БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

МАТЕМАТИКА

В. А. Далингер

Методика обучения учащихся доказательству математических предложений

ПРОСВЕЩЕНИЕ
издательство

БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

В. А. Далингер

Методика обучения учащихся доказательству математических предложений

Книга для учителя

Москва
«Просвещение»
2006

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Д15

Серия «Библиотека учителя» основана в 2000 г.

Рецензент: кандидат физико-математических наук, учитель физико-математического лицея № 556 Санкт-Петербурга
В. И. Рыжик

Далингер В. А.
Д15 Методика обучения учащихся доказательству математических предложений : кн. для учителя / В. А. Далингер.— М. : Просвещение, 2006.— 256 с. : ил.— (Библиотека учителя).— ISBN 5-09-011498-6.

В книге рассмотрены как теоретические, так и практические основы обучения учащихся доказательству математических предложений.

Раскрыт категориально-понятийный аппарат, относящийся к понятию «теорема», показаны ее различные виды, общие и частные методы доказательства. Детально описана пропедевтическая работа по обучению учащихся доказательству теорем; показана работа учителя по подготовке к уроку, на котором будет доказываться теорема; рассмотрен вопрос об организации деятельности учащихся по «переоткрытию» формулировки теоремы и поиску способов и методов ее доказательства; описаны различные приемы закрепления теоремы.

Книга предназначена для учителей математики общеобразовательных учреждений, а также для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 5-09-011498-6

Введение

Читатель имеет обыкновение при чтении книги пропускать различного рода предисловия и введения, но вряд ли это целесообразно, ибо он упускает возможность установить с автором первоначальный контакт. Во введении актуализированы те проблемы, которые явно или косвенно связаны с методикой формирования у учащихся умения доказывать теоремы, и тем самым даны общие ориентиры для учителя. Пытливый ум, воображение и педагогический опыт читателя помогут ему сделать эти ориентиры базовыми идеями в совершенствовании процесса обучения математике вообще и в обучении учащихся доказательству теорем в частности.

Автор надеется, что предлагаемая работа в какой-то степени удовлетворит запросы учителей, даст им возможность руководствоваться в своей практике интенсивной методикой.

Почему одни ученики довольно легко справляются с решением задач, доказательством теорем, другие — назубок знают теорию, но не могут ее применять на практике, третьи — проявляют полную беспомощность во всем? И недоумевает учитель: «Бьюсь, бьюсь, стараюсь — и никакого результата». Знакомая ситуация, не правда ли? В чем дело? Неужели только в способностях учеников, слабой базе их знаний или несовершенных учебных программах и учебниках?

Думается, не только в этом. В значительной степени все зависит от используемой учителем технологии обучения. До настоящего времени школьное обучение нацеливалось главным образом на усвоение знаний, на овладение умениями и навыками, а не на развитие учащихся. Это явилось следствием традиционного информационно-объяснительного подхода к построению содержания образования, когда большой удельный вес знаний дается учителем в готовом виде, без опоры на самостоятельную работу учащихся.

Погоня за одними знаниями и информацией — экстенсивный путь построения содержания и способов образования; интенсивный путь может быть осуществлен лишь при использовании принципов деятельностного подхода в образовании.

Суть деятельностного подхода состоит в том, что он ориентирует не только на усвоение знаний, но и на способы этого усвоения, на образцы мышления и деятельности, на развитие познавательных сил и творческого потенциала ребенка. Решающим звеном деятельностного подхода является собственная активная учебно-познавательная деятельность учащихся.

Недостаток традиционной системы обучения состоит в том, что учителя реализуют в основном лишь одну функцию знаний — информативную, оставляя в стороне другую, не менее значимую — развивающую. Эти две функции тесно взаимосвязаны, но они не тождественны. Как отмечает И. С. Якиманская, образованность, т. е. научная информированность, и развитость мышления далеко не одно и то же [143, с. 18].

Реализация развивающей функции обучения требует от учителя не просто излагать знания в определенной системе, а посредством знаний учить школьников мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. Учащихся надо целенаправленно обучать познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом.

С. Л. Рубинштейн отмечал, что процесс накопления знаний и умений следует рассматривать как учение, а процесс приобретения способностей — как развитие [117, с. 221]. Степень развитости ученика измеряется и оценивается его способностью самостоятельно приобретать новые знания и использовать в учебной и практической деятельности уже полученные. Вот почему целью общего среднего образования как базового в единой системе непрерывного образования является воспитание у учащихся активности и учебной самостоятельности. Обучение не может считаться правильно ориентированным и протекать успешно, если у школьников не формируется система умений и навыков учебного труда, культура мышления. Уместно в связи с этим привести слова французского философа М. Монтеня: «Мозг, хорошо устроенный, стоит больше, чем мозг, хорошо наполненный».

Сегодня настала потребность иметь в школе два журнала: один, который хорошо знаком учителю и ученику,— журнал учета успеваемости, и другой — журнал учета овладения учеником общеучебными умениями и навыками (умение работать с учебником, умение выделять главное, анализировать, синтезировать, обобщать, систематизировать, абстрагировать и т. д.).

Такое положение потребует от учителя проведения работы по вооружению школьников учебно-познавательным аппаратом не попутно с формированием предметных знаний, а явно, сделав эту работу компонентом каждого урока.

Сейчас в школе обучение в значительной степени строится по формуле «усвоение = понимание + запоминание», в основу же должна быть положена следующая формула:

«овладение = усвоение + применение знаний на практике»,

которая в полном объеме реализуется в процессе восприятия, осмысления, запоминания, применения, обобщения и систематизации.

В педагогической литературе различают меру и характер обученности. И. Я. Лернер пишет: «Мера обученности обусловлена объемом усвоенного школьником содержания образования; характер обученности определяется видом усвоенного содержания образования» [85, с. 38].

Как уже отмечалось, в настоящее время акцент в учебном процессе сделан на меру обученности. Об этом свидетельствуют и огромное число дисциплин в школе, и чрезмерно перегруженные программы школьных курсов, и используемые учителем технологии обучения, в основном ориентированные на передачу учащимся готовой учебной информации. Логика научного открытия изучаемого материала, процесс получения знаний в таком случае остаются часто скрытыми от учащихся, и они видят их как результат обработки авторами учебника или учителем.

Нельзя сказать, что сформулированные в школьной программе цели обучения математике определены неправильно. Каждая из них сама по себе в отдельности вполне разумна и правомерна. Но недостаток состоит в том, что, взятые вместе, они образуют только некоторый эклектический конгломерат, в котором не ясна внутренняя связь между отдельными целями и способами их достижения. Получается так, что знания накапливаются как-то сами по себе, умения и навыки формируются попутно с накапливаемыми знаниями, а параллельно этому идут процессы развития мышления и способностей учащихся.

Итак, как ни старо, но обучение школьников доказательству теорем упирается во все те же пресловутые «вооружение учащихся умениями и навыками умственного труда», «развитие самостоятельности мышления», «развивающие функции обучения» и т. п. Как же «оживить» эти термины? Ответ на этот вопрос предполагает реализацию в процессе обучения деятельностного подхода.

С позиций всего вышесказанного мы и будем трактовать вопросы, относящиеся к методике обучения учащихся умению доказывать теоремы. Заметим, что успех в обучении учащихся доказательству теорем определяется не применением одного какого-нибудь приема или метода, а системой преподавания в целом.

Структурной единицей учебно-познавательной деятельности является умение доказывать. Ведущая функция этого умения обусловливается тем, что в любом учебном предмете доказательство выступает в качестве метода исследования тех элементов знаний, которые составляют его содержание.

Основными целями обучения школьников доказательству в курсе математики являются:

— обеспечение усвоения учащимися теоретических знаний по курсу математики;

— формирование у учащихся представления о математике как о дедуктивной науке;

— обеспечение осознанности, глубины и устойчивости знаний;

— развитие мыслительной деятельности учащихся.

Ведущей функцией обучения учащихся доказательству должна быть развивающая, а не информационная. Изучение теорем в школе имеет своей целью сообщение школьникам не только некоторых готовых результатов, но и методов, с помощью которых эти результаты получаются. Уместно в связи с этим напомнить слова А. Дистервега: «Плохой учитель преподносит истину, хороший — учит ее находить».

Школьная практика показывает, что в работе учителей преобладает тенденция учить ученика конкретному доказательству тех или иных теорем, но слабо ведется работа по вооружению школьников умениями вообще доказывать. По этому поводу А. К. Артемов пишет, что «многие школьники, вместо обобщенных умений, нередко овладевают лишь частными умениями, относящимися к доказательству отдельных теорем, наблюдается «разучивание» теорем» [15, с. 224].

Доказательство каждой новой теоремы обычно рассматривается как отдельно взятый факт, добавляющий к знаниям учащихся еще один элемент знаний. На усвоение школьниками этого нового факта и направлены все усилия учителя. Следует же особо обращать внимание школьников на приемы, которые используются при доказательстве теорем, на приемы поиска этого доказательства. При таком подходе доказательство каждой новой теоремы будет служить не только объектом усвоения, но и средством для формирования общих приемов доказательства теорем. Разница между способным учеником и слабоуспевающим состоит не в том, что первый больше знает, а именно в том, что он владеет более богатым арсеналом различных приемов получения знаний, знает приемы и способы их использования.

В отличие от А. А. Столяра, который под обучением доказательствам понимает «обучение мыслительным процессам поиска, открытия, построения доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств» [124, с. 145], мы будем под обучением доказательствам понимать как обучение школьников готовым доказательствам (они предложены либо учителем, либо учебником), так и обучение учащихся самостоятельному поиску доказательств.

Исследования, проведенные З. И. Слепкань [119, 120], показали, что проблему обучения доказательствам целесообразно расчленить на несколько последовательно решаемых дидактических задач:

1) изучение готовых доказательств, умение воспроизводить их;

2) самостоятельное построение доказательства по образцу с изученным;

3) поиск и изложение доказательств указанным учителем методом или способом;

4) самостоятельный поиск и изложение учащимися доказательств математических утверждений.

Анализ школьной практики показывает, что знания учащихся, связанные с изучением теорем, умение применять их при решении задач находятся не на должном уровне.

Можно указать три основные причины низкого уровня сформированности у учащихся умения доказывать теоремы:

— связанные с психическими факторами (ослабление психических функций: внимания, памяти, мышления и т. д.);

— вытекающие из недостатков программ, учебников и учебных пособий по математике;

— обусловленные несовершенством организации процесса обучения.

Основная же причина состоит в том, что при обучении доказательству теорем учебно-познавательная деятельность учащихся направляется учителем главным образом на понимание и запоминание, в ущерб ознакомлению школьников с методами и способами рассуждений, лежащих в основе поиска доказательства. Учителем не стимулируется постоянный анализ обучающимися своей деятельности при доказательстве теорем, в результате чего эта деятельность ими не осознается.

При доказательстве теорем учителя чаще всего организуют лишь синтетическую деятельность учащихся, в результате которой они идут по плану доказательства, предложенного учебником. Если бы учебная деятельность школьников при доказательстве теорем была аналитико-синтетической, то была бы обеспечена сознательность в осуществлении плана доказательства.

Учителю следует хорошо знать, что не единым доказательством ценно изучение теорем, или иначе: «значение имеет сама творческая деятельность, а не то, что она сотворила» [80, с. 20].

Анализ школьной практики показывает, что учителя при обучении учащихся доказательству теорем не ставят перед ними цели осознания способа, каким было получено доказательство, а сами в основном показывают готовые доказательства, хотя умение доказывать не находится в прямой зависимости от числа доказанных теорем.

Причины низкого уровня сформированности у учащихся умения доказывать состоят также в увлечении учителем на уроке процедурой оформления доказательства, а не процессом его получения; в недостаточной работе по обеспечению переноса приема доказательства с одних теорем на другие, сходные с ними по содержанию и методам доказательства; в отсутствии работы по формированию у школьников навыков контроля и самоконтроля.

При формировании у учащихся умения доказывать учителями недостаточно учитываются их возрастные и индивидуальные особенности, хотя в педагогической литературе отмечается, что «если подростковый возраст считают возрастом усвоения доказательств, то юношеский возраст — это возраст, когда создаются доказательства. В связи с этим у старшеклассников заметно возрастает критическое отношение к предлагаемым доказательствам и стремление к обоснованию своих собственных доказательств. С этим связано и то, что в мышлении юноши, наряду с категорическими суждениями, большое место занимают суждения гипотетические» [28, с. 55].

Основными направлениями в работе с учащимися по формированию у них умения доказывать могут быть следующие:

1. Показывать учащимся роль и значение доказательства в открытии новых знаний и усвоении учебного материала курса математики.

2. Разъяснять школьникам, в чем состоит сущность доказательства как процесса утверждения или опровержения истинности мыслей.

3. Проводить целенаправленную работу по обучению учащихся пользоваться индуктивным и дедуктивным методами (формировать

умение находить общее в отдельных частных примерах, отличать индуктивные умозаключения от дедуктивных, воспитывать у учащихся критическое отношение к индуктивному заключению).

4. Планомерно формировать у учащихся умения выводить логические следствия из посылок, приучать школьников логически верно оформлять свои рассуждения.

5. Формировать у учащихся познавательные действия, необходимые для доказательства, и учить их применять в нужных ситуациях.

6. Учить школьников обобщать познавательные действия, которые выполняются в ходе доказательства.

Как показали исследования ученых (Э. И. Айвазян, М. М. Бурда, З. И. Слепкань, А. А. Столяр и др.), умения учащихся доказывать теоремы следует рассматривать как определенные умственные действия трех видов: ориентировочные, исполнительные, контрольно-корректировочные.

К *ориентировочным действиям* относятся:

— распознавание понятий, входящих в условие теоремы;

— владение алгоритмами доказательств вспомогательных утверждений;

— система указаний по осуществлению анализа состава доказываемого утверждения;

— система указаний по отысканию планов доказательств;

— система указаний по применению конкретных методов доказательств;

— обучающие алгоритмы построения планов доказательств определенных групп утверждений.

К *исполнительным действиям* относятся:

— действия выведения следствий и выбор следствий, достаточных для доказательства;

— действия подведения геометрических фигур под понятия.

Контрольно-корректировочные действия включают в себя:

— контроль и коррекцию состава условия доказываемого утверждения;

— контроль и коррекцию логических этапов доказательства;

— контроль и коррекцию полученного результата.

Итак, задачи поставлены, намечены основные пути их решения. Перейдем к систематичному анализу поднятой проблемы.

Теорема, ее виды и методы доказательства

§ 1. ПОНЯТИЕ ТЕОРЕМЫ

Структуру отдельных мыслей и способы их сочетаний называют *формами мышления*. С точки зрения формальной логики мышление характеризуется тремя основными формами: *понятиями, суждениями, умозаключениями*.

Примеры понятий:

1. Треугольник — это фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой.

2. Арифметическим квадратным корнем из числа Q называется неотрицательное число, квадрат которого равен Q.

Примеры суждений:

1. Каждая прямая разделяет плоскость на две полуплоскости; любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от этой прямой, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от нее.

2. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Примеры умозаключений:

1. Если $a>b$, $b>c$, то $a>c$.

2. Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Следует заметить, что на вопрос «Чем являются те или иные утверждения: теоремами, аксиомами или определениями?» нельзя ответить однозначно вне контекста какого-нибудь курса математики. Так, например, утверждение «Через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой» в одном курсе геометрии может быть аксиомой, в другом — теоремой. Возможен, например, вариант, когда в каком-либо курсе геометрии за аксиому принято утверждение, называемое в нашем школьном курсе геометрии теоремой Пифагора.

Перейдем к рассмотрению понятия теоремы, ее структуры и видов теорем.

Математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства, называют теоремой.

Название «теорема» происходит от греческого слова τεορεμα — представление, зрелище (так как в древности часто теоремы доказывались публично, на площадях, и они носили характер спора, диспута).

В школьном курсе математики для словесной формулировки теоремы используются три формы суждения:

1) *Категорическая.*

Пример 1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Пример 2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной: $(cf(x))'=cf'(x)$.

2) *Условная.*

Пример 1. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.

Пример 2. Если $F'(x)=0$ на некотором промежутке, то на этом промежутке $F(x)=C$, где C — постоянная.

3) *Разделительная.*

Пример 1. Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

Пример 2. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Теоремы категорической и разделительной форм можно переформулировать, используя словосочетание «если... то...», т. е. обратить ее формулировку в условную. Пусть, например, дана теорема: «В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны». В условной форме формулировка этой теоремы будет выглядеть так: «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны».

Заметим, что разбор структуры теоремы более доступен для учащихся в том случае, когда она сформулирована в условной форме.

Условная форма теоремы может быть эффективно использована и для того, чтобы дать ответ на вопрос: «О свойстве или о признаке идет речь в теореме?» На этот вопрос легко ответить, если теорему сформулировать в условной форме. Если окажется, что рассматриваемое понятие находится в условии теоремы, то теорема выражает свойство этого понятия, если же понятие находится в заключении теоремы, то она выражает признак. Покажем это на примерах.

1. Теорема Пифагора: «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

Переформулировав теорему из категоричной формы в условную, будем иметь: «Если треугольник прямоугольный, то квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов». Поскольку понятие «прямоугольный треугольник» находится в условии теоремы, то она выражает собой свойство этого понятия.

2. Теорема: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Сформулируем теорему в условной форме. Будем иметь: «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны». Поскольку понятие «равнобедренный треугольник» находится в условии, то эта теорема выражает свойство объекта.

3. Теорема: «Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны».

Понятие «параллельные прямые» находится в заключении теоремы, а значит, это теорема-признак.

4. Теорема: «Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны».

Это теорема-признак, ибо понятие «подобные треугольники» находится в заключении теоремы.

Рассмотрим в связи с этим еще один пример.

Теорема: «Если трапеция равнобокая, то:

1) углы при одном и том же основании равны;

2) высоты, проведенные из концов одного основания на другое основание, равны;

3) перпендикуляр, опущенный из точки пересечения продолжения боковых сторон на основания, делит основания трапеции пополам».

Сформулируем предложения, обратные данным свойствам:

1°) если в трапеции углы при одном и том же основании равны, то она является равнобокой;

2°) если в трапеции высоты равны, то она является равнобокой;

3°) если в трапеции перпендикуляр, опущенный из точки пересечения продолжений боковых сторон на основания, делит их пополам, то она является равнобокой.

Если сопоставить умозаключения 1—3 и 1°—3°, то можно заметить, что по свойствам понятия можно судить о его признаках. Для этого поступают следующим образом. Чтобы из свойства понятия получить признак этого понятия, надо построить предложение, обратное свойству, и проверить его истинность. Если полученное предложение ложно, то оно не может являться признаком. Так, в нашем примере умозаключения 1° и 3° являются признаками равнобедренной трапеции, а умозаключение 2° признаком не является.

В школьном курсе математики формулируются и доказываются теоремы, имеющие различный вид: в одних теоремах из одного условия вытекает одно заключение, в других — из одного условия вытекает несколько заключений, в третьих — из нескольких условий вытекает одно заключение и т. д.

Но в любом случае теорема состоит из трех частей:

1) *разъяснительная часть*, где описывается множество M объектов, о которых идет речь в этой теореме;

2) *условие теоремы*, т. е. некоторый предикат $A(x)$, заданный на множестве M;

3) *заключение теоремы* — некоторый предикат $B(x)$, заданный на том же множестве M.

В символах математической логики теорема может быть записана следующим образом: $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$, где

$\forall x \in M$ — разъяснительная часть теоремы;

$A(x)$ — условие теоремы; $B(x)$ — заключение теоремы.

Часто в литературе используется такая терминология:

тезис — доказываемое утверждение;

аргументы (основания доказательства) — используемые в доказательстве уже известные утверждения, из которых обязательно следует истинность доказываемого тезиса;

демонстрация — последовательность расположения аргументов и выводов, образующих цепь умозаключений.

При доказательстве тезис должен удовлетворять следующим требованиям: быть ясным и точно определенным; оставаться тождественным, т. е. одним и тем же, на протяжении всего доказательства; не должен содержать в себе логического противоречия; не должен находиться в логическом противоречии с суждениями по данному вопросу, высказанными ранее; определять собой ход доказательства так, чтобы то, что в результате будет доказано, было бы именно тем, что требовалось доказать.

Требования к аргументам доказательства таковы: они должны быть истинными предложениями данной теории; быть достаточным основанием для доказываемого предложения; быть предложением, истинность которого доказана самостоятельно, независимо от доказываемого предложения; из совокупности суждений, составляющих аргументы, обязательно должна следовать истинность тезисов.

Разберем структуру на примере теоремы из курса геометрии 8 класса [30]: «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы».

Данную теорему после выбора обозначений можно записать в такой форме: $(\forall \Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1)\ (\angle A = \angle A_1) \Rightarrow \left(\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}\right)$.

Разъяснительная часть теоремы выделяется из условия и заключения теоремы путем установления природы объектов и их множеств, на которых рассматриваются условие и заключение, и в данном случае она состоит в том, что рассматриваются любые пары треугольников.

$\angle A = \angle A_1$ — условие теоремы; $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ — заключение теоремы.

Абсолютное большинство теорем ($\approx 60\%$) в школьном курсе геометрии в символах математической логики может быть записано следующим образом: $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$.

С другими формализованными структурами теорем читатель может ознакомиться в работе В. Г. Болтянского [21]. Разговор о различных видах теорем читатель найдет на страницах методической литературы [21, 94, 95, 96]. Здесь же мы лишь коротко остановимся на этом вопросе.

Предикаты $A(x)$ и $B(x)$, входящие в теорему, могут иметь сложную структуру, и отсюда возникают теоремы различной логической конструкции. Приведем пример: «В ромбе диагонали перпендикулярны друг другу и делят углы при вершинах ромба пополам». Эта теорема символически может быть записана так: $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B_1(x) \wedge B_2(x))$, где M — множество четырехугольников; $A(x)$ — предикат «четырехугольник x является ромбом»; $B_1(x)$ — предикат «в четырехугольнике x диагонали перпендикулярны»; $B_2(x)$ — предикат «в четырехугольнике x диагонали делят углы при вершинах пополам».

Помимо теорем вида $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$, в математике встречаются и теоремы другого вида.

Пример 1. $(\forall a, b)(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$.

Знак $\forall$ показывает, что это соотношение является тождеством. Эта теорема имеет следующую форму: $(\forall a, b)\ A(a, b)$ ($A(a, b)$ — некоторый предикат, записанный в виде равенства).

Пример 2. Теорема существования может быть записана в такой форме: $(\forall x \in M)\ (\exists\ y)\ (A(x, y))$.

Примерами теорем существования могут служить следующие теоремы из школьного курса геометрии 7—11 классов:

а) через любую точку проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна;

б) около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну;

в) через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

Можно еще указать такие формализованные структуры теорем:

1) $(\forall x \in M)\ (A_1(x) \wedge A_2(x) \Rightarrow B(x))$;
2) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B_1(x) \wedge B_2(x))$;
3) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B_1(x) \vee B_2(x))$;
4) $(\forall x \in M)\ (A_1(x) \vee A_2(x) \Rightarrow B(x))$;
5) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow (C(x) \Rightarrow D(x))$;
6) $(\forall x \in M)\ ((C(x) \Rightarrow D(x)) \Rightarrow B(x))$;
7) $(\forall x \in M)\ (\exists\ y A(x, y) \Rightarrow B(x, y))$;
8) $(\forall x \in M)\ (\exists\, ! y A(x, y) \Rightarrow B(x, y))$ — теорема существования и единственности.

С любой теоремой обычно связаны еще три теоремы. Приведем все четыре вида теорем:

1) $(\forall x \in M)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$ — прямая теорема;
2) $(\forall x \in M)\ (B(x) \Rightarrow A(x))$ — обратная теорема;
3) $(\forall x \in M)\ (\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)})$ — противоположная теорема;
4) $(\forall x \in M)\ (\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)})$ — теорема, обратная противоположной (контрапозитивная).

Рассмотрим все эти виды теорем на примерах.

Пример 1.

1) Если четырехугольник — параллелограмм, то диагонали его, пересекаясь, делятся пополам. (Истинно.)

2) Если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм. (Истинно.)

3) Если четырехугольник не параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, не делятся пополам. (Истинно.)

4) Если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, не делятся пополам, то такой четырехугольник не параллелограмм. (Истинно.)

Пример 2.

1) Если углы вертикальные, то они равны. (Истинно.)

2) Если углы равны, то они вертикальные. (Ложно.)

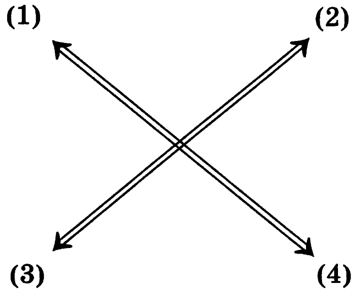


Рис. 1

3) Если углы не вертикальные, то они не равны. (Ложно.)

4) Если углы не равны, то они не вертикальные. (Истинно.)

Между прямой, обратной, противоположной и контрапозитивной теоремами существует тесная связь, которую символически можно выразить так, как показано на рисунке 1.

Прямая и обратная противоположной теоремы эквивалентны, т. е. они одновременно истинны или ложны.

Обратная и противоположная теоремы эквивалентны, т. е. они одновременно истинны или ложны.

Такая связь между теоремами показывает нецелесообразность изучения всех четырех теорем; достаточно установить истинность или ложность какой-либо одной логически неравносильной пары теорем, так как истинность или ложность одной пары влечет за собой истинность или ложность другой пары теорем. В связи с этим в любом курсе математики встречаются лишь прямая и обратная теоремы.

Обращаем внимание читателя на тот факт, что если прямая и обратная теоремы верны, то можно записать их в виде одной, употребляя словосочетание «тогда и только тогда» или «в том и только в том случае».

Приведем примеры.

Прямая теорема: «Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны». (Теорема верна.)

Обратная теорема: «Если прямые параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны». (Теорема верна.)

Эти две теоремы можно сформулировать в одной из следующих форм:

а) Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда накрест лежащие углы равны.

б) Накрест лежащие углы равны тогда и только тогда, когда прямые параллельны.

в) Две прямые параллельны в том и только в том случае, если накрест лежащие углы равны.

г) Накрест лежащие углы равны в том и только в том случае, если прямые параллельны.

В качестве примера может служить теорема Пифагора, которая в некоторых курсах геометрии формулируется так: «Сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный». В этой формулировке содержится, по существу, две теоремы:

а) Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух его катетов равна квадрату гипотенузы.

б) Если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный.

Заметим, что если условие прямой теоремы сложное (состоит из нескольких частных условий), то можно сформулировать для данной теоремы несколько обратных. В общем виде это выглядит так. Если прямая теорема имеет, например, вид: «Если A, B и C, то D», то обратными ей являются такие теоремы:

— если D, то A, B и C;
— если A и D, то B и C;
— если B и D, то A и C;
— если D, B и C, то A;
— если A, D и C, то B и т. д.

Приведем пример, рассмотрев такую прямую теорему: «Если треугольник ABC равнобедренный и BD — его медиана, то она является и высотой».

Обратными этой теореме будут, например, такие теоремы:

— если треугольник ABC равнобедренный и BD его высота, то она является и медианой;

— если в треугольнике ABC отрезок BD является высотой и медианой, то этот треугольник равнобедренный.

§ 2. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Как мы уже отмечали выше, структура доказательства как логическая конструкция состоит из тезиса, аргументов и демонстрации.

В демонстрации отражается характер логических связей между тезисом и аргументами. В зависимости от вида демонстрации в методической литературе часто употребляются термины «способ доказательства» и «метод доказательства». Покажем, в чем состоит их отличие.

Если доказательство утверждения отличается от другого доказательства того же самого утверждения не логической основой, а последовательностью умозаключений, то будем говорить, что *утверждение доказывается двумя различными способами*. Если же одно доказательство отличается от другого логической основой, то будем говорить о *различных методах доказательства*.

Покажем отличие метода от способа доказательства (или решения) на задачах, приведенных ниже.

Задача 1 ([100]). На рисунке 2 $KM \perp LN$, $\angle POM + \angle LOR = 75^\circ$ и $\angle KOR = 58^\circ$. Вычислить $\angle POM$ и $\angle LOP$.

Дано: $KM \perp LN$, $\angle POM + \angle LOR = 75^\circ$, $\angle KOR = 58^\circ$.

Найти: $\angle POM$ и $\angle LOP$.

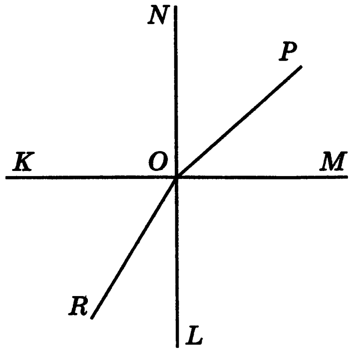


Рис. 2

Решение

Способ 1

1) $\angle ROL = 90^\circ - \angle KOR = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$.

2) $\angle POM = 75^\circ - \angle ROL = 75^\circ - 32^\circ = 43^\circ$.

3) $\angle POL = \angle LOM + \angle MOP = 90^\circ + 43^\circ = 133^\circ$.

Способ 2

1) $\angle ROL = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$.

2) $\angle POM = 75^\circ - 32^\circ = 43^\circ$.

3) $\angle NOP = 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$.

4) $\angle POL = 180^\circ - \angle NOP = 180^\circ - 43^\circ = 133^\circ$.

Способ 3

1) $\angle NOP = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 58^\circ - 75^\circ = 47^\circ$.

2) $\angle POL = 180^\circ - \angle NOP = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$.

3) $\angle POM = 90^\circ - \angle NOP = 90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$.

Как мы видим, в этих способах решения отличными являются лишь последовательности умозаключений.

Задача 2. Дан квадрат $ABCD$ (рис. 3). Вершина квадрата D соединена с точками M и P, которые соответственно являются серединами сторон AB и BC. Точка M соединена с точкой N, являющейся серединой стороны DC. Докажите, что $S_{DMK} = S_{NKPC}$.

Способ 1

Из чертежа имеем $S_{DMN} = S_{DPC}$. Отнимем от обеих частей равенства S_{DKN}. Получим $S_{DMN} - S_{DKN} = S_{DPC} - S_{DKN}$, откуда имеем $S_{DMK} = S_{NKPC}$.

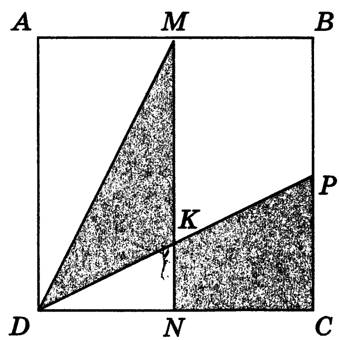


Рис. 3

Способ 2

Из чертежа имеем

$$S_{KPCN} = S_{DMBC} - S_{DMN} - S_{KMBP}, \quad (1)$$

$$S_{DMK} = S_{ABPD} - S_{AMD} - S_{KMBP}. \quad (2)$$

Вычтем из равенства (1) равенство (2). Получим

$$S_{KPCN} - S_{DMK} = S_{DMBC} - S_{DMN} - S_{KMBP} - S_{ABPD} + S_{AMD} + S_{KMBP}.$$

Учитывая, что $S_{DMBC} = S_{ABPD}$, последнее равенство будет иметь вид: $S_{KPCN}-S_{DMK}=S_{AMD}-S_{DMN}$. Прямоугольник $AMND$ разделен диагональю DM на два равных треугольника: $\Delta ADM=\Delta DMN$, тогда $S_{AMD}=S_{DMN}$. Учитывая это, получим $S_{KPDN}-S_{DMK}=0$, откуда окончательно имеем $S_{KPCN}=S_{DMK}$.

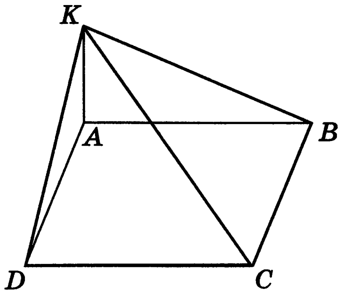


Рис. 4

Задача 3. К плоскости прямоугольника $ABCD$ через точку A проведен перпендикуляр, на котором взята точка K, соединенная с точками B, C и D (рис. 4). Найти AK, если $KB=6$ м, $KC=7$ м, $KD=5$ м.

Решение

Дано: $ABCD$ — прямоугольник; $AK\perp(ABC)$

$KB=6$ м,

$KC=7$ м,

$KD=5$ м.

Найти: AK.

Метод 1

1) Рассмотрим прямоугольный треугольник KDC ($\angle KDC=90°$ по теореме о трех перпендикулярах). По теореме Пифагора имеем

$$DC=\sqrt{49-25}=\sqrt{24}\ (\text{м}).$$

2) По свойству прямоугольника имеем $AB=DC=\sqrt{24}$ (м).

3) Из прямоугольного треугольника ABK имеем

$$AK=\sqrt{36-24}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ (\text{м}).$$

Метод 2

Введем обозначения: $AB=x$, $AC=z$, $AD=y$.

1) Из прямоугольного треугольника AKB $AK^2=36-x^2$.

2) Из прямоугольного треугольника KAC $AK^2=49-z^2$.

3) Из прямоугольного треугольника KAD $AK^2=25-y^2$.

4) Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}AK^2=36-x^2,\\ AK^2=49-z^2,\\ AK^2=25-y^2.\end{cases}$$

5) Учитывая, что $z^2=x^2+y^2$, система примет вид:

$$\begin{cases}AK^2=36-x^2,\\ AK^2=49-x^2-y^2,\\ AK^2=25-y^2.\end{cases}$$

Решив систему (удобно из второго уравнения системы вычесть первое и третье уравнения), получим $-AK^2=-12$, откуда $AK=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (м).

Мы видим, что в основе этих двух решений лежат совершенно разные логические основы, а значит, речь должна идти о двух разных методах решения: геометрическом и алгебраическом.

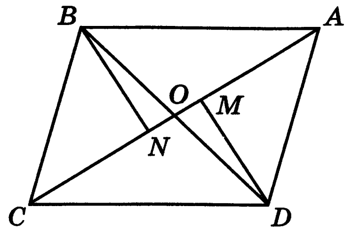


Рис. 5

Задача 4. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике каждая из его диагоналей делит его площадь пополам, то он является параллелограммом.

Метод 1

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 5), в котором AC и BD — диагонали, проведем $BN \perp AC$ и $DM \perp AC$.

По условию $S_{ABC} = S_{ADC}$. Учитывая, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN$, а $S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DM$, имеем $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DM$, откуда следует, что $BN = DM$. $\angle MOD = \angle NOB$ как вертикальные, следовательно, прямоугольные треугольники BON и MOD равны по катету и острому углу, откуда имеем $BO = OD$.

Аналогично доказывается равенство $OC = OA$. Следовательно, мы получили, что в выпуклом четырехугольнике его диагонали в точке пересечения делятся пополам, а это и означает, что четырехугольник — параллелограмм.

Метод 2

Обозначим площадь четырехугольника буквой S. Тогда по условию задачи $S_{BCD} = \frac{S}{2}$ и $S_{ACD} = \frac{S}{2}$, откуда $S_{BCD} = S_{ACD}$. И так как площади треугольников BCD и ACD равны и основанием у них является один и тот же отрезок CD, то и высоты этих треугольников будут равными. То есть мы доказали, что все точки отрезка AB отстоят на одинаковом расстоянии от отрезка CD, а значит, $AB \parallel CD$. Аналогично доказывается параллельность отрезков AD и BC. Из того что в четырехугольнике противоположные стороны оказались попарно параллельны, мы заключаем, что он является параллелограммом.

Метод 3

Построим к предложенной задаче новый чертеж (рис. 6).

Проведем через точки B и D прямые m_1 и m_3, параллельные AC, через точки A и C — прямые n_1 и n_3, параллельные BD.

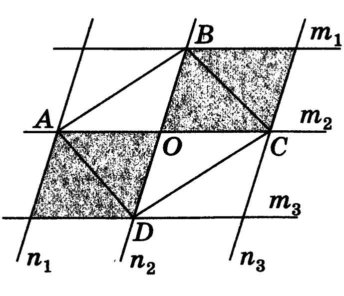


Рис. 6

Так как по условию задачи $S_{ABC}=S_{ADC}$ и AC — общее основание треугольников ABC и ADC, то высоты этих треугольников равны и прямые m_1 и m_3 находятся на равных расстояниях от прямой m_2. Аналогично рассуждение о прямых n_1 и n_3.

При центральной симметрии с центром O прямая m_1 переходит в прямую m_3, прямая n_1 переходит в прямую n_3, а прямые m_2 и n_2 переходят сами в себя как прямые, проходящие через центр симметрии. Тогда эта центральная симметрия переведет точку B (точка пересечения прямых m_1 и n_2) в точку D (точка пересечения прямых m_3 и n_2), а точка A (точка пересечения прямых m_2 и n_1) в точку C (точка пересечения прямых m_2 и n_3). В силу свойства центральной симметрии $AB=CD$ и $BC=DA$, а значит, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство в математике и других дедуктивных науках есть цепочка правильных умозаключений, идущих от исходных для данной теории посылок, признанных истинными, к доказываемому утверждению.

Основным инструментом доказательства теорем являются умозаключения. Умозаключение — рассуждение, в ходе которого из одного или нескольких суждений (называемых посылками умозаключения) выводится новое суждение (называемое заключением или следствием), логически вытекающее из посылок.

Формой дедуктивных умозаключений, используемых при доказательстве теоремы, является *силлогизм*. В силлогизме содержится три понятия, а состоит он из двух посылок и вывода. Его структуру можно представить в таком виде:

Все M есть P — большая посылка (БП);
K есть M — меньшая посылка (МП);
K есть P — вывод (В).

Приведем пример силлогизма: «Все ромбы (M) есть параллелограммы (P). Квадрат (K) есть ромб (M). Следовательно, квадрат (K) есть параллелограмм (P)».

Цепочка последовательно связанных силлогизмов, устанавливающая истинность теоремы, называется доказательством теоремы. В качестве примера такой цепочки силлогизмов рассмотрим доказательство теоремы из курса 8 класса: «Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды» [30].

Дано: AB, CD — хорды, E — точка пересечения хорд.

Доказать: $AE\cdot BE=CE\cdot DE$ (рис. 7).

Доказательство

Силлогизм 1

БП: Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны.

МП: Вписанные углы ($\angle 1$ и $\angle 2$) опираются на одну и ту же дугу BMD.

В: $\angle 1=\angle 2$.

Силлогизм 2

БП: Вертикальные углы равны.

МП: $\angle 3$ и $\angle 4$ — вертикальные.

В: $\angle 3 = \angle 4$.

Силлогизм 3

БП: Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

МП: Два угла ($\angle 1$ и $\angle 3$) треугольника AED соответственно равны двум углам ($\angle 2$ и $\angle 4$) треугольника CEB.

В: $\Delta AED \backsim \Delta CEB$.

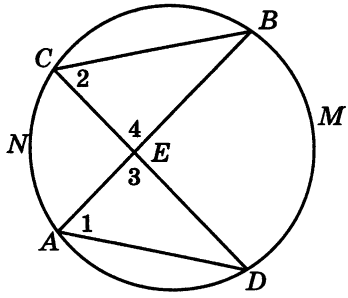


Рис. 7

Силлогизм 4

БП: В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны.

МП: Стороны AE, DE и CE, BE — сходственные стороны подобных треугольников AED и CEB.

В: $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$.

Силлогизм 5

БП: Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции.

МП: AE и BE — крайние члены, а DE и CE — средние члены одной и той же пропорции.

В: $AE \cdot BE = DE \cdot CE$.

Проведение любого доказательства опирается на три блока знаний и умений: содержательный, структурный, логический.

В *содержательный блок* входят элементы, связанные с ранее изученными математическими понятиями и фактами, которые использованы или в формулировке утверждения, или в качестве аргументов при проведении рассуждений. Эти элементы существенно зависят от логической структуры курса, от его аксиоматики, от методических особенностей изложения и т. д., а поэтому для одной и той же теоремы в различных учебниках содержательный блок может оказаться различным.

В *структурный блок* входят знания и умения, связанные со структурой утверждения и возможностями ее преобразования. В этот блок входят умения выделять условие и заключение теоремы, преобразовывать логическую форму теоремы с целью получения более простых подтеорем и т. д.

Логический блок содержит знания и умения, связанные с правилами логических рассуждений.

Различают частные и общие методы доказательства теорем. Рассмотрим каждую группу методов в отдельности.

2.1. Частные методы доказательства

К частным методам доказательства относят метод геометрических преобразований, векторный, координатный, алгебраический методы и т. д. Рассмотрим примеры некоторых из них (попутно будут затронуты не только задачи на доказательство, но и задачи другого характера).

Векторный метод

Задача 1. Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных ребер правильного тетраэдра, есть общий перпендикуляр этих ребер.

Решение

Пусть ребро тетраэдра равно a. Введем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\overrightarrow{MN}$ (рис. 8). Пользуясь определением разности векторов, запишем:

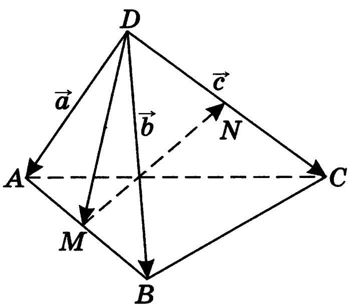


Рис. 8

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=$$
$$=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right).$$

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{c}\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{c}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(a^2-a^2\cdot\cos 60^\circ-a^2\cdot\cos 60^\circ)=0.$$

Следовательно, $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{MN}=0$. А это условие перпендикулярности векторов, т. е. $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{MN}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$.

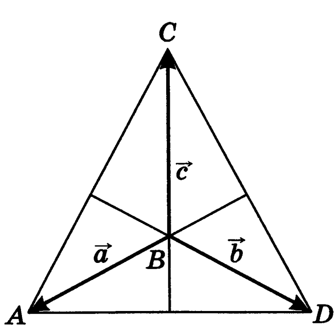


Рис. 9

Задача 2. Доказать, что если точки A, B, C, D таковы, что $AB\perp CD$, $AC\perp BD$, то $AD\perp BC$.

Доказательство

Введем обозначения (рис. 9): $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Тогда $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{c}$.

Так как по условию $BA\perp CD$ и $AC\perp BD$, то $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ и $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, т. е. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$ и $\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=0$.

Раскрывая скобки и складывая почленно два полученных равенства, получаем $\vec{b}\vec{c}-\vec{a}\vec{c}=0$. Тогда $\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=0$, т. е. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, а это на векторном языке означает, что $AD\perp BC$.

Метод доказательства, основанный на перемещении плоскости

Задача 1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC вне его построен квадрат $ABMN$ (рис. 10) с центром в точке O. Доказать, что луч CO — биссектриса угла ACB.

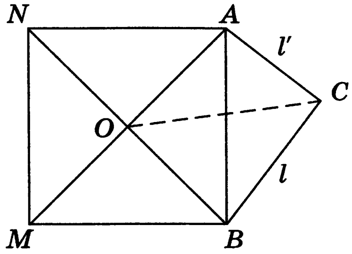


Рис. 10

Доказательство

Рассмотрим поворот вокруг точки O на 90°. Будем иметь $R_O^{90°}(B)=A$. Обозначим $BC=l$ и найдем $R_O^{90°}(l)=l'$. $B\in l$, а отсюда следует, что $A\in l'$. Кроме того, $\angle ll'=90°$.

Прямая AC проходит через точку A и перпендикулярна прямой BC. Следовательно, $l'=AC$. При повороте расстояния сохраняются, поэтому $\rho(O,\ BC)=\rho(O,\ AC)$. Отсюда заключаем, что точка O принадлежит биссектрисе угла ACB.

Задача 2. Доказать, что если пятиугольник имеет две оси симметрии, то он правильный.

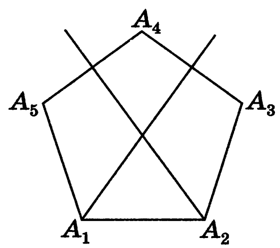


Рис. 11

Доказательство

Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — пятиугольник (рис. 11) имеет две оси симметрии. Каждая из них проходит через вершину и середину противоположной стороны. Если одна ось проходит через вершину A_1 и середину стороны A_3A_4, то имеем $A_1A_2=A_1A_5$, $A_2A_3=A_5A_4$, $A_2=A_5$, $A_3=A_4$.

Если другая ось проходит через вершину A_2 и середину стороны A_4A_5, то имеем $A_1A_2=A_2A_3$, $A_1A_5=A_3A_4$, $A_1=A_3$, $A_5=A_4$.

Сопоставляя полученные соотношения, получаем, что пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ правильный.

Задача 3. Дан квадрат $ABCD$ (рис. 12, *a*). На стороне AB и на диагонали AC взяты соответственно точки P и Q так, что $AP:PB=3:2$, $AQ:QC=4:1$. Доказать, что величины углов треугольника PQD равны 45°, 45°, 90°.

Доказательство

Разделим квадрат $ABCD$ на 25 маленьких квадратиков. В силу условия задачи точки P и Q окажутся вершинами не-

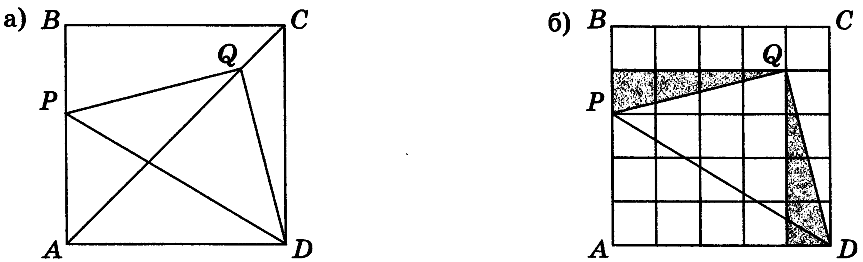


Рис. 12

которых из этих квадратиков (рис. 12, *б*). Так как прямоугольные треугольники, заштрихованные на рисунке, равны и один из них получается из другого поворотом вокруг точки Q на 90°, то мы имеем $PQ = QD$, $\angle PQD = 90°$. Видим, что $\triangle PQD$ является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой PD, следовательно, $\angle PQD = 90°$, $\angle QPD = \angle PDQ = 45°$.

Метод доказательства, основанный на композиции перемещений плоскости

Задача 1. На сторонах AB и BC треугольника ABC (рис. 13) вне его построены квадраты. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются центры построенных квадратов и середина отрезка AC, прямоугольный и равнобедренный.

Доказательство

Пусть O_1 — центр квадрата, построенного на стороне AB, O_2 — центр квадрата, построенного на стороне BC.

Тогда $R_{O_1}^{90°}(A) = B$, $R_{O_2}^{90°}(B) = C$.

Следовательно, $R_{O_2}^{90°}\left(R_{O_1}^{90°}(A)\right) = C$. Но $R_{O_2}^{90°}R_{O_1}^{90°}$ — поворот на 180°, т. е. центральная симметрия относительно точки O, где O — середина отрезка AC. Значит, $\angle OO_1O_2 = \angle O_1O_2O = 45°$,

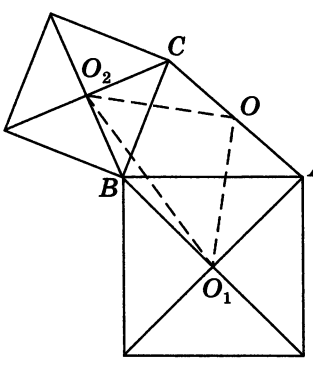


Рис. 13

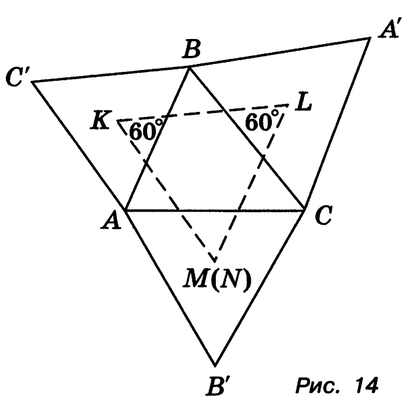


Рис. 14

$\angle O_2OO_1=90°$. Треугольник OO_1O_2 прямоугольный и равнобедренный.

Задача 2. На сторонах произвольного треугольника ABC (рис. 14) вне его построены равносторонние треугольники ABC', BCA', ACB'. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются центры построенных треугольников, равносторонний.

Доказательство

Центры равносторонних треугольников ABC', BCA', ACB' обозначим соответственно K, L, M. Повороты $R_K^{120°}$ и $R_L^{120°}$ представим в виде композиции двух осевых симметрий: $R_K^{120°}=dd_1$, $R_L^{120°}=d_2d$, где $d=KL$, $d_1=KN$, $d_2=LM$. Тогда $R_L^{120°}\cdot R_K^{120°}=(d_2d)\cdot(dd_1)=d_2d_1$. С другой стороны, $R_L^{120°}\cdot R_K^{120°}=R_N^{240°}$, где $N=d_1\cap d_2$. Очевидно, что треугольник KLN равносторонний. Покажем, что $N=M$. Обе части равенства $R_L^{120°}\cdot R_K^{120°}=R_N^{240°}$ умножим слева на $R_M^{120°}$. Получим $R_M^{120°}\cdot R_L^{120°}\cdot R_K^{120°}=R_M^{120°}\cdot R_N^{240°}$, $R_M^{120°}\cdot R_L^{120°}\cdot R_K^{120°}(A)=R_M^{120°}\cdot R_L^{120°}(B)=R_M^{120°}(C)$. Значит, $R_M^{120°}\cdot R_N^{240°}$ — тождественное преобразование. Найдем образ точки N. Очевидно, что, с одной стороны, $R_M^{120°}\cdot R_N^{120°}(N)=N$. С другой стороны, $R_M^{120°}\cdot R_N^{120°}(N)=R_M^{120°}(N)=N$. В повороте $R_M^{120°}$ центр поворота — единственная неподвижная точка, поэтому $N=M$. Таким образом, треугольник KLM равносторонний.

Геометрический метод доказательства

Задача 1. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного треугольника, до стороны этого треугольника есть величина постоянная для данного треугольника.

Доказательство

Пусть внутри правильного треугольника ABC (рис. 15) взята произвольно точка M и расстояния от точки M до сторон треугольника AB, AC, BC соответственно равны h_1, h_2, h_3.

Соединив точку M с вершинами треугольника ABC, разобьем его на три треугольника. Тогда площадь ΔABC будет равна сумме площадей этих треугольников, т. е. $S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}+S_{BCM}$.

Обозначим длину стороны треугольника через a и длину его высоты через h. Получим

$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2+\frac{1}{2}ah_3.$$

Отсюда $h_1+h_2+h_3=h$, т. е. сумма расстояний от точки M до сторон

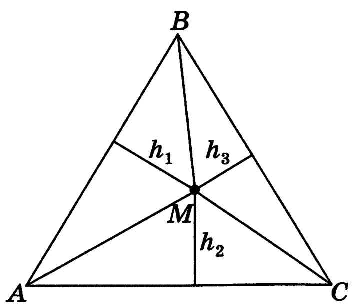


Рис. 15

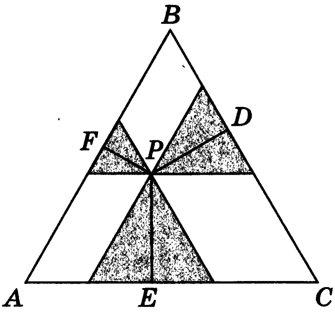


Рис. 16

равностороннего треугольника ABC есть величина постоянная, равная высоте треугольника. Покажем, как можно решить эту же задачу иначе.

Пусть внутри равностороннего треугольника ABC взята произвольная точка P (рис. 16), из которой опущены перпендикуляры PD, PE и PF соответственно на BC, CA и AB.

Проведем через точку P три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC. Три образовавшихся треугольника (они на рисунке закрашены) также равносторонние, и сумма длин их сторон равна сумме длин сторон треугольника ABC. Значит, и сумма длин их высот равна длине высоты треугольника ABC, которая есть константа.

Заметим, что эта задача может быть обобщена на случай любого выпуклого правильного многоугольника.

Пусть сторона многоугольника равна a, расстояния от точки M до сторон многоугольника равны d_1, d_2, ..., d_n. Соединив точку M с вершинами многоугольника, разобьем его на n треугольников. Сумма их площадей равна площади многоугольника, которая при заданном многоугольнике есть величина постоянная: $\frac{1}{2}ad_1+\frac{1}{2}ad_2+...+\frac{1}{2}ad_n=S$.

Преобразовав равенство, получим $d_1+d_2+...+d_n=\frac{2S}{a}=\text{const}$.

Задача 2. Стороны a, b, c треугольника ABC (рис. 17) лежат соответственно против углов A, B, C. Доказать, что биссектриса угла A вычисляется по формуле $l=\dfrac{2bc\cos\frac{\angle A}{2}}{b+c}$.

Доказательство

Биссектриса AD разбивает треугольник ABC на два треугольника: ADB и ADC. Тогда $S_{ABC}=S_{ADB}+S_{ADC}$. Это означает, что $\frac{1}{2}bc\sin\angle A=\frac{1}{2}cl\sin\frac{\angle A}{2}+$ $+\frac{1}{2}bl\sin\frac{\angle A}{2}$. Учитывая также, что $\sin\angle A=2\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}$, получаем

$$bc\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{1}{2}cl\sin\frac{\angle A}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}bl\sin\frac{\angle A}{2}.$$

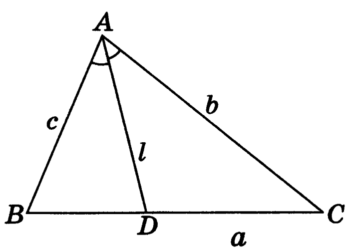


Рис. 17

Отсюда $bc\cos\frac{\angle A}{2}=\frac{1}{2}(c+b)l$, тогда $l=\dfrac{2bc\cos\frac{\angle A}{2}}{b+c}$.

Координатный метод доказательства

Задача 1. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе вне треугольника построен квадрат. Доказать, что расстояние от вершины прямого угла до центра этого квадрата равно $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Доказательство

Введем систему координат. Выберем вершину прямого угла в качестве начала координат, а оси направим вдоль катетов треугольника (рис. 18). Центр квадрата $AKTB$ — середина его диагонали AT. Точка A имеет координаты $A(0;\ b)$. Чтобы найти координаты точки T, проведем $TD\perp Cx$ и сравним прямоугольные треугольники BDT и BCA. Они равны по гипотенузе и острому углу ($AB=BT$ как стороны квадрата, а $\angle TBD=180°-\beta-90°=$ $=90°-\beta=\angle BAC$). Тогда $BD=AC=b$, $TD=BC=a$. Значит, координаты точки T будут $T(a+b;\ a)$.

M — середина отрезка AT, поэтому

$$x_M=\frac{x_A+x_T}{2}=\frac{a+b}{2};$$

$$y_M=\frac{y_A+y_T}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Начало координат имеет координаты $C(0;\ 0)$, тогда

$$CM=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}}=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

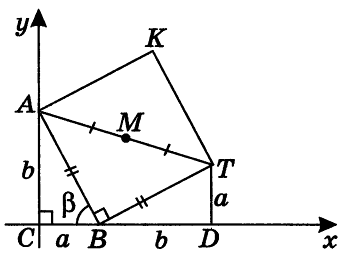


Рис. 18

Задача 2. Доказать, что один из внутренних углов треугольника ABC тупой, если $A(3;\ 5;\ 3)$, $B(2;\ -1;\ 4)$ и $C(0;\ -2;\ 1)$.

Решение

Найдем длины сторон треугольника по формуле расстояния между двумя точками: $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

$$BC=\sqrt{(0-2)^2+(-2+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{14};$$

$$AC=\sqrt{(0-3)^2+(-2-5)^2+(1-3)^2}=\sqrt{62};$$

$$AB=\sqrt{(2-3)^2+(-1-5)^2+(4-3)^2}=\sqrt{38}.$$

Рассмотрим соотношения между числами, выражающими квадраты сторон данного треугольника: $38+14=52$, $62>52$, т. е. $AC^2>AB^2+BC^2$.

Следовательно, сторона AC лежит против тупого угла B.

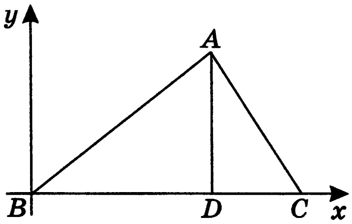


Рис. 19

Задача 3. Доказать равенство Стюарта: если дан треугольник ABC и точка D, лежащая на его основании между точками B и C, то справедливо равенство $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$.

Доказательство

Прямоугольную систему координат возьмем так, как показано на рисунке 19. Введем обозначения для координат точек A, C, D: $A(x_1;\ y_1)$, $C(x_2;\ 0)$, $D(x_3;\ 0)$.

При данном выборе системы координат $BD = x_3$, $BC = x_2$. Вычислим все величины, которые входят в доказываемое равенство: $AB^2 = x_1^2 + y_1^2$, $BC = x_2$, $BD = x_3$, $AC^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2$, $DC = x_2 - x_3$, $AD^2 = (x_1 - x_3)^2 + y_1^2$. Отсюда получаем $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = (x_1^2 + y_1^2)(x_2 - x_3) + ((x_1 - x_2)^2 + y_1^2) \cdot x_3 - ((x_1 - x_3)^2 + y_1^2) \cdot x_2 = x_2^2 \cdot x_3 - x_3^2 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_3(x_2 - x_3) = BC \cdot BD \cdot DC$.

Метод доказательства, основанный на геометрических неравенствах

Задача 1. Доказать, что сумма расстояний от произвольно взятой внутри треугольника ABC точки O до вершин треугольника больше его полупериметра.

Доказательство

Рассмотрим треугольники AOB, BOC, COA (рис. 20). Используя неравенство треугольника, запишем три неравенства:

$$AO + OB > AB,$$
$$BO + OC > BC,$$
$$AO + OC > AC.$$

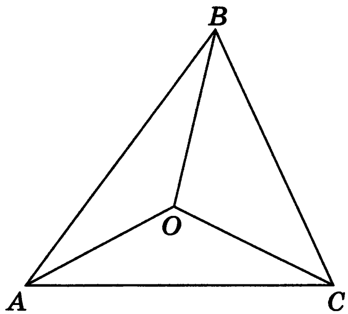


Рис. 20

Сложим почленно эти три неравенства:

$$2 \cdot AO + 2 \cdot BO + 2 \cdot CO > AB + BC + AC.$$

Разделив обе части неравенства на 2, мы получим доказываемое неравенство:

$$AO + BO + CO > \frac{1}{2}(AB + BC + AC).$$

Задача 2. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.

Доказательство

Пусть CM — медиана треугольника ABC (рис. 21). Продолжим MC на отрезок $MC' = CM$. Тогда четырехугольник $ACBC'$ —

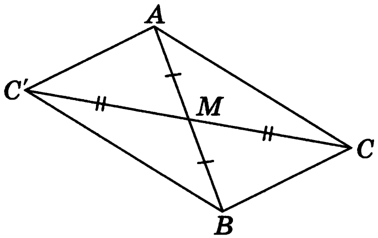


Рис. 21

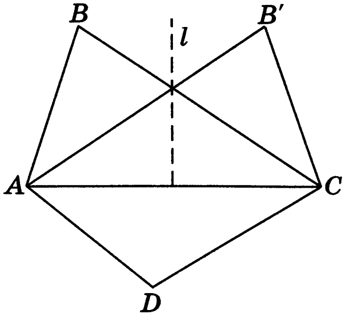


Рис. 22

параллелограмм, и, следовательно, $BC' = AC$, $CC' = 2 \cdot CM$. Используя неравенство треугольника, получаем: $CC' < CB + BC' = CB + AC$, откуда $CM < \frac{1}{2}(AC + CB)$.

Задача 3. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 22) не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.

Доказательство

Пусть точка B' симметрична точке B относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AC (рис. 22). Тогда треугольник ABC симметричен треугольнику $CB'A$ относительно прямой l, и, следовательно, $AB = B'C$, $BC = AB'$, $S_{ABC} = S_{AB'C}$, откуда $S_{ABCD} = S_{AB'CD}$. Итак,

$$S_{AB'CD} = \frac{1}{2}(AB' \cdot AD \cdot \sin \angle B'AD + B'C \cdot CD \cdot \sin \angle B'CD).$$

Учитывая, что $\sin \alpha \leqslant 1$ для любого острого угла, будем иметь

$$S_{ABCD} = S_{AB'CD} \leqslant \frac{1}{2}(AB' \cdot AD + B'C \cdot CD).$$

Окончательно имеем неравенство

$$S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD).$$

Задача 4. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H (рис. 23). Известно, что площади четырехугольников AB_1HC_1 и BA_1HC_1 равны. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение

Предположим, что $AC \neq BC$. Пусть для определенности $AC > BC$.

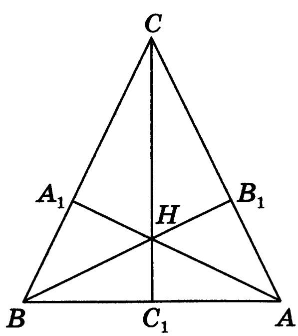


Рис. 23

Тогда $AC_1=\sqrt{AC^2-CC_1^2}>\sqrt{BC^2-CC_1^2}=BC_1$ и поэтому $S_{AHC_1}>S_{BHC_1}$.

Так как прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C с общим острым углом C подобны, то из неравенства $AC>BC$ следует, что $S_{AA_1C}>S_{BB_1C}$. Поэтому $S_{AHB_1}>S_{BHA_1}$. Учитывая неравенство $S_{AHC_1}>S_{BHC_1}$, получаем неравенство $S_{AB_1HC_1}>S_{BA_1HC_1}$, что противоречит условию задачи.

Следовательно, сделанное предположение не может иметь места и остается лишь одно: $AC=BC$.

Метод, основанный на решении уравнений (алгебраический метод)

Задача 1. В равнобедренной трапеции отношение оснований равно 0,75; средняя линия трапеции равна высоте h и равна 7 см. Доказать, что радиус окружности, описанной около трапеции, равен 5 см.

Решение

По условию задачи отношение оснований $\frac{BC}{AD}=0{,}75=\frac{3}{4}$. Обозначая $AD=4x$, $BC=3x$ и зная длину средней линии трапеции, имеем $\frac{3x+4x}{2}=7$, откуда находим $x=2$, т. е. основания трапеции $BC=6$ см, $AD=8$ см.

Центр O описанной окружности лежит на высоте трапеции, проведенной через точку пересечения диагоналей. Обозначим искомый радиус окружности через R, отрезок ON через z, тогда $OM=7-z$.

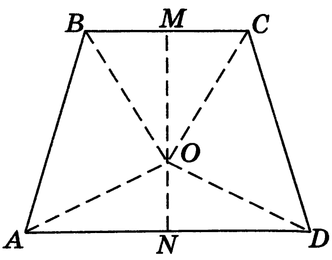


Рис. 24

Из прямоугольных треугольников AON и BOM (рис. 24) находим по теореме Пифагора: $R^2=z^2+4^2$, $R^2=(7-z)^2+3^2$.

Имеем систему

$$\begin{cases} R^2=z^2+4^2, \\ R^2=(7-z)^2+3^2. \end{cases}$$

Решая систему, получим $z=3$, $R=5$.

Итак, радиус описанной окружности равен 5 см.

Задача 2. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 56 см. Доказать, что большая сторона на 8 см больше меньшей стороны.

Решение

Если обозначить расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны через x, то запись решения будет наглядной (рис. 25) и очень компактной:

$$2x+2(x+4)=28,$$
$$4x=20,$$
$$x=5.$$

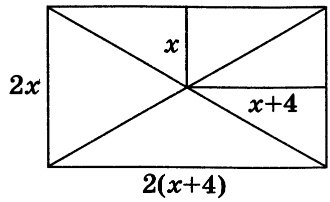


Рис. 25

Большая сторона равна 18 см, а меньшая — 10 см, а это и доказывает, что большая сторона на 8 см длиннее меньшей стороны.

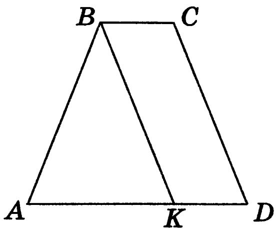


Рис. 26

Задача 3. Трапеция разбита на параллелограмм и треугольник, которые равновелики (рис. 26). Чему равно большее основание трапеции, если меньшее равно 3 см?

Решение

Согласно условию задачи имеем

$$S_{ABK}=S_{BCDK}. \qquad (*)$$

Если обозначить отрезок AK через x, то площадь треугольника ABK можно выразить равенством $S_{ABK}=\frac{1}{2}xh$, где h — высота треугольника ABK.

Если учесть, что высота параллелограмма $BCDK$ такая же, как и у треугольника ABK, то его площадь можно выразить равенством $S_{BCDK}=KD\cdot h=3\cdot h$. Согласно равенству (*) имеем уравнение $\frac{1}{2}xh=3h$, откуда $\frac{1}{2}x=3$, $x=6$.

Итак, большее основание AD равно 9 см.

Задача 4. Центральный угол сектора равен 60°, а его радиус равен R. Определить площадь круга, вписанного в сектор (рис. 27).

Решение

1) $\angle MAO=\angle OAK=30°$ — по свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности.

2) $OB\perp AM$, где B — точка касания,— по свойству радиуса окружности, проведенного в точку касания.

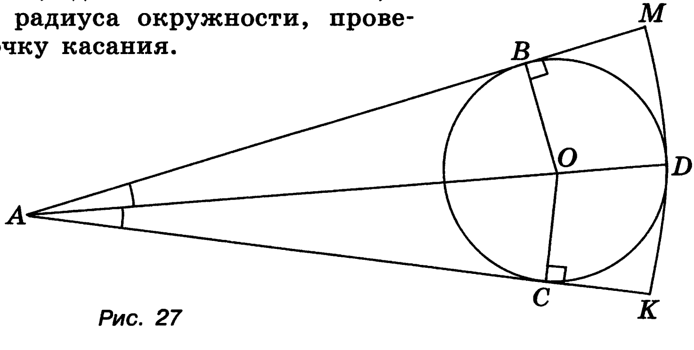


Рис. 27

3) Пусть $OB=x$, тогда $OA=AD-OD=R-x$ — по условию.

4) $OB=\frac{1}{2}OA$ — по свойству катета, лежащего в прямоугольном треугольнике против угла в $30°$.

5) Имеем уравнение $2x=R-x$, в котором $3x=R$, $x=\frac{R}{3}$.

6) $S_{кр}=\frac{\pi R^2}{9}$ (кв. ед.).

Задача 5. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 28) является прямоугольный треугольник ACB, гипотенуза которого AB равна 24 см. Диагональ AC_1 равна 7 см, а боковое ребро CC_1 равно 5 см и образует с катетами AC и BC углы по $60°$. Определить объем призмы.

Решение

Проведя дополнительные построения, следует прежде всего доказать, что основание высоты призмы попадает на биссектрису прямого угла C.

1) Пусть $C_1H \perp (ABC)$, CM — биссектриса угла ACB, тогда C_1H — высота призмы, так как $\angle C_1CA=\angle C_1CB$ и точки луча C_1C проектируются на биссектрису угла в основании.

2) $\angle ACM=\angle MCB=45°$ — по свойству биссектрисы.

3) Построим $HK \perp AC$ и C_1K, тогда $C_1K \perp AC$ — по теореме о трех перпендикулярах.

4) Рассмотрим треугольник C_1CK: $CK=2{,}5$ см — по свойству катета, лежащего против угла в $30°$; $C_1K^2=18{,}75$ см — по теореме Пифагора.

5) Рассмотрим треугольник HCK, в нем $CK=KH$ — по свойству равнобедренного треугольника.

6) Рассмотрим треугольник C_1HK. Так как он прямоугольный, то по теореме Пифагора имеем $C_1H=\sqrt{C_1K^2-HK^2}=\sqrt{12{,}5}$ см.

7) Рассмотрим треугольник AC_1C. Пусть $AC=x$, тогда по теореме косинусов $AC_1^2=x^2+C_1C^2-2x\cdot C_1C\cdot\cos 60°$.

Имеем $49=x^2+25-5x$, $x^2-5x-24=0$, $x_1=8$, $x_2=-3$.

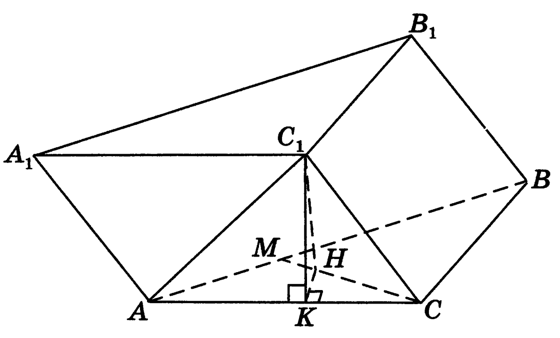


Рис. 28

Так как длина отрезка не может быть числом отрицательным, то $x=-3$ не удовлетворяет смыслу задачи. Итак, $AC=8$ см.

8) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. По теореме Пифагора имеем $BC^2=AB^2-AC^2=576-64=512$ см, $BC=16\sqrt{2}$ см.

9) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 16\sqrt{2}=64\sqrt{2}$ (кв. см).

10) $V_{\text{приз}}=64\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=320$ (куб. см).

2.2. Общие методы доказательства

Общими методами доказательства теорем в курсе математики средней школы являются синтетический, аналитический методы, доказательство противоречием, доказательство методом перебора, доказательство методом исключения, метод бесконечных исключений, метод полной индукции, метод математической индукции, метод конструирования.

Среди всех методов доказательства теорем в школьном курсе геометрии основную нагрузку несет синтетический метод, ибо он является составной частью доказательства любым другим методом.

Анализ и синтез практически неотделимы друг от друга и составляют единый аналитико-синтетический метод. Мы их рассмотрим в отдельности друг от друга, чтобы наиболее выпукло показать особенности каждого метода.

Доказательство математического предложения $\forall x\in M$: $A(x)\Rightarrow B(x)$ называется *синтетическим*, если оно осуществляется по следующей логической схеме: $(A(x)\wedge T)\Rightarrow B_1(x)\Rightarrow B_2(x)\Rightarrow\ldots\Rightarrow B_n(x)\Rightarrow B(x)$, где T — определенная совокупность предложений той математической теории, в рамках которой доказывается данное предложение и которой принадлежат $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$, составляющих доказательство, а также суждения $A(x)$ и $B(x)$.

Таким образом, при синтетическом методе доказательства теоремы цепочка силлогизмов строится так, что мысль движется от условия теоремы к ее заключению.

Рассмотрим синтетическое доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника.

Дано: ABC — треугольник (рис. 29).

Доказать: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$.

Доказательство

1) Проведем через вершину B прямую a, параллельную AC.

2) Рассмотрим $\angle 1$ и $\angle 4$; они являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC и секущей AB, а значит, $\angle 1=\angle 4$.

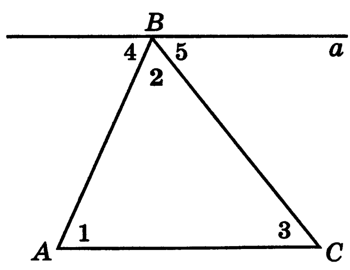


Рис. 29

3) Рассмотрим $\angle 3$ и $\angle 5$; они накрест лежащие при пересечении параллельных прямых a и AC и секущей BC, а значит, $\angle 3 = \angle 5$.

4) Сумма $\angle 4$, $\angle 2$, $\angle 5$ равна развернутому углу с вершиной B, т. е. $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$.

5) Значит, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Теорема доказана.

К достоинствам синтетического метода следует отнести сжатость, краткость, исчерпывающую полноту, логическую безупречность образца рассуждений. В методическом отношении синтетический метод имеет и свои недостатки: для учащихся остается неясным, как можно обнаружить такое доказательство, почему в рассуждениях поступают так, а не иначе; не аргументируется, почему нужны те или иные дополнительные построения; школьники не представляют, в каком направлении должны протекать рассуждения, так как этому методу свойственна большая неопределенность и многозначность при выборе пути доказательства теоремы. Перечисленные недостатки отрицательно сказываются на развитии у учащихся продуктивного, творческого мышления.

При **аналитическом** доказательстве теоремы $\forall x \in M$: $A(x) \Rightarrow B(x)$ цепочка силлогизмов строится так, что мысль движется от заключения теоремы к ее условию. Различают два вида аналитического метода: восходящий анализ (анализ Паппа), нисходящий анализ (анализ Евклида).

Восходящим анализом (совершенным анализом) называется такая разновидность аналитического метода, при которой, отталкиваясь от заключения, подбирают для него достаточное условие — такое суждение $B_1(x)$, что $B_1(x) \Rightarrow B(x)$, затем подбирают достаточное условие $B_2(x)$ для $B_1(x)$, такое, чтобы $B_2(x) \Rightarrow B_1(x)$ было истинным, и так далее до тех пор, пока не получат такое достаточное условие $B_n(x)$ для $B_{n-1}(x)$, что $B_n(x) \Rightarrow B_{n-1}(x)$ и $B_n(x)$ выполняется (истинно). При этом используется как условие $A(x)$ доказываемого предложения, так и некоторая совокупность T связанных с $A(x)$ и $B(x)$ предложений данной теории, истинность которых уже была установлена.

Сущность метода восходящего анализа состоит в том, что рассуждения строятся по схеме: для того чтобы $B(x)$ было верно, достаточно, чтобы было верно $C(x)$, и т. д.

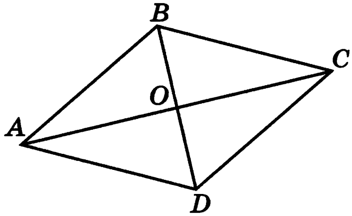


Рис. 30

Рассмотрим доказательство теоремы методом восходящего анализа.

Т е о р е м а: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны».

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) Для того чтобы доказать, что $AC \perp BD$ (рис. 30), достаточно доказать, что $BO \perp AC$.

2) Для того чтобы доказать, что $BO \perp AC$, достаточно доказать, что BO — высота треугольника ABC.

3) Для того чтобы доказать, что BO является высотой треугольника ABC, достаточно доказать, что треугольник ABC равнобедренный и BO в нем является медианой.

4) Для того чтобы доказать, что треугольник ABC равнобедренный, достаточно доказать, что в нем $AB = BC$.

5) Но $AB = BC$ по условию ($ABCD$ — ромб) и BO — медиана треугольника ABC (так как $AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма).

Теперь, идя обратным путем, от пункта 5 к пункту 1, мы и докажем сформулированную теорему.

Нисходящим анализом (несовершенным анализом) называют такую разновидность аналитического метода, при которой, отталкиваясь от заключения $B(x)$ доказываемого предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$, рассуждения ведут путем последовательного получения логических следствий: $B(x) \Rightarrow B_1(x) \Rightarrow B_2(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n(x)$, где $B_n(x)$ есть предложение, истинное значение которого нам точно известно. При выведении следствий из $B(x)$ временно допускают, что оно истинно.

При нисходящем анализе, так же как и при восходящем, рассуждения ведут от заключения теоремы, но подбирают уже не достаточные, а необходимые условия.

При использовании нисходящего анализа возможны два основных случая.

1. Следствие $B_n(x)$, полученное из $B(x)$, истинно. В этом случае об истинности доказываемого предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$ ничего нельзя сказать, так как из ложного предложения может следовать и истинное.

Например, из ложного предложения ($a - b = b - a$, $a \neq b$) следует истинное предложение ($(a-b)^2 = (b-a)^2$).

Но в том случае, когда применение нисходящего анализа к доказательству теоремы $\forall x \in M$: $A(x) \Rightarrow B(x)$ приводит к следствию $B_n(x)$, которое истинно, целесообразно попытаться обратить этот аналитический процесс рассуждений в синтетическое доказательство:

$$(B_n(x) \wedge (A(x)) \Rightarrow B_{n-1}(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_1(x) \Rightarrow B(x).$$

В таком случае нисходящий анализ позволит нам отыскать путь синтетического доказательства.

Для примера рассмотрим доказательство теоремы:

«Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник — параллелограмм».

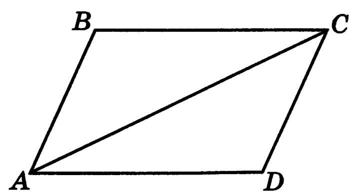


Рис. 31

Доказательство

1) Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 31). $(B(x))$

2) Тогда $BC \parallel AD$ и $AB \parallel DC$. $(B_1(x))$

3) Тогда $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle ACD$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей). $(B_2(x))$

4) Из равенства этих углов с учетом того, что AC — общая сторона треугольников ABC и ADC, следует:
$\Delta ABC = \Delta ADC$. $(B_3(x))$

5) Тогда $AD = BC$, $AB = DC$, $AC = AC$. $(A(x))$

Итак, имеем $B(x) \Rightarrow B_1(x) \Rightarrow B_2(x) \Rightarrow B_3(x) \Rightarrow A(x)$, где $A(x)$ — истинно.

