возможным распределением деформаций.

Такое построение цикла скоростей пластической деформации легко осуществляется, если условие текучести допускает всевозможные типы скоростей пластической деформации, т. е. если для всех видов напряженных состояний предел текучести конечен. Обозначим через $\Delta_1 \epsilon_{ij}$ и $\Delta_1 \epsilon_{ijr}$ приращения остаточных напряжений и соответствующие им приращения упругих деформаций в первой части цикла, т. е. в интервале времени $0 < t < t_1$ при фактической программе нагружения. Тогда подходящим окончанием цикла будут скорости пластической деформации

$$\dot{\epsilon}_{ij0}''(t) = \frac{\Delta_1 \epsilon_{ijr}'}{T - t_1} \quad \text{при } t_1 < t < T. \quad (6.26)$$

Действительно, скорости пластической деформации (6.26) удовлетворяют условию (6.25), поскольку $\Delta_1 \epsilon_{ij}'' + \Delta_1 \epsilon_{ijr}'$ является кинематически возможным полем деформаций. Более того, скорости изменения остаточных напряжений $\dot{\epsilon}_{ij0}''(t)$, соответствующие (не зависящим от времени) скоростям пластической деформации (6.26), отвечают линейному убыванию с течением времени остаточных напряжений от их значений $\Delta_1 \epsilon_{ij}$ в момент $t = t_1$ до нуля в момент $t = T$. Поэтому

$$\dot{\epsilon}_{ij0}''(t) = -\frac{\Delta_1 \epsilon_{ijr}'}{T - t_1} \quad \text{при } t_1 < t < T \quad (6.27)$$

и скорости $\dot{\epsilon}_{i0}(t)$ в интервале $t_1 < t < T$ равны нулю. Таким образом, полный цикл скоростей пластической деформации характеризуется следующими значениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij0}''(t) &= \dot{\epsilon}_{ij}''(t), \quad \dot{\epsilon}_{ij0}''(t) = \dot{\epsilon}_{ijr}'(t) \quad \text{при } 0 < t < t_1, \\ \dot{\epsilon}_{ij0}''(t) &= \frac{\Delta_1 \epsilon_{ijr}'}{T - t_1}, \quad \dot{\epsilon}_{ij0}''(t) = -\frac{\Delta_1 \epsilon_{ijr}'}{T - t_1} \quad \text{при } t_1 < t < T. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Уравнение виртуальных работ для интервала $0 < t < t_1$ при фактической программе нагружения

$$\int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij0} dv \quad (6.29)$$

преобразуется с помощью соотношений (6.1), (6.2) и (6.21) к следующему виду:

$$\int X_i \dot{u}_{i0} dv + \int_{S_p} p_i \dot{u}_{i0} dS = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' dv + \int \varrho_{ij} \dot{\epsilon}_{ijr}' dv. \quad (6.30)$$

Первый член правой части есть скорость изменения пластической работы в программе нагружения

$$\int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' dv = \int F(\dot{\epsilon}_{ij}'') dv = \dot{W}_p; \quad (6.31)$$

второй член представляет собой скорость увеличения упругой энергии остаточных деформаций

$$A^* = \frac{1}{2} \int \varrho_{ij} \dot{\epsilon}_{ijr}' dv. \quad (6.32)$$

Правая и левая части уравнения виртуальных работ тождественно равны нулю во второй части цикла $t_1 < t < T$. Интегрируя (6.30) по времени от $t = 0$ до $t = t_1$ и учитывая неравенство (6.8), находим

$$k \int_0^{t_1} dt \left\{ \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}'' dv + \int \varrho_{ij} \dot{\epsilon}_{ijr}' dv \right\} \leq \int_0^{t_1} dt \int F(\dot{\epsilon}_{ij}'') dv + \\ + \int_{t_1}^T dt \int F\left(\frac{\Delta_1 \dot{\epsilon}_{ijr}'}{T - t_1}\right) dv. \quad (6.33)$$

Обозначив через W_p полную величину пластической работы, произведенной при осуществлении программы нагружения, и через $\Delta_1 A^*$ — увеличение энергии остаточных деформаций (6.32) при этой программе, получим окончательно

$$(k - 1) W_p \leq \int F(\Delta_1 \dot{\epsilon}_{ijr}') dv - k \Delta_1 A^*. \quad (6.34)$$

Заметим теперь, что при пропорциональном возрастании остаточных напряжений $\Delta_1 \varrho_{ij}$ (обусловленном программой нагружения) функция $F(\Delta_1 \dot{\epsilon}_{ijr}')$ также возрастает пропор-

ционально. Учитывая, кроме того, что интеграл $\Delta_1 A^*$, квадратично зависящий от остаточных напряжений, существенно положителен, заключаем, что правая часть (6.34) имеет верхнюю границу. Поскольку $k > 1$, то полная величина пластической работы W_p в программе нагружения также ограничена.

