

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА

МЕХАНИКА

Г. Милхтинг

ВОЗНИКНОВЕНИЕ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ



HANDBUCH DER PHYSIK, BAND VIII/1

Strömungsmechanik I

ENTSTEHUNG DER TURBULENZ

von

H. SCHLICHTING

Berlin · Göttingen · Heidelberg

1959

Г. ШЛИХТИНГ

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*Перевод с немецкого
Г. А. Вольперта*

*Под редакцией
Л. Г. Лойцянского*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1962

А Н Н О Т А Ц И Я

Книга Г. Шлихтинга представляет собой сжатый, но весьма обстоятельный обзор современного состояния проблемы возникновения турбулентности с указанием важнейшей журнальной литературы, в которой читатель может найти более подробное изложение отдельных вопросов. Особый интерес представляет собранный автором экспериментальный материал.

Книга будет полезна научным работникам и инженерам, занимающимся гидроаэродинамическими расчетами, а также студентам и аспирантам, изучающим механику жидкости и газа.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Имя Г. Шлихтинга, внесшего большой вклад в развитие теории пограничного слоя, известно советскому читателю по капитальному труду «Теория пограничного слоя» (Издательство иностранной литературы, 1956). Настоящая работа Шлихтинга, являющаяся частью восьмого тома энциклопедии *Handbuch der Physik* (Springer, Berlin, 1959), представляет собой обзор современного состояния проблемы возникновения турбулентности, т. е. вопроса о том, каким образом и при каких условиях ламинарное течение переходит в турбулентное. Эта проблема имеет фундаментальное значение не только для теоретических построений механики жидкости и газа, но и непосредственное практическое значение для многих важных задач современной техники.

Несмотря на сжатость изложения и некоторую его неполноту, книга дает ясное представление о современном состоянии проблемы возникновения турбулентности.

Особый интерес представляет собранный в книге богатый экспериментальный материал. Многочисленные библиографические указания, отсылающие читателя к первоисточникам, дополняют изложение.

Л. Г. Лойцянский

Глава I

НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ПЕРЕХОДУ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

§ 1. Переход ламинарного течения в турбулентное в трубе

Течения реальной жидкости во многих случаях резко отличаются от течений жидкости без трения, а также от ламинарных течений вязкой жидкости. Они обладают некоторым особым свойством, которое называется *турбулентностью*.

При возрастании числа Рейнольдса в течениях реальной жидкости как в трубах и каналах, так и в пограничном слое на обтекаемом теле происходит отчетливо выраженный переход ламинарной формы течения в турбулентную. Этот переход ламинарного течения в турбулентное, называемый также *возникновением турбулентности*, имеет фундаментальное значение для гидро- и аэромеханики.

Заметнее всего переход ламинарной формы течения в турбулентную наблюдается в прямых трубах и каналах; поэтому остановимся на этом давно известном случае несколько подробнее. В длинной прямой трубе с постоянным поперечным сечением каждая частица жидкости движется при небольших числах Рейнольдса по прямолинейной траектории; течение происходит упорядоченным образом в виде движущихся один относительно другого слоев (*слоистое*, или *ламинарное течение*). Однако наблюдения показывают, что при возрастании числа Рейнольдса это упорядоченное течение почти внезапно переходит в неупорядоченное течение с сильным перемешиванием в поперечном направлении (*турбулентное течение*).

Обе эти формы течения можно сделать видимыми, если ввести в поток окрашенную струйку жидкости

(рис. 1). Впервые это сделал О. Рейнольдс¹⁾. До тех пор пока течение остается ламинарным, введенная в него окрашенная жидкость движется в трубе в виде резко очерченной струйки, но как только течение становится турбулентным, эта струйка расплывается и почти равномерно окрашивает всю движущуюся в трубе жидкость.

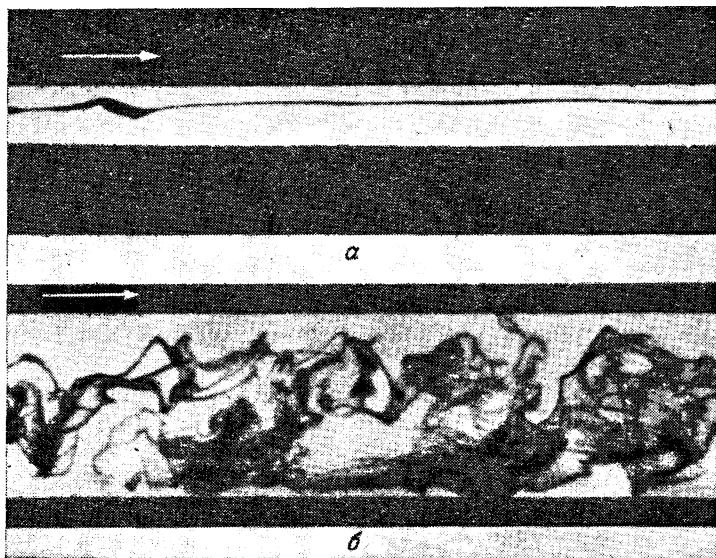


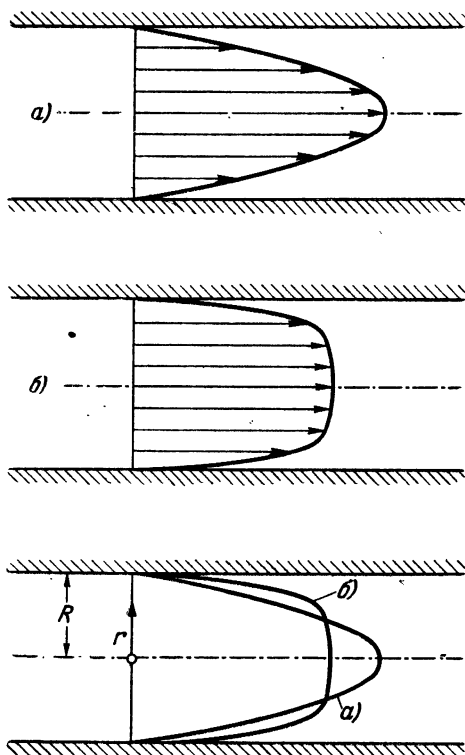
Рис. 1. Опыт Рейнольдса с окрашенной струйкой; а) ламинарное течение; б) турбулентное течение. По Дубсу²⁾.

Это показывает, что при турбулентном течении на главное движение жидкости, происходящее в направлении оси трубы, налагаются поперечные движения, т. е. движения, происходящие в направлении, перпендикулярном к оси трубы.

¹⁾ Reynolds O., An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. Trans. Roy. Soc. London, 174 (1883), 935, а также Collected Papers, 2, 51.

²⁾ Dubs W., Über den Einfluss laminarer und turbulenter Strömung auf das Röntgenstreubild von Wasser und Nitrobenzol (Ein röntgenographischer Beitrag zum Turbulenzproblem). Helv. phys. Acta, 12 (1939), 169.

В результате такого перемешивающего движения происходит обмен импульсами в поперечном направлении, в то время как в продольном направлении каждая



Р и с. 2. Распределение скоростей в трубе: а) ламинарное; б) турбулентное.

частица в основном сохраняет свой импульс. Это приводит к тому, что распределение скоростей по поперечному сечению трубы получается при турбулентном течении значительно более равномерным, чем при ламинарном. На рис. 2 изображены измеренные распределения скоростей для ламинарного и турбулентного течений в трубе. В то время как при ламинарном течении распределение

скоростей по поперечному сечению имеет, как это обнаружили уже Гаген и Пуазейль, вид параболы, при турбулентном течении вследствие обмена импульсов в поперечном направлении оно сильно сглаживается, т. е. становится значительно равномернее.

Более подробный анализ турбулентного течения показывает, что его самым основным признаком является следующий: скорость и давление в каждой фиксированной точке пространства не остаются постоянными во времени, а изменяются, претерпевая неравномерные пульсации высокой частоты (см. рис. 5 на стр. 16 и рис. 31 на стр. 75). Скорость в фиксированной точке пространства можно рассматривать как величину постоянную во времени только в среднем и притом для сравнительно большого промежутка времени (квазистационарное движение). Однако элементами жидкости, выполняющими в виде целого такие пульсации вдоль и поперек направления течения, являются не отдельные молекулы, как это имеет место, например, в кинетической теории газов, а макроскопические, более или менее мелкие «жидкие комки». Пульсации скорости во времени при турбулентном течении в трубе составляют только небольшой процент от средней скорости, тем не менее именно эти пульсации оказывают решающее влияние на развитие всего движения. Более подробно об этом изложено в статье Линя¹⁾.

С переходом ламинарного течения в турбулентное связано также резкое изменение закона сопротивления в трубе.

Впервые это было обнаружено Г. Гагеном²⁾ в 1839 г. А именно, при ламинарном течении перепад давления, заставляющий жидкость течь в трубе, пропорционален первой степени скорости течения, в то время как при турбулентном течении он пропорционален почти квадрату скорости (квадратичный закон сопротивления при течении в трубе).

¹⁾ Lin C. C. and Reid W. H., Turbulent Flow, Theoretical Part. Статья в Handbuch der Physik, т. 8, часть 2, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961.

²⁾ Hagen G., Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren. Pogg. Ann., 46 (1839), 423.

Однако ясное представление о более точных обстоятельствах, определяющих состояние течения в трубе, дали только более поздние систематические исследования О. Рейнольдса, в процессе которых он выполнил, в частности, и упомянутый выше опыт с окрашенной струйкой. В результате своих исследований Рейнольдс открыл для течений в трубе закон подобия, названный впоследствии его именем.

Согласно этому закону, переход ламинарного течения в турбулентное происходит всегда при приблизительно одинаковом значении безразмерного числа $\overline{w}d/\nu$, где d есть диаметр трубы, $\overline{w} = Q/F$ — средняя скорость течения, а ν — кинематический коэффициент вязкости (Q — количество протекающей в единицу времени жидкости, F — площадь поперечного сечения). В настоящее время величина $\overline{w}d/\nu$ называется *числом Рейнольдса*. Для числа Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное, было найдено значение

$$Re_{кр.} = \left(\frac{\overline{w}d}{\nu} \right)_{кр.} = 2300.$$

Следовательно, те течения в трубе, для которых $Re < Re_{кр.}$, ламинарны, а те течения, для которых $Re > Re_{кр.}$, турбулентны. Значение критического числа Рейнольдса существенно зависит от условий входа в трубу и от условий притекания жидкости к этому входу.

Уже Рейнольдс высказал предположение, что критическое число Рейнольдса тем больше, чем меньше возмущения в жидкости, притекающей к входу в трубу. Это было подтверждено опытами Г. Т. Барнса и Э. Г. Кокера¹⁾, а затем Л. Шиллера²⁾, в которых для $Re_{кр.}$ были получены значения до 20 000. В. В. Экману³⁾ путем особенно тщательного уменьшения возмущений

¹⁾ Barnes H. T. and Coker E. G., The flow of water through pipes. Proc. Roy. Soc. Lond., 74 (1905), 341.

²⁾ Schiller L., Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. Forschungsarb. Ing.-Wesen, № 248 (1922). См. также Z. angew. Math. Mech., 2 (1922), 96 и Phys. Z., 23 (1922), 14.

³⁾ Ekman V. W., On the change from steady to turbulent motion of liquids. Ark. Mat., Astronom., Fys., 6 (1910), № 12.

при входе в трубу удалось получить критическое число Рейнольдса около 40 000.

Насколько сильно можно повысить критическое число Рейнольдса путем самого тщательного устранения возмущений при входе в трубу, пока неизвестно. Но зато

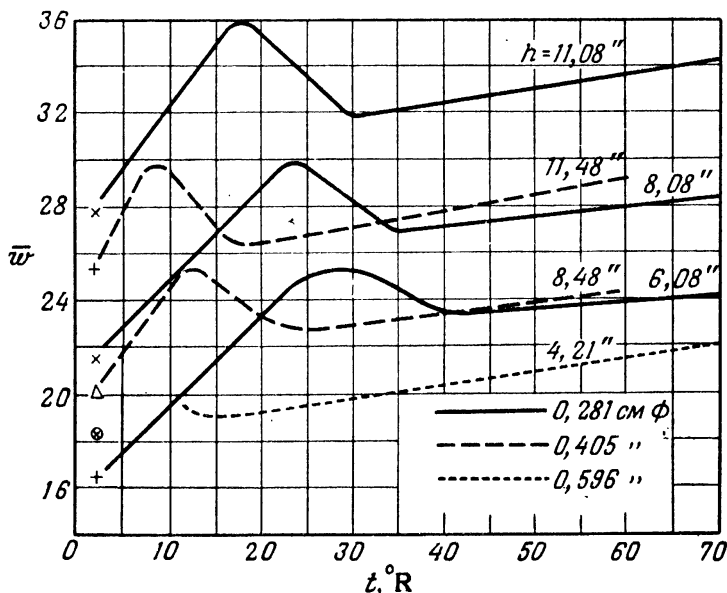


Рис. 3. Зависимость скорости течения $\bar{w}$ от температуры в трубах различного диаметра при различных высотах h жидкости в напорном резервуаре (скорость — в рейнских дюймах в секунду, температура — в градусах Реомюра, высота h — в рейнских дюймах). По измерениям Г. Гагена ¹⁾. Из книги Прандтля — Титенса, т. II [11].

самые различные эксперименты показали, что существует нижняя граница для $Re_{кр.}$, лежащая приблизительно при 2000. При числах Рейнольдса, меньших этого значения, со временем затухают даже самые сильные возмущения.

На рис. 3 изображены полученные Г. Гагеном ¹⁾ кривые зависимости скорости истечения $\bar{w}$ из трубы от температуры при различных постоянных значениях напора h ,

¹⁾ Hagen G., Über den Einfluss der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren. Math. Abh. Akad. Wiss. Berlin, 1855, 17.

Эти кривые наглядно показывают, как изменяется закон сопротивления в трубе при переходе ламинарного течения в турбулентное. Рассматривая, например, верхнюю кривую, мы видим, что при постоянном напоре средняя скорость $\bar{w}$ с возрастанием температуры, т. е. с уменьшением коэффициента вязкости, сначала увеличивается, но затем, достигнув максимума, начинает уменьшаться, падает до некоторого минимума и только после этого вновь начинает увеличиваться, правда, уже медленнее, чем до достижения максимума. Первому восходящему участку кривой соответствует ламинарное состояние течения, области от максимума до минимума — переход ламинарной формы течения в турбулентную, а второму, медленнее восходящему участку кривой — турбулентное состояние течения.

Хотя Гаген обладал обстоятельными для своего времени сведениями о явлениях, происходящих при ламинарном и турбулентном течениях, ему все же не удалось найти закон, объединяющий результаты измерений, изображенных на рис. 3. Впоследствии это сумел сделать Рейнольдс, и в этом состоит его особая заслуга. Он показал, что переход ламинарного течения в турбулентное может зависеть только от безразмерного числа

$$Re = \bar{w}d/\nu,$$

называемого теперь числом Рейнольдса, при условии, что обеспечено геометрическое подобие сравниваемых течений.

Насколько нагляднее можно представить результаты, изображенные на рис. 3, если воспользоваться *законом подобия Рейнольдса*, показывает рис. 4, полученный из рис. 3 посредством следующего пересчета: за независимую переменную взято число Рейнольдса, а в качестве ординат отложены значения безразмерного коэффициента сопротивления

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \bar{w}^2} \frac{d}{l}, \quad (1.1)$$

где Δp есть падение давления на длине трубы l вследствие трения, а ρ — плотность. Мы видим на рис. 4, что все пересчитанные кривые имеют совершенно одинаково-

вый характер. До некоторого числа Рейнольдса ($Re = \bar{w}d/\nu$ от 2200 до 2800) значения коэффициента сопротивления λ лежат вблизи прямой Гагена — Пуазейля для ламинарного течения; затем коэффициент λ почти внезапно увеличивается до некоторого максимума, после чего, при дальнейшем возрастании числа Рейнольдса, λ начинает опять уменьшаться, но медленнее, чем

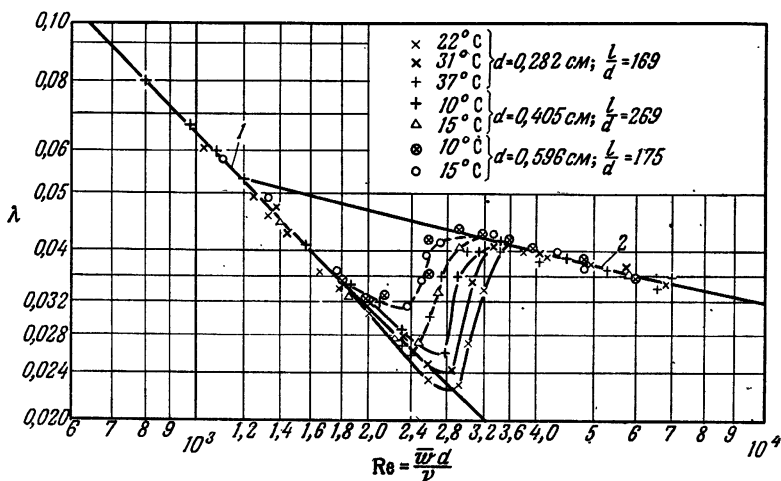


Рис. 4. Зависимость сопротивления λ трубы от числа Рейнольдса Re , полученная путем пересчета измерений Гагена (рис. 3). Вход в трубу — остроконечный. Кривая 1 — ламинарное течение, $\lambda = 64/Re$ (закон Гагена — Пуазейля); кривая 2 — турбулентное течение, $\lambda = 0,316 (Re)^{-1/4}$ (закон Блазиуса).

до внезапного подъема и при этом все значения λ располагаются вблизи прямой Блазиуса для турбулентного течения. Интервалу значений числа Рейнольдса, внутри которого происходит увеличение коэффициента сопротивления, соответствует переход ламинарной формы течения в турбулентную.

То значение числа Рейнольдса, при котором вследствие первого появления турбулентности возникает отклонение коэффициента сопротивления от прямой Гагена — Пуазейля, называется *критическим числом Рейнольдса*. Согласно рис. 4, оно равно приблизительно

$Re_{кр.} = 2300$, т. е. тому значению, которое уже было указано выше¹⁾.

О. Рейнольдс во время своих опытов с окрашенной струйкой обнаружил также, что течение до окончательного перехода в турбулентное состояние имеет перемежающийся характер. А именно, турбулентные возмущения время от времени появляются на некоторой длине трубы и затем уносятся течением. Новые тщательные экспериментальные исследования, выполненные с помощью термоанемометра, позволили обнаружить дальнейшие детали течения в трубе в области чисел Рейнольдса, в которой ламинарная форма течения переходит в турбулентную.

На рис. 5 изображены результаты, полученные И. Ротта²⁾ для зависимости скорости от времени на разных расстояниях r/R от оси трубы. Мы видим, что смена ламинарных и турбулентных состояний происходит через неравномерные промежутки времени. В точках вблизи оси трубы скорость в те промежутки времени, когда течение ламинарно, больше средней скорости в те промежутки, когда течение турбулентно; в точках же вблизи стенок трубы имеет место обратное соотношение. Так как в этих опытах количество протекающей через трубу жидкости поддерживалось постоянным, то из указанных фактов следует сделать вывод, что за время перемежающейся стадии течения распределение скоростей попеременно становится то ламинарным (рис. 2, а), то турбулентным (рис. 2, б).

Физический характер такого перемежающегося течения можно хорошо описать посредством *коэффициента перемежаемости* γ , указывающего, какую долю некоторого промежутка времени в определенном месте трубы существует турбулентное течение. Следовательно, коэффициент $\gamma = 1$ означает, что течение все время турбулентно, а коэффициент $\gamma = 0$ показывает, что течение все

¹⁾ Это критическое число Рейнольдса отнюдь не является точно определенной величиной. О более строгом определении см. § 6 и 14.

²⁾ Rotta J., Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr. Ing.-Arch., 24 (1956), 258.

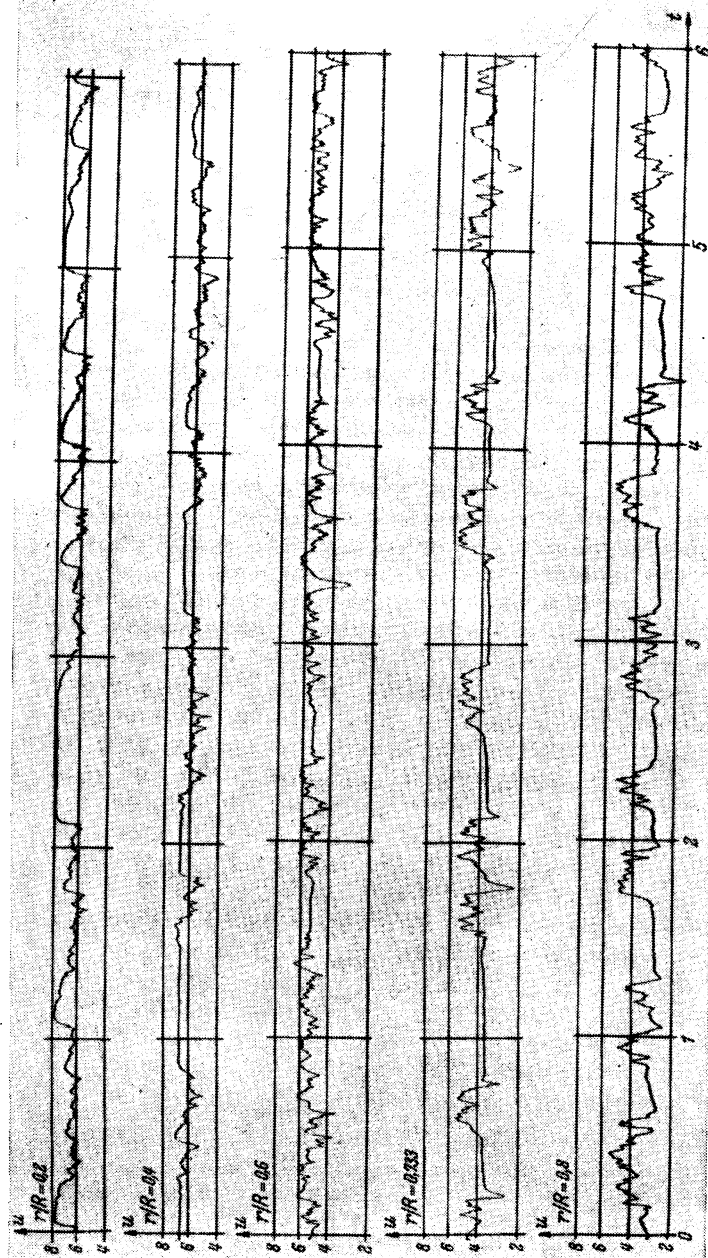


Рис. 5. Осциллограммы скорости при течении в трубе в области перехода ламинарного течения в турбулентное на различных расстояниях от середины трубы. По И. Ротта (см. примечание 2 на стр. 15). Число Рейнольдса $Re = \bar{w}d/\nu = 2550$; местная длина $x/d = 32$; $\bar{w} = 4,27$ м/сек; скорость $\bar{w}$ в м/сек; время t — в сек. Эти осциллограммы, полученные посредством термоанемометра, показывают перемежающийся характер течения, т. е. чередование интервалов с ламинарным и турбулентным течением.

время ламинарно. На рис. 6 изображена — по измерениям И. Ротта — зависимость коэффициента перемежаемости от расстояния x от входа в трубу для различных чисел Рейнольдса. При постоянном числе Рейнольдса коэффициент перемежаемости возрастает с увеличением расстояния от входа в трубу; наоборот, частота смен ламинарного и турбулентного состояний с увеличением расстояния от входа в трубу уменьшается.

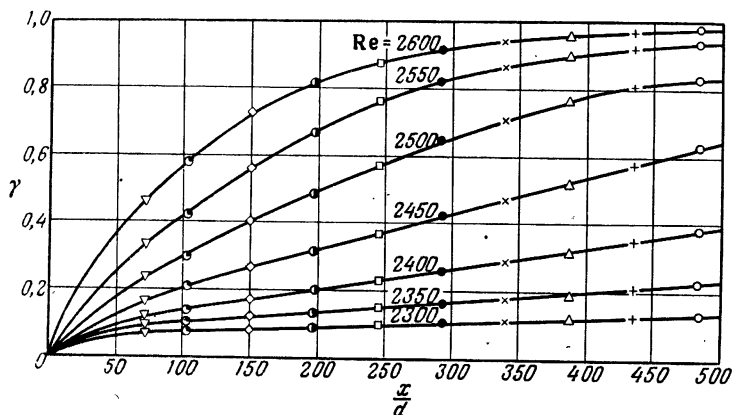


Рис. 6. Зависимость коэффициента перемежаемости γ в трубе в области перехода ламинарной формы течения в турбулентную от местной длины x при различных числах Рейнольдса Re . По измерениям И. Ротта (см. примечание 2 на стр. 15). Значение $\gamma=1$ означает постоянно турбулентное, а значение $\gamma=0$ — постоянно ламинарное течение.

И. Ротта производил свои измерения при числах Рейнольдса Re от 2000 до 3000, т. е. в той области значений Re , в которой, согласно рис. 4, происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную. При числах Рейнольдса, лежащих вблизи нижней границы этой области, окончательный переход ламинарного течения в турбулентное происходит на очень большой длине трубы, измеряющейся тысячами диаметров трубы. При больших числах Рейнольдса этот переход заканчивается на значительно более коротких участках.

Некоторые жидкости в состоянии движения вызывают двойное преломление лучей света, что позволяет

сделать течение видимым¹⁾). Это свойство использовал в своих экспериментах Э. Р. Линдгрэн²⁾). Наблюдая продвижение турбулентной пробки жидкости через два сечения трубы, а также измеряя давление в этих сечениях, он определял местную скорость турбулентной пробки.

Результаты выполненных Линдгреном измерений изображены на рис. 7. Самый важный из этих результатов заключается в том, что местная скорость v_1 на переднем конце турбулентной пробки больше местной скорости v_2 на заднем конце пробки. Турбулентные пробки по мере своего продвижения по трубе растут и тем самым обуславливают увеличение коэффициента перемежаемости. Разности $v_1 - v_2$ с увеличением числа Рейнольдса увеличивается. Среднее арифметическое из v_1 и v_2 почти точно совпадает со средней скоростью течения $\bar{w}$.

На нижней части рис. 7 изображена зависимость величины $\bar{w}/v_2 - \bar{w}/v_1$ от числа Рейнольдса. Эту зависимость можно найти также путем вычисления из коэффициента перемежаемости (рис. 6) и частоты смен ламинарных и турбулентных состояний. Результаты исследований Ротта и Линдгрена хорошо согласуются между собой.

В заключение сошлемся на обзорную работу М. А. Кьюза³⁾), в которой рассматриваются также периодические возмущения течения в трубе.

¹⁾ См. по этому поводу статью Binnie A. M. and Fowler J. S., A study by a double refraction method of the development of turbulence in a long circular tube. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, **192** (1947), 32.

²⁾ Lindgren E. R., The transition process and other phenomena in viscous flow. Ark. Fysik, **12** (1957), № 1, 1, а также Liquid flow in tubes, часть I, Ark. Fysik, **15** (1959), № 8 и часть II, Ark. Fysik, **15** (1959), № 37.

³⁾ Kuethе M. A., Some features of boundary layers and transition to turbulent flow. J. Aeron. Sci., **23** (1956), 444 и 506 (имеется русский перевод: Куэте М., Некоторые свойства пограничных слоев и переход к турбулентному течению, сб. Механика, № 1 (41) (1957), стр. 21).

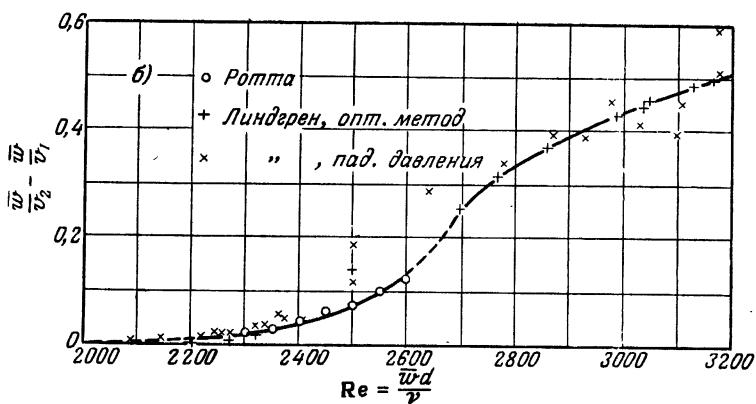
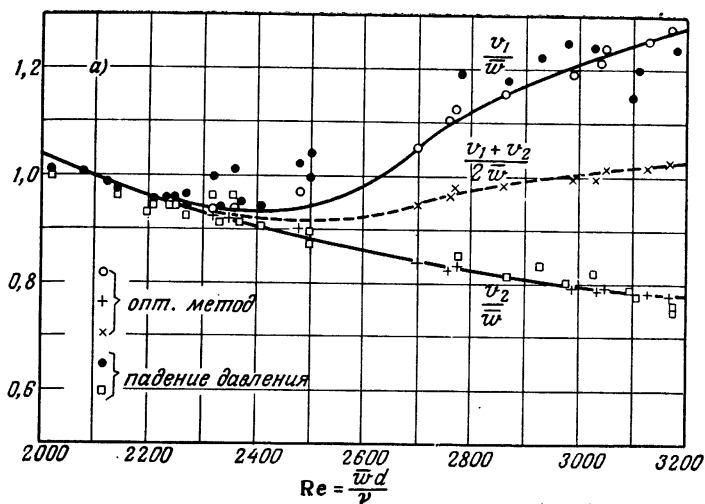


Рис. 7. Зависимость от числа Рейнольдса местной относительной скорости турбулентных пробок в трубе при переходе ламинарного течения в турбулентное. По опытам Э. Р. Линдгрена (см. примечание 2 на стр. 18) и И. Ротта (см. примечание 2 на стр. 15). v_1 — местная скорость на передней границе, v_2 — местная скорость на задней границе турбулентной пробки.

§ 2. Переход ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое на обтекаемом теле

Значительно позднее было установлено, что течение в пограничном слое также может быть либо ламинарным, либо турбулентным. Во многих случаях все поведение течения около обтекаемого тела, в частности и силовое воздействие течения на тело, существенно зависит от того, является ли пограничный слой ламинарным или турбулентным.

а) *Тела с затупленными концами.* С переходом течения в пограничном слое из ламинарного в турбулентное связано явление, которое особенно заметно у тел с затупленными концами, например у шара и кругового цилиндра. Из рис. 8 мы видим, что коэффициент сопротивления шара при числе Рейнольдса $Re = VD/\nu$, равном около $3 \cdot 10^5$, внезапно уменьшается. Это резкое уменьшение коэффициента сопротивления впервые было обнаружено Г. Эйфелем¹⁾ и объясняется тем, что пограничный слой при указанном числе Рейнольдса из ламинарного становится турбулентным. Так как при турбулентном пограничном слое увлекающее действие внешнего течения вследствие турбулентного перемешивания сильнее, чем при ламинарном пограничном слое, то турбулизация пограничного слоя приводит к перемещению его точки отрыва от тела вниз по течению, т. е. ближе к заднему концу тела. В результате мертвая зона позади тела становится значительно более узкой.

В вязкой жидкости распределение давления на поверхности шара при сверхкритическом числе Рейнольдса приближается к распределению давления в жидкости без трения (рис. 9), что влечет за собой значительное уменьшение сопротивления давления, а это в свою очередь обуславливает падение кривой $c_w = f(Re)$. Л. Прандтль²⁾ подтвердил правильность такого объяснения следующим опытом. На шар, немного впереди его экватора, было надето тонкое проволочное кольцо

¹⁾ Eiffel G., C. R. Acad. Sci. Paris, 155 (1912), 1597.

²⁾ Prandtl L., Über den Luftwiderstand von Kugeln. Göttinger Nachr., 1914, 177.

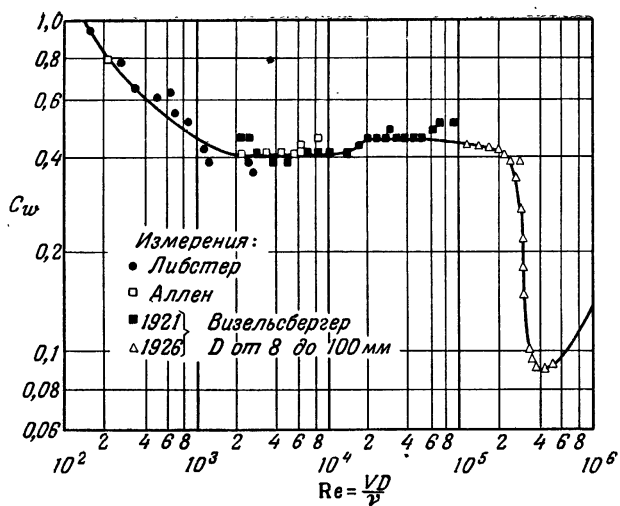


Рис. 8. Зависимость коэффициента сопротивления шара от числа Рейнольдса.

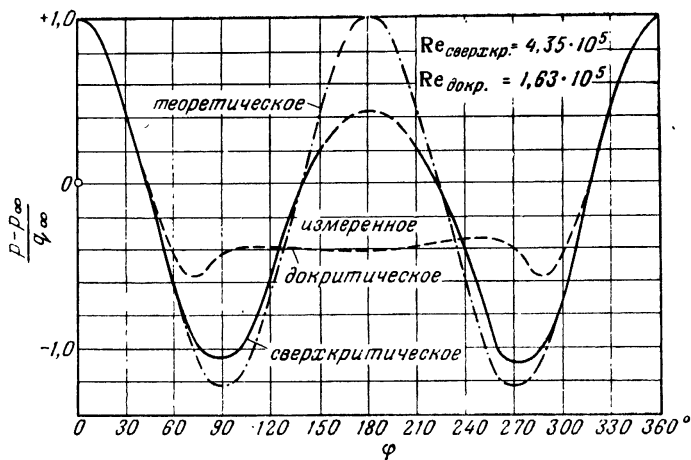


Рис. 9. Распределение давления на шаре при докритическом и сверхкритическом числе Рейнольдса. По измерениям О. Флаксбарта.

Благодаря присутствию кольца турбулизация пограничного слоя наступила при меньшем числе Рейнольдса, чем без кольца. В результате получилось такое же уменьшение коэффициента сопротивления, как и без кольца, но при большем числе Рейнольдса. На рис. 10 изображены фотографии обтекания шара, полученные К. Визельсбергером ¹⁾ для докритического состояния с большой мертвой зоной и для сверхкритического состояния с меньшей мертвой зоной и меньшим сопротивлением, причем последнее состояние было достигнуто благодаря тому, что на шар было надето кольцо.



Р и с. 10. Течение около шара; а) при докритическом числе Рейнольдса; б) при сверхкритическом числе Рейнольдса. По Визельсбергеру ¹⁾. Сверхкритическое состояние было достигнуто благодаря тому, что на шар было надето тонкое проволочное кольцо.

Опыт Прандтля очень убедительно показал, что внезапное падение коэффициента сопротивления шара можно понимать только как эффект пограничного слоя, связанный с переходом течения из ламинарной формы в турбулентную. Другие тела с затупленной кормовой частью, например круговой цилиндр или эллиптический цилиндр, дают в основном такую же зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. По мере утоньшения обтекаемого тела внезапное падение критической скорости сопротивления становится все меньше и меньше, так как у тонких тел отрыв пограничного слоя не на

¹⁾ Wieselsberger C., Der Luftwiderstand von Kugeln. Z. Flugtechn. u. Motorluftsch., 15 (1914), 140.

столько выражен, чтобы на него мог повлиять переход ламинарной формы течения в турбулентную.

Переход течения в пограничном слое на обтекаемом теле из ламинарной формы в турбулентную зависит от многих параметров, из которых важнейшими, кроме числа Рейнольдса, являются следующие: характер изменения давления во внешнем течении, теплопередача от стенки к жидкости, свойства стенки (шероховатость) и насыщенность внешнего течения возмущениями (степень турбулентности). Более подробно об этом будет сказано в гл. V—X.

բ) *Пластика, обтекаемая в продольном направлении.* Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный пограничный слой легче проследить не на теле произвольной формы, а на плоской пластинке, обтекаемой в продольном направлении. Если пограничный слой на пластинке ламинарен, то его толщина возрастает пропорционально $\sqrt{x}$, где x есть расстояние от переднего края пластинки (*местная длина пограничного слоя*). Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный впервые исследовался И. М. Бюргерсом¹⁾ и Б. Г. Ван-дер-Хегге Цейненом²⁾, а позднее М. Ханзенoм³⁾ и особенно подробно Х. Л. Драйденом⁴⁾. Вблизи передней кромки пластинки пограничный слой всегда ламинарен, но ниже по течению он при некоторых условиях становится турбулентным. На пластинке с острой передней кромкой, обдуваемой нормальным потоком

¹⁾ Burgers J. M., Proc. of the First Internat. Congr. for Appl. Mech., Delft, 1924, стр. 113.

²⁾ van der Hegge Zijnen B. G., Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Тезисы доклада, Delft, 1924.

³⁾ Hansen M., Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. Z. angew. Math. Mech., 8 (1928), 185.

⁴⁾ Dryden H. L., Some recent contributions to the study of transition and turbulent boundary layers (доклад на 6-ом Международном конгрессе по прикладной механике в Париже, сентябрь 1946). NACA T. N. 1168, 1947. См. также Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. Adv. Appl. Mech., т. I, стр. 1, New York, 1948 (имеется русский перевод: Проблемы механики, сборник статей под редакцией Р. Мизеса и Т. Кармана, Изд-во иностр. лит., Москва, 1955).

воздуха, пограничный слой переходит в турбулентный на расстоянии x от передней кромки, определяемом из равенства

$$Re_{x \text{ кр.}} = \left(\frac{U_{\infty} x}{\nu} \right)_{\text{кр.}} = 3,5 \cdot 10^5 \div 5 \cdot 10^5.$$

Следовательно, с возрастанием скорости U_{∞} набегающего течения точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный перемещается вверх по течению. При обтекании пластинки в продольном направлении, как и при течении в трубе, можно сильно повысить критическое число Рейнольдса, если обеспечить возможно малую возмущенность набегающего течения (т. е. малую степень турбулентности). Х. Л. Драйден¹⁾, а также Г. Б. Шубауэр и Г. К. Скрэмстед²⁾, особенно тщательно освободив воздушный поток от возмущений, сумели достичь критического числа Рейнольдса $Re_{x \text{ кр.}} = 3 \cdot 10^6$ (см. гл. IV).

Переход течения в пограничном слое на пластинке из ламинарной формы в турбулентную заметнее всего отражается на распределении скоростей в пограничном слое. На рис. 11 изображена зависимость безразмерной толщины пограничного слоя $\delta/\sqrt{\nu x/U_{\infty}}$ от числа Рейнольдса $Re_x = U_{\infty} x/\nu$, составленного для местной длины x . Мы видим, что в ламинарном пограничном слое безразмерная толщина постоянна и равна приблизительно пяти. Начиная с числа Рейнольдса $Re_x \approx 3,2 \cdot 10^5$, при котором ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный, толщина слоя внезапно начинает сильно нарастать. Это нарастание толщины пограничного слоя влечет за собой сильное изменение распределения скоростей в нем.

1) См. примечание 4 на предыдущей странице.

2) Schubauer G. B. and Skramstad H. K., Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow. National Bureau of Standards Research Paper 1772 (перепечатка секретного отчета NASA от апреля 1943, позднее рассекреченного и опубликованного в виде NASA War-time Report W-8). См. также J. Aeron. Sci., 1 (1947), 69 и NASA Rep. 909 (1948).

На рис. 12 изображено такое распределение, полученное Г. Б. Шубауэром и П. С. Клебановым¹⁾ посредством измерений в области перехода ламинарной

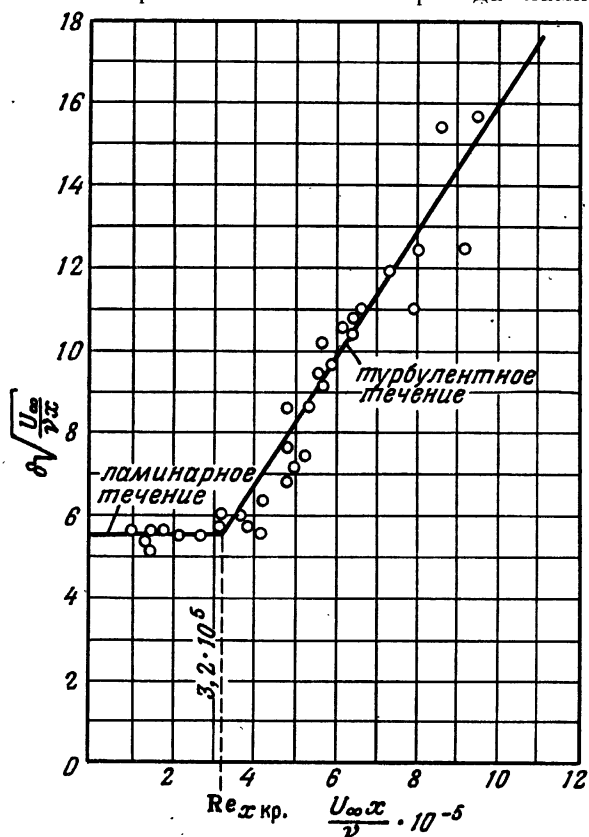


Рис. 11. Зависимость толщины δ пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластинке от местной длины x . По измерениям Ханзена (см. примечание 3 на стр. 23).

формы течения в турбулентную. Эта область в данном случае простирается от $Re_x = 3 \cdot 10^6$ до $Re_x = 4 \cdot 10^6$. Кроме измеренных распределений скоростей, на рис. 12

¹⁾ Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., Contributions on the mechanics of boundary layer transition. NACA T. N. 3489 (1955); NACA Rep. 1289 (1956).

изображены также теоретическое распределение для ламинарного пограничного слоя (по Блазиусу, кривая 1) и теоретическое распределение для полностью развившегося турбулентного течения (кривая 2). Отчетливо видно, как ламинарный профиль скоростей постепенно преобразуется в турбулентный.

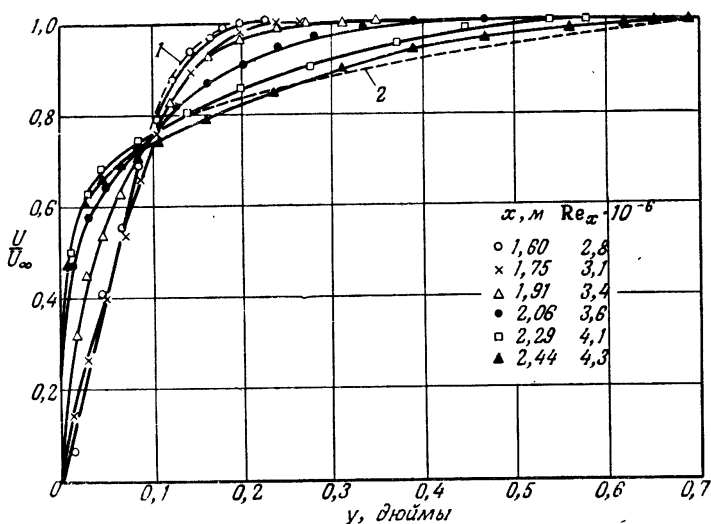
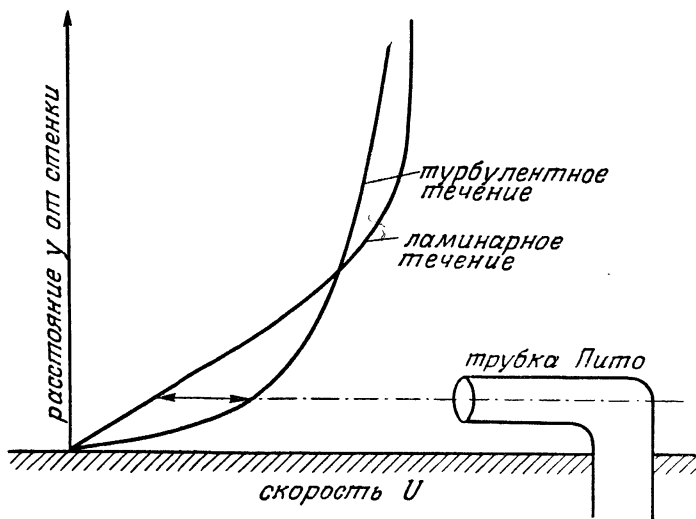


Рис. 12. Профили скоростей в пограничном слое на пластинке в области перехода ламинарного течения в турбулентное. По измерениям Шубауэра и Клебанава (см. примечание 1 на стр. 25). Кривая 1 — профиль Блазиуса; кривая 2 — степенная кривая с показателем степени $1/7$ (толщина пограничного слоя $\delta = 1,8 \text{ см}$). Скорость внешнего течения $U_\infty = 27 \text{ м/сек}$. Степень турбулентности $T = 0,03\%$.

Далее, рис. 12 показывает, что в пограничном слое при переходе течения из ламинарного в турбулентное скорость течения в непосредственной близости от стенки сильно возрастает. Это обстоятельство можно использовать для удобного определения положения точки перехода (точнее говоря, области перехода). Принцип такого определения поясняется на рис. 13. Трубка для измерения динамического давления или трубка Пито устанавливается параллельно стенке на таком от нее расстоянии, на котором ламинарный и турбулентный пр

фили скоростей дальше всего отстоят друг от друга. Если теперь передвинуть трубку вдоль стенки, не меняя расстояния между ними, и пропустить ее через область перехода вниз по течению, то она покажет почти внезапное повышение динамического или соответственно полного давления.

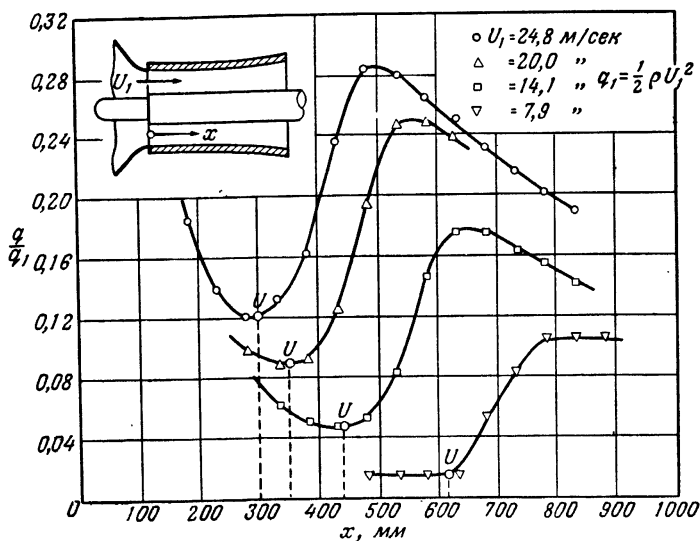


Р и с. 13. К измерению перехода ламинарного течения в турбулентное при помощи трубки Пито.

На рис. 14 изображен пример такого определения точки перехода на внутренней стенке слабо расширяющегося канала с поперечным сечением в виде кругового кольца. Пример взят из работы Э. Г. Файндта¹⁾. Измерения производились для четырех значений скорости U_1 при входе в канал. Мы видим, что кривые, изображающие зависимость динамического давления q от местной длины x , имеют приблизительно одинаковый вид при всех значениях U_1 . Левые нисходящие части кривых соответствуют ламинарному пограничному слою,

¹⁾ Feindt E. G., Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. Jb. schiffsbautechn. Ges., 50 (1956), 180.

примыкающие к ним круто восходящие части — области перехода, а правые, опять нисходящие части кривых — полностью развившемуся турбулентному пограничному слою. Наинизшие точки кривых, отмеченные буквой U определяют начало области перехода. С увеличением входной скорости U_1 это начало перемещается вперед ко входу в канал.



Р и с. 14. Пример измерения перехода ламинарного течения в турбулентное при помощи трубки Пито в слабо расширяющемся канале с поперечным сечением в виде кругового кольца. По Э. Г. Файндту (см. примечание 1 на стр. 27). q — динамическое давление в сечении x ; q_1 — динамическое давление во входном сечении канала; U_1 — скорость при входе в канал. Повышение давления $d(p/p_1)/dx = 0,37 \text{ м}^{-1}$.

Особенно удобным прибором для определения точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную является сочетание трубки, измеряющей давление, со стетоскопом. Последний представляет собой резиновую трубку, передающую звук к уху наблюдателя. Если перемещать вставленную в течение трубку, измеряющую давление, то при ее прохождении через точку перехода наблюдатель слышит через стетоскоп характерный шум.

Место перехода в пограничном слое можно сделать видимым посредством специальной окраски поверхности обтекаемого тела. На рис. 15 изображен пример такого определения места перехода на крыловом профиле. Поверхность крыла была обтянута полосой бумаги, на которую пульверизатором была нанесена смесь керосина и сажи. На некоторой части подсасывающей поверхности крыла была укреплена тонкая проволока для искусственной турбулизации течения (рис. 15, а). Фотография получившихся на бумаге линий изображена на рис. 15, б.

Мы видим, что на той части подсасывающей поверхности, на которой проволоки не было, место естественного перехода ламинарной формы течения в турбулентную лежит дальше от передней кромки крыла, чем место искусственно вызванного перехода. На напорной поверхности крыла, вблизи его передней кромки, был помещен элемент шероховатости в виде маленького полушара. Эта шероховатость привела к возникновению позади нее турбулентного клина. В области естественного перехода ламинарной формы течения в турбулентную особенно четко заметны канавки, промытые течением в слое краски. Кроме того, в этой области близкие к стенке линии тока сильно отклонены от направления внешнего течения. Что касается самой области естественного перехода, то бросается в глаза ее ширина, значительно бо́льшая, чем ширина области искусственного перехода.