Проведя теперь рассуждения в обратном порядке $A(x) \Rightarrow B_3(x) \Rightarrow B_2(x) \Rightarrow B_1(x) \Rightarrow B(x)$, мы получим синтетическое доказательство.

2 Следствие $B_n(x)$, полученное из $B(x)$, ложно, тогда всегда ложно и само $B(x)$.

Этот случай нисходящего анализа используется и для **доказательства от противного**. Так, чтобы доказать истинность предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$, преобразуют его в предложение $A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}$ и к доказательству последнего применяют метод нисходящего анализа. Если следствие $B_n(x)$ окажется ложным, то этим будет доказана ложность предложения $A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}$, а это, в свою очередь, доказывает истинность $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Рассмотрим примеры доказательств методом нисходящего анализа (в данном случае мы используем метод доказательства от противного).

Теорема: «Разносторонний треугольник нельзя разбить на два равных треугольника».

Доказательство

1) Пусть $\Delta ABM = \Delta BMC$ (рис. 32), $AB \neq BC \neq AC$.

2) В этих равных треугольниках BM — общая сторона и по теореме о том, что в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, заключаем, что $\angle BAM = \angle BCM$.

3) По теореме о том, что если углы при основании треугольника равны, то треугольник равнобедренный, заключаем, что $AB = BC$.

4) Мы получили, что $AB = BC$, но по условию теоремы $AB \neq BC$. Получили противоречие.

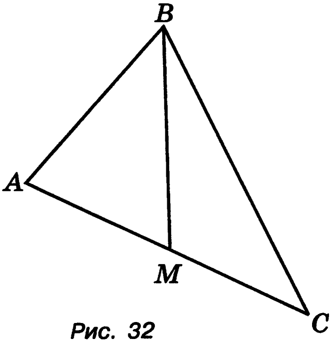


Рис. 32

5) Значит, наше предположение неверно, а верно то, что

$$\Delta ABM \neq \Delta BMC.$$

Рассмотрим пример из алгебры:

«Доказать, что при любых a и b, отличных от нуля, хотя бы одно из уравнений $1992ax^2 + 2x + 1993b = 0$, $x^2 + x - \frac{1991}{ab} = 0$ имеет корень».

Д о к а з а т е л ь с т в о

Допустим, что оба уравнения не имеют корней. Тогда их дискриминанты должны быть отрицательны, т. е.

$$D_1 = 4 - 4 \cdot 1993 \cdot 1992 \cdot ab < 0, \qquad (1)$$

$$D_2 = 1 + 4 \cdot \frac{1991}{ab} < 0. \qquad (2)$$

Но из (1) следует, что произведение ab положительно, а из (2) следует, что произведение ab отрицательно.

Противоречие доказывает наличие корня хотя бы у одного заданного уравнения при указанных условиях.

Метод доказательства от противного более точно было бы называть «доказательство противоречием» (в методической литературе этот метод еще называют методом приведения к абсурду). Доказательство противоречием строится на основе конструкции противоречия, к которой затем применяется синтетический метод.

Доказательство методом исключения строится на конструкции исключения, к которой затем применяется метод противоречия. Если нужно доказать теорему $\forall x \in M$: $A(x) \Rightarrow B(x)$ методом исключения, то наряду с заключением $B(x)$ рассматривают все остальные возможности: $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$. Затем предполагают, что вместо заключения $B(x)$ имеет место $B_1(x)$, и показывают, что это приводит к противоречию. Так поступают и со всеми остальными возможностями: $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$. В результате остается лишь одна возможность: $\forall x \in M$: $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Обычно такой метод доказательства применяется там, где нужно использовать аксиому трихотомии (для любых чисел a и b возможно одно из трех: $a = b$, $a < b$, $a > b$).

Рассмотрим теорему: «В треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, меньше суммы квадратов двух других сторон». Доказательство этой теоремы можно провести методом исключения. Вначале предположим, что квадрат этой стороны равен сумме квадратов двух других сторон, и получим противоречие; затем предположим, что квадрат этой стороны больше суммы квадратов двух других сторон, и опять получим противоречие; эти два противоречия позволяют заключить, что возможно только одно: квадрат стороны, лежащей против острого угла треугольника, меньше суммы квадратов двух других сторон.

Проиллюстрируем доказательство методом исключения на такой теореме:

«Для того чтобы две прямые в пространстве были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы всякая плоскость, пересекающая одну из них, пересекала бы и другую».

Докажем и необходимость указанного условия, и его достаточность. При доказательстве достаточности как раз и будет использован метод исключения.

Доказательство

I. Условие необходимо. Пусть $a \parallel b$, причем a и b принадлежат плоскости γ. Плоскость α, пересекающая прямую a, пересечет и плоскость γ. Пусть плоскости α и γ пересекаются по прямой l. Прямая l, пересекая одну из параллельных прямых — a, должна пересечь и другую прямую — b. Точка пересечения прямых l и b как раз и будет единственной общей точкой плоскости α и прямой b.

II. Условие достаточно. Пусть любая плоскость, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b. Прямые a и b не могут быть пересекающимися, так как тогда существует плоскость, пересекающая a и не пересекающая b. Прямые a и b не могут быть и скрещивающимися, так как тогда существует плоскость, пересекающая прямую a и не пересекающая прямую b. По методу исключения остается только одно: прямая a параллельна прямой b.

Замечание. При доказательстве достаточности использовалось утверждение: «Для двух прямых в пространстве возможно только одно из трех положений: прямые пересекаются, прямые параллельны, прямые скрещиваются».

Примером метода исключения может служить доказательство теоремы Ферма из курса алгебры и начал анализа: «Если функция $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$ достигает своего наибольшего или наименьшего значения в точке $x_0 \in (a;\, b)$ и в этой точке она дифференцируема, то $f'(x_0)=0$».

Введем обозначения: через $B_1(x)$ обозначим факт $f'(x_0)=0$, через $B_2(x)$ обозначим факт $f'(x_0)>0$, через $B_3(x)$ обозначим факт $f'(x_0)<0$. Очевидно, что никакие два из предложений $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$ не могут быть одновременно истинными, но одно из них обязательно истинно. Для доказательства теоремы достаточно показать, что ложно $B_2(x)$ и ложно $B_3(x)$, тем самым будет утверждена истинность $B_1(x)$.

Перейдем к рассмотрению **доказательства теорем методом перебора.** Этот метод — один из древнейших методов, которым пользуются и в современной математике. Хотя теоремы в абсолютном большинстве распространяются на бесконечное число объектов, в математике имеют место и такие теоремы (задачи на доказательство), которые охватывают лишь конечное число объектов. Для доказательства таких теорем можно использовать метод перебора. Так, например, для того чтобы доказать, что среди двузначных чисел есть только два числа, которые равны утроенному произведению их цифр, можно перебрать все двузначные числа от 10 до 99 и показать, что требованию теоремы удовлетворяют лишь числа 15 и 24.

Обратим внимание читателя на одно важное обстоятельство. При использовании метода перебора следует, прежде всего, посредством рассуждений несколько сузить область значений, подлежащих рассмотрению, т. е. следует, имея заведомую возможность найти решение полным перебором всех вариантов, вначале поломать голову, чтобы каким-либо образом ограничить количество вариантов. Проиллюстрируем вышесказанную мысль на такой задаче:

«Доказать, что среди двузначных чисел есть только одно, которое равно удвоенному произведению его цифр».

Доказательство

В соответствии с условием задачи мы должны найти двузначное число $\overline{ab}$, для которого выполняется равенство $\overline{ab} = 2 \cdot a \cdot b$, т. е. $10 \cdot a + b = 2 \cdot a \cdot b$. Выразим из последнего равенства a:

$$a = \frac{b}{2 \cdot b - 10} = \frac{b}{2(b-5)}.$$

Учитывая, что b — это цифра, можно записать: $0 \leqslant b \leqslant 9$, $b \in N_0$. Из равенства $a = \frac{b}{2(b-5)}$ следует, что $b - 5 \geqslant 1$. Таким образом, из системы $\begin{cases} 0 \leqslant b \leqslant 9, \\ b - 5 \geqslant 1 \end{cases}$ следует: $6 \leqslant b \leqslant 9$.

Хотя перебор всех натуральных значений b, удовлетворяющих неравенству $6 \leqslant b \leqslant 9$, не сложен, но можно еще сузить область перебора, для этого заметим, что b должно быть четным. Тогда следует рассмотреть лишь $b = 6$, $b = 8$. Итак, проведенные рассуждения позволили сузить область перебора от 90 до 10 случаев, затем до 4 и окончательно до 2 случаев. При $b = 6$ цифрой a будет 3, а числом будет 36. Это число удовлетворяет требованию задачи. При $b = 8$ значение a будет дробным числом, но так как a — это цифра, то a дробным быть не может.

Итак, мы получили, что лишь одно двузначное число 36 равно удвоенному произведению его цифр.

Доказательство теоремы методом полной индукции строится следующим образом: перебираются все возможные случаи, к каждому из которых применяют либо синтетический метод, либо метод противоречия.

Примером может служить доказательство теоремы об измерении вписанного угла половиной дуги, на которую он опирается. Доказывая эту теорему методом полной индукции, мы должны рассмотреть все три возможных случая: центр окружности лежит на стороне вписанного угла, центр окружности лежит между сторонами вписанного угла, центр окружности лежит вне вписанного угла.

Итак, суть метода полной индукции заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом конкретном случае из числа тех, которые могут представиться.

Более глубокому пониманию сути метода полной индукции будет способствовать решение таких задач, которые аналогичны следующей:

«Доказать, что решениями неравенства $x^{18} - x^{15} + x^2 - x + 1 > 0$ будут все действительные числа».

Доказательство

Разобьем числовую прямую на три промежутка:

а) $x \leqslant 0$; б) $0 < x < 1$; в) $x \geqslant 1$.

Докажем, что на каждом из этих промежутков неравенство выполняется.

Если $x \leqslant 0$, то первые четыре слагаемых, стоящие в левой части неравенства, неотрицательны, а 1 больше нуля, а значит, их сумма больше нуля.

При $0 < x < 1$, группируя члены, стоящие в левой части неравенства, следующим образом: $x^{18} + (x^2 - x^{15}) + (1 - x) > 0$, мы будем иметь, что все слагаемые положительны, а значит, их сумма больше нуля.

Если $x \geqslant 1$, то группировку слагаемых проведем следующим образом: $(x^{18} - x^{15}) + (x^2 - x) + 1 > 0$.

При $x \geqslant 1$ первые два слагаемых неотрицательны, а единица положительна, и, значит, вся сумма больше нуля.

Заметим, что речь в этой задаче шла о бесконечном числе случаев ($x \in R$) и перебрать их все не представляется возможным. Для того чтобы использовать метод полной индукции, мы разбили бесконечное число случаев на конечное число вариантов (здесь основой разбиения служит смена знака выражения), а затем каждый вариант рассматриваем в отдельности.

Но описанная выше технология использования метода полной индукции на случай бесконечного числа вариантов применима далеко не всегда. Метод полной индукции имеет в математике ограниченное применение. Абсолютное большинство математических предложений охватывает бесконечное множество частных вариантов, и провести проверку истинности этих предложений в таком случае путем перебора или путем разбиения этого бесконечного множества на конечное число подмножеств мы не можем. Тогда во многих случаях обращаются к особому методу доказательства — **методу математической индукции.** Суть этого метода доказательства состоит в следующем.

Пусть требуется доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n. Чтобы доказать это утверждение, проверяют его справедливость для $n = 1$. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при $n = k$ вытекает его справедливость при $n = k + 1$. Тогда утверждение считается доказанным для всех $n \in N$.

Сформулируем принцип математической индукции: «Если предложение, в формулировку которого входит натуральное число n, истинно при $n = 1$ и из его истинности при $n = k$ (где $k \in N$) следует, что оно истинно и при $n = k + 1$, то оно истинно при всех натуральных значениях n».

Когда принцип математической индукции (его иногда называют аксиомой арифметики натуральных чисел) используют для доказательства теоремы $(\forall\, n \in N)$ $(A(n))$, то фактически строится такой силлогизм:

Большая посылка: принцип математической индукции.

Малая посылка:

$A(n)$, $n \in N$: $A(1)$ — истинно; $(A(k) \Rightarrow A(k+1))$ — истинно.

Вывод: $A(n)$ — истинно для любого натурального n.

Когда нужно доказывать справедливость некоторого утверждения не для всех натуральных чисел, а лишь для $n \geqslant p$, где p — фиксированное натуральное число, то в этом случае пользуются принципом математической индукции, сформулированным следующим образом: «Если предложение истинно при $n = p$ и из его истинности при $n = k$, где $k \geqslant p$, следует, что оно истинно и при $n = k+1$, то предложение истинно для любого $n \geqslant p$».

Докажем методом математической индукции истинность равенства

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2. \qquad (*)$$

1) При $n=2$ (мы взяли базу индукции для $n=2$, а не для $n=1$, ибо доказывается формула для суммирования) доказываемое равенство принимает вид $1+3=2^2$, которое истинно. Итак, равенство (*) истинно при $n=2$.

2) Предположим, что равенство (*) истинно при $n=k$, т. е. справедливо равенство

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2.$$

Докажем, что тогда равенство (*) истинно и при $n=k+1$, т. е. справедливо равенство

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Преобразуем левую часть последнего равенства:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(1+3+5+\ldots+(2k-1))+(2k+1).$$

Но по предположению индукции сумма, стоящая в первой скобке последнего равенства, равна k^2. Значит, вся сумма равна $k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Итак, имеем

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+$$
$$+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Тем самым по принципу математической индукции истинность равенства (*) доказана для любых $n \in N$.

Заметим, что это равенство доказывалось еще древнегреческими математиками, но это доказательство было чисто геометрическим. Идея доказательства видна из рисунка 33. Площадь квадрата со стороной n равна сумме площадей

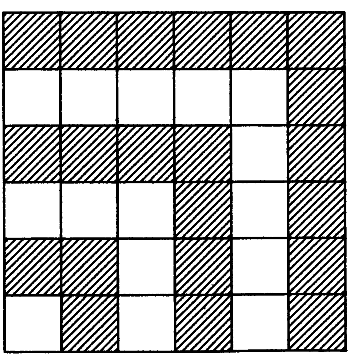


Рис. 33

Г-образных фигур; площади этих фигур равны 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$, а площадь самого квадрата со стороной n равна n^2, откуда и получается равенство (*).

На случай бесконечного числа возможных вариантов в математике используется еще один метод доказательства. Его суть состоит в следующем. Математическое утверждение доказывается для конечного числа случаев, и делается вывод о невыполнимости этого утверждения для остальных случаев, которых бесконечное число. Назовем этот метод доказательства **методом бесконечных исключений**. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие этот метод доказательства.

1) Доказать, что если длины сторон прямоугольника выражены натуральными числами, причем числовое значение его периметра равно числовому значению его площади, то таких прямоугольников может быть только два.

Доказательство

Обозначим длины смежных сторон прямоугольника через x и y. По условию $xy=2\cdot x+2\cdot y$. Из уравнения имеем $y=\frac{2x}{x-2}$. Выделим целую часть у полученного выражения: $y=\frac{2x}{x-2}=$ $=\frac{2x-4+4}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$. Так как по условию x и y натуральные числа, то сумма $2+\frac{4}{x-2}$ может быть числом натуральным лишь при $x=3$, $x=4$, $x=6$. При всех остальных числах эта сумма не может быть числом натуральным. Соответствующие значения для y будут $y=6$, $y=4$, $y=3$. Очевидно, что различных решений два: прямоугольник со сторонами 3 и 6 и квадрат со стороной 4.

2) Доказать, что дробь $\frac{4n-5}{2n-1}$ при целых значениях n будет натуральным числом лишь при $n=-1$, $n=0$, $n=2$.

Доказательство

Преобразуем дробь, выделив целую часть:

$$\frac{4n-5}{2n-1}=\frac{4n-2+2-5}{2n-1}=\frac{4n-2-3}{2n-1}=2-\frac{3}{2n-1}.$$

Очевидно, что лишь при $n=-1$, $n=0$, $n=2$ дробь $\frac{3}{2n-1}$ будет целым числом, а сама разность $2-\frac{3}{2n-1}$ будет числом натуральным. Для всех остальных целых значений n дробь $\frac{4n-5}{2n-1}$ не будет натуральным числом.

3) Доказать, что при целых значениях n дробь $\frac{n^2-n+3}{n+1}$ будет целым числом лишь при $n=-6$, $n=-2$, $n=0$, $n=4$.

Доказательство

Преобразуем записанную дробь следующим образом:

$$\frac{n^2-n+3}{n+1}=\frac{n^2+n-n-n+3}{n+1}=\frac{(n^2+n)-2n+3}{n+1}=n-\frac{2n-3}{n+1}=$$

$$=n-\frac{2n+2-2-3}{n+1}=n-2+\frac{5}{n+1}.$$

Легко видеть, что полученное выражение будет иметь целое значение лишь при $n=-6$, $n=-2$, $n=0$, $n=4$.

4) Доказать, что решением неравенства

$$2x^5+5x^3-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\geqslant 3$$

является промежуток [1; 2).

Доказательство

Отрицательные значения x быть решениями неравенства не могут, так как при этих значениях x левая часть неравенства есть отрицательное число, которое не может быть больше 3.

При $x>0$ левая часть неравенства есть монотонно возрастающая функция $f(x)$ (как сумма монотонно возрастающих функций). При $x=1$ левая часть, т. е. функция $f(x)$, равна 3, и тогда при $x\geqslant 1$ вследствие возрастания функции, $f(x)\geqslant 3$. Учитывая ограничения, наложенные на x (область определения неравенства $x<2$), окончательно имеем $1\leqslant x<2$.

Суть **метода конструирования** состоит в том, что путем геометрических построений, основанных на свойствах геометрических фигур, известных определениях и теоремах, строится объект, о котором идет речь в математическом утверждении. Построение указанного объекта на плоскости производится путем определенного набора инструментов и опирается на постулаты построения, т. е. на элементарные задачи на построение; построение объекта считается выполненным, если оно сведено к конечному числу этих задач-постулатов. Этим методом в школьном курсе геометрии доказаны, например, теорема о существовании и единственности окружности, описанной около треугольника, теорема о существовании и единственности окружности, вписанной в треугольник, теорема о касательной к окружности.

Пропедевтика обучения учащихся доказательству теорем

Работа по обучению учащихся доказательству теорем должна начинаться задолго до того, как начнут явно изучаться теоремы. Пропедевтически готовить школьника к доказательству теоремы надо еще на уровне 5—6 классов (заметим, что многое из того, о чем будет говориться ниже, следует реализовывать уже с 1 класса).

Поскольку в основе доказательства теорем лежат такие умения, как оперирование понятиями, работа с текстом теоремы, работа с чертежом, выбор необходимых знаний для выведения следствий, то пропедевтика обучения доказательству должна строиться вокруг перечисленных умений.

Прежде чем подробно характеризовать пропедевтическую работу по подготовке учащихся к доказательству, перечислим основные направления этой работы.

- Формировать у учащихся умения подмечать закономерности.
- Воспитывать у школьников понимание необходимости доказательства.
- Обучать учащихся умению выделять условие и заключение в математических утверждениях.
- Знакомить учащихся с простыми и сложными высказываниями и значениями их истинности.
- Знакомить школьников с понятиями «отрицание высказывания» и «противоречивые высказывания».
- Обучать учащихся умению выделять различные конфигурации на одном и том же чертеже.
- Обучать школьников умению пользоваться контрпримерами.
- Обучать учащихся умению выполнять геометрические чертежи и читать их.
- Формировать у учащихся умения выводить следствия из заданных условий.
- Формировать у учащихся умения проводить доказательные рассуждения, делать выводы.

Заметим, что указанная выше работа не только нужна в качестве пропедевтики обучения школьников доказательствам в систематическом курсе геометрии, но она играет существенную роль уже при изучении курса математики 5—6 классов. Так, например, в курсе математики 6 класса [100] уже встречаются рассуждения, строящиеся, по существу, на методе доказательства от противного. При изучении параллельных прямых утверждение: «Если две прямые в плоскости перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны» — обосновывается посредством этого метода. Подобные примеры можно было бы привести по каждому из указанных направлений работы.

Перейдем к более подробной характеристике каждого направления пропедевтики обучения учащихся доказательству теорем. Подчеркнем при этом, что многое, о чем пойдет речь ниже, должно иметь место как в 5—6 классах, так и в 7—11 классах.

§ 1. ФОРМИРОВАНИЕ У УЧАЩИХСЯ УМЕНИЯ ПОДМЕЧАТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

Формировать у школьников умения подмечать закономерности можно на основе наблюдений, вычислений, преобразований и сопоставлений.

Д. Пойа, обращаясь к преподавателям математики, призывал: «Результат творческой работы математика — доказательное рассуждение, доказательство, но доказательство открывают с помощью правдоподобных рассуждений, с помощью догадки. ...Преподаватель должен показать, что догадки в области математики могут быть разумными, серьезными, ответственными. ...Давайте учить догадываться!» [108, с. 389].

Не будем подробно освещать этот вопрос, а ограничимся лишь примерами, на которых можно учить школьников подмечать закономерности.

1. Продолжите числовой ряд:

а) 18, 20, 24, 32, ?

Ответ: 48.

б) 212, 179, 146, 113, ?

Ответ: 80.

2. Вставьте пропущенное число:

9	4	1
6	6	2
1	9	?

Ответ: 4.

3. Вставьте пропущенное число:

2	6	?	9
54	18	81	27

Ответ: 3.

4. Установите закономерность и укажите недостающее число:

2	7	17
3	11	19
5	13	?

Ответ: 23 (простое число, следующее за 19).

5. Вставьте пропущенное число (рис. 34).

Ответ: 18.

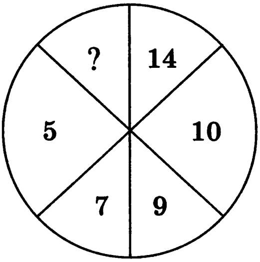


Рис. 34

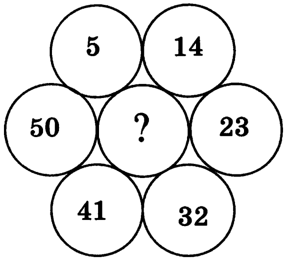


Рис. 35

6. Проследив за изменением чисел, записанных на лепестках цветка (рис. 35), узнайте, какое число надо поставить вместо знака вопроса.

Ответ: 9.

7. На рисунке 36 расположены четыре круга с числами внутри. Проследите за изменением чисел и найдите круг, в котором это изменение не такое, как в других.

Ответ: второй круг.

8. Сравните ряды чисел:

а) 6, 10, 14, 18; в) 3, 5, 7, 9;

б) 5, 9, 18, 17; г) 7, 11, 15, 19.

Найдите среди них лишний ряд (ряд, не похожий на остальные ряды). Чем отличается лишний ряд от остальных?

Ответ: ряд б).

9. Вставьте пропущенное число (рис. 37).

Ответ: 174 (указание: $174=6^2+7^2+8^2+5^2$).

10. Вставьте пропущенное число (рис. 38).

Ответ: 49.

11. Вставьте пропущенное число (рис. 39).

Ответ: 10 (указание: $10=\sqrt{9^2+4^2+3}$).

12. Вставьте пропущенное число (рис. 40).

Ответ: 113 (указание: $113=7^2+8^2$).

13. Вставьте пропущенное число (рис. 41).

Ответ: 248.

14. Вставьте пропущенное слово:

а) отрезок	(репа)	прямая
одночлен	(...)	радикал

Ответ: нора.

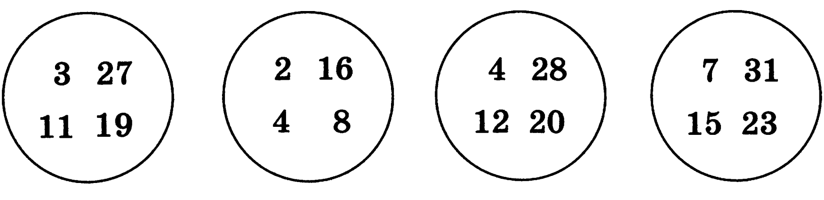


Рис. 36

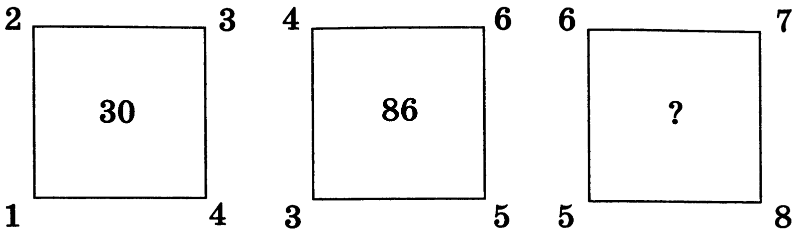


Рис. 37

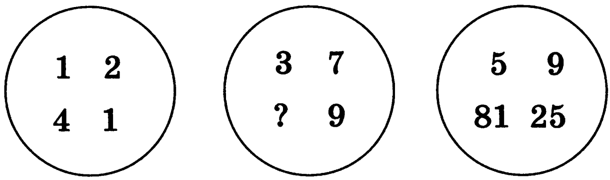


Рис. 38

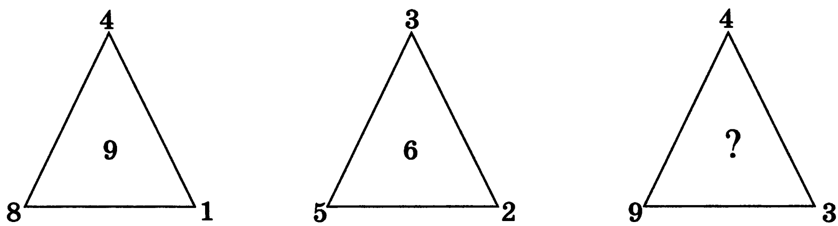


Рис. 39

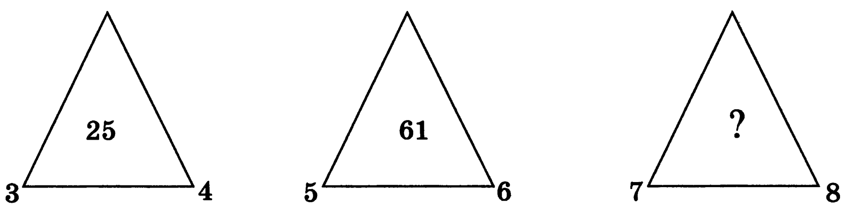


Рис. 40

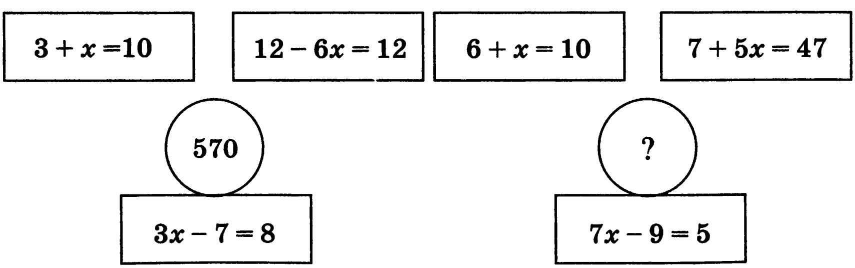


Рис. 41

б) площадь	(лоск)	плоскость
трапеция	(...)	сумма

Ответ: рама.

в) система	(село)	число
тождество	(...)	теорема

Ответ: тема.

г) система	(сакля)	скаляр
матрица	(...)	многочлен

Ответ: манго.

д) уравнение	(урок)	кружок
центр	(...)	ширина

Ответ: цена.

е) геометрия	(метла)	алгебра
степень	(...)	аксиома

Ответ: пенка.

ж) треугольник	(река)	скаляр
апофема	(...)	грань

Ответ: пора.

15. Вставьте пропущенное число:

а) 237	(144)	525
504	(...)	604

Ответ: 50 (указание: число в скобках равно полуразности чисел вне скобок).

б) 236	(116)	112
113	(...)	220

Ответ: 111 (указание: сложить числа, стоящие вне скобок, и сумму разделить на 3).

16. Исключите лишнее число:

а) 252, 311, 87, 624

Ответ: 311 (указание: все остальные числа делятся на 3).

б) 23, 37, 25, 53, 31, 17

Ответ: 25 (указание: все остальные числа простые).

в) 4, 16, 81, 19, 25, 49

Ответ: 19 (указание: все остальные числа являются квадратом некоторого числа).

17. Вставьте пропущенное число и пропущенную букву (рис. 42):

Ответ: 10 м.

18. Вставьте пропущенные числа (рис. 43):

Ответ: 24, 26 (указание: числители являются квадратами чисел 1, 2, 3, 4, уменьшенных на единицу, а знаменатели — квадратами тех же чисел, увеличенных на единицу).

19. Вставьте пропущенную букву и пропущенное число (рис. 44):

г	ж	з	?
6	?	11	16

Рис. 42

0	3	8	15	?
2	5	10	17	?

Рис. 43

а	я	?	ю	э
0	9	1	8	?

Рис. 44

е	к	ц	и	я
28	22	?	24	1

Рис. 45

Ответ: е, 7 (*указание*: выпишите все гласные буквы а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я и подпишите под ними по порядку цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

20. Вставьте пропущенное число (рис. 45):

Ответ: 10 (*указание*: буквы в алфавите пронумерованы в обратном порядке).

21. Вставьте пропущенное число:

предел = 66
деление = 61
алгебра = 45
лемма = ?

Ответ: 48 (*указание*: каждую букву обозначьте числом, соответствующим ее номеру в алфавите. Число получается сложением номеров тех букв, которые входят в слово).

22. Выполняя над цифрами числа 1636 различные арифметические операции, установите их некоторые свойства.

Возможные ответы:

а) сумма цифр есть число четное, и оно делится на 2;

б) сумма цифр числа равна 16, и она равна квадрату числа 4;

в) сумма цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево), в три раза больше суммы цифр, стоящих на четных местах (считая справа налево);

г) сумма крайних цифр равна сумме двух первых цифр (считая слева направо);

д) сумма крайних цифр на две единицы меньше суммы средних цифр;

е) произведение цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево), в двенадцать раз больше произведения цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево);

ж) произведение цифр числа на 8 больше 100;

з) произведение первых двух цифр (считая слева направо) в три раза меньше произведения последних двух цифр;

и) частное от деления последней цифры на третью (считая справа налево) равно первой цифре;

к) произведение первых двух цифр (считая слева направо) в двенадцать раз больше частного от деления третьей цифры на последнюю (считая слева направо).

23. На рисунке 46 в верхнем ряду изображены три фигуры. Подумайте, как связаны между собой первые две из них, и укажите в наборе *а* — *г* четвертую фигуру, которая точно так же связана с третьей.

Ответ: четвертой фигурой в верхнем ряду надо поставить фигуру, изображенную на рисунке 46, *в*.

24. Исключите лишнюю фигуру (рис. 47).

Ответ: фигура под номером 4 (все остальные фигуры можно совместить вращением).

25. Дорисуйте змейку нужными фигурами (рис. 48, *а*).

Ответ: рис. 48, *б*.

26. Выполните действия:

а) 412 : 2; в) 525 : 5;
б) 824 : 4; г) 1050 : 10.

Сравните результаты. Когда они равны? Обратите внимание на делимые и делители. Сделайте вывод. Придумайте сами аналогичные примеры.

27. Выполните деление:

а) 328 : 8; д) 18207 : 9;
б) 32,8 : 8; е) 1820,7 : 9;
в) 3,28 : 8; ж) 182,07 : 9;
г) 0,328 : 8; з) 18,207 : 9.

Какую связь между делимым, делителем и частным вы заметили, решая эти примеры?

28. Что объединяет данные треугольники (рис. 49)?

Ответ: объединяет наличие прямого угла.

29. а) Вставьте слово, которое служило бы окончанием первого слова и началом второго слова:

дик (...) ец

Ответ: образ.

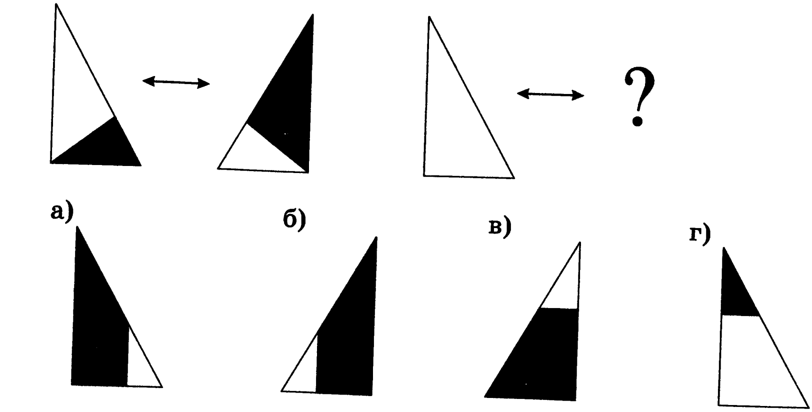


Рис. 46

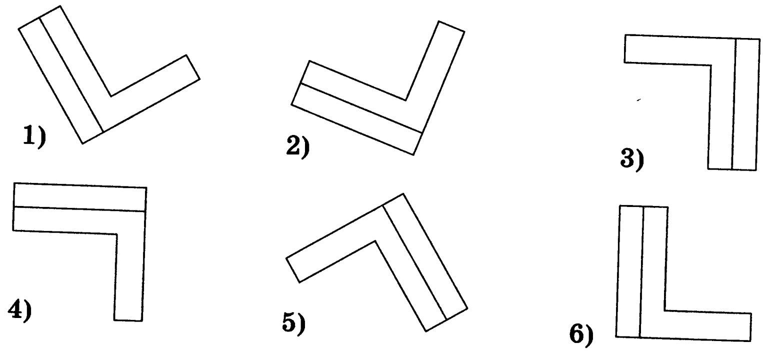


Рис. 47

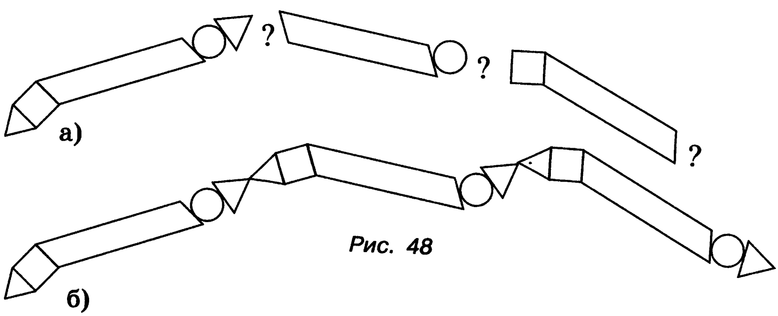


Рис. 48

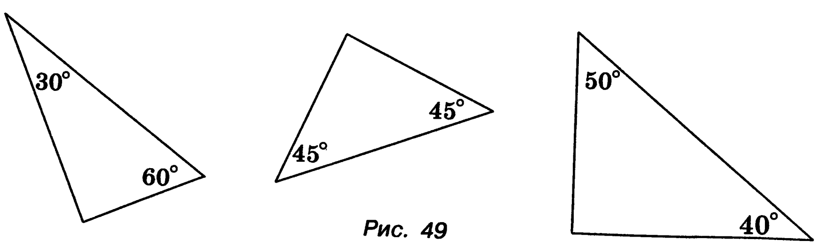


Рис. 49

Рис. 50

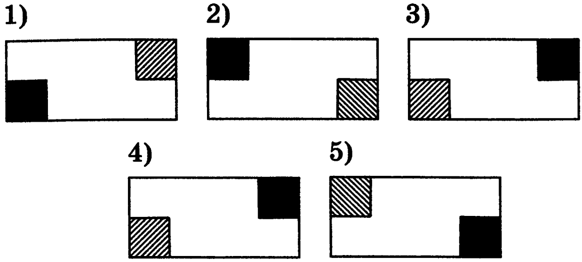


Рис. 51

б) Вставьте такие буквы, чтобы получилось слово (рис. 50).

Ответ: р, н (прощание).

30. Исключите лишнюю фигуру (рис. 51).

Ответ: лишняя фигура 3. (Фигуры 1 и 4, а также 2 и 5 являются парными. В каждой паре черный и заштрихованный участки меняются местами. На фигуре 3 штриховка сделана не в ту сторону.)

31. Напишите еще три числа последовательности:

а) 0; 2; 2; 4; 4; 6; 6; ...

Ответ: 8; 8; 10.

б) 2; 2; 2; 4; 6; 6; 6; 8; ...

Ответ: 10; 10; 10.

32. Запишите следующую строчку числового «угла»:

1

2 6

3 9 15

4 12 20 28

5 15 25 35 45

. . . .

Ответ: 6; 18; 30; 42; 54; 66.

33. Умножьте следующие числа по правилу умножения десятичных дробей:

а) $3,275 \cdot 10$; $3,275 \cdot 100$; $3,275 \cdot 10000$;

б) $0,076 \cdot 10$; $0,076 \cdot 100$; $0,076 \cdot 1000$.

Для каждого примера ответьте на следующие вопросы: как отличается положение запятой в полученном произведении от положения запятой в первом множители? Сколько нулей во втором множителе?

Подумайте, как можно сформулировать правило умножения десятичной дроби на разрядную единицу 10, 100, 1000, ...

34. Не поворачивая головы и не вращая бумагу, отметьте положение крестика на рисунках 2, 3 и 4 (рис. 52).

35. Какие треугольники лишние (рис. 53)?

Ответ: лишние треугольники 3 и 6 (все остальные треугольники тупоугольные).

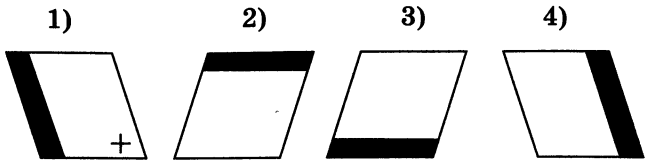


Рис. 52

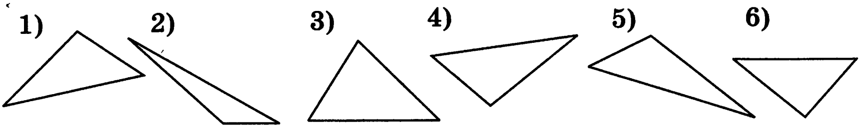


Рис. 53

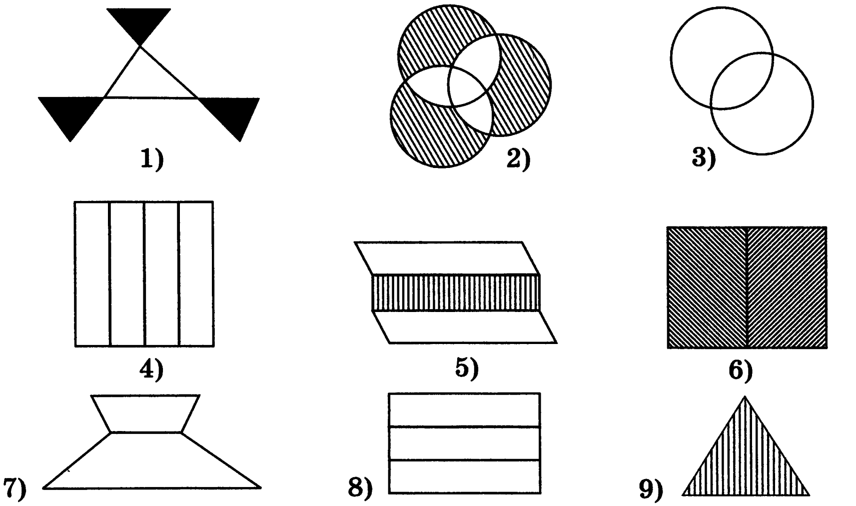


Рис. 54

36. Из девяти фигур, приведенных на рисунке 54, выделите группы, которые объединяются общими признаками.

Ответ: 1, 4 — состоят из четырех элементов;
1, 2, 5 — фигуры, частично заштрихованные;
3, 6, 7 — состоят из двух элементов;
6, 9 — фигуры, полностью заштрихованные;
2, 5, 8 — состоят из трех элементов;
4, 6, 8 — фигуры составлены из прямоугольников;
4, 5, 6, 7, 8 — фигуры составлены из четырехугольников;
2, 3 — фигуры составлены из окружностей.

37. Исключите лишнее слово: урок, зачет, расписание, отдых, учитель, математика.

Ответ: отдых.

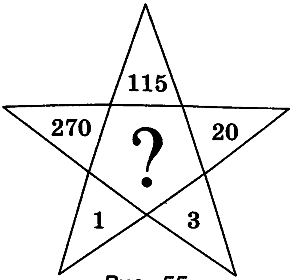


Рис. 55

38. Вставьте пропущенное число (рис. 55).

Ответ: 5 (указание: $(1+3)\cdot 5 = 20$; $(3+20)\cdot 5 = 115$; $(20+115)\cdot 5 = 270$).

39. Вставьте пропущенное число:

6	8	6
3	4	5
10	?	2

Ответ: 8 (указание: $6+6-4=8$; $3+5-4=4$; $10+2-4=8$).

40. Исключите лишнюю фигуру (рис. 56):

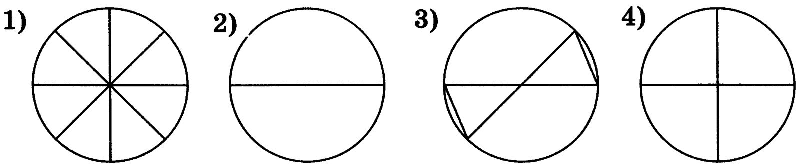
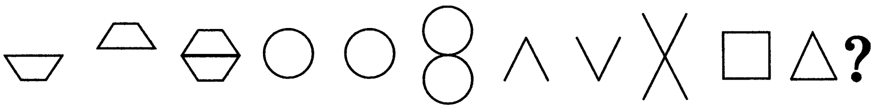


Рис. 56

Ответ: фигура 3.

41. Какую фигуру следует поставить вместо знака вопроса (рис. 57)?



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Рис. 57

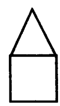


Рис. 58

Ответ: фигуры 3, 6, 9 получены из двух предшествующих, тогда искомой будет фигура, изображенная на рисунке 58.

42. Поставьте вместо знаков вопроса нужные числа (рис. 59).

Ответ: первая полоса: 56, 28, 14, 7;
вторая полоса: 104, 52, 26.

Рис. 59 ▶

?	208	48	120
?	?	24	60
?	?	12	30
?	?	6	15

43. Вставьте недостающее число (рис. 60):

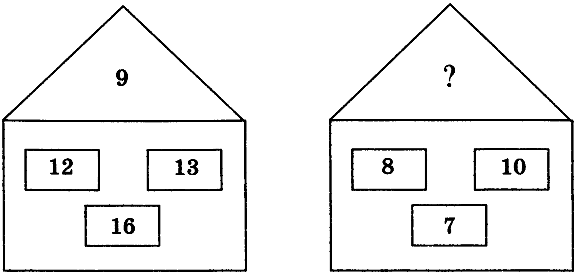
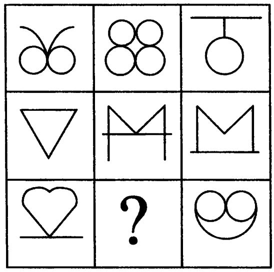


Рис. 60

Ответ: 11.

44. Поставьте вместо знака вопроса нужную фигуру (рис. 61).

Ответ: фигура, изображенная на рисунке 62 (фигуры в клетках представляют собой зеркальное отображение цифр).



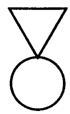
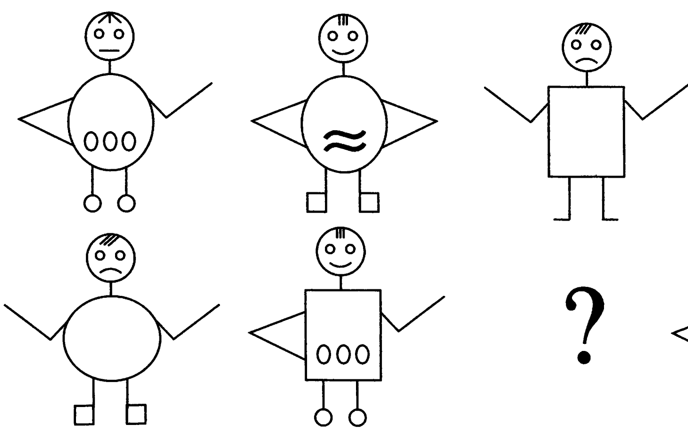


Рис. 61 *Рис. 62*

45. Какое настроение будет у человечка в субботу (рис. 63)? (Указание: надо выделить закономерность в изображениях фигур каждого ряда.)

Ответ: см. рисунок 64.



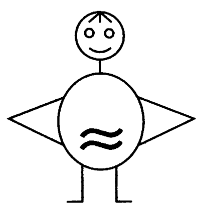


Рис. 63 *Рис. 64*

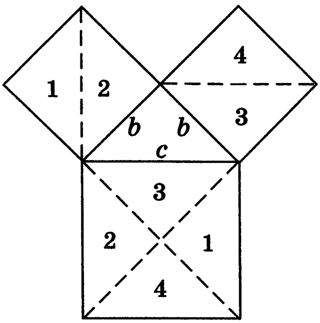


Рис. 65

46. Вместо неизвестных чисел поставьте такие, при которых были бы верны равенства по строчкам и равенства по столбцам:

2	+	x	+	3	=	12
+		−		+		−
z	−	5	+	y	=	1
+		−		−		−
1	−	u	+	1	=	6
=		=		=		=
5	+	6	−	6	=	5

47. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого боковые стороны равны b, а основание равно c (рис. 65). На сторонах треугольника постройте квадраты. Разделите каждый из квадратов, построенных на боковых сторонах, соответствующими диагоналями на два треугольника. Вырежьте получившиеся четыре треугольника и попробуйте ими выложить квадрат, построенный на основании треугольника. Какой вывод вы можете сделать? Запишите вывод в виде равенства.

В результате такой работы учащиеся должны увидеть, что получившимися четырьмя треугольниками можно выложить квадрат, и так как сумма площадей треугольников 1 и 2 равна b^2, сумма площадей треугольников 3 и 4 равна b^2, а площадь большего квадрата равна c^2, то $b^2+b^2=c^2$. На уровне 5—6 классов это будет, по сути дела, уже первой подготовкой к теореме Пифагора.

48. Как разрезать правильный двенадцатиугольник, чтобы из его частей можно было бы сложить квадрат (рис. 66, *а*)?

Тонкими линиями показаны линии разреза. Решение задачи проиллюстрировано на рисунке 66, *б*.

49. Как разрезать фигуру, изображенную на рисунке 67, *а*, на три части так, чтобы затем из них сложить квадрат?

Пунктиром показаны линии разреза. Решение задачи проиллюстрировано на рисунке 67, *б*.

50. Как разрезать фигуру, изображенную на рисунке 68, *а*, на три части так, чтобы из них можно было бы сложить квадрат? Решение задачи показано на рисунке 68, *б*.

51. Как разрезать фигуру, изображенную на рисунке 69, *а*, на три части так, чтобы из них можно было бы получить квадрат?

Изображенная фигура состоит из дуги AMB, которая представляет собой $\frac{3}{4}$ окружности радиуса 5 см; дуги CD, AC, BD равны $\frac{1}{4}$ той же окружности. На рисунке пунктиром показана линия разреза. Искомый квадрат показан на рисунке 69, *б*.

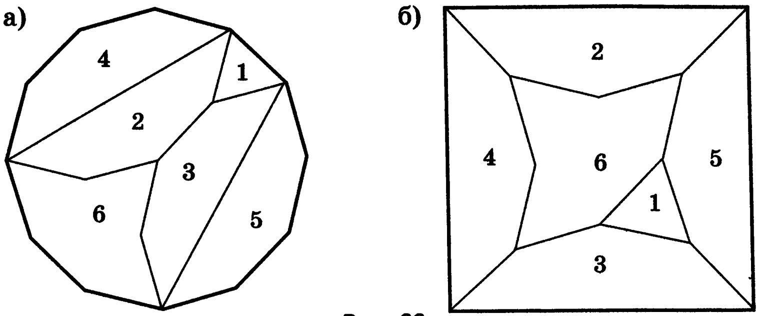


Рис. 66

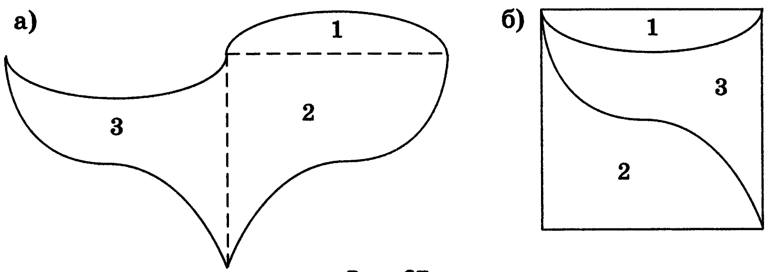


Рис. 67

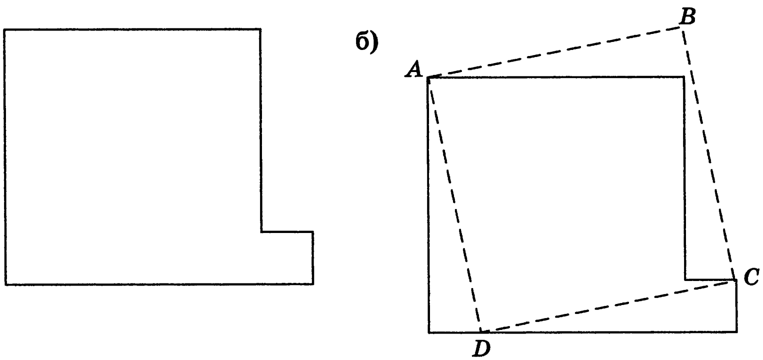


Рис. 68

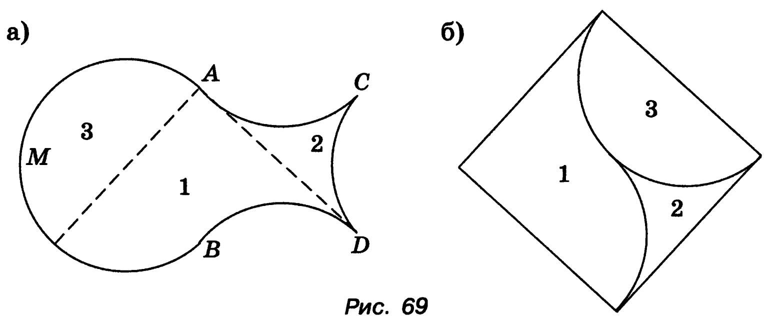


Рис. 69

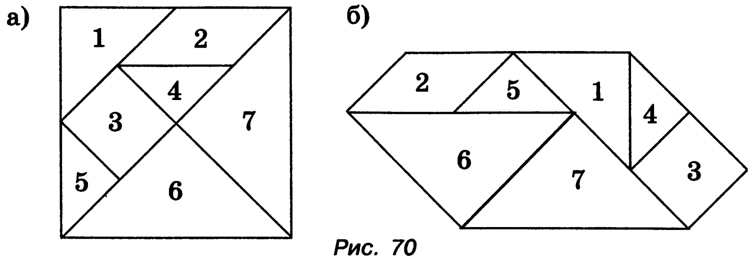


Рис. 70

Вообще, следует заметить, что задачи, подобные задачам 47, 48, 49, 50, 51, несут в себе большую смысловую нагрузку. По сути дела, они отрабатывают понятие равновеликости фигур, а в данном случае еще и вопрос о квадратуре фигур (обратить данную фигуру в равновеликий с ней квадрат — значит найти квадратуру данной фигуры).

52. Вырежьте из листа бумаги квадрат. Разрежьте его так, как показано на рисунке 70, *а*. Из полученных семи частей составьте 13 различных выпуклых многоугольников. На рисунке 70, *б* показан самый трудный из них — выпуклый шестиугольник. (Это древнейшая китайская игра *танграм*, известная в Китае под названием чи-чао-тю — хитроумный узор из семи частей.)

53. Как разрезать фигуру, изображенную на рисунке 71, *а*, на две части так, чтобы из них можно было бы сложить прямоугольник? Решение задачи показано на рисунке 71, *б*.

54. Как разрезать правильный шестиугольник на восемь равных частей?

Два возможных способа показаны на рисунке 72, *а*, *б*.

55. Как разрезать фигуру, изображенную на рисунке 73, *а*, на четыре равные части? Ответ к задаче показан на рисунке 73, *б*.

56. Как разрезать прямоугольник на:

а) четыре равных треугольника;

б) шесть равных треугольников;

в) четыре равных прямоугольника;

г) пять равных прямоугольников;

д) три равнобедренных треугольника;

е) четыре равнобедренных треугольника?

57. Треугольник и параллелограмм имеют одно и то же основание, по равному углу при основании и одну и ту же площадь (рис. 74, *а*). Как разрезать одну из этих фигур на такие две части, чтобы они, будучи сложены иначе, давали бы другую фигуру?

Ответ к задаче показан на рисунке 74, *б*. Так как $S_{BCA}=S_{BDFC}$, то $S_{DEA}=S_{CFE}$, и так как углы обоих треугольников равны, то и треугольники равны. Итак, в треугольнике достаточно провести среднюю линию DE, а в параллелограмме — соединить вершину C с серединой E стороны FD.

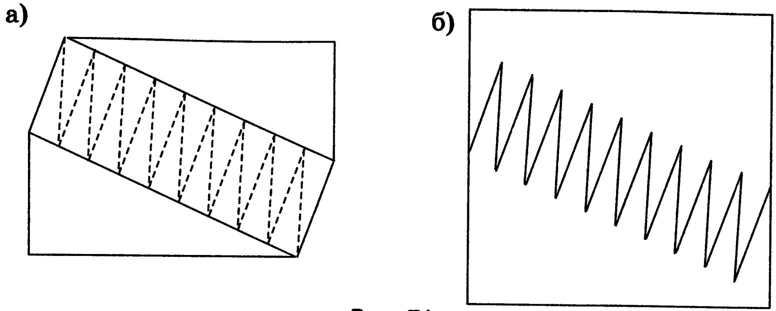


Рис. 71

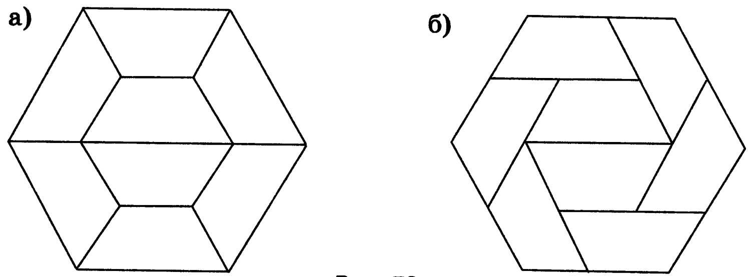


Рис. 72

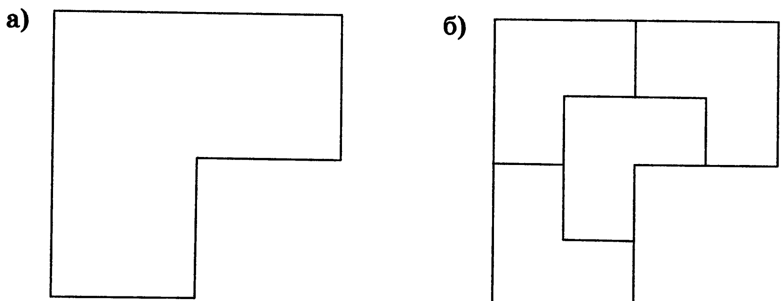


Рис. 73

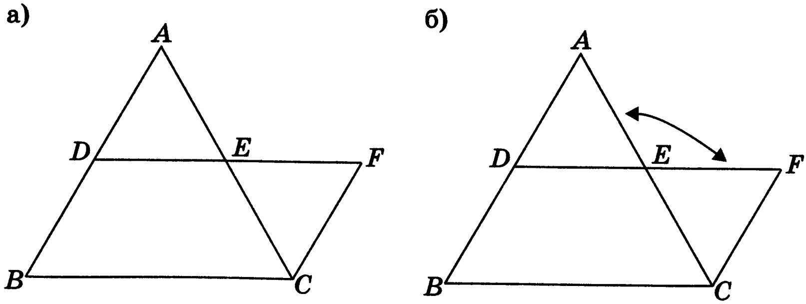


Рис. 74

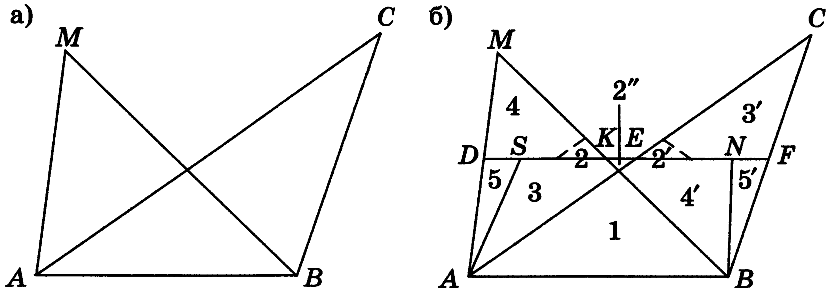


Рис. 75

58. Два треугольника имеют одно и то же основание и одну и ту же высоту (рис. 75, *а*). Как разрезать один из треугольников на части так, чтобы, сложенные иначе, они дали бы другой треугольник?

В каждом из треугольников *AMB* и *ACB* проведем среднюю линию (*DK* и *EF*), тем самым треугольник *AMB* может быть заменен равновеликим ему параллелограммом *ADNB*, а треугольник *ACB* — равновеликим параллелограммом *ASFB*. У этих параллелограммов общее основание *AB* и общая высота. Они состоят из общей части *ASNB* и соответственно из треугольников *ADS* и *BNF*, равных между собой. Из чертежа (рис. 75, *б*) видим, на какие пять частей следует разрезать треугольник *AMB*, чтобы можно было, расположив их иначе, получить из тех же частей и треугольник *ACB*. Эти части обозначены на рисунке 75, *б* цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 1′, 2′, 3′, 4′, 5′.

Конечно, последняя задача вряд ли будет под силу учащимся 5—6 классов, но мы привели ее в этой части книги для того, чтобы в одном месте собрать задачи на разрезание.

59. Как разрезать треугольник на равнобедренные треугольники?

Приведенные задачи на разрезание, равновеликость и равносоставленность фигур имеют фундаментальное значение в математике как науке. Они позволяют приблизиться к пониманию сложнейшей и очень важной теоремы планиметрии — теоремы Бойяи—Гервина: «Два многоугольника тогда и только тогда равновелики, когда они равносоставлены»; другими словами, равновеликие многоугольники можно перекроить, т. е. разрезать каждый из них на такие части, из которых можно составить другой многоугольник. Заметим, что эта теорема выражает необходимые и достаточные условия равносоставленности многоугольников (Я. Бойяи — венгерский математик, 1802—1860; П. Гервин — немецкий математик, жил в XIX в.). Напомним читателю, что два многоугольника *P* и *Q* равносоставленны, если их можно разбить на соответственно равные многоугольники.

Д. Пойа отмечал, что абсолютно верного метода для догадок нет, и поэтому не может быть никакого абсолютно верного метода для обучения тому, как догадываться. Но тем не менее учить догадываться не невозможно [108, с. 390]. Он писал, что крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Рассмотрим некоторые теоретические вопросы, связанные с методикой обучения учащихся умению подмечать закономерности.

Выполнение заданий, предложенных выше, основано на методах наблюдения, опыта, сравнения, аналогии, индукции, обобщения и абстрагирования.

Существенное значение имеет метод **сравнения**. К. Д. Ушинский писал: «Если вы захотите, чтобы какой-нибудь предмет внешней природы был понят ясно, то отличайте его от самых сходных с ним предметов... напрасно нас упрекают в том, что мы везде настаиваем на сравнении: другого пути для понимания предметов внешней природы у нас нет» [132, с. 436]. Сравнение является той мыслительной операцией, посредством которой устанавливаются различия и сходства всевозможных понятий, устанавливаются существующие между ними ассоциации, внутренние связи. К. Д. Ушинский, считая сравнение дидактическим принципом, отмечал его универсальность. Он писал: «Сравнение... есть самый существенный акт сознания, без которого само сознание, а следовательно, и вся сознательная жизнь человека невозможны... без сравнения — невозможно различение, без различения нет сознания. Следовательно, возможность сравнения есть необходимое условие сознания...» [133, с. 331—332].

На важность приема сравнения указывал в свое время Я. А. Коменский: «Множество предметов загромождает учащегося, а разнообразие пугает его, если не будут приняты против этого меры: по отношению к множеству — порядок, чтобы к одному переходили после другого; по отношению к разнообразию — внимательное наблюдение различий, чтобы везде становилось ясным, чем одна вещь отличается от другой. Это даст отчетливое, ясное, верное знание...» [77, с. 308].

Сравнение следует рассматривать как метод, способствующий упрочению и углублению знаний учащихся. Этот метод активизирует мыслительную деятельность учащихся, ускоряет процесс их умственного развития.

Л. С. Выготский установил, что ребенок осознает различие раньше, чем сходство. Происходит это не только потому, что ребенок «при отношениях различия сталкивается с фактом неприспособленности и потребностью осознания», а и потому, «что само осознание отношения сходства требует более сложной и позже развивающейся структуры обобщения и понятий, чем осознание отношений различия» [26, с. 184].

Осознание различия тех или иных отношений происходит раньше еще и потому, что оно «не требует от мысли непременного образования понятия», в то время как «осознание сходства требует образования первичного обобщения или понятия, охватывающего предметы, между которыми существует это отношение» [26, с. 185].

Учителю следует иметь в виду, что при организации сравнения каких-либо объектов надо прежде выяснить их различие, а затем сходство.

Сравнение предполагает владение умениями выполнять следующие действия:

а) выделять признаки у объектов;

б) устанавливать общие и существенные признаки;

в) выделять основание для сравнения (один из существенных признаков);

г) сопоставлять объекты по данному основанию.

Особое внимание необходимо обратить на выбор основания для сравнения.

Аналогия — сходство нетождественных объектов в некоторых сторонах, качествах, отношениях.

Говорят, что сложный объект X аналогичен сложному объекту Y относительно набора S характеристик, если в S найдется хотя бы одна характеристика, общая для X и для Y.

Обычная схема умозаключения по аналогии: объект B обладает признаками a, b, c, d, e; объект C обладает признаками b, c, d, e; следовательно, объект C, вероятно, обладает признаком a.

Заметим, что вывод по аналогии всегда вероятен и поэтому требует дополнительного доказательства. Но этот метод крайне полезен при выдвижении гипотез, уяснении проблем и их решений.

Обобщение — это мысленное выделение, фиксирование каких-нибудь общих существенных свойств изучаемых объектов и явлений.

В. В. Давыдов [36] различает обобщения двух видов: эмпирическое и теоретическое. Различия между ними он строит на основе их содержания и способов формулирования.

Эмпирическое обобщение осуществляется путем сравнения предметов и представлений о них. При этом выделяются одинаковые, формально общие свойства, являющиеся отражением объектов со стороны их внешних, чувственно данных связей и проявлений. Знание этого формально общего свойства позволяет учащимся относить отдельные предметы к определенному формальному классу независимо от того, связаны ли эти предметы между собой или нет. Процессуальная сторона эмпирического обобщения состоит в переходе от единого к общему на основании различения существенных и несущественных признаков групп объектов. Но такое обобщение не позволяет проникнуть в сущность объекта.

Теоретическое обобщение основано на содержательном анализе отдельных объектов. Путем анализа отыскивается такое отношение между объектами, которое служит генетической основой всей системы. В отличие от эмпирического, в основе которого лежат наблюдение и чувственные представления, теоретическое обобщение отражает внутренние связи и отношения между объектами, выделяет связи общего с частным.

С. Л. Рубинштейн выделил две характерные черты теоретического обобщения:

а) оно выполняется при таком анализе какого-либо одного конкретного факта (события, задачи), который обнаруживает внутреннюю связь его частных проявлений;

б) исходя из знания этой связи, человек затем с ходу, как бы с места, обобщает все другие факты (события, задачи) данного круга.

Если для эмпирического обобщения характерно длительное сравнение многих исходных фактов, то для теоретического обобщения этого не требуется. Теоретическое обобщение строится на рефлексии, которая состоит в рассмотрении учащимися оснований собственных действий и их соответствия условиям задачи, и на анализе содержания задачи с целью выделения принципа или всеобщего способа ее решения.

Психологами установлено пять уровней развития способностей учащихся к обобщению математического материала:

1. Учащиеся не могут самостоятельно осознанно сравнивать и обобщать даже простые математические объекты.

2. Учащиеся с помощью учителя проводят обобщение на основе эмпирического сравнения объектов и выделяют при этом наглядно воспринимаемые признаки.

3. Обобщение производится учащимися путем сравнения в сочетании с анализом признаков, установлением их иерархий. На данном уровне учащиеся с помощью учителя начинают анализировать более широкую базу объектов.

4. С незначительной помощью учителя обобщение проводится на основе глубокого анализа объектов узкой базы (два — три объекта) и контролируется сравнением.

5. Обобщение проводится учащимися самостоятельно на основе глубокого анализа существенных свойств и отношений без сравнения объектов. Этот уровень в известном смысле и есть теоретическое обобщение.

Для отработки у учащихся умения проводить обобщение полезными будут упражнения на нахождение общего существенного признака нескольких понятий, включение понятий в определенную систему, отнесение понятий к соответствующему классу предметов или явлений, определение понятий.

Абстрагирование — это мысленное вычленение общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, и превращение их в самостоятельный объект рассмотрения.

Из этого определения следует, что абстрагирование не может осуществляться без обобщения, в результате которого выделяется то общее, что и подлежит абстрагированию. Обобщение и абстрагирование — это два метода, которые в процессе познания почти всегда присутствуют одновременно.

Этот небольшой теоретический экскурс мы привели с той целью, чтобы верно ориентировать учителя в организации учебно-познавательной деятельности учащихся по выполнению заданий на установление различного рода закономерностей.

Нами разработаны программа-тест, определяющая способность учащихся устанавливать числовые закономерности, и программа-тест, позволяющая установить уровень визуального мышления. Программы-тесты содержат по 50 заданий, различных как по форме, так и по содержанию. В основу программ положены «Числовой тест» и «Пространственно-зрительный тест», разработанные Г. Ю. Айзенком [1]. Тесты содержат задания, выполнение которых предполагает использование таких операций, как классификация, систематизация (сравнение числовых рядов и пополнение «ущербного» ряда на основе найденного общего признака), выбраковка (исключение лишнего), комплектование (вставить недостающее) и др.

Программы организованы таким образом, что они ведут обработку результатов выполнения заданий тестов и суммируют число верно выполненных заданий. После окончания работы выставляется число баллов, характеризующее соответствующие способности тестируемого (число баллов выставляется по методике Г. Ю. Айзенка [1]).

§ 2. ВОСПИТАНИЕ У УЧАЩИХСЯ ПОНИМАНИЯ НЕОБХОДИМОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

До систематического курса геометрии основной запас геометрических знаний учащиеся приобретают путем сравнения и измерения, а поэтому в начале изучения геометрии они пытаются отождествлять эти приемы со строгим доказательством; когда истинность того или иного утверждения им интуитивно ясна, они считают доказательство лишним.

Воспитывать у школьников убеждение в том, что доказательства необходимы, значит, в свою очередь, формировать у учащихся убеждения в несовершенстве органов чувств при обосновании утверждений и показывать ограниченность опытно-индуктивных обоснований.

Полезной в этом случае может оказаться работа с примерами на зрительные иллюзии. Приведем примеры некоторых зрительных иллюзий.

1) На рисунке 76, *а*, *б*, *в* прямые p и k параллельны.

2) На рисунке 77 прямые a, b, c параллельны.

3) На рисунке 78, *а*, *б*, *в*, *г* отрезки AB и CD равны между собой.

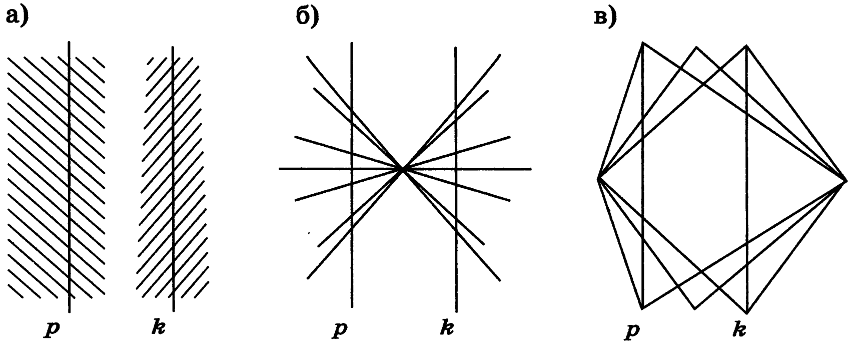


Рис. 76

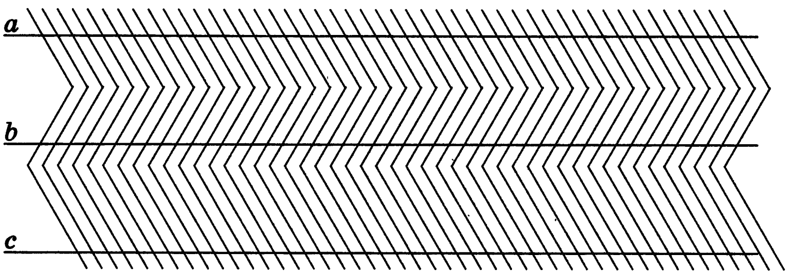


Рис. 77

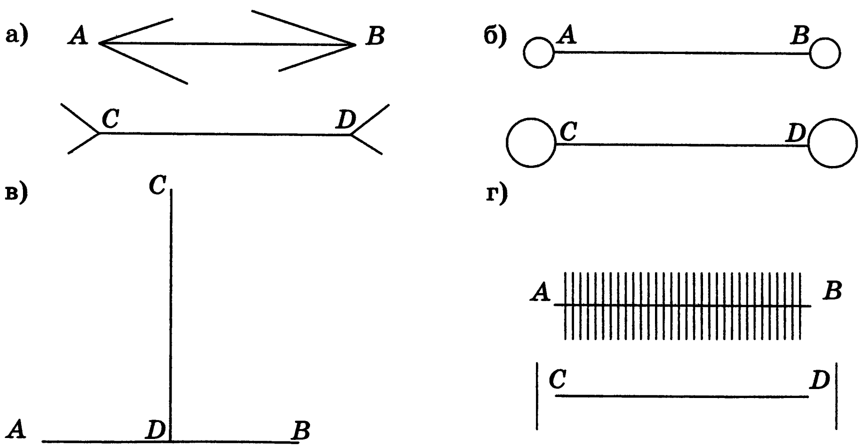


Рис. 78

4) На рисунке 79 горизонтальные отрезки равны.

5) Диагонали AB и CA параллелограммов равны (рис. 80).

6) На рисунке 81 окружности A и B равны между собой.

7) На рисунке 82 изображен квадрат $ABCD$.

8) На рисунке 83 изображен квадрат $ABCD$.

9) Интересен такой пример. Дан равнобедренный треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 8$ см, $AC = 4$ см. Середины сторон соединяют отрезками; во вновь образовавшихся треугольниках выполняют аналогичные построения и т. д. (рис. 84, *а*). К чему стремится длина образующейся ломаной, если процесс построения проводить до бесконечности?

Как показал эксперимент, учащиеся считают, что в случае рисунка 84, *а* при бесконечном процессе получается ломаная, стремящаяся к $AC = 4$ см. Но длина ломаной остается постоянной величиной, равной 16 см (решение задачи основано на свойстве средней линии треугольника).

Эту же задачу можно предложить для рисунка 84, *б*. Здесь, так же как и в первом случае, кажется, что длина ломаной линии стремится к $AB = 5$ см. Но, как легко установить, сумма горизонтальных катетов равна в любом случае 4 см, а сумма вертикальных катетов — 3 см, т. е. у ломаной длина остается постоянной, равной 7 см.

10) На рисунке 85 основания AB и MN трапеций равны.

11) На рисунке 86 длина отрезка AB кажется больше длины отрезка DE, а на самом деле $AB = DE$.

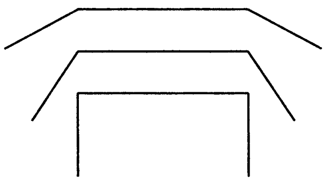


Рис. 79

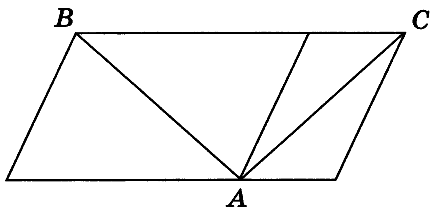


Рис. 80

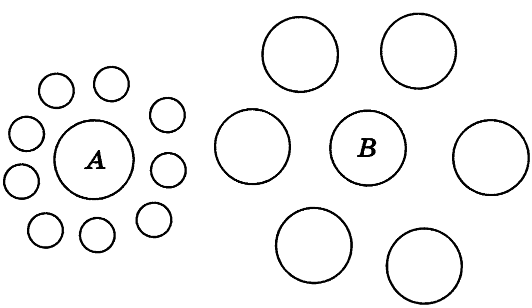


Рис. 81

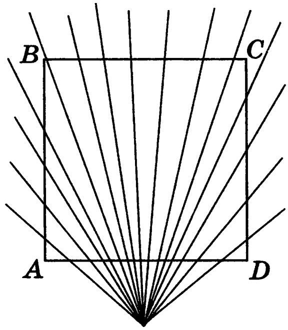


Рис. 82

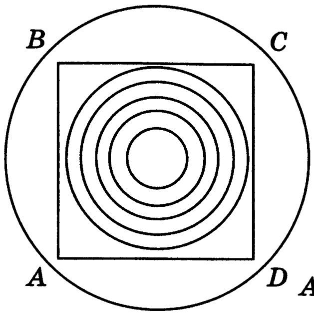


Рис. 83

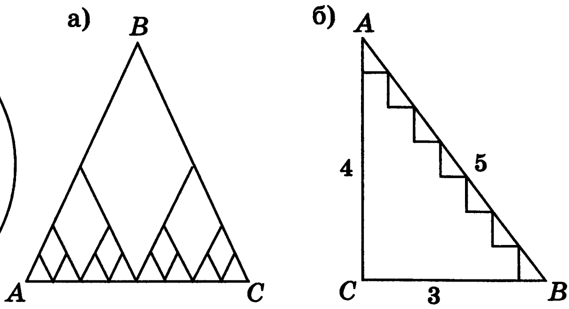


Рис. 84

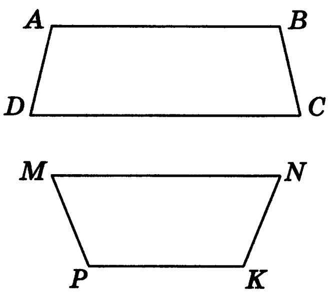


Рис. 85

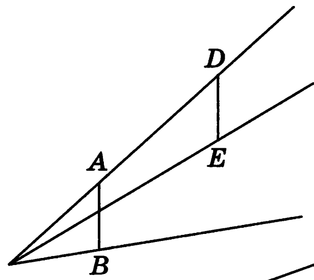


Рис. 86

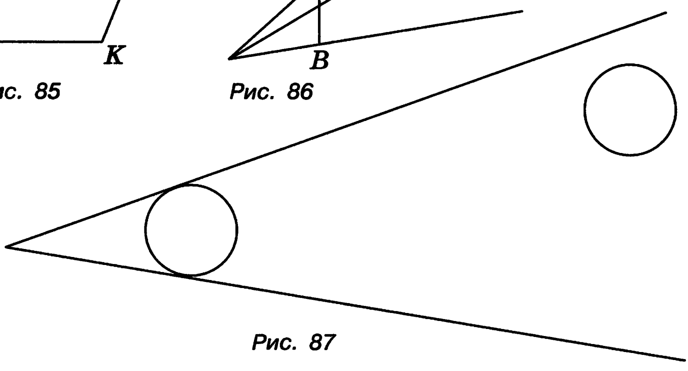


Рис. 87

12) На рисунке 87 правый круг кажется меньше равного ему левого круга.

Полезно сообщить учащимся причины возникновения зрительных иллюзий:

— глаз переоценивает величину острого и недооценивает величину тупого угла;

— темная фигура на светлом фоне кажется больше, чем равная ей светлая фигура, расположенная на светлом фоне;

— глаз делает ошибку в определении размеров фигур в «заполненном» и «пустом» пространстве;

— искажено восприятие направления, расстояния и формы фигуры под влиянием других, близко размещенных предметов и фигур.