Приведенное доказательство основано на предположении, что для всех видов напряженных состояний предел текучести конечен. Хотя для многих случаев такое доказательство достаточно, поскольку существование бесконечно большого предела текучести для отдельных видов напряженных состояний более или менее гипотетично, однако широкое распространение критериев текучести Мизеса и Треска, в которых предел текучести бесконечен для случая гидростатического напряжения, делает желательным более общее доказательство. Для этого следует сконструировать такое поле перемещений v_i , равных нулю на S_u , чтобы

$$\frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) + \Delta_1 \epsilon'_{ijr} \quad (6.35)$$

являлось распределением деформаций, которое может быть получено путем пластического деформирования при *конечных* напряжениях. Для выполнения этого требования в частном случае критерия текучести Мизеса или Треска необходимо, чтобы расширение, соответствующее (6.35), всюду обращалось в нуль.

Заметим, что при таком выборе поля перемещений пропорциональное увеличение v_i должно согласовываться с условием пропорционального увеличения $\Delta_1 \epsilon_{ij}$.

Вторую часть цикла скоростей пластической деформации теперь следует взять в виде

$$\dot{\epsilon}''_{ij0}(t) = \frac{1}{T-t_1} \left[\frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) + \Delta_1 \epsilon'_{ijr} \right] \text{ при } t_1 < t < T. \quad (6.36)$$

При этом скорости изменения остаточных напряжений, соответствующие (6.36), опять будут давать линейное убывание с течением времени остаточных напряжений от значений $\Delta_1 \epsilon_{ij}$ в момент $t = t_1$ до нуля в момент $t = T$.

Поэтому $\dot{\epsilon}''_{ij0}(t)$ в интервале $t_1 < t < T$ снова выражается

формулой (6.27), а скорости будут иметь значения

$$\dot{u}_{i0}(t) = \frac{v_i}{T-t_1} \quad \text{при } t_1 < t < T. \quad (6.37)$$

Выбирая в заданных пределах любые не зависящие от времени нагрузки $\bar{X}_i$, $\bar{p}_i$ в качестве нагрузок второй части цикла ($t_1 < t < T$), можно, аналогично предыдущему, продолжить это доказательство, которое приведет в результате к неравенству

$$(k-1)W_p \leq \int F\left(\frac{1}{2}v_{i,j} + \frac{1}{2}v_{j,i} + \Delta_1 \varepsilon'_{ijr}\right) dv - \\ - k \int \bar{X}_i v_i dv - k \int_{S_p} \bar{p}_i v_i dS - k \Delta_1 A^*. \quad (6.38)$$

Ограниченность правой части следует из того, что пропорциональное возрастание v_i соответствует пропорциональному возрастанию $\Delta_1 \varepsilon'_{ij}$.

6.6. Исторические замечания. Исследования упруго-пластических конструкций, подвергающихся воздействию переменных нагрузок, по-видимому, были начаты в 1932 году работой Блейха [5], рассматривавшего конструкции с одной лишней неизвестной. Более общая теорема для ферм с произвольным числом лишних неизвестных была указана в 1936 году Меланом [57]. В 1938 году Мелан доказал общую теорему для трехмерного континуума, которая носит его имя [58, 59]. Существенные упрощения весьма сложного доказательства Мелана были предложены в 1951 году Саймондсом [81] и несколько позже Койтером [49, 53]; обобщение на случай среды, подвергнутой также воздействию температурных циклов, дано в 1957 году Прагером [72]. Упрощенная форма теоремы применительно к балкам и рамам была выведена на базе специальных предположений Нийлом [62] в 1950 году; вскоре эта специализированная теорема была включена в общую теорию, причем были обнаружены некоторые недостатки доказательства Нийла [49]. Вторая теорема о приспособляемости была установлена в 1956 году Койтером [53]. Несколько ранее, в 1951 году, Саймондс и Нийл развили изящный метод приложения теоремы Нийла к сложным конструкциям [80], который внешне напоминает вторую теорему о приспособ-

собляемости; однако фактически этот метод основан на остроумном использовании первой теоремы.

Внимательное сопоставление показывает, что теоремы о пластическом разрушении являются предельным случаем теорем о приспособляемости, соответствующим совпадению верхнего и нижнего пределов для всех нагрузок. Тем не менее теоремы о разрушении стоит рассматривать отдельно не только потому, что они имеют громадное практическое значение, но также потому, что они более наглядны. С другой стороны, весьма удивительно, что связь между теоремами о разрушении и теоремами о приспособляемости до настоящего времени, по-видимому, оставалась незамеченной и что теория пластического разрушения развивалась совершенно независимо. Частично это объясняется тем, что в высшей степени оригинальные работы Мелана весьма трудны для понимания.