Изменения давления, возникающие в сжимаемых течениях, могут быть сделаны видимыми посредством оптических методов. Так как при сверхзвуковых скоростях в турбулентном пограничном слое возникают пульсации давления, которые столь же неравномерны, как и турбулентные пульсации скорости, то можно очень легко отличить турбулентный пограничный слой от ламинарного посредством, например, теневой съемки течения. Это обстоятельство позволяет использовать метод теневой съемки для исследования перехода ламинарной формы течения в турбулентную. На рис. 16 изображены теневые снимки течения около конуса при числе Маха $M = 3,2$. Эти снимки были получены В. Р. Виттом

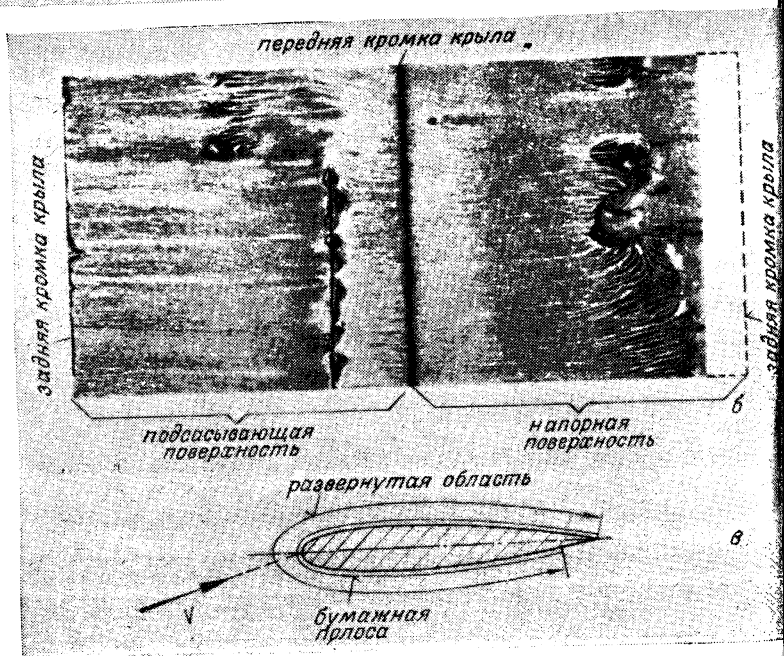
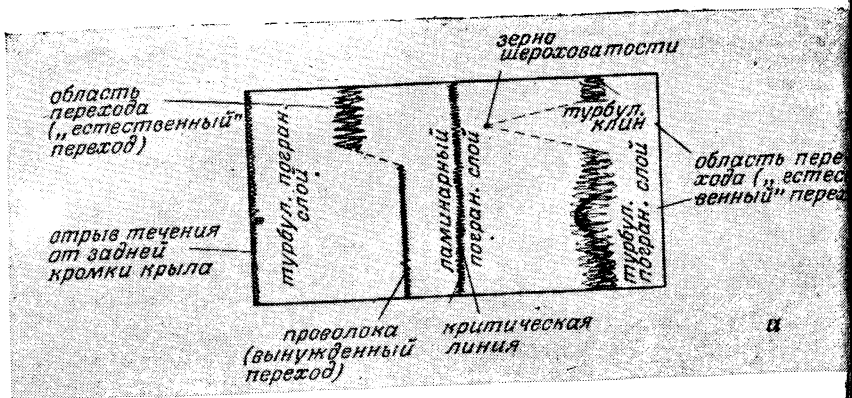
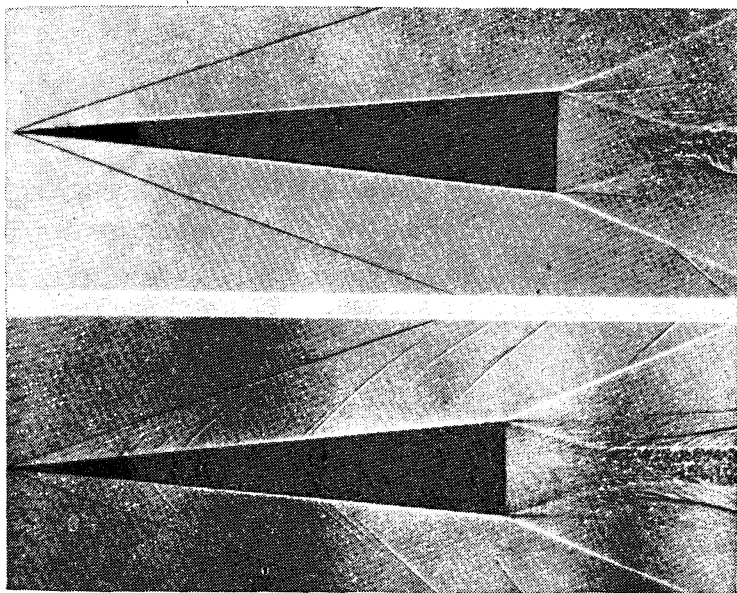


Рис. 15. Переход ламинарного течения в турбулентное на крыле. По неопубликованной работе К. Никкеля (K. Nickel). Крыловой профиль NASA 0015; ширина профиля $l=110$ мм; число Рейнольдса $Re=Vl/\nu=4 \cdot 10^5$; скорость набегающего течения $V=42$ м/сек; коэффициент подъемной силы $c_d \approx 0,05$. Крыло было вплотную обернуто полосой бумаги, покрытой смесью керосина и сажи. После кратковременного обтекания крыла полоса бумаги была снята, развернута и дана картину, изображенную на рисунке. На части подсасывающей поверхности крыла переход был вызван искусственно посредством проволоки (диаметр 0,5 мм), укрепленной на крыле поперек набегающего течения. На напорной поверхности крыла было укреплено зерно шероховатости (полусфера радиуса 0,5 мм), позади которого возникла турбулентная область в виде клина. В остальных частях обтекания поверхностей крыла переход происходил «естественным» путем.

младшим¹⁾ при свободном полете конуса через рабочую часть баллистической аэродинамической трубы, причем давление в рабочей части было выше атмосферного. На верхнем снимке пограничный слой ламинарен, на нижнем — частично ламинарен и частично турбулентен. Примечательно, что при течении в пограничном слое, так же,



Р и с. 16. Теневые снимки конуса во время свободного полета со сверхзвуковой скоростью ($M=3,2$). По В. Р. Битту¹⁾. На верхнем снимке весь пограничный слой ламинарен; на нижнем снимке — частично турбулентен.

как и при течении в трубе, ламинарные и турбулентные состояния в области перехода перемежаются. Объяснение этому явлению будет дано в гл. IV.

γ) *Ламинаризованные профили.* Сопротивление тонких тел, при обтекании которых не возникает отрыва

¹⁾ Witt W. R. jr., Free flight boundary layer transition studies on cones. Доклад на Midwestern Conference on fluid and solid mechanics at Purdue University 9—10 сентября 1955.

течения, состоит главным образом из сопротивления трения. Это сопротивление можно еще больше понизить, если посредством специальных мер сохранить пограничный слой на теле ламинарным на возможно большей длине, т. е. переместить точку перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный возможно дальше вниз по течению. Уменьшение сопротивления, возникающее в результате такого перемещения точки перехода, объясняется тем, что при ламинарном течении сопротивление трения значительно меньше, чем при турбулентном течении.

Для продольно обтекаемой пластинки сохранение пограничного слоя ламинарным и связанное с этим уменьшение сопротивления достигается отсасыванием пограничного слоя. Подробнее об этом будет сказано в гл. VI. Значительно проще можно сохранить пограничный слой ламинарным для профилированных тел. Для этого последним придается надлежащим образом подобранная форма.

Такой способ основан на очень сильной зависимости перехода ламинарного течения в турбулентное от градиента давления внешнего течения (см. по этому поводу гл. V). В области падения давления пограничный слой в общем случае остается ламинарным, в то время как в области даже с незначительным повышением давления обычно происходит переход ламинарного течения в турбулентное. Следовательно, положение точки минимума давления определяет в первом приближении положение места перехода. Так как положение точки минимума давления в первом грубом приближении определяется положением наибольшей толщины профиля, то отсюда вытекает простое правило: для того чтобы получить профиль с ламинарным пограничным слоем на длинном участке и тем самым с малым сопротивлением (такие профили называются *ламинаризованными*), следует переместить положение наибольшей толщины профиля возможно дальше вниз по течению.

Для примера на рис. 17 изображены кривые коэффициента сопротивления и распределения давления для двух симметричных крыловых профилей при симметричном обтекании. Первый из профилей является «нор-

мальным» профилем — его наибольшая толщина расположена от носика на расстоянии 30% длины хорды l . Второй профиль представляет собой ламинаризованный профиль — его наибольшая толщина расположена от носика на расстоянии 45% длины хорды l . У нормального профиля точка минимума давления лежит на расстоянии $0,1l$ от носика, у ламинаризованного — на расстоянии $0,65l$. Значения коэффициента сопротивления для ламинаризованного профиля приблизительно

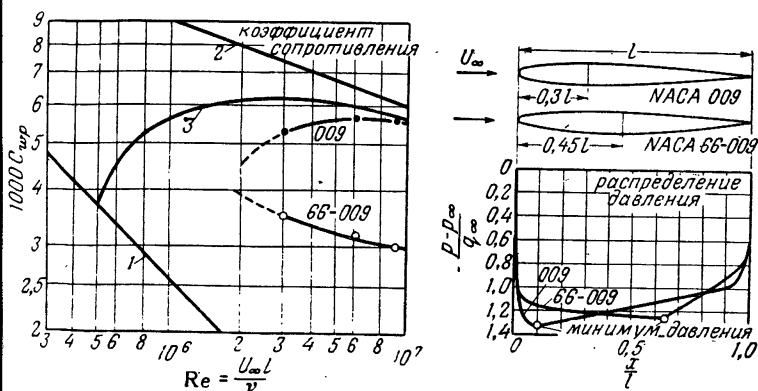


Рис. 17. Коэффициенты сопротивления и распределение давления для «нормального» и для ламинаризованного профилей (см. примечание 2 на стр. 34). Кривая 1 — коэффициент сопротивления продольно обтекаемой плоской пластинки при ламинарном течении; кривая 2 — тот же коэффициент при полностью турбулентном течении; кривая 3 — тот же коэффициент при ламинарном течении на передней половине пластинки и турбулентном — на задней половине. $Re_{x \text{ кр.}} = 5 \cdot 10^5$.

в два раза меньше соответствующих значений для нормального профиля.

Для сравнения на рис. 17 изображены также кривые коэффициента сопротивления продольно обтекаемой плоской пластинки при полностью ламинарном пограничном слое (кривая 1), при полностью турбулентном пограничном слое (кривая 2) и при частично ламинарном, частично турбулентном пограничном слое с точкой перехода при числе Рейнольдса $Re_{x \text{ кр.}} = 5 \cdot 10^5$ (кривая 3).

Сильное влияние градиента давления на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный впервые было обнаружено чисто экспериментальным путем

Г. Дёчем¹⁾ и вызвало в свое время сенсацию. Впоследствии ламинаризованные профили в большом числе были экспериментально исследованы в США для авиационных целей²⁾. Разъяснить этот эффект теоретически удалось только во время второй мировой войны на основе теории устойчивости ламинарного течения (см. гл. V).

Глава II

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

§ 3. Предварительные замечания

Теоретические исследования, имевшие целью объяснить описанное выше явление перехода ламинарного течения в турбулентное, начались весьма давно, но к успеху привели только в последнее время. В основе всех этих исследований лежит представление, что ламинарное течение подвергается воздействию каких-то малых возмущений, которые в случае течения, например в трубе, связаны с условиями при входе в трубу, а в случае течения в пограничном слое на обтекаемом теле — с шероховатостью стенки или с неравномерностью внешнего течения.

Каждая теория стремилась проследить за развитием во времени возмущений, наложенных на основное течение, причем форма этих возмущений особо определялась в каждом отдельном случае. Решающим вопросом, подлежавшим решению, было установление того, затухает или нарастает с течением времени возмущающее движение. Затухание возмущений со временем должно было означать, что основное течение устойчиво; наоборот,

¹⁾ Doetsch H., Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner c_d -Werte. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch., I (1940), 54.

²⁾ Abbott J. H., Doenhoff A. E. and Stivers L. S., Summary of airfoil data. NACA Rep. 824, 1945.

нарастание возмущений со временем должно было означать, что основное течение неустойчиво и поэтому возможен его переход в турбулентное течение. Таким путем была создана *теория устойчивости* ламинарного течения, целью которой является теоретическое вычисление критического числа Рейнольдса для заданного ламинарного течения.

Предпосылкой такой теории устойчивости служило впервые высказанное О. Рейнольдсом¹⁾ следующее предположение: ламинарное течение, представляя собой решение гидродинамических дифференциальных уравнений и являясь поэтому всегда возможным течением, после перехода через определенную границу, а именно после достижения числом Рейнольдса критического значения, становится неустойчивым и переходит в турбулентное течение.

Над математическим обоснованием предположения Рейнольдса работали многие ученые в течение многих десятилетий. В частности, после самого О. Рейнольдса этой проблемой занимался лорд Рэлей²⁾. Эти теоретические исследования, приводившие к очень сложным расчетам, долгое время были безуспешными. Только в начале тридцатых годов текущего столетия Л. Прандтлю и его сотрудникам удалось удовлетворительно решить первоначально поставленную задачу — теоретически найти критическое число Рейнольдса. Спустя еще десять лет Х. Л. Драйдену и его сотрудникам удалось подтвердить теорию устойчивости экспериментально, причем получилось блестящее совпадение между теорией и экспериментом. Недавно Ц. Ц. Линь опубликовал книгу и обзорную статью по теории устойчивости

¹⁾ Reynolds O., Sci. Papers, т. 2, 1883; On the dynamic theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 1895 (имеется русский перевод: Рейнольдс О., Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия. В Сборнике «Проблемы турбулентности», Москва, 1936. — Прим. перев.).

²⁾ Lord Rayleigh, On the instability of certain fluid motions. Proc. Lond. Math. Soc., 11 (1880), 57; 19 (1887), 67 (Sci. Papers, т. 1, стр. 474; т. 3, стр. 17). См. также Sci. Papers, т. 4, 1895, стр. 203 и т. 6, 1913, стр. 197.

ламинарного течения¹⁾. См. также обзорную статью Г. Шлихтинга²⁾.

§ 4. Основы метода малых колебаний

При исследовании устойчивости ламинарного течения движение разлагается на основное, устойчивость которого подлежит исследованию, и на возмущающее, наложенное на основное. Введем прямоугольную систему координат и обозначим составляющие скорости основного течения, которое можно рассматривать как установившееся, через U , V , W , а давление через P . Основное течение представляет собой решение уравнений Навье — Стокса или уравнений пограничного слоя. Составляющие скорости и давление для переменного во времени возмущающего движения обозначим через u' , v' , w' и p' . Следовательно, составляющие скорости результирующего течения будут

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w', \quad (4.1)$$

а давление —

$$p = P + p'. \quad (4.2)$$

При этом в большей части случаев предполагается, что скорости и давление возмущающего течения малы по сравнению со скоростями и давлением основного течения.

Исследование устойчивости возмущенного движения может быть выполнено двумя различными методами. При пользовании первым методом определяется только изменение во времени энергии возмущающего движения (*энергетический метод*). Вопрос об устойчивости решается в зависимости от того, уменьшается во времени

¹⁾ Lin C. C., The theory of hydrodynamic stability, University Press, Cambridge, 1955 (имеется русский перевод: Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, Москва, 1958. — Прим. перев.); On the Instability of Laminar Flow and its Transition to Turbulence. Boundary Layer Research, Symposium Freiburg i. Br. 1957, Springer, Berlin, 1958, стр. 144.

²⁾ Schlichting H., Über die Theorie der Turbulenzentstehung. Zusammenfassender Bericht. Vortrag VDI-Hauptversammlung 1949. Forsch.-Geb. Ing.-Wes., 16 (1950), 65.

или, наоборот, нарастает энергия возмущающего движения. При этом допускается любая форма возмущающего движения, однако при условии, что она совместима с уравнением неразрывности. Этот энергетический метод, разрабатывавшийся главным образом Г. А. Лоренцом¹⁾, не привел к успеху, поэтому мы не будем его рассматривать.

При пользовании вторым методом допускаются только такие возмущающие движения, которые совместимы с гидродинамическими уравнениями движения, и исследуется развитие во времени возмущающего движения на основе этих же дифференциальных уравнений. Этот метод, называемый *методом малых колебаний*, привел в настоящее время к полному успеху.

Поясним этот метод на примере двумерного основного несжимаемого течения и двумерного же возмущающего движения. Уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности для плоского течения несжимаемой жидкости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Ограничимся рассмотрением особенно простого случая (рис. 18), когда составляющая скорости U зависит только от координаты y , т. е. $U = U(y)$, а остальные две составляющие равны нулю, т. е. $V = W \equiv 0$. Такое слоистое течение точно осуществляется в канале или в трубе с постоянным поперечным сечением на достаточно большом расстоянии от входного сечения (ось x параллельна оси канала, рис. 18,а).

¹⁾ Lorentz H. A., Abh. theor. Phys., т. 1, 1907, стр. 43 [переработка статьи из Zittingsverlag Akad. v. Wet. Amsterdam, 6 (1897), 28]. См. также статью Prandtl L., The mechanics of viscous fluids в книге Durand F. W., Aerodynamic Theory, т. 3, 1935 (имеется русский перевод: Дюрэнд Ф. В., Аэродинамика, т. 3, Москва, 1938. — Прим. перев.).

Течение в пограничном слое можно рассматривать приближенно как такое же слоистое течение, так как зависимость основного течения от продольной координаты x значительно слабее, чем от поперечной координаты y (рис. 18,б). Однако давление основного течения следует считать зависящим также от x , т. е. считать

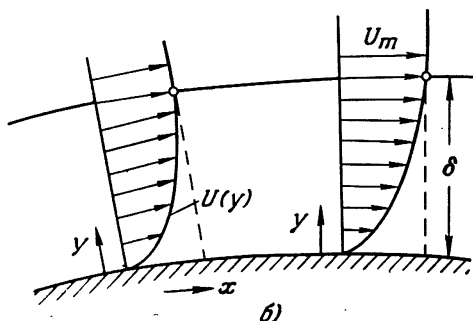
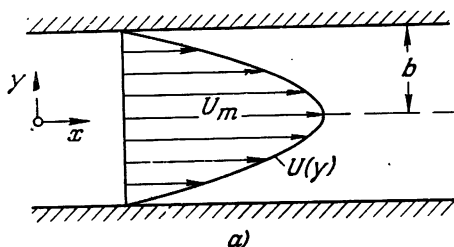


Рис. 18. К исследованию устойчивости двумерного основного течения $U(y)$; а) течение в канале; б) течение в пограничном слое.

$P = P(x, y)$, так как движущей силой течения является градиент давления $\partial P / \partial x$. Следовательно, рассматриваемое основное течение определяется величинами

$$U(y), \quad V = W \equiv 0, \quad P(x, y). \quad (4.4)$$

Наложим на это основное течение двумерное возмущающее движение, зависящее не только от координат x и y , но также от времени t . Обозначим составляющие ско

рости и давление этого течения через

$$u'(x, y, t), \quad v'(x, y, t), \quad p'(x, y, t). \quad (4.5)$$

Таким образом, составляющие скорости и давление результирующего движения, согласно равенствам (4.1) и (4.2), будут

$$u = U + u', \quad v = v', \quad w = 0, \quad p = P + p'. \quad (4.6)$$

Основное течение, определяемое величинами (4.4), согласно предположению, является решением уравнений Навье — Стокса. Результирующее движение, определяемое величинами (4.6), также должно удовлетворять уравнениям Навье — Стокса. Наложенное возмущающее движение, определяемое величинами (4.5), будем предполагать «малым» в том смысле, что всеми квадратичными членами можно пренебречь по сравнению с линейными членами. Более подробные сведения о форме возмущающего движения будут даны в следующем параграфе. Задача исследования на устойчивость состоит в том, чтобы выяснить, затухает или нарастает со временем возмущающее движение для заданного основного течения. В зависимости от того, затухает ли возмущающее движение со временем или нарастает, основное течение называется *устойчивым* или *неустойчивым*.

Подставив значения (4.6) в уравнения Навье — Стокса (4.3) для двумерного неустановившегося течения несжимаемой жидкости и отбросив члены, квадратичные относительно составляющих скорости возмущающего движения, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta u' \right), \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} &= \nu \Delta v', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

где Δ означает оператор $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Если учесть, что основное течение, взятое само по себе, удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса, то предыдущие уравнения

примут более простой вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= \nu \Delta u', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} &= \nu \Delta v', \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (4.8)$$

Таким образом, мы имеем три уравнения для определения трех величин u' , v' , p' . Граничными условиями будут равенства нулю составляющих u' и v' скорости возмущающего движения на ограничивающих стенках (*условие прилипания*). Из двух уравнений (4.7) можно легко исключить давление p' , следовательно, для определения u' и v' остается два уравнения (включая уравнение неразрывности).

Можно было бы выдвинуть возражение против допущения, что для определения течения в пограничном слое пригодна система величин (4.4), т. е. против пренебрежения нормальной составляющей V скорости основного течения и зависимостью продольной составляющей U от координаты x . Однако И. Преч¹⁾ доказал, что если сохранить в расчетах величину V и зависимость от x , то обусловленные этим члены не оказывают никакого влияния на исследование устойчивости пограничного слоя. См. по этому поводу также статью Чжена²⁾

§ 5. Форма возмущающего движения

Пусть на основное течение, происходящее в направлении оси x со скоростью $U(y)$ (рис. 18), наложено возмущающее течение, состоящее из отдельных колебаний, причем каждое такое колебание представляет собою волну, распространяющуюся в направлении оси x . Введя для возмущающего движения, предполагаемого

¹⁾ Pretsch J., Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. I (1941), 58.

²⁾ Cheng S. J., On the stability of laminar boundary layer flow. Quart. Appl. Math., 11 (1953), 346.

двумерным, функцию тока $\psi(x, y, t)$, мы сумеем сразу проинтегрировать уравнение неразрывности (4.8). Предположим, что функцию тока для отдельного колебания возмущающего движения можно взять в виде

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (5.1)$$

где $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ — есть комплексная амплитуда¹⁾. Функцию, представляющую любое двумерное возмущающее движение, можно разложить в ряд Фурье и представить в виде отдельных возмущений с функциями тока вида (5.1). В равенстве (5.1) α есть вещественная величина, связанная с длиной λ волны возмущения соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Величина β — комплексная и может быть представлена в виде

$$\beta = \beta_r + i\beta_i,$$

где β_r — есть круговая частота отдельного колебания, а β_i — коэффициент нарастания, т. е. величина, позволяющая судить, нарастает или затухает колебание. Если $\beta_i < 0$, то колебание затухает и ламинарное течение устойчиво; если же $\beta_i > 0$, то имеет место неустойчивость.

Кроме величин α и β , целесообразно ввести также их отношение

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i. \quad (5.2)$$

Величина c_r представляет собой скорость распространения волн в направлении x (фазовая скорость), а c_i опять является величиной, позволяющей судить о затухании или нарастании колебания. А именно, если $c_i < 0$, то происходит затухание, если же $c_i > 0$, то имеет место нарастание колебания.

¹⁾ Физический смысл имеет только вещественная часть $\Re$ функции тока, т. е.

$$\Re(\psi) = e^{\beta_i t} [\varphi_r \cos(\alpha x - \beta_r t) - \varphi_i \sin(\alpha x - \beta_r t)].$$

Комплексная запись (5.1) применена ввиду ее удобства для расчетов.

Амплитуда φ возмущающего движения принята зависящей только от y потому, что основное течение также зависит только от y . Из равенств (5.1) находим для составляющих скорости возмущающего движения следующие выражения:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}, \quad (5.3)$$

$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}. \quad (5.4)$$

Подставив эти скорости в уравнения (4.6) и (4.7) и исключив давление, получим для определения амплитуды $\varphi(y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = -\frac{i}{\alpha \text{Re}} (\varphi''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi). \quad (5.5)$$

Это уравнение, называемое *дифференциальным уравнением возмущающего движения*, или *уравнением Орра — Зоммерфельда*, является исходным пунктом теории устойчивости ламинарного течения. Подчеркнем, что уравнение (5.5) приведено к безразмерному виду, для чего все длины разделены на надлежащим образом выбранную характерную длину (например, на ширину b канала или на толщину δ пограничного слоя, см. рис. 18), а все скорости — на максимальную скорость U_m основного течения: Штрихи означают дифференцирование по безразмерной координате y/δ , а

$$\text{Re} = \frac{U_m b}{\nu} \quad \text{или} \quad \text{Re} = \frac{U_m \delta}{\nu}$$

представляет собой число Рейнольдса, характеризующее исследуемое ламинарное течение (основное течение). Члены левой части уравнения (5.5) получаются из инерционных членов уравнений движения, а члены правой части — из членов, учитывающих трение. Граничные условия, например, для течения в пограничном слое заключаются в равенстве нулю обеих составляющих скорости возмущающего движения на стенке ($y = 0$) и

на большом расстоянии от стенки (внешнее течение). Следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y=0 \quad u'=v'=0, \text{ а потому } \varphi=0, \varphi'=0, \\ \text{при } y=\infty \quad u'=v'=0, \text{ а потому } \varphi=0, \varphi'=0. \end{array} \right\} (5.6)$$

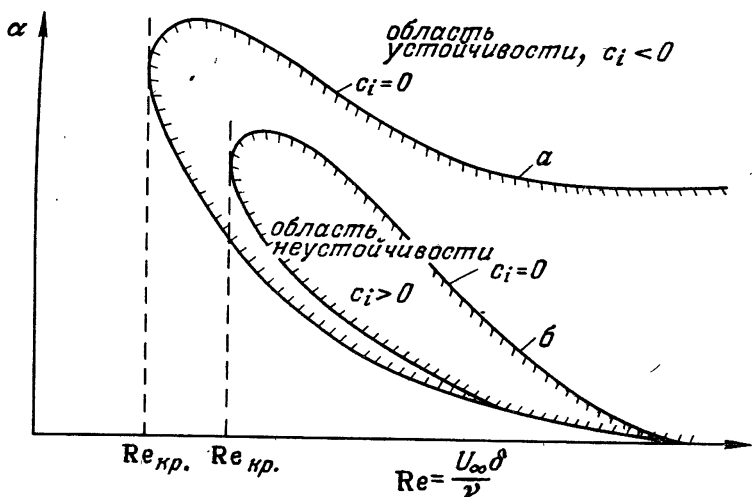
Против принятой здесь формы возмущающего движения можно было бы сделать следующее возражение: для полного исследования устойчивости необходимо рассматривать трехмерное возмущающее движение даже в том случае, если основное течение двумерно. Однако Г. Б. Сквайр¹⁾ показал, что это возражение неосновательно. А именно, он предположил, что возмущающее движение имеет периодическую составляющую также в направлении z , и выяснил, что при таких трехмерных возмущениях плоскопараллельное течение становится неустойчивым при более высоких числах Рейнольдса, чем при двумерных возмущениях. Следовательно, в этом смысле двумерные возмущения более «опасны», чем трехмерные. Это означает, что для определения критического числа Рейнольдса как самой нижней границы устойчивости следует исходить из рассмотрения именно двумерных возмущений.

§ 6. Задача на собственные значения

Исследование устойчивости ламинарного течения представляет собой не что иное, как задачу на собственные значения дифференциального уравнения возмущающего движения (5.5) при граничных условиях (5.6). Если основное течение $U(y)$ задано, то уравнение (5.5) содержит четыре параметра, а именно Re , α , c_r и c_i . Из этих параметров число Рейнольдса основного течения по существу также задано. Кроме того, можно считать заданной и длину волны $\lambda = 2\pi/\alpha$ возмущающего движения. В таком случае дифференциальное уравнение (5.5) с граничными условиями (5.6) дает для каждой

¹⁾ Squire H. B., On the stability of threedimensional disturbances of viscous fluid between parallel walls. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 142 (1933), 621.

пары значений α , Re собственную функцию $\varphi(y)$ и комплексное собственное значение $s = c_r + ic_i$. Величина c_r есть фазовая скорость заданного отдельного колебания, а величина c_i определяет своим знаком либо нарастание ($c_i > 0$), либо затухание ($c_i < 0$) колебания. Предельный случай $c_i = 0$ или, что то же самое, $\beta_i = 0$ соответствует нейтральному (безразличному) возмущению.



Р и с. 19. Нейтральные кривые, полученные в результате исследования устойчивости; а) «невязкая» неустойчивость; б) «вязкая» неустойчивость.

Результат расчета заданного ламинарного течения на устойчивость можно изобразить графически, соединив в плоскости Re , α кривыми все точки, которым соответствуют одинаковые значения c_i (или s). Особый интерес представляет кривая $s = 0$ (рис. 19), отделяющая область устойчивых значений α и Re от области неустойчивых значений α и Re и поэтому называемая *нейтральной кривой*. В свою очередь на этой кривой главный интерес представляет точка с наименьшим числом Рейнольдса, лежащая на касательной, параллельной оси α . При еще более низких значениях числа Рейнольдса все отдельные колебания затухают, а при более высоких —

по крайней мере некоторые отдельные колебания нарастают. Наименьшее число Рейнольдса, определяемое нейтральной кривой, представляет собой *теоретическое критическое число Рейнольдса* исследуемого ламинарного течения; оно называется также *пределом устойчивости*.

Упомянутые выше экспериментальные результаты, относящиеся к переходу ламинарной формы течения в турбулентную, дают основание считать, что при малых числах Рейнольдса, при которых течение остается ламинарным, возмущения с любой длиной волны всегда затухают, в то время как при более высоких числах Рейнольдса, когда течение турбулентно, по крайней мере некоторые возмущения с определенной длиной волны нарастают. Необходимо теперь же подчеркнуть следующее важное обстоятельство: нельзя ожидать, что теоретическое критическое число Рейнольдса, полученное посредством исследования устойчивости, совпадает с тем экспериментально определенным числом Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную.

В самом деле, теоретическое критическое число Рейнольдса, полученное путем исследования устойчивости, например пограничного слоя на стенке, определяет ту точку на стенке, дальше которой по течению происходит нарастание некоторых отдельных колебаний. Однако очевидно, что должно пройти некоторое время, прежде чем из нарастания этих возмущений возникнет турбулентность. До наступления этого момента возмущение успеет распространиться вниз по течению на некоторое расстояние. Поэтому следует ожидать, что точка наблюдаемого перехода ламинарной формы течения в турбулентную должна лежать ниже по течению, чем точка, соответствующая теоретически вычисленному пределу устойчивости.

Другими словами, экспериментальное критическое число Рейнольдса больше теоретического критического числа Рейнольдса и притом безразлично, составлены ли эти числа для местной длины или для толщины пограничного слоя. Для того чтобы различать точки, соответствующие теоретическому и экспериментальному числам

Рейнольдса, будем называть ту из них, в которой достигается теоретическое критическое число Рейнольдса (предел устойчивости), *точкой потери устойчивости*, а ту, в которой возникает турбулентность, *точкой перехода* ламинарной формы течения в турбулентную.

Математическая разработка проблемы устойчивости, о которой мы дали только краткое представление, чрезвычайно трудна. Именно по этой причине понадобились десятилетия упорного труда, прежде чем была достигнута поставленная цель теоретического определения критического числа Рейнольдса. Само собой понятно, что в рамках настоящей книги невозможно дать исчерпывающее изложение теории устойчивости ламинарного течения, поэтому мы ограничимся только обзором наиболее важных результатов.

§ 7. Общие свойства дифференциального уравнения возмущающего движения

Имеющиеся экспериментальные результаты дают основание считать, что предел устойчивости $c_i = 0$ достигается при больших числах Рейнольдса, поэтому естественно попытаться упростить общее дифференциальное уравнение возмущающего движения (5.5), отбросив в нем все члены правой части. В самом деле, эти члены, зависящие от вязкости, содержат малый множитель $1/Re$, а потому ими можно пренебречь по сравнению с инерционными членами, входящими в левую часть уравнения. Тогда мы получим уравнение

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U''\varphi = 0, \quad (7.1)$$

называемое *дифференциальным уравнением возмущающего движения без учета вязкости*. Так как порядок этого уравнения только второй, то из четырех граничных условий (5.6) полного дифференциального уравнения возмущающего движения (5.5) теперь можно удовлетворить только двум условиям. Поскольку мы отбросили члены, зависящие от вязкости, оставшимися граничными условиями будут: в случае течения в канале — равенство нулю нормальной составляющей скорости на обеих стенках, а в случае течения в пограничном слое —

равенство нулю той же составляющей скорости на стенке и на большом расстоянии от последней. Следовательно, в последнем случае мы будем иметь

$$\varphi = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } \varphi = 0 \text{ при } y = \infty. \quad (7.2)$$

Отбрасывание членов, зависящих от вязкости, представляет собой операцию, чреватую очень серьезными последствиями. В самом деле, понижая порядок дифференциального уравнения с четвертого до второго, мы, возможно, теряем важные свойства общего дифференциального уравнения возмущающего движения. Тем не менее еще Рэлею¹⁾ удалось получить некоторые важные выводы об устойчивости ламинарного профиля скоростей на основе дифференциального уравнения возмущающего движения без учета вязкости. Эти выводы впоследствии были подтверждены и для случая, когда влияние вязкости учитываются, т. е. для полного дифференциального уравнения (5.5).

Первым таким весьма общим выводом является теорема, выясняющая роль точки перегиба на профиле скоростей. Согласно этой теореме, профили скоростей, имеющие точку перегиба, неустойчивы. Рэлей вывел этот критерий, т. е. роль точки перегиба, только как необходимое условие для возникновения неустойчивых колебаний. Впоследствии В. Толмин²⁾ доказал, что этот критерий дает также достаточное условие для существования нарастающих колебаний. Этот критерий имеет фундаментальное значение для всей теории устойчивости, так как он — до внесения поправки на влияние вязкости — дает первую грубую классификацию всех ламинарных течений с точки зрения их устойчивости.

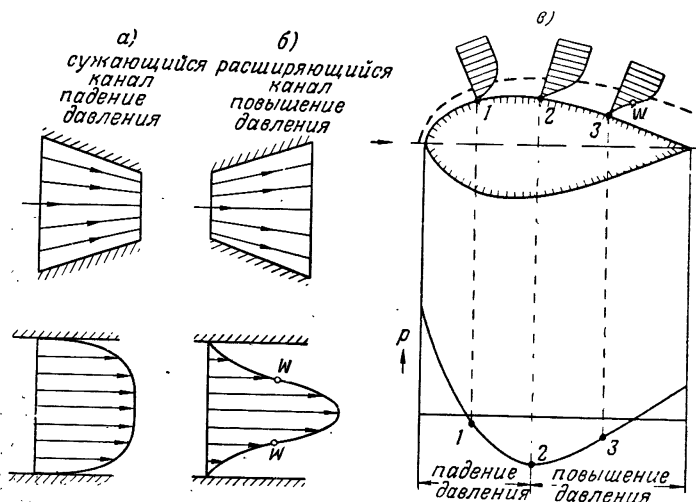
Практически весьма важно следующее обстоятельство: существование точки перегиба у профиля скоростей непосредственно связано с градиентом давления течения. При течении в сужающемся канале (рис. 20, а), когда имеет место падение давления в направлении

¹⁾ Lord Rayleigh, Sci. Papers, т. 1, стр. 474, 1880; т. 3, стр. 17, 1887; т. 4, стр. 203, 1895; т. 6, стр. 197, 1913.

²⁾ Tollmien W., Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. Fachgr. I, 1 (1935), 79.

течения, получается целиком выпуклый профиль скоростей без точек перегиба. Наоборот, при течении в расширяющемся канале (рис. 20,б), когда имеет место повышение давления в направлении течения, получается заостренный профиль скоростей с точками перегиба.

Такая же разница в форме профиля скоростей наблюдается и в ламинарном пограничном слое на обтекаемом теле (рис. 20,в). Согласно теории пограничного



Р и с. 20. Ламинарные профили скоростей; а) в сужающемся канале; б) в расширяющемся канале; в) в пограничном слое. W — точка перегиба профиля скоростей.

слоя, профили скоростей в области падения давления не имеют точек перегиба; наоборот, в области повышения давления они всегда имеют точку перегиба. Следовательно, теорема о роли точки перегиба позволяет сразу судить о влиянии градиента давления на устойчивость, особенно для течения в пограничном слое, а именно: падение давления благоприятствует устойчивости течения, повышение же давления, наоборот, способствует неустойчивости.

Таким образом, при обтекании тела пограничный слой в области повышения давления (замедленное те-

чение) обладает значительно большей тенденцией стать турбулентным, чем в области падения давления (ускоренное течение). Отсюда следует, что при обтекании тела положение точки минимума давления оказывает решающее влияние на положение точки перехода. В первом, грубом, приближении можно считать, что точка перехода лежит немного ниже по течению точки минимума давления.

Влияние вязкости, которым мы пренебрегли в предыдущих рассуждениях, мало изменяет полученный результат. Только что рассмотренная неустойчивость, возникающая в предположении, что трение не влияет на возмущающее движение, называется *невязкой неустойчивостью*. На диаграмме устойчивости (рис. 19) невязкая неустойчивость определяется нейтральной кривой типа *a*. Эта кривая имеет горизонтальную асимптоту, проходящую на конечном расстоянии от оси Re . Следовательно, уже при $Re = \infty$ существует некоторая неустойчивая область волн с конечной длиной. При переходе к меньшим числам Рейнольдса эта неустойчивая область отделяется от устойчивой области нейтральной кривой.

В противоположность невязкой неустойчивости *вязкая неустойчивость* с нейтральной кривой типа *b* (рис. 19) возникает в тех случаях, когда профили скоростей, например ламинарного пограничного слоя, не имеют точки перегиба. Теперь неустойчивая область волн с конечной длиной стягивается к нулю, и неустойчивые колебания существуют только при конечных числах Рейнольдса. В целом при невязкой неустойчивости (профили скоростей с точкой перегиба) область нарастающих колебаний значительно шире, чем при вязкой неустойчивости (профили скоростей без точки перегиба).

Вязкую неустойчивость можно обнаружить только посредством использования полного дифференциального уравнения возмущающего движения, поэтому ее исследование сложнее, чем исследование невязкой неустойчивости. Простейший пограничный слой, получающийся при продольном течении вдоль плоской стенки без градиента давления, принадлежит к типу течений, при которых существует только вязкая неустойчивость. Именно по этой

причине его успешное исследование было завершено позже, чем исследования других более сложных случаев обтекания.

Второй общий и важный вывод сводится к следующему: при течении в пограничном слое скорость распространения волн c_r нейтральных возмущений ($c_i = 0$) меньше максимальной скорости основного течения, т. е. $c_r < U_m$. И эта теорема впервые была доказана Рэлеем¹⁾, правда, при некоторых ограничивающих предположениях. Позже она была доказана в более общем виде В. Толмином²⁾. Согласно этой теореме, внутри течения существует в случае нейтральных возмущений такой слой $y = y_{кр.}$, в котором $U - c = 0$. Это обстоятельство так же, как и существование точки перегиба на профиле скоростей, имеет фундаментальное значение для теории устойчивости. В самом деле, точка $U - c = 0$ является особой точкой дифференциального уравнения возмущающего течения без учета трения (7.1). В этой точке вторая производная ϕ'' равна бесконечности, если только здесь не обращается в нуль вторая производная U'' . Слой $y = y_{кр.}$, в котором $U = c$, называется *критическим слоем* основного течения. Если $U''_{кр.} \neq 0$, то в окрестности критического слоя, где можно принять, что

$$U - c = U'_{кр.} (y - y_{кр.}),$$

вторая производная ϕ'' имеет бесконечность порядка

$$\frac{U''_{кр.}}{U'_{кр.} (y - y_{кр.})},$$

и поэтому составляющая скорости в направлении x здесь равна

$$u' = \phi' \sim \frac{U''_{кр.}}{U'_{кр.}} \ln (y - y_{кр.}). \quad (7.3)$$

Следовательно, составляющая u' скорости возмущающего течения, параллельная стенке, при ее определении

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 47.

²⁾ Tollmien W., Göttinger Monographie über Grenzschichten, часть В 3, 1946.

из дифференциального уравнения возмущающего течения без учета трения имеет в критическом слое бесконечно большое значение, за исключением того случая, когда кривизна профиля скоростей в критическом слое равна нулю. Эта особенность, играющая при исследовании устойчивости фундаментальную роль, исчезает только после того, как в расчет вводится трение.

Из обеих теорем Рэлея следует, что кривизна профиля скоростей оказывает большое влияние на устойчивость ламинарного течения. В связи с этим очевидно, что при исследовании устойчивости должны предъявляться весьма высокие требования к точности вычисления не только самих профилей скоростей $U(y)$, но и второй производной d^2U/dy^2 .

Глава III

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОДОЛЬНО ОБТЕКАЕМОЙ ПЛАСТИНКЕ И ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПУАЗЕИЛЯ

§ 8. Некоторые прежние исследования устойчивости

После Рэлея при исследовании устойчивости сначала ограничивались рассмотрением исключительно течения Куэтта, т. е. течения между двумя параллельными стенками с линейным распределением скоростей. Очень тщательные исследования, выполненные А. Зоммерфельдом¹⁾, Р. Мизесом²⁾ и Л. Хопфом³⁾ с полным учетом вязкости, показали, что течение Куэтта устойчиво при всех числах Рейнольдса и при возмущениях с любой

¹⁾ Sommerfeld A., Atti del congr. Internat. dei Mat., Rome, 1908.

²⁾ Mises R., Heinrich Weber Festschrift (1912); Jahresber. dtsch. Math.-Ver. 1912.

³⁾ Hopf L., Ann. d. Phys., 44 (1914), 1; 59 (1919), 538. См. также обзорную статью: Noether F., Z. angew. Math. Mech., 1 (1921), 125.

длиной волны. Этот результат, полностью противоречащий опыту, привел к тому, что метод малых колебаний стали считать непригодным для решения проблемы перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Однако впоследствии выяснилось, что такой взгляд на метод малых колебаний неоправдан, так как, во-первых, течение Куэтта является слишком специальным примером и, во-вторых, нельзя пренебрегать столь существенным обстоятельством, как кривизна профиля скоростей.

В 1921 г. теоретическим исследованием проблемы устойчивости занялся Л. Прандтль¹⁾. Для изучения устойчивости ламинарного пограничного слоя вдоль плоской стенки Л. Прандтль, как и ранее Рэлея, в целях математического упрощения заменил действительный профиль скоростей с непрерывным изменением кривизны профилем скоростей, составленным из отрезков прямых линий (рис. 21). Расчеты, выполненные О. Титъенсом²⁾ на основе дифференциального уравнения возмущающего движения без учета вязкости, показали, что выпуклые профили скоростей (рис. 21,а и 21,б) обеспечивают устойчивость движения, а невыпуклые профили (рис. 21,в и 21,г), наоборот, приводят к неустойчивости. В связи с этим возникло предположение, что профили скоростей с точкой перегиба (рис. 21,ж) неустойчивы, что впоследствии и было доказано Толмином³⁾ (см. гл. II).

С целью определения критического числа Рейнольдса как предела устойчивости для профилей скоростей неустойчивого типа (рис. 21, в и 21, г) Титъенс²⁾ сохранил в полном дифференциальном уравнении возмущающего движения также наибольшие по величине члены, зависящие от вязкости, и ожидал, что их сохранение позволит обнаружить демпфирующее действие трения. Влияние вязкости при сохранении этих членов проявлялось только на очень небольшом отрезке профиля скоростей

¹⁾ Prandtl L., Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. Mech., 1 (1921), 431; Phys. Z., 23 (1922), 19.

²⁾ Tietjens O., Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Диссертация, Cöttingen, 1922; Z. angew. Math. Mech., 5 (1925), 200.

³⁾ См. примечание 2 на стр. 47.

расположенном в непосредственной близости от стенки (выполнение условия прилипания).

Однако расчеты привели к совершенно неожиданному результату, а именно, выяснилось, что учёт влияния вязкости на возмущающее движение не только не оказывает стабилизирующего действия на профили скоростей

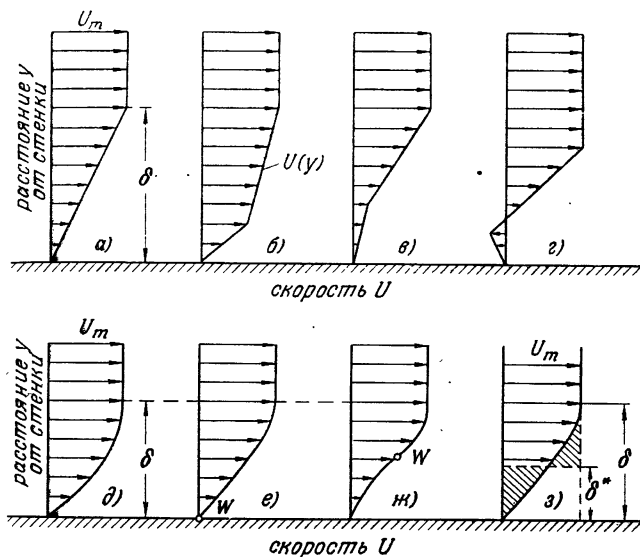


Рис. 21. К исследованию устойчивости профилей скоростей в ламинарном пограничном слое. $U(y)$ — распределение скоростей; U_m — скорость внешнего течения; δ — толщина пограничного слоя; δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя; W — точка перегиба профиля скоростей. Профили скоростей типа а, б, д, е устойчивы при $Re = \infty$; профили скоростей типа в, г, ж — неустойчивы. Профили типа д получаются при падении давления, типа е — при постоянном давлении, типа ж — при повышении давления.

неустойчивого типа (рис. 21, в и 21, г) при малых числах Рейнольдса, но даже приводит к тому, что профили, остающиеся при пренебрежении вязкостью устойчивыми (рис. 21, а и 21, б), становятся неустойчивыми при всех числах Рейнольдса и при любой длине волны возмущающих колебаний (из числа тех, к которым можно было применить приближенный метод исследования).

Разъяснение этого парадокса было дано В. Толмином¹⁾ в 1929 г. Толмин показал, что влияние вязкости на возмущающее движение необходимо учитывать не только в непосредственной близости от стенки, как это было сделано О. Титъенсом, но также в окрестности критического слоя, где скорость распространения волн возмущающего движения совпадает со скоростью основного течения и где, как было указано выше, составляющая u скорости возмущающего движения становится бесконечной, при условии, что кривизна профиля скоростей здесь не равна нулю.

В действительности в критическом слое скорость u остается конечной, тем не менее влияние вязкости на возмущающее движение здесь достаточно велико. Это влияние вязкости на критический слой может быть учтено только в том случае, если принимается в расчет кривизна профиля скоростей, что и было сделано В. Толмином в указанной работе. В результате для пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке получился предел устойчивости (критическое число Рейнольдса), хорошо совпадающее с измеренными значениями.

Предложенный В. Толмином метод расчета на устойчивость используется в настоящее время как основа для дальнейшего развития теории устойчивости, поэтому остановимся на нем несколько подробнее.

§ 9. Расчет нейтральной кривой по методу Толмина

Для того чтобы иметь возможность сформулировать краевую задачу для полного дифференциального уравнения возмущающего движения (5.5) с граничными условиями (5.6) необходимо сначала найти фундаментальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ этого уравнения. Так как отыскание четырех частных решений общего дифференциального уравнения возмущающего движения (5.5) весьма затруднительно, то поступают следующим образом: первую пару решений φ_1 и φ_2 определяют из дифферен-

¹⁾ Tollmien W., Über die Entstehung der Turbulenz. 1-oe сообщение, Nachr. Ges. Wissenschaften Göttingen, Math.-phys. Kl. 1929, 21.

циального уравнения возмущающего движения без учета трения (7.1), а вторую пару решений φ_3 и φ_4 находят из уравнения, получающегося из полного уравнения (5.5) путем отбрасывания всех членов, зависящих от вязкости, за исключением одного, наибольшего по величине.

а) *Решения без учета вязкости.* В качестве основного течения $U(y)$ возьмем пограничный слой (рис. 21, з), смыкающийся на конечном расстоянии δ от стенки с внешним течением $U = U_m = \text{const}$. Для области внешнего течения можно сразу указать частное решение дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения (7.1); это решение, если удовлетворить граничному условию при $y = \infty$, принимает вид

$$\varphi = e^{-\alpha y}. \quad (9.1)$$

Для нейтральных возмущений существует, как было показано выше, такое расстояние от стенки (критический слой), на котором $U - c_r = 0$. Обозначим это расстояние через $y = y_{\text{кр.}}$. В окрестности точки $y = y_{\text{кр.}}$ пару решений φ_1 и φ_2 дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения (7.1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= (y - y_{\text{кр.}}) P_1, \\ \varphi_2 &= P_2 + \varphi_1 \frac{U''_{\text{кр.}}}{U'_{\text{кр.}}} \ln(y - y_{\text{кр.}}), \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

где P_1 и P_2 суть ряды по степеням $y - y_{\text{кр.}}$, а $U'_{\text{кр.}}$ и $U''_{\text{кр.}}$ — значения производных dU/dy и d^2U/dy^2 в точке $y = y_{\text{кр.}}$. Так как производная φ'_2 при $y = y_{\text{кр.}}$ равна бесконечности, то из этого решения, не учитывающего трения, следует, что составляющая скорости возмущающего течения в направлении x принимает в критическом слое бесконечно большое значение. Следовательно, в окрестности точки $y = y_{\text{кр.}}$ решение φ_2 требует поправки, учитывающей трение. Одновременно эта поправка должна дать возможность выяснить, какую из ветвей многозначного логарифма следует выбрать при переходе от положительных значений $y - y_{\text{кр.}}$ к отрицательным.

б) *Поправка на трение.* Для того чтобы вычислить поправку на трение для решения φ_2 и найти другую пару решений φ_3, φ_4 , упростим дифференциальное уравнение возмущающего движения (5.5), а именно, сохраним в нем наибольшие по величине члены, зависящие от вязкости. Введя переменную η посредством равенства

$$\eta = \frac{y - y_{кр.}}{\varepsilon},$$

где

$$\varepsilon = (\alpha \operatorname{Re} U_{кр.}')^{-1/3}, \quad (9.3)$$

мы получим для $\varphi(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$i\varphi'''' + \eta\varphi'' = \varepsilon \frac{U_{кр.}''}{U_{кр.}'}, \quad (9.4)$$

причем ε представляет собой в общем случае малую величину. Поправку на трение для решения φ_2 мы найдем из этого уравнения, положив

$$\varphi_2^{(1)} = 1 + \varepsilon\varphi_{21}.$$

Подставив $\varphi_2^{(1)}$ в уравнение (9.4), мы получим для определения $\varphi_{21}(\eta)$ дифференциальное уравнение

$$i \frac{d^4 \varphi_{21}}{d\eta^4} + \eta \frac{d^2 \varphi_{21}}{d\eta^2} = \frac{U_{кр.}''}{U_{кр.}'}.$$

Решение этого уравнения следует сомкнуть при больших значениях η с решением φ_2 без учета вязкости. Подробное исследование, выполненное В. Толмином, показало, что если в решении (9.2), определяющем φ_2 , взять логарифм при $y - y_{кр.} > 0$ в виде чисто вещественного числа, то при отрицательных $y - y_{кр.}$ его следует взять в виде

$$\ln |y - y_{кр.}| - i\pi.$$

Это означает, что для составляющей u' скорости возмущающего движения следует взять при положительном $y - y_{кр.}$ значение

$$\frac{U_{кр.}''}{U_{кр.}'} \ln (y - y_{кр.}) \cos (\alpha x - \beta t), \quad (9.5)$$

а при отрицательном $y - y_{кр.}$ — значение

$$\frac{U''_{кр.}}{U'_{кр.}} \ln |y - y_{кр.}| \cdot \cos(\alpha x - \beta t) + \pi \frac{U''_{кр.}}{U'_{кр.}} \sin(\alpha x - \beta t). \quad (9.56)$$

Таким образом, при переходе через критический слой составляющая u' скорости возмущающего движения претерпевает скачок фазы, который сохраняется также при переходе к очень большому числу Рейнольдса. Этот скачок фазы имеет фундаментальное значение для механизма возмущающего движения.

Для определения второй пары решений φ_3, φ_4 следует положить в уравнении (9.4) правую часть равной нулю, т. е. исходить из уравнения

$$i\varphi''' + \eta\varphi'' = 0. \quad (9.6)$$

Следовательно, пара решений φ_3, φ_4 совсем не зависит от основного течения $U(y)$ и поэтому может быть вычислена раз навсегда. Граничные условия показывают, что из обоих решений φ_3 и φ_4 представляет интерес только то, которое при больших η сильно затухает. Пусть этим решением будет φ_3 . Проинтегрировав уравнение (9.6), мы получим

$$\varphi_3(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \int_{-\infty}^{\eta''} (\eta')^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\eta')^{2/3} \right] d\eta' d\eta'',$$

где $H_{1/3}^{(1)}$ есть функция Ганкеля первого рода. Эта функция была протабулирована сначала О. Титенсом¹⁾, а затем более точно Г. Хольштейном²⁾.

