БИБЛИОТЕКА
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ

В. П. ПАЦЮКОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ИГРОКОВ

•СОВЕТСКОЕ РАДИО•

БИБЛИОТЕКА
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ

В. П. ПАЦЮКОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
ИГРЫ
ПРИ РАЗЛИЧНОЙ
ИНФОРМИРОВАННОСТИ
ИГРОКОВ

МОСКВА
«СОВЕТСКОЕ РАДИО»
1976

УДК 518.9

Пацюков В. П. Дифференциальные игры при различной информированности игроков. М., «Сов. радио», 1976, 200 с.

Излагаются точные и приближенные методы решения антагонистических дифференциальных игр, оценки оптимальности управляемых систем, методы решения дифференциальных игр двух лиц с непротивоположными интересами и правом первого хода, а также методы решения некоторых бескоалиционных дифференциальных игр n лиц. Книга является монографией по дифференциальным играм при различной информированности игроков. Иллюстрирована примерами. Работа удачно дополняет изданные ранее книги аналогичной тематики (кн. Флейшмана Б. С., Волгина Л. Н. и др.).

Книга рассчитана на научных работников, а также на инженеров и экономистов, интересующихся применением математики к обоснованию оптимальных решений в условиях конфликта.

5 рис., библ. 37 назв.

П $\frac{30501\text{-}042}{046(01)\text{-}76}$ 76-76

ВВЕДЕНИЕ

Со времени выхода в свет первого издания основополагающей работы фон Неймана и Моргенштерна [1] по теории игр прошло немногим более четверти века. За это время появилось большое количество исследований в этой области, различных по глубине и направленности. Разработкой теории и ее приложений занимаются ученые различных специальностей.

Как объяснить такое бурное развитие этой по существу математической теории, несмотря на неоднократные возражения и критику в ее адрес? Объясняется это прежде всего тем, что теория игр является теорией математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов и неопределенностей. И хотя оптимальные решения определяются из математических моделей конфликтов, а не из самих конфликтов, они могут оказаться полезными для практической деятельности. Реальная жизнь соткана из противоречий, конфликтов, неопределенностей, в условиях которых некоторым людям и целым коллективам приходится принимать решения и вырабатывать по каким-либо критериям наиболее рациональное поведение. Инструментом для принятий решений и призвана служить теория игр.

Как уже указывалось, игровые постановки возникают в самых разнообразных случаях. Например, при эксплуатации природных ресурсов мы нередко сталкиваемся с тем, что ввиду неполноты наших сведений мы должны в ограниченные сроки принимать решения о путях хозяйственного использования природных возможностей при неполностью известных обстоятельствах. Создается такая ситуация: наши действия могут привести в будущем к ущербу, если эти неизвестные обстоятельства окажутся неблагоприятными; требуется установить такой комплекс действий, чтобы ущерб, который может быть вызван неизвестными обстоятельствами, не превышал бы известных пределов, а хозяйственный эффект был бы оптимальным.

Подобная обстановка складывается при планировании народного хозяйства, заводов, фабрик в новых условиях, созданных либо новыми достижениями науки и техники, либо необходимостью освоения новых районов, нового сырья и т. д. Аналогичные ситуации имеют место при борьбе с эпидемическими болезнями, при использовании токсических веществ в лекарственных целях и т. п.

Для конфликтных ситуаций такого характера типично то, что одним «игроком» является человеческое общество, а другим — природа.

Существуют конфликтные ситуации совершенно иного типа—ситуации, в которых интересы «игроков» строго противоположны. Примерами таких конфликтных игровых ситуаций являются планирование военных сражений, поимка уголовных преступников и т. д. На практике часто возникают ситуации, соответствующие классу игр с нестрогим соперничеством, а также классу кооперативных игр. Подобные ситуации возможны, например, в области финансовых или экономических отношений между различными государствами, в социологии при изучении взаимодействия коллективов либо людей внутри коллективов.

Много игровых задач возникает при проектировании и эксплуатации технических систем, автоматизированных комплексов различного назначения и т. п

Таким образом, методы теории игр находят в настоящее время весьма разнообразные и чрезвычайно важные приложения в самых различных сферах человеческой деятельности. Ознакомить возможно большее число исследователей и инженеров с теорией и методами теории игр представляется совершенно необходимым.

Критикуя теорию игр, ее противники говорят, что в реальных, сколь-нибудь важных конфликтах никто не играет по правилам, предписываемым теорией игр. Конечно, математические модели, описывающие конфликтные ситуации, не адекватны реальным конфликтным ситуациям, как, впрочем, и все математические модели, ибо в противном случае они были бы не моделями, а самими явлениями. Однако, с другой стороны, модель, чтобы называться моделью, должна иметь основные черты описываемой ситуации, в данном случае конфликтной.

Очень часто практически важные конфликтные ситуации являются динамическими. Они динамичны по характеру протекающих процессов и, что особенно важно, по тем неопределенным факторам, которые в современной теории игр принято относить к правилам игры: последствия от принятых решений, критерии оптимальности, ассортимент действий, имеющийся в распоряжении оппонентов, и даже число оппонентов.

Современная теория игр пока что может предложить лишь некоторые методы решения, относящиеся к фиксированным правилам игры. Такие игры можно назвать *определенными*. Что касается *неопределенных* игр, т. е. игр, где неопределенными могут быть факторы, относящиеся к правилам игры, то есть основания надеяться, что рассмотрение их не выведет нас за пределы обычной теории игр в целом. Окончательное суждение по этому вопросу — дело будущего.

В первоначальном варианте основая цель этой книги — предложить инженерам и научным работникам, всем тем, кто занимается исследованием операций, некоторые методы решения математических моделей конфликтных ситуаций, учитывающих динамику исследуемых процессов (т. е. описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями в частных производных), а также различную информированность систем (игроков), участвующих в этих процессах.

Эти методы разработаны автором данной книги на основе принципа оптимальности В. Ф. Кротова [2], и в этом смысле книга является монографией по дифференциальным играм при различной информированности игроков.

Преследовалась также дополнительная цель: показать, что теория игр даже с присущими ей недостатками на современном уровне развития не так уж плоха, как кажется на первый взгляд, если разумно пользоваться ее методами.

Однако в процессе написания книги под влиянием творческих дискуссий выяснилась необходимость предпослать методам решения дифференциальных игр главу, в которой хотя бы в сжатом виде были изложены методологические аспекты теории игр и ее связь с исследованием операций. Необходимость в этой главе стала ясной автору также после проведения им семинаров, на которых выяснилось, что некоторые молодые исследователи операций, став на этот тернистый путь, некритически относятся к теории игр и не полностью освоили существо этой теории. Это обстоятельство частично объясняется почти полным отсутствием отечественной литературы по методологическим вопросам теории и общепринятых формулировок. Поэтому в окончательном варианте содержание книги следующее.

Гл. 1 посвящена некоторым методологическим аспектам теории игр. Из этого круга вопросов выделены четыре темы: теория игр и исследование операций, математическая формулировка игры, основные вопросы теории игр, о решении игр в стратегиях и стратегиях поведения. При изложении первых трех параграфов гл. 1 мы почти полностью следуем работе Н. Н. Воробьева [3], § 1.4 нам представляется очень важным для правильного понимания последующих глав этой книги.

В гл. 2—5 излагаются точные и приближенные методы решения некоторых антагонистических дифференциальных игр при различной информативности (и, соответственно, при различных принципах оптимальности), оценки оптимальности управляемых антагонистических систем.

В гл. 6 излагаются методы решения некоторых бескоалиционных дифференциальных игр n лиц, в гл. 7 — методы решений игр двух лиц с непротивоположными интересами и правом первого хода.

При изложении методов решения всех этих игр предполагается, что стратегии игроков в общем случае входят нераздельно в правые части уравнений процесса игры и выражения для критериев выигрыша игроков. Этот общий случай в существующей литературе по теории дифференциальных игр пока не рассматривался.

Имеющиеся методы решения (см., например, известную монографию Айзекса [4]) дают возможность решать дифференциальные игры с полной информацией игроков (да и то, в основном, только в том случае, когда стратегии игроков входят раздельно в правые части уравнений процесса игры и в выражения для критериев выигрыша игроков). Излагаемые в этой книге методы позволяют расширить класс решаемых задач и находить решения игр при различной информированности игроков.

Что касается методов приближенного решения антагонистических дифференциальных игр, оценок оптимальности управляемых антагонистических систем, методов решения бескоалиционных дифференциальных игр n лиц на уровне формулировок достаточных условий оптимальности, то сравнивать их не с чем. Автору не известны опубликованные работы по этим вопросам.

Для облегчения чтения книги в приложении излагаются теоремы В. Ф. Кротова для оптимальных процессов, на которые автор неоднократно ссылается при изложении методов решения дифференциальных игр. С этой же целью в конце каждой главы приводятся примеры игр и их решения.

В заключение отметим следующее. Несмотря на присущие современной теории игр недостатки, она остается пока что единственной теорией, методы которой позволяют находить оптимальные решения в моделях конфликтных ситуаций.

Автор надеется, что книга будет полезна широкому кругу инженеров и всем тем исследователям операций, кто интересуется играми вообще и в частности методами решения математических моделей конфликтных ситуаций, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для читателей, которые хорошо понимают методологические аспекты теории игр и овладели методами решения дифференциальных игр с полной информацией, автор рекомендует читать книгу, начиная с гл. 3 (однако желательно уделить некоторое внимание § 1.4).

Автор выражает искреннюю благодарность Б. С. Флейшману, взявшему на себя труд прорецензировать рукопись и высказавшему ряд ценных замечаний и пожеланий.

1. Методологические вопросы теории игр

1.1. ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Прежде чем излагать методы решения некоторых дифференциальных игр, представляется целесообразным кратко рассмотреть связь теории игр с исследованием операций.

Под операцией принято понимать совокупность действий или мероприятий, направленных к достижению поставленной цели. Таким образом, операция (в широком смысле этого слова) — любая целенаправленная деятельность людей.

Исследование операций представляет собой совокупность научных методов, с помощью которых производится анализ операции и вырабатываются количественные обоснования и рекомендации относительно ее оптимальной организации и проведения. Основной задачей исследования операций является поиск наилучших (оптимальных) путей достижения поставленной цели.

Основными этапами исследования операций являются:

1) постановка задачи, включающая описание способов действий, которые могут вести к достижению поставленной цели, среди этих способов действий необходимо выбрать наилучшие;

2) построение модели операции, дающей математическое описание цели, процесса и результатов проведения операции;

3) разработка понимания оптимального выбора действия и математических методов поиска их;

4) нахождение оптимального решения с помощью модели, т. е. нахождение оптимального действия из множества возможных;

5) проверка модели и полученного с ее помощью решения;

6) построение процедуры подстройки решения;

7) осуществление решения.

Каждый из этих этапов является предметом особого рассмотрения в фундаментальных работах по исследованию операций. Мы перечислили эти этапы для того, чтобы, основываясь на них и следуя работе [3], дать следующее определение этой науки: исследование операций есть теория математических моделей принятия оптимальных решений. Далее исследование операций будет пониматься в таком смысле.

Наряду с другими возможными классификациями моделей исследования операций представляется естественным их распределение по трем «уровням» в зависимости от степени информированности принимающих решение субъектов.

Первый уровень является детерминированным, когда условия принятий решений, включая неконтролируемые факторы (т. е. факторы, не находящиеся в распоряжении принимающего решение субъекта), известны лицу, принимающему решение.

Второй уровень — стохастический. Это выбор решений при риске, когда каждому субъекту известно лишь множество возможных (допустимых) вариантов условий и априорное вероятностное распределение на этом множестве.

Третий уровень — неопределенный, когда решение приходится принимать, зная одно только множество возможных (допустимых) частных исходов, вероятности которых совершенно неизвестны или даже не имеют смысла.

Задачи исследования операций на первых двух уровнях решаются хорошо разработанными методами теории оптимальных процессов (линейное и динамическое программирование, принцип максимума Л. С. Понтрягина, принцип оптимальности В. Ф. Кротова и другие методы) и методами стохастических процессов *). Что касается исследования операций на третьем уровне, то пока что эти исследования могут проводиться главным образом методами теории игр.

Действительно, согласно определению, приведенному в работе [3], определению более или менее общепринятому, с которым большинство исследователей согласно, теория игр есть теория математических моделей приня-

*) Заметим, что когда мы утверждаем, что задачи исследования операций на первых двух уровнях решаются существующими методами теории оптимальных процессов, мы не имеем в виду исследования по оптимизации больших и сверхбольших систем, для описания которых пока нет достаточно хороших формальных языков.

тия оптимальных решений в условиях конфликтов и не определенностей. Поэтому теорию игр в ее методологи ческих основах и в практической ориентированност можно понимать как раздел исследования операций а ее математический аппарат как основной математиче ский аппарат исследования операций на третьем уровне

Мы не будем здесь подробно останавливаться н тесной связи между неопределенностями и конфликтами О конфликтном происхождении и конфликтной интер претации неопределенности подробно написано в работ [5]. Мы только отметим, что конфликтность возникае тогда, когда имеются несколько самостоятельно дейст вующих сторон, преследующих различные цели. Кон фликтность появляется там, где есть две и более коали ции интересов. Формальная характеристика конфликта оказывается более сложной. Она будет содержаться в общем определении игры как математического объекта (см. § 1.2).

Неопределенность, в условиях которой субъект принимает свои решения, может, прежде всего, касаться решения, принимаемого другой стороной или другими сторонами. Обычно в теории игр рассматривают именно этот вид неопределенности, т. е. такую неопределенность, когда решение приходится принимать, зная одно только множество возможных частных исходов или стратегий другой стороны. Кроме того, неопределенными могут быть и те факторы, которые принято относить к правилам игры: последствия от принятых решений, ассортимент действий, имеющийся в распоряжении оппонентов, и даже число оппонентов. Рассмотрение такого рода «неопределенных игр» в целом не выводит исследователя за пределы обычной теории игр (см. [13]). Однако превращение обычной игры в неопределенную создает дополнительные принципиальные трудности анализа, который приходится осуществлять при помощи более сложного аппарата, чем при исследовании обычных игр, и приводит к более слабым результатам.

Таким образом, характерным для теории игр является наличие неопределенности нестохастического типа, сколь бы незначительной эта неопределенность ни была.

Целесообразно также отметить, что хотя в современной статистической теории информации и даже в философском аспекте понятия случайности, вероятности находятся в известном отношении с понятием неопределенности (см. формулу негэнтропии, связывающую степень неопределенности с вероятностью), в теории игр понятие неопределенности не имеет никакого отношения к понятию вероятности и связи с ним; в теории игр неопределенность имеет принципиально другую природу, нежели в статистической теории информации.

При построении классических теоретико-игровых моделей необходимо руководствоваться общими принципами исследования операций, необходимо установить правила игры, т. е. прежде всего следует установить действующие и заинтересованные стороны (которые в модели становятся коалициями действия и интересов), множества стратегий коалиций действия, критерии оптимальности для коалиций интересов, возможности хранения информации и ее обмена и т. д.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ИГРЫ

Основным объектом изучения теории игр являются математические модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта и неопределенности. Такие модели называются играми.

Для того чтобы модель могла именоваться моделью, она должна отражать ведущие, главные черты и свойства явления. Эти черты и свойства в математической модели должны быть описаны формально.

Единое определение игры в литературе пока не встречалось. Мы здесь следуем определению игры, данному в упомянутой выше работе [3]. Во всяком описании конфликтного явления должны быть отражены следующие четыре обстоятельства.

1. Необходимо фиксировать, что в конфликте участвуют те или иные стороны, которые являются принимающими решения субъектами. Эти стороны называются коалициями действия. Такое название подчеркивает возможную сложность, структурность принимающего решение субъекта. В его роли может выступать коллектив и коллективы, составляющие различные коалиции действия, коллективы могут пересекаться. В частном случае в игре может участвовать лишь одна коалиция действия. Множество всех коалиций действия будем обозначать через $R_д$.

Предполагается, что коалиции действия составлены до начала игры (т. е. их состав уже обусловлен правилами игры), так что никакие причины, приведшие к появлению игрока в той или иной коалиции или побуждающие его вступить в коалицию, далее рассматриваться не будут.

2. Необходимо отразить возможности участников конфликта, т. е. указать, какие именно действия может осуществить каждая из коалиций действия $k \in R_д$. Эти действия называются *коалиционными стратегиями* k-й коалиции действия. Множество всех стратегий k-й коалиции действия будем обозначать S_k.

Каждой коалиции действия необходимо выбрать решение, т. е. действие из своего множества S_k. Коалиционные стратегии представляют собой обычно способы расходования активных средств (материальных ресурсов), которые находятся в распоряжении этой коалиции действия. Стратегии могут иметь и другую физическую природу.

Между стратегиями различных коалиций действия может иметь место та или иная связь. Например, выбор группой коалиций действия своих стратегий может накладывать на возможности выбора стратегий другими коалициями некоторые ограничения. Результат выбора всеми коалициями действия своих стратегий с учетом этих ограничений называется *ситуацией*. Таким образом, множество S всех ситуаций можно понимать как подмножество декартова произведения $\prod\limits_{k \in R_д} S_k$.

3. Необходимо теперь указать стороны, отстаивающие определенные интересы. Их естественно называть *коалициями интересов*, ибо в сторону, преследующую какие-то интересы, может входить коллектив или коллективы, члены которых объединены общими интересами. В общем случае коалиция действия может не быть коалицией интересов и, наоборот, коалиция интересов может не быть коалицией действия. Коалиция действия в частном случае может быть одна, а коалиций интересов может быть несколько.

Приведем несколько примеров: 1) завод, конструкторское бюро или институт можно рассматривать как одну коалицию действия с несколькими или даже множеством коалиций интересов; 2) воинское подразделение в ряде случаев можно представить как одну коалицию действия, имеющую одну коалицию интересов; 3) любую комплексную систему можно рассматривать как одну

коалицию действия, а подсистему, имеющую свои интересы, свой критерий эффективности, как самостоятельную коалицию интересов. В сложной комплексной системе может быть столько коалиций интересов, сколько подсистем имеет комплексная система. Тем не менее комплексная система должна принимать решение как одна коалиция действия, причем это решение должно учитывать интересы подсистем — коалиций интересов.

Здесь целесообразно еще раз обратить внимание на то, что, по определению, стратегии (т. е. способы расходования активных средств) находятся в распоряжении коалиций действия.

Различные коалиции интересов могут пересекаться, более того, один такой коллектив может содержаться в другом. Например, среди коллектива читателей этой книги могут быть группы, которые заинтересованы:

а) в изучении только классической теории оптимальных процессов;

б) в изучении только теории игр;

в) в изучении и той и другой теорий.

В реальных условиях очень редким является случай, когда одна коалиция действия является одновременно и одной коалицией интересов. Если допустимо рассматривать человека изолированно и ставить ему в соответствие одну коалицию действия, то общеизвестно, что ему свойственно множество интересов, и при этом нахождение рациональных действий (решений) с учетом множественности интересов является довольно сложной задачей.

Множество всех коалиций интересов будем обозначать через $R_и$. Формально можно допустить, что имеется лишь одна заинтересованная сторона, т. е. множество $R_и$ состоит из одного элемента. Однако собственно конфликты и игровая ситуация возникают тогда, когда имеется не менее двух сторон, наделенных различными интересами.

Игры с одной коалицией действия и несколькими коалициями интересов характерны тем, что в них стратегические соображения не играют роли. Такие игры называются *нестратегическими*.

4. Необходимо описать цели участников конфликта, т. е. указать для каждой коалиции интересов $\tilde{k} \in R_и$ бинарное отношение предпочтения $\underset{\tilde{k}}{>}$ на множестве ситуа-

ций S. Вообще отношение $\underset{\tilde{k}}{\succ}$ можно считать совершенно произвольным. Тем не менее во всех рассматривавшихся до сих пор случаях принималось, что все отношения $\underset{\tilde{k}}{\succ}$ являются транзитивными (т. е. если $s_1 \succ s_2$, $s_2 \succ s_3$, то $s_1 \succ s_3$).

Участием коалиции интересов в конфликте является достижение в каком-то смысле наиболее предпочтительной для нее ситуации из S. Тот факт, что ситуация s_1 является для коалиции $\tilde{k}$ более предпочтительной, чем ситуация s_2, обычно обозначают как $s_1 \underset{\tilde{k}}{\succ} s_2$. Отношение предпочтения $\underset{\tilde{k}}{\succ}$ иногда называется доминированием (отношением доминирования) для коалиции $\tilde{k} \in R_{\text{и}}$.

Ситуации или стратегии всех коалиций действия, удовлетворяющие некоторому принципу оптимальности, называются решениями игры в смысле этого принципа. Пусть, например, для каждой коалиции интересов имеется функция предпочтения, зависящая от стратегий всех коалиций действия. Каждой коалиции интересов выгодно получить в игре максимальное значение своей функции предпочтения. Решением такой игры являются ситуации или набор стратегий всех коалиций действия, которые доставляют максимум функции предпочтения каждой коалиции интересов. Естественно, что решения игры в ряде случаев может и не существовать.

Подытоживая вышеизложенное, приходим к общему формальному определению игры как математической модели конфликта.

Определение. Игрой называется система

$$\Gamma = \langle R_{\text{д}}, \{S_{\text{к}}\}_{k \in R_{\text{д}}}, S, R_{\text{и}}, \{\underset{\tilde{k}}{\succ}\}_{\tilde{k} \in R_{\text{и}}} \rangle, \quad (1.1)$$

где $R_{\text{д}}$, $R_{\text{и}}$ и $S_{\text{к}}$ $(k \in R_{\text{д}})$ — произвольные множества; $S \subset \subset \prod_{k \in R_{\text{д}}} S_{\text{к}}$ и $\underset{\tilde{k}}{\succ}$ $(\tilde{k} \in R_{\text{и}})$ — произвольные бинарные отношения на S. Стоящая в правой части (1.1) система, определяющая игру Γ, является формальным обозначением того, что обычно принято называть правилами игры.

Определение игры и ее правила исключают из процесса принятия решения в условиях конфликтов «психологические» рассуждения о намерениях противника и в том числе умозаключения типа «я думаю, что он думает, что я думаю, что он ...» в применении к возможным действиям конфликтующих сторон. Таким образом, классическая теория игр не занимается спецификой осознания в мышлении человека конфликтной ситуации. Однако можно предполагать, что мышление в конфликте подчиняется некоторым особым законам. Модели конфликтов, охватывающих этот процесс осознания, изучаются другими научными дисциплинами, в том числе теорией рефлексивных игр [6, 7]. Модели этой теории позволяют фиксировать процессы имитации рассуждений одного противника другим, а также исследовать явления взаимного управления, которые обычно возникают между конфликтующими сторонами. В таких моделях участники конфликта рассматриваются как игроки, вступившие в своеобразную рефлексивную игру. Термин «рефлексивный» подчеркивает, что игроки отражают в мышлении рассуждения друг друга. Под рефлексивным управлением понимается взаимная передача партнерами оснований для принятия решений.

В такой игре конфликтующие стороны вступают в своеобразную рефлексивную игру, где каждая из сторон стремится отразить и тем самым получить возможность перехитрить друг друга. Такое изображение конфликта как интеллектуального взаимодействия сторон является важным системным представлением конфликта, открывающим новые резервы в оптимизации решений, принимаемых в конфликтной ситуации.

Далее везде будет идти речь об играх в смысле данного в этом параграфе определения (1.1).

Целесообразно отметить (и это существенно), что определение игры (1.1) не дает указания о том, как находить решение игры, т. е. как находить оптимальные стратегии игроков или коалиций действия. В формулировке общей игры предлагается лишь объект исследования и формализуются правила игры.

Для нахождения оптимального поведения в общей игре необходимо указать принцип оптимальности в этой игре. Однако проблема принципов оптимальности для общих игр пока остается открытой. Поэтому для отдельных классов игр и отдельных игр формулируются свои принципы оптимальности, которые прямо или косвенно отражают идею устойчивости ситуации, удовлетворяющей этим принципам. (Более подробно о принципах оптимальности будет сказано в § 1.3.)

В теории игр предполагается, что правила игры известны каждому игроку и отклонение от этих правил не допускается. В таких условиях, согласно установленному принципу оптимальности, игроки ищут в множестве своих стратегий такие, которые удовлетворяют этому принципу и отклонение от которых игрокам невыгодно. Таким образом полученные стратегии игроков являются оптимальными в смысле этого принципа.

Отметим также, что игры как математические модели конфликта можно рассматривать с точки зрения исследователя операций, который принадлежит к оперирующей стороне и проводит такие игры в зависимости от информированности оперирующей стороны о противнике (противниках). Если, например, исследователю операций известно, что игра бескоалиционная и противники будут иметь информацию друг о друге и будут стремиться максимизировать свои критерии эффективности, то он, применяя принцип оптимальности по Нэшу, определяет свою стратегию и стратегии противников. Определенные таким образом стратегии являются оптимальными, ибо они осуществляют ситуацию равновесия. Изменяя свою стратегию, оперирующая сторона не может увеличить свой выигрыш.

Таким образом, исследователь операций в зависимости от информированности о противниках может устанавливать правила игры и принцип оптимальности, т. е. строить математическую модель конфликта и получать в этом смысле оптимальные решения. Типичным примером таких моделей конфликтов является следующая игра.

Оперирующая сторона, к которой принадлежит исследователь операций, является одной коалицией действия. Множество коалиций интересов в этой коалиции действия можно объединить в один критерий эффективности оперирующей стороны. Правила объединения критериев эффективности в один обобщенный критерий разработаны в работе [8]. Что касается целей и конкретных стратегий других участников игры, то, как правило, такой информации у исследователя операций нет, имеется только информация о множествах допустимых стратегий других участников игры. В этом случае исследователь операций относит цели и стратегии других участников

игры к неопределенным факторам и, применяя принцип максмина, определяет гарантированные стратегии оперирующей стороны, т. е. такие стратегии, которые гарантируют ей максимальное значение обобщенного критерия эффективности при самых неблагоприятных стратегиях информированных участников игры (противников). В этих условиях так определенная стратегия оперирующей стороны, очевидно, является оптимальной и отклонение от нее оперирующей стороне невыгодно.

Построенные исследователем операций математические модели конфликтов, конечно, будут отличаться от реальных, поскольку последние почти всегда протекают в условиях неопределенности для оперирующей стороны и тем более для исследователя операций. Полученные решения не будут значительно расходиться с действительными оптимальными решениями только в том случае, когда рассмотренная этим исследователем модель охватывает основные черты реального конфликта.

1.3. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИГР

Основным содержанием теории игр является исследование оптимальных поведений игроков в условиях конфликта. Существенно при этом, что игры в этой теории рассматриваются преимущественно с нормативных позиций. Нормативный подход порождает, в свою очередь, три дальнейших вопроса: что такое оптимальное решение, существуют ли оптимальные решения в данном классе игр и как фактически (т. е. алгоритмически, аналитически или численно) найти решение в смысле выбранного принципа оптимальности.

По существу вся теория игр с момента своего возникновения занимается поисками ответов на эти вопросы для различных классов игр. Методики ответов на эти три фундаментальных вопроса теории игр существенно отличаются друг от друга, так что можно говорить о трех аспектах теории игр.

Сначала о первом из этих аспектов. Для теории игр он является наиболее специфическим. Сама постановка соответствующего вопроса свидетельствует о нормативности моделей, рассматриваемых теорией игр, о том, что модели теории игр являются моделями принятия решений. Однако, в отличие от иных моделей принятия решений, детерминированных или стохастических (рассматриваемых в теории оптимальных процессов), в которых ответ на этот вопрос заключается в указании целевой функции (критерия эффективности), для теории игр определение оптимальности действий превращается в серьезную проблему.

Действительно, теория игр рассматривает произвольные действия сторон и вырабатывает понимание оптимальности действия (ситуации) в результате сравнения всех действий (ситуаций) по их последствиям с точки зрения отношений предпочтения сторон интересов. Принятие оптимальных решений должно отражать естественные черты, которые интуитивно приписываются оптимальности, разумности, справедливости. Это соображение, несущественное с точки зрения формальной математической теории, становится важным ввиду происхождения игры как модели конфликта и приложений результатов теории игр к реальным конфликтам.

Проблема принципов оптимальности для общих игр пока остается открытой. Практика теории игр показывает, что выработанные до сих пор принципы оптимальности прямо и косвенно отражают идею устойчивости ситуаций, удовлетворяющих этим принципам. Однако в различных классах игр эта идея устойчивости реализуется различными способами.

В настоящее время из общих игр выделяются два наиболее крупных класса игр: коалиционные игры и нестратегические игры. Представители этих двух классов отличаются друг от друга наиболее фундаментально. В коалиционных играх на первом плане оказываются стратегические взаимодействия различных коалиций действия и их противоречивое участие в формировании общей обстановки. В нестратегических играх, напротив, решающей возможностью коалиции интересов является область действия ее отношения предпочтения. Поэтому естественно, что принципы оптимального поведения в коалиционных играх и нестратегических играх существенно отличаются друг от друга.

Оптимальное поведение в коалиционных играх (предложенное в работе [9]) выражается в стремлении коалиций к стратегически устойчивым ситуациям, т. е. к таким ситуациям, от которых нецелесообразно, невыгодно отступать в процессе игры. Обязательства, которые берет на себя игрок (или коалиция) тем более реальны, чем

меньше оснований их нарушать, чем больше та настойчивость, с которой коалиция будет их выполнять и чем меньше обстоятельств могут повлиять на эту настойчивость.

В том частном случае, когда коалиционная игра оказывается бескоалиционной, все коалиции действия состоят из одного игрока. Здесь одним из возможных принципов оптимальности игры является принцип равновесия по Нэшу [10], т. е. устойчивая ситуация, в которой игроки, изменяя свои стратегии, не могут увеличить свои выигрыши.

Если понимать ситуации в бескоалиционных играх как объекты возможных договоров, то ситуации равновесия и только они будут соответствовать тем вариантам договоров, в одностороннем нарушении которых не заинтересован ни один из участников игры. Поэтому только такие договоры и будут соблюдаться.

Заметим, что стремление к ситуациям равновесия иногда противоречит некоторым естественным соображениям оптимальности. Об этом свидетельствует, например, игра под названием «дилемма заключенного» [11] или некоторые ситуации, возникающие в политических и экономических взаимоотношениях ряда капиталистических стран. Иногда ситуации равновесия в играх оказываются не реализуемыми по чисто техническим обстоятельствам, непосредственно не связанными с теоретико-игровыми причинами и близкими в своей основе к отсутствию экстремальных значений функций на незамкнутых множествах. В этих случаях естественно стремление приближенно реализовать ситуацию равновесия.

В антагонистических играх ситуации равновесия оказываются седловыми точками в обычном понимании, т. е. такими ситуациями, на которых игроки добиваются своих максиминных выигрышей (равных минимаксным). Принцип максимина в антагонистической игре является наиболее известным, а в ряде случаев и наиболее разумным.

Разнообразные доводы против применения этого принципа в лучшем случае сводятся к указанию таких случаев принятия решений, когда применение принципа максимина действительно нелепо (например, если решение принимается в условиях стохастической неопределенности) или же оказывается необоснованно расширенным (например, из-за игнорирования имеющейся частичной информации или просто в неантагонистической игре).

Если теперь обратиться к нестратегическим играм, то с точки зрения принципов оптимальности основное их отличие от коалиционных игр состоит в следующем. Для стратегических игр за выбором ситуации после договоренности следует ее фактическая реализация в стратегиях. Для нестратегических игр выбором ситуации процесс игры исчерпывается. Поэтому принципы оптимального поведения в нестратегических играх сводятся к тактике выдвижения требований той или иной ситуации. Таким образом, выбор ситуации в нестратегической игре естественно считать разумным, если всякое возражение против этой ситуации можно парировать. По существу это означает устойчивость ситуации в том или ином смысле. Эту устойчивость можно понимать весьма различно.

Опишем понятие решения, которое было введено в работе [1] для классических кооперативных игр, но остается в силе и для произвольных нестратегических игр. Это понятие реализует идею двоякой устойчивости: множество ситуаций $\bar{S}\subset S$ называется решением, если, во-первых, отношение предпочтения $r_1 \underset{\tilde{k}}{\succ} r_2$ не выполняется ни для каких ситуаций r_1, $r_2 \in \bar{S}$ и коалиции $\tilde{k}\in R_{\text{и}}$, и, во-вторых, для любой ситуации $s\in S\setminus\bar{S}$ найдутся такие ситуации $r\in\bar{S}$ и коалиция $\tilde{k}\in R_{\text{и}}$, что $r \underset{\tilde{k}}{\succ} s$. Смысл этих двух условий достаточно прозрачен. Первое из них означает, что в «обществе» (т. е. в $\mathcal{I}$) нет таких «сил» (т. е. такой коалиции интересов $\tilde{k}$), которые бы предпочитали одну ситуацию из $\bar{S}$ другой. Второе условие означает, что какова бы ни была ситуация, не принадлежащая $\bar{S}$, в «обществе» найдутся «силы», заинтересованные в переходе от нее к некоторой ситуации из $\bar{S}$. Очевидно, в условиях игры с дележами решением является множество дележей.

Основным недостатком такого понятия решения является присущая такому решению двоякая множественность. Игры могут иметь более одного решения, а решения состоят, вообще говоря, даже в простейших случаях из нескольких ситуаций.

Другой подход, направленный на аксиоматизацию «справедливых выигрышей», получаемых игроками в не-

стратегической игре, приведен в работе [12]. Он выявляет некоторую единственную ситуацию, которую также можно считать реализацией некоторого принципа оптимальности. В условиях игры дележей естественным представляется стремление игроков к «оптимуму Парето» [11], при котором совместные действия всех игроков не могут одновременно улучшить положение каждого.

Принципы оптимального поведения сторон в играх некоторого класса должны удовлетворять двум условиям: 1) поведения, соответствующие принятому принципу, должны существовать для всех игр данного класса; 2) множество этих поведений для каждой игры не должно быть слишком широким (иначе возникает потребность в установлении дальнейших принципов поведения, дополняющих и уточняющих принятый принцип). Приведенные условия в значительной степени противоречат друг другу: первое условие требует, чтобы принципы были достаточно гибкими и реализуемыми, а второе — чтобы они были достаточно жесткими и нормативными. В качестве крайних вариантов принципов оптимальности, удовлетворяющих только первому или только второму условию, можно привести следующие два условия: оптимальны любые действия (нарушается второе условие) и оптимальными признаются действия, приводящие к ситуации, наиболее благоприятной для каждой коалиции интересов (нарушается первое условие, ибо такая ситуация существует лишь в отдельных, весьма редких случаях). Второе условие, взятое в своей наиболее сильной форме, должно требовать единственности оптимального поведения. Однако в такой форме оно удовлетворяется редко, и теоремы единственности в теории игр встречаются редко, скорее как исключения.

Ситуации, удовлетворяющие некоторому принципу оптимальности, обычно называются решениями в смысле этого принципа.

Рассмотрим теперь второй основной вопрос теории игр: существуют ли оптимальные решения в данном классе игр? Этот аспект теории игр является по преимуществу аналитическим.

Многие принципы оптимального поведения, представляющиеся вполне разумными, в действительности могут оказаться неприемлемыми. В качестве простейшего примера укажем принцип максимального удовлетворения каждой из коалиций интересов. Осуществить его можно лишь в отдельных случаях, а в условиях нетривиального антагонистического конфликта — никогда. Следовательно, принципы оптимальности остаются чисто декларативными, пока не установлено существование для соответствующих классов игр таких решений, которые этим принципам удовлетворяют.

Первоначально тот или иной принцип оптимального поведения формулируется для некоторого узкого класса игр, в котором существование решений в смысле этого принципа устанавливается тривиально. Затем предпринимаются попытки распространить его на более широкий класс игр. Если для отдельных игр такого класса не окажется решений, то множество ситуаций расширяется так, чтобы в новом расширенном множестве ситуаций решения уже существовали.

Выбор расширения множества ситуаций (обычно оно достигается расширением множеств стратегий коалиций действия) и последующее доказательство того факта, что в этом расширенном множестве существуют нужные ситуации, является предметом многочисленных исследований в теории игр. Например, если в игре не существует решения на множестве чистых стратегий (первоначально заданных стратегий), то вводят смешанные стратегии (вероятностные меры на первоначально заданных множествах стратегий).

В работе [13] было доказано, что любая матричная игра имеет седловые точки в смешанных стратегиях. Для довольно широких классов бесконечных антагонистических игр соответствующие результаты были установлены в работе [14]. Для конечных бескоалиционных игр существование ситуаций равновесия в смешанных стратегиях было доказано в работе [10], а для ряда бесконечных бескоалиционных игр — в работе [15].

Для антагонистических и бескоалиционных дифференциальных игр необходимые и достаточные условия существования решения в чистых стратегиях были получены автором в работах [16—18].

Несмотря на широкие возможности, открывающиеся при использовании смешанных стратегий, существуют игры (в том числе бескоалиционные и даже антагонистические), в которых принципы оптимальности на одних только смешанных стратегиях не реализуются. В работе [19] было предложено использовать конечно-аддитивные меры на множествах стратегий. Как указано в [3], есть

основание предполагать существование ситуаций равновесия в конечно-аддитивных стратегиях для любой антагонистической игры, а также для довольно широкого класса бескоалиционных игр.

Следует заметить, что плодотворных расширений множеств ситуаций известно пока немного, теоремы же о существовании многочисленны и разнообразны.

Фактическое (т. е. алгоритмическое, аналитическое или численное) нахождение решений в смысле выбранных в этих играх принципов оптимальности составляет содержание третьего аспекта теории игр. Этот аспект достаточно традиционен и состоит в разработке и применении обычных математических приемов. Однако специфика рассматриваемых в теории игр моделей требует рассмотрения совершенно новых типов уравнений, стохастических схем, топологических пространств и алгебраических образований. Достаточно указать на исключительное значение, которое в различных вопросах теории игр приобретают системы неравенств.

1.4. О РЕШЕНИИ ИГР В СТРАТЕГИЯХ И СТРАТЕГИЯХ ПОВЕДЕНИЯ

Для лучшего понимания теории игр, основным содержанием которой являются методы определения оптимальных стратегий или стратегий поведения, необходимо четко разграничить эти понятия.

В интуитивном понимании стратегия игрока есть некоторый план разыгрывания игры. Игрок как бы устанавливает правило своего поведения на всю игру вперед: если случится то-то и то-то, я буду действовать так-то и так-то. Приведем точное определение.

Стратегия игрока есть некоторая функция, которая ставит в соответствие каждому информационному множеству этого игрока число между 1 и k, где k — число альтернатив в данном информационном множестве. Здесь под информационными множествами игрока понимаются подмножества множества всех неокончательных позиций этого игрока в данной игре.

В частном случае, когда каждое информационное множество игрока состоит из одного элемента (позиции), то такая игра называется *игрой с полной информацией*. Например, шахматы и шашки (как, впрочем, и все настольные игры) — это игры с полной информацией. В этом случае стратегия игрока есть некоторая функция, которая ставит в соответствие каждой позиции игрока число из множества альтернатив в данной позиции. Множество всех стратегий i-го игрока мы будем обозначать через Q_i.

Если у игрока N информационных множеств и в каждом из них k альтернатив, то общее число чистых стратегий, т. е. множество Q_i, равно k^N, а это число может быть очень большим даже для простейших конечных игр, не говоря уже о бесконечных играх, в которых множество позиций бесконечно.

В практической области люди никогда не выбирают стратегию из столь большой области. В большинстве игр область стратегий слишком велика, чтобы можно было дать ее полное описание. Например, за все годы, в течение которых люди играют в шахматы и анализируют их, была разобрана и записана лишь небольшая часть стратегий.

Практически мы привыкли к тому, что игрок принимает решение о своем ходе в игре только на несколько ходов вперед, а чаще всего — лишь в тот момент, когда он должен сделать данный ход. На практике это так и должно быть, так как в таких играх, как указывалось выше, число возможных ходов настолько велико, что нельзя заранее запланировать свои действия, учтя все возможные обстоятельства. Однако с чисто теоретической точки зрения можно абстрагироваться от такого практического ограничения и предполагать, что уже до начала игры каждый игрок решил, что он будет делать в каждом отдельном случае. Таким образом, фактически мы предполагаем, что игрок выбирает некоторую стратегию еще до начала игры.

Если мы надеемся добиться хорошего результата в игре, то не следует в общем случае допускать того, чтобы противник знал нашу стратегию. Это трудно осуществить, если мы выбираем свою стратегию на основании разумных соображений, так как ничто не мешает противнику воспроизвести наши рассуждения. Идея использования смешанных стратегий как раз и состоит в том, что стратегия должна выбираться случайно, но сама схема рандомизации должна выбираться разумно. Строгое определение смешанной стратегии заключается в следующем: смешанная стратегия игрока i есть вероятностное распределение на множестве Q_i его чистых стратегий.

Если игрок имеет только конечное число m чистых стратегий, смешанная стратегия представляет собой m-вектор $u=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, удовлетворяющий условиям

$$u_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = 1. \tag{1.2}$$

Рассмотрим теперь такую простую игру, как, например, «крестики и нолики». Мы видим, что даже в эту простую игру никто не играет, фактически рассматривая все возможные чистые стратегии, т. е. все возможные последовательности ходов с первого до последнего (заметим, что в этой наипростейшей игре имеется астрономическое число чистых стратегий). Скорее всего в нее играют, рассматривая во время каждого хода все возможные альтернативы только для этого хода и выбирая из них наилучшую (исходя из собственного опыта или как-либо иначе).

Таким образом, сущность упрощения состоит в том, чтобы рассматривать ходы по одному за раз. Этот прием сводит один выбор из множества $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_N$ возможных стратегий к N выборам из k_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ возможных альтернатив в каждом информационном множестве. Это приводит к следующему определению стратегии поведения.

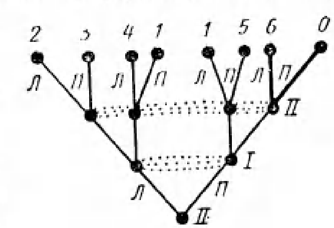

Рис. 1.

Стратегией поведения называется набор N вероятностных распределений, каждое из которых задано на множестве возможных альтернатив в каждом информационном множестве. В случае полной информации игроков, т. е. когда каждое информационное множество состоит из одной позиции, стратегия поведения состоит из набора N вероятностных распределений, каждое из которых задано на множестве возможных альтернатив в каждой позиции. Множество стратегий поведения имеет гораздо меньшую размерность, чем множество смешанных стратегий.

С другой стороны, необходимо заметить (и это весьма существенно), что при некоторых условиях не все смешанные стратегии можно получить, используя стратегии поведения. Например, в игре, дерево которой изображено на рис. 1, мы можем обозначить чистые стратегии игрока II через ЛЛ, ЛП, ПЛ, ПП. Эти четыре чистые стратегии составляют множество Q_2 чистых стратегий игрока II. Смешанная стратегия игрока II есть вектор (u_1, u_2, u_3, u_4), удовлетворяющий ограничениям (1.2); стратегия поведения есть пара чисел (y_1, y_2), удовлетворяющая лишь условиям $0 \leqslant y_i \leqslant 1$. Стратегии поведения (y_1, y_2) игрока II соответствует смешанная стратегия

$$(y_1 y_2,\ y_1(1-y_2),\ (1-y_1)y_2,\ (1-y_1)(1-y_2)). \quad (1.3)$$

Можно показать, что оптимальная смешанная стратегия игрока II есть вектор $(0, {}^5/_7, {}^2/_7, 0)$. Ясно, что эта оптимальная стратегия не может быть представлена в виде (1.3). Следовательно, эта игра не имеет решения в стратегиях поведения.

В дифференциальных играх, которым посвящены следующие главы (начиная с гл. 3), рассматриваются чистые стратегии, определенные на всю игру вперед (с момента ее начала вплоть до ее окончания в фиксированный момент времени t_1). Стратегии игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$, таким образом, являются функциями времени $u(t)$, $v(t)$, принадлежащими множествам Q_1 и Q_2 соответственно. В общем случае эти множества зависят от времени и состояния игры.

Такая постановка для дифференциальных игр является несколько необычной, ибо, как правило, во всех ранее опубликованных работах рассматриваются стратегии игроков $u(x)$, $v(x)$, зависящие от состояния игры x в каждый момент времени. Для дифференциальных игр с полной информацией игроков рассмотрение таких стратегий $u(x)$, $v(x)$ является естественным. Однако если рассматривается иная информированность, при которой один из игроков (например, $\mathcal{E}$) не имеет информации о состоянии игры x, то стратегия $v(x)$ не имеет смысла. В ряде случаев стратегии $u(t)$, $v(t)$ являются предпочтительней и, главное, они отражают существо рассматриваемой игры при различной информированности игроков и при различных принципах оптимальности игры.

Как правило, в играх отсутствует полная информация. При этом, естественно, методы решения дифференциальных игр в предположении полной информации неприменимы.

Тем не менее в тех играх, где отсутствует информация о состоянии игры, может существовать ситуация равновесия и значения игры. Достаточные и необходимые условия существования равновесия в чистых стратегиях в таких случаях изучаются в этой книге с помощью такого нового понятия, как идеальная информация игроков (что, на первый взгляд, звучит парадоксально).

2. Методы решения дифференциальных антагонистических игр с полной информацией

Для удобства вывода уравнений, формально определяющих решение дифференциальной игры с полной информацией, мы будем в этой главе рассматривать дифференциальные игры как обобщение стохастических и рекурсивных игр (заметим, что такое обобщение вовсе не обязательно, оно диктуется только методическими соображениями; понятие дифференциальной игры и ее правила могут быть описаны иначе, например так, как это сделано в следующей главе). В этих многошаговых играх игроки, как известно, имеют полную информацию, т. е. после того, как каждый игрок сделал ход (не зная выбора другого), оба игрока знают, в какой позиции они находятся (причем эта информация не забывается). Напомним теперь определение стохастической игры. Согласно [33], *стохастическая игра* есть набор игровых элементов или позиций. Если промежуток времени между ходами убывает, то в пределе получается игра, в которой каждый игрок должен делать ход в каждый момент времени. Так как ходы совершаются непрерывно, естественно предполагать, что игровой элемент будет меняться весьма незначительно в течение малых промежутков времени; иначе говоря, игровой элемент или позиция меняется непрерывно. Так, если игровой элемент (позиция) представлен точкой в множестве $\mathcal{E}$ (где $\mathcal{E}$ — область игры в n-мерном евклидовом пространстве), то можно считать, что стратегии поведения определяют движение этой точки (игрового элемента) с помощью дифференциальных уравнений.

Точнее говоря, мы можем дать следующее определение: игровой элемент (позиция) в дифференциальной игре представляется набором вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, называемых переменными состояниями.

В каждый момент времени t игрок I выбирает набор r вещественных чисел $u=(u_1, \ldots, u_r)$, подчиненных, вообще говоря, некоторым ограничениям, например, имеющим вид $a_\nu \leqslant u_\nu \leqslant b_\nu$, где a_ν и b_ν $(\nu=1, \ldots, r)$ — константы. Аналогично игрок II выбирает набор s чисел $v=(v_1, \ldots, v_s)$. Векторы u и v называются управляющими переменными, которые влияют затем на изменение переменных состояния в соответствии с системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i=f_i(x, u, v), \ i=1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где $\dot{x}_i$ — производная от x_i по времени.

Дифференциальная игра продолжается в соответствии с уравнениями (2.1) до окончания, которое наступает, когда переменные состояния достигают заданного многообразия $S \subset \mathcal{E}$. Это заданное многообразие S называется терминальным многообразием.

В большинстве работ по дифференциальным играм в качестве терминального многообразия рассматривается некоторая поверхность, называемая *терминальной поверхностью* и представляющая собой часть границы пространства $\mathcal{E}$. Когда фазовая точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$ достигает поверхности S, игра оканчивается. Терминальная поверхность S имеет размерность, равную $n-1$. Как мы увидим далее, для нахождения решения игры применяется аппарат дифференциальных уравнений. При этом терминальная поверхность, используемая для получения начальных условий, должна иметь как раз такую размерность, которая обеспечила бы единственное решение. Размерность терминального многообразия меньше, чем $n-1$, влечет за собой, вообще говоря, появление особых точек. (В работе [4] приведены патологические примеры игр, в которых эта размерность меньше требуемой.)

В практических приложениях попадание на терминальную поверхность может означать, что игрок I достаточно близок к игроку II, чтобы поймать его, или же

что закончился определенный период времени (если игра должна закончиться после определенного момента времени, то время также является переменной состояния). Выигрыши могут быть нескольких типов, наиболее общими из которых являются терминальный и интегральный выигрыши, а также их комбинации.

Если игра начинается в момент $t=0$ и заканчивается в момент $t=T$ в точке $(x_1(T), \ldots, x_n(T))$ на терминальной поверхности S, то терминальный выигрыш есть просто функция $F(x_1(T), \ldots, x_n(T))$, определенная на этой терминальной поверхности, а интегральный выигрыш имеет вид

$$\int_0^T p(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r; v_1, \ldots, v_s)\, dt. \tag{2.2}$$

Наиболее общий тип выигрыша, который обычно рассматривается, имеет вид функции F плюс интеграл вида (2.2).

2.1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Как и для дискретных многошаговых игр, метод решения дифференциальных игр с полной информацией состоит в замене игровых элементов их значениями (значениями игр на каждом шаге) с последующим решением рекуррентных уравнений для этих значений (эти рекуррентные уравнения теперь будут дифференциальными).

Предположим теперь, что значения игр на каждом шаге существуют; значение игры, которая начинается в точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$, будем обозначать через $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что в момент $t=0$ игрок I выбирает управляющую переменную (стратегию поведения) $\bar{u}$, а игрок II — управляющую переменную (стратегию поведения) $\bar{v}$. В этом случае после малого интервала времени Δt мы увидим, что переменные состояния будут приближенно равны $x+\Delta x$, где

$$\Delta x_i = f_i(x, \bar{u}, \bar{v})\, \Delta t, \tag{2.3}$$

и (если игра имеет интегральный выигрыш) выигрыш будет приближенно равен

$$p(x_1, \ldots, x_n; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s)\, \Delta t. \tag{2.4}$$

Игра начинается снова из точки $x+\Delta x$, определенной формулой (2.3), и с уже достигнутым выигрышем (2.4). Если, начиная с момента Δt, используются оптимальные стратегии поведения, то общий выигрыш будет равен

$$\varphi(x) = p(x_1, \ldots, x_n; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_s)\,\Delta t + \varphi(x+\Delta x). \tag{2.5}$$

Для составления соотношения (2.5) использовано рекуррентное соотношение для многошаговой игры, заключающееся в том, что для того, чтобы определить значение игры на n-м шаге, надо в игровом элементе этого n-го шага заменить обязательство разыгрывать игру на $(n-1)$-м шаге значением игры на этом $(n-1)$-м шаге. Так как предполагается, что значения игр на каждом шаге существуют, то соотношение (2.5) справедливо. Однако мы знаем, что

$$\varphi(x+\Delta x) \cong \varphi(x) + \sum_i \varphi_i(x)\,\Delta x_i$$

(где φ_i — частные производные от φ по x_i), или в силу (2.3)

$$\varphi(x+\Delta x) \cong \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_i(x, \bar{u}, \bar{v})\,\Delta t. \tag{2.6}$$

Следовательно, подставляя (2.6) в (2.5) и предполагая, что $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — оптимальные выборы управляющих переменных (стратегий поведения) в момент $t=0$, мы имеем

$$\varphi(x) \cong p(x, \bar{u}, \bar{v})\,\Delta t + \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})\,\Delta t,$$

или, полагая $\Delta t \to 0$,

$$p(x, \bar{u}, \bar{v}) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_i(x, \bar{u}, \bar{v}) = 0, \tag{2.7}$$

или, что эквивалентно (так как предполагается, что значения игр на каждом шаге существуют и, следовательно, $\max\limits_u$ и $\min\limits_v$ можно менять местами),

$$\max_u \min_v \left\{ p(x, u, v) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_i(x, u, v) \right\} = 0. \tag{2.8}$$

Уравнение (2.7) или эквивалентное ему уравнение (2.8) известно как основное уравнение. Это уравнение в частных производных первого порядка относительно $\varphi(x)$, которому должно удовлетворять значение игры. При использовании основного уравнения для решения практических задач необходимо быть осторожным, так как не всегда можно менять порядок двух операторов max и min. Если подынтегральное выражение (2.2) и правые части уравнений (2.1) можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых не зависит от u, а другая — от v, то в основном уравнении (2.8) можно переставлять операторы max и min и, следовательно, предположение о минимаксе, очевидно, выполняется. Таким образом, не всегда бывает достаточно чистых стратегий поведения. Однако, как утверждает Оуэн [33], смешанные стратегии поведения необходимы только в конечном числе точек в любой партии игры. В связи с этим возникает ряд интересных и важных вопросов: какая должна быть форма этих смешанных стратегий, каким образом игрок должен осреднять чистые стратегии поведения, значения которых он выбирает непрерывно? Эти вопросы, к сожалению, пока что остаются невыясненными.

2.2. УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

После того, как получено основное уравнение (2.7), можно (как и в многошаговых играх на разорение) двигаться назад вдоль траекторий дифференциальных уравнений с терминальной поверхности (так же, как решается задача многошаговой игры «от конца к началу» в случае разностных уравнений). Действительно,

$$p + \sum_i \varphi_i f_i = C.$$

Если мы продифференцируем левую часть этого равенства по x_j, то получим сумму следующих членов

$$p_j + \sum_i \varphi_i f_{ij} \tag{2.9}$$

(где $p_j = \partial p / \partial x_j$ и $f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$),

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} f_i, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(p + \sum_i \varphi_i f_i \right) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial}{\partial v_l} \left(p + \sum_i \varphi_i f_i \right) \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_j}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим член (2.11), предполагая, что управляющие переменные $\bar{u}_k$ ограничены константами. Мы знаем, что $\bar{u}_k$ будут либо внутри, либо на границе своего интервала ограничений. Если это внутренняя точка, то

$$\partial \left(p + \sum \varphi_i f_i \right) / \partial u_k = 0,$$

потому что $\bar{u}_k$ выбирается так, чтобы максимизировать выражение в скобках (2.8). Если же $\bar{u}_k$ лежит на границе, то (за исключением точек сингулярности) $\bar{u}_k$ будет оставаться на границе, так что $\partial \bar{u}_k / \partial x_j = 0$. Мы видим, что выражение (2.11)равно нулю; аналогично равно нулю и (2.12).

Рассмотрим теперь (2.10). Имеем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

и поэтому

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} f_i = \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{d \varphi_j}{dt}. \tag{2.13}$$

Обозначим правую часть (2.13) через $\dot{\varphi}_j$ ($\dot{\varphi}_j$ — производная по времени от φ_j вдоль траектории, соответствующей стратегиям $\bar{u}$ и $\bar{v}$). Если мы прибавим эту величину к выражению (2.9) и приравняем результат нулю, то

получим уравнения

$$\dot{\varphi}_j = -\left[p_j (x, \bar{u}, \bar{v}) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_{ij} (x, \bar{u}, \bar{v}) \right], \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.14}$$

которые вместе с системой

$$\dot{x}_j = f_j (x, \bar{u}, \bar{v}), \; j = 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

называются уравнениями траекторий дифференциальной игры с полной информацией. Уравнения (2.14) и (2.15) часто еще называются уравнениями характеристик. Действительно, они являются характеристическими уравнениями основного уравнения (2.7) (особенность которых состоит в том, что (2.11) и (2.12) обращаются в нуль). Эти $2n$ уравнений вместе со значением функции F в качестве конечных условий представляют собой формальное решение игры (конечно, совместно с основным уравнением (2.8), из которого определяются оптимальные управляющие переменные $\bar{u}$ и $\bar{v}$).

Иногда удобнее использовать обратное время $\tau = T - t$ вместо прямого t, так как фактически для систем (2.14) и (2.15) мы имеем задачу с конечными условиями, а не с начальными.

Уравнения характеристик в обратном времени τ имеют вид

$$\overset{\circ}{\varphi}_j = p_j (x, \bar{u}, \bar{v}) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_{ij} (x, \bar{u}, \bar{v}), \tag{2.16}$$

$$\overset{\circ}{x}_j = - f_j (x, \bar{u}, \bar{v}). \tag{2.17}$$

Уравнения характеристик, записанные в виде (2.16) и (2.17), называются уравнениями характеристик в регрессивной форме. Заметим, что уравнение (2.16) было получено в предположении, что ограничения на управляющие переменные u и v постоянны. Если это не так, то в (2.16) нужно добавить члены, соответствующие производным от управлений.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Термин «начальные условия» здесь употребляется по отношению к уравнениям характеристик в регрессивной форме. Нас интересуют известные значения x и φ_x

на терминальной поверхности S, которые могут служить начальными условиями при интегрировании уравнений (2.16) и (2.17) по τ. Однако во многих играх не все точки множества S приемлемы для окончания. Чтобы изучить этот вопрос, рассмотрим точку, близкую к терминальной поверхности S. Любой из игроков в состоянии приблизить или отдалить надвигающееся окончание игры вопреки противодействию своего противника. Пусть $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор нормали к S в точке $x\in S$, направленный внутрь области $\mathcal{E}$. Если

$$\max_u \min_v \sum_{i=1}^{n} \nu_i f_i(x, u, v) > 0, \qquad (2.18)$$

то игрок I может помешать немедленному окончанию игры, начатой из точек, достаточно близких к S. Если в (2.18) знак неравенства обратный, то игрок II может добиться немедленного окончания. Весь вопрос в том, какую пользу принесут игрокам такого рода действия. Иногда ответ очевиден. В качестве примера можно взять случай, когда выигрышем является время окончания игры; ясно, что игрок I в меру своих сил оттягивает окончание игры. Для определенности будем считать, что игрок II хочет окончить игру, а для игрока I выгодно избежать окончания. Тогда мы получаем, что если выполняется (2.18), то игрок I может отсрочить приближающийся конец игры.

Аналогично для тех точек множества S, где справедливо обратное по отношению к (2.18) неравенство, игрок II форсирует окончание игры. При оптимальной игре окончание игры будет осуществляться лишь в точках этой области.

Множество точек $x\in S$, для которых выполняется неравенство (2.18), будем называть *недопустимой областью*. Кривую ($(n-2)$-мерное многообразие) в S, разделяющую эти два множества, т. е. такую, для которой выполняется условие

$$\max_u \min_v \sum_i \nu_i f_i(x, u, v) = 0, \qquad (2.19)$$

назовем *границей допустимой области*.

Для многих задач допустимой областью может быть все множество S, однако встречается также достаточно

много примеров, когда для нахождения решения первым делом надо выделить допустимую область.

Начальные условия, необходимые для интегрирования уравнений (2.16) и (2.17), являются значениями x_j и φ_j ($j=1, \ldots, n$) в допустимой области.

Поскольку S является поверхностью (т. е. $(n-1)$-мерным многообразием), мы можем выразить ее через $n-1$ параметр. Сделав это обычным образом, получим

$$x_j = h_j(s_1, \ldots, s_{n-1}), \; j=1, \ldots, n. \qquad (2.20)$$

Будем предполагать эти функции дифференцируемыми. Соотношения (2.20) дают первые n начальных условий. Для получения φ_j в допустимой области имеем $\varphi = F(s_1, \ldots, s_{n-1})$ на S. Дифференцирование по s_k дает

$$\frac{\partial F}{\partial s_k} = \sum_j \varphi_j \frac{\partial h_j}{\partial s_k}, \; k=1, \ldots, n-1; \qquad (2.21)$$

т. е. мы получили $n-1$ уравнений для определения n неизвестных φ_j. К этим уравнениям следует присоединить еще основное уравнение (2.7), в которое вместо x_j надо подставить их значения из (2.20).

Вообще говоря, у этой системы уравнений могут быть два решения. Причина состоит в том, что предложенное рассмотрение не дает способа различать две стороны поверхности S. Например, в игре преследования в качестве S можно взять границу области захвата. Здесь нас интересуют лишь те случаи, когда x встречает S на пути извне области захвата внутрь ее. Однако игры, оканчивающиеся пересечением S при движении x изнутри, также охватывают широкий круг явлений. В конкретных задачах, как правило, всегда можно высказать некоторые соображения, позволяющие решить, какое из возможных решений следует оставить.