Наконец, следует отметить, что исследование переменных нагрузок не освобождает от необходимости упругого анализа. Напротив, анализ приспособляемости на базе совместного использования двух теорем требует весьма детальных вычислений упругого распределения напряжений. С практической точки зрения это обстоятельство является весьма серьезным недостатком анализа приспособляемости по сравнению с анализом пластического разрушения и может привести к ограничению числа приложений теории приспособляемости к расчету и проектированию упруго-пластических конструкций. Вначале казалось, что вторая теорема облегчит анализ приспособляемости, однако это предположение пока еще практически не подтвердилось.

§ 7. Существование решений

7.1. Принцип Дирихле. Строгие математические доказательства существования решений краевых задач исключительно трудны. В настоящее время удовлетворительные доказательства известны в классической линейной теории упругости, однако едва ли можно удивляться тому, что такие доказательства пока еще не получены в существенно более сложной теории малых деформаций упруго-пластической среды.

Многие трудности устраняются, если вместо строгого математического доказательства применить в известной степени эвристический или интуитивный подход, опирающийся на принцип Дирихле. Этот принцип состоит в предположении, что наличие нижней границы функционала эквивалентно существованию минимума. Несмотря на отсутствие доказательства этого утверждения, принцип Дирихле является чрезвычайно полезным средством при рассмотрении вопроса о существовании решений. На базе этого принципа ниже будет показано, что краевая задача, сформулированная в п. 3.1, действительно имеет решение, если сделать дополнительное предположение о том, что класс статически возможных распределений скоростей напряжений, определенный в п. 4.1, не является пустым; значение этого предположения рассматривается в п. 7.4. Нам кажется, что эвристическое доказательство существования решения можно превратить в строгое доказательство путем применения современных прямых методов вариационного исчисления; развитых Курантом и его школой [13], однако дальнейшее обсуждение этого чисто математического аспекта проблемы выходит за рамки настоящей статьи.

7.2. Основное неравенство. Цепочка неравенств (4.4), относящихся к любому статически возможному распределению скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ с соответствующими им по закону текучести скоростями деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ и к любому кинематически возможному распределению скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ с соответствующими им по обращению закона текучести скоростями изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^0$, была выведена в предположении, что решение краевой задачи, сформулированной в п. 3.1, существует. Однако неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv - \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \dot{u}_{i0} dS \geq \\ & \geq -\frac{1}{2} \int \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 dv + \int \dot{X}_i \dot{u}_i^0 dv + \int_{S_p} \dot{p}_i \dot{u}_i^0 dS \end{aligned} \quad (7.1)$$

можно доказать без использования предположения о существовании решения краевой задачи. Применяя принцип виртуальных работ к статически возможному распределению скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ и к кинематически возможному полю скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$, мы можем привести (7.1) к следующему виду:

$$\int \left(\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* + \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^0 \right) dv \geq 0. \quad (7.2)$$

Теперь нетрудно показать, пользуясь законом течения, что подинтегральное выражение (7.2) действительно всегда положительно, если только $\dot{\sigma}_{ij}^* \neq \dot{\sigma}_{ij}^0$; в этом последнем случае подинтегральное выражение обращается в нуль. Мы не приводим здесь доказательства, так как оно вполне аналогично изложенному в п. 4.3.

7.3. Доказательство существования. Рассмотрим проблему минимизации функционала

$$\int \left(\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* + \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^0 \right) dv = \min, \quad (7.3)$$

который теперь будем рассматривать в классе кинематически возможных скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ при фиксированном статически возможном распределении скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$. Пусть $\dot{\epsilon}_{ij}^{00}$ — распределение скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$, которому отвечает минимум (7.3), и пусть $\dot{\sigma}_{ij}^{00}$ — соответствующие скорости изменения напряжений, вычисляемые в соответствии с законом течения. Из принципа Дирихле следует, что решение проблемы минимизации (7.3) существует.

Закон течения *упрочняющейся* среды задан соотношениями (2.26) и (2.27). Для любого кинематически возможного поля скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ и для решения минимальной проблемы $\dot{\epsilon}_{ij}^{00}$ эти соотношения принимают вид

$$\dot{\epsilon}_{ij}^0 = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk}^0 + \sum_{\alpha} c_{\alpha}^0 h_{\alpha} \dot{f}_{\alpha}^0 \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7.4)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{00} = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk}^{00} + \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{00} h_{\alpha} \dot{f}_{\alpha}^{00} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7.5)$$

где c_α^0 или c_α^{00} отличны от нуля (и, следовательно, равны единице) только тогда, когда $f_\alpha = 0$ и выполняется одно из неравенств

$$\dot{f}_\alpha^0 = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^0 > 0 \quad \text{или} \quad \dot{f}_\alpha^{00} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^{00} > 0. \quad (7.6)$$