γ) *Задача на собственные значения.* Найдя решения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, мы можем сформулировать задачу на собственные значения следующим образом. Пусть основным течением $U(y)$ является течение в пограничном слое, которое при $y = \delta$ смыкается с постоянным внешним течением. Следовательно, решение дифференциального уравнения возмущающего движения без учета трения при

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 52.

²⁾ Holstein H., Über die äussere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen. Z. angew. Math. Mech., 30 (1950), 25.

$y > \delta$ имеет вид (9.1), поэтому при $y \gg \delta$ должно выполняться условие

$$\varphi' + \alpha\varphi = 0.$$

Общее решение полного дифференциального уравнения возмущающего движения получается из трех частных интегралов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ в виде суммы

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3.$$

Так как решение φ_3 при больших y сильно затухает, то при $y = \delta$ его можно не учитывать. Следовательно, первым граничным условием будет.

$$C_1\Phi_{1\delta} + C_2\Phi_{2\delta} = 0,$$

где для сокращения записи введены обозначения $\Phi_{v\delta} = \varphi'_{v\delta} + \alpha\varphi_{v\delta}$ ($v = 1, 2$). На стенке, где в соответствии с граничными условиями (5.6) φ и φ' равны нулю, должно быть принято во внимание решение φ_3 (решение с учетом вязкости). Следовательно,

$$C_1\varphi_{1\text{ ст.}} + C_2\varphi_{2\text{ ст.}} + C_3\varphi_{3\text{ ст.}} = 0,$$

$$C_1\varphi'_{1\text{ ст.}} + C_2\varphi'_{2\text{ ст.}} + C_3\varphi'_{3\text{ ст.}} = 0$$

(отмеченные индексом «ст.» значения относятся к стенке). Для того чтобы эти три однородные относительно C_1, C_2, C_3 уравнения имели решения, не равные нулю, должно выполняться условие

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1\text{ ст.}} & \varphi_{2\text{ ст.}} & \varphi_{3\text{ ст.}} \\ \varphi'_{1\text{ ст.}} & \varphi'_{2\text{ ст.}} & \varphi'_{3\text{ ст.}} \\ \Phi_{1\delta} & \Phi_{2\delta} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$\frac{\varphi_{3\text{ ст.}}}{\varphi'_{3\text{ ст.}}} = \frac{\varphi_{2\text{ ст.}}\Phi_{1\delta} - \varphi_{1\text{ ст.}}\Phi_{2\delta}}{\varphi'_{2\text{ ст.}}\Phi_{1\delta} - \varphi'_{1\text{ ст.}}\Phi_{2\delta}}. \quad (9.7)$$

Из этого уравнения должны быть определены для нейтрального колебания собственные значения, а именно, длина волны возмущения $\lambda = 2\pi/\alpha$, скорость распространения волн c , и число Рейнольдса Re . Это определение производится либо численным, либо графическим

способом. Правая часть уравнения (9.7), содержащая лишь оба решения без учета вязкости, зависит только от α и c_r . Левая же часть уравнения, содержащая лишь решение с учетом вязкости, т. е. решение φ_3 , зависит только от величины

$$\eta_{\text{ст.}} = -\frac{y_{\text{кр.}}}{\varepsilon} = -y_{\text{кр.}} (\alpha \operatorname{Re} U'_{\text{кр.}})^{1/3}.$$

Графическое решение комплексного уравнения (9.7) производится следующим образом. Сначала строится полярная диаграмма для функции, стоящей в левой части уравнения (9.7), причем величина $\eta_{\text{ст.}}$ берется в качестве параметра. Затем в тех же осях строится семейство полярных диаграмм для функции, стоящей в правой части уравнения, для чего величине c_r придаются фиксированные значения, а величина α принимается за параметр. Две точки пересечения обеих кривых определяют значения c_r , α и Re , необходимые для построения нейтральной кривой. Одной из точек пересечения соответствует точка на верхней ветви нейтральной кривой, а другой — точка на нижней ветви (см. рис. 23).

§ 10. Результаты для пограничного слоя на пластинке

Используя изложенный выше метод, В. Толмин¹⁾ впервые теоретически исследовал устойчивость пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластинке. За основу было взято распределение скоростей, вычисленное Г. Блазиусом²⁾ и изображенное на рис. 22. Профили скоростей в различных точках вдоль пластинки при таком распределении аффинно-подобны друг другу, т. е. они совпадают друг с другом, если скорости откладывать не для значений y , а для значений $y/\delta(x)$, где $\delta(x)$ есть толщина пограничного слоя, определяемая формулой

$$\delta = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}.$$

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 54.

²⁾ Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys., 56 (1908), 1.

Используемая в дальнейшем вместо δ толщина вытеснения δ^* (рис. 22) определяется формулой

$$\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (10.1)$$

Профиль скоростей Блазиуса имеет точку перегиба на стенке, следовательно, $d^2U/dy^2 = 0$ при $y = 0$. Таким образом, этот профиль, согласно теореме о роли точки перегиба (см. § 7), лежит как раз на границе между

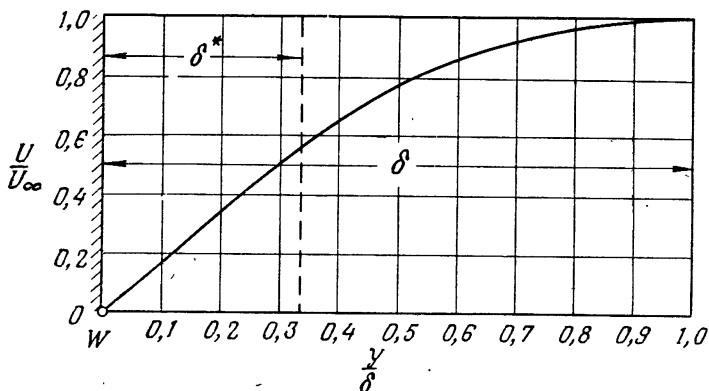


Рис. 22. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой пластинке. По Блазиусу (см. примечание 2 на стр. 59). δ — толщина пограничного слоя; $\delta = 5,2 \sqrt{\nu x / U_\infty}$; δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя, определяемая формулой (10.1); W — точка перегиба профиля скоростей.

профилями без точки перегиба, устойчивыми при расчете без учета трения, и профилями с точкой перегиба, неустойчивыми при расчете без учета трения. Профиль скоростей Блазиуса принадлежит к числу тех профилей, которые обладают только вязкой неустойчивостью, т. е. приводят к нарастанию колебаний лишь при учете влияния вязкости на развитие возмущающего движения.

Нейтральные кривые, полученные посредством расчета, кратко поясненного в § 9, изображены на рис. 23 и 24. Точки, лежащие на самих кривых, определяют состояния, соответствующие нейтральным колебаниям; точки, лежащие в областях внутри кривых, определяют состоя-

ния, соответствующие неустойчивым колебаниям, а точки, лежащие в областях вне кривых, — состояния, соответствующие устойчивым колебаниям. При очень больших числах Рейнольдса обе ветви каждой нейтральной кривой неограниченно приближаются к оси абсцисс, т. е. к нулевым значениям соответствующих ординат. Для наименьшего числа Рейнольдса, при котором еще возможно нейтральное возмущение, получается значение

$$\left(\frac{U_{\infty} \delta^*}{\nu}\right)_{\text{кр.}} = \text{Re}_{\text{кр.}} = 420 \text{ (точка потери устойчивости).}$$

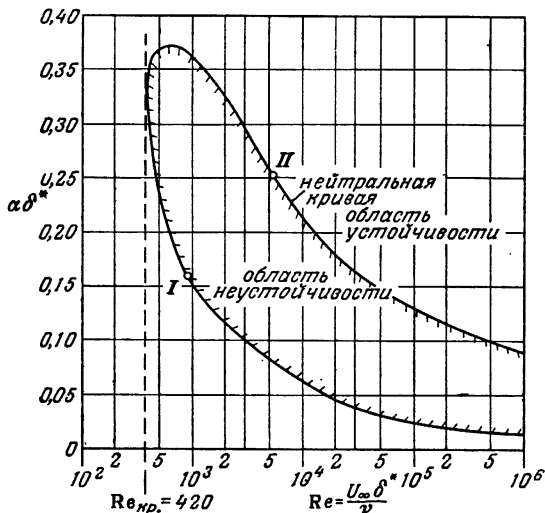
Точка на пластинке, в которой достигается это число Рейнольдса, и является точкой потери устойчивости пограничного слоя. Примечательно, что для ламинарного течения «опасны» только очень узкие интервалы как длин возмущающих волн, так и возмущающих частот. Подобно тому, как для числа Рейнольдса имеется нижняя граница, до достижения которой ламинарное течение всегда остается устойчивым, так и для каждого из возмущающих параметров существует верхняя граница, после перехода через которую неустойчивость не возникает. Расчеты Толмина (рис. 23 и 24) дали для этих границ следующие значения

$$\frac{c_r}{U_{\infty}} = 0,42, \quad \alpha \delta^* = 0,37, \quad \frac{\beta_r \delta^*}{U_{\infty}} = 0,15.$$

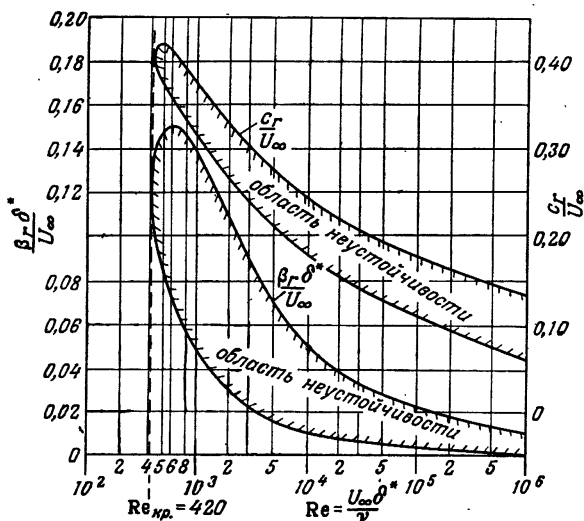
Обращает на себя внимание довольно большая длина волн неустойчивых возмущений по сравнению с толщиной пограничного слоя. В самом деле, наименьшая длина волны для неустойчивых возмущений равна

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{0,37} \delta^* = 17,0 \delta^* \approx 6 \delta.$$

Подробное сравнение этих теоретических результатов с опытами будет сделано в главе IV. Здесь же мы ограничимся только следующим замечанием. Необходимо иметь в виду, что точка, в которой ламинарный пограничный слой становится неустойчивым (точка потери устойчивости), должна лежать выше по течению точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную, так как турбулентность, возникающая вследствие



Р и с. 23. Нейтральная кривая, связывающая длину $\alpha\delta^*$ волны возмущения с числом Рейнольдса Re , для пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке (в предположении, что изменение скорости в пограничном слое определяется профилем Блазиуса, см. рис. 22).



Р и с. 24. Нейтральные кривые для частоты β_r и скорости c_r распространения волн возмущающего колебания в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке (в предположении, что изменение скоростей в пограничном слое определяется профилем Блазиуса, см. рис. 22).

нарастания возмущений, развивается именно на пути от точки потери устойчивости к точке перехода. В рассматриваемом случае такое расположение точки перехода подтверждается опытом. В самом деле, в гл. I было указано, что, согласно старым измерениям, положение точки перехода определяется числом Рейнольдса

$$\left(\frac{U_{\infty} x}{\nu}\right)_{\text{пер.}} = 3,5 \cdot 10^5 \div 5 \cdot 10^5.$$

Этому числу Рейнольдса, составленному для местной длины x , соответствует, согласно формуле (10.1), число Рейнольдса

$$\left(\frac{U_{\infty} \delta^*}{\nu}\right)_{\text{пер.}} = 950 \text{ (точка перехода),}$$

составленное для толщины вытеснения δ^* . Отметим, что расстояние между точкой потери устойчивости и точкой перехода сильно зависит от степени турбулентности внешнего течения (см. гл. IV).

С целью более точного выяснения механизма возмущающего движения Г. Шлихтинг¹⁾ определил для некоторых нейтральных колебаний также собственную функцию $\phi(y)$. Знание этой функции позволяет построить картину линий тока возмущенного движения при нейтральных колебаниях. Пример такого построения дан на рис. 25. Впоследствии В. Толмин²⁾ подробно исследовал точность асимптотических оценок приближенных решений, использованных им в работе 1929 г., и выяснил полную приемлемость этих решений.

Расстояние между точкой потери устойчивости и точкой перехода определяется в основном интенсивностью нарастания неустойчивых возмущений. Для того чтобы получить представление об интенсивности этого нарастания, достаточно вычислить для возмущающих параметров, лежащих внутри нейтральной кривой, коэффициент

¹⁾ Schlichting H., Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. Fachgr. I, 1 (1935), 47.

²⁾ Tollmien W., Asymptotische Integration der Störungsdifferentialgleichung ebener laminarer Strömungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Z. angew. Math. Mech., 25/27 (1947), 33.

нарастания $c_i > 0$. Для пограничного слоя на пластинке впервые это сделал Г. Шлихтинг¹⁾, а впоследствии повторил С. Ф. Шэнь²⁾. На рис. 26 изображен результат расчета Шэня.

Возникло предположение, что заданной паре значений Re и α , удовлетворяющей дифференциальному уравнению возмущающего движения (5.5), соответствует не одно-единственное собственное значение s , а бесконечно

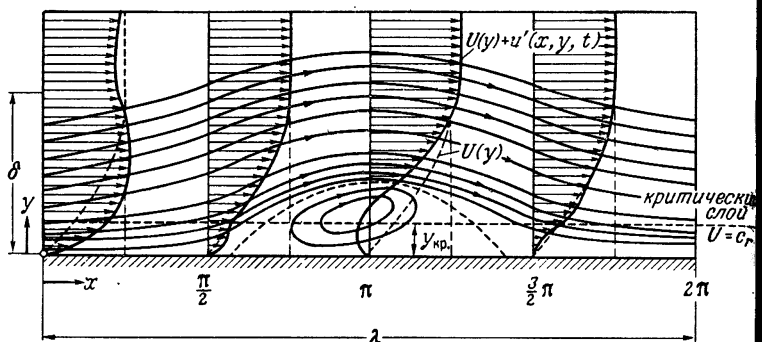


Рис. 25. Картина линий тока и распределение скоростей для нейтрального колебания в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке (для возмущения, определяемого точкой I на рис. 23).

большое число дискретных собственных значений. Это было подтверждено исследованиями Д. Гроне³⁾, позволившими вычислить для прямолинейного течения Куэтти и для плоского течения Пуазейля некоторое число собственных значений в виде функции числа Рейнольдса при фиксированном значении α . Сообщение по этому поводу было сделано также В. Толмином⁴⁾:

¹⁾ Schlichting H., Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1933, 181. См. также Z. angew. Math. Mech., 13 (1933), 171.

²⁾ Shen S. F., Calculated amplified oscillations in the plane Poiseuille and Blasius flows. J. Aeron. Sci., 21 (1954), 62.

³⁾ Grohne D., Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. Z. angew. Math. Mech., 34 (1954), 344.

⁴⁾ Tollmien W., Miscellen der Turbulenzforschung. Teoria della Turbolenza 2. Centro Internazionale di Matematica Estiva (CIME), Torino, 1957.

Недавно Дж. Т. Стюарт¹⁾ пытался рассчитать процесс нарастания неустойчивых возмущений с учетом нелинейных членов. Выяснилось следующее существенное обстоятельство: нарастание возмущений искажает основное течение. Это вызывает изменение переноса энергии от главного движения (основное течение) к побочному движению (возмущающее течение), так как изменение

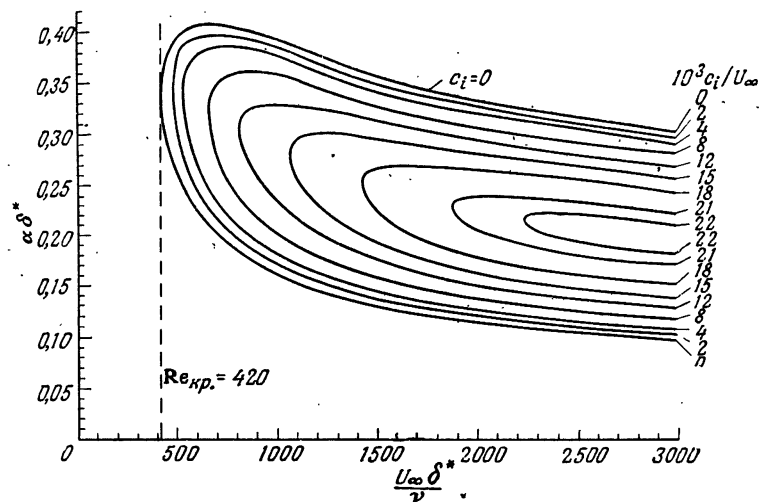


Рис. 26. Кривые нарастания колебаний в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке. По С. Ф. Шеню (см. примечание 2 на стр. 64).

переноса энергии пропорционально dU/dy . В свою очередь изменение переноса энергии приводит к тому, что возмущения на более поздней стадии не нарастают пропорционально $e^{\beta t}$, а стремятся к конечному значению, не зависящему от начальной интенсивности возмущения. См. по этому поводу также § 14.

¹⁾ Stuart J. T., On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 4 (1958), 1 [имеется русский перевод: Стюарт Дж. Т., О нелинейной механике в теории гидродинамической устойчивости, сб. Механика, № 3 (55) (1959), стр. 19].

§ 11. Результаты для параболического профиля скоростей

После того как теория устойчивости уже получила экспериментальное подтверждение, Ц. Ц. Линь¹⁾ еще

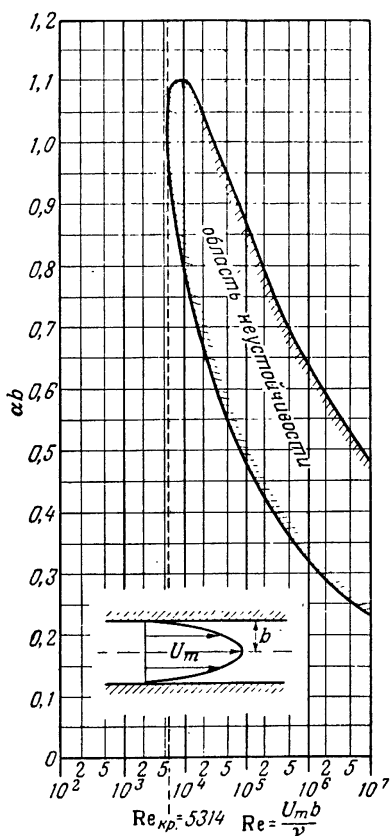


Рис. 27. Нейтральная кривая для параболического распределения скоростей между двумя параллельными плоскими пластинками (течение Пуазейля). По Ц. Ц. Линю¹⁾.

раз проверил все расчеты и получил во всех существенных пунктах совпадение с результатами Толмина и Шлихтинга. В связи с этой проверкой Ц. Ц. Линь рассчитал нейтральную кривую также для плоского ламинарного течения в канале с параболическим профилем скоростей. Построенная им нейтральная кривая изображена на рис. 27. Для критического числа Рейнольдса, составленного для максимальной скорости U_m для полной ширины канала $2b$, получилось значение

$$Re_{кр.} = \left(\frac{U_m b}{\nu} \right)_{кр.} = 5314$$

Для наименьшей длины волны, возможной при неустойчивых возмущениях нейтральная кривая на рис. 27 дает значение

$$\lambda_{min} = 5,7b,$$

т. е. величину примерно такого же порядка, как в случае пограничного

¹⁾ Lin C. C., On the stability of two-dimensional parallel flow, Quart. Appl. Math., 3 (1945/46), 117, 218, 277.

сходя на пластинке ($\lambda_{\min} \approx 6\delta$). Более поздние очень тщательные проверочные расчеты Л. Г. Томаса¹⁾ подтвердили эти результаты. В этой связи необходимо указать также на замечание А. Баранова²⁾ о возможности точного решения уравнения Орра — Зоммерфельда.

Устойчивость вполне развившегося течения в круглой цилиндрической трубе (течение Гагена — Пуазейля) было исследовано И. Пречем³⁾, а в недавнее время Г. М. Коркосом и Дж. Р. Селлерсом⁴⁾. Их расчеты показали, что такое течение при малых осесимметричных возмущениях остается устойчивым при всех числах Рейнольдса.

Глава IV

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

§ 12. Некоторые старые измерения перехода ламинарного течения в турбулентное

Теория устойчивости, изложенная в предыдущей главе, впервые дала для предела устойчивости критическое число Рейнольдса такого же порядка, как и экспериментальные исследования. Согласно представлениям этой теории, малые возмущения, для которых длина волны, а также частота лежат в некоторых вполне определенных интервалах, должны нарастать, в то время как

¹⁾ Thomas L. H., The stability of plane Poiseuille flow. Phys. Rev., 86 (1952), 812.

²⁾ Baranoff A., Sur une solution exacte de l'équation d'Orr—Sommerfeld. C. R. Acad. Sci. Paris, 248 (1959), 186.

³⁾ Pretsch J., Über die Stabilität einer Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. Z. angew. Math. Mech., 21 (1941), 204.

⁴⁾ Corcos G. M. and Sellars J. R., On the stability of fully developed flow in a pipe. J. Fluid Mech., 5 (1959), 97.

возмущения с меньшей или большей длиной волны должны затухать при условии, что число Рейнольдса больше некоторого предельного значения. При этом особо «опасными» должны быть длинноволновые возмущения, длина волны которых в несколько раз больше толщины пограничного слоя. Далее, принимается, что нарастание возмущений приводит в конце концов к переходу ламинарной формы течения в турбулентную. Процесс нарастания колебаний является своего рода связующим звеном между теорией устойчивости и экспериментально наблюдаемым переходом ламинарного течения в турбулентное.

Еще до первых успехов теории устойчивости проблема перехода была очень тщательно исследована экспериментально Л. Шиллером¹⁾, главным образом для течения в трубе. Исследования Л. Шиллера привели к созданию полуэмпирической теории перехода, основанной на представлении, что как при течении в трубе, так и в пограничном слое переход ламинарной формы течения в турбулентную обуславливается в основном возмущениями конечной величины. В случае трубы эти возмущения возникают при входе в нее, в случае же пограничного слоя они с самого начала находятся во внешнем течении. Особенно широко это направление было развито теоретически Дж. И. Тэйлором²⁾.

Решение вопроса о том, какая из обеих теорий правильна, могло быть достигнуто только путем эксперимента. Еще до возникновения теории устойчивости И. М. Бюргерс³⁾, Б. Г. Ван-дер-Хегге Цейнен⁴⁾ и М. Ханзен⁵⁾ произвели измерения ламинарного пограничного слоя и перехода ламинарной формы течения в турбулентную на плоской пластинке. Для критического

¹⁾ Schiller L., Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentstehung. Z. angew. Math. Mech., 14 (1934), 36.

²⁾ Taylor G. I., Some recent developments in the study of turbulence. Proc. of the Fifth Internat. Congr. for Appl. Mech., held at Cambridge, Mass., 1938, New York, 1939, стр. 294. См. также Statistical Theory of Turbulence. V. Effect of turbulence on boundary layers. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 156 (1936), 307.

³⁾ См. примечание 1 на стр. 23.

⁴⁾ См. примечание 2 на стр. 23.

⁵⁾ См. примечание 3 на стр. 23.

числа Рейнольдса получилось значение

$$\left(\frac{U_{\infty}x}{\nu}\right)_{\text{пер.}} = (3,5 \div 5) \cdot 10^5.$$

Вскоре после опубликования первых сообщений о теории устойчивости Х. Л. Драйден^{1, 2)} со своими сотрудниками выполнил новые, очень детальные и тщательные экспериментальные исследования пограничного слоя на пластинке. В частности, особенно тщательно были измерены — посредством термоанемометра — распределение скоростей в пространстве и во времени. Тем не менее все эти исследования не подтвердили предсказанного теорией нарастания возмущений с волнами определенного диапазона длин.

Однако исследования, выполненные примерно в это же время в Гёттингене (рис. 28), все же дали по крайней мере качественное подтверждение теории устойчивости. На рис. 28 показано возникновение турбулентности из первоначально длинноволнового возмущения в пограничном слое на пластинке. Сходство этого снимка с теоретической картиной линий тока для нейтрального возмущения (рис. 25) очевидно.

Уже давно, еще при измерении сопротивления шаров в аэродинамических трубах, было замечено, что переход ламинарной формы течения в турбулентную сильно зависит от «степени возмущения» течения. Выяснилось, что критическое число Рейнольдса, определенное как то число Рейнольдса, для которого коэффициент сопротивления равен $c_w = 0,3$ (рис. 8), тем больше, чем меньше степень возмущения течения. Наибольшее критическое число Рейнольдса для шара в свободном полете, согласно измерениям К. Б. Милликена и А. Л. Клейна³⁾, равно $Re_{\text{пер.}} = 3,85 \cdot 10^5$. Только впоследствии научились измерять степень возмущения течения количественно. Она

¹⁾ Dryden H. L., Airflow in the boundary layer near a plate. NACA Rep. 562, 1936.

²⁾ Dryden H. L., Turbulence and the boundary layer, J. Aeron. Sci., 6 (1939), 85, 101.

³⁾ Millican C. B., and Klein A. L., The effect of turbulence. Aircraft Eng., 1933, 169.

определяется как среднеквадратическое от средних во времени турбулентных пульсаций скорости, возникаю

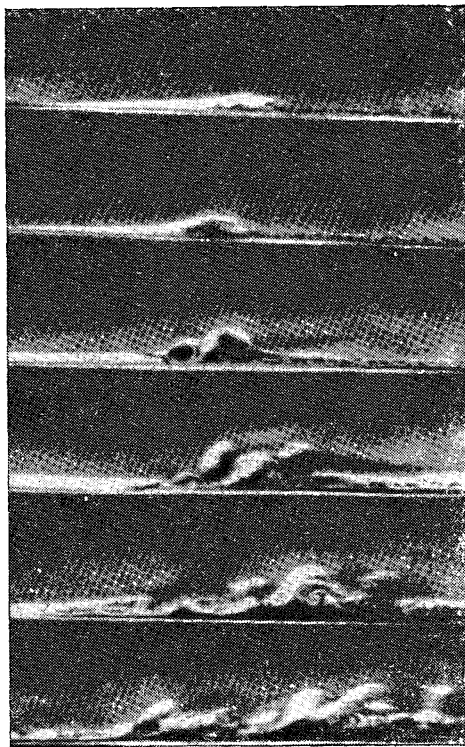
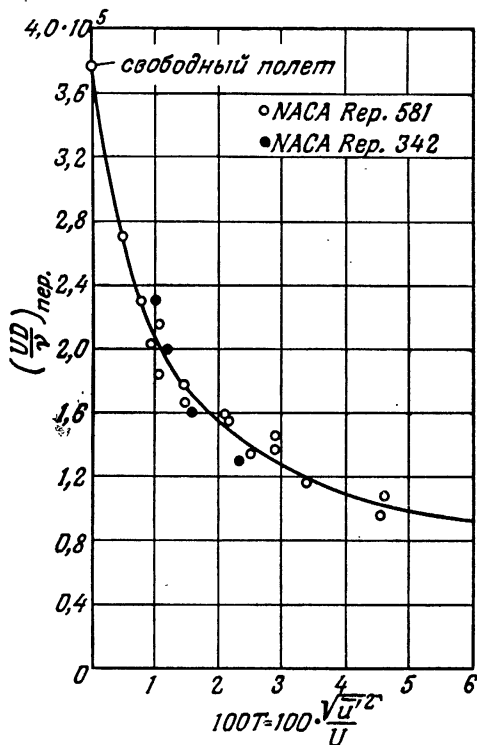


Рис. 28. Возникновение турбулентности из первоначально длинноволнового возмущения при течении вдоль плоской пластинки. По Л. Прандтлю¹⁾. Снимки сделаны киноаппаратом, перемещавшимся над пластинкой на тележке со скоростью, равной скорости течения; поэтому в поле зрения объектива оставалась все время одна и та же группа вихрей. Снимки делались при большой экспозиции. Течение было сделано видимым при помощи алюминиевой пыли, насыпанной на поверхность воды.

щих, например, на некотором расстоянии позади выпрямляющей течение решетки и притом обычно в направлении

¹⁾ Prandtl L., Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI, 77 (1933), 105.

ниях всех трех осей координат. Следовательно, если обозначить средние во времени турбулентные пульсации компонент скорости в направлениях осей координат через



Р и с. 29. Зависимость критического числа Рейнольдса для шара от степени турбулентности. По измерениям Х. Л. Драйдена и его сотрудников (см. примечания 1 и 2 на стр. 72).

$\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, то степень турбулентности будет определяться величиной

$$T = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U}, \quad (12.1)$$

где U есть скорость основного течения (скорость в аэродинамической трубе). В аэродинамических трубах на

некотором расстоянии позади выпрямляющих решеток обычно существует так называемая *изотропная турбулентность*, т. е. такое турбулентное течение, в котором средние пульсации скорости в направлениях всех трех осей координат равны, следовательно,

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}.$$

В этом случае степень турбулентности определяется одной только продольной пульсацией, т. е. величиной

$$T = \frac{V_{\overline{u'^2}}}{U}. \quad (12.2)$$

На рис. 29 изображен график зависимости критического числа Рейнольдса для шара от степени турбулентности, полученной посредством равенства (12.2) на основе измерений, проведенных Х. Л. Драйденом и его сотрудниками^{1,2)}. График показывает, что с уменьшением степени турбулентности критическое число Рейнольдса для шара значительно увеличивается. Для старых аэродинамических труб обычной конструкции степень турбулентности составляет около 0,01.

§ 13. Подтверждение теории устойчивости экспериментами

В 1940 г. Х. Л. Драйден со своими сотрудниками Г. Б. Шубауэром и Г. К. Скрэмстедом вновь занялся экспериментальным исследованием перехода ламинарной формы течения в турбулентную и осуществил по широкой программе новые опыты в Вашингтонском национальном бюро стандартов (National Bureau of Standards,

¹⁾ Dryden H. L. and Kueth A. M., Effect of turbulence in wind-tunnel measurements. NACA Rep. 342, 1929.

²⁾ Dryden H. L., Schubauer G. B., Mock W. C. and Skramstad H. K., Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres. NACA Rep. 581, 1937.

Washington)^{1,2}). Прежние результаты, полученные для шара, давали основание предполагать, что степень турбулентности оказывает решающее влияние на переход ламинарной формы течения в турбулентную; поэтому была построена специальная аэродинамическая труба, в которой посредством весьма большого числа выпрямляющих решеток степень турбулентности была понижена до очень малого значения

$$T = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U_\infty} = 0,0002,$$

ранее никогда не достигавшегося. В этой аэродинамической трубе был очень тщательно исследован пограничный слой на продольно обтекаемой пластинке. Результаты измерений привели к следующей весьма примечательной картине, изображенной на рис. 30: так же, как и в случае шара (рис. 29), критическое число Рейнольдса $(U_\infty x / \nu)_{\text{пер.}}$, составленное для местной длины пластинки, с уменьшением степени турбулентности значительно возрастает и при $T = 0,0008$ достигает значения

$$\left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)_{\text{пер.}} \approx 2,8 \cdot 10^6,$$

между тем как прежние измерения давали для этого числа Рейнольдса значение $Re_{x_{\text{пер.}}}$ от $3,5 \cdot 10^5$ до $5 \cdot 10^5$; дальнейшее уменьшение степени турбулентности больше

¹) Dryden H. L., Some recent contributions to the study of transition and turbulent boundary layers (Доклад, представленный на Sixth Internat. Congr. for Appl. Mech., Paris, сентябрь 1946). NASA T. N. 1168 (1947). См. также Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. Adv. Appl. Mech., т. I, стр. 1, New York, 1948 (имеется русский перевод: Проблемы механики, сборник статей под редакцией Р. Мизеса и Т. Кармана, Изд-во иностр. лит., Москва, 1955).

²) Schubauer G. B. and Skramstad H. K., Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. National Bureau of Standards Research Paper 1772 (перепечатка секретного сообщения NASA от апреля 1943 г., впоследствии расклассифицированного и опубликованного в виде NASA War-time Report W-8). J. Aeron. Sci., 14 (1947), 69. См. также NASA Rep. 909 (1948).

не оказывает никакого влияния на положение точки перехода. Результаты, полученные ранее А. А. Холлом и Г. С. Хислопом¹⁾, хорошо укладываются в график, изображенный на рис. 30.

Все измерения, о которых речь будет идти ниже, производились при степени турбулентности $T = 0,0003$. Скорость измерялась посредством термоанемометра и воспринималась катодным осциллографом. Сначала измерялось изменение скорости во времени в различных местах

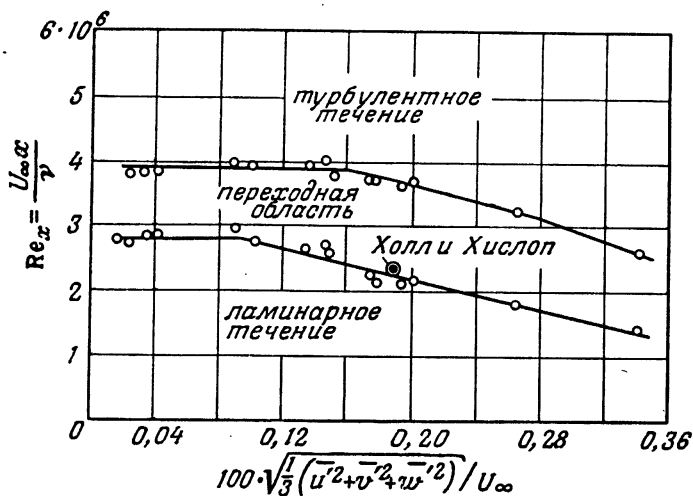


Рис. 30. Влияние степени турбулентности на критическое число Рейнольдса для продольно обтекаемой плоской пластинки. По измерениям Шубауэра и Скрэмстеда (см. примечание 2 на стр. 73).

вдоль пластинки при нормальном состоянии течения (естественные возмущения), а затем — при искусственно возбужденных возмущениях. Возбуждение возмущений определенной частоты производилось посредством колеблющейся металлической ленты, укрепленной на расстоянии 0,15 мм от стенки и приводившейся в колебательное движение при помощи электромагнита.

¹⁾ Hall A. A. and Hislop G. S., Experiments on the transition of the laminar boundary layer on a flat plate. ARC Rep. a. Mem., 1843, 1938.

Измерения отчетливо показали (рис. 31), что существование нарастающих синусоидальных колебаний

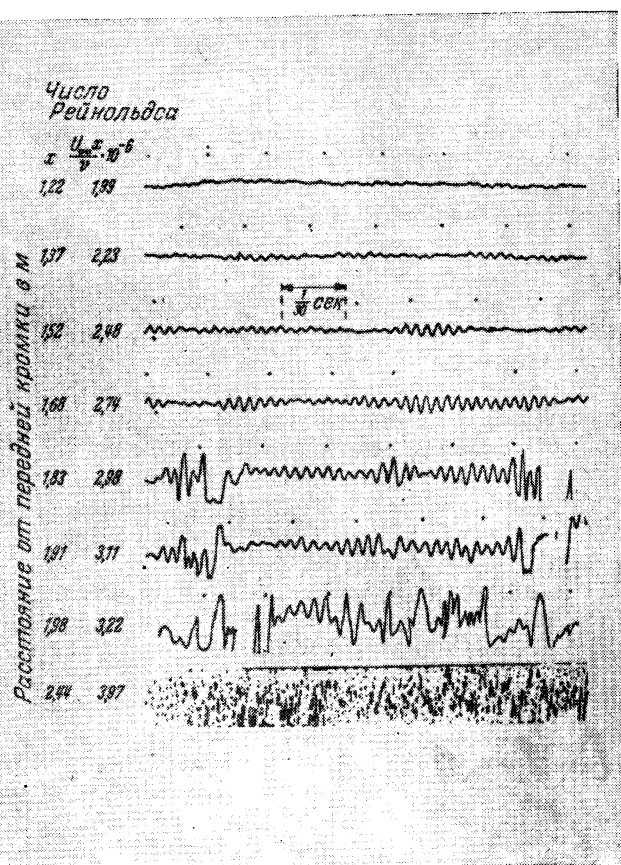


Рис. 31. Оциллограмма пульсаций u' скорости случайных («естественных») возмущений в ламинарном пограничном слое на плоской пластинке, обтекаемой воздухом в продольном направлении. Получена при измерении перехода ламинарного течения в турбулентное. По Шубауэру и Скрэмстеду (см. примечание 2 на стр. 73). Расстояние места измерения от стенки равно 0,57 мм; скорость набегающего течения $U_\infty = 24 \text{ м/сек}$; промежуток времени между каждыми двумя отметками, изображенными точками, равен $1/30 \text{ сек}$.

является предварительной ступенью для перехода ламинарной формы течения в турбулентную даже в случае

естественных возмущений (т. е. без возбуждения колебаний искусственным путем). При чрезвычайно малой степени турбулентности неправильные пульсации почти не наблюдаются. Однако при приближении к области перехода возникают почти чисто синусоидальные колебания, амплитуда которых сначала остается небольшой, но затем, по мере продвижения вниз по течению, сильно увеличивается. Перед самой точкой перехода возникают колебания с очень большой амплитудой и, наконец, продольные колебания внезапно превращаются в неправильные высокочастотные пульсации, характерные для турбулентного течения.

Выполненные измерения попутно объяснили, почему при прежних опытах эти синусоидальные колебания не были обнаружены. Все прежние измерения производились при степени турбулентности $T = 0,01$, при новых же измерениях она составляла $T = 0,0003$; но как только она повышалась, переход к турбулентной форме течения вызывался непосредственно случайными возмущениями без предварительного нарастания синусоидальных колебаний с длиной волны, заключенной в определенных границах.

Металлическая лента, применявшаяся для создания искусственных колебаний, имела толщину 0,05 мм, ширину 2,5 мм и длину 30 см и была протянута на расстоянии 0,15 мм от стенки. Для возбуждения колебаний применялся переменный ток и магнитное поле. Таким путем удавалось создавать предусмотренные теорией двумерные возмущения с заданной частотой, следовательно, можно было по выбору получать нарастающие, затухающие и нейтральные колебания. Измерения производились, как уже было сказано, посредством термоанометра. Результаты этих измерений изображены на рис. 32. Точки, отмеченные на рисунке кружочками, относятся к нейтральным колебаниям. Все эти точки хорошо располагаются вдоль одной кривой, вычерченной штрихами. Для сравнения на рис. 32 перенесена с рис. 24 теоретическая нейтральная кривая. Результаты измерений весьма хорошо согласуются с теорией.

С целью еще более глубокого проникновения в механизм возмущающего движения для некоторых ней-

тральных колебаний было исследовано распределение амплитуды пульсаций u' в направлении, перпендикулярном к стенке, на разных расстояниях от стенки (рис. 33). Нижняя кривая в каждой строке осциллограммы показывает колебания на постоянном расстоянии от стенки,

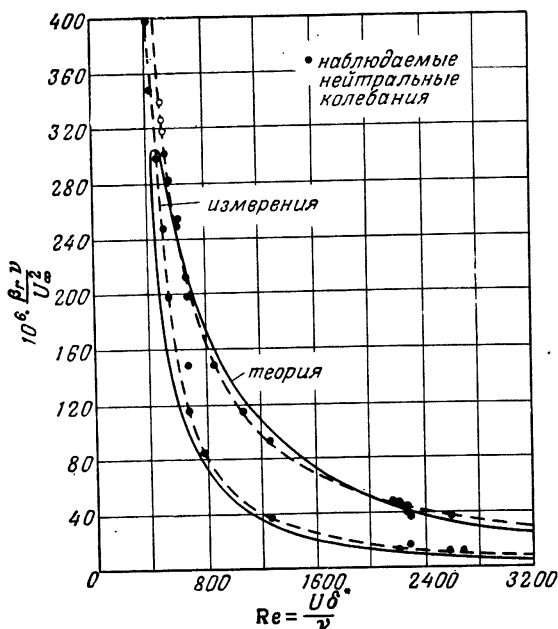


Рис. 32. Нейтральные кривые для частоты возмущающих колебаний при продольном обтекании плоской пластинки. Измерения — по Шубауэру и Скрэмстеду (см. примечание 2 на стр. 73), теоретическая кривая — по Толмину (см. примечание 1 на стр. 54).

а верхняя кривая — на переменном расстоянии, отмеченном слева от строки. Отчетливо видно, что с увеличением расстояния от стены амплитуда уменьшается и, наконец, меняет знак. Эта перемена знака амплитуды соответствует предсказанному теорией скачку фазы. Далее, на рис. 34 изображено распределение амплитуды пульсаций u' по толщине пограничного слоя для двух нейтральных возмущений, отмеченных на рис. 23 цифрами I и II.

И здесь согласование с теорией получилось очень хорошим.

Недавно Ф. К. Вортман¹⁾ произвел измерения пограничного слоя на плоской пластинке в воде, в которую

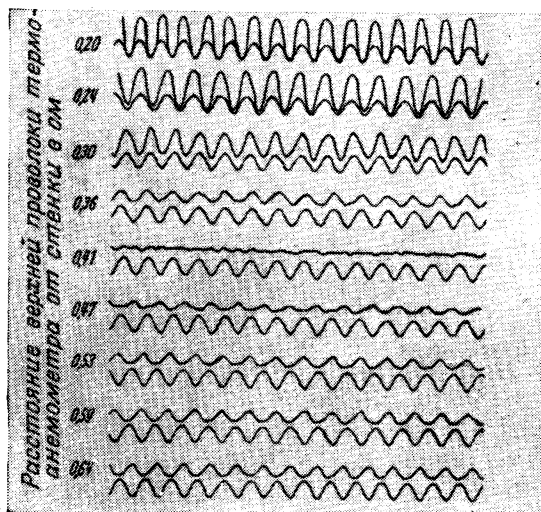
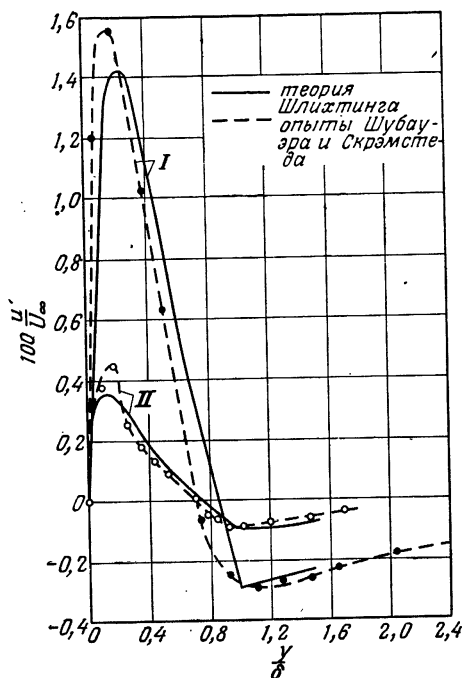


Рис. 33. Измерения колебаний в ламинарном пограничном слое. По Шубауэру и Скрэмстеду (см. примечание 2 на стр. 73). Осциллограммы показывают сдвиг фаз — вплоть до 180° — пульсаций u' при колебаниях, вызванных помещенной в пограничный слой колеблющейся лентой («искусственные» возмущения). Лента находилась на расстоянии 90 см от передней кромки пластинки. Измерения производились одновременно двумя термоанемометрами, расположенными позади ленты в 30 см от нее. Один из них был помещен на постоянном расстоянии от стенки, равном 1,4 мм (нижние кривые на каждой осциллограмме), а другой — на переменном расстоянии от стенки (верхние кривые на каждой осциллограмме). Частота колебаний ленты 70 гц. Скорость набегающего течения $U_\infty = 13$ м/сек.

вводилась соль теллура. Полученные им результаты блестяще подтвердили теорию устойчивости.

¹⁾ Wortmann F. X., Untersuchung instabiler Grenzschichtschwingungen in einem Wasserkanal mit der Tellur-Methode. Festschrift «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung». Braunschweig, 1955, стр. 460.

Упомянем, что теорема Рэлея — Толмина о неустойчивости профилей скоростей с точкой перегиба в свое время была подвергнута экспериментальной проверке



Р и с. 34. Распределение амплитуд пульсаций u' скорости для двух нейтральных возмущений в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке. Измерения — по Шубауэру и Скрамстеду (см. примечание 2 на стр. 73), теоретическая кривая — по Шлихтингу (см. примечание 1 на стр. 63). Кривые, обозначенные цифрами I и II, соответствуют нейтральным возмущениям I и II на рис. 23.

Г. Розенброком¹⁾, причем получилось хорошее согласование теории и измерений. Исследованию устойчивости профиля скоростей в спутном течении позади тела

¹⁾ Rosenbrook G., Instabilität der Gleitschichten im schwach divergenten Kanal. Z. angew. Math. Mech., 17 (1937), 8.

посвящена работа С. Холлингдея¹⁾. Устойчивость ламинарной струи исследована Н. Кёрлом²⁾.

Подводя итоги, можно сказать: описанные в этой главе экспериментальные исследования столь блестяще подтвердили теорию устойчивости, что ее следует считать полностью проверенной составной частью гидроаэромеханики. Таким образом, предположение Рейнольдса о том, что причиной перехода ламинарной формы течения в турбулентную является неустойчивость ламинарного течения, можно считать окончательно доказанным.

§ 14. Структура течения в области перехода

Возможность заранее рассчитать устойчивость ламинарного пограничного слоя имеет неоценимое значение для выяснения вопроса о том, когда следует ожидать ламинарного и когда турбулентного течения. Тем не менее нельзя забывать, что такой расчет устойчивости еще не решает проблемы возникновения турбулентности. В самом деле, с одной стороны, очень часто обнаруживается, что после перехода предела устойчивости течение еще долгое время остается ламинарным; с другой стороны, нередки случаи, когда турбулентность возникает в условиях, в которых ламинарное течение при малых возмущениях еще должно быть устойчивым.

Найти способы теоретического расчета возникновения турбулентности до сих пор не удалось, поэтому процессы, происходящие при возникновении турбулентности, т. е. при преобразовании ламинарного течения в турбулентное, пока еще недоступны для чисто теоретического исследования. Однако в последнее время выполнены весьма поучительные экспериментальные исследования механизма возникновения турбулентного течения.

Долгое время существовало представление, что переход течения в турбулентное состояние происходит почти

¹⁾ Hollingdale S., Stability and configuration of the wakes produced by solid bodies moving through fluids. *Phil. Mag.* VII, 29 (1940), 209.

²⁾ Curle N., Hydrodynamic stability in unlimited fields of viscous flow. *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, 238 (1957), 489.

внезапно. Именно с эпохой этого представления связано понятие *точки* перехода, как вполне определенного места, в котором турбулентное течение резко отделяется от ламинарного. Однако более поздние исследования с очевидностью показали, что внезапного перехода ламинарной формы течения в турбулентную не существует.

Решающее открытие сделал Г. В. Эммонс^{1,2)}. Наблюдая за течением слоя воды толщиной от 3 до 6 мм по слегка наклоненной стеклянной пластинке, он обнаружил следующее. В какой-то произвольной точке S (рис. 35) внезапно возникает небольшая турбулентная

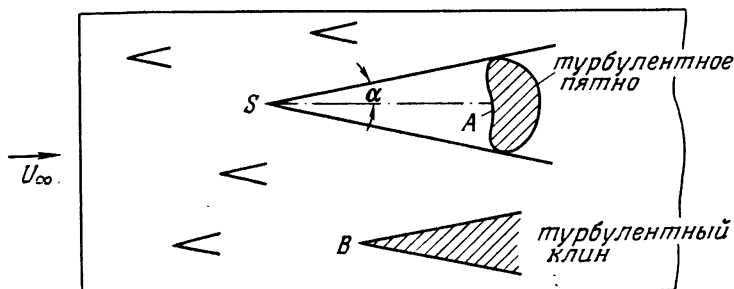


Рис. 35. Турбулентные пятна в пограничном слое на пластинке. По Г. В. Эммонсу²⁾. S —случайное место возникновения турбулентного пятна A , перемещающегося из S вниз по течению и возрастающего по мере удаления от S ; B —точечная шероховатость, позади которой возникает турбулентная область в виде клина.

область (турбулентное пятно) неправильной формы. Это турбулентное пятно A , увлекаемое течением, постепенно увеличивается и через некоторое время принимает вид, изображенный на рис. 35 (заштрихованная площадка). Такие турбулентные пятна возникают через неправильные промежутки времени в разных, неравномерно распре-

¹⁾ Emmons H. W., The laminar-turbulent transition in a boundary layer. Часть I. J. Aeron. Sci., 18 (1951), 490.

²⁾ Emmons H. W. and Bryson A. E., The laminar-turbulent transition in a boundary layer. Часть II. Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech. 1952, стр. 859.

деленных точках пластинки. Их размеры и частота возникновения в фиксированной точке пластинки возрастают с увеличением скорости течения и с увеличением возмущений в притекающей жидкости. В свете фактов, обнаруженных Эммонсом, возникновение нарастающих синусоидальных волн, наблюдавшихся в опытах Шубауэра и Скрэмстеда¹⁾, следует понимать как появление турбулентных пятен.

Таким образом, процесс перехода ламинарной формы течения в турбулентную можно объяснить следующим образом. Под влиянием вязкости на пластинке (или в общем случае на теле) образуется ламинарный пограничный слой. Разного рода причины — неравномерности внешнего течения, звуковые волны, неровности поверхности пластинки, вибрации пластинки — вызывают появление небольших движений, возмущающих пограничный слой. Место и время возникновения этих небольших движений, а также их частота и амплитуда распределяются статистически неравномерно.

В пограничном слое каждое из таких возмущений либо нарастает, либо затухает. Именно этим и объясняется, что вниз по течению от точки потери устойчивости в некоторых точках возникают большие возмущающие амплитуды, вызывающие образование турбулентных пятен, в то время как в других точках эти возмущающие амплитуды получаются небольшими. Каждое из таких турбулентных пятен перемещается в направлении течения и при этом увеличивается в размерах. Одновременно возникают все новые и новые турбулентные пятна, которые при соприкосновении сливаются одно с другим. Покрываемая ими площадь по мере продвижения вниз по течению быстро увеличивается, пока наконец не устанавливается полностью турбулентное течение. Следовательно, переход ламинарной формы течения в турбулентную совершается не внезапно в какой-то точке, а постепенно на конечном протяжении.

Аналогичным образом происходит развитие турбулентного течения и в трубе. Об этом уже было сказано в гл. I.

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 73.

Для того чтобы окончательно устранить всякие сомнения в правильности только что приведенного объяснения, Г. Б. Шубауэр и П. С. Клебанов^{1, 2)} очень тщательно исследовали детали течения в переходной области. Свои опыты они производили в той же аэродинамической трубе и на той же пластинке, которые в свое время были использованы для исследования колебаний³⁾. Измерения производились посредством термоанемометра, установленного в фиксированной точке переходной области. Прохождение через эту точку турбулентного пятна обнаруживалось по перемежающейся смене ламинарного и турбулентного состояний течения. Обработка многочисленных автоматически записанных кривых колебания скорости (см. верхнюю часть рис. 39) позволила определить долю γ полного времени наблюдения, в течение которой имело место турбулентное течение. На рис. 36 изображена зависимость этой доли γ , называемой коэффициентом перемежаемости, от безразмерной местной длины пластинки в различных случаях. Длина переходного участка в каждом из этих случаев разная, однако распределение γ после перехода к безразмерной местной длине пластинки получается одинаковым. Близкое сходство распределения коэффициента γ с гауссовой кривой ошибок показывает, что переход ламинарной формы течения в турбулентную обуславливается случайными возмущениями, налагающимися на более или менее правильно нарастающие колебания в пограничном слое.