Таким образом определяются $2n$ начальных условий на терминальной поверхности S. После интегрирования уравнений характеристик в регрессивной форме (2.16), (2.17) с полученными начальными условиями определяем $2n$ функций x_j и φ_j от аргументов

$$\tau, s_1, \ldots, s_{n-1}. \qquad (2.22)$$

Затем обращаем первые n функций x_j и выражаем переменные (2.22) как функции x_j. (Иногда эта формальная операция бывает очень сложной, но в большинстве конкретных случаев можно обойти эти трудности.) Далее находим значение игры φ. Для этого достаточно подставить вновь найденные функции в оставшиеся n интегралов, получить $\varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ и, проинтегрировав, найти φ с точностью до постоянного слагаемого, которое определяется с помощью известных значений φ на S. А можно и непосредственно вычислить $\int p dt + F$. Для этого следует подставить x_j и φ_j в $\bar{u}(x, \varphi_x)$ и $\bar{v}(x, \varphi_x)$, полученные из основного уравнения (2.8), и найти оптимальные управляющие переменные. Решение, таким образом, найдено по стандартной схеме решения дифференциальных уравнений (2.16), (2.17).

Однако во многих случаях одного лишь метода решения по вышеизложенной стандартной схеме совершенно недостаточно. Различные случаи особого или так называемого сингулярного поведения решения часто оказываются преобладающе важными. В пространстве игры $\mathcal{E}$ такие явления имеют место, как правило, на поверхностях. Под поверхностью здесь понимается $(n-1)$-мерное многообразие в n-мерном пространстве. Наряду с сингулярными поверхностями встречаются многообразия меньших размерностей.

С увеличением числа рассматриваемых задач быстро возрастает количество различных типов сингулярных поверхностей, причем каждый тип сингулярных поверхностей имеет свою специфику и отличается от других (классификационную схему этих поверхностей мы приведем ниже).

Опыт изучения дифференциальных игр показал, что общий вид типичного решения дифференциальной игры следующий: пространство игры $\mathcal{E}$ разделено некоторым числом сингулярных поверхностей на составляющие области. Внутри каждой области решение может не существовать вовсе, но если оно существует, то непременно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2.16), (2.17) (уравнениям характеристик) с граничными условиями, выполняющимися на сингулярных поверхностях. В каждой такой области решение будет гладким, так что φ принадлежит классу непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций. Оптимальные траектории (пути изображающей точки x в $\mathcal{E}$ при оптимальной игре обеих сторон) — если они в разумном смысле единственны, могут иметь острые углы. Это происходит, только если они пересекают сингулярные поверхности. Кроме того, может случиться, что некоторые области содержат

сингулярные многообразия меньшей размерности, чем $n-1$, или такие многообразия лежат на самих сингулярных поверхностях. На сингулярных поверхностях могут возникать особенности различного вида. В связи с наличием столь большого скопления особенностей трудно представить себе теорему существования, охватывающую все возможные случаи.

В теории дифференциальных игр иногда используется термин «решение в малом» (выше мы рассматривали его), когда речь идет о гладких частях решения, находящихся между сингулярными поверхностями. При выявлении сингулярных поверхностей и объединении гладких частей решения в полное решение во всем пространстве игры $\mathcal{E}$ употребляется термин «решение в большом». Трудно сделать категорическое утверждение об относительной важности фаз решения в большом и в малом. В некоторых задачах решения между сингулярными поверхностями просты, зато сами эти поверхности многочисленны, разнообразны и трудны для отыскания. В других задачах интегрирование по стандартной схеме приводит к сложному семейству траекторий, которые заполняют пространство игры $\mathcal{E}$ с незначительными особенностями в поведении или даже совсем без особенностей.

2.4. СИНГУЛЯРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Как уже отмечалось, существуют две многократно повторяемые стадии при отыскании решения дифференциальных игр. Одна из них, обозначаемая термином «решение в малом», состоит в интегрировании уравнений характеристик в регрессивной форме (2.16), (2.17). Вторая стадия — «решение в большом» состоит в отыскании некоторых сингулярных поверхностей, которые, вообще говоря, разделяют области с различным поведением интегралов уравнений характеристик. Дадим теперь определение сингулярной поверхности.

Сингулярная поверхность есть $(n-1)$-мерное многообразие в пространстве игры $\mathcal{E}$, в точках которого регулярность поведения решения, т. е. интеграла основного уравнения (2.17), нарушается.

Чтобы классифицировать сингулярные поверхности, мы выясним, как ведут себя оптимальные траектории с двух сторон поверхности, поскольку предполагается, что сингулярная поверхность, расположенная внутри пространства *игра* $\mathcal{E}$, разделяет это пространство на две области, по крайней мере в малой окрестности.

Имеются четыре очевидные возможности поведения траектории на каждой поверхности; введем обозначения для каждого из этих возможных случаев: траектории подходят к поверхности (+); траектории покидают поверхность (—); траектории не подходят к поверхности и не покидают ее, т. е. параллельны ей в близких от нее точках (p); траектории отсутствуют (o).

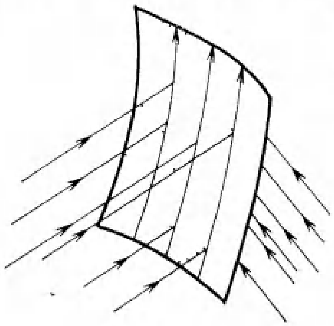

Рис 2.

Поскольку каждое условие может выполняться с любой стороны поверхности, всего существуют 16 различных возможностей, которые будем обозначать двойными индексами, например (—, p).

Далее, сама поверхность может содержать в себе множество траекторий; такой случай будем обозначать символом (w). Например, сингулярная поверхность на рис. 2 есть поверхность типа (+, w, +). Такая классификация сингулярных поверхностей включает 32 возможных случая, однако не все они обязательно встречаются в действительности. Эта классификация исчерпывает все геометрические возможности взаимного расположения поверхностей и оптимальных траекторий. Для большинства задач она вполне достаточна. Тем не менее полное исследование в некоторых случаях требует тонкого подразделения в терминах локальных оптимальных стратегий. Например, из каждой точки сингулярной поверхности типа (—, w, —) исходят три траектории. Оптимальное поведение может состоять в том, чтобы точка x оставалась на поверхности, если она находится на ней, и двигалась по какой-либо из боковых траекторий, если x находится вблизи от поверхности. Возможно, что все три траектории окажутся оптимальными или же оптимальной будет некоторая смешанная стратегия и т. д Далее, случай (o) может означать, что решения не существует или что существует много решений, так что все траектории оптимальны.

Пока что не удалось создать общую теорию, основанную на приведенной классификации. Напротив, способы исследования различных типов сингулярных поверхностей очень сильно отличаются друг от друга. В монографии [4], посвященной дифференциальным играм с полной информацией, исследуются различные типы сингулярных поверхностей и особенности решения на них.

2.5. ПРИМЕР

Игроки I и II управляют движением точки в евклидовой плоскости, причем каждый сообщает ей свою составляющую скорости, величина которой зависит от положения точки, а направление полностью находится в распоряжении игрока. Скорость точки равна векторной сумме этих составляющих.

Игра заканчивается, когда точка достигает оси x; выигрыш равен времени, необходимому для завершения игры, плюс величина $h=x^2_0/8$, где x_0 — абсцисса точки, в которой заканчивается партия.

Если обозначим через $w_1=y$ и $w_2=x+y$ величины составляющих скорости w, которыми управляют соответственно игроки I и II, то получим кинематические уравнения

$$\dot{x}=y\cos u+(x+y)\cos v;\quad \dot{y}=y\sin u+(x+y)\sin v$$

и выигрыш

$$\int_0^T dt+x^2_0/8.$$

Таким образом, для всех x и y мы имеем $p=1$.

Ясно, что если $w_1>w_2$, то игрок I всегда может продолжать игру неограниченно. Поэтому мы будем интересоваться только точками, лежащими в положительном квадранте.

Основное уравнение (2.7) для этой игры будет иметь вид

$$y(\varphi_1\cos\bar{u}+\varphi_2\sin\bar{u})+(x+y)(\varphi_1\cos\bar{v}+\varphi_2\sin\bar{v})=-1. \tag{2.23}$$

Для того чтобы максимизировать первое слагаемое левой части (2.23), мы должны положить

$$\cos\bar{u}=\varphi_1/\sqrt{\varphi^2_1+\varphi^2_2}, \tag{2.24}$$

$$\sin\bar{u}=\varphi_2/\sqrt{\varphi^2_1+\varphi^2_2}, \tag{2.25}$$

а чтобы минимизировать второе слагаемое, положим

$$\cos\bar{v}=-\cos\bar{u}, \tag{2.26}$$

$$\sin\bar{v}=-\sin\bar{u}. \tag{2.27}$$

Если мы подставим эти значения оптимальных управляющих переменных в (2.23), то после упрощения получим

$$\sqrt{\varphi^2_1+\varphi^2_2}=1/x. \tag{2.28}$$

Кроме того,

$$f_{11} = \cos v; \quad f_{12} = \cos u + \cos v;$$
$$f_{21} = \sin v; \quad f_{22} = \sin u + \sin v,$$

и после подстановки в эти выражения соотношений (2.24)—(2.28) получим уравнения траекторий

$$\dot{\varphi}_1 = 1/x; \quad \dot{\varphi}_2 = 0; \quad \dot{x} = -x^2\varphi_1; \quad \dot{y} = -x^2\varphi_2.$$

Если мы вместо прямого времени введем обратное время $\tau = T-t$, то получим уравнения траекторий в обратном времени

$$\mathring{\varphi}_1 = -1/x; \quad \mathring{\varphi}_2 = 0; \quad \mathring{x} = x^2\varphi_1; \quad \mathring{y} = x^2\varphi_2,$$

где $\mathring{\varphi}_1$ — производная φ_1 по τ и т. д.

Кроме того, при $\tau=0$ мы имеем начальные условия, $x=x_0$, $y=0$,

$$\varphi_1 = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \frac{x_0}{4},$$

и, имея в виду (2.28),

$$\varphi_2 = \sqrt{1/x_0^2 - x_0^2/16}.$$

Из этих условий следует, что $x_0 \leqslant 2$; это, в свою очередь, означает, что никакая траектория не заканчивается в точке $x_0 > 2$.

Если мы продифференцируем $\mathring{\varphi}_1$ по τ, то получим

$$\mathring{\mathring{\varphi}}_1 = \mathring{x}/x^2 = \varphi_1.$$

Это уравнение имеет решение

$$\varphi_1 = c_1 e^{\tau} + c_2 e^{-\tau},$$

откуда, в свою очередь,

$$x = (c_2 e^{-\tau} - c_1 e^{\tau})^{-1}.$$

Положив $x_0 = a$, получим

$$x = 8a\left[(4+a^2)e^{-\tau} + (4-a^2)e^{\tau}\right]^{-1},$$
$$\varphi_1 = \frac{4+a^2}{8a}e^{-\tau} - \frac{4-a^2}{8a}e^{\tau}. \tag{2.29}$$

Для того чтобы найти y, заметим, что $\mathring{y}/\mathring{x} = \varphi_2/\varphi_1$, откуда, учитывая, что φ_2 постоянна вдоль любой оптимальной траектории, получаем

$$dy/dx = \varphi_2(0)/\varphi_1.$$

Далее, $\varphi_2(0)$ задано, а φ_1 можно найти как функцию x; это преобразование определяет уравнение

$$dy/dx = x \Big/ \sqrt{\frac{16a^2}{16-a^4} - x^2},$$

решение которого имеет вид

$$y = c_3 - \sqrt{\frac{16a^2}{16-a^4} - x^2}.$$

Учитывая, что $x=a$ при $y=0$, находим c_3. Таким образом, имеем

$$y = \frac{a^3 \pm \sqrt{16a^2 - 16x^2 - a^4x^2}}{\sqrt{16-a^4}}$$

или, что эквивалентно,

$$x^2 + \left(y - \frac{a^3}{\sqrt{16-a^4}}\right)^2 = \frac{16a^2}{16-a^4}; \tag{2.30}$$

иначе говоря, оптимальная траектория представляет собой окружность с центром на оси y (рис. 3).

Значение игры $\varphi(x, y) = \tau + a^2/8$. Можно также найти оптимальные стратегии: оба игрока пытаются двигаться по касательной к окружности (2.30). Игрок I (максимизирующий) направляется вверх (от оси x), игрок II — вниз (к оси x).

Упражнение 1. Как мы теперь знаем, изучение дифференциальных игр с полной информацией включает не только уравнения траекторий (2.14), (2.15), но и так называемые сингулярные поверхности. Рассмотрим игру на полуплоскости $y \geqslant 0$ с терминальной поверхностью $y=0$ и терминальным выигрышем $F(x^*) = 1/(1+x^{*2})$.

Пусть соответствующие кинематические уравнения таковы:

$$\dot{x} = u(1 + 2\sqrt{|x|}) + v, \quad \dot{y} = -1,$$

где управляющие переменные u и v ограничены интервалом [0, 1]. Показать, что ось y есть сингулярная поверхность в том смысле, что оптимальные траектории образуют семейство кривых, которые начинаются на оси y. Что нужно делать в точке на оси y (где встречаются два оптимальных пути)?

Упражнение 2. Кажется весьма правдоподобным, что любая дифференциальная игра с полной информацией и с интегральным или непрерывным терминальным выигрышем должна иметь решение в чистых стратегиях поведения, за исключением, быть может, множества меньшей размерности (сингулярной поверхности). Показать, что это не так.

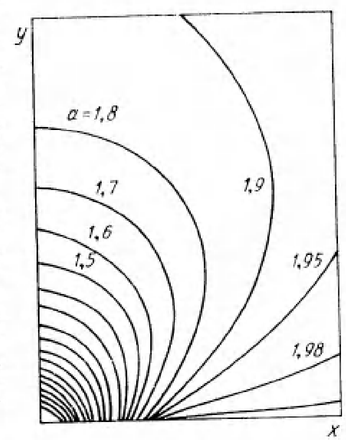

Рис. 3.

Рассмотрим игру на полуплоскости $y \geqslant 0$ с терминальной поверхностью $y=0$ и интегральным выигрышем $\int x\,dt$, кинематические уравнения которой таковы:

$$\dot{x} = (v-u)^2; \quad \dot{y} = -1,$$

где, как и раньше, v и u ограничены интервалом [0, 1]. Показать, что для любой начальной точки (x_0, y_0) значения в чистых стратегиях поведения удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_{\mathrm{I}} \leqslant x_0y_0, \quad \varphi_{\mathrm{II}} \geqslant x_0y_0 + y_0^2/8.$$

Так как $\varphi_I \neq \varphi_{II}$, следовательно, для $y>0$ игра не имеет решения в чистых стратегиях поведения (а также не имеет оптимальных траекторий).

Упражнение 3. Дифференциальная игра называется игрой качества, если она имеет только два возможных исхода, например, выиграть и проиграть (для игрока I). Таким образом, можно представить себе, что терминальная поверхность $\mathscr{E}$ разделена $(n-2)$-мерным многообразием $\mathfrak{K}$ на два множества $\mathscr{W}$ и $\mathscr{L}$. Игрок I пытается закончить игру в $\mathscr{W}$, игрок II — в $\mathscr{L}$.

Вообще говоря, пространство игры R^n будет так разбито на две части, называемые выигрывающей зоной (ВЗ) и проигрывающей зоной (ПЗ), что из точки в ВЗ игрок I может форсировать окончание игры в $\mathscr{W}$, из точки в ПЗ игрок II может форсировать окончание игры в $\mathscr{L}$. Эти две зоны, вообще говоря, разделены поверхностью $\mathscr{N}^0$, которая пересекает $\mathscr{E}$ вдоль $\mathfrak{K}$.

а) В предположении, что $\mathscr{N}^0$—гладкая поверхность, показать, что вектор нормали $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ к $\mathscr{N}^0$ удовлетворяет уравнению

$$\max_u \min_v \sum_i \nu_i f_i(x, u, v) = 0$$

(где ν ориентирован в сторону ВЗ). Вывести для этих игр систему уравнений траекторий, аналогичную (2.14), (2.15).

б) Рассмотреть следующую игру: игроки I и II управляют движением точек $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ соответственно в верхней полуплоскости R^2. Эти две точки могут двигаться в любом направлении со скоростями соответственно $w_1=1$ и $w_2<1$. Игра заканчивается выигрышем игрока I, как только расстояние $\mathscr{P}\mathscr{E}$ становится меньше d; она заканчивается проигрышем игрока I, как только точка $\mathscr{E}$ достигает прямой $y=0$.

в) Вывести кинематические уравнения этой игры, если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ соответственно, а u и v — управляющие переменные; описать множество $\mathfrak{K}$.

г) Решить эту игру.

3. Методы решения некоторых антагонистических дифференциальных игр при отсутствии полной информации

В предыдущей главе были рассмотрены игры с полной информацией. Однако полная информация у игроков может быть не всегда. В общем случае оба игрока не имеют полной информации или иногда один игрок имеет ее, а другой нет. В этих случаях методы решения дифференциальных игр с полной информацией, естественно, неприемлемы, а стратегии поведения $u(x)$ и $v(x)$ игроков I и II не имеют смысла.

В перечисленных случаях неполной информированности все же может существовать решение игры, удовлетворяющее выбранному принципу оптимальности. Например, для игры, в которой отсутствует полная информация о состоянии игры у обоих игроков, может существовать ситуация равновесия при стратегиях $\bar{u}^*(t)$ и $\bar{v}^*(t)$ и значение игры. Достаточные (или необходимые) условия существования решения игры в чистых стратегиях $u(t)$ и $v(t)$ игроков в таком случае рассматриваются в этой главе с помощью такого нового понятия, как идеальная информация, т. е. такая информация, при которой игрок знает стратегию противника на всю игру вперед. Хотя такой случай информированности маловероятен (он имеет место в узком классе игровых задач), с его помощью формализуются достаточные (или необходимые) условия существования решения игры при отсутствии полной информации. Это выглядит, на первый взгляд, парадоксально; но если внимательней рассмотреть этот вопрос, то это не так. Действительно, если существует ситуация равновесия (седловая точка), то взаимная информированность игроков обесценивается. Игроки могут сообщить друг другу свои оптимальные стратегии $\bar{u}^*(t)$ и $\bar{v}^*(t)$ (независимо от того, имели ли они до этого идеальную информацию или нет), результат игры от этого не изменится. Это обстоятельство (свойство ситуации равновесия) и используется для нахождения оптимальных стратегий.

Таким образом, формально можно считать, что оба игрока имеют идеальную информацию и при этом предположении находить достаточные (или необходимые) условия, при которых имеет место принцип седловой точки (т. е. условия, когда $\max\limits_{u(t)} \min\limits_{v(t)}$ равен $\min\limits_{v(t)} \max\limits_{u(t)}$ выигрыша или, другими словами, условия, при которых нижний выигрыш игрока $\mathscr{P}$ равен верхнему проигрышу игрока $\mathscr{E}$). Из этих условий мы будем определять оптимальные стратегии $\bar{u}^*(t)$ и $\bar{v}^*(t)$, которые и являются в этом смысле идеальными. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Существенно, что достаточные (или необходимые) условия существования решения игры при отсутствии полной информации мы будем формулировать не в стратегиях поведения (как это было в гл. 2), а в стратегиях. Как уже указывалось в § 1.4, при некоторых условиях не все смешанные стратегии можно получить, используя стратегии поведения (см. пример § 1.4). Следовательно, игра может не иметь решения в стратегиях поведения, но может иметь решение в стратегиях.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений, записанной в векторной форме

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u,\ v) \qquad (3.1)$$

при начальных условиях $x(t_0)=x_0$, где $x(t)=[x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t)]$ — n-мерная вектор-функция состояния процесса, определенная на отрезке $[t_0,\ t_1]$ (t_1 — время окончания процесса) и обладающая следующими свойствами: 1) функции $x^i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ непрерывны на $[t_0,\ t_1]$ и обладают кусочно-непрерывной производной; 2) при каждом фиксированном t вектор $x(t)$ принадлежит заданной области $B_1(t)$ n-мерного векторного пространства X.

Вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ будем называть управлениями систем $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$; $u(t)=[u^1(t),\ldots,\ u^r(t)]$ — r-мерная, $v(t)=[v^1(t),\ \ldots,\ v^s(t)]$ — s-мерная вектор-функции, заданные на $[t_0,\ t_1]$ и обладающие следующими свойствами: 1) их компоненты $u^\nu(t)$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$, $v^k(t)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ непрерывны всюду на $(t_0,\ t_1)$, кроме конечного числа точек, где они могут иметь разрывы первого рода; 2) при каждом $t\in(t_0,\ t_1)$, $x\in B_1(t)$ вектор $u(t)$ в общем случае принадлежит заданному множеству $Q_1(t,\ x)$, а вектор $v(t)$ — множеству $Q_2(t,\ x)$.

Условия, наложенные на $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, задают множество $V_1(t)$ допустимых значений совокупностей $n+r+s$ чисел $(x^i,\ u^\nu,\ v^k)$ при каждом $t\in(t_0,\ t_1)$, а также область B_1 допустимых значений t, x в $(n+1)$-мерном пространстве $T\times X$ и множество V_1 допустимых совокупностей $n+r+s+1$ чисел $(x^i,\ u^\nu,\ v^k,\ t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$. Функции $f^i(t,\ x,\ u,\ v)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ кусочно-непрерывны на V_1 и при каждом фиксированном t непрерывны на $V_1(t)$.

Пусть управления u и v выбираются так, чтобы оптимизировать некоторый критерий. Если u и v принадле-

жат двум системам $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$, интересы которых в смысле этого выбранного критерия противоположны, то такой управляемый процесс будем называть управляемым процессом при конфликтной ситуации. Противоположность интересов систем состоит в том, что одна из них хочет добиться наименьшего значения критерия к концу процесса t_1, а другая стремится сделать это значение наибольшим. Примем для определенности, что система $\mathcal{P}$ максимизирует критерий, а система $\mathcal{E}$ стремится его минимизировать. Для широкого класса процессов критерий может быть выбран в виде

$$\mathcal{J}=\int_{t_0}^{t_1} p(t,\ x,\ u,\ v)\,dt+F(x_0,\ x_1). \qquad (3.2)$$

Функция $p(t,\ x,\ u,\ v)$ задана, кусочно-непрерывна на V_1 и при каждом фиксированном t непрерывна на $V_1(t)$. Функция $F(x_0,\ x_1)$ непрерывна при всех x_0, x_1, где $x_0=x(t_0)$, $x_1=x(t_1)$.

Система уравнений (3.1), описывающая управляемый процесс, критерий (3.2), область B_1 допустимых значений t, x, множества $Q_1(t,\ x)$, $Q_2(t,\ x)$ допустимых управлений систем $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ заданы в виде априорной или фундаментальной информации об управляемом процессе. Она принимается заранее и при исследовании процесса не меняется. Изменение этой информации равноценно изменению существа исследуемого управляемого процесса. Предполагается, что обе системы имеют фундаментальную информацию.

В теории игр такой управляемый процесс называется дифференциальной игрой, антагонистические системы — игроками, состояние процесса $x(t)$ — состоянием игры, управления систем — чистыми стратегиями игроков, оптимизируемый критерий — платой, а фундаментальная информация — правилами игры.

Таким образом, мы установили правила антагонистической дифференциальной игры и тем самым предложили лишь объект для исследования. Для нахождения оптимальных стратегий игроков необходимо указать для этой игры принцип оптимальности.

Будем придерживаться точки зрения исследователя операций, которого для определенности будем считать принадлежащим системе (игроку) $\mathcal{P}$. Тогда для определения оптимальных стратегий игроков в антагонистической дифференциальной игре с указанными правилами (при отсутствии полной информации) целесообразно принять следующие три принципа оптимальности.

1. Принцип минимакса:

$$\inf_{v(t)\in Q_2}\sup_{u(t)\in Q_1}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ v(t))=\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ \bar{v}(t)),\ \bar{v}(t))=l_1(t_0,\ x_0). \tag{3.3}$$

Допустимые стратегии $\bar{u}_n(t,\ \bar{v}(t))$, $\bar{v}(t)$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ назовем *оптимальной парой стратегий*, если для них выполняется принцип минимакса (3.3). Этот принцип предполагает, что игрок $\mathcal{P}$ тактически информирован, т. е. имеет информацию о конкретном выборе игроком $\mathcal{E}$ стратегии $v(t)$, игрок $\mathcal{E}$ с начала и до конца игры не имеет информации о конкретном выборе игроком $\mathcal{P}$ стратегии $u(t)$. Такую информацию игрока $\mathcal{P}$ назовем идеальной информацией. Заметим, что из идеальной информации игрока $\mathcal{P}$ с учетом (3.1) следует его полная информация, т. е. игрок в каждый момент времени имеет информацию о состоянии игры (если он имеет идеальную память*)). Обратное утверждение неверно. Оптимальной стратегией игрока $\mathcal{E}$ является такая стратегия, которая реализует наилучший результат при наихудшей для игрока $\mathcal{E}$ стратегии идеально информированного игрока $\mathcal{P}$. Здесь сначала фиксируется стратегия $v(t)$ игрока $\mathcal{E}$ и находится максимальное значение функционала $\mathcal{J}$ на множестве стратегий $u(t)$ игрока $\mathcal{P}$:

$$\sup_{u(t)\in Q_1}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ v(t))=\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ v(t)),\ v(t))=d_1(v(t)). \tag{3.4}$$

Оптимальной стратегией игрока $\mathcal{E}$ будет такая стратегия $\bar{v}(t)$, при которой выполняется

$$\inf_{v(t)\in Q_2} d_1(v(t))=\inf_{v(t)\in Q_2}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ v(t)),\ v(t))=\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ \bar{v}(t)),\ \bar{v}(t))=$$
$$=\inf_{v(t)\in Q_2}\sup_{u(t)\in Q_1}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ v(t))=l_1(t_0,\ x_0). \tag{3.5}$$

*) Игроком с идеальной памятью в теории игр называют такого игрока, который помнит, что он делал на всех своих предыдущих ходах или во всех предыдущих состояниях, начиная с начального.

Определенная таким образом стратегия $\bar{v}(t)$ игрока $\mathcal{E}$ дает функционалу значение не больше чем $l_1(t_0,\ x_0)$ при любой стратегии игрока $\mathcal{P}$, и поэтому такая стратегия игрока $\mathcal{E}$ иногда называется *гарантированной*. Значение критерия $l_1(t_0,\ x_0)$ является наилучшим результатом, на который может рассчитывать игрок $\mathcal{P}$, имея дело с «разумным», но тактически не информированным игроком $\mathcal{E}$.

Стратегии игроков $\bar{u}_n(t,\ \bar{v}(t))$, $\bar{v}(t)$ и значение критерия $l_1\ (t_0,\ x_0)$ будем называть решением игры при минимаксном принципе оптимальности.

Достаточные условия существования оптимальных стратегий игроков, удовлетворяющих минимаксному принципу оптимальности, приводятся в § 3.2, необходимые условия — в § 3.3.

2. Принцип максимина:

$$\sup_{u(t)\in Q_1}\inf_{v(t)\in Q_2}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ v(t))=\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}(t),\ \bar{v}_n(t,\ \bar{u}(t)))=l_2(t_0,\ x_0). \tag{3.6}$$

Допустимые стратегии $\bar{u}(t)$, $\bar{v}_n(t,\ \bar{u}(t))$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ назовем *оптимальной парой стратегий*, если для них выполняется принцип максимина (3.6). Этот принцип предполагает, что игрок $\mathcal{P}$ с начала и до конца игры не имеет информации о конкретном выборе игроком $\mathcal{E}$ стратегии $v(t)$, игрок $\mathcal{E}$ тактически информирован, т. е. имеет информацию о конкретном выборе игроком $\mathcal{P}$ стратегии $u(t)$. Такую информацию игрока $\mathcal{E}$ назовем идеальной информацией. В этом случае фиксируется стратегия $u(t)$ игрока $\mathcal{P}$ и находится минимальное значение функционала $\mathcal{J}$ на множестве стратегий $v(t)$ игрока $\mathcal{E}$:

$$\inf_{v(t)\in Q_2}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ v(t))=\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ \bar{v}_n(t,\ u(t)))=d_2(u(t)). \tag{3.7}$$

Тактически не информированный игрок $\mathcal{P}$ должен обеспечить себе наилучший (наихудший для игрока $\mathcal{E}$) результат. Поэтому оптимальной стратегией игрока $\mathcal{P}$ будет такая стратегия $\bar{u}(t)$, при которой выполняется

$$\sup_{u(t)\in Q_1} d_2(u(t))=\sup_{u(t)\in Q_1}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ \bar{v}_n(t,\ u(t)))=$$
$$=\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}(t),\ \bar{v}_n(t,\ \bar{u}(t)))=$$
$$=\sup_{u(t)\in Q_1}\inf_{v(t)\in Q_2}\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ u(t),\ v(t))=l_2(t_0,\ x_0). \tag{3.8}$$

Значение критерия $l_2(t_0, x_0)$ является наилучшим результатом, на который может рассчитывать игрок $\mathcal{E}$, имея дело с «разумным», но тактически не информированным игроком $\mathcal{P}$.

Стратегии игроков $\bar{u}(t)$, $\bar{v}_n(t, \bar{u}(t))$ и значение критерия $l_2(t_0, x_0)$ будем называть *решением игры* при максиминном принципе оптимальности.

Достаточные условия существования оптимальных стратегий игроков, удовлетворяющих максиминному принципу оптимальности, аналогичны по структуре достаточным условиям при минимаксном принципе оптимальности. Нетрудно показать, что

$$\Delta(t_0, x_0) = l_1(t_0, x_0) - l_2(t_0, x_0) \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Действительно, для любых фиксированных $u(t)$ и $v(t)$, по определению точной нижней грани,

$$\inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) \leqslant \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t))$$

и, по определению точной верхней грани,

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) \leqslant \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)).$$

Следовательно,

$$\inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) \leqslant \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)).$$

Поскольку левая часть неравенства не зависит от $v(t)$, заключаем, что

$$\inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{v(t)\in Q_2} \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)).$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не зависит от $u(t)$, имеем

$$\sup_{u(t)\in Q_1} \inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{v(t)\in Q_2} \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)). \tag{3.10}$$

Учитывая (3.3), (3.6), (3.10), приходим к неравенству (3.9).

Если $l_2(t_0, x_0) = l_1(t_0, x_0)$, т. е. имеет место равенство

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}(t), \bar{v}_n(t, \bar{u}(t))) = \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \bar{v}(t)), \bar{v}(t)),$$

то взаимная тактическая информированность игроков не имеет ценности $(\Delta(t_0, x_0) = 0)$. Если

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}(t), \bar{v}_n(t, \bar{u}(t))) < \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \bar{v}(t)), \bar{v}(t)),$$

то взаимная информированность игроков имеет ценность $(\Delta(t_0, x_0) > 0)$ и игрокам следует добиваться тактической информации (и стараться держать ее в секрете от противника).

Минимаксный и максиминный принципы оптимальности игры характеризуются крайним случаем взаимной тактической информированности игроков. Существует класс управляемых процессов при конфликтной ситуации, которым свойствен этот случай. Оптимизация управлений соответствующих систем в этом случае может осуществляться излагаемыми в этой главе методами. Кроме того, эти методы позволяют получить ценность взаимной тактической информированности систем.

3. Принцип седловой точки:

$$\sup_{u(t)\in Q_1} \inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= \inf_{v(t)\in Q_2} \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}^*(t), \bar{v}^*(t)) = l_3(t_0, x_0). \tag{3.11}$$

Допустимые стратегии $\bar{u}^*(t)$, $\bar{v}^*(t)$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ назовем оптимальной парой стратегий, если для них выполняется принцип седловой точки (3.11). Этот принцип, записанный в виде соотношения (3.11), не предполагает, что оба игрока имеют полную информацию. Наоборот, в игре с этим принципом оптимальности предполагается, что оба игрока не имеют полной информации, т. е. не знают состояния игры в каждый момент времени. Кроме того, естественно, предполагается, что игроки с начала и до конца игры не имеют информации о конкретном выборе противником стратегии игры, другими словами, оба игрока тактически не информированы (предполагается, конечно, что оба игрока располагают фундаментальной информацией, включающей в себя начальное состояние игры и время ее окончания).

Значение $l_3(t_0, x_0)$ функционала (3.2), соответствующее оптимальной паре стратегий $\bar{u}^*(t)$, $\bar{v}^*(t)$, будем называть (может быть и неудачно) ценой игры.

При этом принципе оптимальности тактическая информация обоих игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ обесценивается, так как на оптимальных стратегиях имеет место соотношение (3.11) (верхний выигрыш игрока $\mathcal{P}$ равен нижнему проигрышу игрока $\mathcal{E}$). Игроки $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ могут сообщить друг другу свои стратегии $\bar{u}^*(t)$, $\bar{v}^*(t)$, результат игры от этого не изменится (независимо от того, имели ли оба игрока до этого идеальную информацию или нет). Имея в виду это свойство, мы можем записать соотношение

$$\sup_{u(t)\in Q_1} \inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= \inf_{v(t)\in Q_2} \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \bar{v}_n(t)), \bar{v}_n(t, \bar{u}_n(t))) = l_3(t_0, x_0). \quad (3.12)$$

Сравнивая соотношения (3.11) и (3.12), получаем:

$$\bar{u}^*(t) = \bar{u}_n(t, \bar{v}_n(t)), \ \bar{v}^*(t) = \bar{v}_n(t, \bar{u}_n(t)). \quad (3.13)$$

Из равенств (3.13) следует, что если выполняется принцип оптимальности (седловая точка), то формально (обратите внимание — формально!) можно считать, что оба игрока имеют идеальную информацию. Мы еще раз подчеркиваем, что это следует из известного свойства, заключающегося в том, что если имеет место ситуация равновесия, то игроки могут сообщить друг другу свои оптимальные стретегии на всю игру вперед, результат игры от этого не изменится. Это обстоятельство, точнее, равенства (3.13), мы используем для нахождения оптимальных стратегий $\bar{u}^*(t)$ и $\bar{v}^*(t)$.

Для удобства дальнейшего изложения запишем соотношение (3.12) в следующем виде:

$$\sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), \bar{v}_n(t, u(t))) =$$
$$= \inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, v(t)), v(t)) = l_3(t_0, x_0). \quad (3.14)$$

Стратегии игроков $\bar{u}^*(t) = \bar{u}_n(t, \bar{v}_n(t))$, $\bar{v}^*(t) = \bar{v}_n(t, \bar{u}_n(t))$ и цену игры $l_3(t_0, x_0)$ будем называть решением игры при принципе оптимальности — седловая точка.

Достаточные условия существования решения игры при принципе оптимальности — седловой точке и при отсутствии полной информации у игроков рассматриваются в § 3.4, необходимые условия — в § 3.5 (предполагается, естественно, что оба игрока располагают фундаментальной информацией, указанной выше в этом параграфе).

Нетрудно показать, что

$$l_2(t_0, x_0) \leqslant l_3(t_0, x_0) \leqslant l_1(t_0, x_0),$$

т. е. значение функционала (3.2) на оптимальных стратегиях при принципе оптимальности — седловой точке, если отсутствует информированность игроков, всегда находится между значениями этого функционала на опти-

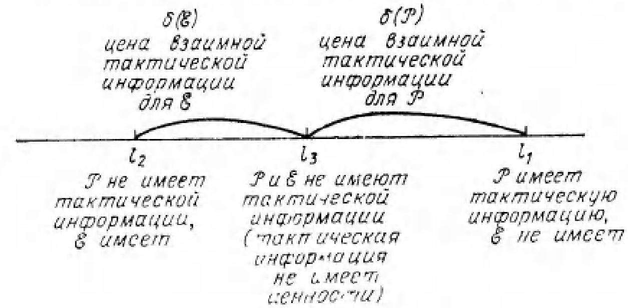

Рис. 4

мальных стретегиях при крайних случаях информированности игроков (предполагается, что l_1, l_2 и l_3 существуют).

Обозначим

$$\begin{aligned} б(\mathcal{P})(t_0, x_0) &= l_1(t_0, x_0) - l_3(t_0, x_0), \\ б(\mathcal{E})(t_0, x_0) &= l_3(t_0, x_0) - l_2(t_0, x_0), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $б(\mathcal{P})(t_0, x_0)$ и $б(\mathcal{E})(t_0, x_0)$ характеризуют ценность взаимной тактической информации игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ соответственно (рис. 4).

Важным частным случаем описания дифференциальной игры является случай, когда стратегии игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ входят раздельно в правые части уравнений (3.1) и в выражение для подынтегральной функции функционала (3.2), т. е. когда функции $f^i(t, x, u, v)$ $(i = 1, 2, \ldots$

$\dots, n)$, $p(t, x, u, v)$ представимы в виде

$$f^i(t, x, u, v) = f^i_1(t, x, u) + f^i_2(t, x, v),$$
$$p(t, x, u, v) = p_1(t, x, u) + p_2(t, x, v). \quad (3.16)$$

Этот случай описания игры в предположении, что игроки имеют полную информацию, и в сочетании с принципом седловой точки является предметом многих исследований в теории дифференциальных игр. Обзор этих игр дан в работах [20, 21]. Достаточные и необходимые условия существования решения игры, описываемой выражением (3.16), при отсутствии полной информации приводятся в § 3.4, 3.5. Эти условия являются частным случаем существования решения для игры, описываемой системой уравнений (3.1).

Помимо приведенных игр могут возникать другие игры, описываемые другими правилами, например игры с нефиксированным временем окончания игры t_1, конечными и интегральными связями, запаздывающим аргументом, изменением во времени информации игроков и т. д. Что касается игр с нефиксированным окончанием времени игры t_1, то полученные в этой книге достаточные условия существования оптимальных стратегий игроков легко обобщаются и на этот случай игр, если воспользоваться теоремой о достаточных условиях абсолютного минимума для задачи с подвижной границей (см. § 3 приложения). Исследования других игр еще далеки до завершения, и поэтому в этой книге не рассматриваются.

В заключение заметим, что в качестве аргумента t модели процесса при конфликтной ситуации может приниматься текущее время, возрастающая фазовая координата или какой-либо другой параметр. Так как успех решения задачи во многом зависит от удачной постановки конкретной задачи, то считаем нецелесообразным для всех случаев заранее рекомендовать какой-либо определенный выбор аргумента (например, время).

Напомним, что в этом параграфе и во всех последующих введены следующие обозначения: $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ - оптимальные стратегии игроков при отсутствии информации о состоянии игры и стратегии противника, $\bar{u}_n(t)$, $\bar{v}_n(t)$ — оптимальные стратегии игроков при идеальной информации.

Далее везде, где это не искажает физического смысла задачи, будем придерживаться терминологии теории

игр и называть управляемый процесс при конфликтной ситуации игрой, комплексные управляемые системы — игроками, фазовые координаты процесса — состоянием игры, а управления систем — стратегиями игроков.

3.2. ПЕРВЫЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ ПРИ МИНИМАКСНОМ ПРИНЦИПЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

При любой фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$ и начальных условиях $x(t_0) = x_0$ состояние игры (3.1) и значение функционала (3.2) зависят только от стратегии $u(t)$ игрока $\mathcal{P}$. Учитывая это, будем решать поставленную задачу последовательно в два этапа.

На первом этапе определим стратегию $\bar{u}_n(t, v(t))$ игрока $\mathcal{P}$, доставляющую максимум функционалу (3.2) при любой фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$. В результате решения первого этапа в зависимости от применяемого формализма получим систему необходимых или достаточных условий максимума функционала (3.2) по стратегии $u(t)$ при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$. Эта система условий и максимальное значение (3.4) функционала (3.2) зависят только от фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$. Поэтому задача второго этапа заключается в том, чтобы при обеспечении условий максимума (3.4) функционала (3.2), полученных после первого этапа решения, выбрать такую стратегию $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$, которая доставляла бы функционалу (3.4) минимум (3.5).

При изложении формализма используется теорема 1 о достаточных условиях абсолютного минимума (см. § 2 приложения). Легко показать, что эта теорема справедлива для всех функций, обладающих перечисленными в § 3.1 свойствами.

Обозначим через $D_1(v(t))$ совокупность всех вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, обладающих перечисленными в § 3.1 свойствами и удовлетворяющих уравнению (3.1) при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$.

Задача первого этапа формализма ставится следующим образом: на множестве $D_1(v(t))$ вектор-функций $x(t)$, $u(t)$ найти такие вектор-функции $\bar{x}(t)$, $\bar{u}_n(t)$, на которых функционал $\mathcal{I}$ имел бы наибольшее значение. Может оказаться, что такие вектор-функции в классе $D_1(v(t))$ отсутствуют. Тогда ставится задача найти последовательность $\{\bar{x}_\beta(t), \bar{u}_{n\beta}(t)\}\subset D_1(v(t))$, такую, чтобы функционал (3.2) на этой последовательности при $\beta\to\infty$ стремился к своей верхней грани на множестве $D_1(v(t))$. Предполагаем, что в классе $D_1(v(t))$ существуют требуемые $\bar{x}(t)$, $\bar{u}_n(t)$. В теории оптимальных процессов такие функции называют абсолютной максималью.

Пусть $B_1(t)$ при $t\in(t_0, t_1)$ совпадает с пространством X, а при $t=t_0$ есть точка $x=x_0$; пусть $F(x_0, x_1)$ не зависит от x_0.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi^{(1)}(t, x)$, непрерывную при всех t, x и обладающую непрерывными частными производными $\varphi_t^{(1)}$, $\varphi_x^{(1)}=(\varphi_{x^1}^{(1)}, \ldots, \varphi_{x^n}^{(1)})$ при всех t, x, за исключением конечного числа множеств $t=\mathrm{const}$ пространства (t, x). Построим функции

$$\Phi_1(x_1)=F(x_1)+\varphi^{(1)}(t_1, x_1)-\varphi^{(1)}(t_0, x_0), \qquad (3.17)$$

$$R_1(t, x, u, v(t))=\varphi_x^{(1)}f(t, x, u, v(t))-$$
$$-p(t, x, u, v(t))+\varphi_t^{(1)}, \qquad (3.18)$$

$$\mu_1(t, v(t))=\inf_{(x,u)\in V_1(t)} R_1(t, x, u, v(t)),\ v(t)\in Q_2. \qquad (3.19)$$

В правой части (3.19) векторы x и u считаются независимыми. Функции (3.17)—(3.19) аналогичны функциям (8)—(10) приложения, но с учетом уравнений (3.1) и того обстоятельства, что ищется абсолютный максимум функционала (3.2) при фиксированной стратегии $v(t)\in Q_2$. Вследствие этого в (3.19) поставлен символ inf.

Построим функцию

$$P_1(t, x, v(t))=\inf_{u\in Q_1(t,x)} R_1(t, x, u, v(t)) \qquad (3.20)$$

и постараемся подобрать $\varphi^{(1)}(t, x)$ так, чтобы P_1 не зависела от x, т. е.

$$P_1(t, x, v(t))\equiv\inf_{u\in Q_1(t,x)}[\varphi_x^{(1)}f(t, x, u, v(t))-$$
$$-p(t, x, u, v(t))+\varphi_t^{(1)}]=W(t, v(t)). \qquad (3.21)$$

Тогда $P_1(t, x, v(t))=W(t, v(t))=\mu_1(t, v(t))$ в любой точке пространства X. Обозначим через $\bar{u}_n(t, x, v(t))$ значение u, при котором $R_1(t, x, u, v(t))$ имеет минимум в точке (t, x) при фиксированной стратегии $v(t)\in Q_2$, т. е.

$$R_1(t, x, \bar{u}_n(t, x, v(t)), v(t))=P_1(t, x, v(t)), \qquad (3.22)$$

и через $\bar{x}(t)$ — решение системы

$$\dot{x}=f(t, x, \bar{u}_n(t, x, v(t)), v(t)) \qquad (3.23)$$

при начальном условии $x(t_0)=x_0$, а $\bar{u}_n(t, v(t))=\bar{u}_n(t, \bar{x}(t), v(t))$. Пара вектор-функций $(\bar{x}(t), \bar{u}_n(t, v(t)))$ принадлежит классу $D_1(v(t))$ и удовлетворяет условию 1 теоремы 1 приложения. Для того чтобы эта пара удовлетворяла условию 2 той же теоремы, т. е. была абсолютной максималью при фиксированной стратегии $v(t)\in Q_2$, достаточно потребовать, чтобы

$$F(x)+\varphi^{(1)}(t_1, x)=0, \qquad (3.24)$$

т. е. чтобы при $t=t_1$ функция $F+\varphi^{(1)}$ не зависела от x.

Таким образом, если удается подобрать функцию $\varphi^{(1)}(t, x)$ так, чтобы $\inf\limits_u R_1$ не зависел от x при фиксированной стратегии $v(t)\in Q_2$, точнее, если удается решить уравнение (3.21) в частных производных при краевом условии (3.24), то поставленная задача первого этапа формализма решается полностью: $\bar{u}_n(t, x, v(t))$ находится из (3.21), функции $x(t)$ определяются системой уравнений (3.23).

Решением изложенного выше первого этапа обычно завершаются задачи оптимальных процессов. Однако мы рассматриваем игру при минимаксном принципе оптимальности (3.3). Поэтому конечная цель исследования заключается в том, чтобы определить стратегии игроков, удовлетворяющие этому принципу, или, что то же, найти оптимальную стратегию игрока $\mathcal{Y}$ при наихудшей для него стратегии $\bar{v}(t)$ игрока $\mathcal{E}$.

Для того чтобы завершить подготовку к постановке формализованной задачи второго этапа решения, необходимо преобразовать условия (3.21), (3.24) и определить точную верхнюю границу функционала (3.2) при фиксированной стратегии $v(t)\in Q_2$, т. е. определить значение (3.4). Назовем условия (3.21), (3.24) достаточными условиями абсолютного максимума функционала $\mathcal{J}$

при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$. Если известен вид функции $\varphi^{(1)}(t, x)$, такой, что $\inf\limits_u R_1$ не зависит от x, точнее, если известно заранее, что функцию $\varphi^{(1)}(t, x)$ можно представить в виде $\varphi^{(1)} = \gamma(t, x, \psi)$, где $\psi = \{\psi^\nu(t)\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, \mu$ — некоторая вектор-функция, а $\gamma(t, x, \psi)$ — заданная непрерывная дифференцируемая функция своих аргументов и такая, что $\inf\limits_u R_1$ не зависит от x, то уравнение (3.21) в частных производных при краевом условии (3.24) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi^\nu}{dt} = h^\nu(t, \psi, v) \qquad (3.25)$$

с начальными условиями, определяемыми из (3.24).

Проиллюстрируем это на примере. Пусть

$$f^1(t, x, u, v) = u e^{-x^{(1)}} + e^{-x^{(2)}}, \quad f^2(t, x, u, v) = v,$$
$$p(t, x, u, v) = e^{x^{(1)} - x^{(2)}} + tv x^{(2)}, \quad F(x_1) =$$
$$= -e^{x_1^{(1)}} - x_1^{(2)}; \ |u(t)| \leqslant U.$$

Тогда

$$P_1(t, x, v(t)) = R_1(t, x, \bar{u}_n, v(t)) = \inf_u [\varphi^{(1)}_{x^{(1)}} (u e^{-x^{(1)}} +$$
$$+ e^{-x^{(2)}} + \varphi^{(1)}_{x^{(2)}} v(t) - e^{x^{(1)} - x^{(2)}} - tv(t) x^{(2)} + \varphi^{(1)}_t]. \qquad (3.26)$$

Возьмем функцию $\varphi^{(1)}(t, x)$ следующего вида:

$$\varphi^{(1)}(t, x) = \psi^{(1)}(t) e^{x^{(1)}} + \psi^{(2)}(t) x^{(2)}. \qquad (3.27)$$

Покажем, что для этой функции уравнение в частных производных (3.21) превращается в обыкновенные дифференциальные уравнения относительно функций $\psi^{(1)}(t)$ и $\psi^{(2)}(t)$.

Подставим выражение (3.27) для функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ в (3.24) и (3.26), получим

$$P_1(t, x, v(t)) = \inf_u [\psi^{(1)} e^{x^{(1)}} (u e^{-x^{(1)}} + e^{-x^{(2)}}) +$$
$$+ \psi^{(2)} v(t) - e^{x^{(1)} - x^{(2)}} - tv(t) x^{(2)} + \dot{\psi}^{(1)} e^{x^{(1)}} + \dot{\psi}^{(2)} x^{(2)}] =$$
$$= (\psi^{(1)} - 1) e^{x^{(1)} - x^{(2)}} + \psi^{(2)} v(t) + \dot{\psi}^{(1)} e^{x^{(1)}} + (\dot{\psi}^{(2)} - tv(t)) x^{(2)} +$$
$$+ \inf_u [\psi^{(1)} u],$$

$$F(x) + \varphi^{(1)}(t_1, x) = -e^{x^{(1)}} - x^{(2)} + \psi^{(1)}(t_1) e^{x^{(1)}} + \psi^{(2)}(t_1) x^{(2)} =$$
$$= (\psi^{(1)}(t_1) - 1) e^{x^{(1)}} + (\psi^{(2)}(t_1) - 1) x^{(2)}.$$

Для того чтобы удовлетворить (3.21) при краевом условии (3.24), достаточно выполнить следующие условия:

$$\frac{d\psi^{(1)}}{dt} = 0, \quad \psi^{(1)}(t_1) = 1, \quad \psi^{(1)}(t) \equiv 1,$$
$$\frac{d\psi^{(2)}}{dt} = tv, \quad \psi^{(2)}(t_1) = 1. \qquad (3.28)$$

Таким образом, при $\varphi^{(1)}(t, x)$, вид которой задан выражением (3.27), уравнение в частных производных (3.21) при краевом условии (3.24) превратилось в обыкновенные дифференциальные уравнения (3.28). При этом $\bar{u}_n(t) = -U$ и, следовательно,

$$P_1(t, x, v(t)) = R_1(t, x, \bar{u}_n, v(t)) = W(t, v(t)) = -U + \psi^{(2)} v(t).$$

В частном случае, когда $\varphi^{(1)}(t, x)$ может быть представлена в виде многочлена от x, функции $\psi^\nu(t)$ являются коэффициентами, при различных степенях этого многочлена зависящими от времени. Заметим, что если функция $\varphi^{(1)}(t, x)$ может быть представлена в виде многочлена, то из этого следует, что $F(x_1)$ есть также многочлен, степень которого не выше степени $\varphi^{(1)}(t, x)$. «Начальные» условия для системы (3.25) $\psi_1^\nu = \psi^\nu(t_1)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \mu$) определяются из (3.24).

При выполнении условий (3.21), (3.24), которые являются достаточными условиями абсолютного максимума функционала (3.2) при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$, максимальное значение функционала $\mathcal{J}$ равно

$$d_1(v(t)) = \sup_{u(t) \in Q_1} \mathcal{J}(x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= -\varphi^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0) - \int_{t_0}^{t_1} W(t, \psi, v)\, dt. \qquad (3.29)$$

В самом деле, запишем для нашей задачи определенный на расширенном множестве функционал (см. (13) приложения)

$$L_1 = \Phi_1(x_1) - \int_{t_0}^{t_1} R_1(t, x, u, v)\, dt. \qquad (3.30)$$

На множестве $D(v(t))$:

$$L_1 = \mathcal{J}. \qquad (3.31)$$

Предположим, что первый этап формализма решен. Это значит, что подобрана функция $\varphi^{(1)}(t, x, \psi)$, удовлетворяющая достаточным условиям (3.21), (3.24). Тогда

$$\sup_{x_1 \in B_1(t_1)} \Phi_1(x_1) = -\varphi^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0), \qquad (3.32)$$

$$\inf_{(x, u) \in V_1(t)} R_1(t, x, u, v(t)) = \mu_1(t, v(t)) = W(t, \psi, v). \qquad (3.33)$$

С учетом (3.32) и (3.33), функционал (3.30) принимает абсолютное максимальное значение. Так как на множестве $D(v(t))$ имеет место равенство $L_1 = \mathcal{J}$, а при выполнении достаточных условий (3.21), (3.24) абсолютная максималь принадлежит этому множеству, то согласно лемме из приложения максимальные значения функционалов L_1 и $\mathcal{J}$ равны. Следовательно, имеет место равенство (3.29).

Задача второго этапа формализма, как уже указывалось выше, заключается в следующем: при обеспечении достаточных условий (3.21), (3.24) абсолютного максимума функционала $\mathcal{J}$ при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ выбрать такую стратегию $\bar{v}(t)$ игрока $\mathcal{E}$, которая доставляла бы функционалу (3.29) абсолютный минимум, т. е., иными словами, выполнялось равенство (3.5).

Рассмотрим задачу об абсолютном минимуме функционала (3.29) при условии, что вектор-функции $x(t)$, $\psi(t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v), \qquad (3.34)$$

$$\dot{\psi} = h(t, \psi, v) \qquad (3.35)$$

при начальных условиях

$$x(t_0) = x_0, \quad \psi(t_1) = \psi_1. \qquad (3.36)$$

Уравнения (3.34) суть уравнения, описывающие состояние игры при стратегии $\bar{u}_n(t, x, \psi, v)$ игрока $\mathcal{P}$, которая доставляет максимум функционалу $\mathcal{J}$ при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$. Векторное уравнение (3.35) при $\psi(t_1) = \psi_1$ является достаточным условием, обеспечивающим абсолютный максимум функционала $\mathcal{J}$ по стратегии игрока $\mathcal{P}$ на множестве $D_1(v(t))$.

Решение уравнений (3.34), (3.35) при начальных условиях (3.36) зависит теперь только от стратегии $v(t)$ игрока $\mathcal{E}$. Значение функционала (3.29) зависит от стратегии $v(t)$ игрока $\mathcal{E}$ и не зависит от состояния

игры x (x_0 задано правилами игры). Поэтому достаточно решить задачу об абсолютном минимуме функционала (3.29) при условии, что вектор-функции $\psi(t)$, $v(t)$ удовлетворяют уравнению (3.35). Если последняя задача решена, т. е. если на допустимом множестве пар $\psi(t)$, $v(t)$ найдена такая пара $\psi(t)$, $\bar{v}(t)$, на которой функционал (3.29) принимает наименьшее значение, то уравнения (3.34) решаются отдельно.

В (3.29), (3.35) вектор-функция $\psi(t)$ определена на отрезке $[t_0, t_1]$ и обладает следующими свойствами: ее компоненты $\psi^\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$ и обладают кусочно-непрерывной производной; при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$ вектор $\psi(t)$ принадлежит области $B_2(t)$ μ-мерного векторного пространства ψ.

Условия, наложенные на $\psi(t)$ и $v(t)$, задают множество $V_2(t)$ допустимых значений совокупностей $\mu + s$ чисел (ψ^ν, v^k) при каждом $t \in (t_0, t_1)$, а также область B_2 допустимых значений (t, ψ) в $(\mu+1)$-мерном пространстве t, ψ и множество V_2 допустимых совокупностей $\mu + s + 1$ чисел (ψ^ν, v^k, t) $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu;\ k = 1, 2, \ldots, s)$. Предполагается, что функции $h^\nu(t, \psi, v)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$, а также функция $W(t, \psi, v)$, фигурирующая в (3.29), кусочно-непрерывны на V_2 и при каждом фиксированном t непрерывны на $V_2(t)$.

Совокупность всех вектор-функций $\psi(t)$ и $v(t)$, обладающих перечисленными выше свойствами и удовлетворяющих уравнениям (3.35), обозначим через D_2.

Задачу второго этапа решения теперь можно сформулировать следующим образом: на множестве D_2 вектор-функций $\psi(t)$, $v(t)$ найти такие вектор-функции $\psi(t)$, $\bar{v}(t)$, на которых функционал (3.29) имел бы наименьшее значение.

Приступим ко второму этапу решения задачи. Пусть $B_2(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ совпадает с пространством ψ, а при $t = t_1$ есть точка $\psi = \psi_1$. Вследствие принятой информированности вектор $v(t)$ принадлежит заданному множеству $Q_2(t)$.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi^{(2)}(t, \psi)$, непрерывную при всех t, ψ и обладающую непрерывными частными производными $\varphi_t^{(2)}$, $\varphi_\psi^{(2)} = (\varphi_{\psi^1}^{(2)}, \ldots, \varphi_{\psi^\mu}^{(2)})$ при всех t, ψ, за исключением конечного числа множеств $t = \mathrm{const}$ пространства (t, ψ). Построим следующие функции:

$$\Phi_2(\psi_0) = -\varphi^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0) + \varphi^{(2)}(t_1, \psi_1) - \varphi^{(2)}(t_0, \psi_0), \quad (3.37)$$

$$R_2(t, \psi, v) = \varphi_\psi^{(2)} h(t, \psi, v) + W(t, \psi, v) + \varphi_t^{(2)}, \quad (3.38)$$

$$\mu_2(t) = \sup_{(\psi, v) \in V_2(t)} R_2(t, \psi, v). \quad (3.39)$$

В правой части (3.39) векторы ψ и v рассматриваются как независимые.

Введем функцию

$$P_2(t, \psi) = \sup_{v \in Q_2(t)} R_2(t, \psi, v) \quad (3.40)$$

и постараемся подобрать $\varphi^{(2)}(t, \psi)$ так, чтобы P_2 не зависела от ψ, т. е.

$$P_2(t, \psi) \equiv \sup_{v \in Q_2(t)} [\varphi_\psi^{(2)} h(t, \psi, v) + W(t, \psi, v) + \varphi_t^{(2)}] = c_1(t), \quad (3.41)$$

где $c_1(t)$ — кусочно-непрерывная функция. Тогда $P_2(t, \psi) = \mu_2(t)$ в любой точке пространства Ψ. Обозначим через $\bar{v}(t, \psi)$ то значение v, при котором $R_2(t, \psi, v)$ достигает супремума в точке (t, ψ), т. е.

$$R_2(t, \psi, \bar{v}) = P_2(t, \psi), \quad (3.42)$$

и через $\psi(t)$ — решение системы

$$\dot{\psi} = h(t, \psi, \bar{v}(t, \psi)) \quad (3.43)$$

при начальном условии $\psi(t_1) = \psi_1$, а $\bar{v}(t) = \bar{v}(t, \bar{\psi}(t))$.

Пара вектор-функций $(\bar{\psi}(t), \bar{v}(t))$ принадлежит классу D_2 и удовлетворяет условию 1 теоремы 1 § 2 приложения. Для того чтобы эта пара удовлетворяла условию 2 той же теоремы, т. е. была абсолютной минималью для функционала (3.29), достаточно потребовать (3.37), чтобы

$$\varphi^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0) + \varphi^{(2)}(t_0, \psi_0) = c_2 = \mathrm{const}, \quad (3.44)$$

т. е. чтобы при $t = t_0$ функция $\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$ не зависела от ψ. Таким образом, если удается подобрать функцию $\varphi^{(2)}(t, \psi)$ так, чтобы $\sup_v R_2$ не зависел от ψ, точнее, если удается решить уравнение (3.41) в частных производных при краевом условии (3.44), то поставленная задача второго этапа формализма, а следовательно, и вся задача определения оптимальных стратегий игроков

при минимаксном принципе оптимальности решается полностью.

Если подобраны функции $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ по выше изложенному формализму, то оптимальная стратегия $\bar{v}(t, \bar{\psi})$ игрока $\mathcal{E}$ находится из (3.42), функция $\bar{\psi}(t)$ — из (3.43), оптимальная стратегия $\bar{u}_n(t, x, \bar{v}(t))$ игрока $\mathcal{Y}$ — из (3.22) с последующей подстановкой оптимальной стратегии $\bar{v}(t)$ игрока $\mathcal{E}$ в полученное для $\bar{u}_n(t, x, v(t))$ выражение.

Легко показать, что при $c_2 = 0$ значение функционала $\mathcal{Y}$ на оптимальных стратегиях игроков равно $l_1(x_0) = \varphi^{(2)}(t_1, \psi_1)$.

Трудности нахождения оптимальных стратегий игроков на основе достаточных условий абсолютного минимакса функционала (3.2) очевидны. Из изложенного ясно: если удастся подобрать функции $\varphi^{(1)}(t, x, \psi)$ и $\varphi^{(2)}(t, \psi)$, удовлетворяющие перечисленным условиям, то задача решается до конца. В некоторых практических задачах подобрать эти функции возможно. Этот подбор является искусством исследователя операций и зависит от сложности модели, описывающей процесс игры. Однако в общем случае не только неизвестны методы подбора таких функций, но и сам факт их существования. Поэтому для решения сложных инженерных задач необходимо разрабатывать приближенные методы решения, базирующиеся на достаточных условиях абсолютного минимакса функционала (3.2).

3.3. ВТОРОЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ ПРИ МИНИМАКСНОМ ПРИНЦИПЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Условия теоремы 1 § 2 приложения требуют, чтобы функция R имела максимум (минимум) только в точках минимали (максимали). Поэтому на первом этапе формализма мы будем искать частные производные $\varphi^{(1)}(t, x)$ в точках максимали

$$\psi_i(t) = \varphi_{x^i}^{(1)}(t, \bar{x}(t)), \; i = 1, 2, \ldots, n, \quad (3.45)$$

совместно с самой максималью $(\bar{x}(t), \bar{u}_n(t))$ при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$.