Положим

$$\dot{\epsilon}_{ij}^0 = \dot{\epsilon}_{ij}^{00} + \dot{\eta}_{ij}, \quad (7.7)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 = \dot{\sigma}_{ij}^{00} + \Delta \dot{\sigma}_{ij}, \quad (7.8)$$

где $\dot{\eta}_{ij}$ — совместное поле скоростей деформации, которому отвечают скорости, равные нулю на S_u ; знаки $\dot{f}_\alpha^0$ и $\dot{f}_\alpha^{00}$ будут совпадать, если выбрать $\dot{\eta}_{ij}$ всюду достаточно малыми. При этом $c_\alpha^0 = c_\alpha^{00}$ и

$$\dot{\eta}_{ij} = A_{ijhk} \Delta \dot{\sigma}_{hk} + \sum_\alpha c_\alpha^{00} h_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{hk}} \Delta \dot{\sigma}_{hk} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.9)$$

С другой стороны, из соотношения

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 = \frac{1}{2} A_{ijhk} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\sigma}_{hk}^0 + \frac{1}{2} \sum_\alpha c_\alpha^0 h_\alpha \dot{f}_\alpha^{02} \quad (7.10)$$

следует, поскольку $c_\alpha^0 = c_\alpha^{00}$, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^{00} \dot{\epsilon}_{ij}^{00} = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{ij}^{00} \Delta \dot{\sigma}_{hk} + \\ & + \sum_\alpha c_\alpha^{00} h_\alpha \dot{f}_\alpha^{00} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{hk}} \Delta \dot{\sigma}_{hk} + \frac{1}{2} A_{ijhk} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{hk} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_\alpha c_\alpha^{00} h_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{hk}} \Delta \dot{\sigma}_{hk} \right)^2 = \dot{\sigma}_{ij}^{00} \dot{\eta}_{ij} + R_2(\Delta \dot{\sigma}_{hk}), \end{aligned} \quad (7.11)$$

где $R_2(\Delta \dot{\sigma}_{hk})$ — неотрицательная квадратичная функция своих аргументов. Минимальное свойство (7.3) теперь может быть выражено неравенством

$$\int [(\dot{\sigma}_{ij}^{00} - \dot{\sigma}_{ij}^*) \dot{\eta}_{ij} + R_2(\Delta \dot{\sigma}_{hk})] dv \geq 0. \quad (7.12)$$

Путем соответствующего выбора $\dot{\eta}_{ij}$ второй (квадратичный) член в подинтегральном выражении можно сделать сколь угодно малым по сравнению с первым. При этом

$$\int (\dot{\sigma}_{ij}^{00} - \dot{\sigma}_{ij}^*) \dot{\eta}_{ij} dv = 0 \quad (7.13)$$

для всех достаточно малых совместных скоростей деформации $\dot{\eta}_{ij}$, которым отвечают скорости, равные нулю на S_u . В соответствии с принципом виртуальных работ $\dot{\sigma}_{ij}^{00} - \dot{\sigma}_{ij}^*$ представляет собой распределение скоростей изменения остаточных напряжений, которому отвечают равные нулю на S_p скорости изменения поверхностных нагрузок.

Следовательно, $\dot{\sigma}_{ij}^{00}$ является статически возможным распределением скоростей изменения напряжений; поскольку это распределение скоростей изменения напряжений удовлетворяет всем условиям (3.1) — (3.4), оно является (единственным) решением $\dot{\sigma}_{ij}$ краевой задачи.

В случае идеально пластической среды соотношения между напряжениями и деформациями для произвольного кинематически возможного поля скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ и для решения $\dot{\epsilon}_{ij}^{00}$ проблемы минимизации (7.3) будут такими:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^0 = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk}^0 + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^0 \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7.14)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{00} = A_{ijhk} \dot{\sigma}_{hk}^{00} + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{00} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7.15)$$

где λ_{α}^0 или λ_{α}^{00} отличны от нуля (и, следовательно, положительны) только тогда, когда $f_{\alpha} = 0$ и выполняется одно из условий

$$\dot{f}_{\alpha}^0 = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^0 = 0 \quad \text{или} \quad \dot{f}_{\alpha}^{00} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}^{00} = 0. \quad (7.16)$$

Вводя, как и прежде, $\dot{\eta}_{ij}$ и $\Delta \dot{\sigma}_{ij}$, определенные соотношениями (7.7) и (7.8), находим

$$\dot{\eta}_{ij} = A_{ijhk} \Delta \dot{\sigma}_{hk} + \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha}^0 - \lambda_{\alpha}^{00}) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.17)$$