Возникновение турбулентных пятен из ламинарных волн является только частью процесса перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Хотя исследования Шубауэра и Клебанова²⁾, в которых, как и в исследованиях Шубауэра и Скрэмстеда³⁾, в пограничном

¹⁾ Schubauer G. B. and Klebanoff P. S., Contributions on the mechanics of boundary layer transition. NACA T. N. 3489 (1955) и NACA Rep. 1289 (1956); см. также Proc. Symposium on Boundary Layer Theory, Nat. Phys. Lab. England, London, 1955.

²⁾ Schubauer G. B., Mechanism of transition at subsonic speeds. Görtler H., Grenzschichtforschung. IUTAM Symposium Freiburg i. Brsg. 1957, стр. 85 [4].

³⁾ См. примечание 2 на стр. 73.

слое вызывались — посредством колеблющейся ленты — малые возмущения заданной частоты, выявили много интересных деталей этого процесса, все же он остается далеко не выясненным. В частности, Шубауэру и Клебанову удалось выявить следующее примечательное

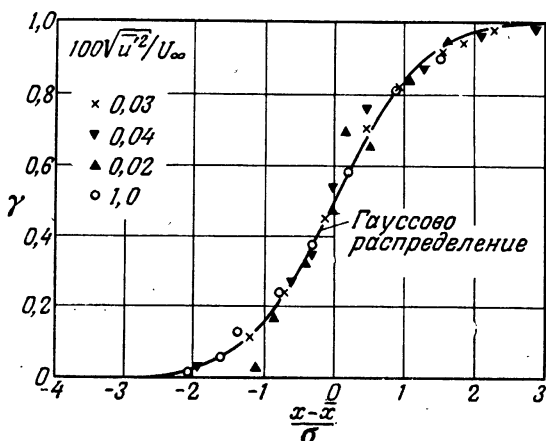
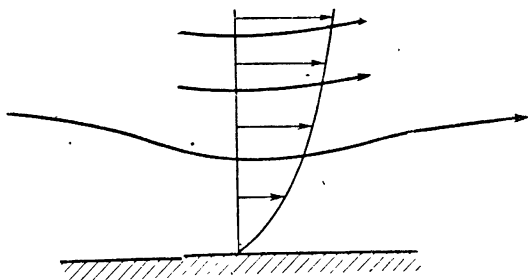


Рис. 36. Зависимость коэффициента перемежаемости γ в пограничном слое на пластинке в области перехода ламинарного течения в турбулентное от безразмерной местной длины $(x - \bar{x})/\sigma$ при разных условиях перехода. По измерениям Шубауэра и Клебанова (см. примечание 1 на стр. 83). $\bar{x}$ — местная длина, при которой $\gamma = 0,5$; σ — рассеяние, определяемое формулой $\sigma^2 = \int_0^1 (x - \bar{x})^2 d\gamma$. Диапазон рассеяния $\sigma = 0,3$ до $0,8$ фута.

обстоятельство: интенсивность возбужденных волн испытывает, особенно непосредственно перед возникновением турбулентности, почти периодические изменения в направлении, перпендикулярном к направлению течения. Удалось выяснить, что эти изменения вызываются еле уловимыми неравномерностями воздушного потока.

Столь большая чувствительность пограничного слоя к самым ничтожным неравномерностям внешнего течения заслуживает большого внимания в связи с теорети-

ческими исследованиями Г. Гёртлера и Г. Виттинга¹⁾. Согласно этим исследованиям, во впадинах волнообразных линий тока (рис. 37) возможно возникновение продольных вихрей, сходных с продольными вихрями, образующимися при обтекании вогнутой стенки (см. гл. IX).



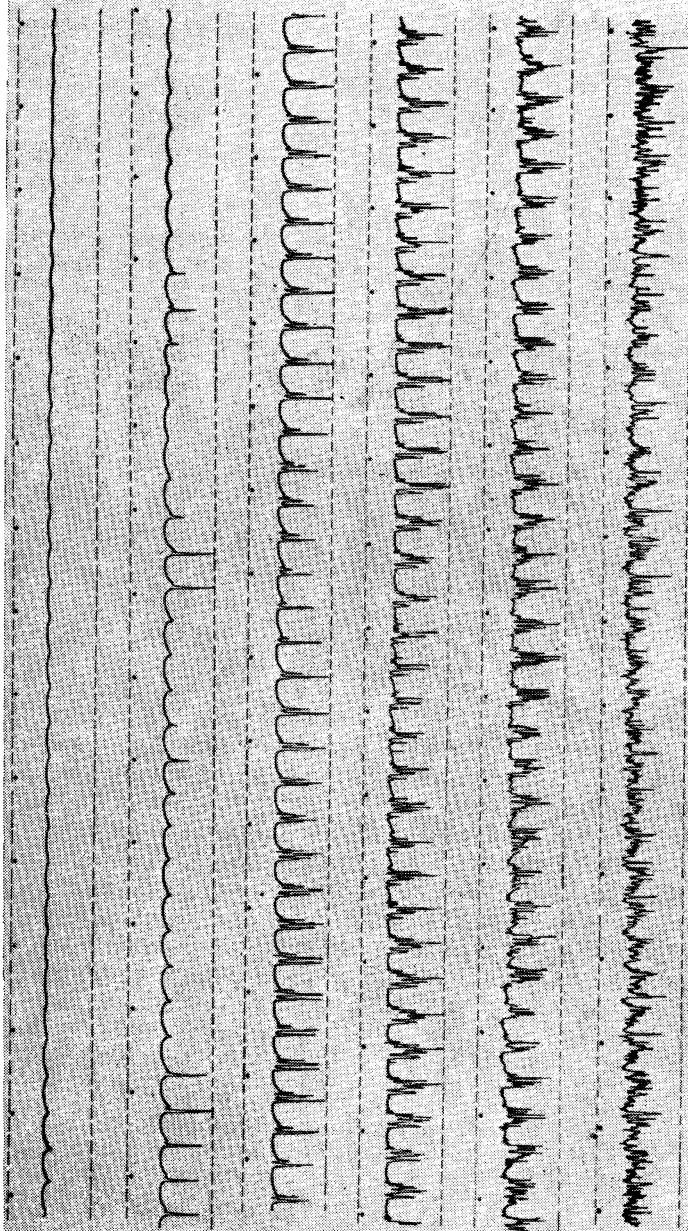
Р и с. 37. Вогнутость волнообразных линий тока в их впадинах.

Однако убедительных доказательств существования такого рода неустойчивости второго порядка исследования Шубауэра не дали.

Возникновение турбулентных пятен происходит всегда в таких местах, в которых амплитуда возмущения принимает свое наибольшее значение, и начинается с того, что на осциллограмме появляются один или два острых зубца, направленных в сторону уменьшения скорости. Дальнейшее развитие турбулентных пятен изображено на рис. 38. На этом рисунке каждый резкий излом осциллограммы означает появление отдельного турбулентного пятна (эти пятна возникают через равные промежутки времени, так как вызываются искусственно возбужденными установившимися колебаниями в пограничном слое). Путем одновременного измерения посредством двух термоанемометров, установленных рядом или один над другим, удалось установить, что размеры турбулент-

¹⁾ Görtler H. und Witting H., Theorie der sekundären Instabilität der laminaren Grenzschichten. Görtler H., Grenzschichtforschung. IUTAM Symposium Freiburg i. Brsg. 1957, стр. 110 [4]. См. также Witting H., Über den Einfluss der Stromlinienkrümmung auf die Stabilität laminarer Strömungen. Arch. Rational Mech. Anal., 2 (1958), 243.

Переход вынужденных колебаний в турбулентные пульсации



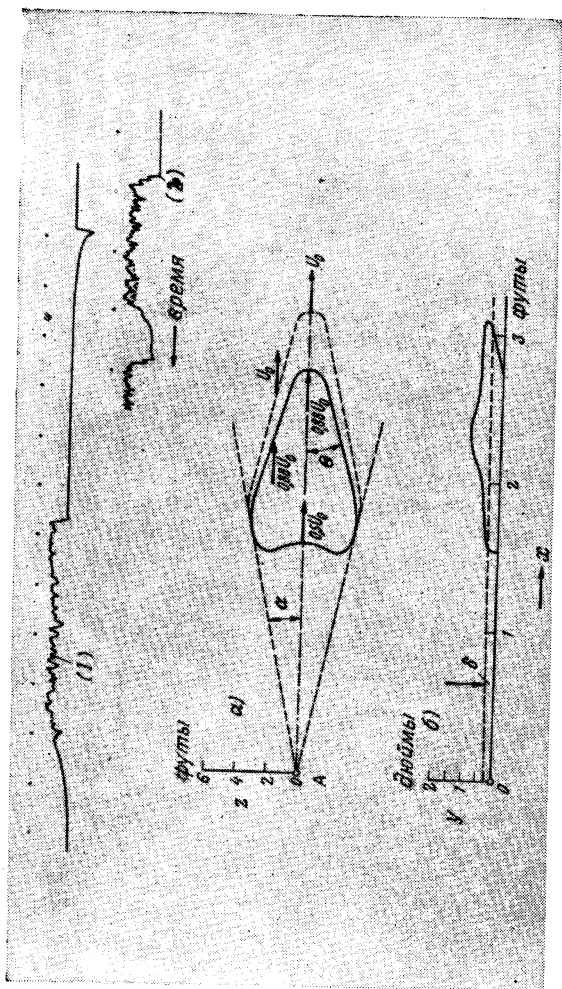
ных пятен в момент наблюдения меньше, чем толщина пограничного слоя, а до момента наблюдения они были, по-видимому, еще меньше.

Структура и рост турбулентных пятен были более детально исследованы Шубауэром и Клебановым¹⁾ на примере одного пятна, искусственно вызванного посредством электрической искры. Форма этого пятна с указанием скоростей некоторых точек его контура показана на рис. 39. Рост пятна происходит и в боковом, и в продольных направлениях вследствие того, что передние точки его контура движутся быстрее, чем задние. Осциллограммы показывают, что внутри турбулентного пятна распределение скоростей почти такое же, как в полностью турбулентном пограничном слое (по его толщине).

Примечательно изменение скорости во времени, показываемое осциллограммами. А именно, при наблюдении на расстоянии $y = 0,32$ мм от стенки скорость при подходе пятна увеличивается почти скачкообразно, причем одновременно возникают сильные турбулентные пульсации; после же прохождения пятна скорость возвращается к своему прежнему значению (при ламинарном течении) лишь постепенно. Между тем при течении в трубах наблюдается обратная картина (рис. 5): приближение турбулентной пробки дает себя знать в середине трубы медленным уменьшением скорости, в то время как конец прохождения пробки связан с почти внезапным увеличением скорости.

Причина такого разного поведения турбулентной пробки в трубе и турбулентного пятна в пограничном слое объясняется, по-видимому, следующим образом. Турбулентное пятно в пограничном слое движется быстрее ламинарного пограничного слоя на том расстоянии от стенки, на котором производится наблюдение. Турбулентная пробка в трубе движется медленнее ламинарного течения в середине трубы. Следовательно, в обоих случаях нетурбулентная жидкость вторгается через резко выраженный турбулентный фронт в турбулентные области. При этом быстрые турбулентные пульсации вызывают быстрое изменение профиля скоростей. По-види-

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 83.



Р и с. 39. Нарастание искусственного турбулентного пятна в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке. По измерениям Шубауэра и Клебанава (см. примечание 1 на стр. 83). а) Горизонтальная проекция, б) боковая проекция турбулентного пятна, искусственно вызванного в точке А и находящегося в рассматриваемый момент времени на расстоянии приблизительно 2,4 фута от точки возникновения. Точка А лежит на расстоянии 2,3 фута позади передней кромки пластинки. $\alpha = 11,3^\circ$; $\theta = 15,3^\circ$; δ — толщина ламинарного пограничного слоя; $U_\infty \approx 10$ м/сек — скорость набегающего течения. Кривые (1) и (2) — осциллограммы, записанные термоанемометром при прохождении искусственно вызванного и соответственно естественного турбулентных пятен. Промежуток времени между каждыми двумя отметками, изображенными точками, равен 1/60 сек.

мому, в обоих случаях имеют место условия, сходные с теми, которые наблюдаются при турбулентном течении в струе, в спутном течении и в пограничном слое, где под воздействием вторгающейся нетурбулентной жидкости также образуется резко очерченный турбулентный фронт.

Наоборот, на нечетких границах турбулентных образований, т. е. в пограничном слое позади, а в трубе — впереди, жидкость из турбулентных областей течет в нетурбулентные области. При этом пульсации скорости затухают медленно, так же как турбулентность позади решетки, а незначительные силы вязкости влекут за собой лишь постепенное изменение профиля скоростей. Ламинарное течение, следующее за турбулентным пятном, обладает большой устойчивостью, и в продолжение некоторого промежутка времени в нем не возникают новые турбулентные пятна.

Профили скоростей в переходной области, изображенные на рис. 12 и показывающие, как вначале ламинарный профиль непрерывно переходит в турбулентный, в действительности представляют собой средние во времени от профилей, пульсирующих от ламинарного к турбулентному состоянию. Эти осредненные профили скоростей могут быть рассчитаны с помощью коэффициента перемежаемости γ . Так как посредством трубки Пито определяется полное давление, то для расчета профиля скоростей на основе измерений посредством трубки Пито приходится пользоваться формулой

$$u_p(y) = \sqrt{(1 - \gamma) u_L^2 + \gamma u_T^2}, \quad (14.1)$$

между тем как действительная средняя скорость определяется формулой

$$\bar{u}(y) = (1 - \gamma) u_L + \gamma u_T. \quad (14.2)$$

В этих формулах u_L и u_T суть распределения скоростей при ламинарном и соответственно при турбулентном течении. Однако С. Дхаван и Р. Нарасимха¹⁾ показали,

¹⁾ Dhawan S. and Narasimha R., Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion. J. Fluid Mech., 3 (4) (1958), 418.

что разница между обеими формулами (14.1) и (14.2) не очень велика и что обе они хорошо согласуются с результатами измерений. Аналогичным образом могут быть вычислены в переходной области и другие величины, определяющие течение, например местный коэффициент трения

$$c_f = (1 - \gamma) c_{fL} + \gamma c_{fT}. \quad (14.3)$$

Таким образом, вычисление параметров, определяющих течение, возможно, если известно распределение коэффициента перемежаемости.

Г. В. Эммонс¹⁾ попытался на основе произведенных им наблюдений рассчитать посредством статистических методов процесс перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Ввиду недостаточности данных о возникновении турбулентных пятен Эммонсу пришлось ввести ряд умозрительных допущений. Тем не менее результат его теоретического расчета коэффициента перемежаемости в качественном отношении очень хорошо совпадает с выполненными впоследствии измерениями²⁾. Согласно С. Дхавану и Р. Нарасимха, достаточно предположить, что все турбулентные пятна возникают на одной и той же прямой $x = x_t$. В этом случае для γ получается формула

$$\gamma = 1 - \exp \left[-0,412 \left(\frac{x - x_t}{\lambda} \right)^2 \right], \quad (14.4)$$

где λ есть величина, характеризующая протяженность переходной области и равная

$$\lambda = x_{\gamma=0,75} - x_{\gamma=0,25}.$$

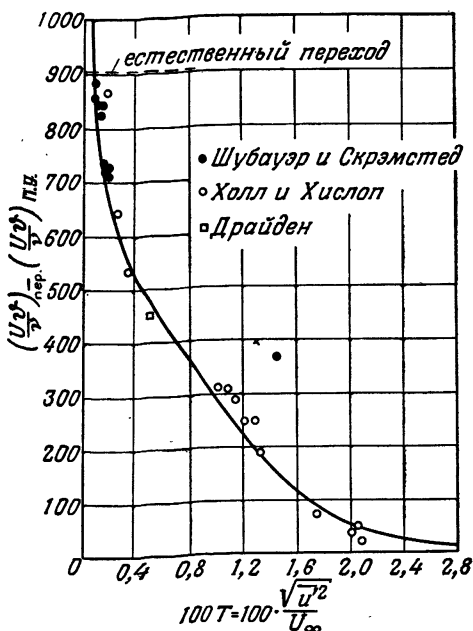
Величина λ зависит от числа турбулентных пятен, возникающих в единицу времени на прямой $x = x_t$ и от скорости роста пятен.

Таким образом, для полного теоретического расчета всего процесса перехода ламинарной формы течения в турбулентную пока еще не хватает следующих опытных данных: о расстоянии x_t от точки потери устойчивости, на котором возникают турбулентные пятна, о числе тур-

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 81.

²⁾ См. примечание 1 на стр. 83.

булентных пятен, возникающих в единицу времени, а также о зависимости этих величин от внешних обстоятельств (например, от градиента давления и степени турбулентности). Кроме того, еще не выяснен вопрос,



Р и с. 40. Измерение перехода ламинарной формы течения в турбулентную в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке. По Грэнвиллу (см. примечание 1 на стр. 92). По оси ординат отложены разности чисел Рейнольдса для точки перехода и для точки потери устойчивости, а на оси абсцисс — значения степени турбулентности. С возрастанием степени турбулентности точка перехода приближается к точке потери устойчивости.

в какой мере могут быть обобщены результаты Шубауэра и Клебанава о скорости роста турбулентных пятен.

В практических расчетах обычно удовлетворяются тем, что принимают область перехода за точку и сравнивают положение экспериментально наблюдаемой точки перехода с положением точки потери устойчивости.

К числу таких исследований принадлежит, например, работа П. С. Гренвилла¹⁾.

Выше уже было указано, что экспериментальное подтверждение теории устойчивости стало возможным только после того, как удалось получить воздушный поток с очень малой степенью турбулентности. То, что экспериментально наблюдаемая точка перехода лежит, как следовало ожидать, вниз по течению от теоретически предсказываемой точки потери устойчивости, подтвердили еще старые измерения, производившиеся при больших степенях турбулентности порядка $T = 0,01$. Однако расстояние точки перехода от точки потери устойчивости очень сильно зависит от степени турбулентности. Следует ожидать, что это расстояние тем меньше, чем больше степень турбулентности, так как при большой степени турбулентности требуется только незначительное нарастание неустойчивых возмущений, чтобы из них возникла турбулентность. Это видно из графика, построенного П. С. Гренвиллом¹⁾ на основании экспериментальных данных, полученных разными авторами для пограничного слоя на пластинке (рис. 40). В качестве меры расстояния между точкой перехода и точкой потери устойчивости Гренвилл взял разность чисел Рейнольдса, составленных в этих точках для толщины потери импульса²⁾, т. е. величину

$$\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_{\text{пер.}} - \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_{\text{п. у.}}$$

¹⁾ Granville P. S., The calculation of viscous drag of bodies of revolution. Navy Department. The David Taylor Model Basin. Rep. № 849, 1953.

²⁾ Толщина потери импульса δ и толщина вытеснения δ^* связаны между собой соотношением $\delta^*/\delta = 2,6$. Толщина потери импульса определяется равенством

$$U\delta = \int_{y=0}^{\delta} u(U-u) dy,$$

где $u(y)$ есть распределение скоростей в пограничном слое, а U — скорость внешнего течения.

При этом число Рейнольдса в точке потери устойчивости, согласно сказанному в § 10, принято равным

$$\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_{п. у.} = \frac{1}{2,6} \left(\frac{U\delta^*}{\nu}\right)_{п. у.} = \frac{420}{2,6} = 163.$$

Эти разности чисел Рейнольдса отложены как ординаты, а соответствующие значения степени турбулентности —

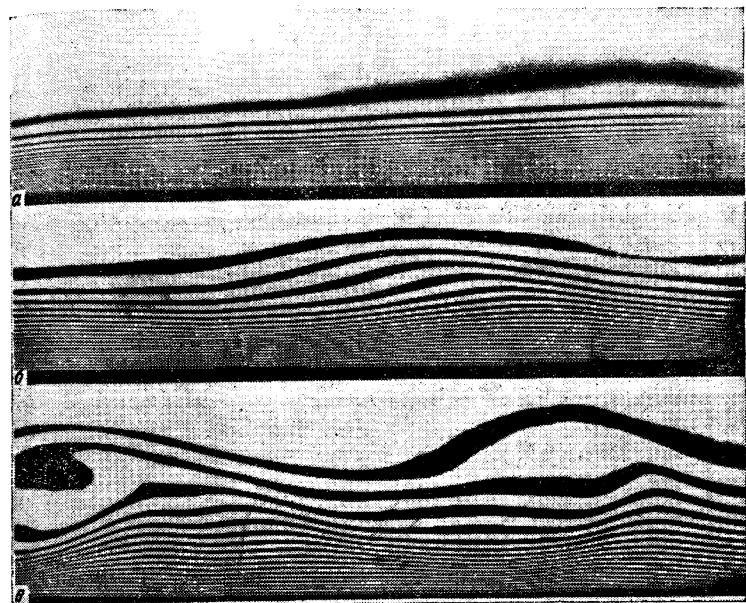


Рис. 41. Снимки пограничного слоя на вертикальной пластинке при свободном конвективном течении. По Эккерт, Зенгену и Шнейдеру (см. примечание 2 на стр. 94). Снимки получены по методу интерференционных полос и показывают, как возникает турбулентность. Интерференционные полосы представляют собой линии равной температуры. Начиная с определенного места, возникают синусоидальные волны, амплитуда которых по мере продвижения вниз по течению возрастает (снимки *а* и *б*), что в конце концов приводит к крутому подъему волн и их опрокидыванию (снимок *в*).

как абсциссы. В такой системе координат как новые измерения Шубауэра и Скрэмстеда¹⁾, выполненные при очень малой степени турбулентности, так и более

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 73.

старые измерения Холла и Хислопа¹⁾, выполненные при более высоких степенях турбулентности, очень хорошо ложатся на одну кривую. Из графика видно, что только при большой степени турбулентности, равной приблизительно $T = 0,02 \div 0,03$, точка перехода почти совпадает с точкой потери устойчивости.

Наглядное представление о механизме нарастания неустойчивых колебаний дают снимки, полученные Э. Эккертом и Г. Зёнгенем²⁾ по методу интерференционных полос (рис. 41). Правда, эти снимки сделаны не с вынужденного течения вдоль пластинки (выше мы рассматривали только такие течения), а со свободного конвективного течения около вертикально поставленной нагретой пластинки. Из снимков ясно видно, что, начиная с определенного места (рис. 41, а), возникают правильные синусоидальные волны, амплитуда которых по мере продвижения вниз по течению увеличивается (рис. 41, б), пока, наконец, не возникает крутой подъем волны с последующим ее опрокидыванием (рис. 41, в).

Глава V

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ НА ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

§ 15. Предварительные замечания

Результаты, изложенные в обеих предыдущих главах, в основном доказали пригодность теории устойчивости, основанной на методе малых колебаний, для исследования перехода ламинарного течения в турбулентное. Это дает основание ожидать, что при помощи этой теории

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 74.

²⁾ Eckert E. R. G., Soehngen H. und Schneider P. J. Studien zum Umschlag laminar-turbulent der freien Konvektionsströmung an einer senkrechten Platte. Festschrift «Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung», herausgeg. von H. Görtler und W. Tollmien. Braunschweig, 1955, стр. 407.

можно выяснить, какие другие параметры, кроме рассматривавшегося до сих пор числа Рейнольдса, оказывают существенное влияние на переход ламинарного течения в турбулентное.

В гл. II уже было коротко сказано, что градиент давления в том виде, в каком он наблюдается в сужающемся или расширяющемся канале или в пограничном слое на обтекаемом теле, сильно влияет на положение точки перехода. Активные силы, например центробежная сила в криволинейном течении и гидростатическая подъемная сила в течении с переменной в вертикальном направлении плотностью, также иногда очень сильно влияют на переход ламинарного течения в турбулентное.

В последние годы приобрели интерес вопросы воздействия на течение в пограничном слое посредством отсасывания обтекающей среды (или вдувания) и влияния этого воздействия на переход течения из ламинарной формы в турбулентную. Далее выяснилось, что при течениях с очень большой скоростью, когда текущую среду следует рассматривать как сжимаемую, подвод или отвод тепла через обтекаемую стенку (нагревание или охлаждение) оказывает большое влияние на переход ламинарного течения в турбулентное. Передача тепла от течения стенке сильно стабилизирует пограничный слой, передача же тепла от стенки течению, наоборот, очень сильно понижает устойчивость пограничного слоя. Большое практическое значение имеют также проблемы, связанные с влиянием шероховатости на переход ламинарной формы течения в турбулентную.

Обзор всех перечисленных разнообразных проблем будет дан в этой и последующих главах. Начнем с рассмотрения влияния градиента давления, поскольку оно имеет особо важное значение для практических приложений.

§ 16. Пограничный слой на плоской стенке с градиентом давления

Пограничный слой на плоской продольно обтекаемой пластинке, устойчивость которого была исследована в гл. III, отличается от других пограничных слоев тем,

что в нем профили скоростей на различных расстояниях от передней кромки пластинки аффинно-подобны одному другому (рис. 22). Эта аффинность является следствием постоянства давления во внешнем течении.

При обтекании произвольного цилиндрического тела градиент давления вдоль стенки изменяется от точки к точке, и поэтому профили скоростей в пограничном слое в различных точках стенки уже не являются аффинно-подобными один другому. В области падения давления получают профили скоростей без точки перегиба типа, изображенного на рис. 21, д, а в области повышения давления — профили с точкой перегиба (рис. 21, ж). В то время как в случае продольно обтекаемой плоской пластинки все профили скоростей имеют одинаковый предел устойчивости, равный $Re_{кр.} = (U_{\infty} \delta^*/\nu)_{кр.} = 420$, при обтекании произвольного цилиндрического тела этот предел для отдельных профилей получается различным; именно, в области падения давления он выше, а в области повышения давления ниже, чем для профилей скоростей в пограничном слое на пластинке. Для того чтобы найти положение точки потери устойчивости для заданного тела, необходимо выполнить следующие операции.

1. Рассчитать распределение давления вдоль контура тела в предположении, что вязкостью можно пренебречь.
2. Рассчитать на основе найденного распределения давления ламинарный пограничный слой.
3. Исследовать устойчивость отдельных профилей скоростей этого ламинарного пограничного слоя.

Расчет распределения давления вдоль контура цилиндрического тела произвольной формы удобно выполнить, например, по методу Т. Теодорсена и И. Е. Гаррика¹⁾ или по методу Ф. Ригельса²⁾. Способы расчета ламинарного пограничного слоя подробно изложены в статье Л. Хоуарта³⁾, а также в книге Г. Шлихтинга [12].

¹⁾ Theodorsen T. and Garrick I. E., General potential theory of arbitrary wing sections. NACA Techn. Rep. № 452, 1933.

²⁾ Riegels F., Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Ing-Arch., 16 (1948), 373; 17 (1949), 94.

³⁾ Howarth L., Laminar Boundary Layers. Handbuch der Physik, т. 8, часть 1. Springer, Berlin, Cöttingen, Heidelberg, 1959.

Тем не менее приведем здесь некоторые сведения о таких расчетах, после чего подробно остановимся на исследовании устойчивости.

Из теории ламинарного пограничного слоя известно, что при обтекании цилиндрического тела (например, крыла) кривизна стенки не оказывает существенного влияния на развитие пограничного слоя, правда, при условии, что радиус кривизны стенки значительно превышает толщину пограничного слоя (практически такое условие обычно выполняется). Это объясняется тем, что развитие пограничного слоя на таких телах практически не зависит от воздействия центробежной силы, и поэтому пограничный слой развивается на них совершенно так же, как на *плоской* пластинке под воздействием того градиента давления, который имел бы место при невязком обтекании рассматриваемого тела. То же самое относится и к расчету устойчивости пограничного слоя с градиентом давления.

В то время как при продольном обтекании плоской пластинки скорость внешнего течения постоянна, т. е. $U_\infty = \text{const}$, теперь, при обтекании цилиндрического тела, скорость внешнего течения $U_m(x)$ зависит от местной длины x , измеренной вдоль стенки, и связана с градиентом давления dp/dx вдоль стенки уравнением Бернулли

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_m \frac{dU_m}{dx}. \quad (16.1)$$

Однако, несмотря на наличие этой зависимости скорости внешнего течения от x , исследование устойчивости ламинарного течения с градиентом давления может быть выполнено таким же образом, как и в случае продольного обтекания плоской пластинки, т. е. в предположении, что скорость основного течения U зависит только от поперечной координаты y . Влияние градиента давления при исследовании устойчивости проявляется лишь на форме профиля скоростей. В гл. II уже было указано, что устойчивость пограничного слоя существенно зависит от формы профиля скоростей, а именно, профили с точкой перегиба значительно более неустойчивы, чем профили без точки перегиба (теорема о роли точки перегиба).

Так как градиент давления связан с кривизной профиля скоростей соотношением

$$\mu \left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)_{\text{ст.}} = \frac{dp}{dx}, \quad (16.2)$$

то сильная зависимость устойчивости от формы профиля скоростей равносильна сильному влиянию градиента давления на устойчивость, а именно, пограничные слои в области падения давления ($dp/dx < 0$, $dU_m/dx > 0$, ускоренное течение) значительно более устойчивы, чем в области возрастания давления ($dp/dx > 0$, $dU_m/dx < 0$, замедленное течение).

Сильное влияние градиента давления на устойчивость и на нарастание малых возмущений, предсказанное теорией устойчивости (теорема о роли точки перегиба), очень хорошо подтверждены экспериментально Г. Б. Шубауэром и Т. К. Скрэмстедом в их работе, упомянутой в гл. IV¹⁾. На рис. 42 изображена осциллограмма пульсаций скорости в пограничном слое на плоской стенке при наличии градиента давления. Верхняя половина рисунка показывает, что падение давления на 10% от динамического давления влечет за собой полное затухание пульсаций. Из нижней же половины рисунка видно, что последующее повышение давления всего на 5% приводит не только к сильному нарастанию колебаний, но и к быстрому переходу ламинарной формы течения в турбулентную (необходимо обратить внимание на то, что две последние строки осциллограммы изображены в уменьшенном масштабе по сравнению с остальными строками).

Для исследования устойчивости целесообразно учитывать влияние градиента давления посредством форм-параметра профиля скоростей; причем для простоты брать за основу однопараметрическое семейство профилей скоростей. На рис. 43 изображен пример такого однопараметрического семейства для случая обтекания клина, когда распределение скоростей внешнего течения можно взять в виде

$$U_m(x) = u_1 x^m. \quad (16.3)$$

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 73.

Эти профили скоростей, вычисленные Д. Р. Хартри¹⁾, представляют собой точные решения дифференциальных

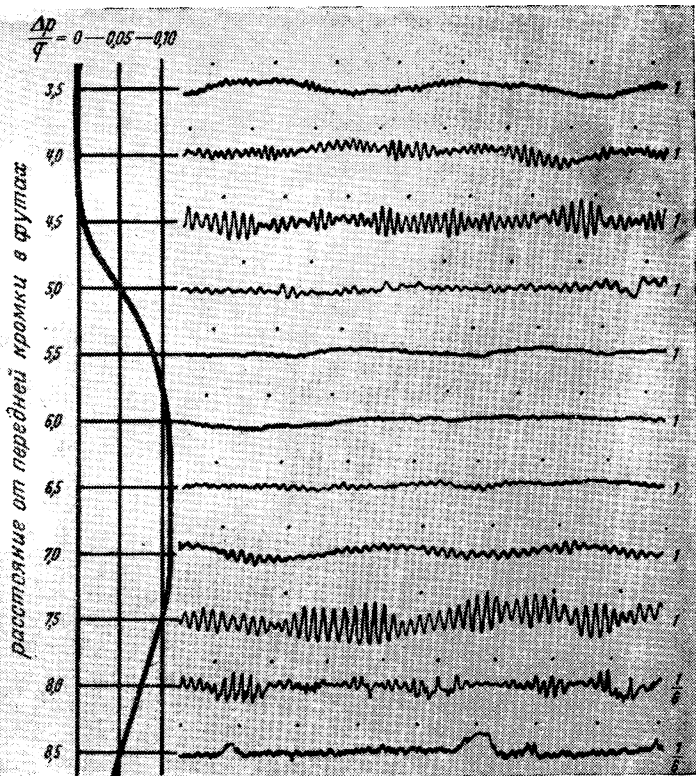
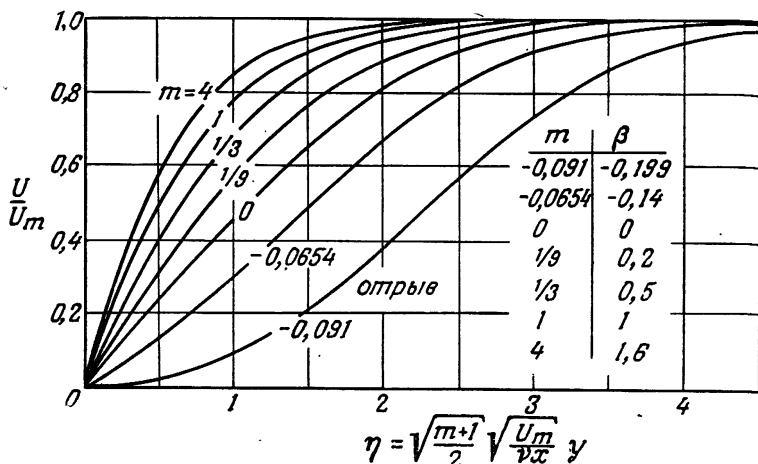


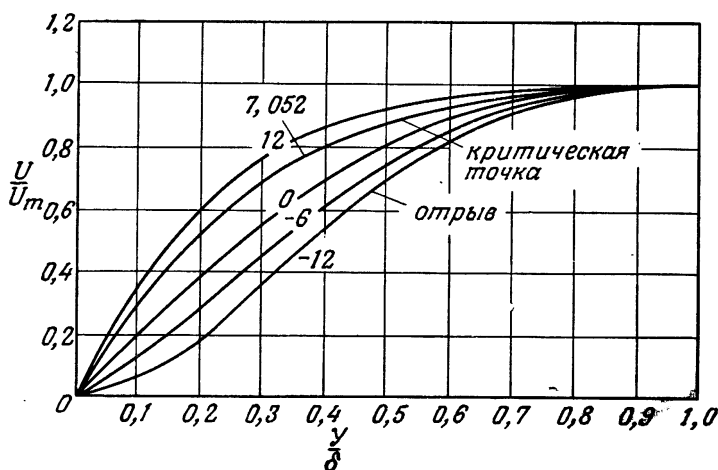
Рис. 42. Осциллограмма пульсаций скорости в ламинарном пограничном слое с градиентом давления. По измерениям Шубауэра и Скромстеда (см. примечание 2 на стр. 73). Падение давления вызывает затухание пульсаций, повышение давления — сильное нарастание пульсаций с последующим переходом ламинарного течения в турбулентное. Расстояние места измерения от стенки равно 0,5 мм. Скорость $U_{\infty} = 29$ м/сек.

уравнений пограничного слоя. Величина β , указанная в таблице на рисунке, означает угол раствора клина и

¹⁾ Hartree D. R., On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer, часть вторая. Proc. Cambridge Phil. Soc., 33 (1937), 223.



Р и с. 43. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое, возникающем при обтекании клина потенциальным течением $U_m(x) = u_1 x^m$. По Хартри (см. примечание 1 на стр. 99).



Р и с. 44. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое с градиентом давления. По Польгаузену (см. примечание 1 на стр. 102). Δ — формпараметр профилей скоростей, определяемый равенством (16.4).

связана с величиной m соотношением $\beta = 2m/(m+1)$. При $m < 0$ (повышение давления) профили скоростей имеют точку перегиба, а при $m > 0$ (падение давления) такой точки нет.

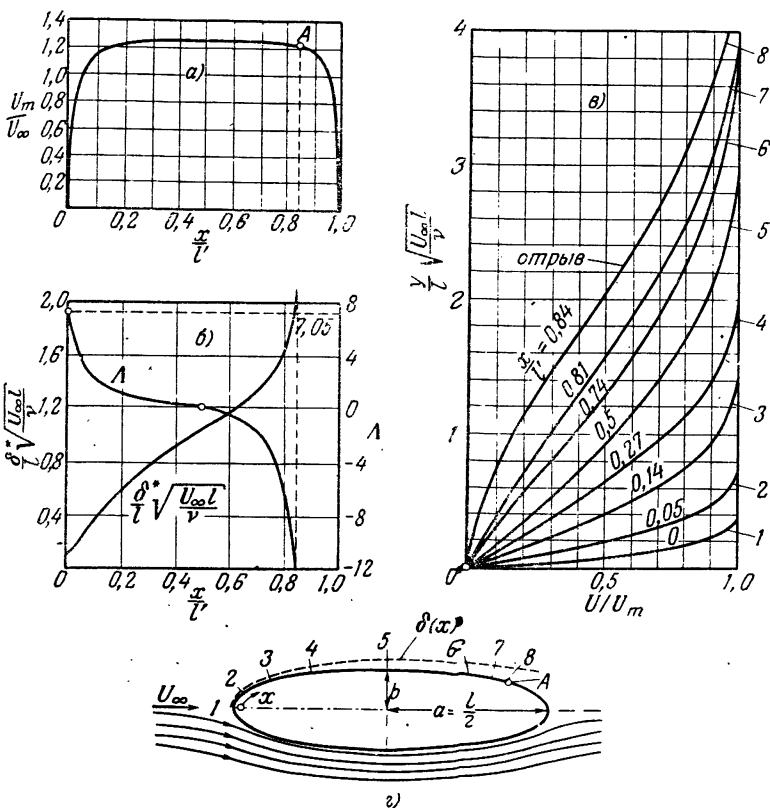


Рис. 45. Результат расчета ламинарного пограничного слоя на эллиптическом цилиндре с отношением осей $a/b=4$ при обтекании в направлении большой оси: а) теоретико-потенциальное распределение скоростей; б) толщина вытеснения δ^* пограничного слоя и формпараметр Λ , определяемый равенством (16.4); в) профили скоростей в пограничном слое; г) контур обтекаемого тела.

Для расчета ламинарного пограничного слоя на цилиндрическом теле произвольной формы удобный при-

ближенный способ указан К. Польшаузен¹⁾. Форма профилей скоростей в пограничном слое определяется безразмерным формпараметром

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx}. \quad (16.4)$$

Однопараметрическое семейство профилей скоростей изображено на рис. 44. Формпараметр Λ изменяется между $\Lambda = +12$ и -12 , причем последнее значение соответствует точке отрыва. В передней критической точке $\Lambda = +7,05$. Случай, когда $\Lambda = 0$, соответствует продольному обтеканию пластинки. При $\Lambda < 0$ (повышение давления) профили скоростей имеют точку перегиба, при $\Lambda > 0$ (падение давления) — не имеют.

За подробностями расчета пограничного слоя по способу Польшаузена отсылаем к гл. XII книги Г. Шлихтинга [12]. Здесь для пояснения приведем только результат такого расчета для эллиптического цилиндра с отношением осей $a/b = 4$, обтекаемого в направлении большой оси. На рис. 45 для этого цилиндра изображены зависимости скорости потенциального течения $U_m(x)$, толщины пограничного слоя (толщины вытеснения) δ^* и формпараметра Λ от местной длины x , измеренной вдоль поверхности цилиндра, а также профили скоростей в пограничном слое в различных точках стенки. Только определив все эти величины из расчета пограничного слоя (см. выше, пункт 2), можно приступить к исследованию устойчивости.

§ 17. Предел устойчивости при падении давления и при возрастании давления

Первые расчеты пограничных слоев при наличии падения и возрастания давления были выполнены Г. Шлихтингом²⁾ для профилей скоростей, получающихся в сужающихся и расширяющихся каналах при скорости

¹⁾ Pohlhausen K., Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht. Z. angew. Math. Mech., 1 (1921), 252.

²⁾ Schlichting H., Über die theoretische Berechnung der kritischen Reynoldsschen Zahl einer Reibungsschicht in beschleunigter und verzögerter Strömung. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch., I (1940), 97.

внешнего течения, определяемой уравнением

$$U_m(x) = U_0 - ax$$

($a < 0$ для ускоренного течения, $a > 0$ для замедленного течения). Эти расчеты подтвердили ожидавшееся сильное стабилизирующее действие падения давления и, наоборот, возмущающее действие возрастания давления. Вскоре И. Преч¹⁾ выполнил аналогичный расчет для профилей скоростей пограничного слоя на клине (см. рис. 43). В таблице 1 даны полученные И. Пречем значения критического числа Рейнольдса для различных значений β . И в этом случае предел устойчивости сильно зависит от градиента давления.

Таблица 1

Зависимость критического числа Рейнольдса от формпараметра β профилей скоростей пограничного слоя на клине при обтекании последнего с градиентом давления (по Пречу).

Профили скоростей изображены на рис. 43

β	-0,10	0	0,2	0,4	0,6	1,0
$m = \frac{x}{U_m} \frac{dU_m}{dx}$	-0,048	0	0,111	0,25	0,43	1,0
$\left(\frac{U_m \delta^*}{\nu}\right)_{кр.}$	126	660	3200	5000	8300	12 600

Для семейства профилей скоростей, используемых в приближенном способе Польгаузена (рис. 44), расчет устойчивости выполнен Г. Шлихтингом и А. Ульрихом²⁾. На рис. 46 изображены полученные нейтральные кривые. В то время как для профилей скоростей в области падения давления ($\Lambda > 0$) обе ветви нейтральной кривой при $Re \rightarrow \infty$ приближаются к нулю (т. е. ведут себя

¹⁾ Pretsch J., Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch., I (1941), 58.

²⁾ Schlichting H. und Ulrich A., Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch., I (1942, 8; подробное изложение в Bericht S 10 der Lilienthal-Gesellschaft, 1941.

так же, как в случае пограничного слоя на пластинке при $\Lambda = 0$), для профилей скоростей в области повышения давления верхние ветви нейтральных кривых имеют ненулевые асимптоты, следовательно, нарастание возмущений возможно также при $Re \rightarrow \infty$. Профили скоростей в области падения давления ($\Lambda > 0$), а также профиль скоростей при неизменяющемся давлении

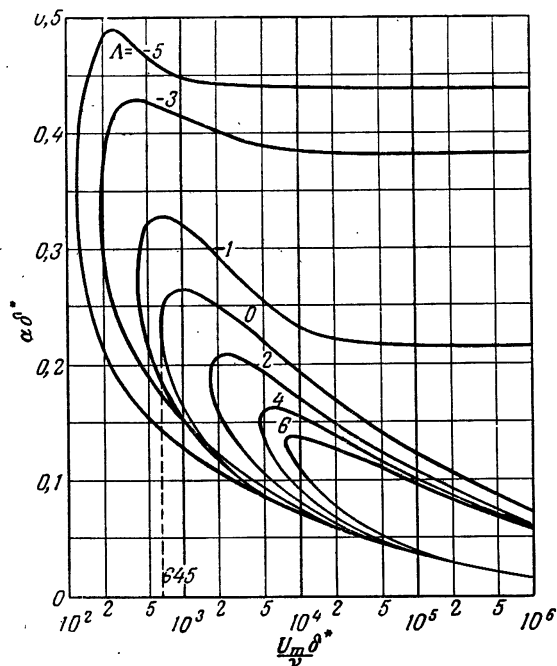


Рис. 46. Нейтральные кривые для профилей скоростей в ламинарном пограничном слое с градиентом давления (см. рис. 44). Значения формпараметра $\Lambda < 0$ соответствуют повышению давления, значения $\Lambda > 0$ — падению давления.

($\Lambda = 0$) дают нейтральные кривые типа «вязкой неустойчивости» (кривая *б* на рис. 19), профилям же скоростей в области повышения давления ($\Lambda < 0$) соответствуют нейтральные кривые типа «невязкой неустойчивости» (кривая *а* на рис. 19).

Из рис. 46 видно, что для пограничных слоев в зоне

возрастания давления неустойчивая область, заключенная внутри нейтральной кривой, значительно больше, чем для пограничных слоев в зоне падения давления. На рис. 47 изображен график зависимости критического

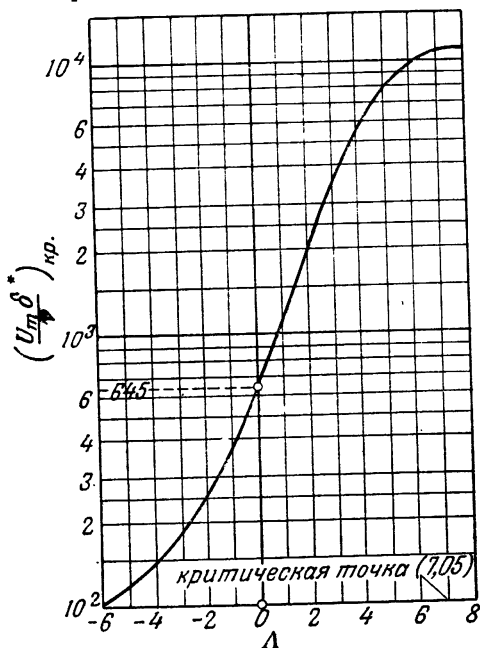


Рис. 47. Зависимость критического числа Рейнольдса от формпараметра Λ профилей скоростей в пограничном слое с градиентом давления.

числа Рейнольдса от формпараметра Λ ¹⁾. Этот график показывает, что критическое число Рейнольдса очень сильно зависит от градиента давления.

¹⁾ Этот график дает для $\Lambda = 0$ критическое число Рейнольдса $Re_{кр} = 645$, в то время как нейтральная кривая на рис. 23 дает значение $Re_{кр} = 420$. Причина расхождения заключается в том, что изображенная на рис. 46 нейтральная кривая для пограничного слоя на пластинке рассчитана посредством аппроксимации распределения скоростей приближенной функцией, в то время как для построения нейтральной кривой на рис. 23 использовано точное решение Блазиуса.

Для профиля скоростей в точке отрыва ($\Lambda = -12$) расчет на устойчивость не выполнен, так как для предела устойчивости этого профиля получается очень низкое число Рейнольдса. При таком числе Рейнольдса приближенный способ расчета пограничного слоя на устойчивость, основанный на предположении, что потеря устойчивости происходит при больших числах Рейнольдса, неприменим. Однако не подлежит никакому сомнению, что предел устойчивости для профиля скоростей в точке отрыва очень низок.

Для профилей скоростей с градиентом давления И. Преч¹⁾ вычислил также коэффициент нарастания неустойчивых колебаний и получил кривые, сходные с изображенными на рис. 26. Как и следовало ожидать, коэффициент нарастания β_i при возрастании давления получается значительно большим, чем при падении давления.

§ 18. Расчет положения точки потери устойчивости на заданном теле

Имея результаты, изображенные на рис. 46 и 47, можно довольно просто определить положение точки потери устойчивости на заданном теле (при плоском обтекании). Следует ожидать, что для тела заданной формы положение точки потери устойчивости зависит, во-первых, от ориентировки тела относительно направления обтекания, т. е. от угла атаки, так как изменение ориентировки сильно изменяет теоретико-потенциальное распределение давления, и, во-вторых, — при фиксированной ориентировке — от составленного для тела числа Рейнольдса, поскольку изменение этого числа влечет за собой изменение толщины пограничного слоя.

Расчет положения точки потери устойчивости для заданного тела ведется следующим образом. Прежде всего определяется теоретико-потенциальное распределение скоростей $U_m(x)/U_\infty$ вдоль контура тела. Затем производится расчет ламинарного пограничного слоя, например, приближенным способом Польгаузена (см. рис. 45). Этот расчет дает безразмерную толщину

¹⁾ Pretsch J., Die Anfachung instabiler Störungen in einer laminaren Reibungsschicht. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch., I (1942), 54.

вытеснения пограничного слоя в виде выражения $(\delta^*/l) \sqrt{U_\infty l/\nu}$ и формпараметр Λ , причем l есть какая-нибудь неизменяющаяся характерная длина тела, а U_∞ — скорость набегающего течения.

Если при фиксированном числе Рейнольдса $Re_l = U_\infty l/\nu$ проследить ламинарный пограничный слой вниз по течению от передней критической точки, то немного позади критической точки вследствие сильного падения давления (большое положительное значение Λ) предел устойчивости $(U_m \delta^*/\nu)_{кр.}$, как показывает рис. 47, будет высоким, но толщина пограничного слоя небольшой, следовательно, местное число Рейнольдса $U_m \delta^*/\nu$ будет безусловно меньше местного предела устойчивости $(U_m \delta^*/\nu)_{кр.}$. Это означает, что пограничный слой здесь устойчив. Далее вниз по течению падение давления становится слабее, поэтому местный предел устойчивости $(U_m \delta^*/\nu)_{кр.}$ по мере продвижения вниз по течению уменьшается, в то время как толщина пограничного слоя, а вместе с нею и местное число Рейнольдса $U_m \delta^*/\nu$, увеличивается. В определенной точке местное число Рейнольдса становится равным местному пределу устойчивости, т. е.

$$\frac{U_m \delta^*}{\nu} = \left(\frac{U_m \delta^*}{\nu} \right)_{кр.} \quad (\text{точка потери устойчивости}). \quad (18.1)$$

Здесь пограничный слой достигает точки потери устойчивости, и ниже по течению относительно этой точки пограничный слой неустойчив.

Изложенный способ расчета точки потери устойчивости пояснен на рис. 48 для случая эллиптического цилиндра с отношением осей $a/b = 4$, обтекаемого параллельно большой оси. Теоретико-потенциальное распределение скоростей и результаты расчета пограничного слоя для этого случая уже были даны на рис. 45. Из графика зависимости формпараметра Λ от x/l (рис. 45, б) получается с помощью рис. 47 кривая местного критического числа Рейнольдса $(U_m \delta^*/\nu)_{кр.}$, изображенная на рис. 48 более жирной линией (кривая предела устойчивости). Далее, для фиксированного числа Рейнольдса $U_\infty l/\nu$,

составленного для обтекаемого тела, по формуле

$$\frac{U_m \delta^*}{\nu} = \left(\frac{\delta^*}{l} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} \right) \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} \cdot \frac{U_m}{U_\infty} \quad (18.2)$$

вычисляется местное число Рейнольдса $U_m \delta^* / \nu$, составленное для толщины вытеснения. Безразмерная толщина

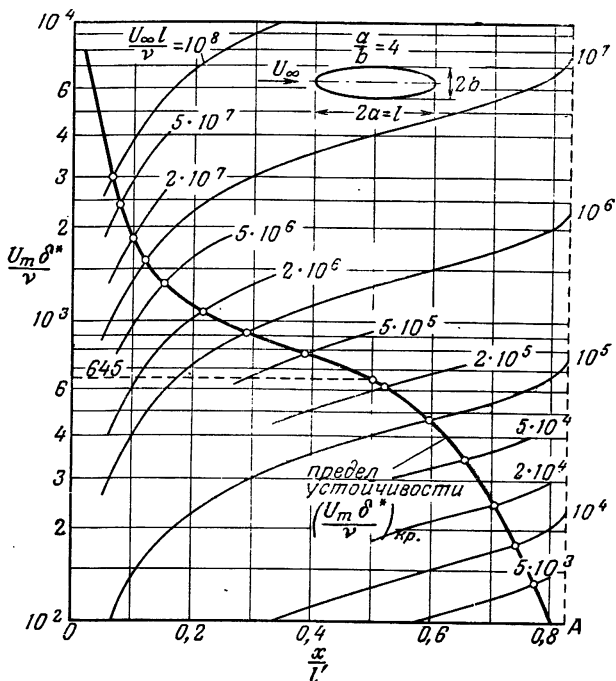


Рис. 48. Определение положения точки потери устойчивости на эллиптическом цилиндре с отношением осей $a/b=4$ при разных числах Рейнольдса $Re_l = U_\infty l / \nu$ (l' есть полупериметр эллипса).