§ 3. ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ УМЕНИЮ ВЫДЕЛЯТЬ УСЛОВИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ УТВЕРЖДЕНИЯХ

Для того чтобы обучать школьников умению выделять условие и заключение в математических утверждениях, можно брать самые различные предложения. Приведем примеры некоторых из них:

1) числа, сумма цифр которых делится на 3, делятся на 3;

2) если запись числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится на 5; если запись числа оканчивается любой другой цифрой, то это число не делится на 5;

3) из любой неправильной дроби можно выделить целую часть;

4) отрезок короче любой другой линии, которая соединяет его концы;

5) через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну;

6) в треугольнике сумма двух любых сторон больше третьей стороны;

7) правильная дробь всегда меньше единицы;

8) если к десятичной дроби справа приписать один или несколько нулей, то значение дроби не изменится;

9) для любых чисел a и b имеет место равенство $a+b=b+a$;

10) в прямоугольнике диагонали равны;

11) если $a=b$ и $b=0$, то $a^2+b^2=0$;

12) если a делится на b и b делится на c, то a делится на c;

13) если ab делится на p и a взаимно просто с p, то b делится на p;

14) если a делится на c и $a+b$ делится на c, то a и b делятся на c;

15) если a делится на b и c делится на d, то ac делится на bd;

16) отрезок прямой, соединяющий две какие-нибудь точки, короче всякой ломаной, соединяющей эти же точки;

17) две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, параллельны между собой.

§ 4. ОЗНАКОМЛЕНИЕ УЧАЩИХСЯ С ПРОСТЫМИ И СЛОЖНЫМИ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ И ЗНАЧЕНИЯМИ ИХ ИСТИННОСТИ

Любое математическое предложение является либо элементарным, не расчленяющимся на части, каждая из которых, в свою очередь, есть предложение, либо сложным, построенным из элементарных. Так, например, предложение «a больше b» — элементарное, а предложение «a больше или равно b» — составное, состоящее из двух элементарных: «a больше b», «a равно b», которые соединены логическим союзом «или».

Логической структурой сложного предложения называется совокупность и порядок логических связок («не», «и», «или», «если... то», «тогда и только тогда», «для всякого», «существует» и т. д.), с помощью которых это предложение образовано из элементарных.

Одна из задач формирования у учащихся умения доказывать теоремы состоит в обучении их умению раскрывать логическую структуру математических предложений и устанавливать истинностные значения этих предложений.

Раскрыть логическую структуру сложного предложения — значит показать, из каких элементарных предложений сконструировано данное сложное предложение и как оно составлено из них с помощью логических связок [95].

Напомним для учителя, что означают некоторые логические связки (логические операции) в математической речи.

Определение 1. *Отрицанием высказывания* A называется высказывание, обозначаемое $\overline{A}$ (или $\neg A$), которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно.

Запись $\overline{A}$ (или $\neg A$) читается «не A».

Определение 2. *Конъюнкцией высказываний* A и B называется высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ (или $A \& B$), которое истинно тогда и только тогда, когда A и B истинны.

Запись $A \wedge B$ (или $A \& B$) читается «A и B».

Замечание. В математике для записи конъюнкции в столбик используется фигурная скобка:

$$P \wedge Q = \begin{cases} P, \\ Q. \end{cases}$$

Например, при решении неравенства $\frac{2+x}{x-4} > 0$ мы должны записать такие конъюнкции: $2+x>0$ и $x-4>0$; $2+x<0$ и $x-4<0$. Это может быть записано так:

$$\begin{cases} 2+x>0, \\ x-4>0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2+x<0, \\ x-4<0. \end{cases}$$

Определение 3. *Дизъюнкцией высказываний* A и B называется высказывание, обозначаемое $A \vee B$, которое ложно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A, B.

Запись $A \vee B$ читается «A или B».

Замечание. В математике для записи дизъюнкции в столбик используется квадратная скобка:

$$P \vee Q = \left[\begin{array}{l} P, \\ Q. \end{array} \right.$$

Например, при решении неравенства $x^2 \geqslant 16$ его решение представляет собой дизъюнкцию двух высказываний: $x \leqslant -4$ или $x \geqslant 4$. Эта дизъюнкция может быть записана так:

$$\left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x \geqslant 4. \end{array} \right.$$

Определение 4. *Импликацией высказываний* A *и* B называется высказывание, обозначаемое $A \to B$, которое ложно тогда и только тогда, когда A — истинно, B — ложно.

Запись $A \to B$ читается «если A, то B» или «A влечет B».

Определение 5. *Эквиваленцией высказываний* A *и* B называется высказывание, обозначаемое $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A и B имеют одинаковые истинностные значения.

Запись $A \leftrightarrow B$ читается «A эквивалентно B», или «A тогда и только тогда, когда B», или «для того чтобы A, необходимо и достаточно, чтобы B».

Для разбора различных логических структур учащимся можно предложить такие сложные высказывания:

а) если число целое и положительное, то оно натуральное;

б) если четырехугольник — ромб и все его углы прямые, то четырехугольник — квадрат;

в) прямые на плоскости могут либо пересекаться, либо не пересекаться;

г) если в $\triangle ABC$ $AB = BC$ и $\angle B = 60°$, то $\triangle ABC$ равносторонний;

д) числа не положительные и не дробные, есть целые отрицательные числа и нуль;

е) число a или равно числу b, или меньше числа b, или больше числа b;

ж) треугольник может быть остроугольным, или тупоугольным, или прямоугольным.

Для определения истинностных значений можно предложить школьникам такие высказывания (заметим, что сложность этого задания может быть по желанию учителя понижена):

а) если 12 делится на 6, то 12 делится на 3;

б) если 11 делится на 6, то 11 делится на 3;

в) если 15 делится на 6, то 15 делится на 3;

г) 12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3;

д) 11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3;

е) ученик утверждает, что он от точки O на прямой отложил отрезки $OA = 12$ см и $OB = 18$ см и получил $AB = 30$ см. Верно ли его утверждение?

ж) ученик утверждает, что у неравных треугольников соответственные углы равны. Прав ли он?

з) верно ли утверждение: «Одна высота треугольника перпендикулярна другой высоте этого же треугольника»?

Операцию расчленения сложных высказываний на простые можно отработать с учащимися на таких предложениях:

а) если летом поедем в Омск и у нас будет достаточно времени, то мы посетим драматический театр;

б) если летом будет дождливая погода, то нам не удастся ни накупаться, ни загореть;

в) если скоро окончим работу и будет хорошая погода, то мы пойдем на прогулку или поедем на пляж;

г) если произведение двух целых чисел x и y делится на 3 и не делится на 9, то хотя бы одно из чисел x или y делится на 3, причем другое на 3 не делится.

§ 5. ОЗНАКОМЛЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ С ПОНЯТИЕМ ОТРИЦАНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И С ПОНЯТИЕМ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Ознакомить учащихся на интуитивном уровне с понятием отрицания высказываний и с понятием противоречивых высказываний — это значит помочь им усвоить в дальнейшем метод доказательства от противного, который широко применяется в школьных учебниках геометрии.

Уже на уровне 5—6 классов учащимся можно предлагать задания, при выполнении которых школьники строят свои рассуждения методом от противного. Так, например, можно поступить при выполнении такого задания: «Число p не делится на 2. Докажите, что число p не делится на 4». Рассуждения могут быть такие: «Если бы число p делилось на 4, то тогда существовало бы такое число x, что $p=4x$. Отсюда $p=2(2x)$, т. е. число p делилось бы на 2, но это противоречит условию. Следовательно, p не делится на 4».

Приведем примеры, посредством которых можно формировать у учащихся умения строить отрицания высказываний и обнаруживать противоречивые высказывания.

1) Выясните, могут ли быть одновременно верными (неверными) следующие высказывания:

а) a больше b; a меньше b;

б) a больше b; произведение чисел a и b равно 0;

в) $2+3=5$; $2+3\neq5$;

г) число 3 является делителем числа 147; число 3 не является делителем числа 147;

д) a расположено на числовом луче левее b; a меньше b; $b-a=2$;

е) прямая a параллельна прямой b; прямая b перпендикулярна прямой a;

2) Существуют ли два таких числа a и b, для которых выполняются одновременно два свойства:

а) $\frac{a}{b}=3$; $ab=0$;

б) $\frac{a}{b}=2$; $ab=2$?

3) Найдите такие два натуральных числа m и n, для которых выполняются одновременно три свойства: $mn=0$; m меньше n на 2; $m+n=2$.

4) Костя искал такие два натуральных числа a и b, для которых выполняются одновременно свойства: $ab=0$; число a на 1

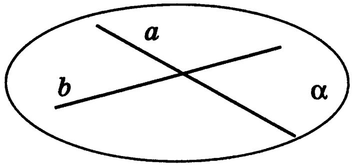


Рис. 88

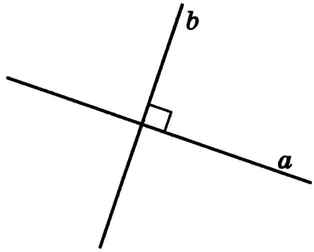


Рис. 89

больше числа b. Олег искал такие два натуральных числа a и b, для которых выполняются свойства: $ab=0$; число a на 1 больше числа b; $a+b=1$. Нашли ли мальчики такие числа?

5) Постройте отрицание следующих высказываний и определите, верны ли они:

а) число 287 делится на 2;

б) на плоскости α прямая a пересекает прямую b (рис. 88);

в) прямая a перпендикулярна прямой b (рис. 89);

г) число делится на 4 тогда и только тогда, когда двузначное число, выражаемое его последними двумя цифрами, делится на 4;

д) число делится на 11 в том и только в том случае, когда разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах с конца числа, и суммой цифр, стоящих на четных местах с конца числа, делится на 11 (из большей суммы надо вычитать меньшую).

6) Укажите, какие из высказываний в предложенных ниже парах являются отрицанием друг друга:

а) $5>0$ и $5\leqslant 0$;

б) $3+7=10$ и $3+7<10$;

в) $a\perp b$ и $a\parallel b$;

г) $a\parallel b$ и «a пересекает b»;

д) $a>b$ и $b<a$;

е) «$\triangle ABC$ — прямоугольный» и «$\triangle ABC$ — тупоугольный»;

ж) «целое число k — четно» и «целое число k — нечетно»;

з) «натуральное число n — простое» и «натуральное число n — составное».

7) Составьте отрицания следующих высказываний:

а) весь наш класс присутствовал на вечере самодеятельности;

б) некоторые школьники за контрольную работу получили «пять»;

в) ни один из сомножителей произведения abc не равен 0;

г) некоторым школьникам по 12 лет;

д) ни одно из чисел a, b, c не является рациональным;

е) все числа a, b, c — рациональные;

ж) некоторые из чисел a, b, c являются рациональными.

8) Среди следующих утверждений найдите пары высказываний, являющихся отрицанием друг друга:

а) все ученики нашего класса решили задачу;

б) некоторые ученики нашего класса не решили задачу;

в) некоторые ученики нашего класса решили задачу;

г) ни один ученик нашего класса не решил задачу.

9) Отрицания каких предложений записаны ниже:

а) в каждом городе есть район, в каждой школе которого найдется класс, ни один ученик которого не занимается спортом;

б) найдется книга, содержащая страницу, в каждой строке которой встречается хотя бы одна буква «a»?

10) Сформулируйте отрицания следующих предложений:

а) если при всяком положительном x разность $2x-y$ положительна, то y отрицателен;

б) если при некотором отрицательном x произведение xy отрицательно, то y положителен;

в) для любых двух натуральных чисел x и y существует натуральное число z, такое, что если $x<y$, то $x+z=y$;

г) если $a \neq c$ и $b \neq c$, то $a \neq b$.

§ 6. ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ УМЕНИЮ ВЫДЕЛЯТЬ РАЗЛИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ НА ОДНОМ И ТОМ ЖЕ ЧЕРТЕЖЕ

Приведем в качестве иллюстрации некоторые примеры.

1. Сколько отрезков изображено на рисунке 90?

2. Сколько углов изображено на рисунке 91?

3. Назовите все четырехугольники, изображенные на рисунке 92.

Рис. 90

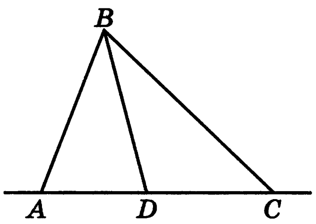


Рис. 91

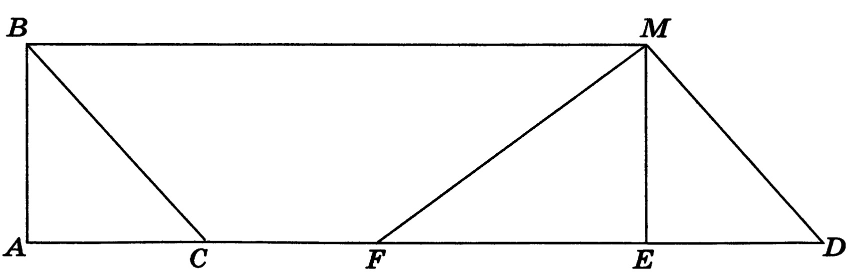


Рис. 92

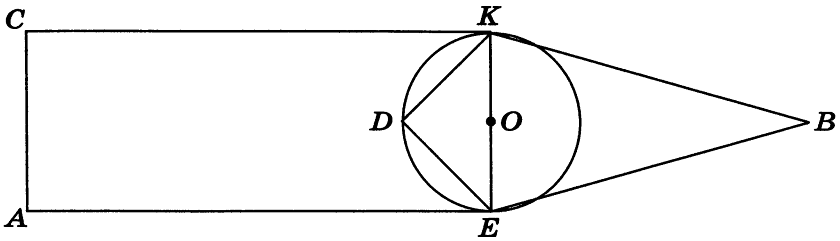


Рис. 93

4. Чем является отрезок KE на рисунке 93?

5. В какие фигуры входит отрезок AB (рис. 94)?

6. Сколько треугольников изображено на рисунке 95?

7. Вычислить периметры фигур, изображенных на рисунках 96, *а, б*, сделав необходимые измерения.

Наши наблюдения показали, что учащиеся 5—6 классов для нахождения периметров указанных фигур измеряют все звенья ломаных. Но можно поставить их перед проблемой, сформулированной в виде следующего вопроса: «Как можно найти периметры фигур, сделав для этого наименьшее число измерений?» В таком случае решение задачи будет таким, каким оно изображено на рисунках 97, *а, б*.

Такие задачи разовьют наблюдательность и помогут учащимся в дальнейшем разобраться в доказательствах более сложных задач и теорем.

Для обучения учащихся доказательству теорем не менее важным является формирование у них навыков переосмысливания фигуры в плане другого понятия (ученику более привычно рассматривать фигуру в плане одного какого-нибудь понятия) и формирование умения вычленять и комбинировать из элементов изображения новые фигуры, не указанные в текстовом условии. Проиллюстрируем сказанное на примере решения задачи (рис. 98).

Известно, что в окружности $r = 5$ см, $AK \parallel Ox$, $KB \parallel Oy$.

Найти длину отрезка AB.

Для ее решения учащиеся должны переосмыслить радиус окружности и увидеть его в качестве диагонали OK прямоугольника $AKBO$. Тогда на основании равенства диагоналей прямоугольника они легко получат, что $AB = 5$ см.

В. И. Зыкова считает: «Чтобы устранить трудности при выполнении операции переосмысливания, следует обращать внимание учащихся на случаи соответствия фигур двум и более понятиям, указывать на возможности таких случаев при решении задач, вести необходимое варьирование фигур, раскрывать учащимся связь между родственными понятиями» [70, с. 89].

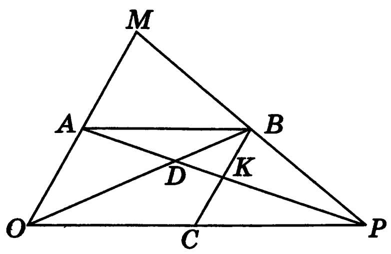


Рис. 94

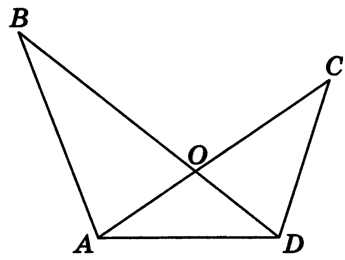


Рис. 95

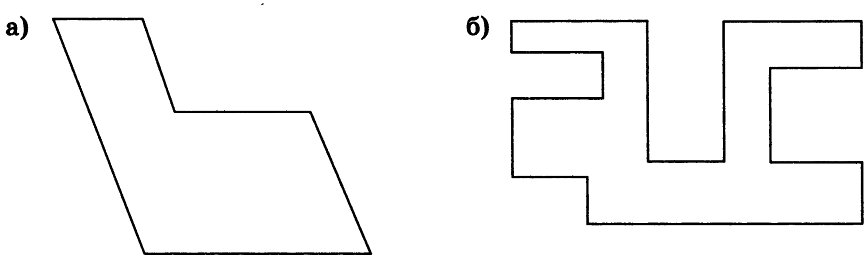


Рис. 96

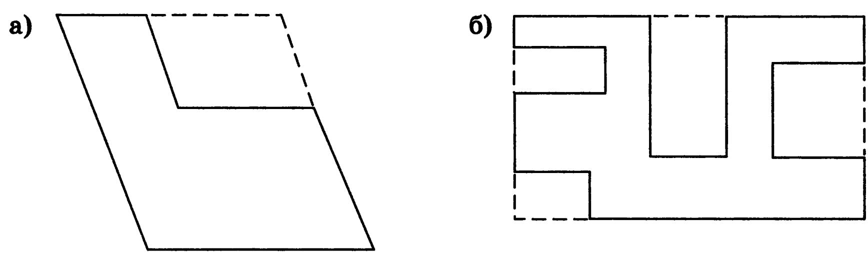


Рис. 97

Для учащихся, приступающих к систематическому изучению курса геометрии, свойственна переоценка роли чертежа и большая доверчивость к тому, что на нем изображено. Чтобы предупредить подобного рода ошибки, надо воспитывать у школьников правильное отношение к чертежу, изживать стремление учащихся использовать при решении задач и доказательствах теорем те особенности конкретного чертежа, которые не связаны с условием задачи или теоремы.

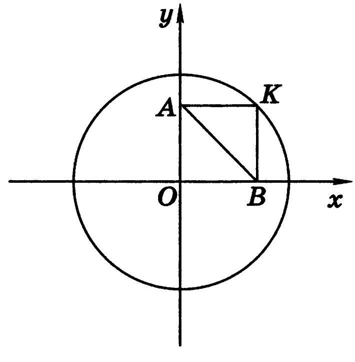


Рис. 98

§ 7. ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ УМЕНИЮ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КОНТРПРИМЕРАМИ

Учить школьников приводить примеры, иллюстрирующие или доказывающие высказывания, либо контрпримеры, опровергающие предложения,— значит учить их творческому подходу к изучению математики. Такая работа исключает шаблонность в действиях учащихся и позволяет преодолеть формализм в знаниях.

В школьной практике чаще всего предлагаются задания, в которых учащимся следует доказать то или иное утверждение, и это приводит к тому, что они становятся беспомощными, испытывают робость перед заданиями типа «Проведите доказательство или опровержение какого-либо утверждения».

Учителю следует показать школьникам уже 5—6 классов, что примеры доказывают частноутвердительные и частноотрицательные предложения, а контрпримеры опровергают предложения общего характера.

В математике наиболее употребительны следующие четыре логические формулы:

1) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$; 3) $\exists x(A(x) \wedge B(x))$;

2) $\forall x(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)})$; 4) $\exists x(A(x) \wedge \overline{B(x)})$.

Суждения 1) и 2) опровергаются контрпримерами, а суждения 3) и 4) доказываются примерами.

Мы, следуя Н. А. Курдюмовой [82], будем трактовать понятия «пример» и «контрпример» следующим образом: если для некоторой логической формулы F, имеющей предметную область D, в этой области D существует такое распределение значений параметров, входящих в формулу F, при котором F принимает значение «истинно» («ложно»), то такое распределение называется выполняющим (опровергающим) распределением для F в D, или примером (контрпримером).

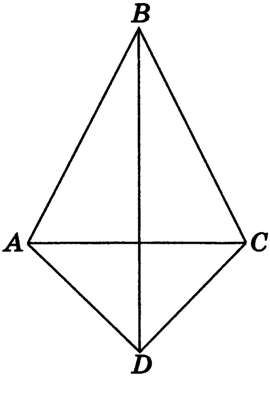


Рис. 99

Контрпримеры чаще всего применяются тогда, когда надо убедить учащихся в том, что они ошибаются. Чтобы удостовериться в ложности некоторого общего высказывания, достаточно привести один контрпример.

Рассмотрим высказывание: «Любой четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, является ромбом». Убедиться в ложности этого высказывания можно посредством контрпримера, приведенного на рисунке 99.

В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, но он ромбом не является.

В качестве примера рассмотрим еще одно высказывание: «Любой четырехугольник, у которого два противоположных угла равны по 90°, есть прямоугольник». Ложность этого высказывания доказывает контрпример, приведенный на рисунке 100.

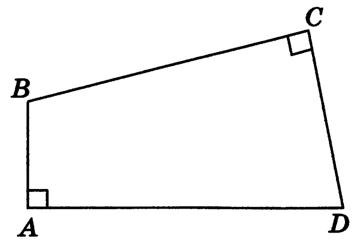


Рис. 100

В четырехугольнике *ABCD* противоположные углы *A* и *C* прямые, но он прямоугольником не является.

Вообще следует заметить, что школьники часто считают, что из суждения «Всякое *K* есть *P*» следует суждение «Все *P* суть *K*» вместо частноутвердительного «Некоторые *P* суть *K*».

Учащимся 5—6 классов может быть предложено задание: приведите контрпримеры, доказывающие ложность следующих высказываний:

а) любое число, оканчивающееся единицей, делится на 3;

б) любая фигура, имеющая три угла, является треугольником;

в) любые три отрезка могут быть сторонами треугольника;

г) в любом равенстве, в котором сумма больше известного слагаемого, неизвестное слагаемое есть число отрицательное;

д) сумма любого четного и любого нечетного числа есть число простое;

е) в любом прямоугольнике две смежные стороны не равны между собой;

ж) если углы *AOB* и *BOC* имеют общую сторону, то всегда угол *AOC* является их суммой;

з) чтобы углы были смежными, достаточно, чтобы две их стороны были противоположными лучами;

и) ни один отрезок на координатной плоскости не состоит из точек, у которых абсциссы равны.

Эту же работу следует продолжать и в 7—9 классах. Учащимся можно предложить задание на доказательство ошибочности определений посредством контрпримеров. В качестве примера остановимся на теме «Четырехугольники» (8 класс).

Задание. Докажите, что нижеперечисленные определения ошибочны:

а) прямоугольником называется четырехугольник, у которого диагонали равны;

б) прямоугольником называется четырехугольник, имеющий хотя бы два прямых угла;

в) параллелограммом называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны;

г) параллелограммом называется многоугольник, противоположные стороны которого попарно равны;

д) квадратом называется многоугольник, все стороны и все углы которого равны между собой;

е) квадратом называется такой многоугольник, у которого четыре стороны и четыре угла равны между собой.

Формировать у учащихся умение приводить примеры помогут такие задачи:

а) подберите такие значения x и y, для которых верно равенство $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$, и скажите, сколько можно подобрать пар таких значений x и y;

б) укажите значения λ, чтобы вектор $\lambda\vec{a}$ был противоположно направлен вектору $5\vec{a}$;

в) график функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает прямую $y=2$ в двух точках, а прямую $y=1$ — в одной точке; приведите примеры возможных значений a, b, c;

г) опровергните суждение: «При любых значениях переменной x выражение $\sqrt{-\frac{(x-1)^2}{x+1}}$ не имеет смысла».

§ 8. ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ УМЕНИЮ ВЫПОЛНЯТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЧЕРТЕЖИ И ЧИТАТЬ ИХ

Заметим, что если на пропедевтическом уровне у учащихся не будут сформированы умения выполнять и читать геометрический чертеж, то это приведет к серьезным затруднениям при изучении теорем в систематическом курсе геометрии.

В 2003/2004 учебном году из 837 учащихся 7 классов Черлакского района Омской области и Октябрьского административного округа г. Омска лишь 72,8% учащихся смогли выполнить чертежи к теоремам, содержащимся во второй и третьей главах учебника геометрии, хотя эти теоремы просты.

В 2004 г. 2835 учащихся 7 классов сельских школ Омской области писали контрольную работу по геометрии за первое полугодие. В двух предложенных вариантах первое задание преследовало цель проверить умение учащихся выполнять чертеж по словесной формулировке условия задачи. С этими задачами справились лишь 70,3% школьников. Приведем эти задачи.

1) Начертите неразвернутый угол hk. Постройте луч k_1, дополнительный лучу k, и луч l, являющийся внутренним лучом угла hk_1.

2) Начертите неразвернутый угол hl и внутренний луч k этого угла. Постройте луч k_1, дополнительный лучу k.

Вообще следует заметить, что без наглядности (одним из видов которой является чертеж) преподавание математики в школе стало бы вообще невозможным, причем это касается не только геометрии, но и алгебры. В подтверждение высказанной мысли приведем примеры из курса алгебры.

З а д а ч а 1. Петя, Коля и Витя решили 100 задач, причем каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один ученик, и легкой, если ее решили все трое. Докажите, что трудных задач на 20 больше, чем легких.

Без наглядности эту задачу решить весьма сложно, если на уровне ученика вообще возможно. Используем круги Эйлера, и тогда задача примет вид, который изображен на рисунке 101.

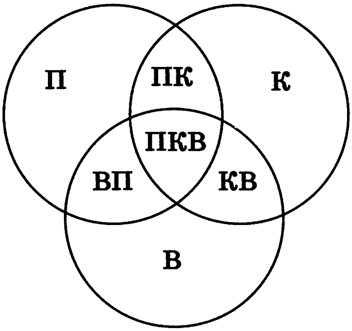


Рис. 101

Пусть П, К, В — число задач, решенных только Петей, Колей и Витей соответственно; ПК, КВ, ВП — число задач, решенных двумя мальчиками, и ПКВ — число легких задач, решенных всеми мальчиками.

Тогда число трудных задач равно П+К+В. По условию Петя решил 60=П+ПК+ПВ+ПКВ задач; Коля — 60=К+ +ПК+КВ+ПКВ задач; Витя — 60=В+ВП+КВ+ПКВ задач.

Сложим эти равенства, в результате чего получим

$$180=П+В+К+2\cdot ПК+2\cdot ВП+2\cdot КВ+3\cdot ПКВ.$$

По условию задачи 100=П+В+К+ПК+ВП+КВ+ПКВ. Умножим это равенство на 2 и вычтем из него предыдущее равенство, будем иметь П+К+В−ПКВ=20, откуда ПКВ= =(П+К+В)+20, что и означает, что число трудных задач на 20 больше, чем легких.

Таким же наглядным образом могут быть решены и следующие задачи:

а) В классе 30 учеников. 15 учеников посещают литературный кружок, 11 — биологический. Из них 4 человека участвуют в работе обоих кружков. 5 учеников занимаются в литературном и математическом кружках, а 3 — в биологическом и математическом. Только один ученик посещает все три кружка. Остальные занимаются только в математическом кружке. Сколько всего учащихся занимаются в математическом кружке?

б) В комнате собралось 17 человек. Десять из них знают английский язык, 13 — немецкий и французский, 2 человека владеют сразу тремя языками: немецким, французским и английским. Нет ли ошибки в этих данных?

в) Из 80 учащихся 6 классов в школе все изучают хотя бы один из иностранных языков: 40 — английский, 33 — французский, 15 — немецкий. Двое изучают все три языка, трое — английский и немецкий, четверо — немецкий и французский, пятеро — английский и французский. Верно ли составлена задача?

г) В классе 35 человек. Все в этом классе занимаются спортом: 25 человек — волейболом, 15 — баскетболом, 19 — футболом. Во всех трех секциях занимаются 4 человека; волейболом и

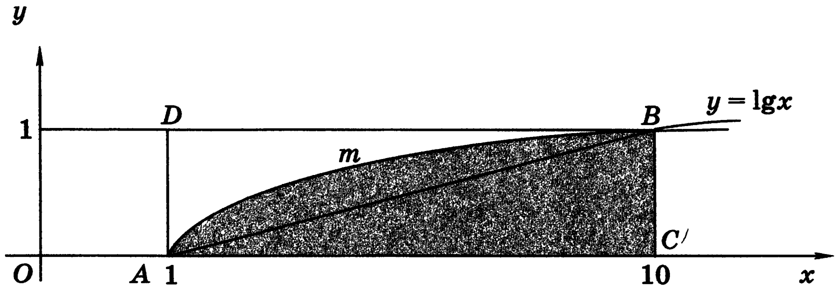


Рис. 102

баскетболом занимаются 10 человек; баскетболом и футболом — 7 человек; волейболом и футболом — 11 человек. Сколько человек занимается только в одной секции и в какой?

Задача 2. Доказать неравенство $4{,}5<\int\limits_1^{10}\lg x\,dx<9$, не прибегая к непосредственному вычислению интеграла.

Без наглядных иллюстраций ученики 10—11 классов эту задачу не решат. Все упрощается, если сделать чертеж (рис. 102) и воспользоваться геометрическим смыслом интеграла:

$$\int\limits_1^{10}\lg x\,dx=S_{AmBC},$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 1=4{,}5 \text{ (кв. ед.)},$$

$$S_{ADBC}=9\cdot 1=9 \text{ (кв. ед.)}.$$

Наглядность позволяет утверждать, что $S_{ABC}<S_{AmBC}<S_{ADBC}$, откуда имеем $4{,}5<\int\limits_1^{10}\lg x\,dx<9$.

Задача 3. Вычислить $\int\limits_0^1\arcsin x\,dx$.

Хорошо известен способ вычисления этого интеграла с помощью формулы интегрирования по частям. Однако этот интеграл можно вычислить и не используя эту формулу, а исходя из геометрических соображений.

Согласно геометрической интерпретации интеграла, заданный интеграл равен площади криволинейной трапеции, не закрашенной на рисунке 103.

Найти площадь криволинейной трапеции *OBC* можно как разность площадей прямоугольника *OABC* и площади области *OAB*, отмеченной на рисунке 103 краской. Легко видеть, что площадь фигуры *OAB* есть площадь под синусоидой $x=\sin y$ на участке изменения y от $y=0$ до $y=\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S_{OAB}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,dy=-\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

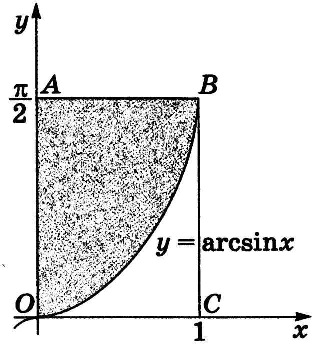


Рис. 103

Площадь прямоугольника $OABC$ равна $1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$. Итак, окончательно имеем

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,dy=\frac{\pi}{2}-1.$$

Задача 4. Доказать, что $\sin 20°<\frac{7}{20}$.

Доказательство

Поделим единичный круг с центром O на 18 равных секторов с углом 20° при вершине O (рис. 104). Площадь такого сектора AOB равна $\frac{1}{18}$ площади круга, т. е. $\frac{\pi}{18}$, и она больше площади $\triangle OAB$, которая равна $\frac{1}{2}\sin 20°$. Следовательно, $\frac{1}{2}\sin 20°<\frac{\pi}{18}$, т. е. $\sin 20°<\frac{\pi}{9}$. Но $\frac{\pi}{9}<\frac{7}{20}$, т. е. $\sin 20°<\frac{7}{20}$.

Задача 5. Сейчас папе вдвое больше лет, чем было маме тогда, когда папе было столько лет, сколько маме сейчас. Сколько лет маме и сколько папе, если вместе им сейчас 77 лет?

Решение

Изобразим данные задачи на чертеже (рис. 105). Здесь П — момент рождения папы, М — момент рождения мамы, Т — момент, когда папе было столько лет, сколько маме сейчас, Н — нынешний момент.

Из условия ясно, что папа старше мамы, поэтому моменты идут именно в таком порядке (см. рис. 105).

Возраст папы в момент Т — это отрезок ПТ, а возраст мамы сейчас — это отрезок МН. По условию ПТ = МН. Вычитая из отрезков ПТ и МН их общую часть МТ, получаем, что ПМ = ТН (1).

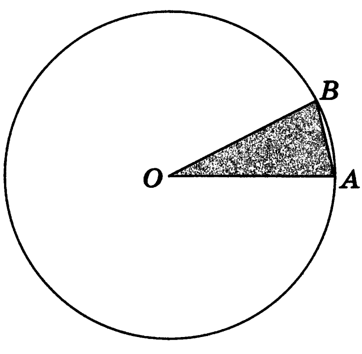


Рис. 104

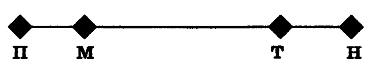


Рис. 105

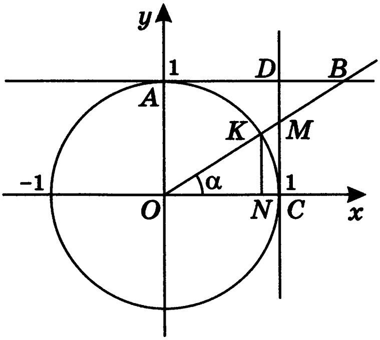


Рис. 106

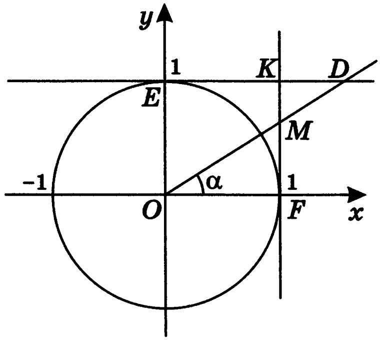


Рис. 107

Условие, что папе сейчас (в момент Н) вдвое больше лет, чем было маме тогда (в момент Т), означает, что ПН = 2МТ. Но ПН = ПМ + МТ + ТН. Поэтому получаем, что ПМ + ТН = МТ (2).

Примем длину отрезка ПМ за x. Используя равенства (1) и (2), получаем, что ТН $= x$ и МТ $= 2x$, откуда ПН $= 4x$ и МН $= 3x$. По условию задачи ПН + МН = 77, откуда $7x = 77$ и $x = 11$. Таким образом, папе сейчас $4x = 44$ года, а маме — $3x = 33$ года.

Чисто арифметическое или алгебраическое решение было бы крайне трудным для учащихся, на помощь нам и здесь пришла наглядность.

Без наглядных образов знания учащихся становятся бессодержательными, и это приводит к формализму. Вообще следует подчеркнуть, что там, где можно дать тому или иному математическому объекту наглядную интерпретацию, это следует делать в обязательном порядке. Приведем пример.

В школьном курсе математики даются наглядные образы синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу (рис. 106):

$$\sin\alpha = KN, \quad \cos\alpha = ON, \quad \operatorname{tg}\alpha = CM, \quad \operatorname{ctg}\alpha = AB.$$

Но с таким же успехом можно дать наглядную интерпретацию секансу и косекансу. Рассмотрим для этого чертеж (рис. 107).

Из треугольника OFM по теореме Пифагора имеем

$$OF^2 + FM^2 = OM^2;\ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = OM^2;\ 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = OM^2;$$

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = OM^2;\ \frac{1}{\cos^2\alpha} = OM^2;\ \sec^2\alpha = OM^2;\ \sec\alpha = OM.$$

Из треугольника OED по теореме Пифагора имеем

$$OE^2 + ED^2 = OD^2;\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = OD^2;\ 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = OD^2;$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = OD^2;\ \frac{1}{\sin^2\alpha} = OD^2;\ \operatorname{cosec}^2\alpha = OD^2;\ \operatorname{cosec}\alpha = OD.$$

Следуя Д. Н. Богоявленскому и Н. А. Менчинской, мы понимаем под наглядностью «деятельность ученика по отношению к конкретным предметам и явлениям. Это тот практический, реальный анализ, который представляет первую ступень познавательной деятельности и в этом смысле предшествует умственному анализу и синтезу, совершающемуся в словесном плане» [20, с. 132].

В школьном курсе геометрии ведущую роль в обеспечении наглядности играет чертеж. В этом курсе можно выделить три вида чертежей:

а) чертежи, иллюстрирующие содержание вводимого понятия;

б) чертежи, которые образно представляют условие решаемой задачи или рассматриваемого математического предложения;

в) чертежи, иллюстрирующие преобразование геометрических фигур.

Формируя у учащихся умение работать с чертежом, учитель должен помнить, что если ограничиваться стандартными чертежами, то школьники достаточно быстро связывают формируемое понятие или изучаемую теорему с фигурами определенного вида и расположения.

Это происходит вследствие того, что использование «стандартного» чертежа вызывает у учащихся неверные ассоциации, в результате которых они в содержание понятия или теоремы вносят и частные признаки демонстрируемой фигуры.

В такой ситуации наблюдается разобщенность между словесным объяснением учителя и геометрической наглядностью, т. е. знания, формируемые на базе одного и другого, не соответствуют друг другу.

Приведем несколько примеров подобного характера.

1. Ряд учащихся 5 класса при выполнении задания на распознавание фигур, например, к углу относили лишь фигуру, изображенную на рисунке 108, *б*.

Причиной тому послужил тот факт, что учитель, формируя понятие угла, использовал лишь рисунки, аналогичные рисунку 108, *б*, и школьники, у которых геометрические представления развиты плохо, попали «в плен» к наглядности.

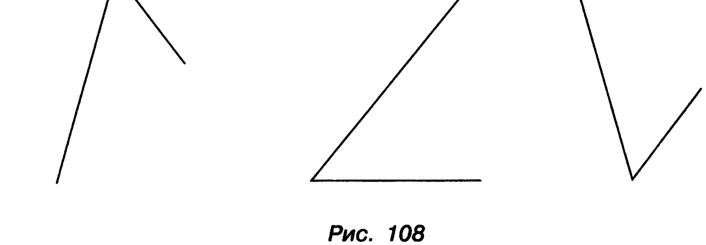


Рис. 108

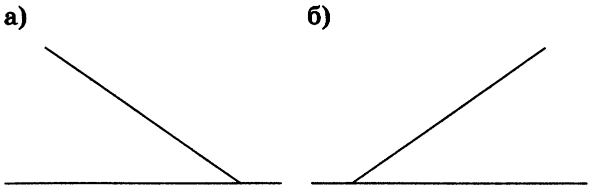


Рис. 109

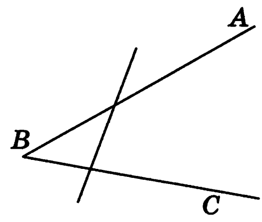


Рис. 110

2. Некоторые учащиеся к смежным углам отнесли лишь углы, изображенные на рисунке 109, *б*.

3. На просьбу учителя показать часть заданного угла некоторые учащиеся продемонстрировали это так, как изображено на рисунке 110.

4. Многие ученики к прямоугольным треугольникам относят лишь те, у которых прямой угол находится внизу (рис. 111, *б*, *в*).

Причиной ошибочного подведения под понятие явилось то, что учащиеся пользовались лишь одним признаком, а не совокупностью существенных признаков, при этом доминирующим стал наиболее ярко выраженный несущественный признак.

5. На вопрос: «Какой угол больше: $\angle 1$ или $\angle 2$?» — многие учащиеся 5 класса давали ошибочный ответ: «$\angle 1 > \angle 2$» (рис. 112, *а*, *б*).

В этом случае у учащихся не было сформировано понятие стороны угла, и они в процессе поиска соотношения элементов углов пользовались тем жизненным опытом, который вступил в противоречие с геометрическими знаниями.

6. Учащиеся воспринимают $\angle 1$ (рис. 113) как внешний угол, поскольку они привыкли видеть его в связи с треугольником (рис. 114).

Чтобы школьники относили рассуждения учителя к разнообразным чертежам, а не только к одному, который им первоначально демонстрировался, надо систематически пополнять у них запас конкретных геометрических представлений о фигурах посредством варьирования их несущественных признаков.

Учителю следует иметь в виду, что эффективность формирования у учащихся умений работать с чертежом в значительной степени зависит от того, в каком виде произошло первое знакомство с ним (в психологии этот факт носит название «силы первого впечатления»).

Д. И. Писарев в связи с этим писал: «Доказывая геометрическую теорему, гимназист только притворяется, будто он выводит доказательство одно из другого; он просто отвечает заученный урок; вся работа лежит на памяти, и там, где изменяет память, там оказывается бессильной математическая сообразительность, которую вы, благодушный педагог, уже готовы были предположить в вашем речистом ученике. Конечно, если пе-

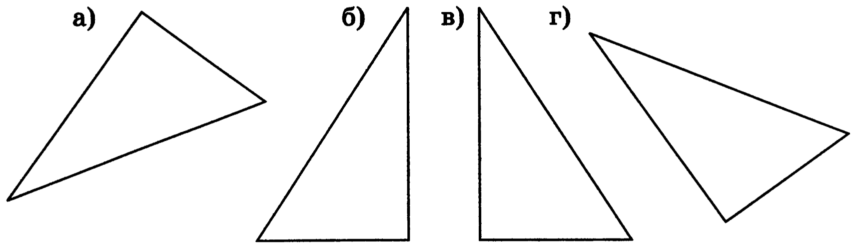


Рис. 111

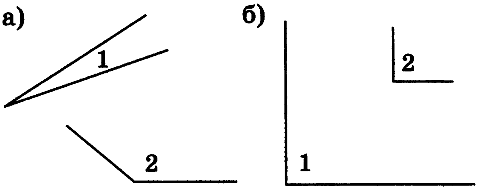


Рис. 112

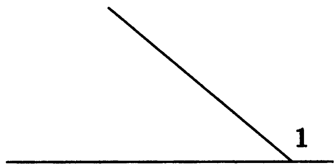


Рис. 113

ремените вы буквы чертежа, если вместо треугольника *ABC* дадите треугольник *LOP*, то ученик докажет и по этому треугольнику,— но вы этим не обольщайтесь; это покажет вам только, что отрок заучил не буквы, а фигуру чертежа, потому что буквы заучивают только те ни-

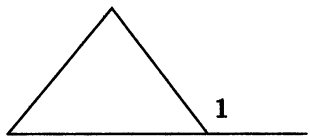


Рис. 114

щие духом, которые учат слово в слово историю, географию и другие литературные предметы. Такие личности уже переводятся в гимназиях. А вы попробуйте изменить фигуру; предложите, например, вместо остроугольника тупоугольник, или устройте так, чтобы заинтересованный в доказательстве угол глядел не в стену, как ему велено глядеть по учебнику геометрии, а хотя бы в пол или в потолок. Сделайте так, и я вам ручаюсь, что из десяти бойких геометров пятого класса девять погрузятся в бесплодную и мрачную задумчивость» [106, с. 59].

С целью предупреждения ошибок учащихся в понимании роли и назначении чертежа, в умении читать и строить чертеж по словесному заданию условия целесообразно: довести школьников до полного понимания роли чертежа в геометрии; показать образцы чтения чертежей; добиться того, чтобы учащиеся умели видеть в чертеже не только то, что бросается в глаза, но и все то, что содержится в нем; формировать у учащихся навыки в технике черчения; применять вариацию положения чертежа; использовать широко ТСО для демонстрации чертежа в динамике.

При работе с чертежом в пропедевтическом курсе математики у учащихся надо формировать систему приемов, разработанную В. П. Покровским [109] (укажем сами приемы и систему действий, которые учащиеся должны последовательно проделывать для каждого приема).

1) Прием подведения геометрической фигуры под понятие:

— вспомнить существенные признаки понятия, указанного в задаче;
— рассмотреть данную фигуру и проверить наличие у нее каждого из существенных признаков данного понятия;
— сделать соответствующий вывод.

2) Прием вычленения геометрической фигуры на чертеже:

— выяснить, о какой фигуре говорится в задаче;
— мысленно представить искомую фигуру и отметить ее существенные признаки;
— выделить ее на чертеже.

3) Прием установления вида геометрической фигуры:

— вспомнить виды указанного в задаче понятия и существенный признак каждого вида;
— установить, каким из этих признаков обладает данная фигура;
— на основании этого признака определить вид фигуры.

4) Прием включения одного и того же элемента чертежа в разные геометрические фигуры:

— выделить на чертеже элемент, о котором говорится в задаче;
— последовательно включить его в различные фигуры на чертеже.

5) Прием нахождения общих элементов разных геометрических фигур:

— вычленить на чертеже каждую из фигур, указанных в задаче;
— выделить общий элемент (точку, отрезок, угол и др.) этих фигур.

6) Прием разностороннего рассмотрения геометрической фигуры на чертеже:

— рассмотреть чертеж и выделить тот его элемент, о котором говорится в задаче;
— последовательно соотносить выделенный элемент с другими элементами чертежа;
— каждый раз подводить его под соответствующее понятие и указывать характерные свойства;
— использовать нужные свойства для решения задачи.

С целью экономии времени урока на построение различных вариантов одного и того же чертежа можно поступить следую-

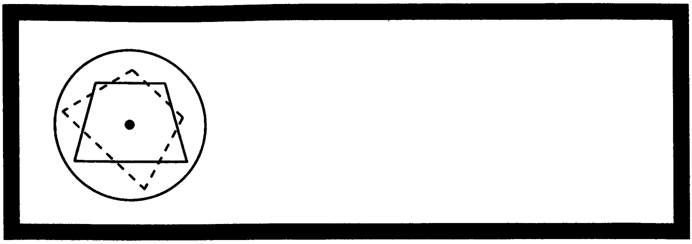


Рис. 115

щим образом. Из отдельной доски или из листа линолеума вырезается круг, который крепится так, чтобы он мог вращаться вокруг своего центра. К кругу прикрепляется небольшая ручка, с помощью которой можно его поворачивать (рис. 115).

Всякий раз, когда уже построенный чертеж учитель желает показать учащимся в другом положении, ему остается лишь повернуть круг, на котором этот чертеж изображен (на рисунке 115 новое положение трапеции показано пунктиром). Такой подход позволит также продемонстрировать учащимся и то, что при перемещении фигур их основные свойства сохраняются.

Варьировать полезно не только чертеж, но и способ его построения. Так, например, полезно учащимся предложить задачу на проведение перпендикуляра к данному отрезку через его середину в двух случаях: когда отрезок расположен на достаточном расстоянии от нижнего и верхнего краев листа бумаги (это приведет к общеизвестному решению, которое показано на рисунке 116) и когда отрезок расположен очень близко к нижнему краю листа бумаги (это приведет к способу построения, показанному на рисунке 117).

В методической литературе выделяют следующую *этапность в содержании работы по изучению геометрических понятий:*

1. Уточнение имеющихся у учащихся представлений и создание новых:

а) найти образы понятия в окружающем мире;

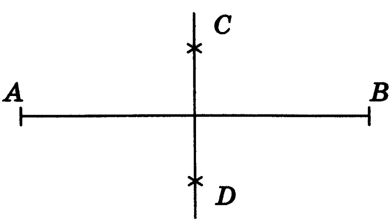


Рис. 116

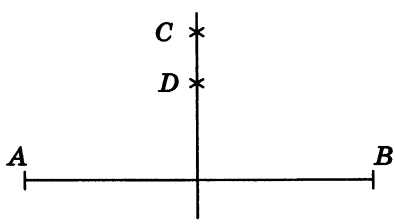


Рис. 117

б) построить изображение объекта, принадлежащего объему понятия;

в) сделать обозначение, символические записи.

2. Выявление свойств понятия по его образу или чертежу (выявление содержания):

а) выявить по чертежу свойства понятия;

б) выявить, какими еще свойствами обладает это понятие.

3. Вычленение существенных признаков понятия (уточнение содержания):

а) выяснить значимость каждого свойства для данного понятия;

б) перечислить выделенные существенные свойства.

4. Формулировка определения понятия:

а) выяснить ближайший род данного понятия;

б) указать свойства, входящие в определение;

в) сформулировать определение.

5. Подведение под понятие (уточнение объема понятия):

а) вспомнить свойства, входящие в определение понятия;

б) проверить наличие у объекта каждого из них;

в) сделать вывод о принадлежности объекта к понятию.

6. Установление взаимосвязей с другими понятиями:

а) установить, какие понятия используются в определении;

б) выяснить сходство и различие со сходными понятиями;

в) включить понятие в классификационную схему.

Важное место в формировании геометрических понятий должна занять работа по обучению учащихся подводить объект под понятие. Это можно делать путем комбинирования существенных свойств понятия. Покажем это на примере биссектрисы угла. Существенными свойствами этого понятия являются:

1) луч;

2) выходит из вершины угла;

3) делит угол пополам.

Школьникам предлагается определить, что представляет собой объект, обладающий: лишь свойствами 1) и 2); лишь свойствами 1) и 3); лишь свойствами 2) и 3).

Нами разработана программа, которая организует работу учащихся с этим заданием. Программа устроена следующим образом. На экран дисплея выводятся существенные свойства понятия «биссектриса угла». Учащемуся предлагается подвести поочередно курсор к двум первым свойствам (на месте курсора останется знак «+»). После этого на экране дисплея появится нужный рисунок. Затем школьник помечает свойства 1) и 3); 2) и 3); 1), 2) и 3), а программа на экран дисплея выведет соответствующие рисунки (рис. 118, *а*, *б*, *в*, *г*).

Первое, с чем встречается ученик при доказательстве теоремы,— это усвоение условия теоремы и в соответствии с ним выполнение чертежа. Заметим, что не всегда школьные учебники написаны доступным, понятным языком, иногда они не соответствуют уровню развития учащихся.

Как показывает практика, ученикам труднее всего даются такие тексты, в которых краткость изложения достигается за счет нанизывания нескольких придаточных предложений, большого числа причастных и деепричастых оборотов, вынесения конечного вопроса задачи в начало ее условия, применения в тексте сложных синтаксических конструкций.

В качестве примера приведем две формулировки одной и той же задачи.

а) Определите острый угол, если перпендикуляр, восстановленный из его вершины к его биссектрисе, образует с его сторонами два угла, из которых тупой угол вдвое больше острого угла.

б) Дан острый угол и его биссектриса. Из вершины угла к биссектрисе восстановлен перпендикуляр. Перпендикуляр образует со сторонами острого угла два угла, из которого один тупой, а другой острый. Тупой угол вдвое больше острого. Определите данный острый угол.

В 7 классе были получены такие результаты: по первой формулировке чертеж построили 11% учащихся, а по второй формулировке — 88%.

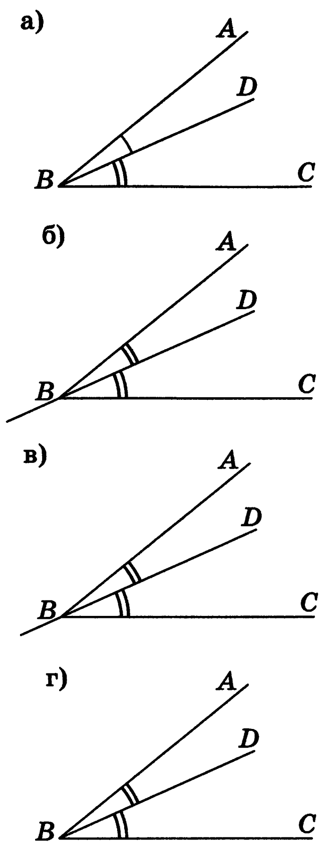


Рис. 118

Лучшие результаты во втором случае были получены вследствие того, что условие задачи формулировалось короткими фразами, основные мысли выражались простыми предложениями, были представлены в виде прямых указаний с соблюдением такой последовательности, которая по сути отражала этапность построения чертежа.

Заметим, что при решении задач, доказательстве теорем чертеж является основным средством наглядности. Вот почему надо стремиться к тому, чтобы научить учащихся располагать чертеж так, чтобы он облегчал наглядное представление о содержании задачи или теоремы и помогал искать путь решения или доказательства. Проиллюстрируем на трех задачах.

З а д а ч а 1. Доказать, что периметр равностороннего треугольника, описанного около окружности, вдвое больше периметра равностороннего треугольника, вписанного в эту же окружность.

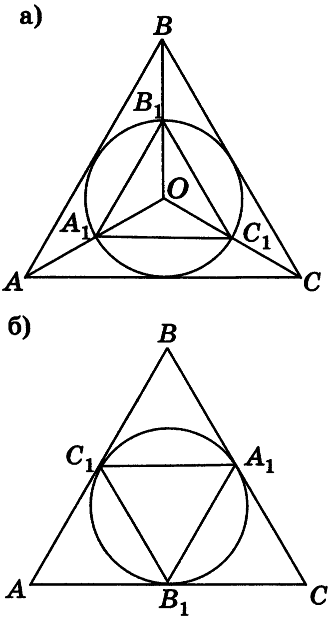


Рис. 119

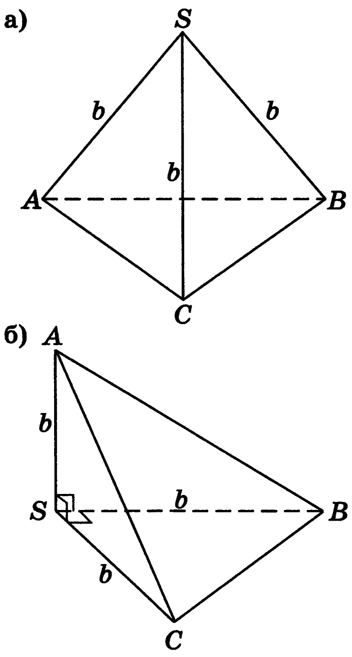


Рис. 120

Если к этой задаче сделать чертеж, показанный на рисунке 119, *а*, то надо будет доказывать, что отрезок C_1A_1 является средней линией треугольника COA, а для этого ученик должен заметить, что отрезок CO равен $2r$. Значительно проще решение задачи будет получено в том случае, если чертеж к ней будет таким, каким он изображен на рисунке 119, *б*.

Конечно, решение этой задачи может быть значительно упрощено, если использовать подобие фигур. Так как все равносторонние треугольники подобны, то отношение их периметров равно отношению любых соответственных линейных элементов, например радиусов вписанных окружностей. Но окружность, вписанная в больший из этих треугольников, является окружностью, описанной около меньшего из них. Отсюда и из свойств равностороннего треугольника сразу следует, что отношение этих радиусов равно 2.

Задача 2. Найти объем треугольной пирамиды, если все плоские углы при вершине прямые и боковые ребра равны b.

Как показывает практика, абсолютное большинство учащихся к этой задаче строят чертеж, изображенный на рисунке 120, *а*. При таком чертеже решение этой задачи становится очень трудным. Если же к этой задаче сделать чертеж, изображенный на рисунке 120, *б*, то она становится тривиальной.

Решение по рисунку 120, *б* будет таким:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot b = \frac{1}{6} \cdot b^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Задача 3. В ромбе острый угол равен 30°, а сторона — 8 см. Найти радиус вписанной в него окружности.

Если к этой задаче сделать такой чертеж, как на рисунке 121, *а*, то учащимся будет трудно догадаться о целесообразности использования при решении площади ромба.

Если же использовать чертеж, изображенный на рисунке 121, *б*, то легко усмотреть, что $h=2r$ и поэтому $S=8\cdot 2r=16r$. В то же время $S=8\cdot 8\cdot \sin 30°=32$, откуда $16r=32$, $r=2$.

Вообще к чертежу следует предъявлять следующие три основных требования: чертеж должен быть верным, наглядным, легко выполнимым.

Забегая вперед, отметим, что в работе с чертежом при доказательстве теорем учащимся будут нужны два ведущих метода: реконструкция, дополнительное построение. Проиллюстрируем эти методы на примерах.

На рисунке 122, *а* дан чертеж к теореме: «В треугольнике проведены трисектрисы углов A и B. Доказать, что MN является биссектрисой угла AMB».

Убрав лишнее на чертеже, т. е. проведя его реконструкцию (рис. 122, *б*), легко заметить, что BN и AN стали биссектрисами углов A и B. По известной теореме о биссектрисах треугольника делаем вывод о том, что и MN есть биссектриса угла AMB.

Метод дополнительного построения покажем на примере доказательства такой теоремы: «В треугольнике ABC (рис. 123, *а*) $CD=l$ является биссектрисой. Доказать, что $l^2=ab-mn$».

Для доказательства теоремы следует выполнить дополнительное

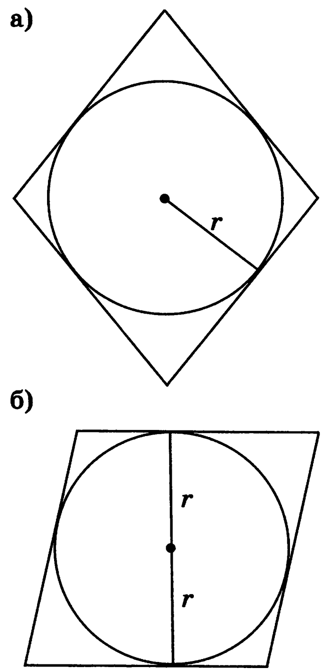


Рис. 121

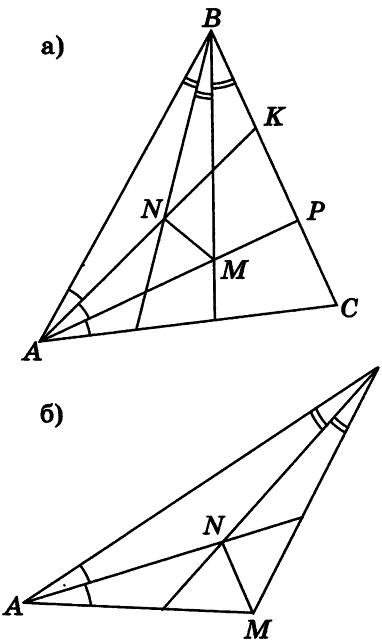


Рис. 122

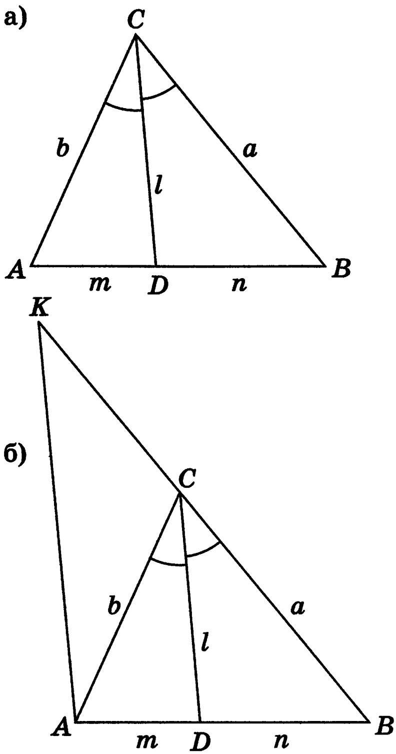


Рис. 123

построение: провести $AK \parallel DC$ и продолжить сторону BC до пересечения с AK (рис. 123, *б*); используя подобие треугольников, легко доказать нужное равенство.

Эффективным средством для наглядной иллюстрации понятий, демонстрации чертежей и рисунков является компьютер. Возможность компьютера представлять динамику графических изображений как никакая другая его возможность изменит характер преподавания геометрии: становится возможным описывать геометрические фигуры не только уравнениями, но и с помощью процедур.

По отношению к тексту учебника иллюстрации можно разделить на три группы: ведущие, равнозначные и обслуживающие.

Ведущие иллюстрации самостоятельно раскрывают содержание учебного материала, заменяя основной текст учебника.

Все понятия, которым в школьном курсе геометрии даются конструктивные определения, следует подкреплять ведущей иллюстрацией. К таким понятиям можно отнести луч, цилиндр, конус, сферу, шар и т. д.

Равнозначные иллюстрации служат целям более глубокого и эффективного усвоения содержания учебного материала.

Цель этих иллюстраций — дать определениям геометрических понятий, сформулированных в учебнике в свободной логической форме, адекватную алгоритмическую процедуру получения этих понятий.

Приведем пример такой иллюстрации. В учебнике [30] дан текст, вводящий понятие *угол в 1 радиан*: «Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называется углом в 1 радиан». Такой текст следует сопроводить на компьютере равнозначной иллюстрацией, дающей возможность ученику увидеть процедуру получения этого понятия. Программа, реализующая эту иллюстрацию, может быть построена по следующему сценарию:

а) чертится окружность произвольного радиуса с центром в точке O (рис. 124);

б) имитируется нитка, с помощью которой измеряется радиус этой окружности;

в) эта нитка откладывается по окружности от точки A, в результате чего появляется точка B;

г) точка B соединяется с центром O окружности;

д) высвечивается радиус окружности OA и дуга AB и подчеркивается равенство их длин;

е) высвечивается центральный угол BOA и появляется соответствующий текст на экране дисплея.

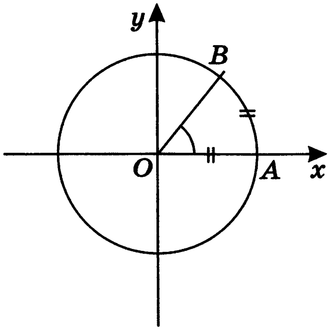


Рис. 124

Равнозначные иллюстрации должны устранить разобщенность между словесным объяснением понятия и геометрической наглядностью, с этой целью учащимся следует предлагать рисунки, на которых бы варьировались несущественные признаки понятия.

Обслуживающие иллюстрации призваны дополнять, конкретизировать содержание текста учебника.

В работе с геометрическими понятиями эти иллюстрации должны предлагать рисунки, на которых представлены различные комбинации существенных признаков понятий. Роль обслуживающих иллюстраций — сформировать у учащихся навык подведения под понятие.

§ 9. ФОРМИРОВАНИЕ У УЧАЩИХСЯ УМЕНИЯ ВЫВОДИТЬ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ЗАДАННЫХ УСЛОВИЙ

А. А. Столяр [124] в обучении учащихся доказательствам выделяет два основных уровня:

а) первый уровень (5—8 классы) — используемые в доказательствах правила вывода остаются невыясненными, они применяются в неявном виде, основное внимание уделяется выяснению того, «что следует» и «из чего следует», но не «как это следует»;

б) второй уровень (9—11 классы) — понятие доказательства может быть несколько уточнено, учащимся разъясняются простейшие правила вывода, и им становятся доступны анализ доказательства, выявление его логической структуры, используемых в нем правил вывода, т. е. уделяется внимание и тому, «как это следует».

В данной работе мы остановимся на первом уровне. Приведем примеры, на которых возможно формировать у учащихся умение выводить следствия из заданных условий.

1) Известно, что AB — отрезок. Сделайте из этого выводы.

Ответ: AB — часть прямой; точки A и B — концы отрезка; все другие точки отрезка лежат между точками A и B.

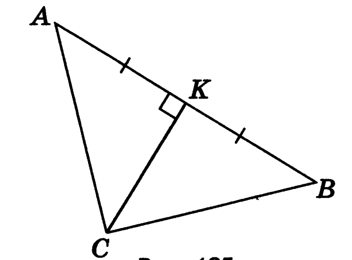


Рис. 125

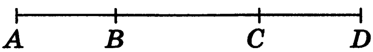


Рис. 126

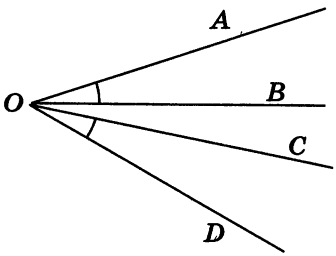


Рис. 127

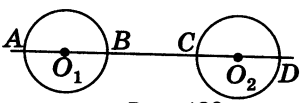


Рис. 128

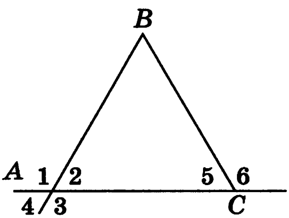


Рис. 129

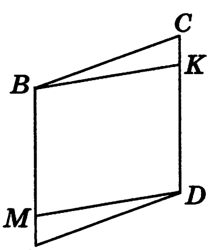


Рис. 130

2) Известно, что BC — биссектриса угла ABD. Сделайте из этого выводы.

3) Назовите свойства треугольника ABC, которые следуют из рисунка 125.

Ответ: $\triangle ABC$ — равнобедренный; $\angle A = \angle B$; CK — высота, медиана, биссектриса.

4) Дано: $AB = CD$ (рис. 126). Сделайте возможные выводы.

Ответ: $AC = BD$.

5) Дано: $\angle AOB = \angle COD$ (рис. 127). Сделайте возможные выводы.

Ответ: $\angle AOC = \angle BOD$.

6) Дано: $O_1C = BO_2$ (рис. 128). Сделайте возможные выводы.

Ответ: $O_1B = CO_2$; $AB = CD$; $AC = BD$; $AO_1 = O_1B = CO_2 = O_2D$.

7) Дано: $AB = BC$ (рис. 129). Сделайте возможные выводы.

Ответ: $\angle 2 = \angle 5$; $\triangle ABC$ — равнобедренный; $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$; $\angle 1 + \angle 2 = 2d$; $\angle 5 + \angle 6 = 2d$; $\angle 1 = \angle 6$; $\angle 2 + \angle 3 = 2d$; $\angle 1 + \angle 4 = 2d$; $\angle 3 + \angle 4 = 2d$; $\angle 3 = \angle 6$.

8) Дано: $BC \parallel AD$, $BC = AD$, $AM = CK$ (рис. 130).

Найдите возможные следствия из заданных условий.

Ответ: следствия: 1) $ABCD$ — параллелограмм; 2) $AB = CD$; 3) $AB \parallel CD$; 4) $BM = KD$; 5) $\triangle BCK = \triangle DAM$; 6) $\angle C = \angle A$; 7) $\angle BKC = \angle DMA$; 8) $BKDM$ — параллелограмм; 9) $\angle BKD = \angle BMD$; 10) $BK \parallel MD$; 11) $BK = MD$ и т. д.

9) Получите не меньше пяти следствий из условия, что $AO = OC$, $\angle BAO = \angle BCO$ (рис. 131).

10) Найдите возможные следствия из условий: $\angle ACB = 90°$, $CM = CK$, $\angle CAO = \angle CBO$ (рис. 132).

11) Продолжите высказывание.

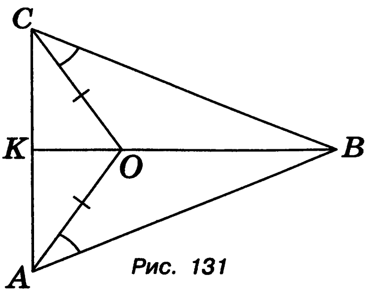


Рис. 131

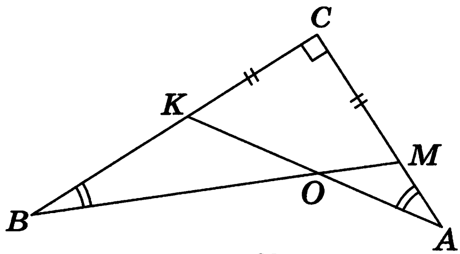


Рис. 132

Прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 133), следовательно:

. . . .

. . . .

. . . .

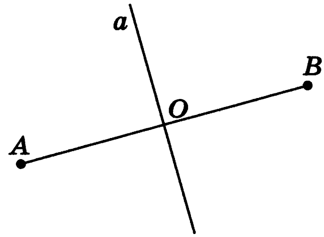


Рис. 133

12) Что можно сказать о наибольшем общем делителе нескольких чисел, если каждое из данных чисел умножить на одно и то же число?

Ответ: наибольший делитель этих чисел умножится на то же самое число.

13) Если некоторое число является общим делителем данных чисел, то чем оно является по отношению к их наибольшему общему делителю?

Ответ: делителем их наибольшего делителя.

14) Какими числами являются частные от деления данных чисел на их наибольший общий делитель?

Ответ: частные от деления данных чисел на их наибольший общий делитель есть взаимно простые числа.

15) Всякий ли делитель наибольшего общего делителя данных чисел является общим делителем этих чисел?

Ответ: всякий делитель наибольшего общего делителя данных чисел есть общий делитель этих чисел.

16) Если данные числа взаимно простые, то что можно сказать о их наименьшем общем кратном?

Ответ: если данные числа взаимно простые, то наименьшее общее кратное равно их произведению.

17) Что произойдет с наименьшим общим кратным нескольких чисел, если каждое из этих чисел умножить на одно и то же число?

Ответ: если каждое из этих чисел умножить на одно и то же число, то и их наименьшее общее кратное умножится на это число.

18) Что можно сказать о наименьшем общем кратном нескольких чисел, если какое-то из них делится на все остальные?

Ответ: если какое-то из них делится на все остальные, то оно есть наименьшее общее кратное данных чисел.

19) Что вы можете сказать о произведении наибольшего общего делителя двух чисел на их наименьшее общее кратное?

Ответ: произведение двух данных чисел равно произведению их наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

20) На основе каких свойств чисел получены соответствующие следствия из заданных равенств?

а) $x \cdot (x-3) = x-3$; $\quad x=1,\ x-3=0$;
б) $(x+5) \cdot (2x+1) = x+5$; $\quad 2x+1=1,\ x+5=0$;
в) $(x^2+1) \cdot (7-x) = 7-x$; $\quad x^2+1=1,\ 7-x=0$;
г) $1993-(x+8)=1993$; $\quad x+8=0$;
д) $1993-(x-7)=1992$; $\quad x-7=1$;
е) $(7x+5)+(x-9)=7$; $\quad 7x+5=6;\ x-9=1$;
ж) $(x+5) \cdot (8x-4)=0$; $\quad x+5=0,\ 8x-4=0$.

Работу по обучению учащихся умению выводить следствия из заданных условий следует продолжать и в курсе математики 7—9 классов, в том числе и в курсе алгебры. Покажем, как это можно сделать на примере квадратных уравнений. Учащимся можно предложить получить следствия (заполнить три последние колонки таблицы 1) из указанных условий (сведения, содержащиеся в четырех первых колонках этой таблицы).

Таблица 1

$$ax^2+bx+c=0$$

D	a	b	c	Знаки x_1	Знаки x_2	Абсолютные значения корней
+	+	+	+			
+	+	−	+			
+	+	+	−			
+	+	−	−			
0	+	+	+			
0	+	−	+			
−	+	+	+			
−	+	−	+			
+	−	+	+			
+	−	−	+			
+	−	+	−			
+	−	−	−			
0	−	+	+			
0	−	−	+			
−	−	+	+			
−	−	−	+			

Приведем примеры возможных заданий.

1) Что можно сказать о корнях уравнения, которое получено из исходного $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$, если в нем поменяли местами a и c?

Ответ: получится уравнение, корни которого обратны корням данного.

2) Что можно сказать о корнях уравнения, которое получено из исходного $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$, если в нем поменяли знак коэффициента b?

Ответ: получится уравнение, корни которого противоположны корням исходного уравнения.

Обучая учащихся выводить следствия из заданных условий, целесообразно показать им, что среди этих следствий есть первичные и производные. Так, например, из условия «$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные углы» следуют такие первичные следствия:

— два угла;
— одна сторона общая;
— две другие стороны этих углов являются продолжением друг друга.

Производными следствиями будут:

— сумма смежных углов равна 180°;
— если два угла равны, то смежные с ними углы равны;
— угол, смежный с прямым, есть прямой угол;
— угол, смежный с острым углом, тупой;
— угол, смежный с тупым углом, острый;
— угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

Из условия «луч есть биссектриса угла» следуют:

первичные следствия:	*производные следствия:*
— луч; — выходит из вершины угла; — делит угол пополам.	— биссектриса угла образует с его сторонами углы, не большие 90°; — угол между биссектрисами смежных углов прямой; — биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой и т. д.

Из этих примеров видно, что к первичным следствиям относятся фактически существенные признаки понятия, входящие в его определение.

§ 10. ФОРМИРОВАНИЕ У УЧАЩИХСЯ УМЕНИЯ ПРОВОДИТЬ ДОКАЗАТЕЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ, ДЕЛАТЬ ВЫВОДЫ

Умения проводить доказательные рассуждения входят в число основных интеллектуальных умений. Ведущая роль в формировании этих умений принадлежит геометрии, однако, как показал анализ школьной практики, успех в этой работе в значительной степени предопределен готовностью учащихся уже в начале курса выполнять различные виды деятельности, связанные с проведением доказательных рассуждений. Готовить школьников к проведению доказательных рассуждений следует уже в пропедевтическом курсе математики 5—6 классов, но эту работу необходимо проводить и в 7—9 классах.

Следуя А. Н. Капиносову [73], мы под рассуждениями понимаем мыслительную деятельность, направленную на решение определенных задач, состоящую из актуализации некоторых ранее известных субъекту суждений и выполняемых на их основе переходов от одних суждений к другим. Под доказательными рассуждениями понимаются такие, в которых основаниями перехода от одних суждений к другим являются теоретические предложения (аксиомы, теоремы, определения некоторой математической теории).

В методической литературе выделяют четыре уровня проведения доказательных рассуждений:

- простое воспроизведение (предъявленная задача распознается субъектом как ранее решенная, и рассуждение представляет воспроизведение известного);
- обобщенное воспроизведение (рассуждение проводится на основе выделения общего в условии и требовании предъявленной задачи и ранее решенной или на основе распознавания задачи как принадлежащей к типу задач с известной схемой рассуждения);
- логический поиск (решение задачи отыскивается на основе выполнения действий выведения следствий и отыскания достаточных условий);
- логико-эвристический уровень (выполнение действий выведения следствий или отыскания достаточных условий связано с применением различного рода эвристик).

Первые два уровня являются репродуктивными, а последние два — продуктивными. В 5—6 классах для учащихся надо проводить доказательные рассуждения на первых трех уровнях, четвертый уровень относится к более поздним ступеням обучения. Обучать учащихся 5—6 классов умениям доказательно рассуждать надо в основном на числовом материале, ибо он занимает в этом курсе значительный удельный вес и логически относительно прост. В свое время А. И. Маркушевич отмечал: «Логическая структура арифметических и алгебраических вопросов и задач, как правило, является простой, отчетливой, поэтому их следует в значительно большей мере, чем это делалось до сих пор, привлекать в целях математического воспитания» [92, с. 40].

Приведем примеры некоторых заданий, на которых может строиться работа по формированию у учащихся умения проводить доказательные рассуждения, но прежде на двух задачах покажем, как должен строиться ответ школьников.

Задание 1. Число a — отрицательное. Положительным или отрицательным числом будет $(-8+a)$? Ответ обосновать.

Ответ: число $(-8+a)$ — отрицательное, так как сумма отрицательных чисел — число отрицательное.

Задание 2. Может ли значение выражения $2ab-a-3b$ быть отрицательным при отрицательных значениях a и b? Ответ обосновать.

Ответ: нет, ни при каких отрицательных a и b значение указанного выражения не может быть отрицательным, так как при любых отрицательных a и b каждое слагаемое выражения ($2ab$; $-a$; $-3b$) есть число положительное, а сумма положительных чисел всегда есть число положительное.

Укажем еще ряд заданий подобного характера.

1) Числа $a+p$ и a равны. Какое число обозначено буквой p? Ответ обосновать.

2) $a+b=p$, $b+a=k$. Могут ли буквы p и k обозначать различные числа? Ответ обосновать.

3) $a-b=p$. Является ли число p разностью чисел $a+m$ и $b+m$? Ответ обосновать.

4) Число a делится на число b, число k не делится на число b. Делится ли число ak на число b? Ответ обосновать.

5) Число a делится на число b, число k не делится на число b. Делится ли число $a+k$ на число b? Ответ обосновать.

6) При делении числа a на число 12 получим в остатке число 15. Правильно ли выполнено деление?

7) Доказать, что число 37 является делителем всех трехзначных чисел, записанных одинаковыми цифрами.

8) Число b кратно 15. Доказать, что число b кратно 3.

9) $a=30b$. Какой цифрой оканчивается запись числа a? Ответ обосновать.

10) Для записи числа использованы только цифры 3, 7, 8. Делится ли это число на 5? Ответ обосновать.

11) Для записи числа использованы только цифры 0 и 5. Делится ли это число на 5? Ответ обосновать.

12) Верно ли утверждение: любое натуральное число является простым или составным? Ответ обосновать.

13) Доказать, что числа 21 и 55 взаимно простые числа. Ответ обосновать.

14) Могут ли два различных четных числа быть взаимно простыми? Ответ обосновать.

15) Запись числа a оканчивается цифрой 0, числа b — цифрой 5. Могут ли числа a и b быть взаимно простыми? Ответ обосновать.

16) На координатной прямой отмечены точками C и A числа 7 и a так, что $OC \neq OA$. Являются ли числа 7 и a противоположными? Ответ обосновать.

17) Может ли число $|b|$ изображаться на координатной прямой точкой, которая лежит слева от начала отсчета? Ответ обосновать.

18) Числа $a-4$ и $|a-4|$ равны. Положительным или отрицательным является число $a-4$, если известно, что $a-4 \neq 0$? Ответ обосновать.

19) Число a отрицательное. Какое из чисел больше: $b+a$ или b? Ответ обосновать.