Предположим, что область $B_1(t)$ открыта при всех $t \in (t_0, t_1)$, а при $t = t_0$ и $t = t_1$ является заданной точкой

$x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$; множества Q_1 и Q_2 зависят только от t. Кроме того, положим, что функции $f^i(t, x, u, v(t))$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ непрерывны и дифференцируемы при всех t, x, u, а $\varphi^{(1)}(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точках предполагаемой максимали $\bar{x}(t)$ при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$. Тогда в качестве необходимых условий минимума функции $R_1(t, x, u, v(t))$ (3.18) будем иметь

$$R_{1x^k}(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) = \varphi^{(1)}_{xx^k} f(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) +$$
$$+ \varphi^{(1)}_x f_{x^k}(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) - p_{x^k}(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) + \varphi^{(1)}_{tx^k} =$$
$$= 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \varphi^{(1)}_x f(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) - p(t, \bar{x}, \bar{u}_n,$$
$$v(t)) = \inf_{u \in Q_1(t)} [\varphi^{(1)}_x f(t, \bar{x}, u, v(t)) - p(t, \bar{x}, u, v(t))]. \qquad (3.46)$$

Учитывая (3.45) и равенство $f(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) = \dot{\bar{x}}$, $(\bar{x}(t), \bar{u}_n(t)) \in D_1(v(t))$, получаем

$$R_{1x^k}(t, \bar{x}(t), \bar{u}_n(t), v(t)) \equiv \frac{d}{dt} \psi_k + H_{1x^k} = 0, \qquad (3.47)$$

$$H_1(t, \psi(t), \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) = \inf_{u \in Q_1(t)} H_1(t, \bar{x}(t), u, v(t)), \qquad (3.48)$$

где $\psi(t) = \left. \frac{\partial \varphi^{(1)}(t, x)}{\partial x} \right|_{x = \bar{x}(t)}$ — градиент функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ в пространстве X в точке $x = \bar{x}(t)$;

$$H_1(t, x, u, v(t)) = \psi(t) f(t, x, u, v(t)) - p(t, x, u, v(t)). \qquad (3.49)$$

Условия (3.47) и (3.48) совместно с (3.1) содержат $2n+r$ уравнений для $2n+r$ неизвестных функций $x^i(t)$, $\psi_i(t)$, $u^\nu_n(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, r)$. Совместно с краевыми условиями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ эти уравнения задают экстремаль, т. е. пару $(\bar{x}(t), \bar{u}_n(t)) \in D_1(v(t))$, удовлетворяющую необходимым условиям (3.46) супремума $R_1(t, x, u, v(t))$ при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$, и вектор-функцию $\psi(t)$, или в силу (3.49) градиент функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ в точках экстремали.

Во всех точках пространства $T \times X$, не лежащих на экстремали, функция $\varphi^{(1)}(t, x)$ может задаваться произвольно. Если существует такая функция $\varphi^{(1)}(t, x)$, что

на экстремали $(\bar{x}(t), \bar{u}_n(t))$ выполняются не только необходимые, но и достаточные условия минимума $R_1(t, x, u, v(t))$ при каждом фиксированном $t \in (t_0, t_1)$, то в силу теоремы 1 § 2 приложения экстремаль $(\bar{x}(t), \bar{u}_n(t))$ есть абсолютная максималь при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$. Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть функции $\bar{x}(t)$, $\bar{u}_n(t)$, $\psi(t)$ являются решением системы уравнений (3.1), (3.47), (3.48). Для того чтобы экстремаль $(\bar{x}(t), \bar{u}_n(t))$ была абсолютной максималью функционала (3.2) при фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$, достаточно существования такой функции $\varphi^{(1)}(t, x)$, определенной и непрерывной при всех $t \in [t_0, t_1]$, $x \in B_1(t)$, $v(t) \in Q_2$, дважды дифференцируемой по x при всех $x \in B_1(t)$, $v(t) \in Q_2$, $t \in [t_0, t_1]$, кусочно-дифференцируемой по t, чтобы

$$\varphi^{(1)}_{x^i}[t, \bar{x}(t)] = \psi_i(t), \ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.50)$$

$$R_1(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v(t)) = \inf_{(x, u) \in V_1(t)} R_1(t, x, u, v(t)), \ t \in (t_0, t_1).$$

При этом выражение (3.4) для верхней грани функционала $\mathcal{J}$ будет иметь следующий вид:

$$d_1(v(t)) = F(x_1) + \int_{t_0}^{t_1} p(t, \bar{x}, \bar{u}_n, v)\, dt. \qquad (3.51)$$

В (3.51) $\bar{x}(t)$, $\bar{u}_n(t)$ должны удовлетворять условиям (3.1), (3.47), (3.48) и краевым условиям

$$x(t_0) = x_0; \qquad x(t_1) = x_1. \qquad (3.52)$$

Таким образом, в этом формализме достаточные условия (3.21), (3.24) первого формализма заменяются необходимыми условиями (3.47), (3.48) при краевых условиях (3.52).

При выполнении необходимых условий (3.47), (3.48) решение системы (3.1), (3.47), (3.48) и значение $d_1(v(t))$ зависит только от стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$. Поэтому на втором этапе формализма необходимо решать задачу о минимуме функционала

$$d_1(v(t)) = F(x_1) + \int_{t_0}^{t_1} p[t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v]\, dt \qquad (3.53)$$

при условии, что вектор-функции $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют системе $2n$ дифференциальных уравнений;

$$\dot{x}^i = f^i[t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v], \quad \dot{\psi}_i = \\ = -H_{1x^i}[t, x, \psi, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.54}$$

при граничных условиях (3.52). В (3.53), (3.54) $\bar{u}_n(t, x, \psi, v)$ определяется из (3.48).

Для второго этапа формализма функции Φ_2 и R_2 имеют вид

$$\Phi_2(\psi_0, \psi_1) = F(x_1) + \varphi^{(2)}(t_1, x_1, \psi_1) - \varphi^{(2)}(t_0, x_0, \psi_0), \tag{3.55}$$

$$R_2(t, x, \psi, v) = \varphi_x^{(2)} f[t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v] - \\ - \varphi_\psi^{(2)} H_{1x}[t, x, \psi, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v] - \\ - p[t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v] + \varphi_t^{(2)}. \tag{3.56}$$

Повторно используем теперь метод Лагранжа—Понтрягина, т. е. будем находить частные производные $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$ в точках минимали

$$\alpha_i(t) = \varphi_{x^i}^{(2)}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t)), \tag{3.57}$$

$$\beta_i(t) = \varphi_{\psi_i}^{(2)}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

совместно с самой минималью $(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{v}(t))$ для функционала (3.53) или, что то же, минимаксималью для функционала (3.2).

Предположим, что область $B_3(t)$ допустимых значений ψ открыта при всех $t \in [t_0, t_1]$; функции

$$f^i[t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v], \quad H_{1x^i}[t, x, \psi, \bar{u}_n \times \\ \times (t, x, \psi, v), v], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

непрерывны и дифференцируемы при всех t, x, ψ, v; функция $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$ дважды непрерывно дифференцируема в точках предполагаемой минимали $\bar{x}(t)$, $\bar{\psi}(t)$. Тогда в качестве необходимых условий максимума R_2 будем иметь

$$R_{2x^k}(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}) = \varphi_{xx^k}^{(2)} f[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] + \\ + \varphi_x^{(2)} f_{x^k}[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] - \\ - \varphi_{\psi x^k}^{(2)} H_{1x}[t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] - \\ - \varphi_\psi^{(2)} H_{1xx^k}[t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] -$$

$$- p_{x^k}[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] + \varphi_{tx^k}^{(2)} = 0,$$

$$R_{2\psi^k}(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}) = \varphi_{x\psi^k}^{(2)} f[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] + \\ + \varphi_x^{(2)} f_{\psi^k}[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] - \varphi_{\psi\psi^k}^{(2)} \times \\ \times H_{1x}[t, \bar{x}, \bar{\psi}, u_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] - \varphi_\psi^{(2)} H_{1x\psi^k} \times \\ \times [t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] - p_{\psi^k}[t, \bar{x}, \bar{u}_n \times \\ \times (t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] + \varphi_{t\psi^k}^{(2)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\varphi_x^{(2)} f[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] - \varphi_\psi^{(2)} H_{1x}[t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{u}_n \times \\ \times (t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] - p[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}] = \sup_{v \in Q_2(t)} \times \\ \times \{\varphi_x^{(2)} f[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, v)] - \varphi_\psi^{(2)} H_{1x}[t, \bar{x}, \bar{\psi}, \\ \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, v) v] - p[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, v), v]\}. \tag{3.58}$$

Учитывая (3.57) и равенства $f[t, \bar{x}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] = \dot{\bar{x}}$, $H_{1x}[t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{u}_n(t, \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}), \bar{v}] = -\dot{\bar{\psi}}$, получаем

$$R_{2x^k}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{v}(t)) \equiv \frac{d}{dt}\alpha_k + H_{2x^k} = 0,$$

$$R_{2\psi^k}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{v}(t)) \equiv \frac{d}{dt}\beta_k + H_{2\psi^k} = 0, \tag{3.59}$$

$$H_2(t, \alpha(t), \beta(t), \bar{x}, \bar{\psi}, \bar{v}) = \sup_{v \in Q_2(t)} H_2(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), v), \tag{3.60}$$

где

$$\alpha(t) = \left. \frac{\partial \varphi^{(2)}(t, x, \psi)}{\partial x} \right|_{\substack{x = \bar{x}(t) \\ \psi = \bar{\psi}(t)}};$$

$$\beta(t) = \left. \frac{\partial \varphi^{(2)}(t, x, \psi)}{\partial \psi} \right|_{\substack{x = \bar{x}(t) \\ \psi = \bar{\psi}(t)}}$$

составляющие градиента функции $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$ в пространстве $X \times \Psi$ в точке $(x = \bar{x}(t), \psi = \bar{\psi}(t))$;

$$H_2(t, x, \psi, v) = \alpha(t) f[t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v] - \\ - \beta(t) H_{1x}[t, x, \psi, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v] - \\ - p[t, x, \bar{u}_n(t, x, \psi, v), v]. \tag{3.61}$$

Условия (3.59), (3.60) совместно с (3.54) содержат $4n+s$ уравнений для $4n+s$ неизвестных функций $x^i(t)$ $\psi_i(t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $v^k(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, s)$ Граничные условия для этих уравнений определим из второго условия теоремы 1 § 2 приложения

$$\Phi_2(\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1) = \inf_{\psi_0 \in B_3(t_0);\ \psi_1 \in B_3(t_1)} \Phi(\psi_0, \psi_1). \qquad (3.62)$$

Поскольку область $B_3(t)$ допустимых значений ψ открыта при всех $t \in [t_0, t_1]$, то в качестве необходимых условий минимума Φ_2 будем иметь (см. (3.55))

$$\begin{aligned} \Phi_{2\psi_0}(\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1) &= \varphi^{(2)}_{\psi_0}(t_0, x_0, \overline{\psi}_0) = 0, \\ \Phi_{2\psi_1}(\overline{\psi}_0, \overline{\psi}_1) &= \varphi^{(2)}_{\psi_1}(t_1, x_1, \overline{\psi}_1) = 0. \end{aligned} \qquad (3.63)$$

Учитывая (3.57) и (3.63), получаем

$$\beta_i(t_0) = 0; \quad \beta_i(t_1) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.64)$$

Уравнения (3.54), (3.59), (3.60) совместно с краевыми условиями (3.52), (3.64) задают экстремаль, т. е. вектор-функции $\overline{x}(t)$, $\overline{\psi}(t)$, $\overline{v}(t)$, удовлетворяющие необходимым условиям (3.58) супремума $R_2(t, x, \psi, v)$ и вектор-функции $(\alpha(t), \beta(t))$ или в силу (3.61) градиент функции $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$ в точках экстремали.

Во всех точках пространства $T \times X \times \Psi$, не лежащих на эсктремали, функция $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$ может задаваться произвольно. Если существует такая функция $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$, что на экстремали $(\overline{x}(t), \overline{\psi}(t), \overline{v}(t))$ выполняются не только необходимые, но и достаточные условия максимума $R_2(t, x, \psi, v)$ при каждом фиксированном $t \in (t_0, t_1)$, а также для каждой допустимой функции $v(t)$ существует такая функция $\varphi^{(1)}(t, x)$, что удовлетворяются условия (3.50) теоремы, то в силу теоремы 1 приложения экстремаль $(\overline{x}(t), \psi(t), \overline{v}(t))$ есть абсолютная минималь функционала (3.53) или абсолютная минимаксималь функционала (3.2).

Алгоритм метода состоит в решении краевой задачи для системы (3.54), (3.59), (3.60) обыкновенных дифференциальных уравнений и доказательстве факта существования функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$.

3.4. ПЕРВЫЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ ПРИ ПРИНЦИПЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ — СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ И ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ У ИГРОКОВ

Решением игры для этого принципа оптимальности, как указывалось в § 3.1, называются такие допустимые стратегии $\overline{u}^*(t) = \overline{u}_n(t, \overline{v}_n(t))$, $\overline{v}^*(t) = \overline{v}_n(t, \overline{u}_n(t))$ игроков $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$, для которых выполняется принцип седловой точки (3.11) или эквивалентное соотношение (3.12). Будем решать задачу определения этих стратегий последовательно в два этапа. На первом этапе определим достаточные условия оптимальности стратегий игроков $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ при любых фиксированных стратегиях противника из класса допустимых. Затем на втором этапе, используя соотношение седловой точки (3.12) или (3.14), получаем достаточные условия решения игры для принятого принципа оптимальности.

Приступим к первому этапу решения. Применяя первый этап формализма § 3.2 и полагая в (3.21) $W \equiv 0$, получаем достаточные условия абсолютного максимума функционала $\mathscr{I}$:

$$\begin{aligned} P_1(t, x, v(t)) \equiv \inf_{u \in Q_1} [\varphi^{(1)}_x f(t, x, u, v(t)) - \\ - p(t, x, u, v(t)) + \varphi^{(1)}_t] = a, \end{aligned} \qquad (3.65)$$

$$F(x) + \varphi^{(1)}(t_1, x) = 0. \qquad (3.66)$$

В § 3.2 показано: если существует функция $\varphi^{(1)}(t, x)$, непрерывная при всех t, x, обладающая непрерывными частными производными $\varphi^{(1)}_t$, $\varphi^{(1)}_x = (\varphi^{(1)}_{x^1}, \ldots, \varphi^{(1)}_{x^n})$ при всех t, x, за исключением конечного числа множеств $t = \mathrm{const}$ пространства (t, x), зависящая от $v(t) \in Q_2$ и удовлетворяющая (3.65), (3.66), то допустимая стратегия $\overline{u}_n(t, x, v(t))$ игрока $\mathscr{P}$, определяемая из (3.65), является оптимальной при любой фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathscr{E}$. При этом абсолютное максимальное значение функционала $\mathscr{I}$ равно

$$\begin{aligned} \sup_{u(t) \in Q_1} \mathscr{I}(x_0, u(t), v(t)) = \\ = \mathscr{I}(x_0, \overline{u}_n(t, v(t)), v(t)) = -\varphi^{(1)}(t_0, x_0) \end{aligned} \qquad (3.67)$$

(см. (3.29) при $W \equiv 0$).

Здесь уместно заметить, что полагая в (3.21) $W \equiv 0$, мы усиливаем требование, наложенное на $\varphi^{(1)}(t, x)$ этим уравнением. При этом уравнение (3.65) совпадает с уравнением Беллмана для решения вариационных задач.

Аналогично можно получить достаточные условия абсолютного минимума функционала $\mathcal{J}$:

$$P_2(t, x, u(t)) \equiv \sup_{v \in Q_2(t, x)} [\varphi_x^{(2)} f(t, x, u(t), v) - $$
$$- p(t, x, u(t), v) + \varphi_t^{(2)}] = 0, \quad (3.68)$$

$$F(x) + \varphi^{(2)}(t_1, x) = 0. \quad (3.69)$$

Если существует функция $\varphi^{(2)}(t, x)$, обладающая указанными выше свойствами, зависящая от $u(t) \in Q_1$ и удовлетворяющая (3.68), (3.69), то допустимая стратегия $\bar{v}_n(t, x, u(t))$ игрока $\mathcal{E}$, определяемая из (3.68), является оптимальной при любой фиксированной стратегии $u(t) \in Q_1$ игрока $\mathcal{P}$. При этом абсолютное минимальное значение функционала $\mathcal{J}$ равно

$$\inf_{v(t) \in Q_2} \mathcal{J}(x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= \mathcal{J}(x_0, u(t), \bar{v}_n(t, u(t)) = -\varphi^{(2)}(t_0, x_0). \quad (3.70)$$

Достаточные условия (3.65), (3.66) абсолютного максимума и (3.68), (3.69) абсолютного минимума функционала $\mathcal{J}$ справедливы при любой фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$ и соответственно $u(t) \in Q_1$ игрока $\mathcal{P}$. В частности, достаточные условия (3.65), (3.66) справедливы при оптимальной стратегии игрока $\mathcal{E}$, достаточные условия (3.68), (3.69) справедливы при оптимальной стратегии игрока $\mathcal{P}$.

Определяя из (3.65) оптимальную стратегию $\bar{u}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, v)$ игрока $\mathcal{P}$ и подставляя ее в (3.68), определяя из 3.68) оптимальную стратегию $\bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(2)}, u)$ игрока $\mathcal{E}$ и подставляя ее в (3.65), приходим к следующей системе уравнений:

$$\inf_{u \in Q_1(t)} [\varphi_x^{(1)} f(t, x, u, \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(2)}, u)) -$$
$$- p(t, x, u, \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(2)}, u)) + \varphi_t^{(1)}] = 0, \quad (3.71)$$

$$\sup_{v \in Q_2(t)} [\varphi_x^{(2)} f(t, x, \bar{u}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, v), v) -$$
$$- p(t, x, \bar{u}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, v), v) + \varphi_t^{(2)}] = 0, \ t \in (t_0, t_1). \quad (3.72)$$

Граничные условия для системы (3.71), (3.72) следуют из (3.66) и (3.69):

$$F(x) + \varphi^{(1)}(t_1, x) = 0, \ \varphi^{(1)}(t_1, x_1) = \varphi^{(2)}(t_1, x_1). \quad (3.73)$$

Кроме того, для выполнения принципа оптимальности — седловой точки достаточно наложить на функции φ^1 и φ^2 условие

$$\varphi^{(1)}(t_0, x_0) = \varphi^{(2)}(t_0, x_0), \quad (3.74)$$

которое следует из равенств (3.67), (3.70) (справедливых при любых стратегиях игроков, в том числе и при оптимальных) и из выполнения соотношения седловой точки (3.14).

Систему (3.71)—(3.74) будем называть достаточными условиями решения игры для принципа оптимальности — седловой точки при отсутствии полной информации у игроков. Если существуют функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, удовлетворяющие этим условиям, то задача нахождения решения игры при принципе оптимальности — седловой точки при отсутствии полной информации решается полностью.

Оптимальная стратегия $\bar{u}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}) = \bar{u}_n(t, x)$ игрока $\mathcal{P}$ определяется из (3.71), оптимальная стратегия $\bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}) = \bar{v}_n(t, x)$ игрока $\mathcal{E}$ — из (3.72). Следовательно, решением игры являются стратегии $\bar{u}^*(t) = \bar{u}_n(t, \bar{x}(t))$, $\bar{v}^*(t) = \bar{v}_n(t, \bar{x}(t))$, где $\bar{x}(t)$ — решение системы (3.1) при $\bar{u}_n(t, x)$ и $\bar{v}_n(t, x)$. Значение функционала (3.2) на оптимальных стратегиях игроков равно $l_3(x_0) = -\varphi^{(1)}(t_0, x_0)$, где $\varphi^{(1)}(t_0, x_0)$ определяется при решении системы (3.71)—(3.74).

Важным частным случаем описания процесса игры является случай, когда стратегии игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ входят раздельно в правые части уравнений (3.1) и в выражение для подынтегральной функции функционала (3.2), т. е. когда функции $f(t, x, u, v)$ и $p(t, x, u, v)$ представлены в виде (3.16). В этом случае достаточные условия (3.71)—(3.74) можно записать в следующем виде:

$$\inf_{u \in Q_1(t)} [\varphi_x^{(1)} f_1(t, x, u) - p_1(t, x, u) + \varphi_x^{(1)} f_2(t, x,$$
$$\bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(2)})) - p_2(t, x, \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(2)})) + \varphi_t^{(1)} = 0,$$

$$\sup_{v\in Q_2(t)} [\varphi_x^{(2)} f_1(t,\ x,\ \bar{u}_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(1)})) - p_1(t,\ x,\ \bar{u}_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(1)})) + \varphi_x^{(2)} f_2(t,\ x,\ v) - p_2(t,\ x,\ v) + \varphi_t^{(2)}] = 0, \quad (3.75)$$

$$F(x) + \varphi^{(1)}(t_1,\ x) = 0,\ \varphi^{(1)}(t_1,\ x_1) = \varphi^{(2)}(t_1,\ x_1),\ \varphi^{(1)}(t_0,\ x_0) = \varphi^{(2)}(t_0,\ x_0).$$

Здесь стратегия $\bar{u}_n$ игрока $\mathcal{F}$ не зависит в явном виде от $v(t)$, стратегия $\bar{v}_n$ игрока $\mathcal{E}$ — от $u(t)$. Поэтому таким уравнениям может удовлетворить одна функция

$$\varphi(t,\ x) = \varphi^{(1)}(t,\ x) \equiv \varphi^{(2)}(t,\ x), \quad (3.76)$$

при которой система (3.75) имеет вид

$$\inf_{u\in Q_1} \sup_{v\in Q_2} [\varphi_x f(t,\ x,\ u,\ v) - p(t,\ x,\ u,\ v) + \varphi_t] = \sup_{v\in Q_2} \inf_{u\in Q_1} [\varphi_x f(t,\ x,\ u,\ v) - p(t,\ x,\ u,\ v) + \varphi_t] = 0, \quad (3.77)$$

$$F(x) + \varphi(t_1,\ x) = 0.$$

Таким образом, если подынтегральное выражение (3.2) и правые части уравнений (3.1) можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых не зависит от u, а другая — от v (см. (3.16)), достаточные условия (3.71)—(3.74) седловой точки функционала (3.2) заменяются достаточными условиями (3.77) седловой точки функции $R(t,\ x,\ u,\ v)$ при каждом $t \in (t_0,\ t_1)$.

Если известна функция $\varphi(t,\ x)$, удовлетворяющая (3.77), то оптимальные стратегии игроков $\bar{u}_n(t,\ x,\ \varphi_x) = \bar{u}_n(t,\ x)$, $\bar{v}_n(t,\ x,\ \varphi_x) = \bar{v}_n(t,\ x)$ определяются из (3.77). Решением игры при принятом принципе оптимальности и отсутствии информации (кроме, конечно, начальной, которую ранее в § 3.1 мы назвали фундаментальной) являются стратегии $\bar{u}^*(t) = \bar{u}_n(t,\ \bar{x}(t))$, $\bar{v}^*(t) = \bar{v}_n(t,\ \bar{x}(t))$ ($\bar{x}(t)$ — решение системы (3.1) при $\bar{u}_n(t, x)$ и $\bar{v}_n(t,\ x)$) и значение функционала (3.2) при этих стратегиях $l_3(t_0,\ x_0) = -\varphi(t_0,\ x_0)$.

Заметим, что система (3.77) по форме представляет собой известное достаточное условие решения игры с полной информацией игроков (см. основное уравнение (2.8)).

3.5. ВТОРОЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ ПРИ ПРИНЦИПЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ—СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ И ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ У ИГРОКОВ

Предположим, что область допустимых состояний x открыта при всех $t \in (t_0,\ t_1)$, а при $t = t_0$ и $t = t_1$ является заданной точкой $x = x_0$ и $x = x_1$. Множества Q_1 и Q_2 предполагаются зависящими только от t.

Будем решать задачу определения оптимальных стратегий игроков последовательно в два этапа. На первом этапе определим необходимые условия оптимальности стратегий игроков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ при любых фиксированных стратегиях противника из класса допустимых. Затем, на втором этапе, используя соотношение седловой точки (3.14) или аналогичное ему равенство (3.74), получаем необходимые условия решения игры для принятого принципа оптимальности.

Приступим к первому этапу решения. Применяя первый этап формализма § 3.3, получаем необходимые условия максимума функционала $\mathcal{J}$ при любой фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$

$$\dot{\psi}_i + H_{1x^i} = 0, \quad i = 1,\ 2, \dots,\ n, \quad (3.78)$$

$$H_1(t,\ \psi(t),\ \bar{x},\ \bar{u}_n,\ v(t)) = \inf_{u\in Q_1(t)} H_1(t,\ \bar{x}(t),\ u,\ v(t)),$$

где $\psi(t) = \varphi_x^{(1)}(t,\ \bar{x}(t))$ — градиент функции $\varphi^{(1)}(t,\ x)$ в пространстве X в точке $x = \bar{x}(t)$;

$$H_1(t,\ x,\ u,\ v(t)) = \psi(t) f(t,\ x,\ u,\ v(t)) - p(t,\ x,\ u,\ v(t)). \quad (3.79)$$

В § 2.3 показано: если существует функция $\varphi^{(1)}(t, x)$, зависящая от $v(t) \in Q_2$ и удовлетворяющая условиям (3.50) теоремы, то стратегия $\bar{u}_n(t,\ v(t))$ игрока $\mathcal{F}$, определяемая при решении системы (3.78) совместно с (3.1) и граничными условиями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, является оптимальной при любой фиксированной стратегии $v(t) \in Q_2$ игрока $\mathcal{E}$.

Для игрока $\mathcal{E}$ аналогично можно получить необходимые условия минимума функционала $\mathcal{J}$ при любой фиксированной стратегии $u(t)\in Q_1$ игрока $\mathscr{P}$:

$$\dot{\chi}_i+H_{2x^i}=0,\quad i=1,\ 2,\dots,\ n,$$
$$H_2(t,\ x(t),\ \bar{x},\ u(t),\ \bar{u}_n)=$$
$$=\sup_{v\in Q_2(t)} H_2(t,\ \bar{x}(t),\ u(t),\ v),\qquad (3.80)$$

где $\chi(t)=\varphi_x^{(2)}(t,\ \bar{x}(t))$ — градиент функции $\varphi^{(2)}(t,\ x)$ в пространстве X в точке $x=\bar{x}(t)$;

$$H_2(t,\ x,\ u(t),\ v)=\chi(t)f(t,\ x,\ u(t),\ v)-p(t,\ x,\ u(t),\ v).\qquad (3.81)$$

Если существует функция $\varphi^{(2)}(t,\ x)$, зависящая от $u(t)\in Q_1$ и удовлетворяющая условиям, аналогичным (3.50) теоремы (для минимума функционала), то стратегия $\bar{v}_n(t,\ u(t))$ игрока $\mathscr{E}$, определяемая при решении системы (3.80) совместно с (3.1) и граничными условиями $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, является оптимальной при любой фиксированной стратегии $u(t)\in Q_1$ игрока $\mathscr{P}$.

Необходимые условия (3.78) максимума и минимума (3.80) функционала (3.2) справедливы при любой фиксированной стратегии $v(t)\in Q_2$ игрока $\mathscr{E}$ и соответственно $u(t)\in Q_1$ игрока $\mathscr{P}$. В частности, необходимые условия (3.78) справедливы при оптимальной стратегии игрока $\mathscr{E}$, необходимые условия (3.80) справедливы при оптимальной стратегии игрока $\mathscr{P}$.

Определяя из (3.78) оптимальную стратегию $\bar{u}_n(t,\ x,\ \psi,\ v)$ игрока $\mathscr{P}$ и подставляя ее в (3.80), определяя из (3.80) оптимальную стратегию $\bar{v}_n(t,\ x,\ \chi,\ u)$ игрока $\mathscr{E}$ и подставляя ее в (3.78), приходим к следующей системе уравнений

$$\dot{\psi}_i+H^*_{x^i}=0,\ \dot{\chi}_i+H^*_{2x^i}=0,\ i=1,\ 2\dots,\ n,$$
$$H^*_1(t,\ \psi(t),\ \chi(t),\ \bar{x},\ \bar{u}_n,\ \bar{v}_n(t,\ \bar{x},\ \chi,\ \bar{u}_n))=$$
$$=\inf_{u\in Q_1(t)} H^*_1(t,\ \bar{x}(t),\ u,\ \bar{v}_n(t,\ \bar{x},\ \chi,\ u)),\qquad (3.82)$$
$$H^*_2(t,\ \psi(t),\ \chi(t),\ \bar{x},\ \bar{u}_n(t,\ \bar{x},\ \psi,\ \bar{v}_n),\ \bar{v}_n)=$$
$$=\sup_{v\in Q_2(t)} H^*_2(t,\ \bar{x}(t),\ \bar{u}_n(t,\ \bar{x},\ \psi,\ v),\ v).$$

Здесь

$$H^*_1(t,\ x,\ u)=\psi(t)f(t,\ x,\ u,\ \bar{v}_n(t,\ x,\ \chi,\ u))-$$
$$-p(t,\ x,\ u,\ \bar{v}_n(t,\ x,\ \chi,\ u)),\qquad (3.83)$$
$$H^*_2(t,\ x,\ v)=\chi(t)f(t,\ x,\ \bar{u}_n(t,\ x,\ \psi,\ v),\ v)-$$
$$-p(t,\ x,\ \bar{u}_n(t,\ x,\ \psi,\ v),\ v).$$

Пусть существуют функции $\varphi^{(1)}(t,\ x)$ и $\varphi^{(2)}(t,\ x)$, удовлетворяющие соответственно условиям (3.50) теоремы и условиям, аналогичным условиям (3.50), но для минимума функционала. Тогда для выполнения принципа оптимальности — седловой точки, как следует из § 3.4, на функции $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ должно быть наложено условие (3.74). Учитывая, что $\psi(t)=\varphi_x^{(1)}(t,\ \bar{x}(t))$, $\chi(t)=\varphi_x^{(2)}(t,\ \bar{x}(t))$, получим из (3. 74).

$$\psi(t_0)=\chi(t_0).\qquad (3.84)$$

Систему (3.82), (3.84) будем называть необходимыми условиями решения игры при принципе оптимальности — седловой точке и при отсутствии полной информации.

Алгоритм метода состоит в решении системы (3.1), (3.82) обыкновенных дифференциальных уравнений при краевых условиях $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, $\psi(t_0)=\chi(t_0)$ и в доказательстве факта существования функций $\varphi^{(1)}(t,\ x)$ и $\varphi^{(2)}(t,\ x)$, удовлетворяющих условиям теоремы § 3.3.

Если стратегии игроков $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ входят раздельно в правые части уравнений (3.1) и в выражение для подынтегральной функции функционала (3.2) (функции представимы в виде (3.16)), имеет место равенство (3.76), т. е. функции $\varphi^{(1)}(t,\ x)$ и $\varphi^{(2)}(t,\ x)$ тождественно равны между собой и, следовательно, $\psi(t)\equiv\chi(t)$. В этом случае уравнения (3.82) можно записать в следующем виде:

$$\dot{\psi}_i+H_{x^i}=0,\quad i=1,\ 2,\dots,\ n,$$
$$H(t,\ \psi(t),\ \bar{x},\ \bar{u}_n,\ \bar{v}_n)=\sup_{v\in Q_2(t)}\ \inf_{u\in Q_1(t)} H(t,\ \bar{x}(t),\ u,\ v)=$$
$$=\inf_{u\in Q_1(t)}\ \sup_{v\in Q_2(t)} H(t,\ \bar{x}(t),\ u,\ v),\qquad (3.85)$$

где

$$H(t, x, u, v) = \psi(t) f(t, x, u, v) - p(t, x, u, v). \quad (3.86)$$

Уравнения (3.85) представляют собой известные необходимые условия решения игры в форме, аналогичной принципу максимума Л. С. Понтрягина [26].

Уравнения (3.85) совместно с (3.1) задают вектор-функции $\bar{x}(t)$, $\bar{u}_n(t)$, $\bar{v}_n(t)$, удовлетворяющие необходимым условиям решения игры, и вектор-функцию $\psi(t)$ или в силу $\psi(t) = \varphi_x(t, \bar{x}(t))$ значение градиента $\varphi(t, x)$ при $\bar{x}(t)$. Алгоритм метода в этом случае состоит в решении краевой задачи для системы (3.1), (3.85) обыкновенных дифференциальных уравнений и в доказательстве факта существования функции $\varphi(t, x)$, удовлетворяющей условиям теоремы § 3.3.

3.6. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Пример 1. Пусть движение объекта описывается уравнением

$$\dot{y} = by + mv + u, \quad y(0) = y_0,$$

где y — фазовая координата; v — координата органа управления; u — внешняя возмущающая сила; b, m — постоянные положительные коэффициенты. Процесс продолжается конечное время t_1. Полагаем, что $|u(t)| \leqslant U$, $|v(t)| \leqslant V$. Требуется найти управление $\bar{v}(t)$, дающее минимум функционалу

$$\mathcal{J} = y(t_1) \quad (3.87)$$

при условии, что внешняя возмущающая сила $\bar{u}_n(t)$ доставляет максимум тому же функционалу (3.87), т. е. необходимо решить игру при минимаксном принципе оптимальности.

Составляем функцию R_1:

$$R_1(t, y, u, v(t)) = \varphi_y^{(1)}(by + mv(t) + u) + \varphi_t^{(1)}.$$

Отсюда

$$P_1(t, y, v(t)) = \inf_u [\varphi_y^{(1)}(by + mv(t) + u) + \varphi_t^{(1)}],$$

$$\bar{u}_n = -U \operatorname{sign} \varphi_y^{(1)}.$$

Выберем функцию $\varphi^{(1)}(t, y)$ в виде $\varphi^{(1)}(t, y) = \psi(t) y$. Следовательно,

$$P_1(t, y, v(t)) = (\dot{\psi} + b\psi) y + \psi m v(t) - U|\psi|.$$

Для того чтобы выполнились условия (3.21), (3.24), достаточно потребовать

$$\dot{\psi} + b\psi = 0, \quad y + \psi(t_1) y = 0, \quad \text{т. е. } \psi(t_1) = -1.$$

Условие (3.21) дает: $W(t, v(t)) = mv\psi - U|\psi|$.

Запишем функционал (3.29) и исходное уравнение (3.35) для второго этапа

$$d_1 = -\psi(0) y_0 - \int_0^{t_1} (mv\psi - U|\psi|)\, dt;$$

$$\dot{\psi} = -b\psi; \quad \psi(t_1) = -1.$$

Функция $R_2(t, \psi, v)$ при этом запишется в виде

$$R_2(t, \psi, v) = -\varphi_\psi^{(2)} b\psi + mv\psi - U|\psi| + \varphi_t^{(2)}.$$

Следовательно,

$$P_2(t, \psi) = \sup_v [-\varphi_\psi^{(2)} b\psi + mv\psi - U|\psi| + \varphi_t^{(2)}].$$

$$\bar{v} = V \operatorname{sign} \psi.$$

Так как $\psi(t) = -e^{b(t_1 - t)} < 0$, то $\bar{v} = -V$. Функцию $\varphi^{(2)}(t, \psi)$ выберем так: $\varphi^{(2)}(t, \psi) = \beta(t)\psi$. Тогда

$$P_2(t, \psi) = -(\dot{\beta} - b\beta - mV + U)|\psi|.$$

Чтобы выполнить условия (3.41), (3.44), достаточно потребовать

$$\dot{\beta} - b\beta - mV + U = 0; \quad \beta(0) = -y_0. \quad (3.88)$$

Управления $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t)$, доставляющие минимаксное значение функционалу (3.87), определяются равенствами $\bar{u}(t) = U$, $\bar{v}(t) = -V$. Можно не решать уравнения (3.88), достаточно показать, что функция $\varphi^{(2)}(t, \psi) = \beta(t)\psi$ существует. В данном примере $I_1 = I_3 = I_2$. Тактическая информация и взаимная тактическая информированность сторон здесь не имеет ценности, т. е оптимальные управления сторон остаются теми же, независимо от того, протекает ли процесс при отсутствии тактической информации или при крайних случаях тактической информированности противников.

Пример 2. Состояние двух систем описывается уравнениями

$$\dot{x} = x + u - y; \quad x(0) = x_0, \quad (3.89)$$

$$\dot{y} = y + v - x; \quad y(0) = y_0. \quad (3.90)$$

Области $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ открыты при $t \in (0, t_1)$; $B_1(t)$ — открытая область при $0 < t \leqslant t_1$. Требуется найти управление $\bar{v}(t)$ для системы (3.90), дающее минимум функционалу

$$\mathcal{J} = \int_0^{t_1} (v^2 - u^2)\, dt + x(t_1) + y(t_1)$$

при условии, что управление $\bar{u}_n(t)$ системы (3.89) доставляет максимум тому же функционалу, т. е. необходимо решить игру при минимаксном принципе оптимальности.

Процесс вычисления проведем так же, как и в примере 1:

$$R_1(t, x, y, u, v(t)) = \varphi_x^{(1)}(x + u - y) + \varphi_y^{(1)}(y + v(t) - x) -$$
$$- v^2(t) + u^2 + \varphi_t^{(1)},$$
$$P_1(t, x, y, v(t)) = \inf_u [\varphi_x^{(1)}(x + u - y) + \varphi_y^{(1)}(y + v(t) -$$
$$- x) - v^2(t) + u^2 + \varphi_t^{(1)}],$$
$$\overline{u_n} = -{}^1/_2\varphi_x^{(1)}, \quad \varphi^{(1)}(t, x, y) = \psi^{(1)}(t)\, x + \psi^{(2)}(t)\, y,$$
$$P_1(t, x, y, v(t)) = (\dot\psi^{(1)} + \psi^{(1)} - \psi^{(2)})\, x +$$
$$+ (\dot\psi^{(2)} + \psi^{(2)} - \psi^{(1)})\, y + \psi^{(2)} v(t) - v^2(t) - {}^1/_4 \psi^{(1)2}.$$

Чтобы удовлетворялись условия (3.21), (3.24), достаточно потребовать

$$\dot\psi^{(1)} + \psi^{(1)} - \psi^{(2)} = 0, \quad \dot\psi^{(2)} + \psi^{(2)} - \psi^{(1)} = 0,$$
$$\psi^{(1)}(t_1) = \psi^{(2)}(t_1) = -1.$$

Решением этих уравнений являются функции $\psi^{(1)}(t) = \psi^{(2)}(t) \equiv -1$ и, следовательно, $\overline{u}_n(t) = {}^1/_2$.

Функционал для второго этапа формализма запишется в следующем виде:

$$d_1 = x_0 + y_0 + \int_0^{t_1} \left(v^2 + v + \frac{1}{4} \right) dt.$$

На втором этапе формализма достаточно минимизировать подынтегральное выражение этого функционала. Оптимальными управлениями систем будут

$$\overline{u_n}(t) = {}^1/_2, \quad \overline{v}(t) = -{}^1/_2.$$

Здесь, как и в примере 1, полученные управления удовлетворяют минимаксному (максиминному) принципу оптимальности и принципу оптимальности — седловой точки и, следовательно, $l_1 = l_3 = l_2$, т. е. тактическая информация и взаимная тактическая информированность систем не имеет ценности (не имеет значения, будут иметь идеальную информацию или нет, также не имеет значения факт наличия идеальной информации у одного игрока и отсутствия у второго).

Пример 3. Рассмотрим проблему стабилизации системы с объектом первого порядка. Возмущенное движение объекта регулирования описывается уравнением

$$\dot x = bx + mv + u; \quad x(0) = x_0, \tag{3.91}$$

где x — координата, характеризующая отклонение объекта от программной траектории; v — координата органа управления; $u(t)$ — внешняя возмущающая сила; b, m — постоянные положительные коэффициенты. Процесс регулирования осуществляется за конечное время t_1. Полагаем, что $|u(t)| \leqslant U$. Уравнение (3.91) определено в открытой области $\Gamma(x, v)$. Требуется найти управление $\overline{v}(t)$, дающее минимум функционалу

$$\mathcal{J} = \int_0^{t_1} (ax^2 + cv^2)\, dt \tag{3.92}$$

при условии, что внешняя возмущающая сила $\overline{u}_n(t)$ доставляет максимум тому же функционалу, т. е. необходимо решить игру при минимаксном принципе оптимальности.

Функционал (3.92) представляет собой взвешенную по константам $a > 0$, $c > 0$ интегральную квадратичную ошибку.

Для решения этой задачи применим алгоритм, изложенный в § 3.2. Составляем функцию R: $R_1(t, x, u, v(t)) = \varphi_x^{(1)}(bx + mv(t) + u) - ax^2 - cv^2(t) + \varphi_t^{(1)}$, откуда $P_1(t_1, x, v(t)) = \inf_u R_1(t, x, u, v(t))$; $\overline{u_n} = -U \operatorname{sign} \varphi_x^{(1)}$. Функцию $\varphi^{(1)}(t, x)$ запишем в следующем виде: $\varphi^{(1)}(t, x) = \psi^{(1)}(t)\, x + \psi^{(2)}(t)\, x^2$. Тогда

$$P_1(t, x, v(t)) = (\psi^{(1)} + 2\psi^{(2)} x)(bx + mv(t)) -$$
$$- |\psi^{(1)} + 2\psi^{(2)} x|\, U - ax^2 - cv^2(t) + \dot\psi^{(1)} x + \dot\psi^{(2)} x^2.$$

Полагаем $\varphi_x^{(1)} = (\psi^{(1)} + 2\psi^{(2)} x)$ 0 и будем дальше решать задачу для этого условия. Тогда

$$P_1(t, x, v(t)) = (\dot\psi^{(1)} + b\psi^{(1)} + 2\psi^{(2)} mv(t) - 2\psi^{(2)} U)\, x +$$
$$+ (\dot\psi^{(2)} + 2b\psi^{(2)} - a)\, x^2 + \psi^{(1)} mv(t) - \psi^{(1)} U - cv^2(t).$$

Чтобы удовлетворялись условия (3.21), (3.24), достаточно потребовать

$$\psi^{(1)} + b\psi^{(1)} + 2\psi^{(2)} mv(t) - 2\psi^{(2)} U = 0, \quad \psi^{(1)}(t_1) = 0; \tag{3.93}$$

$$\dot\psi^{(2)} + 2b\psi^{(2)} - a = 0, \quad \psi^{(2)}(t_1) = 0. \tag{3.94}$$

Условие (3.21) дает $W(t, \psi^{(1)}, v(t)) = \psi^{(1)} mv(t) - \psi^{(1)} U - cv^2(t)$. Функционал (3.29) и исходное уравнение (3.35) для второго этапа решения имеют вид

$$d_1 = -(\psi^{(1)}(0)\, x_0 + \psi^{(2)}(0)\, x^2_0) - \int_0^{t_1} (\psi^{(1)} mv - \psi^{(1)} U - cv^2)\, dt,$$

$$\dot\psi^{(1)} = -b\psi^{(1)} - 2\psi^{(2)} mv + 2\psi^{(2)} U, \quad \psi^{(1)}(t_1) = 0,$$

$$\dot\psi^{(2)} = -2b\psi^{(2)} + a, \quad \psi^2(t_1) = 0.$$

Составим функции R_2 и P_2:

$$R_2(t, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, v) = \varphi^{(2)}_{\psi^{(1)}}(-b\psi^{(1)} - 2\psi^{(2)} mv +$$
$$+ 2\psi^{(2)} U) + \varphi^{(2)}_{\psi^{(2)}}(-2b\psi^{(2)} + a) + \psi^{(1)} mv - \psi^{(1)} U - cv^2 + \varphi_t^{(2)},$$
$$P_2(t, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \sup_v R_2(t, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, v), \ \overline{v}(t) =$$
$$= \frac{m}{2c}(\psi^{(1)} - 2\varphi^{(2)}_{\psi^{(1)}} \psi^{(2)}).$$

Если существует функция $\varphi^{(2)}(t, \psi^{(1)}, \psi^{(2)})$ такая, что выполняются условия

$$P_2(t, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \sup_v R_2(t, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, v) = c_1(t),$$

$$\psi^{(1)}(0)x_0 + \psi^{(2)}(0)x^2_0 + \varphi^{(2)}(0, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = c_2 = \mathrm{const},$$

то существует решение задачи при минимаксном принципе оптимальности. При этом можно указать область в пространстве (t, x), где $\varphi^{(1)}_x = \psi^{(1)}(t) + 2\psi^{(2)}(t)x \geq 0$. В этой области

$$\overline{u_n}(t) = -U, \quad \overline{v}(t) = \frac{m}{2c}(\psi^{(1)}(t) - 2\varphi^{(2)}_{\psi^{(1)}}\psi^{(2)}(t)).$$

Пусть возмущенное движение объекта регулирования описывается уравнением (3.91) при $x(0) = 0$. Уравнение (3.94) решается отдельно:

$$\widetilde{\psi}^2(t) = \frac{a}{2b}(1 - e^{2b(t_1 - t)}). \tag{3.95}$$

Функционал (3.29) и исходное уравнение (3.35) для второго этапа решения запишутся следующим образом:

$$d_1 = -\int_0^{t_1} (\psi^{(1)}mv - \psi^{(1)}U - cv^2)\,dt,$$

$$\dot{\psi}^{(1)} = -b\psi^{(1)} - 2\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\,mv + 2\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\,U, \quad \psi^{(1)}(t_1) = 0.$$

Составим функции R_2 и P_2:

$$R_2(t, \psi^{(1)}, v) = \varphi^{(2)}_{\psi^{(1)}}(-b\psi^{(1)} - 2\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\,mv + 2\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\,U) + $$
$$+ \psi^{(1)}mv - \psi^{(1)}U - cv^2 + \varphi^{(2)}_t,$$
$$P_2(t, \psi^{(1)}) = \sup_v R_2(t, \psi^{(1)}, v),$$
$$\overline{v}(t) = \frac{m}{2c}(\psi^{(1)} - 2\varphi^{(2)}_{\psi^{(1)}}\widetilde{\varphi}^{(2)}(t)).$$

Выберем функцию $\varphi^{(2)}(t, \psi^{(1)})$ в виде $\varphi^2(t, \psi^{(1)}) = \beta(t)\psi^{(1)} + \gamma(t)\psi^{(1)2}$. Тогда

$$P_2(t, \psi^{(1)}) = \Big(\dot{\beta} - b\beta + \frac{4m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\beta\gamma + 4U\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\gamma -$$
$$-\frac{m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\beta - U\Big)\psi^{(1)} + \Big(\dot{\gamma} - 2b\gamma - \frac{2m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\gamma +$$
$$+\frac{4m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\gamma^2 + \frac{m^2}{4c}\Big)\psi^{(1)2} + A(t),$$

где $A(t)$ — функция, не зависящая от $\psi^{(1)}$. Чтобы удовлетворялись достаточные условия (3.41), (3.44) второго этапа решения, доста-

[т]очно потребовать, чтобы

$$\dot{\beta} - b\beta + \frac{4m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\beta\gamma + 4U\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\gamma - \frac{m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\beta - U = 0, \tag{3.96}$$
$$\dot{\gamma} - 2b\gamma - \frac{2m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\gamma + \frac{4m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\gamma^2 + \frac{m^2}{4c} = 0,$$
$$\beta(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0.$$

(3.96) $\widetilde{\psi}^{(2)}(t)$ определяется (3.95). Чтобы определить управления (t), $\overline{v}(t)$, удовлетворяющие минимаксному принципу оптимально-[сти], необходимо решить следующую систему дифференциальных [ур]авнений:

$$\dot{\psi}^{(1)} = -b\psi^{(1)} - \frac{m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\psi^{(1)} + \frac{2m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\beta +$$
$$+\frac{4m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\gamma\psi^{(1)} + 2U\widetilde{\psi}^{(2)}(t), \quad \psi^{(1)}(t_1) = 0,$$
$$b\beta - \frac{4m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\beta\gamma - 4U\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\gamma + \frac{m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\beta + U, \quad \beta(0) = 0, \tag{3.97}$$
$$\dot{\gamma} = 2b\gamma + \frac{2m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)}(t)\gamma - \frac{4m^2}{c}\widetilde{\psi}^{(2)2}(t)\gamma^2 - \frac{m^2}{4c}, \quad \gamma(0) = 0.$$

Поставленная задача будет полностью решена, если найдутся [фу]нкции $\psi^{(1)}(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и непрерывные при $0 \leq t \leq t_1$, удовлетво-[ря]ющие уравнениям (3.97). В этом случае можно будет указать [об]ласть в пространстве (t, x), где $\varphi^{(1)}_x \equiv \psi^{(1)}(t) + 2\psi^{(2)}(t)x \geq 0$. Кроме того, в этой области

$$\overline{u_n}(t) = -U; \quad \overline{v}(t) = \frac{m}{2c}\psi^{(1)}(t) - \frac{m}{c}\beta(t)\widetilde{\psi}^{(2)}(t) -$$
$$-\frac{2m}{c}\gamma(t)\psi^{(1)}(t)\widetilde{\psi}^{(2)}(t).$$

Легко показать, что при максиминном принципе оптимальности [опт]имальные управления сторон и значения функционала на этих [уп]равлениях не равны оптимальным управлениям сторон и значению [фу]нкционала на оптимальных управлениях при минимаксном прин-[ци]пе оптимальности и, следовательно, взаимная тактическая инфор-[ми]рованность сторон в этом примере имеет ценность $(l_1 \neq l_2)$.

Предположим теперь, что стороны тактически не информирова-[ны]. Применим алгоритм решения, изложенный в § 3.4, для принципа [опт]имальности — седловой точки. Достаточные условия (3.77) запи-[шу]тся в следующем виде:

$$\inf_u \sup_v [\varphi_x(bx + mv + u) - ax^2 - cv^2 + \varphi_t] = \sup_v \inf_u [\varphi_x(bx +$$
$$+ mv + u) - ax^2 - cv^2 + \varphi_t], \quad \varphi(t_1, x) = 0. \tag{3.98}$$

[Из] (3.98) следует $\overline{u}_n(t) = -U\,\mathrm{sign}\,\varphi_x$, $\overline{v}_n(t) = (m/2c)\varphi_x$.

Для определения $\varphi(t, x)$ получаем следующее нелинейное уравнение в частных производных:

$$bx\varphi_x + \frac{1}{4}\frac{m^2}{c}\varphi^2_x - U|\varphi_x| - ax^2 + \varphi_t = 0 \qquad (3.99)$$

при граничном условии $\varphi(t_1, x) = 0$. (Решение уравнения (3.99) дано в [22].) Можно показать, что цена игры l_3 равна значению функционала на оптимальных управлениях сторон при максиминном принципе оптимальности: $l_3 = l_2$.

Имея в виду результаты § 3.1, заключаем, что взаимная тактическая информация для объекта (3.91) не имеет ценности ($\delta_v = l_3 - l_2 = 0$), а взаимная тактическая информация для внешней возмущающей силы имеет ценность ($\delta_u = l_1 - l_3 \neq 0$).

Пример 4. Движение системы описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x} = (y - z)(u - v); \quad x(0) = 0, \qquad (3.100)$$

$$\dot{y} = u; \quad y(0) = 0, \qquad (3.101)$$

$$\dot{z} = v, \quad z(0) = 0, \qquad (3.102)$$

где x, y, z — фазовые координаты; u и v — управления двух противоположных сторон $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$, участвующих в процессе. Процесс продолжается конечное время $t_1 = 1$. Помимо уравнений (3.100)—(3.102) возможные режимы процесса удовлетворяют ограничениям

$$0 \leqslant u(t) \leqslant 1; \quad 0 \leqslant v(t) \leqslant 1. \qquad (3.103)$$

Ставится задача: найти управления $\overline{u_n}(t)$ стороны $\mathcal{P}$ и $\overline{v}(t)$ стороны $\mathcal{E}$, на которых функционал

$$\mathcal{J} = x(t = 1) = x_1 \qquad (3.104)$$

достигает абсолютного минимаксного значения, другими словами, выбран минимаксный принцип оптимальности игры.

Запишем функционал (3.104) и уравнения (3.100)—(3.102) в следующем виде:

$$\mathcal{J} = x_1 = \int_0^1 \left(y - \int_0^t v\,dt\right)(u - v)\,dt,$$

$$\dot{y} = u, \quad y(0) = 0.$$

Составим функции R_1, P_1 и функционал L_1:

$$R_1(t, y, u, v(t)) = \varphi_y^{(1)}u - \left(y - \int_0^t v\,dt\right)(u - v(t)) + \varphi_t^{(1)},$$

$$P_1(t, y, v(t)) = \inf_u\left\{\left(\varphi_y^{(1)} - y + \int_0^t v\,dt\right)u\right\} + yv(t) - $$

$$- v(t)\int_0^t v\,dt + \varphi_t^{(1)}, \qquad (3.105)$$

$$L_1 = \Phi_1 - \int_0^t R_1(t, y, u, v(t))\,dt, \quad \Phi_1 = \varphi^{(1)}(1, y) - \varphi^{(1)}(0, y). \qquad (3.106)$$

Имея в виду (3.105) и (3.103), получаем

$$\varphi_y^{(1)} - y + \int_0^t v\,dt = 0, \quad u \text{ — любое}, \qquad (3.107)$$

$$\varphi_y^{(1)} - y + \int_0^t v\,dt > 0, \quad \overline{u_1} = 0, \qquad (3.108)$$

$$\varphi_y^{(1)} - y + \int_0^t v\,dt < 0, \quad \overline{u_2} = 1. \qquad (3.109)$$

Рассмотрим теперь условие (3.107). Зададим функцию $\varphi^{(1)}(t, y)$ как общее решение уравнения

$$\varphi_y^{(1)} - y + \int_0^t v\,dt = 0,$$

левая часть которого является коэффициентом при u в выражении (3.105) для функции $P_1(t, y, v(t))$. Это решение имеет вид

$$\varphi^{(1)}(t, y) = \frac{1}{2}y^2 - y\int_0^t v\,dt. \qquad (3.110)$$

После подстановки найденного решения (3.110) в (3.105), (3.106) получим

$$P_1 = -v(t)\int_0^t v\,dt; \quad \Phi_1 = \frac{1}{2}y^2(1) - y(1)\int_0^1 v\,dt. \qquad (3.111)$$

Дальнейшему исследованию теперь подлежат функции P_1 и Φ_1. Функция P_1 не зависит от фазовой координаты y. Условие (3.21) дает

$$W(t, v(t)) = -v(t)\int_0^t v\,dt = -v(t)\,z(t). \qquad (3.112)$$

Определим максимум функции Φ_1 по $y(1)$. Учитывая (3.103), возможные значения $y(1)$ удовлетворяют ограничениям $0 \leqslant y(1) \leqslant 1$. Так как коэффициент при $y^2(1)$ в (3.111) положителен, то максимум функции Φ_1 по $y(1)$ может достигаться лишь на границах значений $y(1)$ и равняться

$$\Phi_1|_{y(1)=0} = 0, \quad \Phi_1|_{y(1)=1} = \frac{1}{2} - \int_0^1 v\,dt.$$

Таким образом, при условии

$$\frac{1}{2}-\int_0^1 v\,dt<0, \tag{3.113}$$

$\bar{y}(1)=0$ и, следовательно, $\bar{u}_n=0$; при условии

$$\frac{1}{2}-\int_0^1 v\,dt>0, \tag{3.114}$$

$\bar{y}(1)=1$ и, следовательно, $\bar{u}_n=1$; при условии

$$\frac{1}{2}-\int_0^1 v\,dt=0 \tag{3.115}$$

получим

$$\bar{u}_{n_1}=1, \quad (\bar{y}(1)=1), \tag{3.116}$$

$$\bar{u}_{n_2}=0, \quad (\bar{y}(1)=0). \tag{3.117}$$

Рассмотрим условие (3.115). Запишем его в следующем виде:

$$\frac{1}{2}-\int_0^1 v\,dt \equiv \frac{1}{2}-z(1)=0, \quad z(1)=\frac{1}{2}. \tag{3.118}$$

Имея в виду (3.111), (3.112), (3.116), (3.118), запишем функционал и исходное уравнение для второго этапа решения:

$$d_1=\Phi_1|_{y(1)=1}-\int_0^1 W(t,v)\,dt=\frac{1}{2}+\int_0^1 (vz-v)\,dt,$$

$$\dot{z}=v, \quad z(0)=0, \quad z(1)={}^1/_2. \tag{3.119}$$

Составим функции R_2, P_2 и Φ_2:

$$R_2(t,z,v)=\varphi_z^{(2)}v-vz+v+\varphi_t^{(2)}, \quad P_2(t,z)=$$

$$=\sup_v R_2=\sup_v\{(\varphi_z^{(2)}-z+1)v\}+\varphi_t^{(2)}, \tag{3.120}$$

$$\Phi_2=\frac{1}{2}+\varphi^{(2)}(1,z)-\varphi^{(2)}(0,z). \tag{3.121}$$

Зададим функцию $\varphi^{(2)}(t,z)$ как общее решение уравнения

$$\varphi_z^{(2)}-z+1=0, \tag{3.122}$$

левая часть которого есть коэффициент при v в выражении (3.120) для функции $P_2(t,z)$. Решение уравнения (3.122) имеет вид

$$\varphi^{(2)}(t,z)={}^1/_2z^2-z. \tag{3.123}$$

После подстановки найденного решения (3.123) в (3.120), (3.121) получим

$$P_2(t,z)\equiv 0, \quad \Phi_2={}^1/_8.$$

Учитывая (3.119), (3.103), получим, что $v={}^1/_2$. Так как $P_2(t,z)\equiv 0$, то $l_1=\Phi_2$ и, следовательно, абсолютное минимаксное значение функционала (3.104) равно ${}^1/_8$.

Нетрудно показать, что все возможные условия первого и второго этапов решения неравенств типа (3.108), (3.109), (3.113), (3.114) не дают решений, т. е. полученные при этих условиях оптимальные управления не удовлетворяют этим условиям. Таким образом, существуют только два решения задачи:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \bar{u}_{n_1}=0,\ \ \bar{v}={}^1/_2, \\ 2)\ \bar{u}_{n_2}=1,\ \ \bar{v}={}^1/_2 \end{array}\right\} \text{ при } l_1={}^1/_8. \tag{3.124}$$

Проверим решение (3.124), полученное с помощью изложенного в § 3.2 метода. Подставим (3.101), (3.102) в (3.100). Тогда

$$\dot{x}=(y-z)(\dot{y}-\dot{z})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y-z)^2$$

и, следовательно,

$$\mathcal{J}=x(1)={}^1/_2(y(1)-z(1))^2,$$

$$0\leqslant y(1)\leqslant 1 \ \text{(для допустимых } u(t)\in[0,1]),$$

$$0\leqslant z(1)\leqslant 1 \ \text{(для допустимых } v(t)\in[0,1]).$$

Поверхность $\mathcal{J}(y(1), z(1))$ представляет собой параболический цилиндр и не имеет седловой точки. Нетрудно показать, что

$$l_2=\max_{y(1)}\min_{z(1)}\mathcal{J}(y(1), z(1))=0, \tag{3.125}$$

$$l_1=\min_{z(1)}\max_{y(1)}\mathcal{J}(y(1), z(1))={}^1/_8. \tag{3.126}$$

Минимаксное значение (3.126) функционала достигается при

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_*(1)=0 \ \text{ или } \ \bar{y}_*(1)=1, \\ \bar{z}(1)={}^1/_2. \end{array}\right\} \tag{3.127}$$

Имея в виду (3.101)—(3.103), (3.127), получаем $\bar{u}_{n_1}=0$, $\bar{u}_{n_2}=1$, $\bar{v}={}^1/_2$. Решение (3.127) совпало с решением (3.124), полученным с помощью метода § 3.2.

Предположим теперь, что информированность сторон $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ [illegible]ствует. Применим принцип оптимальности — седловой точки. Так как выполняется (3.16), воспользуемся достаточными условиями (3.77):

$$\sup_v\inf_u[\varphi_x(y-z)(u-v)+\varphi_y u+\varphi_z v+\varphi_t]=0, \tag{3.128}$$

$$\varphi(1,x,y,z)+x(1)=0. \tag{3.129}$$

Запишем (3.128) в следующем виде:

$$\sup_v\inf_u[(\varphi_x y-\varphi_x z+\varphi_y)u+(\varphi_x z-\varphi_x y+\varphi_z)v+\varphi_t]=0. \tag{3.130}$$

Рассмотрим условия

$$\varphi_x y-\varphi_x z+\varphi_y=0; \quad \varphi_x z-\varphi_x y+\varphi_z=0. \tag{3.131}$$

Тогда, как следует из (3.130), управлениями сторон $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ становятся переменные y и z. Зададим функцию $\varphi(t, x, y, z)$ в виде $\varphi(t, x, y, z) = -x$. Подставив ее в (3.131), получим, что $z(t) = y(t)$. При управлении стороны $\mathscr{E}$ по этому закону или, что эквивалентно, по закону $\bar{v}_n(t) = u(t)$ удовлетворяются достаточные условия (3.128), (3.129). Цена игры l_3 на оптимальном управлении $\bar{v}_n(t) = u(t)$ стороны $\mathscr{E}$ равна $l_3 = -\varphi(0, x) = 0$. Управление $u(t)$ стороны $\mathscr{P}$ может быть любым из допустимой области (3.123).