вытеснения $(\delta^*/l) \sqrt{U_\infty l / \nu}$ берется из графика на рис. 45, б, а теоретико-потенциальное распределение скоростей $U_m(x)/U_\infty$ — из графика на рис. 45, а. Полученные для различных значений числа Рейнольдса $U_\infty l / \nu$ зависимости местного числа Рейнольдса $U_m \delta^* / \nu$ от местной длины x/l' (l' — полупериметр эллипса) изображены на рис. 48 более тонкими линиями. Точки пересечения этих

линий с кривой предела устойчивости определяют положения точек потери устойчивости $(x/l')_{кр.}$ для рассматриваемых чисел Рейнольдса $U_\infty l/\nu$.

Указанным способом был определен предел устойчивости (положение точки потери устойчивости $x_{кр.}$)

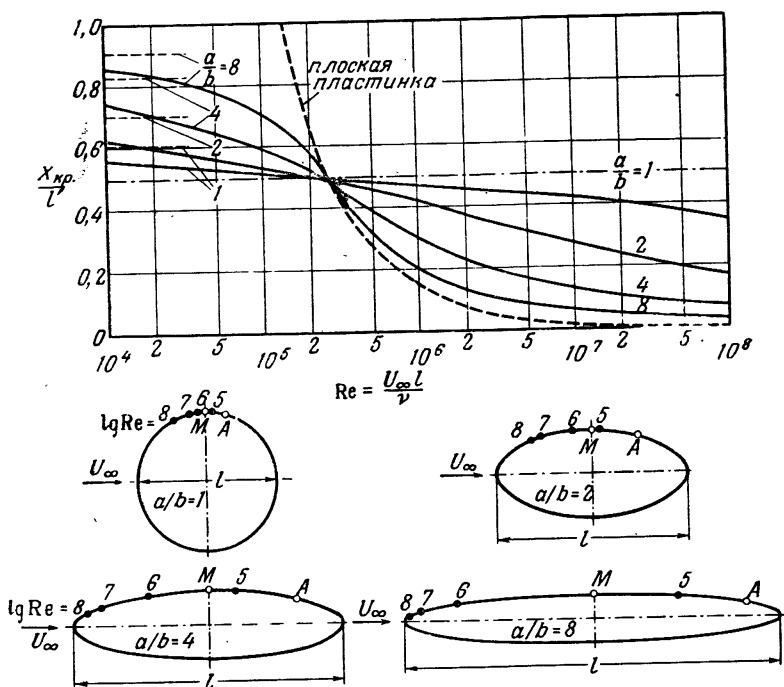


Рис. 49. Зависимость положения точки потери устойчивости на эллиптических цилиндрах с отношением осей $a/b = 1; 2; 4; 8; \infty$ (плоская пластинка) от числа Рейнольдса $Re = U_\infty l/\nu$ (l' есть полупериметр эллипса; А — точка отрыва при ламинарном течении; М — точка, в которой давление имеет минимальное значение).

также для серии эллиптических цилиндров с отношением осей $a/b = 1; 2; 4; 8$ (рис. 49). Из этого рисунка видно, что на круговом цилиндре точка потери устойчивости перемещается при изменении числа Рейнольдса очень незначительно, однако по мере уменьшения относительной толщины цилиндра это перемещение становится

больше. Такой характер перемещения точки потери устойчивости обусловлен теоретико-потенциальным распределением давления, которое для кругового цилиндра имеет резко выраженный минимум, в то время как для более тонких эллиптических цилиндров этот минимум, наоборот, очень слаб. В нижней части рис. 49 положение

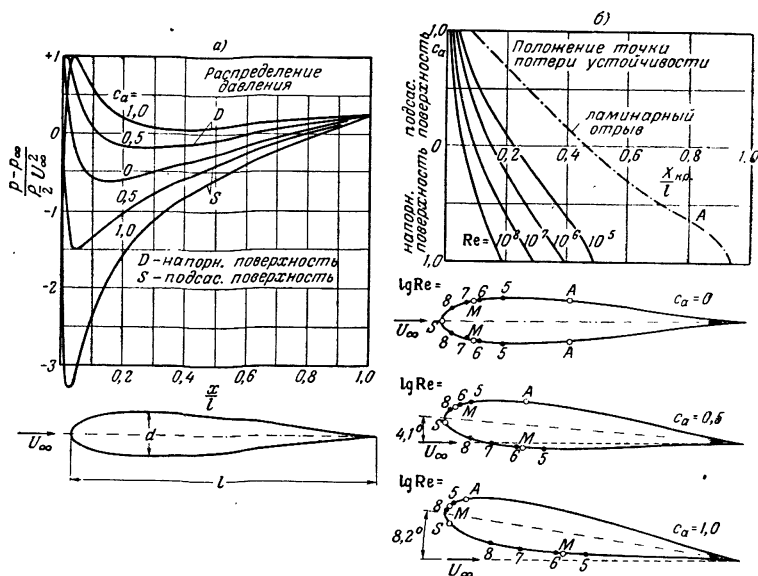


Рис. 50. Определение положения точки потери устойчивости на крыловом профиле при разных углах атаки и при разных числах Рейнольдса. По Шлихтингу и Ульриху (см. примечание 2 на стр. 103). а) Распределение давления при различных углах атаки. б) Зависимость положения точки потери устойчивости от числа Рейнольдса $Re = U_\infty l / \nu$. Симметричный профиль Жуковского с относительной толщиной $d/l = 0.15$. S — критическая точка. M — точка минимума давления. A — точка отрыва при ламинарном течении.

точек потери устойчивости при разных числах Рейнольдса отмечено на контурах цилиндров черными кружочками.

Аналогичным образом определяется положение точки потери устойчивости для крыловых профилей. В этом случае интерес представляет зависимость положения точки потери устойчивости не только от числа Рей-

нольдса, но и от угла атаки. Последний влияет на положение точки потери устойчивости в основном через распределение давления. На рис. 50, а изображено распределение давления для симметричного крылового профиля при трех углах атаки: $\alpha = 0^\circ$; $4,1^\circ$ и $8,2^\circ$. Этим углам атаки соответствуют значения коэффициента подъемной силы $c_a = 0$; 0,5 и 1,0.

Точки минимума давления, расположенные при симметричном обтекании при $x/l = 0,15$, с увеличением угла атаки перемещаются на подсасывающей стороне вперед, а на напорной — назад. Согласно рис. 50, б, таким же образом перемещается с увеличением угла атаки и точка потери устойчивости. На рис. 50, б точки потери устойчивости на обеих сторонах профиля обозначены черными кружками и отмечены логарифмами чисел Рейнольдса набегающего течения. Из этого рисунка видно, что при практически важных значениях числа Рейнольдса, т. е. при $U_\infty l/\nu$ от 10^6 до 10^8 , точка потери устойчивости расположена вблизи точки M минимума давления.

При увеличении числа Рейнольдса точка потери устойчивости перемещается и на подсасывающей и на напорной сторонах профиля вперед, а при увеличении угла атаки (в соответствии с перемещением точки минимума давления) на напорной стороне — назад, а на подсасывающей — вперед. Многочисленные теоретические результаты, относящиеся к зависимости положения точки потери устойчивости на крыловидных профилях от их формы, а также от числа Рейнольдса и от угла атаки можно найти в работе К. Буссмана и А. Ульриха¹⁾.

В пограничном слое с градиентом давления точка перехода ламинарной формы течения в турбулентную лежит (так же, как и в пограничном слое на пластинке) вниз по течению от точки потери устойчивости. Однако, если для определения положения точки потери устойчивости на заданном теле имеется, согласно сказанному

¹⁾ Bussmann K. und Ulrich A., Systematische Untersuchungen über den Einfluss der Profilform auf die Lage des Umschlagpunktes. Предварительный отиск Jb. 1943 der dtsh. Luftfahrtforsch. помещенной в Techn. Ber., 10 (1943), № 9.

выше, довольно точный теоретический способ, то для определения расстояния между точкой потери устойчивости и точкой, в которой начинается переход ламинарного течения в турбулентное, а также для определения протяженности области перехода приходится опираться целиком на эмпирические данные.

В принципе следует ожидать, что в области падения давления расстояние между указанными точками больше, чем в области возрастания давления, так как в последнем случае нарастание неустойчивых возмущений происходит значительно сильнее. Однако никаких экспериментальных данных о влиянии градиента давления на указанное расстояние, а также на скорость роста турбулентных пятен пока не имеется. Для получения этих данных требуются очень тонкие измерения процесса перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

Что касается примерного представления о процессе перехода, то имеются тщательные исследования зависимости этого перехода от степени турбулентности. Такие исследования опубликованы Г. Б. Шубауэром¹⁾, А. Фейджем²⁾ и Р. Мишелем³⁾.

Для пограничных слоев с градиентом давления в качестве меры расстояния между точкой перехода и точкой потери устойчивости можно взять так же, как это было сделано для пограничного слоя на пластинке (рис. 40), разность чисел Рейнольдса, составленных для толщины потери импульса в точке перехода и в точке потери устойчивости, т. е. разность

$$\left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_{\text{пер.}} - \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_{\text{п. у.}}$$

¹⁾ Schubauer G. B., The effect of turbulence on transition in the boundary layer of an elliptic cylinder. Proc. 5 Int. Congr. Appl. Mech. Cambridge, Mass. 1938 (1939), 321.

²⁾ Fage A., Transition in the boundary layer caused by turbulence. Aero. Res. Comm. London Rep. Mem. 1896 (1942), 1.

³⁾ Michel R., Détermination du point de transition et calcul de la traînée des profils d'ailes en liquide incompressible. ONERA Publ. № 58, 1952.

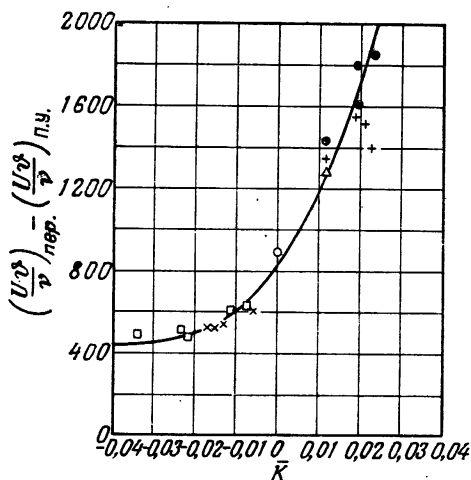


Рис. 51. Измерения перехода ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое с градиентом давления. По Гренвиллу (см. примечание 1 на стр. 92). Построенная кривая изображает зависимость разности числа Рейнольдса $Re_{\delta \text{ пер.}} = (U\delta/v)_{\text{пер.}}$ для точки перехода и числа Рейнольдса

$Re_{\delta \text{ п.у.}} = (U\delta/v)_{\text{п.у.}}$ для точки потери устойчивости от среднего градиента давления $\bar{K}$. С уменьшением падения давления точка перехода приближается к точке потери устойчивости.

- | | |
|------------------------------------|--|
| Измерения в аэродинамической трубе | <ul style="list-style-type: none"> ● подсосывающая сторона; + напорная сторона профиля NACA 65(215)–114. По Браслову и Висконти ¹⁾ × профиль NACA 0012. По Денхофу ²⁾. ○ плоская пластинка. По Шубауэру и Скрэмстеду (см. примечание 2 на стр. 73). |
| Измерения в полете | <ul style="list-style-type: none"> □ профиль с 12% толщиной. По Джонсу (см. примечание 1 на стр. 116) △ ламинаризованный профиль с 14,7% толщиной. По Заловчику и Скугу ³⁾. |

¹⁾ Braslow A. L. and Visconti F., Investigation of boundary layer Reynolds Number for transition on an NACA 65 (215)–114 airfoil in the Langley Two-Dimensional Low-Turbulence Pressure Tunnel. NACA T. N. 1704, 1948.

²⁾ Doenhoff A. E., Investigation of the boundary layer about a symmetrical airfoil in a wind tunnel of low turbulence. NACA War-Time Report L-507, 1940.

³⁾ Zalovcik J. A. and Skoog R. B., Flight investigation of boundary layer transition and profile drag of an experimental low-drag wing installed on a Fighter-Type Airplane. NACA War-time Report L-94, 1945.

На рис. 51 изображена зависимость этой разности среднего градиента давления $\bar{K}$, определяемого формулой¹⁾

$$\begin{aligned}\bar{K} &= \frac{1}{x_{\text{пер.}} - x_{\text{п.у.}}} \int_{x_{\text{п.у.}}}^{x_{\text{пер.}}} \frac{\partial^2}{\partial y} \frac{dU_m}{dx} dx = \\ &= \frac{1}{x_{\text{пер.}} - x_{\text{п.у.}}} \int_{x_{\text{п.у.}}}^{x_{\text{пер.}}} K(x) dx.\end{aligned}\quad (18.3)$$

Измерения, использованные для построения рис. 51 произведены при очень малой степени турбулентности либо в полете, либо в аэродинамических трубах. Выполненное построение показывает, что результаты всех этих измерений, принадлежащих разным авторам, располагаются вдоль одной кривой. В области падения давления ($\bar{K} > 0$) разность $Re_{\text{пер.}} - Re_{\text{п.у.}}$ значительно больше, чем в области возрастания давления ($\bar{K} < 0$). Значение разности $Re_{\text{пер.}} - Re_{\text{п.у.}}$ при $\bar{K} = 0$ равно около 800 и весьма близко к аналогичному значению для пограничного слоя на пластинке при очень малой степени турбулентности (рис. 40).

Из изложенных выше результатов вытекает следующий практически важный вывод: при больших значениях числа Рейнольдса, составленного для крылового профиля (Re_l от 10^6 до 10^7), точка перехода приблизительно совпадает с точкой профиля, в которой давление имеет минимум.

Можно получить теоретически более обоснованно, чем на рис. 51, соотношение между положениями теоретической точки потери устойчивости и экспериментально наблюдаемой точки перехода, если учесть процесс нарастания возмущений. Любое неустойчивое возмущение перемещающееся в пограничном слое вниз по течению попав в область неустойчивости, изображенную

¹⁾ Градиент давления $K(x)$ и формпараметр $\Lambda(x)$, определяемый формулой (16.4), связаны между собой соотношением

$$K(x) = \frac{\partial^2}{\partial y} \frac{dU_m}{dx} = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_m}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = \Lambda \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right)^2$$

(см. равенство (12.30) в книге [12]).

рис. 46, начинает нарастать пропорционально величине $e^{\beta_i t}$ или, если β_i зависит также от времени, пропорционально величине

$$e^{\int \beta_i dt}. \quad (18.4)$$

Кривые нарастания возмущений $\beta_i = \text{const}$, соответствующие различным градиентам давления и сходные с кривыми, изображенными на рис. 26, построены И. Пречем¹⁾. Используя эти кривые, А. М. О. Смит²⁾ вычислил значение величины (18.4), достигаемое ею при перемещении из теоретически определенной точки потери устойчивости в экспериментально наблюдаемую точку перехода, для большого числа крыловых профилей и тел вращения, для которых была экспериментально определена точка перехода. Обработка всех этих разных измерений, выполненных при очень малой степени турбулентности и для очень гладких стенок, показала, что величина (18.4) при перемещении из точки потери устойчивости в точку перехода достигает значения

$$e^{\int \beta_i dt} = e^9.$$

Результаты, полученные Смитом, изображены на рис. 52.

Ламинаризованные профили. Очень сильное влияние распределения давления во внешнем течении на положение точки потери устойчивости, а следовательно, и на положение точки перехода, является физической основой конструирования ламинаризованных профилей. Как уже было сказано в гл. I, у таких профилей наибольшая толщина отодвигается возможно дальше назад; вместе с нею отодвигается назад и точка максимума давления, благодаря чему пограничный слой сохраняется ламинарным на значительно большем протяжении, чем у обычных профилей, что и приводит к значительному уменьшению коэффициента профильного сопротивления. Правда, перемещение точки минимума давления далеко

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 106.

²⁾ Smith A. M. O., Transition, pressure gradient and stability theory. Ninth Internat. Congr. of Appl. Mech., 4, 234, Brussels, 1956; см. также J. Aero. Space Sci., 26 (1959), 229.

назад удается только для некоторого небольшого диапазона углов атаки. После того как Б. М. Джонс¹⁾ обнаружил при летных испытаниях наличие больших участков по ширине крыла, на которых пограничный слой оставался ламинарным, Г. Дёч²⁾ опубликовал результаты первых экспериментальных измерений ламинаризованных профилей в аэродинамической трубе. Во время

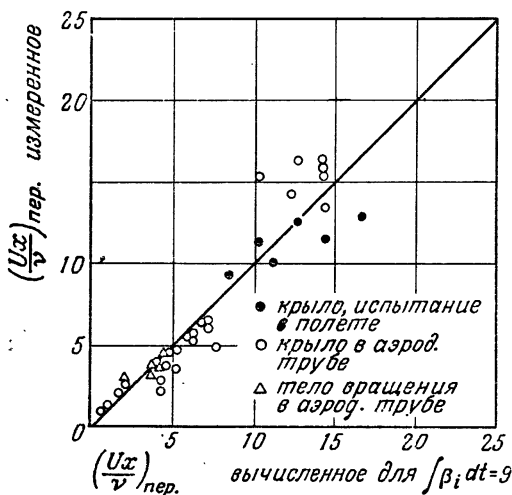


Рис. 52. Определение коэффициента нарастания $\exp \int \beta_i dt$ неустойчивых возмущений на пути от теоретической точки потери устойчивости до экспериментальной точки перехода. По Смитсу (см. примечание 2 на стр. 115). По осям координат отложены измеренные и вычисленные значения $Re_{пер.} \cdot 10^{-6}$.

второй мировой войны многочисленные и систематические измерения ламинаризованных профилей были выполнены в американских аэродинамических лабораториях³⁾

¹⁾ Jones B. M., Flight experiments on the boundary layer. J. Aeron. Sci., 5 (1938), 81; см. также Aircraft Eng., 10 (1938), 133.

²⁾ Doetsch H., Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner c_a -Werte. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. I (1940), 54.

³⁾ Abbott J. H., Doenhoff A. E. and Stivers L. S., Summary of airfoil data. NACA Rep. 824, 1945.

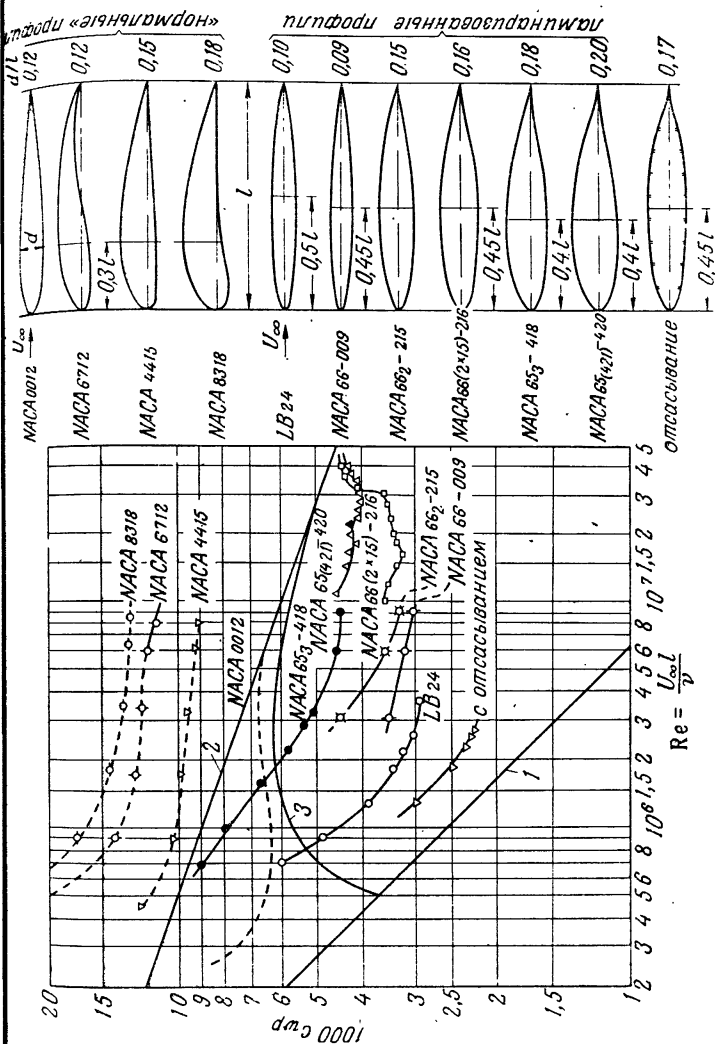


Рис. 53. Зависимость коэффициента сопротивления ламинаризованных профилей от числа Рейнольдса. «Нормальные» профили — по NACA Rep. № 586. Ламинаризованные профили — по NACA Rep. № 824. Кривая 1 — коэффициент сопротивления плоской пластинки при ламинарном пограничном слое; кривая 2 — при турбулентном пограничном слое; кривая 3 — при переходе течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную.

Небольшая сводка коэффициентов сопротивления ламинаризованных профилей дана на рис. 53. Из этого рисунка видно, что уменьшение сопротивления вследствие «эффекта ламинарности» достигает в области чисел Рейнольдса Re от $2 \cdot 10^6$ до $3 \cdot 10^7$, от 30 до 50% сопротивления нормальных профилей. Правда, при очень больших числах Рейнольдса, примерно при $Re = 5 \cdot 10^7$, эффект ламинарности исчезает, так как при таких числах Рейнольдса точка перехода внезапно перемещается вперед, что, впрочем, следует из теории устойчивости.

Необходимо подчеркнуть, что некоторые обстоятельства значительно затрудняют практическое применение ламинаризованных профилей. Среди этих обстоятельств первое место принадлежит очень высоким требованиям, предъявляемым к гладкости поверхности ламинаризованных крыльев, так как шероховатость может вызвать преждевременный переход ламинарной формы течения в турбулентную.

Глава VI

ВЛИЯНИЕ ОТСАСЫВАНИЯ НА ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

§ 19. Предварительные замечания

Еще Л. Прандтль в своей первой работе 1904 г. о пограничном слое¹⁾ указал, что отсасывание пограничного слоя может влиять на характер обтекания тела. При этом имелось в виду предупреждение отрыва течения от тела с целью уменьшения сопротивления давления, а в случае крыла — с целью повышения максимальной

¹⁾ Prandtl L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. III Internat. Math. Kongr., Heidelberg 1904. Вновь напечатано в Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927.

подъемной силы. Впоследствии И. Аккерет¹⁾ и Г. Хольштейн²⁾ экспериментально доказали, что посредством отсасывания пограничного слоя можно влиять также на переход ламинарной формы течения в турбулентную. А именно, отсасывая пограничный слой внутрь крыла через надлежащим образом расположенную щель, можно отодвигать точку перехода вниз по течению и тем самым уменьшать сопротивление трения. На рис. 53 изображена кривая коэффициента профильного сопротивления также для крылового профиля с отсасыванием, исследованного В. Пфеннингером³⁾. Сохранение пограничного слоя ламинарным посредством отсасывания объясняется, во-первых, тем, что вследствие отсасывания уменьшается толщина пограничного слоя, а это в свою очередь уменьшает наклонность его перехода в турбулентное состояние. Во-вторых, профили скоростей ламинарного пограничного слоя с отсасыванием имеют по сравнению с профилями скоростей ламинарного пограничного слоя без отсасывания такую форму, которая более устойчива даже при равной толщине пограничного слоя. По этому поводу см. также статью А. Беца⁴⁾.

§ 20. Ламинарный пограничный слой с отсасыванием и вдуванием

Для теоретического исследования влияния отсасывания на переход ламинарной формы течения в турбулентную необходимо предварительно особенно точно рассчитать ламинарный пограничный слой с отсасыванием.

¹⁾ Ackeret J., Ras M. und Pfenninger W., Verhinderung des Turbulentwerdens einer Reibungsschicht durch Absaugung. Naturwiss. 1941, 622. — Helv. phys. Acta, 14 (1941), 323.

²⁾ Holstein H., Messung der Laminarhaltung der Grenzschicht durch Absaugung an einem Tragflügel. Bericht S 10 der Lilienthal Ges. für Luftfahrtforschung., 1941, 17.

³⁾ Pfenninger W., Untersuchungen über Reibungsverminderung an Tragflügeln, insbesondere mit Hilfe der Grenzschichtabsaugung. Mitt. Inst. Aerodynamik, E. T. H. Zürich, 1946, № 13; см. также J. Aeron. Sci., 16 (1949), 227.

⁴⁾ Betz A., Beeinflussung der Reibungsschicht und ihre praktische Verwertung. Schr. dtsh. Akad. Luftfahrtforschung., 1939, № 49; см. также Jb. dtsh. Akad. Luftfahrtforschung., 1939/40, 246.

Только после выполнения такого расчета можно перейти к исследованию устойчивости. Для численного расчета ламинарного пограничного слоя с отсасыванием проще всего положить в основу случай непрерывного отсасывания, для чего следует представить себе, что обтекаемая стенка имеет поры. Особенно простое решение уравнений пограничного слоя получается для продольного обтекания пластинки с однородным (равномерным) отсасыванием по всей площади пластинки. Если U_{∞} есть скорость набегающего течения, а v_0 — скорость отсасывания ($v_0 < 0$ при отсасывании, $v_0 > 0$ при вдувании), то для пластинки длиной l и шириной b полный объем отсасываемой жидкости равен

$$Q = (-v_0) b \cdot l = c_Q b l \cdot U_{\infty},$$

где через

$$c_Q = \frac{-v_0}{U_{\infty}} \quad (20.1)$$

обозначен безразмерный коэффициент отсасывания, величина которого может иметь порядок от 0,0001 до 0,01 (при отсасывании $c_Q > 0$, при вдувании $c_Q < 0$).

При продольном обтекании пластинки с однородным отсасыванием на некотором расстоянии от передней кромки образуется, согласно Г. Шлихтингу¹⁾, пограничный слой с толщиной вытеснения, равной

$$\delta^* = \frac{\nu}{-v_0}, \quad (20.2)$$

т. е. не зависящей от местной длины x . Распределение скоростей в этом пограничном слое имеет вид

$$U(y) = U_{\infty} (1 - e^{v_0 y / \nu}). \quad (20.3)$$

Этот так называемый *асимптотический профиль скоростей* при отсасывании изображен на рис. 54 вместе с распределением скоростей при обтекании пластинки без отсасывания (профиль Блазиуса). Вблизи стенки асимптотический профиль имеет значительно большую

¹⁾ Schlichting H., Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. Luft.-Forsch., 19 (1942), 179.

кривизну, чем профиль Блазиуса, а потому и более высокий предел устойчивости.

Для исследования устойчивости пограничного слоя на плоской пластинке с отсасыванием необходимо знать также профили скоростей на разгонном участке, т. е. до достижения асимптотического профиля. Эти профили

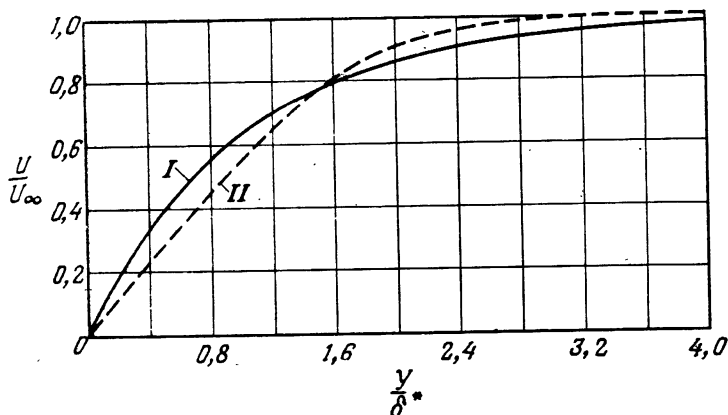


Рис. 54. Распределение скоростей в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке. Кривая I — при однородном отсасывании; «асимптотический» профиль, определяемый уравнением (20.3). Кривая II — без отсасывания; профиль Блазиуса (см. рис. 22).

скоростей были определены Р. Иглишем¹⁾, причем выяснилось, что асимптотическое состояние (20.3) достигается после прохождения разгонного участка, безразмерная длина которого определяется равенством

$$\xi = \left(\frac{-v_0}{U_\infty} \right)^2 \frac{U_\infty x}{\nu} = 4, \text{ или } c_q \sqrt{\text{Re}_x} = 2.$$

Профили скоростей на разгонном участке изображены на рис. 55. Они не аффинно-подобны один другому. В непосредственной близости от передней кромки они имеют такую же форму, как при обтекании пластинки без отсасывания (профиль Блазиуса); дальше вниз по

¹⁾ Iglisch R., Exakte Berechnung der laminaren Reibungsschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung. Schr. dtsh. Akad. Luftfahrtforsch., 8 B, № 1 (1944).

течению они постепенно приближаются по форме к асимптотическому профилю (20.3). При этом толщина вытеснения пограничного слоя возрастает от нуля на передней кромке до асимптотического значения (20.2).

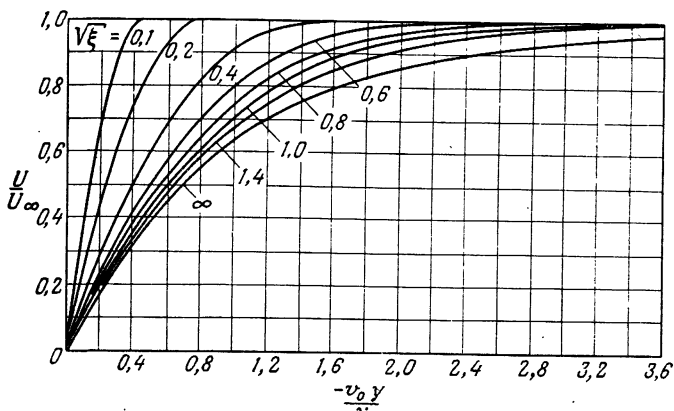


Рис. 55. Изменение профиля скоростей в ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке вдоль участка разгона при однородном отсасывании. Кривая $\xi = \infty$ представляет собой асимптотический профиль скоростей, определяемый уравнением (20.3) (см. рис. 54).

Вдувание и отсасывание влияют на распределение скоростей в пограничном слое по-разному, что легко видеть на примере продольного обтекания пластинки с отсасыванием по закону

$$v_0(x) = -\frac{1}{2} c_Q^* \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \quad (20.4)$$

($c_Q^* > 0$ при отсасывании, $c_Q^* < 0$ при вдувании). При таком обтекании, исследованном Г. Шлихтингом и К. Буссманом¹⁾, при каждом фиксированном значении c_Q^* профили скоростей получаются аффинно-подобными один другому. Однако, как показывает рис. 56, форма профиля скоростей сильно зависит от коэффициента отсасывания. На этом рисунке профиль $c_Q^* = 0$ предста-

¹⁾ Schlichting H. und Bussmann K., Exakte Lösungen für die laminare Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. Schr. dtsh. Akad. Luftfahrtforsch., 7 B, № 2 (1943).

влияет собой профиль Блазиуса при обтекании пластинки без отсасывания (рис. 22). Профили скоростей с отсасыванием ($c_Q^* > 0$) имеют такую же сильно изогнутую форму, как на рис. 55, профили же скоростей при вдувании ($c_Q^* < 0$) все имеют точку перегиба.

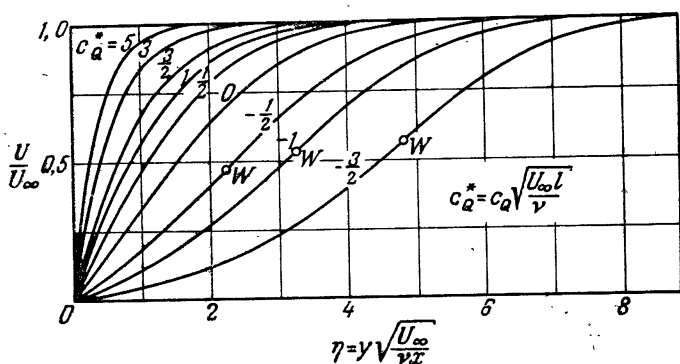


Рис. 56. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке с отсасыванием и вдуванием со скоростью, определяемой равенством (20.4). c_Q^* — приведенный коэффициент расхода при отсасывании. Значения $c_Q^* > 0$ означают отсасывание, значения $c_Q^* < 0$ — вдувание. W — точка перегиба.

Изложенные результаты позволяют сделать следующий вывод: отсасывание влияет на форму профиля скоростей в ламинарном пограничном слое так же, как падение давления, а вдувание — как возрастание давления. Так как в рассматривавшейся до сих пор теории устойчивости несжимаемого течения критическое число Рейнольдса зависит в основном только от профиля скоростей, то отсюда становится очевидным влияние отсасывания и вдувания на критическое число Рейнольдса: отсасывание повышает, а вдувание понижает критическое число Рейнольдса.

§ 21. Устойчивость пограничного слоя с отсасыванием

Первое исследование устойчивости ламинарного пограничного слоя с отсасыванием было выполнено

К. Буссманом и Г. Мюнцем¹⁾ для асимптотического профиля скоростей (20.3), изображенного на рис. 54. Для предела устойчивости они получили очень высокое значение

$$\left(\frac{U_{\infty}^{\delta^*}}{v}\right)_{\text{кр.}} = 70\,000.$$

Примерно в то же время И. Преч²⁾ несколько иным способом нашел более низкое значение 57 000, а впоследствии Фриман³⁾ — еще более низкое значение 40 000. Таким образом, критическое число Рейнольдса для асимптотического профиля лежит в пределах

$$\left(\frac{U_{\infty}^{\delta^*}}{v}\right)_{\text{кр.}} = 40\,000 \div 70\,000, \quad (21.1)$$

т. е. оно круглым числом в 100 раз больше критического числа для пограничного слоя на пластинке без отсасывания. Для пограничного слоя на пластинке с однородным отсасыванием А. Ульрих⁴⁾ исследовал на устойчивость также профили скоростей в разгонном участке. Полученные им нейтральные кривые изображены на рис. 57. Они показывают, что отсасывание не только значительно повышает критическое число Рейнольдса, но также очень сильно суживает — по сравнению с пограничным слоем без отсасывания — области, заключенные внутри нейтральных кривых, т. е. суживает диапазон возможных длин для волн неустойчивых возмущений.

¹⁾ Bussmann K. und Münz H., Die Stabilität der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Jb. dtsh. Luftfahrtforschg., I (1942), 36; см. также Schlichting H., Die Beeinflussung der Grenzschicht durch Absaugung und Ausblasen. Jb. dtsh. Akad. Luftfahrtforschg., 1943/44, 90.

²⁾ Pretsch J., Umschlagsbeginn und Absaugung. Jb. dtsh. Luftfahrtforschg., I (1942), 1.

³⁾ Chiarulli P. and Freeman J. C., Stability of the boundary layer. Techn. Rep. № F-TR/1197-1A. Headquarters Air Material Command, Dayton, 1948.

⁴⁾ Ulrich A., Theoretische Untersuchungen über die Widerstandersparnis durch Laminarhaltung mit Absaugung. Schr. dtsh. Akad. Luftfahrtforschg., 8 B, № 2 (1944).

Влияние на предел устойчивости отсасывания и градиента давления можно объединить и представить в виде зависимости критического числа Рейнольдса от формпараметра $H = \delta^*/\delta$ профиля скоростей. Такое построение сделано на рис. 58. Результаты для пластинки

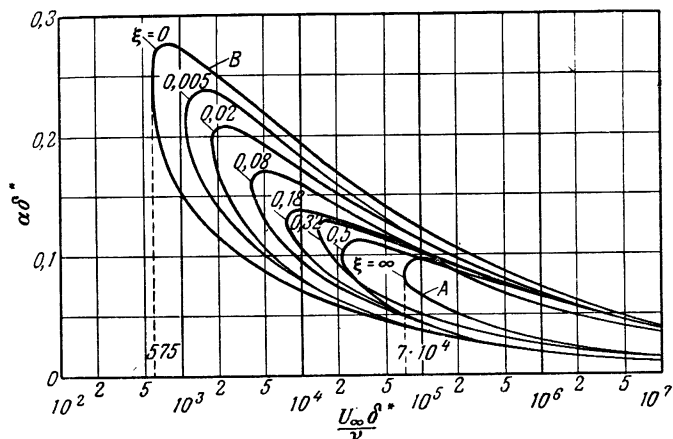


Рис. 57. Нейтральные кривые для профилей скоростей в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке при однородном отсасывании. $\xi = (-v_0/U_\infty)^2 (U_\infty x/\nu) = 1/4 c_Q^2 \text{Re}$, где c_Q — коэффициент расхода при отсасывании. Кривая A — асимптотический профиль ($\xi = \infty$), кривая B — профиль без отсасывания ($\xi = 0$).

с однородным отсасыванием (профили Иглиша), для пластинки с отсасыванием по закону $v_0 \sim 1/\sqrt{x}$ (профили Шлихтинга — Буссмана), а также для пластинки без отсасывания, но с градиентом давления (профили Хартри) все хорошо ложатся на одну кривую. Для асимптотического профиля (20.3) формпараметр $H = 2$, а для пластинки без отсасывания $H = 2,59$. Примеры расчета положения точки потери устойчивости на крыловых профилях с отсасыванием имеются в работе Г. Крюгера¹⁾.

¹⁾ Krüger H., Über den Einfluss der Absaugung auf die Lage der Umschlagsstelle an Tragflügelprofilen. Ing.-Arch., 19 (1951), 384.

В. Вюст^{1,2)} показал, что при отсасывании через несколько расположенных одна за другой щелей стабилизирующее действие отсасывания меньше, чем при непрерывном отсасывании. Причину этого явления следу

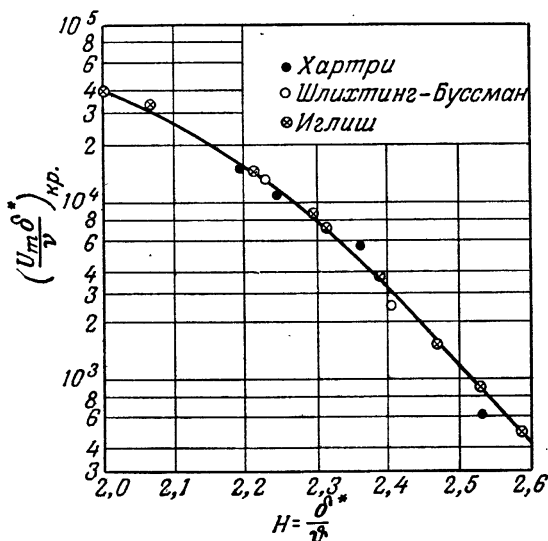


Рис. 58. Зависимость критического числа Рейнольдса в ламинарном пограничном слое с отсасыванием и с градиентом давления от формпараметра $H = \delta^*/\delta$.

искать в том, что в промежутках между отдельными щелями около стенки образуются замкнутые области, в которых расположены вихри, вращающиеся в противоположные стороны.

¹⁾ Wuest W., Näherungsweise Berechnung und Stabilitätsverhalten von laminaren Grenzschichten mit Absaugung durch Einzelschlitz. Ing.-Arch., 21 (1953), 90.

²⁾ Wuest W., Stabilitätsmindernde Einflüsse der Absauggrenzschichten. Z. Flugwiss., 4 (1956), 81; см. также Grenzschicht Symposium. Freiburg. 1957, стр. 319, Springer, Berlin, 1958; Schlichting H., Einige neuere Ergebnisse über Grenzschichtbeeinflussung. Proceedings of the First Internat. Congr. in the Aeronautical Sciences, Madrid, 8—13 сент. 1958.

§ 22. Уменьшение сопротивления, вызываемое ламинаризацией пограничного слоя посредством отсасывания

В связи с тем, что отсасывание дает возможность сохранять пограничный слой ламинарным, возникает важный вопрос о количестве воздуха, которое необходимо отсасывать. Путем увеличения количества отсасываемого воздуха можно сделать толщину пограничного слоя произвольно малой и тем самым настолько уменьшить число Рейнольдса для пограничного слоя, что оно всегда будет меньше предела устойчивости. Однако слишком сильное увеличение количества отсасываемого воздуха невыгодно, так как тогда значительная часть мощности, сэкономленной на уменьшении сопротивления, будет расходоваться на чрезмерное отсасывание (мощность отсасывающего насоса). Поэтому весьма важно определить то *минимальное количество* воздуха, которое необходимо отсасывать для того, чтобы сохранить пограничный слой ламинарным. Это минимальное количество отсасываемого воздуха одновременно определит максимальное уменьшение сопротивления, которое может быть достигнуто посредством отсасывания. В самом деле, любое большее количество отсасываемого воздуха даст более тонкий пограничный слой, а потому и более высокое касательное напряжение на стенке.

Первую грубую оценку количества воздуха, которое необходимо отсасывать для ламинаризации пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке, можно найти, предположив, что асимптотический профиль (20.3) получается уже на передней кромке пластинки. Тогда пограничный слой будет устойчивым вдоль всей пластинки, если число Рейнольдса, составленное для толщины вытеснения δ^* , будет всюду меньше значения предела устойчивости, определенного равенством (21.1), т. е. если

$$\frac{U_{\infty}\delta^*}{\nu} < \left(\frac{U_{\infty}\delta^*}{\nu}\right)_{\text{кр.}}$$

Подставив вместо δ^* его значение (20.2) для асимптотического профиля и взяв для $(U_{\infty}\delta^*/\nu)_{\text{кр.}}$ меньшее из зна-

чений (21.1), мы получим

$$\frac{-v_0}{U_\infty} = c_Q > \frac{1}{40\,000}.$$

Следовательно, для обеспечения устойчивости коэффициент отсасывания должен быть несколько больше очень малого значения $c_Q = 0,000\,025$.

Необходимо, однако, заметить, что более точный расчет дает для минимального коэффициента отсасывания несколько большее значение. В самом деле асимптотический профиль (20.3), положенный в основу приближенного расчета, устанавливается только на некотором расстоянии позади передней кромки. Правда, до этого места, т. е. на разгонном участке, толщина пограничного слоя меньше значения (20.2), но зато здесь предел устойчивости ниже 40 000 (см. рис. 57). А. Ульрих¹⁾, выполнив расчет с учетом разгонного участка, нашел для минимального необходимого коэффициента отсасывания значение

$$c_{Q\min.} = 0,000\,12. \quad (22.1)$$

Таким образом, для ламинаризации пограничного слоя необходимо отсасывать всего только 0,01% объема воздуха, протекающего перпендикулярно к направлению течения через поперечное сечение, равновеликое обтекаемой поверхности.

Уменьшение сопротивления, которое коэффициент отсасывания (22.1) дает для продольно обтекаемой пластинки с непрерывным отсасыванием, можно определить из рис. 59. Коэффициент сопротивления трения при «наивыгоднейшем отсасывании» лишь немного больше коэффициента трения при ламинарном пограничном слое без отсасывания. При числах Рейнольдса между 10^6 и 10^8 уменьшение сопротивления, достигаемое посредством наивыгоднейшего отсасывания, составляет от 70 до 85% сопротивления при турбулентном пограничном слое.

Возможность столь большого уменьшения сопротивления посредством отсасывания экспериментально подтверждена измерениями в аэродимической трубе, выпол-

¹⁾ См. примечание 4 на стр. 124.

ненными А. Л. Брасловом¹⁾, а также измерениями в полете, выполненными М. Джонсом и М. Р. Хедом^{2,3)}. В тех и других измерениях использовались крылья с пористыми поверхностями. Аналогичные измерения были выполнены также А. Распетом⁴⁾ и Б. Г. Кармайклом⁵⁾ во время полета на планере.

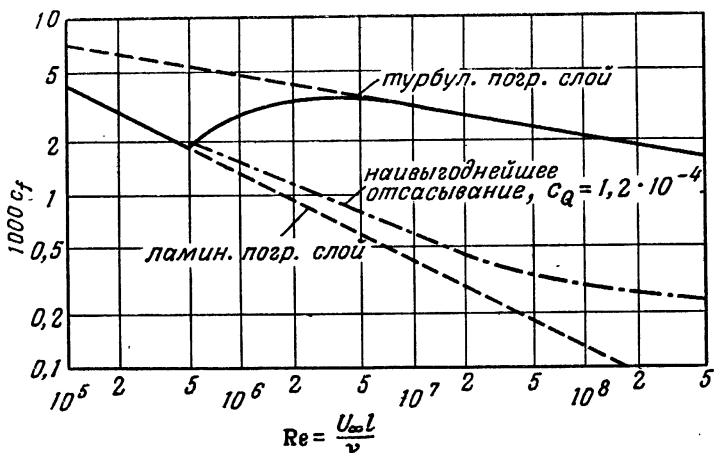


Рис. 59. Зависимость коэффициента сопротивления продольно обтекаемой плоской пластинки от числа Рейнольдса. «Наивыгоднейшее» отсасывание получается при том минимальном коэффициенте расхода, который необходим для сохранения пограничного слоя ламинарным. Этот коэффициент равен $c_{Q \min} = 0,00012$.

Если отсасывание пограничного слоя задерживает его турбулизацию, то вдувание жидкости в пограничный

¹⁾ Braslow A. L., Burrows D. L., Tetervin N. and Visconti F., Experimental and Theoretical Studies of Area Suction for the Control of the Laminar Boundary Layer on an NACA 64 A 010 Airfoil. NACA Rep. 1025 (1951).

²⁾ Jones M. and Head M. R., The reduction of drag by distributed suction. Proc. Third Anglo-American Aeron. Conf. Brighton 1951, стр. 199.

³⁾ Head M. R., The boundary layer with distributed suction. ARC. Rep. a. Mem. 2783, 1955.

⁴⁾ Raspét A., Boundary layer studies on a sailplane. Aeron. Eng. Rev., 11 (1952), № 6, 52.

⁵⁾ Carmichael B. H. Flight observation of suction-stabilized boundary layers. Aeron. Eng. Rev., 13 (1954), № 2, 36.

слой, наоборот, может ускорить его турбулизацию, что в известных случаях представляет технический интерес. Так, например, одним из возможных способов предохранения тела, летящего со сверхзвуковой скоростью, от недопустимого нагревания вследствие трения является вдувание в пограничный слой охлаждающего средства (газа или жидкости) через пористую поверхность. Количество охлаждающей жидкости, необходимое для поддержания температуры поверхности в желательных пределах, при турбулентном пограничном слое значительно больше, чем при ламинарном. Однако теоретических исследований устойчивости пограничного слоя при вдувании пока не имеется. В принципе можно ожидать, что вдувание понижает предел устойчивости, так как оно деформирует профиль скоростей, приближая его по форме к профилю с точкой перегиба (см. рис. 56). К. Дж. Скотт и Г. Э. Андерсон¹⁾ провели экспериментальные исследования над конической моделью при числе Маха 3,4, вдувая в пограничный слой гелий и воздух. Эксперименты показали, что число Рейнольдса, при котором возникает переход ламинарной формы течения в турбулентную, уменьшается с увеличением количества вдуваемой жидкости, однако это уменьшение компенсируется наступающим охлаждением поверхности. О влиянии теплопередачи см. гл. VIII.

Глава VII

ВЛИЯНИЕ АКТИВНЫХ СИЛ НА ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

§ 23. Предварительные замечания

Существует несколько случаев, в которых на переход ламинарного течения в турбулентное значительное влияние оказывают активные внешние силы. Примером

¹⁾ Scott C. J. and Anderson G. E., Boundary-layer transition with gas injection. J. Aeron. Sci., 25 (1958), 791 (Readers' Forum). — University of Minnesota, Rosemount Rep. № 151, 1958.

может служить течение в промежутке между вращающимися концентрическими цилиндрами. Если внутренний цилиндр неподвижен, а внешний вращается, то в промежутке между ними скорость увеличивается приближенно по линейному закону от нулевого значения на внутренней стенке до значения на внешней стенке, совпадающего с окружной скоростью вращения внешнего цилиндра.

При таком течении частица жидкости, находящаяся ближе к внешней стенке, сопротивляется перемещению по направлению к внутренней стенке, так как для нее центробежная сила больше, чем для частиц из внутренних слоев; поэтому если такая частица и начинает перемещаться по направлению к внутренней стенке, то она тотчас же отбрасывается наружу. Однако одновременно затруднено и перемещение частиц жидкости изнутри наружу, так как центробежная сила во внутреннем слое меньше центробежной силы во внешнем слое, и поэтому частица, находящаяся во внутреннем слое, испытывает «подъемную силу», направленную внутрь. Таким образом, в рассматриваемом случае поперечные движения, являющиеся признаком турбулентности, затруднены вследствие действия центробежных сил; следовательно, эти силы действуют на течение стабилизирующим образом.

С влиянием центробежных сил при течении однородной жидкости вдоль искривленной стенки в известной мере родственно влияние переменной в вертикальном направлении плотности при течении неоднородной жидкости вдоль горизонтальной плоской стенки. В этом случае расслоение жидкости устойчиво, если плотность кверху уменьшается, и неустойчиво, если плотность кверху увеличивается.

§ 24. Влияние центробежных сил

Все исследования устойчивости, рассматривавшиеся выше, относятся к ламинарным течениям вдоль плоских стенок, а также к двумерным (плоским) возмущающим движениям. При течении вдоль искривленных стенок возникают центробежные силы, определенным образом

влияющие на устойчивость течения. Г. Гёртлер ¹⁾ обобщил критерий Толмина о неустойчивости профиля с точкой перегиба на случай течения вдоль искривленной стенки. Согласно критерию Толмина, при течении вдоль плоской стенки в предельном случае очень высоких чисел Рейнольдса профили скоростей с переменной знака у производной d^2U/dy^2 неустойчивы (см. гл. II). Для течения вдоль искривленной стенки этот критерий видоизменяется только в том смысле, что производная d^2U/dy^2 заменяется величиной

$$\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dy}, \quad (24.1)$$

где R есть радиус кривизны стенки, причем $R > 0$ для выпуклой и $R < 0$ для вогнутой стенки. Перемена знака величины (24.1) вызывает невязкую неустойчивость. Так как величина (24.1), согласно первому из уравнений пограничного слоя, с точностью до множителя совпадает с градиентом давления dp/dx , то при течении вдоль искривленной стенки неустойчивость, вызываемая двумерными возмущающими волнами, возникает, как и при течении вдоль плоской стенки, в точке минимума давления. Однако в целом влияние кривизны стенки на течение в пограничном слое в том случае, когда отношение $\delta/|R| \ll 1$ (δ — толщина пограничного слоя), очень мало. При течении вдоль вогнутой стенки значительно важнее другой вид неустойчивости, вызываемый некоторыми трехмерными возмущениями. Этот вид неустойчивости будет рассмотрен в гл. IX.

Некоторый технический интерес представляет влияние центробежных сил на устойчивость упомянутого выше течения в промежутке между двумя вращающимися концентрическими цилиндрами. Здесь мы остановимся только на случае, когда внешний цилиндр вращается, а внутренний — покоится. В предельном случае, когда ширина s промежутка между цилиндрами очень мала по сравнению с радиусом внешнего цилиндра, т. е. $s \ll R$, течение между цилиндрами можно рассматри-

¹⁾ Görtler H., Über den Einfluss der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. Z. angew. Math. Mech., 20 (1940), 138.