20) Два числа отмечены на координатной прямой точками, которые лежат по одну сторону от начала отсчета. Может ли сумме чисел соответствовать точка, которая лежит с другой стороны от начала отсчета? Ответ обосновать.

21) Может ли число 5 быть суммой двух отрицательных чисел? Ответ обосновать.

22) Модулем чисел a и b являются соответственно числа $-a$ и $-b$. Положительным или отрицательным является число $a+b$? Ответ обосновать.

23) Дано число $b \neq 0$. Положительным или отрицательным является число b, если $7b=-7|b|$? Ответ обосновать.

24) Для чисел a, b, c, k выполняются равенства $5a=c$, $5b=k$. Сравнить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{k}$. Ответ обосновать.

25) Доказать, что взаимно обратные числа не могут иметь различные знаки.

26) На координатной прямой по разные стороны от начала отсчета отмечены точками числа a и b. Могут ли числа a и b быть взаимно обратными? Ответ обосновать.

27) Обосновать равенство $7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, не выполняя вычислений.

28) Доказать, что: а) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; б) $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$.

29) $a+c=a$. Могут ли числа a и c быть взаимно обратными? Ответ обосновать.

Как показал анализ школьной практики, умения доказательно рассуждать не приобретаются учащимися спонтанно, их нужно целенаправленно формировать и развивать посредством специально подобранных задач. М. Е. Драбкина и И. Л. Никольская отмечают: «Если ограничиться только разбором образцов доказательств в классе и решением обычных (предлагаемых учебником) задач на доказательство, то только у отдельных, лучших учащихся стихийно вырабатываются соответствующие приемы мыслительной деятельности, но они не всегда осознаются ими как общие приемы. Большинство же учащихся беспомощны, когда им приходится самим решать задачи на доказательство» [65, с. 6].

На пропедевтическом уровне школьников следует учить строить не только индуктивные, но и дедуктивные рассуждения, они-то и будут впоследствии положены в основу доказательства теорем. Приведем примеры дедуктивных рассуждений.

Пример 1. Докажите, что числа $a=-135$ и $b=-207$ не обращают в нуль выражение $2a-3 \cdot \frac{a}{b} - 7ab$.

Индуктивное рассуждение основывалось бы на непосредственной подстановке указанных значений a и b в выражение (значение выражения будет отлично от нуля).

Дедуктивное обоснование того, что $a=-135$ и $b=-207$ не обращают в нуль заданное выражение, будет строиться следующим образом.

При подстановке в заданное выражение любых отрицательных значений a и b каждое слагаемое этого выражения $\left(2a;\ -3\cdot\frac{a}{b};\ -7ab\right)$ будет отрицательным, и они в сумме не могут дать нуль. Так как числа $a=-135$ и $b=-207$ отрицательные, то и они не обращают в нуль заданное выражение.

Пример 2. Рассмотрим, каким образом можно в курсе математики 6 класса дедуктивно построить изложение вопроса о нахождении расстояния между двумя точками на координатной оси (этот вопрос в учебнике [100] изложен конкретно-индуктивным методом).

Центральным в курсе математики является само понятие расстояния между двумя точками, а нахождение расстояния между двумя точками на координатной оси — вопрос все же частный. В нашем изложении будем отталкиваться от общего понятия — расстояния между двумя точками.

Прежде учащимся уже предлагались различные способы измерения расстояния между двумя точками: с помощью масштабной линейки, с помощью циркуля и масштабной линейки (в систематическом курсе геометрии будут даны и другие способы, в частности основанные на теореме Пифагора, теоремах синусов и косинусов).

Для нахождения расстояния между двумя точками может быть использована координатная ось. Наложим координатную ось на две заданные точки. При этом возможны три разных случая (рис. 134, *а, б, в*):

а) точки A и B оказались по правую сторону от начала отсчета ($a>0,\ b>0$);

б) точки A и B оказались по разные стороны от начала отсчета ($a<0,\ b>0$);

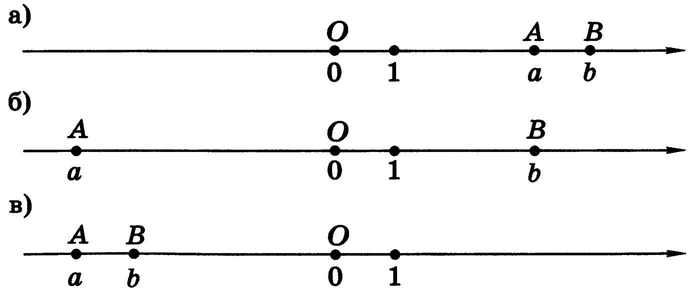


Рис. 134

в) точки A и B оказались по левую сторону от начала отсчета ($a<0,\ b<0$).

Заметим, что в каждом из трех случаев точки займут на координатной оси одно определенное место, которое характеризуется координатой точки.

Для нахождения длины отрезка AB в случае, показанном на рисунке 134, *а*, поступим следующим образом: $AB=OB-OA=$ $=b-a$.

Для нахождения длины отрезка AB в случае, показанном на рисунке 134, *б*, следует поступить так: $AB=OB+OA=$ $=b+|a|=b-a$ (при раскрытии $|a|$ знак поменялся на противоположный, так как число a отрицательное).

Для нахождения длины отрезка AB в случае, показанном на рисунке 134, *в*, поступим так: $AB=OA-OB=|a|-|b|=$ $=-a-(-b)=-a+b=b-a$ (при раскрытии $|a|$ и $|b|$ знак поменялся на противоположный, так как числа a и b отрицательные).

Итак, для нахождения расстояния между двумя точками на координатной оси следует из координаты правой точки вычесть координату левой точки.

Затем, рассмотрев свойство модуля, а именно $|a-b|=|b-a|$, учащимся можно сообщить, что длина отрезка AB выражается формулой $AB=|a-b|=|b-a|$.

Большое значение для формирования у учащихся умения рассуждать, делать выводы из условия и полученных результатов имеют логические задачи. Приведем примеры.

1) Встретились три подруги: Белова, Краснова и Чернова. На одной из них было надето черное платье, на другой — красное, на третьей — белое. Девочка в белом платье говорит Черновой: «Нам надо поменяться платьями, а то цвет наших платьев не соответствует фамилии». Кто в какое платье был одет?

Покажем один из возможных способов оформления решения задач такого типа. Суть этого способа состоит в заполнении таблицы 2.

Таблица 2

Цвет / Фамилия	Белый	Черный	Красный
Белова	–	+	–
Чернова	–	–	+
Краснова	+	–	–

Из условия задачи следует, что на Беловой не белое платье, на Черновой не черное, на Красновой не красное. Поставим минусы в нужных строках и столбцах таблицы.

Из условия задачи также следует, что девочка в белом платье не Чернова — поставим минус в соответствующей клетке таблицы. Теперь можно сделать вывод, что белое платье может быть только на Красновой — поставим в соответствующей клетке таблицы плюс. И т. д. Так последовательно будут заполнены знаками «плюс» и «минус» все клетки таблицы.

2) Четыре брата — Коля, Саша, Вася и Петя — учились в 4, 5, 6, 7 классах. Кто в каком классе учился, если Петя — отличник и младшие братья стараются брать с него пример. Саша уже изучает в школе физику, а Коля помогает младшему брату решать задачи. При решении заполним таблицу 3.

Таблица 3

Класс / Имя	4	5	6	7
Коля	–	+	–	–
Саша	–	–	–	+
Вася	+	–	–	–
Петя	–	–	+	–

Из условия задачи следует, что Саша уже изучает в школе физику, а значит, он учится в 7 классе (в 4—6 классах физику не изучают). Поставим в соответствующей клетке С7 знак «плюс». Из этого следует, что в клетках С4, С5, С6, а также в клетках К7, В7, П7 надо поставить знак «минус».

Как следует из условия задачи, у Пети есть младшие братья, а поэтому Петя учится в 6 классе, в связи с чем поставим знак «плюс» в клетке П6, а в клетках П4, П5, К6, В6 поставим знак «минус».

Так как Коля помогает решать младшему брату задачи, то Коля учится в 5 классе, в связи с чем в клетке К5 ставим знак «плюс», а в клетках К4, В5 поставим знак «минус».

Так как в клетках В5, В6, В7 стоит знак «минус», то это означает, что Вася может учиться только в классе 4 — ставим знак «плюс» в клетке В4.

3) Три подруги надели платья различных расцветок: одна — голубое, другая — белое, третья — зеленое. Цвет их обуви отличался от цвета платьев, только у Оли цвет обуви и платья был одинаковым. Наташа была в зеленых босоножках. Платье и обувь Вали не были белыми. Кто и как был одет?

Решение представлено в виде таблицы 4, в которой цифрами указан порядок заполнения знаков «плюс» и «минус».

Таблица 4

Имя	Обувь			Одежда		
	г	б	з	г	б	з
Оля	–5	+6	–2	–8	+7	–8
Наташа	–2	–2	+1	+10	–8	–9
Валя	+4	–3	–2	–11	–3	+12

4) В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но ни один из нас не имеет волос того цвета, на который указывает его фамилия»,— заметил черноволосый. «Ты прав»,— сказал Белов. Какого цвета волосы у друзей?

Решение представлено в виде таблицы 5, в которой цифрами указан порядок заполнения знаков «плюс» и «минус».

Таблица 5

Фамилия \ Цвет	Белый	Черный	Рыжий
Белов	−1	−4	+5
Чернов	+7	−2	−6
Рыжов	−8	+9	−3

5) Четыре ученицы — Маша, Нина, Вера и Катя — участвовали в лыжных соревнованиях и заняли первые четыре места. На вопрос, кто какое место занял, они дали три ответа: 1) Вера заняла 1-е место, Нина — 2-е место; 2) Вера — 2-е место, Катя — 3-е место; 3) Маша — 2-е место, Катя — 4-е место. Ответившие при этом признались, что одно из высказываний каждого ответа верное, а другое нет. Какое место заняла каждая из учениц? Ответ: Вера — 1-е; Маша — 2-е; Катя — 3-е; Нина — 4-е.

6) Коля, Боря, Вова и Юра заняли первые четыре места в соревновании, причем никакие два мальчика не делили между собой какое-либо место. На вопрос, какие места заняли ребята, трое ответили: Коля ни первое, ни четвертое; Боря — второе; Вова не был последним. Какое место занял каждый мальчик? Ответ: Вова — 1-е, Боря — 2-е, Коля — 3-е, Юра — 4-е.

7) В соревновании по бегу участвовали пять спортсменов. Дмитрию не удалось занять первое место. Григория обогнал не только Виктор, но и еще один спортсмен, отставший от Виктора. Андрей достиг финиша не первым, но и не последним. Борис финишировал сразу вслед за Дмитрием. Кто какое место занял в соревнованиях? Решение представлено таблицей 6.

Таблица 6

Имя \ Место	1-е	2-е	3-е	4-е	5-е
Дмитрий	−1	−8	−3	+7	−8
Григорий	−3	−3	+2	−3	−3
Виктор	+5	−6	−3	−6	−6
Андрей	−4	+9	−3	−8	−4
Борис	−6	−8	−3	−8	+7

8) Ваня, Петя, Саша и Коля носят фамилии, начинающиеся на буквы В, П, С, К. Известно, что Ваня и С.— отличники; Петя и В.— троечники; В. ростом выше П.; Коля ростом ниже П.; Саша и Петя имеют одинаковый рост. На какую букву начинается фамилия каждого мальчика?

Решение

Из условия, что Ваня и С.— отличники и Петя и В.— троечники, следует, что Ваня не В. и Петя не С. Из условия, что В. ростом выше П. и Коля ростом ниже П., следует, что Коля не П. и не В. Тогда фамилию В. мог носить только Саша. Дальше, один и тот же мальчик Саша В. ростом выше П. и имеет одинаковый рост с Петей, следовательно, Петя не П., тогда Петя К., Коля С., Ваня П.

9) Встретились три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Отец Володи инженер. Володя учится в 6 классе. Мальчик с фамилией Герасимов учится в 5 классе. Отец мальчика с фамилией Иванов — слесарь. Какая фамилия у каждого из трех друзей?

Решение задачи мы представим в виде таблицы 7, а порядок заполнения знаками «плюс» и «минус» пометим цифрами.

Таблица 7

Фамилия / Имя	Иванов	Семенов	Герасимов
Миша	+9	−8	−1
Володя	−6	+7	−2
Петя	−5	−4	+3

10) Три товарища — Иван, Дмитрий, Степан — преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Омска, Тары, Называевска. Известно: Иван работает не в Омске, а Дмитрий работает не в Таре; омич преподает не физику; тот, кто работает в Таре, преподает химию; Дмитрий преподает не биологию. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

Ответ: Иван преподает в Таре химию, Дмитрий преподает в Называевске физику, Степан преподает в Омске биологию.

11) Три девочки — Рая, Майя и Галя — летом были в спортивном лагере. Каждая из них увлекается одним из видов спорта: теннисом, плаванием, волейболом. В первый день Галя и волейболистка ходили любоваться водопадом. Майя старше теннисистки, но волейболистка ровесница одной из девочек. Каким видом спорта занимается каждая?

Решение задачи сводится к заполнению таблицы 8.

Таблица 8

Имя \ Вид спорта	Теннис	Плавание	Волейбол
Рая	−6	−7	+5
Майя	−2	+4	−3
Галя	+9	−8	−1

Из условия, что в первый день Галя и волейболистка ходили любоваться водопадом, следует, что Галя не волейболистка, а значит, в таблице в клетке ГВ поставим знак «минус» с цифрой 1.

Из условия, что Майя старше теннисистки, но волейболистка ровесница одной из девочек, следует, что Майя не теннисистка (в клетке МТ ставим знак «минус» с цифрой 2) и не волейболистка (в клетке МВ ставим знак «минус» с цифрой 3).

Из таблицы теперь следует, что Майя — пловчиха, Рая — волейболистка. В клетках МП, РВ ставим знак «плюс» соответственно с цифрами 4 и 5. В клетках РТ, РП, ГП ставим знак «минус» соответственно с цифрами 6, 7, 8. В клетке ГТ осталось поставить знак «плюс» с числом 9.

12) В одном из институтов г. Омска с четырехлетним сроком обучения на разных курсах учатся четыре студента. Установите фамилию, имя, курс, на котором учится каждый студент, если известно, что:

а) Борис был персональным стипендиатом;

б) Василий должен был ехать на практику в Тару, а Иванов собирался поехать домой в Черлак;

в) Борис и Орлов — коренные омичи;

г) Крылов в прошлом учебном году окончил школу и поступил на тот же факультет, на котором учится Зуев;

д) Николай был курсом старше Петра;

е) Борис иногда пользовался прошлогодними конспектами Василия.

13) Ада пригласила в гости Нину, Васю и Витю. На столе был поднос с фруктами: яблоками, грушами, апельсинами. Каждый выбрал себе один из фруктов. Какой фрукт выбрал себе каждый, если Нина не любит груши, Ада не любит апельсины, Вася не любит яблоки, Ада и Вася выбрали один и тот же фрукт, только один человек выбрал грушу?

14) Три ученицы — Аня, Валя и Катя — принимали участие в конкурсе. Их фамилии Иванова, Петрова, Сидорова. О них известно следующее: Сидорова участвовала в конкурсе впервые, Аня выступила хуже всех, Валя в прошлом году заняла второе место. Работы двух лучших участниц выполнены в тетрадях в клеточку. Иванова писала на отдельных листах. Установите фамилии и имена двух лучших участниц конкурса.

Рассмотрим логические задачи другого типа, а именно те, в условиях которых есть верные и неверные утверждения. Эти задачи направлены на отработку у учащихся умения рассуждать от противного, что окажет неоценимую помощь в дальнейшем при доказательствах от противного.

15) Три друга — Костя, Олег и Миша — играли во дворе, и один из них случайно разбил мячом оконное стекло. Костя сказал: «Это не я разбил стекло». Олег сказал: «Это Миша разбил стекло». Позднее выяснилось, что одно из этих утверждений верное, а другое нет. Кто из мальчиков разбил стекло?

Решение

Предположим, что Олег сказал правду, тогда и Костя сказал правду, а это противоречит условию задачи. Следовательно, Олег сказал неправду, а Костя — правду. Из этих утверждений следует, что стекло разбил Олег.

16) Четыре ученика — Витя, Петя, Юра и Сергей — заняли на математической олимпиаде первые четыре места. На вопрос, какие места они заняли, были даны ответы: Петя — 2-е, Витя — 3-е; Сергей — 2-е, Петя — 1-е; Юра — 2-е, Витя — 4-е. Указать, кто какое место занял, если в каждом ответе правильна лишь одна часть.

17) В коробке лежит пять пилоток — две синие и три красные. Учитель вызывает к доске трех учеников, которые становятся лицом к классу и закрывают глаза. Учитель надевает каждому на голову одну пилотку, а остальные убирает в коробку. Ученики открывают глаза, и каждый видит пилотки своих товарищей, но не видит своей. Может ли кто-нибудь из них верно определить цвет своей пилотки? Рассмотрите три случая: надеты две синие и одна красная пилотка; надеты одна синяя и две красные пилотки; надеты три красные пилотки.

18) Галя, Оля, Люда приняли участие в состязании по легкой атлетике. Перед стартом трое из болельщиков утверждали: Люда будет второй, а Галя — первой; Оля будет второй, а Галя — третьей; Оля будет первой, а Люда — третьей. Девушки заняли первые три места, и оказалось, что в предложениях каждого из болельщиков одно из утверждений верно, а другое нет. Какое место заняла каждая девушка?

19) Пять учеников одной школы (назовем их A, B, C, D, E) участвовали в конкурсе. Учитель истории, хорошо знающий учеников, предсказал итоги конкурса следующим образом: A_1, B_2, C_3, D_4, E_5 (индексом обозначается место, занятое учеником). Учитель математики предсказал другой итог конкурса: D_1, A_2, E_3, C_4, B_5. Оказалось, что оба они ошиблись, причем учитель истории не назвал правильно ни одного места и ни одной пары учеников, которые по итогам конкурса следовали друг за другом. Учитель математики указал правильно места двух учеников, а также правильно назвал две пары учеников, следующих по итогам конкурса друг за другом. Каковы результаты конкурса?

Решение

Согласно высказыванию учителя истории невозможна ситуация A_1, B_2, C_3, D_4, E_5 и не возможны пары A,B; B,C; C,D; D,E. Анализ высказывания учителя истории позволяет построить граф.

На первом месте могут быть лишь ученики B, C, D или E. Будем строить граф от вершины B. За B же могут следовать A, D и E (рис. 135).

Так как невозможны ситуации A,B; D,E и C_3, то на следующем шаге разветвления получим такое продолжение графа, как показано на рисунке 136.

Если этот анализ продолжить, то мы получим следующий граф, показанный на рисунке 137. (Звездочки означают, что эти ветви далее не могут быть продолжены.)

Из этого графа (из высказывания учителя истории) следует, что возможны только такие ситуации:

B_1, D_2, A_3, E_4, C_5; B_1, E_2, D_3, C_4, A_5; B_1, E_2, D_3, A_4, C_5.

Но высказывание учителя математики позволяет сделать вывод, что эти распределения мест неверно отражают ситуацию (он указал правильно два места, а здесь их нет).

Строя таким же образом графы от вершин C_1 и D_1, получим распределения мест, которые противоречат тому, что известно из задачи о высказывании учителя математики.

Будем строить граф от вершины E_1, получим ситуацию, изображенную на рисунке 138.

Согласно последнему графу возможны такие распределения мест:

1) E_1, A_2, D_3, C_4, B_5;
2) E_1, C_2, B_3, A_4, D_5;
3) E_1, D_2, A_3, C_4, B_5;
4) E_1, D_2, B_3, A_4, C_5.

Но из утверждения учителя математики следует, что возможно лишь такое распределение: E_1, D_2, A_3, C_4, B_5.

20) На математической олимпиаде за первые три места вручены призы победителям. На вопрос, кто оказался призером, получены такие ответы: Константин, Дмитрий, Светлана; Григорий, Максим, Богдан; Елена, Владимир, Дмитрий; Светлана, Жанна, Дмитрий; Григорий, Жанна, Богдан; Елена, Максим, Павел; Владимир, Павел, Елена. Известно, что в одном ответе все три имени названы правильно, в одном — правильно только одно имя, в двух ответах правильно названы два имени, в оставшихся трех все три имени названы неправильно. Установите имена трех призеров математической олимпиады.

21) На столе стоят три одинаковых ящика. В одном из них лежат два черных шара, в другом — черный и белый, в третьем — два белых. На ящиках сделаны надписи: «Два белых», «Два черных», «Черный и белый», причем известно, что ни од-

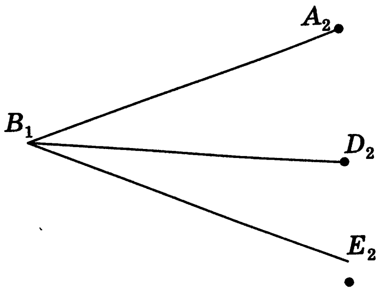


Рис. 135

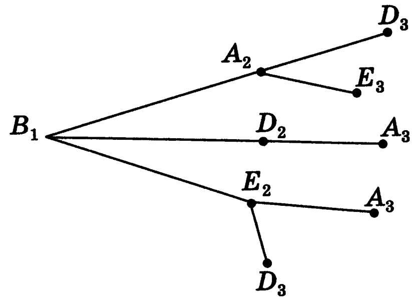


Рис. 136

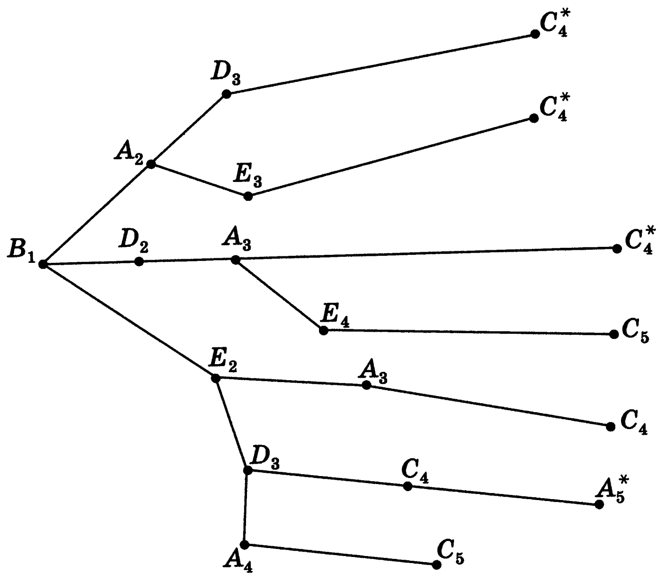


Рис. 137

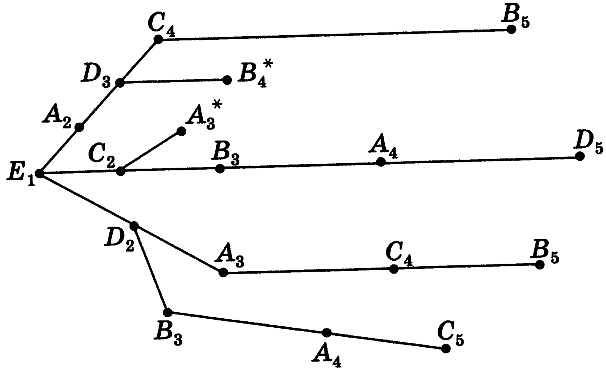


Рис. 138

на из них не соответствует действительности. Как, вынув только один шар, определить правильное расположение надписей?

Решение

Эта и подобные ей задачи решаются перебором всех возможных случаев. В данной задаче следует рассмотреть все возможные сочетания содержимого этих коробок и надписей на них.

Так как по условию задачи ни одна из надписей не соответствует действительности, то сочетание надписей и содержимого коробок может быть только таким, каким оно показано в таблице 9.

Таблица 9

Надписи	Два белых		Два черных		Черный, белый	
Содержимое коробок	ч, ч	ч, б	б, б	ч, б	б, б	ч, ч

Заметим сразу, что если на коробке написано «Два белых», то в ней не могут лежать два белых шара, и, следовательно, там лежат либо два черных шара, либо черный и белый шары.

Если мы вынимаем один шар из коробки с надписью «Два белых», то, если этот вынутый шар будет черным, невозможно будет определить, какой шар остался в коробке (там может остаться и черный, и белый шар, в зависимости от того, находятся ли в коробке два черных или черный и белый шары).

Если вынуть один шар из коробки с надписью «Два черных», то это, так же как и в первом случае, не позволит определить содержимое коробки (если вынули белый шар, то неясно, какой же там остался).

Рассмотренные два случая позволяют утверждать, что надо начинать вытаскивать шар из коробки с надписью «Черный и белый». Действительно, если из этой коробки будет вынут белый шар, то под этой надписью находится коробка, в которой два белых шара, а тогда под надписью «Два черных» может быть только коробка с черным и белым шарами, а под надписью «Два белых» может быть только коробка с двумя черными шарами. Если из коробки с надписью «Черный и белый» будет вынут черный шар, то под надписью «Черный и белый» находится коробка с двумя черными шарами, но тогда под надписью «Два белых» может быть только коробка с черным и белым шарами, а следовательно, под надписью «Два черных» может быть только коробка с двумя белыми шарами.

22) В трех ящиках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном из них написано «Крупа», на другом — «Вермишель», на третьем — «Крупа или сахар». В каком ящике что находится, если содержимое каждого из них не соответствует надписи?

23) В четырех ящиках лежит по одному шару: белый, черный, красный и зеленый. На первом ящике надпись «Белый», на втором — «Зеленый или белый», на третьем — «Красный или зеленый», на четвертом — «Черный, или зеленый, или красный». Но ни одна надпись не соответствует действительности. Какого цвета шар лежит в каком ящике?

24) В одной коробке находятся два черных шара, в другой — два белых, в третьей — один черный и один белый. На крышках коробок написано: «Черный, черный», «Белый, белый», «Черный, белый». Случайно перепутали крышки. Как определить содержимое коробок при условии, что за один раз из коробки можно достать, не заглядывая туда, только один шар? Смотреть, какой шар остался в коробке, тоже нельзя. Сколько придется вынуть шаров, чтобы определить содержимое всех коробок?

Ответ: в наихудшем случае придется вынуть четыре шара, чтобы определить содержимое всех коробок.

25) Три одинаковых ящика стоят в ряд. В одном из них лежит белый мячик, в двух других по черному мячику. На правом ящике написано «Здесь — белый мячик», на среднем — «Здесь — черный мячик», на левом — «В соседнем ящике — черный мячик». Известно, что одна из этих надписей ложна, а две другие нет. В каком ящике белый мячик?

Решение

Пусть белый мячик лежит в правом ящике, тогда в двух других лежат черные мячики, и получается, что все три надписи правдивы. Но это противоречит условию задачи. Пусть белый мячик лежит в среднем ящике. Тогда все три надписи ложны, что тоже противоречит условию задачи. Пусть белый мячик лежит в левом ящике, тогда надпись на правом ящике ложна, а надписи на среднем и левом ящиках правдивы, что соответствует условию задачи.

Ответ: белый мячик в левом ящике.

Приведем логические задачи, решение которых сводится к установлению какого-либо порядка.

Задача 1. Турист за лето посетил города: Москву, Петербург, Киев, Смоленск, Вильнюс. В Вильнюсе он был раньше, чем в Петербурге, но позже, чем в Москве; в Смоленске он был позже, чем в Петербурге, но раньше, чем в Киеве. В каком порядке турист посещал города? Составьте алгоритмическое предписание для решения этой задачи.

Решение

1) Выпишите все высказывания, указанные в задаче.

2) Составленные высказывания разбейте на простые.

3) Сделайте так, чтобы все высказывания содержали одно и то же отношение.

4) Изобразите все высказывания стрелками на рисунке.

5) По рисунку ответьте на вопрос задачи.

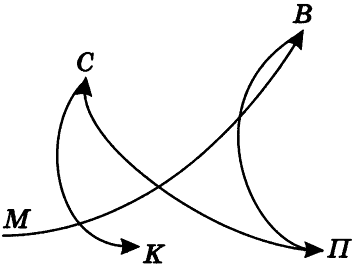


Рис. 139

Покажем, как предложенная выше задача может быть решена по составленному алгоритмическому предписанию.

1) В Вильнюсе он был раньше, чем в Петербурге, но позже, чем в Москве. В Смоленске он был позже, чем в Петербурге, но раньше, чем в Киеве.

2) В Вильнюсе — раньше, чем в Петербурге.
В Вильнюсе — позже, чем в Москве.
В Смоленске — позже, чем в Петербурге.
В Смоленске — раньше, чем в Киеве.

3) В Вильнюсе — раньше, чем в Петербурге.
В Москве — раньше, чем в Вильнюсе.
В Петербурге — раньше, чем в Смоленске.
В Смоленске — раньше, чем в Киеве.

4) См. рисунок 139.

5) Турист посещал города в следующем порядке: Москва, Вильнюс, Петербург, Смоленск, Киев.

Алгоритмическое предписание, составленное для решения этой задачи, помогает учащимся осознать собственные действия; в широком смысле в нем зафиксирован один из компонентов теоретического мышления — рефлексия. В этом алгоритмическом предписании выделен общий способ решения задачи, который затем как бы с места переносится учащимися на целый класс подобных задач, некоторые из которых приведены ниже.

З а д а ч а 2. Ребята прыгали в длину. Гриша прыгнул на 83 см ближе, чем Вова, а Коля на 97 см дальше, чем Витя. Вова прыгнул на 4 см ближе, чем Витя, который, как и Боря, прыгнул на 7 см ближе, чем Федя. Узнайте, кто из ребят прыгнул дальше всех.

З а д а ч а 3. На деревьях сидело зябликов больше, чем синиц, но меньше, чем галок; воробьев меньше, чем синиц, но больше, чем дятлов. Назовите птиц в порядке убывания их количества.

Установление алгоритмического сходства на первый взгляд, казалось бы, различных задач способствует овладению учащимися общим методом решения.

Подготовка учителя к доказательству теорем на уроке

Строить методику обучения учащихся доказательству теорем необходимо с учетом их склонностей и способностей. Для правильной организации работы по формированию у школьников умения доказывать теоремы следует с помощью прогностических методов выявить все за и против, которые влияют на этот процесс. Учитель, располагающий подобным материалом, имеет возможность строить свою работу так, чтобы, снимая отрицательные факторы, целенаправленно формировать у школьников познавательный интерес к изучению доказательств теорем.

Для того чтобы верно ориентироваться в выборе методов, приемов и средств обучения учащихся доказательству теорем, полезно предложить школьникам такую анкету.

1. Вызывает ли у вас интерес изучение геометрии:

а) да; б) нет?

2. Довольны ли вы своими успехами в изучении геометрии:

а) да; б) нет?

3. Как вы слушаете объяснение учителя на уроке:

а) внимательно; б) невнимательно?

4. Объяснение учителя на уроке:

а) понимаю; б) не понимаю.

5. Любите ли вы изучать теоремы и доказывать их:

а) да; б) нет?

6. Какой способ изучения теорем вы предпочитаете:

а) когда учитель сам доказывает теорему; б) когда учитель излагает часть доказательства, а другую часть вы доказываете самостоятельно; в) доказывать теорему самостоятельно?

7. При изучении доказательства теоремы обычно следую образцу, который предложил учитель:

а) да; б) нет.

8. При изучении теоремы обычно стремлюсь найти свое доказательство, отличное от того, которое предложил учитель:

а) да; б) нет.

9. Умею слушать доказательство теоремы:

а) лишь тогда, когда учитель проводит доказательство, иллюстрируя его наглядными средствами; б) когда учитель проводит доказательство теоремы, не опираясь на наглядные средства.

10. Умею сосредоточенно работать над доказательством новой теоремы:

а) да; б) нет.

11. Работаю сосредоточенно над доказательством теорем:

а) всегда; б) только тогда, когда учитель проверяет знание теоремы и ее доказательство.

12. Разобрать доказательство теоремы по учебнику:

а) могу самостоятельно; б) лишь с помощью товарища; в) лишь с помощью учителя.

13. Домашнее задание по геометрии я:

а) выполняю самостоятельно; б) выполняю с помощью товарищей; в) выполняю с помощью родителей; г) вообще не выполняю.

Поднятый вопрос об анкетировании учащихся можно поставить в школьной практике несколько шире: выявить причины, которыми определяется отношение школьников к учебному предмету «Математика». С этой целью можно предложить такие анкеты.

Анкета 1. Почему вы не любите предмет «Математика»?

1. На уроках математики скучно, неинтересно.
2. Не люблю сам предмет, так как увлекаюсь другим предметом.
3. Не люблю решать задачи.
4. Не умею самостоятельно решать задачи.
5. Не понимаю материал учебника; не могу в нем самостоятельно разобраться.
6. Имею серьезные пробелы в знаниях по предмету за предыдущие годы, что мешает усвоить новый материал.
7. Надо много запоминать механически, а у меня плохая память.
8. Предмет очень трудный.
9. На уроках математики очень строго спрашивают.
10. На уроках математики не очень строго спрашивают.
11. Необъективно оцениваются знания.
12. Я не вижу смысла в ее изучении; мне кажется, что учить математику не нужно.
13. Я не люблю выполнять домашнее задание.
14. Мало времени дается на изучение материала.
15. Родители не могут помочь при подготовке домашнего задания.

Анкета 2. Почему вы любите предмет «Математика»?

1. Мне легко дается математика.
2. Математика нужна при решении практических задач.
3. Математика — интересный, увлекательный предмет.
4. При изучении математики повышается точность рассуждений, предоставляется возможность научиться строго доказывать.
5. Учитель математики хорошо объясняет материал, помогает его понять.
6. Мне нравится решать трудные задачи, это как игра.

7. Материал учебника изложен доступно, есть возможность самостоятельно в нем разобраться.

Результаты проведенного учителем анкетирования позволят ему определить эффективные пути формирования у учащихся познавательного интереса к математике. Заметим, что такой подход к определению эффективной методики организации учебного процесса отвечает идеям гуманизации и гуманитаризации образования. Гуманизацию обучения математике определяют как направленность всего учебно-воспитательного процесса на личность учащегося, т. е. максимальный учет интересов, склонностей, способностей и возможностей ребенка. Гуманитаризацию математического образования истолковывают как усиление в обучении математике акцента на общее развитие учащихся, а именно: логического мышления, математической речи, пространственного воображения, интуиции и т. п., а также как усиление взаимосвязи естественно-математического образования с гуманитарным.

При изучении теоремы полезно придерживаться определенной организации учебно-познавательной деятельности учащихся [138, с. 285].

1. Понимание проблемы, т. е. осознание необходимости или пользы изучения нового познавательного вопроса.

2. Наблюдение ряда частных случаев, проведение опыта, эксперимента.

3. Высказывание догадок, выработка гипотезы.

4. Осознание необходимости дедуктивного доказательства.

5. Дедуктивное обоснование гипотезы, т. е. доказательство (или опровержение).

6. Практические приложения полученного математического результата.

Изучение теоремы можно подразделить на три этапа:

— сознательное усвоение формулировки теоремы;

— обеспечение усвоения доказательства теоремы;

— закрепление теоремы.

Ниже будет подробно рассмотрена методика работы на каждом этапе изучения теоремы, но прежде мы остановимся на тех основных действиях, которые должен проделать учитель, готовясь к уроку, на котором непосредственно будет изучаться теорема.

§ 1. АНАЛИЗ ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМЫ И ВЫЯСНЕНИЕ ЕЕ ЗНАЧЕНИЯ В СИСТЕМЕ ДРУГИХ ТЕОРЕМ

Учитель должен провести анализ формулировки теоремы с целью выделения разъяснительной части, условия и заключения теоремы, выяснить сущность каждого элемента формулировки, предусмотреть ошибки, которые могут допустить учащиеся в формулировке теоремы, и подготовить соответствующий контрпример.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим пример из курса геометрии 8 класса [30]. В теме «Четыре замечательные точки треугольника» изучаются следующие теоремы:

Теорема 1: Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема 2: Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема 3: Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема 4: Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Анализ этих теорем показывает, что формулировка теоремы 3 отличается от формулировок других теорем, и это отличие состоит в том, что в теореме утверждается не о высотах треугольника, а о прямых, содержащих эти высоты.

Чтобы учащиеся осознали это отличие, а не формально заучили формулировку теоремы, учитель может перед ее изучением провести такую работу. Класс разбивается на три группы. Одной группе предлагается построить высоты в остроугольном треугольнике, а другой — в тупоугольном треугольнике. Если после этой работы попросить учащихся сделать вывод, то инициативу проявят ребята, работавшие с остроугольным треугольником. Как показывает практика, школьники предлагают такую формулировку теоремы: «Высоты треугольника пересекаются в одной точке». Оппонентом в таком случае выступит та группа учащихся, которая проводила построение в тупоугольном треугольнике. Учителю следует предложить этим ученикам продолжить высоты треугольника. Сравнение двух рисунков (рис. 140, 141) приведет учащихся к нужной формулировке.

Третьей группе учащихся предлагается провести высоты в прямоугольном треугольнике.

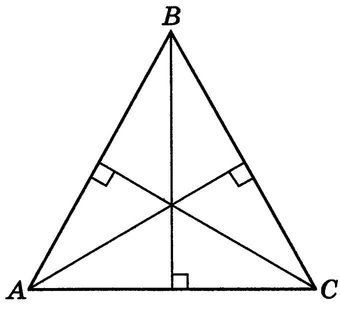


Рис. 140

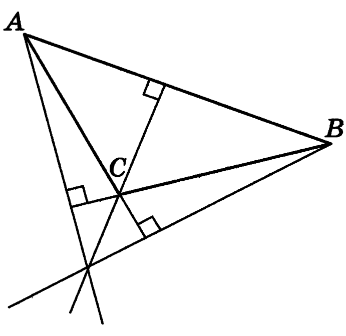


Рис. 141

Учитель понимает, что такие теоремы, как признаки равенства треугольников, признаки подобия треугольников, теоремы о параллельности прямых, о сумме внутренних углов треугольника, теорема Пифагора и др., являются ведущими в курсе геометрии. Они служат аппаратом для изучения теоретических вопросов и решения задач. Такие теоремы, как теорема Пифагора и теорема о сумме углов треугольника, важны не только как «аппаратные» для решения задач, но именно как ведущие в идейном отношении.

Учитель, готовясь к уроку, на котором будет доказываться теорема, должен выявить понятия, теоремы, аксиомы, на которых строится доказательство, и включить их в материал для повторения.

Актуализация необходимых понятий, теорем, аксиом может быть проведена непосредственно перед доказательством теоремы, или же это можно сделать на предыдущем уроке.

Рассмотрим доказательство теоремы о средней линии треугольника. Анализ показывает, что базисными элементами его будут следующие понятия и их свойства: треугольник, середина стороны, отрезок, средняя линия треугольника, равные отрезки, параллельные прямые, признак параллельности прямых, соответственные углы при двух прямых и секущей, подобные треугольники, второй признак подобия треугольников, пропорция.

Такой разбор теоремы показывает, какие понятия будут использоваться при ее доказательстве, каковы взаимосвязи этих понятий и их свойств. Повторение необходимых понятий, свойств, теорем, аксиом можно организовать либо через целесообразно подобранную систему задач, либо в виде устной фронтальной работы.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ, ОБЛЕГЧАЮЩИХ ПОНИМАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Почти все теоремы в школьном курсе геометрии доказываются синтетическим методом, но этот метод навязывает ученику готовое доказательство. Аналитический же метод позволяет искать путь доказательства, он менее многозначно указывает, с чего можно начать и в каком направлении строить цепочки силлогизмов. При синтетическом методе до самого завершения доказательства мотивы построения цепочки силлогизмов остаются для учащихся скрытыми, и это приводит многих к мысли о том, что невозможно доказать теорему иначе, чем дано в школьном учебнике.

Все это говорит о том, что учитель должен подготовить аналитическое рассуждение, которое поможет ученикам уяснить последовательность шагов доказательства, необходимость тех или иных дополнительных построений.

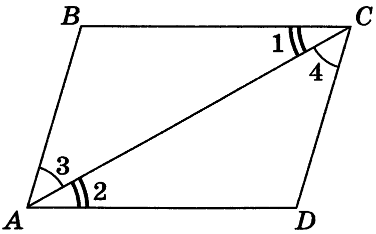


Рис. 142

Рассмотрим для примера теорему, выражающую один из признаков параллелограмма:

«Если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то этот четырехугольник является параллелограммом».

Дано: $ABCD$ — четырехугольник (рис. 142), $AB=CD$, $BC=AD$.

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство

Синтетический метод

1) Рассмотрим ΔABC и ΔACD. В этих треугольниках сторона AC — общая, $AB=CD$, $AD=BC$. По третьему признаку равенства треугольников имеем $\Delta ABC=\Delta ACD$.

2) Так как $\Delta ABC=\Delta ACD$, то в этих треугольниках против равных сторон лежат равные углы; из равенства $AB=CD$ следует, что $\angle 1=\angle 2$; из равенства $BC=AD$ следует, что $\angle 3=\angle 4$.

3) $\angle 3$ и $\angle 4$ — накрест лежащие углы при прямых AB, CD и секущей AC, и они равны, а значит, прямые AB и CD параллельны.

4) $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы при прямых BC, AD и секущей AC, и они равны, а значит, BC и AD параллельны.

5) Имеем четырехугольник $ABCD$, у которого противоположные стороны попарно параллельны, и по определению делаем вывод, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Аналитический метод

1) Нам нужно доказать, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, т. е. мы должны показать, что он при заданных условиях удовлетворяет всем требованиям определения параллелограмма: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

2) Чтобы доказать параллельность прямых AB и CD, AD и BC, достаточно доказать равенство накрест лежащих углов 3 и 4 при прямых AB, CD и секущей AC и равенство углов 1 и 2 при прямых AD, BC и секущей AC.

3) Чтобы доказать равенство углов 3 и 4, 1 и 2, достаточно доказать равенство треугольников, содержащих эти углы, т. е. надо доказать, что $\Delta ABC=\Delta ADC$.

4) Чтобы доказать равенство треугольников ABC и ADC, достаточно показать, что они удовлетворяют условиям одного из признаков равенства треугольников.

Аналитический метод позволил нам найти путь доказательства. Теперь следует проделать обратный путь (4—3—2—1), и теорема будет доказана.

Этот пример показывает, что анализ и синтез выступают в единстве, вот почему метод доказательства теорем чаще всего называют аналитико-синтетическим.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕДУЩЕГО МЕТОДА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Учитель, готовясь к уроку, на котором будет изучаться теорема, должен выяснить метод, прием, идею и другие особенности доказательства.

Так, например, многие теоремы в школьном курсе математики ($\approx 30\%$) доказываются методом от противного, а поэтому при изучении таких теорем задача учителя — довести до сознания учащихся не только сами теоремы, но и метод, с помощью которого они доказываются. Вместе с учащимися может быть выработан план доказательства теоремы методом от противного. Он может быть таким:

1) строим отрицание того, что требуется доказать;

2) полученное отрицание присоединяем к условию теоремы и разворачиваем его, т. е. строим цепочку следствий;

3) ищем противоречие либо с условием, либо с известными свойством, теоремой, определением;

4) делаем вывод, что наше предположение неверно, а верно его отрицание, т. е. то, что требуется доказать.

Полезно обратить внимание на то, что чаще всего этим методом доказываются теоремы единственности и теоремы, связанные с параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей, а также обратные теоремы.

Следует заметить, что, чем лучше учащиеся владеют различными алгоритмами доказательства теорем, тем выше у них уровень умений осуществлять поиск доказательств.

Так, например, ряд теорем о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике и круге доказывается одинаково. Целесообразно на основе анализа доказательств этих теорем выработать совместно с учащимися алгоритм доказательства. Обучив учащихся пользоваться этим алгоритмом, мы вооружим их обобщенным умением доказывать целую группу теорем. Покажем, как это может быть сделано.

Пусть требуется доказать, что в какой-то геометрической фигуре выполняется равенство $AB \cdot CD = EM \cdot KT$. Это равенство может следовать из пропорции $AB : KT = EM : CD$, которая сама следует из подобия треугольников, стороны которых являются членами рассматриваемой пропорции. Следовательно, можно сделать вывод: для доказательства таких равенств на фигуре, соответствующей условию задачи, следует выделить или вновь построить треугольники, стороны которых являлись бы членами доказываемого равенства, установить подобие этих треугольников, записать пропорцию, из которой и получится доказываемое равенство. Знание такого алгоритма не исключает возможности доказывать эти теоремы другим способом.

Знакомя учащихся с алгебраическим методом решения задач и доказательства теорем, учителю целесообразно дать школьникам рекомендации, которые помогут им составлять уравнение. Для составления уравнения обычно используются теорема Пифагора, метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника, пропорциональность сторон, высот и периметров подобных треугольников, теорема о биссектрисе треугольника, теоремы синусов и косинусов, различные формулы для вычисления площадей. Суть же самого метода состоит в том, что один и тот же элемент выражается через известные и неизвестные величины двумя различными способами и полученные выражения приравниваются одно к другому.

Относительно ведущего метода доказательства отметим следующий факт: учащимся следует указывать методы решения (доказательства) задачи по той или иной теме. Так, например, основными методами решения задач по теме «Трапеция» являются следующие:

— метод подобия;
— метод площадей (вычисляется площадь одной и той же фигуры различными способами, затем полученные выражения приравниваются и из этого равенства определяется искомый элемент);
— метод, основанный на использовании «специфики» трапеции (равнобедренная, прямоугольная, диагонали взаимно перпендикулярны; можно описать окружность; можно вписать окружность; можно и вписать и описать окружность; продолженные боковые стороны перпендикулярны и др.).

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИТУАЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

Готовясь к уроку, учителю надо исследовать математическую ситуацию, возникающую при доказательстве теоремы, рассмотреть все возможные случаи.

Рассмотрим пример. В курсе геометрии 8 класса [30] доказывается теорема о площади параллелограмма. Доказательство теоремы проводится с помощью чертежа (рис. 143).

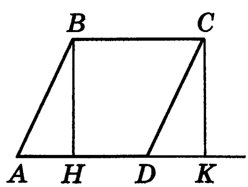


Рис. 143

На данном рисунке основание одной из высот BH попало на само основание параллелограмма, а основание другой высоты CK лежит на продолжении основания параллелограмма.

Возможны также случаи, когда основания обеих высот будут лежать на продолжении основания параллелограмма (рис. 144, *а*) и когда основание одной из высот попадет в вершину параллелограм-

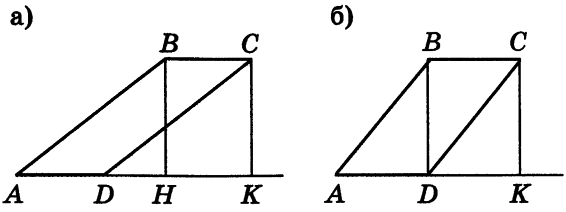


Рис. 144

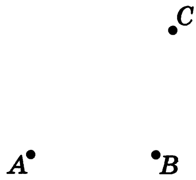


Рис. 145

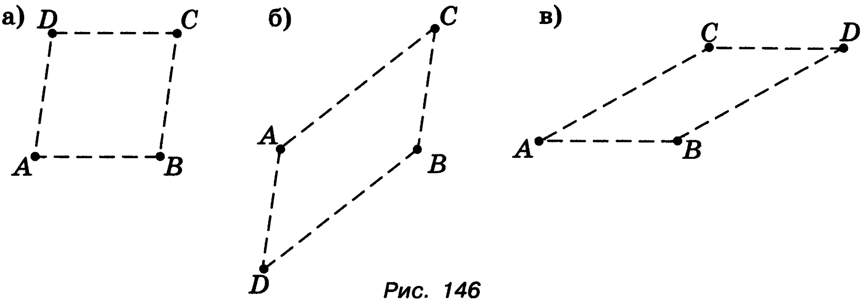


Рис. 146

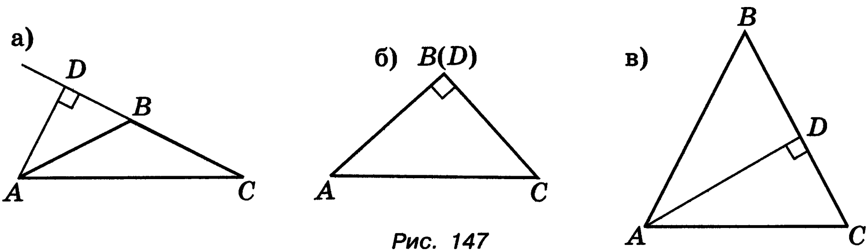


Рис. 147

ма (рис. 144, *б*). Доказательства в таком случае будут несколько иными.

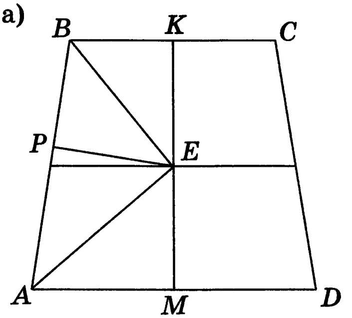
Чтобы подвести учащихся к этим случаям, можно перед изучением теоремы предложить им задание: «На рисунке 145 заданы точки A, B, C. Укажите местоположение точки D так, чтобы A, B, C и D были вершинами параллелограмма».

Анализ ситуации должен привести учащихся к трем возможным решениям, показанным на рисунке 146, *а*, *б*, *в*.

При работе над теоремой, задачей ученики должны задавать себе вопросы: «Можно ли построить другую фигуру, не равную найденной, но тоже удовлетворяющую условию задачи?», «При каких величинах заданных элементов нельзя построить заданную фигуру?» и т. д. Такие вопросы позволяют выявить различные ситуации, возможные при решении задачи и доказательстве теоремы. Приведем примеры таких задач.

З а д а ч а 1. Докажите, что высота AD треугольника ABC меньше полусуммы сторон AB и AC.

Эта задача требует рассмотрения трех возможных случаев, показанных на рисунке 147, *а*, *б*, *в*.



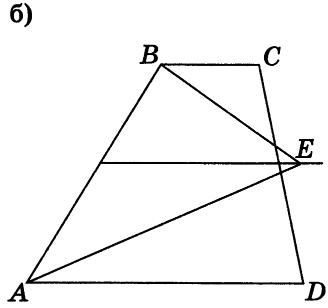


Рис. 148

Задача 2. Доказать, что точка пересечения биссектрис двух углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, лежит на средней линии этой трапеции.

Анализ описанной в задаче ситуации показывает, что указанная точка пересечения биссектрис может лежать на самой средней линии трапеции (рис. 148, *а*) и на продолжении средней линии трапеции (рис. 148, *б*).

Обратим внимание, что эта задача легко решается. Для этого надо провести $EK \perp BC$, $EM \perp AD$, $EP \perp AB$ (рис. 148, *а*). По свойству биссектрисы (все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла) имеем $EK = EP$, $EP = EM$, откуда $EK = EM$, т. е. точка E равноудалена от оснований трапеции, а значит, она лежит на средней линии трапеции.

Задача 3. Величина угла A параллелограмма $ABCD$ равна $\frac{\pi}{6}$, а меньшая диагональ BD равна 13. Точка E — пересечение диагоналей параллелограмма — удалена от прямой AD на расстояние $\frac{11}{2}$. Найдите длины сторон и большей диагонали параллелограмма, если известно, что $AD > AB$.

По условию задачи можно построить чертеж, изображенный на рисунке 149.

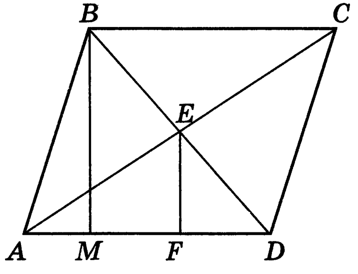


Рис. 149

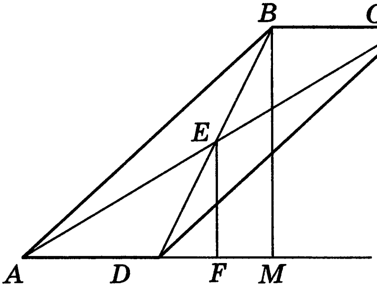


Рис. 150

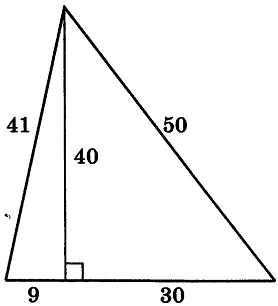


Рис. 151

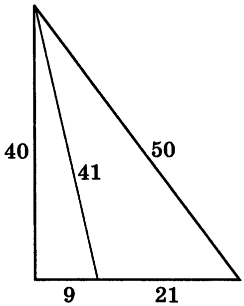


Рис. 152

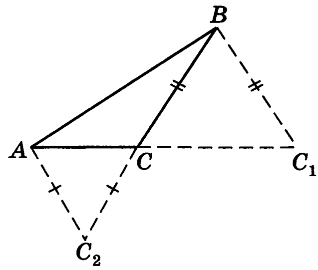


Рис. 153

Для решения этой задачи следует выполнить дополнительное построение — провести прямую BM, перпендикулярную AD. Но при таком чертеже решение задачи будет неполным. Возможна ситуация, изображенная на рисунке 150.

Но рассмотрение этой ситуации должно показать, что такого случая быть не может. Действительно, в условии сказано, что AD — бóльшая сторона параллелограмма, так что $AD > AB$. Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то в ΔABD имеем неравенство $\angle ABD > \angle ADB$. Поскольку сумма углов треугольника равна π, то $\angle ADB$ не может быть ни прямым, ни тупым, и, следовательно, возможна только ситуация, изображенная на рисунке 149.

Заметим, что приведенное рассуждение является обязательной частью решения предложенной выше задачи.

Задача 4. Вычислить площадь треугольника, если две его стороны равны 41 см и 50 см, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 40 см.

Анализ условия задачи приводит к двум возможным ситуациям, которые изображены на рисунках 151, 152.

Задача 5. К тупоугольному треугольнику ABC (рис. 153) пристройте равнобедренный треугольник так, чтобы получился новый треугольник.

Такая задача потребует от учащихся анализа различных вариантов, два из которых показаны на рисунке пунктиром.

§ 5. ПОИСК ДРУГИХ МЕТОДОВ И СПОСОБОВ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

К каждой теореме требуется свой подход, но мы не станем останавливаться на общих положениях поиска другого доказательства теоремы ввиду того, что это предмет специального и обстоятельного разговора, поэтому ограничимся лишь примерами. Прежде чем переходить к этим примерам, подчеркнем следующее обстоятельство.

При доказательстве какой-либо теоремы следует использовать лишь ту последовательность понятий, аксиом, теорем, которая логически предшествует данной теореме в данном курсе геометрии, чтобы ни одним из высказываний этой цепочки не оказалась бы доказываемая теорема. Например, наиболее простым доказательством теоремы Пифагора могло бы быть доказательство, следующее из теоремы косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ при $\angle C = 90°$. Но в курсах геометрии, по которым учащиеся учатся в школе, так доказывать теорему Пифагора нельзя, так как она является одним из звеньев в цепи утверждений, которые приводят к теореме косинусов.

Используя приведенные ниже примеры, учитель должен всякий раз следить, позволяет ли логическая структура учебника геометрии, по которому ведется обучение, рассматривать предложенное доказательство.

Теорема 1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Эту теорему можно доказать по одному из следующих шести рисунков: *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* (рис. 154).

Доказательства, проводимые по каждому из следующих рисунков, требуют всякий раз новых теоретических сведений, изученных школьниками в данной теме.

Так, например, в случае доказательства по рисунку 154, *а* ученики должны использовать свойство внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых и секущей, понятие развернутого угла, по рисунку 154, *б* в работу подключается понятие вертикальных углов и их свойства.

Остановимся более подробно на доказательстве теоремы по рисунку 154, *г*.

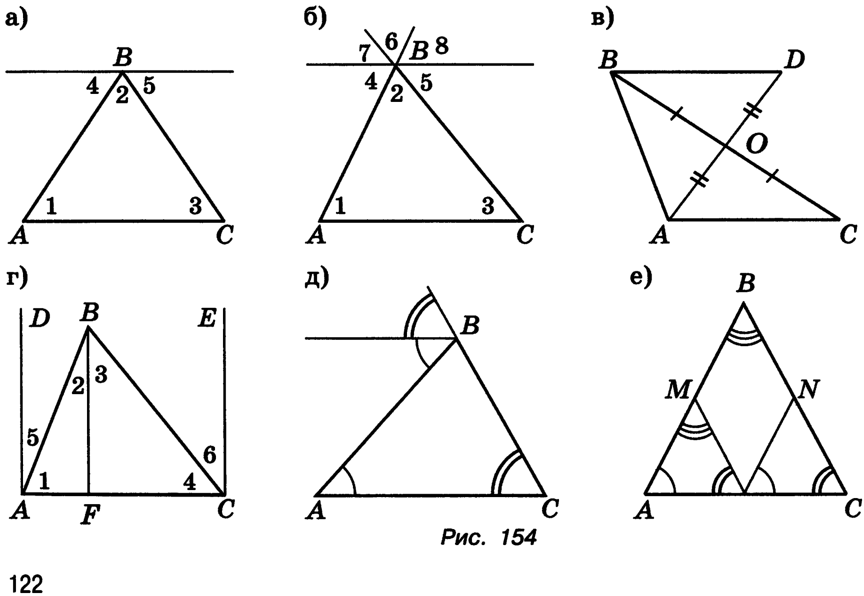


Рис. 154

Дано: $\triangle ABC$, $AD \perp AC$, $EC \perp AC$, $BF \perp AC$.
Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
Доказательство

Так как $AD \perp AC$ и $BF \perp AC$, то $AD \parallel BF$. Так как $BF \perp AC$ и $EC \perp AC$, то $BF \parallel EC$. Отсюда следует, что $AD \parallel EC$.

$$\angle 5 + \angle 1 = 90°,\ \angle 6 + \angle 4 = 90°,$$
$$\angle 5 + \angle 1 + \angle 6 + \angle 4 = 180°. \qquad (*)$$

$\angle 5 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AD, BF и секущей AB.

$\angle 6 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых EC, BF и секущей BC.

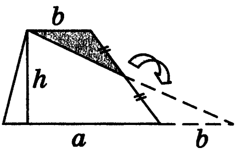
Тогда равенство (*) примет вид: $\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$.

Но так как $\angle 2 + \angle 3 = \angle B$, то имеем $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Теорема 2. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

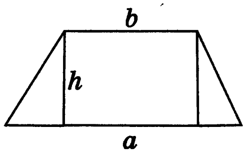
Доказательство теоремы может быть проведено по одному из рисунков 155—166.

Можно предложить учащимся найти, помимо приведенных двенадцати способов доказательства теоремы о площади трапеции, еще и другие способы.



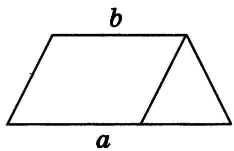
$$S = S_{\triangle} = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 155



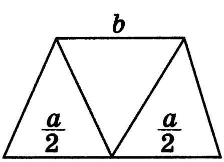
$$S = S_{\triangle_1} + S_{\triangle_1} + S_{\square} = \frac{1}{2}(a-b)h + bh = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 156



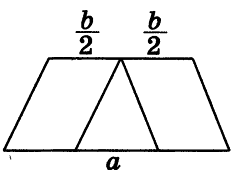
$$S = S_{▱} + S_{\triangle} = bh + \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 157



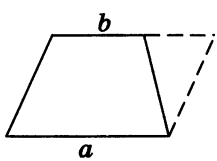
$$S = S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + S_{\triangle_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} h + \frac{1}{2} bh + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} h = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 158



$$S = S_{▱} + S_{\triangle} + S_{▱} = \frac{b}{2} h + \frac{1}{2}(a-b)h + \frac{b}{2} h = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 159



$$S = S_{▱} - S_{\triangle} = ah - \frac{1}{2}(a-b)h = \frac{1}{2}(a+b)h$$

Рис. 160

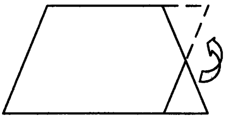


Рис. 161

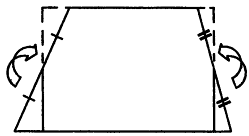
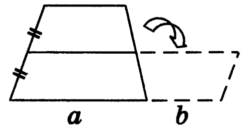


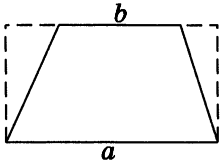
Рис. 162



$S = S_{\square} =$

$= (a+b)\frac{h}{2} = \frac{1}{2}(a+b)h$

Рис. 163

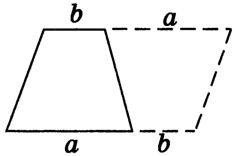


$S = S_{\square} - (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2}) =$

$= ah - \frac{1}{2}(a-b)h =$

$= \frac{1}{2}(a+b)h$

Рис. 164



$S = \frac{1}{2}S_{\square} = \frac{1}{2}(a+b)h$

Рис. 165

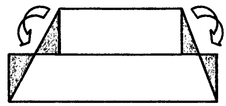


Рис. 166

Теорема 3. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство этой теоремы можно провести по одному из рисунков *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж*, *з* (рис. 167).

На рисунке 167, *е* проведено дополнительное построение: $EK \parallel AB$.

На рисунке 167, *з* проведено дополнительное построение: $CE \parallel AB$ и $NK \parallel AB$.

Теорема 4. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Различные доказательства теоремы Пифагора можно провести по рисункам *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* (рис. 168).

Проведем доказательство теоремы Пифагора по рисунку 168, *г*: $c^2 = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot 4 + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Докажем теорему Пифагора по рисунку 168, *е*, используя для этого теорему об отношении площадей подобных треугольников:

$\Delta ACD \backsim \Delta ABC$, значит, $S_1 = k_1^2 \cdot S$, где k_1 — коэффициент подобия этих треугольников, а S — площадь ΔABC.

$\Delta CDB \backsim \Delta ABC$, значит, $S_2 = k_2^2 \cdot S$, где k_2 — коэффициент подобия этих треугольников.

Учитывая, что $S = S_1 + S_2$, имеем $S = k_1^2 \cdot S + k_2^2 \cdot S = (k_1^2 + k_2^2)S$. Отсюда $k_1^2 + k_2^2 = 1$. Так как $k_1 = \frac{b}{c}$, $k_2 = \frac{a}{c}$, то получим согласно последнему равенству $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$, откуда $b^2 + a^2 = c^2$.

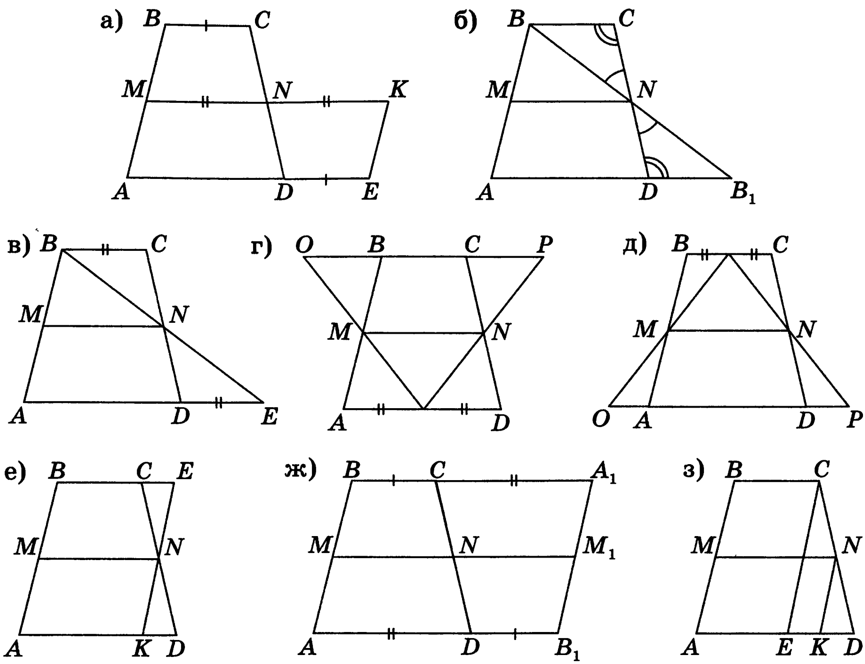


Рис. 167

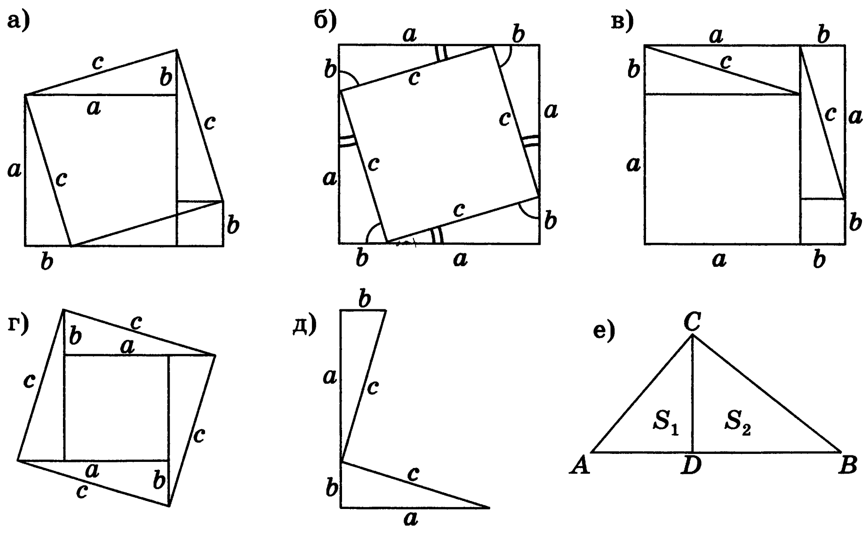


Рис. 168

По рисунку 168, *е* можно провести и такое доказательство теоремы Пифагора.

Прямоугольные треугольники ACB и ACD подобны, откуда имеем пропорцию $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$, или $AC^2=AD\cdot AB$.

Прямоугольные треугольники ACB и BCD подобны, откуда имеем пропорцию $\frac{DB}{CB}=\frac{CB}{AB}$, или $CB^2=DB\cdot AB$.

Складывая почленно $AC^2=AD\cdot AB$ и $CB^2=DB\cdot AB$, получаем $AC^2+CB^2=AD\cdot AB+AB\cdot DB=AB(AD+DB)=AB\cdot AB=AB^2$. Итак, окончательно имеем $AC^2+CB^2=AB^2$.

Подчеркнем еще раз, что следует в обязательном порядке следить за тем, возможно ли то или иное доказательство в конкретном курсе геометрии или нет. Так, для действующего школьного курса геометрии [30] предложенные выше доказательства неприемлемы, ибо тема «Подобные треугольники» изучается позже теоремы Пифагора. Но если бы даже подобные треугольники изучались до теоремы Пифагора, необходимо проследить, а не используем ли мы неявно в этом доказательстве некоторые утверждения, которые сами требуют доказательства.

Теорема 5. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Теорема косинусов доказана в учебнике геометрии 9 класса [30] для случая остроугольного треугольника, но можно предложить учащимся доказать ее для тупоугольного треугольника. Приведем это доказательство (рис. 169).

Построим прямоугольную систему координат так, чтобы начало ее совпало с вершиной A данного треугольника ABC, а осью абсцисс была бы прямая с положительным направлением от точки A к точке C, и пусть вершина B находится в верхней полуплоскости. Проведем в треугольнике высоту BB_1.

Тогда вершины треугольника будут иметь такие координаты: $A(0;\ 0)$, $C(b;\ 0)$, $B(x;\ y)$; координаты точки B_1: $B_1(x;\ 0)$. В треугольнике BB_1C имеем $a^2=y^2+(b-x)^2$, а в треугольнике ABB_1 — $y^2=c^2-x^2$. Сложив эти равенства и произведя известные преобразования, найдем $a^2=b^2+c^2-2bx$; по определению косинуса любого угла $\frac{x}{c}=\cos\angle A$, т. е. $x=c\cdot\cos\angle A$, следовательно, получаем $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$.

Такой подход к отработке доказательства теоремы показывает, что никаких ограничений на угол A не накладывается; он мог быть острым, тупым, прямым.

Теорема 6. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Приведем несколько другое доказательство теоремы синусов, отличное от того, которое предлагается в учебнике геометрии 9 класса [30].

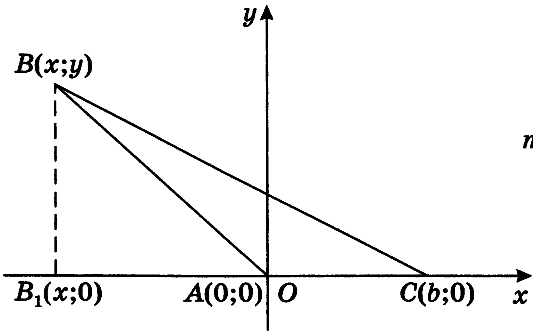


Рис. 169

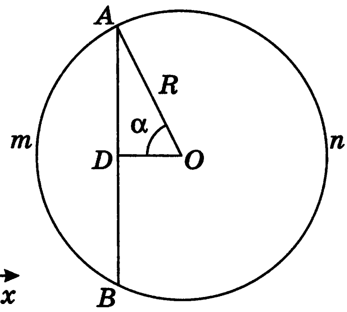


Рис. 170

Возьмем произведение abc (где a, b, c — стороны треугольника ABC, лежащие соответственно против углов A, B, C) и будем его делить на удвоенную площадь треугольника ABC.

Будем иметь

$$\frac{abc}{ab\cdot\sin\angle C}=\frac{abc}{ac\cdot\sin\angle B}=\frac{abc}{bc\cdot\sin\angle A}.$$

После сокращения дробей получим окончательно

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}.$$

Покажем еще один метод доказательства теоремы синусов.

Пусть AB — сторона треугольника ABC, вписанного в окружность (рис. 170).

Проведем $OD\perp AB$.

Если вершина C лежит на дуге AnB, то $\alpha=\angle C$; если же вершина C лежит на дуге AmB, то $\alpha=180°-\angle C$. И в том и в другом случае из ΔAOD имеем $AD=\frac{AB}{2}=R\cdot\sin\alpha=R\cdot\sin\angle C$, откуда $AB=2R\cdot\sin\angle C$. Аналогично имеем $BC=2R\cdot\sin\angle A$, $CA=2R\cdot\sin\angle B$. Из этих трех равенств составим пропорции: $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{BC}{\sin\angle A}$, $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{CA}{\sin\angle B}$, $\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{CA}{\sin\angle B}$, откуда окончательно имеем $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$.

Теорема 7. Катет прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Покажем несколько различных способов доказательства этой теоремы.

1. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 171, *а*) на гипотенузе AB отложим отрезок $BD=BC$ и соединим точку D с точкой C.

В равнобедренном треугольнике BDC $\angle B=60°$, а следовательно, он равносторонний, а значит, $BD=BC=DC$. В тре-

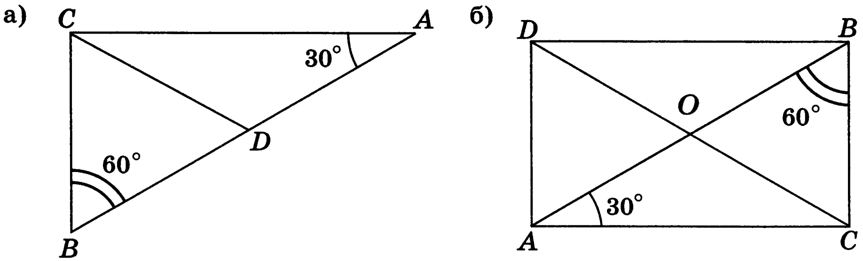


Рис. 171

угольнике ADC $\angle DAC = 30°$ $(90° - 60° = 30°)$, а значит, треугольник ADC равнобедренный, откуда следует, что $AD = DC$. Из последнего равенства и равенства $BD = BC = DC$ получим, что $BC = DB = AD = \frac{AB}{2}$.

2. Построим на катетах прямоугольного треугольника ABC (рис. 171, *б*) как на сторонах прямоугольник $ADBC$ и проведем диагональ DC.

По свойству диагоналей прямоугольника имеем $AO = OB = OC$. В равнобедренном треугольнике BOC $\angle B = 60°$, а значит, треугольник BOC равносторонний. Из вышесказанного следует, что $BC = OB = \frac{AB}{2}$.

Теорема 8. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на два отрезка, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

В курсе геометрии 8 класса [30] эта теорема доказана с использованием теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Но можно доказать эту теорему и другими методами. Приведем эти доказательства.

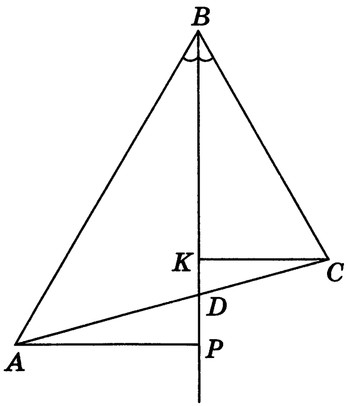


Рис. 172

1. Пусть дан треугольник ABC и биссектриса BD (рис. 172). Нужно доказать, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Докажем эту теорему следующим образом. Построим $KC \perp BD$, $AP \perp BD$. Тогда $\Delta ABP \backsim \Delta BKC$ по I признаку подобия треугольников $(\angle ABP = \angle CBK, \quad \angle APB = \angle BKC)$, отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{KC}$. Аналогично $\Delta ADP \backsim \Delta DKC$ по I признаку подобия треугольников $(\angle KDC = \angle ADP, \angle CKD = \angle APD)$, отсюда $\frac{AP}{KC} = \frac{AD}{DC}$. Из двух полученных пропорций находим $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

2. Пусть дан треугольник ABC и биссектриса BB_1 угла B (рис. 173). Продолжим сторону AB и возьмем на ее продолжении точку D так, чтобы $BD=BC$.

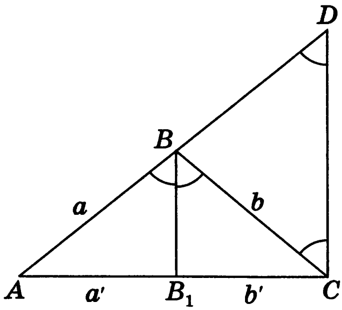


Рис. 173

Тогда

$$\angle BDC = \angle BCD = \frac{180° - \angle DBC}{2} = \frac{\angle ABC}{2} = \angle CBB_1.$$

Таким образом, мы можем утверждать, что прямая CD параллельна биссектрисе BB_1.

Тогда по теореме Фалеса имеем $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BD}$.

Но так как $BD=BC$, то мы имеем $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC}$, откуда окончательно следует $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C}{BC}$.

Теорема 9. Если в треугольнике ABC (рис. 174, *а*) медиана BD равна половине AC, то $\angle B = 90°$.

Доказательство

Так как из условия теоремы следует, что треугольники ABD и BDC равнобедренные, то отсюда имеем $\angle A = \angle 1$, $\angle C = \angle 2$. Складывая эти два равенства, получаем

$$\angle A + \angle C = \angle 1 + \angle 2. \qquad (*)$$

Так как сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то, значит, $\angle A + \angle C + \angle 1 + \angle 2 = 180°$. Учитывая равенство (*), получим $\angle 1 + \angle 2 + \angle 1 + \angle 2 = 180°$, $2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = 180°$. Отсюда следует, что $\angle B = \angle 1 + \angle 2 = 90°$.

Докажем эту же теорему по-другому. Проведем биссектрисы смежных углов ADB и BDC (рис. 174, *б*). Они образуют прямой угол MDN. Действительно, $\angle ADB + \angle BDC = 180°$ как сумма смежных углов; $\angle MDB = \frac{\angle ADB}{2}$ и $\angle BDN = \frac{\angle BDC}{2}$, так как

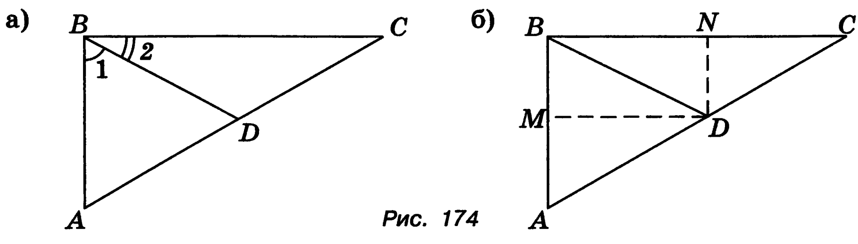


Рис. 174

мы проводили биссектрисы углов. Отсюда имеем, что $\angle MDN = 90°$.

$DM \perp AB$ и $DN \perp BC$ (по условию треугольники ABD и BDC равнобедренные, а в равнобедренном треугольнике биссектриса является и высотой).

Из перпендикулярности прямых DM и AB, DN и BC следует, что $\angle ABC = \angle MDN$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, а так как $\angle MDN = 90°$, то и $\angle ABC = 90°$.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЗАПИСИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Доказательство теоремы в учебниках дается почти всегда сплошным текстом, но учителю следует расчленить доказательство на части, на отдельные логические шаги. Надо составить план доказательства и продумать рациональную запись доказательства теоремы.