С другой стороны, из

$$\frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 = \frac{1}{2} A_{ijhk} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\sigma}_{hk}^0 \quad (7.18)$$

теперь следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij}^{00} \dot{\epsilon}_{ij}^{00} &= A_{ijhk} \dot{\sigma}_{ij}^{00} \Delta \dot{\sigma}_{hk} + \frac{1}{2} A_{ijhk} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{hk} = \\ &= \dot{\sigma}_{ij}^{00} \dot{\eta}_{ij} + \frac{1}{2} A_{ijhk} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{hk} - \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha}^0 - \lambda_{\alpha}^{00}) \dot{f}_{\alpha}^{00}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Последний член в (7.19) только тогда отличен от нуля и притом положителен, когда $\dot{f}_{\alpha}^{00} < 0$ и $\dot{f}_{\alpha}^0 = 0$; при этом его можно также представить в форме

$$- \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha}^0 - \lambda_{\alpha}^{00}) (\dot{f}_{\alpha}^{00} - \dot{f}_{\alpha}^{01}), \quad (7.20)$$

из которой следует, что этот член является малой величиной второго порядка, если $\dot{\eta}_{ij}$ стремятся к нулю. Таким образом, для всех достаточно малых совместных скоростей деформации $\dot{\eta}_{ij}$, которым отвечают скорости, равные нулю на S_u , снова будет иметь место (7.13); дальнейшее доказательство аналогично изложенному выше для случая упрочняющейся среды.

7.4. Заключительные замечания. Возникает мысль, что можно также получить доказательство существования решения краевой задачи, поменяв ролями $\dot{\sigma}_{ij}^*$ и $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ в проблеме минимизации (7.3), т. е. рассматривая минимум (7.3) в классе статически возможных скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^*$ при фиксированном кинематически возможном поле скоростей деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^0$. Заметим здесь без доказательства, что такой подход действительно приводит к эквивалентным результатам. Более того, легко заметить, что функционал (7.3), рассматриваемый как функционал одновременно от $\dot{\sigma}_{ji}^*$ и $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ при действительном распределении скоростей изменения напряжений и деформаций имеет абсолютный минимум, равный нулю.

Наконец, остановимся на значении предположения о том, что класс статически возможных распределений

скоростей изменения напряжений не является пустым. Оставляя без рассмотрения определенные подразумеваемые ограничения относительно непрерывности скоростей изменения внешних нагрузок $\dot{X}_i$, $\dot{p}_i$, заметим, что это предположение будет нетривиальным только в случае идеально пластического тела, имеющего равный единице коэффициент запаса n по отношению к пластическому разрушению при мгновенных значениях нагрузок. Поскольку при этом тело неспособно воспринимать *увеличение* нагрузок, то статически возможное распределение скоростей изменения напряжений будет существовать, если скорость изменения коэффициента запаса $\dot{n}$ не будет отрицательной. Другими словами, класс статически возможных скоростей изменения напряжений никогда не будет пустым, если коэффициент запаса не убывает до значений, меньших единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baker J. F., Horne M. R., Heyman J., The steel skeleton, vol. II, Plastic behaviour and design, Cambridge, 1956.
2. Batdorf S. B., Budiansky B., A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, NACA TN 1871, 1949.
3. Besseling J. F., A theory of plastic flow for anisotropic hardening in plastic deformation for an initially isotropic material, Report S410, Nat. Lucht. Lab., Amsterdam, 1953. [Русский перевод помещен в сб. *Механика*, № 2 (66), 1961.]
4. Bishop J. F. W., Hill R., A theory of plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses, *Phil. Mag.*, 42, № 7, 414 (1951).
5. Bleich H., Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes, *Bauingenieur*, 19/20, 261 (1932).
6. van den Broek J. A., Theory of limit design, New York, 1948.
7. Budiansky B., Fundamental theorems and consequences of the slip theory of plasticity, Диссертация, Brown University, 1950.
8. Budiansky B., A reassessment of deformation theories of plasticity, Techn. Rep. № 2, Division of engineering and applied physics, Harvard University, March, 1958. [Русский перевод: Будянский Б., Переоценка деформационных теорий пластичности, сб. *Механика*, № 2 (60), 71—84 (1960).]
9. Castiglione A., Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques, Turin, 1879.
10. Colonnetti G., Sul problema delle coazioni elastiche, *Rend. Accad. Lincei*, 27, ser. 5a, 2. sem. (1918).
11. Colonnetti G., Elastic equilibrium in the presence of a permanent set, *Quart. Appl. Math.*, 7, 353 (1950).
12. Colonnetti G., L'équilibre des corps déformables, Paris, 1955.
13. Courant R., Hilbert D., Methoden der mathematischen Physik, Bd. 2, Kap. VII, Berlin, 1937. [Русский перевод: Курант Р., Гильберт А., Методы математической физики, М., 1951.]
14. Drucker D. C., Some implications of work-hardening and ideal plasticity, *Quart. Appl. Math.*, 7, 411 (1950).
15. Drucker D. C., Stress-strain relations in the plastic range, a survey of theory and experiment, Report A11—S1, Grad. Div. Appl. Math., Brown University, 1950.
16. Drucker D. C., A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. Ist U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 487, 1951.
17. Drucker D. C., Greenberg H. J., Prager W., The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain, *J. Appl. Mech.*, 18, 371 (1951).