вать как течение Куэтта с линейным распределением скоростей. В этом случае, как уже было сказано в гл. II, предела устойчивости не имеется ($Re_{кр.} = \infty$). Однако и при $s \ll R$, и при более высоких значениях s/R предел устойчивости все же можно вычислить, если исследовать разгон течения, т. е. рассмотреть профили скоростей, возникающие при внезапном приведении внешнего цилиндра во вращение.

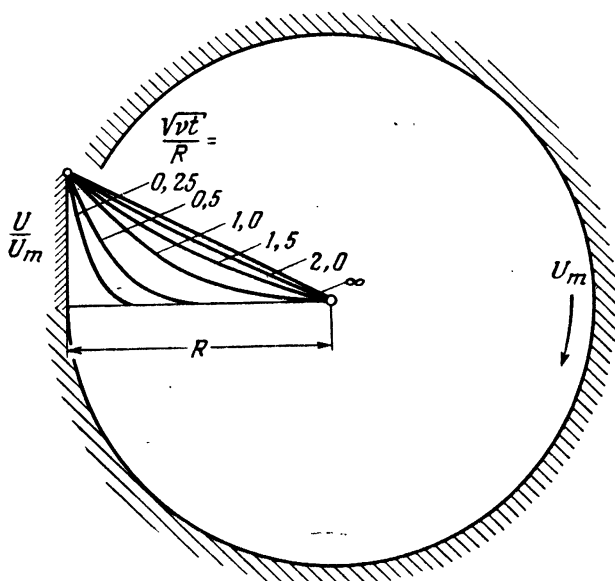
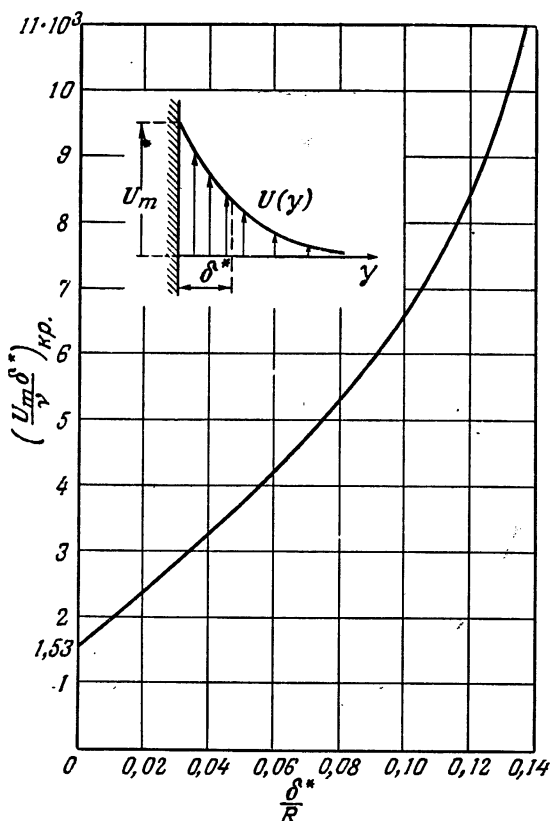


Рис. 60. Распределение скоростей во вращающемся цилиндре при разгоне.

Если для простоты предположить, что внутренний цилиндр отсутствует, то развитие во времени распределения скоростей, получающегося при разгоне, имеет вид, изображенный на рис. 60. Эти профили скоростей, которые можно характеризовать параметром δ^*/R , были исследованы на устойчивость Г. Шлихтингом¹⁾.

¹⁾ Schlichting H., Über die Entstehung der Turbulenz in einem rotierenden Zylinder, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math. phys. Kl., 1932, 160.

Зависимость предела устойчивости от δ^*/R изображена на рис. 61 и, кроме того, дана в таблице 2. Из рисунка и таблицы видно, что предел устойчивости



Р и с. 61. Критическое число Рейнольдса для профиля скоростей, образующегося во вращающемся цилиндре при разгоне. По Шлихтингу (см. примечание 1 на стр. 133).

при $\delta^*/R = 0$ равен $(U_m \delta^*/\nu)_{кр.} = 1530$, т. е. выше, чем при продольном обтекании плоской пластинки. Причина этого заключается в том, что в рассматриваемом случае профиль скоростей вблизи стенки имеет большую кривизну, чем профиль скоростей при течении вдоль пло-

ской пластинки. В третьей строке таблицы 2 даны значения критического числа Рейнольдса, пересчитанного на радиус цилиндра R . При $\delta^*/R = 0,091$ это критическое число Рейнольдса имеет минимум, равный

$$\left(\frac{U_m R}{\nu}\right)_{\text{кр.}} = 66\,000. \quad (24.2)$$

Это и есть наименьшее число Рейнольдса во время разгона течения, и его можно рассматривать просто как критическое число Рейнольдса течения между двумя концентрическими цилиндрами, из которых внешний вращается, а внутренний покоится, при условии, что ширина промежутка между цилиндрами велика. Точнее говоря, значение (24.2) имеет место в предельном случае $s \rightarrow R$.

Таблица 2

Критическое число Рейнольдса для профилей скоростей, образующихся во вращающемся цилиндре при разгоне (по Шлихтингу¹⁾).

Профили скоростей изображены на рис. 60

$\frac{\delta^*}{R}$	0	0,011	0,027	0,055	0,073	0,109	0,136
$\left(\frac{U_m \delta^*}{\nu}\right)_{\text{кр.}} \cdot 10^{-3}$	1,53	1,96	2,65	3,96	4,90	7,32	10,8
$\left(\frac{U_m R}{\nu}\right)_{\text{кр.}} \cdot 10^{-4}$	∞	17,9	9,69	7,24	6,72	6,74	7,89

Эксперименты показывают, что измеренные числа Рейнольдса зависят также от отношения ширины промежутка между цилиндрами к радиусу внешнего цилиндра, т. е. от отношения s/R . На рис. 62 изображены результаты некоторых опытов^{2, 3, 4)}. Указанное выше

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 133.

²⁾ M a l l o c k M., Phil. Trans. A 41 (1896).

³⁾ T a y l o r G. I., Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. A 223 (1923), 289; см. также Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 151 (1935), 494; 157 (1936), 546, 565.

⁴⁾ W e n d t F., Turbulente Strömungen zwischen zwei rotierenden konaxialen Zylindern. Ing-Arch., 4 (1933), 577.

теоретическое значение критического числа Рейнольдса соответствует случаю $s/R = 1$. Экстраполяция измеренных значений критического числа Рейнольдса на случай $s/R = 1$ дает $(U_m R/\nu)_{кр.} = 200\,000$. Хотя это число в три раза превышает теоретический предел устойчивости,

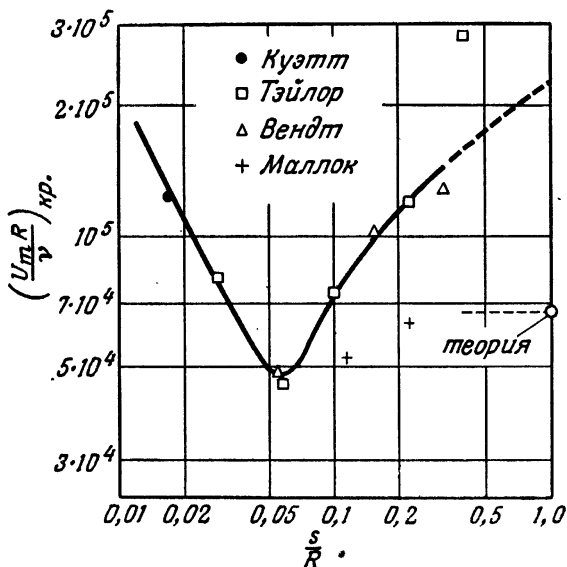


Рис. 62. Критическое число Рейнольдса для течения между концентрическими цилиндрами, из которых внутренний неподвижен, а внешний вращается. R — радиус внешнего цилиндра, s — разность радиусов внешнего и внутреннего цилиндров.

можно считать, что теория удовлетворительно согласуется с экспериментом. В самом деле, теоретический предел устойчивости относится к одному-единственному нейтральному возмущению с определенной длиной волны, между тем как для осуществления перехода из ламинарной формы течения в турбулентную необходимо нарастание ряда возмущений с разной длиной волн¹⁾.

Если внутренний цилиндр вращается, а внешний покоится, то, как и в пограничном слое на вогнутой стенке,

¹⁾ Ср. с работой Schultz-Grunow F., Zur Stabilität der Couette-Strömung, Z. angew. Math. Mech., 39 (1959), 101, вышедшей после окончания автором настоящей статьи.

возникает неустойчивость относительно трехмерных возмущений. Эта неустойчивость также будет рассмотрена в гл. IX.

§ 25. Влияние расслоения плотности в вертикальном направлении

Если при движении жидкости вдоль горизонтальной стенки плотность снизу вверх уменьшается, то устойчивость течения, очевидно, увеличивается; наоборот, при увеличении плотности снизу вверх устойчивость понижается. В случае течения с устойчивым расслоением плотности турбулентное перемешивающее движение в вертикальном направлении тормозится, так как подъему вверх более тяжелых частей жидкости, лежащих внизу, препятствует сила тяжести, а опусканию более легких частей, расположенных наверху, препятствует гидростатическая подъемная сила. Если расслоение достаточно резкое, то торможение перемешивающего движения может привести к полному затуханию турбулентности. Такое затухание турбулентности играет известную роль в некоторых метеорологических явлениях. Так, например, в прохладные летние вечера иногда можно наблюдать, как над влажным лугом при слабом ветре движутся клочья тумана с резко очерченными границами. Это показывает, что произошло полное затухание турбулентности ветра, и слои воздуха скользят один по другому ламинарно, без турбулентного перемешивания. В данном случае причиной особенно устойчивого расслоения является резко выраженный температурный градиент, возникший вблизи поверхности земли вследствие вечернего охлаждения и препятствующий перемешиванию верхних слоев воздуха, более теплых, а потому и более легких, с нижними слоями, более холодными, а потому и более тяжелыми.

Л. Прандтль¹⁾ исследовал такие расслоенные течения, а также ранее рассмотренные течения вдоль искрив-

¹⁾ Prandtl L., Einfluss stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz. Vorträge aus d. Geb. d. Aerodyn. und verwandter Gebiete. Aachen 1929, Berlin 1930, стр. 1.

ленных стенок, когда проявляют свое действие центробежные силы, с точки зрения баланса энергии. Выяснилось, что на устойчивость расслоенного течения наряду с числом Рейнольдса существенное влияние оказывает безразмерное число

$$Ri = \frac{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy}}{\left(\frac{dU}{dy}\right)_{\text{ст.}}^2}, \quad (25.1)$$

где g есть ускорение свободного падения, ρ — плотность, y — вертикальная координата, считаемая положительной при отсчете вверх, и $U(y)$ — распределение скоростей над горизонтальной плоскостью. Подстрочный индекс «ст.» отмечает, что берется значение градиента на стенке. Эта безразмерная величина называется *числом Ричардсона*. Случай $Ri = 0$ означает однородную жидкость, случай $Ri > 0$ — устойчивое расслоение, а случай $Ri < 0$ — неустойчивое расслоение. Энергетические оценки Л. Ф. Ричардсона¹⁾ и Л. Прандтля показали, что турбулентность должна затухать при $Ri \geq 2$. Впоследствии Дж. И. Тэйлор²⁾, уточнив соображения Л. Прандтля, получил в качестве предела устойчивости значение $Ri = 1$.

Дж. И. Тэйлор²⁾ и С. Гольдштейн³⁾ впервые применили для исследования устойчивости расслоенного течения метод малых колебаний. Для случая непрерывного распределения плотности и при линейном распределении скоростей в неограниченно распространенной жидкости они получили в качестве предела устойчивости значение $Ri = 1/4$. Влияние вязкости и кривизны профиля на возмущающее движение они не учитывали. Расчет устойчивости пограничного слоя с расслоением плотности выполнил, следуя теории Толмина, Г. Шлихтинг⁴⁾. В ос-

¹⁾ Richardson L. F., The supply of energy from and to atmospheric eddies. Proc. Roy. Soc. Lond., 97 (1926), 354.

²⁾ Taylor G. I., Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 132 (1931), 499.

³⁾ Goldstein S., On the stability of superposed streams of fluids of different densities. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 132 (1931), 524.

⁴⁾ Schlichting H., Turbulenz bei Wärmeschichtung. Z. angew. Math. Mech., 15 (1935), 313. — Proc. Fourth Internat. Congr. Appl. Mech., Cambridge, 1935, стр. 245.

нову расчета он положил профиль скоростей Блазиуса, получающийся при продольном обтекании плоской пластинки, а расслоение плотности учел только в пограничном слое, следовательно, вне пограничного слоя принял плотность постоянной. Вычисления показали, что критическое число Рейнольдса сильно возрастает с увеличением числа Ричардсона (рис. 63). А именно, критическое число Рейнольдса, составленное для толщины вытеснения, равно $Re_{кр.} = 575$ при $Ri = 0$ (однородная жидкость) и $Re_{кр.} = \infty$ при $Ri = 1/24$. Следовательно, при

$$Ri \geq 0,0417$$

пограничный слой на пластинке в течении с расслоением плотности остается устойчивым.

На рис. 63 показано сравнение этих теоретических результатов с измерениями Г. Рейхардта¹⁾, выполненными в аэродинамической трубе с температурным градиентом в вертикальном направлении. В такой трубе, имеющей прямоугольное поперечное сечение, верхняя стенка может обогреваться паром, а нижняя стенка — охлаждаться водой. Как показывает рис. 63, всем ламинарным течениям, наблюдавшимся в аэродинамической трубе, соответствуют комбинации чисел Re и Ri , лежащие в теоретически устойчивой области, а всем турбулентным течениям — комбинации, лежащие в теоретически неустойчивой области. Таким образом, согласование теории с измерениями следует считать очень хорошим.

Дж. И. Тэйлор²⁾ обнаружил, что в морях иногда имеют место турбулентные течения при значительно больших числах Ричардсона; это, очевидно, необходимо приписать отсутствию стенок.

Недавно Дж. Т. Стюарт³⁾ исследовал влияние магнитного поля на переход ламинарной формы течения

¹⁾ Prandtl L. und Reichardt H., Einfluss von Wärmeschichtung auf die Eigenschaften einer turbulenten Strömung. Dtsch. Forschg., 1934, № 21, 110.

²⁾ Taylor G. I., Internal waves and turbulence in a fluid of variable density. Rapp. Proc. Verb. Cons. Internat. pour l'Exploration de la Mer, LXVI, Kopenhagen, 1931, стр. 20.

³⁾ Stuart J. T., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 221 (1954), 189.

в турбулентную. Для наблюдения он выбрал ламинарное течение с параболическим профилем скоростей между двумя параллельными плоскими стенками; для такого течения критическое число Рейнольдса, согласно сказанному в гл. III, равно 5300. Измерения показали, что

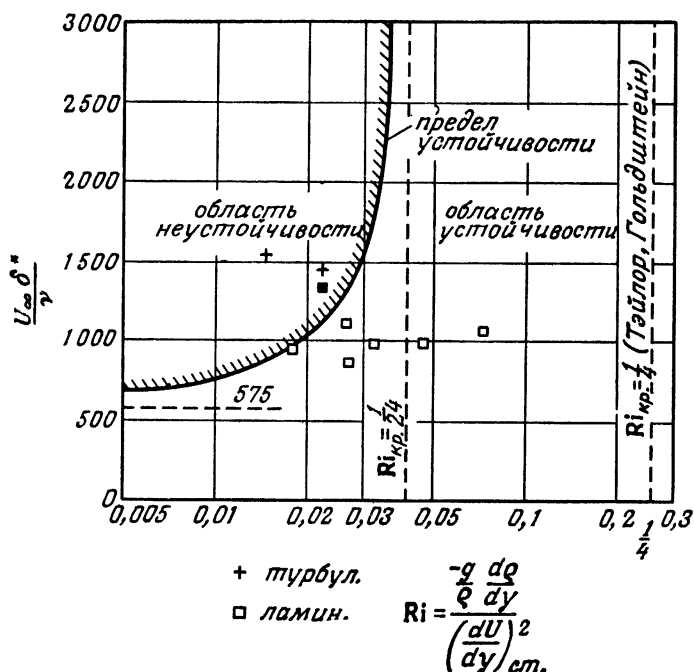


Рис. 63. Зависимость критического числа Рейнольдса для пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластинке от числа Ричардсона Ri . На основании измерений Рейхардта (см. примечание 1 на стр. 139) течение получается ламинарным в устойчивой области и турбулентным в неустойчивой области, следовательно, имеет место полное совпадение теории и эксперимента.

наложение магнитного поля, параллельного плоскости стенок, с напряженностью, равной приблизительно 10% от силы инерции, увеличивает критическое число Рейнольдса до 32 000. В последние годы вопрос о влиянии магнитного поля на течения жидкостей и газов выдвинулся на первое место и привел к созданию магнитной гидро-

динамики и магнитной газовой динамики. Однако содержание обоих этих разделов гидроаэромеханики выходит за рамки настоящей книги и поэтому не будет здесь рассматриваться.

Глава VIII

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ И СЖИМАЕМОСТИ НА ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

§ 26. Предварительные замечания о пограничных слоях в сжимаемых течениях

Все теоретические и экспериментальные результаты по переходу ламинарной формы течения в турбулентную, изложенные в предыдущих главах, относятся к течениям с умеренной скоростью (несжимаемые течения). В настоящее время в связи с запросами авиационной техники усиленно исследуется влияние сжимаемости текущей среды на переход ламинарной формы течения в турбулентную. Влияние сжимаемости определяется в основном числом Маха

$$M = \frac{U_{\infty}}{c_{\infty}},$$

представляющим собой отношение скорости течения U_{∞} к скорости звука c_{∞} . Другим параметром, играющим важную роль в сжимаемых течениях, является теплопередача между обтекаемой стенкой и текущей средой. В несжимаемых течениях теплопередача между стенкой и текущей средой происходит только в том случае, когда температура стенки поддерживается на более высоком или более низком уровне, чем температура протекающей жидкости. В первом случае стенка охлаждается протекающей жидкостью, во втором — нагревается. В сжимаемом течении на теплопередачу между стенкой и текущей средой сильное влияние оказывает тепло, выделяющееся

в пограничном слое вследствие трения. В сжимаемом течении наряду со скоростным пограничным слоем образуется температурный пограничный слой. Если стенка не проводит тепла, то вследствие выделения в пограничном слое тепла, вызванного трением, она нагревается до так называемой *собственной температуры* ¹⁾ T_e . Для пластинки, обтекаемой ламинарным течением в продольном направлении со скоростью U_∞ , собственная температура определяется из равенства

$$T_e - T_\infty = \sqrt{\text{Pr}} \frac{U_\infty^2}{2gc_p}, \quad (26.1)$$

где T_∞ есть температура внешнего течения, $\text{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля (a — коэффициент температуропроводности) и c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Выражение $U_\infty^2/2gc_p$ в правой части равенства представляет собой температуру, на которую нагревается газ в результате его адиабатического сжатия, вызванного торможением от скорости U_∞ до состояния покоя. Если ввести число Маха $M = U_\infty/c_\infty$, то равенству (26.1) можно придать вид

$$T_e = T_\infty \left(1 + \sqrt{\text{Pr}} \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right), \quad (26.2)$$

где $\kappa = c_p/c_v$ есть отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме. Для воздуха $\text{Pr} = 0,71$ и $\kappa = 1,4$, поэтому

$$T_e = T_\infty (1 + 0,170 M^2). \quad (26.2a)$$

Зависимость собственной температуры пластинки от числа Маха, вычисленная по этой формуле, изображена в виде графика на рис. 64. Нагревание пластинки при числах Маха, больших единицы, весьма значительно; при $M = 2$ отношение $T_e/T_\infty = 1,68$, а при $M = 5$ оно уже достигает значения 5,25.

При турбулентном течении множитель $\sqrt{\text{Pr}}$ ($= 0,84$ для воздуха) в равенстве (26.1) заменяется несколько

¹⁾ В русской литературе более принят термин «равновесная температура». — *Прим. ред.*

большим числом (около 0,9 для воздуха). В последнее время принято записывать равенство (26.1) в более общем виде

$$T_e = T_\infty + r \frac{U_\infty^2}{2gc_p} = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right), \quad (26.3)$$

где r есть коэффициент, равный отношению нагревания стенки вследствие трения к нагреванию вследствие адиабатического сжатия (так называемый коэффициент

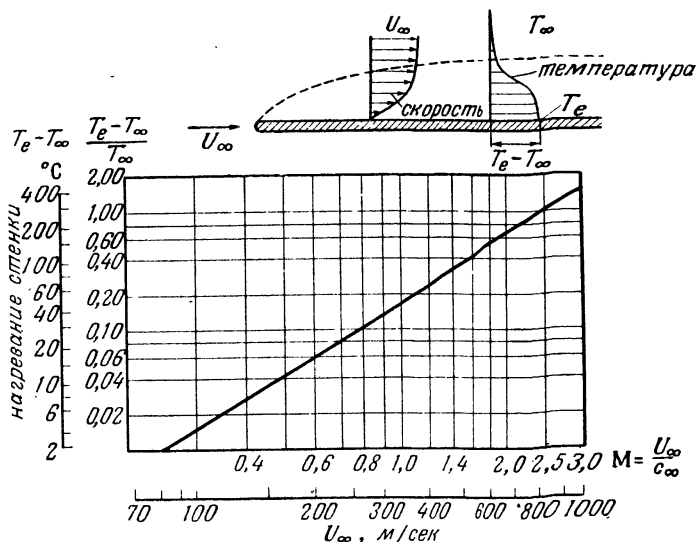


Рис. 64. Нагревание продольно обтекаемой плоской теплонепроницаемой пластинки, вызванное выделением тепла в пограничном слое вследствие трения. Построенная прямая изображает зависимость этого нагревания от числа Маха для воздуха (число Прандтля $Pr=0,71$). Собственная температура определяется формулой (26.2a).

восстановления). Следовательно, для ламинарного течения этот коэффициент равен

$$r = \sqrt{Pr}. \quad (26.4)$$

В сверхзвуковом течении экспериментальное определение точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную обычно производится посредством измерения нагревания стенки, следовательно, посредством опреде-

ления коэффициента восстановления r (см. § 28, в частности, рис. 70).

При сверхзвуковом течении теплопередача между стенкой и текущей средой зависит в основном от разности между температурой стенки $T_{ст.}$ и упомянутой выше собственной температурой T_e . При $T_{ст.} - T_e > 0$ тепло переходит от стенки к газу, а при $T_{ст.} - T_e < 0$ — от газа к стенке. При $T_{ст.} = T_e$ переноса тепла не происходит (теплонепроницаемая стенка). Эти соотношения играют весьма важную роль, так как сейчас мы увидим, что теплопередача между стенкой и текущей средой очень сильно влияет на переход ламинарного течения в турбулентное.

§ 27. Влияние теплопередачи

Некоторые экспериментальные исследования о влиянии теплопередачи на переход ламинарной формы течения в турбулентную выполнил еще в сороковых годах В. Линке¹⁾. В этих экспериментах измерялось сопротивление трения вертикально поставленной плоской пластинки, подвергавшейся нагреванию, при ее горизонтальном обтекании. Измерения показали, что в области чисел Рейнольдса Re_l от 10^5 до 10^6 нагревание приводит к значительному повышению сопротивления. Отсюда Линке сделал правильный вывод, что нагревание пластинки понижает критическое число Рейнольдса, что и влечет за собой заметное увеличение сопротивления трения в наблюдавшейся области чисел Рейнольдса, т. е. в той области этих чисел, которая соответствует переходу ламинарной формы течения в турбулентную.

В том, что при течении без учета сжимаемости нагревание стенки, т. е. теплопередача от стенки к пограничному слою ($T_{ст.} > T_\infty$), понижает критическое число Рейнольдса, а охлаждение стенки ($T_{ст.} < T_\infty$) повышает предел устойчивости, можно убедиться посредством следующего приближенного расчета. Стабилизирующее и, соответственно, возмущающее действие теплопередачи

¹⁾ Linke W., Über den Strömungswiderstand einer beheizten ebenen Platte. Luftfahrtforsch., 19 (1942), 157.

на стенке обуславливается в основном зависимостью коэффициента вязкости μ от температуры. Пусть $U(y)$ есть распределение скоростей в пограничном слое (рис. 18). Если учесть зависимость коэффициента вязкости от температуры, то соотношение (16.2), связывающее градиент давления и кривизну профиля скоростей, примет вид

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{dU}{dy} \right)_{\text{ст.}} = \frac{dp}{dx}. \quad (27.1)$$

Для продольно обтекаемой пластинки градиент давления равен нулю, следовательно,

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{dU}{dy} \right)_{\text{ст.}} = 0, \quad (27.2)$$

или, после выполнения дифференцирования,

$$\mu_{\text{ст.}} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)_{\text{ст.}} + \left(\frac{d\mu}{dy} \right)_{\text{ст.}} \left(\frac{dU}{dy} \right)_{\text{ст.}} = 0.$$

Таким образом, кривизна профиля скоростей на стенке определяется величиной

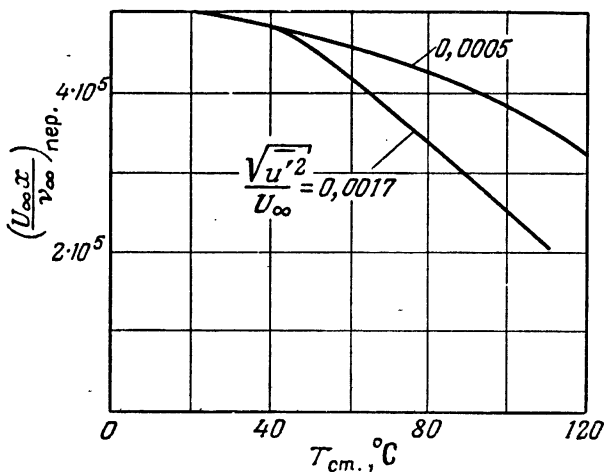
$$\left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)_{\text{ст.}} = - \frac{1}{\mu_{\text{ст.}}} \left(\frac{d\mu}{dy} \right)_{\text{ст.}} \left(\frac{dU}{dy} \right)_{\text{ст.}}. \quad (27.3)$$

Если стенка теплее, чем газ вне пограничного слоя, т. е. $T_{\text{ст.}} > T_{\infty}$, то температурный градиент на стенке отрицателен, т. е. $(\partial T / \partial y)_{\text{ст.}} < 0$, а так как коэффициент вязкости с возрастанием температуры увеличивается, то одновременно и $(d\mu / dy)_{\text{ст.}} < 0$. Далее, так как градиент скорости на стенке положителен, то из равенства (27.3) следует, что

$$\text{при } T_{\text{ст.}} \geq T_{\infty} \quad \left(\frac{d^2 U}{dy^2} \right)_{\text{ст.}} \geq 0. \quad (27.4)$$

Таким образом, в случае нагреваемой стенки кривизна профиля скоростей на стенке положительна, а в случае охлаждаемой стенки — отрицательна. Отсюда немедленно следует, что в случае нагреваемой стенки ($T_{\text{ст.}} > T_{\infty}$) внутри пограничного слоя имеется точка, в которой кривизна профиля скоростей равна нулю, т. е. $d^2 U / dy^2 = 0$. Это означает, что при нагревании стенки профиль скоростей имеет точку перегиба и поэтому на основании

теоремы о роли точки перегиба (гл. II) он весьма неустойчив. Следовательно, передача тепла от стенки протекающему газу действует таким же сильно возмущающим образом, как и повышение давления в направлении течения. Наоборот, передача тепла от протекающего газа к стенке ($T_{\text{ст.}} < T_{\infty}$) стабилизирует пограничный слой, т. е. действует так же, как понижение давления в направлении течения.



Р и с. 65. Зависимость числа Рейнольдса, соответствующего переходу ламинарного течения в турбулентное на нагреваемой продольно обтекаемой плоской пластинке, от температуры стенки $T_{\text{ст.}}$ при разных степенях турбулентности $\sqrt{u'^2} / U_{\infty}$. По измерениям Липмана и Фила¹⁾.

Возмущающее действие нагревания стенки на устойчивость пограничного слоя хорошо подтверждено измерениями Г. В. Липмана и Г. Г. Фила¹⁾, выполненными при продольном обтекании вертикально поставленной плоской пластинки. Результаты этих измерений изображены на рис. 65. Они показывают, что повышение температуры стенки влечет за собой тем большее пониже-

¹⁾ Liepmann H. W. and Fila G. H., Investigations of effects of surface temperature and single roughness elements on boundary-layer transition. NACA T. N. 1196, 1947; NACA Rep. № 890, 1947.

ние числа Рейнольдса, соответствующего переходу ламинарной формы течения в турбулентную, чем выше степень турбулентности. Этого и следовало ожидать на основании сказанного в гл. IV о влиянии степени турбулентности на переход ламинарного течения в турбулентное. Исследованию влияния нагревания стенки на устойчивость пограничного слоя посвящена также работа Р. В. Хиггинса и С. С. Паппаса¹⁾.

§ 28. Влияние сжимаемости

Исследование устойчивости ламинарного пограничного слоя методом малых колебаний при сжимаемом течении впервые выполнил в своей гёттингенской диссертации Д. Кюхеман²⁾. Для упрощения расчетов Кюхеман положил в основу расчета линейное распределение скоростей (рис. 21, а), которое при сверхзвуковой скорости является для пограничного слоя на пластинке значительно лучшим приближением, чем при несжимаемом течении. Влияние трения на возмущающее движение не учитывалось. Исследовалось влияние возмущающих колебаний двух видов: во-первых, нейтральных колебаний типа бегущих волн, рассмотренных в гл. II, и, во-вторых, вынужденных колебаний типа характерных для сверхзвукового течения косых возмущающих волн, попадающих в пограничный слой из внешнего течения и отражающихся в нем. В результате исследования были обнаружены только нейтральные собственные колебания, но в связи с тем, что влияние вязкости не учитывалось, критические числа Рейнольдса определены не были.

Устойчивость сжимаемого ламинарного пограничного слоя с учетом кривизны профиля скоростей и трения была очень подробно исследована Л. Лизом и

¹⁾ Higgins R. W. and Pappas C. C., An experimental investigation of the effect of surface heating on boundary-layer transition on a flat plate in supersonic flow. NACA T. N. № 2351, 1951.

²⁾ Küchemann D., Störungsbewegungen in einer Gasströmung mit Grenzschicht. Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), 207; см. также замечание, опубликованное Н. Гörtler'ом в Z. angew. Math. Mech., 23 (1943), 179.

Ц. Ц. Линем^{1, 2, 3)}. Выяснилось, что для теплопроницаемой стенки влияние сжимаемости на устойчивость пограничного слоя при умеренных числах Маха незначительно. Это видно из рис. 66, на котором изображены нейтральные кривые для пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластинке при различных числах Маха. Кривые показывают, что с увеличением числа Маха критическое число Рейнольдса, составленное для толщины вытеснения δ^* пограничного слоя, уменьшается очень незначительно. Возмущающее влияние увеличения числа Маха получается несколько большим, если критическое число Рейнольдса составлять для толщины потери импульса θ , что легко выполнить, используя указанные на рис. 66 значения отношения (формпараметра) δ^*/θ .

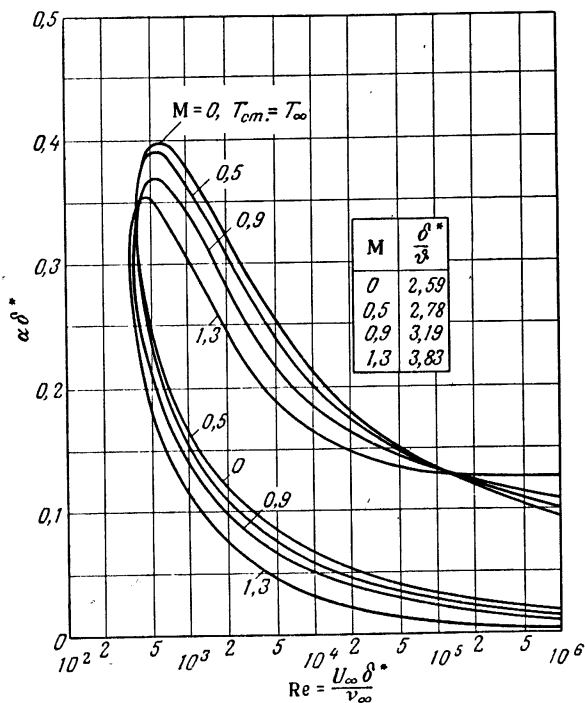
В случае теплопроницаемой стенки влияние теплопередачи между стенкой и текущей средой на устойчивость при сжимаемых течениях столь же велико, как и при несжимаемых течениях. Некоторые результаты, полученные при умеренно большом числе Маха ($M = 0,7$), изображены на рис. 67. Нейтральные кривые, построенные для различных значений отношения $T_{ст}/T_\infty$ температур на стенке и во внешнем течении, показывают, что охлаждение стенки, т. е. теплопередача от пограничного слоя к стенке ($T_{ст} < T_\infty$), сильно повышает предел устойчивости, в то время как нагревание

¹⁾ Lees L. and Lin C. C., Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. NACA T. N. 1115, 1946.

²⁾ Lees L., The stability of the laminar boundary layer in a compressible flow. NACA T. N. 1360, 1947 и NACA Rep. № 876, 1947.

³⁾ Обсуждению результатов, полученных Лизом и Линем, посвящены работы: Bloom M., The effect of surface cooling on laminar-boundary layer stability. J. Aeron. Sci., 18 (1951), 635; van Driest E. R., Cooling required to stabilize the laminar boundary layer on a flat plate. J. Aeron. Sci., 18 (1951), 698; Lees L., J. Aeron. Sci., 18 (1951), 844; Bloom M., J. Aeron. Sci., 19 (1952), 359. За дальнейшими подробностями отсылаем к следующим двум обзорам: Tollmien W., Über Stabilitätsprobleme gasförmiger Grenzschichten. Jb. wiss. Ges. Luftfahrt 1953, 215; Dryden H. L., Transition from laminar to turbulent flow at subsonic and supersonic speeds. Proc. Conference on High-Speed Aeronautics. Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, 1955, стр. 41.

стенки т. е. теплопередача от стенки к пограничному слою ($T_{ст.} > T_{\infty}$), сильно понижает предел устойчивости. Таким образом, при сжимаемых течениях так же, как и при несжимаемых течениях, охлаждение пограничного



Р и с. 66. Нейтральные кривые для ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой *теплонепроницаемой* плоской пластинке при сжимаемом течении. По Лизу и Линю (см. примечание 1 на стр. 148). Число Прандтля $Pr = 1$; δ^*/δ — форм-параметр профилей скоростей; δ^* — толщина вытеснения; δ — толщина потери импульса.

слоя действует подобно падению давления вдоль стенки в направлении течения, т. е. стабилизирующим образом, а нагревание — подобно повышению давления в направлении течения, т. е. возмущающим образом. Эта связь между влиянием градиента давления и влиянием тепло-

передачи становится особенно ясной при сравнении рис. 67 и 46.

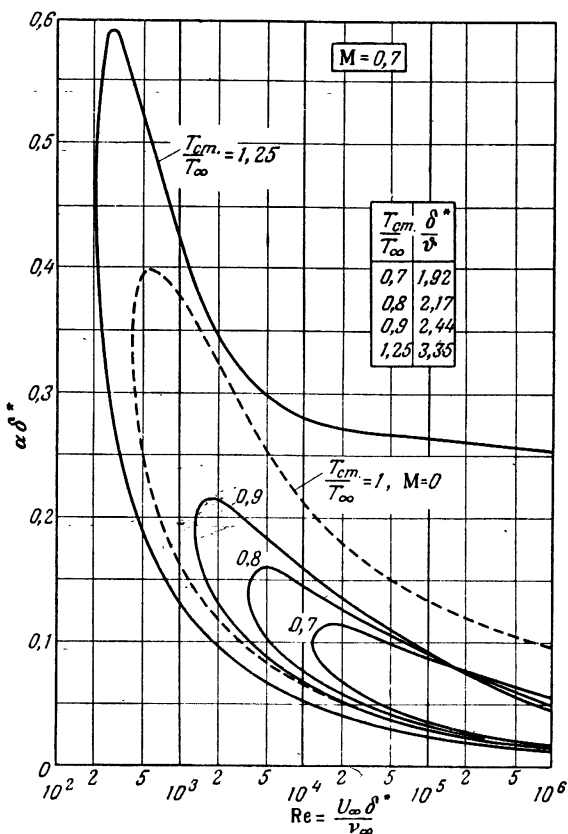


Рис. 67. Нейтральные кривые для ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой теплопроницаемой плоской пластинке при сжимаемом течении. По Лизу и Линю (см. примечание 1 на стр. 148). Число Маха $M = 0,7$; число Прандтля $Pr = 1$; δ^*/δ^* — формпараметр профилей скоростей (см. рис. 66). Охлаждение стенки ($T_{ст.} < T_{\infty}$, передача тепла от газа стенке) значительно повышает предел устойчивости; наоборот, нагревание стенки ($T_{ст.} > T_{\infty}$, передача тепла от стенки газу) понижает предел устойчивости.

К особенно интересным соотношениям приводит исследование влияния сильной теплопередачи на устойчивость

пограничного слоя при высоких числах Маха. На рис. 68 показаны результаты теоретических исследований устойчивости пограничного слоя на продольно обтекаемой плоской пластинке, выполненных Э. Р. Ван-Дристом¹⁾. Вычерченные кривые изображают зависимость критического числа Рейнольдса от числа Маха и от отношения

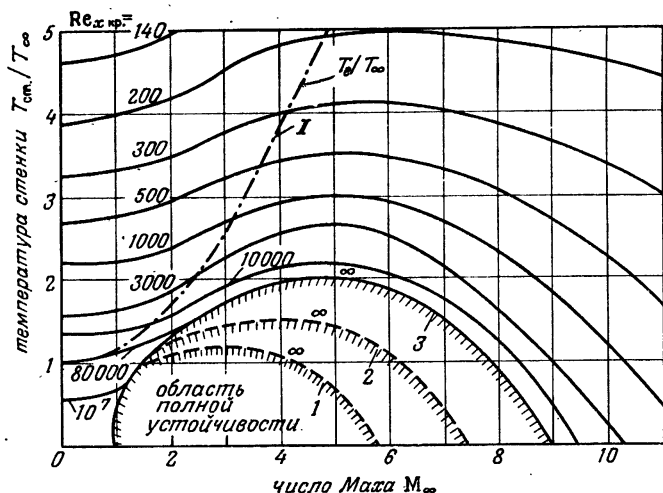


Рис. 68. Влияние числа Маха и температуры стенки на критическое число Рейнольдса при продольном обтекании плоской стенки. По Ван-Дристу¹⁾. Кривая 1 — собственная температура, определяемая формулой (26.2а). Кривые 1, 2, 3 — границы области устойчивости при различных законах $\mu/\mu_0 = (T/T_0)^\omega$, связывающих коэффициент вязкости и температуру. Кривая 1 соответствует случаю $Pr=1$, $\omega=1$; кривая 2 — случаю $Pr=0,75$, $\omega=1$; кривая 3 — случаю $Pr=0,75$ и закону вязкости Сатерленда.

$T_{ст}/T_\infty$ температур на стенке и во внешнем течении. Кривая, обозначенная римской цифрой 1, представляет собой график собственной температуры T_e/T_∞ , вычисленный по формуле (26.2а). В области слева от этой кривой пограничный слой нагревается от стенки, а в области справа — охлаждается стенкой.

¹⁾ van Driest E. R., Calculation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid on a flat plate with heat transfer. J. Aeron. Sci., 19 (1952), 801.

Расчеты Ван-Дрифта показывают, что при достаточном охлаждении пограничного слоя, приблизительно при $T_{ст.}/T_{\infty} < 0,75$, существует такая область чисел Маха, определяющих сверхзвуковые течения, в которой неустойчивость не возникает даже при произвольно больших числах Рейнольдса. Эта область «полной стабилизации» впервые была обнаружена Л. Лизом и позднее более тщательно исследована Ван-Дрифтом. Ее границы несколько зависят также от числа Прандтля и от эмпирического закона $\mu(T)$, связывающего коэффициент вязкости с температурой. Эти исследования были развиты далее Д. В. Даном и Ц. Ц. Линем¹⁾, изучившими, во-первых, влияние температурных колебаний и, во-вторых, влияние трехмерных возмущений (см. гл. IX).

Выяснилось, что полная стабилизация пограничного слоя при любых трехмерных возмущениях невозможна. Однако сильное стабилизирующее действие охлаждения обтекаемой стенки сохраняется и при трехмерных возмущениях. Относительно влияния градиента давления внешнего течения на сжимаемый пограничный слой некоторую ясность вносят работы Г. Уэйла²⁾ и Г. М. Лоу³⁾.

Экспериментальное исследование неустойчивости пограничного слоя на плоской пластинке при дозвуковой скорости было выполнено Дж. Лауфером и Т. Вребаловичем⁴⁾. Искусственные возмущения определенной частоты вызывались сиреной, помещенной под пластинкой. Измерения производились посредством термоанемометра. Вследствие более слабого нарастания возмущений избирательное нарастание синусоидальных колебаний с волнами определенной длины оказалось выраженным

¹⁾ Dunn D. W. and Lin C. C., On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. J. Aeron. Sci., 22 (1955), 455.

²⁾ Weil H., Effects of pressure gradient on stability and skin friction in laminar boundary layers in compressible fluids. J. Aeron. Sci., 18 (1951), 311.

³⁾ Low G. M., Cooling requirements for stability of laminar boundary layer with small pressure gradient at supersonic speeds. NACA T. N. 3103, 1954.

⁴⁾ Laufer J. and Vrebalovich Th., Experiments on the instability of a supersonic boundary layer. IX Internat. Congr. Appl. Mech., Brüssel, т. IV, 1957, стр. 121.

не столь сильно, как при несжимаемом течении (см. примечание 2 на стр. 73). Это обстоятельство сделало невозможным непосредственное наблюдение неустойчивых колебаний на экране осциллографа и привело к необходимости дополнительных измерений с целью внесения поправок. На рис. 69 изображены нейтральные кривые, определенные экспериментально; для сравнения изобра-

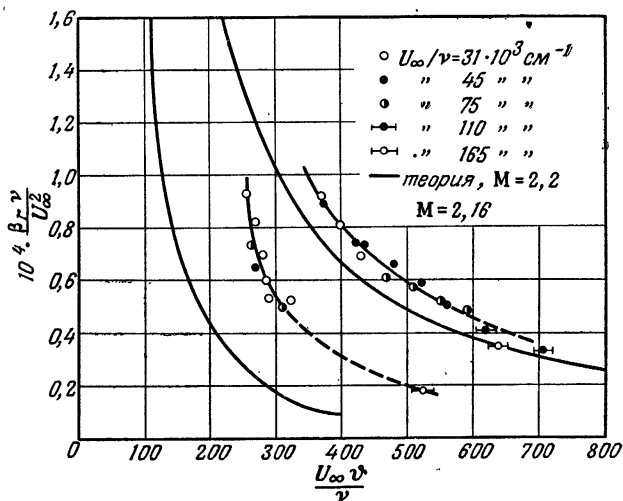


Рис. 69. Нейтральные кривые для ламинарного пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке. По измерениям Лауфера и Вребаловича (см. примечание 4 на стр. 152) при числе Маха $M=2,16$. Теоретическая кривая — по Лизу и Линю (см. примечание 1 на стр. 148). (Расчеты Мака.)

жены также вычисленные нейтральные кривые, найденные на основании теории Линя — Лиза. Эксперименты качественно подтверждают теорию. Количественное расхождение следует отнести на счет уже упомянутых упрощающих допущений, сделанных при построении теории.

При сверхзвуковых скоростях экспериментальное определение точки перехода посредством измерений скорости или динамического давления иногда невозможно. В таких случаях используется способ, основанный на измерении нагревания стенки теплом, выделяющимся в пограничном слое вследствие трения. При переходе

ламинарной формы течения в турбулентную температура стенки, а вместе с ней и коэффициент восстановления, определение которого было дано в § 26, довольно резко возрастают, так как при турбулентном течении выделение тепла в пограничном слое вследствие трения значительно, чем при ламинарном. На рис. 70 изображено

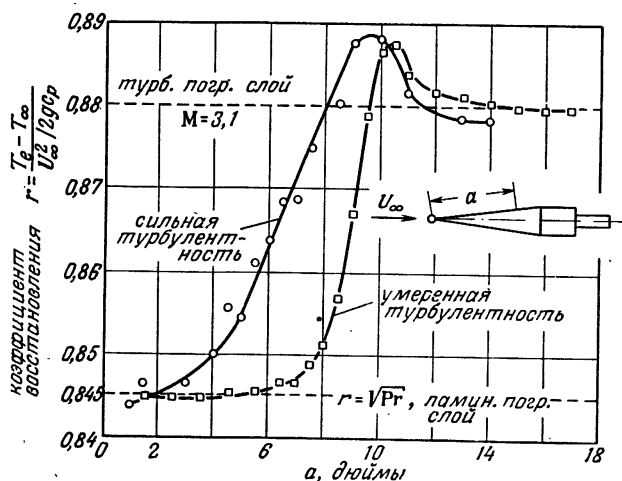


Рис. 70. Измерения коэффициента восстановления на конусе, обтекаемом со сверхзвуковой скоростью (число Маха $M=3,1$) в осевом направлении, с целью определения положения точки перехода ламинарного течения в турбулентное. По Эвварду и Таккеру¹⁾.

такое определение точки перехода, выполненное Дж. К. Эввардом¹⁾ для конуса, обтекаемого в осевом направлении. Значения коэффициента восстановления r отложены в виде ординат, а значения местной длины — в виде абсцисс. Крутой подъем кривой начинается в точке перехода. Изображенные на рис. 70 кривые относятся к различным степеням турбулентности внешнего течения. При более высокой степени турбулентности точка перехода лежит несколько выше по течению, чем при

¹⁾ Evvard J. C., Tucker M. and Burgess W. C., Transition-point fluctuations in supersonic flow. J. Aeron. Sci., 21 (1954), 731; см. также NACA T. N. 3100, 1954.

более слабой степени турбулентности. Аналогичные измерения выполнены Россом¹⁾ и Ван-Дристом²⁾.

Экспериментальным исследованием влияния теплопередачи на положение точки перехода при высоких числах Маха занимались К. Р. Чарнецкий и А. Р. Синклер³⁾. Они обдували в аэродинамической трубе тело вращения в осевом направлении при числе Маха $M = 1,6$. Результаты некоторых их измерений изображены на рис. 71, на котором в качестве абсцисс отложены значения $(T_{ст.} - T_e)/\Delta T_{ад.}$, где $T_{ст.}$ есть температура стенки, T_e — собственная температура, определяемая формулой (26.2а), а

$$\Delta T_{ад.} = \frac{U_{\infty}^2}{2gc_p}$$

— приращение температуры, вызванное адиабатическим торможением. При $T_{ст.} - T_e < 0$ тепло переходит от пограничного слоя к стенке (охлаждение пограничного слоя), а при $T_{ст.} - T_e > 0$, наоборот, от стенки к пограничному слою (нагревание пограничного слоя).

Согласно измерениям Чарнецкого и Синклера, при охлаждении пограничного слоя наибольшее число Рейнольдса, обуславливающее переход ламинарной формы течения в турбулентную, равно $Re_{x пер.} = 28 \cdot 10^6$, т. е. в десять раз больше того значения, которое было найдено Шубауэром и Скрэмстедом (рис. 30) для обтекания пластинки при небольшой степени турбулентности и без теплопередачи. При летных испытаниях ракет V-2⁴⁾ был достигнут еще более высокий предел устойчивости $Re_{x пер.} = 90 \cdot 10^6$.

¹⁾ Ross A. O., Determination of boundary layer transition Reynolds Numbers by surface-temperature measurements of a 10° cone in various NACA supersonic wind tunnels. NACA T. N. 3020, 1953.

²⁾ van Driest E. R. and Boison J. C., Experiments of boundary-layer transition at supersonic speeds. J. Aeron. Sci., 24 (1957), 885.

³⁾ Czarniecki K. R. and Sinclair A. R., An investigation of the effects of heat transfer on boundary-layer transition on a parabolic body of revolution (NACA RM-10) at a Mach Number of 1,61. NACA Rep. № 1240, 1955.

⁴⁾ Sternberg J., A free-flight investigation of the possibility of high Reynolds Number supersonic laminar boundary layers. J. Aeron. Sci., 19 (1952), 721.

Вопрос о том, до какого предела возможно экспериментальное осуществление предсказанной теорией стабилизации пограничного слоя посредством охлаждения поверхности обтекаемого тела, остается открытым. Однако очевидно, что такая стабилизация все же имеет предел. Это подтверждается опытами Дж. Р. Джека,

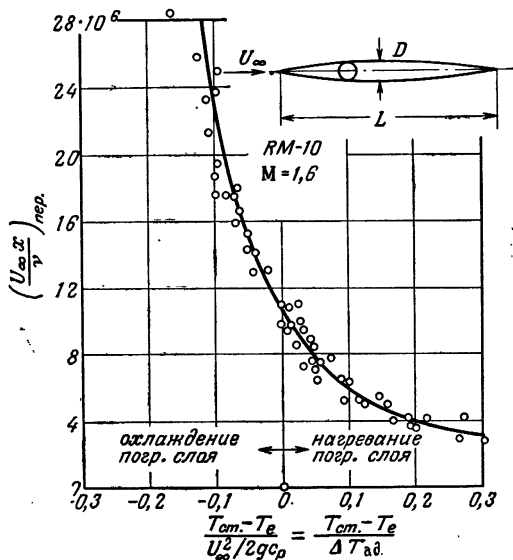


Рис. 71. Число Рейнольдса, соответствующее точке перехода на тонком теле вращения (RM-10), при сверхзвуковой скорости (число Маха $M=1,6$) в случае охлаждения и нагрева пограничного слоя. По измерениям Чарнецкого и Синклера (см. примечание 3 на стр. 155), выполненным в аэродинамической трубе. $T_{ст.}$ — температура стенки; T_e — собственная температура стенки, определяемая формулой (26.2а).

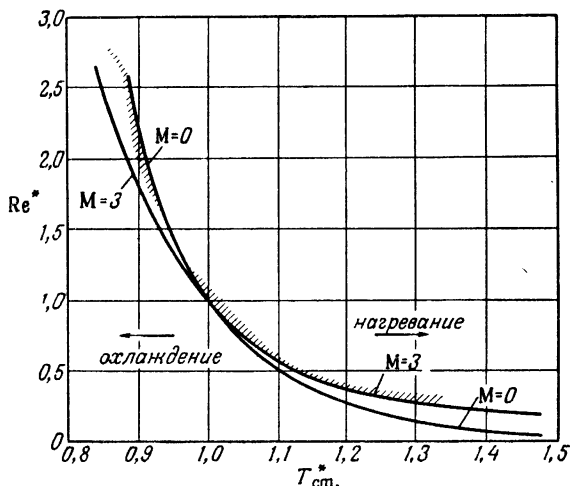
Р. Дж. Вишневого и Н. С. Диакониса¹⁾, показавшими, что число Рейнольдса, вызывающее переход ламинарной формы течения в турбулентную, при чрезвычайно сильном охлаждении стенки перестает увеличиваться, а затем снова уменьшается.