Таким образом, в рассмотренном примере взаимная тактическая информированность сторон $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ имеет ценность, т. е. $l_1 \neq l_2$. Цена игры l_3 достигается на максиминных управлениях сторон, т. е. $l_3 = l_2$. Взаимная тактическая информация для стороны $\mathscr{P}$ имеет ценность ($\delta_{\mathscr{P}} = l_1 - l_3 = 1/8$), а взаимная тактическая информация для стороны $\mathscr{E}$ не имеет ценности ($\delta_{\mathscr{E}} = l_3 - l_2 = 0$).

Пример 5. Исследуем при помощи изложенного в § 3.3 формализма функционал

$$\mathscr{J} = \int_0^{t_1} (v^2 - u^2 + x^2)\, dt, \tag{3.132}$$

$$\dot{x} = u - y, \quad \dot{y} = v, \quad x(0) = x(t_1) = y(0) = y(t_1) = 0.$$

Требуется найти управления $\bar{u}_n(t)$, $\bar{v}(t)$, удовлетворяющие минимаксному принципу оптимальности. Имеем

$$H_1(t, x, y, u, v(t)) = \psi u - \psi y(t) + u^2 - x^2 - v^2(t).$$

Система (3.47), (3.48) запишется в виде

$$\dot{\psi} = 2x; \quad H_{1u} = \psi + 2u = 0; \quad \dot{x} = u - y(t); \quad H_{1uu} = 2 > 0,$$

откуда $\bar{u}_n(t) = -1/2\psi(t)$. Запишем теперь необходимые условия максимума функционала (3.132) при фиксированном $v(t) \in Q_2(t)$:

$$\dot{x} = -1/2\psi - y, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{\psi} = 2x.$$

Максимальное значение функционала при фиксированном $v(t) \in Q_2(t)$ равно

$$d(v(t)) = \int_0^{t_1} \left(-\frac{1}{4}\psi^2 + v^2 + x^2\right) dt.$$

Составим функцию (3.61):

$$H_2(t, x, y, \psi, v) = \alpha\left(-\frac{1}{2}\psi - y\right) + \beta v + 2\gamma x + \frac{1}{4}\psi^2 - v^2 - x^2.$$

Система (3.59), (3.60) при этом запишется в виде

$$\dot{\alpha} = -2\gamma + 2x; \quad \dot{\beta} = \alpha; \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\psi;$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\psi - y; \quad \dot{y} = v;$$

$$\dot{\psi} = 2x; \quad H_{2v} = \beta - 2v; \quad H_{2vv} = -2 < 0,$$

Граничные условия для этой системы имеют вид

$$x(0) = x(t_1) = y(0) = y(t_1) = \gamma(0) = \gamma(t_1) = 0. \tag{3.133}$$

Единственным решением этой системы, удовлетворяющим граничным условиям (3.133), будет

$$x(t) \equiv u(t) \equiv y(t) \equiv v(t) \equiv \psi(t) \equiv \alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv \gamma(t) \equiv 0. \tag{3.134}$$

Для того чтобы равенства (3.134) задавали абсолютную минимаксималь, достаточно существования функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x, y, \psi)$, удовлетворяющих достаточным условиям минимакса функционала. Пусть

$$\varphi^{(1)}(t, x) = \chi(t)x^2; \quad \varphi^{(2)}(t, x, y, \psi) = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)y^2 + \mu_3(t)\psi^2 + \mu_4(t)xy + \mu_5(t)x\psi + \mu_6(t)y\psi.$$

Тогда

$$\varphi_x^{(1)} \equiv 2\chi x|_{x=0} = 0,$$

$$\varphi_x^{(2)} \equiv 2\mu_1 x + \mu_4 y + \mu_5\psi\,|_{x=y=\psi=0} = 0,$$

$$\varphi_y^{(2)} \equiv 2\mu_2 y + \mu_4 x + \mu_5\psi\,|_{x=y=\psi=0} = 0,$$

$$\varphi_\psi^{(2)} \equiv 2\mu_3\psi + \mu_5 x + \mu_6 y\,|_{x=y=\psi=0} = 0.$$

Следовательно, первое условие (3.50) и (3.57) удовлетворяется. Имеем

$$R_1(t, x, u, v(t)) \equiv \varphi_x^{(1)}u - \varphi_x^{(1)}y(t) + u^2 - x^2 - v^2(t) + \varphi_t^{(1)} = (\dot{\chi} - 1)x^2 + 2\chi xu + u^2 - 2\chi xy(t) - v^2(t),$$

$$R_2(t, x, y, \psi, v) \equiv \varphi_x^{(2)}\left(-\frac{1}{2}\psi - y\right) + \varphi_\psi^{(2)}2x + \varphi_y^{(2)}v + \frac{1}{4}\psi^2 - v^2 - x^2 + \varphi_t^{(2)} = (\dot{\mu}_1 + 2\mu_5 - 1)x^2 + (\dot{\mu}_2 - \mu_4)y^2 + \left(\dot{\mu}_3 - \frac{1}{2}\mu_5 + \frac{1}{4}\right)\psi^2 - v^2 + (\dot{\mu}_4 - 2\mu_1 + 2\mu_6)xy + (\dot{\mu}_5 - \mu_1 + 4\mu_3)x\psi + \left(\dot{\mu}_6 - \frac{1}{2}\mu_4 - \mu_5 - 1\right)y\psi + \mu_4 xv + 2\mu_2 yv + \mu_6\psi v. \tag{3.134}$$

Теперь сформулируем достаточное условие для того, чтобы равенства (3.134) определяли абсолютную минимаксималь

$$d^2R_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) > 0,$$

$$d^2R_2(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{\psi}(t), \bar{v}(t)) < 0.$$

Для выполнения неравенства $d^2R_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}(t)) > 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$R_{1uu} \equiv 2 > 0; \quad R_{1xx}R_{1uu} - R^2_{1xy} \equiv 4(\dot{\chi} - \chi^2 - 1) > 0.$$

Первое неравенство выполняется тождественно, второе накладывает ограничение на $\chi(t)$: $\dot{\chi} - \chi^2 - 1 > 0$.

Для выполнения неравенства $d^2R_2(t,\ \bar{x}(t),\ \bar{y}(t),\ \overline{\psi}(t),\ \bar{v}(t))<0$ достаточно существование таких непрерывных функций $\mu_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$, чтобы квадратичная форма $-R_2(t,\ x,\ y,\ \psi,\ v)$ была неотрицательной при каждом $t\in(0,\ t_1)$. Соответствующие условия мы не выписываем: они, как известно, именуются неравенствами Сильвестра и являются необходимыми и достаточными условиями положительной определенности квадратичной формы.

Пример 6. Управляемый процесс, с фиксированным временем t_1, описывается следующим уравнением

$$\dot{x}=x+(u-v)^2;\ x(0)=x_0, \tag{3.135}$$

где x — состояние процесса: u и v — управления двух противоположных сторон $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$, участвующих в процессе. Помимо уравнения (3.135), возможные режимы процесса удовлетворяют ограничениям

$$0\leqslant u(t)\leqslant V;\ 0\leqslant v(t)\leqslant V;\ U=V. \tag{3.136}$$

Множество режимов $N=(x(t),\ u(t),\ v(t))$, удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим через D.

Ставится задача: на множестве D найти режим $\overline{N}$, на котором функционал $\mathscr{J}=x(t_1)$ достигает цены игры $l_3(x_0)$, т. е. имеет место принцип оптимальности — седловая точка. Здесь условия (3.16) не выполняются. Воспользуемся общим методом § 3.4. Достаточные условия (3.65), (3.68) имеют вид

$$\inf_u\,[\varphi_x^{(1)}u^2-2\varphi_x^{(1)}v(t)\,u+\varphi_x^{(1)}x+\varphi_x^{(1)}v^2(t)+\varphi_t^{(1)}]=0, \tag{3.137}$$

$$\sup_v\,[\varphi_x^{(2)}v^2-2\varphi_x^{(2)}u(t)\,v+\varphi_x^{(2)}x+\varphi_x^{(2)}u^2(t)+\varphi_t^{(2)}]=0. \tag{3.138}$$

Для определения оптимальных управлений $\bar{u}_n(t,\ v)$, $\bar{v}_n(t,\ u)$ сторон $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ получаем группу неравенств. Выпишем только те, которые приводят к решению задачи. При

$$\varphi_x^{(1)}<0,\quad u^2-2vu\leqslant 0 \tag{3.139}$$

имеем $\overline{u}_n(t,\ v)=0$, а при

$$\varphi_x^{(2)}<0 \tag{3.140}$$

имеем $\overline{v}_n(t,\ u)=u$.

Подставляя (3.140) в (3.137) и (3.139) в (3.138), получаем уравнения типа (3.71), (3.72):

$$\varphi_x^{(1)}x+\varphi_t^{(1)}=0;\quad \sup_v\,[\varphi_x^{(2)}v^2+\varphi_x^{(2)}x+\varphi_t^{(2)}]=0. \tag{3.141}$$

Из (3.141) следует:

$$\bar{v}_n(t,\ \bar{u}_n)=0.$$

Примем $\varphi^{(1)}(t,\ x)=\varphi^{(2)}(t,\ x)=\varphi(t,\ x)=\psi(t)\,x$. Нетрудно видеть, что условиям (3.139) — (3.141), (3.66), (3.69) удовлетворяет функция $\psi(t)=-e^{t_1-t}$. При этом цена игры на управлениях $\overline{u}_n(t,\ \overline{v}_n)=\overline{v}_n(t,\ \overline{u}_n)=0$ равна $l_3=-\varphi(0,\ x_0)=x_0e^{t_1}$.

Легко показать, что в рассмотренном примере при ограничении (3.136) цена игры l_3 достигается на максиминных управлениях сторон и, следовательно, $l_3=l_2$. Взаимная тактическая информация для сто-

ны $\mathscr{P}$ имеет ценность $(\delta_{\mathscr{P}}=l_1-l_3)$, тактическая информация для ороны $\mathscr{E}$ не имеет ценности $(\delta_{\mathscr{E}}=l_3-l_2=0)$.

Рассмотрим влияние ограничений на выбор сторонами $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ тимальных управлений. Пусть в данном примере возможные реимы процесса удовлетворяют начальному условию и ограничению

$$x(0)=0,\ 2V\leqslant U. \tag{3.142}$$

да из (3.137), (3.138), (3.142) следует

$$\text{при }\ \varphi_x^{(1)}<0\ \ \overline{u}_n(t,\ v)=U, \tag{3.143}$$

$$\text{при }\ \varphi_x^{(2)}<0\ \ \overline{v}_n(t,\ u)=u. \tag{3.144}$$

Подставляя (3.144) в (3.137) и (3.143) в (3.138), получаем уравния типа (3.71), (3.72)

$$\varphi_x^{(1)}x+\varphi_t^{(1)}=0;\quad \sup_v\,[\varphi_x^{(2)}(v-U)^2+\varphi_x^{(2)}x+\varphi_t^{(2)}]=0. \tag{3.145}$$

Из (3.145) следует: $\bar{v}_n(t,\ \bar{u}_n)=V$. Примем

$$\varphi^{(1)}(t,\ x)=(U-V)^2-(U-V)^2e^{t_1}-xe^{t_1-t}+$$
$$+[(U-V)^2e^{t_1}-(U-V)^2]\,\frac{x^2}{x^2_1}\,e^{2(t_1-t)},$$
$$\varphi^2(t,\ x)=(U-V)^2-(U-V)^2e^{t_1-t}-xe^{t_1-t}.$$

ти функции удовлетворяют (3.145) и граничным условиям (3.66), (3.69). Цена игры на управлениях $\bar{u}_n=U$, $\bar{v}_n=V$ равна

$$l_3(0)=-\varphi^{(1)}(0,\ 0)=-\varphi^{(2)}(0,\ 0)=(U-V)^2e^{t_1}-(U-V)^2.$$

Пример 7. Управляемый процесс с фиксированным временем описывается следующим уравнением:

$$\dot{x}=x+(u-v)^2,\ x(0)=x_0, \tag{3.146}$$

де x — состояние процесса; u и v — управления двух сторон $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ с противоположными интересами. Помимо уравнения (3.146) возможные режимы процесса удовлетворяют ограничениям

$$0\leqslant u(t)\leqslant U;\quad 0\leqslant v(t)\leqslant V;\quad U=V. \tag{3.147}$$

Множество режимов $N=(x(t),\ u(t),\ v(t))$, удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим через D. Ставится задача: на множестве D найти режим $\overline{N}$, на котором функционал

$$\mathscr{J}=\int_0^{t_1}u(t)\,v(t)\,dt+x(t_1)$$

достигает цены игры $l_3(x_0)$.

Здесь, как и в примере 6, условия (3.16) не выполняются. Воспользуемся общим методом § 3.4. Достаточные условия (3.65), (3.68) имеют вид

$$\inf_u\,[\varphi_x^{(1)}(x+u^2-2uv(t)+v^2(t))-uv(t)+\varphi_t^{(1)}]=0, \tag{3.148}$$

$$\sup_v\,[\varphi_x^{(2)}(x+u^2(t)-2u(t)\,v+v^2)-u(t)\,v+\varphi_t^{(2)}]=0. \tag{3.149}$$

Для определения оптимальных управлений $\bar{u}_n(t, v)$, $\bar{v}_n(t, u)$ сторон $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ получаем группу неравенств:

$$\bar{u}_n(t, v) = 0 \text{ при } \varphi_x^{(1)} \leqslant -1, \qquad (3.150)$$

при $\varphi_x^{(2)} < 0$

$$\bar{v}_n(t, u) = \left(1 + \frac{1}{2\varphi_x^{(2)}}\right)u. \qquad (3.151)$$

Подставляя (3.151) в (3.148) и (3.150) в (3.149), получаем уравнения типа (3.71), (3.72):

$$\inf_u \left[u^2\left(\frac{\varphi_x^{(1)}}{4\varphi_x^{(2)\,2}} - \frac{1}{2\varphi_x^{(2)}} - 1\right)\right] + \varphi_x^{(1)}x + \varphi_t^{(1)} = 0,$$

$$\sup_v [\varphi_x^{(2)} v^2] + \varphi_x^{(2)} x + \varphi_t^{(2)} = 0. \qquad (3.152)$$

При

$$\varphi_x^{(1)} - 2\varphi_x^{(2)} - 4\varphi_x^{(2)\,2} > 0 \qquad (3.153)$$

имеем

$$\bar{u}_n(t, \bar{v}_n) = 0; \quad \bar{v}_n(t, \bar{u}_n) = 0. \qquad (3.154)$$

Если существуют такие две функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, что

$$\varphi_x^{(1)} \leqslant -1; \quad \varphi_x^{(2)} < 0,$$

$$\varphi_x^{(1)}x + \varphi_t^{(1)} = 0; \quad \varphi_x^{(2)}x + \varphi_t^{(2)} = 0,$$

$$\varphi_x^{(1)} - 2\varphi_x^{(2)} - 4\varphi_x^{(2)\,2} > 0,$$

$$\varphi^{(1)}(0, x_0) = \varphi^{(2)}(0, x_0) = -x_0 e^{t_1},$$

$$\varphi^{(1)}(t_1, x) = \varphi^{(2)}(t_1, x),$$

то цена игры на управлениях (3.154) равна

$$l_3 = -\varphi(0, x_0) = x_0 e^{t_1}.$$

Упражнение. Вывести достаточные условия существования решения дифференциальной антагонистической игры с нефиксированным временем ее окончания, воспользовавшись теоремой § 3 приложения.

3.6.1. Задача об оптимальном преследовании цели в гравитационном поле при конфликтной ситуации *)

Постановка задачи. Движение цели и преследователя будем рассматривать как движение двух точек переменной массы, управляемых каждая вектором тяги, в пустоте в произвольном гравитационном поле. Эти движения могут быть описаны следующими двумя

*) Задача решалась совместно с В. И. Гурманом.

системами уравнений:

$$\frac{dr_{\text{ц}}}{dm_{\text{ц}}} = -\frac{1}{\beta_{\text{ц}}} v_{\text{ц}}, \qquad (3.155)$$

$$\frac{dv_{\text{ц}}}{dm_{\text{ц}}} = -\frac{c_{\text{ц}}}{m_{\text{ц}}} p_{\text{ц}} - \frac{1}{\beta_{\text{ц}}} g(r_{\text{ц}}, t), \qquad (3.156)$$

$$\frac{dt}{dm_{\text{ц}}} = -\frac{1}{\beta_{\text{ц}}}, \qquad (3.157)$$

$$\frac{dr_{\text{п}}}{dm_{\text{п}}} = -\frac{1}{\beta_{\text{п}}} v_{\text{п}}, \qquad (3.158)$$

$$\frac{dv_{\text{п}}}{dm_{\text{п}}} = -\frac{c_{\text{п}}}{m_{\text{п}}} p_{\text{п}} - \frac{1}{\beta_{\text{п}}} g(r_{\text{п}}, t), \qquad (3.159)$$

$$\frac{dt}{dm_{\text{п}}} = -\frac{1}{\beta_{\text{п}}}, \qquad (3.160)$$

где $r_{\text{ц}}$, $v_{\text{ц}}$ и $r_{\text{п}}$, $v_{\text{п}}$ — векторы положения и скорости цели и преследователя в инерциальной системе отсчета; $g(r_{\text{ц}})$, $g(r_{\text{п}})$ — векторы гравитационного ускорения; $p_{\text{ц}}$, $p_{\text{п}}$ — единичные направляющие векторы тяг (управления); t — время; $m_{\text{ц}}$, $m_{\text{п}}$ — массы (аргументы); $\beta_{\text{ц}}$, $\beta_{\text{п}}$ — расходы масс в единицу времени (управления); $c_{\text{ц}}$, $c_{\text{п}}$ — скорости истечения соответственно цели и преследователя.

Предполагается, что помимо уравнений (3.155)—(3.160) возможные режимы движения удовлетворяют ограничениям

$$0 \leqslant \beta_{\text{ц}} \leqslant \beta_{\text{ц}\max}, \quad 0 \leqslant \beta_{\text{п}} \leqslant \beta_{\text{п}\max} \qquad (3.161)$$

и граничным условиям

$$m_{\text{ц}0} = m_{\text{ц}0з}, \ t = t_{0з}, \ r_{\text{ц}0} = r_{\text{ц}0з}, \ v_{\text{ц}0} = v_{\text{ц}0з}; \qquad (3.162)$$
$$m_{\text{п}0} = m_{\text{п}0з}, \ t_0 = t_{0з}, \ r_{\text{п}0} = r_{\text{п}0з}, \ v_{\text{п}0} = v_{\text{п}0з};$$

$$t^*_1 \leqslant t_1, \quad \text{где } t^*_1 = t_0 + \frac{m_{\text{п}0} - m_{\text{п}1}}{\beta_{\text{п}\max}}; \qquad (3.163)$$

$$m_{\text{ц}1} = m_{\text{ц}0} + \beta_{\text{ц}\max}(t_1 - t_0). \qquad (3.164)$$

Значения $m_{\text{п}1}$ и $m_{\text{ц}1}$ не фиксированы. Время окончания поиска цели t_1 выбирает преследователь.

Множество режимов

$$z_{\text{ц}} = (r_{\text{ц}}(m_{\text{ц}}), v_{\text{ц}}(m_{\text{ц}}), t(m_{\text{ц}}), p_{\text{ц}}(m_{\text{ц}}), \beta_{\text{ц}}(m_{\text{ц}})),$$
$$z_{\text{п}} = (r_{\text{п}}(m_{\text{п}}), v_{\text{п}}(m_{\text{п}}), t(m_{\text{п}}), p_{\text{п}}(m_{\text{п}}), \beta_{\text{п}}(m_{\text{п}})),$$

удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим соответственно $D_{\text{ц}}$ и $D_{\text{п}}$. Ставится задача: в классе $D_{\text{ц}} \times D_{\text{п}}$ найти режимы $\bar{z}_{\text{ц}}$ и $\bar{z}_{\text{п}}$, на которых функционал $\mathcal{J}$, являющийся функцией конечных значений $r_{\text{ц}}(t_1)$ и $r_{\text{п}}(t_1)$ и равный

$$\mathcal{J} = F(r_{\text{ц}1}, r_{\text{п}1}) = [r_{\text{ц}}(t_1) - r_{\text{п}}(t_1)]^2, \qquad (3.165)$$

достигает абсолютного минимаксного значения на множествах $D_{\text{ц}}$ и $D_{\text{п}}$, т. е.

$$\mathcal{J}(\bar{z}_{\text{ц}}, \bar{z}_{\text{п}}) = l, \quad l = \inf_{z_{\text{п}}} \sup_{z_{\text{ц}}} \mathcal{J}(z_{\text{ц}}, z_{\text{п}}). \qquad (3.166)$$

Поставленную задачу следует решать последовательно в два этапа. На первом этапе находим режим $\bar{z}_{\text{ц}}$, на котором функционал (3.165) достигает максимального значения на множестве $D_{\text{ц}}$ при любом фиксированном $z_{\text{п}} \in D_{\text{п}}$:

$$\mathcal{J}(\bar{z}_{\text{ц}}, z_{\text{п}}) = d(z_{\text{п}}), \quad d(z_{\text{п}}) = \sup_{z_{\text{ц}}} \mathcal{J}(z_{\text{ц}}, z_{\text{п}}), \quad z_{\text{п}} \in D_{\text{п}}. \tag{3.166}$$

На втором этапе находим режим $\bar{z}_{\text{п}}$, на котором функционал (3.167), зависящий теперь только от режима $z_{\text{п}}$, достигает минимального значения на множестве $D_{\text{п}}$:

$$\mathcal{J}(\bar{z}_{\text{ц}}, \bar{z}_{\text{п}}) = \inf_{z_{\text{п}}} d(z_{\text{п}}) = l. \tag{3.168}$$

Если искомые режимы $\bar{z}_{\text{ц}}$, $\bar{z}_{\text{п}}$ в классе $D_{\text{ц}} \times D_{\text{п}}$ отсутствуют, то следует строить минимаксимизирующие последовательности $\bar{z}_{\text{ц}s}$, $\bar{z}_{\text{п}s}$ в классе $D_{\text{ц}} \times D_{\text{п}}$.

Заметим, что поставленная задача решается сравнительно просто лишь для однородного гравитационного поля. Уже для центрального гравитационного поля возникают трудности, вызванные наличием в уравнениях (3.156) и (3.159) гравитационных ускорений $g(r_{\text{ц}})$, $g(r_{\text{п}})$, зависящих от векторов положения. Однако поставленную задачу можно решать приближенно в относительной системе координат, полагая, что в течение всего процесса векторы гравитационных ускорений цели и преследователя приблизительно одинаковы, что действительно имеет место в реальных ситуациях на конечных участках встречи, перехвата и т. п.

Введем в рассмотрение векторы

$$r = r_{\text{ц}} - r_{\text{п}}; \quad v = v_{\text{ц}} - v_{\text{п}}. \tag{3.169}$$

Уравнения движения цели относительно преследователя с учетом (3.169) могут быть получены из (3.155)—(3.160) в виде

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr_{\text{ц}}}{dt} - \frac{dr_{\text{п}}}{dt} = v_{\text{ц}} - v_{\text{п}} = v,$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_{\text{ц}}}{dt} - \frac{dv_{\text{п}}}{dt} = \frac{c_{\text{ц}}}{m_{\text{ц}}} p_{\text{ц}}\beta_{\text{ц}} - \frac{c_{\text{п}}}{m_{\text{п}}} p_{\text{п}}\beta_{\text{п}}. \tag{3.170}$$

При этом функционал (3.165) примет вид

$$\mathcal{J} = F(r_1) = r^2{}_1. \tag{3.171}$$

Первый этап решения. Перейдем в уравнениях (3.170) к новому аргументу $m_{\text{ц}}$:

$$\frac{dr}{dm_{\text{ц}}} = -\frac{1}{\beta_{\text{ц}}} v; \quad \frac{dv}{dm_{\text{ц}}} = -\frac{c_{\text{ц}}}{m_{\text{ц}}} p_{\text{ц}} + \frac{c_{\text{п}}}{\beta_{\text{ц}}} \frac{p_{\text{п}}\beta_{\text{п}}}{m_{\text{п}}}; \tag{3.172}$$

$$\frac{dt}{dm_{\text{ц}}} = -\frac{1}{\beta_{\text{ц}}}.$$

Обозначим через $D_1(p_{\text{п}}, \beta_{\text{п}})$ множество, представляющее собой совокупность всех функций $r(m_{\text{ц}})$, $v(m_{\text{ц}})$, $t(m_{\text{ц}})$, $p_{\text{ц}}(m_{\text{ц}})$, $\beta_{\text{ц}}(m_{\text{ц}})$ обладающих свойствами, вытекающими из (3.155)—(3.164), и удовлетворяющих уравнениям (3.172) при каких-либо фиксированных допустимых управлениях преследователя $p_{\text{п}}(m_{\text{п}})$, $\beta_{\text{п}}(m_{\text{п}}) \in D_{\text{п}}$.

Задачу первого этапа решения теперь можно поставить следующим образом: на множестве $D_1(p_{\text{п}}, \beta_{\text{п}})$ функций $r(m_{\text{ц}})$, $v(m_{\text{ц}})$, $t(m_{\text{ц}})$, $p_{\text{ц}}(m_{\text{ц}})$, $\beta_{\text{ц}}(m_{\text{ц}})$ найти такие функции $\bar{r}(m_{\text{ц}})$, $\bar{v}(m_{\text{ц}})$, $\bar{t}(m_{\text{ц}})$, $\bar{p}_{\text{ц}}(m_{\text{ц}})$, $\bar{\beta}_{\text{ц}}(m_{\text{ц}})$, на которых функционал (3.171) имел бы наибольшее значение.

В соответствии с методом из § 3.2 построим функции

$$R[r, v, t, p_{\text{ц}}, \beta_{\text{ц}}, p_{\text{п}}(t), \beta_{\text{п}}(t)] =$$
$$= \varphi_r^{(1)}\left(-\frac{1}{\beta_{\text{ц}}} v\right) + \varphi_v^{(1)}\left(-\frac{c_{\text{ц}}}{m_{\text{ц}}} p_{\text{ц}} + \frac{c_{\text{п}}}{\beta_{\text{ц}}} \times\right.$$
$$\left.\times \frac{p_{\text{п}}(t)\beta_{\text{п}}(t)}{m_{\text{п}}(t)}\right) + \varphi_t^{(1)}\left(-\frac{1}{\beta_{\text{ц}}}\right) + \varphi_{m_{\text{ц}}}^{(1)}, \tag{3.173}$$

$$\Phi(r_1, v_1, t_1) = r^2{}_1 + \varphi^{(1)}(r_1, v_1, t_1, m_{\text{ц}1}) - \varphi^{(1)}(r_0, v_0, t_0, m_{\text{ц}0}), \tag{3.174}$$

где $\varphi^{(1)}(r, v, t, m_{\text{ц}})$ — некоторая произвольная непрерывная и дифференцируемая функция переменных r, v, t, $m_{\text{ц}}$.

Следуя работам [23—25], зададим функцию $\varphi^{(1)}$ как общее решение следующего уравнения в частных производных:

$$\varphi_r^{(1)} v - \varphi_v^{(1)} \frac{c_{\text{п}} p_{\text{п}}(t)\beta_{\text{п}}(t)}{m_{\text{п}}(t)} + \varphi_t^{(1)} = 0, \tag{3.175}$$

левая часть которого есть коэффициент при $1/\beta_{\text{ц}}$ в выражении (3.173) для функции R. Это решение имеет вид

$$\varphi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}(\xi, \eta, m_{\text{ц}}), \tag{3.176}$$

где ξ, η — первые интегралы характеристической системы уравнения (3.175)

$$\frac{dr}{dt} = v; \tag{3.177}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c_{\text{п}} p_{\text{п}}(t)\beta_{\text{п}}(t)}{m_{\text{п}}(t)}, \tag{3.178}$$

которая описывает движение точки лишь под действием тяги преследователя. Интегралы ξ, η равны

$$\xi = v + \int_{t_0}^{t} \frac{c_{\text{п}} p_{\text{п}}(t)\beta_{\text{п}}(t)}{m_{\text{п}}(t)} dt,$$

$$\eta = r - vt - t\int_{t_0}^{t} \frac{c_{\text{п}} p_{\text{п}}(t)\beta_{\text{п}}(t)}{m_{\text{п}}(t)} dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \frac{c_{\text{п}} p_{\text{п}}(t)\beta_{\text{п}}(t)}{m_{\text{п}}(t)} dt dt, \tag{3.179}$$

$$\eta = r - \xi t + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \frac{c_{\text{п}} p_{\text{п}}(t)\beta_{\text{п}}(t)}{m_{\text{п}}(t)} dt dt. \tag{3.180}$$

После подстановки найденного решения (3.176) в выражения (3.173), (3.174) для функций R и Φ и после перехода к новым переменным получим функции

$$R_1=\sup_{\beta_ц} R=-\frac{c_ц}{m_ц}\,p_ц\left(\varphi_\xi^{(1)}-\varphi_\eta^{(1)}t\right)+\varphi_{m_ц}^{(1)}, \tag{3.181}$$

$$\Phi_1=\left(\eta_1+\xi_1 t_1-\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t}\frac{c_п p_п(t)\,\beta_п(t)}{m_п(t)}\,dtdt\right)^2+$$

$$+\varphi_1^{(1)}(\xi_1,\ \eta_1,\ m_{ц_1})-\varphi_1^{(1)}(\xi_0,\ \eta_0,\ m_{ц_0}). \tag{3.182}$$

Дальнейшему исследованию подлежат функции R_1 и Φ_1. Задача два первого этапа решения теперь состоит в максимизации того же функционала (3.171) на множестве $D_2[p_п(t),\ \beta_п(t)]$. Этот функционал характеризуется той же системой граничных условий и ограничений и новой системой дифференциальных связей

$$\frac{d\xi}{dm_ц}=-\frac{c_ц}{m_ц}\,p_ц, \tag{3.183}$$

$$\frac{d\eta}{dm_ц}=\frac{c_ц}{m_ц}\,p_ц t, \tag{3.184}$$

где компоненты векторов ξ, η играют роль фазовых координат, а компоненты $p_ц$ и t — роль управлений.

В работе [25] исследовалась структура оптимальных режимов ракеты, движение которой описывается уравнениями (3.155)—(3.157), а цель движения — максимизация некоторой функции $F(r_1,\ v_1)$ конечных значений $(r_1,\ v_1)\in D$. Было показано, что вместо исходной задачи можно решать задачу два.

В качестве необходимых условий максимума R_1 имеем

$$R_{1\xi}(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ \overline{p}_ц,\ \overline{t},\ m_ц)=0\rightarrow\dot{\psi}_{(\xi)}=0, \tag{3.185}$$

$$R_{1\eta}(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ \overline{p}_ц,\ \overline{t},\ m_ц)=0\rightarrow\dot{\psi}_{(\eta)}=0,$$

$$R_1(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ \overline{p}_ц,\ \overline{t},\ m_ц)=\sup_{p_ц,\ t} R_1(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ p_ц,\ t,\ m_ц), \tag{3.186}$$

где

$$\psi_{(\xi)}=\varphi_\xi^{(1)}(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ m_ц);\ \psi_{(\eta)}=\varphi_\eta^{(1)}(\overline{\xi},\ \overline{\eta},\ m_ц), \tag{3.187}$$

$\overline{\xi}(m_ц)$, $\overline{\eta}(m_ц)$ — значения ξ, η вдоль искомого оптимального решения при фиксированных управлениях преследователя $p_п(t)$, $\beta_п(t)$ и фиксированном времени поиска t_1. Уравнения (3.185), (3.186) соответствуют присоединенной системе и условию максимума H_1 в принципе максимума Л. С. Понтрягина [26] и потому являются необходимыми условиями оптимальности. В силу (3.185) $\psi_{(\xi)}$, $\psi_{(\eta)}$ являются константами (следствие независимости правых частей уравнений (3.183), (3.184) от фазовых координат).

Функция H_1 имеет вид

$$H_1=-\frac{c_ц}{m_ц}\,p_ц\left(\psi_{(\xi)}-\psi_{(\eta)}t\right). \tag{3.188}$$

Максимум H_1 по управлению $p_ц$ достигается при

$$p_ц=-\frac{\psi_{(\xi)}-\psi_{(\eta)}t}{|\psi_{(\xi)}-\psi_{(\eta)}t|} \tag{3.189}$$

и равен

$$H_2=\max_{p_ц} H_1=\frac{c_ц}{m_ц}\,|\psi_{(\xi)}-\psi_{(\eta)}t|=$$

$$=\frac{c_ц}{m_ц}\sqrt{(\psi_{(\xi)})^2-2\psi_{(\xi)}\psi_{(\eta)}t+(\psi_{(\eta)})^2t^2}. \tag{3.190}$$

Максимум H_2 по t совпадает с максимумом подкоренного выражения — квадратного трехчлена относительно t. Если $\psi_{(\eta)}\neq 0$, то максимум подкоренного выражения в (3.190) может достигаться лишь на границах изменения t [25].

Для получения дополнительной информации об оптимальных управлениях $\overline{p}_ц$, $\overline{t}$ используем необходимые условия на концах — условия трансверсальности. Пусть $B(t_1)$ — открытая область. Тогда из (3.182) получим

$$\Phi_{1\xi_1}=2t_1\left(\eta_1+\xi_1 t_1-\int\int^{t_1}\frac{c_п p_п(t)\,\beta_п(t)}{m_п(t)}\,dtdt\right)+\psi_{(\xi)}=0, \tag{3.191}$$

$$\Phi_{1\eta_1}=2\left(\eta_1+\xi_1 t_1-\int\int^{t_1}\frac{c_п p_п(t)\,\beta_п(t)}{m_п(t)}\,dtdt\right)+\psi_{(\eta)}=0,$$

откуда следует, что

$$\psi_{(\xi)}=t_1\psi_{(\eta)}. \tag{3.192}$$

С учетом (3.192) выражение (3.189) преобразуется к следующему виду

$$\overline{p}_ц=-\psi_{(\eta)}/|\psi_{(\eta)}|, \tag{3.193}$$

и, следовательно, при любом фиксированном управлении преследователя $(p_п(t),\ \beta_п(t))$ и фиксированном времени поиска t_1 единичный направляющий вектор тяги цели является постоянным.

Максимум H_2 по t при этом, как видно из (3.190), достигается на нижней границе $\overline{t}(m_ц)$, равной

$$\overline{t}=t_0+(m_{ц0}-m_ц)/\beta_{ц\,\max}. \tag{3.194}$$

Уравнения (3.185), (3.186), (3.192) являются необходимыми условиями оптимальности управления цели. Можно было бы дополнить эти условия достаточными условиями, задавая соответствующим образом функцию $\varphi(m_ц,\ \xi,\ \eta)$ и исследуя функции R_1 и Φ_1. Однако учитывая, что уравнения (3.184), (3.183) легко интегрируются в общем виде и что оптимальный режим содержится в классе режимов, описываемых равенствами (3.155)—(3.160), нетрудно выразить конечные значения ξ_1, η_1 через $m_{ц1}$, t_1, $\psi_{(\xi)}$, $\psi_{(\eta)}$. При этом функционал $\mathcal{J}$ становится функцией нескольких переменных, которую и следует максимизировать.

После интегрирования (3.183), (3.184) получим

$$\eta_1 = \eta_0 + p_ц A_ц; \; \xi_1 = \xi_0 + p_ц B_ц, \tag{3.195}$$

где

$$A_ц = \int_{m_{ц0}}^{m_{ц1}} c_ц \frac{\overline{t_ц}(m_ц)}{m_ц} dm_ц = c_ц \left[\frac{1}{\beta_{ц\,\max}} (m_{ц0} - m_{ц1}) - \right.$$

$$\left. - \left(t_0 + \frac{m_{ц0}}{\beta_{ц\,\max}} \right) \ln \frac{m_{ц0}}{m_{ц1}} \right],$$

$$B_ц = - \int_{m_{ц0}}^{m_{ц1}} c_ц \frac{dm_ц}{m_ц} = c_ц \ln \frac{m_{ц0}}{m_{ц1}}, \tag{3.196}$$

$$F(r_1) = \left[p_ц (A_ц + B_ц t_1) + \eta_0 + \xi_0 t_1 - \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t} \frac{c_п p_п \beta_п (t)}{m_п (t)} dt dt \right]^2. \tag{3.197}$$

Коэффициент $A_ц + B_ц t_1$ при $p_ц$ в (3.197) положителен. Действительно, из (3.196) $A_ц$ можно представить как $A_ц = -B_ц \tilde{t}$, где $t_0 \leqslant \tilde{t} \leqslant t_1$, отсюда

$$A_ц + B_ц t_1 = B_ц (t_1 - \tilde{t}) > 0. \tag{3.198}$$

Выражение (3.197) зависит от $p_ц$. С учетом (3.198) максимум F по $p_ц$ при фиксированных t_1

$$\iint \frac{c_п p_п (t) \beta_п (t)}{m_п (t)} dt dt$$

достигается при

$$\overline{p}_ц = Q_ц / |Q_ц|, \tag{3.199}$$

где

$$Q_ц = \eta_0 + \xi_0 t_1 - \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t} \frac{c_п p_п \beta_п (t)}{m_п (t)} dt dt. \tag{3.200}$$

Подставляя в (3.197) выражение (3.199), получаем

$$\max_{p_ц} F = \left[\left| \eta_0 + \xi_0 t_1 - \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t} \frac{c_п p_п (t) \beta_п (t)}{m_п (t)} dt dt \right| + A_ц + B_ц t_1 \right]^2. \tag{3.201}$$

Второй этап решения. На втором этапе найдем вначале управления преследователя $\overline{p}_п$, $\overline{\beta}_п$ при фиксированных t_1 и $m_{п1}$, при которых функционал (3.201) достигает минимального значения. Как нетрудно видеть, от этих управлений зависит только двойной интеграл в (3.201).

Вводя условные обозначения

$$r_п = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \frac{c_п p_п (t) \beta_п (t)}{m_п (t)} dt dt, \tag{3.202}$$

$$v_п = \int_{t_0}^{t} \frac{c_п p_п (t) \beta_п (t)}{m_п (t)} dt, \tag{3.203}$$

приходим к задаче о минимуме функционала

$$F_1 = [|\eta_0 + \xi_0 t_1 - r_{п1}| + A_ц + B_ц t_1]^2 \tag{3.204}$$

или, поскольку t_1 фиксирован и $A_ц + B_ц t_1 > 0$, к задаче о минимуме функционала

$$F_2 = |\eta_0 + \xi_0 t_1 - r_{п1}| \tag{3.205}$$

при условиях

$$\frac{dr_п}{dt} = v_п; \quad \frac{dv_п}{dt} = \frac{c_п p_п \beta_п}{m_п}; \quad \frac{dm_п}{dt} = -\beta_п, \tag{3.206}$$

$$r_п (t_0) = 0; \quad v_п (t_0) = 0. \tag{3.207}$$

Простым повторением рассуждений, приведенных ранее на первом этапе решения, эта задача заменяется эквивалентной задачей на (см. [25]) с минимизируемым функционалом (3.205) и системой связей, совпадающей по форме с (3.183), (3.184):

$$\frac{d\xi_п}{dm_п} = -\frac{c_п}{m_п} p_п, \tag{3.208}$$

$$\frac{d\eta_п}{dm_п} = -\frac{c_п}{m_п} p_п t, \tag{3.209}$$

где

$$\xi_п = v_п; \; \eta_п = r_п - v_п t. \tag{3.210}$$

Исследуя на минимум функцию H для этой задачи, получаем с учетом условий трансверсальности

$$p_п = \mathrm{const}, \tag{3.211}$$

$$\overline{t} = t_п (m_п) = t_0 + \frac{1}{\beta_{\max}} (m_{п0} - m_п). \tag{3.212}$$

После интегрирования (3.208), (3.209) будем иметь

$$r_{п1} = \eta_{п1} - \xi_{п1} t_1 = p_п (A_п + B_п t_1), \tag{3.213}$$

где

$$A_п = c_п \int_{m_{п0}}^{m_{п1}} \frac{t_п (m_п)}{m_п} dm_п = c_п \left[\frac{1}{\beta_{п\,\max}} (m_{п0} - m_{п1}) - \right.$$

$$\left. - \left(t_0 + \frac{m_{п0}}{\beta_{п\,\max}} \right) \ln \frac{m_{п0}}{m_{п1}} \right], \tag{3.214}$$

$$B_п = c_п \ln \frac{m_{п0}}{m_{п1}} = - c_п \int_{m_{п0}}^{m_{п1}} \frac{dm_п}{m_п}, \tag{3.215}$$

причем аналогично выводу (3.198)

$$A_п + B_п t_1 > 0. \qquad (3.216)$$

Отсюда следует, что минимум F_2 по $p_п$ достигается при

$$p_п = (\eta_0 + \xi_0 t_1)/|\eta_0 + \xi_0 t_1|. \qquad (3.217)$$

Подставляя найденное значение $p_п$ в выражение (3.204) для F_1, получаем

$$F_3 = \min_{p_п} F_1 = [||\eta_0 + \xi_0 t_1| - (A_п + B_п t_1)| + A_ц + B_ц t_1]^2. \qquad (3.218)$$

Наконец, исследование функции F_3 на минимум по оставшимся свободным параметрам t_1 и $m_{п1}$ при указанных ограничениях завершает решение задачи. Зависимость F_3 от этих параметров достаточно сложная, так что для получения окончательных результатов требуются числовые расчеты.

Следует отметить одну характерную особенность решения, полученного для $p_ц$ и $p_п$. Представим вектор $Q_ц$ из (3.200) в виде:

$$Q_ц = \eta_0 + \xi_0 t_1 - p_п (A_п + B_п t_1) \qquad (3.219)$$

и учитывая (3.217), получаем

$$Q_ц = p_п (|\eta_0 + \xi_0 t_1| - (A_п + B_п t_1)). \qquad (3.220)$$

Отсюда

$$p_ц = p_п \operatorname{sign} (|\eta_0 + \xi_0 t_1| - (A_п + B_п t_1)), \qquad (3.221)$$

т. е. векторы тяг цели и преследователя коллинеарны и направлены одинаково или противоположно друг другу в зависимости от знака некоторой функции начальных условий (t_1 и $m_{п1}$ в результате минимизации F_3 оказываются функциями начальных условий ξ_0, η_0, t_0).

Смысл выражения (3.217) следующий: вектор тяги преследователя следует направить в ту точку в относительной системе координат, в которой оказалась бы цель в момент t_1, если бы оба аппарата двигались по инерции. В самом деле вектор $\eta_0 + \xi_0 t_1 = r_0 + (t_1 - t_0) v_0$, а это и есть вектор положения в момент t_1 при движении по инерции.

Пример. Пусть начальные условия и другие параметры рассматриваемой системы цель — преследователь имеют следующие значения:

$$r^1{}_0 = 100 \cdot 10^3 \text{ м}; \; r^2{}_0 = 0; \; r^3{}_0 = 0;$$

$$v^1{}_0 = 10^3 \text{ м/с}; \; v^2{}_0 = 100 \text{ м/с}; \; v^3{}_0 = 0;$$

$$m_{ц0}/\beta_{ц\,max} = 200 \text{с}; \; m_{п0}/\beta_{п\,max} = 100 \text{ с};$$

$$c'_ц = c_п = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$t_0 = 0; \; 0 \leqslant t_1 \leqslant 200 \text{ с};$$

$$\frac{m_{ц0} - m_{ц1}}{\beta_{ц\,max}} = \begin{cases} t_1 & \text{при } t_1 \leqslant 150 \text{ с}; \\ 150 \text{ с} & \text{при } t_1 > 150 \text{ с}. \end{cases}$$

При этом $\xi_0 = v_0$, $\eta_0 = r_0$.

Минимум F_3 равен $\sim 13\,000$ м и достигается при следующих значениях аргументов: $t_1 \approx 79$ с, $m_{п1}/\beta_{п\,max} \approx 230$ с.

4. Методы приближенного решения антагонистических дифференциальных игр

Наряду с методами решения антагонистических дифференциальных игр, изложенными в гл. 2 и 3, важную роль в практических задачах играют различные методы приближенного решения антагонистических дифференциальных игр. Основываясь на приближенных вычислениях, можно получить стратегии двух игроков, имеющих противоположные интересы, близкие к оптимальным. Имеющийся опыт дает основание утверждать, что только при хорошо разработанных приближенных методах откроется возможность решения практически важных игровых задач. Мы попытаемся здесь обойти трудности, связанные с нахождением строго оптимального решения. Однако, так как это только первые шаги в нахождении приближенного решения, естественно, излагаемые методы не свободны от недостатков, может быть даже существенных.

4.1. МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИГРЫ ПРИ МИНИМАКСНОМ ПРИНЦИПЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть имеются действительные векторные пространства X, U и V с элементами $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, \ldots, u^r)$ и $v = (v^1, \ldots, v^s)$ соответственно и отрезок $[t_0, t_1]$ числовой оси T.

Пусть заданы процесс игры, который описывается уравнениями

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x, u, v), \; i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.1)$$

и критерий игры — функционал

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} p(t, x, u, v)\,dt + F(x_1), \qquad (4.2)$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — n-мерный вектор состояния игры; $f^i(t, x, u, v)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $p(t, x, u, v)$ заданы, кусочно-непрерывны в пространстве $T \times X \times U \times V$ и при каждом фиксированном $t \in (t_0, t_1)$ непрерывны в пространстве $X \times U \times V$; $F(x)$ — функция, заданная в пространстве X; $x_1=x(t_1)$; $u(t)$ и $v(t)$ — стратегии (управления) принадлежащие игрокам $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ соответственно.

В силу уравнений (4.1) значение функционала (4.2) определено, если заданы начальная точка (t_0, x_0) и стратегии $u(t)$, $v(t)$ игроков $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ на $[t_0, t_1]$. Введем обозначения

$$d(t_0, x_0, v(t)) = \sup_{\{u(t)\}} \mathscr{I}(t_0, x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= \mathscr{I}(t_0, x_0, \overline{u}_n(t, v), v(t)), \quad v(t) \in C_2, \tag{4.3}$$
$$l_1(t_0, x_0) = \inf_{\{v(t)\}} d(t_0, x_0, v(t)) =$$
$$= \inf_{\{v(t)\}} \sup_{\{u(t)\}} \mathscr{I}(t_0, x_0, u(t), v(t)) =$$
$$= \mathscr{I}(t_0, x_0, \overline{u}_n(t, \overline{v}), \overline{v}(t)), \tag{4.4}$$

где $\{u(t)\}$ и $\{v(t)\}$ — множества всех допустимых на $[t_0, t_1]$ стратегий игроков. Допустимыми будем считать любые кусочно-непрерывные на $[t_0, t_1]$ функции $u(t) \in C_1$, $v(t) \in C_2$.

Отметим, что на множество допустимых $x(t)$ при $t \in (t_0, t_1)$ не наложено никаких ограничений, кроме вытекающих из условия $u \in C_1(t)$, $v \in C_2(t)$ и (4.1). Будем считать заданной область B_1 переменных t, x с сечениями $B_1(t)$ при фиксированных $t \in (t_0, t_1)$. Область B_1 подбирается так, чтобы она содержала все решения $x(t)$ системы (4.1) при (t_0, x_0) и $u(t) \in C_1(t)$, $v(t) \in C_2(t)$. Такая область существует, если множества $C_1(t)$ и $C_2(t)$ ограничены.

В силу определения верхней грани (4.3) при любой фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathscr{E}$ существует такая последовательность $u_\alpha(t, v) \subset \{u(t)\}$, что

$$\mathscr{I}(t_0, x_0, u_\alpha(t, v), v(t)) \to d(t_0, x_0, v(t)),$$
$$\alpha \to \infty, \ v(t) \in C_2. \tag{4.5}$$

В силу определения нижней грани (4.4) существует такая последовательность $v_\beta(t) \subset \{v(t)\}$, что

$$\mathscr{I}(t_0, x_0, u_\alpha(t, v_\beta), v_\beta(t)) \to d(t_0, x_0, v_\beta(t)) \to l_1(t_0, x_0),$$
$$\alpha \to \infty, \ \beta \to \infty. \tag{4.6}$$

Требуется для фиксированной начальной точки (t_0, x_0) найти такие две последовательности $u_\alpha(t, v_\beta)$ и $v_\beta(t)$, при которых выполняется (4.5), (4.6). Такие две последовательности назовем минимаксимизирующими.

Эта постановка позволяет не рассматривать методы определения в классе допустимых строго минимаксного режима $\overline{u}_n(t, \overline{v})$, $\overline{v}(t)$, удовлетворяющего условиям (4.3), (4.4). Найти такой режим в ряде случаев гораздо труднее, чем найти минимаксимизирующие последовательности, так как для определения строго минимаксного режима необходимо решить в общем случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (см., например, гл. 3).

При любой фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathscr{E}$ и начальном условии $x(t_0)=x_0$ состояние игры (4.1) и значение функционала (4.2) зависят только от стратегии $u(t)$ игрока $\mathscr{P}$. Учитывая это, а также то, что рассматривается минимаксный принцип оптимальности, поставленную задачу будем решать последовательно в два этапа.

На первом этапе определим стратегию $\tilde{u}(t, v)$, доставляющую функционалу (4.2) при любой фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ значение, отличающееся от его точного максимального значения на величину, не превышающую $\Delta_1(v(t))$, т. е.

$$\mathscr{I}(t_0, x_0, \overline{u}_n(t, v), v(t)) -$$
$$- \mathscr{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)) \leqslant \Delta_1(v(t)). \tag{4.7}$$

В результате первого этапа решения получим систему условий, обеспечивающих выполнение (4.5) с точностью (4.7). Эта система условий и приближенное максимальное значение функционала (4.2) по стратегии $u(t)$, равное $\mathscr{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t))$, зависит только от стратегии $v(t)$ игрока $\mathscr{E}$.

Задача второго этапа решения заключается в том, чтобы, при условии обеспечения (4.5) с точностью (4.7), выбрать такую стратегию $\tilde{v}(t) \in C_2$, которая доставляла бы функционалу $\mathscr{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t))$ значение, отличающееся от его точного минимального значения $\mathscr{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \overline{v}^*), \overline{v}^*(t))$ на величину, не превышающую Δ_2:

$$\mathscr{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \tilde{v}), \tilde{v}(t)) -$$
$$- \mathscr{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \overline{v}^*), \overline{v}^*(t)) \leqslant \Delta_2. \tag{4.8}$$

Тогда, как будет показано ниже, значение функционала (4.2) на стратегиях $\tilde{u}(t, \tilde{v})$, $\tilde{v}(t)$ отличается от его точного минимаксного значения $l_1(t_0, x_0)$ на величину, не превышающую $\Delta_1(\tilde{v}(t))+\Delta_2$, иными словами, исследуемый функционал (4.2) на стратегиях $\tilde{u}(t, \tilde{v})$, $\tilde{v}(t)$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующей оценке:

$$|\mathcal{I}(t_0, x_0, \overline{u}_n(t, \overline{v}), \overline{v}(t)) - \mathcal{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \tilde{v}), \tilde{v}(t))| \leqslant \leqslant \Delta_1(\tilde{v}(t)) + \Delta_2. \quad (4.9)$$

Для решения задачи первого этапа воспользуемся конструкциями § 3.2. Построим функции

$$R_1(t, x, u, v(t)) \equiv \varphi_x^{(1)} f(t, x, u, v(t)) - - p(t, x, u, v(t)) + \varphi_t^{(1)}, \quad (4.10)$$

$$P_1(t, x, v(t)) \equiv R_1(t, x, \overline{u}_n(t, x, v), v(t)) \equiv \equiv \inf_{u \in C_1(t)} R_1(t, x, u, v(t)), \quad (4.11)$$

где $\varphi^{(1)}(t, x)$ непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция.

Как было показано в § 3.2, задача первого этапа была бы решена полностью и точно, если бы удалось найти такую функцию $\varphi^{(1)}(t, x)$, чтобы $P_1(t, x, v)$ при фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$ не зависела от x и чтобы

$$F(x) + \varphi^{(1)}(t_1, x) = 0. \quad (4.12)$$

Однако для этого требуется решить нелинейное уравнение в частных производных

$$P_1(t, x, v(t)) \equiv \inf_{u \in C_1(t)} [\varphi_x^{(1)} f(t, x, u, v(t)) - - p(t, x, u, v(t)) + \varphi_t^{(1)}] = 0. \quad (4.13)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (3.21) при $W \equiv \equiv 0$. Полагая в (3.21) $W \equiv 0$, мы усиливаем требование, налагаемое на $\varphi^{(1)}(t, x)$ этим уравнением. При этом уравнение (4.13) совпадает с уравнением Беллмана для решения вариационных задач. Для уравнения (4.13) неизвестны не только методы отыскания решения, но и сам факт его существования.

Приводимая ниже теорема дает возможность определить приближенную стратегию $\tilde{u}(t, x, v)$, оптимальную в смысле (4.5), без решения уравнения (4.13).

Пусть имеется некоторая функция $\tilde{\varphi}^{(1)}(t, x)$, удовлетворяющая граничному условию (4.12), но не обязательно удовлетворяющая уравнению (4.13). Тогда $\tilde{u}(t, x, v)$ и $\tilde{P}(t, x, v(t))$ в силу (4.11) можно определить при фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$.

Введем в рассмотрение величину

$$\Delta_1(v(t)) = = \int_{t_0}^{t_1} |\sup_{x \in B_1(t)} \tilde{P}_1(t, x, v(t)) - \inf_{x \in B_1(t)} \tilde{P}_1(t, x, v(t))| \, dt, \quad v(t) \in C_2. \quad (4.14)$$

Теорема 1. Исследуемый на первом этапе решения задачи функционал (4.2) при любой фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$ на стратегии $\tilde{u}(t, x, v)$, принадлежащей игроку $\mathcal{P}$, удовлетворяет следующей оценке:

$$\mathcal{I}(t_0, x_0, \overline{u}_n(t, v), v(t)) - - \mathcal{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)) \leqslant \Delta_1(v(t)). \quad (4.15)$$

Здесь $\tilde{u}(t, v) = \tilde{u}(t, \tilde{x}(t), v)$, $\tilde{x}(t)$ — решение системы (4.1) при $u = \tilde{u}(t, x, v)$.

Следствие. Пусть имеется последовательность $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$ такая, что

$$\Delta_1(v(t)) = \Delta_1(\varphi_\alpha^{(1)}, v(t)) \to 0 \text{ при } \alpha \to \infty. \quad (4.16)$$

Тогда последовательность $u_\alpha(t, x, v) = \tilde{u}(t, x, \varphi_\alpha^{(1)}(t, x), v)$ при любой фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$ является максимизирующей.

Доказательство. Введем в рассмотрение функционал

$$L_1 = F(x_1) + \varphi^{(1)}(t_1, x_1) - \varphi^{(1)}(t_0, x_0) - - \int_{t_0}^{t_1} R_1(t, x, \varphi^{(1)}(t, x), u, v(t)) \, dt, \quad (4.17)$$

заданный на множестве E_1 независимых пар векторфункций $(x(t), u(t))$. Этот функционал обладает тем свойством, что на множестве $D_1(v(t)) \subset E_1$ пар $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих уравнениям (4.1) при фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$, $L_1 = \mathcal{I}$ при любом

$\varphi^{(1)}(t, x)$. Введем обозначение

$$\widetilde{L}_1(x(t), u(t), v(t)) = L_1(x(t), u(t), v(t), \widetilde{\varphi}^{(1)}(t, x)), \quad (4.18)$$

$$\widetilde{d}(v(t)) = \sup_{(x(t),\ u(t)) \in E_1} \widetilde{L}_1(x(t), u(t), v(t)). \quad (4.19)$$

Имеем

$$\widetilde{d}(v(t)) = -\varphi^{(1)}(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{\mu}_1(t, v(t))\,dt, \quad (4.20)$$

где

$$\widetilde{\mu}_1(t, v(t)) = \inf_{\substack{u \in C_1(t) \\ x \in B_1(t)}} \widetilde{R}_1(t, x, u, v(t)) =$$

$$= \inf_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}_1(t, x, v(t)). \quad (4.21)$$

Пусть $\tilde{x}(t)$ — решение уравнений (4.1) при фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$, где $u = \tilde{u}(t, x, v)$ задается равенством (4.11) при $\varphi^{(1)} = \widetilde{\varphi}^{(1)}(t, x)$. Учитывая, что

$$\widetilde{R}_1(t, \tilde{x}, \tilde{u}(t, v), v(t)) = \widetilde{P}_1(t, \tilde{x}, v(t)), \quad (4.22)$$

а также вспоминая (4.14), (4.17), (4.20), будем иметь

$$\widetilde{d}(v(t)) - \widetilde{L}_1(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t, v), v(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} |\widetilde{P}_1(t, \tilde{x}(t), v(t)) - \widetilde{\mu}_1(t, v(t))|\,dt \leqslant \Delta_1(v(t)). \quad (4.23)$$

Так как $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t, v)) \in D_1(v(t))$, то

$$\widetilde{L}_1(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t, v), v(t)) = \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)), \quad (4.24)$$

и, следовательно,

$$\widetilde{d}(v(t)) - \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)) \leqslant \Delta_1(v(t)). \quad (4.25)$$

Так как $D_1(v(t)) \subset E_1$, то $\widetilde{d}(v(t)) \geqslant d(t_0, x_0, v(t))$ и, учитывая (4.25), (4.3), получаем

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, v), v(t)) -$$

$$- \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)) \leqslant \Delta_1(v(t)). \quad (4.26)$$

Теорема доказана.

Если задана конкретная конструкция последовательности $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$, удовлетворяющая (4.16), и оказывается, что траектории $x_\alpha(t)$, соответствующие $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$, в силу (4.1), (4.11), (4.12) удовлетворяют условию $x(t, t_0, x_0) \in B_1(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$, то тем самым в силу следствия теоремы 1 будет задан регулярный алгоритм построения стратегий $\tilde{u}_\alpha(t, x, v)$, который при достаточно большом α сколь угодно точно реализует максимальное значение функционала (4.2) при фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$. При этом теорема 1 дает конкретную оценку (4.15) близости значения функционала (4.2) на стратегии $\tilde{u}_\alpha(t, x, v)$ игрока $\mathcal{P}$ к точной верхней грани (4.3).

Зададим $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$ в виде полинома с неизвестными коэффициентами $\psi(t)$:

$$\varphi_\alpha^{(1)}(t, x) = \sum_{i_1=0}^{l_1} (x^1)^{i_1} \times$$

$$\times \left(\sum_{i_2=0}^{l_2} (x^2)^{i_2} \right) \left(\dots \left(\sum_{i_n=0}^{l_n} \psi_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t) (x^n)^{i_n} \right) \right). \quad (4.27)$$

Здесь $x^1, x^2, \dots, x^n$ — компоненты вектора x состояния игры.

Выражение (4.27) для $\varphi_\alpha^{(1)}$ содержит $\alpha = l_1 \cdot l_2 \dots l_n$ произвольных непрерывных функций $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t)$, которые подбираются так, чтобы удовлетворить граничному условию (4.12) и каким-то способом минимизировать величину $\Delta_{1\alpha} = \Delta_1(v(t), \varphi_\alpha^{(1)})$. Следуя [2], избираем следующий способ реализации последнего требования.

Зададим α опорных линий $x = x_\gamma(t)$, распределенных по области $B_1(t)$ при каждом t следующим образом. Диапазоны значений переменных x^i, соответствующие области $B_1(t)$, делятся на промежутки, для чего на оси x^1 откладываются l_1 точек, на оси x^2 откладываются l_2 точек и т. д. Через эти точки проводятся гиперплоскости, перпендикулярные соответствующим осям. Пересечение всех построенных таким образом гиперплоскостей дадут $\alpha = l_1 \cdot l_2 \dots l_n$ узловых точек. Повторяя такое построение для каждого момента времени t и следя за тем, чтобы координаты узловых точек менялись по времени непрерывно, получаем семейство опорных линий $x = x_\gamma(t)$. Практически при построении опорных линий удобно пользоваться семействами линий, хорошо описываемых аналитически, например, семейством прямых, парабол, ломаных и т. д.