Возможны две формы записи доказательства теоремы. Одна из них состоит в том, что вначале записывается полученный вывод и здесь же в строчку записываются аргументы, на основе которых он был сделан. Продемонстрируем эту форму на примере уже рассматривавшейся ранее теоремы:

«Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник — параллелограмм».

Дано: $ABCD$ — четырехугольник (рис. 175), $AB = DC$, $BC = AD$.

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство

Выполним дополнительное построение: проведем диагональ AC и получим тем самым треугольники ABC и ACD.

1) $\Delta ABC = \Delta CDA$ — по третьему признаку равенства треугольников ($AB = DC$, $BC = AD$, AC — общая сторона).

2) $\angle ACB = \angle CAD$ — по теореме о соотношениях между сторонами и углами в равных треугольниках ($\Delta ABC = \Delta CDA$, $AB = DC$).

3) $BC \parallel AD$ — на основании признака параллельности двух прямых (накрест лежащие углы ACB и CAD при прямых BC, AD и секущей AC равны).

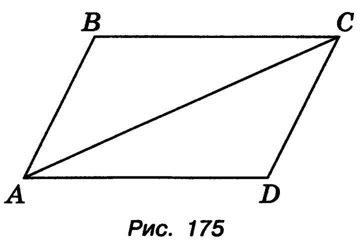


Рис. 175

4) $\angle BAC = \angle DCA$ — по теореме о соотношениях между сторонами и углами в равных треугольниках ($\Delta ABC = \Delta CDA$, $BC = AD$).

5) $AB \parallel DC$ — на основании признака параллельности двух прямых (накрест лежащие углы BAC и DCA при прямых AB, DC и секущей AC равны).

6) $ABCD$ — параллелограмм — на основании определения параллелограмма ($BC \parallel AD$, $AB \parallel DC$).

Другая форма предполагает заполнение таблицы. Покажем такое оформление доказательства на примере теоремы:

«Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия».

Дано: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 176); k — коэффициент подобия; S — площадь ΔABC; S_1 — площадь $\Delta A_1B_1C_1$.

Доказать: $\frac{S}{S_1}=k^2$.

Доказательство: (приведено в таблице 10).

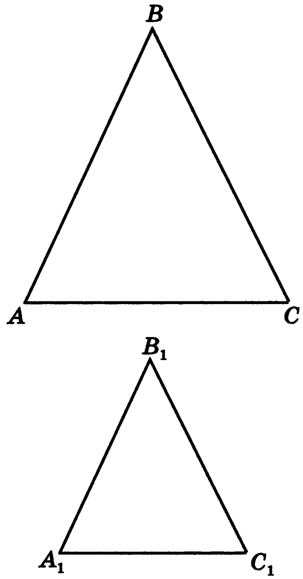


Рис. 176

Таблица 10

Шаги доказательства	Обоснование шагов доказательства
1) $\angle A=\angle A_1$	У подобных треугольников соответственные углы равны
2) $\frac{S}{S_1}=k^2$	По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу
3) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$	Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$
4) $\frac{AB}{A_1B_1}=k$, $\frac{AC}{A_1C_1}=k$	По свойству транзитивности равенств
5) $\frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}=k^2$	По свойству верных равенств
6) $\frac{S}{S_1}=k^2$	По свойству транзитивности равенств

§ 7. ПОДБОР ЗАДАЧ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ОБЛЕГЧИТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Учителю надо продумать работу, подготавливающую учащихся к доказательству теоремы, подобрать задачи, решение которых прольет свет на доказательство.

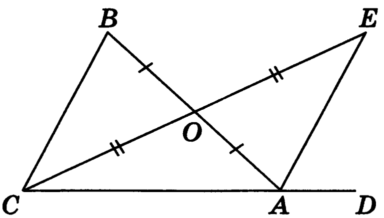


Рис. 177

Если в доказательстве встречаются трудные моменты, то для облегчения его восприятия следует выносить эти моменты в качестве задач, которые решают до изучения доказательства. Такой метод называют методом целесообразных задач.

Так, например, доказательству теоремы: «Против меньшего угла в треугольнике лежит и меньшая сторона» — следует предпослать такое задание: «Какие соотношения между длинами отрезков AB и CD необходимо опровергнуть, чтобы доказать, что $AB < CD$?»

Доказательству теоремы о внешнем угле треугольника может предшествовать решение такой задачи (рис. 177).

Дано: $CO = OE$, $BO = OA$.

Доказать: $\angle ABC < \angle BAD$.

Перед доказательством теоремы о трех перпендикулярах целесообразно предложить учащимся на дом такую задачу (рис. 178).

Дано: $AD \perp \alpha$, $BC = CE$, $AB = a$, $BE \perp AC$, $\angle DAB = 30°$.

Найти DE.

Признаку перпендикулярности прямой и плоскости можно предпослать такую задачу (рис. 179).

Дано: OD и OB — произвольные прямые, лежащие в плоскости α и пересекающиеся в точке O (см. рис. 179); $OA = OA_1$; $OA \perp OB$; $OA \perp OD$; BD — произвольная прямая, лежащая в плоскости.

Найти равные треугольники и доказать их равенство.

Иногда приходится прибегать к целой цепочке целесообразных задач. Так, например, перед доказательством утверждения «Из всех треугольников, вписанных в данный треугольник, наименьший периметр имеет тот, вершинами которого являются основания высот данного треугольника» целесообразно рассмотреть доказательства таких вспомогательных утверждений:

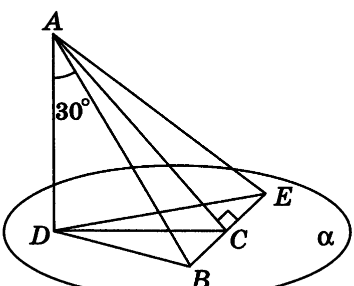


Рис. 178

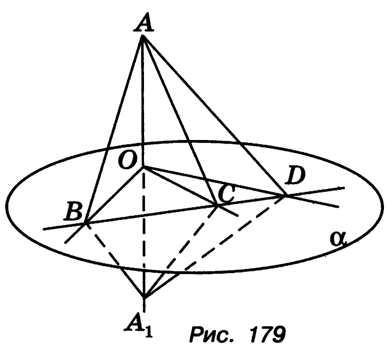


Рис. 179

1. Даны прямая a и две точки C и D, которые лежат по одну сторону от нее. Найдите кратчайший путь от точки C к точке D с заходом на прямую a.

2. Даны угол MOK и точки A и B внутри его. Соедините эти точки ломаной наименьшей длины так, чтобы ее вершины лежали на сторонах угла.

3. Сформулируйте и выполните аналогичное задание при условии, что точки A и B совпадают.

4. Впишите в треугольник MOK другой треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна из его вершин была в данной точке A.

§ 8. ПОДБОР ЗАДАЧ, ЗАКРЕПЛЯЮЩИХ ДОКАЗЫВАЕМУЮ ТЕОРЕМУ

Важнейшим моментом при подготовке к уроку является подбор упражнений, закрепляющих связи доказываемой теоремы с другими теоремами курса.

Путем анализа возможных ситуаций применения теоремы полезно выбрать наиболее типичные. Эти ситуации будут создавать нам задачи, которые войдут в обязательный уровень обучения. Так, например, наиболее типичные случаи применения первого и второго признаков равенства треугольников связаны с конфигурациями, изображенными на рисунках 180, *а*, *б*, *в*, *г* и 181, *а*, *б*, *в*, *г*.

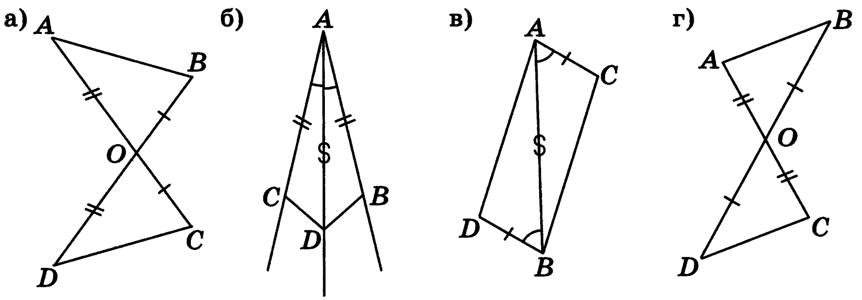


Рис. 180

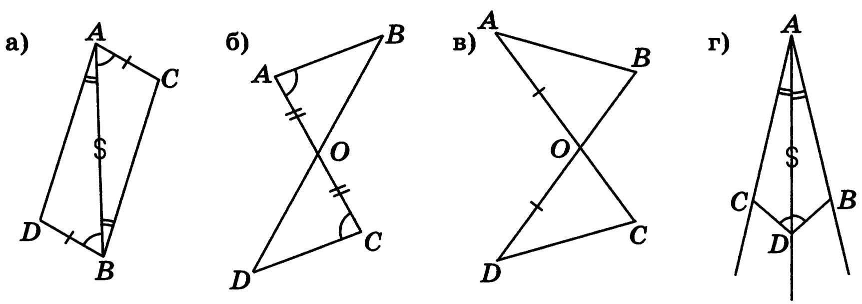


Рис. 181

Еще пример. Теорема косинусов определяет три элементарные (опорные) задачи:

а) даны две стороны треугольника и угол между ними, найти третью сторону;

б) даны три стороны треугольника, найти какой-либо угол треугольника;

в) даны две стороны треугольника и угол не между ними, найти третью сторону треугольника.

Целесообразно вырабатывать вместе с учащимися алгоритмы решения различного рода задач, требующих применения изученных теорем. Так, например, для решения задач, в которых следует найти радиус окружности, описанной около треугольника с заданными сторонами, алгоритм решения может быть таким:

а) по теореме косинусов находим косинус какого-нибудь угла этого треугольника;

б) вычисляем синус этого угла;

в) по теореме синусов находим радиус описанной окружности.

Кроме задач, требующих стандартного применения теорем и определений понятий, для наиболее способных учащихся надо подбирать и такие задачи, решение которых предполагает их вариативное использование. Приведем примеры таких задач.

Нестандартный подход к использованию подобия треугольников

Задача 1. Основания трапеции равны 45 см и 30 см. Одна из диагоналей делит трапецию на два подобных треугольника. Найти длину этой диагонали.

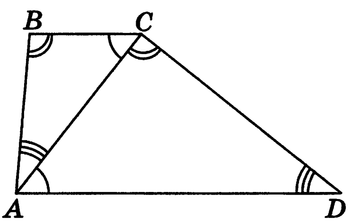


Рис. 182

Решение этой задачи основано на составлении пропорции, но, чтобы верно ее составить, надо прежде всего отметить равные углы в подобных треугольниках (рис. 182).

Задача 2. На стороне AC треугольника ABC (рис. 183) взята точка M так, что $AM:MC=3:4$, а на стороне BC взята точка K так, что $BK:KC=1:2$. В каком отношении прямая AK делит отрезок BM?

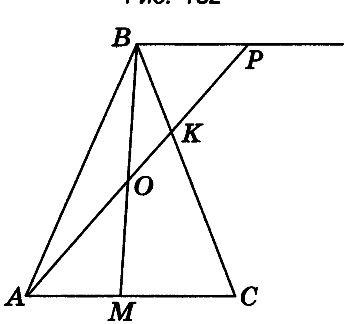


Рис. 183

Решение. Проведем через вершину B прямую, параллельную стороне AC, и обозначим через P точку ее пересечения с прямой AK; O — точка пересечения отрезка

BM и прямой AK. В результате такого построения мы получим пары подобных треугольников: BKP и CKA, BOP и MOA.

Из подобия треугольников BOP и MOA имеем

$$\frac{BO}{OM}=\frac{BP}{AM}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников BKP и CKA имеем

$$\frac{BP}{AC}=\frac{BK}{KC}. \qquad (2)$$

В равенстве (1) дробь $\frac{BP}{AM}$ умножим и разделим на AC, тем самым пропорция примет вид: $\frac{BO}{OM}=\frac{BP}{AC}\cdot\frac{AC}{AM}$. В последнем равенстве вместо $\frac{BP}{AC}$, используя равенство (2), подставим $\frac{BK}{KC}$, тем самым получим $\frac{BO}{OM}=\frac{BK}{KC}\cdot\frac{AC}{AM}$. Учитывая, что $AC=AM+$ $+MC$, последнее равенство примет вид: $\frac{BO}{OM}=\frac{BK}{KC}\cdot\frac{AM+MC}{AM}=$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+4}{3}=\frac{7}{6}$.

Полезно обратить внимание учащихся на использованный прием: умножение и деление дроби на одну и ту же величину с целью получения нужного отношения.

Нестандартный подход к использованию теоремы

Теорема «Сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны» используется при решении следующей задачи:

В выпуклом четырехугольнике найти точку, для которой сумма расстояний до вершин минимальна.

Решение. Проведем диагонали четырехугольника $ABCD$ (рис. 184) и возьмем внутри его произвольную точку M, которую соединим с вершинами четырехугольника.

По теореме о неравенстве треугольника имеем два неравенства: $CO+OA<CM+AM$ и $BO+OD<MB+MD$. Так как точка M была взята произвольно, то эти два неравенства и доказывают, что искомой будет точка пересечения диагоналей.

Подобного рода нестандартные ситуации следует использовать и для закрепления различных понятий. Приведем в связи с этим такие примеры.

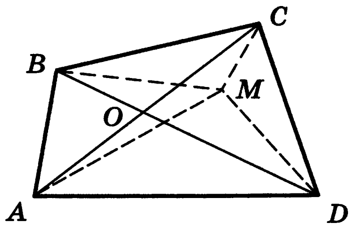


Рис. 184

1. Учащимся 10 класса было предложено ответить на вопрос: «Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные грани которой перпендикулярны

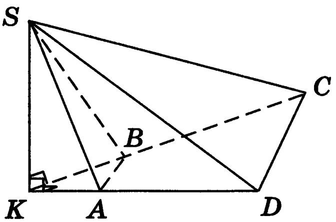


Рис. 185

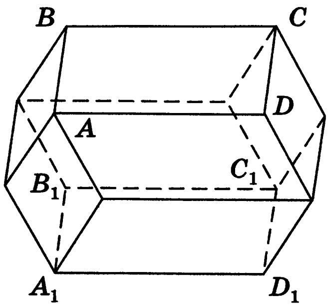


Рис. 186

основанию пирамиды?» Все школьники дали ошибочный ответ. Находясь в плену стандартного представления пирамиды, они утверждали, что если бы эти две грани были перпендикулярны основанию, то они не имели бы общей вершины. Но такая пирамида существует (рис. 185).

В пирамиде $SABCD$ грани SBC и SAD перпендикулярны основанию $ABCD$. (Искомая пирамида получена из треугольной пирамиды $SKCD$, у которой грани SCK и SDK перпендикулярны основанию KCD.)

2. При изучении понятия призмы полезно предложить учащимся ответить на вопрос: «Верно ли такое определение призмы: призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы?»

Ответ на поставленный вопрос отрицателен, и подтверждением тому служит рисунок 186, на котором изображен многогранник, не являющийся призмой, но у которого $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, а все остальные грани — параллелограммы. Заметим, что такое ошибочное определение призмы было дано ранее в учебнике А. П. Киселева [74, с. 210].

Для отработки прямой теоремы и обратной ей весьма полезно предложить учащимся на одном и том же уроке задачи, решение которых требует использования как прямой, так и обратной теорем. Покажем это на примере.

После изучения теоремы о сумме внутренних углов треугольника, отрабатывая признак параллельности прямых и теорему, обратную ей, можно решить две задачи.

Задача 1. На рисунке 187 даны: $\angle A=42°$, $\angle D=49°$, $\angle AOD= 91°$. Доказать, что $AC \parallel BD$.

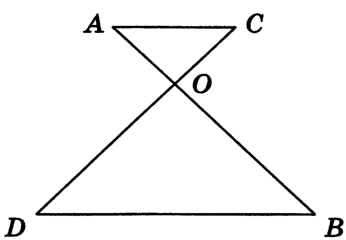


Рис. 187

Задача 2. На том же рисунке даны: $\angle A=42°$, $\angle D=48°$, $\angle AOD=92°$. Определить, параллельны ли прямые AC и BD.

Решение обеих задач можно свести к вычислению угла C и сравнению его с углом D. В первой задаче окажется, что $\angle C= \angle D$, а во второй задаче $\angle C \neq \angle D$.

При этом в первом случае применялась теорема-признак параллельности двух прямых, а во втором случае — обратная по отношению к первой теорема.

Отметим методические требования к системе задач, направленной на усвоение теоремы учащимися:

1) способствовать мотивации введения теоремы;

2) предусматривать работу учащихся, в результате выполнения которой может быть выдвинута гипотеза, закономерность, отраженная в теореме;

3) обеспечивать прочное и осознанное запоминание формулировки теоремы, понимание ее логической структуры;

4) способствовать усвоению содержания теоремы, пониманию значения каждого слова в формулировке теоремы;

5) обеспечивать восприятие идеи доказательства, раскрывать приемы доказательства, подготавливать к восприятию логической структуры доказательства;

6) через систему задач повторять положения, на которых основывается доказательство теоремы;

7) обучать применению теоремы в решении задач, причем должны быть такие задачи, которые позволяют сопоставлять решение с использованием доказанной теоремы и без нее;

8) раскрывать взаимосвязь изученной теоремы с другими теоремами.

§ 9. ПОДБОР МАТЕРИАЛА ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ, СВЯЗАННОГО С ИЗУЧЕННОЙ ТЕОРЕМОЙ

Для формирования у учащихся интереса к математике, удовлетворения потребностей тех школьников, которые изучают математику на продвинутом уровне, полезно продумывать внеклассную работу (кружковые и факультативные занятия), которая расширила и углубила бы материал, связанный с изученной теоремой или понятием.

Так, например, на внеклассных занятиях можно ознакомить учащихся с такими исследованиями по геометрии треугольников, которые показали бы, что ни внимательное рассмотрение остроумными греками, ни дотошное исследование последующими геометрами не исчерпали всех возможных свойств этой уникальной фигуры.

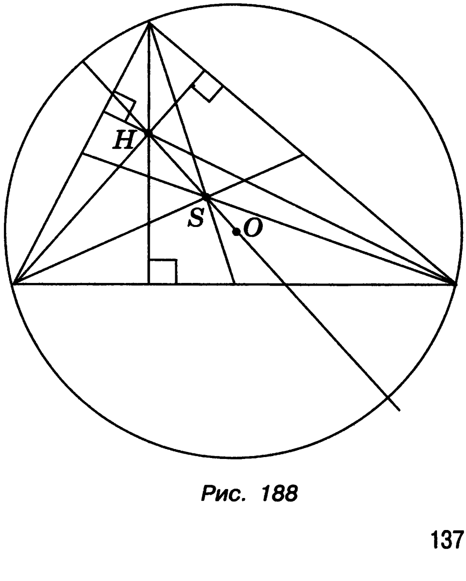


Рис. 188

1) Теорема Л. Эйлера (1734—1800). Ортоцентр, центр тяжести треугольника и центр описанной окружности лежат на одной прямой (рис. 188).

Ортоцентр треугольника — точка пересечения высот треугольника. На рисунке 188 это точка H.

S — центр тяжести треугольника ABC (это точка пересечения медиан треугольника).

O — центр описанной около ΔABC окружности.

Точки H, S, O лежат на одной прямой, которая называется прямой Эйлера.

2) Опишем вокруг треугольника ABC окружность и обозначим ее центр буквой O (рис. 189). Впишем в треугольник ABC окружность и обозначим ее центр буквой O_1. Л. Эйлер доказал, что $OO_1 = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, где R — радиус описанной окружности, а r — радиус вписанной окружности.

3) Теорема Я. Штейнера (1796—1863). Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B, C первого соответственно на стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 второго, пересекаются в одной точке, то и, обратно, перпендикуляры, опущенные из вершин A_1, B_1, C_1 второго треугольника соответственно на стороны BC, CA, AB первого, также пересекаются в одной точке.

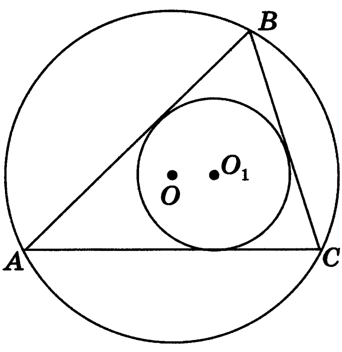


Рис. 189

4) Теорема Д. Помпейю (1873—1954). Из двух отрезков, соединяющих вершины A, B, C равностороннего треугольника с произвольной точкой P в его плоскости, всегда можно построить треугольник (если не исключать случая и вырожденного треугольника, в котором все три вершины лежат на одной прямой, а одна сторона равна сумме двух других сторон).

5) Теорема Ф. Морлея (1860—1937). Внутренние трисект-

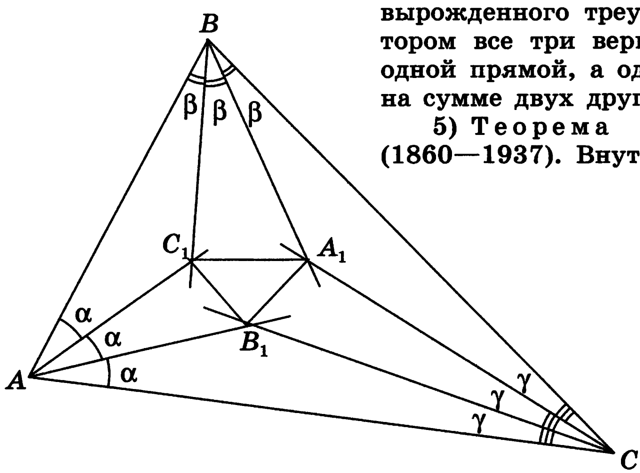


Рис. 190

рисы углов произвольного треугольника, прилегающие к одной и той же стороне, попарно пересекаются в трех вершинах некоторого равностороннего треугольника (рис. 190).

Трисектрисой угла называется луч с началом в вершине угла и делящий градусную меру угла в отношении $1:2$ (т. е. трисектриса угла отсекает от угла третью часть).

Еще пример. На внеклассных занятиях можно продолжить изучение тригонометрических соотношений в прямоугольном треугольнике. Покажем графический способ вычисления тригонометрических величин.

Возьмем угол AOB, равный α (рис. 191). Пусть $OA=1$. Опустим из точки A на прямую OB перпендикуляр AC, тогда $OC=\cos\alpha$, $AC=\sin\alpha$.

Проведем $CD\perp OA$, тогда будем иметь два подобных треугольника: $\triangle OAC$ и $\triangle ODC$. Из подобия треугольников получим $\frac{OD}{OC}=\frac{OC}{OA}$. Учитывая, что $OA=1$, $OC=\cos\alpha$, получим $OD=\cos^2\alpha$. Последовательно опуская перпендикуляры DE, EF и т. д., мы получим $OE=\cos\alpha$, $OF=\cos\alpha$ и т. д.

Из подобия треугольников OAC и ACD получим $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{OA}$. Учитывая, что $OA=1$, $AC=\sin\alpha$, получим $AD=\sin^2\alpha$.

Если восстановить в точке A перпендикуляр AB к прямой OA (рис. 192) и провести $CK\parallel AD$, то будем иметь $CK=AD=\sin^2\alpha$. Последовательно опустим перпендикуляры KH, HM и т. д. Из подобия треугольников CHK и CKA получим $\frac{HK}{CK}=\frac{KC}{AC}$. Из подобия треугольников OCA и CKA получим $\frac{KC}{AC}=\frac{AC}{AO}$. Из двух последних равенств будем иметь $\frac{HK}{CK}=\frac{AC}{AO}$. Учитывая, что $OA=1$, $CK=\sin^2\alpha$, $AC=\sin\alpha$, получим $HK=\sin^3\alpha$. Аналогично $HM=\sin^4\alpha$.

Используя теперь полученные значения сторон треугольников, будем иметь

$$1=OA=AD+DO=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha,\ OD-AD=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$$

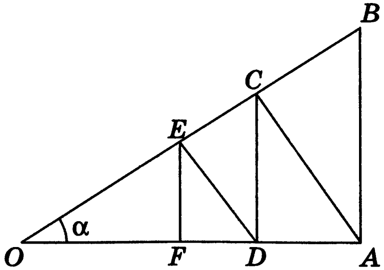


Рис. 191

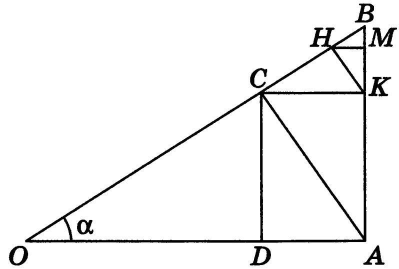


Рис. 192

Из треугольника AOC имеем $CD^2 = OD \cdot DA$. Учитывая, что $OD = \cos^2\alpha$, а $DA = \sin^2\alpha$, получим $CD^2 = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$, откуда $CD = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

Заметим, что приведенные здесь рассуждения справедливы лишь для острого угла.

В учебнике [30] рассматривается теорема о том, что если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

С помощью этой теоремы доказывается лишь теорема о биссектрисе угла треугольника и первый признак подобия треугольников. После того как в 8 классе будет рассмотрен вопрос об измерении вписанных углов, возможно на внеклассных занятиях с помощью отмеченной выше теоремы доказать такую теорему:

«Площади треугольников, вписанных в окружность, пропорциональны произведениям их сторон».

Доказательство

Пусть BCD и ACE — треугольники, вписанные в окружность (рис. 193). Соединим вершины D и E. Имеем, что $\angle A = \angle CDE$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу CE.

Так как треугольники ACE и CDE имеют по одному равному углу, то согласно упомянутой выше теореме получим $\frac{S_{ACE}}{S_{CDE}} = \frac{AC \cdot AE}{CD \cdot DE}$.

В треугольниках CDE и BCD имеется по одному равному углу: $\angle CED = \angle DBC$, тогда $\frac{S_{CDE}}{S_{BCD}} = \frac{CE \cdot DE}{BD \cdot BC}$.

Перемножив почленно полученные два равенства, будем иметь

$$\frac{S_{ACE}}{S_{BCD}} = \frac{AC \cdot AE \cdot CE}{BD \cdot CD \cdot BC}.$$

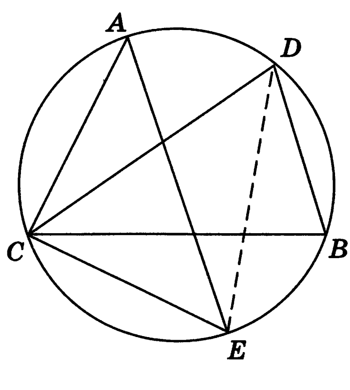


Рис. 193

Обращаем внимание читателя на то, что доказать эту теорему можно значительно проще, если использовать формулу для хорды длиной a в окружности радиуса R, которая стягивает дугу: $a = 2R\sin\alpha$.

$$DB = 2R\sin\angle DCB,$$

$$AE = 2R\sin\angle ACE,$$

откуда $\frac{DB}{AE} = \frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle ACE}$.

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} DC \cdot BC \sin\angle DCB,$$

$$S_{ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot CE\sin\angle ACE,\quad \frac{S_{ACE}}{S_{BCD}}=\frac{AC\cdot CE\sin\angle ACE}{CD\cdot BC\sin\angle DCB}.$$

Подставляя в последнем равенстве вместо отношения $\frac{\sin\angle ACE}{\sin\angle DCB}$ равное ему отношение $\frac{AE}{DB}$, окончательно будем иметь требуемое.

Если доказанную теорему принять за основу, то можно легко вывести выражение для площади треугольника через радиус описанной окружности и три его стороны. Действительно, возьмем в качестве треугольника CDB равносторонний треугольник.

Для него имеем $CD=DB=BC=R\sqrt{3}$, $S_{BCD}=\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$. Подставляя эти значения в формулу, полученную выше, будем иметь $\frac{S_{ACE}}{\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}=\frac{AC\cdot CE\cdot AE}{(R\sqrt{3})^3}$. Окончательно $S_{ACE}=\frac{AC\cdot CE\cdot AE}{4R}$.

С помощью доказанной теоремы можно доказать еще одну теорему о том, что отношение площадей двух вписанных четырехугольников равно произведению отношения диагоналей на отношение сумм произведений сторон четырехугольников, лежащих по одну сторону от соответствующей диагонали. (Цыганова Н. Я. О некоторых теоремах элементарной геометрии//Математика в школе.— 1959.— № 4.)

Рассмотрим еще один пример. В 8 классе учащиеся доказывают теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд. Целесообразно на внеклассном занятии использовать эту теорему для доказательства теоремы Пифагора. Приведем это доказательство.

Проведем окружность с центром в точке A, которая является одной из вершин прямоугольного треугольника ABC (рис. 194). По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд имеем

$$(c+b)\cdot(c-b)=a^2;\quad c^2-b^2=a^2;\quad a^2+b^2=c^2.$$

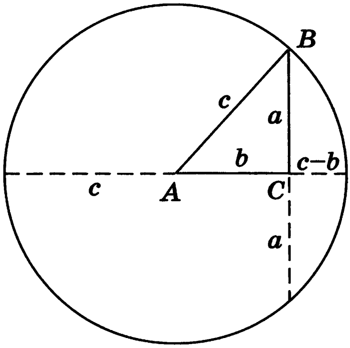


Рис. 194

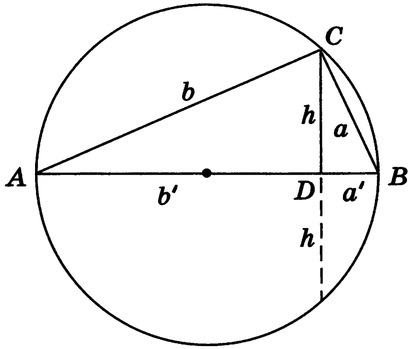


Рис. 195

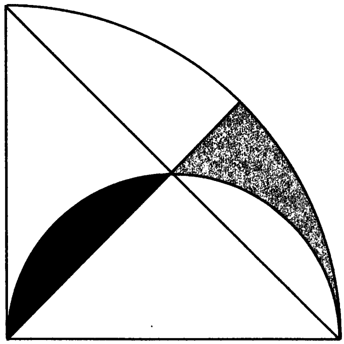


Рис. 196

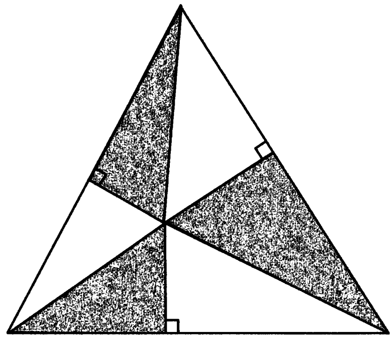


Рис. 197

С помощью этой теоремы полезно на внеклассном занятии вернуться к теореме из курса геометрии 8 класса о высоте прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

Построим в окружности прямоугольный треугольник ACB и введем обозначения: $AC = b$, $CB = a$, $CD = h$ (рис. 195). Применяя теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд, получаем $a' \cdot b' = h^2$, или $\frac{a'}{h} = \frac{h}{b'}$.

На внеклассных занятиях можно, например, более обстоятельно рассмотреть вопрос о равновеликости фигур, который в школьном курсе геометрии хотя и имеет место, но представлен фрагментарно. Для этого учащимся могут быть предложены такие задачи.

1) Докажите, что светлозакрашенная и темнозакрашенная фигуры равновелики (рис. 196).

2) Точка, взятая внутри равностороннего треугольника, соединена со всеми вершинами. Кроме того, из нее опущены перпендикуляры на все стороны треугольника. Докажите, что сумма площадей светлых треугольников равна сумме площадей закрашенных треугольников (рис. 197).

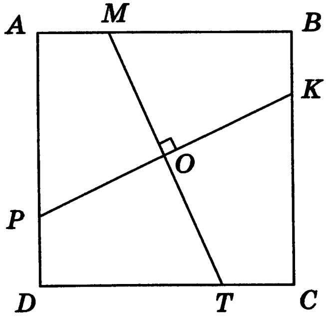


Рис. 198

3) Докажите, что медианы делят любой треугольник на шесть равновеликих частей.

4) Квадрат разделен на четыре части взаимно перпендикулярными прямыми, проходящими через центр квадрата (рис. 198). Докажите, что все четыре части равновелики.

5) Докажите, что из всех равновеликих треугольников с общим основанием наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

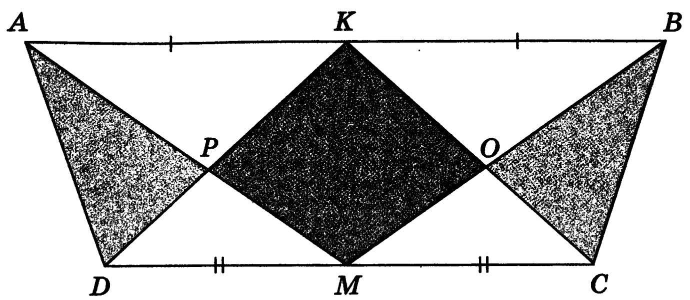


Рис. 199

6) Пусть K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 199), отрезки DK и AM пересекаются в точке P, а отрезки CK и BM — в точке O. Докажите, что сумма площадей треугольников APD и BOC равна площади четырехугольника $PKOM$.

7) В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена высота CD. Около треугольников ABC, ADC, CBD описаны окружности (рис. 200). Докажите, что сумма площадей трех светлозакрашенных фигур равна площади темнозакрашенной криволинейной фигуры.

8) Через каждую вершину выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная его диагонали (рис. 201). Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна площади четырехугольника $ABCD$.

9) Параллелограмм двумя парами прямых, параллельных его сторонам, разбит на девять параллелограммов (рис. 202, *а*). Площадь исходного параллелограмма равна S_1, а площадь закрашенного параллелограмма равна S_2. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна полусумме площадей исходного и закрашенного параллелограммов, т. е. $\frac{S_1+S_2}{2}$.

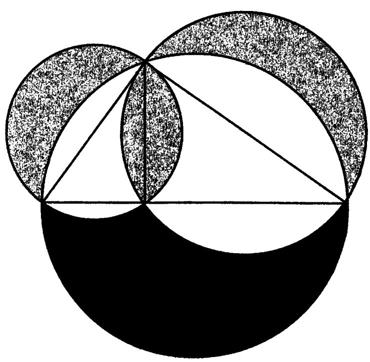


Рис. 200

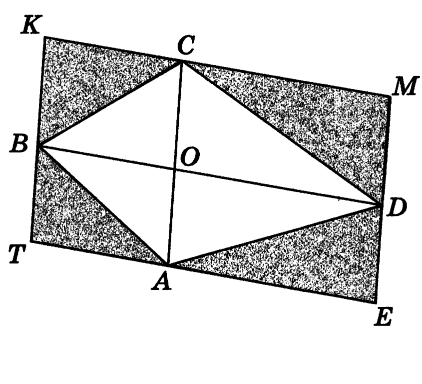


Рис. 201

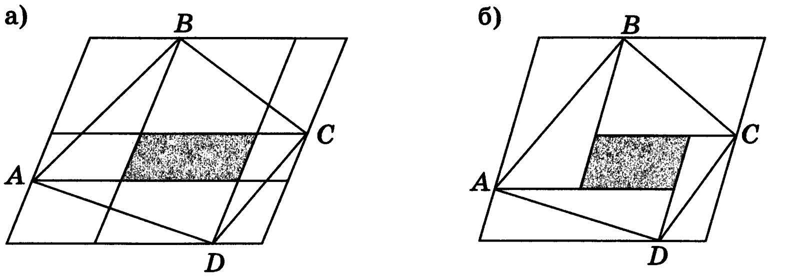


Рис. 202

Доказательство

Четырехугольник $ABCD$ складывается из закрашенного параллелограмма и половинок параллелограммов, составляющих рамку (рис. 202, *б*). Поэтому $S_{ABCD} = S_2 + \frac{S_1 - S_2}{2} = \frac{S_1 + S_2}{2}$.

10) На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены параллелограммы $ABDE$ и $BCXQ$ (рис. 203). Прямые ED и XQ пересекаются в точке M. На стороне AC вне треугольника ABC построен параллелограмм $ACKL$, стороны CK и LA которого равны отрезку MB и параллельны ему. Докажите, что площадь параллелограмма $ACKL$ равна сумме площадей параллелограммов $ABDE$ и $BCXQ$.

Доказательство

Проведем прямые LA и KC и точки пересечения со сторонами параллелограммов обозначим буквами F и P (рис. 203). Построим параллелограммы $LABN$ и $BCKN$. Это возможно, так как отрезки LA и CK равны и параллельны.

Поскольку треугольник ABC равен треугольнику LNK, то площадь параллелограмма $ACKL$ равна сумме площадей параллелограммов $ABNL$ и $BCKN$. Очевидно также, что площадь параллелограмма $ABNL$ равна площади параллелограмма $FMBA$, которая, в свою очередь, равна площади параллелограмма $EDBA$.

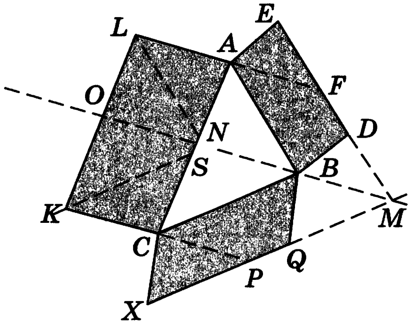


Рис. 203

Аналогично площадь параллелограмма $BCKN$ равна площади параллелограмма $MPCB$, а она равна площади параллелограмма $QXCB$. Отсюда и следует, что $S_{ACKL} = S_{ABDE} + S_{BCXQ}$.

Рассмотрим еще одно доказательство.

Из построений, проведенных в предыдущем доказательстве, следует, что $AF = BM$, а так как $LA = BM$, то $AF = LA$; аналогично $CP = CK$.

Так как параллелограммы, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики, то $S_{AEDB} = S_{AFMB} = S_{ASOL}$; $S_{BCXQ} = S_{BCPM} = S_{SCKO}$.

Сложив почленно левые и правые части этих равенств, будем иметь $S_{AEDB} + S_{BCXQ} = S_{ASOL} + S_{SCKO}$. Так как сумма $S_{ASOL} + S_{SCKO}$ равна S_{ACKL}, то окончательно имеем $S_{ABDE} + S_{BCXQ} = S_{ACKL}$.

11) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Доказательство

Случай 1. Если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 204) и O — произвольная точка, лежащая внутри параллелограмма $ABCD$, то утверждение справедливо.

$$S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{a(h_1 + h_2)}{2} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Случай 2. Если выпуклый четырехугольник произвольный, то разрежем его по средним линиям и из получившихся четырехугольников сложим параллелограмм так, как показано на рисунке 205. Точки O и O', C и D, L и L' симметричны относительно точки M, точки A и D, O и O'', K и K' симметричны относительно точки N.

Легко видеть, что $S_{AOD} = S_{ODO''}$ и $S_{BOC} = S_{O'DP}$. В силу сделанного замечания сумма площадей ODO'' и $O'DP$ равна половине площади параллелограмма $OO'PO''$, который равновелик по построению данному четырехугольнику $ABCD$.

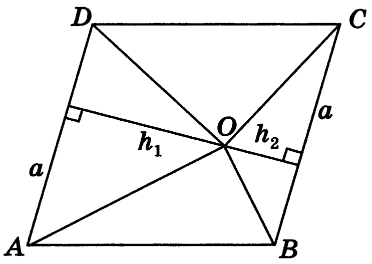


Рис. 204

12) Дана произвольная трапеция $ABCD$ и проведены ее диагонали (рис. 206). Докажите, что $S_{ABK} = S_{KCD}$.

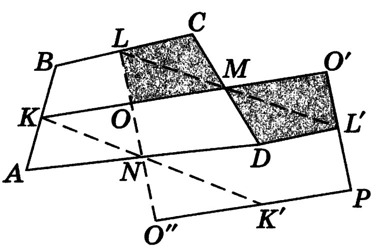


Рис. 205

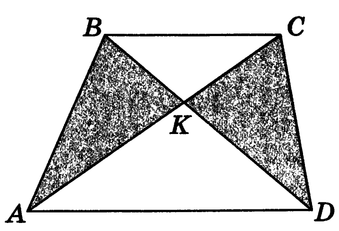


Рис. 206

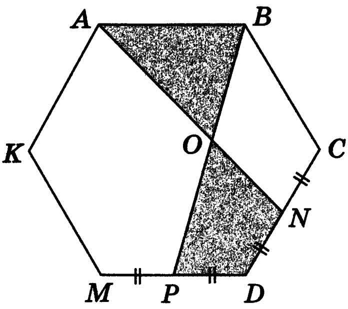


Рис. 207

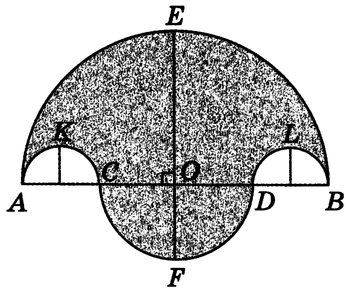


Рис. 208

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABD и ACD. Эти треугольники имеют одинаковую высоту и одно и то же основание AD, тогда $S_{ABD}=S_{ACD}$. Отнимем от обеих частей этого равенства S_{AKD}, получим $S_{ABD}-S_{AKD}=S_{ACD}-S_{AKD}$, откуда имеем $S_{ABK}=S_{KCD}$.

13) Дан правильный шестиугольник $ABCDMK$, в нем произведены построения, указанные на рисунке 207. Докажите, что $S_{AOB}=S_{OPDN}$.

Доказательство

Легко видеть, что четырехугольник $ABCN$ равен четырехугольнику $BCDP$, а значит, $S_{ABCN}=S_{BCDP}$. Отнимем от обеих частей этого равенства S_{OBCN}, получим $S_{ABCN}-S_{OBCN}=S_{BCDP}-S_{OBCN}$. Согласно обозначениям чертежа имеем $S_{AOB}=S_{OPDN}$.

14) На рисунке 208 изображены четыре полуокружности: AEB, AKC, CFD, DLB, причем $AC=DB$. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна площади круга, построенного на отрезке EF как на диаметре.

15) На рисунке 209 даны квадраты. Докажите, что закрашенные части каждого квадрата — равновеликие фигуры.

16) Отрезок AB разделен на четыре равные части AC, CO, OD и DB (рис. 210), и проведены полуокружности. Докажите, что площади закрашенных фигур равны.

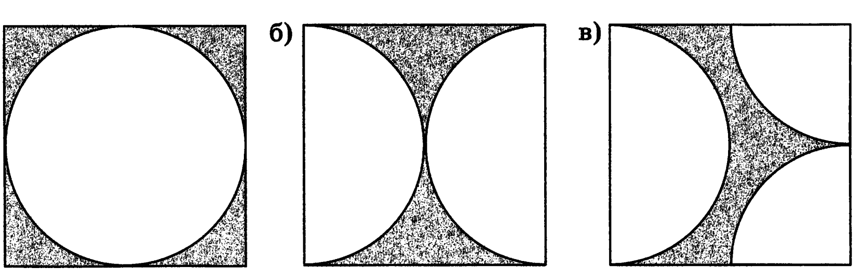


Рис. 209

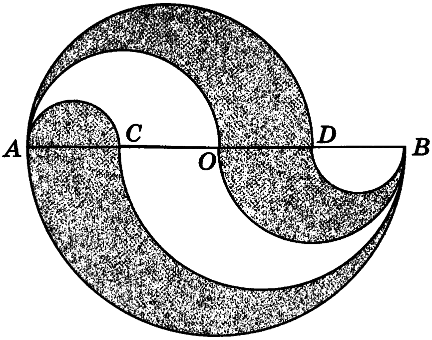


Рис. 210

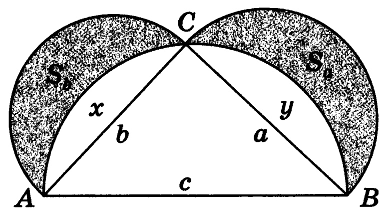


Рис. 211

17) Дан прямоугольный треугольник, длины катетов которого a и b и длина гипотенузы c. На каждой из его сторон как на диаметре в одной полуплоскости построены полуокружности. Докажите, что площадь двух получившихся при построении луночек равна площади данного треугольника (рис. 211).

Эта задача возникла из задачи Гиппократа Хиосского (V в. до н. э.) о так называемых луночках. Гиппократ с помощью циркуля и линейки построил треугольник, равновеликий криволинейной фигуре, контур которой — дуги окружностей.

Решение

Обозначим площади луночек через S_a и S_b и площади не заштрихованных на рисунке сегментов через x и y.

По теореме Пифагора имеем $c^2=a^2+b^2$. По свойству равенства, умножив обе части на $\frac{\pi}{8}$, будем иметь

$$\frac{\pi c^2}{8}=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}. \qquad (1)$$

Площадь полуокружности, построенной на катете b, будет равна $\frac{\pi b^2}{8}$. Согласно чертежу и обозначениям можно записать

$$\frac{\pi b^2}{8}=S_b+x. \qquad (2)$$

Площадь полуокружности, построенной на катете a, будет равна $\frac{\pi a^2}{8}$. Согласно чертежу и обозначениям можно записать

$$\frac{\pi a^2}{8}=S_a+y. \qquad (3)$$

Площадь полуокружности, построенной на гипотенузе, равна $\frac{\pi c^2}{8}$, и согласно обозначениям из чертежа видно, что можно записать равенство

$$\frac{\pi c^2}{8}=x+y+S_{ABC}. \qquad (4)$$

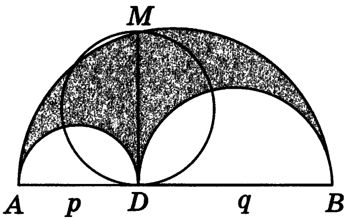


Рис. 212

Сложим почленно равенства (2) и (3):

$$\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}=S_b+x+S_a+y. \qquad (5)$$

Используя равенство (1), мы видим, что у равенств (4) и (5) левые части равны, а значит, равны и правые части:

$$S_a+x+S_b+y=x+y+S_{ABC}.$$

Окончательно имеем $S_a+S_b=S_{ABC}$.

18) Взят произвольный отрезок $AB=c$, который разделен на две части $AD=p$ и $DB=q$ (рис. 212). На каждом отрезке как на диаметре в одной полуплоскости построены полуокружности. Образованная ими фигура, называемая в математике *арбелоном* (в пер. с греч.— сапожный нож), на рисунке закрашена. Через точку D проведен перпендикуляр до пересечения с большей полуокружностью — точка M. На DM как на диаметре построен круг. Докажите, что этот круг равновелик арбелону.

19) Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF имеют равные площади.

20) Два параллелограмма имеют общее основание. Постройте параллелограмм, равновеликий объединению этих параллелограммов.

21) Постройте треугольник, равновеликий данному четырехугольнику.

22) Два параллелограмма имеют общее основание. Постройте треугольник, равновеликий их объединению.

23) Постройте прямоугольник, равновеликий объединению двух данных треугольников, имеющих равные высоты.

24) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MAN=45°$. Диагональ BD квадрата пересекает отрезки AM и AN в точках P и Q. Докажите, что отрезок PQ делит треугольник AMN на две фигуры равной площади.

25) Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина стороны BC, точка N делит сторону CD в отношении $1:2$, считая от точки D. Докажите, что площадь треугольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN.

26) Начерчено несколько трапеций с одной и той же средней линией и равными высотами (рис. 213). Что вы можете сказать об их площадях?

27) На рисунке 214 дан шестиугольник $ABCDEK$. Проведена диагональ BK, соединяющая две вершины, смежные с одной и той же вершиной A, и через точку A проведена прямая, параллельная BK, до пересечения с продолжением стороны EK

в точке M. Соединены точки M и B, в результате чего получен многоугольник $MBCDE$, равновеликий многоугольнику $ABCDEK$ (обоснуйте).

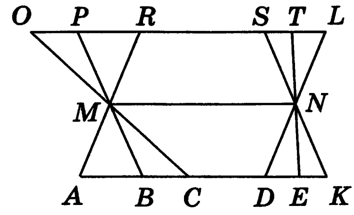


Рис. 213

Таким образом заданный многоугольник заменен равновеликим ему многоугольником, имеющим на одну сторону меньше, чем первоначальный. Продолжите аналогичные построения до тех пор, пока вы не придете к треугольнику, равновеликому исходному многоугольнику (обоснуйте).

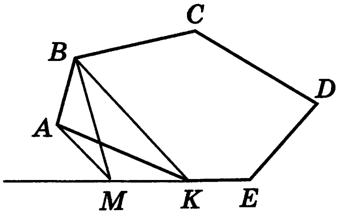


Рис. 214

Обращаем ваше внимание на то, что в этой задаче описан способ построения треугольника, равновеликого заданному многоугольнику.

28) Опишем способ построения квадрата, равновеликого прямоугольнику. Пусть дан прямоугольник (не квадрат) (рис. 215, *а*), меньшая сторона прямоугольника продолжается и на продолжении откладывается такой отрезок, чтобы он вместе с меньшей стороной образовал отрезок, равный большей стороне прямоугольника; затем этот отрезок делится пополам, середина принимается за центр полуокружности, а половина отрезка — за ее радиус; потом большая сторона прямоугольника продолжается до пересечения с полуокружностью; точка пересечения соединяется с началом меньшей стороны отрезком; получившийся отрезок есть сторона искомого квадрата (обоснуйте почему). Заметим, что возможны два способа построения такого квадрата. Другой способ показан на рисунке 215, *б*.

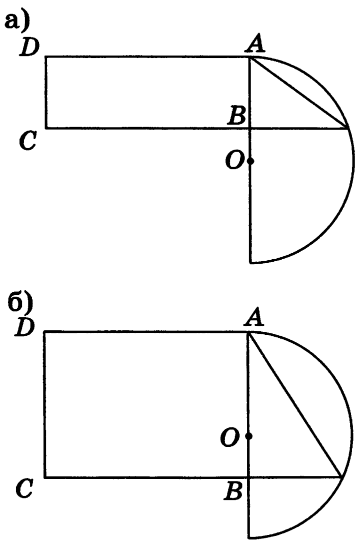


Рис. 215

29) Постройте два подобных прямоугольных треугольника, у одного из которых стороны вдвое больше сходственных сторон другого. Во сколько раз площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

Убедиться в том, что площадь первого треугольника в четыре раза больше площади второго, можно из геометрических соображений (рис. 216). Докажите это соотношение площадей строго дедуктивно.

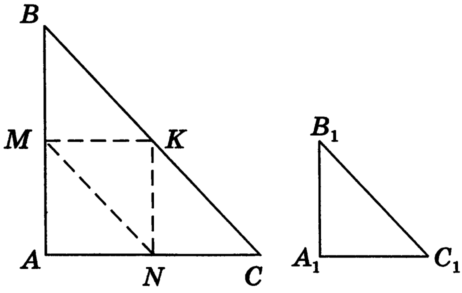


Рис. 216

30) Докажите, что квадрат, построенный на катете прямоугольного треугольника, равновелик прямоугольнику, стороны которого равны гипотенузе и отрезку гипотенузы, отсекаемому основанием высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, и прилежащему к рассматриваемому катету.

31) Докажите, что во всяком треугольнике параллелограмм, построенный на одной из его сторон внутри треугольника, причем так, что две его вершины лежат вне треугольника, равновелик сумме таких параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника, что стороны их, противоположные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма. (Это теорема Паппа Александрийского, жившего в III в. до н. э.)

32) Докажите, что квадрат, построенный на высоте прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равновелик прямоугольнику, сторонами которого служат отрезки гипотенузы, на которые ее делит эта высота.

33) Докажите, что криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=x^3+\frac{3}{4}$ и отрезками прямых $y=0$, $x=0$, $x=1$, равновелика криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y=2x$ и отрезками прямых $y=0$, $x=1$.

34) Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

Указание: для доказательства постройте на указанных диагоналях прямоугольник, равносоставленный с заданным восьмиугольником.

Дополнительный материал по изученной теореме должен, помимо всего прочего, включать в себя исторические сведения, факты занимательного характера, способные заинтересовать учащихся. Этот материал следует использовать как на уроках, так и на внеклассных занятиях. Примером может служить книга известного немецкого популяризатора математики Вальтера Литцмана, в которой он собрал вокруг теоремы Пифагора материал, относящийся и к геометрии, и к алгебре, и к арифметике (Литцман В. Теорема Пифагора.— М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960).

Методика работы над формулировкой, доказательством и закреплением теоремы

§ 1. УСВОЕНИЕ УЧАЩИМИСЯ ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМЫ

В зависимости от характера теоремы, наличия учебного времени на уроке, уровня развития учащихся можно выбрать один из следующих способов ознакомления школьников с формулировкой теоремы:

1. Учитель подготавливает учащихся к самостоятельному «открытию» теоремы.

2. Учитель организует работу, которая способствует сознательному восприятию и пониманию учащимися новой теоремы, формулировка которой сообщается им в готовом виде.

3. Учитель формулирует теорему сам, без предварительной подготовки учащихся, а затем направляет их усилия на ее усвоение.

4. Формулировка теоремы отрабатывается учащимися самостоятельно по учебнику.

Перед изучением теоремы целесообразно на уроке создать проблемную ситуацию, разбор которой мотивировал бы необходимость изучения этой теоремы. С этой целью можно использовать различные практические ситуации и мотивационные упражнения.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Перед изучением признаков равенства треугольников учащиеся знакомятся с определением равных треугольников: «Два треугольника называются равными, если один из них можно наложить на другой так, что они совпадут».

Приступая к изучению самих признаков равенства треугольников, следует показать учащимся ограниченность практического применения этого определения (например, не всегда можно наложить одну треугольную плиту на другую из-за их массивности). Отсюда вытекает поиск новых способов установления равенства треугольников на основе сравнения только некоторых их элементов.

Упор здесь следует сделать на слове «признак», пояснив его, например, следующим образом: «По некоторым приметам мы можем сказать о наступлении осени, эти приметы называют признаками осени. Сегодня на уроке мы познакомимся с признаками равенства треугольников».

Пример 2. Перед изучением теоремы Пифагора можно учащимся предложить такую задачу: «На деревообрабатывающем заводе имеются колоды разных диаметров. Какие из этих колод следует отобрать для изготовления брусков размерами в сечении 8×6 см, чтобы отходы были минимальными?» (Ответ: диаметр колоды должен равняться примерно 10 см.)

Мотивировать необходимость изучения новой теоремы можно также путем рассмотрения таких утверждений, которые нельзя доказать привычными способами и методами.

Для «открытия» теоремы учащимся следует предлагать задания, в ходе выполнения которых они получат нужный вывод. Приведем некоторые примеры.

Пример 3. Перед изучением теоремы о высоте треугольника, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, можно поработать с подвижной моделью прямоугольного треугольника, вписанного в окружность, две стороны AC и CB и высота CD которого изготовлены из резинки (рис. 217).

В модели по дуге ACB и отрезку AB следует сделать прорези. Резинки, играющие роль высоты CD и сторон AC и CB, прикрепляются в точках C и D так, чтобы эти точки могли двигаться по соответствующим прорезям.

Перед учащимися ставится задача, анализируя модель, найти зависимость между высотой CD и отрезками гипотенузы AD и DB. На основе эмпирических измерений учащиеся придут к выводу: «Если отрезок BD больше (меньше) отрезка CD, то отрезок CD больше (меньше) отрезка AD, причем во сколько раз отрезок BD больше (меньше) отрезка CD, во столько же раз отрезок CD больше (меньше) отрезка AD». Выдвигается гипотеза: «Существует постоянная зависимость между отрезками CD, AD и DB».

Пример 4. Перед изучением теоремы Фалеса учащимся можно предложить последовательно выполнить такие действия:

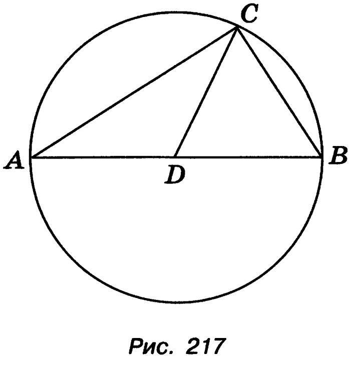


Рис. 217

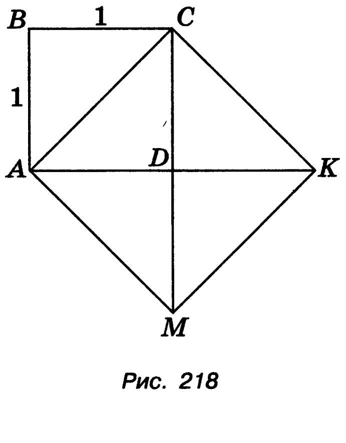


Рис. 218

а) построить угол и на одной стороне угла отложить несколько равных между собой отрезков;

б) через точки деления провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла;

в) измерить и сравнить длины полученных отрезков;

г) сформулировать свой вывод;

д) подумать, можно ли этот вывод считать достоверным.

Пример 5. После того как в курсе алгебры 8 класса будет доказано, что нет рационального числа, квадрат которого равен 2, следует мотивировать введение новых чисел — иррациональных. Для этого учащимся предлагается задание: «Постройте квадрат со стороной 1 и на диагонали этого квадрата как на стороне постройте другой квадрат (рис. 218). Чему равна площадь получившегося квадрата $ACKM$?»

Решение

Так как $S_{ABCD}=1$ кв. ед., то $S_{ACD}=\frac{1}{2}$ кв. ед. Имеем также $\triangle ACD=\triangle CDK=\triangle DKM=\triangle ADM$. Тогда

$$S_{ACKM}=S_{ACD}+S_{CDK}+S_{DKM}+S_{ADM}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Но раз мы реально имеем квадрат площадью 2 кв. ед., то реально существует и число, квадрат которого равен 2.

Пример 6. Перед изучением теоремы Пифагора учащимся полезно предложить задание, которое позволило бы им установить соответствующую закономерность между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника.

Приведем рассуждения, которые докажут теорему Пифагора с помощью листа бумаги и ножниц. Эти рассуждения приведены в книге М. Гарднера [27, с. 389] и представляют собой одно из замечательных доказательств, открытое в XIX в. англичанином Г. Перигэлом.

Построим квадраты на катетах произвольного прямоугольного треугольника (рис. 219). Разделим на четыре части квадрат, построенный на большем катете, проведя через его центр две взаимно перпендикулярные прямые, одна из которых параллельна гипотенузе треугольника. Вырежем из листа бумаги полученные части квадрата и квадрат, построенный на меньшем катете. Из полученных частей составим один большой квадрат, который расположим на гипотенузе треугольника (на рисунке 219 этот квадрат показан пунктиром).

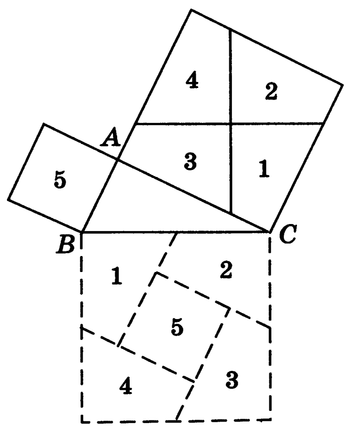


Рис. 219

Можно поступить и иначе, а именно так, как показано на рисунке 220, *а*, *б*, *в*, *г* (равные части обозначены одними и теми же цифрами).

Такая работа позволит ученикам самим сформулировать теорему Пифагора. Хотим заметить, что в школьном курсе геометрии все теоремы, которые рассматриваются до теоремы Пифагора, построены по принципу «смотри и увидишь то, о чем они говорят». Теорема Пифагора такова, что методом «смотри и увидишь» нельзя открыть известное равенство, выражающее зависимость суммы квадратов катетов от квадрата гипотенузы. Описанная выше работа как раз и направлена на установление этого равенства методом визуального мышления.

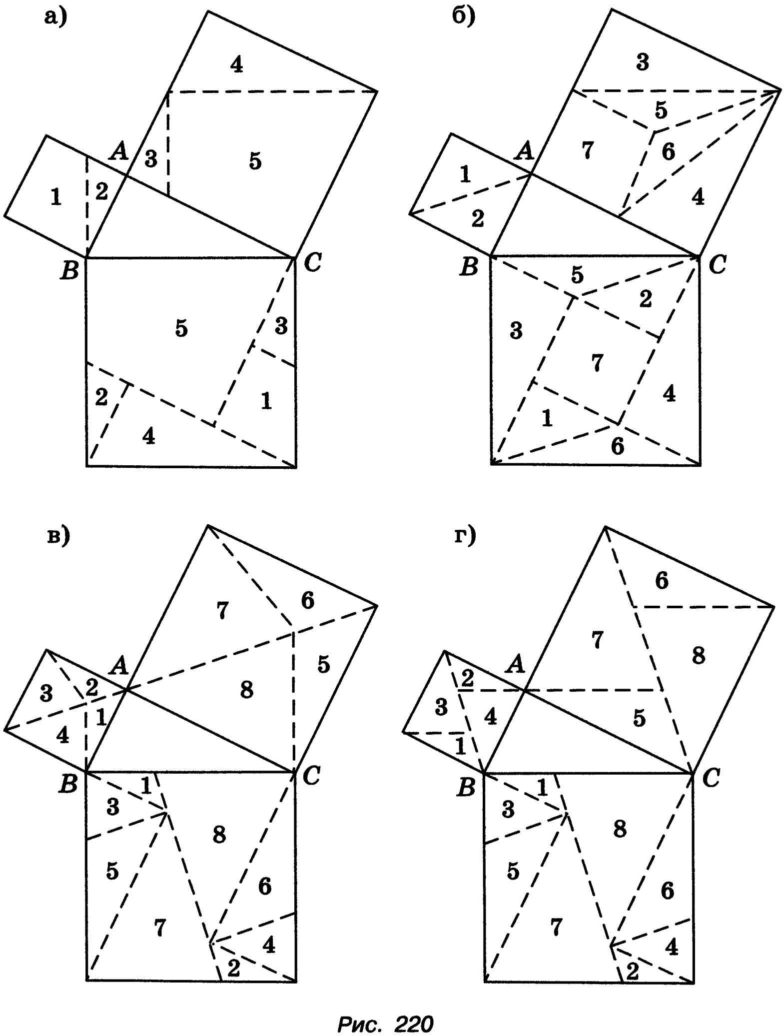


Рис. 220

П р и м е р 7. Открыть закономерность, состоящую в том, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы, учащиеся смогут сами, если им предложить перегнуть такой треугольник так, как это показано на рисунке 221 (линия сгиба показана пунктиром).

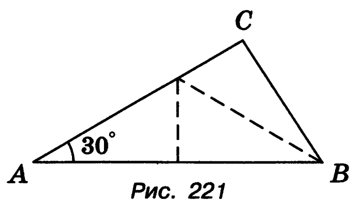


Рис. 221

П р и м е р 8. Формулы объемов тел вращения учащиеся могут получить, поработав с телами Архимеда: шаром радиусом R; цилиндром с основанием, радиус которого R, а высота $2R$; конусом, таким же как и цилиндр. Эти тела можно изготовить из жести, и они должны быть полыми.

Опытным путем (переливание воды) устанавливается, что цилиндр вмещает втрое больше воды, чем конус; пространство, остающееся в цилиндре свободным, после помещения в него шара равновелико конусу. Отсюда следует, что объем шара равен двойному объему конуса, или $\frac{2}{3}$ объема цилиндра:

$$V_{\text{шара}} = \frac{2}{3} \cdot \pi R^2 \cdot 2 \cdot R = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Окончательно будем иметь $V_{\text{цил}} : V_{\text{шара}} : V_{\text{кон}} = 3 : 2 : 1$.

Интересно заметить для учащихся, что полученное отношение Архимед считал самым важным своим открытием и просил высечь на надгробном камне рисунок, на котором должен быть изображен цилиндр с вписанным в него шаром и конусом.

П р и м е р 9. Формулу площади сферы школьники могут получить опытным путем. Для этого они должны поступить следующим образом. На полусферу наматывается веревка так, как это показано на рисунке 222, *а* (пусть длина затраченной веревки будет l_1). Будем укладывать такую же веревку в круг, радиус которого равен радиусу сферы (рис. 222, *б*) (пусть длина затраченной веревки будет l_2). Если сравнить длины l_1 и l_2, то окажется, что $l_1 = 2l_2$. Но так как веревка длины l_2 покрыла площадь πr^2, то $S_{\text{полусферы}} = 2\pi r^2$, тогда $S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2$.

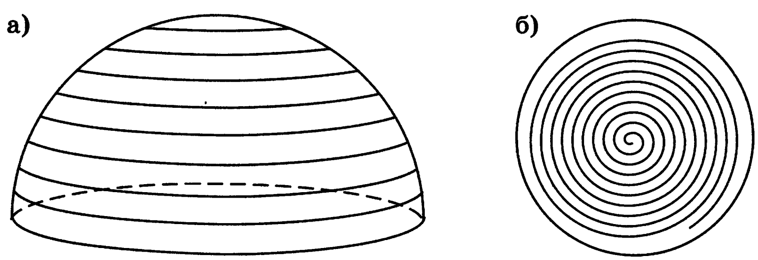


Рис. 222

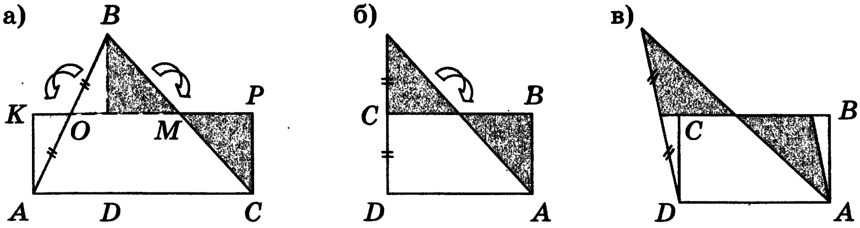


Рис. 223

Пример 10. Формулу площади треугольника учащиеся могут получить опытным путем. Для этого треугольник ABC (рис. 223, *а*) следует разрезать на три части так, как показано пунктиром, а затем сложить из них прямоугольник $AKPC$. У этого прямоугольника основание AC то же, что и у треугольника ABC, а высота его равна половине высоты треугольника ABC. Отсюда сразу видно, что

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD.$$

В случае прямоугольного и тупоугольного треугольника можно поступить так, как показано на рисунке 223, *б*, *в*.

Пример 11. Формулу площади трапеции школьники получат сами, если разрежут трапецию на две части так, как показано на рисунке 224, *а* (линия разреза показана пунктиром).

Основание треугольника AOB есть сумма оснований трапеции $ABCD$, а высота его равна высоте трапеции. А так как $S_{ABO}=\frac{1}{2}\cdot BK\,(AD+DO)$, то и $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot BK\cdot(AD+BC)$.

Трапецию можно разрезать и на две такие части, из которых складывается параллелограмм (рис. 224, *б*).

Пример 12. Для того чтобы обнаружить, что сумма углов треугольника равна 180°, учащимся можно предложить поступить так, как показано на рисунке 225.

До этого целесообразно школьникам предложить установить зависимость одного угла треугольника от другого его уг-

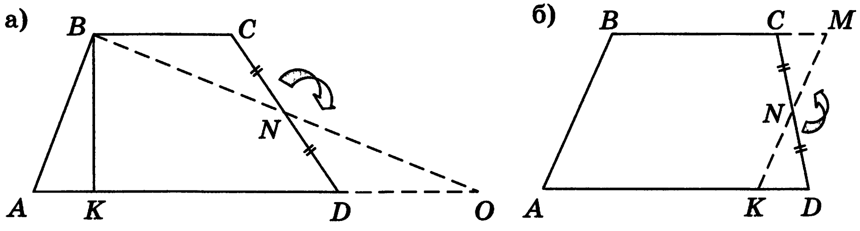


Рис. 224

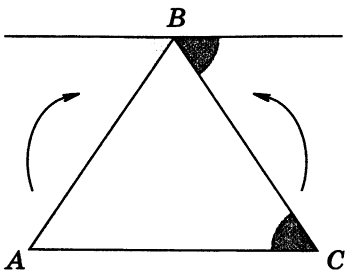


Рис. 225

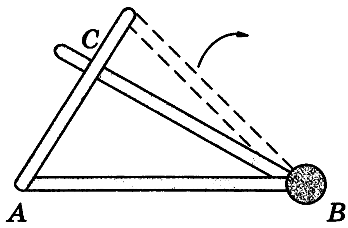


Рис. 226

ла, и сделать это можно посредством модели треугольника, изготовленной из палочек (рис. 226).

Если поворачивать сторону BC вокруг точки B в направлении, указанном стрелкой, то ученик обнаружит, что угол B увеличивается, а угол C уменьшается (угол B растет за счет угла C так, что сумма их остается постоянной).

Пример 13. С помощью шарнирных моделей многоугольников можно убедить учащихся в том, что пропорциональность их сходственных сторон еще не гарантирует подобия этих многоугольников (рис. 227, *а*, *б*).

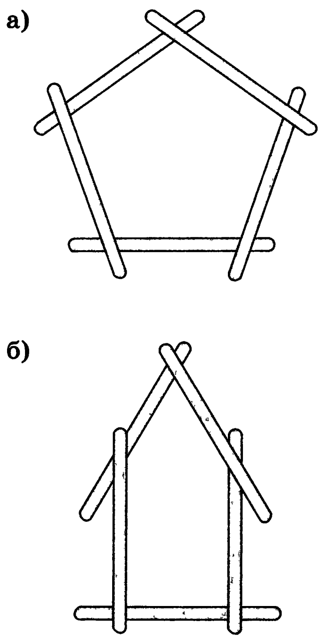


Рис. 227

Пример 14. Формулу суммы углов выпуклого n-угольника учащиеся могут получить самостоятельно еще задолго до того, когда она будет изучаться в курсе геометрии 8 класса. Для этого после изучения теоремы о сумме внутренних углов треугольника школьникам можно предложить такую работу.

Строится произвольный треугольник ABC и спрашивается, чему равна сумма его углов (рис. 228). Появляется запись: $S_3 = 2d$.

Затем вне треугольника берется точка E и соединяется с точками A и C. Учащимся предлагается вопрос: «Из скольких треугольников образован четырехугольник $ABCE$?» После ответа на вопрос появляется запись: $S_4 = 2 \cdot d \cdot 2$.

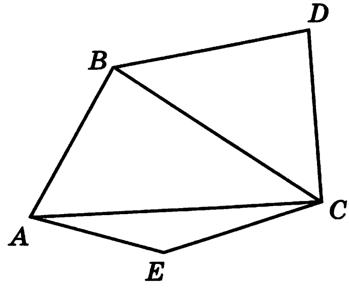


Рис. 228

Далее вне четырехугольника $ABCE$ берется точка D и проводятся те же рассуждения. И т. д.

В результате такой работы появляется последовательность равенств: $S_3 = 2 \cdot d$, $S_4 = 2 \cdot d \cdot 2$, $S_5 = 2 \cdot d \cdot 3$, $S_6 = 2 \cdot d \cdot 4$, ...

Затем учащимся предлагается установить зависимость между последним множителем и числом сторон соответствующего многоугольника, в результате чего равенства примут вид: $S_3 = 2 \cdot d \cdot (3-2)$, $S_4 = 2 \cdot d \cdot (4-2)$, $S_5 = 2 \cdot d \cdot (5-2)$, $S_6 = 2 \cdot d \cdot (6-2)$, ... , $S_n = 2 \cdot d \cdot (n-2)$.

Полученная таким индуктивным путем формула будет затем в нужном месте доказана дедуктивным методом.

Мотивационные задачи, подготавливающие учащихся к изучению теорем, могут быть двух видов:

а) *задачи с противоречивой информацией в условии.*

Например, перед изучением теоремы о сумме внутренних углов треугольника предлагается задача: «Постройте треугольник ABC, в котором $AC = 5{,}4$ см, $\angle A = 135°$, $\angle C = 60°$»;

б) *задачи с противоречивой информацией в структуре решения.*

Эти задачи строятся по такому принципу:

— предлагается задача вместе с ее решением;
— ошибка включается в цепь логических умозаключений;
— от школьников требуется отыскать ошибку в умозаключении и объяснить причину ее возникновения.

Приведем примеры таких задач.

Задача 1. Докажем, что сумма углов любого треугольника равна 180°.

Доказательство

В произвольном треугольнике ABC проведем из вершины C луч CD так, чтобы он пересек противоположную сторону AB. Обозначим полученные углы цифрами так, как показано на рисунке 229. Пусть x — неизвестная нам пока сумма углов треугольника, тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 = x$, $\angle 3 + \angle 4 + \angle 6 = x$.

Сложив полученные равенства, получим $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$.

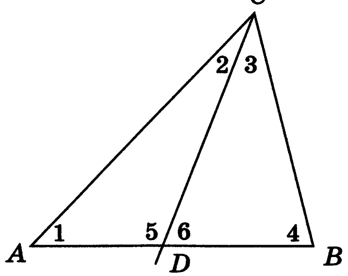


Рис. 229

Но сумма $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ есть сумма углов треугольника ABC, т. е. тоже x; а $\angle 5 + \angle 6 = 180°$ как сумма смежных углов. Таким образом, мы получим уравнение $x + 180° = 2x$. Откуда имеем $x = 180°$, т. е. сумма углов любого треугольника равна 180°.

Заметим, что логическая ошибка в этом доказательстве порождена нашей привычкой, а именно мы привыкли к тому, что сумма углов любого треугольника одна и та же, и поэтому кажется естественной фраза «обозначим через x сумму углов (любого) треугольника». Но в момент доказательства теоремы нам еще ничего не известно о сумме углов треугольника, и нет поэтому никаких оснований предполагать, что она одна и та же для всех треугольников.

Задача 2. Парадокс Л. Карно (французский математик, 1753—1823). Докажем, что $i^2=1$.

Доказательство

Запишем $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$. В то же время $i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=$ $=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$; $i^2=1$.

Объясняется этот парадокс тем, что во множестве комплексных чисел понятие арифметического квадратного корня не вводится.

Задача 3. Докажем, что косинус любого острого угла больше 1.

Доказательство

Пусть x — острый угол.

Прологарифмируем равенство $\cos x=\cos x$:

$$\lg(\cos x)=\lg(\cos x).$$

Умножив левую часть равенства на 2, будем иметь $2\lg(\cos x)>\lg(\cos x)$, откуда $\lg(\cos x)^2>\lg(\cos x)$. Из последнего неравенства следует $\cos^2 x>\cos x$. Так как угол острый, то $\cos x>0$. Разделив обе части неравенства $\cos^2 x>\cos x$ на $\cos x$, будем окончательно иметь $\cos x>1$.

Задача 4. Докажем, что во всяком прямоугольном треугольнике катет больше гипотенузы (рис. 230).

Доказательство

Преобразуем выражение AB^2-BC^2:

$$AB^2-BC^2=(AB-BC)(AB+BC)=$$
$$=-(AB+BC)(BC-AB).$$

Разделив обе части равенства $AB^2-BC^2=-(AB+BC)(BC-AB)$ на $-(AB+BC)(AB-BC)$, получим

$$\frac{AB+BC}{-(AB+BC)}=\frac{BC-AB}{AB-BC}.$$

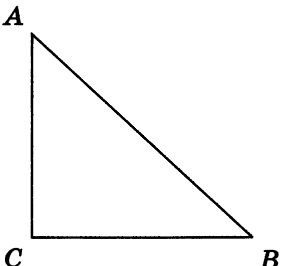


Рис. 230

Так как положительная величина больше отрицательной величины, то $AB+BC>-(AB+BC)$. Но тогда и $BC-AB>AB-BC$, а поэтому $2BC>2AB$, или $BC>AB$.

Заметим, что дословное воспроизведение учеником формулировки теоремы еще не может гарантировать осознанности ее усвоения. Так, например, мы наблюдали в 10 классе, как школьники верно формулировали теорему о пересечении двух

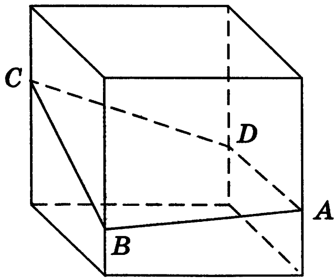


Рис. 231

параллельных плоскостей третьей плоскостью, но оказались беспомощны в ее использовании для оценки чертежа (рис. 231).

В результате сечения куба плоскостью мы должны были бы иметь $BC \parallel AD$ и $DC \parallel AB$.

Для выявления степени осознанности усвоения учащимися учебного материала нужна педагогически целесообразная постановка вопросов. Вопрос считается педагогически целесообразным, если ответ на него не копирует учебник, а будит активную, самостоятельную мысль ученика; такой вопрос должен выявлять степень понимания, а не степень запоминания материала. Зачастую безупречная формулировка, воспроизведенная учеником, еще не есть свидетельство полного благополучия. А поэтому чрезмерное увлечение вопросами и заданиями «Что называется...?», «Напишите формулу...», «Назовите основные свойства...», «Как формулируется...?» не позволит проверить, сознательно или формально усвоили учащиеся учебный материал.