¹⁾ Jack J. R., Wisniewski R. J. and Diaconis N. S. Effects of extreme surface cooling on boundary-layer transition. NASA T. N. 4094, 1957.

Для практической оценки влияния охлаждения поверхности обтекаемого тела Дж. Л. Поттер предложил изображать зависимость критического числа Рейнольдса от температуры в координатах (рис. 72)

$$T_{ст.}^* = \frac{T_{ст.}}{T_e}, \quad Re^* = \frac{Re_{x \text{ кр. при температуре стенки } T_{ст.}}}{Re_{x \text{ кр. при температуре стенки } T_e}},$$

где T_e есть собственная температура, определенная по формуле (26.3). В этих координатах теория и экспери-



Р и с. 72. Влияние температуры стенки $T_{ст.}$ на критическое число Рейнольдса $Re_{x \text{ кр.}} = (U_{\infty} x / \nu)_{\text{кр.}}$. Сплошные кривые — теоретические результаты по Ван-Дристу (см. примечание 1 на стр. 151). Наклонной штриховкой отмечены области, в которых расположены экспериментальные точки, полученные Чарнеким и Синклером (см. примечание 3 на стр. 155).

мент дают мало отличающиеся результаты. При сверхзвуковых скоростях распределение давления вдоль стенки также оказывает сильное влияние на положение точки перехода¹⁾.

¹⁾ Hilton J. H. and Czarniecki K. R., An exploratory investigation of skin friction and transition on three bodies of revolution at a Mach Number of 1,61. NACA T. N. 3193, 1954; Jack J. R., Effect of favorable pressure gradients on transition for several bodies of revolution at Mach number of 3,12. NACA T. N. 4313, 1958.

Исследование «тонкой структуры» перехода ламинарной формы течения в турбулентную при высоких числах Маха¹⁾ показывает, что и в этом случае, в точности так же, как при несжимаемых течениях, положение точки перехода пульсирует по статистическим законам. Наблюдения формы и скорости роста турбулентных пятен проводились К. С. Джемсом²⁾.

§ 29. Переход турбулентного течения в ламинарное

Случай, когда турбулентное течение становится вновь ламинарным, вообще говоря, не имеет непосредственного отношения к теме о возникновении турбулентности. Однако, поскольку эта проблема имеет некоторый технический интерес и поскольку ее изучение способствует пониманию возникновения турбулентных течений, мы все же рассмотрим два примера подобного рода. Один раз мы уже коснулись этой проблемы, когда в гл. IV упомянули, что на задней границе турбулентных пятен в пограничном слое и на передней границе турбулентных пробок в трубе жидкость течет из турбулентной области в нетурбулентную и при этом происходит затухание турбулентных пульсаций. Существуют, однако, и такие случаи, когда переход турбулентной формы течения в ламинарную возникает в значительно более крупном масштабе.

В гл. V было установлено, что повышение давления в пограничном слое способствует переходу ламинарного течения в турбулентное. Наоборот, очень сильное падение давления в направлении течения, наблюдающееся, например, около острых ребер при сверхзвуковом течении, может привести к тому, что пограничный слой, уже ставший турбулентным, временно становится опять ламинарным.

¹⁾ E v v a r d J. C., T u c k e r M. and B u r g e s s W. C., Statistical study of transition point fluctuations in supersonic flow. NACA T. N. 3100, 1954.

²⁾ J a m e s C. S. Observations of turbulent-burst geometry and growth in supersonic flow. NACA T. N. 4235, 1958.

Интересные наблюдения такого рода были сделаны Дж. Стернбергом¹⁾ на модели цилиндра с конической наставкой на переднем конце, причем на этой наставке на некотором расстоянии от ее вершины было надето проволочное кольцо. На рис. 73 отмечены измеренные вдоль поверхности модели значения коэффициента восстановления при числе Маха $M_\infty = 3,02$ (см. в связи с этим § 28). Характер полученной кривой показывает,

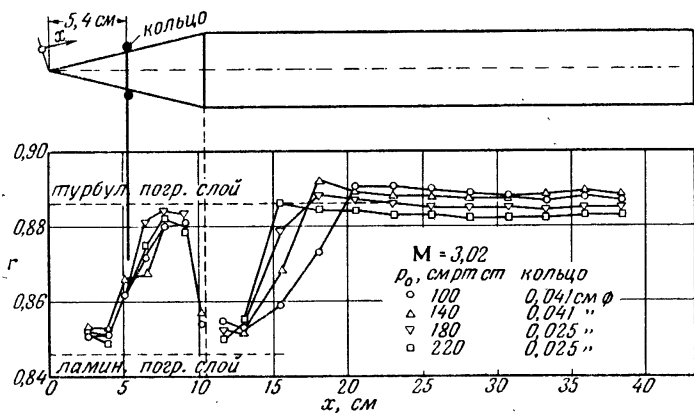
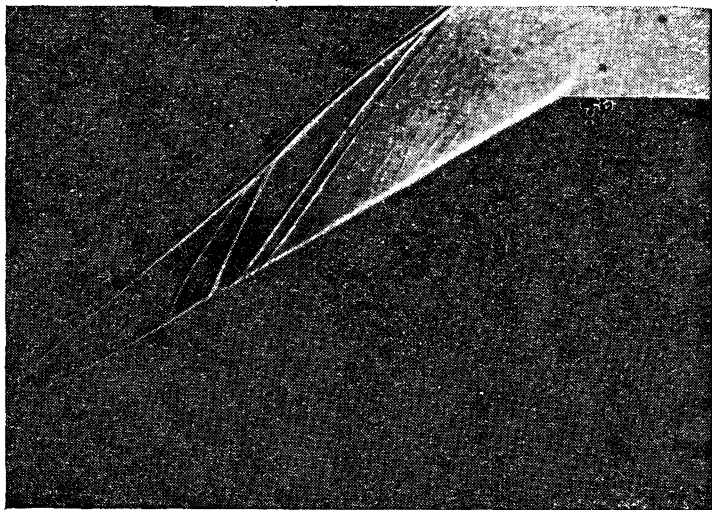


Рис. 73. Изменение коэффициента восстановления вдоль поверхности цилиндра, обтекаемого в осевом направлении и имеющего коническую наставку на переднем конце, при числе Маха $M = 3,02$. По Стернбергу¹⁾. Турбулизация пограничного слоя на конусе была вызвана тем, что на конус было надето проволочное кольцо. Изменение давления p_0 в напорном резервуаре совпадает с изменением числа Рейнольдса набегающего течения.

что пограничный слой на конусе, первоначально ламинарный, вследствие присутствия проволочного кольца становится турбулентным. Однако при переходе с конуса на цилиндр пограничный слой становится опять ламинарным и только дальше вниз по течению, примерно в 15 см от вершины конуса, еще раз превращается в турбулентный пограничный слой. Повторное возникновение турбулентности начинается тем раньше, чем больше число Рейнольдса.

¹⁾ Sternberg J., The transition from a turbulent to a laminar boundary layer. Ballistic Research Laboratories Rep. 906, стр. 104. Aberdeen Proving Ground, Maryland, 1954.

Стернберг очень тщательно исследовал это явление посредством теневых снимков, которые показали следующее (рис. 74). Сильное падение давления при переходе с конуса на цилиндр вызывает в пограничном слое настолько большое увеличение скорости, что даже вблизи



Р и с. 74. Теневой снимок обтекания выпуклого угла со сверхзвуковой скоростью (число Маха $M_\infty = 3,02$). По Стернбергу (см. примечание 1 на стр. 159). Турбулентный пограничный слой переходит в ламинарный пограничный слой.

поверхности цилиндра скорость становится сверхзвуковой. Действие этого увеличения скорости на турбулентность пограничного слоя сходно с действием сужения поперечного сечения в аэродинамической трубе, а именно, происходит значительное уменьшение турбулентных пульсаций. Поэтому воздух, содержащийся в турбулентном пограничном слое до его подхода к точке стыка конуса с цилиндром, после перехода через эту точку образует зону умеренно турбулентного течения, в котором вблизи стенки цилиндра возникает новый ламинарный пограничный слой (рис. 75). Следовательно, этот новый пограничный слой окружен течением с относительно вы-

сокой степенью турбулентности, и поэтому он становится турбулентным уже при сравнительно небольшом числе Рейнольдса. Аналогичные наблюдения сделаны А. Г. Лангом и Р. Е. Ли¹⁾.

Хотя эти опыты были выполнены при сверхзвуковых скоростях, имеются основания предполагать, что при надлежащих условиях аналогичные явления должны наблюдаться также при умеренных скоростях течения. Так, например, возможно, что при сильном сужении поперечного сечения аэродинамической трубы, когда возникает очень сильное падение давления, течение, оставаясь до подхода к конфузору турбулентным, на стенках конфузора становится ламинарным.

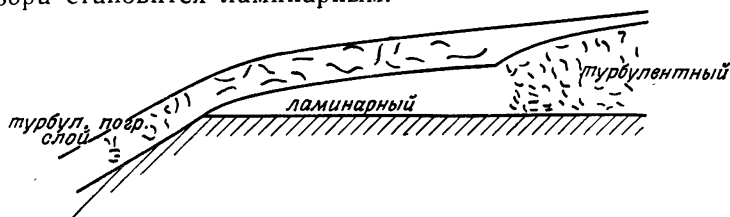


Рис. 75. Схематическое изображение течения в пограничном слое, образующемся при обтекании выпуклого угла со сверхзвуковой скоростью. По Стернбергу (см. примечание 1 на стр. 159).

Другим случаем, при котором экспериментально наблюдается переход турбулентной формы течения в ламинарную, является течение в слабо расширяющейся трубе. При таком течении скорость на основании условия непрерывности обратно пропорциональна квадрату диаметра трубы. Следовательно, число Рейнольдса, составленное для диаметра трубы, уменьшается как величина, обратная диаметру D , т. е.

$$Re = Re_0 \frac{D_0}{D},$$

где D_0 и Re_0 суть значения диаметра и числа Рейнольдса при входе в трубу. В опытах О. Лауэра²⁾ использо-

¹⁾ Lange A. H. and Lee R. E., Note on boundary-layer transition in supersonic flow. J. Aeron. Sci., 21 (1954), 58; 22 (1955), 282.

²⁾ Lauer O., Laminare und turbulente stationäre Strömung von Luft und Kohlensäure in einem schwach konischen Rohr in der Nähe der kritischen Reynoldsschen Zahl. Z. angew. Phys., 5 (1953), 81.

валась коническая труба с углом раствора $\vartheta = 5 \cdot 10^{-4}$. Замедление течения, обусловливаемое этим углом раствора, столь мало, что практически в такой конической трубе получается такое же распределение скоростей, как и в цилиндрической трубе. На рис. 76 изображен график,

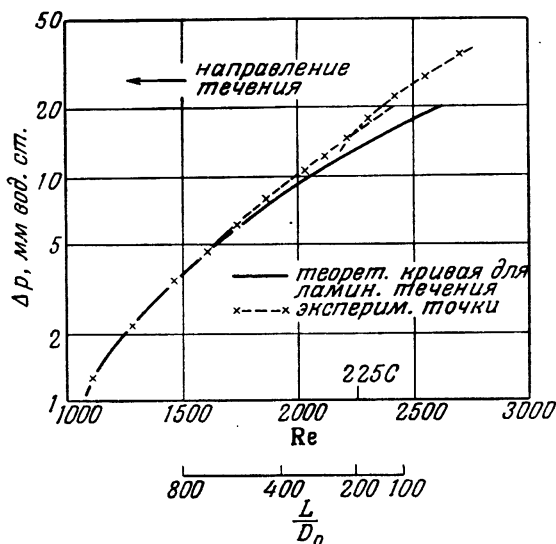


Рис. 76. Расходящееся течение воздуха в конической трубе длиной 1,5 м. Вход в трубу устроен так, что вызывает возмущения. По Лауэру (см. примечание 2 на стр. 161). L — расстояние от входа; $D_0 = 0,5$ см — диаметр трубы при входе.

связывающий падение давления с уменьшающимся в направлении течения числом Рейнольдса. Измеренная кривая давления имеет излом при $Re = 2250$, т. е. почти при таком же числе Рейнольдса, при котором в цилиндрической трубе с остроконечным входом происходит переход ламинарного течения в турбулентное. Дальше вниз по течению кривая давления непрерывно переходит в кривую давления, вычисленную для ламинарного течения.

Рассмотренное явление можно объяснить следующим образом. Ниже некоторого значения числа Рейнольдса

силы вязкости становятся столь большими, что энергии, отдаваемой главным движением перемешивающему движению, уже недостаточно, чтобы компенсировать происходящую диссипацию. В результате происходит непрерывное затухание турбулентности, пока, наконец, — в рассмотренном выше опыте при числе Рейнольдса 1600 — не наступает полное затухание турбулентности, и течение становится ламинарным.

Таким образом, исследования о переходе турбулентной формы течения в ламинарную доказывают, что ниже определенного числа Рейнольдса единственно возможной формой течения является ламинарное течение. В этом доказательстве и состоит самый главный результат этих исследований.

Глава IX

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

§ 30. Течение между вращающимися концентрическими цилиндрами

Во всех изложенных выше теоретических исследованиях устойчивости объектом исследования было плоское (двумерное) течение и наложенное на него плоское возмущающее движение, причем последнее имело вид плоской волны, распространяющейся в направлении основного течения. Для течений вдоль плоской стенки предположение о двумерности возмущающего движения приводило к отысканию самого низкого предела устойчивости (критическое число Рейнольдса), так как трехмерные возмущения, как показал Г. Б. Сквайр (см. гл. II), всегда дают более высокий предел устойчивости.

Совсем иного рода неустойчивость получается при течении около искривленной стенки. При течении между двумя концентрическими цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний покоится, возникает неустойчивое расслоение жидкости, так как части жидкости, находящиеся вблизи внутренней стенки, стремятся

вследствие большей центробежной силы переместиться наружу. Как показал впервые Дж. И. Тэйлор¹⁾, при таком течении, начиная с определенного числа Рейнольдса, между цилиндрами возникают правильно чередующиеся

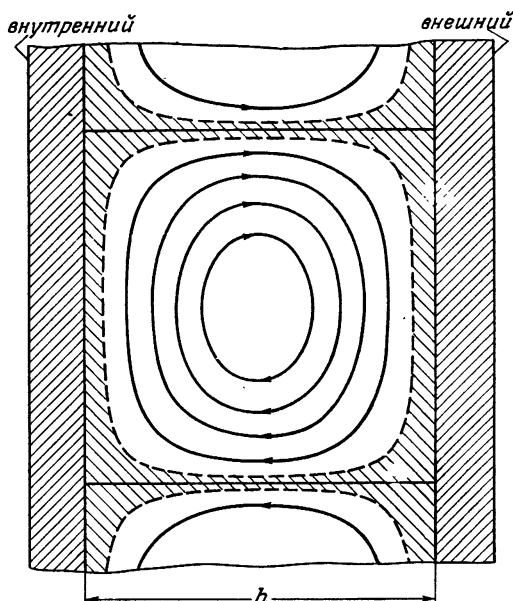


Рис. 77. Картина линий тока вторичного течения между двумя concentрическими цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний неподвижен (вихрь Тэйлора). По Тэйлору¹⁾.

вихри с правым и левым вращением и с осями, параллельными направлению окружной скорости вращающегося цилиндра.

На рис. 77 изображена картина линий тока такого ячейкового вихря в сечении, перпендикулярном к оси вихря. Дж. И. Тэйлор очень тщательно исследовал условия возникновения ячейковых вихрей и получил блестящее совпадение теории с экспериментом. Согласно

¹⁾ См. примечание 3 на стр. 135.

Л. Прандтлю¹⁾), условие возникновения таких вихрей может быть представлено в виде

$$\frac{U_i h}{\nu} > 41,3 \sqrt{\frac{R_i}{h}}, \quad (30.1)$$

где h есть ширина промежутка между цилиндрами, R_i — радиус внутреннего цилиндра, а U — его окружная скорость. Однако еще в довольно большой области чисел Рейнольдса, превышающих значение (30.1), вихри остаются устойчивыми и течение сохраняется ламинарным. Только при значительно больших числах Рейнольдса эти вихри становятся неустойчивыми, а движение — турбулентным. Это очень отчетливо видно на снимках таких вихрей, полученных недавно Ф. Шульц-Груновым и Г. Хайном²⁾). Некоторые из этих снимков приведены на рис. 78.

В использованном для опытов приборе с расстоянием между цилиндрами $h = 4$ мм и радиусом внутреннего цилиндра $R_i = 21$ мм возникновение вихрей должно начинаться, согласно теоретической формуле (30.1), при $Re = U_i h / \nu = 94,5$. Эксперименты показали, что вихри возникают в точности при этом числе Рейнольдса (рис. 78, а). Однако на дальнейших снимках отчетливо видно, что даже при значительно больших числах Рейнольдса $Re = 322$ (рис. 78, б) и $Re = 865$ (рис. 78, в) течение все еще остается ламинарным. Только при $Re \approx 3960$ развивается отчетливо выраженная турбулентность (рис. 78, г).

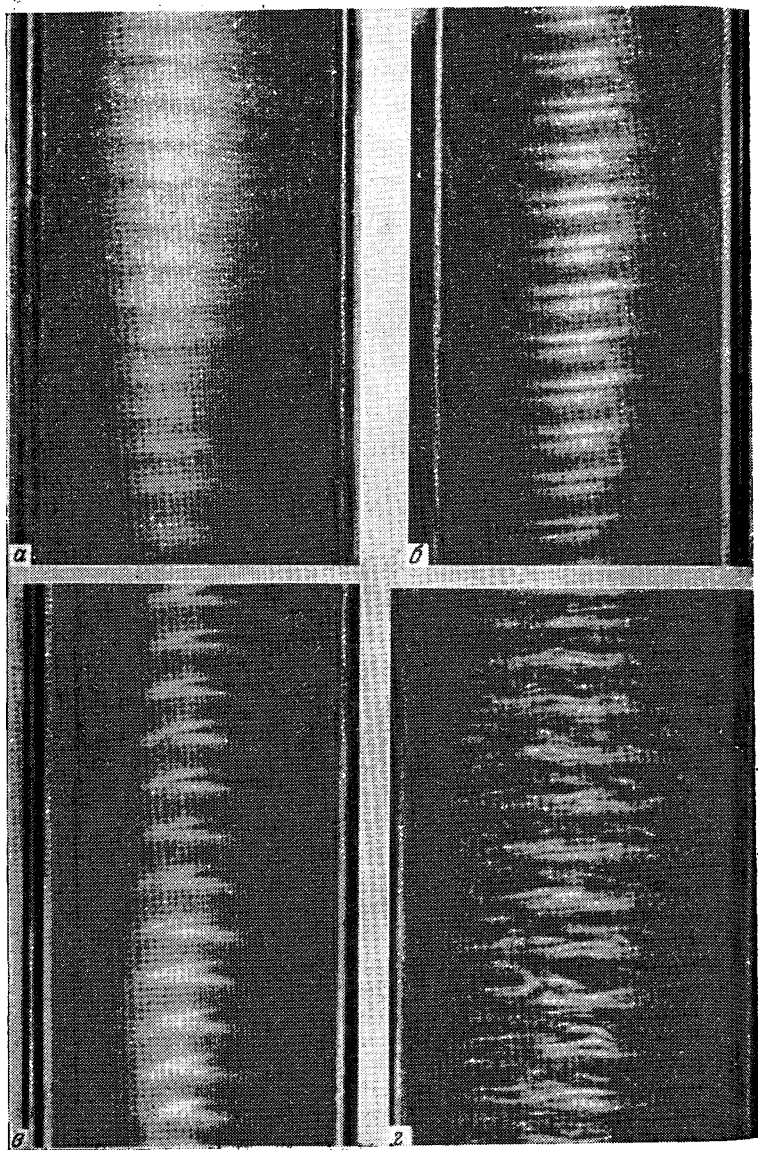
С. Гольдштейн³⁾ обобщил эти исследования на случай, когда жидкость между обоими цилиндрами протекает в осевом направлении.

Основная идея Тэйлора, согласно которой для исследования устойчивости ламинарного течения следует

¹⁾ Prandtl L., Führer durch die Strömungslehre, 5 изд., Braunschweig, 1957 (имеется русский перевод с 3-го немецкого издания: Прандтль Л., Гидроаэромеханика. Изд-во иностр. лит., Москва, 1951. — Прим. перев.).

²⁾ Schultz-Grunow F. und Hein H., Beitrag zur Couette-Strömung. Z. Flugwiss., 4 (1956), 28.

³⁾ Goldstein S., The stability of viscous fluid flow between rotating cylinders. Proc. Cambridge Phil. Soc., 33 (1937), 41.



Р и с. 78. Снимки вихрей Тэйлора (см. рис. 77) между двумя концентрическими цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний неподвижен. По Шульц-Грунову и Хайну (см. примечание 2 на стр. 165). $Re = U_0 h / \nu$.

а) $Re = 94,5$, начало образования вихрей; б) $Re = 322$, течение ламинарное; в) $Re = 865$, течение ламинарное; г) $Re = 3960$, течение турбулентное.

наложить на основное течение возмущающие вихри, распространена В. Р. Дином¹⁾ на случай течения в криволинейном канале. В качестве условия возникновения неустойчивости получилось соотношение, аналогичное соотношению (30.1), а именно

$$\frac{Uh}{\nu} > 54 \sqrt{\frac{R_i}{h}}, \quad (30.2)$$

где h есть ширина канала, R_i — радиус кривизны внутренней стенки и U — средняя скорость течения в канале. Независимо от Дина исследованием такого течения занимались Ц. Ш. И и В. М. Сангстер²⁾, однако они пришли к существенно иным результатам. Вслед за ними этой же задачей занимался Г. Хеммерлин³⁾. Применяв точные методы исследования, он получил результаты, подтвердившие правильность выводов Дина.

§ 31. Устойчивость пограничного слоя на вогнутых стенках

Такого же рода неустойчивость, как и рассмотренная в предыдущем параграфе, возникает при трехмерных возмущениях в пограничных слоях на вогнутых стенках. В то время как в пограничных слоях на выпуклых стенках влияние центробежных сил на предел устойчивости, как было показано в гл. VI, незначительно, в пограничных слоях на вогнутых стенках оно довольно велико.

Как впервые показал Г. Гёртлер⁴⁾, при течении вдоль вогнутой стенки возникает неустойчивость, сходная с неустойчивостью, наблюдающейся при течении между вращающимися концентрическими цилиндрами. Располо-

¹⁾ Dean W. R., Fluid motion in a curved channel. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 121 (1928), 402.

²⁾ Yih C. S. and Sangster W. M., Stability of laminar flow in curved channels. Phil. Mag., Ser. VIII, 2 (1957), 305.

³⁾ Hämmerlin G., Die Stabilität der Strömung in einem gekrümmten Kanal. Arch. Rational Mech. Anal., 1 (3) (1958), 212.

⁴⁾ Görtler H., Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., N. F., 2, № 1 (1940); см. также Z. angew. Math. Mech., 21 (1941), 250.

жив основное течение $U(y)$ в направлении оси x , Гёртлер направил ось y перпендикулярно к стенке (y — расстояние от стенки), а ось z — поперек течения в плоскости стенки (рис. 79) и принял, что трехмерные возмущения определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} u' &= u_1(y) \cdot \cos(\alpha z) \cdot e^{\beta t}, \\ v' &= v_1(y) \cdot \cos(\alpha z) \cdot e^{\beta t}, \\ w' &= w_1(y) \cdot \sin(\alpha z) \cdot e^{\beta t}, \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

где β есть действительная величина, определяющая нарастание или затухание возмущений, а α есть величина,

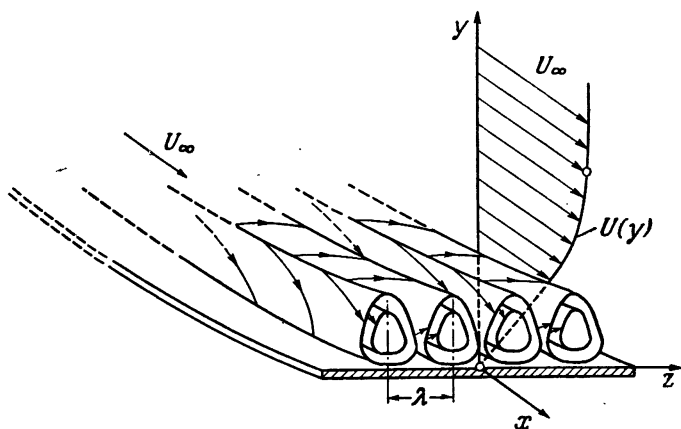


Рис. 79. Трехмерные возмущения в виде стоячих вихрей в пограничном слое на вогнутой стенке. По Гёртлеру (см. примечание 4 на стр. 167).

связанная соотношением $\lambda = 2\pi/\alpha$ с длиной λ волны возмущения в направлении, поперечном к основному течению. Следовательно, возмущения имеют вид вихрей (рис. 79), оси которых параллельны основному течению, т. е. теперь возмущения в противоположность рассмотренным в гл. II бегущим волнам представляют собой стоячие волны (ячейковые вихри). В современной литературе они называются *вихрями Тэйлора — Гёртлера*.

Определение нарастания этих вихрей во времени при помощи метода малых колебаний сводится, как и при двумерном возмущающем движении (гл. II), к задаче на собственные значения, причем влияние вязкости учитывается и здесь. Однако в противоположность тому,

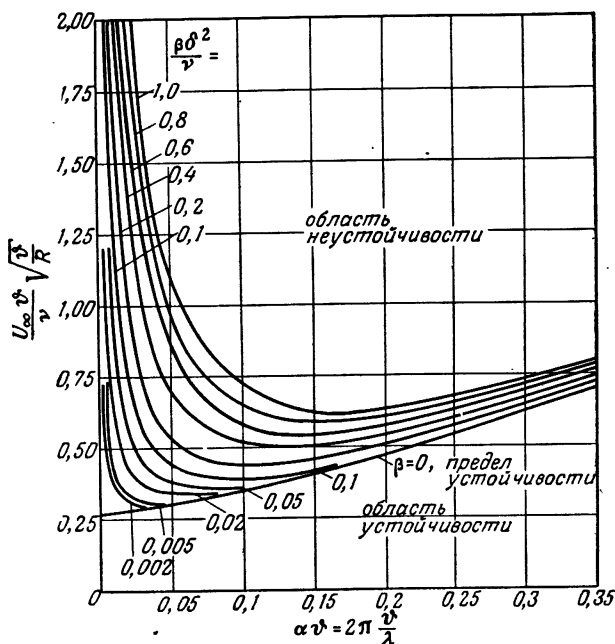


Рис. 80. Диаграмма устойчивости для течения на вогнутой стенке. По Гёртлеру (см. примечание 4 на стр. 167) и Хеммерлину (см. примечание 3 на стр. 170). ϑ — толщина потери импульса; δ — толщина пограничного слоя; β — коэффициент нарастания, определяемый формулой (31.1).

как это было при двумерных возмущениях, теперь предел устойчивости, т. е. условие, при котором впервые возникают вихри, очень мало зависит от формы первоначального профиля скоростей основного течения. Для определения этого предела служит диаграмма, изображенная на рис. 80. Для каждой длины волны возмущения

имеется свой предел устойчивости

$$\frac{U_{\infty} \vartheta}{\nu} \sqrt{\frac{\vartheta}{R}},$$

где ϑ есть толщина потери импульса, а R — радиус кривизны стенки. Как только эта величина становится больше определенного значения, возникает неустойчивость. Первое приближенное решение довольно трудной задачи на собственные значения дал Г. Гёртлер¹⁾. Повторные вычисления, выполненные впоследствии Д. Мексингом²⁾, привели к очень сильному расхождению с результатами Гёртлера. Затем Г. Хеммерлину³⁾ удалось получить точное решение задачи на собственные значения, которое хорошо подтвердило приближенное решение Гёртлера. Диаграмма устойчивости, изображенная на рис. 80, представляет собой результат вычислений Хеммерлина. На ней построены, кроме кривой предела устойчивости, также кривые равного нарастания колебаний $\beta = \text{const} > 0$. Результаты Хеммерлина еще раз подтверждены тщательными вычислениями А. М. О. Смита⁴⁾. В дальнейшем Хеммерлин⁵⁾ уточнил свое решение для области малых значений α .

Результаты теории могут быть проверены экспериментально на пограничных слоях, возникающих на телах, ограниченных снаружи вогнутыми поверхностями. При этом необходимо иметь в виду следующее. Как и в случае бегущих волн, исследованном Толмином и Шлихтингом (гл. IV), после достижения точки потери устойчивости требуется еще некоторое расстояние, чтобы нарастание возмущений привело к переходу ламинарного течения в турбулентное; поэтому точка перехода должна

¹⁾ См. примечание 4 на стр. 167.

²⁾ Meksyn D., Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 203 (1950), 253.

³⁾ Hämmerlin G., Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Диссертация, Freiburg i. Brs. 1954. J. Rat. Mech. a. Anal., 4 (1955), 279; см. также Z. angew. Math. Mech., 35 (1955), 366.

⁴⁾ Smith A. M. O., On the growth of Taylor—Görtler vortices along highly concave walls. Quart. Appl. Math., 13 (1955), № 3.

⁵⁾ Hämmerlin G., Zur Theorie der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten. Z. angew. Math. Phys., 7 (1956), 156

тежать ниже по течению, чем точка потери устойчивости, положение которой определяется из рис. 80¹⁾. Опыты по переходу ламинарной формы течения в турбулентную в пограничных слоях на искривленных стенках были выполнены Г. Клаузером и Ф. Клаузером²⁾, а впоследствии — Г. В. Липманом^{3, 4)}. На рис. 81 изображены результаты, полученные Липманом как для вогнутых, так и для выпуклых стенок. Расположение экспериментальных точек на рис. 81, а подтверждает теоретическое предсказание о слабом влиянии кривизны выпуклой стенки на критическое число Рейнольдса и о меньшей величине критического числа Рейнольдса для вогнутых стенок по сравнению с этим же числом для выпуклых стенок. На рис. 81, б значения характеристического числа

$$\frac{U_{\infty} \delta_{\text{пер.}}}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_{\text{пер.}}}{R}}, \quad (31.2)$$

играющего в теории Гёртлера роль критерия устойчивости, отложены как ординаты, а значения δ/R — как абсциссы. Из расположения получившихся точек видно, что переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит при

$$\frac{U_{\infty} \delta_{\text{пер.}}}{\nu} \sqrt{\frac{\delta_{\text{пер.}}}{R}} \geq 7. \quad (31.3)$$

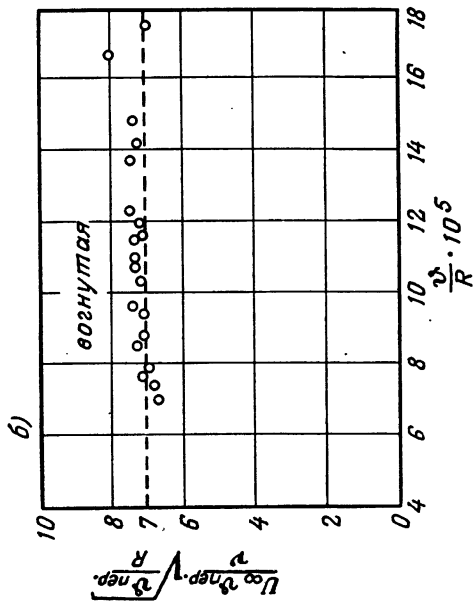
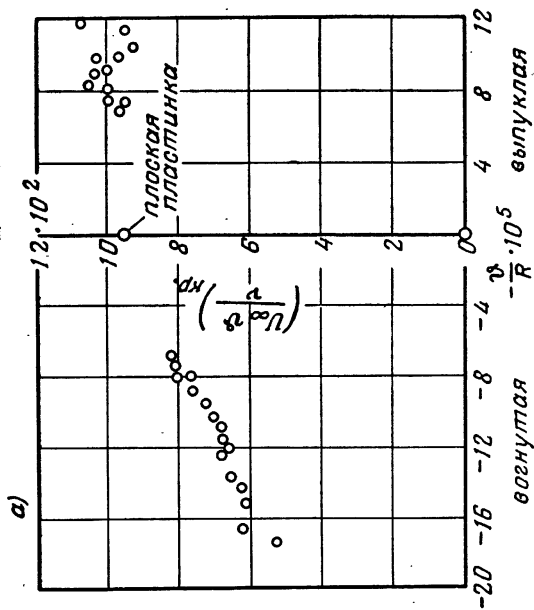
Это значение приблизительно в 20 раз больше предела устойчивости, определяемого диаграммой на рис. 80.

¹⁾ Напротив, для вихря Тэйлора между двумя вращающимися концентрическими цилиндрами следует ожидать, что критические числа Рейнольдса, даваемые теорией и опытом, численно должны почти совпадать. В самом деле, при постоянном числе оборотов внутреннего цилиндра нарастание возмущения происходит при постоянном числе Рейнольдса, и коэффициент нарастания достигает своего необходимого значения просто благодаря достаточной продолжительности опыта.

²⁾ Clauser H. and Clauser F., The effect of curvature on the transition from laminar to turbulent boundary layer. NACA T. N. 613, 1937.

³⁾ Liepmann H. W., Investigations on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries. NACA War-Time Report W-107, 1943.

⁴⁾ Liepmann H. W., Investigation of boundary layer transition on concave walls. NACA War-Time Report W-87, 1945.



Р и с. 81. Измерения положения точки перехода ламинарного течения в турбулентное на слабо изогнутых стенках. По Липману (см. примечания 3 и 4 на стр. 171). Φ — толщина потери импульса, R — радиус кривизны стенки, а) Зависимость критического числа Рейнольдса $(U_\infty \Phi / \nu)_{кр.}$ от Φ/R ; б) зависимость характеристического числа $(U_\infty \sqrt{\nu / U_\infty})_{кр.}$ от Φ/R .

Согласно Х. Л. Драйдену¹⁾, численное значение характеристического числа зависит также от степени турбулентности и колеблется приблизительно между 6 и 9. Первое значение получается при степени турбулентности внешнего течения, равной $T = 0,003$, а второе — при очень малой степени турбулентности. В работе А. М. О. Смита, упомянутой выше, определяется также коэффициент нарастания неустойчивого вихря Тэйлора — Гёртлера на пути от точки потери устойчивости до точки перехода. Примечательно, что при этом получилось численное значение e^{10} , т. е. величина такого же порядка, как и численное значение e^9 , указанное в гл. V для волн Толмина — Шлихтинга.

Недавно Г. Гёртлер заметил, что неустойчивость рассмотренного типа может возникать также вблизи передней критической точки обтекаемого тела. В самом деле, здесь имеется необходимое для такого возникновения условие, а именно, линии тока вогнуты в сторону возрастания скорости. Расчеты, выполненные Г. Гёртлером²⁾ и Г. Хеммерлином³⁾ для двумерного течения около критической точки, хотя и показали наличие неустойчивого возмущения, но не дали никакого критического числа Рейнольдса в качестве предела устойчивости. Опыты Н. А. В. Пирси и Э. Г. Ричардсона^{4, 5)} подтвердили неустойчивость течения в окрестности критической точки обтекаемого кругового цилиндра. Для полноты упомянем,

¹⁾ Dryden H. L., Recent advances in the mechanics of boundary layer flow. *Advances in Appl. Mechanics*, под редакцией R. Mises и Th. Kármán, т. I, стр. 1, New York, 1948 (имеется русский перевод: Проблемы механики, сборник статей под редакцией Р. Мизеса и Т. Кармана, Изд.-во иностр. лит., Москва, 1955).

²⁾ Görtler H., Dreidimensionale Instabilität der ebenen Stau-punktströmung gegenüber wirbelartigen Störungen. *Festschrift «Fünfzig Jahre Grenzschicht-Forschung»*, Braunschweig, 1955, стр. 304.

³⁾ Hämmerlin G., Zur Instabilitätstheorie der ebenen Stau-punktströmung. *Festschrift «Fünfzig Jahre Grenzschicht-Forschung»*, Braunschweig, 1955, стр. 315.

⁴⁾ Piercy N. A. V. and Richardson E. G., The variation of velocity amplitude close to the surface of a cylinder moving through a viscous fluid. *Phil. Mag.*, 6 (1928), 970.

⁵⁾ Piercy N. A. V. and Richardson E. G., The turbulence in front of a body moving through a viscous fluid. *Phil. Mag.*, 9 (1930), 1038.

что в свое время исследованием устойчивости пространственного течения около критической точки занимался И. Преч¹⁾, однако он не учитывал влияния кривизны линий тока.

Сказанное в настоящей главе в сочетании с результатами, приведенными в гл. II—V, позволяет сделать следующий вывод относительно перехода ламинарной формы течения в турбулентную в пограничных слоях на обтекаемых телах (например, на крыловых профилях): на плоских стенках и на телах с выпуклой поверхностью основной причиной, вызывающей неустойчивость пограничного слоя, являются бегущие плоские волны Толмина — Шлихтинга; на телах же с вогнутой поверхностью такой причиной являются вихри Тэйлора — Гёртлера.

Обзор, посвященный роли трехмерных возмущений в теории устойчивости, опубликован недавно Г. Гёртлером²⁾.

§ 32. Течения с расслоением плотности

С рассмотренными выше течениями между вращающимися концентрическими цилиндрами и в пограничных слоях на вогнутых стенках имеет некоторое родство течение вдоль плоской горизонтальной стенки при наличии разности плотности в вертикальном направлении. Случай устойчивого расслоения (плотность уменьшается снизу вверх) был рассмотрен в гл. VII. В случае неустойчивого расслоения (плотность уменьшается сверху вниз) при определенных условиях даже при отсутствии горизонтального движения жидкости возникает своеобразная форма течения, напоминающая пчелиные соты (рис. 82) и тщательно исследованная А. Бенаром³⁾ и другими авторами^{4, 5)}. Как только разность температур

¹⁾ Pretsch J., Über die Stabilität der Laminarströmung um eine Kugel. Luftfahrtforsch., 18 (1941), 341.

²⁾ Görtler H., Dreidimensionales zur Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten. Z. angew. Math. Mech., 35 (1955), 362.

³⁾ Benard H., Ann. Chim. phys., 23 (1901), 62.

⁴⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag., 32 (1916), 529; Sci. Papers, т. 6, стр. 432.

⁵⁾ Jeffreys H., Phil. Mag., 2 (1926), 833; Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 118 (1918), 195.

внизу и наверху становится немного больше определенного значения, зависящего от высоты слоя жидкости,

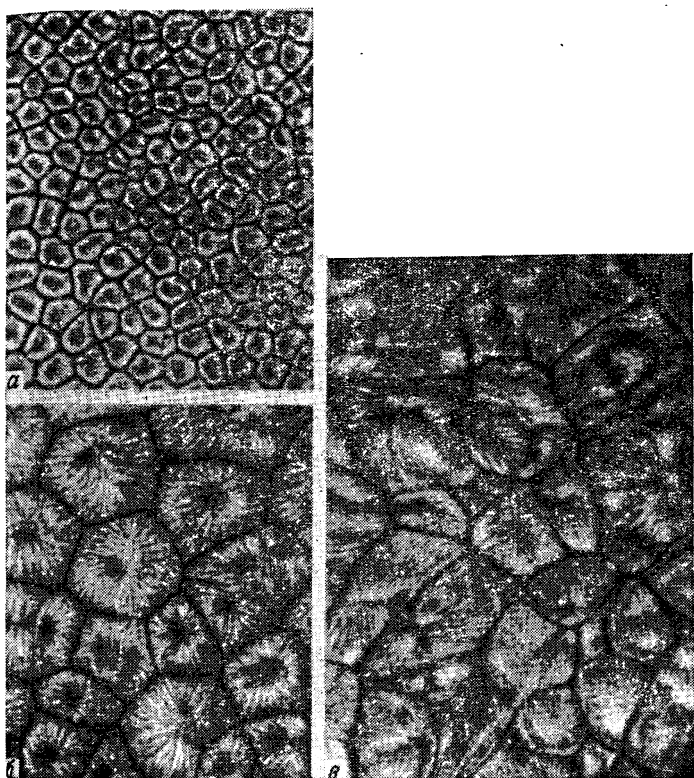


Рис. 82. Тепловая конвекция в покоем слое жидкости, подогреваемой снизу. По снимкам Зидентопфа, помещенным в книге Прандтля (см. примечание 1 на стр. 165). В слое жидкости образуются ячейки в виде правильных шестигранных призм, причем жидкость в середине ячейки поднимается, а по краям опускается. а) Толщина слоя 4 мм, течение ламинарное; б) толщина слоя 10 мм, течение ламинарное; в) толщина слоя 20 мм, течение турбулентное.

внутри жидкости образуются ячейки в виде правильных шестиугольников, причем в середине жидкость поднимается вверх, а вдоль стенок опускается вниз (рис. 82, а). При большей разности температур или большей высоте

слоя жидкости ячейки становятся более или менее неправильными (рис. 82, б), но продолжают оставаться устойчивыми. Наконец, при дальнейшем повышении разности температур или при еще большей высоте слоя жидкости вместо установившегося правильного движения внутри отдельных ячеек возникает неустановившееся неправильное восходящее и нисходящее движение (рис. 82, в), причем течение становится турбулентным.

§ 33. Устойчивость пограничного слоя на вращающемся диске

Совсем по-иному, чем при двумерном (плоском) основном течении, происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную в трехмерном пограничном слое. Примером такого рода, для которого, между прочим, ламинарный пограничный слой очень хорошо изучен, является течение на вращающемся диске (см., например, Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя [12], гл. V). Как в этом случае происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную, отчетливо показывает картина течения вблизи поверхности вращающегося диска (рис. 83), полученная Н. Грегори, Дж. Т. Стюартом и В. С. Уокером¹⁾ посредством нанесения специальной краски на поверхность диска. В кольцеобразной области образуются стоячие вихри в форме логарифмических спиралей. Внутренний радиус этой области определяет возникновение неустойчивости, а внешний — переход ламинарной формы течения в турбулентную. Для возникновения неустойчивости (внутренний радиус) измерения дали число Рейнольдса $Re_r = r^2\omega/\nu = 1,9 \cdot 10^5$, а для перехода (внешний радиус) — число Рейнольдса $Re_r = 2,8 \cdot 10^5$.

Теоретическое исследование устойчивости такого течения впервые было предпринято Дж. Т. Стюартом, предположившим, что трехмерные периодические возмущения имеют такой вид, который содержит в себе как

¹⁾ Gregory N., Stuart J. T. and Walker W. S., On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Ser. A 248 (1955), 155.

частные случаи, во-первых, бегущие плоские волны Толмина — Шлихтинга и, во-вторых, стоячие трехмерные

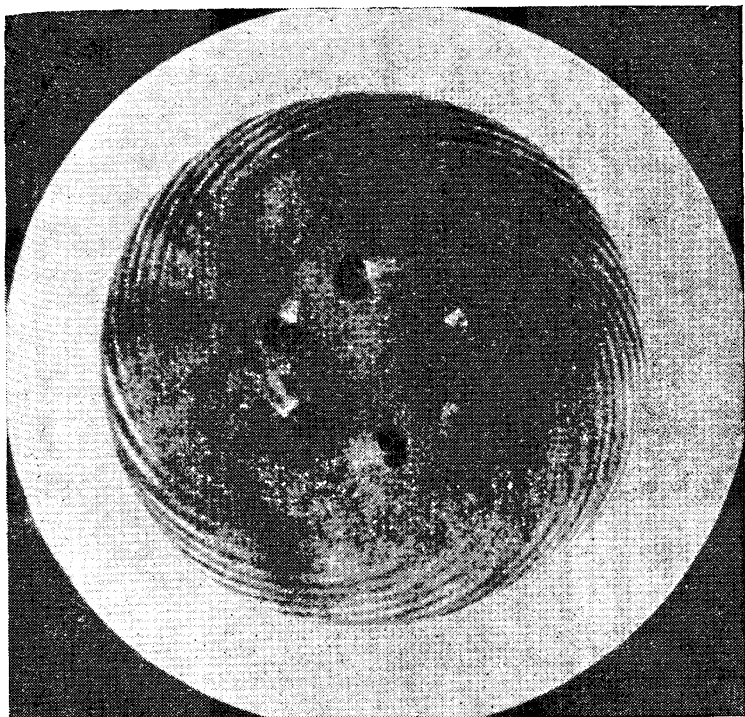


Рис. 83. Снимок поверхности диска, вращающегося в неподвижной жидкости. Поверхность диска была покрыта специальной краской. Получившаяся картина позволяет обнаружить область неустойчивости и место перехода ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое. По Грегори, Стюарту и Уокеру (см. примечание 1 на стр. 176). Направление вращения диска против хода часовой стрелки. Число оборотов в минуту $n=3200$. Радиус диска 15 см (рисунок дан в уменьшенном масштабе). В кольцеобразной области с внутренним радиусом $R_i=8,7$ см и внешним радиусом $R_a=10,1$ см образуются стоячие вихри. Внутренний радиус этой области дает предел устойчивости, для которого $Re=R_i\omega^2/\nu=1,9 \cdot 10^5$; внешний радиус определяет место перехода, для которого $Re=R_a\omega^2/\nu=2,8 \cdot 10^5$.

вихри Тэйлора — Гёртлера. Вычисления, Стюарта привели к своеобразному виду течения, состоящего из придонного слоя вихрей, вращающихся в одну сторону, и из другого слоя вихрей, который расположен над первым

и в котором все вихри вращаются также в одну сторону, но противоположную той, в которую происходит вращение в придонном слое. Эти результаты качественно совпадают с экспериментальной картиной, представленной на рис. 83.

В итоге получается, что в трехмерном пограничном слое может существовать неустойчивость, складывающаяся из бегущих волн Толмина — Шлихтинга и из стоячих вихрей Тэйлора — Гёртлера.

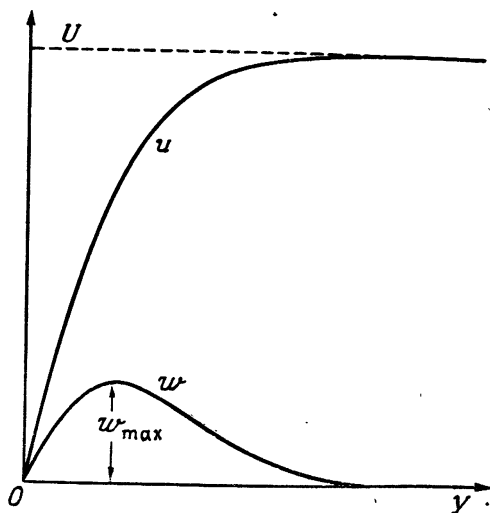


Рис. 84. Типичные профили скоростей в трехмерном пограничном слое. u — главное течение; w — вторичное течение.

Дальнейшей разработкой теории, основанной на этих представлениях, занимались В. Б. Броун и П. Г. Сейр^{1,2)}. Трехмерный пограничный слой можно описать посредством двух профилей скоростей (рис. 84), а именно, профиля скоростей для составляющей u в направлении ли-

¹⁾ Brown W. B. and Sayre P. H., An exact solution of the Orr — Sommerfeld stability equation for low Reynolds numbers. Northrop Aircraft, Inc. Rep. № BLC-43 (1954), 1.

²⁾ Brown W. B., Extension of exact solution of the Orr — Sommerfeld stability equation to Reynolds numbers of 4000. Northrop Aircraft, Inc. Rep. № NAI-55-548 (BLC-78) (1955), 1.

ний тока потенциального течения (главное течение) и профиля скоростей для составляющей w , перпендикулярной к этому направлению (вторичное течение). В теории устойчивости можно рассматривать приближенно вторичное течение как двумерное течение и применять к нему дифференциальное уравнение возмущающего движения (5.5). Следовательно, устойчивость главного течения и устойчивость вторичного течения исследуются независимо одна от другой. Так как профиль скоростей вторичного течения имеет точку перегиба, то соответствующее критическое число Рейнольдса обычно на один-два порядка ниже критического числа Рейнольдса главного течения (см. по этому поводу § 7). Поэтому положение точки перехода определяется почти исключительно вторичным течением.

Расчеты Броуна¹⁾ дали для предела устойчивости число Рейнольдса $Re_r = 1,75 \cdot 10^5$, хорошо согласующееся с указанным выше значением $Re_r = 1,9 \cdot 10^5$. Для размеров вихрей теория дает значения, также хорошо согласующиеся с результатами эксперимента.

§ 34. Переход ламинарного течения в турбулентное на скользящем крыле

Рассмотренная в предыдущем параграфе модель неустановившихся возмущений в трехмерном пограничном слое может быть применена также к пограничному слою на скользящем и стреловидном крыльях. Уже первые визуальные наблюдения показали, что переход ламинарной формы течения в турбулентную на стреловидном крыле происходит значительно ближе к передней кромке, чем на обычных крыльях. На рис. 85 изображены результаты измерений в аэродинамической трубе модели крыла при разных углах стреловидности. Эти измерения, выполненные А. Анскомом и Л. Н. Иллингвортом²⁾, очень отчетливо показывают влияние угла стреловид-

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 178.

²⁾ Anscombe A. and Illingworth L. N., Wind-tunnel observations of boundary-layer transition on a wing at various angles of sweepback. ARC R. a. M., № 2968 (1952), 1.

ности на положение точки перехода. Для обнаружения точки перехода на поверхность крыла была нанесена специальная краска. В результате на поверхности крыла

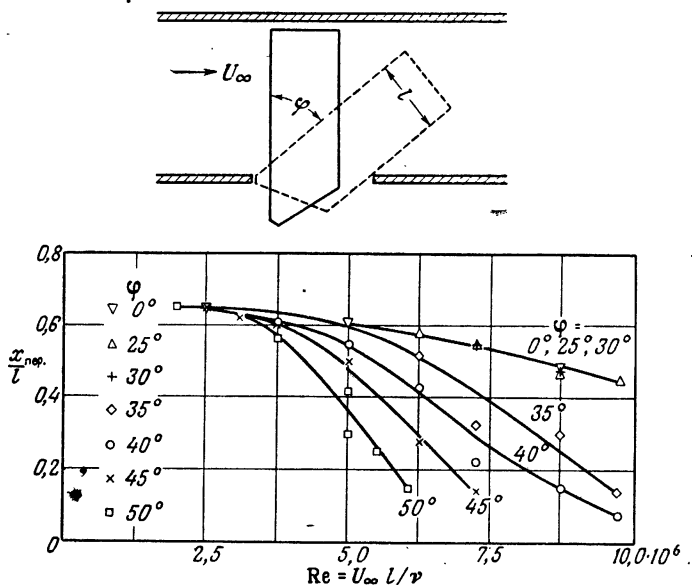


Рис. 85. Влияние угла стреловидности φ на положение точки $x_{\text{пер.}}$ перехода ламинарного течения на крыле в турбулентное. По Анскому и Иллингвурту (см. примечание 2 на стр. 179). Угол атаки $\alpha = 0^\circ$.

получились полосы такого же типа, как и на вращающемся диске (рис. 83). Это дает основание считать, что и на стреловидном крыле возникают стоячие вихри в направлении течения.

Соответствующие теоретические исследования были выполнены П. Р. Оуэном и Д. Г. Рандалом^{1,2,3}). В каче-

¹) Owen P. R. and Randall D. G., Boundary layer transition on a sweptback wing. RAE Techn. Mem. № Aero 277, ARC № 15022.

²) Owen P. R. and Randall D. G., The use of distributed suction to delay boundary layer transition on a sweptback wing. RAE Techn. Mem. № Aero 353 (1953), 1.