Подставляя принятое выражение для $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$ в (4.13) и требуя, чтобы (4.13) выполнялось только на опорных линиях, т. е. чтобы

$$P_1[t, x_\gamma(t), \varphi_\alpha^{(1)}(t, x_\gamma(t)), v(t)] = 0, \quad \gamma = 1, 2, \ldots, \alpha, \tag{4.28}$$

получаем следующую систему дифференциальных уравнений для функций $\psi(t)$:

$$\sum_{i_1=0}^{l_1} (x^1{}_\gamma)^{i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{l_2} (x^2{}_\gamma)^{i_2} \right) \left(\cdot\cdot \left(\sum_{i_n=0}^{l_n} \dot{\psi}_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t) (x^n{}_\gamma)^{i_n} \right) \right) =$$
$$= -H_1(t, x_\gamma, \varphi_x^{(1)}(t, x_\gamma), v(t)), \quad \gamma = 1, 2, \ldots, \alpha. \tag{4.29}$$

Здесь

$$H_1(t, x, \varphi_x^{(1)}, v(t)) =$$
$$= \inf_{u \in C_1(t)} [\varphi_x^{(1)} f(t, x, u, v(t)) - p(t, x, u, v(t))]. \tag{4.30}$$

Система (4.29) представляет собой α обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно такого же числа неизвестных функций $\psi(t)$, линейных относительно производных. Функции $x_\gamma^i(t)$, входящие в коэффициенты, заданы, начальные условия для системы задаются равенством (4.12).

Разрешив систему (4.29) относительно производных, получим

$$d\psi^j/dt = h^j(t, \psi, v), \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha, \tag{4.31}$$

где $\psi^j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, \alpha)$ являются компонентами вектор-функции $\psi(t)$.

Назовем уравнения (4.31) при начальных условиях (4.12) достаточными условиями приближенного абсолютного максимума функционала (4.2) при фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ игрока $\mathcal{E}$. При выполнении (4.12), (4.31) значение функционала (4.2) на стратегии

$\overset{\circ}{u}_\alpha(t, x, v)$ отличается от его точного максимального значения (4.3) на величину, не превышающую $\Delta_{1\alpha}(v(t))$.

Определим приближенное значение абсолютного максимума функционала (4.2). Имея в виду (4.12), (4.17), (4.22), (4.24), получаем

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)) = -\varphi_\alpha^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0) -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \tilde{P}_1(t, \tilde{x}, v(t))\, dt. \tag{4.32}$$

Примем

$$\tilde{P}_1(t, \tilde{x}, v(t)) \equiv \tilde{P}_1(t, x_i(t), v(t)). \tag{4.33}$$

Тогда из условия (4.28) следует

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)) = -\varphi_\alpha^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0). \tag{4.32*}$$

Вследствие допущения (4.33) вопрос о выполнении (4.26) при всех α остается открытым. Есть основания надеяться, что вследствие принятой конструкции последовательности $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$, удовлетворяющей (4.16), при больших α неравенство (4.26) будет выполняться. Однако мы можем апостериори после второго этапа решения задачи проверить неравенство (4.23) при допущении (4.33). Если оно выполняется, то тем более выполняется неравенство (4.26). Если (4.23) не выполняется при допущении $\tilde{P}_1(t, \tilde{x}, \tilde{v}(t)) \equiv \tilde{P}_1(t, x_\gamma(t), \tilde{v}(t)) = 0$,

то следует задаться бо́льшим α в (4.27) и заново повторить расчет.

Задача второго этапа решения, как указывалось выше, заключается в следующем: при обеспечении достаточных условий (4.12), (4.31) приближенного значения абсолютного максимума функционала (4.2) при фиксированной стратегии $v(t) \in C_2$ выбрать такую стратегию $\tilde{v}(t)$ игрока $\mathcal{E}$, которая доставляла бы функционалу (4.32*) значение, отличающееся от его точного минимального значения $\mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \bar{v}^*), \bar{v}^*(t))$ на величину, не превышающую Δ_2. Заметим, что можно было бы решать эту задачу не для функционала (4.32*), а для функционала (4.32) (не делая допущения (4.33)), но тогда бы решение значительно усложнилось.

Рассмотрим сначала задачу об абсолютном минимуме функционала (4.32*) при условии, что вектор-функции $x(t)$, $\psi(t)$ являются решением системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t,\ x,\ \tilde{u}(t,\ x,\ \psi,\ v),\ v), \qquad (4.34)$$

$$d\psi/dt = h(t,\ \psi,\ v) \qquad (4.35)$$

при начальных условиях

$$x(t_0) = x_0; \quad \psi(t_1) = \psi_1. \qquad (4.36)$$

Уравнения (4.34) описывают состояние процесса при стратегии $\tilde{u}(t,\ x,\ \psi,\ v)$ игрока $\mathcal{I}$, которая доставляет максимум функционалу (4.2) при $v(t) \in C_2$ с ошибкой, не превышающей величины $\Delta_{1\alpha}(v(t))$. Управление $\tilde{u}(t,\ x,\ \psi,\ v)$ определяется из (4.30). Уравнения (4.35) при начальных условиях $\psi(t_1) = \psi_1$, определяемых из (4.12), являются достаточными условиями, обеспечивающими приближенное значение абсолютного максимума функционала (4.2) по стратегии игрока $\mathcal{I}$.

Значение функционала (4.32*) не зависит от состояния процесса x (x_0 задано). Поэтому достаточно решить задачу об абсолютном минимуме функционала (4.32*) при условии, что вектор-функции $\psi(t)$, $v(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (4.35). Если эта задача решена, т. е. если найдена на допустимом множестве пар $\psi(t)$, $v(t)$ такая пара $\bar{\psi}(t)$, $\bar{v}^*(t)$, на которой функционал (4.32*) принимает наименьшее значение, то уравнения (4.34) решаются отдельно.

Применяя формализм решения игры, изложенный в § 3.2, получаем достаточные условия абсолютного минимума функционала (3.32*)

$$P_2(t,\ \psi) \equiv \sup_{v \in C_2(t)} [\varphi_\psi^{(2)} h(t,\ \psi,\ v) + \varphi_t^{(2)}], \qquad (4.37)$$

$$P_2(t,\ \psi) = 0, \qquad (4.38)$$

$$\varphi^{(1)}(t_0,\ x_0,\ \psi_0) + \varphi^{(2)}(t_0,\ \psi_0) = 0. \qquad (4.39)$$

Здесь $\varphi^{(2)}(t,\ \psi)$ — непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция в области B_2 переменных t, ψ и дифференцируемая всюду на $B_2(t)$ при каждом фиксированном $t \in (t_0,\ t_1)$. Область B_2 подбирается так, чтобы она содержала все решения $\psi(t)$ системы (4.35) при любых $v(t) \in C_2(t)$. Такая область существует, если множество $C_2(t)$ ограничено. Если удается решить уравнение

(4.38) в частных производных при краевом условии (4.39), то задача второго этапа решается точно.

Приводимая ниже теорема дает возможность без решения уравнения (4.38) определить приближенную оптимальную стратегию $\tilde{v}(t)$ игрока $\mathcal{E}$, на которой значение функционала (4.32*) отличается от его абсолютного минимального значения на величину, не превышающую Δ_2.

Пусть имеется некоторая функция $\tilde{\varphi}^{(2)}(t,\ \psi)$, удовлетворяющая *граничному условию* (4.39) (*но не обязательно удовлетворяющая уравнению* (4.38)). В силу (4.37) можно определить $\tilde{v}(t,\ \psi)$ и $\tilde{P}_2(t,\ \psi)$.

Введем в рассмотрение величину

$$\Delta_2 = \int_{t_0}^{t_1} |\sup_{\psi \in B_2(t)} \tilde{P}_2(t,\ \psi) - \inf_{\psi \in B_2(t)} \tilde{P}_2(t,\ \psi)|\, dt. \qquad (4.40)$$

Теорема 2. Исследуемый на втором этапе решения задачи функционал (4.32*) на стратегии $\tilde{v}(t,\ \psi)$, принадлежащей игроку $\mathcal{E}$, удовлетворяет следующей оценке:

$$\mathcal{I}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) - \mathcal{I}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}^*),\ \bar{v}^*(t)) \leqslant \Delta_2. \qquad (4.41)$$

Здесь $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(t,\ \tilde{\psi}(t))$, $\tilde{\psi}(t)$ — решение системы (4.35) при $v = \tilde{v}(t,\ \psi)$.

С л е д с т в и е. Пусть имеется последовательность $\varphi_\beta^{(2)}(t,\ \psi)$, такая, что

$$\Delta_{2\beta} = \Delta_2(\varphi_\beta^{(2)}) \to 0 \text{ при } \beta \to \infty. \qquad (4.42)$$

Тогда последовательность $v_\beta(t,\ \psi) = \bar{v}^*(t,\ \psi,\ \varphi_\beta^{(2)}(t,\ \psi))$ является минимизирующей для функционала (4.32).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы из работы [2] или теоремы 1 этого параграфа, но для минимума функционала. Тем не менее, считая, что в данном случае повторение оправдано, докажем эту теорему.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение функционал

$$L_2 = -\varphi^{(1)}(t_0,\ x_0,\ \psi_0) + \varphi^{(2)}(t_1,\ \psi_1) - \varphi^{(2)}(t_0,\ \psi_0) - \int_{t_0}^{t_1} R_2(t,\ \psi,\ \varphi^{(2)}(t,\ \psi),\ v)\, dt, \qquad (4.43)$$

заданный на множестве E_2 независимых пар вектор-функций $(\psi(t),\ v(t))$. Здесь

$$R_2(t,\ \psi,\ \varphi^{(2)}(t,\ \psi),\ v) = \varphi^{(2)}_{\psi} h(t,\ \psi,\ v) + \varphi^{(2)}_{t}.$$

Функционал (4.43) обладает тем свойством, что на множестве $D_2 \subset E_2$ пар $(\psi(t),\ v(t))$, удовлетворяющих уравнениям (4.35), $L_2 = \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ v),\ v(t)) = -\varphi^{(1)}(t_0,\ x_0,\ \psi_0)$ при любом $\varphi^{(2)}(t,\ \psi)$.

Введем обозначения

$$\tilde{L}_2(\psi(t),\ v(t)) = L_2(\psi(t),\ v(t),\ \tilde{\varphi}^{(2)}(t,\ \psi)), \tag{4.44}$$

$$\tilde{l} = \inf_{(\psi(t),\ v(t)) \in E_2} \tilde{L}_2(\psi(t),\ v(t)). \tag{4.45}$$

Поскольку $\varphi^{(2)}(t,\ \psi)$ удовлетворяет условию (4.39), имеем

$$\tilde{l} = \varphi^{(2)}(t_1,\ \psi_1) - \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mu}_2(t)\,dt, \tag{4.46}$$

где

$$\tilde{\mu}_2(t) = \sup_{\substack{v \in C_2(t) \\ \psi \in B_2(t)}} \tilde{R}_2(t,\ \psi,\ v) = \sup_{\psi \in B_2(t)} \tilde{P}(t,\ \psi). \tag{4.47}$$

Учитывая, что $\tilde{R}_2(t,\ \tilde{\psi},\ \tilde{v}(t)) = \tilde{P}_2(t,\ \tilde{\psi})$, а также вспоминая (4.40), (4.43) и (4.46), будем иметь

$$\tilde{L}_2(\tilde{\psi}(t),\ \tilde{v}(t)) - \tilde{l} \leqslant \int_{t_0}^{t_1} |\tilde{\mu}_2(t) - \tilde{P}_2(t,\ \tilde{\psi}(t))|\,dt \leqslant \Delta_2. \tag{4.48}$$

Так как $(\tilde{\psi}(t),\ \tilde{v}(t)) \in D_2$, то

$$\tilde{L}_2(\tilde{\psi}(t),\ \tilde{v}(t)) = \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)),$$

и, следовательно,

$$\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) - \tilde{l} \leqslant \Delta_2. \tag{4.49}$$

Так как $D_2 \subset E_2$, то $\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}^*),\ \bar{v}^*(t)) \geqslant \tilde{l}$ и, учитывая (4.49), получаем

$$\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) - \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}^*),\ \bar{v}^*(t)) \leqslant \Delta_2. \tag{4.50}$$

Теорема доказана.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. Исследуемый на минимаксное значение функционал (4.2) на стратегиях $\tilde{u}(t,\ \tilde{v})$, $\tilde{v}(t)$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующей оценке:

$$|l_1(t_0,\ x_0) - \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t))| \leqslant \Delta_1(\tilde{v}(t)) + \Delta_2. \tag{4.51}$$

Здесь $\tilde{u}(t,\ \tilde{v}) = \tilde{u}(t,\ \tilde{x}(t),\ \tilde{\psi}(t),\ \tilde{v}(t))$; $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(t,\ \tilde{\psi}(t))$; $\tilde{x}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ — решение системы (4.34), (4.35) при $v = \tilde{v}(t,\ \psi)$.

Следствие. Пусть имеются последовательности $\varphi^{(1)}_{\alpha}(t,\ x)$ и $\varphi^{(2)}_{\beta}(t,\ \psi)$ такие, что

$$\Delta_{1\alpha} = \Delta_1(\varphi^{(1)}_{\alpha}) \to 0 \text{ при } \alpha \to \infty,$$
$$\Delta_{2\beta} = \Delta_2(\varphi^{(2)}_{\beta}) \to 0 \text{ при } \beta \to \infty. \tag{4.52}$$

Тогда пара стратегий $(\tilde{u}_{\alpha}(t,\ \tilde{v}_{\beta}),\ \tilde{v}_{\beta}(t))$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ является минимаксимизирующей.

Доказательство. На основании теорем 1 и 2

$$\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) - \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) \leqslant \Delta_1(\tilde{v}(t)),$$

$$\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v})) - \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}^*),\ \bar{v}^*(t)) \leqslant \Delta_2.$$

Тогда

$$\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) - \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}^*),\ \bar{v}^*(t)) \leqslant \Delta_1(\tilde{v}(t)) + \Delta_2. \tag{4.53}$$

Имея в виду (4.4), (4.53) и в силу неравенств

$$\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) \geqslant l_1(t_0,\ x_0) \geqslant \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}),\ \bar{v}(t)) \geqslant \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}^*),\ \bar{v}^*(t)),$$

$$\mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \bar{u}_n(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) \geqslant \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \tilde{v}),\ \tilde{v}(t)) \geqslant \mathcal{J}(t_0,\ x_0,\ \tilde{u}(t,\ \bar{v}^*),\ \bar{v}^*(t)),$$

получаем

$$|l_1(t_0, x_0) - \mathcal{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \tilde{v}), \tilde{v}(t))| \leqslant$$
$$\leqslant \mathcal{I}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t, \tilde{v}), \tilde{v}(t)) - \mathcal{I}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \bar{v}^*),$$
$$\bar{v}^*(t)) \leqslant \Delta_1(\tilde{v}(t)) + \Delta_2. \tag{4.54}$$

Теорема доказана.

Если заданы конкретные конструкции последовательностей $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$ и $\varphi_\beta^{(2)}(t, \psi)$, удовлетворяющие (4.52), то тем самым в силу следствия теоремы 3 будет задан регулярный алгоритм построения стратегий $\tilde{u}_\alpha(t, \tilde{v}_\beta)$, $\tilde{v}_\beta(t)$, которые при достаточно больших α и β сколь угодно точно реализуют минимаксное значение функционала (4.2). При этом теорема 3 дает конкретную оценку (4.51) близости значения функционала (4.2) на стратегиях $\tilde{u}_\alpha(t, \tilde{v}_\beta)$, $\tilde{v}_\beta(t)$ к его абсолютному минимаксному значению (4.4).

Приступим теперь ко второму этапу решения задачи — определим приближенную оптимальную стратегию $\tilde{v}_\beta(t)$ игрока $\mathcal{E}$.

Зададим $\varphi_\beta^{(2)}(t, \psi)$ в виде полинома с неизвестными коэффициентами $\chi(t)$:

$$\varphi_\beta^{(2)}(t, \psi) = \sum_{j_1=0}^{k_1} (\psi^1)^{j_1} \left(\sum_{j_2=0}^{k_2} (\psi^2)^{j_2} \right) \times$$
$$\times \left(\ldots \left(\sum_{j_\alpha=0}^{k_\alpha} \chi_{j_1, j_2, \ldots, j_\alpha}(t) (\psi^\alpha)^{j_\alpha} \right) \right). \tag{4 55}$$

Выражение (4.55) для $\varphi_\beta^{(2)}$ содержит $\beta = k_1 \cdot k_2 \ldots k_\alpha$ произвольных непрерывных функций $\chi_{j_1, j_2, \ldots, j_\alpha}(t)$, которые подбираются так, чтобы удовлетворить граничному условию (4.39) и сделать наименьшей величину $\Delta_{2\beta} = \Delta_2(\varphi_\beta^{(2)})$. Изберем такой же, как и на первом этапе решения, способ реализации последнего требования, т. е. подставим принятое выражение для $\varphi_\beta^{(2)}(t, \psi)$ в (4.38) и потребуем, чтобы (4.38) выполнялось только на опорных линиях:

$$P_2[t, \psi_\delta(t), \varphi_\beta^{(2)}(t, \psi_\delta(t))] = 0, \ \delta = 1, 2, \ldots, \beta. \tag{4.56}$$

Имея в виду (4.37), запишем (4.56) в следующем виде:

$$\sum_{j_1=0}^{k_1} (\psi_\delta^1)^{j_1} \left(\sum_{j_2=0}^{k_2} (\psi_\delta^2)^{j_2} \right) \times$$
$$\times \left(\cdot \cdot \left(\sum_{j_\alpha=0}^{k_\alpha} \dot{\chi}_{j_1, j_2, \ldots, j_\alpha}(t) (\psi_\delta^\alpha)^{j_\alpha} \right) \right) =$$
$$= -H_2(t, \psi_\delta, \varphi_\psi^{(2)}(t, \psi_\delta)), \ \delta = 1, 2, \ldots, \beta. \tag{4.57}$$

Здесь

$$H_2(t, \psi, \varphi_\psi^{(2)}) = \sup_{v \in C_2(t)} [\varphi_\psi^{(2)} h(t, \psi, v)], \tag{4.58}$$

$\varphi^{(2)}(t, \psi)$ задается равенством (4.55), а $\varphi_{\psi^j}^{(2)}(t, \psi)$ есть частная производная по ψ^j в выражении (4.55).

Система (4.57) представляет собой β обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно такого же числа неизвестных функций $\chi(t)$, линейных относительно производных. Функции $\psi_\delta^j(t)$, входящие в коэффициенты, заданы. Напомним, что здесь нижний индекс δ означает номер заданной опорной вектор-функции $\psi_\delta(t)$, а верхний индекс j — номер компоненты этой вектор-функции. Начальные условия для системы задаются выражением (4.39).

Резюмируем сказанное. Предлагается регулярный алгоритм приближенного определения оптимальных стратегий $\tilde{u}_\alpha(t, \tilde{v}_\beta)$, $\tilde{v}_\beta(t)$ игроков при минимаксном принципе оптимальности. Дается конкретная оценка (4.51) близости значения функционала (4.2) на стратегиях $\tilde{u}_\alpha(t, \tilde{v}_\beta)$, $\tilde{v}_\beta(t)$ игроков к абсолютному минимаксному значению $l_1(t_0, x_0)$. Алгоритм этот состоит в следующем.

1. Задаются α опорных линий $x_\gamma(t)$, т. е. α точек в области $B_1(t)$ пространства X при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$. Тем самым формируется система (4.31).

2. Задаются β опорных линий $\psi_\delta(t)$, т. е. β точек в области $B_2(t)$ пространства ψ при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$.

3. Решается задача Коши для системы (4.57) с начальными условиями, определяемыми из (4.39). При этом

в процессе построения правых частей (4.57) по формуле (4.58) определяется стратегия $\tilde{v}_\beta(t, \psi)$ игрока $\mathscr{E}$ и, следовательно, стратегия $\tilde{u}_\alpha(t, x, \tilde{v}_\beta)$ игрока $\mathscr{P}$.

4. Состояние игр $\tilde{x}_\alpha(t)$ и $\tilde{\psi}_\beta(t)$ определяется из решения уравнений (4.34), (4.35) при начальных условиях (4.36).

5. По формулам (4.14) и (4.40) подсчитываются числа $\Delta_1(\tilde{v}(t))$ и Δ_2 и тем самым определяется близость найденного значения функционала (4.2) на стратегиях $\tilde{u}_\alpha$, $\tilde{v}_\beta$ к его абсолютному минимаксному значению (4.4). Если эта близость недостаточна, то следует задаться большими β и α и заново повторить расчет.

4.2. МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИГРЫ ДЛЯ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ — СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ

В § 3.4 приведены достаточные условия (3.71) — (3.74) существования седловой точки игры, если стратегии u и v игроков входят в уравнения процесса игры нераздельно. В этом параграфе будут выведены достаточные условия существования приближенной седловой точки и оценена точность полученного решения на приближенно оптимальных стратегиях игроков, полученных из этих условий.

Применяя первый этап формализма, изложенного в § 4.1, получаем достаточные условия приближенного значения абсолютного максимума функционала (4.2) при любой фиксированной стратегии $v(t)$ игрока $\mathscr{E}$:

$$\sum_{i_1=0}^{l_1} (x^1_\gamma)^{i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{l_2} (x^2_\gamma)^{i_2} \right) \times \left(\cdots \left(\sum_{i_n=0}^{l_n} \dot{\psi}_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t) (x^n_\gamma)^{i_n} \right) \right) = -H_1(t, x_\gamma, \varphi^{(1)}_x(t, x_\gamma), v(t)), \quad \gamma = 1, 2, \ldots, \alpha, \tag{4.59}$$

$$F(x) + \varphi^{(1)}(t_1, x) = 0. \tag{4.60}$$

Здесь

$$H_1(t, x, \varphi^{(1)}_x, v(t)) = \inf_{u \in C_1(t, x)} [\varphi^{(1)}_x f(t, x, u, v(t)) - p(t, x, u, v(t))], \tag{4.61}$$

$\varphi^{(1)}(t, x)$ — заданная последовательность, определяемая из (4.27).

При выполнении условий (4.59), (4.60) приближенное значение абсолютного максимума функционала (4.2) равно

$$\mathscr{J}(t_0, x_0, \tilde{u}(t, v), v(t)) = -\varphi^{(1)}_\alpha(t_0, x_0, \psi_0). \tag{4.62}$$

Приближенное значение абсолютного максимума функционала (4.2) отличается от его точного значения (4.3) на величину, не превышающую $\Delta_1(v(t))$, определяемую равенством (4.14). Приближенная оптимальная стратегия $\tilde{u}(t, x, \varphi^{(1)}_x, v)$ игрока $\mathscr{P}$ определяется из (4.61).

Аналогично решая задачу игрока $\mathscr{E}$, получаем достаточные условия приближенного значения абсолютного минимума функционала (4.2) при любой фиксированной стратегии $u(t)$ игрока $\mathscr{P}$

$$\sum_{i_1=0}^{l_1} (x^1_\gamma)^{i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{l_2} (x^2_\gamma)^{i_2} \right) \left(\cdots \sum_{i_n=0}^{l_n} \dot{\chi}_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t) (x^n_\gamma)^{i_n} \right) = -H_2(t, x_\gamma, \varphi^2_x(t, x_\gamma), u(t)), \quad \gamma = 1, 2, \ldots, \alpha, \tag{4.63}$$

$$F(x) + \varphi^{(2)}(t_1, x) = 0. \tag{4.64}$$

Здесь

$$H_2(t, x, \varphi^{(2)}_x, u(t)) = \sup_{v \in C_2(t, x)} [\varphi^{(2)}_x f(t, x, u(t), v) - p(t, x, u(t), v)], \tag{4.65}$$

$\varphi^{(2)}(t, x)$ — заданная последовательность, определяемая из (4.27) при замене $\psi(t)$ на $\chi(t)$.

При выполнении условий (4.63), (4.64) приближенное значение абсолютного минимума функционала (4.2) равно

$$\mathscr{J}(t_0, x_0, u(t), \tilde{v}(t, u)) = -\varphi^{(2)}_\alpha(t_0, x_0, \chi_0). \tag{4.66}$$

Приближенная оптимальная стратегия $\tilde{v}(t, x, \varphi^{(2)}_x, u)$ игрока $\mathscr{E}$ определяется из (4.65). Приближенное значение абсолютного минимума функционала (4.2) отличается от его точного минимального значения $\mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), \bar{v}_n(t, u))$ на величину, не превышающую $\Delta_2(u(t))$, т. е. имеет место неравенство

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), \tilde{v}(t, u)) - \\ - \mathcal{J}(t_0, x_0, u(t), \bar{v}_n(t, u)) \leqslant \Delta_2(u(t)), \tag{4.67}$$

где

$$\Delta_2(u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} |\sup_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}_2(t, x, u(t)) - \\ - \inf_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}_2(t, x, u(t))| \, dt, \tag{4.68}$$

$$\widetilde{P}_2(t, x, u(t)) = \sup_{v \in C_2(t, x)} [\varphi_x^{(2)} f(t, x, u(t), v) - \\ - p(t, x, u(t), v) + \varphi_t^{(2)}]. \tag{4.69}$$

Доказательство неравенства (4.67) аналогично доказательству теоремы 1 § 4.1.

Достаточные условия (4.59), (4.60) приближенного значения абсолютного максимума и достаточные условия (4.63), (4.64) приближенного значения абсолютного минимума функционала (4.2) справедливы при любой фиксированной стратегии $v(t)$ игрока $\mathcal{E}$ и $u(t)$ игрока $\mathcal{J}$; в частности, достаточные условия (4.59), (4.60) справедливы для приближенной оптимальной стратегии игрока $\mathcal{E}$, достаточные условия (4.63), (4.64) — для приближенной оптимальной стратегии игрока $\mathcal{J}$.

Определяя из (4.61) приближенную оптимальную стратегию $\tilde{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, v)$ игрока $\mathcal{J}$ и подставляя ее в (4.65), определяя из (4.65) приближенную оптимальную стратегию $\tilde{v}(t, x, \varphi_x^{(2)}, u)$ игрока $\mathcal{E}$ и подставляя ее в (4.61), приходим к следующей системе уравнений:

$$\sum_{i_1=0}^{l_1} (x^1_\gamma)^{i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{l_2} (x^2_\gamma)^{i_2} \right) \left(\ldots \left(\sum_{i_n=0}^{l_n} \dot{\psi}_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t) (x^n_\gamma)^{i_n} \right) \right) = \\ = - H^*_1 \Big[t, x_\gamma, \frac{\partial}{\partial x} \varphi_\alpha^{(1)}(t, x_\gamma), \frac{\partial}{\partial x} \varphi_\alpha^{(2)}(t, x_\gamma) \Big],$$

$$\tag{4.70}$$

$$\sum_{i_1=0}^{l_1} (x^1_\gamma)^{i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{l_2} (x^2_\gamma)^{i_2} \right) \left(\ldots \left(\sum_{i_n=0}^{l_n} \chi_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t) (x^n_\gamma)^{i_n} \right) \right) = \\ = - H^*_2 \Big[t, x_\gamma, \frac{\partial}{\partial x} \varphi_\alpha^{(1)}(t, x_\gamma), \frac{\partial}{\partial x} \varphi_\alpha^{(2)}(t, x_\gamma) \Big], \quad \gamma = 1, 2, \ldots, \alpha,$$

где

$$H^*_1[t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}] = \inf_{u \in C_1} [\varphi_x^{(1)} f(t, x, u, \tilde{v}(t, x, \varphi_x^{(2)}, u)) - \\ - p(t, x, u, \tilde{v}(t, x, \varphi_x^{(2)}, u))], \tag{4.71}$$

$$H^*_2[t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}] = \sup_{v \in C_2} [\varphi_x^{(2)} f(t, x, \tilde{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, v), v) - \\ - p(t, x, \tilde{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, v), v)]. \tag{4.72}$$

Граничные условия для системы (4.70) следуют из (4.60) и (4.64):

$$F(x) + \varphi^{(1)}(t_1, x) = 0; \quad \varphi^{(1)}(t_1, x_1) = \varphi^{(2)}(t_1, x_1). \tag{4.73}$$

Кроме того, для выполнения принципа оптимальности — седловой точки на функции $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$ и $\varphi_\alpha^{(2)}(t, x)$ должно быть наложено ограничение

$$\varphi_\alpha^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0) = \varphi_\alpha^{(2)}(t_0, x_0, \chi_0), \tag{4.74}$$

которое следует из равенств (4.62), (4.66), справедливых при любых стратегиях игроков, в том числе и при оптимальных, и выполнения соотношения седловой точки (3.14). Условие (4.74) можно записать в следующем виде:

$$\psi_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t_0) = \chi_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t_0). \tag{4.75}$$

Систему (4.70)—(4.74) будем называть достаточными условиями приближенного решения игры для принципа оптимальности — седловой точки. Эта система представляет собой 2α обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно такого же числа неизвестных функций $\psi(t)$, $\chi(t)$, линейных относительно производных. Функции $x_\gamma^i(t)$, входящие в коэффициенты, заданы. Здесь нижний индекс γ означает номер заданной вектор-функции $x_\gamma(t)$, а верхний индекс i — номер компоненты этой вектор-функции.

Приближенные оптимальные стратегии $\tilde{u}_n(t, x)$, $\tilde{v}_n(t,x)$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ определяются по формулам (4.71), (4.72) в процессе решения системы (4.70). Приближенное значение функционала (4.2) на этих стратегиях равно $-\varphi_\alpha^{(1)}(t_0, x_0, \psi_0)$.

Оценим полученное решение задачи. Учитывая (4.15), (4.67), запишем следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \tilde{v}_n), \tilde{v}_n(t)) - \\ - \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t, \tilde{v}_n), \tilde{v}_n(t)) \leqslant \Delta_1(\tilde{v}_n(t)),\end{gathered} \tag{4.76}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \tilde{v}_n(t, \tilde{u}_n)) - \\ - \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \bar{v}_n(t, \tilde{u}_n)) \leqslant \Delta_2(\tilde{u}_n(t)).\end{gathered}$$

При выполнении условий (4.70), (4.73), (4.74) имеет место принцип оптимальности — седловой точки. Следовательно,

$$\begin{gathered}\mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t, \tilde{v}_n), \tilde{v}_n(t)) = \\ = \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \tilde{v}_n(t, \tilde{u}_n)).\end{gathered} \tag{4.77}$$

Тогда из (4.76) следует

$$\begin{gathered}\mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \tilde{v}_n), \tilde{v}_n(t)) - \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \bar{v}_n(t, \tilde{u}_n)) \leqslant \\ \leqslant \Delta_1(\tilde{v}_n(t)) + \Delta_2(\tilde{u}_n(t)).\end{gathered} \tag{4.78}$$

Имея в виду (3.14), (4.77), (4.78) и в силу неравенств

$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \bar{v}_n(t, \tilde{u}_n)) \leqslant \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t), \bar{v}_n(t, \bar{u}_n)) =$$
$$= \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \bar{v}_n), \bar{v}_n(t)) \leqslant \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \tilde{v}_n), \tilde{v}_n(t)),$$
$$\mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \bar{v}_n(t, \tilde{u}_n)) \leqslant \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \tilde{v}_n(t, \tilde{u}_n)) =$$
$$= \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t, \tilde{v}_n), \tilde{v}_n(t)) \leqslant \mathcal{J}(t_0, x_0, \bar{u}_n(t, \tilde{v}_n), \tilde{v}_n(t)),$$

получаем

$$\begin{gathered}|I_2(t_0, x_0) - \mathcal{J}(t_0, x_0, \tilde{u}_n(t), \tilde{v}_n(t))| \leqslant \\ \leqslant \Delta_1(\tilde{v}_n(t)) + \Delta_2(\tilde{u}_n(t)),\end{gathered} \tag{4.79}$$

где $\tilde{u}_n(t) = \tilde{u}_n(t, \tilde{x}(t))$, $\tilde{v}_n(t) = \tilde{v}_n(t, \tilde{x}(t))$, $\tilde{x}(t)$ — решения системы (4.1) при $u = \tilde{u}_n(t, x)$, $\tilde{v}_n(t, x)$, получаемых по формулам (4.71), (4.72) в процессе решения системы (4.70).

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема. Исследуемый функционал (4.2) на стратегиях $\tilde{u}_n(t, x)$, $\tilde{v}_n(t, x)$ удовлетворяет оценке (4.79).

Следствие. Пусть имеются последовательности $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$, $\varphi_\alpha^{(2)}(t, x)$ такие, что

$$\Delta_{1\alpha} = \Delta_1(\varphi_\alpha^{(1)}, \varphi_\alpha^{(2)}) \to 0;$$
$$\Delta_{2\alpha} = \Delta_2(\varphi_\alpha^{(1)}, \varphi_\alpha^{(2)}) \to 0 \quad \text{при } \alpha \to \infty,$$

тогда последовательности стратегий $u_\alpha(t, x)$, $v_\alpha(t, x)$ являются оптимизирующими.

Когда стратегии игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ входят раздельно в правые части уравнений (4.1) и в выражение для подынтегральной функции (4.2) (функции представимы в виде (3.16)), системе уравнений (4.70) при условиях (4.73), (4.74) может удовлетворить одна функция $\varphi_\alpha(t, x) = \varphi_\alpha^{(1)}(t, x) \equiv \varphi_\alpha^{(2)}(t, x)$ и, следовательно, $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t) \equiv \chi_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t)$. Систему (4.70) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i_1=0}^{l_1} (x^1{}_\gamma)^{i_1} \left(\sum_{i_2=0}^{l_2} (x^2{}_\gamma)^{i_2} \right) \left(\dots \left(\sum_{i_n=0}^{l_n} \dot{\psi}_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t) (x^n{}_\gamma)^{i_n} \right) \right) =$$
$$= -H\left[t, x_\gamma, \frac{\partial}{\partial x} \varphi_\alpha(t, x_\gamma)\right], \quad \gamma = 1, 2, \dots, \alpha. \tag{4.80}$$

Здесь

$$\begin{gathered}H(t, x, \varphi_x) = \inf_{u \in C_1} \sup_{v \in C_2} [\varphi_x f(t, x, u, v) - p(t, x, u, v)] = \\ = \sup_{v \in C_2} \inf_{u \in C_1} [\varphi_x f(t, x, u, v) - p(t, x, u, v)],\end{gathered} \tag{4.81}$$

$\widetilde{\varphi}_\alpha(t, x)$ — функция, задаваемая в виде (4.27). Начальные условия для системы (4.80)

$$F(x_1) + \widetilde{\varphi}_\alpha(t_1, x_1) = 0. \tag{4.82}$$

Так как здесь

$$\widetilde{P}_1(t, x, \widetilde{v}_n) = \widetilde{P}_2(t, x, \widetilde{u}_n) =$$
$$= \inf_u \sup_v [\widetilde{\varphi}_x f(t, x, u, v) - p(t, x, u, v) + \widetilde{\varphi}_t] =$$
$$= \sup_v \inf_u [\widetilde{\varphi}_x f(t, x, u, v) - p(t, x, u, v) + \widetilde{\varphi}_t] =$$
$$= \widetilde{P}(t, x),$$

то исследуемый функционал на стратегиях $\widetilde{u}_n(t, x)$ $\widetilde{v}_n(t, x)$ удовлетворяет оценке

$$|l_\bullet(t_0, x_0) - \mathcal{J}(t_0, x_0, \widetilde{u}_n(t), \widetilde{v}_n(t))| \leqslant 2\Delta, \tag{4.83}$$

где величина Δ равна:

$$\Delta_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} |\sup_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}(t, x) - \inf_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}(t, x)|\, dt. \tag{4.84}$$

Остановимся более подробно на этом последнем случае, так как он часто встречается в приложениях.

Практически предлагаемый метод построения стратегий $u_\alpha(t, x)$, $v_\alpha(t, x)$ реализуется следующим образом: последовательность $\varphi_\alpha(t, x)$ строится так, чтобы $\Delta_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$, а условие (4.83) проверяется после построения $u_\alpha(t, x)$, $v_\alpha(t, x)$. Для того чтобы такой метод решения достигал успеха, необходимо, чтобы множество $B_1(t)$ было достаточно широкой областью пространства X. Если множество $B_1(t)$ вследствие условий задачи совпадает с пространством X, его следует заменить ограниченной областью для практической реализации операции отыскания супремума в (4.84). При этом $B_1(t)$ должно оставаться достаточно широким, чтобы заведомо выполнялось условие (4.83).

Уместно отметить ряд существенных обстоятельств.

1. Построение последовательности $\varphi_\alpha(t, x)$ такой, что $\Delta(\varphi_\alpha) \to 0$, можно рассматривать как приближенный метод решения уравнения (3.77) в частных производных, если $\varphi_\alpha(t, x)$ сходится по какой-либо норме. В данной постановке, однако, вопрос о сходимости $\varphi_\alpha(t, x)$ не возникает. Последовательность $\varphi_\alpha(t, x)$, а следовательно, $\widetilde{u}(t, x)$, (t, x), может и не иметь предела. Единственное, что от не требуется, это выполнение $\Delta(\varphi_\alpha) \to 0$ в случае точного решения и достаточная малость $\Delta(\varphi_\alpha)$ при некотором в случае приближенного решения.

2. Рассматривалась задача при ограничении (4.12) (или (4.82)). При функциях $\varphi(t, x)$ вида (4.27) условие (4.12) удовлетворяется точно, если функция $F(x_1)$ является полиномиальной. Можно расширить класс решаемых задач, сняв требование точного выполнения (4.12), при этом оценки решения усложняются. При приближенном выполнении (4.82) величина Δ_α в формуле для оценки (4.83) равна

$$\Delta_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} |\sup_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}(t, x) - \inf_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}(t, x)|\, dt +$$
$$+ \sup_{x \in B_1(t_1)} [F(x) + \widetilde{\varphi}_\alpha(t_1, x)] -$$
$$- \inf_{x \in B_1(t_1)} [F(x) + \widetilde{\varphi}_\alpha(t_1, x)]. \tag{4.85}$$

Доказательство формулы (4.85) мы здесь не приводим, оно аналогично доказательству справедливости оценок (5.33), (5.34).

3. Задача разрешения системы (4.80) относительно производных эквивалентна задаче интерполяции функции $[-H(t, x, \varphi_x)]$, заданной своими значениями на опорных линиях с помощью полинома (4.27). Аналогично задача разрешения (4.82) эквивалентна задаче интерполяции функции $[-F(x_1, t_1)]$, заданной своими значениями в точках $x_1^i(t)$ полиномом (4.27). Эти задачи выполнимы, так как они сводятся к решению серии задач одномерной интерполяции полиномами степени l_1, $l_2, \ldots, l_n$, т. е. к решению системы линейных алгебраических уравнений порядка $l_1, l_2, \ldots, l_n$ с невырожденными матрицами (матрицами Вандермонда).

4. При численном решении системы (4.80) определение производных из явных или неявных выражений необходимо производить на каждом шаге. Число шагов

должно быть достаточно велико. Желательно выбирать опорные линии таким образом, чтобы элементы матрицы коэффициентов системы (4.80) были либо константами, либо простыми функциями времени. Элементы соответствующей обратной матрицы могут быть определены заранее в виде констант или простых функций времени. В этом случае определение производных на каждом шаге сведется к их подсчету по достаточно простым формулам. Поскольку операция обращения матрицы выполняется один раз и, следовательно, мало влияет на общее время вычислений, то с этой точки зрения несущественно, в какой форме будет задаваться исходная информация относительно функций $\psi(t)$.

5. При решении конкретных задач для вычисления оценки (4.83) по обобщенной формуле (4.85) удобно одновременно с интегрированием (4.80) в интервале (t_0, t_1) решать уравнение

$$\dot{\xi} = \sup_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}(t, x) - \inf_{x \in B_1(t)} \widetilde{P}(t, x) \tag{4.86}$$

при начальном условии в момент $t = t_1$

$$\xi(t_1) = \sup_{x \in B_1(t_1)} [F(x) + \widetilde{\varphi}(t_1, x)] - \inf_{x \in B_1(t_1)} [F(x) + \widetilde{\varphi}(t_1, x)]. \tag{4.87}$$

Очевидно, $\Delta = \xi(t_0)$.

Таким образом, в тех случаях, когда имеют место условия (3.16), алгоритм приближенного построения оптимальных стратегий $\widetilde{u}_\alpha(t, x)$, $\widetilde{v}_\alpha(t, x)$ игроков $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ состоит в следующем.

1. Задаются α опорных линий $x_\gamma(t)$, т. е. α точек в области $B_1(t)$ пространства X при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$.

2. Решается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.80) с начальными условиями (4.82). Система (4.80) решается численно в направлении от t_1 к t_0. При этом в процессе построения правых частей (системы) (4.80) стратегии $\widetilde{u}_\alpha(t, x)$ $\widetilde{v}_\alpha(t, x)$ определяются по формуле (4.81).

3. По формуле (4.85) подсчитывается число Δ_α. Если

найденная оценка по каким-либо причинам неудовлетворительна, то следует задаться бо́льшим α и заново повторить расчет.

В заключение заметим следующее. Метод определения строго оптимальных стратегий игроков при принципе оптимальности — седловой точки (см. § 3.4) так же, как и метод определения приближенных оптимальных стратегий при этом принципе оптимальности, изложены без заранее принятого предположения, что у функционала (4.2) при связях (4.1) существует седловая точка в чистых стратегиях. Эти методы дают лишь достаточные условия оптимальности. Если существуют функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$, удовлетворяющие системе уравнений (4.70) при граничных условиях (4.73), (4.74), то на стратегиях $\bar{u}_n$, $\bar{v}_n$ игроков, определенных в процессе решения системы (4.70), имеется седловая точка (она гарантируется выполнением соотношения (4.74)). При этом метод позволяет оценить точность полученного решения

4.3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Определить для системы

$$\dot{x} = bx + v + u, \ |u| \leqslant 1, \ |v| \leqslant 1, \ b > 0, \ x(0) = 0 \tag{4.88}$$

управления $u_n(t, x)$, $v(t)$ в области $0 < t \leqslant t_1$, $|x| < 1$ плоскости t, x, оптимальные с точки зрения минимаксного значения функционала

$$J = \int_0^{t_1} (ax^2 + cv^2)\, dt, \quad a, \ c > 0. \tag{4.89}$$

Имеем

$$R_1(t, x, u, v) = \varphi_x^{(1)}(bx + v + u) - ax^2 - cv^2 + \varphi_t^{(1)}, \ \overline{u_n} = \operatorname{sign} \varphi_x^{(1)},$$

$$P_1(t, x, v) = \inf_u R_1(t, x, u, v) = bx\varphi_x^{(1)} + \varphi_x^{(1)} v - |\varphi_x^{(1)}| - ax^2 - cv^2 + \varphi_t^{(1)}. \tag{4.90}$$

Примем $\varphi_\alpha^{(1)}(t, x)$ в виде полинома:

$$\varphi_\alpha^{(1)}(t, x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\, x + \psi_3(t)\, x^2, \tag{4.91}$$

который содержит $\alpha = 3$ функций $\psi(t)$. Зададим $\alpha = 3$ опорных линий $x_1(t) = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$. Подставляя выражение (4.91) для $\varphi^{(1)}(t, x)$ в (4.90) и требуя, чтобы (4.13) выполнялось только на опорных линиях, получаем систему дифференциальных уравнений (4.29) в виде

$$\dot{\psi}_1 = -(\psi_2 v - |\psi_2| - cv^2),$$

$$\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3 = -b\psi_2 - 2b\psi_3 - v\psi_2 - 2v\psi_3 + |\psi_2 + 2\psi_3| + a + cv^2, \tag{4.92}$$

$$\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3 = b\psi_2 - 2b\psi_3 - v\psi_2 + 2v\psi_3 + |\psi_2 - 2\psi_3| + a + cv^2.$$

Начальные условия для системы (4.92) определяем из (4.12): $\psi_1(t_1) = 0$, $\psi_2(t_1) = 0$, $\psi_3(t_1) = 0$. Система (4.92) имеет решение в области пространства ψ_2, ψ_3, $t \in (0, t_1)$, где $\psi_2 \geqslant 0$, $\psi_3 \leqslant 0$, $\psi_2 + 2\psi_3 \geqslant 0$, $\psi_2 - 2\psi_3 \geqslant 0$. Это решение находим из уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -(\psi_2 v - \psi_2 - cv^2), \quad \psi_1(t_1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -b\psi_2 - 2v\psi_3 + 2\psi_3, \quad \psi_2(t_1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_3 = -2b\psi_3 + a, \quad \psi_3(t_1) = 0.$$

Следовательно,
$$\psi_1(0) = \int_0^{t_1} (\psi_2 v - \psi_2 - cv^2)\, dt, \tag{4.93}$$

$$\psi_3(t) = \psi^*_3(t) = (a/2b)(1 - \exp 2b(t_1 - t)). \tag{4.94}$$

Запишем функционал (4.32*) и уравнения для второго этапа решения. Имея в виду (4.94) и то, что $x_0 = x(0) = 0$, получаем

$$\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_3(t, v), v(t)) = -\varphi_3^{(1)}(0, x_0, \psi_0) = -\psi_1(0), \tag{4.95}$$

$$\dot{\psi}_1 = -(\psi_2 v - \psi_2 - cv^2), \quad \psi_1(t_1) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -b\psi_2 - 2v\psi^*_3(t) + 2\psi^*_3(t), \quad \psi_2(t_1) = 0. \tag{1.96}$$

Для упрощения решения этой задачи воспользуемся выражением (4.93). Функционал (4.95) и уравнения (4.96) для второго этапа можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{J}(x_0, \bar{\bar{u}}_3(t, v), v(t)) = -\int_0^{t_1} (\psi_2 v - \psi_2 - cv^2)\, dt,$$

$$\dot{\psi}_2 = -b\psi_2 - 2v\psi^*_3(t) + 2\psi^*_3(t), \quad \psi_2(t_1) = 0.$$

Имеем
$$R_2(t, \psi_2, v) = \varphi^{(2)}_{\psi_2}(-b\psi_2 - 2v\psi^*_3(t) + 2\psi^*_3(t) + {}$$
$$+ \psi_2 v - \psi_2 - cv^2 + \varphi_t^{(2)}),$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2c}(\psi_2 - 2\psi^*_3(t)\,\varphi^{(2)}_{\psi_2}), \tag{4.97}$$

$$P_2(t, \psi_2) = -b\psi_2\varphi^{(2)}_{\psi_2} + \frac{1}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\varphi^{(2)\,2}_{\psi_2} - \frac{1}{c}\psi_2\psi^*_3(t)\,\varphi^{(2)}_{\psi_2} + {}$$
$$+ 2\psi^*_3(t)\,\varphi^{(2)}_{\psi_2} + \frac{1}{4c}\psi^2_2 - \psi_2 + \varphi_t^{(2)}.$$

Примем $\varphi_\beta^{(2)}(t, \psi_2)$ в виде полинома

$$\varphi_\beta^{(2)}(t, \psi_2) = \chi_1(t) + \chi_2(t)\psi_2 + \chi_3(t)\psi^2_2, \tag{4.98}$$

который содержит $\beta = 3$ функций $\chi(t)$. Так как $\psi_2 \geqslant 0$, зададим $\beta = 3$ опорных линий $\psi_{2(1)}(t) = 0$, $\psi_{2(2)} = 1$, $\psi_{2(3)} = 2$. Подставляя принятое для $\varphi^{(2)}(t, \psi_2)$ выражение (4.98) в (4.97) и требуя, чтобы (1.38) выполнялось только на опорных линиях, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\chi}_1 = -\frac{1}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_2 - 2\psi^*_3(t)\,\chi_2,$$

$$\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_3 = b\chi_2 + 2b\chi_3 - \frac{1}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_2 - {}$$
$$- \frac{4}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi_2\chi_3 - \frac{4}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_3 + \frac{1}{c}\psi^*_3(t)\chi_2 + \frac{2}{c}\psi^*_3(t)\chi_3 - {}$$
$$- 2\psi^*_3(t)\,\chi_2 - 4\psi^*_3(t)\,\chi_3 - \frac{1}{4c} + 1,$$

$$\dot{\chi}_1 + 2\dot{\chi}_2 + 4\dot{\chi}_3 = 2b\chi_2 + 8b\chi_3 - \frac{1}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_2 - \frac{8}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi_2\chi_3 - {}$$
$$- \frac{16}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_3 + \frac{2}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_2 + \frac{8}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_3 - 2\psi^*_3(t)\,\chi_2 - {}$$
$$- 8\psi^*_3(t)\,\chi_3 - \frac{1}{c} + 2,$$

и

$$\dot{\chi}_1 = -\frac{1}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_2 - 2\psi^*_3(t)\,\chi_2,$$

$$\dot{\chi}_2 = b\chi_2 + \frac{1}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_2 - \frac{4}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi_2\chi_3 - 4\psi^*_3(t)\,\chi_3 + 1,$$

$$\dot{\chi}_3 = 2b\chi_3 - \frac{4}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_3 + \frac{2}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_3 - \frac{1}{4c}. \tag{4.99}$$

Начальные условия для системы (4.99) определяются из (4.39):

$$\chi_1(0) = \psi_1(0), \ \chi_2(0) = 0, \ \chi_3(0) = 0.$$

При $\alpha = \beta = 3$ управления равны:

$$(t) = -1; \ \bar{v}_3(t) = \frac{1}{2c}\psi_2(t) - \frac{1}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_2(t) - \frac{2}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_3(t)\,\psi_2(t).$$

При этих управлениях

$$P_1(t, x, \bar{v}) = (\dot{\psi}_1 + \psi_2\bar{v} - \psi_2 - c\bar{v}^2) + x(\dot{\psi}_2 + b\psi_2 + {}$$
$$+ 2\bar{v}\psi_3 - 2\psi_3) + x^2(\dot{\psi}_3 + 2b\psi_3 - a) = 0,$$

$$P_2(t, \psi_2) = \left(\dot{\chi}_1 + \frac{1}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_2 + 2\psi^*_3(t)\,\chi_2\right) + {}$$
$$\psi_2\left(\dot{\chi}_2 - b\chi_2 - \frac{1}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_2 + \frac{4}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi_2\chi_3 + 4\psi^*_3(t)\,\chi_3 - 1\right) + {}$$
$$+ \psi^2_2\left(\dot{\chi}_3 - 2b\chi_3 + \frac{4}{c}\psi_3^{*2}(t)\,\chi^2_3 - \frac{2}{c}\psi^*_3(t)\,\chi_3 + \frac{1}{4c}\right) = 0.$$

Следовательно, $\Delta_1(\bar{v}_3(t))=0$, $\Delta_2=0$, т. е. приближение $\alpha=\beta=$ совпало с точным минимаксным решением.

Пример 2. Построить для систем

$$\dot{x}=u+y,\quad \dot{y}=v,\quad x(0)=y(0)=0 \qquad (4.100)$$

приближенные минимаксные управления $\bar{u}_\alpha(t, \bar{v}_\beta)$, $\bar{v}_\beta(t)$ относительно функционала

$$\mathcal{J}=\int_0^{t_1} y^2 dt,$$

$$|u|\leqslant 1,\ |v|\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 0{,}5,\ |x|<1,\ |y|<1. \qquad (4.101)$$

Имеем

$$R_1(t, x, u, y(t)) = \varphi_x^{(1)}(u+y(t)) - y^2(t) + \varphi_t^{(1)},$$

$$\bar{u}_n = -\operatorname{sign}\varphi_x^{(1)}, \qquad (4.102)$$

$$P_1(t, x, y(t)) = -|\varphi_x^{(1)}| + \varphi_x^{(1)} y(t) - y^2(t) + \varphi_t^{(1)}.$$

Примем $\varphi_\alpha^{(1)}$ в виде полинома

$$\varphi_\alpha^{(1)}(t, x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x, \qquad (4.103)$$

который содержит $\alpha=2$ функций $\psi(t)$. Зададим $\alpha=2$ опорных линий $x_1=0$, $x_2=1$. Подставляя принятое для $\varphi_x^{(1)}(t, x)$ выражение (4.103) в (4.102) и требуя, чтобы (4.13) выполнялось только на опорных линиях, получаем следующую систему дифференциальных уравнений (4.29):

$$-|\psi_2| + \psi_2 y(t) - y^2(t) + \dot{\psi}_1 = 0,$$

$$-|\psi_2| + \psi_2 y(t) - y^2(t) + \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 = 0$$

или

$$\dot{\psi}_1 = |\psi_2| - \psi_2 y(t) + y^2(t),$$

$$\dot{\psi}_2 = 0. \qquad (4.104)$$

Начальные условия для системы (4.104) определяются из (4.1 $\psi_1(t_1)=0$, $\psi_2(t_1)=0$. Решением (4.104) является

$$\psi_1(0) = -\int_0^{t_1} y^2(t)\,dt;\ \psi_1(t_1)=0;\ \psi_2(t) = 0.$$

Откуда $P_1(t, x, y(t))=0$ и, следовательно, $\Delta_1(v(t))=0$. Приближен $\alpha=2$ совпало с точным решением. При этом управление $u(t)$ мож быть любым (из допустимой области управлений). Последнее утвер дение следует из (4.100), (4.101). Система $\mathcal{J}$ не может воздейст вать на систему $\mathcal{E}$ с целью наибольшего отклонения от нуля ко динаты y по мере.

Для второго этапа решения функционал (4.101) и уравнения (4.100) остаются прежними. Имеем

$$R_2(t, x, y, v) = \varphi_x^{(2)}(u(t)+y) + \varphi_y^{(2)} v - y^2 + \varphi_t^{(2)},\quad \bar{v} = \operatorname{sign}\varphi_y^{(2)},$$

$$P_2(t, x, y) = \sup_v R_2(t, x, y, v) = \varphi_x^{(2)} u(t) + \varphi_x^{(2)} y + |\varphi_y^{(2)}| - y^2 + \varphi_t^{(2)}. \qquad (4.105)$$

Примем

$$\varphi_\beta^{(2)}(t, x, y) = \chi_1(t) + \chi_2(t)x + \chi_3(t)y^2. \qquad (4.106)$$

Зададим $\beta=3$ опорных линий $x_1(t)=y_1(t)=0$, $x_{2,3}(t)=y_{2,3}(t)=\pm 1$. Подставляя принятое для $\varphi^{(2)}(t, x, y)$ выражение (4.106) в (4.105) и требуя, чтобы $P_2(t, x, y)=0$ только на опорных линиях, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\chi}_1 = -u(t)\chi_2,$$

$$\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_3 = -\chi_2 u(t) - \chi_2 - |2\chi_3| + 1, \qquad (4.107)$$

$$\dot{\chi}_1 - \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_3 = -\chi_2 u(t) + \chi_2 - |-2\chi_3| + 1.$$

Начальные условия для системы (4.107): $\chi_1(t_1)=0$, $\chi_2(t_1)=0$, $\chi_3(t_1)=0$. Система (4.107) имеет решение

$$\chi_1(t) = 0;\ \chi_2(t) = 0;\ \chi_3(t) = \frac{1}{2}\left(e^{2(t-t_1)} - 1\right).$$

Следовательно, $\bar{v}_3(t, y) = \operatorname{sign} 2\chi_3(t)y = -\operatorname{sign} y$. Проверим, что дает оценка (4.40). Пользуясь приведенными выше формулами, находим

$$P_2(t, y) = \left(1 - e^{2(t-t_1)}\right)\left(|y| - y^2\right),$$

$$\Delta_2 = \int_0^{0{,}5} \left| \sup_{y\in[-1,+1]} P_2(t, y) - \inf_{y\in[-1,+1]} P_2(t, y) \right| dt = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{4}\left(1 - e^{2(t-t_1)}\right) dt = 0{,}045.$$

5. Оценки оптимальности стратегий игроков в антагонистической дифференциальной игре

Важную роль в практических задачах при конфликтных ситуациях играют методы приближенного решения игры, базирующиеся на глубоком понимании особенностей рассматриваемой игры и ее правил. В этом случае можно получить близкие к оптимальным (по критерию эффективности) стратегии двух игроков, имеющих противоположные интересы при достаточно простых для реализации структурах стратегий. Настоящая глава посвящена этим методам. Приводятся аналитические оценки степени оптимальности стратегий каждого игрока и степени оптимальности игры.

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть процесс игры описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dx/dt = f(t,\ x,\ u,\ v), \tag{5.1}$$

где $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$ — n-мерный вектор состояния игры. Вектор x принадлежит некоторой ограниченной области $B(t)$ n-мерного фазового пространства X; $u=(u^1,\ \ldots,\ u^r)$ — r-мерный вектор стратегии игрока $\mathscr{P}$, принадлежащий заданному множеству $Q_1(t,\ x)$; $v=(v^1,\ \ldots,\ v^s)$ — s-мерный вектор стратегии игрока $\mathscr{E}$, принадлежащий заданному множеству $Q_2(t,\ x)$. Функцию $x(t)$ полагаем непрерывной и имеющей кусочно-непрерывные производные на рассматриваемом отрезке времени $[0,\ t_1]$; функции $u(t)$ и $v(t)$ полагаем кусочно-непрерывными на $[0,\ t_1]$.

Условия, наложенные на $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, задают множество $V(t)$ допустимых значений совокупностей $n+r+s$ чисел $(x^i,\ u^\nu,\ v^k)$ при каждом $t\in(0,\ t_1)$, а также область B допустимых значений t, x в $(n+1)$-мерном пространстве $T\times X$ и множество V допустимых совокупностей $n+r+s+1$ чисел $(x^i,\ u^\nu,\ v^k,\ t)$ $(i=1,\ 2,\ldots,\ n;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$. Функции $f^i(t,\ x,\ u,\ v)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ кусочно-непрерывны на V и при каждом фиксированном t непрерывны на $V(t)$. Совокупность всех вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, обладающих перечисленными свойствами и удовлетворяющих уравнению (5.1), образуют множество D_1.

Введем в рассмотрение некоторый функционал

$$\mathcal{J} = F(x_1) + \int_0^{t_1} p(t,\ x,\ u,\ v)\,dt, \tag{5.2}$$

определенный на множестве D_1, ограниченный и непрерывный на нем. Функционал $\mathcal{J}$ зависит от начального состояния игры $x_0=x(0)$ и от принятых игроками $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ стратегий.

Полагаем, что из каких-то соображений (например, на основании глубокого понимания особенностей рассматриваемой игры) заданы стратегии

$$u=\tilde{u}(t,\ x) \tag{5.3}$$

игрока $\mathscr{P}$ и

$$v=\tilde{v}(t,\ x) \tag{5.4}$$

игрока $\mathscr{E}$.

Предполагается также, что оба игрока $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ имеют информацию о принятых стратегиях (5.3), (5.4), но не имеют возможности использовать ее для улучшения своего поведения.

Совокупность вектор-функций $x(t)\in B$, удовлетворяющих уравнениям (5.1) и (5.3), (5.4), образует множество D_2. Ясно, что $D_2\subset D_1$. Уравнения (5.1), (5.3), (5.4) описывают замкнутую систему, движение которой при фиксированных начальных условиях полностью определено. Определено также значение функционала

$$\mathcal{J}(x_0,\ \tilde{u}(t,\ x),\ \tilde{v}(t,\ x)).$$

Имея в виду эквивалентность $\bar{u}_n(t,\ \bar{v}_n(t)) = \bar{u}_n(t,\ x)$ и $\bar{v}_n(t,\ \bar{u}_n(t)) = \bar{v}_n(t,\ x)$, обозначим цену игры (см. § 3.1)

$$\mathcal{J}(x_0,\ u_n(t,\ x),\ \bar{v}_n(t,\ x)) = \inf_{v(t)\in Q_2}\ \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(x_0,\ u(t),\ v(t)) = \sup_{u(t)\in Q_1}\ \inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(x_0,\ u(t),\ v(t));$$

величину абсолютного максимума функционала (5.2) по стратегии $u(t)$ игрока $\mathscr{P}$ при заданной стратегии $\tilde{v}(t,\ x)$ игрока $\mathscr{E}$

$$\mathcal{J}(x_0,\ \bar{u}_n(t,\ x),\ \tilde{v}(t,\ x)) = \sup_{u(t)\in Q_1} \mathcal{J}(x_0,\ u(t),\ \tilde{v}(t,\ x));$$

величину абсолютного минимума функционала (5.2) по стратегии $v(t)$ игрока $\mathscr{E}$ при заданной стратегии $\tilde{u}(t,\ x)$ игрока $\mathscr{P}$.

$$\mathcal{J}(x_0,\ \tilde{u}(t,\ x),\ \bar{v}_n(t,\ x)) = \inf_{v(t)\in Q_2} \mathcal{J}(x_0,\ \tilde{u}(t,\ x),\ v(t))$$

Модуль разности $|(\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x))|$ будем называть степенью оптимальности процесса игры при фиксированных начальных условиях и заданных стратегиях (5.3), (5.4) игроков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$. Максимальное значение модуля разности

$$\sup_{x_0 \in B(0)} |\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x))|$$

будем называть степенью оптимальности игры для принципа оптимальности — седловой точки.