Формальное заучивание знаний, зубрежка, подкрепляемая бесконечным повторением, калечат мышление ученика. Как верно замечает Э. В. Ильенков, такое повторение «следовало бы назвать не матерью, а мачехой учения». Математического знания не существует, если учащийся просто запоминает материал, ибо работу мысли нельзя заменить работой памяти.

Чтобы учитель нас правильно понял, мы хотим подчеркнуть, что в обучении математике заучивание определений и формулировок теорем играет большую роль. А. Я. Хинчин указывал на то, что «заучивание определений является актом высокой логической культуры, а не схоластической зубрежкой». Но такому заучиванию должна предшествовать работа, которая бы помогла школьнику осознать каждый элемент формулировки.

Чтобы узнать, сознательно ли школьники усвоили формулировку теоремы, можно предлагать им искаженные формулировки, а они должны будут найти ошибки. Приведем некоторые примеры таких ошибочных формулировок теорем.

1. В треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

2. Через любые три точки можно провести окружность, и притом только одну.

3. Выпуклый четырехугольник, в котором диагонали равны и взаимно перпендикулярны, является квадратом.

4. Если две прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Большую помощь для сознательного усвоения теоремы окажут задания, требующие нестандартного использования ее условия. Вот лишь некоторые примеры таких заданий.

1. Как сформулировать третий признак равенства треугольников, если эти треугольники равнобедренные?

2. Как сформулировать третий признак равенства треугольников, если эти треугольники равносторонние?

3. Сколько надо иметь основных элементов и каких именно для построения:

а) разностороннего треугольника;

б) равностороннего треугольника;

в) равнобедренного треугольника?

4. Сколько надо иметь основных элементов и каких именно для построения прямоугольного треугольника?

5. Хватит ли 20 см проволоки, чтобы согнуть из нее треугольник, одна сторона которого была бы равна 12 см? 8 см? 10 см?

6. Почему углы при основании равнобедренного треугольника всегда острые?

7. Почему внешние углы при основании равнобедренного треугольника всегда тупые?

8. Почему каждый острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника равен 45°?

9. Возможен ли выпуклый многоугольник:

а) с четырьмя острыми углами;

б) с четырьмя прямыми углами?

10. Может ли диагональ ромба быть перпендикулярной к его стороне? Почему?

11. Как, не измеряя углов четырехугольного участка земли, убедиться в том, что он имеет форму квадрата?

12. Может ли диагональ равнобедренной трапеции равняться ее боковой стороне?

13. Может ли диагональ трапеции быть биссектрисой ее угла?

14. Можно ли вписать окружность в параллелограмм, отличный от ромба?

15. Можно ли считать подобными:

а) два ромба, имеющие по равному углу;

б) все прямоугольники, имеющие одно и то же отношение двух смежных сторон?

16. Швея, желая проверить, имеет ли четырехугольный кусок материи квадратную форму, перегибает его два раза по диагоналям и видит, что края совпадают. Может ли она после этого утверждать, что кусок имеет форму квадрата?

17. Как при помощи рулетки убедиться в том, что оконная рама имеет форму прямоугольника?

18. Почему ось KM лампы, изображенной на рисунке 232, всегда вертикальна?

19. На чем основан прием контроля правильности опиловки граней правильных призм (рис. 233)?

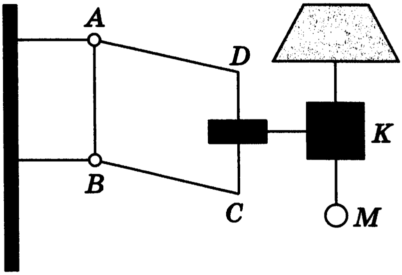


Рис. 232

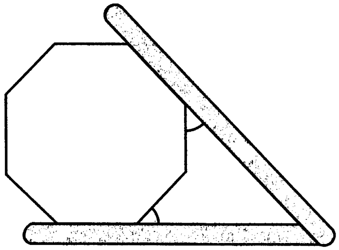


Рис. 233

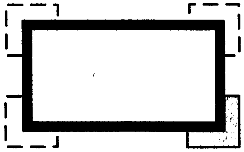


Рис. 234

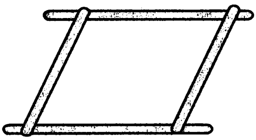


Рис. 235

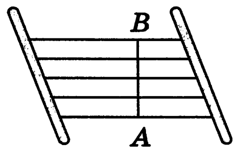


Рис. 236

20. На чем основан распространенный практический прием контроля изготовления прямоугольной рамки (рис. 234)?

21. Объясните принцип устройства приспособления для вычерчивания параллельных прямых (рис. 235).

22. Объясните принцип устройства приспособления для деления отрезка на равные части (рис. 236).

23. Как разметить центры 10 отверстий, равномерно расположенных на окружности диаметром 10 см?

24. Объясните принцип устройства приспособления для определения центра круга (рис. 237).

25. Объясните принцип, на котором основан способ определения центра тяжести однородной треугольной пластины.

26. Объясните способ измерения диагонали обыкновенного строительного кирпича, который используется на практике. Его суть состоит в следующем: складываются три кирпича так, как показано на рисунке 238, а затем с помощью рулетки замеряют расстояние AB.

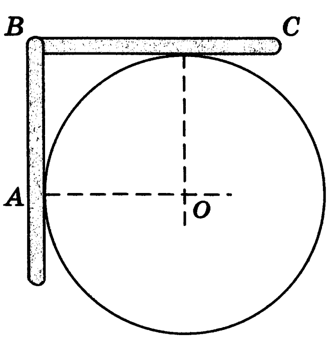


Рис. 237

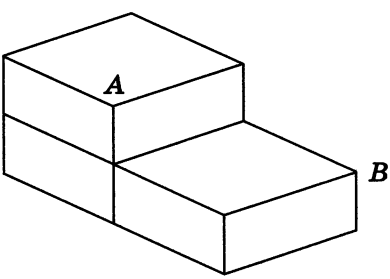


Рис. 238

27. Ответьте: «Почему чайник круглой формы остывает медленнее, чем чайник такого же объема, но другой формы?»

28. На каком удалении от вас находится человек, идущий перпендикулярно линии наблюдения? Для ответа на вопрос поступите следующим образом: закройте левый глаз, вытяните руку вперед и отогните большой палец. Уловив момент, когда палец прикроет фигуру идущего вдали человека, закройте правый глаз, а левый откройте и сосчитайте, сколько шагов сделает человек до того момента, когда палец вновь прикроет фигуру. Увеличив полученное число в 10 раз, вы узнаете расстояние до него в шагах. На чем основан такой прием?

29. На чертеже сохранилась боковая сторона равнобедренного треугольника с отмеченным на ней основанием высоты, проведенной к этой стороне. Восстановите треугольник.

30. Постройте треугольник ABC, если даны вершина A и прямые b и c, на которых лежат его высоты h_b и h_c.

31. Восстановите треугольник по основаниям медианы и высоты, проведенных из одной вершины, и основанию медианы, проведенной из другой его вершины.

32. Постройте равнобедренный треугольник по основаниям трех его высот.

33. Постройте остроугольный треугольник ABC по двум произвольным точкам основания AB и основаниям высот, проведенных к сторонам AC и BC.

34. Восстановите прямоугольник по средним точкам двух противоположных сторон и точке третьей стороны (или ее продолжения).

35. Восстановите равнобедренную трапецию по трем ее вершинам. Сколько решений имеет задача?

Большое значение для сознательного усвоения теоремы имеет работа по выделению из формулировки условия и заключения. Как установила И. С. Якиманская [142, с. 111], анализ условия теоремы целесообразно осуществлять в трех следующих основных формах:

— анализ понятий;

— анализ их отношений;

— анализ фигур, наиболее полно насыщенных данными и искомыми теоремы.

Параллельно с выяснением условия и заключения теоремы надо выполнять чертеж, особым образом выделяя на нем те фигуры и их элементы, соотношения которых надо доказать. Чертеж следует делать для самого общего случая, иначе в него будут привнесены некоторые данные, которые не содержатся в условии теоремы.

Чтобы подготовить учащихся к осознанию доказательства, полезно заменить понятия, содержащиеся в условии и заключении теоремы, их определениями. Заметим, что часто наблюдается несоответствие между правильно данной формулировкой теоремы и сделанной краткой записью условия.

Отметим те ошибки, которые чаще всего допускают школьники в формулировках теорем: введение неверных дополнений и разъяснений; отбрасывание слов и целых предложений, несущих смысловую нагрузку; неадекватная замена слов и предложений; несогласование слов в роде, числе и падеже; перестановка частей формулируемого текста.

Для лучшего усвоения формулировки теоремы надо предложить учащимся прочитать ее по учебнику, так как в таком случае упор будет сделан еще и на их зрительную память.

Для сознательного усвоения формулировок теорем учитель должен специально вести работу по выяснению смысла таких логических связок, как «и», «или», «если... то...», «не», «неверно, что...», «тогда и только тогда», «необходимо», «достаточно» и т. п., которые часто входят в сами формулировки.

Такая работа имеет большую ценность не только для формирования у учащихся умения проводить анализ формулировок теорем, но и для качественного обучения математике в целом. В подтверждение этому остановимся на решении системы уравнений, которая была предложена на выпускном экзамене в 11 классах с углубленным изучением математики.

Требовалось решить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin^4 \pi x + \sqrt{1+\cos \pi y} = 0, \\ (x^3+y^2+2xy-5)\sqrt{7\cdot 2^{y+2} - 3\cdot 4^y - 10} = 0. \end{cases}$$

При решении этой системы ошибок было много, и значительная часть из них касалась правильного использования дизъюнкций и конъюнкций высказываний. Вот некоторые из этих ошибок.

Система уравнений сводилась к решению таких систем:

а) $\begin{cases} \sin^4 \pi x = 0, \\ 1+\cos \pi y = 0, \\ x^3+y^2+2xy-5=0, \\ 7\cdot 2^{y+2} - 3\cdot 4^y - 10 = 0; \end{cases}$

б) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^4 \pi x = 0, \\ 1+\cos \pi y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3+y^2+2xy-5=0, \\ 7\cdot 2^{y+2} - 3\cdot 4^y - 10 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^4 \pi x = 0, \\ 1+\cos \pi y = 0, \end{array}\right. \\ x^3+y^2+2xy-5=0, \\ 7\cdot 2^{y+2} - 3\cdot 4^y - 10 = 0. \end{cases}$

Верное же решение предложенной системы должно сводиться к двум таким системам:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin^4 \pi x = 0, \\ 1+\cos \pi y = 0, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x^3+y^2+2xy-5=0, \\ 7\cdot 2^{y+2} - 3\cdot 4^y - 10 \geqslant 0 \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \begin{cases} \sin^4 \pi x = 0, \\ 1+\cos \pi y = 0, \end{cases} \\ 7\cdot 2^{y+2} - 3\cdot 4^y - 10 = 0. \end{cases}$$

Можно заметить, что допущенные ошибки были связаны с неверным использованием логических союзов «и» и «или».

Следует обращать внимание учащихся на то важное обстоятельство, что употребление логических связок имеет свои особенности. Так, например, конъюнктивная связь в предложениях может выражаться не только союзом «и», но и другими словами или словосочетаниями: «а», «но», «хотя», «также», «причем», «как... так и...» и т. п. Различными языковыми средствами могут передаваться союзы «или», «если... то...» и др. Итак, надо до учащихся донести мысль о том, что обиходному языку свойственна неоднозначность. В различных ситуациях одни и те же языковые средства могут выражать различные логические связки или не выражать никаких. В математике же надо стремиться избегать возможности неоднозначного понимания предложений.

В формулировках теорем часто используются кванторы общности и существования (в школьном курсе математики сейчас эти кванторы символически не обозначаются, но присутствуют в нем в виде слов «для любого» и «существует»).

Учитель должен обратить внимание учащихся на то, что в употреблении кванторов в обыденной речи и в математике имеются некоторые особенности. В обыденной речи, как правило, не пользуются переменными, а поэтому кванторы не употребляются. Вместо них в текстах можно встретить слова, достаточно близкие по смыслу к кванторам. Так, слова «каждый», «любой», «всякий», «для всех» и т. п. имеют очевидный смысл квантора общности; признаком квантора существования часто являются слова «некоторый», «существует», «найдется», «есть» и т. п.

С учащимися надо проводить работу, связанную с необходимостью восстановления правильного смысла того или иного слова, имеющего значение квантора. Так, например, слово «некоторый» воспринимается школьниками в обычном, естественном смысле, соответствующем квантору существования. Однако слово «некоторый» в таком предложении, как «Пусть A — некоторая точка прямой a», употреблено в смысле квантора общности.

Учителю следует избегать употребления языковых средств, допускающих неоднозначное толкование, а в случае их употребления необходимо уточнять смысл сказанного. Он должен владеть навыками переформулирования предложений обиходного языка на математический язык.

Используя слова и словосочетания «всякий»; «если... то...», «достаточно», «те, которые», «только те, которые», «тогда, когда», «только тогда, когда», «если не... то и не...», учащимся целесообразно сформулировать нижеследующие теоремы:

1) вертикальные углы равны;
2) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
3) равные треугольники подобны;
4) если целое число делится на 6, то оно делится на 3;

5) точка пересечения диагоналей параллелограмма есть центр его симметрии.

Для отработки предложений «из A следует B» и «A равносильно B» полезно дать учащимся «словарь» для перевода их в равнозначные им предложения (табл. 11).

Таблица 11

Из A следует B	A равносильно B
Если A, то B.	Если A, то B, и если B, то A.
A достаточное условие B.	A необходимое и достаточное условие B.
B необходимое условие A.	B необходимое и достаточное условие для A.
B тогда, когда A.	A тогда и только тогда, когда B.
A только тогда, когда B.	B тогда и только тогда, когда A.
Если не B, то не A.	Если A, то B, и если не A, то не B.

Отработать смысл кванторов общности и существования можно на таком задании: «Запишите с помощью слов «все» или «существует» высказывания, записанные ниже:

а) некоторые реки впадают в Каспийское море;

б) по крайней мере одно четное число делится на 8;

в) не все птицы умеют летать;

г) ни одна собака не умеет мяукать;

д) кто хочет, тот добьется;

е) если где-нибудь сверкнула молния, то когда-нибудь загремит гром».

Школьная практика показывает, что учащиеся не умеют осуществлять контроль при доказательстве теорем, не умеют оценивать себя и своих товарищей. Как правило, осуществляет контроль при доказательстве, находит ошибки, указывает на недостатки учитель. Но следует этому обучить и школьников. И тогда задача формирования у учащихся умения доказывать сопрягается с задачей формирования у них умения контролировать себя в процессе доказательства.

Покажем, как это можно сделать при отработке у учащихся операционного состава действия анализа текста утверждения, другими словами, формулировки теоремы. Полная ориентировочная схема самоконтроля может быть такой [71]:

1. Внимательно прочитайте формулировку утверждения. Попытайтесь воспроизвести ее, не заглядывая в учебник.

2. Выясните, какой вид имеет формулировка утверждения:

а) когда формулировка имеет вид «если □, то △», тогда □ — условие, △ — заключение;

б) когда формулировка имеет вид «□, если △», тогда □ — условие, △ — заключение;

в) когда формулировка имеет вид «Повествовательное предложение. Докажите □, если △», тогда «Повествовательное предложение» и △ — условие, □ — заключение;

г) если формулировка утверждения не имеет вид а), б), в), то выделите из него подлежащее и его группу, сказуемое и его группу; тогда подлежащее и его группа — условие, сказуемое и его группа — заключение.

3. Запишите условие и заключение в виде отдельных предложений.

4. Уточните условие и заключение, т. е. выясните, о каких фигурах идет речь, сколько их, какие свойства фигуры указаны.

5. Выполните чертеж (если необходимо). Не забудьте предусмотреть все возможные случаи расположения фигур или их элементов, указанных в тексте утверждения.

6. Выполните краткую запись условия и заключения. Проверьте, все ли посылки условия вошли в краткую запись.

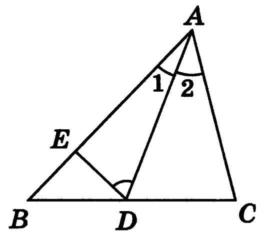
7. Проверьте, не включает ли условие следствий, вытекающих из посылок.

8. Проверьте, можно ли по краткой записи условия и заключения восстановить текст математического утверждения.

Формированию умения контролировать себя в процессе анализа формулировки теоремы могут способствовать такие задания:

1. Заполните пустые клетки в таблице 12.

Таблица 12

Словесная формулировка математического факта	Математический факт на языке чертежа	Математический факт на языке символов
Любая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон		
		
		$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C=90°$, $\angle C_1=90°$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$.

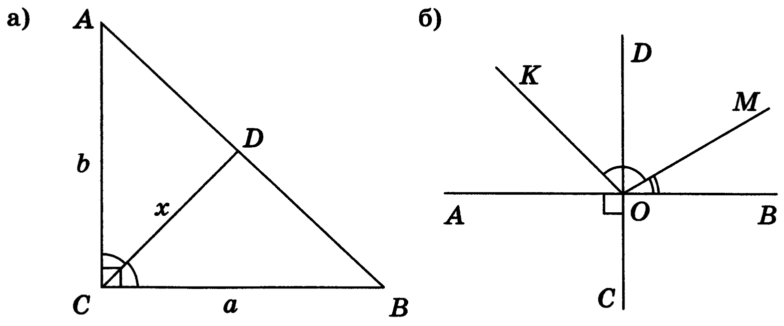


Рис. 239

2. По рисунку 239, *а, б* придумайте и сформулируйте задачи.

Возможный вариант о т в е т а:

а) По рисунку 239, *а*: катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

б) По рисунку 239, *б*: вычислите углы KOD и DOM, если известно, что $AB \perp DC$, $\angle KOM = 100°$, $\angle MOB = 34°$.

Предложенные выше задания помогут обучить учащихся умению описывать математические предложения в трех различных формах: текстовой, символической, геометрической.

Продолжим разговор о формировании у школьников умения выделять условие и заключение теоремы.

Если теорема сформулирована не в виде «Если... то...», то для обучения учащихся выделять условие и заключение в формулировке теоремы находят подлежащее и сказуемое. От этих главных членов предложения ставят вопросы, которые помогают выделить группу слов, относящихся к подлежащему, и группу слов, относящихся к сказуемому.

Покажем это на примере теоремы из курса геометрии 8 класса [30]: «Отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия».

Подлежащее — «отношение». От подлежащего ставим вопросы «отношение ч е г о?» (периметров), «периметров ч е г о?» (двух подобных многоугольников).

Сказуемое — «равно». От сказуемого ставим вопрос «равно ч е м у?» (коэффициенту подобия).

Итак, получили две группы взаимосвязанных слов:

а) отношение периметров двух подобных многоугольников;

б) равно коэффициенту подобия.

Первая группа слов составляет группу подлежащего (условие теоремы), вторая — группу сказуемого (заключение теоремы).

В заключение этого пункта отметим, что целесообразно показывать учащимся различные формулировки одной и той же теоремы, которые могут им встретиться в школьных учебниках и пособиях. Покажем это на примере теоремы Пифагора, которая может быть сформулирована по крайней мере четырьмя способами:

а) в прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов;

б) квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его взаимно перпендикулярных сторон;

в) квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые две взаимно перпендикулярные прямые (подразумевается, что отрезок и прямые лежат в одной плоскости);

г) квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах.

В качестве примера различных формулировок одной и той же теоремы рассмотрим еще теорему о высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника:

а) в прямоугольном треугольнике каждый катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы, отсекаемым основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу;

б) квадрат, построенный на катете прямоугольного треугольника, равновелик прямоугольнику, стороны которого равны гипотенузе треугольника и отрезку гипотенузы, прилежащему к рассматриваемому катету.

§ 2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ УЧЕБНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ОТКРЫТИЯ УЧАЩИМИСЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКТОВ

Исследования психологов убедительно свидетельствуют о том, что все познавательные процессы эффективно развиваются при такой организации обучения, когда школьники включаются в активную поисковую деятельность. По их мнению, поиск нового составляет основу для развития воли, внимания, памяти, воображения и мышления. В обучении математике особое значение в этой связи приобретает исследовательская деятельность учащихся, непосредственно связанная с усвоением математических знаний.

В процессе систематической целенаправленной работы по выявлению взаимосвязей математических объектов, их характеристических свойств, исследованию структуры и сферы применимости знаний развиваются все интеллектуальные качества учеников, их стремление к творческой деятельности.

Такая работа помогает учителю научить детей самостоятельно выделять главное в изучаемом материале, анализировать отобранную информацию, обобщать и систематизировать ее, открывать, а затем использовать алгоритмы решения математических задач, овладевать определенной системой эвристик, раскрывать прикладные аспекты отдельных ветвей математики, находить наиболее рациональные приемы решения теоретических и практических задач, критически осмысливать полученные результаты и применять их в дальнейшем. Эти задачи в полной мере можно решить при такой организации учебного процесса, которая предполагает систематическое вовлечение учащихся в исследовательскую деятельность по ходу усвоения знаний.

Как правило, такая работа занимает много учебного времени и напрямую не связана с усвоением изучаемого материала, а поэтому в практике обучения математике она проводится эпизодически, бессистемно, и, следовательно, польза от нее невелика.

Более целесообразным было бы достижение тех же целей не посредством специально организованных мероприятий, а в процессе выполнения учащимися учебно-познавательной деятельности, напрямую связанной с усвоением программных знаний. Но для этого необходимо рассмотрение учебного исследования как многоаспектного дидактического явления. Такая постановка вопроса требует раскрытия всего потенциала учебных исследований, для чего требуется прежде всего дать теоретическое описание этого феномена.

В работе Е. В. Барановой [16] уточняется сущность понятия учебного исследования, раскрываются его дидактические функции, структура и выделяются различные виды исследований.

Для раскрытия сущности понятия учебного исследования она выделила его характеристические признаки:

1) учебное исследование — это процесс поисковой познавательной деятельности (изучение, выявление, выяснение, установление чего-либо и т. д.);

2) учебное исследование всегда направлено на получение новых знаний, т. е. исследование всегда начинается с потребности узнать что-либо новое;

3) учебное исследование предполагает самостоятельность учащихся при выполнении задания;

4) учебное исследование должно быть направлено на реализацию дидактических целей обучения.

Следуя точке зрения Е. В. Барановой, будем рассматривать учебное исследование как вид познавательной деятельности, который основан на выполнении учебных заданий, предполагающих самостоятельное выявление учащимися новых для них знаний, способов деятельности и направленных на достижение целей обучения.

Большинство авторов (Г. В. Токмазов, Е. В. Ларькина, М. Б. Раджабов, Л. Э. Орлова и т. д.) единодушны в том, что главной функцией учебных исследований является развивающая, а потому они предлагают вовлекать учащихся в исследовательскую деятельность с целью развития их интеллектуальных умений и творческих способностей. Но задачу учить мыслить, самостоятельно приобретать знания можно и нужно рассматривать в органическом единстве с задачей овладения основами наук. Важно диалектически учитывать единство образовательной и развивающей функций обучения математике. Поэтому, организуя учебные исследования учащихся, учитель должен иметь в виду не только их развивающее назначение, но и дидактическое.

К основным дидактическим функциям учебных исследований по математике можно отнести следующие:

1) функцию открытия новых (неизвестных ученику) знаний (т. е. установление существенных свойств понятий; выявление математических закономерностей; отыскание доказательства математического утверждения и т. п.);

2) функцию углубления изучаемых знаний (т. е. получение определений, эквивалентных исходному; обобщение изученных теорем; нахождение различных доказательств изученных теорем и т. п.);

3) функцию систематизации изученных знаний (т. е. установление отношений между понятиями; выявление взаимосвязей между теоремами, структурирование изучаемого материала и т. п.);

4) функция развития учащегося, превращения его из объекта обучения в субъект управления, формирования у него самостоятельности и способности к самоуправлению (самообразованию, самовоспитанию, самореализации).

Анализ этапов различных исследований, выделяемых разными авторами, показал, что главными и обязательными из них являются три, которые и образуют основную структуру учебного исследования (рис. 240):

В зависимости от способа выдвижения гипотезы Е. В. Баранова выделяет следующие виды учебных исследований по геометрии: интуитивно-опытные, опытно-индуктивные, индуктивные, дедуктивные.

Выделенные виды учебных исследований позволяют реализовать все указанные основные дидактические функции.

Таким образом, перед учителем встает проблема поиска эф-

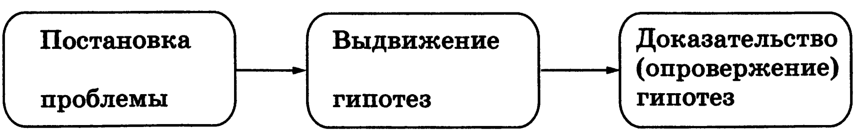


Рис. 240

фективных форм и способов учебной деятельности учащихся, которые бы не просто вовлекали их в исследовательскую работу, но и способствовали обучению самой этой деятельности. В конечном счете необходимо так организовать познавательную деятельность школьников, чтобы процедура учебного исследования усваивалась ими вместе с тем содержанием, на котором оно осуществляется.

Анализ процесса усвоения математических знаний показывает, что учебные исследования целесообразно организовывать при:

а) выявлении существенных свойств понятий или отношений между ними;

б) установлении связей данного понятия с другими;

в) ознакомлении с фактом, отраженным в формулировке, доказательстве теоремы;

г) обобщении теоремы;

д) составлении обратной теоремы и проверке ее истинности;

е) установлении связей данной теоремы с другими;

ж) выделении частных случаев некоторого факта в математике;

з) обобщении различных вопросов;

и) классификации математических объектов, отношений между ними, основных фактов данного раздела математики;

к) решении задач различными способами;

л) составлении новых задач, вытекающих из решения данных;

м) построении контрпримеров и т. д.

Сейчас, когда предметно-ориентированная парадигма образования сменяется на личностно ориентированную, следует понять роль учащегося, его главную задачу не только в получении знаний о существующих зависимостях в окружающем мире, описываемых математическими моделями, но и в овладении методологией творческого поиска.

Заметим, что традиционное обучение приспособлено для обучения фактам, а не для процесса получения фактов.

Приведем примеры заданий, которые позволяют организовать учебные исследования в процессе обучения учащихся математике.

1) Исследуйте вопрос: «Можно ли правильный тетраэдр разрезать на такие части, из которых в ином расположении получится равновеликий ему прямоугольный параллелепипед?»

Заметим, что ответ на поставленный вопрос отрицательный и найти его читатель сможет в книге В. Ф. Кагана [72].

2) Ответьте, когда равновеликие трехгранные пирамиды могут быть преобразованы одна в другую методом разложения. (Ответ см. в книге [72].)

3) Разложите трехгранную призму (рис. 241, *а*) на три равновеликие трехгранные пирамиды, имеющие ту же высоту и то же основание, что и призма.

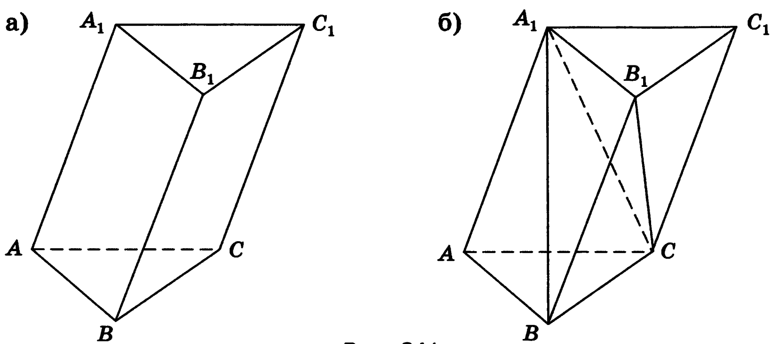


Рис. 241

Ответ к задаче дан на рисунке 241, *б*: заданная призма разбита на три равновеликие пирамиды A_1ABC, $A_1CC_1B_1$, A_1CBB_1.

4) Покажите на примере, что два равновеликих многогранника могут быть разбиты на одинаковое число тетраэдров таким образом, что каждому тетраэдру в разложении одного многогранника будет соответствовать равновеликий ему тетраэдр в разложении другого многогранника.

Некоторые рекомендации по решению этой задачи читатель найдет в книгах [55, 72].

5) Разбейте тетраэдр плоскостью на два тетраэдра; один тетраэдр и один многогранник, не являющийся тетраэдром; два многогранника, не являющихся тетраэдрами.

6) Разбейте параллелепипед на шесть равновеликих пирамид, три равновеликие пирамиды.

7) Деревянный брус имеет вид прямой треугольной призмы. Распилите его по двум поперечным и параллельным между собой плоскостям. Предложите способ нахождения площади получившегося между этими распилами тела, который предполагает меньшее количество измерений необходимых величин.

8) Исследуйте вопрос: «Всегда ли две равновеликие треугольные пирамиды можно преобразовать одну в другую методом разложения, если они имеют равные высоты и равновеликие основания?» (Ответ к задаче отрицательный.)

9) Разложите четырехугольную пирамиду (рис. 242, *а*) на четыре треугольные пирамиды и одну четырехугольную. (Решение приведено на рисунке 242, *б*).

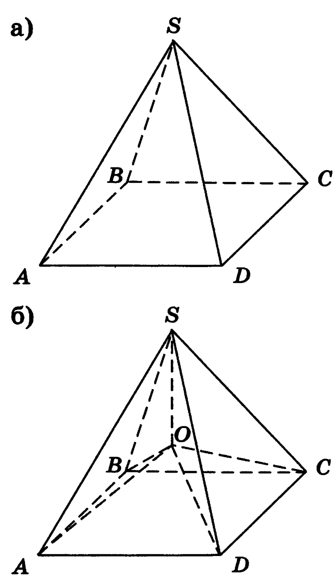


Рис. 242

Ответ: четыре треугольные пирамиды: *OABS*, *OSBC*, *OSAD*, *OSCD*; одна четырехугольная — *OABCD*.

Приведем еще ряд примеров.

10) Организовать учебное исследование целесообразно и для того, чтобы учащиеся могли самостоятельно прийти к соотношению между числом вершин, граней и ребер для любого выпуклого многогранника, которое выражается известной теоремой Эйлера: «Для любого выпуклого многогранника сумма числа его вершин В и числа его граней Г без числа ребер Р равна 2, т. е. В+Г−Р=2».

Для такой работы учащимся предлагаются модели различных выпуклых многогранников, исследуя которые они затем заполняют таблицу 13.

Таблица 13

№ п/п	Вид многогранника	В	Г	Р	Примечание
1	Тетраэдр				
2	Октаэдр				
3	Икосаэдр				
4	Додекаэдр				
5	Ромбоэдр				
6	Двенадцатиугольная пирамида				
7	Усеченная пятиугольная пирамида				
8	Восьмиугольная призма				
9	Прямоугольная бипирамида				

Не следует предлагать учащимся вычислять значения готового выражения В+Г−Р. Больше пользы будет, если они сами, выполняя действия над числовыми характеристиками, получат требуемое равенство. Лишь в случае значительных затруднений можно оказать им некоторую помощь.

11) Дадим определение простого правильного многогранника: «Простой многогранник называется правильным, если все его грани имеют одинаковое число ребер (m) и во всех вершинах сходится одинаковое число ребер (n)». Иначе: «Если все грани — m-угольники, то все многогранные углы — n-гранные».

Можно организовать учебное исследование по выявлению количества различных типов правильных многогранников, которое покажет, что их может быть только пять. Затем полезно доказать высказанное предположение. Доказательство может быть таким.

Запишем формулу Эйлера: В+Г=Р+2. Подсчитаем Р.

а) В каждой грани m ребер; число граней — Г; общее число ребер — mГ. Но каждое ребро мы при этом засчитали дважды. Следовательно, $2\text{Р} = m\text{Г}$.

б) В каждой вершине сходится n ребер. Аналогично находим, что $2\text{Р} = n\text{В}$.

в) $\text{Г} = \frac{2\text{Р}}{m}$, $\text{В} = \frac{2\text{Р}}{n}$. Формула Эйлера: $\frac{2\text{Р}}{m} + \frac{2\text{Р}}{n} = \text{Р} + 2$, откуда $2\text{Р}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) = 2$.

Следовательно, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Но известно, что $m \geqslant 3$ и $n \geqslant 3$ (нет грани «меньше» треугольной и угла «меньше» трехгранного). Решаем неравенство:

$m = 3$; для n — возможности: $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$;
$m = 4$; $n = 3$;
$m = 5$; $n = 3$;
$m = 6$ уже невозможно.

Итак, получаем следующие схемы (m, n): (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3).

То, что многогранников действительно пять, в особом доказательстве не нуждается: их можно просто изобразить или описать построение, не заботясь о форме.

Замечание. Пара чисел (m, n) полностью определяет правильный многогранник. Р, В и Г находим из соотношений:

$$\text{Р}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) = 1, \quad \text{В} = \frac{2\text{Р}}{n}, \quad \text{Г} = \frac{2\text{Р}}{m}.$$

Составим таблицу 14.

Таблица 14

Название	m	n	В	Г	Р
Тетраэдр	3	3	4	4	6
Гексаэдр	4	3	8	6	12
Октаэдр	3	4	6	8	12
Додекаэдр	5	3	20	12	30
Икосаэдр	3	5	12	20	30

Здесь особенно ясно выступает взаимность между многогранниками: если многогранник 1 взаимен с многогранником 2, то $m_1 = n_2$, $n_1 = m_2$, $\text{В}_1 = \text{Г}_2$, $\text{В}_2 = \text{Г}_1$, $\text{Р}_1 = \text{Р}_2$. Вершины (точки) и грани (плоскости) меняются ролями. Заметим, что два правильных многогранника называются взаимными, если центры граней одного служат вершинами другого, или наоборот.

На рисунке 243, *а*, *б*, *в* изображены три пары взаимных многогранников: тетраэдр — тетраэдр, куб — октаэдр, икосаэдр — додекаэдр.

Приведем еще одно возможное доказательство того, что правильных многогранников существует не более пяти. Это до-

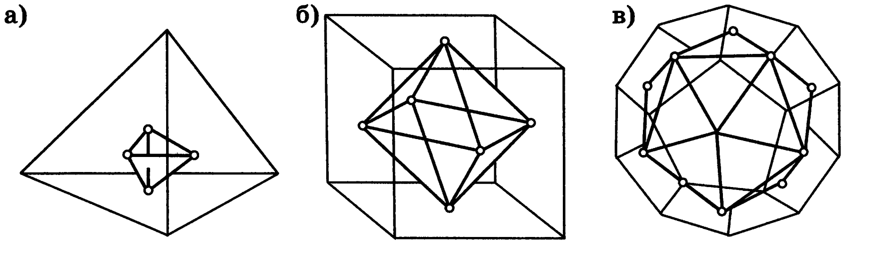


Рис. 243

казательство основано на свойстве выпуклого многогранного угла.

а) Пусть грани многогранника — правильные треугольники. В одной вершине их может сходиться три, четыре и пять, так как $60° \cdot 3 < 360°$; $60° \cdot 4 < 360°$; $60° \cdot 5 < 360°$, но $60° \cdot 6 = 360°$.

Следовательно, правильные многогранники — *тетраэдр, октаэдр, икосаэдр* (рис. 244).

б) Пусть грани многогранника — квадраты. В одной вершине их может сходиться три: $90° \cdot 3 < 360°$, но $90° \cdot 4 = 360°$.

Соответствующий правильный многогранник — хорошо известный всем *куб* (или *гексаэдр*) (рис. 245).

в) Пусть грани — правильные пятиугольники. В одной вершине их может сходиться три: $108° \cdot 3 < 360°$, но $108° \cdot 4 > 360°$.

Соответствующий правильный многогранник — *додекаэдр* (рис. 246).

Шести-, семиугольными и т. д. грани не могут быть, так как даже $120° \cdot 3 = 360°$.

Для того чтобы доказать, что перечисленные пять видов правильных многогранников действительно существуют, их надо построить, что мы и предлагаем сделать.

Заметим, что греческие геометры, в частности Евклид, считали правильные многогранники венцом геометрии. Есть некоторые основания думать, что величайшее произведение Евклида «Начала» создано для того, чтобы изложить в последней, 13-й книге теорию правильных многогранников (идеальных, или платоновых, тел).

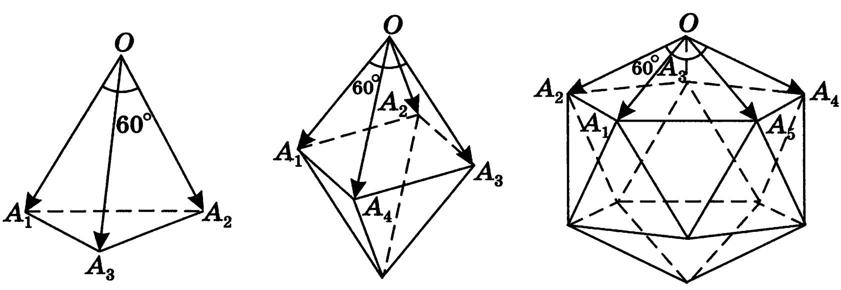


Рис. 244

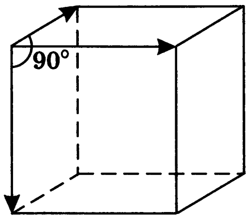


Рис. 245

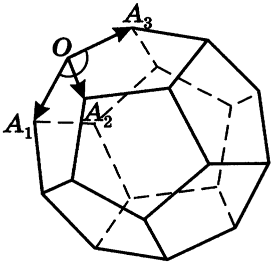


Рис. 246

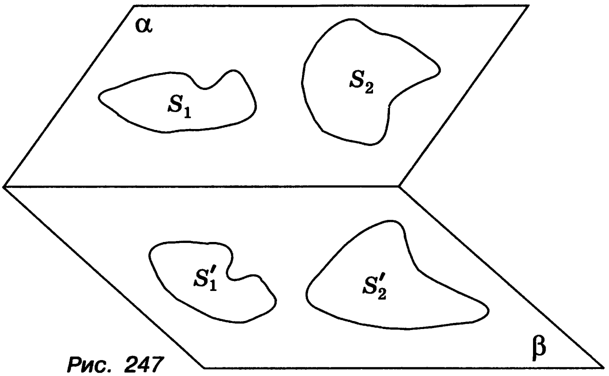


Рис. 247

12) Наш опыт показал, что целесообразно исследовать, сохраняет ли параллельное проектирование отношение площадей фигур: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1'}{S_2'} = K$ (рис. 247).

Для этого можно поступить так. Возьмем прозрачную пленку (плоскость α), на которую наклеим фигуры S_1 и S_2, но заблаговременно с помощью палетки измерим их площади. Затем эту пленку прикрепим под углом к другой пленке (плоскость β). Если осветить плоскость α, то фигуры S_1 и S_2 спроектируются на плоскость β; их проекциями соответственно будут фигуры S_1' и S_2'. С помощью палетки измерим площади теней и установим необходимое равенство. Обобщая результаты, полученные учащимися в классе, выдвинем необходимую гипотезу.

13) Опытным путем учащихся можно подвести к двум теоремам Паппа—Гульдина.

Теорема 1: Площадь поверхности, полученной от вращения дуги данной плоской кривой вокруг какой-либо оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равна произведению длины вращающейся дуги на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести дуги.

Теорема 2: Объем тела, образованного вращением данной плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры, но не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести фигуры.

Покажем, как это может быть сделано в случае вычисления площади поверхности.

Возьмем модель окружности $x^2 + y^2 = 4$, изготовленную из однородной проволоки. Наклеим половину этой окружности на тонкую прочную пленку. Будем манипулировать гвоздем под этой пленкой так, чтобы конструкция уравновесилась (рис. 248).

Очевидно, что точка M (центр тяжести кривой) будет ле-

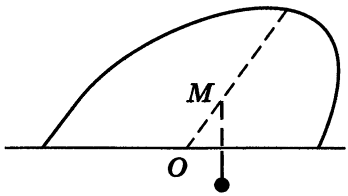


Рис. 248

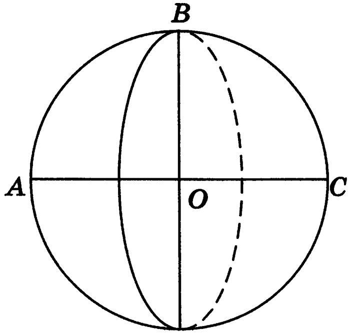


Рис. 249

жать на оси симметрии полуокружности (т. е. абсцисса этой точки равна нулю). Измерим длину отрезка OM, пусть она будет $\approx 1{,}27$ см (радиус окружности равен 2 см).

Известно, что сфера получается вращением полуокружности вокруг своего диаметра (рис. 249).

Умножим длину полуокружности $\pi r = 2\pi \approx 6{,}2831852$ см на длину окружности, описываемой центром тяжести заданной полуокружности вокруг диаметра AC (длина этой полуокружности будет равна $2\pi r \approx 2\pi \cdot 1{,}27 \approx 7{,}9796452$ см). Окончательно имеем $\approx 50{,}9796452$ см^2. Вычисления производятся с помощью калькулятора.

Вычислим по формуле $S_{\text{сф}} = 4\pi r^2$ площадь сферы, полученной вращением полуокружности радиусом 2 см вокруг диаметра; эта площадь будет $\approx 50{,}265481$ см^2.

Сравнивая два полученных результата, учащиеся приходят к предположению, суть которого и выражает первую теорему Паппа—Гульдина о площади поверхности тела вращения.

Аналогично следует поступить и для выдвижения гипотезы относительно нахождения объема тела вращения.

14) Предложите способ, который позволил бы отмерить ровно полстакана воды (будем считать, что стакан имеет форму прямого кругового цилиндра), не имея ничего кроме стакана, наполненного доверху водой.

15) Для вычисления объема цилиндра в случае, если уже известна формула объема призмы, можно организовать учебное исследование.

Цилиндр заполняется водой, а затем эту воду переливают в параллелепипед (рис. 250).

Найдя площадь основания параллелепипеда и измерив его высоту, подсчитывается объем воды. Затем ученикам предлагается найти произведение площади основания цилиндра на его высоту, для чего первоначально производятся необходимые измерения, и полученный результат сравнивается с предыдущим. На основании этого выдвигается предположение о том, что $V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot H$, а затем оно доказывается.

16) Для того чтобы учащиеся сами установили, из какого треугольника можно свернуть треугольную пирамиду, а из какого нет, им предлагаются различные модели треугольников

(остроугольные, тупоугольные и прямоугольные). Из предложенных моделей они пытаются опытным путем сконструировать треугольную пирамиду, в результате чего убеждаются, что это возможно сделать лишь с остроугольным треугольником. Затем это гипотетическое предположение доказывается.

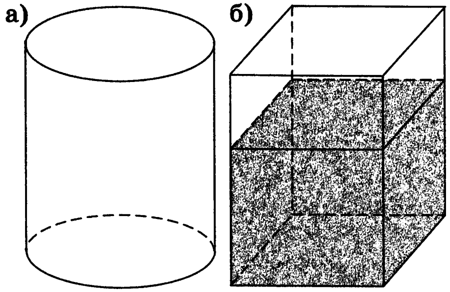


Рис. 250

17) Известен факт, что любая пирамида имеет четное число ребер. К этому выводу можно подвести учащихся, организовав учебное исследование.

Учащимся раздаются наборы с четным и нечетным количеством спиц. Путем эксперимента, заключающегося в том, что учащиеся пытаются смоделировать из этих спиц пирамиду, они приходят к соответствующей гипотезе, которую затем и доказывают.

18) В известной книге Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп» (М.: Наука, 1981. Б-чка «Квант»; Вып. 8) предложен следующий способ образования синусоиды: если свечу несколько раз обернуть листом бумаги, перерезать ее наклонно острым ножом или бритвой, затем разнять обе половинки свечи и, наконец, развернуть бумагу, то в результате получится кривая, которая называется синусоидой.

Возникает вопрос: «Почему получившаяся по краю бумаги кривая действительно является синусоидой?»

Этот вопрос — прекрасная проблема для учебного исследования, для проведения которого понадобятся сведения как из курса алгебры, так и из курса геометрии.

Приведем решение этой проблемной задачи.

Прежде всего переведем эту практическую ситуацию на математический язык, т. е. построим математическую модель. Для этого возьмем лист бумаги, имеющий форму прямоугольника, и нарисуем на нем оси координат параллельно соответствующим сторонам (рис. 251).

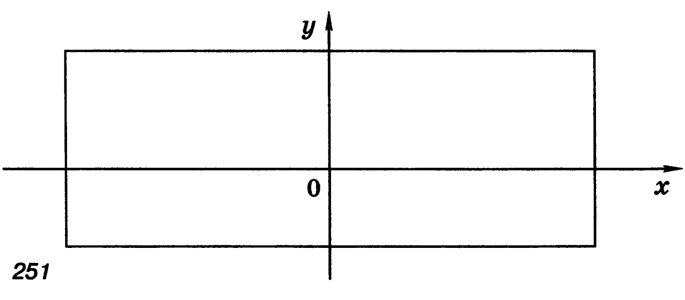


Рис. 251

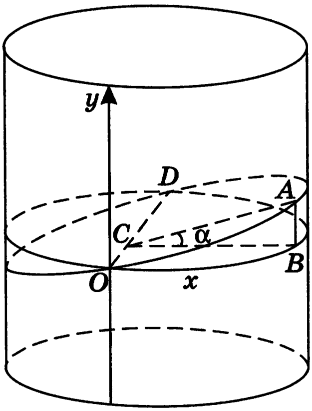


Рис. 252

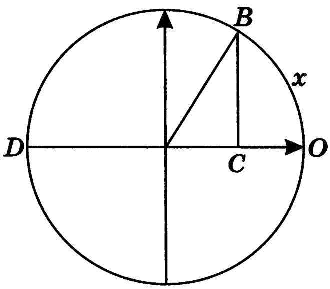


Рис. 253

Затем свернем этот прямоугольник в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox при этом свернется в окружность единичного радиуса, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 252). Через диаметр полученной окружности OD проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол 45°. В этом случае в сечении получаем эллипс.

Возьмем на эллипсе какую-нибудь точку, например точку A, и опустим из нее перпендикуляры на плоскость окружности и диаметр окружности OD. Получим соответственно точки B и C.

Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $\angle ABC=90°$, $\angle ACB=45°$. Следовательно, $AB=BC$.

Заметим, что $BC=\sin x$, где x — длина дуги OB. Для этого достаточно обратиться к рисунку 253 и вспомнить определение синуса. Таким образом, $AB=\sin x$. Теперь выполним обратную операцию — развернем цилиндр в прямоугольник. При этом получим кривую, для которой $AB=\sin x$, где $x=OB$, т. е. эта кривая является частью синусоиды (рис. 254).

З а м е ч а н и е. Учащимся, заинтересовавшимся этой задачей, можно предложить следующий вопрос: «Какие кривые получатся, если сечение проводить не под углом $\alpha=45°$, а под другими углами α?»

О т в е т: при этом будут получаться кривые, для которых

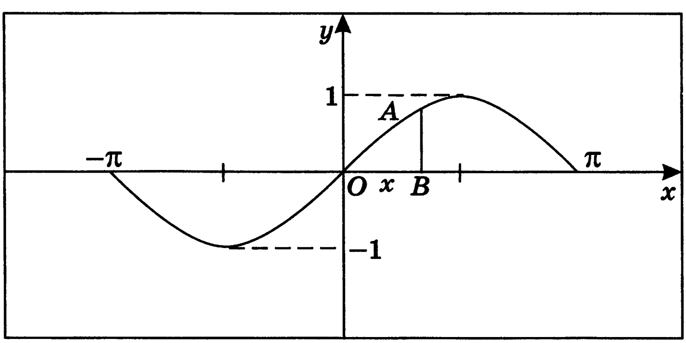


Рис. 254

$AB = k \cdot \operatorname{tg} x$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$. Это следует из прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 252), в котором теперь $\angle ACB = \alpha$ и $AB = \operatorname{tg}\alpha \cdot BC$, причем если $0° < \alpha < 45°$, то $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$ и имеет место сжатие графика функции $\sin x$ по оси Oy.

Например, если $\alpha = 30°$, то $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $AB = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x \approx$ $\approx 0{,}58 \sin x$.

Если $45° < \alpha < 90°$, то $\operatorname{tg}\alpha > 1$ и имеет место растяжение графика $\sin x$ по оси Oy. Например, при $\alpha = 60°$ имеем $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $AB = \sqrt{3}\sin x \approx 1{,}7 \sin x$.

Если теперь исходный прямоугольник (рис. 251) свернуть в прямой круговой цилиндр не единичного, а некоторого другого радиуса a и произвести с этим цилиндром аналогичные операции, то в результате также получим синусоиду, но задаваемую формулой $y = a \sin \frac{x}{a}$. График этой кривой подобен графику $y = \sin x$ и получается из него сжатием или растяжением в a раз в направлении осей Ox и Oy.

19) По одну сторону круга (на его оси) помещен точечный источник света, а по другую сторону — плоский экран. Какой вид имеет очертание тени круга в зависимости от наклона экрана? (Ответ: окружность, эллипс, парабола, ветвь гиперболы.)

20) Исследуйте и докажите следующие оптические свойства конических сечений:

а) Лучи, исходящие из одного фокуса эллипса, зеркально отражаясь от эллипса, сходятся в его другом фокусе.

б) Лучи, исходящие из одного фокуса гиперболы, зеркально отражаясь от гиперболы, расходятся по направлениям лучей, исходящих из другого фокуса.

в) Лучи, исходящие из фокуса параболы, зеркально отражаясь от параболы, распространяются параллельно ее оси.

г) Ответьте на вопрос: «Существуют ли другие кривые, обладающие такими же оптическими свойствами, какими обладают конические сечения (эллипс, парабола, гипербола)?»

Заметим, что ответ на последний вопрос — отрицательный и он содержится в такой теореме: «Отражение пучка лучей также в виде пучка лучей имеет место для конических и только для конических сечений, когда источник света помещен в одном из фокусов. При этом зеркально отраженные лучи образуют сходящийся, расходящийся или параллельный пучок, смотря по тому, является ли зеркало эллиптическим, гиперболическим или параболическим».

С оптикой конических сечений читатель может ознакомиться, например, в книге А. Г. Дорфмана «Оптика конических сечений» [64].

21) Поставим перед учениками вопрос: «Один тетраэдр лежит внутри другого — может ли сумма его ребер оказаться больше, чем сумма ребер обрамляющего тетраэдра?»

Опыт подсказывает, что описанной ситуации не может быть, так как «в меньшем не может быть чего-нибудь большего». Но наш опыт обманывает нас.

Предложим учащимся для проведения учебного исследования такую задачу: «Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $\frac{4}{3}$ суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$».

Заметим, что число $\frac{4}{3}$ в формулировке нашей задачи не может быть уменьшено. Для того чтобы понять это, достаточно рассмотреть правильную треугольную пирамиду $ABCD$ с очень большим в сравнении с ребром основания ABC боковым ребром и взять точки K и L где-нибудь на основании, а две другие точки M и N — где-то у вершины D.

Приведем доказательство этой проблемной задачи.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть KLM — грань тетраэдра $KLMN$, имеющая наибольший периметр среди всех граней этого тетраэдра. Спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость грани KLM. Проекции вершин тетраэдра обозначим соответственно A_1, B_1, C_1, D_1. Проекция всего тетраэдра $ABCD$ — это либо треугольник (и тогда одна из точек A_1, B_1, C_1 и D_1 лежит внутри треугольника, образованного остальными точками (рис. 255, *а*), либо выпуклый четырехугольник, ограниченный ломаной $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 255, *б*). Ломаную, ограничивающую проекцию тетраэдра $ABCD$, обозначим через Г (на рисунке 255 она прорисована жирными линиями). Ясно, что треугольник KLM лежит внутри Г. Для любых четырех точек пространства E, F, G, H через P_{EFGH} обозначим величину $EF+FG+EG+EH+FH+GH$ и назовем ее *периметром EFGH*. Периметр треугольника KLM и длину ломаной Г обозначим P_{KLM} и P_{Γ} соответственно.

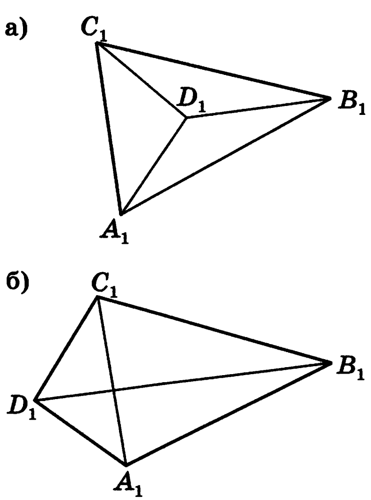


Рис. 255

Дальнейшее решение основано на четырех вспомогательных утверждениях, которые представляют интерес и сами по себе. Мы их сейчас здесь сформулируем, а ваша задача — постараться их доказать.

1. Если грань KLM имеет периметр не меньший, чем периметр каждой из остальных трех граней тетраэдра $KLMN$, то

$$P_{KLMN} \leqslant 2P_{KLM}. \quad (1)$$

2. Если треугольник KLM лежит внутри выпуклой ломаной Г, то

$$P_{KLM} \leqslant P_{\Gamma}. \qquad (2)$$

3. Если ломаная Г ограничивает проекцию на плоскость тетраэдра $ABCD$ и при этом A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции вершин тетраэдра, то

$$P_{\Gamma} \leqslant \frac{2}{3} P_{A_1B_1C_1D_1}. \qquad (3)$$

4. Если A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции вершин тетраэдра $ABCD$ на некоторую плоскость, то

$$P_{A_1B_1C_1D_1} \leqslant P_{ABCD}. \qquad (4)$$

Из соотношений (1) — (4) справедливость утверждения основной задачи следует немедленно:

$$P_{KLMN} \overset{(1)}{\leqslant} 2P_{KLM} \overset{(2)}{\leqslant} 2P_{\Gamma} \overset{(3)}{\leqslant} 2 \cdot \frac{2}{3} P_{A_1B_1C_1D_1} \overset{(4)}{\leqslant} \frac{4}{3} P_{ABCD},$$

что и требовалось доказать.

22) Учебное исследование целесообразно организовывать так, чтобы решение нескольких задач было бы затем основой решения более общей задачи. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

1. Перед тем как решать задачу «В пространстве задано n шаров, каждые четыре из которых пересекаются. Доказать, что все эти шары пересекаются, т. е. существует точка, принадлежащая всем шарам», учащимся следует предложить для решения такие две задачи: «На прямой задано n отрезков, каждые два из которых пересекаются. Доказать, что все отрезки пересекаются, т. е. существует точка, принадлежащая всем отрезкам» и «На плоскости задано n кругов, каждые три из которых пересекаются. Доказать, что существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем этим кругам».

Все эти три задачи решаются методом индукции. Решение первой мы приведем здесь.

1°. Для $n=4$ утверждение очевидно.

2°. Предположим, что наше утверждение уже доказано для любых n шаров, и пусть дано $(n+1)$ шаров Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n, Φ_{n+1}. Обозначим через Φ пересечение n шаров Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n (существующие в силу индуктивного предположения). Тогда можно показать, что если шар Φ_{n+1} не пересекается с Φ, то существует разделяющая их плоскость π. Фигуры, по которым каждый из шаров Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n пересекает плоскость π, являются кругами, любые три из которых пересекаются; следовательно, на плоскости π существует точка, принадлежащая всем этим кругам и, значит, принадлежащая Φ, что противоречит определению плоскости π.

2. Ученикам для учебного исследования можно предложить решить последовательно такие три задачи.

Задача 1. Вся прямая покрыта каким-то конечным числом лучей. Доказать, что из них можно вырезать два луча, уже покрывающих всю прямую.

Задача 2. Вся плоскость покрыта каким-то конечным числом n полуплоскостей. Доказать, что из них можно выбрать две или три полуплоскости, уже покрывающие всю плоскость.

Задача 3. Пусть задано какое-то конечное число полупространств (это есть часть пространства, лежащая по одну сторону от некоторой плоскости), заполняющих все пространство. Доказать, что из них можно выбрать четыре (или меньше) полупространства, уже заполняющие все пространство.

Большое число подобных заданий читатель найдет в книге Л. И. Головиной, И. М. Яглома [31].

23) Учебное исследование может быть посвящено и поиску ошибки, специально включенной в доказательство или решение задачи. Такое учебное исследование можно назвать учебным расследованием. Приведем четыре примера такой работы.

1. «Докажем», что тело имеет такой же объем, как и его часть.

Равносторонняя гипербола $x^2-y^2=1$ вращается вокруг оси Ox. При этом получается двуполостный гиперболоид вращения, вершины которого лежат на оси Ox по обе стороны от начала координат на расстоянии 1 от него (рис. 256).

Плоскости $x=\pm 2$ отсекают от обеих плоскостей гиперболоида некоторые тела. Вычислим их объемы. В силу соображений симметрии обе полученные части гиперболоида равновелики.

Вычислим сначала объем тела, отсекаемого плоскостью от одной плоскости гиперболоида. Для этого вычислим интеграл

от $x=1$ до $x=2$: $V_1=\pi\int\limits_1^2 y^2\,dx=\pi\int\limits_1^2 (x^2-1)\,dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}\pi.$

Вычислим теперь объем обеих частей гиперболоида, полученных при пересечении его плоскостями $x=\pm 2$. Для этого вычислим интеграл от $x=-2$ до $x=2$:

$$V_2=\pi\int\limits_{-2}^{2} y^2\,dx=\pi\int\limits_{-2}^{2}(x^2-1)\,dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{4}{3}\pi.$$

Получаем, что обе части гиперболоида имеют тот же объем, что и одна его часть.

Проведенное «расследование» должно выявить допущенную ошибку. Она в следующем: при интегрировании надо учитывать, что квадрат функции может иметь действительную величину, в то время как функция принимает мнимые значения.

2. Спросим учащихся, может ли фигура с бесконечной площадью дать при вращении тело с конечным объемом. Поверьте, они ответят, что такое невозможно. Попытаемся разубедить их на таком примере. Рассмотрим фигуру, ограниченную ги-

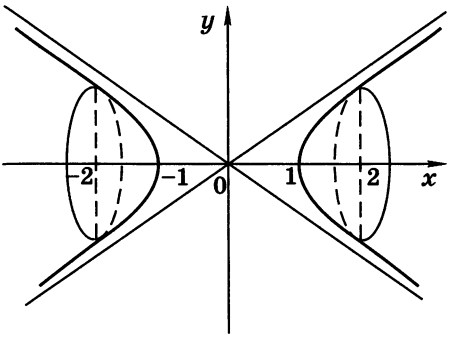


Рис. 256

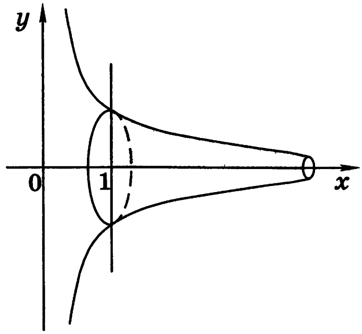


Рис. 257

перболой $y=\frac{1}{x}$ при $x \geqslant 1$, осью Ox и прямой $x=1$, которая затем вращается вокруг оси Ox (рис. 257).

Вычислим площадь полученной фигуры.

$$S=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{dx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln x\,\Big|_1^x=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-\ln 1)=+\infty.$$

Итак, площадь этой фигуры бесконечна.

Вычислим объем тела, полученного вращением этой фигуры с бесконечной площадью вокруг оси Ox:

$$V=\int_1^{+\infty}\pi y^2\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{\pi dx}{x^2}=\pi\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\pi dx}{x^2}=\pi\lim_{x\to+\infty}\int_1^x x^{-2}\,dx=$$

$$=\pi\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\,\Big|_1^x\right)=\pi\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right)=\pi(0+1)=\pi.$$

Итак, объем этого тела конечен. Более того, мы получили, что осевое сечение тела конечного объема имеет бесконечную площадь.

«Расследование» должно показать учащимся, что «наглядность», «жизненный стереотип» иногда приводят к ошибке, а выручить может лишь здравый смысл.

Небезынтересным будет заметить, что фигуры бесконечной протяженности могут иметь конечную площадь (в отличие от рассмотренного выше случая).

Приложим к квадрату со стороной, равной 1, прямоугольник с основанием 1 и высотой 0,5 (рис. 258). Затем приложим прямоугольник с основанием 1 и высотой $\frac{1}{4}$ и т. д., как это показано на рисунке.

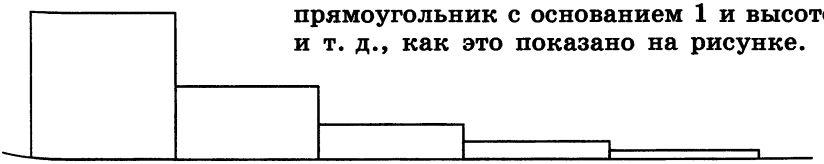


Рис. 258

Эта ступенчатая фигура имеет площадь $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$. Но, как мы видим, это сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и со знаменателем $\frac{1}{2}$.

По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ имеем $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

3. Решим задачу: «Вписать в шар радиуса r конус с наибольшей поверхностью S».

Экваториальное плоскостное сечение этой конфигурации показано на рисунке 259.

Имеем $OS = r$, $SD = h$, $SB = l$, $DB = k$.

Полная поверхность конуса $S = \pi k^2 + \pi kl$. Из треугольника DOB имеем $DB^2 = k^2 = r^2 - (h-r)^2 = h(2r-h)$, $k = \sqrt{h(2r-h)}$.

Из треугольника SDB имеем $SB^2 = l^2 = h^2 + (2rh - h^2) = 2rh$, $l = \sqrt{2rh}$.

Тогда

$$S = \pi h(2r-h) + \pi\sqrt{h(2r-h)} \cdot \sqrt{2rh} = \pi h(2r-h) + \pi\sqrt{2rh^2(2r-h)}.$$

Выбирая высоту h за неизвестную переменную величину x, имеем $f(x) = \frac{S}{\pi} = x(2r-x) + \sqrt{2rx^2(2r-x)}$, причем заметим, что $0 < x < 2r$.

Найдем критические точки полученной функции, для чего запишем производную: $f'(x) = 2r - 2x + \frac{4r^2x - 3rx^2}{\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3}}$.

Приравнивая производную к нулю, получаем

$$(2r-2x)\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3} = 3rx^2 - 4r^2x.$$

Так как $x = 0$ не удовлетворяет условию задачи, то разделим обе части последнего равенства на x. Имеем после возведения в квадрат обеих частей равенства

$$4(x-r)^2(4r^2 - 2rx) = (4r^2 - 3rx)^2.$$

Упрощая это уравнение, получим $8x^2 - 23rx + 16r^2 = 0$.

Следовательно, $x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{17}}{16} r$, или $x_1 \approx 1{,}7r$, $x_2 \approx 1{,}2r$.

Обратим внимание на то, что оба полученных корня принадлежат промежутку $(0;\ 2r)$, а значит, оба они являются для функции $y = f(x)$ критическими.

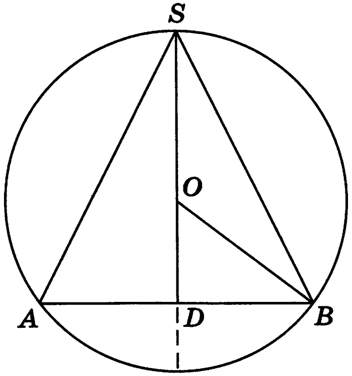


Рис. 259

При переходе через каждую из этих точек первая производная функции $y=f(x)$ меняет свой знак с «+» на «–», а значит, в этих точках функция $y=f(x)$ имеет максимум.

Таким образом, мы получили на вопрос задачи два различных ответа, но это не так.

Из графика функции $y=f(x)$ легко установить, что только точка $x=\frac{23-\sqrt{17}}{16}r\approx 1{,}2r$ является точкой максимума.

Точка $x=\frac{23+\sqrt{17}}{16}r\approx 1{,}7r$ является посторонним корнем, который получился при возведении в квадрат уравнения, полученного путем приравнивания к нулю первой производной. Итак, если при определении точки экстремума получается иррациональное уравнение, то надо быть особенно внимательным.

4. Подобное учебное «расследование» по обнаружению умышленно допущенной ошибки можно провести и по случаю «неаккуратного» обращения с единицами измерений. Рассмотрим три примера:

а) $\frac{1}{4}$ р. $=25$ к.;

$\sqrt{\frac{1}{4}\text{ р.}}=\sqrt{25\text{ к.}}$;

$\frac{1}{2}$ р. $=5$ к.;

50 к. $=5$ к.;

б) 2500 к. $=25$ р.;

50 к. $\cdot$ 50 к. $=25$ р.;

$\sqrt{50\text{ к.}\cdot 50\text{ к.}}=\sqrt{25\text{ р.}}$;

50 к. $=5$ р.;

в) $125\,000\,000\text{ см}^3=125\text{ м}^3$;

$500\text{ см}^3\cdot 500\text{ см}^3\cdot 500\text{ см}^3=125\text{ м}^3$;

$\frac{500}{1000}\text{ м}^3\cdot\frac{500}{1000}\text{ м}^3\cdot\frac{500}{1000}\text{ м}^3=125\text{ м}^3$;

$\frac{1}{20}\text{ м}^3\cdot\frac{1}{20}\text{ м}^3\cdot\frac{1}{20}\text{ м}^3=125\text{ м}^3$;

$\sqrt{\frac{1}{20}\text{ м}^3\cdot\frac{1}{20}\text{ м}^3\cdot\frac{1}{20}\text{ м}^3}=\sqrt{125\text{ м}^3};\ \frac{1}{20}\text{ м}^3=5\text{ м}^3.$

Вывод во всех трех случаях один и тот же: над именованными числами нельзя выполнять те же операции, которые мы выполняем над обычными числами.

В связи с приведенными примерами уместно вспомнить слова Д. Пойа: «Обучение — ремесло, использующее бесчисленное количество маленьких трюков».

24) Как было замечено выше, учебное исследование может быть направлено на построение учащимися контрпримеров. Наибольший эффект контрпримеров достигается в том случае, когда формулируются два утверждения, в которых условие и заключение переставлены местами, причем больший эффект достигается в том случае, если истинность утверждения неизвестна учащимся.

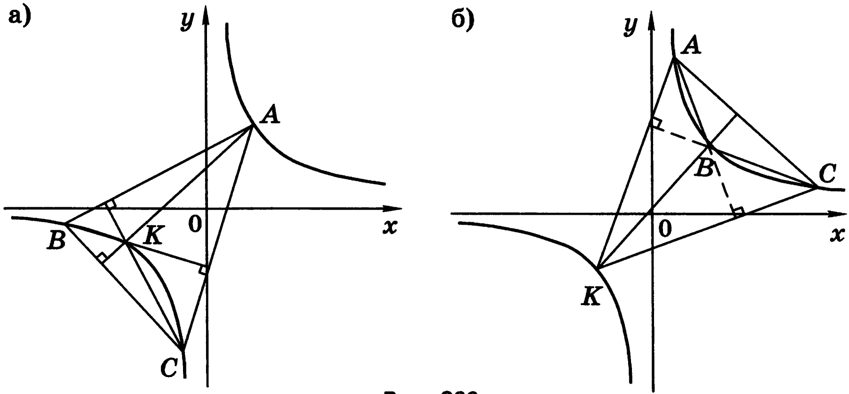


Рис. 260

Исследование психологических основ деятельности учащихся при построении контрпримеров показывает, что их деятельность проходит пять фаз творческого решения: выдвижение гипотезы; сбор материала, накопление знаний; инкубация, созревание; озарение, инсайт; доказательство справедливости построенного контрпримера.

Почти все приведенные выше примеры касались курса стереометрии, но подобные учебные исследования можно проводить и на другом учебном материале. Покажем это на таких примерах.

1. Установить, что прямые, содержащие высоты треугольника, вписанного в гиперболу $y=\frac{1}{x}$, пересекаются в точке, лежащей на гиперболе (рис. 260, *а*, *б*).

Зададим координаты вершин треугольника: $A\left(x_1;\ \frac{1}{x_1}\right)$; $B\left(x_2;\ \frac{1}{x_2}\right)$; $C\left(x_3;\ \frac{1}{x_3}\right)$. Составим уравнение прямых AC, AB, BC, а затем найдем уравнения высот AK, BK, CK. Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, мы установим, что координаты точки K удовлетворяют уравнению гиперболы $y=\frac{1}{x}$.

Естественно, напрашивается некоторое обобщение этого факта. Учащимся, например, можно предложить провести исследование такого вопроса: «Обладают ли такими свойствами кривые, задаваемые уравнениями вида $y=\frac{ax+b}{cx+d}$?»

Далее целесообразно рассмотреть, не будут ли прямые, содержащие высоты треугольника, вписанного в график функции $y=a^x$, пересекаться в точке, лежащей на графике обратной функции $y=\log_a x$.

Заметим, что исследование поставленных вопросов можно провести с помощью как чисто математических выкладок, так и компьютерного эксперимента.

2. Задача. Можно ли вписать в графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$, где $0<a<a^{-e}\left(e^{-e}\approx\frac{1}{15}\right)$, равнобедренный треугольник, такой, что его вершины принадлежат одновременно этим графикам?

В других терминах сходная задача выглядит следующим образом: «Всегда ли уравнение $a^x=\log_a x$ при $0<a<e^{-e}$ имеет три корня?»

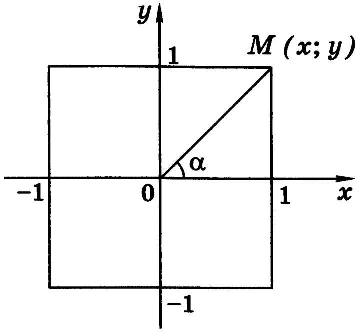


Рис. 261

3. Задача. Точка M движется по сторонам квадрата (рис. 261). По аналогии с известными тригонометрическими функциями введем новые функции:

$$\operatorname{san}\alpha=x-y,\ \operatorname{cas}\alpha=x+y,\ \operatorname{tig}\alpha=x^2-y^2.$$

Установите связи между этими функциями (по аналогии с обычными $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$) и постройте их графики.

4. Введем понятие антипериодической функции: функция $y=f(x)$ называется антипериодической, если существует такое число $T\neq 0$, что для всех значений аргумента x из области определения функции имеет место равенство $f(x+T)=-f(x)$.

Учащимся можно предложить дать ответ на такие вопросы:

а) Какой будет сумма (разность) двух антипериодических функций?

б) Каким будет произведение (частное) двух антипериодических функций?

в) Какой будет сумма (разность) двух функций, одна из которых периодическая, а другая — антипериодическая?

г) Каким будет произведение (частное) двух функций, одна из которых периодическая, а другая — антипериодическая?

д) Какой будет суперпозиция двух функций $y=f(g(x))$, одна из которых периодическая, а другая — антипериодическая?

Ранее мы только формулировали проблемы, которые могут стать гипотезами исследования. Теперь же покажем, как можно проводить исследование гипотез, как естественно они могут вырастать из простых вопросов, постепенно усложняясь и доходя до весьма сложных проблем.

5. Сравним числа:

а) $\dfrac{1998}{2000}$ и $\dfrac{19\,981\,999}{20\,002\,001}$; б) $\dfrac{1\,234\,567\,890}{2\,345\,678\,901}$ и $\dfrac{1\,234\,567\,892}{2\,345\,678\,903}$;

в) $\dfrac{88\,888\,884}{88\,888\,887}$ и $\dfrac{99\,999\,995}{99\,999\,998}$; г) $\dfrac{10^{1998}-1}{10^{1999}-1}$ и $\dfrac{10^{1999}-1}{10^{2000}-1}$;

д) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3+4000}{\sqrt[3]{2000}+k}$ и $3\cdot\sqrt[3]{4\,000\,000}$, где $k>0$.

Учащиеся знают несколько способов сравнения чисел:

— умножить числитель и знаменатель на соответствующее число, уравнять знаменатели и, сравнивая числители, дать ответ на поставленный вопрос;

— составить разность этих чисел и по знаку этой разности дать ответ;

— найти отношение этих чисел и сравнить его с единицей;

— разделить у каждой дроби числитель на знаменатель и сравнить результаты.

В применении к предложенным числам ни один из перечисленных способов не является рациональным. Каждый требует громоздких вычислений. Выход из создавшегося положения мы сможем найти, если откажемся от привычных действий. Покажем, как это может быть сделано.

а) Введем обозначения $a=1998$, $b=2000$, тогда

$$19\,981\,999=19\,980\,000+1999=19\,980\,000+1998+1=$$
$$=a\cdot 10\,000+a+1=10\,001\cdot a+1,$$
$$20\,002\,001=20\,000\,000+2001=20\,000\,000+2000+1=$$
$$=b\cdot 10\,000+b+1=10\,001\cdot b+1.$$

Сравниваем такие две дроби:

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{10\,001a+1}{10\,001b+1}.$$

Пока мы не знаем, какой знак неравенства нужно поставить между ними, будем писать знак «$\vee$». Умножив обе части неравенства на произведение знаменателей $b(10\,001b+1)$, сведем сравнение дробей к сравнению выражений с целыми коэффициентами.

Итак, что больше: $\frac{a}{b} \vee \frac{10\,001a+1}{10\,001b+1}$?

$$a(10\,001a+1) \vee b(10\,001b+1), \text{ т. е. } a \vee b.$$

Но так как $a<b$ (это видно из условия задачи), то окончательно имеем $\frac{1998}{2000}<\frac{19\,981\,999}{20\,002\,001}$.

б) Введем обозначения $a=1\,234\,567\,890$, $b=2\,345\,678\,901$. Тогда

$$1\,234\,567\,892=1\,234\,567\,890+2=a+2,$$
$$2\,345\,678\,903=2\,345\,678\,901+2=b+2.$$

Следовательно, сравним дроби

$$\frac{a}{b} \text{ и } \frac{a+2}{b+2},$$

что сводится к сравнению выражений

$$a(b+2) \vee b(a+2),\ 2a \vee 2b,\ a \vee b.$$

Но по условию $a<b$, а значит, $\frac{1\,234\,567\,890}{2\,345\,678\,901}<\frac{1\,234\,567\,892}{2\,345\,678\,903}$.

в) Введем обозначение $a = 11\,111\,111$, тогда

$$88\,888\,884 = 88\,888\,888 - 4 = 8a - 4,$$
$$88\,888\,887 = 88\,888\,888 - 1 = 8a - 1,$$
$$99\,999\,995 = 99\,999\,999 - 4 = 9a - 4,$$
$$99\,999\,998 = 99\,999\,999 - 1 = 9a - 1.$$

Таким образом, нужно ответить на вопрос, что больше:

$$\frac{8a-4}{8a-1} \vee \frac{9a-4}{9a-1}.$$

Он сводится (учитывая, что $a > 1$) к сравнению выражений:

$$(8a-4)(9a-1) \vee (9a-4)(8a-1),$$
$$72a^2 - 8a - 36a + 4 \vee 72a^2 - 9a - 32a + 4,$$
$$-44a \vee -41a.$$

Так как $a > 0$, то $-44a < -41a$, а значит,

$$\frac{88\,888\,884}{88\,888\,887} < \frac{99\,999\,995}{99\,999\,998}.$$

г) Введем, как это было в трех предыдущих случаях, обозначения: $a = 10^{1998}$, тогда

$$10^{1999} = 10^{1998} \cdot 10 = 10 \cdot a,$$
$$10^{2000} = 10^{1999} \cdot 10 = 10 \cdot a \cdot 10 = 100 \cdot a.$$

Таким образом (учитывая, что $a > 1$), нужно поставить верный знак неравенства между дробями

$$\frac{a-1}{10a-1} \vee \frac{10a-1}{100a-1},$$
$$(a-1)(100a-1) \vee (10a-1)^2,$$
$$100a^2 - a - 100a + 1 \vee 100a^2 - 20a + 1,$$
$$-100a \vee -20a.$$

По условию $a > 0$, тогда $-100a < -20a$, а значит,

$$\frac{10^{1998}-1}{10^{1999}-1} < \frac{10^{1999}-1}{10^{2000}-1}.$$

д) Два сравниваемых числа могут находиться в одном из трех возможных соотношений: либо первое число равно второму, либо первое число больше второго, либо первое число меньше второго. Не зная пока, каково соотношение между этими двумя числами, используем, как и прежде, знак «$\vee$»:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3 + 4000}{\sqrt[3]{2000}+k} \vee 3 \cdot \sqrt[3]{4\,000\,000}, \text{ где } k > 0.$$

Каково бы ни было соотношение между сравниваемыми числами, такое же соотношение останется и между произведениями, которые получаются, если сравниваемые числа умножить на знаменатель первого из них (этот знаменатель положительный):

$$\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3+4000 \vee 3\cdot\sqrt[3]{4\,000\,000}\cdot\left(\sqrt[3]{2000}+k\right),$$

$$2000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k+3\sqrt[3]{2000}\cdot k^2+k^3+4000 \vee 3\cdot\sqrt[3]{2000^3}+3\sqrt[3]{2000^2}\cdot k,$$

$$\left(6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k\right)+k^2\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{2000}+k\right) \vee 6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k.$$

При любых $k>0$ левая часть полученного соотношения больше его правой части. Таким образом, знак «$\vee$» надо заменить знаком «$>$», т. е.

$$\left(6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k\right)+k^2\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{2000}+k\right)>6000+3\cdot\sqrt[3]{2000^2}\cdot k.$$

Переходя от полученного соотношения последовательно к предыдущим соотношениям, можно установить, что при любых $k>0$ имеем $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2000}+k\right)^3+4000}{\sqrt[3]{2000}+k}>3\cdot\sqrt[3]{4\,000\,000}.$

6. Учащимся по программе показывают основное свойство пропорции, а именно:

если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $a\cdot d=b\cdot c$.