³) Owen P. R. and Randall D. G., Boundary layer transition on a sweptback wing: Effect of Incidence. RAE Tech. Mem. № Aero 375 (1953), 1.

стве характеристического параметра они ввели число Рейнольдса χ вторичного течения, а именно

$$\chi = \frac{\delta w_{\max}}{\nu},$$

где $w_{\max}$ есть максимальное значение скорости вторичного течения, δ — толщина пограничного слоя и ν — кинематическая вязкость. Неустойчивость возникает тогда, когда χ становится больше определенного значения $\chi_{\text{кр.}}$. Сравнение вычисленных значений χ с результатами измерений в аэродинамической трубе¹⁾ показало, что пограничный слой становится неустойчивым при $\chi_{\text{кр.}} \approx 125$. Теория Броуна²⁾ дала для течения вблизи критической точки скользящего крыла значение $\chi_{\text{кр.}} = 77$, а для течения около вращающегося диска — значение $\chi_{\text{кр.}} = 149$. Расчеты для различных профилей в пограничном слое с отсасыванием дали значения $\chi_{\text{кр.}}$ от 200 до 405.

Глава X

ВЛИЯНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ СТЕНКИ НА ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ³⁾

§ 35. Предварительные замечания

В этой последней главе рассматривается проблема зависимости перехода ламинарной формы течения в турбулентную от шероховатости стенки. Хотя эта проблема имеет важное практическое значение, никаких теоретических результатов для нее еще не получено. Для авиационной техники эта проблема приобрела особый интерес после того, как появились ламинаризованные профили. Имеющиеся весьма обширные экспериментальные

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 179.

²⁾ См. примечание 2 на стр. 178.

³⁾ В работе над этой главой принял участие д-р инж. Э. Г. Файндт (E. G. Feindt), за что выражаю ему свою благодарность.

материалы относятся к цилиндрической (двумерной) шероховатости, к точечной (трехмерной) изолированной шероховатости и к шероховатости, распределенной по площади, а также к влиянию градиента давления, степени турбулентности и числа Маха при наличии шероховатости.

В общем случае шероховатость стенки способствует переходу ламинарной формы течения в турбулентную в том смысле, что при прочих равных условиях переход на шероховатой стенке наступает при меньшем числе Рейнольдса, чем на гладкой стенке. Это легко понять на основании теории устойчивости. В самом деле, шероховатость вызывает в ламинарном течении дополнительные возмущения, которые присоединяются к возмущениям, уже имеющимся вследствие какой-то степени турбулентности внешнего течения. Естественно, что эти суммарные, в целом более сильные возмущения требуют меньшего нарастания, чтобы привести к переходу ламинарного течения в турбулентное.

Область возмущений, добавляемая шероховатостью к «опасной» области возмущений, нарастающих на основании теории устойчивости, зависит от формы элементов шероховатости и от отношения высоты этих элементов к толщине пограничного слоя. При очень небольшой высоте элементов шероховатости следует ожидать, что возмущения, вызываемые шероховатостью, лежат ниже уровня возмущений, определяемых степенью турбулентности внешнего течения. В этом случае шероховатость не оказывает никакого влияния на переход ламинарной формы течения в турбулентную. Это предположение подтверждается опытом. С другой стороны, при очень сильной степени шероховатости переход ламинарного течения в турбулентное возникает непосредственно около элементов шероховатости, как, например, в случае проволочного кольца на шаре (рис. 10, б).

В старых работах, посвященных исследованию влияния шероховатости и выполненных Л. Шиллером¹⁾,

¹⁾ Schiller L., Handbuch der Experimental-Physik, т. 4, часть 4, Leipzig, 1932 (имеется русский перевод: Ш и л л е р Л., Движение жидкостей в трубах. ГТТИ, Москва, 1936. — Прим. перев.).

И. Тани, Р. Хама и С. Мицуси¹⁾, С. Гольдштейном²⁾, а также А. Фейджем и Дж. Г. Престоном³⁾, либо предполагалось, что при умеренной высоте элемента шероховатости положение точки перехода вообще не зависит от шероховатости, либо считалось, что после превышения определенной высоты элемента шероховатости переход происходит непосредственно около элементов шероховатости. Согласно Г. В. Липману и Г. Г. Фила⁴⁾, последний случай имеет место тогда, когда элементы шероховатости настолько велики, что позади них образуется турбулентный след. Однако недавно А. Фейдж⁵⁾ показал, что с увеличением высоты элемента шероховатости точка перехода отнюдь не перескакивает мгновенно к элементу шероховатости, а перемещается вверх по течению непрерывно. К такому же результату привели и наблюдения И. Штюпера⁶⁾.

Для практики имеют важное значение следующие три вопроса: 1) До какой высоты элементов шероховатости последняя не оказывает никакого влияния на переход ламинарной формы течения в турбулентную (*допускаемая высота шероховатости*)? 2) Начиная с какой (большей) высоты элементов шероховатости переход возникает непосредственно около элементов шероховатости (*критическая высота шероховатости*)? 3) Как можно определить положение точки перехода при шероховатости, промежуточной между двумя предыдущими случаями?

¹⁾ Tani J., Hama R. and Mituisi S., On the permissible roughness in the laminar boundary layer. Rep. Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., № 199, 1940.

²⁾ Goldstein S., A note on roughness. British ARC Rep. a. Mem. 1763 (1936).

³⁾ Fage A. and Preston J. H., On transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 178 (1941), 201.

⁴⁾ Liepmann H. W. and Fila G. H., Investigation of surface temperature and single roughness elements on boundary-layer transition. NACA Rep. 890, 1947.

⁵⁾ Fage A., The smallest size of a spanwise surface corrugation which affects boundary-layer transition on an aerofoil. Brit. ARC Rep. a. Mem. 2120, 1943.

⁶⁾ Stüper J., Der Einfluss eines Stolperdrahtes auf den Umschlag der Grenzschicht an einer ebenen Platte. Z. Flugwiss., 4 (1956), 30.

§ 36. Изолированная шероховатость цилиндрической формы

Под *цилиндрической* (или *двумерной*) изолированной шероховатостью понимается шероховатость, создаваемая проволокой или другим цилиндрическим телом, укрепленным на обтекаемой стенке поперек направления течения. Прежде всего приведем результаты, полученные в цитированных выше старых работах. Эти результаты были получены путем измерений для двумерных шероховатостей в несжимаемом течении при различных условиях (градиент давления, степень турбулентности).

Для допускаемой высоты шероховатости, т. е. для наибольшей высоты шероховатости, еще не влияющей на переход ламинарной формы течения в турбулентную, С. Гольдштейн ¹⁾ получил соотношение

$$\frac{u_k^* k_{\text{доп.}}}{\nu} = 7. \quad (36.1)$$

Для критической высоты шероховатости, т. е. для наименьшей высоты шероховатости, при которой переход ламинарной формы течения в турбулентную совершается непосредственно около элемента шероховатости, Тани и его сотрудники ²⁾ нашли соотношение

$$\frac{u_k^* k_{\text{кр.}}}{\nu} = 13, \quad (36.2a)$$

а Фейдж и Престон ³⁾ — соотношение

$$\frac{u_k^* k_{\text{кр.}}}{\nu} = 20. \quad (36.2b)$$

Во всех этих соотношениях величина

$$u_k^* = \sqrt{\frac{\tau_{0k}}{\rho}}$$

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 183.

²⁾ См. примечание 1 на стр. 183.

³⁾ См. примечание 3 на стр. 183.

означает динамическую скорость в том месте, где расположен элемент шероховатости, а τ_{0k} есть касательное напряжение на стенке в ламинарном пограничном слое в том же месте¹⁾. Указанные численные значения относятся к проволокам с круговым поперечным сечением. Для более плоских куполообразных элементов шероховатости и для углублений эти значения значительно выше, а для остроконечных элементов шероховатости, наоборот, меньше. А. Фейдж²⁾ исследовал элементы шероховатости с различным поперечным сечением и вывел эмпирический закон, устанавливающий зависимость положения точки перехода от высоты k и ширины b элемента шероховатости. Согласно К. Гезли³⁾, указанным выше соотношениям можно придать вид

$$\frac{Ux_{\text{пер.}}}{v} = f\left(\frac{k^2}{bx_{\text{пер.}}}\right) \quad (36.3)$$

и изобразить их графически (рис. 86) прямыми линиями. При таком законе положение точки перехода $x_{\text{пер}}$ не зависит от положения x_k элемента шероховатости. Однако это не подтверждается более поздними измерениями^{4,5,6)}, которые показывают, что при перемещении элемента шероховатости вверх по течению точка перехода перемещается в том же направлении.

Можно получить более совершенный эмпирический закон, дающий зависимость положения точки перехода

¹⁾ В теории турбулентного пограничного слоя динамическая скорость играет важную роль.

²⁾ См. примечание 5 на стр. 183.

³⁾ Gazley C. jr., Boundary layer stability and transition in subsonic and supersonic flow (a review of available information with new data in the supersonic range). J. Aeron. Sci., 20 (1953), 19.

⁴⁾ Brinich P. F., Boundary Layer Transition at Mach 3,12 with and without single roughness element. NACA T. N. 3267, 1954.

⁵⁾ Tani J. and Hamada F. R., Some experiments on the effect of a single roughness element on boundary layer transition. J. Aeron. Sci., 20 (1953), 289.

⁶⁾ Feindt E. G., Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. Диссертация. Braunschweig. 1956. Jb. 1956 der schiffbautechn. Ges., 50 (1957), 180.

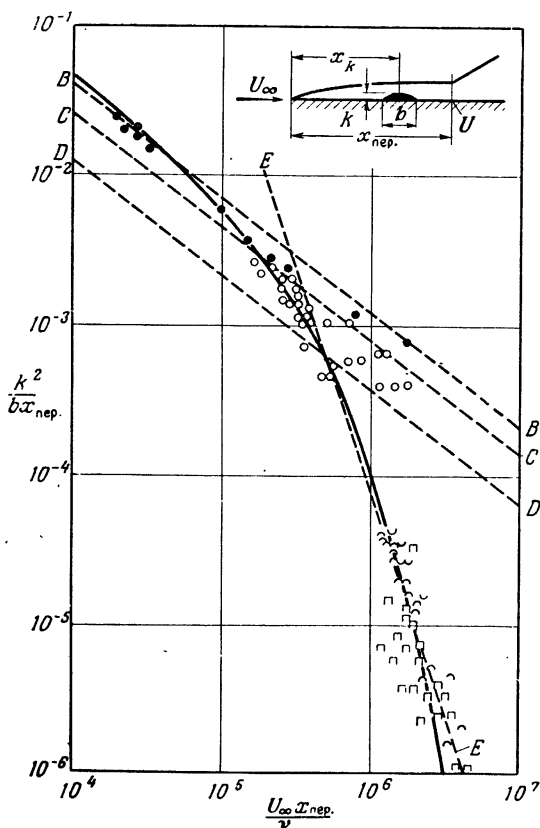


Рис. 86. Влияние двумерной изолированной шероховатости на переход ламинарного течения в турбулентное в случае несжимаемого течения. По Гезли (см. примечание 3 на стр. 185). Линия BB — критерий перехода по Фейджу и Престону (см. примечание 3 на стр. 183); $u_k^* k / \nu = 20$. Линия CC — критерий перехода по Тани, Хама и Мицуси (см. примечание 1 на стр. 183); $u_k^* k / \nu = 13$. Линия DD — критерий перехода по Гольдштейну (см. примечание 2 на стр. 183); $u_k^* k / \nu = 7$. Линия EE — критерий перехода по Фейджу (см. примечание 5 на стр. 183). Экспериментальные точки отмечены значками, изображающими форму поперечного сечения шероховатости, а именно $\bigcirc$ — круглая проволока (см. примечания 3, 5 и 1 на стр. 183), $\smile$ — гладкое возвышение или полуцилиндр (см. примечания 2 и 5 на стр. 183), $\sqcap$ — гладкое углубление (см. примечание 5 на стр. 183), $\square$ — плоское ребро (см. примечание 5 на стр. 183). Зачерненные значки относятся к измерениям, для которых переход ламинарного течения в турбулентное происходит непосредственно около элемента шероховатости, т. е. $x_{\text{пер.}} = x_k$.

как от высоты k , так и от положения x_k элемента шероховатости, если, следуя Х. Л. Драйдену¹⁾, воспользоваться следующими соображениями, основанными на рассмотрении размерностей. Для двумерной шероховатости с круговым поперечным сечением в несжимаемом течении без градиента давления в поставленную задачу входят пять величин: скорость внешнего течения U , кинематическая вязкость ν , высота k элемента шероховатости, положение x_k элемента шероховатости и положение $x_{\text{пер.}}$ точки перехода. Вместо x_k и $x_{\text{пер.}}$ можно взять соответствующие значения δ_k^* и $\delta_{\text{пер.}}^*$ толщины вытеснения пограничного слоя, связанные с местной длиной x формулой (10.1), т. е.

$$\delta^* = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Из этих пяти величин можно составить три безразмерные величины

$$\text{Re}_{x_{\text{пер.}}} = \frac{U x_{\text{пер.}}}{\nu}, \quad \frac{k}{\delta_k^*}, \quad \frac{x_k}{k}.$$

Для составления числа Рейнольдса в точке перехода можно взять вместо $x_{\text{пер.}}$ толщину вытеснения $\delta_{\text{пер.}}^*$; тогда мы получим

$$\text{Re}_{\text{пер.}}^* = \frac{U \delta_{\text{пер.}}^*}{\nu}.$$

Оба эти числа Рейнольдса связаны одно с другим соотношением

$$\frac{U \delta_{\text{пер.}}^*}{\nu} = 1,72 \sqrt{\frac{U x_{\text{пер.}}}{\nu}}. \quad (36.4)$$

Драйден обнаружил следующее: если отложить значения $\text{Re}_{\text{пер.}}^*$ как ординаты, а значения k/δ_k^* — как абсциссы, то все экспериментальные точки, для которых место перехода не лежит непосредственно позади элемента шероховатости, т. е. точки, для которых $x_{\text{пер.}} > x_k$, очень

¹⁾ Dryden H. L., Review of published data on the effect of roughness on transition from laminar to turbulent flow. J. Aeron. Sci., 20 (1953), 477.

хорошо ложатся на одну кривую (рис. 87). На оси ординат этого рисунка отмечены в качестве второго масштаба значения $Re_{x_{пер.}}$, связанные с $Re_{x_{пер.}}^*$ соотношением (36.4). Таким образом, при $x_{пер.} > x_k$

$$\frac{U_{x_{пер.}}}{v} = f\left(\frac{k}{\delta_k^*}\right). \quad (36.5)$$

При возрастании k точка перехода перемещается ближе к элементу шероховатости, следовательно, при возрастании k кривая (36.5) на рис. 87 пробегается слева направо. Как только точка перехода приближается вплотную к элементу шероховатости, т. е. значение $x_{пер.}$ становится равным x_k , экспериментальные точки начинают отклоняться от этой кривой кверху и располагаются вдоль семейства прямых

$$\frac{U_{\delta_k^*}}{v} = 3,0 \frac{k}{\delta_k^*} \frac{x_k}{k}, \quad (36.6)$$

зависящего от параметра x_k/k . Эти прямые также изображены на рис. 87. Согласно новым измерениям японских ученых^{1,2)}, правая, сходная с гиперболой ветвь трех кривых, изображенных на рис. 87 сплошными линиями, имеет универсальный характер как для течений с различными значениями слабого градиента давления, так и для течений с различной степенью турбулентности. Повышенная турбулентность обуславливает только более ранний переход правой, универсальной ветви в приближенно горизонтальную ветвь, направленную влево и заканчивающуюся на оси ординат при зависящем от степени турбулентности числе Рейнольдса для точки перехода на гладкой пластинке, т. е. при числе Рейнольдса $(Re_{x_{пер.}})_{k=0} = Re_{x_{пер.} 0}$.

1) Tani J., Juchi M. and Yamamoto K., Further experiments on the effect of a single roughness element on boundary layer transition. Rep. Inst. Sci. and Technol., Tokyo Univ., 8 (1954).

2) Tani J., Hama F. R. and Mituisi S., On the effect of a single roughness element on boundary layer transition. Rep. Inst. Sci. Technol. Univ. Tokyo, 8 (1954), № 3, 125.

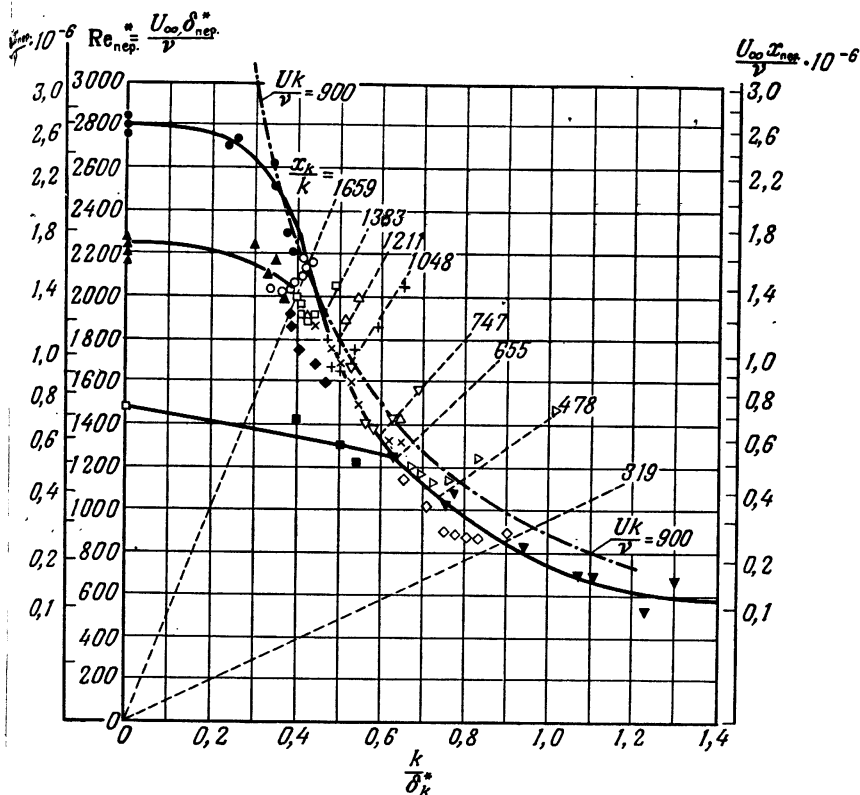


Рис. 87. Зависимость числа Рейнольдса точки перехода ламинарного течения в турбулентное от отношения высоты двумерной изолированной шероховатости к толщине пограничного слоя в случае несжимаемого течения.

$Re_{пер.0}^* = U_{\infty} \delta_{пер.0}^* / \nu$ и $Re_{x пер.0} = U x_{пер.0} / \nu$ — критические числа Рейнольдса для гладкой пластинки. Штриховые прямые соответствуют значениям числа Рейнольдса, вычисленные по формуле (36.6). $\circ, \square, \diamond, \triangle, \nabla, \triangleright, \times, +$ $x_{пер.} \geq x_k$, $(Re_{пер.0})_0 = 1,7 \cdot 10^6$, $p = \text{const}$ (см. примечание 6 на стр. 185). $\blacktriangle$ $(Re_{пер.0})_0 = 1,7 \cdot 10^6$, $p = \text{const}$ (см. примечание 2 на стр. 188). $\bullet$ $Re_{x пер.0} = 2,7 \cdot 10^6$, $p = \text{const}$ (см. примечание 1 на стр. 188). $\blacklozenge$ $Re_{x пер.0} = 2,7 \cdot 10^6$, падение давления $(p_1 - p_{пер.0}) / ((\rho/2) U_1^2) = 0,2 \div 0,8$ (см. примечание 1 на стр. 188). $\blacktriangledown$ $p = \text{const}$, по Шубауэру (см. примечание 2 на стр. 73). $\blacksquare$ $Re_{x пер.0} = 6 \cdot 10^6$, $p = \text{const}$ (см. примечание 1 на стр. 188). Зачерненные значки относятся к измерениям, для которых $x_{пер.} > x_k$ (см. примечание 2 на стр. 188). Кривая $Uk/\nu = 900$ — по Кремеру [формула (36.6a)].

На рис. 87 построена также кривая

$$\frac{U\delta_k^*}{\nu} = \frac{Uk}{\nu} \frac{1}{k/\delta_k^*},$$

где $Uk/\nu = 900$. На большом протяжении ($Ux_k/\nu > 10^5$) она совпадает с экспериментальными точками. Отсюда следует, что в пограничном слое ламинарная форма течения переходит в турбулентную непосредственно около проволоки, если

$$\frac{Uk}{\nu} \geq 900. \quad (36.6a)$$

На это указал К. Кремер¹⁾. С другой стороны, рис. 87 показывает, что наличие проволоки практически не влияет на переход ламинарной формы течения в турбулентную, если

$$\frac{k}{\delta_k^*} \leq 0,3,$$

или, после соответствующего пересчета, если

$$\frac{Uk}{\nu} \leq 0,5 \sqrt{\frac{Ux_k}{\nu}} \quad (36.6b)$$

(гидравлически гладкая поверхность). При небольшом расстоянии проволоки от передней кромки пластинки ($Ux_k/\nu < 10^5$) имеет место закономерность, указанная Престоном²⁾. При течении в пограничном слое, как и при течении в трубе (см. гл. I), существует такое предельное число Рейнольдса, ниже которого турбулентность не может существовать. Согласно опытам, это число Рейнольдса равно $U\delta/\nu = 320$, где δ есть толщина потери импульса.

Каждый элемент шероховатости оказывает на течение в пограничном слое двоякое действие, а именно, он, во-первых, вызывает возмущения, а во-вторых, увеличи-

¹⁾ Kraemer K., Über die Wirkung von Stolperdrähten auf den Grenzschichtumschlag. Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen, Bericht 59/A/28 (1959).

²⁾ Preston J. H., The minimum Reynolds number for a turbulent boundary layer and the selection of a transition device. J. Fluid Mech., 3 (1958), 373.

вает вследствие своего сопротивления толщину потери импульса. Для того чтобы переход ламинарной формы течения в турбулентную мог произойти непосредственно около элемента шероховатости, сопротивление последнего должно быть таким, чтобы оно могло вызвать утолщение пограничного слоя по крайней мере на величину δ , определяемую равенством $U\delta/\nu = 320$. Это условие при малых значениях Ux_k/ν ($Ux_k/\nu < 10^5$) выполняется, если

$$\frac{Uk}{\nu} \geq 600. \quad (36.6в)$$

При большем расстоянии проволоки от передней кромки пластинки это соотношение постепенно переходит в соотношение (36.6а).

Для учета степени турбулентности Х. Л. Драйден¹⁾ предложил строить вместо зависимости $Re_{x \text{ пер.}}$ или $Re_{\text{пер.}}^*$ от k/δ_k^* (рис. 87) зависимость от того же аргумента отношения критических чисел Рейнольдса для шероховатой и гладкой стенок, т. е. отношения

$$\sqrt{\frac{Re_{x \text{ пер.}}}{Re_{x \text{ пер. } 0}}} = \frac{Re_{\text{пер.}}^*}{Re_{\text{пер. } 0}^*}.$$

На графике, изображающем такую зависимость, все экспериментальные точки, полученные в результате измерений при различных степенях турбулентности, должны расположиться на *одной* кривой, т. е. отношение $Re_{x \text{ пер.}}/Re_{x \text{ пер. } 0}$ должно быть функцией только k/δ_k^* :

$$\frac{Re_{x \text{ пер.}}}{Re_{x \text{ пер. } 0}} = f\left(\frac{k}{\delta_k^*}\right). \quad (36.7)$$

На рис. 88 отложены по этому способу экспериментальные точки, полученные разными экспериментаторами. Все эти точки хорошо располагаются вдоль одной кривой.

¹⁾ См. примечание 1 на стр. 187.

В более поздней своей работе Х. Л. Драйден¹⁾ рассмотрел комбинированное влияние степени турбулентности и шероховатости стенок на переход ламинарного

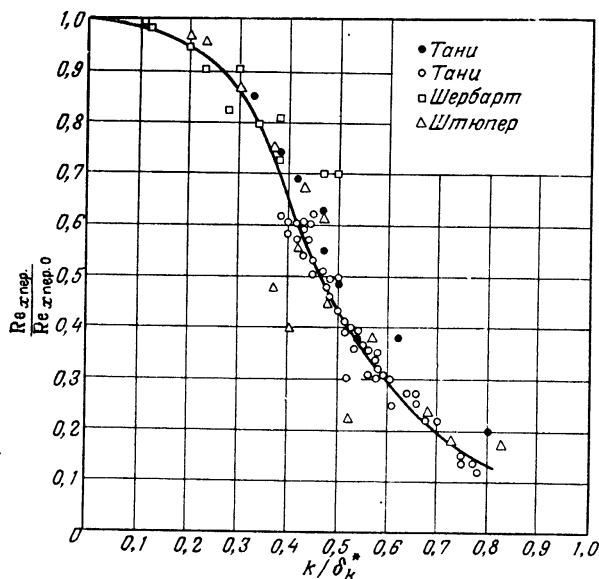


Рис. 88. Зависимость отношения числа Рейнольдса для точки перехода на продольно обтекаемой пластинке с двумерной изолированной шероховатостью к числу Рейнольдса на такой же гладкой пластинке от отношения k/δ_k^* , где k — высота шероховатости, а δ_k^* — толщина вытеснения пограничного слоя в том месте, где расположен элемент шероховатости. $Re_{x \text{ пер.}} = Ux_{\text{пер.}}/\nu$, $Re_{x \text{ пер. } 0} = Ux_{\text{пер. } 0}/\nu$ при $k=0$. По Драйдену (см. примечание 1 на стр. 187).

течения в турбулентное несколько более подробно. Он ввел понятие эквивалентной турбулентности

$$\frac{\sqrt{u_2'^2}}{U_\infty},$$

вызывающей переход ламинарного течения в турбулентное при таком же значении $x_{\text{пер.}}$, при каком вызывает

¹⁾ Dryden H. L., Combined effects of turbulence and roughness on transition. Z. angew. Math. Phys., 96, 5/6 (1958), 249 (Ackeret Festschrift).

такой переход цилиндрический элемент шероховатости высотой k/δ_k в потоке, свободном от турбулентности. Эту эквивалентную турбулентность можно вычислить посредством измерений на продольно обтекаемой гладкой пластинке, для которой влияние степени турбулентности на положение точки перехода известно (гл. IV). Получается соотношение

$$100 \frac{\sqrt{u_2'^2}}{U_\infty} = 4,4 \left(\frac{k}{\delta_k^*} \right)^3. \quad (36.8a)$$

Положение точки перехода вычисляется затем из предположения, что на гладкой пластинке имеет место результирующая степень турбулентности

$$100 \frac{\sqrt{u_{\text{рез.}}'^2}}{U_\infty} = 100 \frac{\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}}{U_\infty}, \quad (36.8б)$$

где u_1' есть турбулентная пульсация скорости, существующая и при отсутствии шероховатости, а u_2' — дополнительная «эквивалентная» турбулентная пульсация скорости, вызываемая шероховатостью. На рис. 89 изображены графики чисел Рейнольдса, вычисленных по такому способу, и для сравнения отмечены измеренные числа Рейнольдса.

Рисунки 87, 88 и 89 дают ответ на три вопроса, поставленные в конце § 35, для случая цилиндрической изолированной шероховатости.

Сжимаемые течения. Измерения, выполненные П. Ф. Бриничем¹⁾, показали, что для сжимаемых течений влияние шероховатости на переход ламинарной формы течения в турбулентную не может быть изображено столь простыми графиками, какие были получены для несжимаемых течений. Результаты измерений, выполненных для элемента шероховатости в виде кругового цилиндра при числе Маха $M = 3,1$ без градиента давления, дают при построении зависимости $Re_{x \text{ пер.}}/Re_{x \text{ пер. } 0}$

¹⁾ См. примечание 4 на стр. 185.

от k/δ_k^* не одну кривую, а семейство кривых, в котором отдельные кривые существенно зависят от положения x_k элемента шероховатости (рис. 90). Для сравнения на рис. 90 перенесена с рис. 88 кривая зависимости $Re_{x \text{ пер.}}/Re_{x \text{ пер.} 0}$ от k/δ_k^* , полученная для несжимаемых течений.

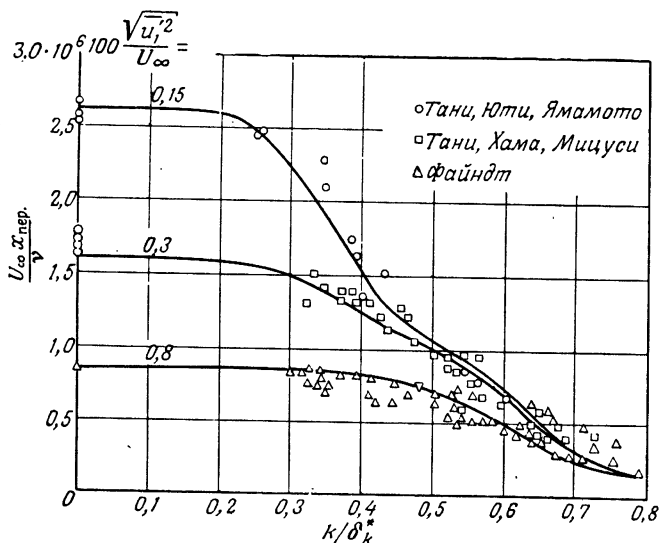
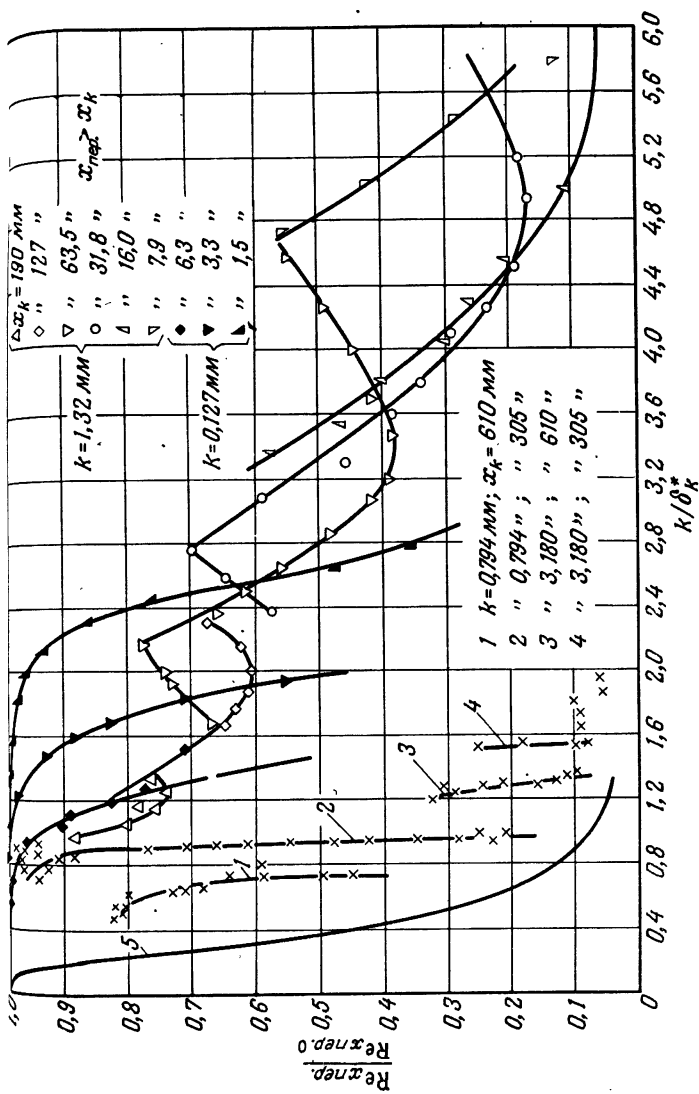


Рис. 89. Комбинированное влияние степени турбулентности и шероховатости на переход ламинарного течения в турбулентное на продольно обтекаемой плоской пластинке. Вычисленные значения — по Драйдену (см. примечание 1 на стр. 192). Измеренные значения — по работам, указанным в примечании 6 на стр. 185 и в примечаниях 1 и 2 на стр. 188.

Из рис. 90 видно, что при высоких числах Маха пограничный слой может сохраняться ламинарным при значительно большей шероховатости, чем в несжимаемых течениях. При сверхзвуковых течениях критическая высота шероховатости приблизительно от трех до семи раз выше, чем при несжимаемых течениях. Опыты Р. Г. Коркеги ¹⁾, выполненные при еще более высоком числе Маха

¹⁾ Korkegi R. H., Transition studies and skin friction measurements on an insulated flat plate at a Mach number of 5.8. J. Aeron. Sci., 23 (1956), 97, 192.



Р и с. 90. Влияние шероховатости на критическое число Рейнольдса; $Re_{x_{пер.0}} = Ux_{пер.0} = Ux_{пер.}/\nu$ при $k=0$. Кривые без цифр относятся к двумерным шероховатостям в сжимаемом течении ($M=3,1$) (по Бринчу, см. примечание 4 на стр. 185), а кривые 1, 2, 3, 4 — к трехмерным шероховатостям (шары) в несжимаемом течении (см. примечание 3 на стр. 196). Кривая 5 перенесена с рис. 88 и относится к двумерным шероховатостям (проволоки). Для всех выполненных измерений точка перехода ламинарного течения в турбулентное лежит позади элемента шероховатости.

$M = 5,8$, показали, что при такой скорости шероховатость в виде проволоки, преграждающей пограничный слой, не вызывает турбулентности. Наоборот, вдувание воздуха в пограничный слой является действенным средством для ускорения перехода ламинарного течения в турбулентное и при сверхзвуковых скоростях.

§ 37. Точечная изолированная шероховатость

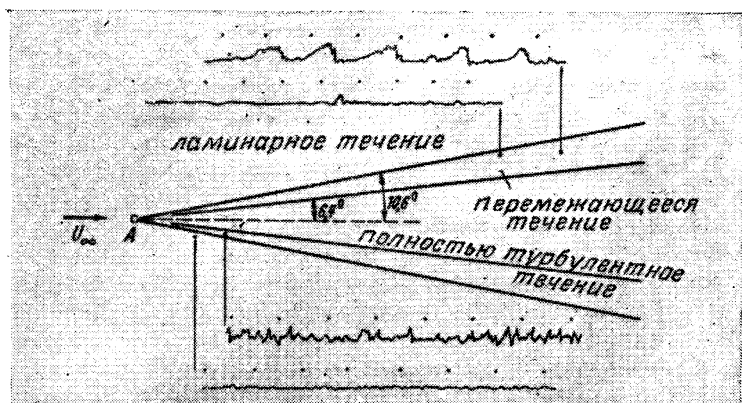
Если точечная изолированная шероховатость, например заклепочная головка, имеет достаточную высоту, то переход ламинарной формы течения в турбулентную возникает непосредственно около элемента шероховатости. Позади элемента шероховатости образуется клиновидная турбулентная область, имеющая, согласно измерениям К. Шербарта¹⁾, угол раствора от 14 до 18° . Тщательное исследование такого турбулентного клина позади шара диаметром около 3 мм выполнено Шубауэром и Клебановым²⁾.

Как показывает рис. 91, течение внутри клина всегда турбулентно, в пограничных же зонах происходит неправильное чередование ламинарного и турбулентного течений. Относительная продолжительность турбулентного состояния в пограничной зоне непрерывно уменьшается по мере перемещения изнутри наружу. Недавно П. С. Клебанов, Г. Б. Шубауэр и К. Д. Тидстром²⁾ выполнили измерения перехода ламинарной формы течения в турбулентную, вызываемого изолированными элементами шероховатости на пластинке. Измерения производились в аэродинамической трубе с малой степенью турбулентности при умеренной скорости. Шероховатость была создана большим числом шаров, размещенных в один ряд

¹⁾ Scherbarth K., Grenzschichtmessungen hinter einer punktförmigen Störung in laminarer Strömung. Jb. dtsh. Luftfahrtforschg., I (1942), 51.

²⁾ Klebanoff P. S., Schubauer G. B. and Tidstrom K. D., Measurements of the effect of two-dimensional and three-dimensional roughness elements on boundary layer transition. J. Aeron. Sci., 22 (1955), № 11, 803.

поперек течения на расстоянии, равном от двух до шести диаметров шара один от другого. Измерения показали, что изменение расстояния между шарами в указанных границах почти не влияет на положение точки перехода. Результаты измерений представлены на рис. 90 в виде



Р и с. 91. Турбулентный клин в пограничном слое на пластинке с осциллограммами скорости в четырех разных точках. По Шубауэру и Клебанову (см. примечание 2 на стр. 196). Между полностью турбулентным клином и ламинарным внешним течением расположена пограничная область с «перемежающейся» турбулентностью. Скорость внешнего течения $U_\infty = 27$ м/сек. Степень турбулентности $T = 0,03\%$. Промежуток времени между каждыми двумя отметками, изображенными точками, равен $1/60$ сек.

кривых 1, 2, 3 и 4. Как только величина $U_\infty k/\nu$ становится больше значения

$$\frac{U_\infty k}{\nu} = 577, \quad (37.1)$$

точка перехода почти скачкообразно приближается вплотную к элементу шероховатости. Так же, как и в случае сжимаемых течений, и здесь результаты, полученные для различных высот k шероховатости и для различных положений x элемента шероховатости, не располагаются вдоль одной кривой. Экспериментальное определение наименьших размеров элемента шероховатости, вызывающих переход ламинарного течения

в турбулентное, выполнено А. М. О. Смитом и Д. В. Клаттером¹⁾ для различных форм шероховатости.

§ 38. Шероховатость, распределенная по площади

Измерения перехода ламинарной формы течения в турбулентную, вызываемого шероховатостью, распределенной по площади, привели пока лишь к немногим результатам, еще не дающим ясной картины явления^{2,3,4)}. Поэтому ограничимся рассмотрением только работы Е. Г. Файндта⁵⁾. В этой работе исследуется для песочной шероховатости зависимость перехода ламинарного несжимаемого течения в турбулентное от размера ks зерен песка и от градиента давления.

Измерения были выполнены в сужающемся и расширяющемся каналах с поперечным сечением в виде кругового кольца (рис. 14 и 92). Шероховатость была создана только на стенке внутреннего цилиндра, внешняя же стенка была оставлена гладкой и своим наклоном вызывала градиент давления. Во всех случаях изменение давления вдоль канала было почти линейным, следовательно, градиент давления dp/dx вдоль пограничного слоя оставался постоянным. Это позволило однозначно характеризовать изменение давления посредством безразмерного перепада давления $(p_{\text{пер.}} - p_1)/q_1$, где $p_{\text{пер.}}$ есть статическое давление в точке перехода, p_1 — давление в начальном сечении канала, а $q_1 = \rho U_1^2/2$ — динамическое давление при входе в канал.

Кроме градиента давления, параметрами, определяющими рассматриваемую задачу, являются еще четыре

¹⁾ Smith A. M. O. and Clutter D. W., The smallest height of roughness capable of affecting boundary-layer transition. J. Aerospace Sci., **26** (1959), 229.

²⁾ Holstein H., Versuche an einer parallel angeströmten ebenen Platte über den Rauigkeitseinfluss auf den Umschlag laminar-turbulent. Zentr. wiss. Ber. Wes. UM 3110; см. также AVA Monographie Reihe RT 1005.

³⁾ Czarnecki K. R., Robinson R. B. and Hilton J. H. jr., Investigation of distributed surface roughness on a body of revolution at a Mach Number of 1.61. NACA T. N. 3230, 1954.

⁴⁾ Fallis W. B., On distributed roughness as a means of fixing transition at high supersonic speeds. J. Aeron. Sci., **22** (1955), 339.

⁵⁾ См. примечание 6 на стр. 185.

величины: U_1 , k_s , $x_{\text{пер.}}$ и ν , из которых можно составить две безразмерные комбинации $U_1 x_{\text{пер.}}/\nu$ и $U_1 k_s/\nu$. На рис. 92 изображена связь между этими тремя безразмерными величинами, выведенная Файндтом на основании многочисленных измерений. При $U_1 k_s/\nu = 0$ (гладкая

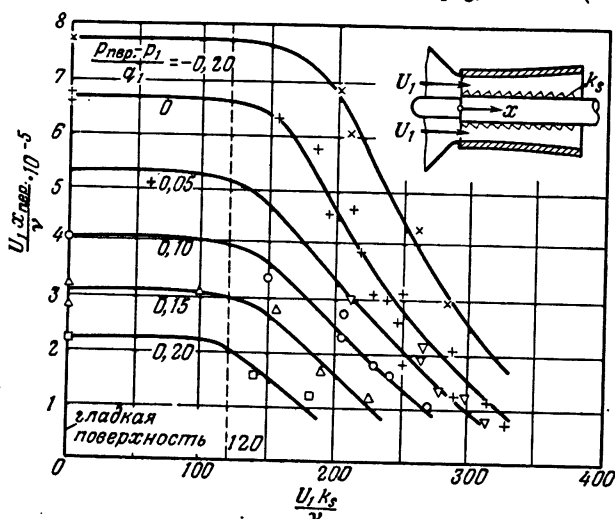


Рис. 92. Влияние градиента давления и песочно-шероховатой стенки на положение точки перехода в несжимаемом течении. По измерениям Файндта (см. примечание 6 на стр. 185).

Степень турбулентности $V_{u'^2}/U_1 = 0,012$. При $U_1 k_s/\nu < 120$ (k_s — размер песчаного зерна) шероховатость не оказывает никакого влияния на переход ламинарного течения в турбулентное.

стенка) получаются для различных градиентов давления значения числа Рейнольдса $U_1 x_{\text{пер.}}/\nu$ от $2 \cdot 10^5$ до $8 \cdot 10^5$. Столь широкий диапазон изменения числа Рейнольдса для точки перехода вполне понятен, так как градиент давления оказывает сильное влияние на устойчивость и соответственно на неустойчивость пограничного слоя (см. гл. V).

При возрастании величины $U_1 k_s/\nu$ число Рейнольдса $U_1 x_{\text{пер.}}/\nu$ для точки перехода сначала остается таким же, как на гладкой стенке; это означает, что до определенного

значения величины $U_1 k_s / \nu$ шероховатость не влияет на переход ламинарной формы течения в турбулентную. Только после того, как величина $U_1 k_s / \nu$ становится больше значения

$$\frac{U_1 k_s}{\nu} = 120, \quad (38.1)$$

критическое число Рейнольдса для точки перехода резко уменьшается. Следовательно, значение (38.1) определяет допускаемую высоту шероховатости, т. е. дает ответ на первый вопрос, поставленный в конце § 35.

Как показали исследования Л. Шпайделя¹⁾, влияние рассмотренной распределенной по площади шероховатости следует учитывать при расчете лопаток гидравлических машин в тех случаях, когда требуется точное определение положения на лопатке точки перехода в пограничном слое при наличии градиента давления. Комбинированное влияние шероховатости и отсасывания исследовалось Х. Л. Драйденом²⁾. Дальнейшие сведения о распределенной по площади шероховатости можно найти в работах Л. К. Лофтина³⁾, Г. В. Лахмана⁴⁾, Н. Грегори и С. Уокера⁵⁾, Л. Кланфера и П. Р. Оуэна⁶⁾, И. Штюпера⁷⁾, И. Р. Иедлички, В. Уилкинса и А. Сейффа⁸⁾.

¹⁾ Speidel L., Einfluss der Oberflächenrauigkeit auf die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern. Forsch. Ing-Wes., 20 (1954), 129.

²⁾ Dryden H. L., Effects of roughness and suction on transition from laminar to turbulent flow. Publications Scientifiques et Techn. de Ministère de l'Air Paris (SDJT), 1954, стр. 49.

³⁾ Loftin L. K., Effects of specific types of surface roughness on boundary layer transition. NACA ACR. L 5129a, февраль 1946. NACA/TI B/1272. NACA War-time Report L-48.

⁴⁾ Lachmann G. V., Laminarization through boundary layer control. Aeron. Eng. Rev., 13 (1954), № 8, 37.

⁵⁾ Gregory N. and Walker S., The effect on transition of isolated surface excrescences in the boundary layer. ARC 13 (1950), 436.

⁶⁾ Klanfer L. and Owen P. R., The effect of isolated roughness on boundary layer transition. T. M. AERO 355, март 1953.

⁷⁾ Stüper J., The influence of surface irregularities on transition with various pressure gradients. Division of Aeronautics, Australia, Rep. 59, Melbourne, 1949; см. также Z. Flugw., 4 (1956), 30.

⁸⁾ Jedlicka J. R., Wilkins W. and Seiff A., Experimental determination of boundary layer transition on a body of revolution at $M = 3.5$. NACA T. N. 3342, 1954.

ЛИТЕРАТУРА ОБОБЩАЮЩЕГО ХАРАКТЕРА

- [1] Dryden H. L., Fifty years of boundary layer theory and experiment. Science, 121 (1955), 375—380.
- [2] FIAT-Review of German Science 1939—1946. (FIAT — Field Information Agency Technical), Wiesbaden, 1948—1949. т. 5, ч. II, Mathematische Grundlagen der Strömungslehre. ред. Walther A.; т. II, Hydro- und Aerodynamik, ред. Betz A.
- [3] Görtler H. und Tollmien W. (редакторы), Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung. Braunschweig, 1955.
- [4] Görtler H. (редактор), Grenzschichtforschung. Boundary Layer Research — Symposium der Internat. Union für theoret. und angew. Mechanik. Freiburg i. Br., 1957, Springer, Berlin, 1958.
- [5] Howarth L. (редактор), Modern Developments in Fluid Dynamics. High Speed Flow, т. 1 и 2. Oxford, 1953 (русский перевод: Хоуарт Л., Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Изд-во иностр. лит., Москва, 1955).
- [6] Howarth L. (редактор), Boundary layer effects in aerodynamics. Proc. Symp. Nat. Phys. Lab. (NPL), London, 1955.
- [7] Lin C. C., The Theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press, Cambridge, 1955 (русский перевод: Линь Цзяцзяо, Теория гидродинамической устойчивости, Изд-во иностр. лит., Москва, 1958); см. также Lin S. S., On the instability of laminar flow and its transition to turbulence. Grenzschichtforschung — Boundary Layer Research, Symp. Internat. Union für theoret. und angew. Mechanik, Berlin, 1958.
- [8] Pai S. I., Viscous Flow Theory, т. I (Laminar Flow), New York, 1956; т. II (Turbulent Flow), New York, 1957 (готовится русский перевод: Бай Ши-и, Теория течения вязкой жидкости, Изд-во иностр. лит., Москва. — Прим. перев.).
- [9] Prandtl L., The Mechanics of Viscous Fluid. Раздел в книге: Durand F. W., Aerodynamic Theory, т. III, Berlin, Springer, 1935 (имеется русский перевод: Дюрэнд Ф. В., Аэродинамика, т. 3, Оборонгиз, Москва, 1939. — Прим. перев.)
- [10] Prandtl L., Führer durch die Strömungslehre. изд. 5, Braunschweig, 1957 (русский перевод с третьего изд.: Прандтль Л., Гидроаэромеханика, Изд-во иностр. лит., Москва, 1951).
- [11] Prandtl L. und Tietjens O., Hydro- und Aeromechanik, т. I изд. 2 (1944) и т. II (1931), Springer, Berlin (русский перевод: Прандтль Л.—Титъенс О., Гидро- и аэромеханика, т. I (1933) и т. II (1935), ГТТИ. — Прим. перев.).
- [12] Schlichting H., Grenzschicht-Theorie, изд. 3, Karlsruhe, 1958 (имеется русский перевод с первого издания: Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, Изд-во иностр. лит., Москва, 1956).
- [13] Tollmien W., Fortschritte der Turbulenzforschung. Z. angew. Math. Mech., 33 (1953), 200.

О Г Л А В Л Е Н И Е

От редактора перевода	5
Глава I. Некоторые экспериментальные результаты, относящиеся к переходу ламинарного течения в турбулентное . .	7
§ 1. Переход ламинарного течения в турбулентное в трубе	7
§ 2. Переход ламинарного течения в турбулентное в пограничном слое на обтекаемом теле	20
Глава II. Основы теории устойчивости ламинарного течения	34
§ 3. Предварительные замечания	34
§ 4. Основы метода малых колебаний	36
§ 5. Форма возмущающего движения	40
§ 6. Задача на собственные значения	43
§ 7. Общие свойства дифференциального уравнения возмущающего движения	46
Глава III. Результаты теории устойчивости для пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке и для параболического профиля Пуазейля	51
§ 8. Некоторые прежние исследования устойчивости . . .	51
§ 9. Расчет нейтральной кривой по методу Толмина . . .	54
§ 10. Результаты для пограничного слоя на пластинке . .	59
§ 11. Результаты для параболического профиля скоростей	66
Глава IV. Сравнение результатов теории устойчивости с экспериментальными данными	67
§ 12. Некоторые старые измерения перехода ламинарного течения в турбулентное	67
§ 13. Подтверждение теории устойчивости экспериментами	72
§ 14. Структура течения в области перехода	80
Глава V. Влияние градиента давления на переход ламинарного течения в турбулентное	94
§ 15. Предварительные замечания	94
§ 16. Пограничный слой на плоской стенке с градиентом давления	95
§ 17. Предел устойчивости при падении давления и при возрастании давления	102

§ 18. Расчет положения точки потери устойчивости на заданном теле	106
Глава VI. Влияние отсасывания на переход ламинарного течения в турбулентное	118
§ 19. Предварительные замечания	118
§ 20. Ламинарный пограничный слой с отсасыванием и вдуванием	119
§ 21. Устойчивость пограничного слоя с отсасыванием	123
§ 22. Уменьшение сопротивления, вызываемое ламинаризацией пограничного слоя посредством отсасывания	127
Глава VII. Влияние активных сил на переход ламинарного течения в турбулентное	130
§ 23. Предварительные замечания	130
§ 24. Влияние центробежных сил	131
§ 25. Влияние расслоения плотности в вертикальном направлении	137
Глава VIII. Влияние теплопередачи и сжимаемости на переход ламинарного течения в турбулентное	141
§ 26. Предварительные замечания о пограничных слоях в сжимаемых течениях	141
§ 27. Влияние теплопередачи	144
§ 28. Влияние сжимаемости	147
§ 29. Переход турбулентного течения в ламинарное	158
Глава IX. Устойчивость при трехмерных возмущениях	163
§ 30. Течение между вращающимися концентрическими цилиндрами	163
§ 31. Устойчивость пограничного слоя на вогнутых стенках	167
§ 32. Течения с расслоением плотности	174
§ 33. Устойчивость пограничного слоя на вращающемся диске	176
§ 34. Переход ламинарного течения в турбулентное на скользящем крыле	179
Глава X. Влияние шероховатости стенки на переход ламинарного течения в турбулентное	181
§ 35. Предварительные замечания	181
§ 36. Изолированная шероховатость цилиндрической формы	184
§ 37. Точечная изолированная шероховатость	196
§ 38. Шероховатость, распределенная по площади	198
Литература обобщающего характера	201

Г. Ш л и х т и н г
ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Редактор *Г. М. Ильичева*
Обложка художника *Л. Г. Ларского*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *М. А. Белева*
Корректор *А. П. Иванова*

Сдано в производство 10/XI 1961 г.

Подписано к печати 17/III 1962 г.

Бумага $84 \times 108^{1/32} = 3,2$ бум. л.

10,5 печ. л.

Уч.-изд. л. 10,2. Изд. № 1/0642.

Цена 71 к. Зак. 2947.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза,
Ленинград, Измайловский пр., 29.

71 коп.