Задача оценки степени оптимальности игры является в некотором смысле обратной по отношению к задаче определения оптимальных стратегий $\bar{u}_n(t, x)$, $\bar{v}_n(t, x)$ игроков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$, рассмотренной в § 3.4. Действительно, в первой задаче необходимо найти стратегии $\bar{u}_n(t, x)$, $\bar{v}_n(t, x)$, на которых достигается цена игры. В задаче оценки степени оптимальности игры стратегии игроков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ заданы, и требуется найти, как будет показано далее, такие две функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, которые обеспечивали бы эффективную оценку степени оптимальности игры.

Задача оценки степени оптимальности возникает при исследовании законов управления систем $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$, определенных какими-либо приближенными методами. Кроме того, задачу оценки необходимо решать при конструировании и анализе сложных автоматических систем, работающих в конфликтной ситуации, или в общем случае при исследовании операций, когда необходимо выяснить степень оптимальности выбранных стратегий в зависимости от критериев эффективности.

Введем следующие понятия.

Разность $\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \tilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x))$ будем называть степенью оптимальности стратегии игрока $\mathcal{F}$ при фиксированных начальных условиях и заданных стратегиях (5.3), (5.4). Максимальное значение разности

$$\sup_{x_0 \in B(0)} [\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \tilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x))]$$

будем называть степенью оптимальности стратегии игрока $\mathcal{F}$

Разность $\mathcal{J}(x_0, \tilde{u}_n(t, x), \tilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \bar{v}_n(t, x))$ будем называть степенью оптимальности стратегии игрока $\mathcal{E}$ при фиксированных начальных условиях и заданных стратегиях (5.3), (5.4). Максимальное значение этой разности

$$\sup_{x_0 \in B(0)} [\mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \bar{v}_n(t, x))]$$

будем называть степенью оптимальности стратегии игрока $\mathcal{E}$.

Далее будет показано, что оценить степень оптимальности игры возможно, если известны оценки степени оптимальности стратегий игроков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$.

5.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Введем в рассмотрение функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, непрерывные и кусочно-дифференцируемые в области B допустимых значений t, x и при каждом фиксированном $t \in (0, t_1)$ дифференцируемые всюду на $B(t)$. Далее построим функции

$$R^{(1)}[t, x, u, \tilde{v}(t, x), \varphi^{(1)}(t, x)] = \varphi_x^{(1)} f(t, x, u, \tilde{v}(t, x)) - \\ - p(t, x, u, \tilde{v}(t, x)) + \varphi_t^{(1)}, \tag{5.5}$$

$$\tilde{R}^{(1)}[t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi^{(1)}(t, x)] = \varphi_x^{(1)} f(t, x, \tilde{u}(t, x), \\ \tilde{v}(t, x)) - p(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x)) + \varphi_t^{(1)}, \tag{5.6}$$

$$R^{(2)}[t, x, \tilde{u}(t, x), v, \varphi^{(2)}(t, x)] = \varphi_x^{(2)} f(t, x, \tilde{u}(t, x), v) - \\ - p(t, x, \tilde{u}(t, x), v) + \varphi_t^{(2)}, \tag{5.7}$$

$$\tilde{R}^{(2)}[t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi^{(2)}(t, x)] = \\ = \varphi_x^{(2)} f(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x)) - p(t, x, \tilde{u}(t, x), \\ \tilde{v}(t, x)) + \varphi_t^{(2)}, \tag{5.8}$$

где $\varphi_x^{(1)}$, $\varphi_x^{(2)}$ — n-мерные вектор-функции, а первое слагаемое в правых частях уравнений есть скалярное произведение.

Теорема 1. Степень оптимальности стратегии (5.3) игрока $\mathcal{P}$ в игре, описываемой уравнениями (5.1) при условии, что стратегия игрока $\mathcal{E}$ имеет вид (5.4), удовлетворяет следующей оценке относительно функционала (5.2):

$$\sup_{x_0 \in B(0)} [\mathcal{J}(x_0, \overline{u}_n(t, x), \widetilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x))] \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x)), \tag{5.9}$$

где

$$\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x)) = \sup_{B(t_1)} [F(x_1) + \varphi^{(1)}(t_1, x_1)] - \inf_{x_1 \in B(t_1)} [F(x_1) +$$
$$+ \varphi^{(1)}(t_1, x_1)] +$$
$$+ \int_0^{t_1} [\sup_{x \in B(t)} \widetilde{R}^{(1)}(t, x, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x), \varphi^{(1)}(t, x)) -$$
$$- \inf_{x, u \in V(t)} R^{(1)}(t, x, u, \widetilde{v}(t, x), \varphi^{(1)}(t, x))] dt. \tag{5.10}$$

Теорема 2. Степень оптимальности стратегии (5.4) игрока $\mathcal{E}$ в игре, описываемой уравнениями (5.1) при условии, что стратегия игрока имеет вид (5.3), удовлетворяет следующей оценке относительно функционала (5.2):

$$\sup_{x_0 \in B(0)} [\mathcal{J}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \overline{v}(t, x))] \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_2(\varphi^2(t, x)), \tag{5.11}$$

где

$$\Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x)) = \sup_{x_1 \in B(t_1)} [F(x_1) + \varphi^{(2)}(t_1, x_1)] -$$
$$- \inf_{x_1 \in B(t_1)} [F(x_1) + \varphi^{(2)}(t_1, x_1)] +$$
$$+ \int_0^{t_1} [\sup_{x, v \in V(t)} R^{(2)}(t, x, \widetilde{u}(t, x), v, \varphi^{(2)}(t, x)) -$$
$$- \inf_{x \in B(t)} \widetilde{R}^{(2)}(t, x, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x), \varphi^{(2)}(t, x))] dt. \tag{5.12}$$

Здесь $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$ — произвольные, но удовлетворяющие оговоренным выше условиям функции.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теоремы из [27]. Приведем доказательство теоремы 1.

Введем в рассмотрение множество $V_1(t)$, отличающееся от $V(t)$ только тем, что вектор-функция $v(t)$ имеет вид (5.4). Совокупность всех пар вектор-функций x, $u \in V_1(t)$, удовлетворяющих уравнениям (5.1), при $v = \widetilde{v}(t, x)$ образует множество $D_1[\widetilde{v}(t, x)]$. Определим на множестве $V_1(t)$ независимых пар вектор-функций $x(t)$, $u(t)$ функционал

$$L_1^{(1)}(x_0, u, \widetilde{v}(t, x), \varphi_1^{(1)}(t, x)) = F(x_1) + \varphi_1^{(1)}(t_1, x_1) -$$
$$- \varphi_1^{(1)}(0, x_0) - \int_0^{t_1} R^{(1)}(t, x, u, \widetilde{v}(t, x), \varphi_1^{(1)}(t, x)) dt \tag{5.13}$$

и на множестве $B(t)$ независимых вектор-функций $x(t)$ функционал

$$L_2^{(1)}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x), \varphi_2^{(1)}(t, x)) = F(x_1) +$$
$$+ \varphi_2^{(1)}(t_1, x_1) - \varphi_2^{(1)}(0, x_0) - \int_0^{t_1} \widetilde{R}^{(1)}(t, x, \widetilde{u}(t, x),$$
$$\widetilde{v}(t, x), \varphi_2^{(1)}(t, x)) dt. \tag{5.14}$$

Легко показать, что при $x(t)$, $u(t) \in D_1[\widetilde{v}(t, x)]$ имеет место равенство

$$L_1^{(1)}(x_0, u, \widetilde{v}(t, x), \varphi_1^{(1)}(t, x)) = \mathcal{J}(x_0, u, \widetilde{v}(t, x)), \tag{5.15}$$

а при $x \in D_2$ — равенство

$$L_2^{(1)}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x), \varphi_2^{(1)}(t, x)) =$$
$$= \mathcal{J}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x)). \tag{5.16}$$

Так как $D_1[\widetilde{v}(t, x)] \subset V_1(t)$, а $D_2 \subset B(t)$, то справедливы неравенства

$$\mathcal{J}(x_0, \overline{u}_n(t, x), \widetilde{v}(t, x)) \leqslant \sup_{x, u \in V_1(t)} L_1^{(1)}(x_0, u, \widetilde{v}(t, x), \varphi_1^{(1)}(t, x)), \tag{5.17}$$

$$\mathcal{J}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x)) \geqslant \inf_{x \in B(t)} L_2^{(1)}(x_0, \widetilde{u}(t, x), \widetilde{v}(t, x),$$
$$\varphi_2^{(1)}(t, x)). \tag{5.18}$$

Усиливая неравенство вычитанием (5.18) из (5.17) и используя (5.13), (5.14), получаем

$$\mathcal{I}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}(t, x)) - \mathcal{I}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x, u \in V_1(t)} L_1^{(1)}(x_0, u, \tilde{v}(t, x), \varphi_1^{(1)}(t, x)) -$$

$$- \inf_{x \in b(t)} L_2^{(1)}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi_2^{(1)}(t, x)) =$$

$$= \sup_{x_1 \in b(t_1)} [F(x_1) + \varphi_1^{(1)}(t_1, x_1)] - \inf_{x_1 \in b(t_1)} [F(x_1) + \varphi_2^{(1)}(t_1, x_1)] +$$

$$+ \varphi_2^{(1)}(0, x_0) - \varphi_1^{(1)}(0, x_0) +$$

$$+ \int_0^{t_1} [\sup_{x \in b(t)} \tilde{R}^{(1)}(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi_2^{(1)}(t, x)) -$$

$$- \inf_{x, u \in V_1(t)} R^{(1)}(t, x, u, \tilde{v}(t, x), \varphi_1^{(1)}(t, x))] dt. \qquad (5.19)$$

Неравенство (5.19) дает оценку степени оптимальности стратегии игрока $\mathcal{P}$ при фиксированном начальном состоянии игры $x(0) = x_0$. Для получения оценки степени оптимальности стратегии игрока $\mathcal{P}$ в виде (5.9), (5.10) достаточно принять

$$\varphi_1^{(1)}(t, x) = \varphi_2^{(1)}(t, x) = \varphi^{(1)}(t, x).$$

Выражение в правой части неравенства (5.19) при этом перестает зависеть от начального состояния игры. Теорема 1 доказана. Доказательство теоремы 2 аналогично.

Теорема 3. Степень оптимальности игры, описываемой уравнениями (5.1) при условии, что стратегии игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ имеют вид (5.3), (5.4), удовлетворяет следующей оценке относительно функционала (5.2):

$$\sup_{x_0 \in b(0)} |\mathcal{I}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)) - \mathcal{I}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x))| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x)) + \Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x)). \qquad (5.20)$$

Следствие. Пусть имеются две функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, такие, что

$$\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x)) = 0, \ \Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x)) = 0. \qquad (5\text{-}21)$$

Тогда на заданных стратегиях (5.3), (5.4) функционал принимает значение цены игры.

Для выполнения условий (5.21), как следует из (5.10) и (5.12), достаточно существования функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, таких, что

1) $\tilde{R}^{(1)}(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi^{(1)}(t, x)) =$

$$= \inf_{u \in Q_1(t, x)} R^{(1)}(t, x, u, \tilde{v}(t, x), \varphi^{(1)}(t, x));$$

2) $\tilde{R}^{(1)}(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi^{(1)}(t, x))$ не зависела от x;

3) $F(x_1) + \varphi^{(1)}(t_1, x_1) = 0$;

4) $\tilde{R}^{(2)}(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi^{(2)}(t, x)) =$

$$= \sup_{v \in Q(t, x)} R^{(2)}(t, x, \tilde{u}(t, x), v, \varphi^{(2)}(t, x));$$

5) $\tilde{R}^{(2)}(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi^{(2)}(t, x))$ не зависела от x;

6) $F(x_1) + \varphi^{(2)}(t_1, x_1) = 0$. (5.22)

Когда стратегии игроков входят раздельно в правые части уравнения (5.1) и в выражение для подынтегральной функции функционала (5.2), т. е. когда выполняется (3.16), условиям (5.22) может удовлетворить одна функция $\varphi(t, x) = \varphi^{(1)}(t, x) = \varphi^{(2)}(t, x)$. Действительно, если имеет место (3.16), условия 1 и 4 (5.22) сливаются в одно условие

$$\inf_{u \in Q_1(t, x)} R^{(1)}(t, x, u, \tilde{v}(t, x), \varphi(t, x)) =$$

$$= \tilde{R}^{(1)}(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi(t, x)) =$$

$$= \tilde{R}^{(2)}(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi(t, x)) =$$

$$= \sup_{v \in Q_2(t, x)} R^{(2)}(t, x, \tilde{u}(t, x), v, \varphi(t, x)),$$

и, следовательно, достаточные условия (5.22) имеют вид

$$R(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi(t, x)) =$$

$$= \inf_{u \in Q_1(t, x)} \sup_{v \in Q_2(t, x)} R(t, x, u, v, \varphi(t, x)) =$$

$$= \sup_{v \in Q_2(t, x)} \inf_{u \in Q_1(t, x)} R(t, x, u, v, \varphi(t)),$$

$R(t, x, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x), \varphi(t, x))$ не зависит от x,

$$F(x_1) + \varphi(t_1, x_1) = 0, \qquad (5.23)$$

Доказательство. Прибавляя (5.9) к (5.11) и имея в виду, что правая часть полученного неравенства не зависит от начального состояния игры, получаем

$$\sup_{x_0 \in B(0)} [\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \tilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \bar{v}_n(t, x))] \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x)) + \Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x)). \tag{5.24}$$

Кроме того, очевидно, справедливы следующие неравенства:

$$\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \tilde{v}(t, x)) \geqslant \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x)) \geqslant$$
$$\geqslant \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \bar{v}_n(t, x)), \tag{5.25}$$
$$\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \tilde{v}(t, x)) \geqslant \mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}(t, x) \geqslant$$
$$\geqslant \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \bar{v}_n(t, x)).$$

В силу неравенств (5.25) получим

$$|\mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \tilde{v}(t, x))| \leqslant$$
$$\leqslant \mathcal{J}(x_0, \bar{u}_n(t, x), \tilde{v}(t, x)) - \mathcal{J}(x_0, \tilde{u}(t, x), \bar{v}_n(t, x)). \tag{5.26}$$

Подставляя (5.26) в левую часть неравенства (5.24) и, учитывая, что правая часть неравенства (5.24) не зависит от начального состояния игры, получаем оценку (5.20). Теорема доказана.

Полученная оценка справедлива для любой пары функций $\varphi(t, x)$. Эту свободу в выборе необходимо использовать так, чтобы получить достаточно эффективную оценку, которая бы максимально приближалась к истинной величине степени оптимальности игры.

5.3. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ОЦЕНКИ

Проблемы получения эффективной оценки степени оптимальности игры сводятся к решению задачи минимизации двух функционалов $\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x))$ и $\Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x))$ в пространстве функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$ соответственно. Одним из общих приемов решения этих задач является метод Ритца [28].

Рассмотрим основные свойства функционалов $\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x))$ и $\Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x))$. В силу неравенств (5.9) и

(5.11) эти функционалы ограничены снизу. Так как функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные, то эти функционалы также непрерывны в соответствующих функциональных пространствах.

Выберем какие-либо две последовательности функций $\mu_1^{(1)}(t, x), \mu_2^{(1)}(t, x), \ldots, \mu_k^{(1)}(t, x), \ldots$ и $\mu_1^{(2)}(t, x), \mu_2^{(2)}(t, x), \ldots$ $\ldots, \mu_\nu^{(2)}(t, x)$, каждая из которых удовлетворяет следующим двум условиям: 1) при любом k (соответственно ν) функции $\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \ldots, \mu_k^{(1)}$ (соответственно $\mu_1^{(2)}, \mu_2^{(2)}, \ldots, \mu_\nu^{(2)}$) линейно независимы; 2) последовательность функций полна, т. е. линейные комбинации этих функций образуют множество, всюду плотное в пространстве функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ (соответственно, $\varphi^{(2)}(t, x)$). Приближенное решение задачи будем искать в виде

$$\varphi_k^{(1)}(t, x) = \sum_{i=1}^{k} c_i^{(1)} \mu_i^{(1)}(t, x), \tag{5.27}$$

$$\varphi_\nu^{(2)}(t, x) = \sum_{j=1}^{\nu} c_j^{(2)} \mu_j^{(2)}(t, x), \tag{5.28}$$

где $c_i^{(1)}$ и $c_j^{(2)}$ — постоянные, выбираемые так, чтобы функционалы $\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x))$ и $\Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x))$ принимали возможно меньшее значение.

Увеличивая k и ν, можно получить последовательность оценок

$$\Delta_1(\varphi_1^{(1)}(t, x)), \ \Delta_1(\varphi_2^{(1)}(t, x)), \ldots, \ \Delta_1(\varphi_k^{(1)}(t, x)), \ldots \tag{5.29}$$

$$\Delta_2(\varphi_1^{(2)}(t, x)), \ \Delta_2(\varphi_2^{(2)}(t, x)), \ldots, \ \Delta_2(\varphi_\nu^{(2)}(t, x)), \ldots \tag{5.30}$$

Так как функционалы $\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, x))$ и $\Delta_2(\varphi^{(2)}(t, x))$ непрерывны и ограничены снизу, то последовательности оценок (5.29) и (5.30) сходятся, последовательности же функций $\varphi_k^{(1)}(t, x)$ и $\varphi_\nu^{(2)}(t, x)$ являются минимизирующими.

Один из возможных способов получения эффективной оценки степени оптимальности игры заключается в подборе таких функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, которые удовлетворяли бы следующим уравнениям:

$$\widetilde{R}^{(1)}(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ \widetilde{v}(t,\ x),\ \widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x)) = \inf_{u \in Q_1(t,\ x)} R^{(1)}(t,\ x,\ u,\ \widetilde{v}(t,\ x),\ \widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x)), \qquad (5.31)$$

$$\widetilde{R}^{(2)}(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ \widetilde{v}(t,\ x),\ \widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x)) = \sup_{v \in Q_2(t,\ x)} R^{(2)}(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ v,\ \widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x)). \qquad (5.32)$$

При этом получим

$$\Delta_1(\widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x)) = \sup_{x_1 \in B(t_1)} [F(x_1) + \widetilde{\varphi}^{(1)}(t_1,\ x_1)] - \inf_{x_1 \in B(t_1)} [F(x_1) + \widetilde{\varphi}^{(1)}(t_1,\ x_1)] + \int_0^{t_1} [\sup_{x \in B(t)} \widetilde{R}^{(1)}(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ \widetilde{v}(t,\ x),\ \widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x)) - \inf_{x \in B(t)} \widetilde{R}^{(1)}(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ \widetilde{v}(t,\ x),\ \widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x))]dt, \qquad (5.33)$$

$$\Delta_2(\widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x)) = \sup_{x_1 \in B(t_1)} [F(x_1) + \widetilde{\varphi}^{(2)}(t_1,\ x_1)] - \inf_{x_1 \in B(t_1)} [F(x_1) + \widetilde{\varphi}^{(2)}(t_1,\ x)] + \int_0^{t_1} [\sup_{x \in B(t)} \widetilde{R}^{(2)}(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ \widetilde{v}(t,\ x),\ \widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x)) - \inf_{x \in B(t)} \widetilde{R}^{(2)}(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ \widetilde{v}(t,\ x),\ \widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x))]dt. \qquad (5.34)$$

Для отыскания функций $\widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x)$ и $\widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x)$, удовлетворяющих уравнениям (5.31), (5.32), в случае открытых множеств $Q_1(t,\ x)$ и $Q_2(t,\ x)$ можно воспользоваться необходимыми условиями $\partial R^{(1)}/\partial u = 0$, $\partial R^{(2)}/\partial v = 0$. В результате получим две системы линейных, в общем случае неоднородных уравнений в частных производных первого порядка

$$\varphi_x^{(1)} \frac{\partial f(t,\ x,\ u,\ \widetilde{v}(t,\ x))}{\partial u^\nu} - \frac{\partial p(t,\ x,\ u,\ \widetilde{v}(t,\ x))}{\partial u^\nu} = 0, \quad \nu = 1,\ 2, \ldots,\ r, \qquad (5.35)$$

$$\varphi_x^{(2)} \frac{\partial f(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ v)}{\partial v^k} - \frac{\partial p(t,\ x,\ \widetilde{u}(t,\ x),\ v)}{\partial v^k} = 0, \quad k = 1,\ 2, \ldots,\ s. \qquad (5.36)$$

Решая систему (5.35) совместно с уравнением (5.31), а систему (5.36) совместно с уравнением (5.32), получаем

$$\widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x) = \widetilde{\varphi}^{(1)}(\psi_1^{(1)},\ \psi_2^{(1)}, \ldots,\ \psi_\xi^{(1)},\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ t), \qquad (5.37)$$

$$\widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x) = \widetilde{\varphi}^{(2)}(\psi_1^{(2)},\ \psi_2^{(2)}, \ldots,\ \psi_\xi^{(2)},\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ t), \qquad (5.38)$$

где $\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_\xi^{(1)}$ — независимые первые интегралы системы (5.31), (5.35); $\psi_1^{(2)}, \ldots, \psi_\xi^{(2)}$ — независимые первые интегралы системы (5.32), (5.36). Далее необходимо, как и в общем случае, строить минимизирующие последовательности $\widetilde{\varphi}_k^{(1)}(t,\ x)$ и $\widetilde{\varphi}_\nu^{(2)}(t,\ x)$.

Описанный способ решения уравнений в частных производных в некоторых случаях может упростить решение задачи, т. е. ускорить сходимость метода Ритца. Недостатком такого способа является то, что первые интегралы систем (5.31), (5.35) и (5.32), (5.36) не всегда могут быть найдены.

Заметим, что по формулам (5.33) и (5.34) можно оценить решение задачи, рассмотренной в § 4.2. Действительно, если считать, что функции $\widetilde{\varphi}^{(1)}(t,\ x)$ и $\widetilde{\varphi}^{(2)}(t,\ x)$ заданы в виде полиномов (4.27) с неизвестными коэффициентами $\psi(t)$ и $\chi(t)$, удовлетворяющими условию (4.74) принципа оптимальности — седловой точки, то из системы уравнений (5.31), (5.32) можно определить приближенные оптимальные стратегии $\widetilde{u}(t,\ x)$, $\bar{v}(t,\ x)$ игроков $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$. Коэффициенты $\psi(t)$ и $\chi(t)$ определяются при этом из системы (4.70). При отсутствии возможности удовлетворения граничным условиям (4.73) величины Δ_1 и Δ_2 в формуле (4.84) для оценки оптимальности полученных стратегий $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$ определяются выражениями (5.33), (5.34). Если граничные условия (4.73) удовлетворяются, то выражения (4.14), (4.68) совпадают с (5.33), (5.34). Если стратегии игроков входят раздельно в правые части уравнений (5.1) и в выражение для подынтегральной функции функционала (5.2), то $\tilde{R}^{(1)}=\tilde{R}^{(2)}$, и, если $F(x_1)+\varphi(t_1, x)\neq 0$, то величина Δ в формуле для оценки оптимальности полученных стратегий игроков имеет вид (4.85).

5.4. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Пример. Рассмотрим известный пример движения ракеты и цели, содержащийся в работе [4]. Это движение будем представлять как движение двух точек в неизменной вертикальной плоскости, причем наведение ракеты на цель будем осуществлять по кривой погони [29]. При наведении по кривой погони кинематические связи состоят в том, что вектор скорости ракеты в каждый момент времени направлен на цель. Кинематические связи в этом случае могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{dr}{dt}=-v-v_{ц}\cos(\theta+\theta_{ц}),\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}v_{ц}\sin(\theta+\theta_{ц}), \tag{5.39}$$

где r — радиус-вектор, соединяющий ракету и цель; θ и $\theta_{ц}$ — углы наклона траектории ракеты и цели к горизонту; v и $v_{ц}$ — скорости ракеты и цели Предполагается, что возможные режимы движения ракеты и цели удовлетворяют помимо (5.39) ограничениям

$$0\leqslant v\leqslant v_{\max},\quad 0\leqslant v_{ц}\leqslant v_{\max},\quad 0<r\leqslant r_0. \tag{5.40}$$

Функционал (5.2) имеет здесь следующий вид:

$$\mathcal{J} - r^2(t_1). \tag{5.41}$$

Обозначим цену игры через l_3, т. е.

$$l_3=\mathcal{J}(\overline{v}_{ц}, \overline{\theta}_{ц}, \overline{v}) = \inf_{\{v\}}\ \sup_{\{v_{ц}, \theta_{ц}\}}\mathcal{J} = \sup_{\{v_{ц}, \theta_{ц}\}}\ \inf_{\{v\}}\mathcal{J}.$$

Определим степень оптимальности относительно функционала (5.41) управляемой системы, состоящей из объекта управления (5.39) и управляющего устройства, описываемого уравнениями

$$\tilde{v}_{ц}=v_{\max},\quad \tilde{\theta}_{ц}=\pi-\theta, \tag{5.42}$$

$$\tilde{v}=v_{\max}. \tag{5.43}$$

Построим функции (5.5), (5.6) и функционал (5.10)

$$R^{(1)}(t, r, \theta, v_{ц}, \theta_{ц}, \tilde{v}=v_{\max}, \varphi^{(1)}(t, r, \theta)) =$$

$$=\varphi_r^{(1)}\left(-v_{\max}-v_{ц}\cos(\theta+\theta_{ц}\right)+\varphi_\theta^{(1)}\frac{1}{r}v_{ц}\sin(\theta+\theta_{ц})+\varphi_t^{(1)},$$

$$\tilde{R}^{(1)}(t, r, \theta, \tilde{v}_{ц}=v_{\max}, \tilde{\theta}_{ц}=\pi-\theta, \tilde{v}=v_{\max}, \varphi^{(1)}(t, r, \theta))=\varphi_t^{(1)},$$

$$\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, r, \theta)) = \sup_{r_1, \theta_1}[r^2{}_1+\varphi^{(1)}(t_1, r_1, \theta_1)] -$$

$$-\inf_{r_1, \theta_1}[r^2{}_1+\varphi^{(1)}(t_1, r_1, \theta_1)]+\int_0^{t_1}\Big\{\sup_{r, \theta}\varphi_t^{(1)} -$$

$$-\inf_{r, \theta, v_{ц}, \theta_{ц}}\Big[\varphi_r^{(1)}(-v_{\max}-v_{ц}\cos(\theta+\theta_{ц}))+$$

$$+\varphi_\theta^{(1)}\frac{1}{r}v_{ц}\sin(\theta+\theta_{ц})+\varphi_t^{(1)}\Big]\Big\}dt.$$

В этом примере $\varphi^{(1)}(t, r, \theta)$ легко подбирается. Примем $\varphi^{(1)}(t, r, \theta)= -r^2$. Тогда $\varphi_r^{(1)}=-2r$, $\varphi_\theta^{(1)}=0$, $\varphi_t^{(1)}=0$ и с учетом (5.40): $\varphi_r^{(1)}<0$. Нетрудно видеть, что при этом $\Delta_1(\varphi^{(1)}(t, r, \theta))=0$.

Следовательно, управление цели (5.42) является оптимальным. Проверим, является ли оптимальным управление для ракеты (5.43). Построим функции (5.7), (5.8) и фунционал (5.12)

$$R^{(2)}(t, r, \theta, \tilde{v}_{ц}=v_{\max}, \tilde{\theta}_{ц}=\pi-\theta, v, \varphi^{(2)}(t, r, \theta)) =$$

$$=\varphi_r^{(2)}(-v+v_{\max})+\varphi_t^{(2)},$$

$$\tilde{R}^{(2)}(t, r, \theta, \tilde{v}_{ц}=v_{\max}, \tilde{\theta}_{ц}=\pi-\theta, \tilde{v}=v_{\max}, \varphi^{(2)}(t, r, \theta))=\varphi_t^{(2)},$$

$$\Delta_2(\varphi^{(2)}(t, r, \theta)) = \sup_{r_1, \theta_1}[r^2{}_1+\varphi^{(2)}(t_1, r_1, \theta_1)] -$$

$$-\inf_{r_1, \theta_1}[r^2{}_1+\varphi^{(2)}(t_1, r_1, \theta_1)]+$$

$$+\int_0^{t_1}\Big\{\sup_{r, \theta, v}[\varphi_r^{(2)}(-v+v_{\max})+\varphi_t^{(2)}]-\inf_{r, \theta}\varphi_t^{(2)}\Big\}dt.$$

Примем $\varphi^{(2)}(t, r, \theta)=\varphi^{(1)}(t, r, \theta)=-r^2$. В этом случае $\Lambda_2(\varphi^{(2)}(t, r, \theta))=0$. Следовательно, на заданных управлениях (5.42), (5.43) цели и ракеты достигается цена игры.

5.4.1. Задача о наведении в цель управляемой аэродинамической ракеты при конфликтной ситуации

Рассмотрим задачу о наведении в цель управляемой аэродинамической ракеты. Цель и ракета движутся в горизонтальной плоскости. Будем приближенно описывать движение центра массы ракеты уравнениями

$$\dot v = g\,[a - b\,(1 + n^2)], \quad \dot\psi = -(g/v)\,n, \tag{5.44}$$

где n — избыточная перегрузка ракеты. В уравнениях (5.44) приняты следующие допущения: масса ракеты полагается постоянной, поляра ракеты полагается параболической с независимыми от скорости коэффициентами. Взаимное положение ракеты и цели показано на рис. 5. Движение ракеты относительно цели определяется кинематическими зависимостями

$$\begin{gathered} \dot q = (v/D)\sin(q-\psi) + (v_ц/D)\sin\varepsilon_ц, \\ \dot D = -v\cos(q-\psi) - v_ц\cos\varepsilon_ц. \end{gathered} \tag{5.45}$$

Значения переменных в уравнениях (5.45) ясны из рис. 5.

Так как

$$\varepsilon = q - \psi, \tag{5.46}$$

то, объединяя (5.44) и (5.45), получаем незамкнутую систему уравнений процесса наведения

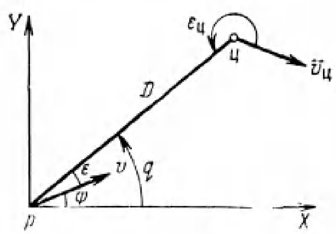

Рис. 5

$$\begin{gathered} \dot v = g\,[a - b\,(1+n^2)], \\ \dot\varepsilon = \frac{v}{D}\sin\varepsilon + \frac{v_ц}{D}\sin\varepsilon_ц + \frac{g}{v}\,n, \\ \dot D = -v\cos\varepsilon - v_ц\cos\varepsilon_ц. \end{gathered} \tag{5.47}$$

Управляющим параметром ракеты здесь является избыточная перегрузка n. Управлениями для цели являются переменные $v_ц$ и $\varepsilon_ц$.

Будем полагать, что управление ракетой осуществляется по методу пропорционального сближения [29]

$$\tilde n = -k\dot q = -k\,\frac{v}{D}\sin\varepsilon - k\,\frac{v_ц}{D}\sin\varepsilon_ц, \tag{5.48}$$

где k — коэффициент усиления системы. Что касается цели, то для простоты рассмотрим ее поведение при

$$\tilde v_ц(t) \equiv 0. \tag{5.49}$$

Значение перегрузки ракеты n ограничено по модулю

$$|n| \leqslant n_{пред}. \tag{5.50}$$

Ограничены также возможности цели

$$0 \leqslant v_ц \leqslant V_ц, \quad |v(t)\cos\varepsilon(t)| \geqslant V_ц, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{5.51}$$

В качестве функционала будем рассматривать время наведения ракеты из некоторого начального состояния (v_0, ε_0, D_0) в малую окрестность цели, определяемую величиной радиуса D_1. Положим

$$\mathcal{J} = \int_0^{t_1} dt. \tag{5.52}$$

Обозначим цену игры через l_3:

$$l_3 = \mathcal{J}(\overline{v_ц}, \overline{\varepsilon_ц}, \overline{n}) = \sup_{v_ц,\,\varepsilon_ц}\,\inf_{n}\,\mathcal{J} = \inf_{n}\,\sup_{v_ц,\,\varepsilon_ц}\,\mathcal{J}. \tag{5.53}$$

Определим степень оптимальности относительно функционала (5.52) управляемой системы, состоящей из объекта управления (5.47) и управляющего устройства, описываемого уравнениями (5.48), (5.49).

Положив, что дальность D при сближении ракеты с целью меняется монотонно ($\dot D < 0$, см. (5.51)), произведем замену переменных

$$dt = \frac{dD}{\dot D} = -\frac{dD}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц} \tag{5.54}$$

и преобразуем уравнения (5.47) и подынтегральное выражение в формуле (5.52), получим

$$\begin{gathered} \dot v = -\frac{g\,[a - b\,(1+n^2)]}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц}, \\ \dot\varepsilon = -\frac{\frac{v}{D}\sin\varepsilon + \frac{v_ц}{D}\sin\varepsilon_ц + \frac{g}{v}\,n}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц}, \\ \mathcal{J} = -\int_{D_0}^{D_1} \frac{dD}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц}. \end{gathered} \tag{5.55}$$

Так как дальность D является монотонно убывающей переменной, то удобно рассматривать процесс наведения от конца к началу. При этом система уравнений процесса и функционал преобразуются к виду

$$\begin{gathered} \dot v = \frac{g\,[a - b\,(1+n^2)]}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц}, \\ \dot\varepsilon = \frac{\frac{v}{D}\sin\varepsilon + \frac{v_ц}{D}\sin\varepsilon_ц + \frac{g}{v}\,n}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц}, \end{gathered} \tag{5.56}$$

$$\mathcal{J} = \int_{D_1}^{D_0} \frac{dD}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц}. \tag{5.57}$$

В соответствии с (5.5) — (5.8) составим функции

$$R^{(1)}(D, v, \varepsilon, \widetilde{n}, v_ц, \varepsilon_ц, \varphi^{(1)}(D, v, \varepsilon)) =$$
$$= \varphi_v^{(1)} \frac{g\left[a - b\left(1 + \left(k\frac{v}{D}\sin\varepsilon + k\frac{v_ц}{D}\sin\varepsilon_ц\right)^2\right)\right]}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц} +$$
$$+ \varphi_\varepsilon^{(1)} \frac{\frac{v}{D}\sin\varepsilon + \frac{v_ц}{D}\sin\varepsilon_ц + \frac{g}{v}\left(-k\frac{v}{D}\sin\varepsilon - k\frac{v_ц}{D}\sin\varepsilon_ц\right)}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц} -$$
$$- \frac{1}{v\cos\varepsilon + v_ц\cos\varepsilon_ц} + v_D^{(1)}, \tag{5.58}$$

$$\widetilde{R}^{(1)}(D, v, \varepsilon, \widetilde{n}, \widetilde{v}_ц, \varphi^{(1)}(D, v, \varepsilon)) =$$
$$= \varphi_v^{(1)} \frac{g\left[a - b\left(1 + \left(k\frac{v}{D}\sin\varepsilon\right)^2\right)\right]}{v\cos\varepsilon} +$$
$$+ \varphi_\varepsilon^{(1)} \frac{v\sin\varepsilon - gk\sin\varepsilon}{Dv\cos\varepsilon} - \frac{1}{v\cos\varepsilon} + \varphi_D^{(1)}, \tag{5.59}$$

$$R^{(2)}(D, v, \varepsilon, n, \widetilde{v}_ц, \varphi^{(2)}(D, v, \varepsilon)) =$$
$$= \varphi_v^{(2)} \frac{g[a - b(1 + n^2)]}{v\cos\varepsilon} + \varphi_\varepsilon^{(2)} \frac{\frac{v}{D}\sin\varepsilon + \frac{g}{v}n}{v\cos\varepsilon} - \frac{1}{v\cos\varepsilon} + \varphi_D^{(2)}, \tag{5.60}$$

$$\widetilde{R}^{(2)}(D, v, \varepsilon, \widetilde{n}, \widetilde{v}_ц, \varphi^{(2)}(D, v, \varepsilon)) = \varphi_v^{(2)} \frac{g\left[a - b\left(1 + \left(k\frac{v}{D}\sin\varepsilon\right)^2\right)\right]}{v\cos\varepsilon} +$$
$$+ \varphi_\varepsilon^{(2)} \frac{v\sin\varepsilon - gk\sin\varepsilon}{Dv\cos\varepsilon} - \frac{1}{v\cos\varepsilon} + \varphi_D^{(2)}. \tag{5.61}$$

Для получения эффективных оценок по общему методу введем две последовательности функций

$$\varphi_1^{(1)}(D, v, \varepsilon) = c_1^{(1)}v + c_2^{(1)}\varepsilon;$$
$$\varphi_2^{(1)}(D, v, \varepsilon) = c_1^{(1)}v + c_2^{(1)}\varepsilon + c_3^{(1)}v^2 + c_4^{(1)}\varepsilon^2 +$$
$$+ c_5^{(1)}v\varepsilon + c_6^{(1)}vD + c_7^{(1)}\varepsilon D; \tag{5.62}$$

. . . .

$$\varphi_1^{(2)}(D, v, \varepsilon) = c_1^{(2)}v + c_2^{(2)}\varepsilon; \tag{5.63}$$
$$\varphi_2^{(2)}(D, v, \varepsilon) = c_1^{(2)}v + c_2^{(2)}\varepsilon + c_3^{(2)}v^2 + c_4^{(2)}\varepsilon^2 + c_5^{(2)}v\varepsilon +$$
$$+ c_6^{(2)}vD + c_7^{(2)}\varepsilon D;$$

. . . .

Полученные последовательности функций (5.62) и (5.63) являются полными, так как согласно теореме Вейерштрасса [30] они с любой точностью приближают любую непрерывную функцию в пространстве переменных D, v, ε.

Подставляя функцию $\varphi_1^{(1)}(D, v, \varepsilon)$ в (5.58), (5.59), подсчитаем оценку по формуле (5.10) и минимизируем ее по параметрам $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$. Затем подставив функцию $\varphi_2^{(1)}(D, v, \varepsilon)$ в (5.58), (5.59), подсчитаем оценку по формуле (5.10) и минимизируем ее по параметрам $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_7^{(1)}$ и т. д. В результате получим невозрастающую сходящуюся последовательность оценок $\Delta_1^{(1)}(\varphi_1^{(1)})$, $\Delta_2^{(1)}(\varphi_2^{(1)})$, ... Аналогично вычисляется оценка по формуле (5.12). В результате получаем невозрастающую сходящуюся последовательность оценок $\Delta_1^{(2)}(\varphi_1^{(2)})$, $\Delta_2^{(2)}(\varphi_2^{(2)})$, ...

Другой способ получения эффективной оценки степени оптимальности игры заключается в подборе таких функций $\widetilde{\varphi}^{(1)}(D, v, \varepsilon)$ и $\widetilde{\varphi}^{(2)}(D, v, \varepsilon)$, которые удовлетворяли бы уравнениям (5.31), (5.32). Покажем, как в этом случае составляется оценка по формуле (5.34).

Для этого необходимо решить уравнение в частных производных (5.36), которое при управлениях (5.48), (5.49) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial R^{(2)}(D, v, \varepsilon, \widetilde{n}, \widetilde{v}_ц)}{\partial n} = \varphi_v^{(2)} \frac{2bkv^2}{D} + \varphi_\varepsilon^{(2)} \frac{1}{\sin\varepsilon} = 0 \tag{5.64}$$

Первый интеграл уравнения (5.64):

$$\theta = \frac{D}{2bkv} - \cos\varepsilon. \tag{5.65}$$

Общее решение уравнения (5.64) имеет вид

$$\varphi^{(2)} = \Phi(\theta, D), \tag{5.66}$$

где Φ — произвольная функция.

Минимизирующую последовательность функций $\varphi_k^{(2)}$ будем искать в виде

$$\varphi_1^{(2)} = c_1^{(2)}\theta;$$
$$\varphi_2^{(2)} = c_1^{(2)}\theta + c_2^{(2)}\theta^2 + c_3^{(2)}\theta D; \tag{5.67}$$

. . . .

Подставляя последовательно функции $\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots, \varphi_k^{(2)}, \ldots$ в (5.61), составляем каждый раз оценку (5.34) и минимизируем ее по параметрам $c^{(2)}$. Получаем таким образом последовательность оценок.

Для управлений (5.48), (5.49) в работе [27] были проведены расчеты оценок $\Delta^{(2)}(\varphi^{(2)})$ по формуле (5.12). Расчеты проводились на ЦВМ обоими изложенными способами. Было показано, что при втором способе сходимость метода Ритца более быстрая. Так, для получения оценки приемлемой точности оказалось достаточным использование второго приближения. Что касается поведения цели, то оценка ее оптимальности при законе управления (5.49) не проводилась. Однако ясно, что принятый закон ее поведения далек от оптимального.

6. Методы решения некоторых бескоалиционных дифференциальных игр n лиц

В этой главе излагаются методы решения бескоалиционных дифференциальных игр n лиц, причем существенно, что стратегии игроков в общем случае входят нераздельно в правые части уравнений процесса игры и в выражения для критериев выигрыша. Получены достаточные условия существования решения игры. Приводятся также необходимые условия существования решения игры в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений в векторной форме

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ u_1, \ldots,\ u_i, \ldots,\ u_n) \tag{6.1}$$

при начальных условиях $x(0)=x_0$. В уравнении (6.1) $x(t)=[x^1(t),\ \ldots,\ x^m(t)]$ — m-мерная вектор-функция состояния процесса, определенная на отрезке $[0,\ T]$ (T — фиксированное время окончания процесса). При каждом фиксированном t вектор $x(t)$ принадлежит заданной области $B(t)$ m-мерного векторного пространства X. Вектор-функции $u_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ будем называть управлениями или стратегиями игроков, причем i-я стратегия находится в распоряжении i-го игрока; $u_i(t) = [u^1_i(t),\ \ldots,\ u_i^{r_i}(t)]$ — r_i-мерные вектор-функции, принадлежащие множествам $Q_i(t,\ x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Вектор-функции $x(t)$, $u_i(t)$ и $f(t,\ x,\ u_1,\ \ldots,\ u_i,\ \ldots,\ u_n)$ обладают свойствами, обычно принимаемыми в теории оптимальных процессов и рассмотренными в § 3.1.

В § 1.3 показано, что при исследовании различных игр центральной задачей является определение концепции оптимальности, т. е. наиболее разумного в условиях данной игры принципа поведения. Будем считать, что для рассматриваемого класса бескоалиционных игр наиболее разумным поведением i-го игрока является максимизация своего выигрыша, за который примем

функционал следующего вида:

$$\mathcal{J}_i(u_1(t),\ \ldots,\ u_i(t),\ \ldots,\ u_n(t)) = F(x(T)) + \int_0^T p_i(t,\ x,\ u_1,\ \ldots,\ u_i,\ \ldots,\ u_n)dt, \tag{6.2}$$

$$i=1,\ \ldots,\ r.$$

Интуитивно ясно, что такая концепция поведения каждого игрока в ряде случаев является наиболее разумной и отступление от нее невыгодно. Решением рассматриваемой игры называется такая система стратегий игроков $\bar{u}_i(t)\in Q_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, что выполняются соотношения

$$\mathcal{J}_i(\bar{u}_1(t),\ \ldots,\ \bar{u}_i(t),\ \ldots,\ \bar{u}_n(t)) \geq \mathcal{J}_i(\bar{u}_1(t),\ \ldots,\ u_i(t),\ \ldots,\ \bar{u}_n(t)),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{6.3}$$

т. е. стратегии $\bar{u}_i(t)$ осуществляют ситуации равновесия (аналог точек Нэша [10]). Будем предполагать, что функции $\bar{u}_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ можно определить из следующих соотношений:

$$\mathcal{J}_i(\bar{u}_1(t),\ \ldots,\ \bar{u}_{i-1}(t),\ \bar{u}_i(t),\ \bar{u}_{i+1}(t),\ \ldots,\ \bar{u}_n(t)) = \sup_{u_i(t)\subset Q_i} \mathcal{J}_i(\bar{u}_1(t),\ \ldots,\ \bar{u}_{i-1}(t),\ u_i(t),\ \bar{u}_{i+1}(t),\ \ldots,\ \bar{u}_n(t)),$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{6.4}$$

Такие стратегии игроков будем называть оптимальными. Достаточные и необходимые условия существования решения данной игры будут получены ниже.

Функции p_i и $F(x(T))$, фигурирующие в (6.2), обладают свойствами, указанными в § 3.1. Предполагается также (и это существенно), что в общем случае стратегии игроков u_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ входят нераздельно в правые части уравнений (6.1) и в выражения для функционалов (6.2).

При любых фиксированных стратегиях $u_j(t)\in Q_j$ $(j\neq i)$ $(n-1)$ игроков и начальных условиях $x(0)=x_0$ фазовые координаты процесса (6.1) и значение функционала (6.2) зависят только от стратегии $u_i(t)$ i-го игрока. Учитывая это, будем решать задачу последовательно в два этапа. На первом этапе определим стратегию $\bar{u}_i(t,\ u_1,\ \ldots,\ u_{i-1},\ u_{i+1},\ \ldots,\ u_n)$ i-го игрока $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, доставляющую максимум функционалу (6.2) при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ остальных $(n-1)$ игроков:

$$\mathcal{J}_i(u_1(t), \ldots, u_{i-1}(t), \bar{u}_i(t, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n), u_{i+1}(t), \ldots, u_n(t)) = \sup_{u_i(t) \in Q_i} \mathcal{J}_i (u_1(t), \ldots, u_{i-1}(t), u_i(t), u_{i+1}(t), \ldots, u_n(t)) = d_i(u_1(t), \ldots, u_{i-1}(t), u_{i+1}(t), \ldots, u_n(t)). \qquad (6.5)$$

В результате первого этапа решения в зависимости от применяемого формализма получим достаточные или необходимые условия максимума функционала (6.2) по стратегиям $u_i(t)$ i-го игрока при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ остальных $(n-1)$ игроков. Эта система условий и максимальное значение (6.5) функционала (6.2) зависят только от заранее фиксированных стратегий $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$. Задача второго этапа заключается в том, чтобы при обеспечении условий максимума функционала (6.2), полученных на первом этапе, выбрать такие стратегии $\bar{u}_i(t) \in Q_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ игроков, которые дают решение игры. Точнее на втором этапе получим достаточные или необходимые условия выполнения соотношений (6.4).

6.2. ПЕРВЫЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ

На первом этапе формализма необходимо решить задачу максимизации i-м игроком функционала (6.2) по своей стратегии $u_i(t) \in Q_i$ при любых фиксированных стратегиях остальных игроков. Применяя формализм изложенный в § 3.4 или в работе [2], получаем достаточные условия абсолютного максимума i-го функционала (6.2):

$$\inf_{u_i \in Q_i(t, x)} [\varphi_x^{(i)}(t, x) f(t, x, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) - p_i(t, x, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + \varphi_t^{(i)}(t, x)] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6.6)$$

$$F(x(T)) + \varphi^{(i)}(T, x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.7)$$

Если существуют функции $\varphi^{(i)}(t, x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, зависящие от $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ и удовлетворяющие (6.6) и (6.7), то допустимая стратегия $\bar{u}_i(t, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ i-го игрока, определяемая из (6.6), является оптимальной при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков. Абсолютное максимальное значение функционала (6.2) на этой оптимальной стратегии i-го игрока равно (см. § 3.4)

$$\sup_{u_i(t) \in Q_i} \mathcal{J}_i(u_1(t), \ldots, u_i(t), \ldots, u_n(t)) = \mathcal{J}_i(u_1(t), \ldots, \bar{u}_i(t, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n), \ldots, u_n(t)) = -\varphi^{(i)}(0, x_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.8)$$

Пусть такие функции $\varphi^{(i)}(t, x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ существуют. Тогда выражение (6.6) и стратегию $\bar{u}_i(t, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ i-го игрока, определяемую из (6.6), можно записать в следующем виде:

$$\varphi_x^{(i)}(t, x) f(t, x, u_1, \ldots, \bar{u}_i(t, x, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n), \ldots, u_n) - p_i(t, x, u_1, \ldots, \bar{u}_i(t, x, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n), \ldots, u_n) + \varphi_t^{(i)}(t, x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6.9)$$

$$\bar{u}_i = g_i(t, x, \varphi_x^{(i)}, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.10)$$

Достаточное условие (6.6) абсолютного максимума i-го функционала (6.2) справедливо при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков. Поэтому выражение (6.10) для оптимальной стратегии $\bar{u}_i$ i-го игрока, определяемое из этого условия, также справедливо при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков. В частности, достаточные условия (6.7), (6.9) и (6.10) справедливы при оптимальных стратегиях $\bar{u}_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков, т. е. при тех стратегиях $\bar{u}_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$, при которых имеют место соотношения (6.4). Следовательно, выражение (6.10) при оптимальных стратегиях $\bar{u}_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков будет иметь следующий вид:

$$\bar{u}_i = g_i(t, x, \varphi_x^{(i)}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_{i+1}, \ldots, \bar{u}_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.11)$$

Система (6.11) представляет собой систему n уравнений относительно оптимальных стратегий $\bar{u}_i$ n игроков. Если решение этой системы существует и принадлежит классу допустимых, то оно может быть записано в следующем виде:

$$\bar{u}_i = h_i(t, x, \varphi_x^{(1)}, \ldots, \varphi_x^{(n)}), \ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.9), получаем достаточные условия существования решения рассматриваемой игры

$$\varphi_x^{(i)}(t, x) f[t, x, h_1(t, x, \varphi_x^{(1)}, \ldots, \varphi_x^{(n)}), \ldots, h_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \ldots$$
$$\ldots, \varphi_x^{(n)})] - p_i[t, x, h_1(t, x, \varphi_x^{(1)}, \ldots, \varphi_x^{(n)}), \ldots$$
$$\ldots, h_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \ldots, \varphi_x^{(n)})] + \varphi_t^{(i)}(t, x) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.13)$$

Если существуют n функций $\varphi^i(t, x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих системе (6.13) при граничных условиях (6.7), то решение рассматриваемой игры полностью определено. Оптимальные стратегии игроков определяются из (6.12). Значения выигрышей игроков на оптимальных стратегиях равны $-\varphi^{(i)}(0, x_0)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Важным частным случаем описания процесса является случай, когда стратегии игроков входят раздельно в правые части уравнений (6.1) и в выражения для подынтегральных функций функционалов (6.2), т. е. когда эти функции можно представить в виде

$$f(t, x, u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t, x, u_j),$$
$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t, x, u_j). \qquad (6.14)$$

В этом случае уравнение (6.6) имеет вид

$$\inf_{u_i \in Q_i} [\varphi_x^{(i)}(t, x) f_i(t, x, u_i) + \varphi_x^{(i)}(t, x) \sum_{j=1}^{n-1} f_j(t, x, u_j) -$$
$$- p_{ii}(t, x, u_i) - \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij}(t, x, u_j) + \varphi_t^{(i)}(t, x)] = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n; \ j \neq i. \qquad (6.15)$$

Пусть функции $\varphi^{(i)}(t, x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющие (6.15), существуют. Тогда равенство (6.15) и стратегию $\bar{u}_i(t)$, определяемую из (6.15), можно записать в следующем виде:

$$\varphi_x^{(i)}(t, x) f_i(t, x, \bar{u}_i(t, x)) + \varphi_x^{(i)}(t, x) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n-1} f_j(t, x, u_j) - p_{ii}(t, x, \bar{u}_i(t, x)) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij}(t, x, u_j) + \varphi_t^{(i)}(t, x) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ j \neq i,$$
$$(6.16)$$

$$\bar{u}_i = g_i(t, x, \varphi_x^{(i)}), \ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.17)$$

Достаточное условие (6.15) абсолютного максимума i-го функционала (6.2) справедливо при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков. В частности, достаточное условие (6.15) справедливо при оптимальных стратегиях $\bar{u}_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ игроков. Подставляя оптимальные стратегии игроков (6.17) при $j \neq i$ в условие (6.16), получаем для случая (6.14) достаточные условия существования решения рассматриваемой игры:

$$\varphi_x^{(i)}(t, x) f_i(t, x, g_i(t, x, \varphi_x^{(i)})) + \varphi_x^{(i)}(t, x) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n-1} f_j(t, x, g_j(t, x, \varphi_x^{(j)})) - p_{ii}(t, x, g_i(t, x, \varphi_x^{(i)})) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij}(t, x, g_j(t, x, \varphi_x^{(j)})) + \varphi_t^{(i)}(t, x) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n; \ j \neq i. \qquad (6.18)$$

Граничными условиями для системы (6.18) будут условия (6.7).

В предельном случае, когда все игроки имеют общие интересы, т. е. имеет место тождество $p_i(t, x, u_1, \ldots, u_n) \equiv p(t, x, u_1, \ldots, u_n)$ и выполняется условие (6.14), система (6.15) превращается в одно уравнение

$$\inf_{u_1 \in Q_1} \inf_{u_2 \in Q_2} \ldots \inf_{u_n \in Q_n} [\varphi_x(t, x) \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x, u_i) - \\ - \sum_{i=1}^{n} p_i(t, x, u_i) + \varphi_t(t, x)] = 0, \tag{6.19}$$

представляющее собой достаточное условие существования решения бескоалиционной игры n лиц с общими интересами.

6.3. ВТОРОЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ

Предположим, что область допустимых x открыта при всех $t \in (0, T)$, а при $t=0$ и $t=T$ является заданной точкой $x=x_0$ и $x=x_1$. Множества Q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ предполагаются зависящими только от t. Применяя формализм, изложенный в § 3.5 или в работе [2], получаем необходимые условия максимума i-го функционала (6.2) при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков:

$$\dot{\psi}^{(i)\nu} + H^{(i)}_{x^\nu} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ \nu = 1, 2, \ldots, m, \tag{6.20}$$

$$H^{(i)}(t, \bar{x}(t), u_1(t), \ldots, \bar{u}_i(t, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n), \ldots \\ \ldots, u_n) = \inf_{u_i \in Q_i(t)}, \tag{6.21}$$

где $\psi^{(i)}(t) = \varphi^{(i)}_x(t, \bar{x}(t))$,

$$H^{(i)}(t, x, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \\ = \psi^i(t) f(t, x, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) - \\ - p_i(t, x, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n). \tag{6.22}$$

Если существуют функции $\varphi^{(i)}(t, x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, зависящие от $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ и удовлетворяющие условиям теоремы 1 § 2 приложения, то допустимая стратегия $\bar{u}_i(t, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ i-го игрока, определяемая при решении системы (6.10), (6.21) совместно с уравнением (6.1) и граничными условиями $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, является оптимальной при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков.

Пусть такие функции $\varphi^{(i)}(t, x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ существуют, тогда стратегию $\bar{u}_i(t, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ i-го игрока, определяемую из (6.21), можно записать в следующем виде:

$$\bar{u}_i = g^*_i(t, x, \psi^{(i)}, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n), \\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.23}$$

Необходимые условия (6.20), (6.21) максимума i-го функционала (6.2) справедливы при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков. Поэтому выражение (6.23) для оптимальной стратегии $\bar{u}_i$ i-го игрока, определяемой из этих условий, также справедливо при любых фиксированных стратегиях $u_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков. В частности, необходимые условия (6.20), (6.21) и (6.23) справедливы при оптимальных стратегиях $\bar{u}_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков. Следовательно, выражение (6.23) при оптимальных стратегиях $\bar{u}_j(t) \in Q_j$ $(j \neq i)$ $(n-1)$ игроков будет иметь следующий вид:

$$\bar{u}_i = g^*_i(t, x, \psi^{(i)}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_{i+1}, \ldots, \bar{u}_n), \\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.24}$$

Система (6.24) представляет собой систему n уравнений относительно оптимальных стратегий $\bar{u}_i$ n игроков. Если решение этой системы существует и принадлежит классу допустимых, то оно может быть записано в следующем виде:

$$\bar{u}_i = h^*_i(t, x, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.25}$$

Подставляя (6.25) в (6.22) и в (6.1), получаем необходимые условия существования решения рассматриваемой игры:

$$\dot{\psi}^{(i)\nu} + H^{*(i)}_{x^\nu} = 0, \\ \dot{x}^\nu = f^\nu(t, x, h^*_1(t, x, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)}), \ldots \\ \ldots, h^*_n(t, x, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)})), \\ i = 1, 2, \ldots, n; \ \nu = 1, 2, \ldots, m. \tag{6.26}$$

Здесь

$$H^{*(i)} = \psi^{(i)}(t) f(t, x, h^*_1(t, x, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)}), \ldots \\ \ldots, h^*_n(t, x, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)})) - p_i(t, x, h^*_1(t, x, \psi^{(1)}, \ldots \\ \ldots, \psi^{(n)}), \ldots, h^*_n(t, x, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)})). \tag{6.27}$$

Уравнения (6.26) задают вектор-функцию $\overline{x}(t)$, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности, и вектор-функции $\psi^{(i)}(t)$ $(i=1, 2, \dots, n)$ или в силу равенства $\psi^{(i)}(t) = \varphi_x^{(i)}(t, \overline{x}(t))$ значения градиентов $\varphi^{(i)}(t, x)$ при $\overline{x}(t)$. Алгоритм состоит в решении краевой задачи для системы (6.26) обыкновенных дифференциальных уравнений и в доказательстве факта существования функций $\varphi^{(i)}(t, x)$ $(i=1, 2, \dots, n)$.

Когда стратегии игроков входят раздельно в правые части уравнений (6.1) и в выражения для подынтегральных функций функционалов (6.2) (функции представимы в виде (6.14)), оптимальные стратегии игроков в явном виде не зависят друг от друга: $\overline{u}_i = g^*_i(t, x, \psi^{(i)})$. Легко показать, что в этом случае необходимые условия существования решения игры имеют вид

$$\dot{\psi}^{(i)\nu} + H^{*(i)}_{x^\nu} = 0,$$

$$\dot{x}^\nu = f^\nu(t, x, g^*_1(t, x, \psi^{(1)}), \dots, g^*_n(t, x, \psi^{(n)})),$$
$$i = 1, 2, \dots, n; \ \nu = 1, 2, \dots, m. \tag{6.28}$$

Здесь

$$H^{*(i)} = \psi^{(i)}(t) f_i(t, x, g^*_i(t, x, \psi^{(i)})) +$$
$$+ \psi^{(i)}(t) \sum_{j=1}^{n-1} f_j(t, x, g^*_j(t, x, \psi^{(j)})) - p_{ii}(t, x, g^*_i \times$$
$$\times (t, \dot{x}, \psi^{(i)})) - \sum_{j=1}^{n-1} p_{ij}(t, x, g^*_j(t, x, \psi^{(j)})),$$
$$i = 1, 2, \dots, n; \ j \neq i. \tag{6.29}$$

6.4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Пусть управляемый процесс и критерии эффективности игры двух игроков имеют вид

$$\dot{x} = bx + mu_1u_2; \quad x(0) = x_0,$$

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^T (a_1x^2 + c_1u^2_1)\, dt; \quad \mathcal{J}_2 = \int_0^T (a_2x^2 + c_2u^2_2)\, dt, \tag{6.30}$$

где b, m, a_1, a_2, c_1, c_2 — постоянные положительные коэффициенты. Уравнение (6.30) определено в открытой области $\Gamma(x, u_1, u_2)$. Игроки минимизируют свои критерии эффективности. Применим первый формализм решения игры. Выражения (6.6), (6.7) для этого примера, в силу минимизации своих критериев игроками, имеют вид

$$\sup_{u_1} [\varphi_x^{(1)}(t, x)(bx + mu_1u_2) - a_1x^2 - c_1u_1^2 + \varphi_t^{(1)}(t, x)] = 0, \tag{6.31}$$

$$\sup_{u_2} [\varphi_x^{(2)}(t, x)(bx + mu_1u_2) - a_2x^2 - c_2u_2^2 + \varphi_t^{(2)}(t, x)] = 0,$$
$$\varphi^{(1)}(T, x) = \varphi^{(2)}(T, x) = 0. \tag{6.32}$$

Из (6.31) получаем систему (6.11) в виде

$$\overline{u}_1(t, \overline{u}_2) = \frac{m\overline{u}_2}{2c_1}\varphi_x^{(1)}; \quad \overline{u}_2(t, \overline{u}_1) = \frac{m\overline{u}_1}{2c_2}\varphi_x^{(2)}. \tag{6.33}$$

Решение системы (6.33) дает оптимальные стратегии игроков: $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 \equiv 0$. Запишем достаточные условия (6.13) существования решения игры:

$$\varphi_x^{(1)}bx - a_1x^2 + \varphi_t^{(1)} = 0; \quad \varphi_x^{(2)}bx - a_2x^2 + \varphi_t^{(2)} = 0.$$

Решением этих уравнений при граничных условиях (6.32) являются две функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, имеющие вид

$$\varphi^{(1)}(t, x) = \frac{a_1x^2}{2b}(1 - e^{2b(T-t)}),$$

$$\varphi^{(2)}(t, x) = \frac{a_2x^2}{2b}(1 - e^{2b(T-t)}). \tag{6.34}$$

Пример 2. Управляемый процесс имеет вид

$$\dot{x} = bx + mu^2_1u_2, \quad x(0) = 0, \quad |u_1| \leqslant U_1.$$

Критерии эффективности игры двух игроков те же, что и в примере 1. Игроки минимизируют свои критерии эффективности.