18. Drucker D. C., Prager W., Greenberg H. J., Extended limit design theorems for continuous media, *Quart. Appl. Math.*, 9, 381 (1951). [Русский перевод: Друкер Д., Прагер В., Гринберг Х., Расширенные теоремы о предельном состоянии для непрерывной среды, сб. *Механика*, № 1 (17), 98—107 (1953).]
19. Drucker D. C., On uniqueness in the theory of plasticity, *Quart. Appl. Math.*, 14, 35 (1956). [Русский перевод: Друкер Д., Об единственности решений в теории пластичности, сб. *Механика*, № 4 (44), 72—80 (1957).]
20. Drucker D. C., Variational principles in the mathematical theory of plasticity, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 8, Calculus of variations and its applications 7 (1958). [Русский перевод: Друкер Д., Вариационные принципы в математической теории пластичности, сб. *Механика*, № 6 (58), 63—79 (1959).]
21. Фейнберг С. М., Принцип предельной напряженности, *Прикл. матем. и механ.*, 12, 63 (1948).
22. Freudenthal A. M., Geiringer H., The mathematical theories of the inelastic continuum, *Handbuch der Physik*, 6, Berlin, 1958 [Готовится русский перевод.]
23. Greenberg H. J., On the variational principles of plasticity, Report A11—S4, Grad. Div. Appl. Math., Brown University, March 1949.
24. Greenberg H. J., Complementary minimum principles for an elastic-plastic material, *Quart. Appl. Math.*, 7, 85 (1949).
25. Greenberg H. J., Prager W., On limit design of beams and frames, Report A18—1, Grad. Div. Appl. Math., Brown University (1949).
26. Haas A., von Kármán Th., Zur theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien, *Nachr. der Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse*, 204 (1909). [Русский перевод: Хаас А., Карман Т., К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах, сб. статей *Теория пластичности*, перевод под ред. Ю. Н. Работнова, М., 1948.]
27. Hencky H., Zur theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen, *ZAMM*, 4, 323 (1924). [Русский перевод: Генки Г., К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений, сб. статей *Теория пластичности*, перевод под ред. Ю. Н. Работнова, М., 1948.]
28. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W., On the mechanical behaviour of metals in the strain-hardening range, *Quart. Appl. Math.*, 4, 397 (1947).
29. Hill R., Lee E. H., Tupper S. J., The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure, *Proc. Roy. Soc. London*, A191, 278 (1947).
30. Hill R., A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals., *Proc. Roy. Soc. London*, A193, 281 (1948).

31. Hill R., A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1, 18 (1948).
32. Hill R., A comparative study of some variational principles in the theory of plasticity, *J. Appl. Mech.*, 17, 64 (1950).
33. Hill R., Mathematical theory of plasticity, Chap. III, Oxford, 1950. [Русский перевод: Хилл Р., Математическая теория пластичности, гл. III, М., 1956.]
34. Hill R., On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point, *Phil. Mag.*, ser. 7, 42, 868 (1951).
35. Hill R., Comments on Dr. Lee's paper, *Phil. Mag.*, ser. 7, 43, 560 (1952).
36. Hill R., New horizons in the mechanics of solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 66 (1956). [Русский перевод: Хилл Р., Новые горизонты в механике твердых тел, сб. *Механика*, № 4 (44), 63—71 (1957).]
37. Hill R., The mechanics of quasi-static plastic deformation in metals, *Surveys in Mechanics*, 7, Cambridge, 1956. [Русский перевод: Хилл Р., Механика квазистатических пластических деформаций в металлах, сб. *Механика*, № 2 (54), 84—100 (1959).]
38. Hill R., On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid, I, *J. Mech. Phys. Solids*, 4, 247 (1956). [Русский перевод: Хилл Р., О проблеме единственности в теории жестко-пластического тела, I, II, сб. *Механика*, № 4 (44), 81—97 (1957).]
39. Hill R., On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid, III, *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 153 (1957). [Русский перевод: Хилл Р., О проблеме единственности в теории жестко-пластического тела, III, сб. *Механика*, № 1 (47), 78—86 (1958).]
40. Hill R., Stability of rigid-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 1 (1957). [Русский перевод: Хилл Р., Устойчивость жестко-пластических тел, сб. *Механика*, № 3 (49), 67—75 (1958).]
41. Hill R., A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 236 (1958). [Русский перевод: Хилл Р., Общая теория единственности и устойчивости для упруго-пластических тел, сб. *Механика*, № 6 (52), 81—95 (1958).]
42. Hodge P. G., Prager W., A variational principle for plastic materials with strain-hardening, *J. Math. and Phys.*, 27, 1 (1948).
43. Hodge P. G., The theory of piecewise linear isotropic plasticity, Proc. I. U. T. A. M., Colloquium on deformation and flow of solids, Madrid, 1955 (Springer, Berlin, 147, 1956).
44. Hodge P. G., Minimum principles of piecewise linear isotropic plasticity, *J. Rat. Mech. Anal.*, 5, 917 (1956). [Русский перевод: Ходж Ф., Минимальные принципы кусочно линейной изотропной теории пластичности, сб. *Механика*, № 1 (47), 59—75 (1958).]