Полезно рассмотреть с ними и производные свойства пропорций:

а) если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ и $\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

Эти свойства легко доказываются. Пусть нам задана пропорция $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, докажем равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}$. Перемножая крайние, а затем и средние члены пропорции, получаем $a\cdot b+c\cdot b=a\cdot b+a\cdot d$, откуда $c\cdot b=a\cdot d$. Но последнее равенство верное, а значит, верно и доказываемое равенство.

б) Из цепочки пропорций $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{k}{m}=\dfrac{l}{n}=\ldots=\dfrac{r}{s}$ можно вывести следующие равенства:

$$\frac{a+c+k+l+\ldots+r}{b+d+m+n+\ldots+s}=\frac{a-c-k-l-\ldots-r}{b-d-m-n-\ldots-s}=\frac{a+c-k+l-\ldots+r}{b+d-m+n-\ldots+s}=\ldots=$$
$$=\frac{a-c-k+l+\ldots+r}{b-d-m+n+\ldots+s}=\frac{a}{b}.$$

Эти производные свойства пропорций учащиеся затем смогут применить при изучении теоремы синусов.

Известно, что $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$, где R — радиус описанной около треугольника окружности. Используя производные свойства пропорций, получаем $\dfrac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=2R$, откуда $\dfrac{a+b+c}{2}=R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$. В левой части последнего равенства стоит полупериметр (P) треугольника, и тогда

$$P=R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma).$$

Значит, площадь треугольника можно вычислить по формуле $S_{\triangle}=P\cdot r=R\cdot r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$, где r — радиус вписанной в треугольник окружности.

7. При изучении квадратных уравнений учащиеся могут провести ряд учебных исследований. Наметим два из них.

1) Установить, что произойдет с корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, если поменять местами коэффициенты a и c; поменять знак коэффициента b.

2) Найти общую форму записи уравнений:

$$2x^2+5x+2=0 \quad \left(x_1=-2,\ x_2=-\frac{1}{2}\right);$$
$$3x^2-10x+3=0 \quad \left(x_1=3,\ x_2=\frac{1}{3}\right);$$
$$4x^2+17x+4=0 \quad \left(x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{4}\right);$$
$$5x^2+26x+5=0 \quad \left(x_1=5,\ x_2=\frac{1}{5}\right)$$

и сделать выводы о корнях квадратного уравнения в зависимости от коэффициентов уравнения.

Учащиеся смогут выдвинуть гипотезу о том, что если уравнение имеет вид $ax^2\pm(a^2+1)x+a=0$, то его корнями являются соответственно числа $\frac{1}{a}$, a (для случая, когда второй коэффициент отрицательный) или $-\frac{1}{a}$, $-a$ (для случая, когда второй коэффициент положительный).

Затем эта гипотеза доказывается.

Рассмотрим уравнение $ax^2+(a^2+1)x+a=0$ и найдем его корни:

$$x_{1,2}=\frac{-(a^2+1)\pm\sqrt{a^4+2a^2+1-4a^2}}{2a}=\frac{-(a^2+1)\pm\sqrt{(a^2-1)^2}}{2a}=$$
$$=\frac{-(a^2+1)\pm|a^2-1|}{2a}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что перед нами квадратное уравнение с целыми коэффициентами (даже если бы они были дробными, уравнение можно было бы свести к уравнению с целыми коэффициентами), т. е. $a\in\boldsymbol{Z}$, и тогда $a^2-1>0$, а значит, $x_{1,2}=\frac{-(a^2+1)\pm(a^2+1)}{2a}$, откуда $x_1=-a$, $x_2=-\frac{1}{a}$.

В заключение этого параграфа заметим, что от учителя для организации со школьниками эвристического поиска решения учебной проблемы или математической задачи требуются такие профессиональные умения:

1) мотивировать необходимость изучения данной темы, решения предложенной задачи;
2) своевременно актуализировать знания учащихся;
3) использовать приемы проблемного обучения;
4) формировать у школьников умение выдвигать гипотезу;

5) формировать у школьников умение доказывать или опровергать выдвинутую гипотезу;

6) организовывать изучение школьниками возможностей расширения условий и обобщения решений задач и исходных проблем;

7) формировать у школьников умение подводить итоги проделанной работы и выявлять главное.

Если в этот перечень включить аспекты общей методической подготовки, то он еще пополнится следующими пунктами:

8) соблюдать основные дидактические принципы при обучении математике;

9) производить отбор содержания учебного материала, удовлетворяющего целям и задачам исследования;

10) составлять систему заданий или упражнений обучающего характера;

11) стимулировать активность познавательной деятельности учащихся;

12) осуществлять непрерывный контроль за степенью усвоения учащимися нового материала и решением ими задач;

13) разнообразить использование средств обучения математике.

§ 3. ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСВОЕНИЯ УЧАЩИМИСЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

На этом этапе обдумывается и коллективно обсуждается идея доказательства, осуществляется и оформляется доказательство теоремы. Следует при этом заметить, что полное доказательство теоремы, как правило, направлено на его запоминание, а краткое, схематичное доказательство теоремы — на его понимание.

Ознакомить учащихся с доказательством теоремы можно различными приемами.

П р и е м 1. Для изложения доказательства теоремы учитель использует частично-поисковый метод, таким образом, активизация класса происходит посредством эвристической беседы, которую ведет учитель с учащимися.

Заметим, что вопросы, которые по ходу доказательства теоремы задает учащимся учитель, должны соответствовать аналитико-синтетическому ходу рассуждений, это поможет школьникам самим искать путь доказательства, а не получать его в готовом виде.

При изложении доказательства учитель должен делать паузы после постановки некоторого вопроса (короткие паузы) и в конце некоторой мысли, обоснования (более длинные паузы). Если по ходу объяснения учитель предлагает вспомнить материал, который ученики повторяли к уроку, то, как показали исследования Л. А. Черных, паузы должны быть продолжительностью 3—7 с; когда от учащихся требуется, например, обосновать равенство двух треугольников, то паузы должны быть 10—15 с; в случае самостоятельного вывода учащимися части доказательства — 30—40 с.

Частично-поисковый метод изложения доказательства теорем в значительной степени активизирует познавательную деятельность учащихся. Этот метод создает дидактические трудности, преодоление которых направляет и стимулирует интеллектуальную деятельность школьников.

Прием 2. Учитель излагает доказательство теоремы объяснительно-иллюстративным методом в форме краткого рассказа, не прерывая его вопросами в адрес учащихся.

Этот прием обеспечивает высокое качество изложения доказательства, позволяет учащимся легче воспринимать последовательность, обоснованность и другие стороны доказательства. Речь учителя в таком случае выступает для школьников научным и логическим образцом оформления доказательства; они учатся строить умозаключения, делать обобщения и выводы.

Объяснительно-иллюстративный метод изложения доказательства теоремы, в отличие от частично-поискового, позволяет экономить время урока. Этот метод обычно используют в тех случаях, когда доказательство небольшое по объему или же когда теорема доказывается принципиально новым для учащихся способом.

Заметим, что при использовании такого метода объяснения зачастую наблюдаются следующие недостатки в речи учителя: языковые ошибки, многословие, монотонность, чрезмерная громкость, очень низкий или очень быстрый темп, затяжные неоправданные паузы, неприятный тембр голоса.

Так как основное средство реализации объяснения — это речь, то результативность объяснений во многом зависит от умения учителя владеть своей речью [22, 24, 25, 69, 81, 111].

К речи учителя предъявляются следующие требования:

а) характеристики, способствующие пониманию учащимися содержания учебного материала: ясность, точность, понятность, доходчивость;

б) характеристики, помогающие управлять волевой сферой: убедительность, побудительность, воздейственность;

в) интонационные характеристики речи: темп, паузы, логические ударения, тон и т. д.

К какому бы виду ни относилось то или иное объяснение, к нему следует предъявить такие требования:

1) обеспечение целесообразного соединения активности учителя и активности учащихся;

2) соответствие методов, приемов и средств обучения, используемых учителем при объяснении, выбранному виду объяснения;

3) соблюдение полной структуры объяснения (подготовительный этап, собственно объяснение, заключительный этап);

4) комплексная реализация воспитывающих, развивающих и обучающих функций объяснения;

5) выбор оптимального варианта объяснения на основе тщательного анализа специфических условий протекания объяснения (особенности учебного материала, программные требования, задачи конкретного урока, психолого-педагогические особенности школьников, личные и профессиональные качества учителя), ориентируясь на вид объяснения.

Как показали исследования (П. М. Олоничев, Ф. Ф. Притуло, З. И. Слепкань, Д. М. Фрейверт, Л. А. Черных и др.), объяснение теоремы должно включать в себя следующие действия: подготовку к объяснению; мотивационные действия; работу с формулировкой теоремы; моделирование в образах, рисунках, записях; обсуждение метода доказательства; собственно доказательство; первичное применение.

Доказана эффективность приема неоднократного повторения доказательства теоремы (схематическое и развернутое, «в три приема»), направленного на достижение глубокого понимания учащимися объяснения. Повторные доказательства должны проводиться на различных уровнях сложности. Вначале объяснение проводится с опорой на рисунок и раскрывается основная идея доказательства (опускаются обоснования, смысл которых понятен учащимся из наглядных соображений).

Затем опущенные обоснования восстанавливаются. При третьем «проходе» доказательство повторяется полностью и оформляется письменно.

Опускаемые в ходе доказательства обоснования можно подразделить на три группы:

а) положения и факты, очевидность и наглядность которых настолько закреплены в сознании школьников, что всякая попытка доказать их вызывает у учащихся недоумение;

б) положения и факты, доказательства которых имеют высокую степень сложности;

в) положения и факты, которые не вызывают недоумений у учащихся в плане их справедливости, но позволяют обосновать их посредством выкладок, не относящихся к высокой степени сложности.

П р и е м 3. Метод самостоятельного изучения доказательства по учебнику. Учитель выступает здесь в роли консультанта и организатора. Учащимся даются указания к выполнению работы, обращается внимание на основные и наиболее трудные моменты в доказательстве. Для облегчения самостоятельного изучения доказательства теоремы учитель может предложить учащимся готовый план.

Заметим, что в учебниках доказательство теорем иногда проводится в форме неполных силлогизмов и тогда задача ученика состоит в том, чтобы восполнить недостающие звенья в рассуждениях.

При организации самостоятельного изучения доказательства теоремы учитель должен помнить о том, что ученики затрудняются в расчленении готового, целостного чертежа к теореме, в выделении на нем основных и второстепенных элементов. Вот почему в ряде случаев нужна особая работа, направленная на усвоение чертежа.

Самым трудным в доказательстве теоремы является построение цепочки логических рассуждений. Для облегчения этой работы учащимся следует дать соответствующие указания. Воспользуемся правилами для обучения учащихся поиску доказательства, для его оформления и для обобщения доказываемой теоремы, разработанными Д. Г. Бутко.

Обобщенные правила для поиска доказательства

1) Отделите условие от доказываемого тезиса.

2) Каждое понятие в указанных условиях и доказываемом тезисе замените определениями и вспомните свойства и признаки определяемых понятий.

3) В условии и доказываемом тезисе четко выделите взаимосвязи и взаимоотношения объектов.

4) Если можно, изобразите на чертеже, рисунке, схеме то, о чем идет речь в условии теоремы.

5) Внимательно прочитав доказываемый тезис, поставьте вопрос: «Какие признаки достаточно установить, чтобы доказать то, что требуется?»

6) Посмотрите, какой из признаков лучше выбрать для утверждения истинности тезиса.

7) Если на чертеже, рисунке, схеме нет фигур или элементов, необходимых для нахождения признаков искомого, то постройте их (сделайте дополнительные построения).

8) В процессе доказательства можно вычленить более простые задачи, аналогичные тем, которые решались ранее.

9) Можно преобразовать доказываемый тезис или заменить его равносильным, если это поможет найти путь доказательства.

10) Одни и те же объекты (о которых идет речь в условии и доказываемом тезисе) включайте в различные системы связей и отношений между ними.

11) Постоянно обращайтесь к чертежу, схеме, рисунку и доказываемому положению, чтобы не упустить чего-нибудь.

Обобщенные правила для логически правильного оформления доказательства

1) Определив путь доказательства, установите самый первый вывод.

2) Определите малую и большую посылки для первого вывода. Первая малая посылка, как правило, определяется из чертежа или условия, содержащегося в доказываемом положении.

3) Постройте первое умозаключение в соответствии с формулой: М есть Р (большая посылка), К есть М (малая посылка), следовательно, К есть Р (умозаключение).

4) Подобным образом постройте второе, третье, четвертое и другие умозаключения.

5) Запомните: в качестве малой посылки каждого последующего умозаключения можно брать предыдущее умозаключение, а также данные чертежа или условия, содержащегося в доказываемом положении.

6) Не забудьте: в качестве большой посылки нужно брать уже известные аксиомы, теоремы, законы, формулы, определения, следствия и пр.

7) Цепь умозаключений нужно прекратить, когда в качестве умозаключения получите доказываемый тезис.

Правила для обобщения доказываемого положения

1) На основе доказанного тезиса и использованной при этом наглядности отделите существенные свойства и связи объектов от несущественных, второстепенных.

2) Выполните два-три варианта чертежа, рисунка или схемы, с помощью которых доказана истинность тезиса.

3) На каждом из этих чертежей, рисунков или схем укажите постоянные свойства и связи объектов и те, которые меняются, варьируются.

4) Укажите возможные направления варьирования чертежа, рисунка, схемы.

5) Определите пределы варьирования несущественных свойств и связей объектов.

6) Обобщив существенные и несущественные особенности чертежа, рисунка, схемы, сделайте соответствующие выводы.

7) Определите те изменения, которые произошли бы при использовании в ходе доказательства одного из вариантов чертежа, рисунка или схемы.

8) Обобщив существенные и несущественные особенности в логических рассуждениях, сделайте соответствующие выводы.

§ 4. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ, ОСНОВАННОЙ НА КОГНИТИВНО-ВИЗУАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

Анализ школьной практики обучения учащихся математике показывает, что основной упор учителя делают на логическое мышление, т. е. на работу левого полушария головного мозга; иначе говоря, в обучении имеет место «левополушарный крен». В результате исследований психологов установлено, что до 80% информации человек получает через зрительный канал. Что же касается математики, то уместно привести здесь слова великого К. Гаусса: «Математика — наука не столько для ушей, сколько для глаз».

Итак, встает проблема, как сделать обучение математике таким, чтобы оно строилось на сбалансированной работе и левого, и правого полушарий головного мозга, т. е. на разумном сочетании логического и наглядно-образного мышления.

Для того чтобы правильно формировать мышление, необходимо представлять себе его психологические механизмы и направления развития. Значительные достижения психологов в этой области связаны с открытием межполушарной ассимметрией мозга.

Открытие межполушарной функциональной асимметрии мозга по своей значимости в физиологии и психологии можно сравнить с открытием деления ядра в физике. Это открытие началось с работы американского исследователя Р. Сперри (ныне — нобелевский лауреат), который провел смелую операцию над больным, страдающим эпилепсией. Он рассек все основные связи, соединяющие полушария у больного (конечно, это было предпринято не в научных целях, а для помощи больному).

Эти и другие наблюдения Р. Сперри и его последователей позволили установить особенности работы левого и правого полушарий мозга человека.

Работа левого полушария позволяет человеку понимать как письменную, так и устную речь, давать грамматически правильные ответы, манипулировать строго формализованными знаками, свободно оперировать цифрами и математическими формулами. Но, как показали исследования психологов, левое полушарие в отличие от правого не способствует различению интонаций речи и модуляций голоса, оно нечувствительно к музыке. Работа одного лишь левого полушария не обеспечивает эстетическое восприятие произведений искусства. Правое полушарие является носителем неосознаваемых творческих потенций человека.

Исследования психологов показали, что при выполнении заданий, требующих аналитического подхода, при совершении простых арифметических операций происходит активизация левого полушария (об этом судят по изменениям электрической активности мозга).

Приведенные выше и другие факты позволили психологам на первых этапах исследования сделать предположение, что левое полушарие специализировано на оперировании словами и другими условными знаками, а правое — на оперировании образами реальных предметов, а также отвечает за ориентацию в пространстве и эмоциональное состояние.

При чтении технических, математических текстов больше активизируется работа левого полушария, а при чтении художественных — правого.

Психологи выявили пять основных дихотомий полушарного доминирования у человека: вербальное — невербальное, время — пространство, анализ — синтез, последовательное и одновременное восприятие, абстрактное и конкретное восприятие.

Н. Н. Брагина, Т. А. Доброхотова различают три группы функциональных асимметрий полушарий мозга человека:

— моторная асимметрия: неодинаковость двигательной активности рук, ног, лица, половины тела;

— сенсорная асимметрия: неравнозначность восприятия объектов, расположенных слева и справа от средней плоскости тела;

— психологическая асимметрия.

А. И. Захаров [67] отмечает, что у каждого третьего человека вообще нет преобладания особенностей работы одного из полушарий. У остальных людей можно говорить об относительно большей функциональной активности того или иного полушария.

С целью выявления типа мышления учащимся можно предложить, например, четыре задачи, каждая из которых может быть решена либо аналитически, либо геометрически. Задания могут быть такими:

а) найти, сколько весит кирпич, если он весит 1 кг плюс полкирпича;

б) решить неравенство $x > \sqrt{x}$;

в) сторону квадрата увеличили на 3 см, после чего его площадь увеличилась на 39 см^2. Найти сторону нового квадрата;

г) известно, что $a^2 + b^2 = c^2$ и a, b, $c > 0$. Определить зависимость между a, b и c?

Задание а) мы разберем ниже, а здесь прокомментируем аналитическое и геометрическое решение заданий б), в), г).

б) Решить неравенство $x > \sqrt{x}$.

Аналитическое решение

$$x > \sqrt{x}; \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 > x; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x(x-1) > 0; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 0;\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $x > 1$.

Геометрическое решение

Построим в одной системе координат графики функций (рис. 262).

Эти графики пересекаются в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 1$, и видно, что на промежутке $(1;\ +\infty)$ график функции $y = x$ выше графика функции $y = \sqrt{x}$, следовательно, этот промежуток и является решением данного неравенства.

в) Сторону квадрата увеличили на 3 см, после чего его площадь увеличилась на 39 см^2. Найти сторону нового квадрата.

Аналитическое решение

Пусть x см — длина стороны первоначального квадрата, тогда $(x+3)$ см — длина стороны второго квадрата. По условию задачи составим такое уравнение:

$$(x+3)^2 - x^2 = 39;$$
$$x^2 + 6x + 9 - x^2 = 39;$$
$$6x = 30;$$
$$x = 5.$$

Ответ: сторона нового квадрата равна 8 см.

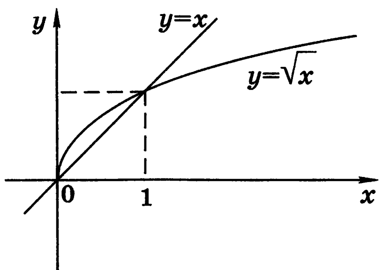


Рис. 262

Геометрическое решение

Построим чертеж по условию задачи (рис. 263).

Сторона квадрата $CMNO$ равна 3 см, а значит, его площадь равна 9 см^2. Значит, на два прямоугольника $BKMC$ и $DCOE$ приходится 30 см^2, а на каждый — по 15 см^2. Сторона ED прямоугольника $DCOE$ равна 3 см, а значит, сторона EO равна $15:3=5$ (см). Следовательно, сторона нового квадрата равна 8 см.

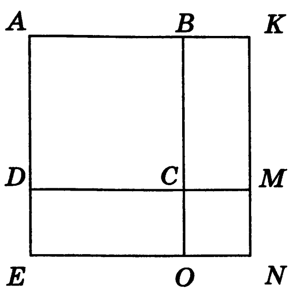


Рис. 263

г) Известно, что $a^2+b^2=c^2$ и a, b, $c>0$. Определить зависимости между a, b и c.

Аналитическое решение

$$a^2+b^2=c^2;\ a^2+b^2+2ab=c^2+2ab;\ (a+b)^2>c^2;\ a+b>c.$$

Геометрическое решение

На параметры a, b, c можно посмотреть как на стороны прямоугольного треугольника, откуда следует, что $a+b>c$.

Среди «левополушарных» много инженеров, математиков, философов, лингвистов, представителей теоретических дисциплин. Среди «правополушарных» много художников, артистов, музыкантов.

Интерес представляют работы психологов, направленные на изучение особенностей мышления в связи с деятельностью правого и левого полушарий мозга. Так, например, В. С. Ротенберг пишет: «Преобладающее развитие функций того или иного полушария оказывает огромное влияние на склад ума человека и «несет ответственность» за то, что люди делятся на «художников» и «мыслителей», «физиков» и «лириков», «теоретиков» и «практиков» [116].

Школьники, как и все люди вообще, мыслят по-разному: у одних абстрактное, словесно-логическое мышление преобладает над образным, у других преобладает образное мышление, у третьих образные и абстрактные компоненты мышления находятся в относительном равновесии.

Значительное большинство людей обладает мышлением, основные компоненты которого развиты относительно равномерно. У меньшинства (примерно у 21% людей) один вид мышления резко преобладает над другим.

В. С. Ротенберг, выделяя аналитический и наглядно-образный склады мышления, отмечает особенности учебной деятельности так называемых аналитиков и геометров.

Аналитики страдают там, где успешность работы зависит от развития воображения. Они легче рассуждают, чем действуют, легче объясняют, как надо решать задачу, чем решают ее.

Трудности для геометров начинаются там, где им приходится работать без наглядной опоры. Даже когда их деятельность протекает в уме, она нуждается в опоре на образы, на работу представления и воображения. Геометры значительно лучше себя чувствуют при работе со зрительным материалом, чем со словесно-логическим. Словесное объяснение задач они понимают хуже, чем рисунок или чертеж. Действуя правильно практически, такие ученики испытывают затруднения при необходимости дать теоретические обоснования своим действиям.

В. С. Ротенберг отмечает, что «нередко наше обучение, забираясь в самые отдаленные отвлеченности, попросту не адресуется к образному мышлению по познавательным возможностям и тем самым создает большие затруднения у учащихся. Трудности мышления, оторванного от образной основы, вполне естественны: образ — это не просто подножка теоретической мысли, это ее необходимая составная часть. Мышление, лишенное элементов образности, рискует стать сухим, формальным. Обучение, совсем не адресованное к образному мышлению, не только не способствует его развитию, но и в конечном счете подавляет его. Отсутствие опоры на образную сторону учебного материала не просто затрудняет обучение, а подчас придает ему мучительный характер, приводит к конфликту между образно мыслящим учеником и «сухой», скучной учебной работой» [116].

В. А. Крутецкий [79] в своих исследованиях выделяет следующие типы мышления: аналитический, геометрический и гармонический, сравнительная характеристика которых представлена в таблице 15.

Таблица 15

Характеристика типов	Аналитический тип	Геометрический тип	Гармонический тип
Развитие словесно-логического компонента	Очень сильный	Выше среднего	Сильный
Развитие наглядно-образного компонента	Слабый	Очень сильный	Сильный
Соотношение компонентов	Преобладание словесно-логического	Преобладание наглядно-образного	Равновесие
Пространственные представления	Слабые	Очень сильные	Хорошие
Использование в решении наглядных опор	Не может и не испытывает нужду	Может и испытывает нужду	Может

Мышление представителей аналитического типа характеризуется явным преобладанием очень хорошо развитого словесно-логического компонента над слабым наглядно-образным. Они легко оперируют отвлеченными схемами, у них нет потребности в наглядных опорах, в использовании предметной и схематической наглядности при решении задач.

Представители аналитического типа успешно решают задачи, выраженные в абстрактной форме, задачи же, выраженные в наглядно-образной форме, стараются по возможности перево-

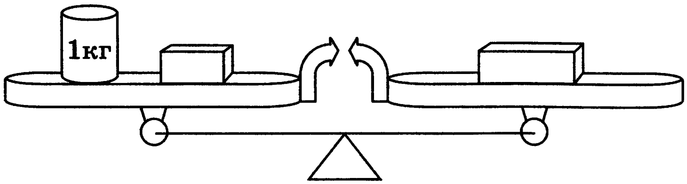


Рис. 264

дить в абстрактный план. Например, при решении задачи «Сколько весит кирпич, если он весит 1 кг плюс полкирпича?» школьники с аналитическим типом мышления вводят неизвестное и решают уравнение $x = 1 + \frac{x}{2}$, где через x обозначен вес кирпича. Если же представить условие задачи наглядно, то она решается элементарно просто. Действительно, изобразив весы (рис. 264), на одной чашке которых лежит кирпич, а на другой — гиря весом 1 кг и полкирпича, сразу видно, что, убрав с двух чашек по полкирпича, полкирпича весит 1 кг, а значит, кирпич — 2 кг.

Мышление представителей геометрического типа характеризуется очень хорошо развитым наглядно-образным компонентом. Эти учащиеся испытывают потребность в наглядной интерпретации выражения абстрактных математических отношений и зависимостей. Они упорно пытаются оперировать наглядными схемами, образами и представлениями даже там, где задача легко решается рассуждением, а использование наглядных опор излишне или затруднительно.

Гармонический тип характеризуется относительным равновесием хорошо развитых словесно-логического и наглядно-образного компонентов. Оперируя наглядными образами, эти учащиеся четко осознают, что содержание обобщения не исчерпывается частными случаями. Успешно осуществляют они и аналитический, и образно-геометрический подход к решению многих задач.

Учитель, знающий специфику работы левого и правого полушарий, способен более эффективно организовывать учебный процесс, ибо он имеет возможность умело управлять как наглядно-образным, так и словесно-логическим мышлением.

Заметим, что проводить резкой границы между людьми, у которых доминирует левое или правое полушарие, нельзя, так как можно выделить лишь относительное преобладание особенностей работы того или иного полушария.

В настоящее время широкое распространение получил термин «визуальное мышление», т. е. зрительное, наглядное, означающее, как пишет Р. Артхейм, «мышление посредством визуальных (зрительных) операций» (Arnheim R. Visual thinking.— Berkley: Univ. of California Press, 1969).

В. П. Зинченко так определяет понятие визуального мышления: «Визуальное мышление — это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определенную смысловую нагрузку и делающих знание видимым» [18, с. 4].

Человеческое познание базируется на двух механизмах мышления (Д. А. Поспелов): символическом и геометрическом. В настоящее время в системе школьного математического образования приоритет отдан символическому механизму мышления, или, как его называет М. А. Чошанов, «левополушарному крену». По его мнению, лишь «сочетание двух способов представления информации (в виде последовательности символов и в виде картин-образов), умение работать с ними и соотносить оба способа представления друг с другом обеспечивают сам феномен человеческого мышления» (Чошанов М. А. Визуальная математика/М. А. Чошанов.— Казань: Абак, 1997).

Основой принципа визуализации служит когнитивная графика, цель которой состоит в создании комбинированных когнитивных моделей представления знаний, которые сочетают в себе символический и геометрический способы мышления и способствуют активизации процессов познания. Но использование визуальной информации не должно приводить к другой крайности — «правополушарному крену», следует также использовать вербальную информацию; оптимальным является разумное сочетание обоих способов представления информации в процессе обучения: и визуального, и вербального. Приведем примеры такого сочетания.

1) Укажите промежутки возрастания и убывания для функций, графики которых изображены на рисунке 265.

2) По графику функции $f(x)$ (рис. 266) укажите как можно больше характерных свойств этой функции.

Ответ: функция задана для всех $x \in R$, кроме $x=a$, $x=0$; область изменения функции есть все действительные числа; функция имеет две вертикальные асимптоты $x=a$, $x=0$ и одну наклонную асимптоту $y=kx$; функция общего вида; функция непериодична; функция всюду непрерывна, кроме точек $x=a$, $x=0$; на промежутках $x<c$ и $0<x<d$ функция имеет отрицательные значения, а на промежутках $c<x<a$, $a<x<b$, $b<x<0$, $x>d$ функция имеет положительные значения, при $x=c$, $x=b$, $x=d$ значения функции равны нулю; на промежутках $x<a$ и $a<x<0$ функция вогнута, а на промежутке $x>0$ функция выпукла; на промежутках $x<a$, $b<x<0$, $x>0$ функция возрастает, а на промежутке $a<x<b$ функция убывает; функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения; вид графика позволяет предположить, что на прямой $y=kx$ существует точка, относительно которой части графика, заданные соответственно для $x<a$, $x>0$, центрально-симметричны, и т. д.

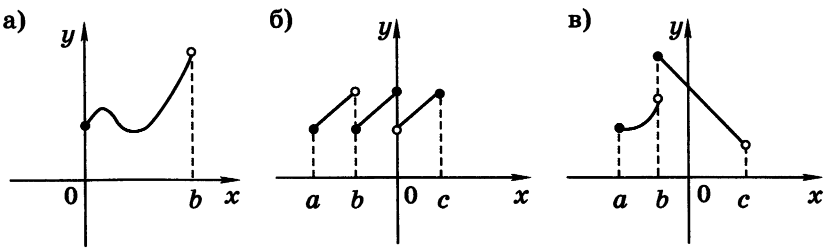


Рис. 265

3) В чем вы видите различия и в чем сходства в поведении функций, графики которых изображены на рисунке 267?

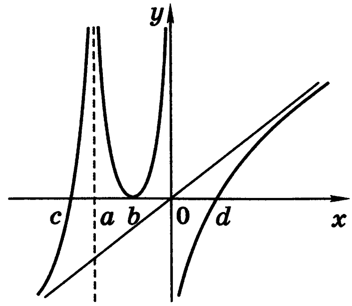


Рис. 266

Различия:

Функция, изображенная графиком а), не всюду дифференцируема, а функция, изображенная графиком б), всюду дифференцируема; первая функция не имеет точек перегиба, а вторая имеет две точки перегиба; первая функция для всех $x<0$ имеет отрицательную вторую производную, у второй функции вторая производная для $x<0$ не всюду положительна (та же разница и для $x>0$); вторая производная первой функции нигде не равна нулю, а вторая производная второй функции обращается в нуль в двух точках; график первой функции лежит по одну сторону от касательных, проведенных во всех точках графика, вторая же функция этим свойством не обладает; первая функция не имеет в точке минимума производную, а вторая функция в точке минимума имеет производную, равную нулю; для первой функции нет точек, в которых бы ее производная была равна нулю, а для второй функции такая точка есть — это $x=0$ и т. д.

Сходства:

Обе функции определены для всех $x \in \boldsymbol{R}$; множеством значений обеих функций является промежуток $[0; 2)$; графики обеих функций имеют горизонтальную асимптоту $y=2$; касательные, проведенные к графикам обеих функций в точках с отрицательной абсциссой, образуют с положительным направлением оси Ox тупой угол; касательные, проведенные к графикам обеих функций в точках с положительной абсциссой, образуют с положительным направлением оси Ox острый угол; обе функции на промежутке $x>0$ возрастают, а на промежутке $x<0$ убывают; обе функции при $x=0$ имеют значение $y=0$; обе функции имеют по одной точке минимума; обе функции достигают своего наименьшего значения, но не достигают своего наибольшего значения и т. д.

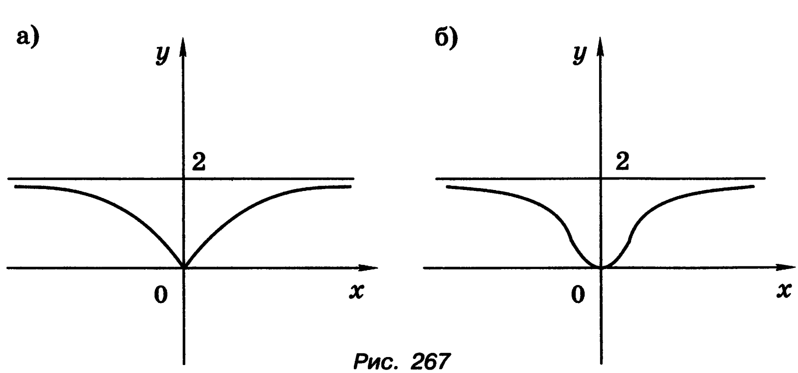


Рис. 267

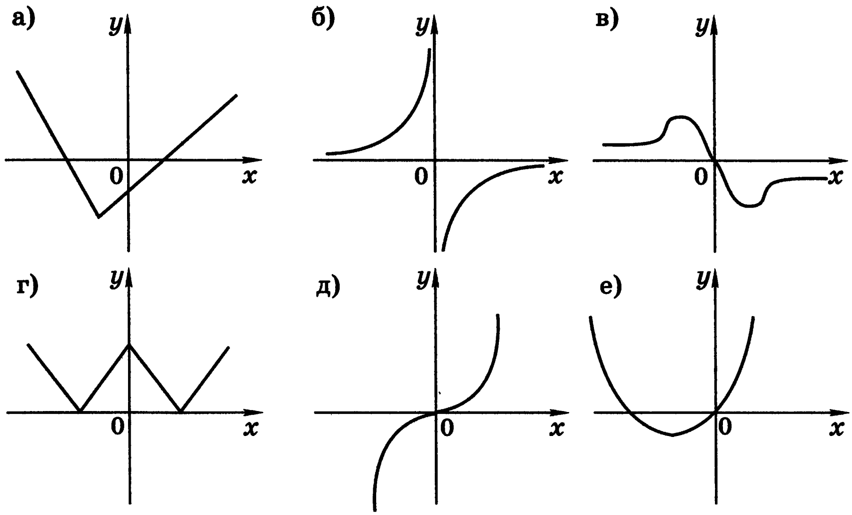


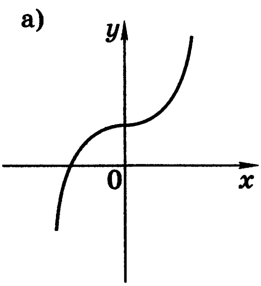
Рис. 268

4) Постройте график функции, область определения которой есть отрезок [0; 7], а область значений — [−3; 3].

5) Разбейте графики функций, изображенные на рисунке 268, на три класса так, чтобы графики а), б), в) оказались в разных классах. Опишите признаки, положенные в основу классификации.

Прежде чем давать ответ к этой задаче, приведем план, по которому мы будем проводить классификацию:

а) выделение свойств графиков;



б) установление общих и существенных свойств;

в) выбор одного из существенных свойств в качестве основания для сравнения;

г) сопоставление графиков по выбранному основанию.

Ответ: а) и е) — они кусочно-монотонны; б) и д) — они всюду возрастают; в) и г) — они имеют наименьшее значение.

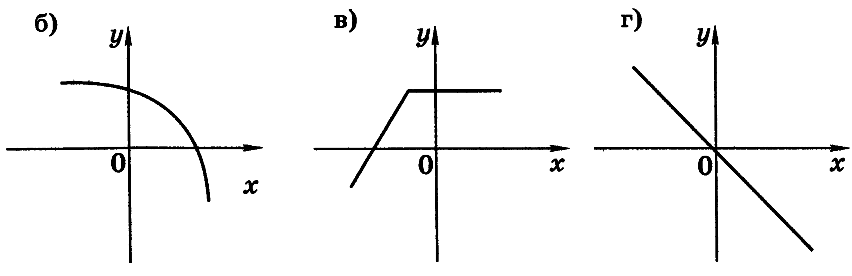


Рис. 269

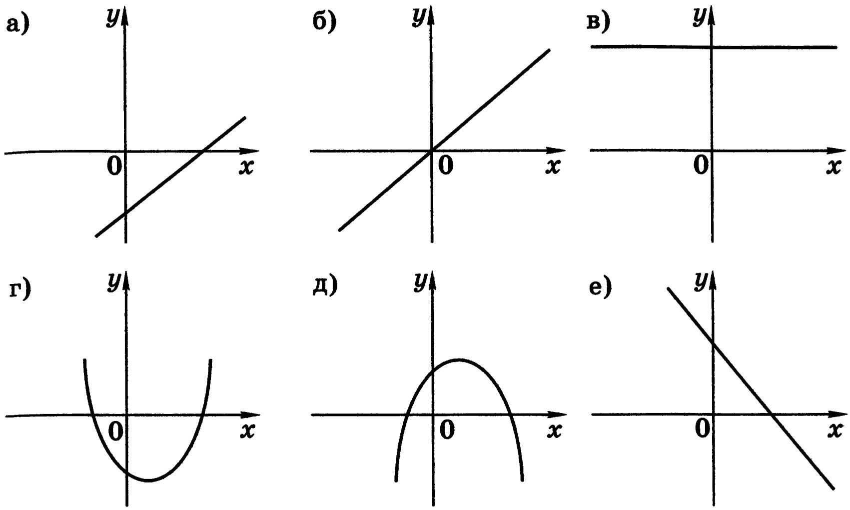


Рис. 270

6) Среди функций, графики которых изображены на рисунке 269, укажите обратимые функции.

Прежде чем давать ответ к этой задаче, напомним теорему об обратной функции: «Если функция $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает (убывает) на промежутке J, то множество ее значений есть некоторый промежуток G. На этом промежутке G существует функция $g(x)$, обратная функции $f(x)$ и обладающая следующими свойствами: функция $g(x)$ непрерывна на промежутке G; если $f(x)$ возрастает на промежутке J, то $g(x)$ возрастает на промежутке G; если $f(x)$ убывает на промежутке J, то $g(x)$ убывает на промежутке G».

Ответ: обратимы функции, заданные графиками а), б), г).

7) На рисунке 270 изображены шесть графиков. Объедините их в пары «функция — производная».

Ответ: г) — а), б) — в), д) — е).

8) По графику функции $y=f(x)$, изображенному на рисунке 271, нарисуйте примерный вид графика производной $y=f'(x)$. Ответ к задаче показан на рисунке 272.

9) По графику производной $y=f'(x)$ (рис. 273) восстановите график функции $y=f(x)$. Ответ показан на рисунке 274.

Чтобы верно сориентировать учащихся в выполнении заданий, подобных задачам 8 и 9, отметим следующее: на графике производной точка перегиба на графике функции становится точкой минимума в том случае, если точка перегиба меняла выпуклость на вогнутость, и становится точкой

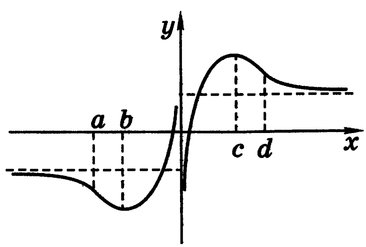


Рис. 271

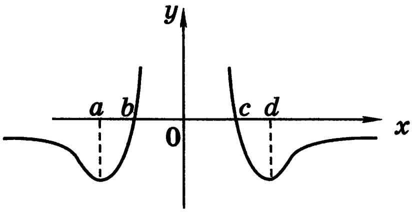


Рис. 272

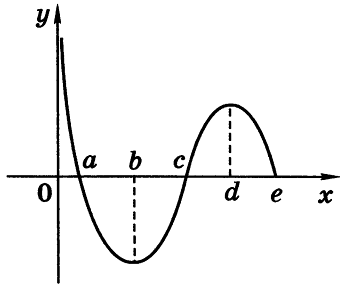


Рис. 273

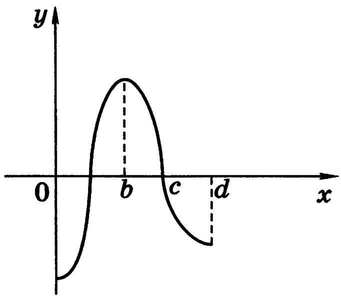


Рис. 274

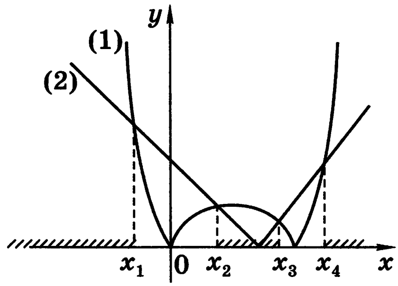


Рис. 275

максимума, если она меняла вогнутость на выпуклость; точка максимума или минимума (в том случае, когда производная в этих точках равна нулю) на графике функции становится на графике производной точкой пересечения оси Ox; промежуток, на котором функция возрастала, становится для графика производной промежутком, на котором график выше оси Ox; промежуток, на котором функция убывала, становится для графика производной промежутком, на котором график ниже оси Ox.

10) Опишите, что вы видите на рисунке 275.

Возможные варианты ответа:

а) Заданы графики двух функций.

б) Как функция (1), так и функция (2) имеют соответственно вид $y=|f(x)|$ и $y=|\varphi(x)|$.

в) Видимо, функция $y=f(x)$ есть квадратичная функция с положительным первым коэффициентом и вершиной, лежащей ниже оси Ox, или это квадратичная функция с отрицательным первым коэффициентом и вершиной, лежащей выше оси Ox.

г) Функция $y=\varphi(x)$ есть функция $y=kx+b$ с коэффициентом либо $k>0$, либо $k<0$.

д) Графически решалось неравенство $|f(x)|\geqslant|\varphi(x)|$.

е) На рисунке отмечено штриховкой решение неравенства $|f(x)|\geqslant|\varphi(x)|$.

ж) Решением неравенства $|f(x)|\geqslant|\varphi(x)|$ является множество $(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ x_3]\cup[x_4;\ +\infty)$.

11) Расставьте символы умножения в выражении

$$\frac{\operatorname{tg}(x+y)a^{xy}}{\sin x \cos y} \log_2(x-y).$$

12) Найдите одинаковые элементы и, осуществив их замену буквой a, запишите выражение $\dfrac{\lg^{-2} x+\sqrt{\lg x}}{\log_{10} x-\lg\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)}$.

13) Продолжите серию:

$$f(x)=x^2+\sin x+\frac{1}{x}, \qquad f(2)=2^2+\sin 2+\frac{1}{2},$$

$$f(-x)=\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad f(3x+1)=\ldots\ldots\ldots, \qquad f(\cos x)=\ldots\ldots\ldots\ .$$

Для того чтобы воспитать «математическое зрение», нужно систематически, целенаправленно заботиться об организации зрительной информации, о формировании визуальных математических понятий, которые по своему объему, степени обобщенности адекватны вербальным, словесно выраженным понятиям.

Как показал эксперимент, эффективным средством обучения учащихся доказательству различных математических предложений является наглядность.

Попытки визуализировать математику, сделать ее более наглядной предпринимались уже давно. Еще древние математики пытались самые элементарные алгебраические тождества и теоремы представлять в геометрическом виде. Позже сторонниками разумной визуализации математики выступали такие выдающиеся ученые, как Леонард Эйлер, Бернхард Риман, Давид Гильберт.

Приведем примеры, на которых мы проиллюстрируем когнитивно-визуальные доказательства различных математических предложений.

Задача 1. Доказать, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx+\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx=\frac{\pi}{2}$.

Доказательство приведено на рисунке 276.

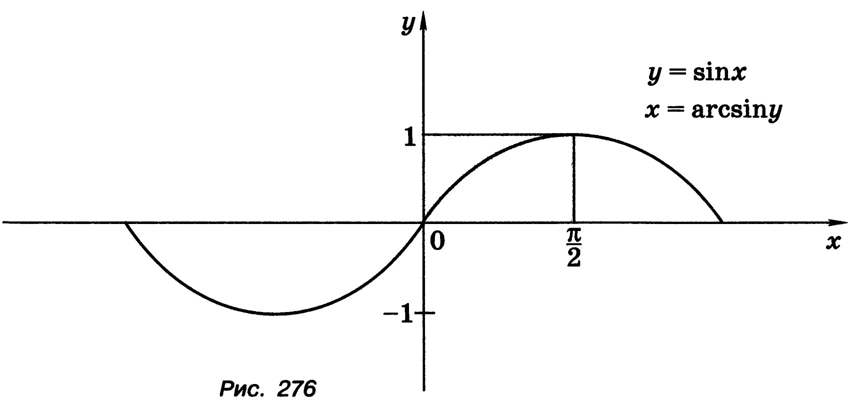


Рис. 276

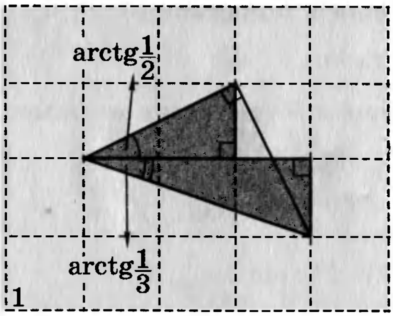


Рис. 277

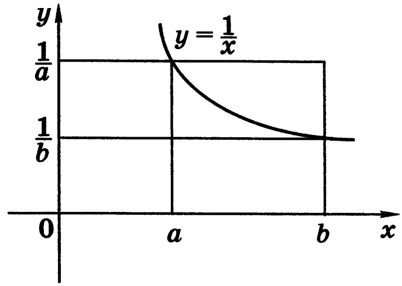
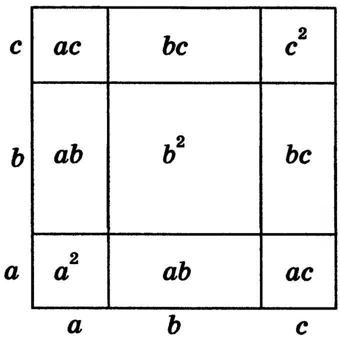
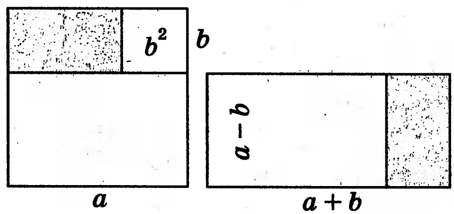


Рис. 278



◀ Рис. 279

Рис. 280 ▼



Задача 2. Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=45°$.

Доказательство приведено на рисунке 277.

Задача 3. Доказать неравенство $\frac{b-a}{b}<\int\limits_a^b\frac{dx}{x}<\frac{b-a}{a}$.

Доказательство приведено на рисунке 278.

Задача 4. Доказать: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

Доказательство приведено на рисунке 279.

Задача 5. Доказать: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Доказательство приведено на рисунке 280.

Задача 6. Решить уравнение $4x^2+8x-5=0$.

Решение (рис. 281):

$$4x^2+8x-5=0 \Rightarrow x^2+2x=\frac{5}{4};$$

$$x^2+2x+1=\frac{5}{4}+1,\ (x+1)^2=\frac{9}{4};$$

$$x_{1,2}=-1\pm\frac{3}{2},\ x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{5}{2}.$$

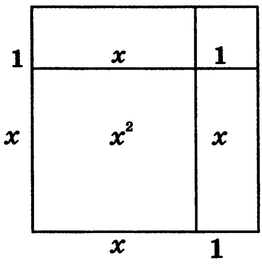


Рис. 281

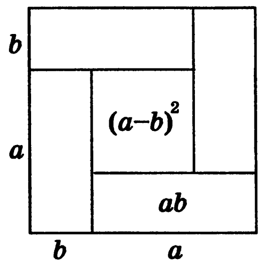


Рис. 282

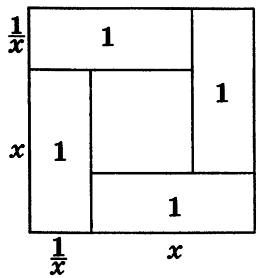


Рис. 283

Задача 7. Доказать неравенство $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Доказательство (рис. 282):

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab, \quad a+b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Задача 8. Доказать неравенство $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$ $(x \geqslant 1)$.

Доказательство (рис. 283): $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geqslant 4$, $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$.

Задача 9. Доказать неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ $(a, b, c, d > 0)$.

Доказательство (рис. 284):

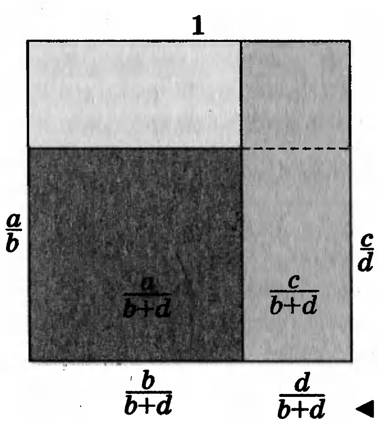
$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} < \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Задача 10. Вывести формулу $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$.

Доказательство (рис. 285):

$$R=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin z=c, \ \sin x=a, \ \sin y=b, \ c=a\cos y+b\cos x;$$

$$\sin(x+y)=\sin(180^\circ-(x+y))=\sin z=\sin x\cos y+\sin y\cos x.$$



◀ *Рис. 284*

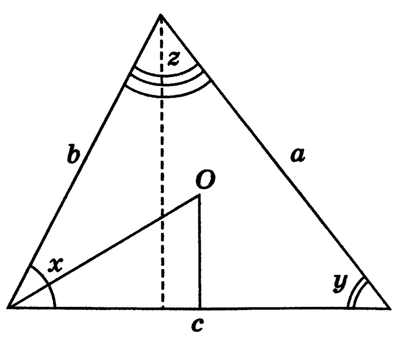


Рис. 285

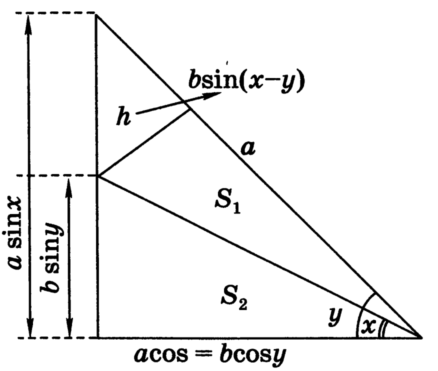


Рис. 286

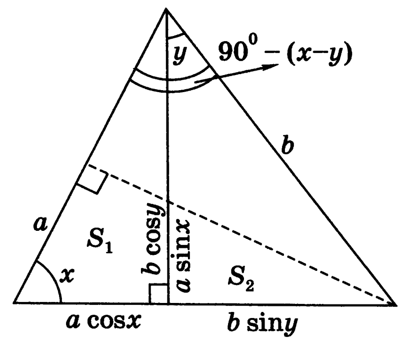


Рис. 287

Задача 11. Вывести формулу $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$.

Доказательство (рис. 286):

$$S=S_1+S_2,\ S_1=S-S_2,\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x.$$

Задача 12. Вывести формулу $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$. Доказательство приведено на рисунке 287.

Задача 13. Вывести формулы $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

Доказательство приведено на рисунке 288.

Задача 14. Вывести формулы

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x=2\cos^2-1.$$

Доказательство (рис. 289):

$$\triangle ADC \backsim \triangle ACB,$$

$$\frac{CD}{AC}=\frac{BC}{AB},\quad \frac{\sin 2x}{2\cos x}=\frac{2\sin x}{2},$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

$$\triangle ADC \backsim \triangle ACB,\ \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},$$

$$\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{2\cos x}{2},$$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1.$$

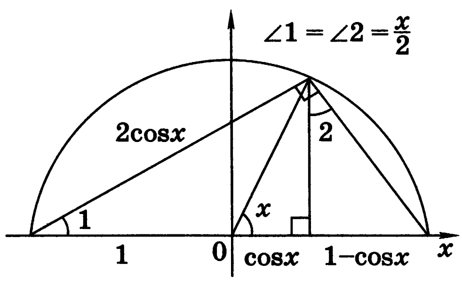


Рис. 288

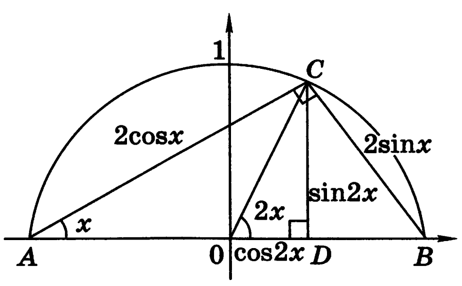
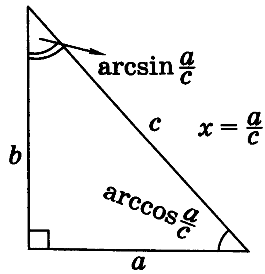


Рис. 289

Рис. 290



Задача 15. Доказать тождество $\arcsin x + \arccos x = 90°$.

Доказательство приведено на рисунке 290.

§ 5. ЗАКРЕПЛЕНИЕ ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМЫ И ЕЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Закрепление теоремы осуществляется в два этапа: на уроке, где эта теорема изучается, и на последующих уроках. Закрепление теоремы сводится к повторению ее формулировки и доказательства, к формированию у учащихся умений и навыков по применению теоремы к решению задач.

Сразу же заметим, что способность ученика воспроизводить доказательство теоремы не всегда означает, что это доказательство усвоено им сознательно. Здесь налицо разница в «усвоении доказательства» и в «запоминании доказательства».

Укажем некоторые условия, обеспечивающие успешное запоминание учащимися теорем и их доказательств.

1) Установка на запоминание.

2) Запоминаемый материал — объект деятельности ученика.

3) Смысловая группировка учебного материала.

4) Эффективная организация повторения, распределенного во времени.

5) Развитие памяти ученика.

6) Эмоциональная окраска изучаемого материала.

7) Мотивация изучаемого материала путем показа его практического применения.

Покажем приемы, которые может использовать учитель для закрепления теорем и их доказательств.

Прием 1. После объяснения доказательства теоремы учителем один или несколько учащихся повторяют его, а остальные слушают.

Проведенное нами анкетирование учащихся показало, что если учителем не организовано активное прослушивание ответа товарища, то лишь 17,8% школьников слушают ответ, остальные в это время думают о посторонних вещах.

Прием 2. Учитель предлагает учащимся несколько вопросов, ответы на которые позволят повторить узловые части теоремы.

Для закрепления, например, теоремы о площади правильного многоугольника вопросы могут быть такие:

1) Как читается теорема о площади правильного многоугольника?

2) Как строится апофема в правильном многоугольнике?

3) Каким образом мы разбиваем правильный многоугольник на равные треугольники?

4) Чему равна площадь треугольника?

5) Как найти периметр правильного многоугольника?

6) Какие элементы правильного многоугольника нужно знать для нахождения его площади?

Прием 3. Ученикам предлагается по ходу доказательства теоремы, которое проводит учитель или с которым они знакомятся самостоятельно по учебнику, составить план доказательства.

Прием 4. После изучения теоремы учащиеся сразу приступают к решению задач, а в конце урока, при подведении итогов, возвращаются к теореме (вспоминают ее формулировку, основные этапы доказательства и т. д.).

Прием 5. На уроке можно организовать такую работу, которая бы заменила проработку теоремы дома.

Для этого учитель записывает на доске вопросы, адресованные учащимся, по изученной теореме. Школьникам предлагается:

— прочитать доказательство теоремы по учебнику;
— подготовиться отвечать на вопросы, записанные на доске;
— помочь подготовиться своему соседу по парте;
— ответить соседу по парте на поставленные вопросы и выслушать его ответы на них, исправляя возможные ошибки;
— сообщить учителю о готовности своей и соседа отвечать на вопросы.

Ученики, первыми подготовившие ответы на вопросы, отвечают учителю. Те из них, кто хорошо ответил на вопросы, назначаются ассистентами и по указанию учителя опрашивают других учащихся. Заметим, что целесообразно для такой работы в пары организовывать учащихся, приблизительно равных по уровню подготовленности и по скорости работы. Школьникам, выполнившим работу, следует предложить дополнительные задания.

Прием 6. На доске или на пленке для кодоскопа заранее готовится запись доказательства теоремы в виде одних лишь выводов, без соответствующей аргументации каждого из них. Учащимся предлагается привести бóльшую и меньшую посылки для каждого вывода.

В качестве примера приведем доказательство первого признака подобия треугольников из курса геометрии 8 класса [30].

Теорема: «Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны».

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 291), $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

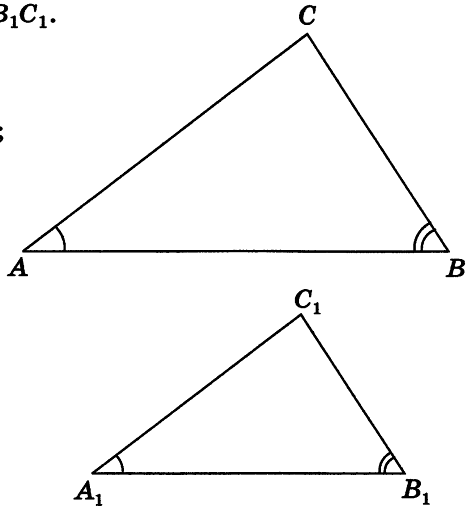


Рис. 291

<u>Доказательство</u>

1) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$;

2) $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$;

3) $\angle C = \angle C_1$;

4) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$;

5) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$;

6) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{CB \cdot AB}{C_1B_1 \cdot A_1B_1}$;

7) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$;

8) $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$;

9) $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Прием 7. Слабоуспевающие учащиеся могут отработать доказательство теоремы, используя тетрадь с печатной основой (рабочую тетрадь).

Приведем в качестве примера образец записи в такой тетради доказательства теоремы: «Если в треугольнике ABC медиана BD является высотой, то треугольник ABC — равнобедренный».

<u>Доказательство</u>

Пусть в ΔABC (рис. 292) BD — медиана и ______________. Так как BD — медиана, то ______________ = ______________. Так как BD — высота, то ______________ = ______________. Значит, в ΔABD и ΔBCD $AD =$ ______________; BD — ______________ сторона; $\angle BDA =$ ______________. Значит, по ___________ признаку ___________ $\Delta ABD =$ = ___________. Отсюда $AB =$ ___________, а это означает, что ΔABC — ___________.

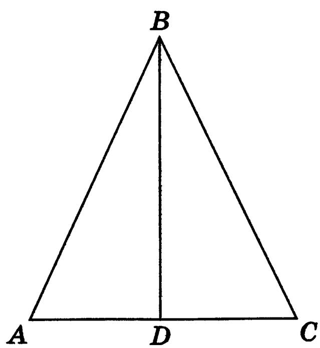


Рис. 292

В качестве еще одного примера рассмотрим теорему из курса геометрии 8 класса [30].

Теорема: «В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°».

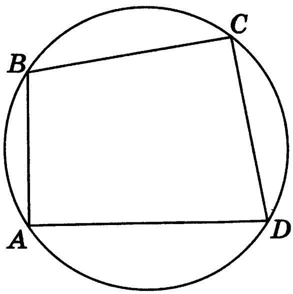


Рис. 293

Дано: $ABCD$ — вписанный в окружность четырехугольник (рис. 293).

Доказать: $\angle A+\angle C=180°$, $\angle B+\angle D=180°$.

Доказательство

$\angle A$ ____________ и опирается на дугу ____________, поэтому он измеряется ____________ дуги ____________.

$\angle C$ ____________ и опирается на дугу ____________, поэтому он измеряется половиной ____________. Следовательно, $\angle A+\angle C=\frac{1}{2}$ (____________). Но $\smile BCD+\smile DAB=$ ____________, значит, $\angle A+\angle C=$ $=$ ____________. (Аналогично доказывается равенство $\angle B+$ $+\angle D=180°$.)

Прием 8. Проработка доказательства теоремы по учебнику дома.

Отметим, каким должен быть общий подход к выполнению домашних заданий по учебнику геометрии.

1. Воспроизведение материала, изученного в школе:

а) вспомнить главное из того, что изучалось на уроке;

б) сделать по памяти чертеж и записи.

2. Восприятие изучаемого материала по учебнику:

а) прочитать весь текст в целом, сделать чертеж и сравнить его с чертежом из учебника;

б) разделить изучаемый пункт на смысловые части;

в) выделить в каждой части основную мысль и записать;

г) вспомнить тот материал, на который делаются ссылки;

д) выборочно прочитать наиболее трудные места, постараться осмысленно усвоить их.

3. Повторное воспроизведение изучаемого материала:

а) по выполненному чертежу и записям воспроизвести вслух изученное, отвечая на вопросы плана;

б) выучить формулировки, запомнить обозначения;

в) наметить схему будущего ответа.

4. Творческая деятельность учащихся в связи с изучением материала:

а) доказать теорему или воспроизвести текст (или его часть) при другом расположении чертежа и других обозначениях;

б) увидеть и выделить частные случаи;

в) попытаться обосновать выделенные частные случаи;

г) попытаться найти другой способ доказательства или вывода;

д) связать изучаемое с уже известным.

Организуя закрепление теоремы, учитель должен знать об основных формах реконструкции воспроизводимого учащимися материала, в том числе и доказательства теорем. Формы реконструкций могут быть такими:

— конкретизация и детализация того, что дано в более общем или сжатом виде;
— обобщение того, что в подлиннике дано в конкретной, развернутой, детализированной форме;
— замена одного содержания другим, неравнозначным по смыслу, а также по степени общности и детализации;
— смешение или перемещение отдельных частей подлинника;
— объединение того, что дано отдельно друг от друга, и разъединение того, что в оригинале связано между собой;
— дополнения, выходящие за пределы подлинника;
— искажение смыслового содержания оригинала в целом, равно как и его отдельных частей.

Подобные формы реконструкции доказательства теорем учитель может заранее предвидеть, если будет вести учет достижения каждым учащимся обязательных результатов обучения.

Мы привели несколько приемов закрепления теорем, и учитель вправе выбрать тот из них, который в данный момент будет наиболее эффективен, но подчеркнем еще раз, что основным средством закрепления теорем является их применение к решению задач. Именно в этом учащиеся испытывают большие трудности. Задачи, к которым приложима отрабатываемая теорема, должны быть разнообразны как по содержанию, так и по методам решения.

На первых этапах отработки теоремы учащимся следует предлагать алгоритмические задачи, решение которых предполагает непосредственное применение теоремы, правила, формулы, определения понятия. Например, в теме «Площади многоугольников» к алгоритмической задаче следует отнести такую: «Вычислить площадь трапеции, если ее основания равны 3 см, 6 см, а высота — 2 см».

Затем для отработки теоремы учащимся должны быть предложены задачи полуалгоритмического и эвристического характера. Приведем примеры таких задач по указанной выше теме.

Полуалгоритмическая задача: «Тупой угол в равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведенная из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Вычислить площадь трапеции». (Обобщенным правилом поиска решения таких задач является аналитико-синтетический метод.)

Эвристическая задача: «Доказать, что стороны треугольника пропорциональны его высотам». (В этой задаче эвристика достигнута за счет того, что ни в условии, ни в заключении не идет речь о площади, но для ее решения целесообразно привлечь понятие площади.)

Эвристической будет и такая задача: «Стороны треугольника равны 4, 5, 6. Найти высоту h, проведенную к стороне длины 6».

Решение последней задачи может быть следующим. По формуле Герона имеем $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$. Но $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h$. Следовательно, $3h = \frac{15\sqrt{7}}{4}$, $h = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Для закрепления теоремы полезны **задачи, имеющие прикладной характер**. Так, например, для отработки *признаков подобия треугольников* полезно предложить такие задачи.

Задача 1. Земельный участок имеет форму треугольника со сторонами 50, 60 и 70 м, а соответствующие стороны на плане равны 5, 6 и 7,5 см. Верно ли начерчен план?

Задача 2. Треугольник рассматривается через линзу, дающую увеличение в три раза. Во сколько раз увеличатся углы треугольника?

Задача 3. У треугольного участка земли измерили длины двух его сторон и величину одного угла. Достаточно ли это для того, чтобы начертить план участка?

Приведем для примера еще две задачи прикладного характера, решение которых требует применения других теорем.

Задача 4. Земельный участок, имеющий форму трапеции, отдан под спортивный городок. Какие размеры должен снять землемер, чтобы начертить план этого участка?

Задача 5. Одна из вершин земельного участка треугольной формы недоступна. Как измерить периметр этого участка, используя свойство средней линии треугольника?

Еще пример. Для закрепления *действий над векторами* полезными окажутся такие задачи.

Задача 1. Почему пешеход в безветренную дождливую погоду наклоняет зонтик вперед, хотя дождь падает отвесно?

Задача 2. Почему дождевые полосы на окнах вагонов двух встречных поездов имеют различные направления?

Задача 3. Человек, стоящий на берегу реки шириной 1 км, хочет переправиться на другой берег, в прямо противоположную точку. Он может это сделать двумя способами:

а) плыть все время под углом к течению, чтобы результирующая скорость была всегда перпендикулярна берегу;

б) плыть прямо к противоположному берегу, а расстояние, на которое его снесет течением, пройти затем по берегу пешком. Плавает он со скоростью 2,5 км/ч, а передвигается пешком со скоростью 4 км/ч. Какой способ позволит переправиться быстрее?

Задача 4. Объясните, почему невключенный полотер сдвинуть с места очень тяжело, но легко сдвинуть включенный.

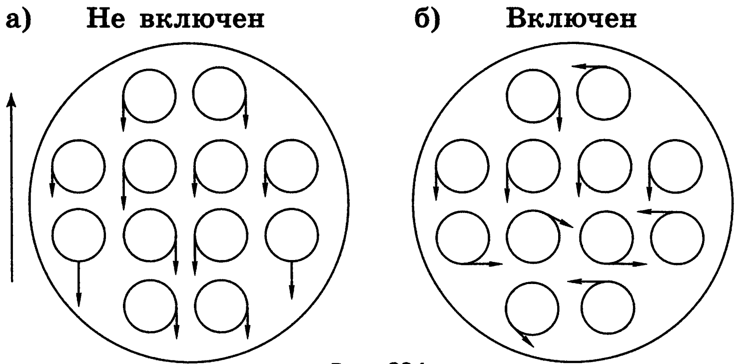


Рис. 294

Объяснения приведены на рисунке 294, *а*, *б* (большой стрелкой указано направление движения полотера).

Равнодействующая всех векторов, изображенных на рисунке 294, *а*, будет значительно больше, чем равнодействующая векторов, изображенных на рисунке 294, *б*.

Такой же подбор задач с практическим содержанием учителю следует иметь и для *отработки понятий*. Покажем это на примере понятий *косинуса* и *синуса угла*.

Задача 1. На наклонной плоскости лежит груз массой 10 кг. Определить, с какой силой давит этот груз на наклонную плоскость, если она наклонена к горизонтальной плоскости под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

Задача 2. Под действием какой силы маятник массой 100 г при отклонении его от положения равновесия на 45° начнет возвращаться к положению равновесия?

Задача 3. На прямолинейном железнодорожном пути находятся пункты A и B. Расстояние между A и B равно 470 м. Найти угол подъема пути на участке AB.

Задача 4. Наименьшая сила, удерживающая груз в 17 кг на наклонной плоскости, равна 8,5 кг. Найти угол наклона плоскости.

Задача 5. Определить силу, которая движет саночки по горизонтальной плоскости, если угол между веревкой и направлением движения равен 30°, а к веревке приложена сила: а) 8 кг; б) 5 кг; в) 10 кг.

Задача 6. Тело, брошенное из некоторой точки A горизонтальной плоскости с начальной скоростью V, направленной под углом к этой плоскости, упало в некоторой точке B той же плоскости. Вычислить расстояние AB. (Сопротивление воздуха не учитывать.)

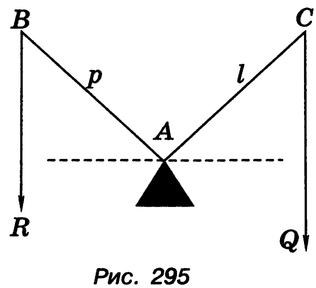


Рис. 295

Задача 7. При равновесии ломаного рычага BAC (рис. 295)

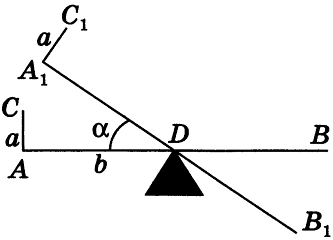


Рис. 296

на концы его плечей $AB=p$ и $AC=l$ действуют силы R и Q. Определить углы, образуемые плечами рычага с горизонтальной плоскостью, если плечо AC составляет угол, вдвое больший, чем плечо AB. (Массу рычага не учитывать.)

Задача 8. На конце рычага AB перпендикулярно к нему прикреплен стержень AC (рис. 296) длиной a см. Рычаг AB повернули на угол α, и он занял положение A_1B_1, причем $A_1D=$ $=AD=b$. На какой высоте от AB, считая по вертикали, находится теперь конец C стержня AC?

Задача 9. Две силы P и Q приложены к материальной точке. Найти угол между их направлениями, зная, что если увеличить этот угол вдвое, то величина равнодействующей не изменится.

Задача 10. Две силы $P=100$ кг и $Q=200$ кг приложены к материальной точке под углом $\alpha=50°$ одна к другой. Определить величину равнодействующей и углы, которые она составляет с силами P и Q.

Закрепление теоремы полезно строить так, чтобы требовалось ее использование для ответа на различные вопросы как из курса математики, так и из смежных дисциплин. Покажем это на примере теоремы о подобии прямоугольных треугольников, используемой при решении текстовых задач на движение, и теорем о площадях поверхностей и объемов тел вращения, используемых при решении задач архитектуры.

Задача. Два туриста вышли одновременно из поселков A и B и пошли по одной дороге навстречу друг другу. При встрече они рассчитали, что первый прошел на 3 км больше второго и что он придет в B через 2 ч 24 мин, если будет идти с той же скоростью. Второй же придет в A через 3,75 ч, если будет идти с той же скоростью. Чему равно расстояние между поселками A и B и чему равна скорость каждого туриста?

Решение

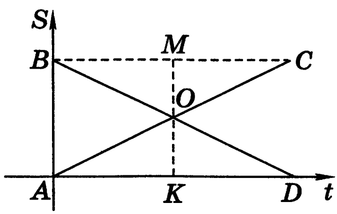


Рис. 297

Построим графики движения туристов в одной и той же системе координат (рис. 297).

По условию задачи имеем $KO-OM=3$, $MC=2{,}4$, $KD=3{,}75$, $BM=AK$. Согласно вопросу задачи мы должны найти AB, $\frac{OK}{AK}$, $\frac{OM}{BM}$. Из подобия треугольников BMO и OKD и подобия треугольников OMC и OKA следуют равенства

$\frac{MC}{AK}=\frac{MO}{OK}=\frac{BM}{KD}$. Учитывая, что $BM=AK$, получим $\frac{MC}{AK}=\frac{AK}{KD}$, или иначе $AK^2=$ $=MC\cdot KD$; $AK^2=2{,}4\cdot 3{,}75=9$; $AK=3$.

Из равенства $\frac{MC}{AK}=\frac{MO}{OK}$, с учетом того, что $MC=2{,}4$, $KD=3{,}75$, $AK=3$, $KO=$ $=OM+3$, будем иметь $\frac{2{,}4}{3}=\frac{OM}{OM+3}$, откуда $OM=12$. Тогда из равенства $KO=OM+3$ имеем $KO=12+3=15$.

Окончательно получим $AB=KO+$ $+OM=15+12=27$ (км), $V_1=\frac{OK}{AK}=\frac{15}{3}=$ $=5$ (км/ч) — скорость туриста, вышедшего из A, $V_2=\frac{OM}{MB}=\frac{12}{3}=4$ (км/ч) — скорость туриста, вышедшего из B.

Заметим, что такое решение задачи позволяет реализовать межпредметные связи между алгеброй, геометрией и физикой.

З а д а ч а. Известна формула для вычисления комфортности жилища: $k=$ $=\frac{36\pi V^2}{S^3}$, где k — изопериметрический коэффициент комфортности, V — объем, S — полная поверхность. Подсчитайте коэффициент комфортности восточноси-

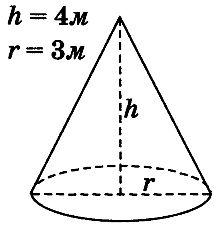


Рис. 298

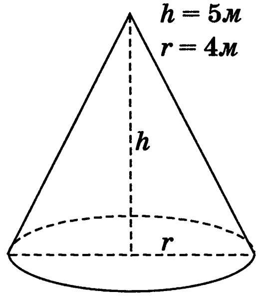


Рис. 299

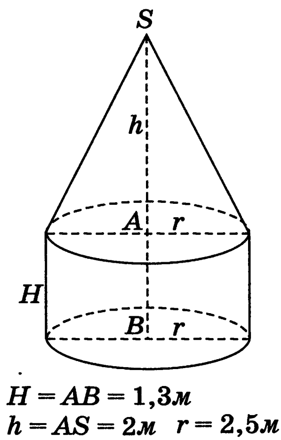


Рис. 300

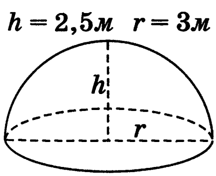


Рис. 301

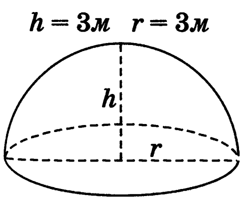


Рис. 302

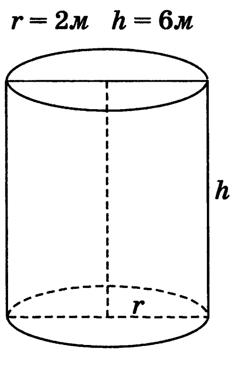


Рис. 303

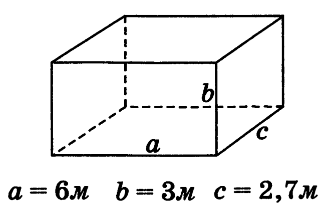


Рис. 304

бирского чума (рис. 298), яранги континентальных эскимосов Аляски (рис. 299), жилища береговых чукчей (рис. 300), жилища аборигенов Северной Австралии (рис. 301), жилища аборигенов Центральной Австралии (рис. 302), жилища народов кирди в Камеруне (рис. 303), нашего обычного жилища (рис. 304).

Заметим, что наибольшее значение k, равное 1, возможно лишь для сферы, причем не зависит от ее радиуса. Для других тел $k<1$, причем его величина зависит не от размеров, а от формы тела.

Приведем в таблице 16 значения изопериметрического коэффициента для некоторых тел.

Таблица 16

Тело	Шар	Икосаэдр	Додекаэдр	Октаэдр	Куб	Тетраэдр
Значение коэффициента	1,0000	0,8288	0,7547	0,6045	0,5236	0,3023

Теоремы об объемах тел вращения можно использовать и для решения такой необычной задачи: «Предположим, что вы захотели сварить себе кашу. Возьмите кастрюлю, насыпьте крупу и наклоните кастрюлю так, чтобы крупа закрыла половину дна. Заметьте точку на стене кастрюли, ближайшую к ее краю, до которой поднялась крупа. Пересыпьте крупу в другое место, а в эту кастрюлю налейте воды до полученной отметки. Всыпав теперь обратно крупу в кастрюлю, можете начинать варить кашу. Пока она варится, подумайте, почему отношение объема крупы к объему воды не зависит ни от количества взятой крупы, ни от размеров кастрюли».

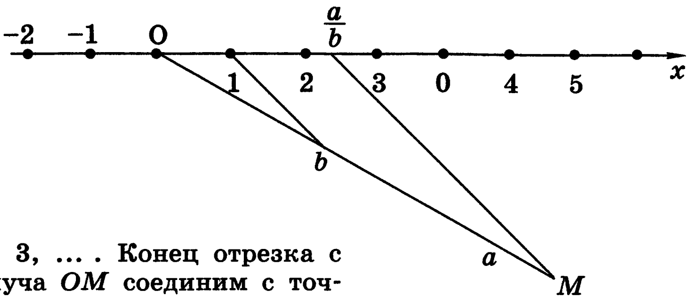
На факультативных занятиях можно предложить учащимся дополнительный материал, относящийся к телам вращения и имеющий прикладной характер.

Закрепление теоремы целесообразно строить так, чтобы происходило ее обобщение, если это, конечно, возможно в принципе. Таким образом, например, можно поступить при закреплении теоремы Фалеса. Обобщением этой теоремы может служить следующее утверждение: «Если на одной стороне угла отложить отрезки, находящиеся в заданном отношении, и через концы этих отрезков провести параллельные прямые так, чтобы они пересекли другую сторону угла, то на ней отложатся отрезки, находящиеся в том же отношении».

Эту обобщенную теорему целесообразно использовать для показа еще одного способа построения рациональных чисел на координатной оси. Опишем этот способ.

Пусть дана числовая ось (рис. 305). К ней из точки O под острым углом проведем луч OM, на котором от точки O отложим равные по длине отрезки, концы их пронумеруем по по-

Рис. 305



рядку: 1, 2, 3, ... Конец отрезка с номером b луча OM соединим с точкой 1 луча Ox, затем из конца отрезка с номером a на луче OM проведем прямую, параллельную отрезку с концами b и 1, до пересечения с Ox. Точка пересечения этой прямой с лучом Ox соответствует числу $\frac{a}{b}$.