Запишем условие (6.7) для этого примера

$$\sup_{u_1} [\varphi_x^{(1)}(t, x)(bx + mu_1^2u_2) - a_1x^2 - c_1u_1^2 + \varphi_t^{(1)}(t, x)] = 0, \tag{6.35}$$

$$\sup_{u_2} [\varphi_x^{(2)}(t, x)(bx + mu_1^2u_2) - a_2x^2 - c_2u_2^2 + \varphi_t^{(2)}(t, x)] = 0,$$
$$\varphi^{(1)}(T, x) = \varphi^{(2)}(T, x) = 0, \tag{6.36}$$

из (6.35) получаем

1) $\varphi_x^{(1)}m\overline{u}_2 - c_1 < 0, \quad \overline{u}_1 = 0, \quad \overline{u}_2 = 0,$
2) $\varphi_x^{(1)}m\overline{u}_2 - c_1 > 0, \quad \overline{u}_1 = U_1, \ \overline{u}_2 = (mU_1^2/2c_2)\,\varphi_x^{(2)}.$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие 1 удовлетворяется. Таким образом, стратегии игроков $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = 0$ являются оптимальными. Функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$ имеют вид (6.34).

Чтобы показать, что условие 2 не выполняется, необходимо решить уравнения

$$\varphi_x^{(1)} bx - a_1 x^2 + \frac{m^2 U^4{}_1}{2c_2} \varphi_x^{(1)} \varphi_x^{(2)} - c_1 U_1^2 + \varphi_t^{(1)} = 0,$$

$$\varphi_x^{(2)} bx - a_2 x^2 + \frac{m^2 U^4{}_1}{4c_2} \varphi^{(2)2} + \varphi_t^{(2)} = 0$$

при граничных условиях (6.36). Решением этих уравнений являются две функции

$$\varphi^{(1)}(t, x) = \tilde{\psi}^{(1)}(t)\, x^2 + c_1 U^2{}_1 (t - T),$$
$$\varphi^{(2)}(t, x) = \tilde{\psi}^{(2)}(t)\, x^2,$$

где $\tilde{\psi}^{(1)}(t)$ и $\tilde{\psi}^{(2)}(t)$ есть решения уравнений

$$\dot{\psi}^{(1)} + 2b\psi^{(1)} - a_1 + \frac{2m^2 U^4{}_1}{c_2} \tilde{\psi}^{(2)}(t)\, \psi^{(1)} = 0, \quad \psi^{(1)}(T) = 0,$$

$$\dot{\psi}^{(2)} + 2b\psi^{(2)} - a_2 + \frac{m^2 U^4{}_1}{c_2} \psi^{(2)2} = 0, \quad \psi^{(2)}(T) = 0.$$

Подставляя полученные выражения для функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$ при $x(0) = 0$ в условие 2, убеждаемся, что оно не выполняется в начале процесса; далее можно показать, что оно не будет выполняться в течение всего процесса игры.

Пример 3. Управляемый процесс и критерии эффективности игры трех игроков имеют вид

$$\dot{x} = ax + bu_1 + cu_2 + du_3, \quad x(0) = x_0,$$
$$\mathcal{J}_1 = \int_0^T (\varepsilon_1 x + h_1 u^2{}_1)\, dt,$$
$$\mathcal{J}_2 = \int_0^T (\varepsilon_2 x + h_2 u^2{}_2)\, dt, \qquad (6.37)$$
$$\mathcal{J}_3 = \int_0^T (\varepsilon_3 x + h_3 u^2{}_3)\, dt.$$

Уравнение (6.37) определено в открытой области $\Gamma(x, u_1, u_2, u_3)$. Постоянные коэффициенты, входящие в (6.37), положительны. Игроки минимизируют свои критерии эффективности.

Выражения (6.15) для этого примера имеют вид

$$\sup_{u_1} [\varphi_x^{(1)}(t, x)(ax + bu_1 + cu_2 + du_3) - \varepsilon_1 x - h_1 u_1^2 + \varphi_t^{(1)}(t, x)] = 0,$$
$$\sup_{u_2} [\varphi_x^{(2)}(t, x)(ax + bu_1 + cu_2 + du_3) - \varepsilon_2 x - h_2 u_2^2 + \varphi_t^{(2)}(t, x)] = 0,$$
$$\sup_{u_3} [\varphi_x^{(3)}(t, x)(ax + bu_1 + cu_2 + du_3) - \varepsilon_3 x - h_3 u_3^2 + \varphi_t^{(3)}(t, x)] = 0. \qquad (6.38)$$

Из (6.38) получаем стратегии (6.17):

$$\overline{u}_1 = \frac{b}{2h_1} \varphi_x^{(1)}; \quad \overline{u}_2 = \frac{c}{2h_2} \varphi_x^{(2)}; \quad \overline{u}_3 = \frac{d}{2h_3} \varphi_x^{(3)}. \qquad (6.39)$$

Запишем достаточные условия (6.18) существования решения игры:

$$\varphi_x^{(1)} ax + \frac{b^2}{4h_1} \varphi_x^{(1)2} + \frac{c^2}{2h_2} \varphi_x^{(1)} \varphi_x^{(2)} +$$
$$+ \frac{d^2}{2h_3} \varphi_x^{(1)} \varphi_x^{(3)} - \varepsilon_1 x + \varphi_t^{(1)} = 0,$$
$$\varphi_x^{(2)} ax + \frac{b^2}{2h_1} \varphi_x^{(1)} \varphi_x^{(2)} + \frac{c^2}{4h_2} \varphi_x^{(2)2} +$$
$$+ \frac{d^2}{2h_3} \varphi_x^{(2)} \varphi_x^{(3)} - \varepsilon_2 x + \varphi_t^{(2)} = 0,$$
$$\varphi_x^{(3)} ax + \frac{b^2}{2h_1} \varphi_x^{(1)} \varphi_x^{(3)} + \frac{c^2}{2h_2} \varphi_x^{(2)} \varphi_x^{(3)} +$$
$$+ \frac{d^2}{4h_3} \varphi_x^{(3)2} - \varepsilon_3 x + \varphi_t^{(3)} = 0. \qquad (6.40)$$

Решением системы (6.40) при граничных условиях $\varphi^{(1)}(T, x) = \varphi^{(2)}(T, x) = \varphi^{(3)}(T, x) = 0$ являются функции

$$\varphi^{(1)}(t, x) = \tilde{\psi}_0^{(1)}(t) + \tilde{\psi}_1^{(1)}(t)\, x + \tilde{\psi}_2^{(1)}(t)\, x^2,$$
$$\varphi^{(2)}(t, x) = \tilde{\psi}_0^{(2)}(t) + \tilde{\psi}_1^{(2)}(t)\, x + \tilde{\psi}_2^{(2)}(t)\, x^2,$$
$$\varphi^{(3)}(t, x) = \tilde{\psi}_0^{(3)}(t) + \tilde{\psi}_1^{(3)}(t)\, x + \tilde{\psi}_2^{(3)}(t)\, x^2,$$

где $\tilde{\psi}_0^{(i)}(t), \tilde{\psi}_1^{(i)}(t), \tilde{\psi}_2^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ являются решениями системы уравнений

$$\dot{\psi}_0^{(1)} + \frac{b^2}{4h_1} \psi_1^{(1)2} + \frac{c^2}{2h_2} \psi_1^{(1)} \psi_1^{(2)} + \frac{d^2}{2h_3} \psi_1^{(1)} \psi_1^{(3)} = 0, \; \psi_0^{(1)}(T) = 0,$$
$$\dot{\psi}_0^{(2)} + \frac{b^2}{2h_1} \psi_1^{(1)} \psi_1^{(2)} + \frac{c^2}{4h_2} \psi_1^{(2)2} + \frac{d^2}{2h_3} \psi_1^{(2)} \psi_1^{(3)} = 0, \quad \psi_0^{(2)}(T) = 0,$$
$$\dot{\psi}_0^{(3)} + \frac{b^2}{2h_1} \psi_1^{(1)} \psi_1^{(3)} + \frac{c^2}{2h_2} \psi_1^{(2)} \psi_1^{(3)} + \frac{d^2}{4h_3} \psi_1^{(3)2} = 0, \quad \psi_0^{(3)}(T) = 0,$$
$$\dot{\psi}_1^{(1)} + a\psi_1^{(1)} + \frac{b^2}{h_1} \psi_1^{(1)} \psi_2^{(1)} + \frac{c^2}{h_2} \psi_1^{(1)} \psi_2^{(2)} + \frac{c^2}{h_2} \psi_2^{(1)} \psi_1^{(2)} +$$
$$+ \frac{d^2}{h_3} \psi_1^{(1)} \psi_2^{(3)} + \frac{d^2}{h_3} \psi_2^{(1)} \psi_1^{(3)} - \varepsilon_1 = 0, \; \psi_1^{(1)}(T) = 0,$$
$$\dot{\psi}_1^{(2)} + a\psi_1^{(2)} + \frac{b^2}{h_1} \psi_1^{(1)} \psi_2^{(2)} + \frac{b^2}{h_1} \psi_2^{(1)} \psi_1^{(2)} +$$
$$+ \frac{c^2}{h_2} \psi_1^{(2)} \psi_2^{(2)} + \frac{d^2}{h_3} \psi_1^{(2)} \psi_2^{(3)} + \frac{d^2}{h_3} \psi_2^{(2)} \psi_1^{(3)} - \varepsilon_2 = 0, \quad \psi_1^{(2)}(T) = 0,$$

$$\dot{\psi}_1^{(3)} + a\psi_1^{(3)} + \frac{b^2}{h_1}\psi_1^{(1)}\psi_2^{(3)} + \frac{b^2}{h_1}\psi_2^{(1)}\psi_1^{(3)} + \frac{c^2}{h_2}\psi_1^{(2)}\psi_2^{(3)} +$$

$$+ \frac{c^2}{h_2}\psi_2^{(2)}\psi_1^{(3)} + \frac{d^2}{h_3}\psi_1^{(3)}\psi_2^{(3)} - \varepsilon_3 = 0, \quad \psi_1^{(3)}(T) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2^{(1)} + 2a\psi_2^{(1)} + \frac{b^2}{h_1}\psi_2^{(1)2} + \frac{2c^2}{h_2}\psi_2^{(1)}\psi_2^{(2)} +$$

$$+ \frac{2d^2}{h_3}\psi_2^{(1)}\psi_2^{(3)} = 0, \quad \psi_2^{(1)}(T) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2^{(2)} + 2a\psi_2^{(2)} + \frac{2b^2}{h_1}\psi_2^{(1)}\psi_2^{(2)} + \frac{c^2}{h_2}\psi_2^{(2)2} +$$

$$+ \frac{2d^2}{h_3}\psi_2^{(2)}\psi_2^{(3)} = 0, \quad \psi_2^{(2)}(T) = 0,$$

$$\dot{\psi}_2^{(3)} + 2a\psi_2^{(3)} + \frac{2b^2}{h_1}\psi_2^{(1)}\psi_2^{(3)} + \frac{2c^2}{h_2}\psi_2^{(2)}\psi_2^{(3)} +$$

$$+ \frac{d^2}{h_3}\psi^{(3)2} = 0, \quad \psi_2^{(3)}(T) = 0.$$

Таким образом, оптимальные стратегии игроков (6.39) имеют вид

$$\tilde{u}_1 = -\frac{b}{2h_1}\left(\tilde{\psi}_1^{(1)}(t) + 2\tilde{\psi}_2^{(1)}(t)\,x\right),$$

$$\tilde{u}_2 = -\frac{c}{2h_2}\left(\tilde{\psi}_1^{(2)}(t) + 2\tilde{\psi}_2^{(2)}(t)\,x\right),$$

$$\tilde{u}_3 = -\frac{d}{2h_3}\left(\tilde{\psi}_1^{(3)}(t) + 2\tilde{\psi}_2^{(3)}(t)\,x\right).$$

7. Методы решения некоторых дифференциальных игр двух лиц с непротивоположными интересами и правом первого хода

В настоящее время для решения игр двух лиц с непротивоположными интересами применяется принцип оптимальности Нэша. Стратегии $\bar{u}$ и $\bar{v}$ игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ соответственно, удовлетворяющие этому принципу, осуществляют ситуацию равновесия, т. е. обладают следующим свойством:

$$\mathcal{J}_1(\bar{u}, \bar{v}) \geqslant \mathcal{J}_1(u, \bar{v})_{u\in Q_1}; \quad \mathcal{J}_2(\bar{u}, \bar{v}) \geqslant \mathcal{J}_2(\bar{u}, v)_{v\in Q_2}. \tag{7.1}$$

Здесь $\mathcal{J}_1(u, v)$ и $\mathcal{J}_2(u, v)$ — критерии эффективности (платежи) игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$; Q_1 и Q_2 — множества их допустимых стратегий.

Для бескоалиционных дифференциальных игр n лиц при этом принципе оптимальности, что соответствует дифференциальным играм двух лиц с непротивоположными интересами, в предыдущей главе разработаны методы решения на уровне достаточных или необходимых условий оптимальности.

При исследовании операций в ряде случаев целесообразно определить гарантированную стратегию, т. е. такую стратегию, которая удовлетворяет принципу максимина. Для игрока $\mathcal{P}$ это означает отыскание такой стратегии $\bar{u}$, для которой имеет место соотношение

$$\sup_{u\in Q_1} \inf_{v\in Q_2} \mathcal{J}_1(u, v) = \mathcal{J}_1(\bar{u}, \bar{v}(\bar{u})). \tag{7.2}$$

В этом случае исследователь операций, который принадлежит к оперирующей стороне (игроку $\mathcal{P}$), сводит игру (7.1) двух лиц с непротивоположными интересами к игре с противоположными интересами (к игре двух лиц с нулевой суммой).

Однако существуют игры двух лиц с непротивоположными интересами, в которых игрок имеет право первого хода. В такой игре игрок, например, $\mathcal{P}$, не имеющий информации о стратегии игрока $\mathcal{E}$, но имеющий право первого хода, сообщая свое решение (стратегию) игроку $\mathcal{E}$, может в ряде случаев получить выигрыш больший, чем при равновесном принципе оптимальности (7.1). В крайнем случае, при наличии нескольких равновесных ситуаций, он может выбрать из них такую, которая обеспечивает наибольший выигрыш.

Рассмотрим простой пример биматричной игры. Платежная матрица этой игры имеет вид

Игрок $\mathcal{E}$

$$\text{Игрок } \mathcal{P}\ \begin{array}{c|ccc|} & v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & (2;\,3) & (1;\,1) & (6;\,1) \\ u_2 & (1;\,1) & (3;\,2) & (1;\,1) \\ u_3 & (1;\,1) & (1;\,1) & (5;\,4) \end{array}.$$

Ситуации (u_1, v_1) и (u_2, v_2) являются равновесными ситуациями по Нэшу, так как при этих ситуациях удовлетворяются соотношения (7.1). При равновесной ситуации (u_1, v_1) игроки $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ получают выигрыши, равные 2 и 3 единицам, при равновесной ситуации (u_2, v_2) — 3 и 2 единицы соответственно.

Если игрок $\mathcal{P}$ имеет право первого хода, то, выбирая стратегию u_3 и сообщая ее игроку $\mathcal{E}$, он управляет поведением игрока $\mathcal{E}$. Игрок $\mathcal{E}$, максимизируя свой выигрыш при стратегии u_3 игрока $\mathcal{P}$, определяет оптимальную стратегию v_3. На этих стратегиях игроки $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ получают выигрыш в 5 и 4 единицы соответственно. Эти выигрыши больше выигрышей, которые получают игроки в ситуациях равновесия по Нэшу. Если бы в клетке матрицы на месте ситуации

(u_3, v_3) стояли выигрыши (5; 1,5), то игрок $\mathcal{E}$, имеющий информацию, но не имеющий право первого хода, получил бы меньший выигрыш, чем в игре с принципом оптимальности по Нэшу *).

В этой главе излагается постановка задачи для дифференциальных игр двух лиц с непротивоположными интересами и правом первого хода и приводятся методы решения этих игр.

7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть процесс игры описывается системой дифференциальных уравнений в векторной форме

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) \tag{7.3}$$

при начальных условиях игры

$$x(0) = x_0. \tag{7.4}$$

Игроки $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$, имеющие в своем распоряжении стратегии $u(t)$ и $v(t)$ соответственно, стремятся максимизировать свои выигрыши, в качестве которых примем функционалы следующего вида:

$$\mathcal{I}_1(x_0, u(t), v(t)) = F_1(x(T)) + \int_0^T p_1(t, x, u, v)dt, \tag{7.5}$$

$$\mathcal{I}_2(x_0, u(t), v(t)) = F_2(x(T)) + \int_0^T p_2(t, x, u, v)dt. \tag{7.6}$$

В уравнениях (7.3)—(7.6) $x(t) = [x^1(t), \ldots, x^n(t)]$ — n-мерная вектор-функция состояния игры, определенная на отрезке $[0, T]$ (T — фиксированное время окончания игры). При каждом фиксированном t вектор $x(t)$ принадлежит заданной области $B(t)$ n-мерного векторного пространства X. Стратегия $u(t) = [u^1(t), \ldots, u^r(t)]$ — игрока $\mathcal{P}$ r-мерная вектор-функция, принадлежащая множеству $Q_1(t, x)$, стратегия игрока $\mathcal{E}$ — $v(t) = [v^1(t), \ldots, v^s(t)]$ — s-мерная вектор-функция, принадлежащая множеству $Q_2(t, x)$. В общем случае стратегии

*) Постановка задачи для общих игр с непротивоположными интересами и правом первого хода была доложена проф. Ю. Б. Гермейером на семинаре по оптимальным процессам в ВЦ АН СССР (ноябрь 1970 г.).

игроков $u(t)$ и $v(t)$ входят нераздельно в правые части уравнений (7.3) и выражения для функционалов (7.5), (7.6).

Вектор-функции $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $f(t, x, u, v)$, $F_1(x(T))$, $F_2(x(T))$, $p_1(t, x, u, v)$ и $p_2(t, x, u, v)$ обладают свойствами, обычно принимаемыми в теории оптимальных процессов [2]. Предполагается также, что оба игрока имеют априорную или фундаментальную информацию об игре

Игра протекает по следующему правилу. Игрок $\mathcal{P}$, имеющий право первого хода, но не имеющий информации о выборе игроком $\mathcal{E}$ конкретной стратегии $v(t) \in Q_2$, делает первый ход, т. е. выбирает стратегию $u(t) \in Q_1$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и сообщает свое решение (стратегию) игроку $\mathcal{E}$. Получив эту информацию, игрок $\mathcal{E}$ выбирает свою стратегию $v(t) \in Q_2$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Оба игрока стремятся максимизировать свои выигрыши (7.5), (7.6).

После выбора игроками стратегий по приведенному выше правилу начинается игра, и если оба игрока в состоянии точно реализовать выбранные стратегии (по времени или имея информацию о состоянии игры в каждый момент времени), то результат игры предопределен.

Решением рассматриваемой игры будем называть такие стратегии игроков $\bar{u}(t) \in Q_1$ и $\bar{v}_n(t, \bar{u}(t)) \in Q_2$, для которых выполняются соотношения

$$\sup_{v(t) \in Q_2} \mathcal{I}_2[x_0, u(t), v(t)] = \mathcal{I}_2[x_0, u(t), \bar{v}_n(t, u(t))], \quad u(t) \in Q_1, \tag{7.7}$$

$$\sup_{u(t) \in Q_1} \mathcal{I}_1[x_0, u(t), \bar{v}_n(t, u(t))] = \mathcal{I}_1[x_0, \bar{u}(t), \bar{v}_n(t, \bar{u}(t))]. \tag{7.8}$$

Соотношения (7.7), (7.8) будем называть принципом оптимальности дифференциальной игры с непротивоположными интересами и правом первого хода.

Значение функционала (7.5) на стратегиях игроков, удовлетворяющих этому принципу, является гарантированным выигрышем игрока $\mathcal{P}$, имеющего право первого хода, но не имеющего информации о конкретном выборе игроком $\mathcal{E}$ стратегии $v(t) \in Q_2$ в этой игре.

Если стратегия $\bar{v}_n(t, u(t))$ игрока $\mathcal{E}$, удовлетворяющая соотношению (7.7), не единственна, а принадлежит некоторому множеству таких стратегий $\Gamma(u(t))$, то гарантированный выигрыш игрока $\mathscr{P}$ определяется по правилу

$$\sup_{u(t)\in Q_1}\ \inf_{v(t)\in\Gamma(u(t))} \mathcal{I}_1[x_0,\ u(t),\ v(t)]. \tag{7.9}$$

Как правило, множество $\Gamma\subset Q_2$. При $\Gamma=Q_2$ оптимальная стратегия и гарантированный выигрыш игрока $\mathscr{P}$ совпадают с оптимальной стратегией и гарантированным выигрышем игрока $\mathscr{P}$ в игре с противоположными интересами и принципом максимина (7.2).

Заметим, что рассматриваемая игра относится к классу «определенных» игр, так как полностью описывается вышеперечисленными правилами игры.

7.2. ПЕРВЫЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ

На первом этапе формализма необходимо решить задачу (7.7), т. е. задачу максимизации игроком $\mathscr{E}$ функционала (7.6) на множестве своих стратегий $v(t)\in Q_2$ при любой фиксированной стратегии $u(t)\in Q_1$ игрока $\mathscr{P}$. Применяя формализмы, изложенные в предыдущих главах, получаем достаточные условия абсолютного максимума функционала (7.6)

$$\inf_{v\in Q_2}[\varphi_x^{(2)}(t,\ x)f(t,\ x,\ u,\ v)-p_2(t,\ x,\ u,\ v)+$$
$$+\varphi_t^{(2)}(t,\ x)]=0, \tag{7.10}$$

$$F_2(x(T))+\varphi^{(2)}(T,\ x)=0. \tag{7.11}$$

Если существует функция $\varphi^{(2)}(t, x)$, зависящая от $u(t)$ и удовлетворяющая (7.10), (7.11), то допустимая стратегия игрока $\mathscr{E}$

$$\bar v_n=\bar v_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(2)},\ u), \tag{7.12}$$

определяемая из (7.10), является оптимальной при любой фиксированной стратегии $u(t)\in Q_1$ игрока $\mathscr{P}$. Значение функционала (7.6) на этой оптимальной стратегии игрока $\mathscr{E}$ равно

$$\sup_{v(t)\in Q_2}\mathcal{I}_2[x_0,\ u(t),\ v(t)]=\mathcal{I}_2[x_0,\ u(t),\ \bar v_n(t,\ u)]=$$
$$=-\varphi^{(2)}(0,\ x_0). \tag{7.13}$$

Здесь $\bar v_n(t,\ u)=\bar v_n(t,\ x,\ u)$; $x(t)$ — решение уравнений (7.3) при стратегии (7.12); $u(t)\in Q_1$ — фиксированная стратегия игрока $\mathscr{P}$.

Пусть существует функция $\varphi^{(2)}(t,\ x)$, удовлетворяющая (7.10), (7.11), а стратегия (7.12) при каждом $u(t)\in$ $\in Q_1$ единственна. Тогда (7.10) можно записать в следующем виде:

$$\varphi_x^{(2)}(t,\ x)f(t,\ x,\ u,\ \bar v_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(2)},\ u))-$$
$$-p_2(t,\ x,\ u,\ \bar v_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(2)},\ u))+\varphi_t^{(2)}(t,\ x)=0. \tag{7.14}$$

Решим теперь задачу (7.8), т. е. задачу о том, какое решение (стратегию) необходимо принять игроку $\mathscr{P}$ (и сообщить это решение игроку $\mathscr{E}$), чтобы получить максимальный выигрыш. Подставляя в (7.3) и (7.5) стратегию (7.12) игрока $\mathscr{E}$ и применяя формализмы, изложенные в предыдущих главах, получаем достаточные условия абсолютного максимума функционала (7.5) при стратегии $\bar v_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(2)},\ u)$ игрока $\mathscr{E}$:

$$\inf_{u\in Q_1}[\varphi_x^{(1)}(t,\ x)f(t,\ x,\ u,\ \bar v_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(2)},\ u))-$$
$$-p_1(t,\ x,\ u,\ \bar v_n(t,\ x,\ \varphi_x^{(2)},\ u))+\varphi_t^{(1)}(t,\ x)]=0, \tag{7.15}$$

$$F_1(x(T))+\varphi^{(1)}(T,\ x)=0. \tag{7.16}$$

Пусть существует функция $\varphi^{(1)}(t,\ x)$, такая, что удовлетворяются (7.15), (7.16). Тогда допустимая стратегия игрока $\mathscr{P}$

$$\bar u=\bar u(t,\ x,\ \varphi_x^{(1)},\ \varphi_x^{(2)}), \tag{7.17}$$

определяемая из (7.15), является оптимальной. Значение функционала (7.5) на этой стратегии игрока $\mathscr{P}$ равно

$$\sup_{u(t)\in Q_1}\mathcal{I}_1[x_0,\ u(t),\ \bar v_n(t,\ u)]=$$
$$=\mathcal{I}_1[x_0,\ \bar u(t),\ \bar v_n(t,\ u))]=-\varphi^{(1)}(0,\ x_0), \tag{7.18}$$

где $\bar u(t)=\bar u(t,\ x)$; $\bar v_n(t,\ \bar u(t))=\bar v_n(t,\ x,\ \bar u(t,\ x))$; $x(t)$ — решение уравнений (7.3) при $\bar v_n(t,\ x,\ \bar u(t,\ x))$, $\bar u(t,\ x)$.

Подставляя (7.17) в (7.12), (7.14) и (7.15), получаем достаточные условия существования решения рассматриваемой игры и оптимальные стратегии игроков:

$$\varphi_x^{(2)}(t, x) f[t, x, \bar{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}), \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})] -$$
$$- p_2[t, x, \bar{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}), \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})] +$$
$$+ \varphi_t^{(2)}(t, x) = 0, \qquad (7.19)$$

$$\varphi_x^{(1)}(t, x) f[t, x, \bar{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}), \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})] -$$
$$- p_1[t, x, \bar{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}), \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})] +$$
$$+ \varphi_t^{(1)}(t, x) = 0;$$

$$\bar{v}_n = \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(2)}, \bar{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)})) =$$
$$= \bar{v}_n(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}), \qquad (7.20)$$
$$\bar{u} = \bar{u}(t, x, \varphi_x^{(1)}, \varphi_x^{(2)}).$$

Если существуют функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, удовлетворяющие системе (7.19) при граничных условиях (7.11), (7.16), то решение рассматриваемой игры полностью определено. Оптимальные стратегии игроков определяются из (7.20). Значение выигрышей игроков $\mathcal{I}$ и $\mathcal{E}$ на оптимальных стратегиях равно соответственно $[-\varphi^{(1)}(0, x_0)]$ и $[-\varphi^{(2)}(0, x_0)]$.

Когда стратегия $v_n(t, x, u)$ игрока $\mathcal{E}$, определяемая из (7.10), не единственна и принадлежит некоторому множеству $\Gamma(u, x)$ таких стратегий, то оптимальную (гарантированную) стратегию $\bar{u}(t)$ игрока $\mathcal{I}$ следует определять из (7.9).

7.3. ВТОРОЙ ФОРМАЛИЗМ РЕШЕНИЯ ИГРЫ

Предположим, что область $B(t)$ допустимых x открыта при всех $t \in (0, T)$, а при $t=0$ и $t=T$ является заданной точкой $x=x_0$ и $x=x_1$ соответственно. Множества Q_1 и Q_2 предполагаются зависящими только от t. Применяя формализм, изложенный в гл. 3, получаем необходимые условия максимума функционала (7.6) при любой фиксированной стратегии $u(t) \in Q_1$ игрока $\mathcal{I}$:

$$\dot{\psi}^i + H_{x^i}^{(2)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.21)$$

$$H^{(2)}(t, \bar{x}(t), u(t), \bar{v}_n(t, u)) = \inf_{v \in Q_2(t)}, \quad u(t) \in Q_1(t), \qquad (7.22)$$

где $\psi^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — компоненты вектор-функции $\psi(t) = \varphi_x^{(2)}(t, \bar{x}(t))$;

$$H^{(2)}(t, x, u, v) = \psi(t) f(t, x, u, v) - p_2(t, x, u, v),$$
$$u(t) \in Q_1(t). \qquad (7.23)$$

Если существует функция $\varphi^{(2)}(t, x)$, зависящая от $u(t) \in Q_1$ и удовлетворяющая условиям теоремы 2 [33], то допустимая стратегия игрока $\mathcal{E}$

$$\bar{v}_n = \bar{v}_n(t, x, \psi, u), \qquad (7.24)$$

определяемая из (7.22), является оптимальной при любой фиксированной стратегии $u(t) \in Q_1(t)$ игрока $\mathcal{I}$.

Пусть такая функция $\varphi^{(2)}(t, x)$ существует, а стратегия (7.24) при каждом $u(t) \in Q_1$ единственна. Тогда, подставляя в (7.5), (7.3) и (7.21) стратегию (7.24) игрока $\mathcal{E}$, получаем

$$\mathcal{I}_1[u(t), \bar{v}_n(t, u(t))] = F_1(x(T)) + \int_0^T p_1(t, x, u,$$
$$\bar{v}_n(t, x, \psi, u)) dt, \qquad (7.25)$$

$$\dot{x} = f(t, x, u, \bar{v}_n(t, x, \psi, u)),$$
$$\dot{\psi} = -H_x^{(2)}(t, x, u, \bar{v}_n(t, x, \psi, u)). \qquad (7.26)$$

На втором этапе формализма необходимо решить задачу о максимуме функционала (7.25) по стратегии $u(t)$ игрока $\mathcal{I}$ при условии, что вектор-функции $x(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (7.26) при граничных условиях $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$. Для решения этой задачи вновь используем формализм Лагранжа [33]. Введем в рассмотрение вектор-функции

$$\alpha(t) = \varphi_x^{(1)}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t)), \quad \beta(t) = \varphi_\psi^{(1)}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t))$$

и обозначим

$$H^{(1)}(t, x, \psi, u) = \alpha(t) f(t, x, u, \bar{v}_n(t, x, \psi, u)) -$$
$$- \beta(t) H_x^{(2)}(t, x, u, \bar{v}_n(t, x, \psi, u)) -$$
$$- p_1(t, x, u, \bar{v}_n(t, x, \psi, u)). \qquad (7.27)$$

Необходимые условия максимума функционала (7.25) имеют следующий вид:

$$\dot{\alpha}^i + H^{(1)}_{x^i} = 0;\ \dot{\beta}^i + H^{(1)}_{\psi^i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.28}$$

$$H^{(1)}(t, \bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t)) = \inf_{u \in Q(t)}. \tag{7.29}$$

Граничные условия для уравнений (7.28) определяются из второго условия теоремы 1 [33], т. е. из условия

$$\varphi^{(1)}_{\psi_0}(0, \bar{x}_0, \bar{\psi}_0) = \beta(0) = 0;\ \varphi^{(1)}_{\psi_1}(T, \bar{x}_1, \bar{\psi}_1) = \beta(T) = 0. \tag{7.30}$$

Если существует функция $\varphi^{(1)}(t, x, \psi)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2 [33], то допустимая стратегия игрока $\mathscr{P}$

$$\bar{u} = \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta), \tag{7.31}$$

определяемая из (7.29), является оптимальной.

Подставляя (7.31) в (7.24), (7.26), (7.28), получаем необходимые условия существования решения рассматриваемой игры и оптимальные стратегии игроков:

$$\dot{x} = f(t, x, \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta), \bar{v}_n(t, x, \psi, \alpha, \beta)), \tag{7.32}$$

$$\dot{\psi} = -H^{(2)}_x(t, x, \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta), \bar{v}_n(t, x, \psi, \alpha, \beta)),$$

$$\dot{\alpha} + H^{(1)*}_x = 0;\ \dot{\beta} + H^{(1)*}_\psi = 0;$$

$$\bar{v}_n = \bar{v}_n(t, x, \psi, \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta)) = \bar{v}_n(t, x, \psi, \alpha, \beta);$$

$$\bar{u} = \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta). \tag{7.33}$$

В уравнениях (7.32)

$$H^{(1)*} = \alpha(t) f(t, x, \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta), \bar{v}_n(t, x, \psi, \alpha, \beta)) -$$
$$- \beta(t) H^{(2)}_x(t, x, \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta), \bar{v}_n(t, x, \psi, \alpha, \beta)) -$$
$$- p_1(t, x, \bar{u}(t, x, \psi, \alpha, \beta), \bar{v}_n(t, x, \psi, \alpha, \beta)).$$

Алгоритм метода состоит в решении краевой задачи для системы (7.32) обыкновенных дифференциальных уравнений и в доказательстве факта существования функций $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x, \psi)$.

7.4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Пусть процесс игры и критерии эффективности двух игроков имеют вид

$$\dot{x} = bx + mu_1u_2,\quad x(0) = x_0, \tag{7.34}$$

$$\mathscr{T}_1(x_0, u_1(t), u_2(t)) = \int_0^T a_1x^2,$$

$$\mathscr{T}_2(x_0, u_1(t), u_2(t)) = \int_0^T (a_2x^2 + c_2u^2{}_2)\,dt, \tag{7.35}$$

где b, m, a_1, a, c_2 — постоянные положительные коэффициенты. Уравнение (7.34) определено в области $\Gamma(x, u_2)$, $|u_1(t)| \leqslant U$ ($\Gamma(x, u_2)$ — открытая область). Игрок $\mathscr{P}$, имеющий право первого хода, максимизирует критерий $\mathscr{T}_1$ по стратегии $u_1(t)$; игрок $\mathscr{E}$, имеющий информацию о принятой стратегии игрока $\mathscr{P}$, минимизирует критерий $\mathscr{T}_2$ по стратегии $u_2(t)$. Время T окончания игры фиксировано.

Вначале определим выигрыши игроков, которые они получают на ситуациях, равновесных по Нэшу. Для этого применим первый формализм решения игры, изложенный в гл. 6. Выражения (6.1), (6.2) в рассматриваемом примере имеют вид

$$\inf_{u_1} [\varphi^{(1)}_x(t, x)(bx + mu_1u_2) - a_1x^2 + \varphi^{(1)}_t(t, x)] = 0, \tag{7.36}$$

$$\sup_{u_1} [\varphi^{(2)}_x(t, x)(bx + mu_1u_2) - a_2x^2 - c_2u_2^2 + \varphi^{(2)}_t(t, x)] = 0,$$

$$\varphi^{(1)}(T, x) = \varphi^{(2)}(T, x) = 0. \tag{7.37}$$

Из (7.36) получаем систему (6.6) в виде следующих условий:

1) $\bar{u}_1 = -U$, $\bar{u}_2 = (m\bar{u}_1/2c_2)\varphi^{(2)}_x$ при $\varphi^{(1)}_x m\bar{u}_2 > 0$,

2) $\bar{u}_1 = U$, $\bar{u}_2 = (m\bar{u}_1/2c_2)\varphi^{(2)}_x$ при $\varphi^{(1)}_x m\bar{u}_2 < 0$,

3) $|\bar{u}_1| \leqslant U$, $\bar{u}_2 = (m\bar{u}_1/2c_2)\varphi^{(2)}_x$ при $\varphi^{(1)}_x m\bar{u}_2 = 0$.

Условие 3 при $\varphi^{(1)}_x \neq 0$, $\varphi^{(2)}_x \neq 0$ даст равновесную ситуацию $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_2(t) = 0$ по Нэшу. Запишем достаточные условия (6.8) существования решения игры по Нэшу:

$$\varphi^{(1)}_x bx - a_1x^2 + \varphi^{(1)}_t = 0,\quad \varphi^{(2)}_x bx - a_2x^2 + \varphi^{(2)}_t = 0.$$

Решением этих уравнений при граничных условиях (7.37) являются две функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, имеющие вид

$$\varphi^{(1)}(t, x) = (a_1x^2/2b)(1 - e^{2b(T-t)}),$$

$$\varphi^{(2)}(t, x) = (a_2x^2/2b)(1 - e^{2b(T-t)}). \tag{7.38}$$

Выигрыши игроков на оптимальных стратегиях $\bar{u}_1=\bar{u}_2=0$ по Нэшу имеют значения

$$\mathcal{J}_1(x_0,\bar{u}_1,\bar{u}_2) = -\varphi^{(1)}(0,x) = (a_1x_0^2/2b)(e^{-2bT}-1),$$

(7.39)

$$\mathcal{J}_2(x_0,\bar{u}_1,\bar{u}_2) = -\varphi^{(2)}(0,x) = (a_2x_0^2/2b)(e^{2bT}-1).$$

Проверим, являются ли 1 и 2 также равновесными ситуациями. Так как m, c_2 — положительные константы, то для того чтобы условия 1 и 2 являлись равновесными ситуациями по Нэшу, должно выполняться неравенство

$$\varphi_x^{(1)}\varphi_x^{(2)} < 0. \tag{7.40}$$

Подставляя стратегии 1 и 2 в (7.36), получаем

$$\varphi_x^{(1)}bx + (m^2U^2/2c_2)\varphi_x^{(1)}\varphi_x^{(2)} - a_1x^2 + \varphi_t^{(1)} = 0,$$

(7.41)

$$\varphi_x^{(2)}bx + (m^2U^2/4c_2)\varphi_x^{(2)2} - a_2x^2 + \varphi_t^{(2)} = 0.$$

Будем искать решение уравнений (7.41) при граничных условиях (7.37) в виде

$$\varphi^{(1)}(t,x) = \chi(t)x^2;\quad \varphi^{(2)}(t,x) = \psi(t)x^2. \tag{7.42}$$

Подставляя (7.42) в (7.37) и (7.41), получаем

$$\dot{\chi} + 2\left(b + \frac{m^2U^2}{c_2}\psi\right)\chi - a_1 = 0,\quad \chi(T)=0,$$

(7.43)

$$\dot{\psi} + 2b\psi + \frac{m^2U^2}{c_2}\psi^2 - a_2 = 0,\quad \psi(T) = 0.$$

Решением уравнений (7.43) являются функции

$$\psi(t) = \frac{2a_2\left(e^{(t-T)\sqrt{\Delta}}-1\right)}{(-2b+\sqrt{\Delta}) - (-2b-\sqrt{\Delta})\,e^{(t-T)\sqrt{\Delta}}},$$

$$\Delta = 4b^2 + 4a_2\frac{m^2U^2}{c_2},$$

(7.44)

$$\chi(t) = -a_1\exp\left[-2\int_0^t\left(b+\frac{m^2U^2}{c_2}\psi(t)\right)dt\right]\times$$

$$\times\int_0^t\exp\left[2\int_0^t\left(b+\frac{m^2U^2}{c_2}\right)\psi(t)\,dt\right]dt.$$

Так как при $0\leqslant t\leqslant T$ функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ отрицательны, то неравенство (7.40) не выполняется. Следовательно, равновесие по Нэшу дает единственную пару оптимальных стратегий $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_2(t) = 0$, на которой выигрыши игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ имеют значения (7.39).

Пусть теперь игрок $\mathcal{P}$ имеет право первого хода. Для решения такой игры применим формализм, изложенный в § 7.2. Оптимальная стратегия $\bar{u}_2$ игрока $\mathcal{E}$ при любой допустимой стратегии u_1 игрока $\mathcal{P}$ определяется из (7.36) и равна

$$\bar{u}_2 = (mu_1/2c_2)\varphi_x^{(2)}. \tag{7.45}$$

Определим стратегию игрока $\mathcal{P}$, обеспечивающую ему максимальный выигрыш. Достаточные условия (7.15), (7.16) абсолютного максимума функционала игрока $\mathcal{P}$ имеют вид

$$\inf_{u_1}\left[\varphi_x^{(1)}(t,x)\left(bx+\frac{m^2u_1^2}{2c_2}\varphi_x^{(2)}(t,x)\right) - a_1x^2 + \varphi_t^{(1)}(t,x)\right] = 0,$$

$$\varphi^{(1)}(T,x) = 0. \tag{7.46}$$

Из (7.46) получим

$$\bar{u}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \varphi_x^{(1)}\varphi_x^{(2)} > 0, \tag{7.47}$$

$$\bar{u}_1 = \pm U \quad \text{при} \quad \varphi_x^{(1)}\varphi_x^{(2)} < 0. \tag{7.48}$$

Как было показано, стратегия $\bar{u}_1=0$ игрока $\mathcal{P}$ приводит к равновесной ситуации по Нэшу. Условие (7.48) не удовлетворяется, так как решения (7.42), (7.44) уравнений (7.41) противоречат неравенству (7.40). Следовательно, в этом примере право первого хода для игрока $\mathcal{P}$ не дает ему стратегий, лучших чем в равновесной ситуации по Нэшу.

Пример 2. Пусть процесс игры и критерии эффективности двух игроков имеют вид

$$\dot{x} = ax - buv;\quad x(0) = x_0 > 0, \tag{7.49}$$

$$\mathcal{J}_1(x_0,u(t),v(t)) = \int_0^T [mx + c(u-1)v]\,dt,$$

(7.50)

$$\mathcal{J}_2(x_0,u(t),v(t)) = \int_0^T (nx + kv^2)\,dt,$$

где a, b, m, n, c, k — постоянные положительные коэффициенты и

$$c \geqslant 2mb/a. \tag{7.51}$$

Уравнение (7.49) определено в области $\Gamma(x,v)$, $|u(t)| \leqslant U$ ($\Gamma(x,v)$ — открытая область). Игрок $\mathcal{P}$, имеющий право первого хода, минимизирует критерий $\mathcal{J}_1$ по стратегии $u(t)$; игрок $\mathcal{E}$, имеющий информацию о принятой стратегии игрока $\mathcal{P}$, минимизирует критерий $\mathcal{J}_2$ по стратегии $v(t)$. Время T окончания игры фиксировано.

Определим вначале выигрыши игроков, которые они получают на ситуациях равновесия по Нэшу. Выражения (6.6), (6.7) для рассматриваемого примера имеют вид

$$\sup_u [\varphi_x^{(1)} (ax - buv) - mx - cuv + cv + \varphi_t^{(1)}] = 0,$$
$$\sup_v [\varphi_x^{(2)} (ax - buv) - nx - kv^2 + \varphi_t^{(2)}] = 0; \quad (7.52)$$

$$\varphi^{(1)}(T, x) = \varphi^{(2)}(T, x) = 0. \quad (7.53)$$

Из (7.52) получаем систему (6.6) в виде следующих условий:

1) $\bar{u} = -U,\ \bar{v} = \dfrac{\varphi_x^{(2)} bU}{2k}$ при $(c + \varphi_x^{(1)} b)\bar{v} > 0$,

2) $\bar{u} = U,\ \bar{v} = -\dfrac{\varphi_x^{(2)} bU}{2k}$ при $(c + \varphi_x^{(1)} b)\bar{v} < 0$,

3) $|\bar{u}| \leqslant U,\ \bar{v} = -\dfrac{\varphi^{(2)} bU}{2k}$ при $(c + \varphi_x^{(1)} b)\bar{v} = 0$.

Условие 3 при $\varphi_x^{(1)} \neq 0,\ \varphi_x^{(2)} \neq 0$ дает равновесную ситуацию $\bar{u}(t) = \bar{v}(t) = 0$ по Нэшу. Запишем достаточные условия (6.8) существования решения игры по Нэшу:

$$\varphi_x^{(1)} ax - mx + \varphi_t^{(1)} = 0; \quad \varphi_x^{(2)} ax - nx + \varphi_t^{(2)} = 0.$$

Решением этих уравнений при граничных условиях (7.53) являются две функции $\varphi^{(1)}(t, x)$ и $\varphi^{(2)}(t, x)$, имеющие вид

$$\varphi^{(1)}(t, x) = -\frac{mx}{a} (e^{-at} - e^{-aT}),$$
$$\varphi^{(2)}(t, x) = -\frac{nx}{a} (e^{-at} - e^{-aT}). \quad (7.54)$$

Выигрыши игроков на оптимальных стратегиях $\bar{u} = \bar{v} = 0$ по Нэшу имеют значения

$$\mathcal{J}_1(x_0, \bar{u}, \bar{v}) = -\varphi^{(1)}(0, x) = \frac{mx_0}{a}(1 - e^{-aT}),$$
$$\mathcal{J}_2(x_0, \bar{u}, \bar{v}) = -\varphi^{(2)}(0, x) = \frac{nx_0}{a}(1 - e^{-aT}). \quad (7.55)$$

Проверим, являются ли условия 1 и 2 также равновесными ситуациями. Так как b, k — положительные константы, то для того чтобы условия 1 и 2 являлись равновесными ситуациями по Нэшу, должно выполняться неравенство

$$\varphi_x^{(2)} (c + \varphi_x^{(1)} b) > 0. \quad (7.56)$$

Подставляя условие 1 в (7.52), получаем

$$\varphi_x^{(1)} ax + \frac{b^2 U^2 \varphi_x^{(1)} \varphi_x^{(2)}}{2k} - mx + \frac{cbU^2 \varphi_x^{(2)}}{2k} + \frac{cbU \varphi_x^{(2)}}{2k} + \varphi_t^{(1)} = 0,$$
$$\varphi_x^{(2)} ax + \frac{b^2 U^2 \varphi_x^{(2)2}}{4k} - nx + \varphi_t^{(2)} = 0. \quad (7.57)$$

Решением уравнений (7.57) при граничных условиях (7.53) являются

$$\varphi^{(1)}(t, x) = \psi_0(t) + \psi(t) x,$$
$$\varphi^{(2)}(t, x) = \chi_0(t) + \chi(t) x, \quad (7.58)$$

$$\psi_0(t) = -\frac{bU}{2k} \int_t^T \chi(t) (bU\psi(t) + cU + c)\, dt,$$

$$\chi_0(t) = -\frac{b^2 U^2}{4k} \int_t^T \chi^2(t)\, dt,$$

$$\psi(t) = -\frac{m}{a}(e^{-at} - e^{-aT}), \quad \chi(t) = -\frac{n}{a}(e^{-at} - e^{-aT}). \quad (7.59)$$

Функции $\varphi_x^{(1)}$ и $\varphi_x^{(2)}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ отрицательны. Так как имеет место условие (7.51), то неравенство (7.56) не выполняется. Аналогично можно показать, что ситуация 2 также не является равновесной. Следовательно, игра по Нэшу дает единственную пару оптимальных стратегий $\bar{u}(t) = \bar{v}(t) = 0$, на которой выигрыши игроков $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$ имеют значения (7.55).

Пусть теперь игрок $\mathcal{P}$ имеет право первого хода. Оптимальная стратегия $\bar{v}$ игрока $\mathcal{E}$ при любой допустимой стратегии u игрока $\mathcal{P}$ определяется из (7.52) и равна

$$\bar{v} = -\frac{\varphi_x^{(2)} bu}{2k}. \quad (7.60)$$

Определим теперь стратегию игрока $\mathcal{P}$, обеспечивающую ему минимальное значение функционала $\mathcal{J}_1$. Достаточные условия (7.15), (7.16) абсолютного минимума функционала игрока $\mathcal{P}$ имеют вид

$$\sup_u \left[\varphi_x^{(1)} \left(ax + \frac{b^2 \varphi_x^{(2)} u^2}{2k}\right) - mx + \frac{cb\varphi_x^{(2)} u^2}{2k} - \right.$$
$$\left. - \frac{cb\varphi_x^{(2)} u}{2k} + \varphi_t^{(1)}\right] = 0, \quad \varphi^{(1)}(T, x) = 0. \quad (7.61)$$

Из (7.61) имеем

$$\bar{u}_1 = \frac{c}{2\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right)} \quad \text{при } \varphi_x^{(2)}\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right) < 0$$

При $\varphi_x^{(2)}\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right) > 0$ стратегии игроков в игре с правом первого хода совпадают с условиями 1 и 2 этого примера, которые, как показано ранее, не выполняются

Таким образом, оптимальные стратегии игроков в игре с правом первого хода игрока $\mathscr{P}$ имеют вид

$$\bar{u}(t) = \frac{c}{2\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right)}; \quad \bar{v}(t) = -\frac{\varphi_x^{(2)} bc}{4k\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right)} \tag{7.62}$$

при

$$\varphi_x^{(2)}\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right) < 0 \tag{7.63}$$

Подставляя стратегии игроков (7.62) в (7.52), получаем достаточные условия существования решения рассматриваемой игры

$$\varphi_x^{(1)} a x + \frac{b^2 c^2 \varphi_x^{(1)} \varphi_x^{(2)}}{8k\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right)} - mx + \frac{bc^3 \varphi_x^{(2)}}{8k\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right)^2} - \frac{bc^2 \varphi_x^{(2)}}{4k\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right)} + \varphi_t^{(1)} = 0,$$

$$\varphi_x^{(2)} a x + \frac{b^2 c^2 \varphi_x^{(2)2}}{16k\left(c + \varphi_x^{(1)} b\right)^2} - nx + \varphi_t^{(2)} = 0 \tag{7.64}$$

Решением уравнений (7.64) при граничных условиях (7.53) являются две функции $\tilde{\varphi}^{(1)}(t, x)$ и $\tilde{\varphi}^{(2)}(t, x)$, имеющие вид

$$\tilde{\varphi}^{(1)}(t, x) = \tilde{\psi}_0(t) + \psi(t)\, x; \quad \tilde{\varphi}^{(2)}(t, x) = \tilde{\chi}_0(t) + \chi(t)\, x, \tag{7.65}$$

$$\tilde{\psi}_0(t) = -\frac{bc^2}{8k} \int_t^T \frac{\chi(t)\, dt}{\left(c + b\psi(t)\right)};$$

$$\tilde{\chi}_0(t) = \frac{b^2 c^2}{16k} \int_t^T \frac{\chi^2(t)\, dt}{\left(c + b\psi(t)\right)^2}.$$

В (7.65) функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ определяются выражениями (7.59)

Легко видеть, что при условии (7.51) выполняется неравенство (7.63), при этом $\tilde{\psi}(t) > 0$, $\tilde{\chi}_0(t) > 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$

При игре с правом первого хода на стратегиях (7.62) игроки $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ получают выигрыши

$$\mathscr{J}_1(x_0, \bar{u}, \bar{v}) = \tilde{\varphi}^{(1)}(0, x) = \tilde{\psi}_0(0) + \frac{m x_0}{a}\left(1 - e^{-aT}\right),$$

$$\mathscr{J}_2(x_0, \bar{u}, \bar{v}) = \tilde{\varphi}^{(2)}(0, x) = \tilde{\chi}_0(0) + \frac{n x_0}{a}\left(1 - e^{-aT}\right)$$

Так как $\tilde{\psi}_0(0) > 0$, то игрок $\mathscr{P}$, минимизирующий свой функционал, добивается меньшего значения функционала по сравнению с игрой по Нэшу Что касается игрока $\mathscr{E}$, то он в рассмотренном примере игры не терпит ущерба Заметим, что это обстоятельство для игрока $\mathscr{E}$ является, по-видимому, счастливым исключением, а не правилом

7.5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Показано, что право первого хода игрока $\mathscr{P}$ в игре с непротивоположными интересами в ряде случаев дает ему возможность увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в игре с принципом оптимальности по Нэшу. На первый взгляд, возникает ситуация, противоречащая здравому смыслу и заключающаяся в том, что игрок $\mathscr{P}$, не имеющий информации, но имеющий право первого хода, может получить больший выигрыш, чем в игре, в которой он имел бы информацию, но не имел право первого хода.

Однако это противоречие только кажущееся, ибо нельзя противопоставлять информацию праву первого хода. На самом деле, вследствие установленных правил игры игрок $\mathscr{P}$, навязывая игроку $\mathscr{E}$ свою стратегию, как бы управляет игроком $\mathscr{E}$ так, чтобы получить свой максимальный выигрыш. Если по условиям игры это ему удается, то он получает преимущество перед игроком $\mathscr{E}$, имеющим информацию, но не обладающим правом первого хода. В противном случае получается решение, не отличающееся от решения игры с принципом оптимальности по Нэшу.

Если оптимальная стратегия игрока $\mathscr{E}$ не единственна, то игрок $\mathscr{P}$ может не получить преимущества. В предельном случае он получит лишь гарантированный выигрыш, как и в игре с противоположными интересами при максиминном принципе оптимальности.

7.6. МНОГОУРОВНЕВЫЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТЕОРИЯ ИГР С НЕПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ И ПРАВОМ ПЕРВОГО ХОДА

В предыдущих параграфах настоящей главы были рассмотрены игры, в которых игрок $\mathscr{P}$ делает первый ход. Он выбирает стратегию $u(t)$ и сам сообщает ее игроку $\mathscr{E}$. Точно так же игрок $\mathscr{P}$ может сообщить игроку $\mathcal{E}$ свой выбор в виде функции $u(v)$. При этом такую функцию можно трактовать как функцию штрафа или поощрения.

Игрок $\mathcal{E}$ выбирает тогда стратегию поведения v из условия

$$\max_{v\in Q_2} \mathcal{J}_2(u(v),\ v) = \mathcal{J}_2(u(\bar{v}),\ \bar{v}).$$

Заметим, что стратегия поведения $\bar{v}$ будет определяться теперь некоторым оператором $\bar{v} = v[u(v)]$.

Принятие решения для игрока $\mathcal{F}$ сводится тогда к выбору такой стратегии поведения $\bar{u}(\bar{v})$, которая доставляет максимум функционалу $\mathcal{J}_1(u(\bar{v}),\ \bar{v})$.

Теория игр с непротивоположными интересами и правом первого хода является одним из естественных языков для описания иерархических систем управления различной природы и способом нахождения оптимальных управляющих воздействий. Для подтверждения вышесказанного рассмотрим пример, заимствованный из основополагающей работы Н. Н. Моисеева [35].

Промышленное объединение (фирма) состоит из N производственных предприятий, которые выпускают продукты $P_1, \ldots, P_N$. Будем считать P_i вектором, имеющим для каждого предприятия свою размерность. Аналогично вводимые ниже величины являются векторами соответствующих размерностей. Пусть x_i — основные фонды i-го предприятия. Изменение фондов описывается уравнением

$$\dot{x}_i = -k_i x_i + u_i(t) + v_i(t),\quad i = 1, \ldots, N, \qquad (7.66)$$

где k_i — матрица коэффициентов амортизации; u_i — инвестиции фирмы; v_i — внутренние капиталовложения. В процессе (7.66) $v_i(t)$ — управляющая функция i-го предприятия, $u_i(t)$ — управляющая функция фирмы.

Процесс производства описывается производственной вектор-функцией

$$P_i = \varphi_i(x_i,\ L_i,\ \nu_i),\quad i = 1, \ldots, N, \qquad (7.67)$$

где L_i — количество рабочей силы; ν_i — средняя по предприятию ставка заработной платы.

Запись производственной функции в виде (7.67) является нетрадиционной из-за введенной зависимости этой функции от параметра ν_i. Параметры L_i и ν_i находятся в распоряжении предприятия и подчиняются ограничениям вида

$$0 < L_i \leqslant L^*_i,\ 0 < \nu_i \leqslant \nu^*_i,\ \nu_i L_i \leqslant Q_i,\ i = 1, \ldots, N. \qquad (7.68)$$

Ограничения (7.68) означают, что количество рабочей силы, средняя ставка заработной платы и фонд заработной платы предприятия ограничены.

Создав вектор продуктов P_i, предприятие реализует эти продукты: сдает на склад фирмы или передает в торговую сеть. Если обозначить через C_i вектор цен на продукцию i-го предприятия, то за единицу времени планового периода T предприятие получает сумму $(C_i P_i)$. Из этой суммы предприятие выплачивает зарплату рабочим $\nu_i L_i$, делает вложение в фонд фирмы $w_i(P_i)$, производит внутренние капиталовложения v_i и компенсирует текущие затраты R_i. Обозначим через ψ_i остаток от дохода, т. е. выражение

$$\psi_i(t) = (C_i P_i) - \{\gamma_i L_i + w_i(P_i) + v_i(t) + R_i(x_i)\}. \qquad (7.69)$$

Величина $\psi_i(t)$ называется социальным фондом предприятия.

Если заданы инвестиции фирмы $u_i(t)$, известны вложения $w_i(P_i)$, которые должны сделать предприятия в фонд фирмы (функции $w_i(P_i)$ естественно назвать функциями штрафа или поощрения), если известен фонд заработной платы предприятия $Q_i(t)$, то задача i-го предприятия заключается в том, чтобы так распорядиться добавочными инвестициями (внутренними капиталовложениями) $v_i(t)$, средней ставкой заработной платы $\nu_i(t)$ и количеством рабочей силы $L_i(t)$, чтобы максимизировать свой социальный фонд. Этот функционал обозначим через

$$\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_i(\psi_i) = \mathcal{J}_i(v_i,\ \nu_i,\ L_i),\quad i = 1, \ldots, N. \qquad (7.70)$$

Функционал (7.70) может быть произвольным. Например, естественно рассматривать интегральные функционалы вида

$$\mathcal{J}_i = \int_0^T \psi_i(t)\,dt,\ \psi_i(t) \geqslant 0,\ \forall t \in [0,\ T], \qquad (7.71)$$

где T — плановый период. Так поставленная для предприятий задача является задачей теории оптимального управления.

Рассмотрим теперь функционирование правления фирмы, которой подчиняются предприятия. Сама фирма никаких ценностей не производит. Эффективность ее деятельности оценивается в зависимости от продуктов, которые производят предприятия. Критерий эффективности (доход фирмы) запишем в виде

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(P_1, \ldots, P_N, w_1(P_1), \ldots, w_N(P_N)). \tag{7.72}$$

В выражении (7.72) подчеркивается, что доход фирмы зависит от структуры функции поощрения (или штрафа). Если целевую функцию фирмы (7.72) принять независимой от $w_i(P_i)$, а фонд поощрений неограниченным, то тривиальным будет следующее утверждение.

Фирмой всегда могут быть назначены такие поощрения (штрафы) $w_1(P_1), \ldots, w_N(P_N)$, что предприятия будут выбирать свои управления v_i, ν_i, L_i наилучшим с точки зрения интересов фирмы способом [35]. В этом примере мы пришли к следующей ситуации.

Существуют два игрока: фирма и предприятия (здесь N предприятий мы формально объединяем понятием одного игрока). Игроки имеют свои собственные цели. При этом существенно, что фирма имеет право первого хода. Таким образом, в этом примере сформирована двухуровневая иерархическая структура, верхний уровень которой занимает первый игрок — фирма, нижний уровень занимает второй игрок — предприятия. Задача фирмы так распределить инвестиции

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = U, \tag{7.73}$$

фонд заработной платы

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i = Q \tag{7.74}$$

и назначить такие поощрения $w_i(P_i)$ предприятиям за выпуск продукции, чтобы максимизировать доход фирмы (7.72).

Мы видим, что фирма располагает тремя способами управления: она может распределять экзогенный ресурс (инвестиции фирмы) U, вводить функции штрафов или поощрений $w_i(P_i)$ и ограничивать активность предприятий, регулируя фонд заработной платы. Задачи предприятий были сформулированы ранее. Ясно видно, что

поставленная так задача может быть решена методами теории игр с правом первого хода.

Чтобы непосредственно воспользоваться алгоритмами, изложенными в предыдущих параграфах этой главы, необходимо снять ограничения, имеющиеся в этом примере. Это можно сделать разными способами, например введением функций штрафов. В результате чего можно заменить исходную задачу другой, решение которой будет аппроксимировать решение исходной задачи, причем искомые параметры и функции уже не будут стеснены ограничениями.

Решение рассмотренного примера облегчается тем обстоятельством, что в правые части уравнений (7.66) и подынтегральные выражения (7.71) не входят так называемые связующие входы между отдельными предприятиями, т. е. члены, зависящие от управлений и фазовых координат других предприятий $j \neq i$.