45. Hodge P. G., The mathematical theory of plasticity, Surveys in Applied Mathematics, т. 1, New York, 1958. [Русский перевод: Ходж Ф., Математическая теория пластичности. (В книге Гудьер Дж., Ходж Ф., Упругость и пластичность, М., 1960.)]
46. Horne M. R., The effect of variable repeated loads in the plastic theory of structures, *Research, Eng. Struct. Suppl.*, **141**, 1949.
47. Kазинсу G., Bemessung von statisch unbestimmten Konstruktionen unter Berücksichtigung der bleibenden Formänderungen, *Betonszemle*, № 4, 5, 6, 1914.
48. Kist N. C., Does a stress analysis based on Hooke's law lead to a satisfactory design of steel bridges and buildings? (на голландском языке), Inaugural lecture, Delft, 1917.
49. Koiter W. T., Some remarks on plastic shakedown theorems, *Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech.*, Istanbul, **1**, 220 (1952).
50. Koiter W. T., On partially plastic thick-walled tubes, C. B. Biezeno Anniversary Volume on Applied Mechanics, Haarlem, 233, 1953.
51. Koiter W. T., Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface, *Quart. Appl. Math.*, **11**, 350 (1953). [Русский перевод: Койтер В. Т., Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теорема единственности для упруго-пластических материалов с сингулярной поверхностью текучести, сб. *Механика*, № 2 (60), 117—121 (1960).]
52. Koiter W. T., On the stress-strain relations and the general theorems of plasticity, *Laboratorium voor Toegepaste Mechanica*, Technische Hogeschool, Delft, 1953.
53. Koiter W. T., A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures, *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.*, B **59**, 24 (1956). [Русский перевод: Койтер В., Новая общая теорема о приспособляемости упруго-пластических конструкций, сб. *Механика*, № 3 (43), 93—103 (1957).]
54. Lee E. H., On the significance of the limit load theorems for an elastic-plastic body, *Phil. Mag.*, ser. 7, **43**, 549 (1952).
55. Lévy M., Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **70**, 1323 (1870).
56. Марков А. А., О вариационных принципах в теории пластичности, *Прикл. матем. мех.*, **11**, 339 (1947).
57. Melan E., Theorie statisch unbestimmter Systeme aus idealplastischen Baustoff, *Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien*, IIa, **145**, 195 (1936).
58. Melan E., Der Spannungszustand eines Hencky-Mises'schen Kontinuums bei veränderlicher Belastung, *Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien*, IIa, **147**, 73 (1938).
59. Melan E., Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, *Ing. Arch.*, № 9, 116, 1938.