Еще пример. Обобщением теоремы Пифагора будет такая теорема: «Если три подобных многоугольника построены на трех сторонах прямоугольного треугольника, то площадь многоугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей многоугольников, построенных на катетах».

Рассмотрим доказательство этой обобщенной теоремы Пифагора. Пусть на сторонах прямоугольного треугольника ABC построены произвольные, но подобные многоугольники, площади которых мы обозначим соответственно через S_a, S_b, S_c. Докажем, что $S_a + S_b = S_c$.

Для доказательства воспользуемся теоремой о том, что площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Согласно этой теореме будем иметь $S_a : S_b : S_c = a^2 : b^2 : c^2$.

Это равенство означает, что можно найти такое число k (коэффициент пропорциональности), при котором будут справедливы следующие равенства: $S_a = ka^2$, $S_b = kb^2$, $S_c = kc^2$. (*)

Применим к прямоугольному треугольнику ABC теорему Пифагора: $c^2 = b^2 + a^2$. Умножив обе части последнего равенства на k, будем иметь $kc^2 = ka^2 + kb^2$. Согласно равенствам (*) окончательно получаем $S_c = S_a + S_b$.

Предлагаем читателю доказать обобщенную теорему Пифагора для случая, когда на сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены полуокружности.

Приведем еще примеры обобщения ранее изученных фактов и теорем. В ныне действующем школьном курсе геометрии свойства треугольника, метрические соотношения в треугольнике, свойства тетраэдра и метрические соотношения в тетраэдре изучаются изолированно, без установления связей между ними, и это есть следствие линейного построения курса. Целесообразно же на основе линейно-концентрической организации курса увязать эти «плоскостную» и «пространственную» темы. Для этого при изучении темы «Тетраэдр» следует акцентировать внимание на ее аналогии с темой «Треугольник», предлагая такие задания: а) установите аналогию в способах построения треугольника и тетраэдра; б) сформулируйте предложение для тетраэдра, аналогичное теореме Пифагора для треугольников; в) обобщите известные вам метрические соотношения в треугольнике на случай тетраэдра и т. д. Таким же образом можно поступить и с темами «Окружность» и «Сфера», «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление», «Арифметическая прогрессия» и «Геометрическая прогрессия» и т. д. При таком изучении тем возможно осуществление глубоких сравнений, выдвижение гипотез и предположений, проведение широких обобщений, организация переноса знаний, умений и навыков в новую ситуацию, переосмысливание с новых, более общих позиций уже изученного материала.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере обобщения теоремы Пифагора на случай тетраэдра.

Пусть дан тетраэдр, у которого три грани — прямоугольные треугольники (рис. 306). Длины катетов этих треугольников соответственно равны: в треугольнике ADB — a и b, в треугольнике ADC — a и d, в треугольнике ACB — b и d. Докажем, что $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S_4^2$, где S_1, S_2, S_3 — площади граней, составляющих прямой трехгранный угол, и S_4 — площадь четвертой грани, лежащей против прямого трехгранного угла.

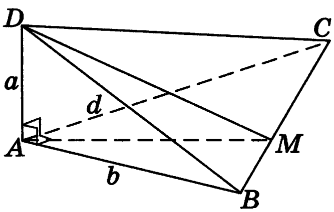


Рис. 306

$$S_1=\frac{1}{2}ab,\ S_2=\frac{1}{2}ad,\ S_3=\frac{1}{2}bd.\ (*)$$

Для того чтобы вычислить S_4, найдем гипотенузу треугольника ABC: $BC=\sqrt{b^2+d^2}$.

Высота основания, опущенная на гипотенузу BC, равна $AM=$ $=\dfrac{bd}{\sqrt{b^2+d^2}}$. Высоту четвертой грани найдем по теореме Пифагора:

$DM=\sqrt{a^2+\dfrac{b^2d^2}{b^2+d^2}}$. Тогда площадь $S_4=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+d^2}\sqrt{a^2+\dfrac{b^2d^2}{b^2+d^2}}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+d^2}\ \frac{\sqrt{a^2b^2+a^2d^2+b^2d^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}.\ S_4^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2d^2+b^2d^2\right). \qquad (**)$$

Согласно равенствам (*) имеем

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{4}a^2d^2+\frac{1}{4}b^2d^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2d^2+b^2d^2\right).$$

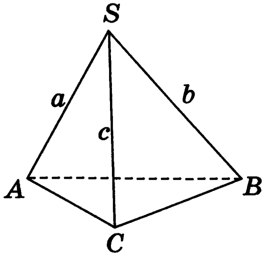
Так как правые части последнего равенства и равенства (**) равны, то равны и их левые части: $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S_4^2$.

Учащимся можно предложить и такую пространственную теорему Пифагора для проекций: «Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые три взаимно перпендикулярные прямые».

Аналогичное обобщение можно провести и для такой теоремы из курса геометрии 8 класса: «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы».

Для тетраэдра эта теорема будет формулироваться следующим образом: «Если трехгранный угол одного тетраэдра равен трехгранному углу другого тетраэдра, то объемы этих тетраэдров относятся как произведения ребер этих тетраэдров, выходящих из вершин этих трехгранных углов».

Переведем формулировку последней теоремы на язык чертежа и символов (рис. 307).



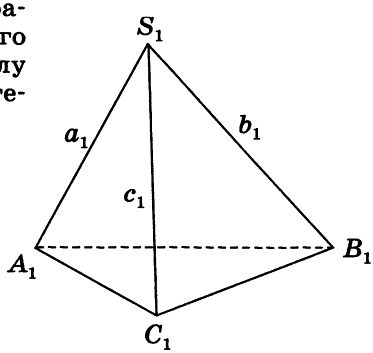


Рис. 307

Дано: $ABCS$; $A_1B_1C_1S_1$ — тетраэдры; $\angle Sabc = \angle S_1a_1b_1c_1$.

Доказать: $\dfrac{V_{ABCS}}{V_{A_1B_1C_1S_1}} = \dfrac{abc}{a_1b_1c_1}$.

Рассмотрим еще примеры.

1) В планиметрии для прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$, $CA = b$, $CB = a$, h — высота треугольника, опущенная из вершины C) доказывается равенство $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

Это равенство может быть обобщено на случай пространственного аналога треугольника — тетраэдра: «Если в тетраэдре $ABCE$ ребра EA, EB, EC перпендикулярны между собой и их длины соответственно равны a, b, c и h — высота тетраэдра, опущенная из вершины E, то $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$».

2) В планиметрии доказывается такая задача: «Даны две параллельные прямые. На одной из них произвольно взят отрезок AB, а на другой — точка C. Доказать, что площадь треугольника ABC не зависит от выбора точки C».

Эту задачу можно обобщить на случай трехмерного пространства, где аналогом треугольника выступает тетраэдр. Обобщенная задача будет формулироваться следующим образом: «Даны три параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости. На одной из них произвольно выбран отрезок AB, на двух других — точки C и D соответственно. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ не зависит от выбора точек C и D».

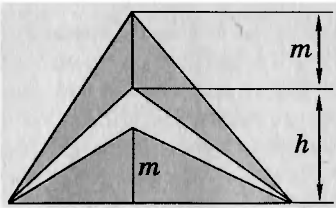


Рис. 308

3) В планиметрии рассматривается такая задача: «Как изменится площадь треугольника, если его высоту увеличить в m единиц?»

Решить задачу можно следующим образом: $S=\frac{1}{2}ah$, где a — основание треугольника, а h — высота треугольника.

$$S_1=\frac{1}{2}a(h+m)=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}am,\ S-S_1=\frac{1}{2}am.$$

С геометрической точки зрения увеличение площади данного треугольника равно площади треугольника с тем же основанием a и высотой m (рис. 308). Следовательно, площади заштрихованных частей равны между собой.

В стереометрии полезно рассмотреть аналог этой планиметрической задачи: «Дана пирамида. Как изменится ее объем, если высоту увеличить на m единиц?»

Решение

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H,\quad V_1=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}(H+m)=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H+\frac{1}{3}S_{\text{осн}}m.$$

Имеем $V_1-V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}m$, т. е. увеличение объема равно объему пирамиды с таким же основанием и высотой, равной m единиц.

Аналогичную задачу можно рассмотреть и для конуса.

4) В планиметрии известна изопериметрическая теорема: «Из всех плоских фигур, имеющих равные периметры, наибольшую площадь имеет круг».

Пусть S обозначает площадь фигуры, а L — длину периметра данной фигуры. Допустим, что данная фигура и круг радиуса r являются изопериметрическими (т. е. имеющими равные периметры): $L=2\pi r$. Тогда $S\leqslant\pi r^2$. Подставляя вместо r его выражение через L, $r=\frac{L}{2\pi}$, легко преобразовать неравенство: $\frac{4\pi S}{L^2}\leqslant 1$. Это частное зависит только от формы фигуры и не зависит от ее размеров. Действительно, если мы, не изменяя формы, увеличим линейные размеры фигуры в отношении 1 : 2, то периметр станет равен $2L$, а площадь $4S$, но частное $\frac{S}{L^2}$ остается неизменным, и это же верно для $\frac{4\pi S}{L^2}$ и для увеличения в любом отношении.

Плоскостную изопериметрическую теорему можно сформулировать и в таком виде: «Из всех плоских фигур равной площади наименьший периметр имеет круг».

В стереометрии аналогом этой последней формулировки теоремы будет такая теорема: «Из всех тел равного объема наименьшую поверхность имеет шар».

Изопериметрическое неравенство для объемных тел будет записано в таком виде: $\frac{36\pi V^2}{S^3} \leqslant 1$, где V — объем тела, а S — площадь полной поверхности тела.

Заметим, что эта стереометрическая теорема позволяет ответить на поставленный ранее вопрос: «Почему чайник круглой формы остывает медленнее, чем чайник такого же объема, но другой формы?» В связи с этой изопериметрической теоремой в пространстве учащимся будет небезынтересным узнать ее своеобразную трактовку, которую Д. Пойа приводит в своей книге: «К изопериметрической теореме нас могут привести совсем примитивные рассмотрения. Мы можем научиться ей у кота. Я думаю, вы видели, что делает кот, когда в холодную ночь он приготовляется ко сну: он поджимает лапы, свертывается и таким образом делает свое тело насколько возможно шарообразным. Он делает так, очевидно, чтобы сохранить тепло, сделать минимальным выделение тепла через поверхность своего тела. Кот, не имеющий ни малейшего намерения уменьшить свой объем, пытается уменьшить свою поверхность. Он решает задачу о теле с данным объемом и наименьшей поверхностью, делая себя возможно более шарообразным. Судя по всему, он имеет некоторое знакомство с изопериметрической теоремой» [108, с. 197].

Учитель математики — это прежде всего популяризатор своей науки, и данный пример, приведенный Д. Пойа,— отличный образец того, как это надо делать.

5) Планиметрическая задача: «Имеются два треугольника с равными основаниями. Построить треугольник, равновеликий объединению данных треугольников».

Решение

$S=\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2=\frac{1}{2}a(h_1+h_2)$, т. е. искомый треугольник должен иметь такое же основание, что и у исходных треугольников, а его высота должна быть равна сумме высот исходных треугольников.

Стереометрическая задача: «Два конуса с равными основаниями заменить одним конусом, равновеликим их объединению».

Решение

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H_1+\frac{1}{3}\pi R^2H_2=\frac{1}{3}\pi R^2(H_1+H_2).$$

Таким образом, искомый конус должен иметь такое же основание, а его высота должна быть равна сумме высот исходных конусов.

В связи с вопросом о равновеликости фигур подчеркнем, что было бы полезным (и особенно для учащихся, изучающих математику углубленно) провести сравнение некоторых вопросов равновеликости плоскостных и пространственных фигур.

Напомним прежде всего читателю, что две плоские фигуры равновелики, если равны их площади, и две пространственные фигуры равновелики, если равны их объемы.

Возникает вопрос: «Нет ли в пространстве аналога теореме Бойяи—Гервина, утверждающей, что два равновеликих многоугольника равносоставлены?», другими словами: «Будут ли два равновеликих многогранника равносоставлены?»

Этот вопрос вытекает из третьей проблемы Д. Гильберта (1862—1943, немецкий математик), которую он наряду с двадцатью двумя другими проблемами сформулировал 8 августа 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже. В его изложении эта третья проблема звучала так: «Существуют ли два таких тетраэдра с равными основаниями и равными высотами, которые никаким способом не могут быть разложены на конгруэнтные тетраэдры и которые также не могут быть дополнены конгруэнтными тетраэдрами до таких многогранников, для которых разложение на конгруэнтные тетраэдры возможно?» Сформулируем эту проблему кратко в виде такого вопроса: «Будут ли два равновеликих тетраэдра равносоставлены?»

В начале XX в. М. Ден (1878—1952, немецкий математик) дал отрицательное решение этой третьей проблемы Гильберта: он доказал, что существуют такие тетраэдры с равными основаниями и равными высотами, которые не равносоставлены. М. Ден доказал, что, для того чтобы равновеликие многогранники были равносоставлены, они должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям.

Теорема о том, что два равновеликих многогранника, вообще говоря, не будут равносоставлены, называется в математике теоремой Дена-Кагана (В. Ф. Каган — русский математик, 1869—1953).

Примером равновеликих многогранников, которые не равносоставлены, могут служить куб и равный ему по объему правильный тетраэдр.

Полезными для учащихся будут и примеры некоторых равновеликих многогранников, которые равносоставлены. Два таких многогранника, представляющие собой четырехугольные призмы с равными основаниями и равными высотами, показаны на рисунке 309.

Учащимся можно предложить доказать такие стереометрические теоремы о равновеликости:

а) Всякая наклонная призма равновелика прямой призме, основанием которой служит перпендикулярное сечение, а высотой — боковое ребро данной призмы.

б) Две призмы, имеющие одно и то же перпендикулярное сечение и одно и то же боковое ребро, равновелики.

в) Плоскость, проходящая через два противоположных ребра параллелепипеда, делит его на две равновеликие треугольные призмы.

г) Сечения, проведенные в двух пирамидах, имеющих равновеликие основания и одну и ту же высоту, параллельно основанию на одном и том же расстоянии от вершины, равновелики.

д) Две треугольные пирамиды, имеющие равновеликие основания и одну и ту же высоту, равновелики.

Учащимся можно предложить сформулировать на случай трехмерного пространства теоремы и задачи, которые аналогичны нижеследующим плоскостным теоремам и задачам:

а) Биссектрисы трех углов треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

б) Площадь круга равна площади треугольника, основание которого имеет ту же длину, что и окружность, и высота которого равна радиусу.

Рис. 309

в) Высота равнобедренного треугольника проходит через середину основания.

г) На сколько частей плоскость делится тремя прямыми?

д) Всякий выпуклый многогранник можно разбить на треугольники.

е) Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме длин его катетов.

Работа по обобщению планиметрических понятий и фактов на случай стереометрических может проводиться и в обратном направлении: задана задача на случай трехмерного пространства, а следует найти ее аналог на плоскости. Приведем примеры.

Задание: «Сформулируйте для треугольника задачи, аналогичные тем, которые сформулированы для тетраэдра».

а) На основании ABC треугольной пирамиды $OABC$ взята точка M, и через нее проведены прямые, параллельные ребрам OA, OB, OC и пересекающие боковые грани в точках A_1, B_1, C_1.

Докажите, что $\frac{MA_1}{OA}+\frac{MB_1}{OB}+\frac{MC_1}{OC}=1$.

б) Докажите, что в трехгранном угле против равных плоских углов лежат равные двугранные, а против большего плоского угла лежит больший двугранный угол.

в) Докажите, что существует сфера, проходящая через все вершины тетраэдра.

г) Каждое ребро треугольной пирамиды разделено на n равных частей. Через полученные точки проведены всевозможные плоскости, параллельные граням пирамиды. На сколько частей разделят пирамиду эти плоскости?

д) Пусть O — вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые. Луч OM образует с ребрами этого угла острые углы α, β, γ. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \geqslant 2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)$.

е) Сумма любых двух плоских углов трехгранного угла больше, чем третий плоский угол. Докажите.

ж) Какой из всех тетраэдров, вписанных в данную сферу, имеет наибольший объем?

з) Даны длины a, b, c трех ребер тетраэдра, проведенных из одной и той же вершины. Найдите максимум объема тетраэдра.

и) Если точка перемещается в плоскости основания правильной треугольной пирамиды и остается внутри этого основания, то сумма расстояний от этой точки до боковых граней остается постоянной. Докажите.

к) Объемы двух тетраэдров, имеющих общее ребро и равные двугранные углы при этом ребре, относятся как произведения площадей граней, образующих этот двугранный угол.

л) Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположной грани. Найдите отношение объема образованного таким образом параллелепипеда к объему данного тетраэдра.

м) Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найдите отношение объема образованного таким образом параллелепипеда к объему данного тетраэдра.

н) Найдите такую точку, которая, будучи соединена с вершинами данного тетраэдра, делила бы его на четыре равновеликих тетраэдра.

При раскрытии аналогий между фактами планиметрии и стереометрии целесообразно составить список пар таких понятий, которые сходны как в определениях, так и в свойствах:

точка — точка, прямая;
прямая — прямая, плоскость;
отрезок — отрезок, многоугольник;
луч — луч, полуплоскость;
угол — двугранный угол, трехгранный угол;
многоугольник — многогранник;
треугольник — тетраэдр, пирамида;
параллелограмм — параллелепипед;
квадрат — куб;
окружность — сфера и т. д.

Обобщение математических фактов может идти и в другом направлении: рассматриваются частные задачи, в решении которых выделяется то общее, что затем приводит к новой теореме. Рассмотрим пример, подтверждающий сказанное.

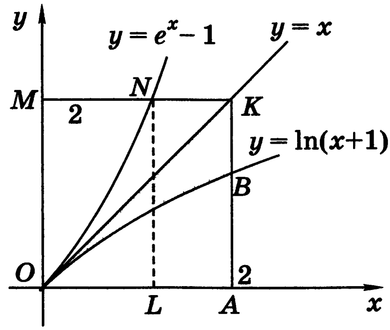


Рис. 310

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln(x+1)$, $y=x$, $x=2$ (рис. 310).

Решение

Площадь криволинейной трапеции OKB вычисляется с помощью формулы

$$S_{OKB}=S_{\Delta OKA}-S_{OBA}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-S_{OBA}=2-\int_0^2 \ln(x+1)\,dx. \qquad (1)$$

Вычислить интеграл $\int_0^2 \ln(x+1)\,dx$ учащиеся не могут. Поступим следующим образом. Найдем формулу, задающую обратную функцию для функции $y=\ln(x+1)$: $x+1=e^y$, $x=e^y-1$. Заменив x на y, а y на x, получим $y=e^x-1$. Построим график обратной функции в той же системе координат, что и график прямой функции (рис. 310).

Тогда криволинейная трапеция OBA при осевой симметрии относительно прямой $y=x$ отобразится на криволинейную трапецию ONM, площадь которой такая же, что и у фигуры OBA. Найдем координаты точек N и M. У точки M координаты (0; 2). Для нахождения координат точки N решим систему уравнений $\begin{cases} y=e^x-1, \\ y=2. \end{cases}$ Тогда координаты точки N таковы: (ln 3; 2).

$$S_{ONM}=S_{OMNL}-S_{ONL}=2\ln 3-\int_0^{\ln 3}(e^x-1)\,dx=2\ln 3-\int_0^{\ln 3}e^x\,dx+$$

$$+\int_0^{\ln 3}dx=2\ln 3-e^x\Big|_0^{\ln 3}+x\Big|_0^{\ln 3}=2\ln 3-(e^{\ln 3}-1)+(\ln 3-0)=$$

$$=2\ln 3-3+1+\ln 3=3\ln 3-2.$$

Окончательно имеем $S_{OKB}=2-(3\ln 3-2)=4-3\ln 3$ (кв. ед.).

Задача 2. Вычислить $\int_{-1}^{1}\arccos x\,dx$.

Решение

Значение интеграла численно равно площади криволинейной трапеции (рис. 311).

Если достроить эту трапецию до прямоугольника, стороны

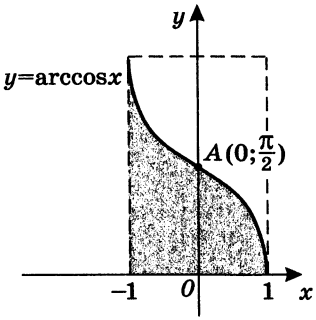


Рис. 311

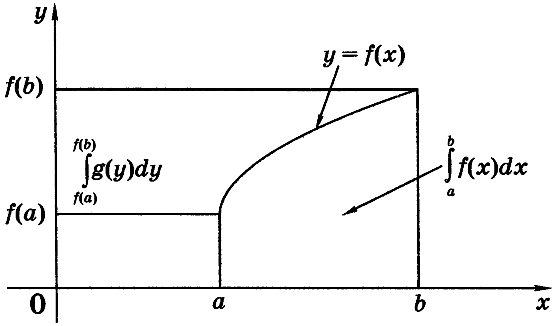


Рис. 312

которого заданы уравнениями $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=\pi$ (его площадь равна 2π), то из соображений симметрии относительно точки $A\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ ясно, что $\int\limits_{-1}^{1} \arccos x dx=\pi$.

Способ, которым мы находили площади заданных фигур, можно обобщить, что приведет нас к теореме, позволяющей вычислять «неудобные» интегралы проще, осуществляя для этого замену заданного интеграла интегралом от обратной функции. Суть этой теоремы вытекает из рисунка 312.

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx=b\cdot f(b)-a\cdot f(a)-\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy. \qquad (*)$$

По этой формуле могут быть вычислены, например, такие интегралы:

а) $\int\limits_2^8 \log_2 x dx$;

б) $\int\limits_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$;

в) $\int\limits_{0,5}^1 \sqrt{\frac{1}{x}-1}$;

г) $\int\limits_2^4 \arcsin\sqrt{\frac{1}{x}} dx$.

Покажем, как может быть вычислен интеграл $\int\limits_2^4 \arcsin\sqrt{\frac{1}{x}} dx$.

Получим формулу, задающую обратную функцию:

$$y=\arcsin\sqrt{\frac{1}{x}};\ \sqrt{\frac{1}{x}}=\sin y;\ \frac{1}{x}=\sin^2 y;\ x=\frac{1}{\sin^2 y}=g(y);$$

$$f(a)=f(2)=\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4};\ f(b)=f(4)=\arcsin\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{6}.$$

Тогда согласно формуле (*) будем иметь

$$\int\limits_2^4 \arcsin\sqrt{\frac{1}{x}} dx=4\cdot\frac{\pi}{6}-2\cdot\frac{\pi}{4}-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dy}{\sin^2 y}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\operatorname{ctg} y\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$= \frac{\pi}{6} + \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1.$$

Остановимся еще на одном вопросе. Зачастую учителя ограничиваются повторением формулировок теорем в том виде, в котором они давались при их первоначальном введении. Больше же пользы может оказать переформулирование теорем в виде указаний к их использованию.

Таким образом можно поступить, например, при изучении темы «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве» в курсе стереометрии 10 класса [29].

1. Если надо установить параллельность прямой и плоскости, то можно проверить, найдется ли в этой плоскости прямая, параллельная данной прямой.

2. Если надо установить параллельность двух плоскостей, то можно проверить:

а) найдутся ли в одной из плоскостей две прямые, соответственно параллельные двум пересекающимся прямым в другой плоскости;

б) найдется ли плоскость, перпендикулярная каждой из двух данных плоскостей;

в) найдется ли прямая, перпендикулярная каждой из двух плоскостей.

3. Если надо установить параллельность двух прямых в пространстве, то можно проверить:

а) будет ли одна из прямых параллельна плоскости, в которой лежит другая, и будут ли они принадлежать одной плоскости;

б) будет ли одна из этих прямых линией пересечения двух плоскостей, проходящих соответственно через другую из этих прямых и прямую, параллельную этой второй прямой;

в) найдется ли прямая, параллельная каждой из данных прямых;

г) будут ли данные прямые линиями пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью;

д) найдется ли плоскость, перпендикулярная каждой из данных прямых.

4. Если надо установить перпендикулярность прямой и плоскости, то можно проверить:

а) будет ли прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в данной плоскости;

б) будет ли эта прямая перпендикулярна прямой, параллельной данной плоскости;

в) будет ли прямая перпендикулярна плоскости, параллельной данной плоскости;

г) будет ли прямая перпендикулярна линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей, одна из которых данная, а в другой лежит эта прямая.

5. Если надо установить перпендикулярность двух плоско-

стей, то можно проверить, найдется ли в одной из плоскостей прямая, перпендикулярная другой плоскости.

6. Если надо установить перпендикулярность двух прямых в пространстве, то можно проверить:

а) перпендикулярна ли одна из прямых плоскости, в которой лежит другая прямая;

б) будет ли одна из данных прямых проекцией наклонной к плоскости, в которой лежит другая прямая, и перпендикулярна ли наклонная этой второй прямой;

в) будет ли одна из этих прямых наклонной к плоскости, в которой лежит другая прямая, и перпендикулярна ли проекция наклонной этой второй прямой.

Выше мы уже отмечали, что следует различать меру обученности (объем усвоенного школьником содержания образования) и характер обученности (определяется видом усвоенного содержания образования). Приведенный пример по переформулированию теорем иллюстрирует, каким образом мера обученности (в данном случае список изученных теорем) трансформируется в характер обученности (алгоритмизированные способы использования теорем).

Для закрепления признаков перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности двух плоскостей, параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей целесообразно предложить такие задачи:

1) Доказать, что боковые ребра правильной треугольной пирамиды перпендикулярны противолежащим ребрам основания.

2) Доказать, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости AB_1C (рис. 313).

3) Доказать, что если две плоскости α и β перпендикулярны и пересекаются по прямой p, то любой перпендикуляр в плоскости α к прямой p будет перпендикуляром к плоскости β.

4) Доказать, что основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ на боковую грань SBC, лежит на высоте SD этой грани (рис. 314).

5) Вне плоскости α расположена точка A. Доказать, что существует прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости α.

6) В основании треугольной пирамиды $ABCS$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$). Две боковые грани ABS и ACS перпендикулярны третьей грани BCS. Доказать, что все грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

7) В пространстве заданы плоскость α и прямая l. Доказать, что существует плоскость β, проходящая через прямую l и перпендикулярная плоскости α.

8) В пространстве заданы точка A и прямая l. Доказать, что существует плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой l.

9) Доказать, что через любые две скрещивающиеся прямые

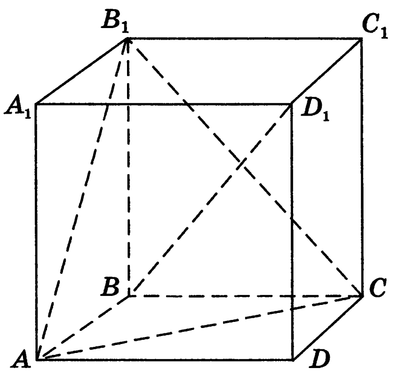


Рис. 313

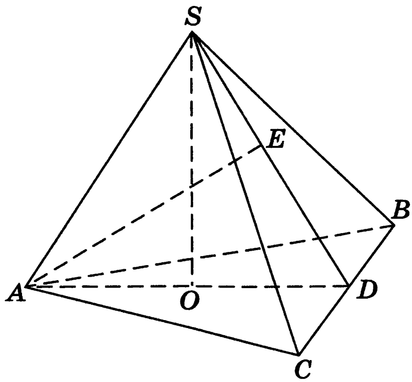


Рис. 314

можно провести параллельные плоскости;

любые две скрещивающиеся прямые можно пересечь третьей прямой, им перпендикулярной.

10) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Доказать, что плоскости AB_1C и A_1C_1D параллельны (рис. 315).

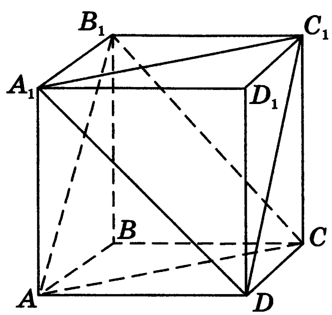


Рис. 315

С целью обобщения и систематизации темы «Объемы и площади поверхностей многогранников и тел вращения» целесообразно использовать задачи на комбинацию указанных тел, при этом эффективным будет решение задач по одному и тому же чертежу. Приведем пример такой задачи: «Имеется правильная треугольная пирамида, вписанная в шар. Используя данные, приведенные в таблице 17, вычислите остальные значения и заполните ее».

Таблица 17

Плоский угол при вершине пирамиды	Радиус шара	Объем пирамиды	Объем шара	Угол наклона бокового ребра к основанию	Сторона основания пирамиды
α	R				
			V	β	
α		V			
	R			β	
				β	α
α					α

Покажем на примере темы «Призмы и пирамиды», как можно организовать контроль знаний, умений и навыков учащихся не на уровне объема знаний, а на уровне характера усвоенных знаний. Для этого следует предложить вопросы:

1) Существует ли призма (пирамида), имеющая 55 ребер?

Ответ: нет, так как число ребер призмы (пирамиды) кратно трем (двум).

2) Какое количество данных достаточно, чтобы построить правильную n-угольную призму (пирамиду)?

Ответ: два.

3) Может ли у наклонной призмы боковой гранью являться прямоугольник?

Ответ: да.

4) В четырехугольной призме боковое ребро перпендикулярно стороне основания. Можно ли утверждать, что эта призма прямая?

Ответ: нет, она может быть и наклонной.

5) Имеется n-угольная призма (пирамида). Какое наибольшее число сторон может иметь ее сечение плоскостью?

Ответ: $n+2(n+1)$.

6) Сколькими данными определяется прямой (наклонный) параллелепипед?

Ответ: четырьмя (шестью).

7) Чему равна сумма величин всех плоских углов параллелепипеда?

Ответ: $24d$.

8) В какую точку проектируется высота пирамиды, у которой боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания?

Ответ: высота проектируется в центр окружности, вписанной в многоугольник основания.

9) В какую точку проектируется высота пирамиды, у которой боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания?

Ответ: высота проектируется в центр окружности, описанной вокруг многоугольника основания.

10) Что можно сказать о высоте пирамиды, у которой две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

Ответ: высота пирамиды совпадает с общим ребром перпендикулярных к основанию граней.

11) В какую точку проектируется высота пирамиды, у которой одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания?

Ответ: высота проектируется на сторону основания.

12) Верны ли следующие определения призмы:

а) призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы;

б) призмой называется многогранник, у которого две грани, называемые основаниями призмы, равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани — параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами основания;

в) многогранник, у которого две грани — равные n-угольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные n граней — параллелограммы, называется призмой;

г) призмой называется многогранник, образованный в процессе параллельного переноса многоугольника на вектор, не параллельный плоскости этого многоугольника?

Ответ: определения б) и г) верны, а) и в) неверны.

Систематизации учебного материала, переходу от меры обученности к характеру обученности будут способствовать и такие задачи, в которых следует установить равносильность различных утверждений. В качестве примера приведем две такие задачи:

1) В пирамиде даны три условия:

а) высоты боковых граней пирамиды равны;

б) боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания пирамиды под одним углом (при этом двугранные углы при основании пирамиды в некоторых случаях различны);

в) высота пирамиды образует одинаковые углы с боковыми гранями.

Докажите, что эти три условия равносильны, т. е. если выполняется одно из условий, то выполняются и остальные два.

2) Докажите, что для пирамиды следующие четыре условия равносильны:

а) боковые ребра одинаковы;

б) боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания;

в) боковые ребра образуют одинаковые углы с высотой пирамиды;

г) вокруг основания пирамиды можно описать окружность, а высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Проведем рассуждения для последней задачи.

Пусть выполняется первое условие, т. е. боковые ребра равны. Докажем, что в таком случае выполняются и все остальные три условия.

SO — высота пирамиды (рис. 316). Если первое условие выполнено, то это значит, что $SB = SA = SD = SC$. Но тогда $\triangle SBO = \triangle SAO = \triangle SDO = \triangle SCO$ (по гипотенузе и катету). Из этого будет следовать:

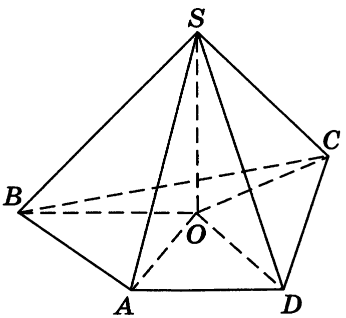


Рис. 316

— $\angle SBO = \angle SAO = \angle SDO = \angle SCO$, а это означает, что боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания;

— $\angle BSO = \angle ASO = \angle DSO = \angle CSO$, а это означает, что боковые ребра образуют одинаковые углы с высотой пирамиды;

— $OB = OA = OD = OC$, а это означает, что вокруг основания пирамиды можно описать окружность, а высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Аналогично следует поступить, поочередно принимая за исходное каждое другое условие.

Характер обученности ученик проявляет и в том случае, когда он одну и ту же задачу решает разными способами. Покажем это на примере такой задачи.

Задача. Требуется оградить прямоугольный участок земли площадью a^2 так, чтобы его периметр был наименьшим.

Первый способ. Пусть $x\,(x>0)$ — длина стороны прямоугольника, у которого периметр наименьший. Тогда длина смежной с ней стороны будет $\frac{a^2}{x}$. Периметр прямоугольника будет выражаться следующим равенством: $P(x) = 2\left(x + \frac{a^2}{x}\right)$. Найдем наименьшее значение $P(x)$, применяя производную. $P'(x) = 2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$, $x \in (0;\ +\infty)$.

Определим критические точки функции, для чего решим уравнение $P'(x) = 0$: $2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) = 0$, $x = a$, $x = -a$. Так как $a > 0$, то значение $x = -a$ не удовлетворяет смыслу задачи, значит, $x = a \in (0;\ +\infty)$ является единственной критической точкой на промежутке $(0;\ +\infty)$. Подвергнем ее исследованию на максимум или минимум. $P'(x) < 0$ при $0 < x < a$, $P'(x) > 0$ при $x > a$, а это значит, что $x = a$ — точка минимума.

Так как на промежутке $(0;\ +\infty)$ непрерывная функция $P(x)$ имеет одну экстремальную точку, то $P(a)$ будет наименьшим значением на этом промежутке.

Итак, наименьший периметр при заданной площади будет иметь квадрат.

Второй способ. Этот способ основан на выделении полного квадрата.

$$P(x) = 2\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = 2\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x}\cdot\frac{a}{\sqrt{x}} + \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2\right) + 4a =$$
$$= 2\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4a, \text{ где } x > 0,\ a > 0.$$

Видим, что при $x > 0$ значения функции $P(x)$ выражаются неравенством $P(x) \geqslant 4a$. Тогда при $x = a$ функция $P(x)$ принимает наименьшее значение, равное $4a$.

Третий способ. Обозначим полупериметр прямоугольника через $p(x)$. Пусть x — длина одной из его сторон, тогда длина смежной с ней стороны равна $-(p-x)$, где $0 \leqslant x \leqslant P$. Площадь прямоугольника по условию задачи равна a^2 и она может быть записана в виде следующего равенства: $a^2 = x(p-x)$. Откуда $x^2 - px + a^2 = 0$; $(x^2 - 2ax + a^2) + 2ax - px = 0$; $(x-a)^2 + x(2a-p) = 0$.

Последнее равенство верно лишь при $2a - p \leqslant 0$, т. е. при $p \geqslant 2a$. Следовательно, наименьшее значение полупериметра равно $2a$.

Подставив в уравнение $x^2 - px + a^2 = 0$ наименьшее значение p, получим уравнение $x^2 - 2ax + a^2$, откуда окончательно $x = a$.

Четвертый способ. Обозначим длины смежных сторон прямоугольника через x и y, а его полупериметр через p. Тогда $xy = a^2$. Чтобы найти наименьшее значение периметра прямоугольника площадью a^2, воспользуемся тождеством $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$.

Заменив в этом тождестве произведение xy на равное ему значение a^2, получим равенство $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4a^2$.

Из этого равенства видно, что выражение $(x+y)^2$ будет иметь значения, указанные неравенством $(x+y)^2 \geqslant 4a^2$. Итак, при $x - y = 0$, т. е. при $x = y$ полупериметр $p = x + y$ будет достигать своего наименьшего значения, равного $2a$. Таким образом, мы снова получили, что периметр прямоугольника площадью a^2 будет наименьшим в случае $x = y = a$.

Пятый способ. По условию $xy = a^2$, где x и y — длины смежных сторон прямоугольника. Предположим, что $x \neq y$. Пусть, например, $x = a + b$ $(b > 0)$, тогда $y = \frac{a^2}{a+b} > \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$. Вследствие того что $x = a + b$, а $y > a - b$, будем иметь $x + y > a + b + a - b = 2a$.

Пусть теперь $x = y = a$. В этом случае $x + y = 2a$. Имеем, что значения суммы $x + y$ задаются неравенством $x + y \geqslant 2a$, откуда следует, что наименьшее значение периметра прямоугольника с заданной площадью будет достигаться при $x = y = a$.

Шестой способ. Пусть x и y — длины смежных сторон прямоугольника, тогда $xy = a^2$. При $x = y = a$ $(a > 0)$ получаем $x + y = 2a$. Построим окружность с центром в точке O радиусом $AO = a$ (рис. 317). Имеем $AB = AO + OB = x + y = 2a$.

Пусть $x = y$. Построим на том же рисунке окружность с центром в точке O_1 и радиусом, равным длине отрезка O_1F, так, чтобы $EO \cdot OF = a^2$. Тогда $EO + OF = EF$, где $EO = x$, $OF = y$.

Из рисунка видно, что $EF > 2a$, так как EF — длина диаметра, а $2a$ — длина

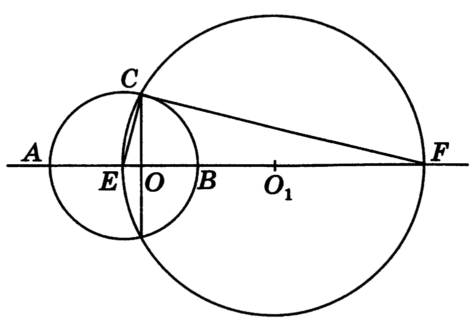


Рис. 317

хорды окружности (O_1, O_1F). Таким образом, мы имеем, что $x+y \geqslant 2a$, причем $x+y=2a$, когда $x=y=a$.

Трансформация меры обученности в характер обученности целесообразна и в курсе алгебры. Проиллюстрируем это на примере теорем о равносильности уравнений. Сформулируем сначала сами теоремы.

Теорема 1. Если над частями данного уравнения произвести тождественные преобразования, не меняющие область определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если к обеим частям данного уравнения прибавить одно и то же число или одно и то же выражение, имеющее смысл при всех значениях неизвестного из области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части данного уравнения умножить на одно и то же число, не равное нулю, или на одно и то же выражение, имеющее смысл и не равное нулю при всех значениях неизвестного из области определения этого уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 4. Если уравнение (1) равносильно уравнению (2), а уравнение (2) равносильно уравнению (3), то уравнение (1) равносильно уравнению (3).

Для того чтобы эти теоремы стали инструкцией к решению уравнений, целесообразно указать те преобразования, которые могут дать уравнение, неравносильное данному уравнению:

1) Замена в уравнении суммы логарифмов двух выражений логарифмом их произведения.

2) Замена в уравнении разности логарифмов двух выражений логарифмом их частного.

3) Сокращение дробей, входящих в уравнение, на выражение, содержащее неизвестное.

4) Умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

5) Деление обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

6) Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень.

7) Замена в уравнении корня четной степени из произведения произведением корней той же степени из каждого сомножителя.

8) Замена в уравнении корня четной степени из частного частным корней той же степени из числителя и знаменателя.

Закрепить указанные выше сведения о нарушении равносильности уравнений можно с помощью такого задания: «Дайте ответ на вопрос: что может произойти с корнями уравнения, если с обеими частями этого уравнения проделать следующее:

а) прибавить $\sqrt[4]{(x+4)(x-7)(x+1)}$; б) прибавить $\arcsin(4x+5)$;

в) прибавить $\log_{\frac{1}{3}}(4x^2-16)$; г) умножить на $\sqrt{x(x+9)}$; д) умножить на $\log_2(x^2-16)$; е) умножить на $\sin x+1$; ж) умножить на $\frac{1}{x^2-25}$; з) разделить на $\sqrt[3]{(x+5)(x-4)}$; и) прологарифмировать по основанию 2; к) возвести в куб; л) возвести в квадрат; м) извлечь корень четвертой степени; н) извлечь корень пятой степени; о) пропотенцировать по основанию 4; п) заменить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ дробью $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$; р) заменить $\operatorname{tg}2\alpha$ дробью $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; с) заменить $\operatorname{tg}\alpha$ дробью $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$; т) заменить $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ на $\operatorname{ctg}\alpha$?»

В качестве примера, подтверждающего целесообразность перевода теоремы из предмета изучения в средство изучения, рассмотрим теорему из курса алгебры о среднем геометрическом и арифметическом двух положительных чисел. Докажем, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ имеют место следующие неравенства:

1) $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$;

2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$;

3) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$;

4) $a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$;

5) $\frac{(a+b+c)^2}{3}\geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$;

6) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geqslant 2\sqrt{2}$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Докажем эти неравенства поочередно.

1) Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел a и b, b и c, a и c: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$; $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$; $a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$. Так как левая и правая части этих неравенств при $a>0$, $b>0$, $c>0$ положительны, то эти неравенства одинакового смысла можно почленно перемножить, в результате чего получим $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ac}$. Окончательно имеем $(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc$.

2) Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом для пар чисел a и b, $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$. Обе части неравенств положительны, неравенства одинакового смысла, значит, мы их можем почленно перемножить. Имеем $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{ab}}$. Преобразовав правую часть неравенства, окончательно получим $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

3) Запишем на основании указанной теоремы следующие неравенства для пар чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ и 1: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}}=$

$=2\sqrt{\frac{a}{c}}$; $\frac{c}{a}+1\geqslant 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot 1}=2\sqrt{\frac{c}{a}}$. Сложив полученные неравенства почленно, получим

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}}=2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right). \qquad (1)$$

Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом для чисел $\sqrt{\frac{a}{c}}$ и $\sqrt{\frac{c}{a}}$: $\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}}=2$.

Тогда неравенство (1) может быть записано в следующем виде: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\geqslant 4$. Откуда окончательно имеем $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$.

4) Запишем теорему для пар чисел a^4 и b^4, c^4 и d^4:

$$a^4+b^4\geqslant 2\sqrt{a^4b^4}=2a^2b^2;\ c^4+d^4\geqslant 2\sqrt{c^4d^4}=2c^2d^2.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 2(a^2b^2+c^2d^2). \qquad (2)$$

По теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем неравенство $a^2b^2+c^2d^2\geqslant 2\sqrt{a^2b^2c^2d^2}=2abcd$.

С учетом последнего неравенства неравенство (2) может быть записано следующим образом: $a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$.

5) Запишем в развернутом виде квадрат суммы трех чисел:

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+$$
$$+2ac+2bc+c^2=(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)+\frac{1}{2}(2ab+2bc+2ac)=$$
$$=(a^2+bc)+(b^2+ac)+(c^2+ab)+\frac{ab+ac}{2}+\frac{bc+ab}{2}+\frac{ac+bc}{2}.$$

Применим к каждой скобке (a^2+bc), (b^2+ca), (c^2+ab) теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом неотрицательных чисел. Будем иметь $a^2+bc\geqslant 2a\sqrt{bc}$, $b^2+ac\geqslant 2b\sqrt{ac}$, $c^2+ab\geqslant 2c\sqrt{ab}$.

Эту же теорему применим и к каждому из слагаемых:

$$\frac{ab+ac}{2}=\frac{ab}{2}+\frac{ca}{2};\ \frac{bc+ab}{2}=\frac{bc}{2}+\frac{ab}{2};\ \frac{ac+bc}{2}=\frac{ac}{2}+\frac{bc}{2};$$

$$\frac{ab}{2}+\frac{ca}{2}\geqslant a\sqrt{bc};\ \frac{bc}{2}+\frac{ab}{2}\geqslant b\sqrt{ac};\ \frac{ac}{2}+\frac{bc}{2}\geqslant c\sqrt{ab}.$$

Тогда мы можем записать:

$$(a+b+c)^2\geqslant 2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ac}+2c\sqrt{ab}+a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}=$$
$$=3a\sqrt{bc}+3b\sqrt{ac}+3c\sqrt{ab}.$$

Откуда окончательно имеем $\frac{(a+b+c)^2}{3}\geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$.

6) При $0<x<\frac{\pi}{2}$ значения $\frac{1}{\sin x}$ и $\frac{1}{\cos x}$ положительны, а зна-

чит, мы можем записать согласно теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом такое неравенство:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

Для $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ очевидно, что $0<\sqrt{\sin 2x}<1$, но тогда имеем $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geqslant 2\sqrt{2}$.

Аналогичным образом могут быть доказаны для положительных чисел a, b, c и такие неравенства:

а) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$;

в) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$;

б) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$;

г) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$;

д) $a^4+b^4+c^4\geqslant 2\sqrt{2}abc$;

е) $\frac{a^2}{(b-1)^2}+\frac{c^2}{(b-1)^2}+\frac{b^2}{(a-1)^2}+\frac{c^2}{(a-1)^2}\geqslant\frac{4\sqrt{abc}}{(a-1)(b-1)}$.

Покажем на двух примерах, каким образом теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом может быть использована при решении уравнений.

1) Решить уравнение $\sin\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi+x}=0$.

Все, кому предлагалось решить это уравнение, поступали по шаблону: искали значения аргумента функции синус, при которых значения самой функции равны нулю, и затем решали уравнение $\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi+x}=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Однако традиционный способ решения этого уравнения заводит в тупик.

Покажем оригинальное решение этого уравнения, для чего вначале преобразуем его левую часть: $\sqrt{\pi x}:\frac{\pi+x}{2}=\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Так как $x\geqslant 0$ (это следует из области определения заданного уравнения) и $\pi>0$, то имеем $\frac{\pi+x}{2}$ и $\sqrt{\pi x}$ — соответственно среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел π и x. По известной теореме имеем, что $\frac{\pi+x}{2}\geqslant\sqrt{\pi x}$, тогда $\sqrt{\pi x}:\frac{\pi+x}{2}\leqslant 1$.

Сами значения выражения $\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi+x}$ неотрицательны (видно, что числитель дроби неотрицателен, а знаменатель положителен).

Тогда имеем двойное неравенство $0\leqslant\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi x}\leqslant 1$, а так как $\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi+x}=\pi k$, то получаем $0\leqslant\pi k\leqslant 1$; $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{\pi}$. Учитывая, что $k\in\boldsymbol{Z}$, окончательно получаем $k=0$.

Итак, решением заданного уравнения является $x=0$.

2) Решить уравнение

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{x^2-3x^3+2x-1}=2x^2+2x+2.$$

Будем первое подкоренное выражение $3x^3+2x^2+2$ рассматривать как произведение $(3x^3+2x^2+2)\cdot 1$ и тогда по теореме о среднем можем записать: $\sqrt{(3x^3+2x^2+2)\cdot 1}\leqslant\frac{3x^3+2x^2+2+1}{2}$,

или $$\sqrt{3x^3+2x^2+2}\leqslant\frac{3x^3+2x^2+3}{2}. \qquad (1)$$

Рассуждая аналогично, мы можем записать для второго слагаемого следующее неравенство:

$$\sqrt{x^2-3x^3+2x-1}\leqslant\frac{x^2-3x^3+2x}{2}. \qquad (2)$$

Сложим почленно неравенства (1) и (2):

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{x^2-3x^3+2x-1}\leqslant\frac{3x^3+2x^2+3}{2}+\frac{x^2-3x^3+2x}{2}.$$

Откуда $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{x^2-3x^3+2x-1}\leqslant\frac{3x^2+2x+3}{2}$.

Так как левая часть заданного уравнения не больше $\frac{3x^2+2x+3}{2}$, то и правая часть его должна быть тоже не больше этого же выражения. Тогда $2x^2+2x+2\leqslant\frac{3x^2+2x+3}{2}$, откуда $x^2+2x+1\leqslant 0$, $(x+1)^2\leqslant 0$, а значит, $x=-1$.

Покажем, как теорему о среднем можно применить и к решению задач геометрии.

Задача 1. Прямоугольный параллелепипед задан тремя своими измерениями a, b, c. Можно ли подобрать такие числовые значения a, b, c, чтобы объем прямоугольного параллелепипеда был численно больше $\frac{1}{3}$ суммы объемов трех кубов с ребрами a, b, c?

Решение

Объем прямоугольного параллелепипеда можно записать в таком виде: $V=abc=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$. По теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех положительных чисел a^3, b^3, c^3 имеем $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}>\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=V$. Итак, имеем $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}>V$, что позволяет ответить на вопрос задачи отрицательно.

Задача 2. Задана площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда. Найти максимум его объема.

Решение

Пусть a, b, c — три измерения прямоугольного параллелепипеда, S — площадь полной поверхности, V — объем. Очевидно такое равенство: $S=2(ab+ac+bc)$. Объем будет выражаться формулой $V=abc$. Сумма трех чисел ab, ac, bc равна $\frac{S}{2}$, а их произведение равно V^2. По теореме о среднем мы можем записать: $V^2=(abc)^2<\left(\frac{ab+bc+ac}{3}\right)^3=\left(\frac{S}{6}\right)^3$.

Имеем $V<\sqrt{\left(\frac{S}{6}\right)^3}$. Если $ab=bc=ac$, что то же самое, что $a=b=c$, мы получим $V=\sqrt{\left(\frac{S}{6}\right)^3}$. Можно сделать вывод, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данной площадью поверхности куб имеет наибольший объем.

Полезно иметь в классе стенд «Изучаем тему», в котором следует поместить такой материал: перечень обязательных результатов обучения по теме; тематику рефератов и сочинений; список дополнительной литературы; перечень наглядных пособий, которые должны изготовить учащиеся; время проведения и содержание зачета по теме; образцы решения задач обязательного уровня; указания к изучению темы на продвинутом уровне.

Требования к зачету по теме могут быть следующие: знать определения; уметь строить чертежи; знать формулировки и уметь доказывать теоремы; знать лишь формулировки теорем; уметь решать определенные типы задач.

Заметим, что указанные выше требования к зачету не исчерпывают всех целей, которые должны быть достигнуты в ходе изучения курса в целом или определенной темы в частности, и охватывают лишь когнитивную (познавательную) область, к которой относится большинство целей образования, выдвигаемых в программах, учебниках и учителями. Следует отметить, что такое же положение и с определением уровня обязательных требований к учащимся по математике; перечень этих требований подчинен лишь предметным знаниям, умениям и навыкам.

Но при обучении любому учебному предмету, в том числе и математике, должны ставиться цели и из аффектной области (формирование эмоционально-личностного отношения к окружающему миру, интересов и склонностей и т. д.), и из психомоторной области (формирование навыков устной и письменной математической речи, развитие воображения, внимания, памяти и т. д.). Сказанное означает, что не одни только учебные цели должны находиться в центре внимания учебного процесса, а в первую очередь развитие личности школьника.

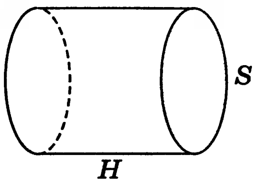
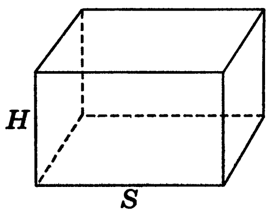
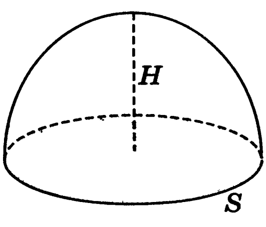
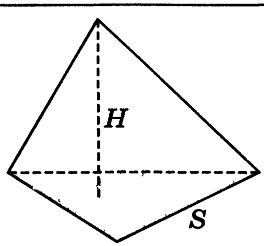
Как показывает практика, эффективной формой проведения зачета служит матричное тестирование. Такая форма проверяет в значительной степени характер обученности и, что очень важно, систематизированность и обобщенность знаний.

Приведем примеры таких матричных тестов (табл. 18—21).

Таблица 18

Вычисление объемов тел

Укажите формулу для нахождения объемов изображаемых тел.

Тест 1 Вариант 1	$\frac{1}{2}SH$	$\frac{2}{3}SH$	SH	$\frac{3}{2}SH$	$\frac{1}{3}SH$
					
					
					
					

Продолжение

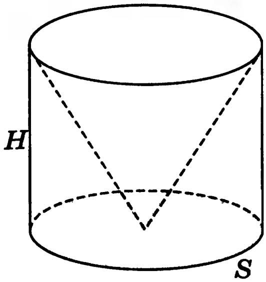
Тест 1 Вариант 1	$\frac{1}{2}SH$	$\frac{2}{3}SH$	SH	$\frac{3}{2}SH$	$\frac{1}{3}SH$
					

Таблица 19

Являются ли признаки, указанные по вертикали, достаточными для определения вида параллелепипеда?

Тест 2 Вариант 4	Прямой параллелепипед	Прямоугольный параллелепипед	Данный признак для параллелепипеда не может выполняться	Куб	Наклонный параллелепипед
Все грани имеют одинаковую площадь					
Все диагонали равны					
Диагональные сечения — прямоугольники					
Две смежные боковые грани — квадраты					
Только одна грань перпендикулярна основанию					

Таблица 20

Укажите величину закрашенного угла

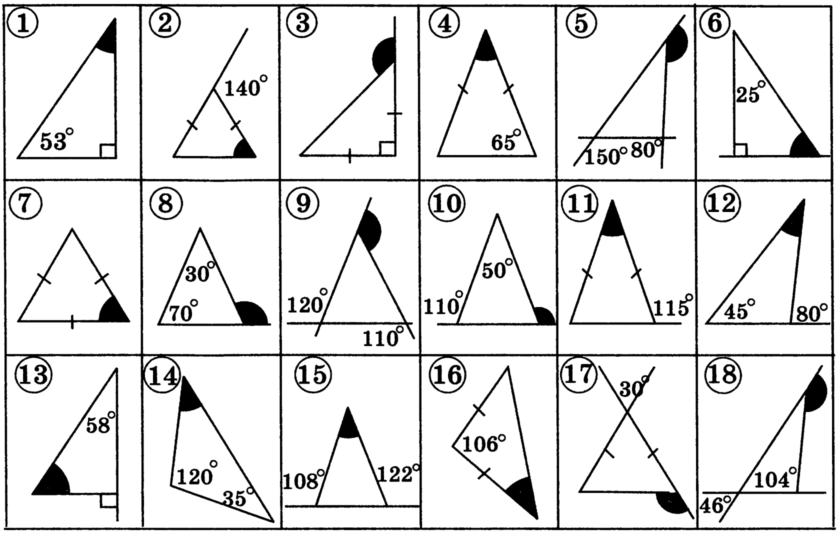


Таблица 21

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Прямые и плоскости / Плоскости	*AB*	*BC*	*EF*	*FC*	*KM*	*EK*	(*DFC*)	(*EFB*)	(*CBP*)
(*ABE*)									
(*ABC*)									
(*AED*)									
(*EKM*)									
(*ABP*)									

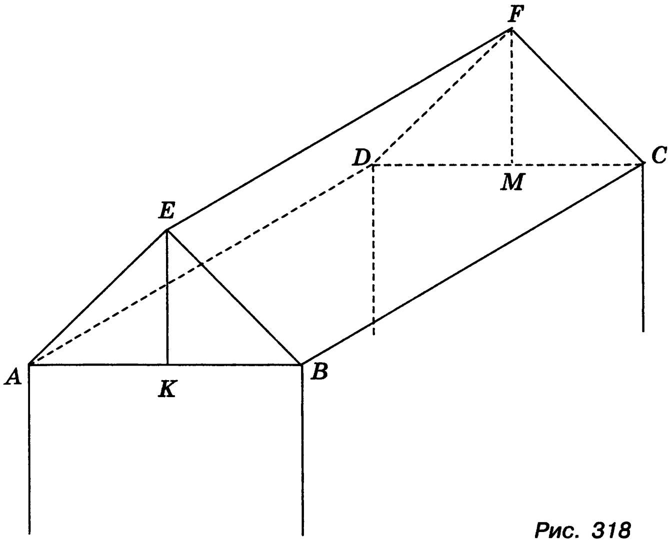


Рис. 318

Используя чертеж двускатной крыши (рис. 318), заполните таблицу 21, расставив в нужных местах слова «параллельна», «перпендикулярна», «пересекает», «принадлежит».

В заключение заметим, что успех в обучении учащихся доказательству теорем определяется не применением одного какого-нибудь приема или метода, а системой преподавания в целом. В значительной степени этот успех зависит от того, на каком уровне сформированы у учащихся такие интеллектуальные умения, как понимание предложенной задачи, умение сформулировать проблему, спланировать деятельность, выделить существенное в наблюдаемых явлениях, провести исследование, интерпретировать полученные данные, провести измерения в нестандартных ситуациях и пр.

Читатель при внимательном прочтении книги должен был обратить внимание на то, что и во введении, и в ее основной части, и здесь, в заключении, мы настойчиво подчеркивали важность работы по развитию учащихся с учетом их склонностей, способностей и интересов, а также отмечали важность формирования у них общеучебных умений и навыков и вооружения их учебно-познавательным аппаратом.

Литература

1. Айзенк Г. Ю. Проверьте свои способности/Г. Ю. Айзенк.— М.: Мир, 1972.
2. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10—11 кл. общеобразоват. учреждений/Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— М.: Просвещение, 2000.
3. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10—11 кл. общеобразоват. учреждений/А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 2000.
4. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений/Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— М.: Просвещение, 2001.
5. Алгебра: учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений/Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского.— М.: Просвещение, 2001.
6. Алгебра: учеб. для 7 кл. сред. шк./К. С. Муравин [и др.].— М.: Просвещение, 1994.
7. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений/Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— М.: Просвещение, 2001.
8. Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений/Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского.— М.: Просвещение, 2001.
9. Алгебра: учеб. для 8 кл. сред. шк./К. С. Муравин [и др.].— М.: Просвещение, 1995.
10. Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений/Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.— М.: Просвещение, 2001.
11. Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений/Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под ред. С. А. Теляковского.— М.: Просвещение, 2001.
12. Алгебра: учеб. для 9 кл. сред. шк./К. С. Муравин [и др.].— М.: Просвещение, 1993.
13. Александров А. Д. Геометрия для 8—9 классов: учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики/А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.— М.: Просвещение, 1991.
14. Александров А. Д. Геометрия для 10—11 классов: учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики/А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.— М.: Просвещение, 1999.
15. Артемов А. К. Состав и методика формирования геометрических умений школьников//Ученые записки Саратовского гос. ун-та.— Саратов: Изд-во Саратовского гос. ун-та, 1969.
16. Баранова Е. В. Виды учебных исследований по геометрии//Гуманизация и гуманитаризация математического образования в школе и вузе: Материалы Всероссийской научной конференции.— Саранск: Изд-во Мордовского госпединститута, 1998.
17. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10—11 кл. сред. шк./М. И. Башмаков.— М.: Просвещение, 1991.
18. Башмаков М. И., Резник Н. А. Развитие визуального мышления на уроках математики//Математика в школе.—1991.— № 1.
19. Бескин Л. Н. Стереометрия: пособие для учителей сред. шк./Л. Н. Бескин.— М.: Просвещение, 1971.
20. Богоявленский Д. Н. Психология усвоения знаний/Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская.— М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959.
21. Болтянский В. Г. Как устроена теорема?//Математика в школе.—1973.— № 1.
22. Бондаренко А. Ф. Формирование педагогических речевых умений//Советская педагогика.—1982.— № 3.
23. Брадис В. М. Ошибки в математических рассуждениях: пособие для учителей/В. М. Брадис, В. Л. Минковский, А. К. Харчева.— М.: Просвещение, 1967.

24. Бухвалова Э. О. О требованиях к речи педагога//Народное образование.—1982.— № 1.
25. Вилькеев Д. В., Габидуллин А. С. Метод объяснения и его значение в умственном развитии//Советская педагогика.—1979.— № 3.
26. Выготский Л. С. Мышление и речь: Психологические исследования/Л. С. Выготский.— М.; Л.: Соцэкгиз, 1934.
27. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения/ М. Гарднер; под ред. Я. А. Смородинского.— М.: Мир, 1971.
28. Гаткевич Д. И. О мышлении старшеклассника//Вопросы психологии познавательной деятельности.—1974.— № 3.
29. Геометрия: пробный учеб. для 10—11 кл. сред. шк./Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк.— М.: Просвещение, 1991.
30. Геометрия: учеб. для 7—9 кл. сред. шк./Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.— М.: Просвещение, 1990.
31. Головина Л. И. Индукция в геометрии/Л. И. Головина, И. М. Яглом.— М.: Физматгиз, 1961.
32. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы/И. С. Градштейн.— М.: Наука, 1973.
33. Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем: пособие для учителей/Я. И. Груденов.— М.: Просвещение, 1981.
34. Груденов Я. И. Методы усвоения математических предложений//Математика в школе.—1977.— № 6.
35. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике/Я. И. Груденов.— М.: Педагогика, 1987.
36. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов/В. В. Давыдов.— М.: Просвещение, 1972.
37. Далингер В. А. Анализ типичных ошибок, допускаемых в курсе алгебры и начал анализа//Математика в школе.—1998.— № 6.
38. Далингер В. А. Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1995—1996.
39. Далингер В. А. Геометрия помогает алгебре//Математика в школе.—1996.— № 6.
40. Далингер В. А. Как доказывать теоремы: Приемы и методы доказательства//Вечерняя средняя школа.—1991.— № 2.
41. Далингер В. А. Метод аналогии как средство обучения учащихся стереометрии: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998.
42. Далингер В. А. Методика обобщающих повторений при обучении математике: пособие для учителей и студентов/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во Омского пединститута, 1992.
43. Далингер В. А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001.
44. Далингер В. А. Методика обучения учащихся элементам математического анализа: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1997.
45. Далингер В. А. Методика реализации внутрипонятийных связей при обучении математике: кн. для учителя/В. А. Далингер.— М.: Просвещение, 1991.
46. Далингер В. А. Методика формирования пространственных представлений у учащихся при обучении геометрии: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во Омского пединститута, 1992.
47. Далингер В. А. Некоторые аспекты формирования познавательного интереса в процессе обучения математике. Воспитание учащихся при обучении математике: кн. для учителя/В. А. Далингер.— М.: Просвещение, 1987.
48. Далингер В. А. Некоторые рекомендации к изучению применения производной//Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в сред. шк./Сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов.— М.: Просвещение, 1992.

49. Далингер В. А. Об аналогиях в планиметрии и стереометрии//Математика в школе.—1995.— № 6.
50. Далингер В. А. Об одном способе доказательства//Математика в школе.—1993.— № 5.
51. Далингер В. А. Обучение учащихся доказательству теорем: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во Омского пединститута, 1990.
52. Далингер В. А. От педагогики авторитарной к педагогике авторитетной: Математические структуры и моделирование/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 2000.
53. Далингер В. А. Планиметрические задачи на построение: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999.
54. Далингер В. А. Проблемы гуманизации математического образования//Вечерняя средняя школа.—1996.— № 4.
55. Далингер В. А. Равновеликие и равносоставные плоские и пространственные фигуры: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1994.
56. Далингер В. А. Самостоятельная деятельность учащихся — основа развивающего обучения//Математика в школе.— 1994.— № 6.
57. Далингер В. А. Формирование визуального мышления у учащихся в процессе обучения математике: учеб. пособие/В. А. Далингер.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999.
58. Далингер В. А. Чертеж учит думать//Математика в школе.— 1990.— № 4.
59. Далингер В. А. Цели обучения математике в системе развивающего обучения: Целостность образовательного пространства: проблемы, перспективы развития/В. А. Далингер.— Иркутск: Изд-во Иркутского госпедуниверситета, 1999.
60. Далингер В. А. Арифметические прогрессии с переменными разностями/В. А. Далингер, О. О. Князева, О. И. Муравская.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998.
61. Далингер В. А., Костюченко Р. Ю. Предельная аналогия как эффективный метод обучения геометрии//Математика.—2000.— № 3: Прил. к газ. «Первое сентября».
62. Далингер В. А. Технология развивающего обучения математике учащихся начальных классов: кн. для учителя/В. А. Далингер, Е. Ф. Павлова.— Омск: Изд-во ОмГПУ, 1998.
63. Доблаев Л. П. Смысловая структура учебного текста и проблема его понимания/Л. П. Доблаев.— М.: Педагогика, 1982.
64. Дорфман А. Г. Оптика конических сечений/А. Г. Дорфман.— М.: Физматгиз, 1959.
65. Драбкина М. Е. Обучение доказательным рассуждениям в 7—9 классах: метод. рекомендации для учителей математики/М. Е. Драбкина, И. Л. Никольская.— М.: Изд-во НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, 1990.
66. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах: Популярные лекции по математике/Я. С. Дубнов.— М.: Наука, 1979.
67. Захаров А. И. Неврозы у детей/А. И. Захаров.— СПб.: Дельта, 1996.
68. Зив Б. Г. Задачи по геометрии для 7—11 классов/Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский.— М.: Просвещение, 1991.
69. Зорина Л. Я. Слово учителя в учебном процессе/Л. Я. Зорина.— М.: Знание, 1984.
70. Зыкова В. И. Очерки психологии усвоения начальных геометрических знаний/В. И. Зорина.— М.: Учпедгиз, 1955.
71. Каменюк Г. Ф. Контрольные действия учащихся при изучении доказательства математических утверждений в 6 классе. Активизация обучения математике: метод. рекомендации для студентов 3—4 курсов/Г. Ф. Каменюк.— Л.: Изд-во Ленинградского госпединститута, 1985.
72. Каган В. Ф. Очерки по геометрии/В. Ф. Каган.— М.: Изд-во МГУ, 1963.

73. Капиносов А. Н. Учись рассуждать: учеб. задания по математике для 5—6 кл./А. Н. Капиносов.— М.: Изд-во НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, 1986.
74. Киселев А. П. Элементарная геометрия: кн. для учителя/ А. П. Киселев.— М.: Просвещение, 1980.
75. Колягин Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе: общая методика/Ю. М. Колягин [и др.].— М.: Просвещение, 1980.
76. Ком М. Т. Использование графиков для решения задач на составление уравнений//Математика в школе.—1992.— № 4—6.
77. Коменский Я. А. Великая дидактика: избранные пед. соч./под ред. А. А. Красновского.— М.: Учпедгиз, 1955.
78. Комлева Н. К. Об одном приеме поиска решения задач на доказательство: Задачи как цель и средство обучения математике учащихся средней школы/Н. К. Комлева, Е. И. Лященко.— Л.: Изд-во Ленинградского госпединститута, 1981.
79. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников/В. А. Крутецкий.— М.: Просвещение, 1963.
80. Крыговская А. С. Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии//Математика в школе.— 1966.— № 6.
81. Куваев М. Р. Диалог как форма обучения доказательствам//Математика в школе.—1985.— № 6.
82. Курдюмова Н. А. О применении контрпримеров//Математика в школе.—1974.— № 6.
83. Лакатош И. Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы/И. Лакатош.— М.: Наука, 1967.
84. Левитас Г. Г. Современный урок математики — методы преподавания: метод. пособие для преподавателей ПТУ/Г. Г. Левитас.— М.: Высшая школа, 1989.
85. Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения/И. Я. Лернер.— М.: Педагогика, 1981.
86. Лернер И. Я. Поиск доказательств и познавательная самостоятельность учащихся//Советская педагогика.—1974.— № 7.
87. Лернер И. Я. Процесс обучения и его закономерности/И. Я. Лернер.— М.: Знание, 1980.
88. Литвиненко В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений: кн. для учителя/В. Н. Литвиненко.— М.: Просвещение, 1991.
89. Лунина Л. С. Обучение решению алгебраических задач геометрическим методом//Математика в школе.—1972.— № 4.
90. Лысова Н. М. Доказательство геометрических теорем методом от противного//Математика в школе.—1972.— № 2.
91. Марголите П. С. Подготовка учителя к доказательству теорем на уроке//Математика в школе.—1966.— № 2.
92. Маркушевич А. И. Об очередных задачах преподавания математики в школе: На путях обновления школьного курса математики/А. И. Маркушевич.— М.: Просвещение, 1978.
93. Метельский Н. В. Дидактика математики: общая методика и ее проблемы: учеб. пособие для вузов/Н. В. Метельский.— Минск: Изд-во БГУ, 1982.
94. Методика обучения математике с использованием системы учебного оборудования: пособие для учителей и студентов пед. ин-тов/ Е. В. Арутюнян, М. Б. Волович, Ю. А. Глазков, Г. Г. Левитас.— М.: Изд-во АПН СССР, 1984.
95. Методика преподавания математики в средней школе: общая методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов/Сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр.— М.: Просвещение, 1985.
96. Методика преподавания математики в средней школе: общая методика: учеб. пособие для студентов физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов/В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Санинский.— М.: Просвещение, 1980.

97. Мостовой А. Б. Различные способы доказательства в курсе геометрии восьмилетней школы: пособие для учителей/А. Б. Мостовой.— М.: Просвещение, 1965.
98. Мышкис А. Д. О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа//Математика в школе.— 1990.— № 6.
99. Никольская И. Л. Самостоятельная работа учащихся над текстом учебника геометрии: кн. для учителя/И. Л. Никольская.— М.: Просвещение, 1988.
100. Нурк Э. Р. Математика: 6 кл.: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений/Э. Р. Нурк, А. Э. Тельгмаа.— М.: Дрофа, 1996.
101. Орехов Ф. А. Графические лабораторные работы по геометрии/Ф. А. Орехов.— М.: Просвещение, 1964.
102. Орленко М. И. Решение геометрических задач на доказательство в средней школе/М. И. Орленко.— Минск: Учпедгиз, 1957.
103. Орлов В. В. Обучение решению стереометрических задач/В. В. Орлов.— Л.: Изд-во Ленинградского городского ИУУ, 1991.
104. Особенности обучения и психического развития школьников 13—17 лет/Е. М. Борисова, И. В. Дубровина и др.— М.: Педагогика, 1988.
105. Островский А. И. Геометрия помогает арифметике/А. И. Островский, Б. А. Кордемский.— М.: Физматгиз, 1960.
106. Писарев Д. И. Избранные педагогические сочинения/Д. И. Писарев.— М.: Педагогика, 1984.
107. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителей/Д. Пойа.— М.: Учпедгиз, 1959.
108. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения/Д. Пойа.— М.: Наука, 1975.
109. Покровский В. П. Учебные приемы развития геометрического воображения учащихся при изучении пропедевтического курса геометрии в средней школе//Межвузовский сборник научных трудов.— Владимир: Изд-во Владимирского пединститута, 1989.
110. Потапов М. К. Планиметрические задачи/М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко.— М.: Изд-во Московского госуниверситета, 1992.
111. Потоцкий М. В. Слово учителя в преподавании математики//Математика в школе.—1977.— № 1.
112. Преподавание алгебры и геометрии в школе: пособие для учителей/Сост. О. А. Боковнев.— М.: Просвещение, 1982.
113. Притуло Ф. Ф. Методика изложения геометрических доказательств в средней школе/Ф. Ф. Притуло.— М.: Учпедгиз, 1958.
114. Резник Н. А. Визуальная алгебра/Н. А. Резник.— СПб., 1997.
115. Рогановский Н. М. Упражнения для выяснения необходимости доказательства//Математика в школе.—1966.— № 4.
116. Ротенберг В. С. Мозг, обучение, здоровье/В. С. Ротенберг.— М.: Просвещение, 1989.
117. Рубинштейн С. Л. Проблемы общей психологии/С. Л. Рубинштейн.— М.: Педагогика, 1957.
118. Сатьянов П. Г. Задачи графического содержания при обучении алгебре и началам анализа//Математика в школе.—1987.— № 1.
119. Слепкань З. И. Методическая система развивающей функции обучения математике в средней школе: Диссертация в форме научного доклада на соискание ученой степени доктора пед. наук/З. И. Слепкань.— М.: Изд-во НИИ содержания и методов обучения АПН СССР, 1987.
120. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: метод. пособие/З. И. Слепкань.— Киев: Радяньска школа, 1983.
121. Смирнов А. А. Проблемы психологии памяти/А. А. Смирнов.— М.: Просвещение, 1966.

122. Столяр А. А. Зачем и как мы доказываем в математике: Беседы со старшеклассниками/А. А. Столяр.— Минск: Народна асвета, 1987.
123. Столяр А. А. Как математика ум в порядок приводит/А. А. Столяр.— Минск: Вышейшая школа, 1982.
124. Столяр А. А. Педагогика математики/А. А. Столяр.— Минск: Вышейшая школа, 1982.
125. Стратилатов П. В. О системе работы учителя математики: метод. рекомендации по организации учебного процесса/П. В. Стратилатов.— М.: Просвещение, 1984.— Сер. «Б-ка учителя математики».
126. Таварткиладзе Р. К. О путях совершенствования содержания и преподавания школьного курса математики/Р. К. Таварткиладзе, Н. Я. Виленкин.— Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985.
127. Талызина Н. Ф. Что значит знать?//Советская педагогика.— 1980.— № 8.
128. Теребилов О. Ф. Логика математического мышления/О. Ф. Теребилов.— Л.: Изд-во Ленинградского госуниверситета, 1987.
129. Токмазов Г. В. Сборник задач по алгебре для формирования исследовательских умений и навыков учащихся старших классов средней школы: экспериментальные материалы/Г. В. Токмазов.— М.: Прометей, 1991.
130. Туманов С. И. Поиск решения задачи/С. И. Туманов.— М.: Просвещение, 1969.
131. Туркина В. М. Формирование умения доказывать утверждения методом от противного в 6 классе: метод. рекомендации по алгоритмизации обучения математике в восьмилетней школе/В. М. Туркина.— Л.: Изд-во Ленинградского госуниверситета, 1984.
132. Ушинский К. Д. Руководство к преподаванию по «Родному слову»//Избр. пед. соч.— М.: Изд-во Наркомпроса РСФСР, 1945.
133. Ушинский К. Д. Собрание сочинений. Т. 8: Человек как предмет воспитания: Опыт педагогической антропологии.— М.; Л.: Изд-во АПН РСФСР, 1950.
134. Фетисов А. И. О доказательстве в геометрии/А. И. Фетисов.— М.: Гостехиздат, 1954.
135. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии/Л. М. Фридман.— М.: Просвещение, 1983.
136. Фридман Л. М. Учитесь учиться математике: кн. для учащихся/Л. М. Фридман.— М.: Просвещение, 1985.
137. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся/Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий.— М.: Просвещение, 1984.
138. Хабиб Р. А. К проблеме формирования знаний учащихся о логическом строении курса математики: Преподавание геометрии в 6—8 классах/Р. А. Хабиб.— М.: Просвещение, 1979.
139. Хитрина Н. А. О применении контрпримеров//Математика в школе.—1974.— № 6.
140. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 11 кл. сред. шк./И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев.— М.: Просвещение, 1991.
141. Шарыгин И. Ф. Наглядная геометрия: учеб. пособие для учащихся 5—6 кл./И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева.— М.: МИРОС: КПЦ «Марта», 1992.
142. Якиманская И. С. Восприятие и понимание учащимися чертежа и условия задачи в процессе ее решения: Применение знаний в учебной практике школьника/И. С. Якиманская.— М.: Изд-во АПН РСФСР, 1961.
143. Якиманская И. С. Знания и мышление школьника/И. С. Якиманская.— М.: Знание, 1985.— (Сер. «Педагогика и психология»).

Оглавление

Учебное издание

Серия «Библиотека учителя»

Далингер Виктор Алексеевич

Методика обучения учащихся доказательству математических предложений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова,* редактор *Н. Б. Грызлова,* младший редактор *Н. В. Ноговицина,* художественный редактор *О. П. Богомолова,* компьютерная графика *М. В. Бакулина, А. Г. Вьюниковская, О. В. Харламов,* технические редакторы *Е. Н. Зелянина, Н. Т. Рудникова,* корректоры *О. В. Крупенко, О. Н. Леонова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Сдано в набор 14.03.05. Подписано в печать 02.09.05. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16. Усл. кр.-отт. 16,6. Уч.-изд. л. 16,6. Тираж 5000 экз. Заказ № 14521.
Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфический комбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ

МАТЕМАТИКА

Методика обучения учащихся доказательству математических предложений

Эта книга для учителя математики, методиста, студента.
В ней рассмотрены:

- теоретические и практические основы обучения учащихся доказательству математических предложений
- вопросы, связанные с методикой формирования у учащихся умения доказывать теоремы
- различные приемы закрепления знаний, полученных в ходе доказательства теорем

ISBN 5-09-011498-6
9 785090 114981

ПРОСВЕЩЕНИЕ