Если имеются такие связи, то первоначальную задачу можно свести к игре между первым игроком — фирмой, имеющей право первого хода, и N игроками — предприятиями. Решение может быть получено итерационным путем с помощью следующего алгоритма: на первом шаге фирма выдает управляющие воздействия приприятиям. Предприятия находят свои оптимальные решения, применяя методы решения бескоалиционных игр N лиц с ситуацией равновесия по Нэшу (см. гл. 6). Эта информация поступает от предприятий в фирму, которая использует полученную информацию для выработки на следующем шаге итерационного процесса таких управляющих сигналов для предприятий, которые обеспечивают увеличение общего дохода фирмы. Такие игры можно назвать *метаиграми.*

7.7. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Одна из основных конструктивных методик определения оптимального управления в иерархических структурах изложена в работе [80]. В этом параграфе мы приводим некоторые сведения из этой методики, так как рассматриваемое в этой теории взаимодействие элементов структуры в ряде случаев может быть интерпретировано, как игры с правом первого хода и передачей информации.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, u_r),\ \mathscr{L} = \mathscr{L}(x_i(T)),\ i, j = 1, \ldots, n; \quad r = 1, \ldots, m, \tag{7.75}$$

где $\mathscr{L}$ — функционал системы, который необходимо экстремизировать. На фазовые координаты x_i и управления u_r помимо дифференциальных наложены конечные связи: ограничения и краевые условия

$$F_{\omega_1}(x, u, t) \leqslant 0;\ F_{\omega_2}(x, t_0) \leqslant 0;\ F_{\omega_3}(x, T) \leqslant 0;$$
$$\omega_1 = 1, \ldots, \Omega_1;\ \omega_2 = 1, \ldots, \Omega_2;\ \omega_3 = 1, \ldots, \Omega_3;$$
$$x = \{x_i\};\ u = \{u_r\}. \tag{7.76}$$

Формальный способ определения структуры дифференциальных и конечных связей, основанный на понятии «подчинения» фазовых координат, заключается в следующем. Полагается, что если x_j входит в правую часть уравнения для $\dot{x}_i$, то x_i подчинена x_j ($x_i \leftarrow x_j$). Такое предположение позволяет ввести правило отображения

$$\exists\, i, j \in [1, n] \left(x_i \in \Gamma x_j,\ x_j \in \Gamma^{-1} x_i \leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0, \quad \dot{x}_i = f_i(x_j) \right), \tag{7.77}$$

где символы Γ и Γ^{-1} определяют множества фазовых координат, подчиненных данной, и тех, которым она подчинена соответственно. Здесь и далее применяется терминология теории графов из работы [37]. Прямые отображения Γ, введенные для всех фазовых координат, определяют конечный ориентированный граф. Предположим, что граф, соответствующий системе (7.75), является, кроме того, связным. Число вершин этого графа n равно числу фазовых координат. В общем случае можно утверждать, что

$$\exists\, i \in [1, n]\ (x_i \in \Gamma^s x_i), \quad s = 1, 2, \ldots \tag{7.78}$$

Если (7.78) справедливо при $s = 1$ (s — степень отображения), то i-я вершина имеет петлю; если (7.78) справедливо при $s \geqslant 2$, то граф имеет контур с числом вершин, равным s. Для полученного графа считаются выполненными условия

$$\begin{gathered} \exists\, i^* \neq i \in [1, n] : (\Gamma^{-1} x_{i^*} = \varnothing,\ \Gamma^{-1} x_i = \varnothing); \\ \exists\, i \in [1, n]\ (\Gamma x_i = \varnothing); \quad \forall i \in [1, n']\ (\Gamma x_i = \varnothing) \rightarrow n' \leqslant (n-1). \end{gathered} \tag{7.79}$$

Первое условие из (7.79) предполагает неединственность источника (отсутствие мажоранты); два других следуют из конечности и связности мультиграфа.

Проведем последовательную замену контуров новыми вершинами; в каждой новой вершине фазовые координаты образуют группы (число фазовых координат в группе равно числу точек контура). Связи новых вершин (дуги графа) со всеми другими могут быть теперь неединственными — исходный граф трансформирован в связный ориентированный мультиграф без контуров.

Определение иерархической структуры функционирования процесса (динамической системы) вводится следующим образом.

Иерархическая структура есть ориентированный граф, вершины которого расположены на уровнях, причем так, что каждая вершина может быть подчинена всем вершинам, расположенным на всех уровнях выше данного. Частным случаем такой обобщенной иерархической структуры является граф с одной вершиной, предшествующей остальным, — мажорантой.

Из определения иерархической структуры следует очевидное утверждение: всякий конечный ориентированный граф (мультиграф) без контуров (граф, для которого (7.78) исключено и верно (7.79)) представим в виде иерархической структуры. При этом число уровней иерархической структуры равно числу вершин, содержащихся в пути максимальной длины исходного графа (мультиграфа). Если для заданной произвольной системы (7.75) с ограничениями (7.76) введено отношение подчиненности фазовых координат (7.77), то отображающий ее мультиграф является иерархической структурой (случай, при котором мультиграф имеет одну вершину — иерархическая структура тривиальна, здесь не рассматривается). Для того чтобы показать справедливость сделанного утверждения, достаточно доказательства того, что после введения отношения подчинения получающийся ориентированный граф связан. Следуя работе [36], введем фиктивные фазовые координаты. Вначале расширением вектора управления u в (7.76) превратим неравенства в равенства, тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\omega_1} &= F_{\omega_1}(x, u, t) + u_{\omega_1} \equiv 0; \\ \dot{x}_{\omega_2} &= F_{\omega_2}(x, t_0) + u_{\omega_2} = 0; \\ \dot{x}_{\omega_3} &= F_{\omega_3}(x, T) + u_{\omega_3} = 0, \\ x_{\omega_1} - x_{\omega_2} &= x_{\omega_3} = 1. \end{aligned} \tag{7.80}$$

Ограничения типа неравенств наложены теперь только порознь на отдельные компоненты расширенного вектора управления, включающего не только функции u_{ω_1}, но и управляющие параметры u_{ω_2}, u_{ω_3}. За расширенным вектором управления оставим прежнее обозначение. Функционал системы (7.75) представим, считая, что это всегда возможно, в виде новой фазовой координаты, т. е. $x_0 \equiv \mathscr{L}$, $\dot{x}_0 = \dot{\mathscr{L}}$ и $i = \overline{0, n}$. Все фазовые координаты и управления, входящие в (7.76) в уравнениях (7.75), домножим на фиктивные фазовые координаты. Учитывая (7.80), можно утверждать, что полученная система эквивалентна исходной. В новой системе общее число фазовых координат есть $N = (n + 1 + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3)$. Пусть теперь опять выполнена процедура перехода к мультиграфу, тогда условие связности при отсутствии мажоранты (первое условие (7.79) справедливо) можно записать в виде

$$\forall\, i^* \in \{ i^* \mid \Gamma^{-1} x_{i^*} = \varnothing;\ \ i^* \in [1, N] \} \rightarrow \bigcup_{i^*} \Gamma^{s^*} x_{i^*} \neq \varnothing. \tag{7.81}$$

В (7.81) s^* — длина максимального пути из источника с номером i^*. Так как условие (7.81) всегда выполнено, то полученный мультиграф связан. Пусть

$$\exists i^* \in [1, N], \ (\Gamma x_{i^*} = \varnothing \quad \mathscr{L} \neq \mathscr{L}(x_{i^*})), \tag{7.82}$$

тогда фазовую координату с номером i^* можно отбросить, так как ее изменение не влияет на величину выбранного функционала.

Заметим следующее. Если граф, соответствующий системе дифференциальных и конечных связей, имеет общий вид, то в результате процедуры замены контуров полученная иерархическая структура может оказаться тривиальной, т. е. результатом последнего объединения будет точка. Таким образом, *изложенный подход можно использовать только в случае, когда система ограничений обладает специальной структурой.*

Рассмотрим более общий случай, никаких предварительных условий на структуру дифференциальных связей не накладывается. Учитывая то, что ориентированный граф, соответствующий любой исходной системе, всегда связан, выделение *произвольных* групп фазовых

координат $x^g = \{x_i^g\} \left(i = \overline{1, n^g},\ g = \overline{1, G},\ \sum_g n^g = n \right)$ может рассматриваться как превращение исходного графа в ориентированный мультиграф, который, кроме того, имеет контуры, т. е.

$$\exists g, g^1 \in [1, G]$$

$$\exists s = 1, 2, \ldots \ (x^g \in \Gamma x^g,\ x^g \in \Gamma^s x^{g^*}), \tag{7.83}$$

где s — степень отображения. В контуре (7.83) возьмем две соседние вершины x^g и x^{g*} и выделим компоненты x^g_i, входящие в правые части уравнений для x^{g*}

$$\forall i \in [1, n^g]\ x_i^g \in \left\{ x^g_{i^*} \,\middle|\, \frac{\partial f^*}{\partial x_i^g} \neq 0,\ \dot{x}^g = f^* \right\}. \tag{7.84}$$

Если выделенные таким образом x^g_i считать заданными функциями времени, то при рассмотрении группы фазовых координат с номером g ее можно считать изолированной от группы g^*, т. е. дугу мультиграфа, соединяющую точки g^1 и g, — отсутствующей, а контур (7.83) — разорванным. Таким образом, повторяя нужное число раз эту процедуру, получим обобщенную иерархическую структуру. Рассмотрим простой пример. Система $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ представима в виде простого замкнутого контура (петли). Если считать $x_1(t)$ заданной, то можно считать дугу $x_2 \to x_1$ отсутствующей, а контур — разорванным. В результате получилась двухуровневая структура.

Произвольному выделению групп фазовых координат могут соответствовать различные иерархические структуры. Рациональный выбор последней, основанный на учете влияния связей, может быть условием получения решения. Трудность заключается в том, что это влияние может быть точно определено только после получения решения, а разбиение необходимо производить априори, т. е. до его получения. В качестве возможных условий выделения групп можно указать следующие:

а) пусть степень «густоты» графа

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n_i = \left(\sum_i |\Gamma x_i| \right) \frac{1}{n}, \tag{7.85}$$

где n — число фазовых координат, $n_i = |\Gamma x_i|$ — число связей вершины x_i (i-й фазовой координаты исходной системы). Выделение групп производится на основе оценки локальной густоты S_g так, чтобы выполнялось

$$\forall g \in [1, G] \left(S_g = \frac{1}{n^g} \sum_{i=1}^{n^g} |\Gamma x_i^g| \geq S \right); \tag{7.86}$$

б) для некоторой допустимой траектории исходной динамической системы (7.75) определим степень влияния S_{ii^*} дуг графа на функционал $\overline{\mathscr{L}}(\overline{u})$ ($\overline{u}$ — допустимое управление)

$$\forall i \neq i^* \in [1, n] \quad S_{ii^*} = |\overline{\mathscr{L}} - \overline{\mathscr{L}}^i|, \quad x_{i^*} \in \Gamma x_i, \tag{7.87}$$

где $\mathscr{L}^i$ — значение функционала при отсутствии связи между x_i и x_{i^*}. Обычно отбрасываются связи, для которых выполнено $S_{ii^*} \leq \varepsilon$ (ε — заданная константа). Далее выделение групп производится в соответствии с а);

в) после выполнения предыдущей процедуры определяется относительная степень влияния связей S_{ij}

$$S_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(x, \overline{u}(t))}{\partial x_j},$$

$$\forall j \in \{j \mid x_j \in \Gamma x_i\} \quad \forall t \in [t_0, T]. \tag{7.88}$$

Отбрасываются связи, для которых выполнено

$$\max_{t \in [t_0, T]} |S_{ij}(t)| \leq \varepsilon, \tag{7.89}$$

ε — заданная константа. Выделение групп далее производится опять в соответствии с а).

После выделения g групп фазовых координат становится возможным представить связи (7.66) также автономно по группам. Такая автономность возможна после введения фиктивных фазовых координат (см. (7.80)). Тем самым задаются области допустимых решений в g группах W^g: $x^g(t) \in W^g$,

$$\forall t \in [t_0, T], \ \bigcup_{g=1}^{G} W^g = W.$$

Если данная группа подчинена некоторой другой, то это означает, что высшая группа может менять область решения низшей — ограничивать W^g. Это возможно, когда $W^q \cap W^g \neq 0$ при $x^g \in \Gamma x^q$. Ограничительное управление выражается, таким образом, в стеснении областей возможных значений фазовых координат и управлений. Однако способы влияния элементов высших уровней на низшие не сводятся только к ограничительному управлению — для желательно-

$$\exists i^* \in [1, N], (\Gamma x_{i^*} = \varnothing \quad \mathcal{L} \neq \mathcal{L}(x_{i^*})),\tag{7.82}$$

тогда фазовую координату с номером i^* можно отбросить, т. к. ее изменение не влияет на величину выбранного функционала.

Заметим следующее. Если граф, соответствующий системе дифференциальных и конечных связей, имеет общий вид, то в результате процедуры замены контуров полученная иерархическая структура может оказаться тривиальной, т. е. результатом последнего объединения будет точка. Таким образом, *изложенный подход можно использовать только в случае, когда система ограничений обладает специальной структурой*.

Рассмотрим более общий случай: никаких предварительных условий на структуру дифференциальных связей не накладывается. Учитывая то, что ориентированный граф, соответствующий любой исходной системе, всегда связан, выделение *произвольных* групп фазовых координат $x^g = \{x_i^g\}$ $\left(i = \overline{1, n^g},\ g = \overline{1, G},\ \sum_g n^g = n\right)$ может рассматриваться как превращение исходного графа в ориентированный мультиграф, который, кроме того, имеет контуры, т. е.

$$\exists g,\ g^* \in [1, G]$$

$$\exists s = 1, 2, \ldots\ (x^{g^*} \in \Gamma x^g,\ x^g \in \Gamma^s x^{g^*}),\tag{7.83}$$

где s — «глубина» отображения. В контуре (7.83) возьмем две соседние вершины x^g и x^{g^*} и выделим компоненты x^g_i, входящие в правые части уравнений для x^{g^*}:

$$\forall i \in [1, n^g]: x_i^g \in \left\{ x^g_{i^*} \,\middle|\, \frac{\partial f^*}{\partial x_i^g} \neq 0,\ \dot x^{g^*} = f^* \right\}.\tag{7.84}$$

Если выделенные таким образом x^g_i считать заданными функциями времени, то при рассмотрении группы фазовых координат с номером g ее можно считать изолированной от группы g^*, т. е. дугу мультиграфа, соединяющую точки g^* и g, — отсутствующей, а контур (7.83) — разорванным. Таким образом, повторяя нужное число раз эту процедуру, получим обобщенную иерархическую структуру. Рассмотрим простой пример. Система $\dot x_1 = f_1(x_1, x_2)$, $\dot x_2 = f_2(x_1, x_2)$ представима в виде простого замкнутого контура. Если считать $x_1(t)$ заданной, то можно считать дугу $x_2 \to x_1$ отсутствующей, а контур — разорванным. В результате получилась двухуровневая структура.

Произвольному выделению групп фазовых координат могут соответствовать различные иерархические структуры. Рациональный выбор последней, основанный на учете влияния связей, может быть условием получения решения. Трудность заключается в том, что это влияние может быть точно определено только после получения решения, а разбиение необходимо производить априори, т. е. до его получения. В качестве возможных условий выделения групп можно указать следующие:

а) пусть степень «густоты» графа

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i = \left(\sum_i |\Gamma x_i|\right)\frac{1}{n},\tag{7.85}$$

где n — число фазовых координат, $n_i = |\Gamma x_i|$ — число связей вершины x_i (i-й фазовой координаты исходной системы). Выделение групп производится на основе оценки локальной густоты S_g так, чтобы выполнялось

$$\forall g \in [1, G]\left(S_g = \frac{1}{n^g}\sum_{i=1}^{n^g} |\Gamma x_i^g| \geq S\right);\tag{7.86}$$

б) для некоторой допустимой траектории исходной динамической системы (7.75) определим степень влияния S_{ii^*} дуг графа на функционал $\overline{\mathcal{L}}(\bar u)$ ($\bar u$ — допустимое управление):

$$\forall i, i^* \in [1, n]:\ S_{ii^*} = |\overline{\mathcal{L}} - \overline{\mathcal{L}}^*|,\quad x_i \in \Gamma x_{i^*},\tag{7.87}$$

где $\mathcal{L}^*$ — значение функционала при отсутствии связи между x_i и x_{i^*}. Обычно отбрасываются связи, для которых выполнено $S_{ii^*} \leq \varepsilon$ (ε — заданная константа). Далее выделение групп производится в соответствии с а);

в) после выполнения предыдущей процедуры определяется относительная степень влияния связей S_{ij}:

$$S_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(x, \bar u(t))}{\partial x_j},$$

$$\forall j \in \{j \mid x_j \in \Gamma x_i\},\quad \forall t \in [t_0, T].\tag{7.88}$$

Отбрасываются связи, для которых выполнено

$$\max_{t \in [t_0, T]} |S_{ij}(t)| \leq \varepsilon,\tag{7.89}$$

ε — заданная константа. Выделение групп далее производится опять в соответствии с а).

После выделения g групп фазовых координат становится возможным представить связи (7.66) также автономно по группам. Такая автономность возможна после введения фиктивных фазовых координат (см. (7.80)). Тем самым задаются области допустимых решений в g группах W^g: $x^g(t) \in W^g$,

$$\forall t \in [t_0, T]: \bigcup_{g=1}^{G} W^g = W.$$

Если данная группа подчинена некоторой другой, то это означает, что высшая группа может менять область решения низшей — ограничивать W^g. Это возможно, когда $W^q \cap W^g \neq 0$ при $x^g \in \Gamma x^q$. Ограничительное управление выражается, таким образом, в стеснении областей возможных значений фазовых координат и управлений. Однако способы влияния элементов высших уровней на низшие не сводятся только к ограничительному управлению — для желательного изменения фазовой траектории элемента ему может быть задан критерий эффективности (функционал), согласованный с функционалом всей системы.

Пусть исходная система позволяет ввести g-группы, образующие иерархическую структуру. Связность ориентированного графа, соответствующего дифференциальной системе, обусловливается только явной зависимостью функционала $\mathcal{L}$ от групп фазовых координат $x^g(g=\overline{1,\ G})$, т. е. исходная система дифференциальных уравнений, описывающих некоторую оптимизационную задачу, представима в виде

$$\dot{x}^g=f^g(x^g,\ u^g),\ g=\overline{1,\ G},\ u^g\in D^g,$$

$$\mathcal{L}(x^1(T),\ \ldots,\ x^g(T),\ \ldots,\ x^G(T))\longrightarrow \text{extr}. \tag{7.90}$$

В (7.90) D^g — области, в которых определены управления в g-группах. Необходимые граничные условия заданы произвольно на левом и правом концах траектории.

Предположим, что можно ввести вектор-функции $y^g=y^g(x^g)$ такие, что размерность каждой из них меньше, либо равна размерности x^g, т. е. $[y^g]\leqslant[x^g]$. Зависимость $y^g=y^g(x^g)$ такова, что справедливо тождество

$$\mathcal{L}(x^1,\ \ldots,\ x^g,\ \ldots,\ x^G)\equiv\widehat{\mathcal{L}}(y^1,\ \ldots,\ y^g,\ \ldots,\ y^G).$$

Утверждается [36], что в этом случае система (7.90) представима в виде двухуровневой иерархической структуры, причем высший (второй) уровень экстремизирует общий функционал системы $\widehat{\mathcal{L}}$ с помощью некоторого критериального управления $\lambda^g(t)$ (размерность вектор-функции λ^g совпадает с размерностью y^g), а описанный ниже итерационный процесс (при условии его сходимости) дает точное решение вариационной проблемы (7.90).

Для доказательства утверждения дополнительно предполагается, что (7.90) имеет единственное решение и вид правых частей допускает использование формализма принципа максимума.

Зададим в каждую из g-групп функционалы $\mathcal{L}^g$ и определим

$$\mathcal{L}^g(T)\rightarrow\max,$$

$$\dot{\mathcal{L}}^g=-(\lambda^g,\ \dot{y}^g),\ \dot{y}^g=Q_x^g f^g,\ Q_x^g=\left\|\frac{\partial y^g}{\partial x^g}\right\|. \tag{7.91}$$

Здесь $\dot{y}^g$ однозначно определены при известных $x^g(t)$; $\lambda^g(t)$ — произвольны. Вариационная проблема, в случае известных $\lambda^g(t)$, в g-группе может быть решена, поскольку для каждого уравнения из (7.90) теперь имеем функционал из (7.91). Группу высшего (второго) уровня представим в виде

$$\dot{y}^g=Q^g{}_x f^g(x^g,\ u^g),\ \dot{\widehat{\mathcal{L}}}=\varphi(y^1,\ \ldots,\ y^g,\ \ldots,\ y^G),$$

$$\widehat{\mathcal{L}}(T)\longrightarrow\max. \tag{7.92}$$

Вариационная проблема на втором уровне может быть решена после задания $x^g(t)$. Граничные условия при этом определены:

$$y^g(t_0)=y^g(x^g(t_0)),\ \ y^g(T)=y^g(x^g(T)).$$

Итерационная процедура сводится к следующему. С верхнего уровня задаются $\lambda^g(t)$ некоторого приближения. На нижнем уровне решается вариационная задача, в результате которой определяются $x^g(t)_{\text{опт}}$ этого приближения. $x^g(t)$ задаются на высший уровень, где также решается вариационная задача. В результате последнего решения определяются $\lambda^g(t)$ последующего приближения. Доказательство сделанного ранее утверждения сводится к доказательству того, что λ^g есть импульсы второго уровня соответствующего приближения (см. работу [36]).

Пусть далее имеем ориентированный граф, соответствующий некоторой системе (7.75), (7.76). При проведении процедуры преобразования его в мультиграф можно свести все источники в одну группу; очевидно, что эта группа будет мажорантой, и иерархическая структура в общем случае может быть иллюстрирована соответствующей иерархической схемой. Примем следующие обозначения: s — номер уровня $(s=\overline{1,\ S})$, g — номер вершины данного уровня; на уровне s расположено G_s вершин $(g=\overline{1,\ G_s})$. Поскольку в общем случае вершины мультиграфа суть контуры, т. е. каждая из вершин может состоять из нескольких фазовых координат, то эти вершины именуются группами. Группа уровня s с номером g обозначается как g — s-группа.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, представимую в виде иерархической структуры. Правые части уравнений системы есть билинейные формы от управлений и фазовых координат данной группы. Билинейные формы от фазовых координат и управлений других групп, высших относительно данного уровня, входят в правые части аддитивно и одновременно, как произведения на управления рассматриваемой группы. Кроме того, в правые части уравнений для фазовых координат входят билинейные формы от управлений данной группы и функций фазовых координат высшего уровня

$$\dot{x}^g=\tilde{u}^g x^g+\sum_{c=s+1}^{S-1}\sum_{q=1}^{G_c}\tilde{A}^{gq}\tilde{U}^{gq}x^q+\tilde{B}^g f^g(x^s u^s),$$

$$\dot{x}^s=\varphi(x^s,\ u^s),\ (g=\overline{1,\ G_s};\ s=\overline{1,\ (S-2)}); \tag{7.93}$$

$$x^g=\{x_i^g\};\quad i=\overline{1,\ n^g};\quad x^q=\{x_j^q\};\quad j=\overline{1,\ n^q}.$$

В (7.93) индекс s указывает номер уровня, g — номер группы. В каждой g—s-группе введена матрица U^g, элементы которой суть управления. Размерность U^g равна $\left(\left(n^g+\sum\limits_{q=1}^{S-1}G_q\right)\times n^g\right)$. Ограничения наложены на компоненты вектор-столбцов $u_l{}^g(\overline{l=1,\ n^g})$ или комбинации этих компонент. Далее вводится матрица K^g той же размерности. Конструкция матрицы K^g такова, что она содержит ненулевые элементы только в первых n^g строках; элементы этой матрицы — константы. Результат почленного умножения $\overline{U}^g$ и K^g есть квадратная матрица $\widetilde{U}^g$ (нулевые строки отброшены) с элементами $\widetilde{u}^g{}_{il}=K^g{}_{il}U^g{}_{il}$, $i,\ l=\overline{1,\ n^g}$. Матрица $\widetilde{A}^{gq}$, индексы которой показывают, в какую группу $(g-s)$ из какой $(q-c)$ входят фазовые координаты, также образована почленным умножением матриц A^{gq} и D^{gq} с размерностями $(n^g\times n^q)$. Элементы матрицы D^{gq} — константы, элементы A^{gq} — управления; ограничения наложены на компоненты или их комбинации вектор-столбцов $a_j{}^{gq}(j=\overline{1,\ n^q})$. Аналогично образована матрица $\widetilde{B}^g$ размерностью $(n^g\times n^{gs})$, где n^{gs} — число компонент $f^g(x^s,\ u^s)$. Элементы матрицы B^g — управления с ограничениями, наложенными на компоненты или их комбинации вектор-столбцов $b^g{}_l(l=\overline{1,\ n^{gs}})$. Матрица $\widehat{U}^{gq}$ образована следующим образом. Из матрицы $U^q(q=\overline{1,G_c};\ c=\overline{(s+1),\ (S-1)})$ взята строка, соответствующая $g-s$-группе, и дополнена нулями до квадратной матрицы, а затем представлена как диагональная; таким образом, $\widehat{U}^{gq}$ — диагональная матрица размерности $(n^{qc}\times n^{qc})$.

Общий функционал системы

$$\mathscr{L}(T)=\sum_{s=1}^{S-1}\sum_{g=1}^{G_s}c^g\mathscr{J}^g+\int_{t_0}^{T}\varphi_0(x^s,\ u^s)\,dt, \tag{7.94}$$

где $c^g=\mathrm{const}$, $\mathscr{J}^g=\int\limits_0^T\varphi^g\,dt$ и

$$\varphi^g=(\widetilde{u}_0^g,\ x^g)+\sum_{c=s+1}^{S-1}\sum_{q=1}^{G_c}[\widetilde{a}_0^{gq},\ (\widehat{U}^{gq}x^q)]+(\widetilde{b}_0^g,f^g), \tag{7.95}$$

В (7.95) векторы $\widetilde{u}_0^g,\ \widetilde{a}_0^{gq},\ \widetilde{b}_0^g$ образованы аналогично вектор-строкам матриц $\widetilde{u}^g,\ \widetilde{A}^{gq},\ \widetilde{B}^g$ соответственно, причем на управления, входящие в эти векторы, наложены ограничения, совместные с ограничениями на вектор-столбцы этих матриц.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если задана динамическая система (7.93) с функционалом (7.94) и функции φ^g представимы в виде (7.95) и если на оптимальной траектории для всех фазовых координат, кроме фазовых координат высшего уровня, выполняются условия при $t\in[t_0,\ T]$ оптимальные значения фазовых координат нигде не меняют знака, то справедливо равенство *

$$\max_{u^g,\ A^{gq},\ D^g,\ u^s}\mathscr{L}=\max_{u^s}\left[\int_0^T\varphi_0(x^s,\ u^s)\,dt+\left(\sum_{g=1}^{G_{s-1}}\max_{u^g,\ A^{gq},\ D^g}\mathscr{J}^g+\left(\sum_{g=1}^{G_{s-2}}\max_{u^g,\ A^{gq},\ D^g}\mathscr{J}^g+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(\cdots+\left(\sum_{g=1}^{G_1}\max_{u^g,\ A^{gq},\ D^g}\mathscr{J}^g\right)\cdots\right)\right)\right)\right].$$

Сформулируем алгоритм определения максимального значения общего функционала системы. Вначале последовательно, начиная с первого, низшего уровня, определяется оптимальное управление и оптимальные значения импульсов для всех $g-s$-групп, кроме групп высшего уровня. На высшем уровне определяется не только оптимальное управление, но и оптимальные значения фазовых координат. Полученные значения фазовых координат позволяют последовательно, начиная с $(s-1)$-го уровня, интегрировать всю систему.

Сделаем предположение о том, что в каждой из $g-s$-групп системы (7.93), включая группу высшего уровня, существуют противоположные интересы. В соответствии с этим предположением можно выделить управления, максимизирующие и минимизирующие функционалы, а также разделить фазовые координаты так, чтобы произведения их на управления имели смысл, т. е. управления одной стороны должны распоряжаться фазовыми координатами той же стороны. Имея в виду сделанные предположения, можно утверждать, что система (7.93) описывает дифференциальную игру с функционалом (7.94). Введем новые обозначения на управления. Пусть W^g — вектор-функция, компоненты которой суть элементы матриц $U^g,\ A^{gq},\ B^g$. Разбивая строки этих матриц на две части, одна из которых максимизирует функционал (7.94), а другая минимизирует, получим две части W^g, которые обозначим через $W^g{}_{\mathrm{I}}$ и $W^g{}_{\mathrm{II}}$. Доказана следующая теорема для такой дифференциальной игры.

Теорема 2. Если дифференциальная игра описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, структура которых совпадает со структурой системы (7.93) с функционалом вида (7.94), где φ^g представимы в виде (7.95), то справедливо равенство

$$\max_{W^g{}_{\mathrm{I}},\ W^s{}_{\mathrm{I}}}\ \min_{W^g{}_{\mathrm{II}},\ W^s{}_{\mathrm{II}}}\mathscr{L}=\max_{W^s{}_{\mathrm{I}}}\min_{W^s{}_{\mathrm{II}}}\left[\int_{t_0}^{T}\varphi_0(x^s,\ W^s{}_{\mathrm{I}},\ W^s{}_{\mathrm{II}})\,dt+\right.$$

$$+\left(\sum_{g=1}^{G_{s-1}}\max_{W^g{}_{\mathrm{I}}}\min_{W^g{}_{\mathrm{II}}}\mathscr{J}^g+\left(\sum_{g=1}^{G_{s-2}}\max_{W^g{}_{\mathrm{I}}}\min_{W^g{}_{\mathrm{II}}}\mathscr{J}^g+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(\cdots+\left(\sum_{g=1}^{G_1}\max_{W^g{}_{\mathrm{I}}}\min_{W^g{}_{\mathrm{II}}}\mathscr{J}^g\right)\cdots\right)\right)\right)\right]$$

$(g=\overline{1,\ G_s},\ s=\overline{1,\ (S-2)})$,

в котором скобки в правой части указывают на последовательность действий при определении оптимальных стратегий и фазовых координат; первые определяются автономно в группах, начиная с низшего уровня до высшего, вторые — с высшего до низшего.

Доказательство теоремы 2 о вложении $\max\min\mathscr{J}^g$ дифференциальной игры двух иерархических структур производится на основании теоремы 1. Алгоритм определения цены дифференциальной игры или $\max\min\mathscr{L}$ формулируется аналогично алгоритму, сформулированному выше для определения экстремального значения функционала. Вначале последовательно, начиная с первого уровня, определяются управления сторон, дающие $\max\limits_{I^g}\min\limits_{W^g} \mathcal{J}^g (g=\overline{1, G_g}, s=\overline{1, (S-1)}$ и соответствующие им оптимальные значения импульсов $p^g(t)_{\text{опт}}$. Затем на высшем уровне определяются не только оптимальное управление, но и оптимальные значения фазовых координат, которые затем задаются на низшие уровни. Задание фазовых координат и управлений высшего уровня позволяют интегрировать уравнения в g—s-группах. Действуя последовательно подобным образом, интегрируем всю систему и определяем значение цены игры.

Вообще говоря, можно привести и более общий подход к анализу экстремальных систем, полагая, что каждый из элементов системы может иметь собственный набор локальных критериев эффективности. В этом случае влияние одного элемента на другой может заключаться в задании критерия эффективности из этого набора. В некоторых работах такая ситуация рассматривается как отражение некоторой физической реальности, в работе [36] она используется и как прием для получения приближенного решения. Методы получения приближенного решения, в основе которых лежит использование структуры, позволяют производить анализ сложных систем, для которых решение ранее известными методами невозможно.

В заключение этого параграфа рассмотрим задачу определения управления с помощью итерационной процедуры.

Поставим задачу определения оптимального управления, доставляющего экстремум функционалу $\mathcal{L}=\mathcal{L}(x, u)$ при дифференциальных связях

$$\dot{x}=f(x, u, t),$$
$$(x=\{x_i\},\ u=\{u_r\},\ i=\overline{1, n},\ r=\overline{1, m},\ t\in[t_0, T]), \qquad (7.96)$$

ограничениях и краевых условиях

$$F_{\omega_1}(x, u, t)\leqslant 0,\ F_{\omega_2}(x(t_0), t_0)\leqslant 0,$$
$$F_{\omega_3}(x(T), T)\leqslant 0,\ (\omega_1=\overline{1, \Omega_1},\ \omega_2=$$
$$=\overline{1, \Omega_2},\ \omega_3=\overline{1, \Omega_3}). \qquad (7.97)$$

Для получения решения разобьем систему (7.96), (7.97) на ряд подсистем меньшей размерности, в каждой из которых сформулируем некоторую задачу оптимизации. Затем применим итерационный процесс, состоящий в получении оптимального решения автономно в подсистемах с последующей их стыковкой.

Разбиение на подсистемы произведем в соответствии с ориентированным графом, заданным отображениями Γx_i фазовых координат

$$\forall i, j\in[1, n]\left(x_j\in\Gamma x_i\longleftrightarrow\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\not\equiv 0,\ \dot{x}_j=f_j\right). \qquad (7.98)$$

В (7.98), кроме x_i, f_i из (7.96), участвуют «фиктивные» фазовые координаты x_ω, связанные с f_ω соотношением

$$\dot{x}_\omega=f_\omega,\ f_\omega=F_\omega+w_\omega,\ (\omega=\omega_1, \omega_2, \omega_3). \qquad (7.99)$$

В (7.99) F_ω — левые части (7.97), w_ω — дополняющие функции и управляющие параметры. Таким образом, общее число координат x_ω равно $\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3$.

Граф (7.98) связан, конечен и в общем случае полон. Выделение контуров в самостоятельные вершины и превращение таким образом (7.98) в некоторый ориентированный мультиграф без контуров эквивалентно введению обобщенной иерархической структуры. Будем считать, что эта структура нетривиальна, т. е. выполнены условия

$$\forall g\in[1, G_s],\ \forall s\in[1, S],\ \forall q\in[1, G_c],\ c\in[s+1, S],$$
$$\Gamma^{-1}x_S\neq\varnothing,\quad G_S\geqslant 1;\ \ \forall g\in[1, G_1],\ \Gamma x^g=\varnothing,$$
$$S\geqslant 2,\ G_1\geqslant 1. \qquad (7.100)$$

В (7.100) g, q — номера вершин мультиграфа (групп фазовых координат), s — номер уровня, на котором расположена группа g из общего числа на данном уровне G_s. Для дальнейшего заметим, что при $G_S=1$, $S=2$, $G_1=1$ мультиграф состоит из двух связанных групп фазовых координат, расположенных на двух уровнях.

При определенных условиях, сформулированных в работе [36] (теоремы «о вложениях» максимумов и максиминов), оптимальное управление в общей задаче может быть определено последовательно и автономно в группах, начиная с низшего уровня; оптимальное значение фазовых координат определяется также последовательно с высшего уровня до низшего. Если эти условия для системы (7.100) не выполнены, то для автономного отыскания решения вместо конечной может быть предложена следующая итеративная процедура.

Выделим компоненты вектора x^q, входящие в правые части уравнений для $\dot{x}^g$, т. е. определим

$$\forall g\in[1, G_s],\ \forall q\in[1, G_c],\ \forall s\in[1, S],$$
$$\forall c\in[s+1, S],\ \ x^g\in\Gamma x^q,$$
$$\forall j^*\in[1, n^{q^*}]:\ \ x^q_{j^*}\in\left\{x^q_{j^*}\ \middle|\ \frac{\partial f^g}{\partial x^g_{j^*}}\not\equiv 0,\ \ \dot{x}^g=f^g,\ n^{q^*}\leqslant n^g\right\}.$$
$$(7.101)$$

Возьмем начальное приближение $x^q_{j^*}$:

$$[x^q_{j^*}(t)]^0,\quad\forall t\in[t_0, T],\quad\forall j^*\in[1, n^{q^*}],$$
$$q=\overline{1, G_c},\ c=\overline{2, S}. \qquad (7.102)$$

Отсюда получим $G=\sum\limits_{s=1}^{S} G_s$ автономных групп фазовых координат; при этом каждой группе соответствует некоторая система дифференциальных и конечных связей, в том числе необходимые краевые условия. Для формулирования автономной вариационной задачи в каждой из групп необходимо задать функционал. Сначала рассмотрим случай, когда общий функционал задачи есть явная функция хотя бы одной фазовой координаты в каждой из групп, т. е.

$$\forall g\in[1, G]:\exists i\in[1, n^g]\ (\mathcal{L}=\mathcal{L}(x^g_i)). \qquad (7.103)$$

Здесь общий функционал одновременно можно рассматривать как функционал любой из автономных задач. Пусть теперь (7.103) выполняется для некоторых групп. Для этих групп функционал может быть задан в функции от фазовых координат данной группы после того, как решены задачи во всех группах, подчиненных данной, т. е. в результате некоторой последовательной процедуры.

После решения вариационных задач автономно в каждой из групп (независимо, либо в результате последовательной процедуры) будут определены оптимальные значения всех фазовых координат в (7.96) с условиями (7.97), в том числе и $[x^q_{j*}(t)]_{\text{опт}}$. Считая последние новыми заданными функциями (следующее приближение), можно повторить вышеописанную процедуру. Если заданная система «близка» к системе, для которой справедлива теорема о вложениях максимумов (максиминов) (см. [36]), то, во-первых, можно ожидать, что итеративная процедура будет сходиться, и, во-вторых, полученная в результате этого фазовая траектория совпадает с оптимальной.

Доказательство сходимости изложенной выше итеративной процедуры и единственности полученного решения вариационной задачи для системы (7.96), когда эта система представима в виде иерархической структуры (условие (7.100) выполнено), в общем случае достаточно сложно. В работе [36] рассматривалась задача сходимости итерационного процесса (в линеаризованной постановке) для структуры, состоящей из двух групп фазовых координат. Положим, что вариационная проблема с помощью некоторого формализма сведена к следующей нелинейной краевой задаче

$$\dot{X}=F^x(X,\ Y,\ t),\quad \dot{Y}=F^y(X,\ Y,\ t), \tag{7.104}$$

$$(t\in[t_0,\ T]),\ X=\{X_i\},\ Y=\{Y_j\},\ i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ m}),$$

с симметричными краевыми условиями как для X, так и для Y: на концах фазовой траектории задано равное количество необходимых ограничений. Итеративная процедура теперь сводится к следующему. Задается начальное приближение $Y^0(t)$; если известно $Y^N(t)$ ($N=0,\ 1,\ldots$), то $X^N(t)$ находится из решения первого уравнения (7.104), где полагается $Y(t)=Y^N(t)$; $Y^{N+1}(t)$ находится из решения второго уравнения (7.104), где задано $X(t)=X^N(t)$. Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса рассматривается одна из двух краевых задач:

$$\dot{X}=F^x(X,\ \overline{Y},\ t)\ \ (\text{для определения } X^N(t)),$$

$$P^x{}_0(X(t_0))=0,\ \ P^x{}_1(X(T))=0$$

$$\dot{Y}=F^y(\overline{X},\ Y,\ t)\ \ (\text{для определения } Y^N(t)),$$

$$P^y{}_0(Y(t_0))=0,\ \ P^y{}_1(Y(T))=0,$$

здесь $\overline{X}(t)$, $\overline{Y}(t)$ определяются из предыдущей итерации.

Приложение

В настоящем приложении приводятся теоремы, на основе которых строятся все методы решения рассмотренных в этой книге игр. Эти теоремы принадлежат В. Ф. Кротову [2, 32, 34]. Принцип оптимальности В. Ф. Кротова основан на сведении задачи о минимуме функционала с дифференциальными связями к тривиальной задаче о нахождении двух функций, далее обозначаемых $R(t,\ x(t),\ u(t))$ и $\Phi(x_0,\ x_1)$, таких, чтобы решение этой последней задачи было одновременно и решением исходной. Точнее, задача о минимуме функционала $\mathcal{J}$ на множестве функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих дифференциальным связям, сводится к отысканию максимума функции $R(t,\ x(t),\ u(t))$ от $n+r$ переменных x^i, u^k ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $k=1,\ 2,\ \ldots,\ r$) при каждом фиксированном $t\in(t_0,\ t_1)$ и минимума функции $\Phi(x_0,\ x_1)$ от $2n$ переменных.

Заметим, что теорема, в которой речь идет о подвижной границе, приводится в приложении для того, чтобы любознательный читатель мог решать игры не только с фиксированным, но и с нефиксированным временем (аргументом) игры.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О МИНИМУМЕ ФУНКЦИОНАЛА

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\mathcal{J}=\int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t,\ x,\ u)\,dt+F\,(x_0,\ x_1) \tag{1}$$

на множестве D пар вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих следующим условиям: вектор-функция $x(t)=[x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t)]$ определена на отрезке $[t_0,\ t_1]$; ее компоненты $x^i(t)$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) непрерывны на $[t_0,\ t_1]$ и обладают кусочно-непрерывной производной; при каждом фиксированном $t\in[t_0,\ t_1]$ вектор $x(t)$ принадлежит заданной области $V_x(t)$ n-мерного векторного пространства. Вектор-функция $u(t)=[u^1(t),\ \ldots,\ u^n(t)]$ определена на $[t_0,\ t_1]$; ее компоненты $u^j(t)$ ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ r$) непрерывны всюду на $(t_0,\ t_1)$ кроме конечного числа точек, где они могут иметь разрывы первого рода; при каждом $t\in(t_0,\ t_1)$, $x\in V_x(t)$ вектор $u(t)$ принадлежит заданному множеству $V_u(t,\ x)$.

Функция $F(x_0,\ x_1)$ непрерывна при всех x_0, x_1, где

$$x_0=x(t_0),\ x_1=x(t_1). \tag{2}$$

Условия, наложенные на $x(t)$ и $u(t)$, задают множество $V(t)$ допустимых значений совокупностей $n+r$ чисел $(x^i,\ u^j)$ при каждом $t\in(t_0,\ t_1)$, а также область V_x допустимых значений $(t,\ x)$

в $(n+1)$-мерном пространстве t, x и множество V допустимых совокупностей $n+r+1$ чисел

$$(x^i, u^j, t) \quad (i=1, 2, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, r).$$

Кроме перечисленных условий, пара вектор-функций $x(t)$, $u(t)$ должна удовлетворять системе n дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t, x, u), \tag{3}$$

где $f=(f^1, f^2, \ldots, f^n)$. Функции $f^i(t, x, u)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ определены и непрерывны при всех t, x, u.

Задача ставится следующим образом: на множестве D пар вектор-функций $x(t)$, $u(t)$ найти такую пару $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, на которой функционал $\mathcal{J}$ принимал бы наименьшее значение. Может оказаться, что такая пара в классе D отсутствует. Тогда ставится задача найти последовательность $\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\}\subset D$ такую, чтобы функционал (1) на этой последовательности при $s\to\infty$ стремился к своей нижней грани на множестве D.

Искомую пару функций $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ называют оптимальным режимом или абсолютной минималью, а искомую последовательность $\bar{x}_s(t)$, $\bar{u}_s(t)$ — минимизирующей.

В сформулированной задаче речь идет о минимуме функционала. Задачу о максимуме всегда можно заменить задачей о минимуме, например, простой заменой знака функционала.

2. ТЕОРЕМА О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОГО МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА

Пусть на некотором множестве M задан функционал $\mathcal{J}(w)$, $w\in M$. Обозначим

$$\inf_{w\in M} \mathcal{J}(w) = m. \tag{4}$$

Ставится задача об абсолютном минимуме $\mathcal{J}$ на M, т. е. требуется найти такую последовательность $\{\bar{w}_s\}\subset M$, чтобы

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{J}(\bar{w}_s) = m. \tag{5}$$

Такая последовательность называется минимизирующей. Если существует элемент $\bar{w}\in M$, такой, что

$$\mathcal{J}(\bar{w}) = m, \tag{6}$$

то можно принять $\bar{w}_s=\bar{w}$ $(s=1, 2, \ldots)$. Таким образом, в последнем случае задача сводится к нахождению элемента $\bar{w}\in M$, удовлетворяющего (6), который называется *абсолютной минималью* функционала $\mathcal{J}$ на множестве M.

Введем в рассмотрение множество $N\supset M$, определив на нем функционал L так, чтобы $L(w)=\mathcal{J}(w)$ при $w\in M$.

Лемма. Пусть имеется последовательность $\{\bar{w}_s\}\subset M$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{s\to\infty} L(\bar{w}_s) = l, \tag{7}$$

где $l=\inf\limits_{w\in N} L(w)$. Тогда эта последовательность минимизирует $\mathcal{J}$ на M, т. е. $\mathcal{J}(\bar{w}_s) \underset{s\to\infty}{\to} m$.

Доказательство. Пусть справедливо условие (7). В силу определения функционала L, имеем $L(\bar{w}_s)=\mathcal{J}(\bar{w}_s)$. Покажем, что $l=m$. Предположим противное. Тогда, так как $M\subset N$, то $m>l$ и, следовательно, $m-l>\mathcal{E}>0$, так как $\{\bar{w}_s\}\subset M$, $\mathcal{J}(\bar{w}_s)-l>\mathcal{E}$ при любых s. Но последнее противоречит условию (7). Следовательно, $l=m$ и из (7) следует (5). Лемма доказана.

Эта лемма позволяет заменить задачу о минимуме функционала на множестве M аналогичной задачей на более широком множестве N; эта задача может оказаться проще, если множество N обладает более простой структурой.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(t, x)$, непрерывную при всех t, x и обладающую непрерывными частными производными φ_t, $\varphi_x=(\varphi_{x^1}, \ldots, \varphi_{x^n})$ при всех t, x за исключением конечного числа множеств $t=\text{const}$ пространства (t, x). Построим функции

$$\Phi(x_0, x_1) = F(x_0, x_1) + \varphi(t_1, x_1) - \varphi(t_0, x_0), \tag{8}$$

$$R(t, x, u) = \varphi_x f(t, x, u) - f^0(t, x, u) + \varphi_t, \tag{9}$$

$$\mu(t) = \sup_{(x, u)\in V(t)} R(t, x, u). \tag{10}$$

Здесь φ_x—n-мерная вектор-функция, а в правой части (9) первое слагаемое есть скалярное произведение n-мерных векторов

$$\varphi_x f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_x^i f^i.$$

В правой части (10) векторы x и u рассматриваются как независимые.

Теорема 1. Пусть имеется последовательность $\{x_s(t), u_s(t)\}\subset D$. Для того чтобы эта последовательность минимизировала функционал $\mathcal{J}$ на множестве D, достаточно существования такой функции $\varphi(t, x)$, что

1) $R(t, \bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)) \to \mu(t), \quad t\in(t_0, t_1).$ (11)*)

2) $\Phi(\bar{x}_{0s}, \bar{x}_{1s}) \underset{s\to\infty}{\to} \inf\limits_{\substack{x_0\in V_x(t_0)\\ x_1\in V_x(t_1)}} \Phi(x_0, x_1) > -\infty.$ (12)

---

*) Здесь подразумевается сходимость по мере: мера множества точек $t\in(t_0, t_1)$, где $\mu(t)-R_s>\varepsilon$ стремится к нулю при любом наперед заданном ε.

3) Функция $\mu(t)$ кусочно-непрерывна на $[t_0, t_1]$.

4) Существует такое число Q, что для любого $s<\infty$ и любого $t\in(t_0, t_1)$

$$R(t, \overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t)) > Q.$$

З а м е ч а н и е Если абсолютная минималь $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\in D$ существует, то теорема 1 принимает следующий вид.

Пусть имеется пара $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\in D$. Для того чтобы функционал (1) достигал на этой паре абсолютного минимума, достаточно существования такой функции $\varphi(t, x)$, что

$$1)\qquad R(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) = \mu(t) \tag{11*}$$

почти всюду на (t_0, t_1);

$$2)\qquad \Phi(\overline{x}_0, \overline{x}_1) = \inf_{\substack{x_0\in V_x(t_0)\\ x_1\in V_x(t_1)}} \Phi(x_0, x_1). \tag{12*}$$

Условия 3 и 4 выполняются в этом случае автоматически.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь роль множества M, фигурирующего в лемме, играет определенное выше множество D пар вектор-функций $x(t)$, $u(t)$. В качестве множества N введем в рассмотрение множество E пар вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, которое отличается от D только тем, что, во-первых, функции $x^i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ могут иметь разрывы первого рода в конечном числе точек отрезка $[t_0, t_1]$ и, во-вторых, вектор-функции $x(t)$, $u(t)$ не связаны дифференциальными уравнениями (3).

Определим на E функционал

$$L(x(t), u(t)) = \Phi(x_0, x_1) - \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt. \tag{13}$$

На множестве D имеем $L=\mathcal{J}$. Действительно, пользуясь (3) (9), получаем

$$R = \dot{\varphi} - f^0, \quad (x(t), u(t)) \in D, \tag{14}$$

где $\dot{\varphi}$ — полная производная функции φ в силу системы уравнений (3). Подставляя (14) в (13) и учитывая, что вектор-функция $x(t)$ непрерывна, если $(x(t), u(t))\in D$, получаем $L=\mathcal{J}$.

Предположим, что существуют функция $\varphi(t, x)$ и последовательность $\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\}\in D$, удовлетворяющие условиям 1—4 теоремы. Покажем, что в этом случае последовательность $\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\}$ является минимизирующей для функционала L на множестве E:

$$\lim_{s\to\infty} L(\overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t)) - l = 0,$$

где

$$l = \inf_E L(x(t), u(t)). \tag{15}$$

Поскольку на множестве E допускаются разрывы вектор-функции $x(t)$, то первое и второе слагаемые в выражении (13) для L не-

зависимы. Поэтому

$$l = \inf_{(x_0, x_1)\in V_x(t_0)+V_x(t_1)} \Phi(x_0, x_1) - \sup_E \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt. \tag{16}$$

Имеем

$$\lim_{s\to\infty} L(\overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t)) - l = \lim_{s\to\infty} \Phi(\overline{x}_{0s}, \overline{x}_{1s}) -$$

$$- \inf_{(x_0, x_1)\in V_x(t_0)+V_x(t_1)} \Phi(x_0, x_1) + \sup_E \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt -$$

$$- \lim_{s\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} R(\overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t))\, dt. \tag{17}$$

Учитывая (11), (12) и известную теорему Лебега о пределе интеграла, можем записать

$$\lim_{s\to\infty} L(\overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t)) - l = \sup_E \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt -$$

$$- \lim_{s\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} R(t, \overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t))\, dt = \sup_E \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \lim_{s\to\infty} R(t, \overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t))\, dt = \sup_E \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\, dt. \tag{18}$$

Предположим противное, т. е. что рассматриваемая последовательность не является минимизирующей для функционала L на E. Это значит, что существует число $\varepsilon>0$, такое, что

$$\lim_{s\to\infty} L(\overline{x}_s(t), \overline{u}_s(t)) - l > \varepsilon,$$

или в силу (18)

$$\sup_E \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\, dt > \varepsilon. \tag{19}$$

По определению точной верхней границы, существует такая последовательность $\{x_k(t), u_k(t)\}\in E$, что при достаточно большом k

$$\sup_E \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t))\, dt - \int_{t_0}^{t_1} R(t, x_k(t), u_k(t))\, dt < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Вычитая из неравенства (19) неравенство (20), получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} R(t, x_k(t), u_k(t))\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\, dt > \frac{\varepsilon}{2},$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} [R(t, x_k(t), u_k(t)) - \sup_{(x, u)\in V(t)} R(t, x, u)]\, dt > \frac{\varepsilon}{2} > 0. \qquad (21)$$

Но подынтегральное выражение здесь неположительно почти всюду на промежутке (t_0, t_1), следовательно, неположителен и интеграл, т. е. неравенство (19) не выполняется.

Последовательность $\{\bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\}$ действительно минимизирует функционал L на E. В силу леммы эта последовательность минимизирует также и функционал $\mathcal{J}$ на D. Теорема доказана.

3. ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

До сих пор предполагалось, что концы отрезка $[t_0, t_1]$ фиксированы. Однако существуют задачи, в которых конечное значение t_1 аргумента свободно и может выбираться оптимально.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt + F(x_0, x_1, t_1). \qquad (22)$$

Здесь число t_1 принадлежит множеству τ точек оси t, заключенному в отрезке $[t_0, T]$, $T<\infty$. Вектор-функции $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют всем условиям, перечисленным в § 1. Множества $V_x(t)$ и $V_u(t)$ будем считать заданными на отрезке $[t_0, T]$. Функция $F(t_1, x_0, x_1)$ задана и непрерывна при $t_1\in\tau$, $x_0\in V_x(t_0)$, $x_1\in V_x(t_1)$. Элемент множества D допустимых объектов теперь представляет собой тройку, состоящую из числа $t_1\in\tau$ и пары вектор-функций $x(t)$ и $u(t)$, заданных на отрезке $[t_0, t_1]$. Аналог теоремы 1 для этой задачи формулируется следующим образом.

Теорема 2. Пусть имеется последовательность $\{\bar{t}_{1s}, \bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)\}\subset D$. Для того чтобы эта последовательность минимизировала функционал $\mathcal{J}$ на D, достаточно существования такой функции $\varphi(t, x)$ (см. § 2 приложения), чтобы

1) $R(t, \bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t)) \to \mu(t)$ на $(t_0, \bar{t}_{1s})$;

2) $\Phi(\bar{t}_{1s}, \bar{x}_{0s}, \bar{x}_{1s}) \to \inf\limits_{\substack{t_1\in\tau,\ x_0\in V_x(t_0)\\ x_1\in V_x(t_1)}} \Phi(t_1, x_0, x_1) > -\infty$;

3) $\mu(t) \equiv 0$ на (t_0, T);

4) существовало такое число Q, что для любого $s<\infty$ и любого $t\in(t_0, t_{1s})$: $R(t, \bar{x}_s(t), \bar{u}_s(t))>Q$, где $R(t, x, u)$ и $\mu(t)$ определены формулами (9), (10).

Доказательство этой теоремы приводится в работе [2].

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О МИНИМУМЕ ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть имеются действительные векторные пространства X, Y, U с элементами $x=(x^1, x^2, \ldots, x^m)$, $y=(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ и $u=(u^1, u^2, \ldots, u^r)$ соответственно. В пространстве X задана замкнутая область A, ограниченная непрерывной кусочно-гладкой гиперповерхностью S. Каждой точке $x\in A$ поставлено в соответствие множество $B(x)$ пространства Y. Тем самым в $(m+n)$-мерном пространстве $X\times Y$ задано множество B, такое, что x, $y\in B$, если $x\in A$, $y\in B(x)$, и обратно.

Каждой точке x, $y\in B$ однозначно соответствует множество $C(x, y)$ пространства U. Тем самым при каждом $x\in A$ задано множество $V(x)\subset Y\times U$, такое, что y, $u\in V(x)$, если $y\in B(x)$, $u\in C(x, y)$ и обратно, а в $(m+n+r)$-мерном пространстве $X\times Y\times U$ — множество W, такое, что x, y, $u\in W$, если $x\in A$, y, $u\in V(x)$, и обратно.

Введем в рассмотрение множество D функций $y(x)$, $u(x)$, заданных в области A, таких, что при всех $x\in A$:

$$y(x),\ u(x)\in V(x), \qquad (23)$$

$$\partial y^i/\partial x^j = f^i{}_j(x, y, u),\ i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m, \qquad (24)$$

где функции $f^i{}_j$ кусочно-непрерывны на W и при каждом фиксированном x непрерывны на $V(x)$.

Функция $u(x)$ считается ограниченной кусочно-непрерывной; функции $y^i(x)$ непрерывны и в силу уравнений (24) кусочно-дифференцируемы. Предполагается, что множество D непусто.

Пусть на множестве D задан функционал

$$\mathcal{J}[y(x), u(x)] = \int_A f^0(x, y, u)\, dx + F[y_s(x)], \qquad (25)$$

где функция $f^0(x, y, u)$ определена, кусочно-непрерывна на W и при каждом фиксированном x непрерывна на $V(x)$; $F[y_s(x)]$ — функционал, зависящий от значений $y_s(x)$ функции $y(x)$ на поверхности S:

$$y_s(x) = y(x),\ x\in S. \qquad (26)$$

Ставится следующая задача. На множестве D пар $y(x)$, $u(x)$ найти минимизирующую последовательность для функционала (25).

Теорема о достаточных условиях абсолютного минимума функционала для управляемых систем, описываемых уравнениями в частных производных, изложена в работе [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нейман Дж. Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. М., «Наука», 1970
2. **Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И.** Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М, «Машиностроение», 1969.
3 **Воробьев Н. Н.** Современное состояние теории игр. Первая Всесоюзная конференция по теории игр. Ереванский университет, 1968.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
5. **Воробьев Н. Н.** Некоторые методологические проблемы теории игр. — «Вопросы философии», 1966, № 1.
6. **Лефевр В. А., Смолян Г. Л.** Алгебра конфликта. М., «Знание», 1968.
7. **Проблемы** эвристики (сборник статей). М., «Высшая школа», 1969.
8 **Гермейер Ю. Б.** Методологические и математические основы исследования операций и теории игр. Ротапринт ВЦ МГУ, 1967.
9. **Воробьев Н. Н.** Коалиционные игры. — «Теория вероятностей и ее применение», 1967, т. 12, № 2.
10. Нэш (Nash J. E.). Бескоалиционные игры Матричные игры М., Физматгиз, 1961.
11. **Льюс Р. Д., Райфа Х.** Игры и решения. М., ИЛ, 1961.
12. **Shapley L. S.** A value for n — person games. Contributions to the theory of games. II, Ann. of Math. Study 28, Princeton University Press, 1953.
13. **Нейман Дж.** К теории стратегических игр. Матричные игры. М, Физматгиз, 1961.
14. **У Вень-Цзюн.** Одно замечание об основной теореме теории игр. Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.
15 **Никайдо Х., Исода К.** Заметка о бескоалиционных выпуклых играх Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.
16. **Пацюков В. П.** Методы решения некоторых дифференциальных игр. — «Техническая кибернетика», 1968, № 5.
17. **Пацюков В. П.** Методы решения некоторых бескоалиционных дифференциальных игр n лиц. — «Автоматика и телемеханика», 1970, № 4.
18. **Пацюков В. П.** Методы оптимизации процессов, описываемых уравнениями в частных производных при конфликтной ситуации — «Техническая кибернетика», 1970, № 5.
19. **Карлин С.** Операторное истолкование принципа минимакса Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.
20. **Симакова Э. Н.** Дифференциальные игры. — «Автоматика и телемеханика», 1966, № 2.
21. **Зеликин М. И., Симакова Э. Н.** Обзор некоторых результатов по теории дифференциальных игр. Приложение к монографии [4].
22 **Гришин В. П.** К проблеме минимакса в теории аналитического конструирования регуляторов. — «Автоматика и телемеханика» 1964, т. 25, № 6.

23. **Гурман В. И.** Об оптимальных процессах особого управления — «Автоматика и телемеханика», 1965, т. 26, № 5
24. **Гурман В. И.** Методы исследования одного класса оптимальных скользящих режимов. — «Автоматика и телемеханика», 1965, т 26, № 7
25 **Гурман В. И.** Структура оптимальных режимов движения ракет в однородном гравитационном поле. — «Космические исследования», 1966, т 4, вып. 6.
26. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Ф. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961
27 **Розенберг Г. С.** Аналитическая оценка степени оптимальности управляемых систем — «Автоматика и телемеханика», 1966, № 10
28. **Канторович Л. В., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. М., Физматгиз, 1962.
29. **Локк А. С.** Управление снарядами. М., Гостехиздат, 1957.
30. **Натансон Н. П.** Теория функций действительной переменной. М, ГИТТЛ, 1957.
31 **Гаврилов В. М.** Оптимальные процессы в конфликтных ситуациях М., «Сов. радио», 1968.
32 **Кротов В. Ф.** Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума III — «Автоматика и телемеханика», 1964, т. 25, № 7.
33 **Оуэн Г.** Теория игр. М., «Мир», 1971.
34. **Кротов В. Ф.** Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума — «Автоматика и телемеханика», 1962, т. 23, № 12
35 **Моисеев Н. Н.** Иерархические структуры и теория игр — «Кибернетика», АН УССР, 1973, № 6.
36. **Методы** определения оптимального управления в иерархических структурах. Институт проблем управления. Препринт. М., 1974.
37. **Берж К.** Теория графов и ее применение. М, ИЛ., 1962.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