60. Mises R., Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, *Göttinger Nachr.*, Math. Phys. Kl., 582—592 (1913). [Русский перевод: Мизес Р., Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии, сб. статей *Теория пластичности*, перевод под ред. Работнова Ю. Н., М., 1948.]
61. Mises R., Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, *ZAMM*, 8, 161 (1928).
62. Neal B. G., Plastic collapse and shakedown theorems for structures of strainhardening material, *J. Aero. Sci.*, 17, 297 (1950).
63. Neal B. G., The plastic methods of structural analysis, New York, 1956.
64. Prager W., Fundamental theorems of a new mathematical theory of plasticity, *Duke Math. J.*, 9, 228 (1942).
65. Prager W., Variational principles in the theory of plasticity, Paper presented at 6th Int. Congr. Appl. Mech., Paris, 1946.
66. Prager W., Recent developments in the mathematical theory of plasticity, *J. Appl. Phys.*, 20, 235 (1949).
67. Prager W., Hodge P. G., Theory of perfectly plastic solids, New York, 1951. [Русский перевод: Прагер В., Ходж Ф. Г., Теория идеально пластических тел, М., 1956.]
68. Prager W., The general theory of limit design, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech., Istanbul, 2, 65 (1952).
69. Prager W., On the use of singular yield conditions and associated flow rules, *J. Appl. Mech.*, 20, 317 (1953).
70. Prager W., The theory of plasticity — a survey of recent achievements, James Clayton Lecture, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 169, 41 (1955). [Русский перевод: Прагер В., Теория пластичности: обзор современных исследований, приложение к книге (67).]
71. Prager W., Probleme der Plastizitätstheorie, Basel, 1955. [Русский перевод: Прагер В., Проблемы теории пластичности, М., 1958.]
72. Prager W., Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature, Symp. su la Plasticità nella Scienza delle Costruzioni, Bologna (1957). [Русский перевод: Прагер В., Приспособляемость в упруго-пластической среде, подвергнутой циклам нагрузки и температуры, сб. *Механика*, № 5 (51), 122—125 (1958).]
73. Prandtl L., Spannungsverteilung in plastischen Körpern, Proc. 1st. Int. Congr. Appl. Mech., Delft, p. 43, 1924.
74. Reissner H., Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen, *ZAMM*, 11, 1 (1931).
75. Reuss A., Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie, *ZAMM*, 10, 266 (1930). [Русский перевод: Рейс А., Учет упругой деформации в теории пластичности, сб. *Теория пластичности*, перевод под ред. Ю. Н. Работнова, М., 1948.]
76. Reuss A., Fließpotential oder Gleitebenen? *ZAMM*, 12, 15 (1932).

77. R e u s s A., Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfließbedingung, *ZAMM*, **13**, 356 (1933).
78. S a n d e r s J. L., Plastic stress-strain relations based on linear loading functions, *Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, p. 455, 1954. [Русский перевод: С э н д е р с, Соотношения между напряжениями и деформациями в пластической области, основанные на линейных функциях нагружения, сб. *Механика*, № 3 (37), 99—109 (1956).]
79. S y m o n d s P. S., A review of methods for the plastic analysis of rigid frames of ductile metal, Report A11—S6, Grad. Div. Appl. Math., Brown University, May 1950.
80. S y m o n d s P. S., N e a l B. G., Recent progress in the plastic methods of structural analysis, *J. Franklin Inst.*, **252**, 383—407, 469—492 (1951).
81. S y m o n d s P. S., Shakedown in continuous media, *J. Appl. Mech.*, **18**, 85 (1951).
82. T a y l o r G. I., A connection between the criterion of yield and the strain ratio relationship in plastic solids, *Proc. Roy. Soc. London*, **A 191**, 441 (1947).
83. T r e s c a H., Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **59**, 754 (1864).
84. V é n a n t B., de S a i n t, Mémoire sur L'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **70**, 473 (1870).
85. W a r n e r W. H., H a n d e l m a n G. H., A modified incremental strain law for work-hardening materials, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, **9**, 279 (1956). [Русский перевод: У о р н е р У., Х а н д е л ь м а н Г., Модификация дифференциального закона напряжений-деформаций для упрочняющегося материала, сб. *Механика*, № 6 (46), 111—124 (1957).]
86. W h i t e G. N., Application of the theory of perfectly plastic solids to stress analysis of strain-hardening solids, Report A11—51, Grad. Div. Appl. Math., Brown University, 1950.
87. Z i e g l e r H., Thermodynamik und rheologische Probleme, *Ing. Arch.*, **25**, 58 (1957).
88. Z i e g l e r H., An attempt to generalize Onsager's principle, and its significance for rheological problems, *J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP)* **9b**, 748 (1958).

Дополнительная ссылка:

P r a g e r W., An introduction to the concepts and principles of plasticity. Special lectures delivered at the Seminar in Applied Mathematics, Boulder, Colorado (будет опубликовано Американским математическим обществом), Juli 1957.

О Г Л А В Л Е Н И Е

§ 1. Введение	5
§ 2. Основные предположения и законы пластичности . .	7
§ 3. Теоремы единственности	23
§ 4. Минимальные принципы	30
§ 5. Теоремы о пластическом разрушении и теория предельного равновесия	41
§ 6. Теоремы о приспособляемости	53
§ 7. Существование решений	66
Л и т е р а т у р а	73

В. Т. Койтер

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Редактор Л. П. БУШУЕВ
Художник И. И. Каледин
Технический редактор А. Г. Резоухова
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Корректор Т. С. Бухтина

Сдано в производство 5/I 1961 г.
Подписано к печати 4/IV 1961 г.
Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32} = 1,3$ бум. л. 4,1 печ. л.,
Уч.-изд. л. 3,9. Изд. № 1/0605
Цена 27 к. Зак. 784

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1-Рижский пер., 2.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9.